

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Aspectos Algébricos de Sistemas Dinâmicos[†]

Antônio Endler

Dissertação realizada sob orientação do Prof. Dr. Jason Alfredo Carlson Gallas e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre, 4 de abril de 2002

[†]Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

*aos meus pais: Luiz Carlos Endler e Gerta Endler,
e à memória de meu avô, Vendelino Endler, und seine "ewiges werk" ...*

Agradecimentos

- *Aos meus pais pelo apoio de sempre.*
- *Ao meu orientador Dr. Jason Gallas, pela paciência, e ensinamentos dados.*
- *À TODOS os professores que tive em minha vida, um pouco de cada um deles está neste trabalho.*
- *Aos colegas/irmãos da sala M207.*
- *À minha grande amiga Professora Sandra Denise Prado, pelos conselhos acadêmicos e extra acadêmicos, que foram vitais para o término deste trabalho.*
- *Aos meus amigos de Imigrante/RS, minha cidade natal.*
- *À minha prima Cintea pelo apoio nos momentos difíceis.*
- *Ao amigo lusitano Pedro Lind, pela amizade e ajuda na edição de arquivos *.eps.*
- *À Casa do Estudante da UFRGS pelo alojamento durante os períodos de graduação e primeiro ano de mestrado.*
- *À sociedade brasileira que custeia essa Universidade.*
- *E à Amanda pelo carinho e amor dados nestes últimos meses.*

Resumo

Este trabalho trata o problema genérico da obtenção analítica exata das variedades algébricas que definem domínios de estabilidade e multiestabilidade para sistemas dinâmicos dissipativos com equações de movimento definidas por funções racionais.

Apresentamos um método genérico, válido para qualquer sistema dinâmico, que permite reduzir a análise de sistemas multidimensionais arbitrários à análise de um sistema unidimensional equivalente. Este método é aplicado ao mapa de Hénon, o exemplo paradigmático de sistema multidimensional, para estudar a estrutura aritmética imposta pela dinâmica das órbitas de períodos 4, 5, e 6, bem como seus domínios de estabilidade no espaço de parâmetros.

Graças à obtenção de resultados analíticos exatos, podemos explorar pela primeira vez as peculiaridades de cada um dos períodos mencionados. Algumas das novidades mais marcantes encontradas são as seguintes:

*Para período 4, encontramos um domínio de multiestabilidade caracterizado pela coexistência de duas órbitas definidas em corpos algébricos distintos. Observamos a existência de discontinuidades na dinâmica simbólica quando os parâmetros são mudados adiabaticamente ao longo de circulações fechadas no espaço de parâmetros e explicamos sua origem algébrica. Publicamos tais resultados em dois artigos: *Physica A*, 295, 285-290(2001) e *Physical Review E*, 65, 036231 (2002).*

Para período 5, obtivemos a variedade algébrica que define o “camarão” (shrimp) característico, obtemos uma expressão analítica para todas as órbitas de período 5, classificamos todas as singularidades presentes no espaço de parâmetros e analisamos todas as mudanças que ocorrem ao circular-se em torno de tais singularidades.

Para período 6, da expressão analítica que fornece todas as órbitas, encontramos um resultado muito surpreendente, o mais notável desta dissertação: a possibilidade de coexistência de órbitas reais e complexas estáveis, para valores reais dos parâmetros físicos. Resultados preliminares parecem indicar serem tais órbitas complexas uma espécie de órbitas fantasmas, com semelhanças as órbitas encontradas por Gutzwiller para sistemas Hamiltonianos (não-dissipativos).

Abstract

This work deals with the generic problem of obtaining analytically and exactly the algebraic varieties which define stability and multistability domains for dissipative dynamical systems having equations of motion given by rational functions.

We present a generic method, valid for any dynamical system, which allows to reduce the analysis of arbitrary multidimensional systems to the analysis of an equivalent unidimensional system. The method is applied to the Hénon map, paradigmatic example of multidimensional system, to investigate the arithmetic structure imposed by the dynamics of orbits of periods 4, 5 and 6, as well as their stability domains in parameter space.

Thanks to the exact analytical results, we can exploit for the first time the peculiarities of each one of the periods mentioned. Some of the more remarkable novelties found are as follows:

*For period 4, we find a stability domain characterized by the coexistence of two orbits defined in distinct algebraic fields. We observe the existence of discontinuities in the symbolic dynamics when parameters are varied slowly along closed circulation paths in parameter space and explain their algebraic origin. These results were published in two papers: *Physica A*, **295**, 285-290(2001) and *Physical Review E*, **65**, 036231(2002).*

For period 5, we obtained the algebraic variety which defines the characteristic “shrimp”, obtained an analytical expression for all period 5 orbits, classified all singularities present in parameter space and analyzed all changes which occur when circulating around these singularities.

For period 6, from the analytical expression which parameterizes all orbits we found a remarkable result, the most surprising of the dissertation: the possibility of coexistence of stable real and complex orbits, for real values of the physical parameters. Preliminary result seem to indicate that such complex orbits are a sort of ghosts orbits, similar to the orbits found by Gutzwiller for Hamiltonian (non-dissipative) systems.

Sumário

1	Introdução	1
2	Os casos conhecidos: períodos 1, 2 e 3	3
2.1	Introdução	3
2.2	As equações orbitais	4
2.2.1	Período 1	4
2.2.2	Período 2	5
2.2.3	Período 3	7
2.3	Equação de autovalores	11
2.4	Variedades	12
2.4.1	Período 1	12
2.4.2	Período 2	12
2.4.3	Período 3	12
3	Teoria Geral para Períodos Arbitrários	14
3.1	A Equação Orbital	14
3.2	Matrizes de Diferenças	14
3.3	As Decomposições dos Coeficientes	21
3.3.1	O mecanismo das <i>Decomposições</i>	24
3.3.2	Sistema Linear nas Decomposições	24
3.4	Equação de Autovalores	26
3.5	A correspondência entre os pontos orbitais e o parâmetro σ	27
3.6	Equações Fundamentais	28
4	As Equações Fundamentais para os Períodos: 4, 5 e 6	29
4.1	Equações Orbitais	29
4.1.1	Período 4	29
4.1.2	Período 5	29
4.1.3	Período 6	30
4.2	Equações Paramétricas	31
4.2.1	Período 4	32
4.2.2	Período 5	32
4.2.3	Período 6	33
4.3	Equações de Autovalores	34
4.3.1	Período 4	34
4.3.2	Período 5	34
4.3.3	Período 6	34

5	Estudo Detalhado dos Períodos: 4, 5 e 6	35
5.1	Introdução	35
5.2	Período 4	35
5.2.1	Os Pontos Orbitais	35
5.2.2	Fronteiras de Estabilidade	36
5.2.3	Propriedades do Espaço de Parâmetros	38
5.2.4	A Cúspide	40
5.3	Período 5	44
5.3.1	Bifurcações Tangentes	44
5.3.2	Variedades (Domínios de Estabilidade)	45
5.3.3	Cúspides	47
5.4	Período 6	50
5.4.1	Equação de bifurcação	50
5.4.2	Cúspides	53
5.4.3	O caso $b = 1$	56
5.4.4	Estudo do caso $b = -1$ (Limite “Hamiltoniano”)	57
5.4.5	Órbitas Complexas Estáveis para Parâmetros Reais	59
5.5	O Fator \mathcal{W}_k	65
6	Circulações no Espaço de Parâmetros	66
6.1	Introdução	66
6.2	Procedimentos Numéricos	66
6.3	Circulações em Torno de Estruturas de Período 4	68
6.3.1	As Órbitas de Período 4 para $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{2}, \mathbf{0})$	68
6.3.2	A Circulação e Resultados	70
6.3.3	Considerações Algébricas	72
6.4	Circulações em Torno de Estruturas de Período 5	76
6.4.1	As Órbitas de Período 5 para $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{2}, \mathbf{0})$	76
6.4.2	Resultados de Algumas Circulações	79
6.5	Circulações em Torno de Estruturas de Período 6	82
6.5.1	As Órbitas de Período 6 para $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{2}, \mathbf{0})$	82
6.5.2	Algumas Circulações e suas Implicações	87
7	Conclusões	90
A	Revisão sobre Funções Simétricas	92
A.1	Funções Simétricas Elementares	92
A.2	Relações entre as Raízes e os Coeficientes de um dado Polinômio	92
A.2.1	O Teorema Fundamental das Funções Simétricas	93
A.3	Discriminantes	93
A.4	As Relações de Girard — Newton	94
B	Coeficientes de a^n da variedade $W_5(a, b; \lambda)$	96
C	Bifurcações Tangentes e de Dobramento de Período para o Período 5	102
C.1	Bifurcações Tangentes	102
C.2	Bifurcações de Dobramento de Período	103

D	Bifurcações Tangentes e de Dobramento de Período para o Período 6	106
D.1	Bifurcações Tangentes	106
D.2	Bifurcações de Dobramento de Período	109
E	Método de Newton Aplicado ao Mapa de Hénon	115
E.1	O Processo de Derivação para o Mapa de Hénon	116
F	Trabalhos Publicados	120
	Referências	121

Capítulo 1

Introdução

Um problema de importância capital no estudo da dinâmica caótica é o de especificar-se partições para a dinâmica simbólica em dimensões maiores do que um. Sabe-se que o conjunto infinito das órbitas periódicas imersas no conjunto invariante caótico fornece informação suficiente para estimar-se a chamada ‘partição geradora’ da dinâmica. Entretanto, a extração desta informação é uma tarefa muito difícil tecnicamente e recentemente vem sendo assunto de inúmeros trabalhos[1]–[12]. O conhecimento das partições geradoras é crucial para compreender-se a evolução de sistemas multi através da codificação de trajetórias arbitrárias como uma seqüência infinita de símbolos.

As partições são chamadas de “geradoras” se elas não atribuem a mesma seqüência de símbolos a órbitas diferentes. Uma comparação das várias partições geradoras possíveis para o modelo tradicionalmente investigado, o *mapa de Hénon*[16], definido pelas equações:

$$x_{t+1} = a - x_t^2 + by_t, \quad (1.1a)$$

$$y_{t+1} = x_t, \quad (1.1b)$$

foi publicada por Eisele[13], onde as dificuldades de cada uma delas são discutidas em detalhe. Em geral, sabemos construir partições geradoras apenas para os sistemas mais simples, a saber, sistemas unidimensionais uniformemente hiperbólicos. Mesmo para o caso de mapas dissipativos bidimensionais, não se conhece, até hoje, um método sistemático eficiente para construir-se partições geradoras, em geral.

Vários procedimentos foram propostos para codificar uma dada trajetória no espaço de fase[1]–[13]. Um método bastante usado para de obter-se partições utiliza-se do conceito de *tangências homoclínicas*[14], isto é, pontos no atrator onde as variedades estáveis e instáveis são paralelas. A idéia básica é que a codificação binária atribuída a cada órbita periódica permaneça inalterada quando os parâmetros do sistema dinâmico são variados suavemente. Um aspecto central deste método é a identificação de algum parâmetro p_h tal que a dinâmica correspondente seja caracterizada por uma ferradura de Smale completa. A codificação de cada órbita periódica para um parâmetro arbitrário p é então obtida deformando-se suavemente a órbita desde p_h até o valor p desejado.

O procedimento acima, puramente topológico, tem sido utilizado até aqui com limitações, havendo inúmeros problemas práticos na sua implementação, mesmo no caso paradigmático simples do mapa de Hénon, exemplo onde todas propostas tem sido testadas[13].

A presente dissertação tem por objetivo explorar alguns aspectos preliminares necessários para a tentativa de trilhar um caminho radicalmente novo no assunto, que é o uso de um procedimento eminentemente algébrico, não topológico. A motivação básica para desenvolver um procedimento algébrico é bastante simples: nos trabalhos básicos de Riemann e Weierstrass, onde discutem

as propriedades básicas das superfícies definidas por curvas algébricas, vê-se claramente que circulações suaves genéricas sobre tais curvas não conduzem a mudanças suaves nas propriedades topológicas. Um exemplo claro disto é o de uma superfície cúbica. Para tais superfícies, Thom demonstrou na sua “teoria das catástrofes” [43] a existência genérica de mudanças abruptas (“descontinuidades”) mesmo ao variar-se suavemente parâmetros da superfície.

Para o mapa de Hénon tem-se na literatura uma indicação indireta da existência de mudanças abruptas. De fato, ao propor e estudar o estruturamento de “caixas-encaixadas” Mira[15] menciona incidentalmente que “Existe um conjunto de caixas tais que começando-se de uma caixa ao longo do eixo $b = 0$ pertencendo a este conjunto, e seguindo-se corretamente uma trajetória contínua apropriada na espaço (a, b) [de parâmetros], é possível atingir-se uma caixa diferente ao longo de $b = 0$ ”.

Mais tarde, Hansen[24] e Giovannini e Politi[39] investigaram uma órbita específica de período 6 do mapa de Hénon que, quando seguida ao longo de trajetórias fechadas no espaço de parâmetros, é transformada numa órbita diferente, demonstrando assim a existência inevitável de ambigüidades na codificação simbólica. Tais transformações entre órbitas diferentes significam que em algum lugar ao longo da deformação adiabática, a codificação simbólica da órbita tem que ser modificada descontinuamente de modo a poder fornecer a codificação final.

O exemplo considerado nas referências [24] e [39], obtido numericamente e considerando apenas duas órbitas [do conjunto total contendo 9 órbitas possíveis], foi apresentado como um exemplo de impossibilidade prática de ter-se uma codificação topológica, baseada nas tangências homoclínicas, sem ambigüidades. Mas não se considerou nem a totalidade de órbitas, das singularidades e das circulações possíveis no espaço de parâmetros. Mais ainda, não se tentou explorar a possibilidade de usar-se justamente a ocorrência de descontinuidades para verificar-se a possibilidade do uso de uma codificação nova, algébrica *ab initio*.

O presente trabalho explora em detalhes os aspectos algébricos de um sistema dinâmico multidimensional prototípico, o mapa de Hénon, visando compreender-se de que modo: (i) ocorre a proliferação de singularidades à medida que o período aumenta, (ii) qual a interconexão algébrica existente entre conjuntos de órbitas isoperiódicas, (iii) que tipo de assinatura algébrica pode servir como um bom rótulo para codificar órbitas de modo a poder-se gerar uma ‘gramática’ que permita explorar o chamado ‘esqueleto das órbitas periódicas’ mais eficientemente.

Antes de passar para a parte mais específica deste trabalho, gostaríamos de observar que, mais do que um simples e popular ‘campo de testes’ na literatura, sob certas condições bem razoáveis, o mapa de Hénon representa sistemas físicos reais como, por exemplo, um oscilador harmônico perturbado com um acoplamento não-linear ao termo de perturbação [41], ou ainda, como em modelos de laser de quatro níveis com perdas moduladas [32]. Existem também estudos de versões quânticas do mapa de Hénon[42].

O capítulo 2 apresenta uma breve revisão dos casos conhecidos na literatura, com o intuito de, uma vez introduzidas a linguagem e a notação, obter de modo sistemático, via formalismo algébrico, os mesmos resultados. Essa sistemática mostra-nos como se pode reduzir todo problema multidimensional a um problema unidimensional equivalente bem como, resolvê-lo. Um procedimento genérico para tanto é apresentado no capítulo 3. O capítulo 4 usa os algoritmos obtidos no capítulo 3 para obter, pela primeira vez, equações analíticas exatas para órbitas de períodos 4, 5 e 6. O capítulo 5 trata da exploração das expressões analíticas obtidas no capítulo 4 apresentando expressões para os domínios de estabilidade dos períodos 4, 5 e 6 bem como classificando singularidades e investigando questões de topologia conectadas com a dinâmica simbólica. O capítulo 6 trata das circulações no espaço de parâmetros e das influências da topologia na relação algébrica entre órbitas. No capítulo 7 apresentamos as conclusões gerais e comentamos alguns problemas em aberto que merecem estudo adicional. Uma série de resultados complementares são apresentados nos Apêndices.

Capítulo 2

Os casos conhecidos: períodos 1, 2 e 3

Este capítulo apresenta uma breve revisão da obtenção dos resultados analíticos exatos para os períodos 1, 2 e 3. Tais resultados já foram amplamente abordados na literatura [19, 20, 21], porém não sistematicamente. Nossa reformulação tem como objetivo principal mostrar que a obtenção analítica de todos resultados pode ser sistematizada de modo a poder ser efetuada quase que automaticamente por computadores. A reformulação serve também para introduzir a notação e motivar o algoritmo geral apresentado no próximo capítulo.

2.1 Introdução

Desejamos determinar as variedades algébricas que definem a extensão dos domínios de estabilidade para movimentos periódicos com período k arbitrário do *mapa de Hénon*

$$x_{t+1} = a - x_t^2 + b y_t, \quad (2.1a)$$

$$y_{t+1} = x_t. \quad (2.1b)$$

Tais variedades são muito importantes, pois é sobre elas que, para valores particulares dos autovalores que caracterizam a estabilidade do sistema, encontramos as *fronteiras de bifurcação* onde ocorrem mudanças do comportamento físico macroscópico.

Antes de prosseguir, em vez de trabalhar com a equação bidimensional acima, para simplificar, utilizaremos sempre uma versão equivalente, unidimensional, a dois índices:

$$x_{n+2} = a - x_{n+1}^2 + b x_n. \quad (2.2)$$

Observe que apesar da equação envolver agora uma única variável, x , a bidimensionalidade manifesta-se através da necessidade de se fornecerem duas condições iniciais.

A simplificação acima é útil pois, em vez de lidarmos com pontos (x, y) no plano, podemos tratar apenas de pontos x ao longo de uma reta. Observe que o conjunto das possíveis coordenadas $\{y_i\}$ é sempre idêntico ao conjunto das possíveis das coordenadas $\{x_i\}$, para qualquer período finito k .

Um fato que distingue o mapa de Hénon (bem como qualquer mapa multidimensional) de mapas realmente unidimensionais, pode ser facilmente percebido considerando-se, por exemplo, uma órbita genérica de período 4 de ambos mapas. Para um sistema unidimensional qualquer, ter uma órbita de período 4 significa ter uma sucessão de quatro números x_i distintos* ligados

*Quando falarmos em uma órbita de período k estaremos nos referindo a uma órbita de período k genuíno, ou seja, de uma órbita cujos k pontos são todos distintos.

pela equação de movimento do seguinte modo

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \quad (2.3)$$

Para o mapa de Hénon (bidimensional) temos quatro pontos no plano assim ligados:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \dots, \quad (2.4)$$

onde, para facilitar a visualização, representamos os pontos bidimensionais (x, y) através do símbolo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Das interligações acima, percebe-se que o fato marcante que distingue sistemas unidimensionais dos sistemas multidimensionais é que enquanto as *coordenadas* das órbitas periódicas unidimensionais precisam ser necessariamente todas distintas, para sistemas multidimensionais as coordenadas podem eventualmente ser idênticas. Isto implica que as equações algébricas que definem as coordenadas das órbitas de sistemas multidimensionais podem ter raízes múltiplas enquanto que para sistemas unidimensionais, todas as raízes devem ser necessariamente diferentes. Em particular, para o mapa de Hénon, vemos que mesmo tendo-se uma quantidade de valores x_i MENOR que 4 podemos mesmo assim ter órbitas de período 4:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

2.2 As equações orbitais

2.2.1 Período 1

As órbitas de período 1 do mapa de Hénon, Eq. (2.2), tem uma única coordenada:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \quad (2.6)$$

Isto significa que a coordenada x_1 acima deve ser raiz da equação $x = a - x^2 + bx$, ou seja, do polinômio

$$P_1(x) = x^2 + (1 - b)x - a, \quad (2.7)$$

cujas raízes são

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-(1 - b) \pm \sqrt{(1 - b)^2 + 4a} \right). \quad (2.8)$$

Como a Eq. (2.7) é do segundo grau, vemos que para qualquer valores de (a, b) existirão sempre *dois* pontos fixos: x_+ e x_- . Os dois pontos fixos coincidirão ao longo da variedade algébrica onde o discriminante:

$$\Delta = 4a + (1 - b)^2, \quad (2.9)$$

da Eq. (2.7) anula-se, ou seja, ao longo da curva

$$a = -\frac{1}{4}(1-b)^2, \quad (2.10)$$

que é a curva de *bifurcação tangente* das órbitas período 1, ou seja a curva que marca a passagem de dois movimentos no plano complexo, isto é com pelo menos uma coordenada x_i de cada movimento pertencente ao plano complexo, para o plano real.

2.2.2 Período 2

A obtenção das órbitas de período 2 já nos permite começar a mostrar os passos iniciais do processo de sistematização que irá servir para o cálculo das órbitas de períodos mais elevados. Termos uma órbita de período 2, significa lidarmos com uma órbita genérica cuja estrutura é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \quad (2.11)$$

Na prática, precisamos obter dois números, x_1 e x_2 , raízes de um polinômio de segundo grau, cuja expressão geral vamos agora determinar.

Da equação geral de movimento do mapa de Hénon, Eq. (2.2), vemos que os dois pontos x_1 e x_2 que procuramos satisfazem as seguintes relações:

$$x_1 = a - x_2^2 + bx_1, \quad (2.12a)$$

$$x_2 = a - x_1^2 + bx_2. \quad (2.12b)$$

Uma maneira usual de resolver este sistema de equações é através da eliminação de qualquer uma das variáveis, x_1 ou x_2 , entre as equações acima. Independentemente da escolha feita, o resultado final de tal eliminação fornece um polinômio de quarto grau que, quando fatorado, é o seguinte:

$$\left(x^2 + (1-b)x - a\right)\left(x^2 - (1-b)x + (1-b)^2 - a\right) = 0. \quad (2.13)$$

Como é fácil perceber, o primeiro fator coincide com a Eq. (2.7) e fornece-nos, mais uma vez, as órbitas de período 1, disfarçadas aqui como órbitas de período 2 para as quais se tem $x_2 \equiv x_1$. As órbitas genuinamente de período 2 envolvem as raízes do outro fator polinomial:

$$P_2(x) = x^2 - (1-b)x + (1-b)^2 - a. \quad (2.14)$$

Este é o modo tradicionalmente utilizado para obter-se a equação para $P_2(x)$, a equação que define órbitas de período 2. Embora o processo direto de eliminação seja executável em princípio para órbitas de períodos arbitrários, ele torna-se rapidamente não aplicável computacionalmente devido à extensão dos cálculos. Para avançar, propomos efetuar a eliminação de um modo alternativo e mais eficiente.

Como as órbitas genuínas de período 2 envolvem sempre dois números, x_1 e x_2 , perguntamos se não é possível determinar-se diretamente tais números sem termos que nos deter com as soluções espúrias de período 1.

A equação satisfeita pelos dois números x_1 e x_2 da órbita de período 2 é a seguinte:

$$P_2(x) = x^2 - \sigma x + \theta_0 = (x - x_1)(x - x_2) \quad (2.15)$$

onde

$$\sigma = x_1 + x_2, \quad (2.16a)$$

$$\theta_0 = x_1 x_2. \quad (2.16b)$$

O problema agora reduz-se em expressar σ e θ_0 em função dos parâmetros a e b .

O coeficiente σ (que fornece a *soma* dos pontos orbitais) pode ser obtido da *diferença* $x_1 - x_2$ construída a partir das Eqs. (2.12a) e (2.12b):

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= x_1^2 - x_2^2 + b(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + b(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Como numa órbita de período 2 genuíno devemos ter necessariamente $x_1 \neq x_2$, podemos dividir a expressão acima por $x_1 - x_2$, obtendo então

$$x_1 + x_2 \equiv \sigma = (1 - b). \quad (2.18)$$

Para determinar o produto $\theta_0 = x_1 x_2$ começamos somando as Eqs. (2.12a) e (2.12b) com o intuito de calcular uma grandeza auxiliar S_2 :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2a - (x_2^2 + x_1^2) + b(x_1 + x_2), \\ \sigma &= 2a - S_2 + b\sigma, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde tiramos que

$$S_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 = 2a - \sigma(1 - b). \quad (2.20)$$

Por outro lado, da identidade trivial $2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2)$ obtemos facilmente que

$$\theta_0 = x_1 x_2 = \frac{1}{2}(\sigma^2 - S_2), \quad (2.21)$$

e, conseqüentemente, que

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \left\{ \sigma^2 - [2a - \sigma(1 - b)] \right\}. \quad (2.22)$$

Comparando-se os valores de σ e θ_0 na Eq. (2.15) com os coeficientes de $P_2(x)$ na Eq. (2.14) acima percebe-se que a consideração das duas *funções simétricas* das coordenadas dos pontos orbitais permitiu-nos obter diretamente a equação orbital $P_2(x)$.

A curva algébrica sobre a qual nascem as órbitas de período 2 é dada pelo anulamento do discriminante de $P_2(x)$ em relação a x , ou seja, por

$$4a - 3b^2 + 6b - 3 = 0. \quad (2.23)$$

Não existe nascimento de período 2 através de bifurcações tangentes para o mapa de Hénon.

Observando que os coeficientes $\sigma = x_1 + x_2$ e $\theta_0 = x_1 x_2$ nada mais são que as conhecidas *funções simétricas elementares* das coordenadas orbitais x_1 e x_2 , podemos introduzir duas parametrizações alternativas do polinômio $P_2(x)$ em termos dos k pontos x_i que definem as trajetórias de período k : podemos usar tanto σ quanto θ_0 para parametrizar $P_2(x)$. A parametrização em termos de σ é

$$P_2(x) = x^2 - \sigma x + \frac{1}{2} \left(\sigma^2 - [2a - \sigma(1 - b)] \right). \quad (2.24)$$

Substituindo-se $\sigma = (1 - b)$, conforme a Eq. (2.18), vê-se facilmente que o polinômio acima coincide com aquele na Eq. (2.14).

Doravante usaremos σ para parametrizar as equações que regem a dinâmica das órbitas periódicas, pois esta é a parametrização que conduz às equações finais mais simples.

2.2.3 Período 3

Movimentos de período 3 implicam na existência de três números x_1, x_2, x_3 entrelaçados do seguinte modo

$$\dots \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \dots, \quad (2.25)$$

e obedecendo as seguinte equações:

$$x_2 = a - x_1^2 + b x_3, \quad (2.26a)$$

$$x_3 = a - x_2^2 + b x_1, \quad (2.26b)$$

$$x_1 = a - x_3^2 + b x_2. \quad (2.26c)$$

Eliminando-se duas variáveis x_i quaisquer entre as três expressões acima vemos que, independentemente do par escolhido, a terceira variável x_i obedece a equação seguinte:

$$\begin{aligned} P_1(x) \left\{ x^6 - (1 - b) x^5 - \left[3a + (1 - b)^2 \right] x^4 + (1 - b) (2a - b^2 - 1) x^3 \right. \\ \left. + \left[3a^2 - (3b^2 - 2b + 3)a + (b^2 + b + 1)(b^2 - 3b + 1) \right] x^2 - (1 - b) (a - b^2 - b - 1)^2 x \right. \\ \left. - a^3 + 2(b^2 + 1)a^2 - (b^4 - 4b^3 - 5b^2 - 4b + 1)a + (b^2 + b + 1)(b^4 + 1) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como dantes, para período 2, o polinômio $P_1(x)$ refere-se à órbita trivial (não-genuína) de período 3, para a qual os três pontos coincidem. O polinômio sêxtico acima (que não fatora sobre os racionais) indica-nos a existência genérica de duas soluções distintas com período 3.

Novamente, como fizemos para órbitas de período 2, desejamos estabelecer uma equação cúbica formada apenas pelos pontos de cada uma das duas órbitas independentes. Observe que se conseguirmos obter tal cúbica, teremos na verdade fatorado a equação sêxtica num produto de duas cúbicas, separando as duas órbitas que a compõem.

Consideremos então os três pontos orbitais x_1, x_2, x_3 e, com eles, construamos a equação orbital cúbica genérica

$$P_3(x) = x^3 - \sigma x^2 + \theta_1 x - \theta_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \quad (2.28)$$

na qual, como é bem sabido, os coeficientes são funções simétricas elementares das raízes:

$$\sigma = x_1 + x_2 + x_3, \quad (2.29a)$$

$$\theta_1 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \quad (2.29b)$$

$$\theta_0 = x_1 x_2 x_3. \quad (2.29c)$$

Para determinar os valores dos coeficientes θ_i partimos das Eqs. (2.26a-2.26c), estabelecendo um sistema linear de equações envolvendo as *primeiras diferenças* das coordenadas orbitais x_i

da órbita de período 3:

$$\chi_2 = x_2 - x_3 = x_2^2 - x_1^2 + b(x_3 - x_1) = -(x_2 + x_1)\chi_1 + b\chi_3, \quad (2.30a)$$

$$\chi_3 = x_3 - x_1 = x_3^2 - x_2^2 + b(x_1 - x_2) = -(x_3 + x_2)\chi_2 + b\chi_1, \quad (2.30b)$$

$$\chi_1 = x_1 - x_2 = x_1^2 - x_3^2 + b(x_2 - x_3) = -(x_1 + x_3)\chi_3 + b\chi_2. \quad (2.30c)$$

Do fato que

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = 0, \quad (2.31)$$

vemos que os χ_i não são todos independentes, fato este que permite simplificar o problema, expressando-se qualquer uma das variáveis em termos das outras duas. Isto implica que se pode prosseguir com os cálculos de *três* modos diferentes, segundo escolhamos tomar como variáveis independentes um dos três pares: (χ_1, χ_2) , (χ_1, χ_3) ou (χ_2, χ_3) . Os resultados finais não dependem da escolha específica.

Tomando-se agora o par (χ_1, χ_2) como o par de variáveis independentes e usando-se o fato que $\chi_3 = -\chi_1 - \chi_2$ para eliminar χ_3 das Eqs. (2.30a-2.30b), obtemos o sistema

$$(x_1 + x_2 + b)\chi_1 + (1 + b)\chi_2 = 0, \quad (2.32a)$$

$$-(1 + b)\chi_1 + (x_2 + x_3 - 1)\chi_2 = 0, \quad (2.32b)$$

que pode também ser escrito sob forma matricial como

$$M_3 \chi = 0, \quad (2.33)$$

onde

$$M_3 = \begin{pmatrix} b + x_1 + x_2 & 1 + b \\ -(1 + b) & -1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

A condição para existência de solução não-nula, é que o determinante da matriz M_3 seja zero, condição esta que fornece o vínculo $\det M_3 = 0$ onde

$$\begin{aligned} \det M_3 &= (1 + b)^2 + (b + x_1 + x_2)(-1 + x_2 + x_3) \\ &= (1 + b)^2 + \left(\underbrace{(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}_{\theta_1} + x_2^2 - (x_1 + x_2) + b(x_2 + x_3) - b \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Levando em conta que $x_2^2 = a - x_3 + bx_1$ (veja Eq. 2.26b), podemos simplificar esta expressão consideravelmente:

$$\begin{aligned} \det M_3 &= (1 + b)^2 + \theta_1 + (a - x_3 + bx_1) - (x_1 + x_2) + b(x_2 + x_3) - b \\ &= (1 + b)^2 + \theta_1 + a - \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{\sigma} + b \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{\sigma} - b \\ &= \theta_1 - \sigma(1 - b) + (1 + b)^2 - b + a. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Como é bem sabido, as raízes e os coeficientes do polinômio de terceiro grau estão relacionados

através das equações de Girard-Newton [17] seguintes:

$$2\theta_1 + S_2 = \sigma^2, \quad (2.37)$$

$$-3\theta_0 - \sigma S_2 + S_3 = -\sigma \theta_1, \quad (2.38)$$

onde

$$S_j \equiv \sum_{i=1}^k x_i^j, \quad (2.39)$$

e $k = 3$ é o número de pontos orbitais (período do movimento).

Uma expressão adicional para S_2 pode ser obtida somando-se as Eqs. (2.26a)-(2.26c):

$$\underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{\sigma} = 3a - \underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}_{S_2} + b \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{\sigma}, \quad (2.40)$$

donde obtemos que

$$S_2 = 3a - \sigma(1 - b). \quad (2.41)$$

Substituindo-se S_2 na Eq. (2.37) obtemos uma relação de vínculo entre σ e θ_1 :

$$2\theta_1 + 3a - \sigma(1 - b) = \sigma^2. \quad (2.42)$$

De modo análogo, se conseguirmos encontrar uma relação adicional que determine S_3 poderemos então usar a Eq. (2.38) para obter uma relação que relacione θ_0 e σ .

Podemos ainda determinar uma relação adicional envolvendo S_3 partindo das Eqs. (2.26a-2.26c) que definem as iteradas do mapa, multiplicando-as por um x_i conveniente, obtendo:

$$x_1 x_2 = a x_1 - x_1^3 + b x_1 x_3, \quad (2.43a)$$

$$x_2 x_3 = a x_2 - x_2^3 + b x_1 x_2, \quad (2.43b)$$

$$x_3 x_1 = a x_3 - x_3^3 + b x_2 x_3. \quad (2.43c)$$

Somando-as, temos:

$$\underbrace{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}_{\theta_1} = a \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{\sigma} - S_3 + b \underbrace{(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)}_{\theta_1}, \quad (2.44)$$

ou seja

$$S_3 = a \sigma - (1 - b)\theta_1, \quad (2.45)$$

que, substituída na Eq. (2.38), fornece uma relação de vínculo interrelacionando σ , θ_1 e θ_0 :

$$-3\theta_0 - \sigma[3a - (1 - b)\sigma] + a \sigma - (1 - b)\theta_1 = -\sigma \theta_1. \quad (2.46)$$

As Eqs. (2.42) e (2.46) permitem-nos expressar os coeficientes θ_1 e θ_0 [que aparecem em $P_3(x)$, Eq. (2.28)] em termos da soma σ dos pontos orbitais:

$$\theta_1 = \frac{1}{2}(\sigma^2 + (1 - b)\sigma - 3a),$$

$$\theta_0 = \frac{1}{6} \left(\sigma^3 + 2(1-b)\sigma^2 - [7a + (1-b)^2]\sigma + 3a(1-b) \right). \quad (2.47)$$

Em geral, vemos que qualquer par arbitrário de coeficientes de $P_3(x)$ pode ser expresso em função do coeficiente restante.

Substituindo-se θ_1 e θ_2 na equação (2.36) obtemos uma equação que define os valores específicos de σ que caracterizam cada órbita:

$$\sigma^2 - \sigma(1-b) - [a - 2(b^2 + b + 1)] = 0. \quad (2.48)$$

Esta equação, que chamamos de *equação paramétrica*, é quadrática em σ e b e linear em a . A dependência quadrática em σ indica-nos a existência de duas órbitas de período 3, cada uma com uma *assinatura* algébrica diferente, uma vez que a equação (2.48) possui soluções dadas por :

$$\sigma_{\pm} = \frac{(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4[a - 2(b^2 + b + 1)]}}{2}. \quad (2.49)$$

Desta expressão é fácil ver que teremos o caso degenerado $\sigma_+ = \sigma_-$ sobre a curva

$$a = \frac{1}{4}(7b^2 + 10b + 7), \quad (2.50)$$

que nada mais é do que a curva de bifurcação onde nasce período 3 para o mapa de Hénon. Ao longo desta curva as duas órbitas de período 3 coincidem, sendo caracterizadas por $\sigma = (1-b)^2/2$.

Como a equação (2.28) é uma equação cúbica em x , podemos obter facilmente uma expressão analítica para os pontos orbitais, para valores arbitrários de a, b, σ , a saber,

$$x_1 = \frac{1}{3}\sigma + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}A + \sqrt{B}\right)} - \frac{C}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}A + \sqrt{B}\right)}}, \quad (2.51a)$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\sigma + \omega \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}A + \sqrt{B}\right)} - \frac{C}{\omega \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}A + \sqrt{B}\right)}}, \quad (2.51b)$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\sigma + \omega^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}A + \sqrt{B}\right)} - \frac{C}{\omega^2 \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}A + \sqrt{B}\right)}}, \quad (2.51c)$$

onde:

$$C = \frac{1}{18}[\sigma^2 + 3(1-b) - 9a], \quad (2.52a)$$

$$A = [4\sigma - 3(1-b)]C \quad (2.52b)$$

$$B = [2\sigma^2 - 2(1-b)\sigma + (1-b)^2 - 2a]C^2. \quad (2.52c)$$

De maneira que, pela Eq.(2.49) temos duas escolhas possíveis do valor de σ , cada uma destas escolhas fornecendo uma órbita de período 3. Observemos que o uso do método tradicional de análise para o período em estudo, apresentada no início desta seção, nos resultou uma equação sêxtica, que não é fatorável sobre o corpo dos números inteiros, de modo que a partir desta

equação não é possível separar, de maneira trivial, as duas órbitas existentes para o período 3. A equação sêxtica pode ser obtida com os nossos resultados considerando o resultante da equação orbital parametrizada com a equação paramétrica em relação ao parâmetro σ .

2.3 Equação de autovalores

Até o presente momento consideramos apenas questões relacionadas à obtenção das equações que definem os pontos orbitais, contudo ainda não analisamos a estabilidade das órbitas. As equações que definem a estabilidade orbital podem ser escritas em termos dos mesmos coeficientes σ e θ_i usados nas seções anteriores para parametrizar as equações orbitais.

Como é bem sabido [16], a estabilidade das órbitas de período arbitrário k é regida pela equação característica;

$$|J_k - \lambda I| = 0, \quad (2.53)$$

onde a matriz J_k é a matriz Jacobiana correspondente ao período em questão, I a matriz identidade e λ o autovalor.

Para os três primeiros períodos, as matrizes são as seguintes:

$$J_1 = \begin{pmatrix} -2x_1 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.54a)$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -2x_2 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_1 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1x_2 + b & -2x_2 \\ -2x_1 & b \end{pmatrix}, \quad (2.54b)$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \begin{pmatrix} -2x_3 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_2 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_1 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8x_1x_2x_3 - 2b(x_1 + x_3) & 4x_2x_3 + b \\ 4bx_1x_2 + b^2 & -2bx_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.54c)$$

Os determinantes característicos correspondentes são

$$\Lambda_1 = \lambda^2 + 2\lambda x_1 - b = \lambda^2 + 2\lambda\sigma - b, \quad (2.55a)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \lambda^2 - 2(b + 2x_1x_2)\lambda + b^2 \\ &= \lambda^2 - 2(b + 2\theta_0)\lambda + b^2 \\ &= \lambda^2 + 2(-\sigma^2 + (b-1)\sigma - b + 2a)\lambda + b^2, \end{aligned} \quad (2.55b)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_3 &= \lambda^2 - \lambda[-8\underbrace{x_1x_2x_3}_{\theta_0} - 2b\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{\sigma}] - b^3, \\ &= \lambda^2 + \lambda[8\theta_0 + 2b\sigma] - b^3, \\ &= \lambda^2 + \left[\frac{4}{3}\sigma^3 + \frac{8}{3}(1-b)\sigma^2 - \frac{2}{3}(14a + 2b^2 - 7b + 2)\sigma + 4a(1-b) \right] \lambda - b^3 \end{aligned} \quad (2.55c)$$

2.4 Variedades

Eliminando-se σ entre as equações de autovalores e suas correspondentes equações paramétricas, obtemos as variedades $W_k(a, b, \lambda)$ (k indica o período), a partir das quais se pode determinar os domínios de estabilidade, definidos para $-1 \leq \lambda \leq +1$:

2.4.1 Período 1

A variedade W_1 ($k = 1$) é dada por :

$$W_1(a, b, \lambda) = \lambda^4 + 2(b-1)\lambda^3 - 2(2a+b)\lambda^2 - 2b(b-1)\lambda + b^2. \quad (2.56)$$

Para $\lambda = +1$ na equação acima temos:

$$\begin{aligned} W_{1+} &= -4a - (1-b)^2, \\ a &= -\frac{1}{4}(1-b)^2. \end{aligned}$$

Para $\lambda = -1$ temos:

$$\begin{aligned} W_{1-} &= -4a + 3b^2 - 6b + 3, \\ a &= \frac{3}{4}(1-b)^2. \end{aligned}$$

Notemos que a solução da expressão $W_{1+} = 0$ é idêntica a expressão 2.10.

2.4.2 Período 2

A variedade $W_2(a, b; \lambda)$ é dada por:

$$W_2 = \lambda^2 + (-4b^2 + 6b + 4a - 4)\lambda + b^2 \quad (2.57)$$

Sendo que se considerarmos $\lambda = +1$ teremos

$$\begin{aligned} W_{2+} &= 4a - 3b^2 + 6b - 3, \\ a &= \frac{3}{4}(1-b)^2. \end{aligned} \quad (2.58)$$

e considerando $\lambda = -1$ conseguimos:

$$\begin{aligned} W_{2-} &= 5 + 5b^2 - 6b - 4a, \\ a &= \frac{1}{4}(5b^2 - 6b + 5). \end{aligned} \quad (2.59)$$

2.4.3 Período 3

$$W_3(a, b, \lambda) = d_3 a^3 + d_2 a^2 + d_1 a + d_0, \quad (2.60)$$

onde

$$d_3 = 64\lambda^2, \quad (2.61a)$$

$$d_2 = -32(4b^2 + b + 4)\lambda^2, \quad (2.61b)$$

$$d_1 = 4\lambda[2(8\lambda - 1)b^4 - 2(26\lambda - 1)b^3 - 63\lambda b^2 + 2\lambda(1 - 26\lambda)b - 2\lambda(\lambda - 8)], \quad (2.61c)$$

$$d_0 = - (8\lambda - 1)^2 b^6 - 6\lambda(8\lambda - 1)b^5 - 6\lambda(4\lambda + 1)b^4 - \\ 2\lambda(8\lambda^2 - 29\lambda + 8)b^3 - 6\lambda^2(\lambda + 4)b^2 + 6\lambda^2(\lambda - 8)b - \lambda^2(\lambda - 8)^2. \quad (2.61d)$$

$$(2.61e)$$

Para $\lambda = 1$ a Eq. (2.60) reduz-se sobre os racionais a um produto de dois fatores, a saber,

$$W_{3+} = w_{3+}^{(1)} w_{3+}^{(2)}, \quad (2.62)$$

onde

$$w_{3+}^{(1)} = 4a - 7b^2 - 10b - 7, \quad (2.63a)$$

$$w_{3+}^{(2)} = 16a^2 - 4(b^2 - 8b + 1)a + (b^2 + b + 1)(7b^2 - 11b + 7), \quad (2.63b)$$

Resolvendo em a estas equações obtemos, respectivamente:

$$a = \frac{7b^2 + 10b + 7}{4} \quad (2.64a)$$

$$a = \frac{b^2 - 8b + 1 \pm 3i(1 - b^2)\sqrt{3}}{8}. \quad (2.64b)$$

Para $\lambda = -1$ a Eq. (2.60) não se reduz, fornecendo a seguinte cúbica:

$$W_{3-} = 64a^3 - 32(4b^2 + b + 4)a^2 + 4(18b^4 - 54b^3 - 63b^2 - 54b + 18)a - 9(b^2 + b + 1)(9b^4 - 3b^3 - 4b^2 - 3b + 9). \quad (2.65)$$

As equações aqui obtidas reproduzem resultados conhecidos da literatura[29]. Porém, nosso objetivo neste capítulo foi mostrar que as deduções podem ser *sistematizadas* de modo a serem programadas em linguagens de computação capazes de manipular símbolos. Tal sistematização é discutida no capítulo seguinte.

Capítulo 3

Teoria Geral para Períodos Arbitrários

Neste capítulo sistematizamos a dedução das equações fundamentais que definem as órbitas, bem como sua estabilidade, para períodos arbitrários k . Discutimos certas decomposições características peculiares envolvendo os pontos orbitais, mostrando que as equações de movimento sempre operam no sentido de induzir interrelações entre subgrupos cíclicos das funções simétricas elementares, i.e., de multinômios construídos com os pontos orbitais, interrelações que escravizam toda dinâmica.

3.1 A Equação Orbital

Um dos objetivos principais da teoria que vamos apresentar é a obtenção da equação orbital $P_k(x, a, b; \sigma) = 0$, para tanto como já consideramos na análise dos períodos 1, 2 e 3, feita no capítulo anterior, partimos da premissa que as coordenadas x_i dos pontos orbitais são raízes de um polinômio de grau igual ao período da órbita:

$$\begin{aligned} P_k &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{k-2})(x - x_{k-1})(x - x_k) \\ &= x^k - \sigma x^{k-1} + \theta_{k-2} x^{k-2} - \theta_{k-3} x^{k-3} + \dots \\ &\quad - (-1)^{k-2} \theta_2 x^2 + (-1)^{k-1} \theta_1 x - (-1)^k \theta_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde as funções θ_i são as funções simétricas elementares que estão diretamente relacionadas com os conhecidos coeficientes de *Girard-Newton* c_i de forma que $c_i = (-1)^i \theta_{k-i}$ (uma breve revisão a respeito das funções simétricas e dos coeficientes de *Girard - Newton* é apresentada no apêndice A).

A obtenção da equação (3.1) é fundamental para podermos *separar* as órbitas isoperiódicas, ou seja, as órbitas de um mesmo período, pois como mostrado para o período 3, analisado no capítulo 3, a análise tradicional resulta uma *junção* das equações orbitais isoperiódicas em somente uma não fatorável. Contudo dois fatos básicos são necessários: a obtenção dos coeficientes θ_i como funções únicas e exclusivas do parâmetro σ e dos parâmetros de controle a e b , e a obtenção da equação paramétrica que relaciona o parâmetro σ com os parâmetros a e b .

3.2 Matrizes de Diferenças

Primeiramente precisamos restringir nossa análise aos períodos genuínos, eliminando os períodos espúrios, como o caso da desconsideração do período 1 na análise dos períodos 2 e 3.

A partir da equação (2.2) podemos escrever o sistema de equações que definem a dinâmica de um certo período k , considerando as condições de contorno periódicas, $x_0 = x_k$ e por consequência $x_{k+i} = x_i$,

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a - x_k^2 + bx_{k-1}, \\
 x_2 &= a - x_1^2 + bx_k, \\
 x_3 &= a - x_2^2 + bx_1, \\
 x_4 &= a - x_3^2 + bx_2, \\
 &\vdots, \\
 x_{k-2} &= a - x_{k-3}^2 + bx_{k-4}, \\
 x_{k-1} &= a - x_{k-2}^2 + bx_{k-3}, \\
 x_k &= a - x_{k-1}^2 + bx_{k-2}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para extrairmos período primitivo k , em questão, devemos desconsiderar os seus divisores inteiros m , que igualmente são casos, degenerados, de período k .

A eliminação destes períodos m é feita por meio de equações de diferenças. A forma geral destas equações que desconta um período mais baixo m é dada por:

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 - x_{1+m} & + & (x_k - x_m)(x_k + x_m) & - & b(x_{k-1} - x_{(k-1)+m}) & = & 0, \\
 x_2 - x_{2+m} & + & (x_1 - x_{1+m})(x_1 + x_{1+m}) & - & b(x_k - x_{k+m}) & = & 0, \\
 x_3 - x_{3+m} & + & (x_2 - x_{2+m})(x_2 + x_{2+m}) & - & b(x_1 - x_{1+m}) & = & 0, \\
 x_4 - x_{4+m} & + & (x_3 - x_{3+m})(x_3 + x_{3+m}) & - & b(x_2 - x_{2+m}) & = & 0, \\
 & & & & \vdots & & , \\
 x_{k-1} - x_{k-1+m} & + & (x_{k-2} - x_{k-2+m})(x_{k-2} + x_{k-2+m}) & - & b(x_{k-3} - x_{(k-3)+m}) & = & 0, \\
 x_k - x_{k+m} & + & (x_{k-1} - x_{(k-1)+m})(x_{k-1} + x_{(k-1)+m}) & - & b(x_{k-2} - x_{(k-2)+m}) & = & 0.
 \end{array}$$

Definimos:

$$\begin{aligned}
 \chi_i^{(m)} &\stackrel{def}{=} x_i - x_{i+m}, \\
 \Omega_i^{(m)} &\stackrel{def}{=} x_i + x_{i+m}.
 \end{aligned}$$

Desta forma podemos rescrever o sistema anterior como:

$$\begin{aligned}
 \chi_1^{(m)} + \chi_k^{(m)} \Omega_k^{(m)} - b\chi_{k-1}^{(m)} &= 0, \\
 \chi_2^{(m)} + \chi_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} - b\chi_k^{(m)} &= 0, \\
 \chi_3^{(m)} + \chi_2^{(m)} \Omega_2^{(m)} - b\chi_1^{(m)} &= 0, \\
 \chi_4^{(m)} + \chi_3^{(m)} \Omega_3^{(m)} - b\chi_2^{(m)} &= 0, \\
 &\vdots, \\
 \chi_{k-1}^{(m)} + \chi_{k-2}^{(m)} \Omega_{k-2}^{(m)} - b\chi_{k-3}^{(m)} &= 0, \\
 \chi_k^{(m)} + \chi_{k-1}^{(m)} \Omega_{k-1}^{(m)} - b\chi_{k-2}^{(m)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

No sistema acima as variáveis são dadas pelo conjunto $\{\chi_i^{(m)}\}$, portanto pela teoria elementar de resolução de sistemas lineares, o sistema em questão só possuirá solução diferente da trivial, isto é $\{\chi_i^{(m)}\} \neq \{0\}$ se a matriz de seus coeficientes tiver determinante nulo. Voltaremos a esta consideração em breve.

Consideraremos agora uma pequena análise do nosso conjunto de variáveis $\{\chi_i^{(m)}\}$. O caso $m = 1$ é comum a todos os períodos, uma vez que os movimentos de período 1 são casos de

movimento k .

$$\{\chi_i^{(1)}\} = \begin{cases} \chi_1^{(1)} & = x_1 - x_2 \\ \chi_2^{(1)} & = x_2 - x_3 \\ \chi_3^{(1)} & = x_3 - x_4 \\ & \vdots \\ \chi_{k-2}^{(1)} & = x_{k-2} - x_{k-1} \\ \chi_{k-1}^{(1)} & = x_{k-1} - x_k \\ \chi_k^{(1)} & = x_k - x_1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Notemos agora o seguinte fato:

$$\begin{aligned} -(x_k - x_1) &= (x_1 - x_k) \\ &= (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + (x_3 - x_4) + \cdots + (x_{k-2} - x_{k-1}) + (x_{k-1} - x_k), \end{aligned}$$

ou seja:

$$-\chi_k^{(1)} = \chi_1^{(1)} + \chi_2^{(1)} + \chi_3^{(1)} + \cdots + \chi_{k-3}^{(1)} + \chi_{k-2}^{(1)} + \chi_{k-1}^{(1)}.$$

Desta forma, concluímos que a variável $\chi_k^{(1)}$ pode ser escrita como uma combinação linear das demais variáveis do conjunto $\{\chi_i^{(m)}\}$. Deste fato, podemos concluir que para $m = 1$, não precisamos considerar todas as k equações do sistema mas apenas $k - 1$ equações.

Consideremos agora o caso em que $m = 2$ é um divisor do período k .

Desta forma temos:

$$\{\chi_i^{(2)}\} = \begin{cases} \chi_1^{(2)} & = x_1 - x_3 \\ \chi_2^{(2)} & = x_2 - x_4 \\ \chi_3^{(2)} & = x_3 - x_5 \\ & \vdots \\ \chi_{k-2}^{(2)} & = x_{k-2} - x_k \\ \chi_{k-1}^{(2)} & = x_{k-1} - x_1 \\ \chi_k^{(2)} & = x_k - x_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Notemos agora que:

$$\begin{aligned} -(x_{k-1} - x_1) &= (x_1 - x_{k-1}) \\ &= (x_1 - x_3) + (x_3 - x_5) + (x_5 - x_7) + \cdots + (x_{k-5} - x_{k-3}) + (x_{k-3} - x_{k-1}), \\ -(x_k - x_2) &= (x_2 - x_k) \\ &= (x_2 - x_4) + (x_4 - x_6) + (x_6 - x_8) + \cdots + (x_{k-4} - x_{k-2}) + (x_{k-2} - x_k), \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} -\chi_{k-1}^{(2)} &= \chi_1^{(2)} + \chi_3^{(2)} + \chi_5^{(2)} + \cdots + \chi_{k-5}^{(2)} + \chi_{k-3}^{(2)}, \\ -\chi_k^{(2)} &= \chi_2^{(2)} + \chi_4^{(2)} + \chi_6^{(2)} + \cdots + \chi_{k-4}^{(2)} + \chi_{k-2}^{(2)}. \end{aligned}$$

Deste fato concluímos que duas das variáveis do conjunto $\{\chi_i^{(2)}\}$ nada mais são do que uma combinação linear de outras. Portanto, podemos concluir que não há k variáveis independentes no conjunto $\{\chi_i^{(2)}\}$, mas sim $k - 2$ variáveis independentes, o que implica na redução do sistema linear para $m = 2$, de k equações lineares para $k - 2$.

Podemos aplicar o mesmo raciocínio para um período k que possui, no conjunto de seus divisores o divisor $m = 3$.

$$\{\chi_i^{(3)}\} = \begin{cases} \chi_1^{(3)} & = x_1 - x_4 \\ \chi_2^{(3)} & = x_2 - x_5 \\ \chi_3^{(3)} & = x_3 - x_6 \\ & \vdots \\ \chi_{k-2}^{(3)} & = x_{k-2} - x_1 \\ \chi_{k-1}^{(3)} & = x_{k-1} - x_2 \\ \chi_k^{(3)} & = x_k - x_3 \end{cases} \quad (3.6)$$

Notemos agora que:

$$\begin{aligned} -(x_{k-2} - x_1) &= (x_1 - x_{k-2}) \\ &= (x_1 - x_4) + (x_4 - x_7) + (x_7 - x_{10}) + \cdots + (x_{k-8} - x_{k-5}) + (x_{k-5} - x_{k-2}), \\ -(x_{k-1} - x_2) &= (x_2 - x_{k-1}) \\ &= (x_2 - x_5) + (x_5 - x_8) + (x_8 - x_{11}) + \cdots + (x_{k-7} - x_{k-4}) + (x_{k-4} - x_{k-1}), \\ -(x_k - x_3) &= (x_3 - x_k) \\ &= (x_3 - x_6) + (x_6 - x_9) + (x_9 - x_{12}) + \cdots + (x_{k-6} - x_{k-3}) + (x_{k-3} - x_k), \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} -\chi_{k-2}^{(3)} &= \chi_1^{(3)} + \chi_4^{(3)} + \chi_7^{(3)} + \cdots + \chi_{k-8}^{(3)} + \chi_{k-5}^{(3)}, \\ -\chi_{k-1}^{(3)} &= \chi_2^{(3)} + \chi_5^{(3)} + \chi_8^{(3)} + \cdots + \chi_{k-7}^{(3)} + \chi_{k-4}^{(3)}, \\ -\chi_k^{(3)} &= \chi_3^{(3)} + \chi_6^{(3)} + \chi_9^{(3)} + \cdots + \chi_{k-6}^{(3)} + \chi_{k-3}^{(3)}. \end{aligned}$$

Assim, para o caso em que temos $m = 3$ como um dos divisores de k , temos $k - 3$ variáveis independentes no conjunto $\{\chi_i^{(3)}\}$, o que implica na consideração de apenas $k - 3$ equações do sistema de k equações para $m = 3$.

Agora, por indução, verificamos que para um divisor m qualquer de k , temos $k - m$ variáveis independentes do conjunto de k variáveis do conjunto $\{\chi_i^{(m)}\}$, o que implica em termos também $k - m$ equações no sistema linear de diferenças.

Com base nestas verificações, podemos escolher o conjunto de variáveis com que iremos trabalhar: qualquer escolha de $k - m$ variáveis, dentro do conjunto de k variáveis $\{\chi_i^{(m)}\}$. Uma das possíveis escolhas é dada pelo conjunto:

$$\{\chi_i^{(m)}\}_{i=1}^{k-m} = \chi_1^{(m)}, \chi_2^{(m)}, \chi_3^{(m)}, \dots, \chi_{(k-2)-m}^{(m)}, \chi_{(k-1)-m}^{(m)}, \chi_{k-m}^{(m)}. \quad (3.7)$$

Retomemos o sistema (3.3), reescrevendo-o:

$$\begin{aligned}
 \chi_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} + \chi_2^{(m)} - b\chi_k^{(m)} &= 0, \\
 \chi_2^{(m)} \Omega_2^{(m)} + \chi_3^{(m)} - b\chi_1^{(m)} &= 0, \\
 \chi_3^{(m)} \Omega_3^{(m)} + \chi_4^{(m)} - b\chi_2^{(m)} &= 0, \\
 &\vdots, \\
 \chi_{k-2}^{(m)} \Omega_{k-2}^{(m)} + \chi_{k-1}^{(m)} - b\chi_{k-3}^{(m)} &= 0, \\
 \chi_{k-1}^{(m)} \Omega_{k-1}^{(m)} + \chi_k^{(m)} - b\chi_{k-2}^{(m)} &= 0, \\
 \chi_k^{(m)} \Omega_k^{(m)} + \chi_1^{(m)} - b\chi_{k-1}^{(m)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Usando o conjunto de variáveis escolhido temos um novo sistema de equações, dado por:

$$\begin{aligned}
 \chi_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} + \chi_2^{(m)} - b\chi_k^{(m)} &= 0, \\
 \chi_2^{(m)} \Omega_2^{(m)} + \chi_3^{(m)} - b\chi_1^{(m)} &= 0, \\
 \chi_3^{(m)} \Omega_3^{(m)} + \chi_4^{(m)} - b\chi_2^{(m)} &= 0, \\
 &\vdots, \\
 \chi_{(k-2)-m}^{(m)} \Omega_{(k-2)-m}^{(m)} + \chi_{(k-1)-m}^{(m)} - b\chi_{(k-3)-m}^{(m)} &= 0, \\
 \chi_{(k-1)-m}^{(m)} \Omega_{(k-1)-m}^{(m)} + \chi_{(k-m)}^{(m)} - b\chi_{(k-2)-m}^{(m)} &= 0, \\
 \chi_{k-m}^{(m)} \Omega_{(k-m)}^{(m)} + \chi_{(k+1)-m}^{(m)} - b\chi_{(k-1)-m}^{(m)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Lembramos que, este novo sistema de equações é constituído por $k - m$ equações, ao contrário do sistema original (3.3), que possuía k equações, não importante o valor m em consideração.

Uma vez que escolhidos o conjunto de variáveis independentes com que iremos trabalhar, podemos fazer uma pequena observação que irá facilitar o entendimento dos cálculos futuros. Para tanto, reconsideremos alguns resultados anteriores para mostrar que podemos nos valer da chamada matemática modular, para expressarmos as “variáveis” que, frente a escolha do conjunto de variáveis independentes escolhido, são uma combinação linear das outras, de uma maneira mais compacta. Ou seja:

$$\begin{aligned}
 -\chi_k^{(1)} &= \chi_1^{(1)} + \chi_2^{(1)} + \chi_3^{(1)} + \cdots + \chi_{k-3}^{(1)} + \chi_{k-2}^{(1)} + \chi_{k-1}^{(1)} = \sum_{i=1}^{k-1} \chi_i^{(1)} \delta_{0,i} \pmod{1} \\
 -\chi_{k-1}^{(2)} &= \chi_1^{(2)} + \chi_3^{(2)} + \chi_5^{(2)} + \cdots + \chi_{k-7}^{(2)} + \chi_{k-5}^{(2)} + \chi_{k-3}^{(2)} = \sum_{i=1}^{k-2} \chi_i^{(2)} \delta_{0,(i+1)} \pmod{2} \\
 -\chi_k^{(2)} &= \chi_2^{(2)} + \chi_4^{(2)} + \chi_6^{(2)} + \cdots + \chi_{k-6}^{(2)} + \chi_{k-4}^{(2)} + \chi_{k-2}^{(2)} = \sum_{i=1}^{k-2} \chi_i^{(2)} \delta_{0,i} \pmod{2} \\
 -\chi_{k-2}^{(3)} &= \chi_1^{(3)} + \chi_4^{(3)} + \chi_7^{(3)} + \cdots + \chi_{k-11}^{(3)} + \chi_{k-8}^{(3)} + \chi_{k-5}^{(3)} = \sum_{i=1}^{k-3} \chi_i^{(3)} \delta_{0,(i+2)} \pmod{3} \\
 -\chi_{k-1}^{(3)} &= \chi_2^{(3)} + \chi_5^{(3)} + \chi_8^{(3)} + \cdots + \chi_{k-10}^{(3)} + \chi_{k-7}^{(3)} + \chi_{k-4}^{(3)} = \sum_{i=1}^{k-3} \chi_i^{(3)} \delta_{0,(i+1)} \pmod{3} \\
 -\chi_k^{(3)} &= \chi_3^{(3)} + \chi_6^{(3)} + \chi_9^{(3)} + \cdots + \chi_{k-9}^{(3)} + \chi_{k-6}^{(3)} + \chi_{k-3}^{(3)} = \sum_{i=1}^{k-3} \chi_i^{(3)} \delta_{0,i} \pmod{3}
 \end{aligned}$$

Desta forma, notamos que, podemos escrever de maneira geral:

$$\left\{ \chi_i^{(m)} \right\}_{i=(k+1)-m}^k = \left\{ - \sum_{j=1}^{k-m} \chi_k^{(m)} \delta_{1,(j+k-i) \bmod (m)+1} \right\}_{i=(k+1)-m}^k \quad (3.10)$$

Onde o símbolo $\delta_{i,j}$ representa a chamada delta de Kronecker definida por:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Pelo sistema de equações (3.9), vemos que:

$$\chi_k^{(m)} = - \sum_{j=1}^{k-m} \chi_j^{(m)} \delta_{0,j \bmod (m)}, \quad (3.11a)$$

$$\chi_{(k-m)+1}^{(m)} = - \sum_{j=1}^{k-m} \chi_j^{(m)} \delta_{0,(j+m-1) \bmod (m)}. \quad (3.11b)$$

Usando as definições:

$$\begin{aligned} \alpha_j^{(m)} &= \delta_{0,j \bmod (m)}, \\ \beta_j^{(m)} &= \delta_{0,[(j+m)-1] \bmod (m)}. \end{aligned}$$

podemos reescrever as igualdades (3.11a) e (3.11b) como

$$\chi_k^{(m)} = - \sum_{j=1}^{k-m} \chi_j^{(m)} \alpha_j^{(m)}, \quad (3.12a)$$

$$\chi_{(k-m)+1}^{(m)} = - \sum_{j=1}^{k-m} \chi_j^{(m)} \beta_j^{(m)}. \quad (3.12b)$$

Desta forma podemos reescrever o sistema de equações (3.9) como:

$$\begin{aligned} \chi_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} &+ \chi_2^{(m)} &+ b \sum_{j=1}^{k-m} \alpha_j^{(m)} \chi_j^{(m)} &= 0, \\ \chi_2^{(m)} \Omega_2^{(m)} &+ \chi_3^{(m)} &- b \chi_1^{(m)} &= 0, \\ \chi_3^{(m)} \Omega_3^{(m)} &+ \chi_4^{(m)} &- b \chi_2^{(m)} &= 0, \\ &&&\vdots, \\ \chi_{(k-2)-m}^{(m)} \Omega_{(k-2)-m}^{(m)} &+ \chi_{(k-1)-m}^{(m)} &- b \chi_{(k-3)-m}^{(m)} &= 0, \\ \chi_{(k-1)-m}^{(m)} \Omega_{(k-1)-m}^{(m)} &+ \chi_{(k-m)}^{(m)} &- b \chi_{(k-2)-m}^{(m)} &= 0, \\ \chi_{k-m}^{(m)} \Omega_{(k-m)}^{(m)} &- \sum_{j=1}^{k-m} \chi_j^{(m)} \beta_j^{(m)} &- b \chi_{(k-1)-m}^{(m)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

O sistema (3.13) pode ser escrito em notação matricial na forma:

$$M^{(m)} \vec{v}^{(m)} = \vec{0}, \quad (3.14)$$

onde $M^{(m)}$ é uma matriz $(k-m) \times (k-m)$ e $\vec{v}^{(m)}$ é um vetor de $(k-m)$ componentes, de modo que as componentes deste vetor são dadas por:

$$\vec{v}^{(m)} = \begin{pmatrix} \chi_1^{(m)} \\ \chi_2^{(m)} \\ \chi_3^{(m)} \\ \vdots \\ \chi_{(k-2)-m}^{(m)} \\ \chi_{(k-1)-m}^{(m)} \\ \chi_{k-m}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

sendo a matriz $M^{(m)}$ dada por:

$$\begin{pmatrix} \Omega_1^{(m)} + b\alpha_1^{(m)} & 1 + b\alpha_2^{(m)} & b\alpha_3^{(m)} & b\alpha_4^{(m)} & \dots & b\alpha_{(k-m)-2}^{(m)} & b\alpha_{(k-m)-2}^{(m)} & b\alpha_{(k-m)-1}^{(m)} & b\alpha_{k-m}^{(m)} \\ -b & \Omega_2^{(m)} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & \Omega_3^{(m)} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -b & \Omega_{(k-m)-2}^{(m)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b & \Omega_{(k-m)-1}^{(m)} & 1 \\ -\beta_1^{(m)} & -\beta_2^{(m)} & -\beta_3^{(m)} & -\beta_4^{(m)} & \dots & -\beta_{(k-m)-3}^{(m)} & -\beta_{(k-m)-2}^{(m)} & -\beta_{(k-m)-1}^{(m)} - b & \Omega_{k-m}^{(m)} - \beta_{(k-m)}^{(m)} \end{pmatrix}$$

O elemento de matriz geral de $M^{(m)}$ pode ser representado por:

$$a_{i,j} = \Omega_i^{(m)} \delta_{i,j} + \delta_{i+1,j} - \delta_{i-(k-m),(j+m-1) \bmod (m)} + b(\delta_{1-i,j \bmod (m)} - \delta_{i-1,j}). \quad (3.16)$$

A condição de determinante nulo destas matrizes de diferenças tem como consequência, a garantia de estarmos tratando de casos de movimentos de períodos k genuínos. Contudo, ao considerarmos o determinante destas matrizes vemos, como ilustrado brevemente no estudo do período 3 no capítulo anterior, que surgem termos da forma $\prod_i^n x_i^{m_i}$ onde as potências m_i são maiores que a unidade. Tais termos precisam ser *simplificados* uma vez que desejamos expressar o determinante, em questão, em função dos coeficientes de Girard-Newton, sendo esta simplificação feita via o uso da equação de Hénon a dois índices:

$$x_{n+1}^\nu x_{n+1}^2 = x_{n+1}^\nu (a - x_{n+2} + bx_n),$$

$$(3.17)$$

$$x_{n+1}^{\nu+2} = ax_{n+1}^{\nu} - x_{n+2}x_{n+1}^{\nu} + bx_nx_{n+1}^{\nu}. \quad (3.18)$$

Note que o grau algébrico do termo à direita da igualdade é menor que o termo da esquerda, desta forma usaremos esta *identidade* para simplificar as equações, e a este processo denominamos de *abaixamento de grau*.

3.3 As Decomposições dos Coeficientes

Ao procedermos ao cálculo dos discriminantes das matrizes de diferenças, notamos o surgimento de termos com potências n em x . Tais termos podem ser simplificados considerando a equação $x_i^2 = a - x_{i+1} + bx_{i-1}$ usando-se o conjunto as condições de contorno $x_{k+i} = x_i$. Desta maneira podemos reescrever o produto $x_j^m x_i^{n+2} = x_j^m x_i^n a - x_j^m x_{i+1} x_i^n + bx_j^m x_{i-1} x_i^n$ havendo então um *abaixamento de grau* em x_i . Este processo é de extrema importância para a identificação posterior das funções simétricas.

Apresentamos a seguir alguns resultados para os determinantes da matriz de diferenças primeiras $M_k^{(1)}$, após o processo de abaixamento de grau e a identificação dos coeficientes de Newton:

$$\text{Det} (M_k^{(1)}) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i Z_i^{(k)} \theta_{k-i}, \quad (3.19)$$

onde $\theta_k \equiv 1$, $\theta_{k-1} \equiv \sigma$ e os coeficientes $Z_i^{(k)}$ dados pela tabela a seguir:

Tabela 1. Alguns determinantes da matriz $M^{(1)}$

k	$Z_i^{(k)}$	
3	$i = 2$	1
	$i = 1$	$(1 - b)$
	$i = 0$	$(a + b^2 + 1) + b$
4	$i = 3$	1
	$i = 2$	$(1 - b)$
	$i = 1$	$(a + b^2 + 1)$
	$i = 0$	$[(1 - b^3) + 2a(1 - b)] + b(1 - b)$
5	$i = 4$	1
	$i = 3$	$(1 - b)$
	$i = 2$	$(a + b^2 + 1)$
	$i = 1$	$[(1 - b^3) + 2a(1 - b)]$
	$i = 0$	$[1 + b^2 + b^4 + a(3 - 2b + 3b^2) + a^2] + b(1 + b^2 + a) - b\epsilon_{2,2}$
6	$i = 5$	1
	$i = 4$	$(1 - b)$
	$i = 3$	$(a + b^2 + 1)$
	$i = 2$	$[(1 - b^3) + 2a(1 - b)]$
	$i = 1$	$[1 + b^2 + b^4 + a(3 - 2b + 3b^2) + a^2]$
	$i = 0$	$-b(1 - b)[\epsilon_{2,2} + \epsilon_{2,3}] - b[\epsilon_{3,2} + \epsilon_{3,3} + 2\epsilon_{3,4}] + 3(1 - b)a^2 + (-4b^3 + 4)a - (b - 1)(b^2 + b + 1)^2$

A tabela acima mostra os determinantes das matrizes de diferenças para alguns períodos particulares. Notamos que existe uma espécie de *hierarquia* nestas equações uma vez que os

coeficientes $Z_i^{(k)}$ para um determinado período k são iguais a $Z_{i+1}^{(k+1)}$ para $1 \leq i \leq k-1$, sendo que o coeficiente $Z_0^{(k)}$ assume uma forma polinomial nova ao aumentarmos o período k , não sendo diretamente correlacionado com o coeficiente $Z_1^{(k+1)}$.

Outro fato apresentado na Tabela é o surgimento de decomposições dos coeficientes de Newton. Tais decomposições ocorrem pela primeira vez no determinante da matriz das diferenças primeiras para o período 5, de fato estas decomposições surgem pela primeira vez na dinâmica dos movimentos de período 4 de uma maneira mais sutil. pode-se ver isto considerando as somas S_n , das potências dos pontos orbitais que, como mostrado no apêndice (A), correlacionam os coeficientes c_i .

$$\begin{aligned}
 x_1^2 &= a - x_2 + bx_k, \\
 x_2^2 &= a - x_3 + bx_1, \\
 x_3^2 &= a - x_4 + bx_2, \\
 x_4^2 &= a - x_5 + bx_3, \\
 &\vdots, \\
 x_{k-3}^2 &= a - x_{k-2} + bx_{k-4}, \\
 x_{k-2}^2 &= a - x_{k-1} + bx_{k-3}, \\
 x_{k-1}^2 &= a - x_k + bx_{k-2}, \\
 x_k^2 &= a - x_1 + bx_{k-1}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Notemos, agora, que se procedermos à soma dos dois lados das igualdades das equações do sistema (3.20) acima obteremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k x_i^2 &= ka - \sum_{i=1}^k x_i + b \sum_{i=1}^k x_i, \\
 S_2 &= ka - (1-b)S_1.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Em geral, podemos obter as somas S_n considerando o sistema (3.20), tomando-se uma multiplicação dos dois lados da igualdade de cada uma das equações. Desta forma:

$$\begin{aligned}
 x_1^n x_1^2 &= x_1^n [a - x_2 + bx_k], \\
 x_2^n x_2^2 &= x_2^n [a - x_3 + bx_1], \\
 x_3^n x_3^2 &= x_3^n [a - x_4 + bx_2], \\
 x_4^n x_4^2 &= x_4^n [a - x_5 + bx_3], \\
 &\vdots, \\
 x_{k-3}^n x_{k-3}^2 &= x_{k-3}^n [a - x_{k-2} + bx_{k-4}], \\
 x_{k-2}^n x_{k-2}^2 &= x_{k-2}^n [a - x_{k-1} + bx_{k-3}], \\
 x_{k-1}^n x_{k-1}^2 &= x_{k-1}^n [a - x_k + bx_{k-2}], \\
 x_k^n x_k^2 &= x_k^n [a - x_1 + bx_{k-1}].
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Somando-se as equações de ambos os lados da igualdade obtemos:

$$\sum_{i=1}^k x_i^{2+n} = a \sum_{i=1}^k x_i^n - \sum_{i=1}^k x_i^n x_{i+1} + b \sum_{i=1}^k x_i^n x_{(k-1)+i},$$

$$S_{n+2} = aS_n - \sum_{i=1}^k x_i^n x_{i+1} + b \sum_{i=1}^k x_i^n x_{(k-1)+i}.$$

Exemplificamos com a soma S_3 :

$$S_3 = aS_1 \sum_{i=1}^k x_i x_{i+1} + b \sum_{i=1}^k x_i x_{(k-1)+i}. \tag{3.23}$$

Focamos agora nossa atenção na soma $\sum_{i=1}^k x_i x_{i+1}$, que para $k = 4$ (período 4) torna-se:

$$\sum_{i=1}^4 x_i x_{i+1} = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1. \tag{3.24}$$

Tal soma não se constitui numa função simétrica, mas sim numa *decomposição* desta.

Mostramos nas tabelas a seguir todas as decomposições de funções simétricas que surgem nos casos que iremos estudar nos capítulos posteriores.

As 'decomposições' do coeficiente θ_{k-2}

k	c_2
2	\nexists
3	$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$
4	$\epsilon_{2,1} = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_1$
	$\epsilon_{2,2} = x_1 x_3 + x_2 x_4$
5	$\epsilon_{2,1} = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_1$
	$\epsilon_{2,2} = x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_1 + x_5 x_2$
6	$\epsilon_{2,1} = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5 + x_5 x_6 + x_6 x_1$
	$\epsilon_{2,2} = x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_6 + x_5 x_1 + x_6 x_2$
	$\epsilon_{2,3} = x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6$

As 'decomposições' do coeficiente θ_{k-3}

k	c_3
2	\nexists
3	$x_1 x_2 x_3$
4	$x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_1 x_2$
5	$\epsilon_{3,1} = x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_5 + x_4 x_5 x_1 + x_5 x_1 x_2$
	$\epsilon_{3,2} = x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_5 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_5 x_2 + x_5 x_1 x_3$
6	$\epsilon_{3,1} = x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_5 + x_4 x_5 x_6 + x_5 x_6 x_1 + x_6 x_1 x_2$
	$\epsilon_{3,2} = x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_5 + x_3 x_4 x_6 + x_4 x_5 x_1 + x_5 x_6 x_2 + x_6 x_1 x_3$
	$\epsilon_{3,3} = x_1 x_2 x_5 + x_2 x_3 x_6 + x_3 x_4 x_1 + x_4 x_5 x_2 + x_5 x_6 x_3 + x_6 x_1 x_4$
	$\epsilon_{3,4} = x_1 x_3 x_5 + x_2 x_4 x_6$

As 'decomposições' do coeficiente θ_{k-4}

k	c_4
2	\nexists
3	\nexists
4	$x_1x_2x_3x_4$
5	$x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_1 + x_4x_5x_1x_2 + x_5x_1x_2x_3$
6	$\epsilon_{4,1} = x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_6 + x_4x_5x_6x_1 + x_5x_6x_1x_2 + x_6x_1x_2x_3$
	$\epsilon_{4,2} = x_1x_2x_3x_5 + x_2x_3x_4x_6 + x_3x_4x_5x_1 + x_4x_5x_6x_2 + x_5x_6x_1x_3 + x_6x_1x_2x_4$
	$\epsilon_{4,3} = x_1x_2x_4x_5 + x_2x_3x_5x_6 + x_3x_4x_6x_1$

3.3.1 O mecanismo das Decomposições

Como vimos, a partir do período 4, a dinâmica do mapa de Hénon conduz ao surgimento de decomposições das funções simétricas elementares, as parcelas que são originadas destas decomposições são de fato as funções que permanecem invariantes frente à troca cíclica, de período k , dos índices.

Podemos exemplificar o mecanismo destas decomposições para o coeficiente θ_{k-2} , no caso particular onde $k = 4$.

O mecanismo mostrado na figura (3.1) ilustra o processo algébrico de surgimento das decomposições. Consideramos círculos concêntricos devido às condições periódicas de contorno. O mecanismo resume-se a giros do círculo externo. De fato tal processo é geral, sendo que para as decomposições que envolvem produtos de mais de dois pontos orbitais, é necessário considerar igualmente mais de dois círculos concêntricos, como os da figura (3.1), com um progressivo aumento de complexidade de giro destes.

As decomposições $\epsilon_{i,j}$ podem ser expressas através de somas como, por exemplo, as decomposições dos coeficientes θ_{k-2} acima, são conseguidas considerando-se a soma:

$$\epsilon_{2,i} = \sum_{j=1}^k x_j x_{j+i}. \tag{3.25}$$

Pode-se mostrar que estas decomposições de funções simétricas ocorrem em todos os sistemas dinâmicos que podem ser expressos por mapas discretos polinômias, constituindo se nas *unidades algébricas fundamentais* destes.

3.3.2 Sistema Linear nas Decomposições

O surgimento de decomposições $\epsilon_{i,j}$ dos coeficientes de (θ_{k-i}) impõem um aumento de equações do nosso sistema. Acrescentamos as equações constitutivas:

$$\theta_{k-i} = \sum_{i=1}^N \epsilon_{i,j} \tag{3.26}$$

onde $1 < i < k - 1$, sendo ainda necessário considerar o sistema linear:

$$\sigma \epsilon_{n,i} - \sum \prod_{j=1}^l x_j = 0 \tag{3.27}$$

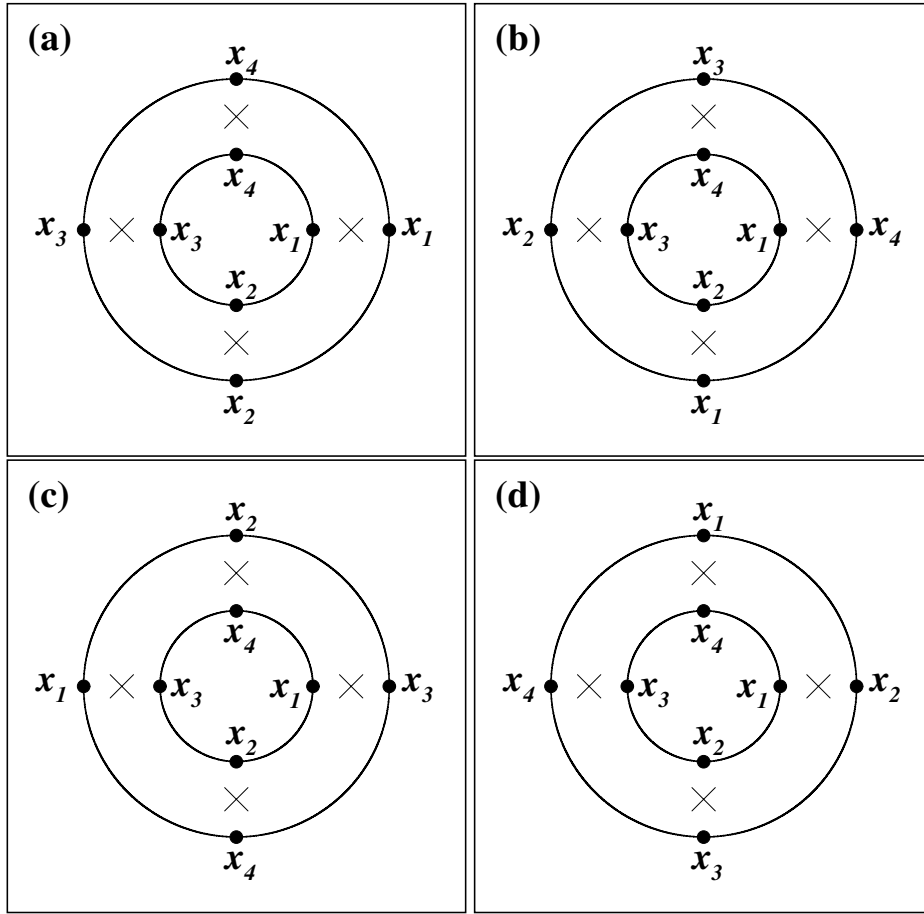


Figura 3.1: O mecanismo de surgimento das decomposições dos coeficientes de Girard-Newton para o caso do coeficiente c_2 . Representamos em (a): $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = S_2$; em (b): $x_1x_4 + x_2x_1 + x_3x_2 + x_4x_3 = \epsilon_{2,1}$; em (c): $x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_1 + x_4x_2 = 2(x_1x_3 + x_2x_4) = 2\epsilon_{2,2}$; em (d): $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = \epsilon_{2,1}$.

Podemos exemplificar a montagem do sistema linear nas decomposições, considerando o período 4. Seja inicialmente o produto $\epsilon_{2,1}\sigma$:

$$\begin{aligned} \sigma\epsilon_{2,1} &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4) \\ &= x_1^2x_2 + x_1^2x_4 + x_1x_2^2 + x_1x_4^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^2x_4 + x_3x_4^2 \\ &\quad + 2x_1x_2x_3 + 2x_1x_2x_4 + 2x_1x_3x_4 + 2x_2x_3x_4 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Promovendo o processo de *abaimento de grau*, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\sigma\epsilon_{2,1} = 2\theta_1 + \sigma(2a + b^2 - 2b + 1) - 2\epsilon_{2,2}(1 - b) - 4a(1 - b), \quad (3.29)$$

onde $\epsilon_{2,2} = x_1x_3 + x_2x_4$ é a outra decomposição do coeficiente θ_1 de modo que $\theta_1 = \epsilon_{2,1} + \epsilon_{2,2}$.

Desta forma, vemos que as decomposições das funções simétricas elementares estão correlacionadas entre si.

3.4 Equação de Autovalores

Para considerarmos todas as fronteiras dos domínios de estabilidade para cada período k precisamos considerar a matriz Jacobiana, J_k , já considerada no capítulo anterior.

$$J_k = J(x_k)J(x_{k-1})J(x_{k-1}) \dots J(x_1), \quad (3.30)$$

onde:

$$J(x_n) = \begin{pmatrix} -2x_n & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Sendo que a equação de autovalores é dada por:

$$|J_k - \lambda I| = 0. \quad (3.32)$$

Pela natureza bidimensional do mapa de Hénon, teremos uma equação característica quadrática, no autovalor, dada por:

$$\lambda^2 + \lambda \mathcal{S} + (-b)^k = 0, \quad (3.33)$$

onde $\mathcal{S} = tr(J_k)$ representa o traço da matriz J_k . Apresentamos alguns casos particulares do traço na tabela a seguir:

Tabela 3.1: Traço \mathcal{S}

k	\mathcal{S}
2	$-2[b + 2x_1x_2]$
3	$2[(x_1 + x_2 + x_3)b + 4x_1x_2x_3]$
4	$-2[b^2 + 2(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)b + 8x_1x_2x_3x_4]$
5	$2[(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)b^2 + 4(x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_1 + x_5x_1x_2)b + 16x_1x_2x_3x_4x_5]$
6	$-2[b^3 + 2(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4 + x_6)b^2 + 8(x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3x_4x_5 + x_3x_4x_5x_6 + x_4x_5x_6x_1 + x_5x_6x_1x_2 + x_6x_1x_2x_3)b + 32x_1x_2x_3x_4x_5x_6]$

Lembremos que, por ser a equação característica uma equação quadrática, temos que o traço (\mathcal{S}) é simplesmente a soma dos autovalores que caracterizam uma órbita. Dessa forma, as condições de estabilidade podem ser escritas em termos desta soma de autovalores[22], de maneira que:

- surgimento de movimentos estáveis: $\mathcal{S} = -(1 + (-b)^k)$
- perda de estabilidade dos movimentos: $\mathcal{S} = +(1 + (-b)^k)$

Vemos ainda que as soluções desta equação característica são dadas por:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\mathcal{S}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathcal{S}}{2}\right)^2 - (-b)^k}. \quad (3.34)$$

Notemos que a condição de discriminante nulo requer que tenhamos: $\left(\frac{\mathcal{S}}{2}\right)^2 = (-b)^k$; esta condição separa as regiões nas quais temos os dois autovalores complexos da região onde estes são reais, sendo que na separatiz destas regiões, temos os dois autovalores iguais para a órbita sob análise. Tal condição ainda nos informa que, apenas temos movimentos de períodos ímpares com autovalores complexos para a região do espaço de parâmetros para a qual $b < 0$; por outro lado, para movimentos de período par teremos a existência de movimentos com autovalores complexos tanto para as regiões com $b < 0$ como para as regiões com $b > 1$.

Assim se $\mathcal{S} = 0$ temos que $\lambda_+ = -\lambda_-$ nestes casos, $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{-(-b)^k}$. Além disto os dois autovalores λ_+ , λ_- estão relacionados entre si de maneira que o seu produto $\lambda_+\lambda_- = (-b)^k$; isto explicita a situação de termos um autovalor nulo se, e somente se, $b = 0$.

3.5 A correspondência entre os pontos orbitais e o parâmetro σ

A correspondência entre os pontos orbitais $\{x\}_{i=1}^k$ e o parâmetro σ , não é completamente direta. A principal diferença está no fato de que uma órbita que provém de um dobramento de período possui um valor real de σ para qualquer ponto no espaço de parâmetros, em oposição aos seus pontos orbitais que não são reais antes da bifurcação, tornando-se reais apenas após a bifurcação. De fato, antes do seu nascimento, esta órbita de período k possui um conjunto de pontos orbitais complexos tal que $\{x_i\}_{i=1}^k = \{x_i^*\}_{i=1}^k$, ou seja, os pontos da órbita são conjugados entre si. No ponto de bifurcação, esta órbita complexa de período k , coincide com a órbita real de período $\frac{k}{2}$, que bifurca neste ponto, dando origem à órbita real de período k , num processo de dobramento de período.

No entanto, nos casos de órbitas que provém de bifurcações tangentes, tem-se uma situação diferente. Antes de uma bifurcação tangente, as duas órbitas que provém desta, O_1 e O_2 , possuem pontos orbitais complexos de maneira que $O_1 = \{x_i\}_{i=1}^k$ e $O_2 = \{x_i^*\}_{i=1}^k$ sendo que $O_1 = O_2^*$, ou seja, os pontos das órbitas O_1 e O_2 são complexos conjugados uns aos outros de modo que tanto a soma dos pontos da órbita O_1 , como a soma σ_2 dos pontos da órbita O_2 , são igualmente complexas conjugadas. Estas duas órbitas coincidem no ponto de bifurcação tangente, tornando-se uma mesma órbita real de período k , e conseqüentemente possuindo $\sigma_1 = \sigma_2$. Após este ponto temos novamente duas órbitas O_1 e O_2 diferentes, possuindo $\sigma_1 \neq \sigma_2$, sendo contudo, as duas órbitas reais.

3.6 Equações Fundamentais

Pelas seções anteriores podemos concluir que existem três equações fundamentais:

- a equação orbital parametrizada $P_k(x, a, b; \sigma) = 0$
- a equação paramétrica $F_k(a, b; \sigma) = 0$
- a equação de autovalores parametrizada $\Lambda_k(a, b, \sigma, \lambda) = \lambda^2 + \lambda \mathcal{S}_k + (-b)^k = 0$ onde $\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_k(a, b; \sigma)$ é o traço da matriz de autovalores.

Tais equações são ditas fundamentais por conterem toda a informação acerca da natureza algébrica de um movimento de um dado período k . O grau em σ da equação paramétrica $F_k(a, b; \sigma)$ nos informa o número máximo de órbitas diferentes que um dado período k pode ter. Sendo que, para um dado ponto (a, b) no espaço de parâmetros, e para um valor de σ determinado pela solução da equação paramétrica, para tal ponto no espaço de parâmetros temos os pontos orbitais dados pela equação $P_k(x, a, b; \sigma) = 0$. Da mesma forma, dados um ponto no espaço de parâmetros e o valor do parâmetro σ de uma órbita, obtemos informações a respeito da estabilidade da órbita pela equação de autovalores parametrizada. De fato, ainda podemos obter os domínios de estabilidade, $W_k(a, b; \lambda)$, dos movimentos de um dado período, considerando:

$$W_k(a, b, \lambda) = R(\Lambda_k(a, b, \lambda, \sigma), F_k(a, b, \sigma); \sigma),$$

$$W_{k+} \equiv W(a, b, \lambda = +1) = R(\Lambda_k(a, b, \lambda = +1, \sigma), F_k(a, b, \sigma); \sigma), \text{ (surgimento da estabilidade)}$$

$$W_{k-} \equiv W(a, b, \lambda = -1) = R(\Lambda_k(a, b, \lambda = -1, \sigma), F_k(a, b, \sigma); \sigma). \text{ (perda da estabilidade)}$$

Assim $W_{k-} = 0$ representa as curvas de dobramento de período $k \rightarrow 2k$. Por outro lado, $W_{k+} = 0$ engloba tanto as curvas que descrevem o surgimento de movimentos estáveis de período k que provem de um processo de dobramento de período de $\frac{k}{2} \rightarrow k$, bem como as curvas que descrevem as bifurcações tangentes; estas últimas ainda podem ser obtidas por um outro caminho uma vez que as curvas de bifurcação tangente são marcadas pelo nascimento de duas órbitas de período k que provêm do plano complexo, sendo uma estável e outra instável. Assim, podemos obter estas curvas considerando o discriminante da equação paramétrica em relação a σ :

$$\Delta_k(a, b, \sigma) = D(F_k(a, b, \sigma); \sigma). \tag{3.36}$$

Vale ressaltar que as curvas de bifurcações de dobramento de período $\frac{k}{2} \rightarrow k$ não podem ser obtidas desta forma.

Consideraremos, em capítulos posteriores, as equações fundamentais para os períodos 4, 5 e 6, e a partir destas obteremos as fronteiras de estabilidade de um dado movimento periódico.

Capítulo 4

As Equações Fundamentais para os Períodos: 4, 5 e 6

Neste capítulo, aplicamos a Teoria Geral desenvolvida no capítulo 3, para obter resultados analíticos, exatos, novos e completos, para movimentos com períodos 4, 5 e 6, a saber, as equações orbitais e de autovalores para cada um destes períodos.

4.1 Equações Orbitais

Começamos apresentando as equações orbitais, resultantes de computações extensas, obtidas usando-se implementações em MAPLE(versão 5.0) dos algoritmos obtidos no capítulo 3. Alguns dos resultados obtidos para período 4 já foram por nós publicados[38, 27]

4.1.1 Período 4

A equação orbital parametrizada que define todos os possíveis movimentos de período 4 é a seguinte:

$$P_4(x) = x^4 - \sigma x^3 + \theta_2(\sigma) x^2 - \theta_1(\sigma) x + \theta_0(\sigma), \quad (4.1)$$

onde

$$\theta_2(\sigma) = \frac{1}{2} [\sigma^2 + \sigma(1 - b) - 4a], \quad (4.2a)$$

$$\theta_1(\sigma) = \frac{1}{24} [4\sigma^3 + 12(1 - b)\sigma^2 - 40a\sigma + 8(1 - b)(1 + b)^2], \quad (4.2b)$$

$$\theta_0(\sigma) = \frac{1}{24} \left\{ \sigma^4 + 6(1 - b)\sigma^3 + [-16a + 3(1 + b)^2] \sigma^2 - (1 - b) [12a - 14(1 + b)^2] \sigma + 24a^2 - 24(1 + b)^2(a - b) \right\}. \quad (4.2c)$$

4.1.2 Período 5

Para o caso do período 5 temos:

$$P_5 = x^5 - \sigma x^4 + \theta_3(\sigma) x^3 - \theta_2(\sigma) x^2 + \theta_1(\sigma) x - \theta_0(\sigma). \quad (4.3)$$

onde

$$\theta_3 = \frac{1}{2} (\sigma^2 + (1-b)\sigma - 5a), \quad (4.4a)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{12} \left[2\sigma^3 + 6(1-b)\sigma^2 - 26a\sigma - \frac{\mathcal{N}_5}{\mathcal{D}_5}(1-b) \right], \quad (4.4b)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{24} \left\{ \sigma^4 + 6(1-b)\sigma^3 - [22a - 3(1+b^2)]\sigma^2 - 6(1-b)[3a - (b^2 + b + 1)]\sigma \right. \\ \left. + 15[3a - 2(b^2 + b + 1)]a - \frac{\mathcal{N}_5}{\mathcal{D}_5}[2(1-b)\sigma + 3b] \right\}, \quad (4.4c)$$

$$\theta_0 = \frac{1}{120} \left\{ \sigma^5 + 10(1-b)\sigma^4 - [30a - (15b^2 + 8b + 15)]\sigma^3 \right. \\ \left. - 2(1-b)[35a - 9(b^2 + b + 1)]\sigma^2 \right. \\ \left. + [149a^2 - 2(63b^2 + 79b + 63)a - 12(b^2 + b + 1)(1-b)^2]\sigma \right. \\ \left. + 60(1-b)(b^2 + b + 1)a \right. \\ \left. - \frac{\mathcal{N}_5}{\mathcal{D}_5}[5(1-b)\sigma^2 + (5b^2 + 17b + 5)\sigma - (1-b)(13a + 6b^2 + 14b + 6)] \right\}, \quad (4.4d)$$

$$\mathcal{N}_5 = 3\sigma^4 - 2(b-1)\sigma^3 - 3(6a - 3b^2 + 4b - 3)\sigma^2, \quad (4.4e)$$

$$+ 2(b-1)(19a + 3b^2 - 3b + 3)\sigma + 15(a + 2b^2 - 2b + 2)a \\ \mathcal{D}_5 = 3\sigma^2 - 3(1-b)\sigma - 3a + (4b^2 + b + 4). \quad (4.4f)$$

4.1.3 Período 6

Para o período 6 a equação orbital é dada por:

$$P_6(x) = x^6 - \sigma x^5 + \theta_4(\sigma)x^4 - \theta_3(\sigma)x^3 + \theta_2(\sigma)x^2 - \theta_1(\sigma)x + \theta_0(\sigma), \quad (4.5)$$

onde

$$\theta_4 = \frac{1}{2} [\sigma^2 + (1-b)\sigma - 6a], \quad (4.6a)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{12} \left[2\sigma^3 + 6(1-b)\sigma^2 - 32a\sigma - \frac{\mathcal{N}_6^{(1)}}{\mathcal{D}_6}(1-b) \right], \quad (4.6b)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{24} \left\{ \sigma^4 + 6(1-b)\sigma^3 - [28a - 3(1-b)^2]\sigma^2 - 6(1-b)[4a - (b^2 + 1)]\sigma \right. \\ \left. + 36[2a - (1+b^2)] - 2\frac{\mathcal{N}_6^{(1)}}{\mathcal{D}_6}(1-b)\sigma + 3\frac{\mathcal{N}_6^{(2)}}{\mathcal{D}_6}b \right\}, \quad (4.6c)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{120} \left\{ \sigma^5 + 10(1-b)\sigma^4 - 5[8a - 3(1-b)^2]\sigma^3 - 10(1-b)[10a - 3(b^2 + 1)]\sigma^2 \right. \\ \left. + 12[22a^2 - 13a(1+b^2) - 2b(1-b)^2]\sigma - \frac{\mathcal{N}_6^{(1)}}{\mathcal{D}_6}(1-b)[5\sigma^2 + 5(1-b)\sigma - 18a] \right\}$$

$$+3\frac{\mathcal{N}_6^{(2)}}{\mathcal{D}_6} [5b\sigma - 2(1-b^3)] - 6b\frac{\mathcal{N}_6^{(3)}}{\mathcal{D}_6} \left. \right\}, \quad (4.6d)$$

$$\begin{aligned} \theta_0 = & \frac{1}{720} \left\{ \sigma^6 + 15(1-b)\sigma^5 - 5[10a - 9(1-b)^2]\sigma^4 - 5(1-b)[16a - 7b^2 + 2b - 7]\sigma^3 \right. \\ & + 2[272a^2 - 9(27b^2 - 10b + 27)a + 9(5b^2 - 8b + 5)(b-1)^2]\sigma^2 \\ & + 24(1-b)(15a - 25b^2 + 26b - 25)a\sigma - 360a^2(2a - 3(1+b^2)) - \frac{5}{2}\left(\frac{\mathcal{N}_6^{(1)}}{\mathcal{D}_6}\right)^2(1-b)^2 \\ & - 2\frac{\mathcal{N}_6^{(1)}}{\mathcal{D}_6} [5(1-b)\sigma^3 + 15(1-b)^2\sigma^2 - 44(1-b)a\sigma + 15(b^4 - b^3 + 6b^2 - b + 1)] \\ & \left. - 9\frac{\mathcal{N}_6^{(2)}}{\mathcal{D}_6} [5b\sigma^2 - (1-b)(4b^2 - b + 4)\sigma - 10ba] + 36b\sigma\frac{\mathcal{N}_6^{(3)}}{\mathcal{D}_6} - 360b\frac{\mathcal{N}_6^{(4)}}{\mathcal{D}_6}(1+b^2) \right\} \quad (4.6e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_6 = & 3\sigma^4 - 7(1-b)\sigma^3 - (12a - 11b^2 - 5b - 11)\sigma^2 + (1-b)(16a - 19b^2 - 34b - 19)\sigma \\ & - (1-b)^2(4a - 8b^2 - 13b - 8), \quad (4.7a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_6^{(1)} = & \sigma^6 - 2(1-b)\sigma^5 + 2(2a + 5b^2 - 22b + 5)\sigma^4 - 4(1-b)(18a + 5b^2 - 20b + 5)\sigma^3 \\ & - [32a^2 - 8(22b^2 - 5b + 22)a + 3(9b^2 + 4b + 9)(b^2 + 4b + 1)]\sigma^2 \\ & + 2(1-b)[64a^2 - 4(29b^2 + 46b + 29)a + 51b^4 + 132b^3 + 258b^2 + 132b + 51]\sigma \\ & - 12(1-b)^2[8a^2 - (13b^2 + 28b + 13)a + (b^2 + b + 1)(8b^2 + 13b + 8)], \quad (4.7b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_6^{(2)} = & 3\sigma^6 - 4(1-b)\sigma^5 - 12(3a - 4b)\sigma^4 + 2(1-b)(48a + 5b^2 - 26b + 5)\sigma^3 \\ & + [96a^2 - 24(7b^2 + 3b + 7)a + 13b^4 + 68b^3 + 126b^2 + 68b + 13]\sigma^2 \\ & - 2(1-b)[64a^2 - 88(b+1)^2a + 27b^4 + 48b^3 + 90b^2 + 48b + 27]\sigma \\ & + 4(1-b)^2(8a - 9b^2 - 24b - 9)a, \quad (4.7c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_6^{(3)} = & \sigma^7 - 2(10a - 27b)\sigma^5 + 2(1-b)(20a - 7b^2 - 55b - 7)\sigma^4 \\ & + (64a^2 - 16(8b^2 + 11b + 8)a + (7b^2 + 4b + 7)(9b^2 + 10b + 9))\sigma^3 \\ & + 2(1-b)[16a^2 + 4(29b^2 + 53b + 29)a - (105b^4 + 211b^3 + 376b^2 + 211b + 105)]\sigma^2 \\ & - 4(1-b)^2[48a^2 - (25b^2 + 42b + 25)a - (8b^2 + 13b + 8)(7b^2 + 4b + 7)]\sigma \\ & + 24(1-b)^3(4a - 8b^2 - 13b - 8)a, \quad (4.7d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_6^{(4)} = & \sigma^6 - (1-b)\sigma^5 - (14a + b^2 - 17b + 1)\sigma^4 + (1-b)(34a - 3b^2 - 43b - 3)\sigma^3 \\ & + [40a^2 - 2(29b^2 - b + 29)a - 4b^4 + 27b^3 + 8b^2 + 27b - 4]\sigma^2 \\ & - (1-b)[96a^2 - 2(69b^2 + 110b + 69)a + 16b^4 + 87b^3 + 178b^2 + 87b + 16]\sigma \\ & + 2(1-b)^2[28a^2 - 9(6b^2 + 11b + 6)a + 3(b^2 + b + 1)(8b^2 + 13b + 8)]. \quad (4.7e) \end{aligned}$$

4.2 Equações Paramétricas

Nesta seção apresentamos as equações paramétricas para os períodos 4, 5 e 6.

4.2.1 Período 4

Como vimos, os coeficientes da equação (4.1) ($\theta_n(\sigma)$) podem ser escritos em termos de σ , a e b . De modo que a equação que parametriza as órbitas de período 4, é dada por:

$$F_4(a, b; \sigma) = \sigma^3 + [-4a + 3(1+b)^2]\sigma + 4(b-1)(1+b)^2. \quad (4.8)$$

Esta equação pode ainda ser reescrita de maneira mais compacta, de forma a termos:

$$F_4(a, b; \sigma) = \sigma^3 - 3U\sigma - 2V. \quad (4.9)$$

onde $U \equiv 4a/3 - (1+b)^2$ e $V \equiv 2(1-b)(1+b)^2$.

A equação (4.8) é uma equação cúbica em σ e b , e linear em a . O fato desta equação ser uma equação cúbica em σ revela a existência de 3 órbitas de período 4. De maneira que o discriminante desta equação (4.9), em relação a σ é dado por:

$$\Delta_4 = -2^2 3^3 (V^2 - U^3). \quad (4.10)$$

A condição $\Delta_4 = 0$ fornece as curvas de bifurcação tangente para período 4.

Podemos também resolver a equação (4.9) em σ , obtendo desta forma:

$$\sigma_1 = N_+ + N_-, \quad (4.11)$$

$$\sigma_2 = \omega N_+ + \frac{N_-}{\omega} = \omega N_+ + \omega^2 N_-, \quad (4.12)$$

$$\sigma_3 = \omega^2 N_+ + \frac{N_-}{\omega^2} = \omega^2 N_+ + \omega N_-. \quad (4.13)$$

onde fixamos:

$$\omega = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}), \quad \omega^2 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}). \quad (4.14)$$

e

$$N_+ \equiv \sqrt[3]{V + \sqrt{\Delta}}, \quad (4.15)$$

Usamos esta definição para calcular N_- :

$$N_- \equiv \frac{U}{N_+} \quad \left(= \sqrt[3]{V - \sqrt{\Delta}} \right), \quad (4.16)$$

Cada σ_i fornece uma órbita de período 4.

4.2.2 Período 5

$$F_5(a, b; \sigma) = \sum_{i=0}^6 \Theta_i(a, b) \sigma^i, \quad (4.17)$$

onde

$$\Theta_6 = 1, \quad (4.18a)$$

$$\Theta_5 = -(1 - b), \quad (4.18b)$$

$$\Theta_4 = -(11a - 3(b^2 + 6b + 1)), \quad (4.18c)$$

$$\Theta_3 = (1 - b)(18a - (11b^2 + 34b + 11)), \quad (4.18d)$$

$$\Theta_2 = 19a^2 - (19b^2 + 58b + 19)a + 4(11b^4 + 9b^3 + 5b^2 + 9b + 11), \quad (4.18e)$$

$$\Theta_1 = -(1 - b)(17a^2 + 8(3b^2 - 7b + 3)a + 12(3b^4 + 5b^3 + 5b^2 + 5b + 3)), \quad (4.18f)$$

$$\begin{aligned} \Theta_0 = & -9a^3 + 8(5b^2 - b + 5)a^2 \\ & -4(7b^4 + 13b^3 + 5b^2 + 13b + 7b)a \\ & + 8(4b^2 + b + 4)(b^4 + b^3 + b^2 + b + 1). \end{aligned} \quad (4.18g)$$

Esta equação é de grau 6 em σ e em b , e de grau grau 3 em a . O fato desta equação ser uma equação de sexto grau em σ reflete a existência de um número máximo de 6 órbitas de período 5 para o mapa de Hénon.

4.2.3 Período 6

$$F_6(a, b; \sigma) = \sum_{i=0}^9 \Theta_i(a, b) \sigma^i, \quad (4.19)$$

onde

$$\Theta_9 = 1, \quad (4.20a)$$

$$\Theta_8 = (1 - b), \quad (4.20b)$$

$$\Theta_7 = -24a + 2(b^2 + 16b + 1), \quad (4.20c)$$

$$\Theta_6 = -2(b - 1)(4a - (7b^2 + 12b + 7)), \quad (4.20d)$$

$$\Theta_5 = 144a^2 - 16(b^2 + 25b + 1)a + (49b^4 + 52b^3 + 266b^2 + 52b + 49), \quad (4.20e)$$

$$\begin{aligned} \Theta_4 = & -(1 - b) \left[112a^2 - 16(b^2 + 27b + 1)a \right. \\ & \left. + (175b^4 + 388b^3 + 518b^2 + 388b + 175) \right], \end{aligned} \quad (4.20f)$$

$$\begin{aligned} \Theta_3 = & -4 \left[64a^3 - 8(b + 5)(5b + 1)a^2 - 2(17b^4 - 48b^3 - 172b^2 - 48b + 17)a \right. \\ & \left. - (7b^2 + 2b + 7)(5b^4 + 9b^3 - b^2 + 9b + 5) \right], \end{aligned} \quad (4.20g)$$

$$\begin{aligned} \Theta_2 = & -4(b - 1) \left[64a^3 - 8(15b^2 + 38b + 15)a^2 + 6(23b^4 + 48b^3 + 96b^2 + 48b + 23)a \right. \\ & \left. - (7b^4 + 33b^3 + 55b^2 + 33b + 7)(7b^2 + 2b + 7) \right], \end{aligned} \quad (4.20h)$$

$$\begin{aligned} \Theta_1 = & 8(b - 1)^2 \left[32a^3 - 2(19b^2 + 34b + 19)a^2 - 2(26b^4 + 23b^3 + 9b^2 + 23b + 26)a \right. \\ & \left. + (b^2 + b + 1)(7b^2 + 2b + 7)(8b^2 + 13b + 8) \right], \end{aligned} \quad (4.20i)$$

$$\Theta_0 = 16a(b - 1)^3 \left[16a^2 - (37b^2 + 62b + 37)a + 3(b^2 + b + 1)(8b^2 + 13b + 8) \right]. \quad (4.20j)$$

A equação 4.19 possui grau 9 em σ , o que nos revela ser este o número total de órbitas possíveis de período 6.

4.3 Equações de Autovalores

A equação quadrática que rege a estabilidade das órbitas periódicas, como se pode ver nas expressões a seguir, depende essencialmente do traço \mathcal{S} .

4.3.1 Período 4

$$\lambda^2 + \mathcal{S}\lambda + b^4 = 0, \quad (4.21)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & -\frac{2}{3}\sigma^4 + 4(b-1)\sigma^3 + \frac{2}{3}[16a - 3(1+b)^2]\sigma^2 - \frac{4}{3}(b-1)[6a - 7(1+b)^2]\sigma \\ & - 16(a - (1+b)^2)a - 2b(2b+3)(3b+2), \end{aligned} \quad (4.22)$$

sendo que, para cada valor de a , b temos, em geral, três valores de σ , e, por sua vez, para cada escolha de σ teremos dois autovalores.

4.3.2 Período 5

$$\lambda^2 + \mathcal{S}\lambda - b^5 = 0, \quad (4.23)$$

onde:

$$\mathcal{S} = 2 \left[\sigma b^2 + \frac{\mathcal{N}_5}{\mathcal{D}_5} b + 16\theta_0 \right]. \quad (4.24)$$

4.3.3 Período 6

$$\lambda^2 - \mathcal{S}\lambda + b^6 = 0, \quad (4.25)$$

onde:

$$\mathcal{S} = 2b^3 + \left(\frac{\mathcal{N}_6^{(1)}}{\mathcal{D}_6} + 2\frac{\mathcal{N}_6^{(4)}}{\mathcal{D}_6} \right) b^2 - 2\frac{\mathcal{N}_6^{(5)}}{\mathcal{D}_6} b + 64\theta_0, \quad (4.26)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_6^{(5)} = & \sigma^8 + 2(-9a + 2b^2 + 17b + 2)\sigma^6 + 2(b-1)(-6a + 9b^2 + 29b + 9)\sigma^5 \\ & + (72a^2 - 12(3b^2 + 22b + 3)a + 186b^2 + 82b + 59b^4 + 82b^3 + 59)\sigma^4 \\ & + 2(b-1)[8a^2 - 12(3b^2 + 16b + 3)a + (b^2 + b + 1)(111b^2 + 116b + 111)]\sigma^3 \\ & + 2[-32a^3 - 24(2b^2 - 9b + 2)a^2 + (115b^4 - 56b^3 - 226b^2 - 56b + 115)a \\ & + 104b^6 + 36b^5 + 22b^4 + 22b^2 + 36b + 104]\sigma^2 \\ & + 4(b-1)[-64a^3 + 4(21b^2 + 62b + 21)a^2 - (11b^4 + 196b^3 + 402b^2 + 196b + 11)a \\ & + (b^2 + b + 1)(16b^4 + 87b^3 + 178b^2 + 87b + 16)]\sigma \\ & + 8(b-1)^2[-24a^3 + 5(11b^2 + 20b + 11)a^2 - 9(6b^2 + 11b + 6)(b^2 + b + 1)a \\ & + 3(8b^2 + 13b + 8)(b^2 + b + 1)^2]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Capítulo 5

Estudo Detalhado dos Períodos: 4, 5 e 6

Neste capítulo estudamos as equações obtidas no capítulo anterior, com particular ênfase nos domínios de estabilidade dos períodos 4, 5 e 6. Em particular, localizamos e classificamos todas as singularidades existentes ao longo das curvas de bifurcação correspondentes a estes períodos. Vale salientar que as fronteiras de estabilidade dos períodos em questão só foram apresentadas de maneira numérica na literatura [19, 20, 21, 25, 26]. Analisaremos ainda a topologia algébrica que as superfícies $F_k(\sigma, a, b) = 0$ apresentam nas proximidades das curvas, portanto sempre que usarmos a palavra topologia estaremos nos referindo a uma análise da estrutura desta superfície.

5.1 Introdução

Este capítulo contém uma análise detalhada da estrutura do espaço de parâmetros, baseando-se na solução das equações obtidas no capítulo anterior.

5.2 Período 4

5.2.1 Os Pontos Orbitais

Por ser uma equação quártica em x , a equação orbital (4.1) pode resolvida nesta variável, obtendo-se como resultado as 4 raízes que, parametrizadas em relação a σ , constituem todas as órbitas de período 4. Desta forma obtemos:

$$x_1 = \frac{1}{4} \left\{ \sigma - S_1 - \sqrt{S_2(S_1 + \sigma)} \right\} \quad (5.1a)$$

$$x_2 = \frac{1}{4} \left\{ \sigma + S_1 - \sqrt{S_2(S_1 - \sigma)} \right\} \quad (5.1b)$$

$$x_3 = \frac{1}{4} \left\{ \sigma - S_1 + \sqrt{S_2(S_1 + \sigma)} \right\} \quad (5.1c)$$

$$x_4 = \frac{1}{4} \left\{ \sigma + S_1 + \sqrt{S_2(S_1 - \sigma)} \right\} \quad (5.1d)$$

onde usamos as abreviações

$$S_1 \equiv \sqrt{\sigma^2 + 4(1+b)^2}, \quad (5.2a)$$

$$S_2 \equiv 2 \left(\frac{\sigma - 2(1-b)}{\sigma} \right) S_1. \quad (5.2b)$$

Para período 4, o entrelaçamento dos pontos x_i é o seguinte:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Como já comentado anteriormente, não precisamos ter necessariamente os quatro pontos x_1 , x_2 , x_3 e x_4 diferentes. Podemos dramatizar mais isso considerando:

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 &\Rightarrow S_1 = +\frac{1}{2}[\sqrt{S_2(S_1 - \sigma)} - \sqrt{S_2(S_1 - \sigma)}], \\ x_2 = x_3 &\Rightarrow S_1 = +\frac{1}{2}[\sqrt{S_2(S_1 - \sigma)} + \sqrt{S_2(S_1 - \sigma)}], \\ x_3 = x_4 &\Rightarrow S_1 = -\frac{1}{2}[\sqrt{S_2(S_1 - \sigma)} - \sqrt{S_2(S_1 - \sigma)}], \\ x_4 = x_1 &\Rightarrow S_1 = -\frac{1}{2}[\sqrt{S_2(S_1 - \sigma)} + \sqrt{S_2(S_1 - \sigma)}]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Isto ocorre quando $S_2^2\sigma^2 + 4S_1^3(S_1 - S_2) = 0$, ou seja, quando

$$a = \frac{1}{4} \frac{(b^2 - b + 1)(b^2 + b + 1)(1 + b)^2}{b^2} - b. \quad (5.5)$$

O fato de que $b \rightarrow 0$ implica $a \rightarrow \infty$, pela equação (5.5) reflete a impossibilidade de se ter duas componentes iguais numa órbita de período primitivo k no limite $b = 0$, uma vez que neste limite, como já observado, a dinâmica do mapa de Hénon se reduz à dinâmica do mapa quadrático, e neste limite as equações algébricas são abelianas[44].

5.2.2 Fronteiras de Estabilidade

Uma vez que possuímos a equação (4.8), que conecta os parâmetros de controle do sistema (a, b) com o parâmetro σ , podemos calcular a resultante entre esta equação e a equação de autovalores (4.21), em relação a σ . Procedendo desta forma conseguimos a variedade $W_4(a, b, \lambda)$:

$$W_4(a, b, \lambda) = d_6 a^6 + d_5 a^5 + d_4 a^4 + d_3 a^3 + d_2 a^2 + d_1 a + d_0, \quad (5.6)$$

onde

$$d_6 = 4096\lambda^3, \quad (5.7a)$$

$$d_5 = -4096\lambda^3(3b^2 + 2b + 3), \quad (5.7b)$$

$$d_4 = 256\lambda^2 \left[(1 + 48\lambda)b^4 + 2\lambda b(34b^2 + 19b + 34) + \lambda(\lambda + 48) \right], \quad (5.7c)$$

$$\begin{aligned} d_3 = & -256\lambda^2 \left[(1 + 48\lambda)b^6 + 2(3 + 34\lambda)b^5 + (1 - 82\lambda)b^4 - 212\lambda b^3 \right. \\ & \left. + \lambda(\lambda - 82)b^2 + 2\lambda(3\lambda + 34)b + \lambda(\lambda + 48) \right], \end{aligned} \quad (5.7d)$$

$$\begin{aligned} d_2 = & 16\lambda \left[(16\lambda - 1)b^4 + 6\lambda b(2b^2 - b + 2) - \lambda(\lambda - 16) \right] \times \\ & \left[(32\lambda + 1)b^4 - 6\lambda b(10b^2 + 31b + 10) + \lambda(\lambda + 32) \right], \end{aligned} \quad (5.7e)$$

$$d_1 = 0, \quad (5.7f)$$

$$d_0 = \left[(16\lambda - 1)b^4 + 6\lambda b(2b^2 - b + 2) - \lambda(\lambda - 16) \right]^3. \quad (5.7g)$$

Esta variedade possui grau 12 no parâmetro b e grau 6 em a e λ . O fato de termos um

grau sêxtico no autovalor reflete a não fatorabilidade da variedade $W_4(a, b, \lambda)$ sobre os números racionais. Lembremos que temos um número máximo de 3 órbitas de período 4 e que cada uma destas órbitas possui dois autovalores o que nos dá um máximo de 6 autovalores possíveis para um dado ponto (a, b) no espaço de parâmetros.

Variedades para $\lambda = +1$

Como vimos a variedade $W_4(a, b, \lambda)$, em geral não é fatorável sobre os números racionais, contudo existem valores particulares de λ para os quais uma fatoração é possível, um destes valores é dado por $\lambda = +1$. Para $\lambda = +1$ a Eq. (5.6) simplifica-se bastante, podendo ser escrita como um produto de três fatores sobre os racionais:

$$W_{4+} = w_{4+}^{(1)} w_{4+}^{(2)} w_{4+}^{(3)}, \quad (5.8)$$

onde

$$w_{4+}^{(1)} = 4a - (5b^2 - 6b + 5), \quad (5.9)$$

$$w_{4+}^{(2)} = 64a^3 - 144(1+b)^2 a^2 + 108(1+b)^4 a - 27(5b^2 - 6b + 5)(1+b)^4, \quad (5.10)$$

$$w_{4+}^{(3)} = 16a^2 + 8(1+b)^2 a + (5b^2 - 6b + 5)(1+b)^2, \quad (5.11)$$

A solução da Eq. (5.9) satisfaz:

$$a = \frac{1}{4}(5 - 6b + 5b^2) = (1-b)^2 + \frac{(1+b)^2}{4}. \quad (5.12)$$

As três soluções da Eq. (5.10) são:

$$a = \frac{3(b+1)^2}{4} + \frac{3\sqrt[3]{4(b-1)^2(1+b)^4}}{4}, \quad (5.13)$$

$$a = \frac{3(b+1)^2}{4} + \frac{3\omega\sqrt[3]{4(b-1)^2(1+b)^4}}{4}, \quad (5.14)$$

$$a = \frac{3(b+1)^2}{4} + \frac{3\omega^2\sqrt[3]{4(b-1)^2(1+b)^4}}{4} \quad (5.15)$$

onde $\omega \equiv -(1 - i\sqrt{3})/2$.

Ambas soluções da Eq. (5.11) são

$$a = -\frac{1}{4}(1+b)^2 \pm \frac{i}{2}(1-b^2). \quad (5.16)$$

Tais soluções são sempre complexas, com exceção dos limites não dissipativos: $b = \pm 1$.

As soluções para $w_{4+}^{(1)} = 0$, ou seja, a curva descrita pela equação (5.12), é justamente a curva que define a fronteira de movimentos de período 2 reais estáveis, isto é, a curva (5.12) define o nascimento de período 4 estável, proveniente do dobramento $2 \rightarrow 4$. Por outro lado a equação $w_{4+}^{(2)} = 0$ define o nascimento de órbitas de período 4 que provêm de bifurcação tangente, esta variedade pode ainda ser obtida considerando o discriminante $D(F_4(a, b, \sigma); \sigma)$.

Variedades para $\lambda = -1$

As equações que definem a perda de estabilidade dos movimentos de período 4 são conseguidas considerando-se $\lambda = -1$ na equação (5.6).

$$W_{4-} = \sum_{i=0}^6 g_i a^i, \quad (5.17)$$

onde os coeficientes g_i são dados por:

$$g_6 = 4096, \quad (5.18a)$$

$$g_5 = -4096 (3b^2 + 2b + 3), \quad (5.18b)$$

$$g_4 = 256 (47b^4 + 68b^3 + 38b^2 + 68b + 47), \quad (5.18c)$$

$$g_3 = -256 (47b^6 + 62b^5 - 83b^4 - 212b^3 - 83b^2 + 62b + 47b), \quad (5.18d)$$

$$g_2 = 16 (31b^4 - 60b^3 - 186b^2 - 60b + 31) (17b^4 + 12b^3 - 6b^2 + 12b + 17), \quad (5.18e)$$

$$g_1 = 0, \quad (5.18f)$$

$$g_0 = (17b^4 + 12b^3 - 6b^2 + 12b + 17)^3, \quad (5.18g)$$

equação esta que não fatora sobre os racionais.

5.2.3 Propriedades do Espaço de Parâmetros

Obtivemos nas seções anteriores as curvas algébricas que representam o nascimento de movimentos de período 4 ($w_{4+}^{(1)} = 0, w_{4+}^{(2)} = 0$), bem como a curva que descreve a perda de estabilidade de tais movimentos ($W_{4-} = 0$). Consideramos estas curvas juntamente com as curvas que estruturam a cascata de dobramento de período $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$, na figura 5.1.

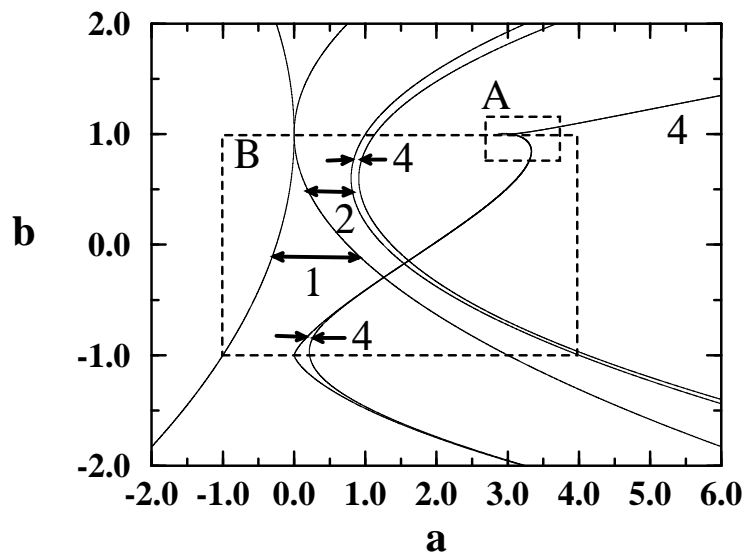


Figura 5.1: Curvas de bifurcação para período 4, 2, 1. Os números indicam períodos e as setas indicam as regiões de estabilidade dos movimentos com tais períodos.

Destacam-se duas regiões de extrema importância na figura 5.1, a primeira delas ocorre na região assinalada por **A** na figura 5.1, e refere-se à existência de uma cúspide presente na curva de bifurcação tangente, sendo o período 4 o período mais baixo, do mapa de Hénon, que apresenta uma estrutura desta espécie. Esta estrutura será estudada com mais detalhe nas secções posteriores. A região assinalada por **B**, na figura 5.1, mostra a região comumente abordada na literatura, uma vez que esta está limitada ao intervalo $-1 \leq b \leq 1$ (onde existem movimentos estáveis). Trataremos em mais detalhe esta região a seguir.

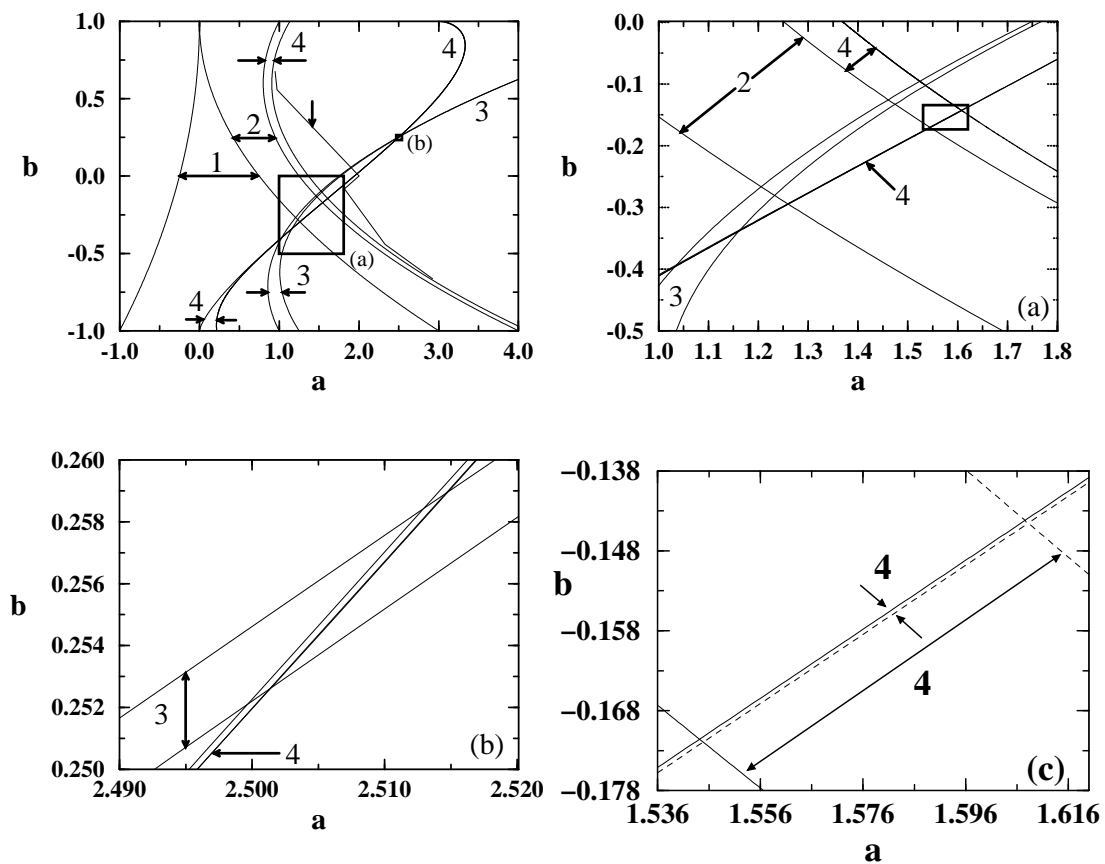


Figura 5.2: Domínios de estabilidade para movimentos de períodos 4, 3, 2 e 1. Em (a) e (b) detalhes das regiões de multiestabilidade de movimentos de período 4 com períodos menores. Em (c) ampliação da região assinalada em (a).

Mostramos na figura 5.2 uma visão dos domínios de estabilidade de todos os movimentos de período inferiores ou iguais a 4. Nota-se nestas figuras a presença de duas classes de multiestabilidade de movimentos envolvendo órbitas de período 4, uma destas é a estabilidade simultânea de movimentos de período 4 com movimentos de período menor que este, as regiões em que ocorrem estes fenômenos são mostradas na figura (5.2-a) e (5.2-b). A coexistência de atratores de períodos diferentes ocorre pela primeira vez com movimentos de período 3, que possui regiões de estabilidade simultânea com os períodos 2 e 1, separadamente, a obtenção da localização destas regiões é de extrema importância em estudos de controle de atratores [36, 37]. A segunda classe de multiestabilidade destacada na figura (5.2-a) e mostrada em mais detalhe na figura (5.2-c), aparece pela primeira vez em movimentos de período 4, esta região é o que chamamos de uma região de multiestabilidade de movimentos de período 4, ou seja, uma região de multiestabilidade

isoperiódica. Tal região é caracterizada pela coexistência simultânea de dois atratores diferentes de período 4 um deles relacionado com a órbita de período 4 que provêm de um dobramento de período, e outro relacionado com a órbita estável que nasce da bifurcação tangente de período 4. Mostramos esquematicamente a região de estabilidade isoperiódica na figura 5.3.

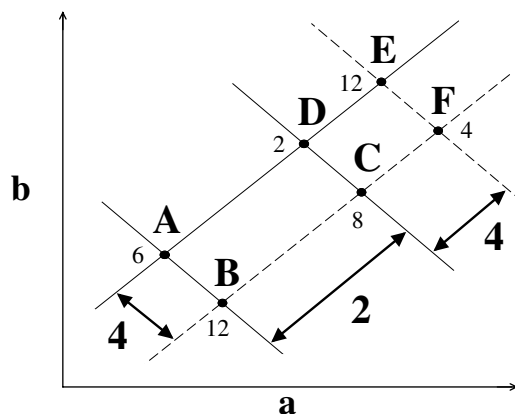


Figura 5.3: Figura esquemática da região de multiestabilidade de movimentos de períodos 2 e 4 e da região de multiestabilidade de duas órbitas isoperiódicas de período 4. As letras rotulam as intersecções que definem os domínios, e os números indicam o grau algébrico das coordenadas que definem as intersecções.

A figura 5.3 traz uma representação pictórica das regiões de multiestabilidade, de forma que a região de multiestabilidade de dois movimentos de período 4, mostrada na figura (5.2-c), é ilustrada como a região definida pelos vértices C, D, E e F. Nota-se que todos os vértices dessa região possuem graus algébricos diferentes, contudo todos estes vértices possuem coordenadas em b que são *units*[29], ou seja raízes de equações algébricas recíprocas, desta forma para cada coordenada em b_f de um vértice destas regiões de multiestabilidade (isoperiódica ou não) existe uma coordenada $b_u = 1/b_f$ que igualmente é um vértice de intersecção, contudo este se localizando fora do intervalo de estabilidade. De fato as coordenadas em a destas intersecções são dependentes das coordenadas em b [38] de maneira que $a = \kappa b$, onde b é um número com grau da metade do grau algébrico de b .

5.2.4 A Cúspide

Como já mencionamos anteriormente, o período 4 é o primeiro caso em que temos o surgimento de uma cúspide na curva de bifurcação tangente, contudo grande parte desta estrutura se localiza na região para qual temos $b > 1$, sendo que em tal região não há movimento estável. Porém devido a simplicidade das equações envolvidas neste caso podemos considerar uma análise algébrica detalhada, pois estruturas semelhantes existem para outros períodos, em outras regiões do espaço de parâmetros, como veremos posteriormente.

Como podemos ver da figura 5.4 a cúspide, existente na curva de bifurcação de período 4 tem uma espécie de *eixo de simetria* ao longo da linha $b = 1$, onde o mapa de Hénon é não dissipativo, uma vez que nesta linha encontram-se localizado o ponto de cúspide β cujas coordenadas são $(a_\beta, b_\beta) = (3, 1)$ e o ponto γ em que há uma auto-intersecção da variedade $W_{4-} = 0$ localizado em $(a_\gamma, b_\gamma) = (2 + \sqrt{17}/2, 1)$, o ponto α é outro ponto de intersecção desta variedade com a linha $b = 1$ e está localizado em $(a_\alpha, b_\alpha) = (2 + \sqrt{3}/2, 1)$. Os outros dois pontos assinalados

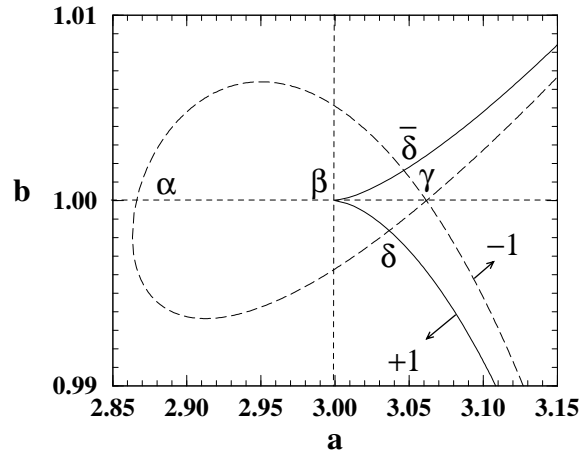


Figura 5.4: Cúspide existente nas curvas de bifurcação para período 4.

na figura 5.4 são intersecções da variedades $W_{4-} = 0$ e $w_{4+}^{(2)} = 0$ localizados em $(a_\delta, b_\delta) \approx (3.03646342, 0.998381041)$ e $(a_{\bar{\delta}}, b_{\bar{\delta}}) \approx (3.04631917, 1.00162584)$ sendo as coordenadas em b raízes do polinômio recíproco dado por:

$$6749 b^{12} + 66096 b^{11} + 137160 b^{10} - 7776 b^9 - 228585 b^8 - 58320 b^7 + 169344 b^6 - 58320 b^5 - 228585 b^4 - 7776 b^3 + 137160 b^2 + 66096 b + 6749 = 0. \quad (5.19)$$

Estudaremos agora a linha $b = 1$ em detalhe. Verifiquemos inicialmente que a equação (4.8), quando consideramos $b = 1$, se reduz a:

$$\sigma[\sigma^2 - 4(a - 3)] = 0. \quad (5.20)$$

Tendo portanto como raízes os três valores de σ :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= +2\sqrt{a-3} \\ \sigma_3 &= -2\sqrt{a-3}. \end{aligned}$$

A figura 5.5 mostra σ em função do parâmetro a para alguns valores na vizinhança de $b = 1$.

Pela figura 5.5 vemos como a superfície $F_4(\sigma, a, b) = 0$ muda na vizinhança da linha $b = 1$, de maneira que os valores de σ que representam a órbita de período 4 que provêm de dobramento de período se comportam de maneira drasticamente diferente para $b = 1.001$ em relação a $b = 0.999$, tal comportamento tem conseqüências na conexão existente entre as órbitas de período 4, tal conexão pode ainda ser vista através da equação de autovalores (4.21) ao longo da linha $b = 1$:

$$\lambda^2 + \left(-\frac{2}{3}\sigma^4 + \frac{8}{3}(4a-3)\sigma^2 - 16a(a-4) - 50 \right) \lambda + 1 = 0 \quad (5.21)$$

A equação acima apenas tem potências pares em σ , tal propriedade faz com que ao longo da linha $b = 1$, as órbitas com $\sigma = \sigma_2$ e $\sigma = \sigma_3$, por diferirem apenas de um sinal, pela equação

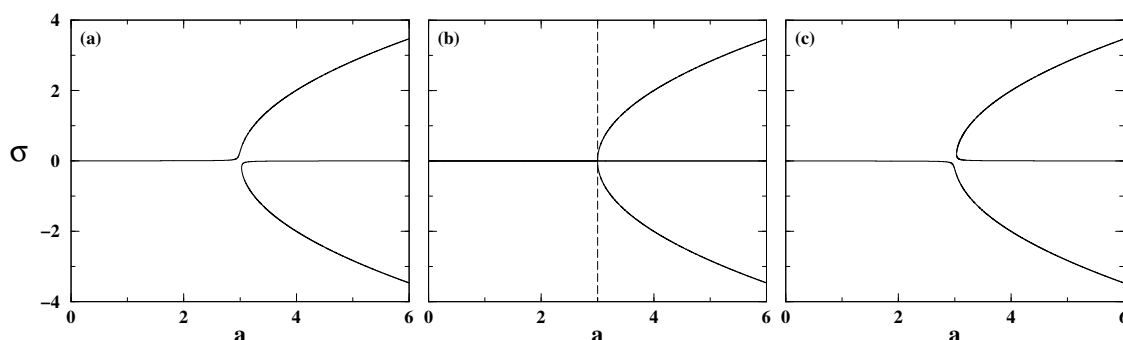


Figura 5.5: Os três valores de σ em função do parâmetro a para alguns valores fixos de b na vizinhança de $b = 1$. Em (a) $b = 0.999$, em (b) $b = 1$ e em (c) $b = 1.001$. A linha vertical tracejada em (b) indica o ponto de cúspide em $a = 3$.

(5.21) possuirão os mesmos autovalores.

Uma vez que, como vemos acima, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ quando temos $a = 3$, ou em $a = 3$ existe um ponto triplamente degenerado, tal ponto nada mais é, como podemos ver da figura, que o ponto de cúspide da curva do bifurcação. Para os valores do parâmetro a tal que $a < 3$ temos somente uma órbita para qual há um σ real e no caso ainda constante, para tal valor de σ ($\sigma = 0$) a órbita é composta pelos seguintes pontos orbitais:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + \sqrt{a-1}, \\ x_2 &= -1 - \sqrt{a-1}, \\ x_3 &= 1 - \sqrt{a-1}, \\ x_4 &= -1 + \sqrt{a-1}. \end{aligned}$$

sendo que estes pontos seguem a dinâmica de entrelaçamento apresentada em (5.3). Tais pontos são raízes da seguinte equação orbital simplificada:

$$x^4 - 2ax^2 + (a-2)^2 = (x^2 - 2x - a + 2)(x^2 + 2x - a + 2) = 0.$$

Notemos que os pontos que definem a órbita em questão passam do plano complexo para o plano real em $a = 1$, sendo que neste caso temos uma órbita de período 4 degenerada, uma vez que esta órbita se reduz a:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Voltando ao caso da órbita para a arbitrário vemos que a estabilidade desta órbita é definida pela equação de autovalores considerando $\sigma = 0$, $b = 1$, em tais condições a equação de autovalores se reduz a:

$$\lambda^2 - 2\lambda(8a^2 - 32a + 25) + 1 = 0 \quad (5.22)$$

Desta forma:

$$\lambda_{\pm} = 25 + 8a(a - 4) \pm 4 \sqrt{(a - 1) \underbrace{(4a^2 - 16a + 13)}_{[a - (2 + \frac{1}{2}\sqrt{3})][a - (2 - \frac{1}{2}\sqrt{3})]} (a - 3)}. \quad (5.23)$$

Aqui vale fazer uma pequena observação sobre o discriminante da equação dos autovalores. Como vemos da equação acima, o discriminante em questão é dado por:

$$\Delta = (a - 1)(4a^2 - 16a + 13)(a - 3). \quad (5.24)$$

Vemos portanto que tal discriminante é nulo para os parâmetros ($a = 1, a = 3$) nos quais as curvas de bifurcação ($w_{4+}^{(1)} = 0, w_{4+}^{(2)} = 0$) associadas ao autovalor $\lambda = +1$ intersectam a linha $b = 1$, e para os parâmetros $a = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}, a = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, para os quais, temos a intersecção da linha $b = 1$ com a variedade $W_{4-} = 0$. Observemos que a órbita que é detentora dos autovalores expressos em (5.23) está relacionada com a órbita que nasce de um dobramento de período de $2 \rightarrow 4$ em $a = 1$, contudo, verificamos que os autovalores de tal órbita estão correlacionados com os pontos de nascimento das demais órbitas de período 4, ilustramos tal correlação na figura (5.6).

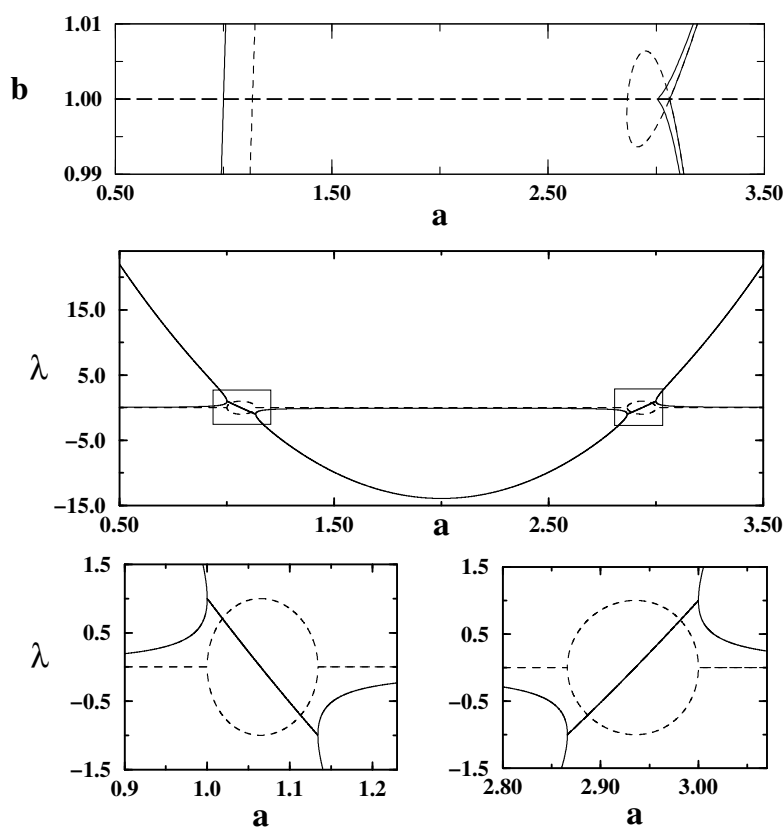


Figura 5.6: No topo: O comportamento das curvas de bifurcação de período 4 nas proximidades da linha $b = 1$, as linhas cheias indicam as curvas que possuem $\lambda = 1$ e as curvas tracejadas indicam autovalor $\lambda = -1$. No centro: Os autovalores para a órbita com $\sigma = 0$; linhas cheias indicam a parte real e as linhas tracejadas indicam a parte complexa dos autovalores, estão destacadas as regiões de estabilidade. Abaixo: Magnificação das regiões de estabilidade.

A figura (5.6) nos mostra como se dá a evolução dos autovalores para a órbita que nasce do dobramento de período. Vemos a existência de duas regiões de estabilidade para esta órbita, a primeira delas ocorre no intervalo $[1, 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}]$ e a segunda em $[2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}, 3]$ sendo que na primeira região o processo de desestabilização da órbita ocorre de maneira que os autovalores da órbita vão do conjunto $(\lambda_+, \lambda_-) = (+1, +1)$ para o conjunto $(\lambda_+, \lambda_-) = (-1, -1)$ à medida que o valor do parâmetro de controle a cresce. Em contrapartida, na segunda região de estabilidade, a órbita em questão perde a estabilidade, através de uma mudança de autovalores do conjunto $(\lambda_+, \lambda_-) = (-1, -1)$ para o conjunto $(\lambda_+, \lambda_-) = (+1, +1)$ de maneira que no intervalo de estabilidade da órbita, temos que seus autovalores são complexos. A situação descrita na figura (5.6) pode ser caracterizada como um *retorno de estabilidade* da órbita que provêm de dobramento de período $2 \rightarrow 4$ e que possui um valor nulo para σ ao longo da linha $b = 1$.

5.3 Período 5

O período 5 do mapa de Hénon é de grande importância para estudos da dinâmica do mapa em questão, por ser o primeiro período que apresenta uma estrutura em forma de “camarão”, sendo por este fato chamado de “*shrimp*” [30], no espaço de parâmetros.

5.3.1 Bifurcações Tangentes

Considerando o discriminante da equação (4.17) em relação a σ temos:

$$\Delta_5 = 2^{12} w_{5+}^{(1)} \mathcal{W}_5,$$

onde:

$$w_{5+}^{(1)} = \sum_{n=0}^{11} B_n a^n, \quad (5.25a)$$

$$\mathcal{W}_5 = [12(1-b)^2 a - (16b^4 - 10b^3 + 15b^2 - 10b + 16)]^2. \quad (5.25b)$$

Sendo que os coeficientes B_n são funções polinomiais recíprocas no parâmetro b , tais coeficientes são dadas no apêndice C. O primeiro diferencial no caso em questão, em relação aos casos anteriormente estudados, está no surgimento de duas variedades que satisfazem a condição de discriminante nulo ($\Delta_5 = 0$). As curvas descritas pela equação $w_{5+}^{(1)} = 0$ são aquelas nas quais temos o nascimento de órbitas de período 5 provenientes de bifurcações tangentes. Em contraste com os períodos mais baixos estudados, verificamos o aparecimento de um segundo fator \mathcal{W}_5 que valida igualmente a condição de discriminante nulo, a existência deste fator está ligada com a possibilidade de termos órbitas de período 5, que embora possuam pontos orbitais diferentes, compartilham um mesmo valor de σ , lembremos que a curva $w_{5+}^{(1)} = 0$ também é caracterizada pela existência de, pelo menos, duas órbitas com o mesmo σ , contudo neste caso estas duas órbitas coincidem.

5.3.2 Variedades (Domínios de Estabilidade)

Se considerarmos a resultante entre a equação de autovalores parametrizada em relação a σ e a equação paramétrica, teremos como resultado a variedade $W_5(a, b; \lambda)$ de modo que:

$$W_5(a, b; \lambda) = \sum_{n=0}^{15} C_n(b, \lambda) a^n. \quad (5.26)$$

Os coeficientes C_n , que são funções polinomiais do parâmetro a e do autovalor λ , encontram-se no apêndice B.

Sendo que no caso de $\lambda = 1$, esta variedade fatora sobre os números reais de modo que:

$$W_{5+} = w_{5+}^{(1)} w_{5+}^{(2)},$$

sendo que $w_{5+}^{(1)}$ é simplesmente um dos fatores do discriminante em relação a σ da equação paramétrica. Por outro lado $w_{5+}^{(2)}$ é dado por:

$$\begin{aligned} w_{5+}^{(2)} = & 256 a^4 - 64 (b^2 - 12b + 1) a^3 + 16 (b^4 + 6b^3 + 21b^2 + 6b + 1) a^2 \\ & + 4 (9b^6 - 14b^5 + 70b^4 - 80b^3 + 70b^2 - 14b + 9) a \\ & + (31b^4 - 89b^3 + 121b^2 - 89b + 31) (b^4 + b^3 + b^2 + b + 1). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Podemos resolver tal variedade em a , desta forma vemos que:

$$a = \frac{1}{16} \left\{ (b^2 - 12b + 1) \pm \sqrt{5}(3b^2 - 4b + 3) \pm \sqrt{-10(b-1)^2(b+1)^2(5+\sqrt{5})} \right\}. \quad (5.28)$$

De maneira que, as quatro soluções são dadas por todas as combinações possíveis dos sinais \pm indicados. A partir da expressão (5.28) concluímos que a variedade $w_{5+}^{(2)}$ só possui soluções reais nas linhas $b = 1$ e $b = -1$.

Considerando $\lambda = -1$ em (5.26) não ocorre nenhuma fatoração da variedade $W_5(a, b; \lambda = -1)$ sobre os racionais, de modo que os coeficientes C_n , dados no apêndice C são polinômios recíprocos do parâmetro b :

$$W_{5-} = \sum_{n=0}^{15} C_n(b) a^n. \quad (5.29)$$

As curvas $w_{5+}^{(1)} = 0$ e $W_{5-} = 0$, juntamente com a condição $|b| \leq 1$, definem a região de estabilidade para os movimentos de período 5 no espaço de parâmetros, estas superfícies são mostradas na figura a seguir:

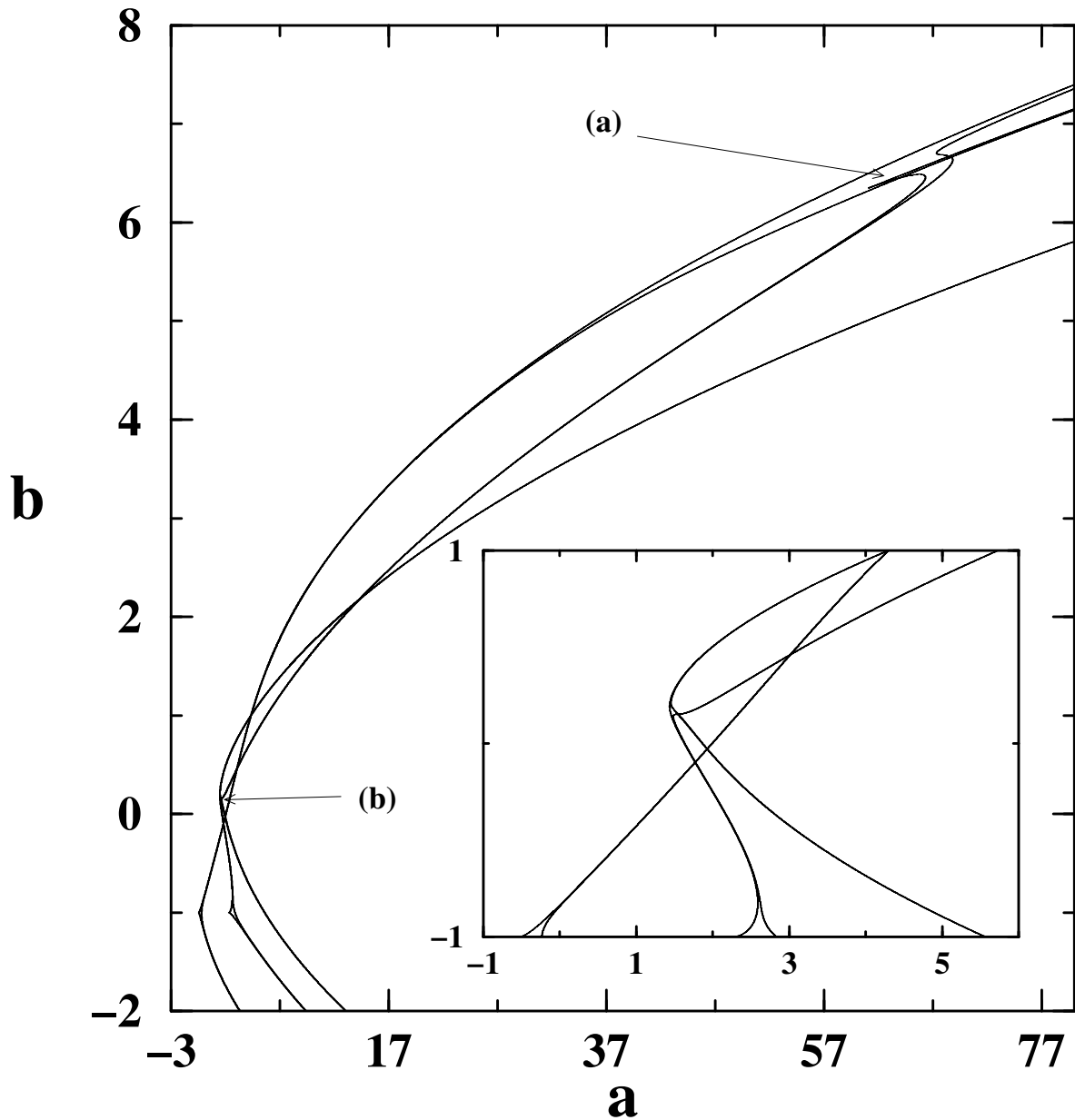


Figura 5.7: As curvas $w_{5+}^{(1)} = 0$ e $W_{5-} = 0$ para o período 5, as setas indicam as cúspides que existem nas curvas. Em detalhe o limite dissipativo $-1 \leq b \leq 1$.

A figura (5.7) mostra uma estrutura bastante rica para as curvas em questão, de maneira que temos o aparecimento de uma cúspide no intervalo $0 < b < 1$, chamada de (b) na figura (5.7) e outra na região de $b > 1$ rotulada por (a) na mesma figura. Apresentaremos na próxima seção, bem como no próximo capítulo, algumas propriedades destas estruturas.

5.3.3 Cúspides

O Período 5 é o período mais baixo para o qual, no mapa de Hénon, temos a presença de uma cúspide no espaço de parâmetros, no intervalo $|b| < 1$; analisaremos em capítulos posteriores o reflexo no espaço de fase, da presença destas estruturas singulares no espaço de parâmetros.

Notemos pelos gráficos da seção anterior que duas estruturas singulares, mostramos estas em detalhe nas figuras a seguir:

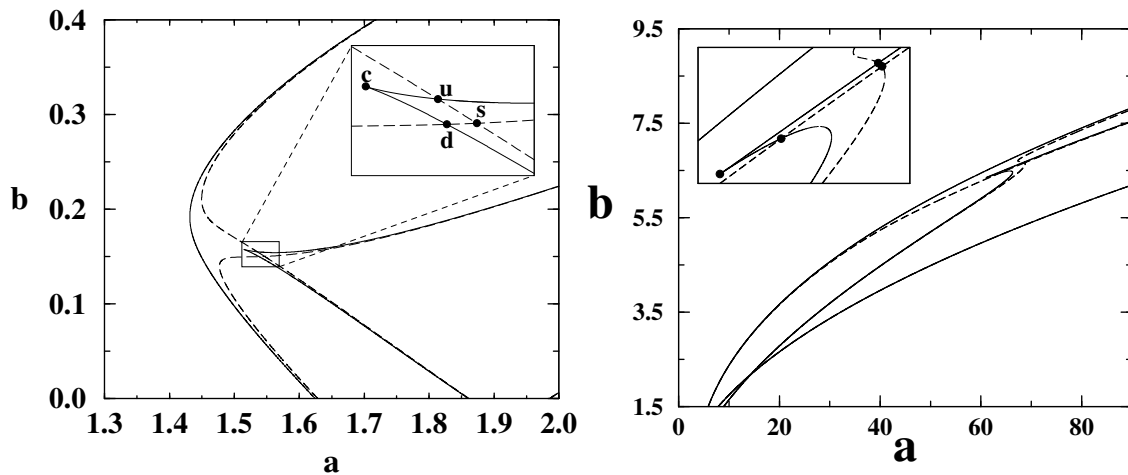


Figura 5.8: Estruturas *shrimp* de período 5.

Vemos que existem duas estruturas singulares de mesma espécie, de maneira que uma é complementar da outra de modo a respeitar a reciprocidade no parâmetro b : $b_u = 1/b_f$, evidenciamos tal fato na tabela (5.1) onde os pontos c^* , d^* , u^* e s^* são os pontos recíprocos de c , d , u e s

Tabela 5.1: Pontos dos Shrimps.

Ponto	a	b	Grau
c	1.51467821	0.15749364	36
d	1.53796786	0.149864159	212
u	1.53537434	0.154969098	212
s	1.54654400	0.150089621	154
c^*	61.0652776	6.3494627	36
d^*	63.93284994	6.4528993	212
u^*	68.47811254	6.67271015	212
s^*	68.65324747	6.66268584	154

Os pontos indicados por c , d , u , s , definem os vértices da região de multiestabilidade que compõe o *shrimp*, nesta região temos a existência simultânea de duas órbitas estáveis de período 5 [25], ou seja temos nesta região a existência de dois atratores de período 5.

Consideremos na tabela, a seguir, os pontos das órbitas de período 5 estáveis próximos aos vértices c , d , u , s .

Tabela 5.2: **Orbitas Estáveis na Região da Cúspide.**

<i>Ponto</i>	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
<i>c</i>	1.695737345	-1.383362399	-0.131945463	1.279397832	-0.142961166
	1.695737343	-1.383362396	-0.131945453	1.279397835	-0.142961173
<i>d</i>	1.717930437	-1.427966217	-0.243663457	1.264595024	-0.097749133
	1.679116772	-1.317966527	0.052571517	1.337688150	-0.243563142
<i>u</i>	1.725494150	-1.445217496	-0.285880998	1.229682343	-0.021047046
	1.693787803	-1.366756800	-0.070165041	1.318646139	-0.214326712
<i>s</i>	1.731244152	-1.453928535	-0.307522407	1.233754386	-0.021761807
	1.682564095	-1.323019315	0.048699300	1.345600911	-0.256788551

Como vimos a cúspide que existe na curva de bifurcação tangente dos movimentos do período em análise, está intimamente relacionada com a superfície $F_5(\sigma, a, b) = 0$, desta maneira consideramos algumas curvas de nível desta superfície na proximidade desta estrutura.

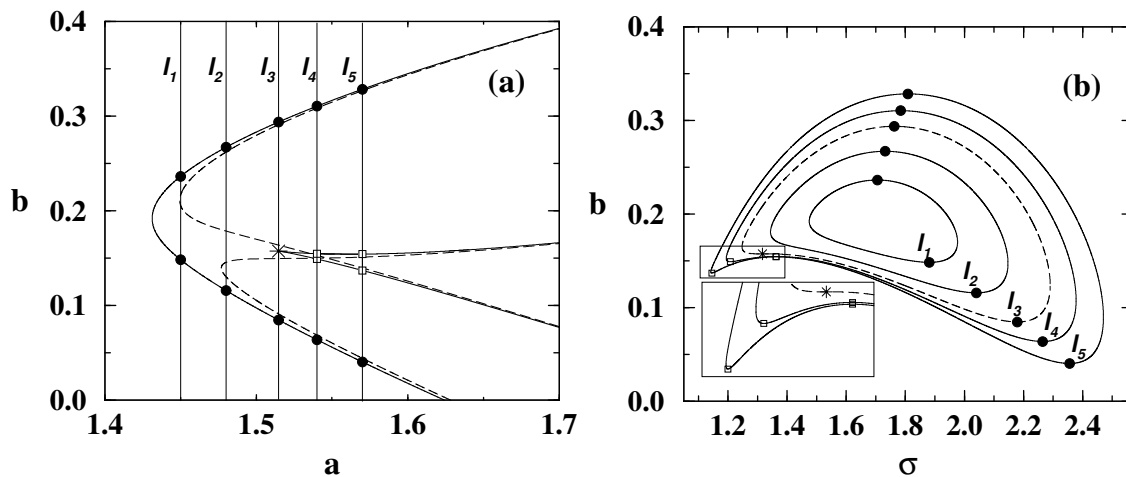


Figura 5.9: Em (a) consideramos os cortes: $l_1 : a = 1.44$; $l_2 : a = 1.47$; $l_3 : a = a_*$; $l_4 : a = 1.54$; $l_5 : a = 1.57$. Os pontos assinalados com símbolos em (a) indicam surgimento de órbitas de período 5. Em (b) plotamos o valores de σ em função do parâmetro b , para cada corte considerado em (a).

Mostramos na figura (5.9) alguns contornos locais para a variedade (4.17). A partir desta figura ilustramos como é a conexão entre o parâmetro σ das órbitas reais que existem nesta região. Vemos que o ponto de cúspide, representado pelo símbolo (*), é uma inflexão da superfície considerada, desta forma a estrutura cúspidal surge de uma deformação da superfície $F_5 = 0$.

No estudo do período 4, consideramos uma pequena perturbação do parâmetro b na vizinhança da linha $b = 1$, linha esta que se constitui numa espécie de eixo de simetria topológico-algébrica da cúspide existente neste período. Analogamente a este estudo, propomos uma linha semelhante, no sentido de significado topológico, para o caso das cúspides existentes no estudo do período 5 sendo que igualmente ao caso anteriormente estudado consideramos como *eixos de simetria*

retas que passam pelo ponto de cuspide (c) e o ponto de autointersecção (s), como mostrado na figura (5.10):

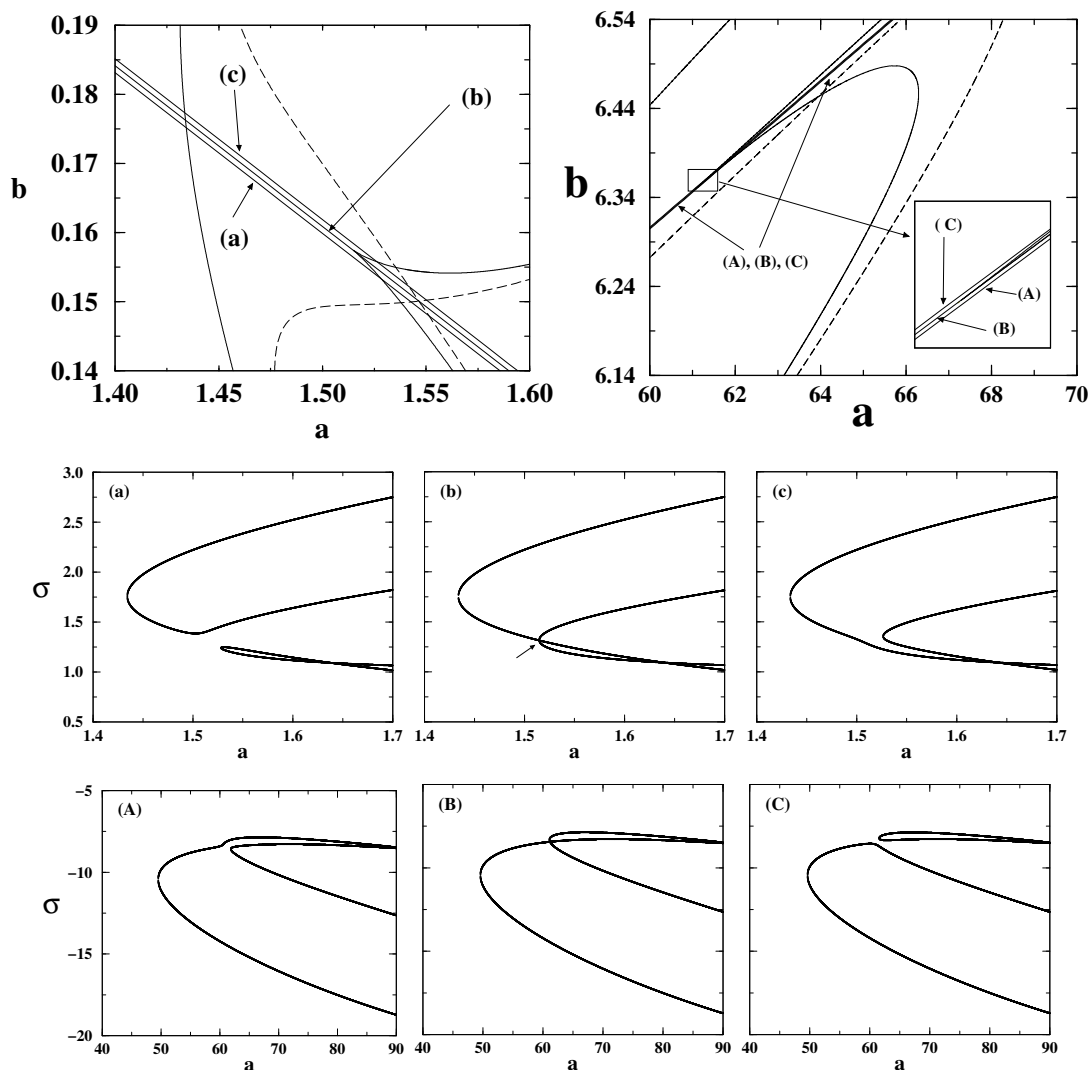


Figura 5.10: Os valores de σ em função do parâmetro a para algumas retas, no plano (a,b) , na vizinhança da reta que une o ponto c com o ponto s . Em (a) a reta $-0.2323501585a + 0.5084293645$, em (b) a reta $b = -0.2323501585a + 0.5094293645$ e em (c) a reta $b = -0.2323501585a + 0.5104293645$. A seta em (b) indica o ponto de cuspide. Em (A) a reta $b = 0.04127890957a + 3.827798903$, em (B) a reta $b = 0.04127890957a + 3.828798903$ e em (C) a reta $b = 0.04127890957a + 3.829798903$.

A análise topológica apresentada na figura (5.10) nos mostra como a superfície $F_5(\sigma, a, b) = 0$ se comporta nas proximidades das cúspides em estudo. Como já comentado, diferentemente ao caso do período 4 consideramos a reta que une o ponto de cuspide com o ponto de auto intersecção como uma *aproximação* do *eixo de simetria* destas estruturas, sendo que de fato estes eixos de simetria na verdade são de fato curvas, contudo para uma primeira análise a aproximação proposta é válida.

Vemos que igualmente ao período 4, temos um comportamento muito diferente na vizinhança

de ambas as cúspides, sendo ainda que tais comportamentos são inversos um ao outro, assim como as cúspides são recíprocas uma a outra. Visivelmente a reta que passa pelo ponto de cúspide, em ambas as estruturas, separa duas situações diferentes, havendo uma troca de dependência. Analisaremos em mais detalhe a influência destas estruturas no parâmetro σ e em última análise nas órbitas de período 5 no capítulo seguinte.

5.4 Período 6

Consideremos agora um estudo do período 6, tal período tem como uma de suas características apresentar duas formas singulares já consideradas nos estudos do período 4 e do período 5, na região de $0 < b < 1$.

5.4.1 Equação de bifurcação

Considerando o discriminante da equação (4.19) em relação a σ obtemos:

$$\Delta_6 = 2^{40} 3^{16} (b+1)^2 (b-1)^6 w_{6+}^{(1)} \mathcal{W}_6^2, \quad (5.30)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_6 = & 25920 (b-1)^2 b a^4 - 144 (18 b^6 + 425 b^5 - 368 b^4 + 255 b^3 - 368 b^2 + 425 b + 18) a^3 \\ & + 12 (375 b^8 + 5591 b^7 + 1407 b^6 + 8901 b^5 + 5360 b^4 + 8901 b^3 + 1407 b^2 + 5591 b + 375) a^2 \\ & - (4416 b^{10} + 55574 b^9 + 63407 b^8 + 117221 b^7 + 147626 b^6 + 214223 b^5 \\ & + 147626 b^4 + 117221 b^3 + 63407 b^2 + 55574 b + 4416) a + (4 b^2 + 19 b + 4) (8 b^2 + 13 b + 8) \times \\ & (142 b^8 - 71 b^7 + 239 b^6 - 78 b^5 + 265 b^4 - 78 b^3 + 239 b^2 - 71 b + 142), \end{aligned} \quad (5.31a)$$

$$w_{6+}^{(1)} = \sum_{n=0}^{20} B_n a^n. \quad (5.31b)$$

De forma que $w_6^{(1)}$ é uma equação de grau 20 no parâmetro a e de grau 40 no parâmetro b e os coeficientes B_n funções polinomiais recíprocas do parâmetro b ; estas funções são dadas no apêndice D.

Analogamente ao caso do período 5 temos para o período 6 várias possibilidades para $\Delta_6 = 0$, contudo apenas uma delas, $w_6^{(1)} = 0$, representa o surgimento de movimentos de período 6 provenientes de bifurcações tangentes. A condição $\mathcal{W}_6 = 0$ representa o caso em que temos órbitas diferentes (com pontos orbitais diferentes) com o mesmo valor para σ .

De fato se considerarmos o caso mais geral para o qual $\lambda = +1$ teremos que:

$$W_6(a, b; \lambda = +1) = w_{6+}^{(1)} w_{6+}^{(2)} w_{6+}^{(3)} w_{6+}^{(4)} = 0, \quad (5.32)$$

onde $w_{6+}^{(2)} = W_3(a, b, \lambda = -1) = W_{3-}$, ou seja $w_{6+}^{(2)}$ é a curva que define o nascimento de órbitas de dobramento de período de 3 para 6. As demais variedades $w_{6+}^{(3)}$, $w_{6+}^{(4)}$ são dadas por:

$$w_{6+}^{(3)} = 16 a^2 - 12 (3 b^2 - 4 b + 3) a + 3 (7 b^2 - 11 b + 7) (b^2 - b + 1), \quad (5.33a)$$

$$w_{6+}^{(4)} = 16 a^2 + 12 (b^2 + 1) a + 3 (1 + b + b^2) (b^2 - b + 1). \quad (5.33b)$$

Contudo vemos que as soluções de $w_{6+}^{(3)} = 0$, $w_{6+}^{(4)} = 0$ são dadas respectivamente por:

$$a = \frac{1}{8} \left[3 (3 b^2 - 4 b + 3) \pm i (1 - b^2) \sqrt{3} \right], \quad (5.34a)$$

$$a = -\frac{1}{8} \left[(b^2 + 1) \pm i (b^2 - 1) \sqrt{3} \right], \quad (5.34b)$$

ou seja apenas temos soluções de $w_{6+}^{(3)} = 0$, $w_{6+}^{(4)} = 0$ reais em $b = -1$, ou $b = 1$.

Por outro lado as curvas de dobramento de período 6 para 12 são soluções de uma variedade de grau 27 no parâmetro a e grau 54 no parâmetro b . A forma da variedade é dada por:

$$W_{6-} = \sum_{n=0}^{27} C_n a^n, \quad (5.35)$$

de forma que novamente os coeficientes C_n são funções polinomiais recíprocas no parâmetro b . Tais funções são dadas no apêndice D.

Mostramos na figura (5.11) as curvas dadas por $w_{6^+}^{(1)} = 0$, e $W_{6^-} = 0$.

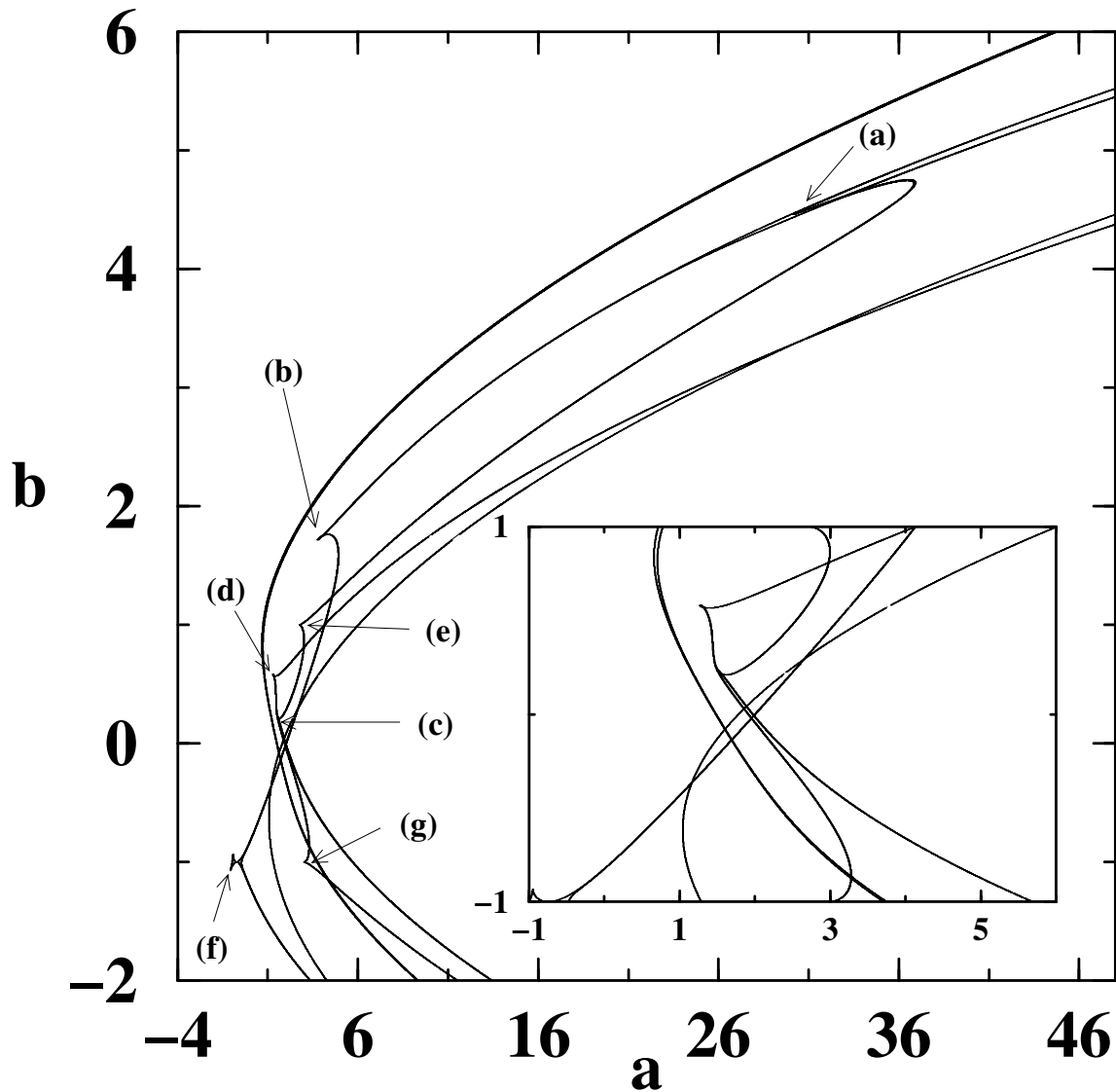


Figura 5.11: Uma visão das curvas de bifurcação de período 6, em detalhe a região $-1 \leq b \leq 1$. Os rótulos (a), (b), (c), (d), (e), (f) e (g) indicam as cúspides presentes nas variedades que representam as bifurcações tangentes de movimentos de período 6.

Analogamente ao período 5 consideramos, na figura (5.11), uma janela de análise, no espaço de parâmetros, maior que a usual apresentada na literatura onde há uma restrição ao intervalo $-1 < b < 1$, a partir desta figura vemos novamente o surgimento de cúspides tanto dentro do intervalo $-1 < b < 1$ como fora deste. Vamos considerar mais detalhes destas estruturas nas próximas seções.

5.4.2 Cúspides

Mostramos em detalhe na figura (5.12) as cúspides existentes na variedade $w_6^{(1)} = 0$ assinaladas na figura (5.11).

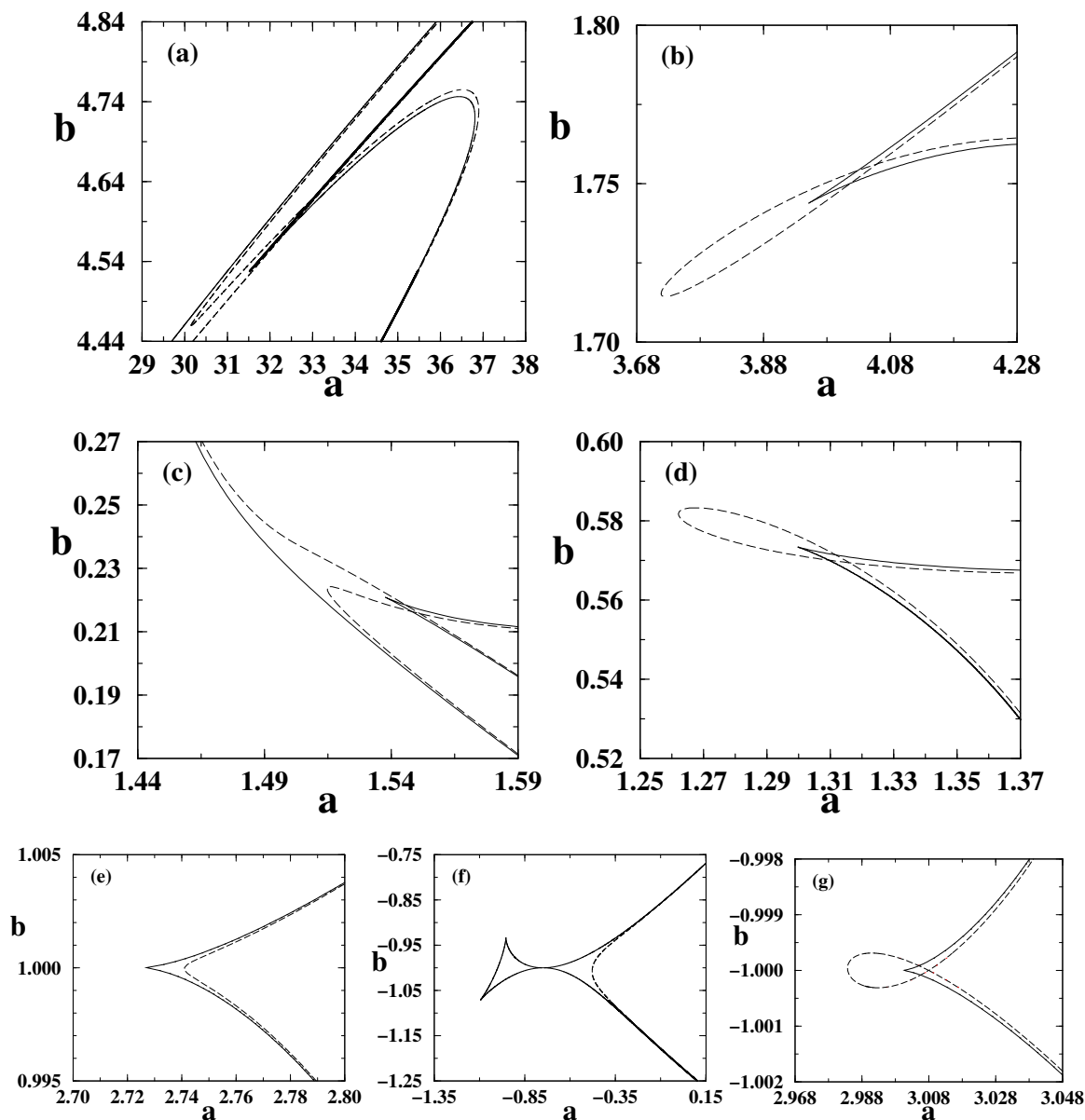


Figura 5.12: As cúspides existentes nas curvas de bifurcação tangente para o período 6. Os rótulos (a), (b), (c), (d), (e), (f) e (g) correspondem às setas marcando a existência destas estruturas cúspidas na figura 5.11.

Notamos novamente a existência, como no caso do período 5, de uma estrutura (figura 5.12(c)) que se conhece na literatura como *shrimp*, possuindo esta uma estrutura recíproca na região de $b > 1$ (figura 5.12(a)), da mesma forma que existem três estruturas semelhantes àquela existente para o período 4, a (figura (5.12(d)) e figura (5.12(g))) sendo que a cúspide da figura (5.12(d)) possui uma recíproca a esta em $b > 1$ (figura (5.12)), e a cúspide da figura (5.12(g)) é auto

recíproca assim como as estruturas cúspidas da figura (5.12(e)) e (5.12(f)); estas duas últimas estruturas aparecem pela primeira vez nas curvas de período 6 sendo que a estrutura apresentada na figura (5.12(f)) ainda não tinha sido notada em trabalhos anteriores na literatura.

Consideremos agora, igualmente aos casos dos períodos 4 e 5, uma pequena análise algébrico-topológica na vizinhança destas estruturas cúspidas. Iniciemos considerando a estrutura *shrimp* para o caso do período 6 e a sua estrutura recíproca:

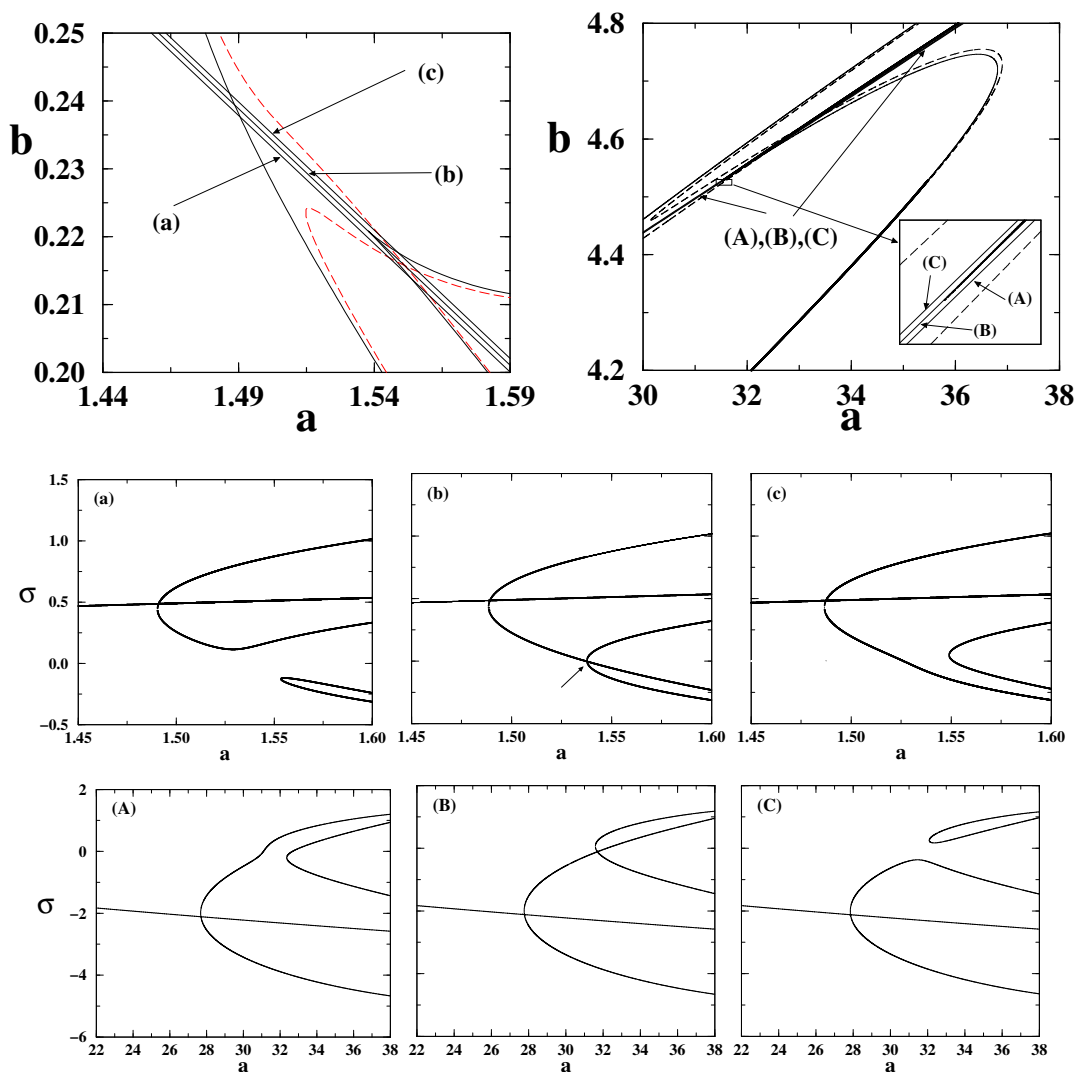


Figura 5.13: Os valores de σ em função do parâmetro a para algumas retas, no plano (a,b) , na vizinhança da reta de simetria. Em (a) a reta $b = -0.3778590038a + 0.8008630747$, em (b) a reta $b = -0.3778590038a + 0.8018630747$ e em (c) a reta $b = -0.3778590038a + 0.8028630747$. A seta em (b) indica o ponto de cúspide. Em (A) a reta $b = 0.589129833a + 2.66978625$, em (B) a reta $b = 0.589129833a + 2.67078625$ e em (C) a reta $b = 0.589129833a + 2.67178625$

Comparando a figura (5.13) com a figura (5.10) vemos que existe uma semelhança não só no plano (a,b) mas também no espaço (a,b,σ) , de forma que temos situações topologicamente iguais para as partes das superfície $F_6(\sigma, a, b) = 0$ sensíveis à presença da cúspide.

Analisemos agora o outro conjunto de cúspides recíprocas existentes para o período 6 consi-

deradas em detalhe nas figuras (5.12-b) e (5.12-d):

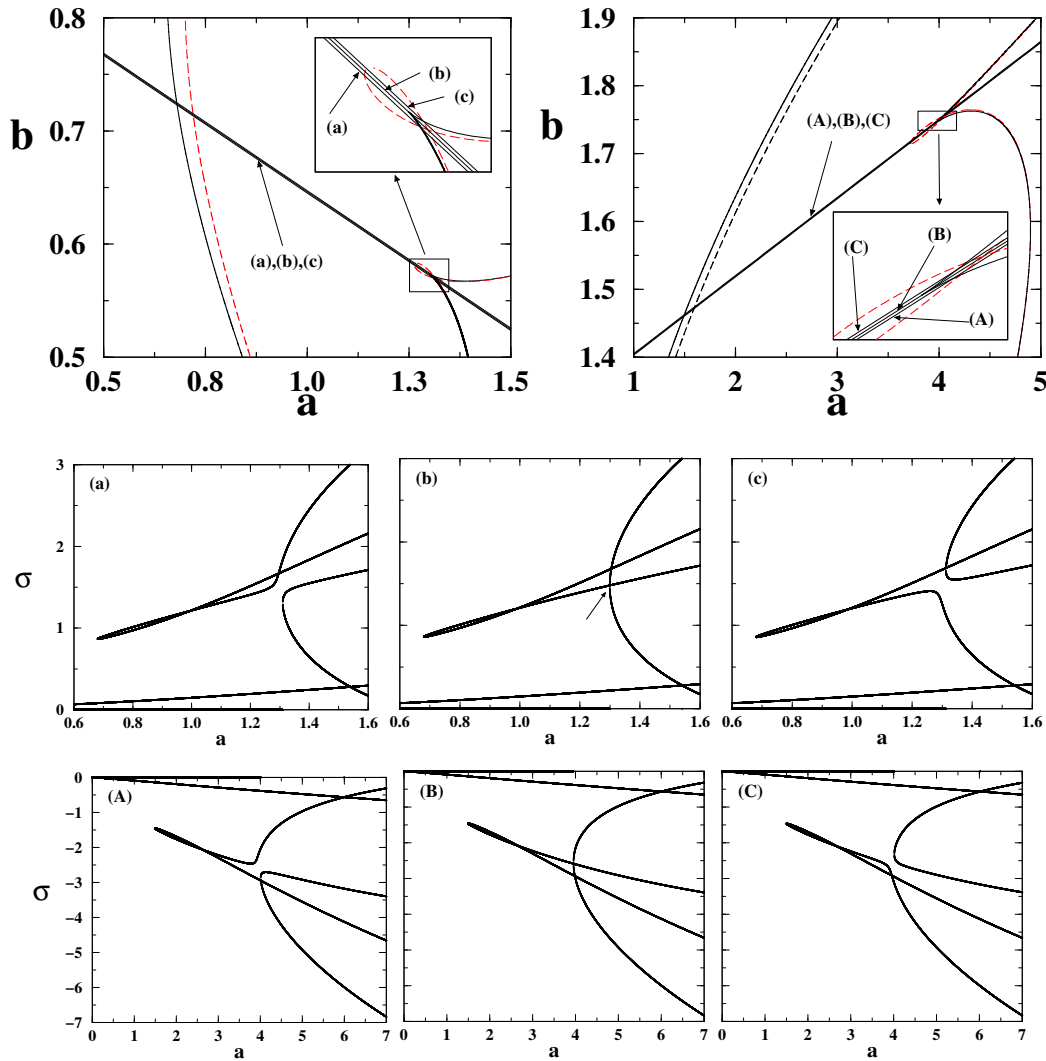


Figura 5.14: Os valores de σ em função do parâmetro a para algumas retas, no plano (a,b) , na vizinhança de da reta de simetria. Em (a) a reta $b = -0.2429020475a + 0.8880738494$, em (b) a reta $b = -0.2429020475a + 0.8890738494$ e em (c) a reta $b = -0.2429020475a + 0.8900738494$. A seta em (b) indica o ponto de cúspide. Em (A) a reta $b = 0.115025747a + 1.28832181$, em (B) a reta $b = 0.115025747a + 1.28932181$ e em (C) a reta $b = 0.115025747a + 1.29032181$

Pela figura (5.14) vemos que as estruturas recíprocas consideradas exibem uma situação diferente daquela que encontramos na análise das estruturas *shrimp*.

Contudo observemos a semelhança da vizinhança destas cúspides com a vizinhança da cúspide das curvas de bifurcação tangente de período 4 (figura (5.5)).

Como notamos na figura (5.11) e em mais detalhe nas figuras (5.12-e), (5.12-f) e (5.12-g), existem cúspides sobre a linha $b = 1$ e $b = -1$, onde o mapa de Hénon é não dissipativo; continuaremos nossa análise do espaço de parâmetros dos movimentos de período 6 estudando estas estruturas.

5.4.3 O caso $b = 1$

Semelhantemente ao caso do período 4 temos a existência de uma cúspide nas curvas de bifurcação tangente em $b = 1$, sendo que considerando $b = 1$ na equação (4.19) temos os valores de σ possíveis:

$$\sigma^3 [\sigma^6 - 12 (2a - 3) \sigma^4 + 36 (4a^2 - 12a + 13) \sigma^2 - 16 (16a^3 + 72a^2 - 117a + 108)] = 0$$

De forma que a localização das curvas dos pontos de nascimento de órbitas de período 6 é dada pelas raízes de:

$$(16a^3 - 8a^2 + 37a - 28) (16a^4 - 72a^3 + 25a^2 + 6a - 28)^2 (16a^3 - 72a^2 + 117a - 108)^3 = 0$$

Mostramos na figura (5.15) os valores possíveis de σ como função do parâmetro a para alguns valores fixos de b ($b = 0.999$, $b = 1.0$ e $b = 1.001$).

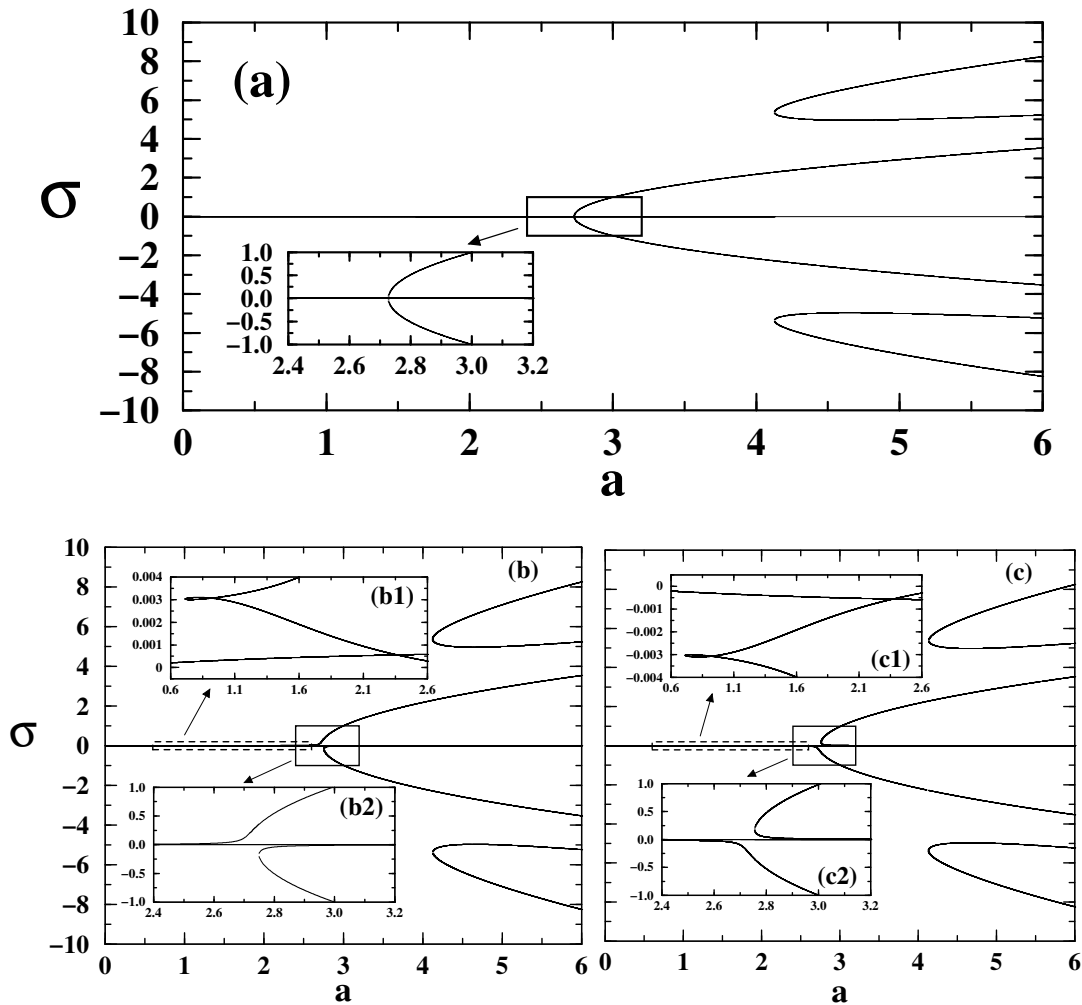


Figura 5.15: Os valores de σ em função de a para vizinhança $b = 1$. Em (a) o caso em que temos $b = 1$, em (b) o caso em que $b = 0.999$ e em (c) o caso em que $b = 1.001$. Mostra-se nos detalhes da figura (b) em (b1) e (b2) e da figura (c) em (c1) e (c2).

A figura (5.15) nos mostra uma estrutura no espaço $\sigma \times a$ muito parecida com aquela que temos para o período 4, uma vez que as figuras (5.15-b1) e (5.15-c1) apresentam uma estrutura topológica muito parecida com a que se tem para o período 4, veremos no próximo capítulo que similarmente ao caso do período 4 também para o caso em questão ocorrem fenômenos de histerese no espaço de fase.

5.4.4 Estudo do caso $b = -1$ (Limite “Hamiltoniano”)

Assim como existem estruturas cúspidas sobre a linha $b = 1$, temos também estruturas da mesma natureza sobre a linha $b = -1$. Nesta seção estudaremos a topologia ao longo da linha $b = -1$, onde o mapa em questão é Hamiltoniano e, como veremos, existem algumas simplificações algébricas. Começamos nossa discussão considerando $b = -1$ na equação (4.19):

$$p_1^2 p_2 p_3 = 0, \tag{5.36}$$

onde:

$$p_1 = \sigma - 2, \tag{5.37a}$$

$$p_2 = \sigma^2 + 4\sigma - 4a, \tag{5.37b}$$

$$p_3 = \sigma^5 + 2\sigma^4 - 4(5a + 4)\sigma^3 + 8\sigma^2 a + 4(16a^2 + 12a + 9)\sigma + 128a^2 - 96a + 72. \tag{5.37c}$$

A equação orbital para $\sigma = 2$ é dada por:

$$x^6 - 2x^5 - (3a - 4)x^4 + 2(2a - 1)x^3 + (3a^2 - 8a + 2)x^2 - 2(a - 1)ax - 2a + 1 - a^3 + 4a^2 = 0.$$

Consideremos agora as soluções de $p_2 = 0$ que são dadas por:

$$\sigma_+ = -2 + 2\sqrt{1 + a}, \tag{5.38a}$$

$$\sigma_- = -2 - 2\sqrt{1 + a}. \tag{5.38b}$$

Mostramos a seguir as curvas no plano $a \times \sigma$ que satisfazem a equação $F_6 = 0$ para alguns valores fixos do parâmetro b ($b = -1$, $b = -0.999$ e $b = -1.001$).

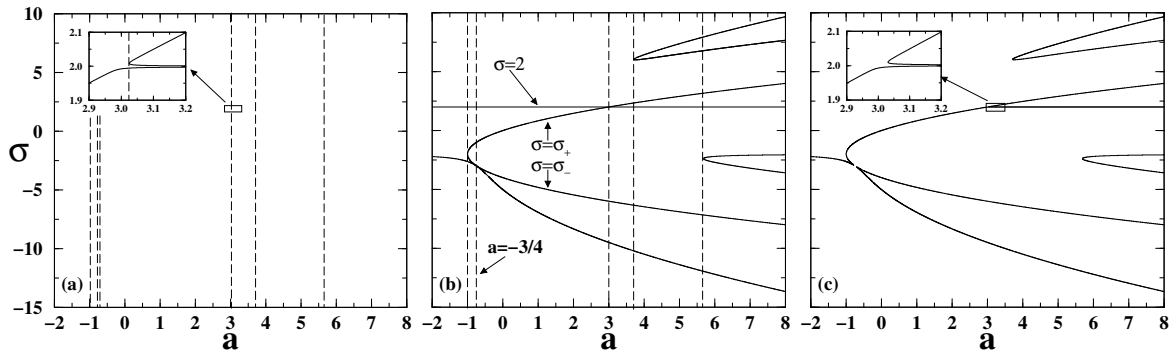


Figura 5.16: Os valores de σ em função de a para $b = -0.999$ em (a), $b = -1.0$ em (b) e $b = -1.001$ em (c). As curvas verticais tracejadas indicam o valor do parâmetro a para o qual temos uma bifurcação tangente de período 6.

Na Figura (5.16) consideramos a dependência de σ com o parâmetro a sobre a linha $b = -1$, e a sua vizinhança ($b = -0.999$, $b = -1.001$). Os detalhes da figura (5.16a) e (5.16b) estão relacionados especificamente com a cúspide mostrada em detalhe na figura (5.12g), tais detalhes revelam que a cúspide em questão tem características de uma bifurcação transcritical [33]. As linhas verticais tracejadas indicam o valor do parâmetro a para qual temos uma bifurcação tangente sobre a linha em análise, estes pontos de bifurcação são as soluções reais do discriminante da equação (4.19) em relação a σ , mais especificamente dos polinômios a seguir:

$$\begin{aligned} & (a + 1) (a - 3)^3 (16 a^2 - 8 a + 5)^3 (4 a + 3)^4 \times \\ & (16 a^6 - 136 a^5 + 213 a^4 + 220 a^3 + 126 a^2 + 108 a + 81) = 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

As raízes reais destes polinômios são dadas por:

$$\begin{aligned} a &= -1 \\ a &= -\frac{3}{4} \\ a &= 3 \\ a &= 3.70165690 \\ a &= 5.67936951 \end{aligned}$$

Sendo que os pontos $a = 3.70165690$ e $a = 5.67936951$, são ambos números sêxticos.

5.4.5 Órbitas Complexas Estáveis para Parâmetros Reais

Nas seções anteriores observamos a existência de um comportamento absolutamente novo que ainda não tinha sido observado nas curvas que descrevem o surgimento de movimentos de período 6 estáveis. Este fato, como veremos, se deve à consideração, em trabalhos anteriores [19, 20, 26], da existência somente de órbitas estáveis reais para o mapa de Hénon. Veremos, contudo que, em geral, tal consideração não é correta.

Para analisar as características desta estrutura consideramos quatro regiões distintas R_1, R_2, R_3, R_4 , sendo que estas regiões são definidas como mostrado na Figura (5.17):

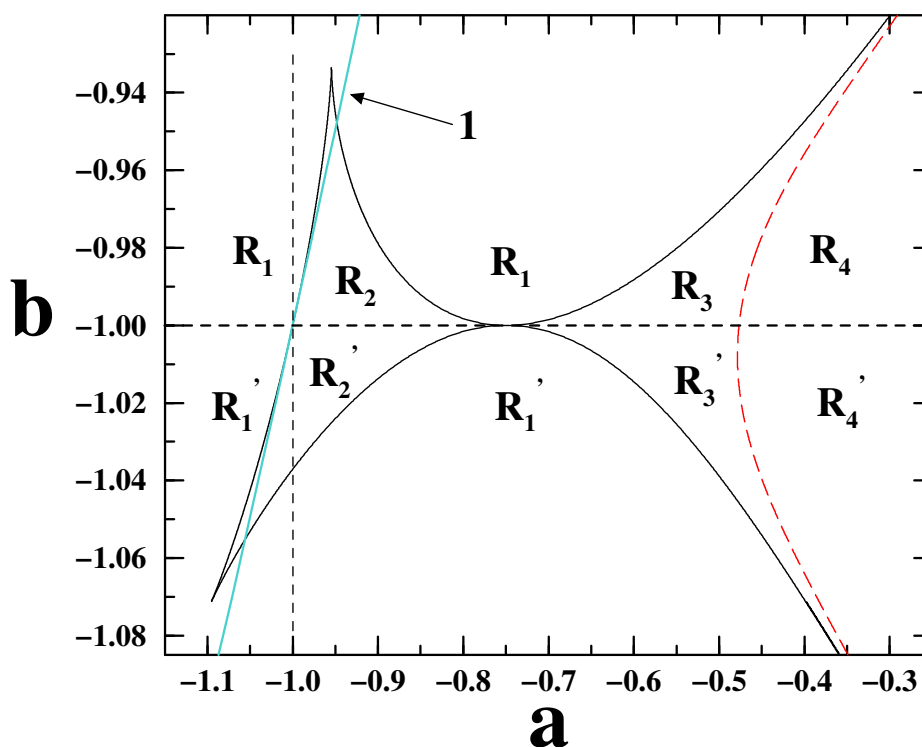


Figura 5.17: As regiões R_i e R'_i de análise da estrutura. A seta marca o nascimento da órbita real estável de período 1.

A Figura (5.17) mostra quatro regiões, (R_1, R_2, R_3, R_4) distintas em termos de dinâmica, e que são topologicamente iguais às regiões R'_i com a diferença que estas últimas se localizam fora do intervalo de existência de órbitas estáveis (pois nestas regiões $|b| > 1$).

A região R_1 tem por característica a existência das nove órbitas de período 6 no plano complexo todas estas sendo instáveis, sendo que destas apenas uma órbita possui um valor real para a soma, σ , de seus pontos orbitais, de fato esta órbita possui esta característica para qualquer ponto no espaço de parâmetros.

Ao cruzarmos da região R_1 para a região R_2 duas outras órbitas começam a ter o valor de σ real. Possuímos então na região R_2 um total de três órbitas que têm o valor de σ real, uma destas sendo estável nesta região, mas ainda nesta região todas as 9 órbitas de período 6 permanecem complexas, mostraremos de maneira mais explícita a existência de uma órbita complexa estável na região R_2 nas próximas seções.

Igualmente na região R_3 temos três órbitas possuindo um σ real, e igualmente uma destas é estável, contudo duas destas três órbitas são reais, sendo que a órbita que é estável nesta região perde a estabilidade na região R_4 .

Vemos ainda da Figura (5.17) dois fatos importantes. O primeiro, ao qual voltaremos nas próximas seções, é a existência de três pontos nos quais temos o nascimento simultâneo de duas órbitas de período 6 e uma órbita de período 1; um destes pontos encontra-se localizado fora do limite $|b| \leq 1$, um localizado em $b = -1$, e o terceiro em $b > -1$. O outro fenômeno importante é a existência de órbitas de período 6 estáveis em regiões nas quais ainda não temos a existência de um movimento de período 1 real estável.

A Região R_2

Mostramos na figura (5.18) a região de existência estável de uma órbita complexa de período 6:

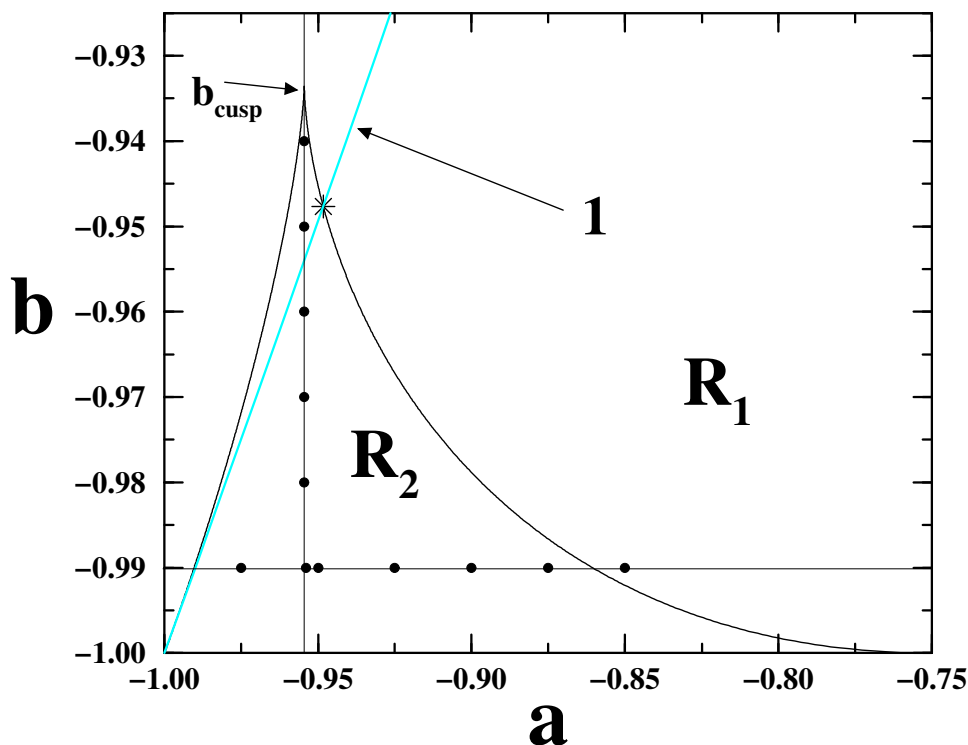


Figura 5.18: A Região R_2 de existência das órbitas de período 6 complexas estáveis. Os pontos marcados nesta figura são propostos para considerar as bacias de atração. O ponto $b_{cusp} = -0.94764$ tem grau algébrico 48.

A figura (5.18) mostra em detalhe a região (R_2) da existência da órbita de período 6 complexa estável. Uma vez que existe uma órbita estável esta deve possuir uma bacia de atração de volume não nulo. Para mostrar a existência desta bacia, propomos os pontos assinalados na figura (5.18), de maneira que apresentamos na figura (5.19), para cada ponto considerado na figura acima, a bacia de atração correspondente. Vale lembrar que, como estamos tratando de uma órbita complexa esta terá uma bacia de atração quadridimensional, contudo podemos considerar um

corde nesta superfície.

O ponto de intersecção (*) na figura (5.18), define o nascimento simultâneo de uma órbita complexa de período 6 e uma órbita real estável de período 1, numericamente este ponto está localizado em $(a_*, b_*) \approx (-0.948328, -0.947642)$, sendo que tais números tem grau algébrico 38 além disto a coordenada b deste ponto ainda tem a propriedade de ser raiz de um polinômio recíproco, sendo que o ponto complementar a este está localizado em $b = 1/b_* \approx -1.05525$ e $a \approx -1.05601$. Embora este ponto seja uma intersecção da superfície $W_{1+} = 0$ com a superfície $w_{6+}^{(1)} = 0$ ele não possui o mesmo significado físico do ponto (a_*, b_*) , uma vez que possui a coordenada b em módulo maior que a unidade. Nesta figura nota-se ainda a existência de movimentos estáveis, embora complexos, antes do surgimento dos movimentos reais estáveis de período 1. Explicitamos a existência destas órbitas complexas estáveis através da figura 5.19.

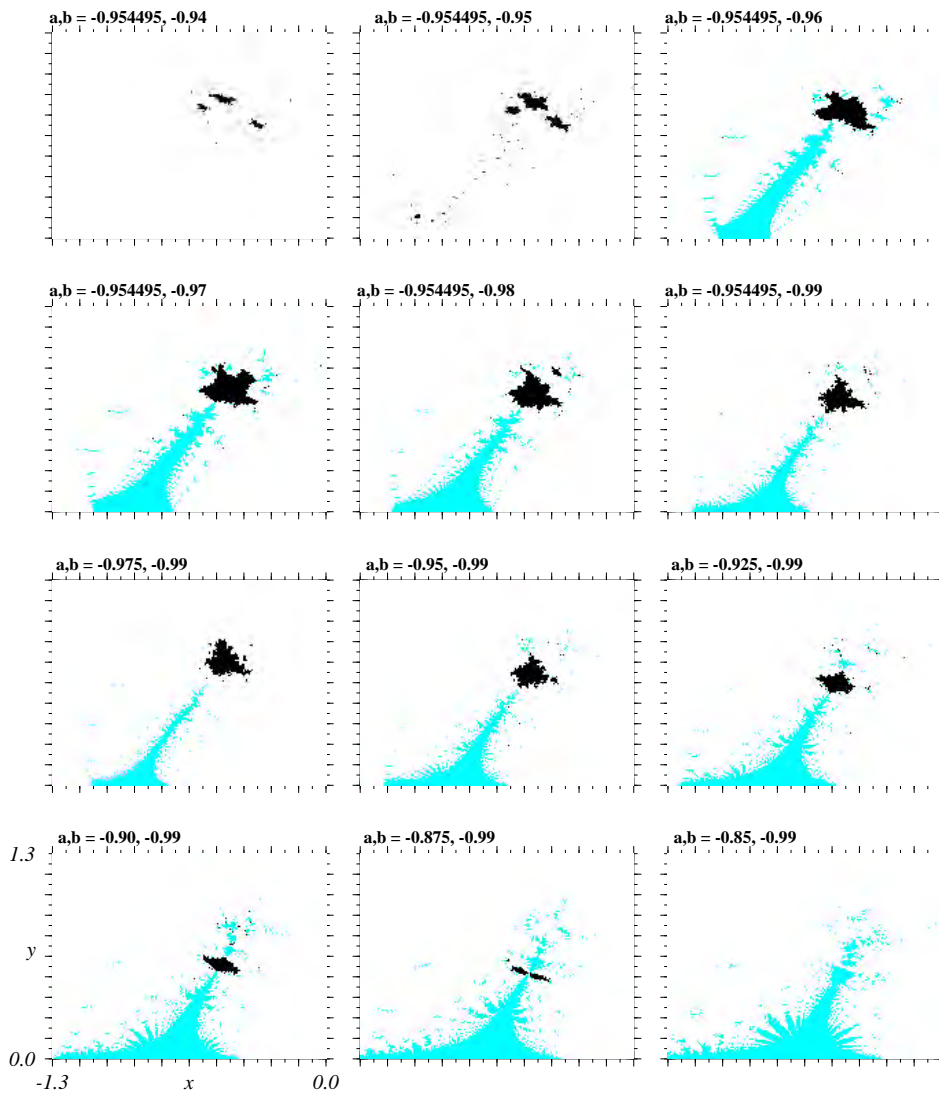


Figura 5.19: Bacias de atração para a órbita complexa de período 6 estável (em negro) e órbita de período 1. Os pontos considerados correspondem aos pontos marcados na figura 5.18.

A figura (5.19) ilustra a existência e mudança das bacias de atração da órbita complexa de período 6 (em negro) e de período 1 (em cinza). Atentamos para os pontos $(a, b) = (-0.954495, -0.94)$ e $(a, b) = (-0.954495, -0.95)$, que se constituem os dois pontos, pertencentes ao conjunto de pontos marcados na figura (5.18), que nos mostram a existência de órbitas periódicas antes do surgimento de órbitas de período 1.

A existência de órbitas periódicas complexas é em geral estudada em sistemas Hamiltonianos, mais especificamente, no estudo do chamado *caos quântico* onde estas órbitas são chamadas de *órbitas fantasmas* (Ghosts orbits) [48]. Tais órbitas fazem o papel de precursoras das órbitas clássicas [45, 46, 47, 49], e ocorrem, em geral, imediatamente antes do surgimento de uma órbita real por meio de uma bifurcação tangente.

Com a intenção de estabelecer uma conexão entre a dinâmica das órbitas *fanatasm*s, que aparecem em modelos conservativos, com a dinâmica das órbitas complexas estáveis encontradas no presente estudo, reconsideraremos o caso Hamiltoniano para o mapa de Hénon já apresentado anteriormente na seção 5.4.4.

Começemos considerando os autovalores para as órbitas que possuem $\sigma = \sigma_{\pm}$ (onde σ_+ e σ_- são dadas respectivamente pelas equações (5.38a) e (5.38b)) ao longo da linha $b = -1$. Desta forma temos:

$$\lambda_{\pm} = \gamma - 4r\delta \pm 2\sqrt{r(r\mu - 2\delta\gamma)} \quad (5.40)$$

onde:

$$\begin{aligned} \gamma &= 32a^3 + 48a^2 + 58a + 43 \\ \delta &= 16a^2 + 16a - 3 \\ \mu &= 256a^5 + 1536a^4 + 3040a^3 + 1728a^2 + 401a + 498 \end{aligned}$$

Sendo ainda que $r = +\sqrt{1+a}$ se estamos interessados no caso em que temos $\sigma = \sigma_+$ e $r = -\sqrt{1+a}$ no caso de $\sigma = \sigma_-$.

De fato a órbita de período 6 que permanece estável na região R_2 é aquela para qual temos $\sigma = \sigma_-$, sendo que a estabilidade desta órbita é mostrada na figura a seguir:

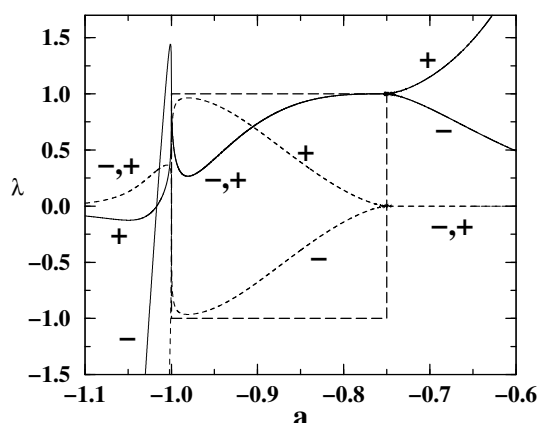


Figura 5.20: Os dois autovalores para $\sigma = \sigma_-$. As linhas tracejadas indicam a parte imaginária dos autovalores, e as linhas cheias indicam a parte real dos autovalores. Os sinais “-”, “+” próximo as curvas indicam respectivamente λ_- e λ_+ . Encontra-se destacada a região de estabilidade.

Desta forma, vemos que a órbita que possui $\sigma = \sigma_-$, permanece com cada um dos seus autovalores em módulo iguais a 1 no intervalo $-1 < a < -3/4$, sendo que em $a = -3/4$ há uma perda desta estabilidade, e um ganho de estabilidade da órbita de período 6 que possui o valor de σ como uma das 5 raízes do polinômio p_3 , definido anteriormente. Para melhor vermos o mecanismo de perda da estabilidade da órbita complexa de período consideremos os pontos orbitais para as órbitas que possuem $\sigma = \sigma_+$, assim como aquelas que possuem $\sigma = \sigma_-$.

Os Pontos Orbitais para σ_+ e σ_-

Se agora considerarmos $b = -1$, $\sigma = -2+r$ na equação orbital teremos as seguintes expressões para os pontos das órbitas:

$$x_1 = \beta + Q_+ + Q_-, \quad (5.41a)$$

$$x_2 = \beta + \omega Q_+ + \omega^2 Q_-, \quad (5.41b)$$

$$x_3 = \beta + \omega^2 Q_+ + \omega Q_-, \quad (5.41c)$$

onde:

$$Q_+ = \frac{1}{6} \sqrt[3]{\zeta}, \quad (5.42a)$$

$$Q_- = \frac{\alpha}{Q_+}, \quad (5.42b)$$

$$\zeta = 48a + 76 + 32(1 - 2a)r + 12\sqrt{-48a^2 - 24a + 33 + r}, \quad (5.42c)$$

$$\alpha = \frac{2}{9}(2a + 1 - r) = \frac{2}{9}(2a - 3\beta), \quad (5.42d)$$

$$\beta = \frac{1}{3}(r - 1), \quad (5.42e)$$

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}. \quad (5.42f)$$

Sendo que o ordenamento dos pontos orbitais é dado por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \dots, \quad (5.43)$$

Notemos que tais pontos orbitais têm a característica de serem constituídos por três componentes apenas, x_1, x_2 e x_3 . Mostramos na Tabela (5.3) os pontos orbitais correspondentes a $\sigma = \sigma_+$ e $\sigma = \sigma_-$, em três pontos significativos.

Onde na tabela acima $\sigma_-^{(1)}$ e $\sigma_+^{(1)}$ se referem às duas órbitas de período 1 de modo que para $b = -1$:

$$\sigma_+^{(1)} = -1 + \sqrt{1 + a}, \quad (5.44a)$$

$$\sigma_-^{(1)} = -1 - \sqrt{1 + a}. \quad (5.44b)$$

Vemos a partir da tabela acima, que para $a = -1$ a órbita de período 6 rotulada por $\sigma = \sigma_-$ e a órbita rotulada por $\sigma = \sigma_+$ são iguais e complexas, sendo que a órbita para qual $\sigma = \sigma_-$ permanece estável no intervalo $[-1, -3/4]$ de forma que em $a = -3/4$ esta órbita se torna uma órbita de período 1 real estável sendo que a órbita para qual temos $\sigma = \sigma_+$ permanece instável e complexa, esta por sua vez se torna real no ponto $a = 3$, enquanto a órbita correspondente a $\sigma = \sigma_-$ continua sendo real. De fato no ponto $a = -3/4$ temos o nascimento de uma órbita de período 6 real estável, sendo que esta órbita possui como valor de σ a raiz real do polinômio

Tabela 5.3: Alguns resultados ao longo da linha $b = -1$

T		$a = -1$	$a = -\frac{3}{4}$	$a = 3$
6	σ_+	$x_1 = 0$	$x_1 = \frac{1}{2}$	$x_1 = 2$
		$x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$x_2 = -\frac{1}{2} + i$	$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$
		$x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$x_3 = -\frac{1}{2} - i$	$x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$
	σ_-	$x_1 = 0$	$x_1 = -\frac{1}{2}$	$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$
		$x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$x_2 = -\frac{1}{2}$	$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}$
		$x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$x_3 = -\frac{1}{2}$	$x_3 = -2$
1	$\sigma_+^{(1)}$	$x_1 = -1$	$x_1 = -\frac{1}{2}$	$x_1 = 1$
	$\sigma_-^{(1)}$	$x_1 = -1$	$x_1 = -\frac{3}{4}$	$x_1 = -3$
2	σ	$x_1 = 1 + 2i$	$x_1 = 1 + i\frac{1}{2}\sqrt{15}$	$x_1 = 1$
		$x_2 = 1 - 2i$	$x_2 = 1 - i\frac{1}{2}\sqrt{15}$	$x_2 = 1$

quintico p_3 . Desta forma temos o surgimento de uma órbita de período 6 real estável no exato ponto em que a órbita complexa de período 6 desestabiliza.

O processo que acabamos de descrever está em perfeito acordo com o mecanismo de surgimento das órbitas *ghost* apresentadas na literatura em outros contextos. Voltemos agora a considerar os efeitos da dissipação, partindo do caso Hamiltoniano e aumentando o valor do parâmetro b .

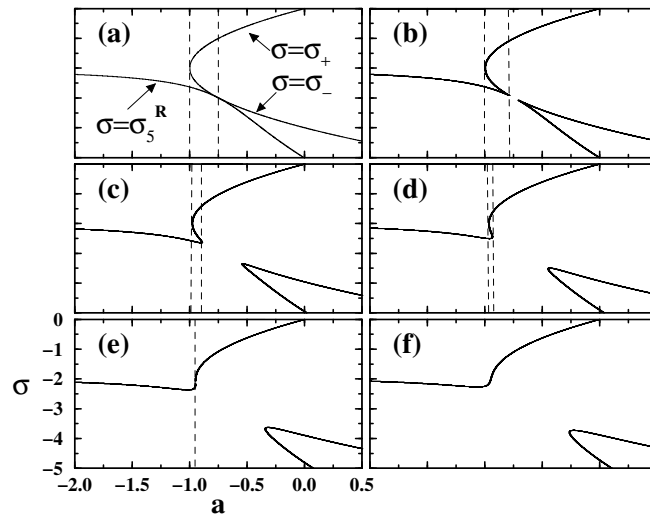


Figura 5.21: Variação de σ com o parâmetro a para alguns valores fixos de b . Em (a), (b), (c), (d), (e), e (f) consideramos respectivamente $b = -1$, $b = -0.999$, $b = -0.98$, $b = -0.96$, $b = b_{cusp}$ e $b = -0.91$. As linhas verticais tracejadas delimitam o intervalo de existência de órbitas complexas estáveis.

A figura 5.21 mostra como σ varia com o valor de a para alguns valores do parâmetro b , nota-se a partir da figura em questão que, partindo do estado Hamiltoniano onde a dissipação é nula ($b = -1$), à medida que aumentamos a dissipação do sistema criamos um *gap* entre a região de existência de órbitas de período 6 complexas e o surgimento das primeiras órbitas reais de

período 6, o surgimento deste gap é acompanhado pela diminuição da região de estabilidade das órbitas complexas de período 6, tal diminuição culmina no ponto $b = b_{cusp}$ (figura 5.21 - (e)) onde tal região se resume a um ponto. Este fato nos leva a concluir, ao menos para o caso em estudo, que a dissipação tem por efeito final diminuir gradativamente, terminando por destruir a estabilidade das órbitas complexas estáveis.

5.5 O Fator \mathcal{W}_k

O estudo realizado nos revelou que a partir do período 5, o discriminante da equação $F_k(a, b; \sigma)$ em relação a σ , possui mais de um fator \mathcal{W}_k , contudo apenas um destes representa as curvas de bifurcação tangente.

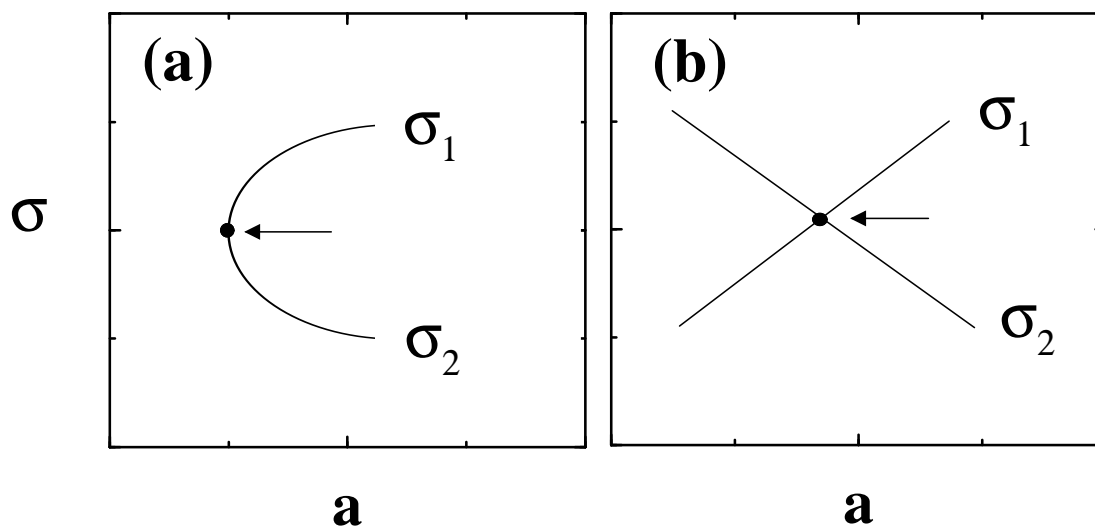


Figura 5.22: Dois casos possíveis para o discriminante Δ_k nulo, as setas indicam o ponto em que $\Delta_k = 0$. Em (a) temos uma representação de uma bifurcação tangente, em (b) um caso de uma simples intersecção de σ_1 , com σ_2 .

A Figura (5.22) traz uma comparação de dois possíveis casos para o anulamento do discriminante Δ_k , ou seja, para os dois casos temos um ponto, iniciado em ambos os casos pelas setas horizontais, em que os dois valores de σ (σ_1 e σ_2) coincidem. No entanto alguns fatos marcantes distinguem estes dois casos, um deles é que no caso representado na Figura (5.22-(a)) o ponto em que $\sigma_1 = \sigma_2$ possui uma única derivada, ao contrário do que acontece com o caso da Figura (5.22-(b)). Outra diferença entre os dois casos está no fato que para o primeiro ponto no qual $\sigma = \sigma_1$ delimita o valor de a para o qual temos σ_1 e σ_2 reais, no caso (b) tal delimitação não existe.

O aparecimento dos fatores \mathcal{W}_k estão relacionados com o fato de que a partir do período 5 alguns coeficientes $\theta_i(a, b, \sigma)$, das equações orbitais parametrizadas P_k , terem em sua constituição frações de equações algébricas dadas por $\mathcal{N}_i/\mathcal{D}_k$. Contudo as resultantes $R(\mathcal{N}, F_k; \sigma)$ e $R(\mathcal{D}, F_k; \sigma)$ possuem o fator \mathcal{W}_k em comum, sendo portanto a curva \mathcal{W}_k uma indeterminação na qual o limite tomado em direções opostas é diferente de maneira que mesmo havendo dois valores de σ via um *cruzamento* como exposto na figura (5.22 b), ainda teremos duas órbitas de período k diferentes.

Capítulo 6

Circulações no Espaço de Parâmetros

Consideramos agora as mudanças sofridas pela dinâmica ao efetuarem-se circulações quasi-estáticas fechadas ao redor das singularidades encontradas no espaço de parâmetros no capítulo anterior. O objetivo principal é encontrar-se uma “assinatura algébrica” para descontinuidades na dinâmica simbólica bem como um entendimento do problema de rotular órbitas periódicas para sistemas multidimensionais.

6.1 Introdução

É sabido que para o mapa quadrático (caso unidimensional do mapa de Hénon) é possível estabelecer a chamada dinâmica simbólica, ou seja rotular as órbitas com uma sequência de dois sinais, dependendo se um ponto de uma dada órbita pertence ao intervalo $[-1, 0]$ ou se pertence ao intervalo $[0, 1]$. É comum se usar a notação $\mathbf{0}$ para um ponto orbital pertencente ao intervalo $[-1, 0]$ e $\mathbf{1}$ para um ponto pertencente ao intervalo $[0, 1]$. Contudo, para o caso do mapa de Hénon (com $b \neq 0$) tal método de rotular as órbitas não se aplica.

A maneira pela qual exemplificaremos, e analisaremos estas questões será através de circulações (caminhos fechados) no espaço de parâmetros (a, b) , que têm como característica fundamental englobar o ponto $(a, b) = (2, 0)$.

Um estudo bem particular nesta linha já foi apresentado por Hansen [24], quando do estudo do período 6 do mapa de Hénon. Em contraste com tal trabalho faremos neste capítulo um estudo muito mais detalhado, não só do caso particular tratado por Hansen, no qual este estuda uma circulação de uma única órbita de período 6, como também para as outras órbitas de período 6, bem como analisaremos as circulações com órbitas de períodos mais baixos, a começar pelos movimentos de período 4.

6.2 Procedimentos Numéricos

A maneira pela qual numericamente realizaremos as circulações será através do procedimento usado por Hansen em seu trabalho [24].

Consideremos x_i, y_i duas componentes de um ponto de uma órbita de um dado período k , este fato implica que:

$$\begin{aligned} G &= g^{[k]}(x_i, y_i) - x_i = 0, \\ H &= h^{[k]}(x_i, y_i) - y_i = 0, \end{aligned}$$

onde $g^{[k]}$ e $h^{[k]}$ são as funções obtidas via iteração do mapa de Hénon.

Desta forma temos um sistema de duas equações simultâneas. Este sistema pode ser resolvido numericamente através do método de *Newton* para equações simultâneas, tal método envolve um processo de convergência dado por:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{H(x_i, y_i)G_y(x_i, y_i) - G(x_i, y_i)H_y(x_i, y_i)}{D}, \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{G(x_i, y_i)H_x(x_i, y_i) - G(x_i, y_i)H_x(x_i, y_i)}{D}. \end{aligned}$$

Sendo que:

$$H(x_i, y_i) G_y(x_i, y_i) - G(x_i, y_i) H_y(x_i, y_i) = \begin{vmatrix} H(x_i, y_i) & G(x_i, y_i) \\ H_y(x_i, y_i) & G_y(x_i, y_i) \end{vmatrix},$$

$$G(x_i, y_i) H_x(x_i, y_i) - H(x_i, y_i) G_x(x_i, y_i) = \begin{vmatrix} G(x_i, y_i) & H(x_i, y_i) \\ G_x(x_i, y_i) & H_x(x_i, y_i) \end{vmatrix}.$$

e

$$D = \begin{vmatrix} G_x(x_i, y_i) & H_x(x_i, y_i) \\ G_y(x_i, y_i) & H_y(x_i, y_i) \end{vmatrix} = G_x(x_i, y_i) H_y(x_i, y_i) - H_x(x_i, y_i) G_y(x_i, y_i),$$

onde, por exemplo, $G_y(x_i, y_i)$ denota a derivada parcial da função $G(x, y)$ em relação a y , calculada no ponto (x_i, y_i) . Demonstra-se no apêndice E que para o caso do mapa de Hénon, o denominador D é identicamente igual à variedade que descreve o surgimento do período k em análise, ou seja, o denominador D tende a zero à medida que se vai chegando perto da bifurcação em que a órbita sob análise nasce, o que faz com que a circulação considerada cesse.

Ainda faz-se necessário algumas observações sobre as circulações, fazendo algumas considerações sobre a maneira de como estas são realizadas.

As imposições básicas são as seguintes:

- Iniciar as circulações do ponto $(a, b) = (2, 0)$ onde o mapa de Hénon segue a dinâmica do mapa quadrático, e onde temos a existência de todas as órbitas de todos os períodos de maneira instável.
- Mudar de maneira quase estática os parâmetros (a, b) , usando para cada novo ponto no espaço de parâmetros a solução calculada no ponto anterior, sendo que usaremos o método de *Newton* para equações simultâneas para calcular os novos pontos da órbita de um dado período.
- Garantir a continuidade da solução, ou seja a cada novo ponto no espaço de parâmetros considerado, verificar se não houve um salto de uma órbita para outra de um dado período k . Considerando a continuidade dos pontos da órbita em análise, estaremos considerando, por consequência a continuidade da soma destes pontos orbitais ou seja de σ .
- Verificar a cada novo ponto (a, b) , se a solução obtida através do método de *Newton* é de fato de uma órbita para o período em estudo .

Estas condições serão impostas em todas as análises que serão feitas neste capítulo.

6.3 Circulações em Torno de Estruturas de Período 4

Apresentamos no capítulo 5 uma análise da estrutura das regiões de estabilidade dos movimentos de período 4, no espaço de parâmetros. Neste estudo notamos a presença de uma cúspide, localizada na linha $b = 1$, na curva que define o nascimento de órbitas de período 4 de uma curva de bifurcação tangente. Embora, como vimos no capítulo anterior, a estrutura cúspidal se localize parcialmente fora do intervalo $-1 < b < 1$, a simplicidade das equações algébricas que envolvem o estudo da dinâmica dos movimentos de período 4 é tal que poderemos abordar o problema de maneira totalmente analítica.

6.3.1 As Órbitas de Período 4 para $(a, b) = (2, 0)$

Começemos por considerar o caso $(a, b) = (2, 0)$, neste caso a equação (4.8) se reduz ao produto de dois fatores $F_4 = p_1 p_2$ de modo que:

$$p_1 = \sigma^2 - \sigma - 4 \tag{6.1a}$$

$$p_2 = \sigma + 1 \tag{6.1b}$$

Considerando a resultante $R(p_1, P_4; \sigma)$, temos

$$\Phi_1 = O_1(x)O_2(x) = x^8 - x^7 - 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 4x + 1, \tag{6.2}$$

onde $O_i(x) = 0$ se refere á equação orbital da órbita i para $(a, b) = (2, 0)$. Desta forma vemos que a resultante considerada nos dá um fator Φ_1 que é o produto de duas equações orbitais de período 4. De fato, pela natureza quadrática, de p_1 em σ , podemos escrever a forma explícita das equações orbitais $O_1(x) = 0$ e $O_2(x) = 0$. As soluções da equação $p_1 = 0$ são dadas por $\sigma_1^{(2)} = (1 + \sqrt{17})/2$, $\sigma_2^{(2)} = (1 - \sqrt{17})/2$, desta maneira temos para $\sigma_1^{(2)}$ e $\sigma_2^{(2)}$ respectivamente:

$$O_1(x) = x^4 - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17})x^3 - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{17})x^2 - (2 - \sqrt{17})x - 1, \tag{6.3a}$$

$$O_2(x) = x^4 - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})x^3 - \frac{1}{2}(3 + \sqrt{17})x^2 - (2 + \sqrt{17})x - 1. \tag{6.3b}$$

Da mesma forma considerando $R(p_2, P_4; \sigma) = 0$ temos a equação orbital:

$$\Phi_2 = O_3(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1. \tag{6.4}$$

Numéricamente os pontos orbitais são dados na tabela (6.1).

Tabela 6.1: As três trajetórias de período 4.

Fator	O	x_1	x_2	x_3	x_4	σ	$\sigma_i^{(n)}$
Φ_1	1	-0.891476	1.205269	0.547325	1.700434	2.5615528128	$\sigma_1^{(2)}$
	2	-1.864944	-1.478017	-0.184536	1.965946	-1.5615528128	$\sigma_2^{(2)}$
Φ_2	3	-1.827090916	-1.338261213	0.2090569265	1.956295202	-1	$\sigma_1^{(1)}$

A tabela (6.1) apresenta os pontos orbitais para $(a, b) = (2, 0)$ bem como os valores de σ associados a cada órbita. Tais pontos orbitais encontram-se ilustrados na figura (6.1).

Na figura (6.1) mostramos a distribuição dos pontos orbitais. Notemos que apesar das três

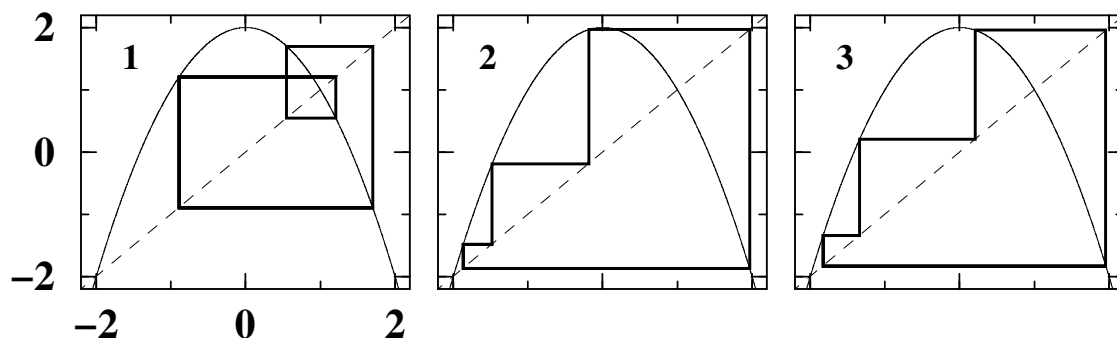


Figura 6.1: Estrutura das três orbitas O_n , $n = 1, 2, 3$, quando temos $a = 2$ e $b = 0$.

órbitas possuírem uma dinâmica simbólica diferente, a órbita O_2 e O_3 provêm de uma órbita de uma mesma bifurcação tangente ao longo da linha $b = 0$. Vemos isso mais claramente considerando a equação paramétrica para $b = 0$.

$$\sigma^3 - (4a - 3)\sigma - 4 = 0 \tag{6.5}$$

Ilustramos as soluções da equação (6.5) na figura (6.2).

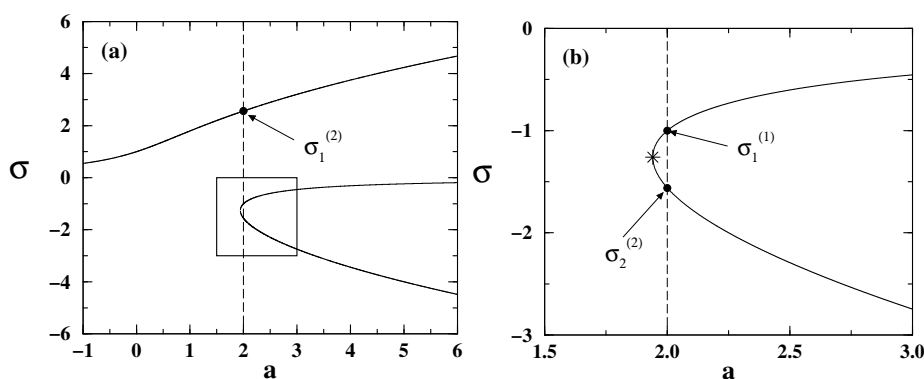


Figura 6.2: Os valores de σ em relação ao parâmetro a para $b = 0$. Em (a) mostramos uma visão geral da dependência de σ com a , em (b) uma ampliação da região retangular assinalada em (a). A linha vertical tracejada representa a linha $a = 2$ e o símbolo (*) indica o nascimento de duas órbitas de período 4, de uma bifurcação tangente.

Como podemos ver na figura (6.2), em $b = 0$ temos uma situação muito diferente daquela que temos quando $b = 1$. A diferença principal está no fato de existir, neste último caso, um ponto em que temos três órbitas com o mesmo valor de σ , como observamos tal situação está relacionada com a cúspide que existe na curva de bifurcação tangente. Consideramos na figura 6.3, a seguir, a uma visão geral da superfície $F_4(a, b, \sigma) = 0$.

Observemos ainda que para $(a, b) = (2, 0)$ temos duas órbitas, O_2 e O_3 pertencentes a famílias algébricas [31] diferentes, $\sigma_2^{(2)}$ e $\sigma_1^{(1)}$, estão correlacionados por uma bifurcação tangente, de modo que estas duas órbitas, respectivamente, tem dinâmicas simbólicas dadas por $\overline{1000}$ e $\overline{1001}$, note

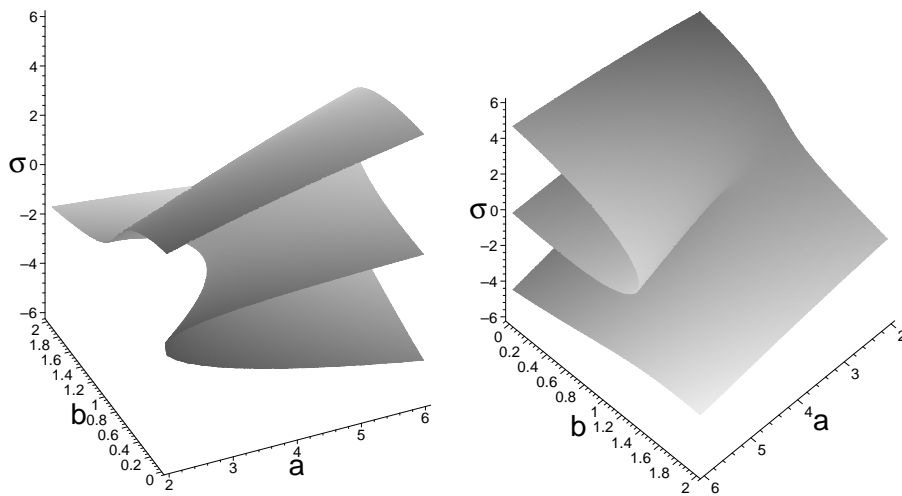


Figura 6.3: Duas vistas diferentes da superfície $F_4(\sigma, a, b) = 0$.

ainda que pela figura (6.2), as órbitas O_2 e O_3 possuem valores de σ crescentes. A órbita O_1 , por sua vez, surge de um processo de dobramento de período.

6.3.2 A Circulação e Resultados

Consideraremos uma circulação que envolva a cúspide de período 4 como mostra a figura (6.4). Os três segmentos de reta que constituem a circulação proposta são dados por:

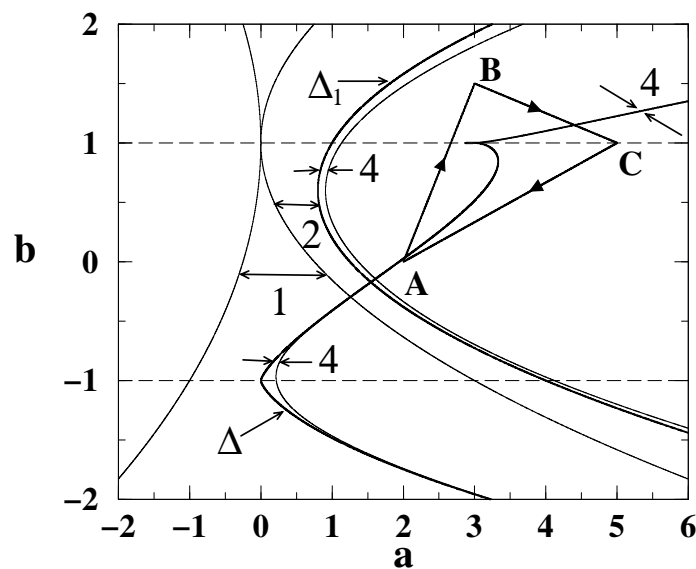


Figura 6.4: Circulação em sentido horário ao longo de $ABCA$.

$$AB : b = \frac{3a}{2} - 3, \tag{6.6a}$$

$$BC : b = -\frac{a}{4} + \frac{9}{4}, \tag{6.6b}$$

$$CA : b = \frac{a}{3} - \frac{2}{3}. \tag{6.6c}$$

Esta circulação pode ser feita com apenas uma única órbita sendo que as outras duas tornam-se complexas após a circulação interseccionar a curva de bifurcação tangente. A órbita com a qual fazemos a circulação proposta é a órbita rotulada de O_1 . Mostramos a seguir o que ocorre com os pontos desta órbita á medida que seguimos a circulação. Apresentamos a evolução dos pontos orbitais durante a circulação na figura 6.5.

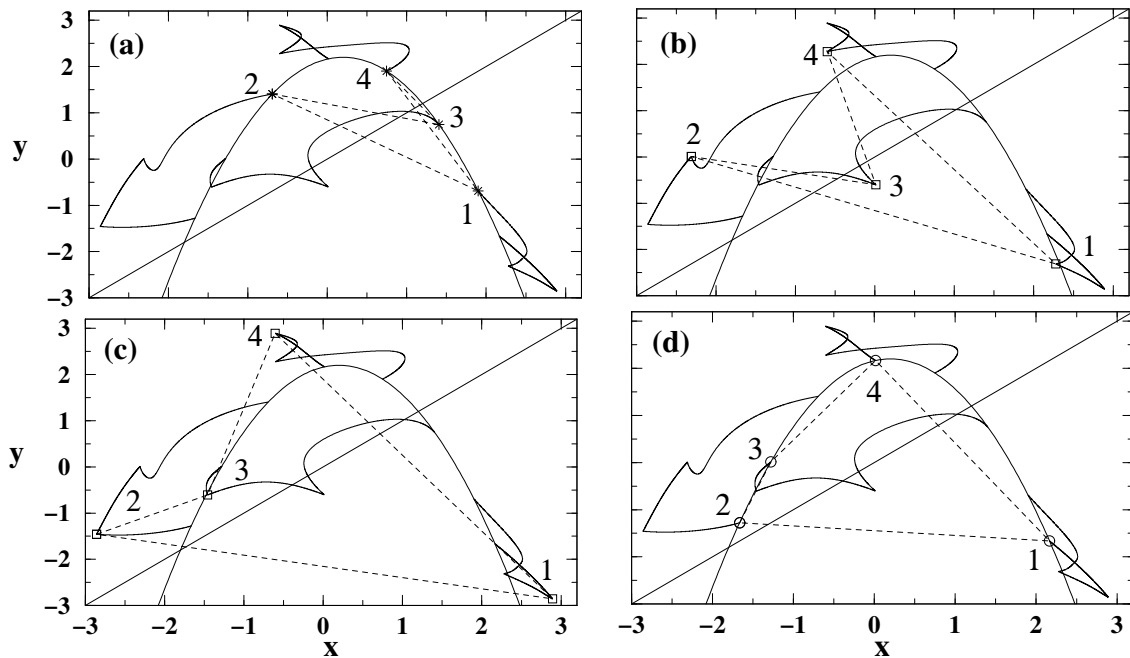


Figura 6.5: A evolução no espaço de fases, de $O_1(x)$ para $O_2(x)$, da órbita que permanece real durante a circulação horária de $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ao longo do triângulo demonstrado na Fig. (6.6). Órbitas iniciam e findam a circulação na parábola logística. **(a)** A linha tracejada indica a posição da órbita inicial O_1 quando parte-se do vértice A ; **(b)** A órbita no vértice B ; **(c)** A órbita no vértice C ; **(d)** Chegada a A , com a órbita final O_2 . O cruzamento da linha tracejada vista em (a) é topologicamente diferente da situação em (b)-(d). Compare os pontos orbitais 1, 2, 3, 4 com os seus correspondentes na Fig. (6.1) .

A figura (6.5) mostra de modo explícito uma espécie de histerese no espaço de fase, de modo que iniciamos a circulação no ponto A com a órbita O_1 e findamos a mesma, no mesmo ponto A (após realizar o percurso $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$), com a órbita O_2 .

6.3.3 Considerações Algébricas

A mudança de órbitas, motivada pela circulação proposta, implica necessariamente numa troca de valores de σ uma vez que a equação orbital P_4 encontra-se parametrizada em relação a esta variável, portanto uma troca nos valores de σ implica numa troca de pontos orbitais para um determinado ponto no espaço de parâmetros.

Como observamos no ponto A da circulação podemos rotular as órbitas O_1 , O_2 e O_3 pelos valores de σ correspondentes. Contudo, pela natureza cúbica, em σ , da equação $F_4 = 0$ podemos considerar as soluções gerais desta equação.

$$\sigma_1 = N_+ + N_-, \quad (6.7a)$$

$$\sigma_2 = \omega N_+ + \frac{N_-}{\omega} = \omega N_+ + \omega^2 N_-, \quad (6.7b)$$

$$\sigma_3 = \omega^2 N_+ + \frac{N_-}{\omega^2} = \omega^2 N_+ + \omega N_-, \quad (6.7c)$$

onde:

$$N_+ \equiv \sqrt[3]{V + \sqrt{\Delta}}, \quad (6.8)$$

e

$$N_- \equiv \frac{U}{N_+}, \quad (6.9)$$

sendo ainda $\Delta \equiv V^2 - U^3$, que podemos ainda escrever como:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(1-b)^2(1+b)^4 - \left[\frac{4}{3}a - (1+b)^2 \right]^3 \\ &= \frac{16}{27}a^2 [9(1+b)^2 - 4a] - (1+b)^4 \Delta_1, \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 4a - (5b^2 - 6b + 5) \\ &= 4a - 4(1-b)^2 - (1+b)^2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

E ainda:

$$\omega = -(1 - i\sqrt{3})/2 \text{ e } \omega^2 = -(1 + i\sqrt{3})/2.$$

De modo que, para $(a, b) = (2, 0)$ os valores dados pelas definições (6.7a), (6.7c) coincidem com os valores dados na tabela (6.1).

Para vermos melhor o processo de mudança do valor de σ reconsideremos a expressão Eq. (6.8), contudo escrevendo-a em coordenadas polares:

$$N_+^{(n)} = \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right) \omega^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \quad (6.12)$$

onde $r \equiv |V + \sqrt{\Delta}|$ e

$$\cos \theta \equiv \frac{\Re(V + \sqrt{\Delta})}{r}, \quad (6.13a)$$

$$\sin \theta \equiv \frac{\Im(V + \sqrt{\Delta})}{r}, \quad (6.13b)$$

onde $\Re(z)$ e $\Im(z)$ denotam a parte real e imaginária de z , respectivamente. Portanto a nova forma para σ_n é

$$\begin{aligned}\sigma_n &= N_+^{(n)} + \frac{U}{N_+^{(n)}} \\ &= \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right) \omega^{n-1} + \frac{U}{\sqrt[3]{r}} \left(\cos \frac{\theta}{3} - i \sin \frac{\theta}{3} \right) \frac{1}{\omega^{n-1}}.\end{aligned}\quad (6.14)$$

Notemos portanto que temos dois possíveis casos:

- $\Delta < 0 \Rightarrow \Im(V + \sqrt{\Delta}) \neq 0$
- $\Delta > 0 \Rightarrow \Im(V + \sqrt{\Delta}) = 0$

O Caso $\Delta < 0$

Se considerarmos a região no espaço de parâmetros em que temos a validade da desigualdade $\Delta < 0$ notamos que:

$$V + \sqrt{\Delta} = V + \sqrt{V^2 - U^3} = V + i\sqrt{U^3 - V^2}.\quad (6.15)$$

Sendo que $U^3 - V^2 > 0$ na região em análise.

Neste caso:

$$r = \sqrt{(V)^2 + (\sqrt{U^3 - V^2})^2} = \sqrt{V^2 + U^3 - V^2} = \sqrt{U^3} \Rightarrow r = \sqrt{U^3}.\quad (6.16)$$

Usando então este resultado podemos escrever:

$$\sigma_n = \sqrt[3]{\sqrt{U^3}} \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right) \omega^{n-1} + \frac{U}{\sqrt[3]{\sqrt{U^3}}} \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right) (\omega^{n-1})^*.\quad (6.17)$$

Notemos que na região em análise temos sempre $U > 0$ desta forma podemos simplificar:

$$\frac{U}{\sqrt[3]{\sqrt{U^3}}} = \sqrt[3]{\frac{U^3}{\sqrt{U^3}}} = \sqrt[3]{\sqrt{U^3}} = \sqrt{U}.\quad (6.18)$$

Logo podemos escrever:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sqrt{U} \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right) \omega^{n-1} + \sqrt{U} \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right) (\omega^{n-1})^* \\ &= \sqrt{U} \left(\left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right) \omega^{n-1} + \left(\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right) (\omega^{n-1})^* \right).\end{aligned}\quad (6.19)$$

É ainda possível mostrar que:

$$\sigma_n = 2\sqrt{U} \left(\Re(\omega^{n-1}) \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \Im(\omega^{n-1}) \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right).\quad (6.20)$$

Ou seja, todos os valores possíveis de σ são reais.

Estudo do Caso $\Delta > 0$

Neste caso temos:

$$\Re(V + \sqrt{\Delta}) = V + \sqrt{\Delta}, \quad (6.21)$$

e por consequência:

$$r = \sqrt{\left(\Re(V + \sqrt{\Delta})\right)^2} = \sqrt{\left(V + \sqrt{\Delta}\right)^2} = |V + \sqrt{\Delta}|, \quad (6.22)$$

e uma vez que $\Im(V + \sqrt{\Delta}) = 0$ temos:

$$\cos(\theta) = \frac{\Re(V + \sqrt{\Delta})}{r} = \frac{V + \sqrt{\Delta}}{|V + \sqrt{\Delta}|} = \text{sign}(V + \sqrt{\Delta}), \quad (6.23a)$$

$$\sin(\theta) = \frac{\Im(V + \sqrt{\Delta})}{r} = 0, \quad (6.23b)$$

ou seja, temos duas possibilidades para que as expressões acima sejam satisfeitas: $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, dependendo do sinal de $(V + \sqrt{\Delta})$.

Ou seja

$$(V + \sqrt{\Delta}) > 0 \rightarrow (V + \sqrt{\Delta}) < 0 \Rightarrow \theta = 0 \rightarrow \theta = \pi. \quad (6.24)$$

Usando a relação (6.14) para os σ_n vemos que:

$$\begin{aligned} \theta = 0 &\Rightarrow \sigma_n = \sqrt[3]{r} (1 + i0) \omega^{n-1} + \frac{U}{\sqrt[3]{r}} (1 - i0) (\omega^{n-1})^* \\ &\downarrow \\ \theta = \pi &\Rightarrow \sigma_n = \sqrt[3]{r} \left(\frac{1}{2} + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \omega^{n-1} + \frac{U}{\sqrt[3]{r}} \left(\frac{1}{2} - i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) (\omega^{n-1})^* \end{aligned} \quad (6.25)$$

Da equação (6.23a) vemos que θ sofre um salto descontínuo de π quando $V + \sqrt{\Delta}$ muda de sinal. O efeito em σ , deste salto, é promover uma permutação entre os valores de σ , implicando uma correspondente permutação das órbitas, uma vez que a evolução das órbitas, e consequentemente de σ deve ser contínua.

O salto mencionado ocorre para $V + \sqrt{\Delta} = V + \sqrt{V^2 - U^3} = 0$, ou seja, para $U = 0$ e $V + \sqrt{V^2} = V + |V| = 0$ onde $V = (1-b)(1+b)^2$. Consequentemente, temos que a discontinuidade que leva à mudança da órbita ocorre quando:

$$U = 0 \quad \text{e} \quad b > 1. \quad (6.26)$$

Desta forma consideremos a circulação proposta no contexto da existência da curva $U = 0$ na figura (6.6):

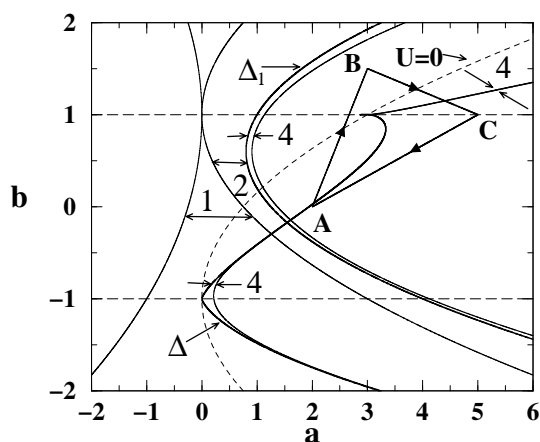


Figura 6.6: A circulação horária ao longo do triângulo $ABCA$. A curva pontilhada representa a curva $U = 0$ onde ocorre a troca de σ .

De fato o que chamamos de salto nada mais é do que uma permutação de raízes, de modo que ao cruzarmos a curva $U = 0$ temos que: $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \rightarrow (\sigma_2, \sigma_3, \sigma_1)$. Evidenciamos tal permutação na figura (6.7):

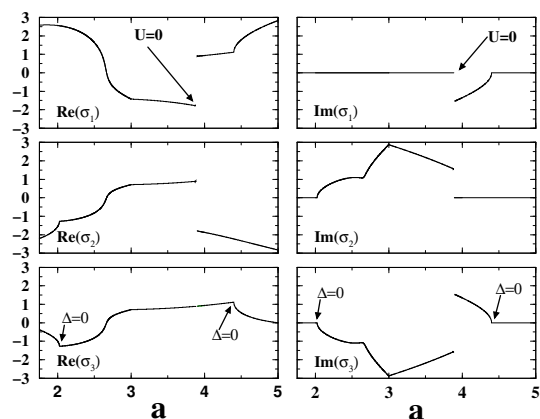


Figura 6.7: Permutação dos valores de σ .

Concluimos então que para fazermos uma circulação contínua com a órbita (sem saltos de pontos orbitais) ao redor da singularidade precisamos considerar uma permutação dos σ_i , sendo que esta permutação ocorre exatamente na curva $U = 0$.

As características da curva $U = 0$ são muito semelhantes a curva obtida numericamente por Giovannini e Politi[39], quando do estudo do período 6, para a borda da partição na qual tangências homoclínicas colapsam ao mesmo tempo, possuindo ambas as curvas, sinais de declividade iguais e a propriedade de passarem pelo ponto de cúspide.

6.4 Circulações em Torno de Estruturas de Período 5

Vimos nas seções anteriores a existência de uma mudança de órbita ao circularmos a cúspide da curva de bifurcação tangente de período 4. Por outro lado apresentamos no capítulo anterior a existência de duas estruturas cúspidais recíprocas nas curvas de bifurcação de período tangente de 5. Na presente seção iremos considerar algumas circulações ao redor destas singularidades.

6.4.1 As Órbitas de Período 5 para $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (2, 0)$

Da mesma forma que no caso do período 4 começamos considerando $a = 2, b = 0$ na equação (4.17) que parametriza as 6 órbitas de período 5, desta forma verificamos que esta se fatora sobre o corpo dos reais em três fatores de forma que:

$$F_5 = p_1 p_2 p_3 = 0, \quad (6.27)$$

onde:

$$p_1 = \sigma - 1, \quad (6.28a)$$

$$p_2 = \sigma^2 + \sigma - 8, \quad (6.28b)$$

$$p_3 = \sigma^3 - \sigma^2 - 10\sigma + 8. \quad (6.28c)$$

Considerando as soluções da equação (6.27) temos :

Tabela 6.2: Valores algébricos de σ para $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (2, 0)$.

p_i	$\sigma_i^{(n)}$
$p_1 = 0$	$\sigma_1^{(1)} = 1$
$p_2 = 0$	$\sigma_1^{(2)} = -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{33})$
	$\sigma_2^{(2)} = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{33})$
$p_3 = 0$	$\sigma_1^{(3)} = \frac{1}{3}[1 + v_+ + v_-]$
	$\sigma_2^{(3)} = \frac{1}{3}[1 + \omega v_+ + \omega^2 v_-]$
	$\sigma_3^{(3)} = \frac{1}{3}[1 + \omega^2 v_+ + \omega v_-]$

onde: $v_+ = \sqrt[3]{31(-2 + 3i\sqrt{3})}$, $v_- = \frac{31}{v_+}$, $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Sendo que a equação orbital para o caso de termos $(a, b) = (2, 0)$ se reduz ao polinômio seguinte:

$$\begin{aligned}
 P_5(x; \sigma) = & x^5 - \sigma x^4 + \frac{1}{2}(\sigma^2 + \sigma - 10)x^3 \\
 & - \frac{1}{4} \left(\frac{2\sigma^5 + 3\sigma^4 - 60\sigma^3 + 57\sigma^2 + 62\sigma - 40}{3\sigma^2 - 3\sigma - 2} \right) x^2 \\
 & + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma^6 + 3\sigma^5 - 49\sigma^4 + 25\sigma^3 + 232\sigma^2 - 180\sigma - 80}{3\sigma^2 - 3\sigma - 2} \right) x \\
 & - \frac{1}{40} \left(\frac{+4\sigma^6 - 482\sigma^2 - 64\sigma^5 + \sigma^7 + 1200 - 1416\sigma - 10\sigma^4 + 687\sigma^3}{3\sigma^2 - 3\sigma - 2} \right) \quad (6.29)
 \end{aligned}$$

Por outro lado a fatoração da equação (4.17) sobre os números de reais, em três fatores, (p_1, p_2, p_3) , para o caso de $(a, b) = (2, 0)$, implica em termos três equações polinomiais irredutíveis para as órbitas de período 5 para este ponto no espaço de parâmetros.

Tabela 6.3: Fatores.

Resultante	Φ
$R(p_1, P_5; \sigma)$	$\Phi_5(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1$
$R(p_2, P_5; \sigma)$	$\Phi_{10}(x) = x^{10} + x^9 - 10x^8 - 10x^7 + 34x^6 + 34x^5 - 43x^4 - 43x^3 + 12x^2 + 12x + 1$
$R(p_3, P_5; \sigma)$	$\Phi_{15}(x) = x^{15} - x^{14} - 14x^{13} + 13x^{12} + 78x^{11} - 66x^{10} - 220x^9 + 165x^8 + 330x^7 - 210x^6 - 252x^5 + 126x^4 + 84x^3 - 28x^2 - 8x + 1$

Sendo:

$$\Phi_5(x) = O_1(x), \tag{6.30a}$$

$$\Phi_{10}(x) = O_2(x)O_3(x), \tag{6.30b}$$

$$\Phi_{15}(x) = O_4(x)O_5(x)O_6(x). \tag{6.30c}$$

Mostramos na tabela (6.4) os valores numéricos das 6 órbitas de período 5 para os valores $(a, b) = (2, 0)$, bem como os valores de σ associados a estas órbitas.

Tabela 6.4: As seis trajetórias de período 5.

Fator	O	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	σ	$\sigma_i^{(n)}$
Φ_5	1	-1.6825070	-0.8308300	1.3097214	0.2846296	1.9189859	1	$\sigma_1^{(1)}$
Φ_{10}	2	-1.1601138	0.6541359	1.5721061	-0.4715178	1.7776708	2.37228	$\sigma_1^{(2)}$
	3	-1.9638573	-1.8567358	-1.4474680	-0.0951638	1.9909438	-3.37228	$\sigma_2^{(2)}$
Φ_{15}	4	-1.0579280	0.8807883	1.2242119	0.5013050	1.7486932	3.29707	$\sigma_1^{(3)}$
	5	-1.9590598	-1.8379156	-1.3779338	0.1012983	1.9897386	-3.08387	$\sigma_2^{(3)}$
	6	-1.6415268	-0.6946105	1.5175162	-0.3028555	1.9082785	0.786801	$\sigma_3^{(3)}$

Consideramos na figura (6.8) a distribuição dos pontos orbitais das 6 órbitas para $(a, b) = (2, 0)$, seguindo a notação adotada na tabela 6.4.

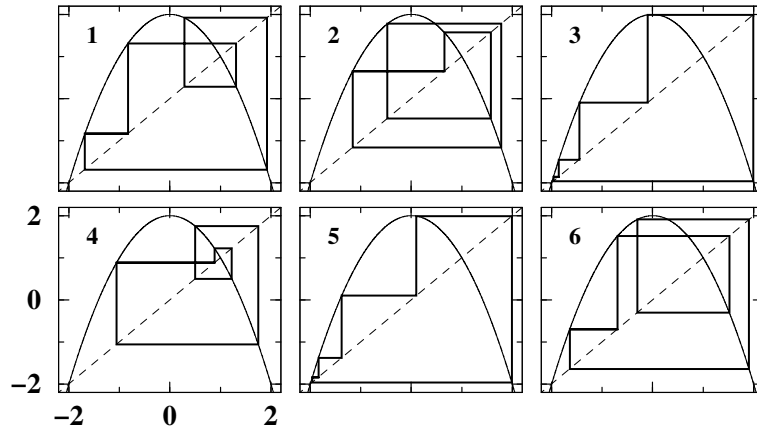


Figura 6.8: Os pontos orbitais para as 6 órbitas de período 5 do mapa de Hénon para $(a, b) = (2, 0)$. Os números indicam o valor de n da órbita O_n .

A tabela (6.4) mostra que para $(a, b) = (2, 0)$ pode-se rotular as órbitas de acordo com a natureza algébrica do σ correspondente. Igualmente ao caso do período 4 consideraremos como as órbitas estão correlacionadas no caso de $b = 0$, para tanto comecemos considerando a equação paramétrica neste limite:

$$F_5(a, 0; \sigma) = \sigma^6 - \sigma^5 - (11a - 3)\sigma^4 + (18a - 11)\sigma^3 + (19a^2 - 19a + 44)\sigma^2 - (17a^2 + 24a + 36)\sigma - 9a^3 - 28a + 32 + 40a^2. \quad (6.31)$$

As soluções de $F_5(a, 0; \sigma) = 0$ são mostradas na Figura (6.9):

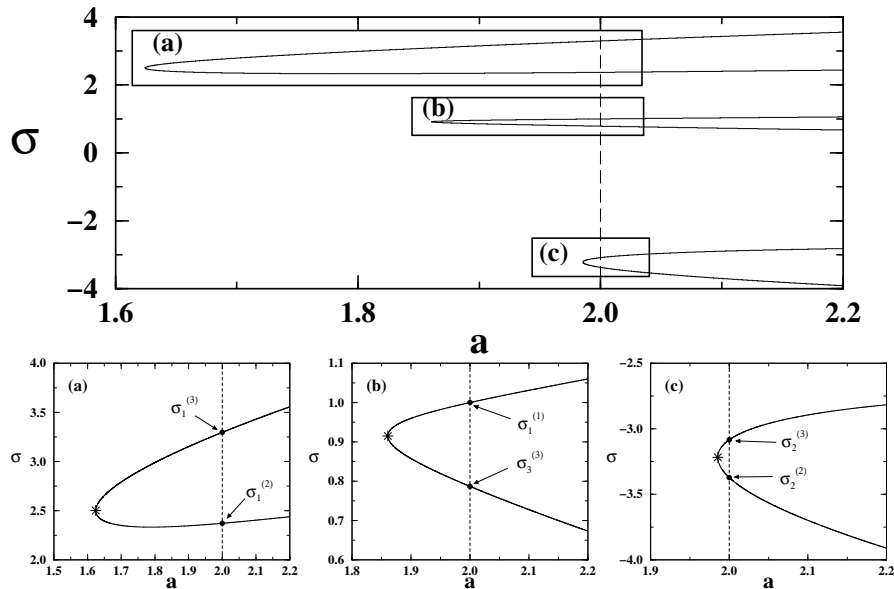


Figura 6.9: Pontos de nascimento das órbitas de período 5 sobre a linha $b = 0$. No topo uma visão geral do nascimento das órbitas de período 5 ao longo da linha $b = 0$. Em (a), (b) e (c) mostramos em detalhe os pares de órbitas que nascem de um mesmo ponto, o símbolo (*) indica o ponto em que temos o nascimento de um par de órbitas de período 5.

Vemos a partir da figura (6.9) como as órbitas para $(a = 2, b = 0)$ apresentadas e rotuladas na tabela (6.4) nascem. O grau algébrico dos pontos que marcam o nascimento de um par de órbitas de período 5 ao longo da linha $b = 0$, é 11 em ambas as coordenadas, a e σ , sendo que tais coordenadas são raízes das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 &2048 \sigma^{11} - 11264 \sigma^{10} + 16384 \sigma^9 + 45056 \sigma^8 - 270336 \sigma^7 + 665216 \sigma^6 \\
 &- 1102784 \sigma^5 + 1135104 \sigma^4 - 300416 \sigma^3 - 323072 \sigma^2 - 90478 \sigma + 224189 = 0, \\
 &4194304 a^{11} - 32505856 a^{10} + 109051904 a^9 - 223084544 a^8 + 336658432 a^7 - 402464768 a^6 \\
 &+ 379029504 a^5 - 299949056 a^4 + 211327744 a^3 - 120117312 a^2 + 62799428 a - 28629151 = 0.
 \end{aligned}$$

Ainda a partir da figura (6.9) podemos determinar as relações existentes entre as famílias algébricas em $(a, b) = (2, 0)$, proporcionadas pelas bifurcações tangentes.

Tabela 6.5: **Relações entre os σ em $b = 0$**

a	σ	$\sigma_i^{(n)}$	O
1.624396989	2.501045048	$\sigma_1^{(3)} = \sigma_1^{(2)}$	O_4, O_2
1.860586973	0.9149982317	$\sigma_1^{(1)} = \sigma_3^{(3)}$	O_1, O_6
1.985409691	-3.217952057	$\sigma_2^{(3)} = \sigma_2^{(2)}$	O_3, O_5

A Tabela (6.5) traz um rápido resumo do cenário exposto na figura (6.9). Podemos ainda complementar esta tabela promovendo um ordenamento decrescente dos valores numéricos dos diversos σ em $(a, b) = (2, 0)$:

Tabela 6.6: **Relações entre os σ e a Dinâmica simbólica**

O	σ	família simbólica	família algébrica
4	3.2970	$\overline{10111}$	$\Phi_{15}(x)$
2	2.3722	$\overline{10110}$	$\Phi_{10}(x)$
1	1	$\overline{10011}$	$\Phi_5(x)$
6	0.78680	$\overline{10010}$	$\Phi_{15}(x)$
5	-3.0838	$\overline{10001}$	$\Phi_{15}(x)$
3	-3.3722	$\overline{10000}$	$\Phi_{10}(x)$

Consideramos um ordenamento decrescente na tabela acima uma vez que pela figura (6.9) vemos que em $b = 0$ não há cruzamentos de curvas no plano (σ, a) . Tal fato pode ser usado, como ilustra a tabela (6.6), para conectar a dinâmica simbólica de uma dada órbita com a sua família algébrica. Notamos ainda pela tabela (6.6) que no limite considerado ($b = 0$) órbitas de período que nascem de uma mesma bifurcação tangente pertencem a famílias algébricas diferentes. Contudo tal observação não é geral para qualquer $b \neq 0$, como veremos a seguir.

6.4.2 Resultados de Algumas Circulações

Partindo do ponto $(a, b) = (2, 0)$ consideramos primeiramente uma circulação que envolva a cúspide rotulada na figura (5.7) de (b). Uma possível circulação que satisfaça esta condição é mostrada na figura 6.10:

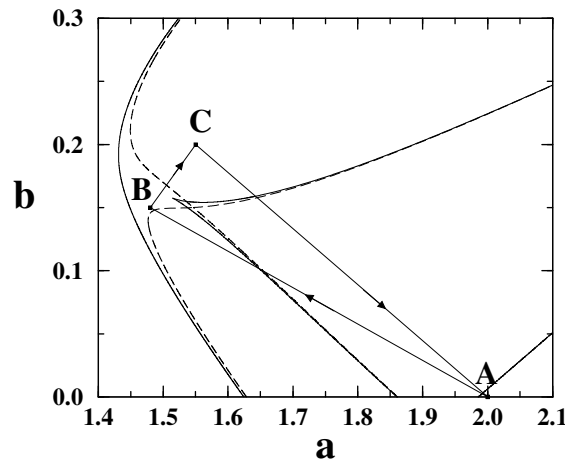


Figura 6.10: Circulação $ABCA$: $A : (2; 0)$, $B : (1.48; 0.15)$, $C : (1.55; 0.2)$.

Podemos realizar completamente esta circulação com duas órbitas diferentes sendo estas as órbitas O_2 e O_4 cujos pontos encontram-se na Tabela (6.4). Contudo apenas a órbita O_4 realiza tal circulação sem modificação final, por outro lado a órbita O_2 , vai ao longo da circulação se transformando adiabaticamente na órbita O_1 . Mostramos a evolução da órbita O_2 na figura 6.11 a seguir.

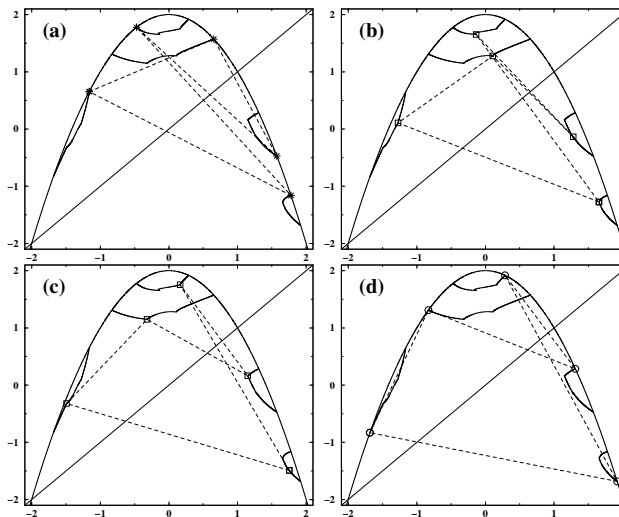


Figura 6.11: Evolução no espaço de fase da órbita O_2 durante a circulação proposta. Em (a) órbita inicial O_2 no ponto A ; (b) A órbita no vértice B ; (c) A órbita no vértice C ; (d) A órbita O_1 no vértice A .

A figura 6.11 nos mostra como a órbita O_2 vai se modificando ao longo da circulação, se transformando adiabaticamente na órbita O_1 .

Reportamos, no estudo das circulações das órbitas de período 4, a ocorrência de um fenômeno similar, contudo o presente caso é o primeiro caso em que temos uma histerese orbital no intervalo

$|b| < 1$, outra diferença marcante é que o fato que a *troca* de órbitas no caso presente ocorre entre duas órbitas que tem os respectivos valores de σ pertencendo a corpos algébricos diferentes em $a = 2, b = 0$, ou seja a circulação ao redor da cúspide não somente tem como consequência uma troca de órbitas mas também uma troca de corpos algébricos.

Propomos agora uma circulação que envolva a estrutura recíproca da estrutura estudada na circulação anterior, que como já observado, ocorre na região de $b > 1$.

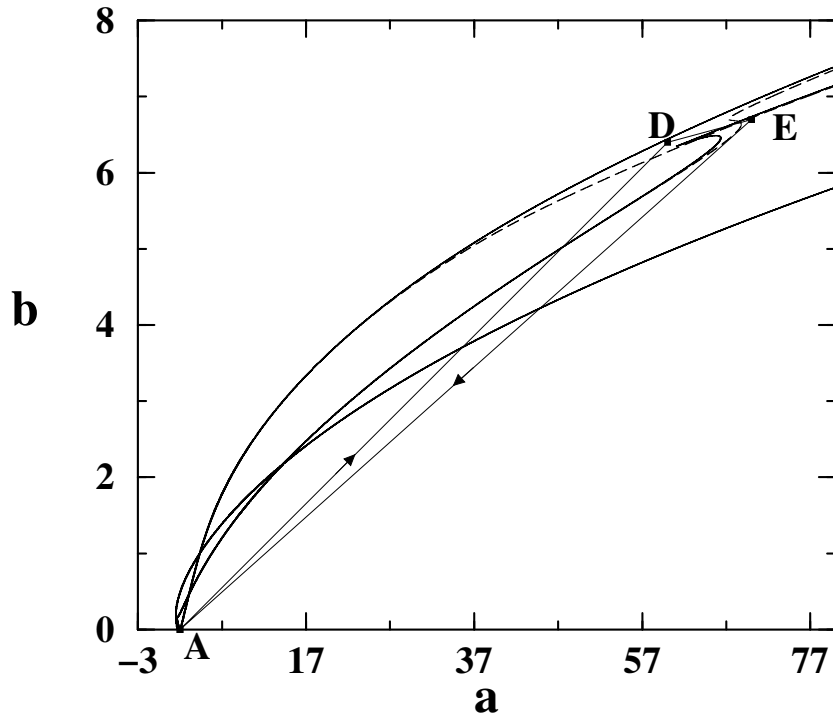


Figura 6.12: Circulação *ADEA* onde $A : (2; 0)$, $D : (60; 6.4)$, $E : (70; 6.7)$.

A circulação *ADEA* proposta leva O_5 a O_6 , ou seja $\sigma_2^{(3)} \rightarrow \sigma_3^{(3)}$. Este resultado se diferencia daquele que obtivemos considerando uma circulação *ABCA*, e nos revela um processo de troca de órbitas pertencentes a uma mesma família algébrica em $(a, b) = (2, 0)$.

Tabela 6.7: **Resultados Algébricos das Circulações.**

Circulação	Efeito Final
$\mathcal{C}_1 : ABCA$	$\sigma_1^{(2)} \rightarrow \sigma_1^{(1)} ; \sigma_1^{(3)} \rightarrow \sigma_1^{(3)}$
$\mathcal{C}_2 : ADEA$	$\sigma_2^{(3)} \rightarrow \sigma_3^{(3)} ;$

6.5 Circulações em Torno de Estruturas de Período 6

Como consideramos no capítulo anterior, o caso dos movimentos de período 6 é bastante interessante pois não só mescla dois tipos de estruturas cúspidas que já apareceram em casos de períodos mais baixos (período 4 e 5), bem como há o surgimento de estruturas cuspidais novas.

6.5.1 As Órbitas de Período 6 para $(a, b) = (2, 0)$

Comecemos considerando a análise do ponto $(a, b) = (2, 0)$, desta forma temos que a equação paramétrica $F_6(a, b; \sigma) = 0$ se fatora de maneira que $F_6 = p_1 p_2 p_3 p_4$ onde:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sigma - 1, \\ p_2 &= \sigma + 1, \\ p_3 &= \sigma^3 - 21\sigma + 28, \\ p_4 &= \sigma^4 + \sigma^3 - 24\sigma^2 - 4\sigma + 16. \end{aligned}$$

A existência desta fatoração nos permite rotular algebricamente as órbitas de período 6 no ponto $(a, b) = (2, 0)$, uma vez que a equação $p_1 p_2 p_3 p_4 = 0$ implica em termos 6 valores distintos de σ , distribuídos em 4 famílias algébricas, como mostra a tabela a seguir:

Tabela 6.8: Valores algébricos de σ para $(a, b) = (2, 0)$.

$p_i(\sigma)$	$\sigma_i^{(n)}$
$p_1 = \sigma - 1$	$\sigma_1^{(1)} = 1$
$p_2 = \sigma + 1$	$\sigma_1^{(2)} = -1$
$p_3 = \sigma^3 - 21\sigma + 28$	$\sigma_1^{(3)} = \omega v_+ + \omega^2 v_-$
	$\sigma_2^{(3)} = \omega^2 v_+ + \omega v_-$
	$\sigma_3^{(3)} = v_+ + v_-$
$p_4 = \sigma^4 + \sigma^3 - 24\sigma^2 - 4\sigma + 16$	$\sigma_1^{(4)} = -\frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{65} + \sqrt{2(65 + \sqrt{65})} \right)$
	$\sigma_2^{(4)} = -\frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{65} + \sqrt{2(65 - \sqrt{65})} \right)$
	$\sigma_3^{(4)} = -\frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{65} - \sqrt{2(65 + \sqrt{65})} \right)$
	$\sigma_4^{(4)} = -\frac{1}{4} \left(1 - \sqrt{65} - \sqrt{2(65 - \sqrt{65})} \right)$

onde:

$$\begin{aligned} v_+ &= \sqrt[3]{7(-2 + i\sqrt{3})}, \\ v_- &= \frac{7}{v_+}, \\ \omega &= -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

A equação orbital para $(a, b) = (2, 0)$ é dada por:

$$P_6(\sigma) = x^6 - \sigma x^5 + \frac{1}{2}(\sigma + 4)(\sigma - 3)x^4 - \frac{\mathcal{N}_1}{4\mathcal{D}}x^3 + \frac{\mathcal{N}_2}{8\mathcal{D}}x^2 - \frac{\mathcal{N}_3}{40\mathcal{D}}x + \frac{\mathcal{N}_4}{160\mathcal{D}^2\sigma^2}, \quad (6.33)$$

onde:

$$\mathcal{D} = 3\sigma^3 - 7\sigma^2 - 13\sigma + 13, \quad (6.34a)$$

$$\mathcal{N}_1 = 2\sigma^7 + \sigma^6 - 86\sigma^5 + 126\sigma^4 + 358\sigma^3 - 343\sigma^2 - 50\sigma + 56, \quad (6.34b)$$

$$\mathcal{N}_2 = \sigma^7 + 3\sigma^6 - 70\sigma^5 + 48\sigma^4 + 679\sigma^3 - 683\sigma^2 - 1218\sigma + 1048, \quad (6.34c)$$

$$\mathcal{N}_3 = \sigma^9 + 6\sigma^8 - 91\sigma^7 - 78\sigma^6 + 1693\sigma^5 - 976\sigma^4 - 6911\sigma^3 + 5496\sigma^2 + 2508\sigma - 2128 \quad (6.34d)$$

$$\mathcal{N}_4 = 2\sigma^{14} + 14\sigma^{13} - 247\sigma^{12} - 268\sigma^{11} + 7984\sigma^{10} - 8072\sigma^9 - 80966\sigma^8 + 157668\sigma^7 + 184938\sigma^6 - 530694\sigma^5 + 88965\sigma^4 + 373032\sigma^3 - 197156\sigma^2 - 13440\sigma + 15680. \quad (6.34e)$$

A existência de uma fatoração de $F_6 = p_1 p_2 p_3 p_4$ implica na existência de 4 famílias de órbitas que são obtidas considerando as resultantes da equação orbital (6.33) com cada fator p_i :

Tabela 6.9: Famílias algébricas de órbitas.

Resultante	$\Phi(x)$
$R(p_1, P_6; \sigma)$	$\Phi_6^{(1)} = x^6 - x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 1$
$R(p_2, P_6; \sigma)$	$\Phi_6^{(2)} = x^6 + x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x + 1$
$R(p_3, P_6; \sigma)$	$\Phi_{18} = x^{18} - 18x^{16} + x^{15} + 135x^{14} - 15x^{13} - 546x^{12} + 90x^{11} + 1287x^{10} - 276x^9 - 1782x^8 + 459x^7 + 1385x^6 - 405x^5 - 534x^4 + 170x^3 + 72x^2 - 24x + 1$
$R(p_4, P_6; \sigma)$	$\Phi_{24} = x^{24} + x^{23} - 24x^{22} - 23x^{21} + 252x^{20} + 229x^{19} - 1521x^{18} - 1292x^{17} + 5832x^{16} + 4540x^{15} - 14822x^{14} - 10282x^{13} + 25284x^{12} + 15001x^{11} - 28667x^{10} - 13653x^9 + 20886x^8 + 7168x^7 - 9126x^6 - 1802x^5 + 2085x^4 + 101x^3 - 180x^2 + 12x + 1$

As famílias algébricas, igualmente aos casos estudados anteriormente, relacionam diferentes órbitas de período 6 num mesmo corpo algébrico. Tais relações são expressas por:

$$\Phi_6^{(1)}(x) = O_1(x), \quad (6.35a)$$

$$\Phi_6^{(2)}(x) = O_2(x), \quad (6.35b)$$

$$\Phi_{18}(x) = O_3(x)O_4(x)O_5(x), \quad (6.35c)$$

$$\Phi_{24}(x) = O_6(x)O_7(x)O_8(x)O_9(x). \quad (6.35d)$$

Os valores numéricos das 9 órbitas de período 6 são dados na tabela (6.10), bem como os valores de σ numéricos e algébricos associados com cada órbita.

Tabela 6.10: As nove trajetórias de período 6.

Fator	O	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	σ	$\sigma_i^{(n)}$
$\Phi_6^{(1)}$	1	-1.77091	-1.13612	0.70920	1.49702	-0.24107	1.94188	1	$\sigma_1^{(1)}$
$\Phi_6^{(2)}$	2	-1.91114	-1.65247	-0.73068	1.46610	-0.14946	1.97766	-1	$\sigma_1^{(2)}$
Φ_{10}	3	-1.99006	-1.96034	-1.84295	-1.39647	0.049861	1.99751	-5.1424	$\sigma_1^{(3)}$
	4	-1.75644	-1.08509	0.82257	1.32337	0.24868	1.93815	1.49125	$\sigma_2^{(3)}$
	5	-0.91242	1.16748	0.63697	1.59426	-0.54168	1.70658	3.6511	$\sigma_3^{(3)}$
Φ_4	6	-1.99066	-1.96274	-1.85234	-1.43119	-0.048327	1.99766	-5.2875	$\sigma_1^{(4)}$
	7	-1.91649	-1.67294	-0.79872	1.36203	0.14486	1.97901	-0.9022	$\sigma_2^{(4)}$
	8	-1.55934	-0.43156	1.81374	-1.28968	0.33671	1.88662	0.7564	$\sigma_3^{(4)}$
	9	-0.97196	1.05528	0.88638	1.21432	0.52541	1.72393	4.4336	$\sigma_4^{(4)}$

Mostramos na Figura (6.13) a distribuição respectiva de todas as órbitas apresentadas na Tabela (6.10).

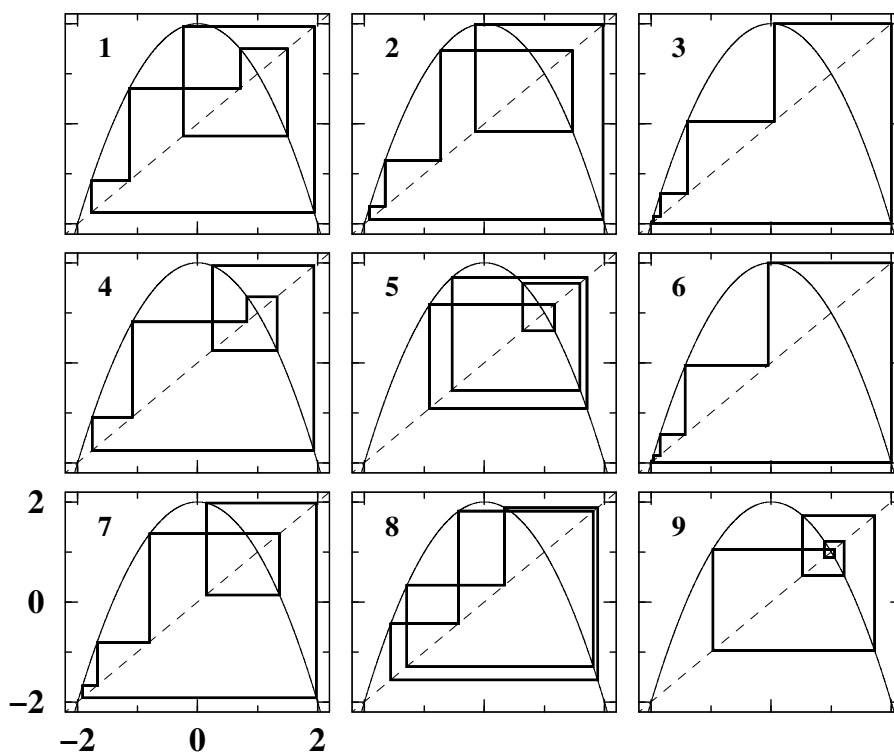


Figura 6.13: Distribuição dos pontos para o período 6 do mapa quadrático.

Assim como ilustrado nos casos anteriores estudados períodos 4 e 5 as órbitas O_i da tabela (6.10) estão relacionadas entre si, sendo que no caso da linha $b = 0$ temos que a equação (4.19), que relaciona estas órbitas, é dada por:

$$\begin{aligned} &\sigma^9 + \sigma^8 - 2(12a - 1)\sigma^7 + 2(4a - 7)\sigma^6 + (144a^2 - 16a + 49)\sigma^5 \\ &- (112a^2 - 16a + 175)\sigma^4 - 4(64a^3 - 40a^2 - 34a - 35)\sigma^3 \\ &+ 4(64a^3 - 120a^2 + 138a - 49)\sigma^2 + 16(16a^3 - 19a^2 - 26a + 28)\sigma \end{aligned}$$

$$-16 (16 a^2 - 37 a + 24) a = 0. \tag{6.36}$$

Esta equação correlaciona as órbitas que provêm de uma mesma bifurcação de dobra quando temos $b = 0$. Mostramos tal relação graficamente na Fig. (6.14), onde, analogamente ao caso do período 5, indicamos o rótulo das órbitas no caso de $a = 2$.

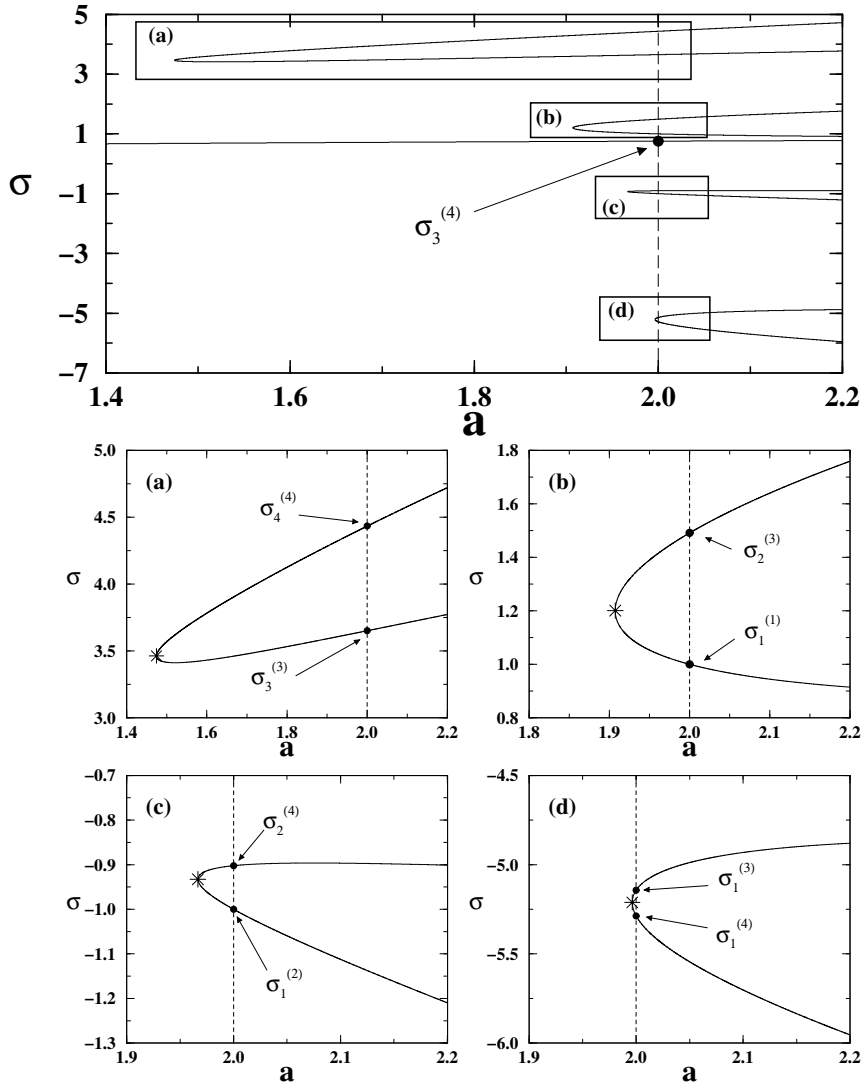


Figura 6.14: Conexão entre as órbitas de período 6 que vêm de bifurcações de dobra. Os círculos indicam os valores de σ para $a = 2$, o símbolo (*) indica o ponto em que temos o nascimento de duas órbitas de uma bifurcação de dobra sobre a linha $b = 0$. No topo: uma visão geral de surgimento das órbitas de período 6 provindas de bifurcações tangentes.

Na figura (6.14) mostramos como os $\sigma_i^{(n)}$, em $(a, b) = (2, 0)$, estão correlacionados, ao longo da linha $b = 0$. Nesta figura ilustramos a localização de nascimento das órbitas (pelo simbolo $(*)$), tais pontos em a são dados pelas soluções do polinômio

$$\begin{aligned}
 &1099511627776 a^{20} - 10445360463872 a^{19} + 44873818308608 a^{18} \\
 &- 121736553037824 a^{17} + 245929827368960 a^{16} - 399107688497152 a^{15} \\
 &+ 535883874828288 a^{14} - 617743938224128 a^{13} + 631168647036928 a^{12} \\
 &- 576952972869632 a^{11} + 484537901514752 a^{10} - 376633058918400 a^9 \\
 &+ 263974525796352 a^8 - 173544017002496 a^7 + 104985522188288 a^6 \\
 &- 58905085704192 a^5 + 33837528259584 a^4 - 15555915962496 a^3 \\
 &+ 8558772746832 a^2 - 1167105374568 a + 3063651608241 = 0
 \end{aligned}$$

A tabela (6.11) resume a figura (6.14).

Tabela 6.11: **Relações entre os σ em $b = 0$**

a	σ	$\sigma_i^{(n)}$	O
1.474695377	3.462727647	$\sigma_3^{(3)} = \sigma_4^{(4)}$	O_5, O_9
1.907250677	1.200622170	$\sigma_1^{(1)} = \sigma_2^{(3)}$	O_1, O_4
1.966764310	-0.9328744744	$\sigma_1^{(2)} = \sigma_2^{(4)}$	O_2, O_7
1.996375246	-5.211297281	$\sigma_1^{(4)} = \sigma_1^{(3)}$	O_6, O_3

Na tabela (6.11) apresentamos os valores numéricos da localização dos pontos onde, ao longo da linha $b = 0$, ocorre uma bifurcação tangente dando origem a dois movimentos de período 6. Igualmente aos casos anteriormente estudados as bifurcações tangentes, em $b = 0$, relacionam somente famílias algébricas diferentes existentes em $(a, b) = (2, 0)$.

Ordenando os valores de σ , em $(b = 0, a = 2)$, cujas órbitas relacionadas vêm de bifurcações tangentes, ao longo da linha $b = 0$, em ordem crescente de valores temos:

Tabela 6.12: **Relações entre os σ e a Dinâmica simbólica**

O	σ	familia simbólica	familia algébrica
9	4.4336	$\overline{101111}$	$\Phi_{24}(x)$
5	3.6511	$\overline{101110}$	$\Phi_{18}(x)$
4	1.4912	$\overline{100111}$	$\Phi_{18}(x)$
1	1	$\overline{100110}$	$\Phi_6^{(1)}$
7	-0.9022	$\overline{100011}$	$\Phi_{24}(x)$
2	-1	$\overline{100010}$	$\Phi_6^{(2)}(x)$
3	-5.1424	$\overline{100001}$	$\Phi_{18}(x)$
6	-5.2875	$\overline{100000}$	$\Phi_{24}(x)$

6.5.2 Algumas Circulações e suas Implicações

Tal como considerado nos casos do período 4 e 5 consideraremos algumas circulações que envolvem as singularidades que existem no espaço de parâmetros para o período em questão (apresentadas na figura (5.11)).

Iniciamos a discussão considerando o conjunto de circulações mostrado na figura 6.15:

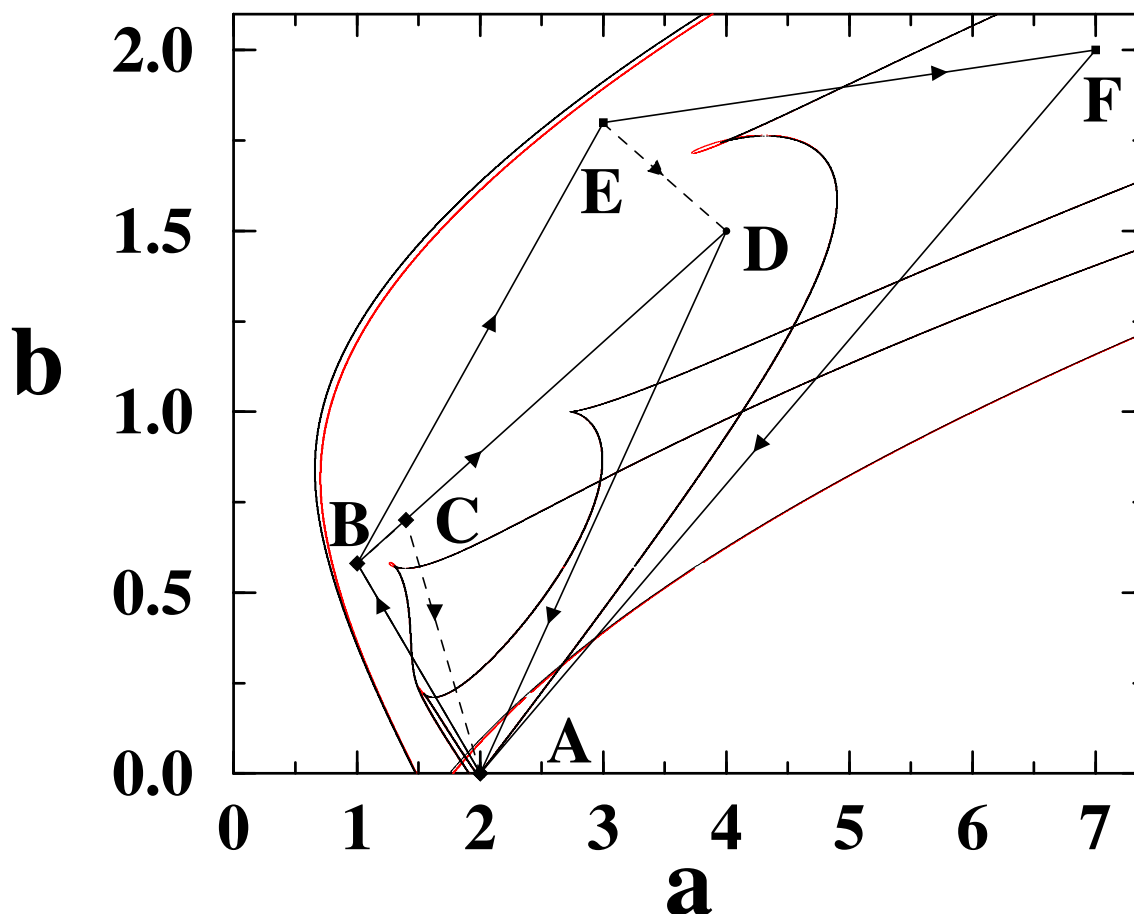


Figura 6.15: Algumas circulações que envolvem as estruturas singulares. Os pontos que definem os vértices das circulações são dados por: $A : (2; 0)$, $B : (1; 0.58)$, $C : (1.4; 0.7)$, $D : (4; 1.5)$, $E : (3; 1.8)$, $F : (7, 2)$.

Começemos analisando a circulação $ABCA$, tratada na literatura em [24] e, mostrada na figura (6.15) pelo triângulo $ABCA$. Como notamos nesta figura a circulação envolve apenas uma cúspide que é mostrada em mais detalhe na figura (5.12(d)). O referido trabalho trata da circulação com a órbita para qual temos $\sigma = \sigma_4^4$. O efeito algébrico desta circulação é uma troca de raízes do polinômio p_4 , mais especificamente a circulação leva $\sigma_4^{(4)}$ a $\sigma_2^{(4)}$.

De fato existe uma segunda órbita com a qual podemos fazer esta mesma circulação de forma que esta permaneça sempre real, contudo esta órbita, para qual temos $\sigma = \sigma_3^{(3)}$, não sofre nenhuma mudança quando do término da referida circulação.

Consideremos agora um prolongamento da circulação $ABCA$, indicada na figura (6.15) pelo triângulo $ABDA$, vemos que esta circulação envolve duas singularidades: a cúspide circundada pela circulação $ABCA$ e a cúspide localizada em $b = 1$ e tratada com mais detalhe na figura (5.12e). Esta circulação tem como resultado a mudança de duas órbitas de período 6 em duas

outras, ao se findar a circulação em questão. Uma destas órbitas é a que tem sua dinâmica modificada pela circulação $ABCA$, e que possui a mesma mudança nesta circulação. Em contrapartida a outra órbita que tem sua dinâmica modificada pela circulação $ABDA$, não sofre nenhuma modificação na circulação $ABCA$. O efeito final da circulação $ABDA$ é uma troca de polinômios de forma que $\sigma_3^{(3)} \rightarrow \sigma_1^{(2)}$.

Prolongando ainda mais a circulação anterior, analisamos agora o efeito de uma circulação que envolva a singularidade mostrada em detalhe na figura (5.12b), comparando com os resultados das circulações discutidos anteriormente. Para tanto consideramos a circulação $ABEFA$ que, como podemos notar, envolve as três estruturas cúspidas. O resultado final desta circulação, feita no sentido horário, é o da mudança de duas órbitas em duas outras, tal como o resultado da circulação $ABDA$ considerada anteriormente, mas no presente caso temos que uma das órbitas se “transforma” numa outra que é diferente da órbita final quando da consideração da circulação $ABDA$. Concretamente temos como resultado desta nova circulação a transformação: $\sigma_4^{(4)} \rightarrow \sigma_1^{(4)}$, $\sigma_3^{(3)} \rightarrow \sigma_1^{(2)}$, e desta forma novamente temos uma troca de órbitas dentro de uma mesma família algébrica.

Note que se considerarmos a circulação $ABEDA$ teremos o mesmo resultado da circulação $ABDA$. Ainda na região de $b > 0$ existe uma quarta circulação que pode ser considerada, e que envolve a estrutura cuspidal que é mostrada em mais detalhe na figura (5.12c).

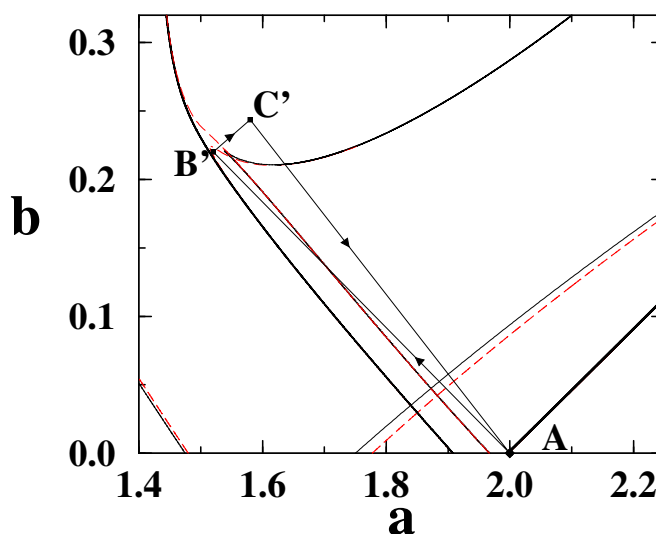
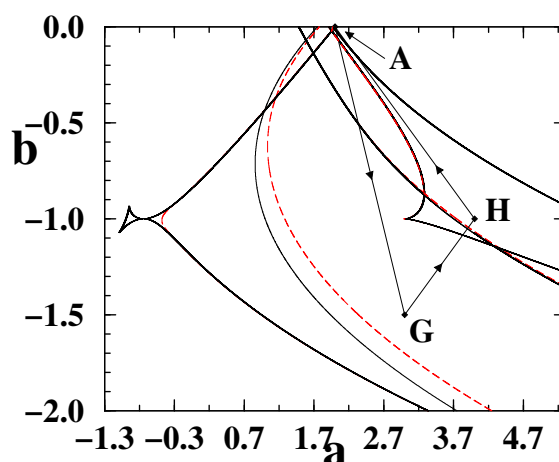


Figura 6.16: Circulação $A : (2; 0)$, $B' : (1.52; 0.22)$, $C' : (1.58; 0.2436)$.

Na figura (6.16) a circulação $AB'C'A$ feita no sentido horário, de modo que o segmento de reta $C'A$ esta contido no segmento de reta AB , segmento este que é integrante da circulação $ABCA$. Esta circulação pode ser feita, de maneira completa, com 4 órbitas de período 6 diferentes, órbitas estas que para $(a, b) = (2, 0)$ são rotuladas por $\sigma_1^{(1)}$, $\sigma_2^{(3)}$, $\sigma_3^{(3)}$ e $\sigma_4^{(4)}$. Contudo a única órbita que sofre uma mudança ao findar a circulação em questão, é a órbita para qual temos $\sigma = \sigma_1^{(1)}$ de maneira que ao completarmos o percurso $AB'C'A$ vemos que esta órbita muda adiabaticamente para a órbita que possui $\sigma = \sigma_2^{(4)}$ no ponto A .

Estudaremos agora o efeito da circulação que envolve uma das estruturas cúspidas presentes na região de $b < 0$, e que, ao contrário das demais, é feita no sentido anti-horário.

A figura (6.17) ilustra a circulação (AGH) proposta ao redor da estrutura cuspidal mostrada anteriormente em detalhe na figura (5.12g). Esta circulação pode ser feita com três órbitas


 Figura 6.17: Circulação $A : (2; 0)$, $G : (3; -1.5)$, $H : (4; -1)$.

diferentes de período 6. O efeito principal desta circulação é novamente uma troca de polinômios de maneira que $\sigma_3^{(4)} \rightarrow \sigma_1^{(1)}$.

Como já mencionamos ainda é possível fazer a circulação em questão com duas outras órbitas, contudo tais órbitas não são modificadas ao findar desta circulação.

Relembremos que apesar da circulação $AGHA$ envolver uma estrutura semelhante, no plano (a, b) , a estrutura ao redor da qual consideramos uma circulação com movimentos de período 4, temos diferenças topológicas significantes, no plano (σ, a) , entre estas duas estruturas.

Resumimos nossos resultados agora para todas as circulações estudadas, na tabela (6.13).

Tabela 6.13: Resultados Algébricos das Circulações.

Circulação	Efeito Final
$\mathcal{C}_1 : ABCA$	$\sigma_4^{(4)} \rightarrow \sigma_2^{(4)}; \sigma_3^{(3)} \rightarrow \sigma_3^{(3)}$
$\mathcal{C}_2 : ABDA$	$\sigma_4^{(4)} \rightarrow \sigma_2^{(4)}; \sigma_3^{(3)} \rightarrow \sigma_1^{(2)}$
$\mathcal{C}_3 : ABEFA$	$\sigma_4^{(4)} \rightarrow \sigma_1^{(4)}; \sigma_3^{(3)} \rightarrow \sigma_1^{(2)}$
$\mathcal{C}_4 : ACDA$	$\sigma_2^{(4)} \rightarrow \sigma_2^{(4)}; \sigma_3^{(3)} \rightarrow \sigma_1^{(2)}$
$\mathcal{C}_5 : ACDEFA$	$\sigma_2^{(4)} \rightarrow \sigma_1^{(4)}; \sigma_3^{(3)} \rightarrow \sigma_1^{(2)}$
$\mathcal{C}_6 : ADEFA$	$\sigma_2^{(4)} \rightarrow \sigma_1^{(4)}; \sigma_1^{(2)} \rightarrow \sigma_1^{(2)}$
$\mathcal{C}_7 : AB'C'A$	$\sigma_1^{(1)} \rightarrow \sigma_2^{(4)}; \sigma_2^{(3)} \rightarrow \sigma_2^{(3)}; \sigma_3^{(3)} \rightarrow \sigma_3^{(3)}; \sigma_4^{(4)} \rightarrow \sigma_4^{(4)}$
$\mathcal{C}_8 : AGH$	$\sigma_4^{(4)} \rightarrow \sigma_4^{(4)}; \sigma_3^{(3)} \rightarrow \sigma_3^{(3)}; \sigma_3^{(4)} \rightarrow \sigma_1^{(1)}$

Notemos que consideramos na tabela acima três circulações ($\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$) não tratadas no texto até aqui. Estas circulações nada mais são que uma combinação, em última análise, dos resultados principais dados pelas circulações $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$. Notemos ainda que algumas destas circulações em algumas partes das mesmas, se contrapõem ao sentido dado pelas setas presentes na figura (6.15), mas esta aparente discordância não compromete a natureza última das circulações, propostas para a região $b > 0$, de serem todas no sentido horário.

Capítulo 7

Conclusões

Mostramos, pormenorizamos e sistematizamos neste trabalho um método algébrico de estudo de dinâmica bem singelo. Uma das principais vantagens do método proposto é a obtenção de uma *forma normal* para todas as equações orbitais de um dado período parametrizadas em relação a σ (a soma dos pontos de uma órbita). O grau da equação paramétrica em σ é igual ao número total de órbitas periódicas para um cada período k .

O estudo deste método nos trouxe resultados importantes para aplicação em sistemas dinâmicos polinômiais gerais como, por exemplo, a existência das decomposições dos coeficientes de Girard-Newton, que é a consequência algébrica das periodicidades no sistema, uma vez que, como observamos, serem tais decomposições invariantes frente a troca cíclica de seus fatores.

O método estudado ainda nos revelou a possibilidade de se reduzir a análise da dinâmica de qualquer sistema multidimensional ao estudo de um conjunto com apenas três equações: (i) a equação orbital parametrizada, (ii) a equação paramétrica e (iii) a equação de autovalores parametrizada.

A partir destas três equações conseguimos obter de maneira analítica os domínios de estabilidade dos períodos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Para os períodos 4, 5 e 6, tais domínios ainda não tinham sido obtidos na literatura. O estudo analítico nos revelou uma estrutura geral destes domínios dada por:

$$\sum_{i=0}^N \left[\sum_{j=0}^{2(N-i)} C_j b^j \right] a^i = 0, \quad (7.1)$$

onde C_j são constantes que satisfazem uma relação de reciprocidade:

$$C_j = C_{2(N-i)-j}. \quad (7.2)$$

A equação (7.1) é invariante frente a troca de coordenadas $b = 1/b'$ e $a = a'/b'^2$ o que esta relacionado com a invertibilidade do mapa de Hénon. Tal invariância é somente válida para as curvas que descrevem as fronteiras de estabilidade, de maneira que pelas expressões obtidas para a variedade $W_k(a, b, \sigma, \lambda)$, (obtida para os períodos $k= 1, 2, 3, 4$ e 5), somente temos os coeficientes de a sendo polinômios recíprocos no parâmetro b em duas únicas situações, quando $\lambda = +1$ e $\lambda = -1$.

A importância da obtenção analítica de tais domínios mostrou-se fundamental pois assim pode-se, como é mostrado no capítulo 4, obter uma expressão analítica para uma estrutura até aqui desconhecida nas curvas de bifurcação tangente dos movimentos de período 6 do mapa de Hénon. Tal estrutura revelou a existência de órbitas complexas de período 6 estáveis não só no caso Hamiltoniano ($b = -1$) como também fora dele. Tal resultado acreditamos ser de extrema

importância para o estudo do chamado *caos quântico* onde órbitas complexas estáveis, chamadas de *órbitas fantasmas* (*ghosts*) no contexto desta área, tem implicações físicas de importantes, por exemplo, na derivação da densidade de estados.

No capítulo 5 estudamos a influência das cúspides existentes nas curvas de bifurcação tangente para os períodos iguais a 4 e superiores. Verificamos, a existência de *histereses orbitais*, fenômeno estudado na literatura de maneira numérica e parcial e via aproximações tetra-modais [28]. Nosso trabalho, em contraste, relaciona tais histereses diretamente com o parâmetro σ , de maneira que conseguimos fazer um estudo analítico rigoroso das histereses de período 4, que nos permitiu encontrar uma explicação do fenômeno.

O método aqui desenvolvido é geral e pode agora ser aplicado a outros sistemas dinâmicos de interesse. Por exemplo, para estudar a dinâmica de dois osciladores (mapas) acoplados, sistema prototípico que vem sendo amplamente utilizado hoje em dia para estudar como ocorrem sincronizações, tanto espacial quanto temporal, em sistemas complexos. Além deste, um aspecto que achamos de particular interesse para exploração futura, é a simulação de sistemas com atrasos temporais, utilizando-se o mapa de Hénon com atraso temporal, por permitir este sistema a investigação analítica do interrelacionamento das variedades de sincronização em função dos parâmetros e atrasos no sistema. Sistemas com atrasos possuem grande importância no estudo da complexidade em sistemas fisiológicos e meteorológicos.

Apêndice A

Revisão sobre Funções Simétricas

A.1 Funções Simétricas Elementares

Apresentaremos aqui uma breve revisão sobre a teoria das funções simétricas baseada em obras da literatura [17, 18].

Um polinômio nas variáveis independentes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é chamado de simétrico, nestas variáveis, se o polinômio permanecer inalterado quando da troca de duas, quaisquer, destas variáveis. Chamaremos o conjunto destas variáveis independentes, x_n de um *alfabeto*. Chama-se de funções simétricas elementares, E_n , as somas:

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum x_\nu, \\ E_2 &= \sum x_{\nu_1} x_{\nu_2}, \\ E_3 &= \sum x_{\nu_1} x_{\nu_2} x_{\nu_3}, \\ &\vdots \\ E_n &= \sum x_\nu x_{\nu_1} x_{\nu_2} \dots x_{\nu_n}, \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde as somas acima indicadas se referem à soma sobre todos os elementos distintos de uma dada classe, sendo que por classe subentende-se os diversos produtos de elementos distintos de um dado alfabeto.

Torna-se então fácil ver que, se tivermos um conjunto de N elementos de um alfabeto, o número de elementos da soma de cada E_n será regido pelas regras de uma *combinação simples*, ou seja o número P de parcelas de cada soma designada por E_n é dado por :

$$P = \frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{A.2}$$

A.2 Relações entre as Raízes e os Coeficientes de um dado Polinômio

Dada uma equação em x de grau N , podemos dividir seus membros pelo coeficiente de x^N , obtendo então uma equação da forma:

$$f(x) \equiv x^N + c_1 x^{N-1} + c_2 x^{N-2} + \dots + c_{N-1} x + c_N = 0 \tag{A.3}$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, este polinômio tem uma raiz x_1 , e seu quociente por $x - x_1$ tem uma raiz x_2 , etc. Desta forma podemos escrever:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) \tag{A.4}$$

Teremos então N raízes para $f(x) = 0$. Notemos agora que:

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 \\ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Por indução podemos então escrever:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^N - (x_1 + \dots + x_N)x^{N-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_2x_3 + \dots + x_{N-1}x_N)x^{N-2} \\ &\quad - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{N-2}x_{N-1}x_N)x^{N-3} + \dots + (-1)^N x_1x_2 \dots x_N \end{aligned}$$

Podemos então concluir que :

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ -c_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N, \\ c_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{N-1}x_N, \\ &\vdots \\ (-1)^N c_N &= x_1 x_2 x_3 \dots x_N. \end{aligned}$$

ou seja os coeficientes do polinômio (A.3) estão diretamente relacionados com as funções simétricas elementares (A.1).

A.2.1 O Teorema Fundamental das Funções Simétricas

Teorema A.1 *Qualquer polinômio simétrico em x_1, \dots, x_n pode ser escrito como um polinômio nas funções simétricas elementares E_1, \dots, E_n dos x 's .*

A.3 Discriminantes

Um dos exemplos de equação simétrica é o discriminante de uma equação algébrica. Além de ser um bom exemplo, a definição de discriminante é muito usado ao longo deste trabalho. Consideremos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ como sendo as raízes de

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0, \tag{A.5}$$

que pode ser re-escrita como:

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_m). \tag{A.6}$$

O discriminante desta equação algébrica é definido como:

$$\begin{aligned} D &= a_0^{2(m-1)} \quad (\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_3)^2 \dots (\alpha_1 - \alpha_m)^2 \times \\ &\quad (\alpha_2 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_4)^2 \dots (\alpha_2 - \alpha_m)^2 \times \\ &\quad \dots (\alpha_{m-1} - \alpha_m)^2 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Notemos que a forma do discriminante D permanece inalterado pela troca de duas raízes

quaisquer.

Agora vemos que :

$$\begin{aligned} f'(\alpha_1) &= a_0(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \dots (\alpha_1 - \alpha_m), \\ f'(\alpha_2) &= a_0(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3) \dots (\alpha_2 - \alpha_m), \\ f'(\alpha_3) &= a_0(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4) \dots (\alpha_3 - \alpha_m), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{A.8}$$

Desta forma :

$$\begin{aligned} a_0^{m-1} f'(\alpha_1) \dots f'(\alpha_m) &= a_0^{2m-1} (-1)^{1+2+\dots+m-1} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \dots (\alpha_{m-1} - \alpha_m)^2 \\ &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0 D. \end{aligned} \tag{A.9}$$

O termo da esquerda na equação acima nada mais é que o resultante R da $f(x)$, $f'(x)$ em relação a x . Desta forma podemos escrever:

$$D = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \frac{1}{a_0} R(f, f') \tag{A.10}$$

Ou seja o discriminante D é um múltiplo de R/a_0 .

A.4 As Relações de Girard — Newton

Voltemos a considerar a equação (A.3) inicialmente proposta. Os coeficientes, c_n , do polinômio em questão estão relacionados entre si, e com as somas das suas raízes nas potências menores ou iguais ao próprio número de raízes. Tal amarramento é dado pelas relações de *Newton-Girard* :

$$\begin{aligned} 2c_2 + S_2 &= c_1 c_1 \\ 3c_3 + c_1 S_2 + S_3 &= c_1 c_2 \\ 4c_4 + c_2 S_2 + c_1 S_3 + S_4 &= c_1 c_3 \\ 5c_5 + c_3 S_2 + c_2 S_3 + c_1 S_4 + S_5 &= c_1 c_4 \\ 6c_6 + c_4 S_2 + c_3 S_3 + c_2 S_4 + c_1 S_5 + S_6 &= c_1 c_4 \\ &\vdots \\ Nc_N + c_{N-2} S_2 + c_{N-3} S_3 + \dots + c_1 S_N + S_N &= c_1 c_{N-1} \end{aligned} \tag{A.11}$$

Onde os termos S_n representam as somas das potências n do conjunto de raízes $\{x_i\}_{i=1}^N$, ou seja:

$$S_n = x_1^n + x_2^n + \dots + x_{N-1}^n + x_N^n = \sum_{j=1}^N x_j^n \tag{A.12}$$

Apartir da definição (A.12) acima vemos que $S_1 = -c_1$, esta relação será útil para reescrevermos as relações (A.11) de uma maneira mais elegante. Notemos que no lado direito das relações (A.11), temos o produto $c_1 c_j$ onde $1 \leq j \leq N - 1$, o que faremos é reescrever tal produto usando a igualdade $c_1 c_j = -S_1 c_j$. Desta forma, torna-se fácil notar que o conjunto de relações (A.11) pode ser reescrita como :

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{1}{2}[S_1c_1 + S_2] \\
c_3 &= -\frac{1}{3}[S_1c_2 + S_2c_1 + S_3] \\
c_4 &= -\frac{1}{4}[S_1c_3 + S_2c_2 + S_3c_1 + S_4] \\
c_5 &= -\frac{1}{5}[S_1c_4 + S_2c_3 + S_3c_2 + S_4c_1 + S_5] \\
c_6 &= -\frac{1}{6}[S_1c_5 + S_2c_4 + S_3c_3 + S_4c_2 + S_5c_1 + S_6] \\
&\vdots \\
c_N &= -\frac{1}{N}[S_1c_{N-1} + S_2c_{N-2} + S_3c_{N-3} + \cdots + S_{N-2}c_2 + S_{N-1}c_1 + S_N] \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

Podemos ainda escrever estas relações de uma maneira mais compacta :

$$c_n = -\frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^n S_j c_{n-j} \right] \quad (\text{A.14})$$

Apêndice B

Coeficientes de a^n da variedade $W_5(a, b; \lambda)$

A variedade $W_5(a, b; \lambda)$ é definida por:

$$W_5(a, b; \lambda) = \sum_{n=0}^{15} C_i a^n \quad (\text{B.1})$$

onde os coeficientes C_i 's são funções do autovalor λ e do parâmetro b , dados por:

$$C_{15} = 1073741824 \lambda^6$$

$$C_{14} = -536870912 \lambda^6 (16 b^2 + b + 16)$$

$$C_{13} = 67108864 \lambda^6 (448 b^4 + 60 b^3 + 669 b^2 + 60 b + 448)$$

$$C_{12} = -33554432 \lambda^5 [(1920 \lambda + 1) b^6 + (512 \lambda - 1) b^5 \\ + 2688 \lambda b^4 + 695 \lambda b^3 + 2688 \lambda b^2 \\ - (\lambda - 512) \lambda b + (\lambda + 1920) \lambda]$$

$$C_{11} = 8388608 \lambda^5 [4 (3008 \lambda + 7) b^8 \\ + (6016 \lambda - 11) b^7 \\ + (11 + 8560 \lambda) b^6 \\ + 14 (-2 + 567 \lambda) b^5 \\ + 8877 \lambda b^4 - 14 \lambda (-567 + 2 \lambda) b^3 \\ + \lambda (11 \lambda + 8560) b^2 \\ - \lambda (-6016 + 11 \lambda) b \\ + 4 \lambda (3008 + 7 \lambda)]$$

$$C_{10} = -1048576 \lambda^4 [(3 + 640 \lambda + 118784 \lambda^2) b^{10} \\ + 8 \lambda (11776 \lambda + 35) b^9 \\ - 6 \lambda (7552 \lambda - 49) b^8 \\ + 6 \lambda (10576 \lambda - 49) b^7 \\ - 8 \lambda (10162 \lambda + 35) b^6 \\ - 4 \lambda (160 \lambda^2 - 13749 \lambda + 160) b^5 \\ - 8 \lambda^2 (10162 + 35 \lambda) b^4 \\ - 6 \lambda^2 (49 \lambda - 10576) b^3 \\ + 6 \lambda^2 (-7552 + 49 \lambda) b^2]$$

$$+8 \lambda^2 (35 \lambda + 11776) b \\ + \lambda^2 (118784 + 3 \lambda^2 + 640 \lambda)]$$

$$C_9 = 262144 \lambda^4 [4 (11 + 116736 \lambda^2 + 1056 \lambda) b^{12} \\ + 4 (1600 \lambda + 11 + 131584 \lambda^2) b^{11} \\ - 4 (-368 \lambda - 11 + 188288 \lambda^2) b^{10} \\ - 12 \lambda (-413 + 21552 \lambda) b^9 \\ - 4 \lambda (1239 + 92012 \lambda) b^8 \\ - 4 \lambda (1056 \lambda^2 + 138763 \lambda + 368) b^7 \\ - \lambda (1912147 \lambda + 6400 \lambda^2 + 6400) b^6 \\ - 4 \lambda (138763 \lambda + 368 \lambda^2 + 1056) b^5 \\ - 4 \lambda^2 (1239 \lambda + 92012) b^4 \\ + 12 \lambda^2 (413 \lambda - 21552) b^3 \\ + 4 \lambda^2 (368 \lambda - 188288 + 11 \lambda^2) b^2 \\ + 4 \lambda^2 (131584 + 11 \lambda^2 + 1600 \lambda) b \\ + 4 \lambda^2 (11 \lambda^2 + 1056 \lambda + 116736)]$$

$$C_8 = -131072 \lambda^4 [16 (48128 \lambda^2 + 3 + 640 \lambda) b^{14} \\ + 4 (63 + 299008 \lambda^2 + 6880 \lambda) b^{13} \\ - (-391 + 2152960 \lambda^2 - 1616 \lambda) b^{12} \\ - 12 (170848 \lambda^2 - 2196 \lambda - 21) b^{11} \\ + (1481152 \lambda^2 + 48 - 2963 \lambda) b^{10} \\ - \lambda (10240 \lambda^2 - 2963 + 2868144 \lambda) b^9 \\ - 16 \lambda (1720 \lambda^2 + 135533 \lambda + 1647) b^8 \\ - \lambda (1616 + 1616 \lambda^2 - 1145155 \lambda) b^7 \\ - 16 \lambda (1647 \lambda^2 + 1720 + 135533 \lambda) b^6 \\ + \lambda (-10240 - 2868144 \lambda + 2963 \lambda^2) b^5 \\ + \lambda^2 (-2963 \lambda + 48 \lambda^2 + 1481152) b^4 \\ + 12 \lambda^2 (2196 \lambda - 170848 + 21 \lambda^2) b^3 \\ + \lambda^2 (-2152960 + 1616 \lambda + 391 \lambda^2) b^2 \\ + 4 \lambda^2 (299008 + 63 \lambda^2 + 6880 \lambda) b \\ + 16 \lambda^2 (48128 + 3 \lambda^2 + 640 \lambda)]$$

$$C_7 = 32768 \lambda^3 [2 (18944 \lambda^2 + 1 + 1130496 \lambda^3 - 320 \lambda) b^{16} \\ + 2 (-1 + 1941504 \lambda^3 + 81152 \lambda^2 - 4 \lambda) b^{15} \\ - 4 \lambda (-1061 + 2504192 \lambda^2 - 1296 \lambda) b^{14} \\ - 8 \lambda (-103 - 3926 \lambda + 1445632 \lambda^2) b^{13} \\ + 4 \lambda (3501664 \lambda^2 + 28429 \lambda + 1061) b^{12} \\ - \lambda (8 + 10181600 \lambda^2 + 37888 \lambda^3 - 26277 \lambda) b^{11} \\ - \lambda (640 + 162304 \lambda^3 + 26277 \lambda + 9541864 \lambda^2) b^{10} \\ - 2 \lambda^2 (2592 \lambda^2 + 56858 - 3199459 \lambda) b^9 \\ - \lambda^2 (31408 + 31408 \lambda^2 - 11326221 \lambda) b^8 \\ - 2 \lambda^2 (-3199459 \lambda + 56858 \lambda^2 + 2592) b^7 \\ - \lambda^2 (9541864 \lambda + 640 \lambda^3 + 162304 + 26277 \lambda^2) b^6 \\ - \lambda^2 (10181600 \lambda + 37888 + 8 \lambda^3 - 26277 \lambda^2) b^5 \\ + 4 \lambda^3 (1061 \lambda^2 + 3501664 + 28429 \lambda) b^4 \\ + 8 \lambda^3 (-1445632 + 103 \lambda^2 + 3926 \lambda) b^3 \\ + 4 \lambda^3 (1061 \lambda^2 - 2504192 + 1296 \lambda) b^2 \\ - 2 \lambda^3 (-1941504 - 81152 \lambda + \lambda^3 + 4 \lambda^2) b \\ + 2 \lambda^3 (-320 \lambda^2 + 18944 \lambda + 1130496 + \lambda^3)]$$

$$\begin{aligned}
C_6 = & -4096 \lambda^3 [8 (352 \lambda - 3) (4096 \lambda^2 + 96 \lambda - 3) b^{18} \\
& + 4 (3325952 \lambda^3 + 356352 \lambda^2 - 19 - 4368 \lambda) b^{17} \\
& - 4 (-137344 \lambda^2 - 19 + 18251776 \lambda^3 - 7860 \lambda) b^{16} \\
& - 8 (9 - 2612 \lambda + 6394368 \lambda^3 + 208864 \lambda^2) b^{15} \\
& + \lambda (1494624 \lambda + 61897 + 73872384 \lambda^2) b^{14} \\
& - 32 \lambda (-653 + 5376 \lambda^3 + 3105672 \lambda^2 + 13238 \lambda) b^{13} \\
& - 2 \lambda (712704 \lambda^3 - 15720 + 417749 \lambda + 19515200 \lambda^2) b^{12} \\
& - 2 \lambda (-417749 \lambda + 274688 \lambda^3 - 148324192 \lambda^2 + 8736) b^{11} \\
& + 16 \lambda (26476 \lambda + 104432 \lambda^3 + 5662763 \lambda^2 - 672) b^{10} \\
& - 4 \lambda^2 (34830407 \lambda + 373656 \lambda^2 + 373656) b^9 \\
& - 16 \lambda^2 (-26476 \lambda^2 - 104432 - 5662763 \lambda + 672 \lambda^3) b^8 \\
& - 2 \lambda^2 (-417749 \lambda^2 + 274688 - 148324192 \lambda + 8736 \lambda^3) b^7 \\
& + 2 \lambda^2 (-417749 \lambda^2 + 15720 \lambda^3 - 712704 - 19515200 \lambda) b^6 \\
& + 32 \lambda^2 (-13238 \lambda^2 + 653 \lambda^3 - 5376 - 3105672 \lambda) b^5 \\
& + \lambda^3 (61897 \lambda^2 + 1494624 \lambda + 73872384) b^4 \\
& - 8 \lambda^3 (9 \lambda^3 - 2612 \lambda^2 + 6394368 + 208864 \lambda) b^3 \\
& + 4 \lambda^3 (19 \lambda^3 - 18251776 + 137344 \lambda + 7860 \lambda^2) b^2 \\
& - 4 \lambda^3 (4368 \lambda^2 - 3325952 + 19 \lambda^3 - 356352 \lambda) b \\
& + 8 \lambda^3 (3 \lambda - 352) (3 \lambda^2 - 96 \lambda - 4096)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_5 = & 1024 \lambda^2 [(32 \lambda - 1) (851968 \lambda^3 + 33792 \lambda^2 - 640 \lambda - 3) b^{20} \\
& + 8 \lambda (536576 \lambda^2 + 2326528 \lambda^3 - 8704 \lambda - 119) b^{19} \\
& - 16 \lambda (3316 \lambda - 61 + 10035200 \lambda^3 - 313856 \lambda^2) b^{18} \\
& - 16 \lambda (3306 \lambda + 4050944 \lambda^3 + 61 + 500992 \lambda^2) b^{17} \\
& + 4 \lambda (-790752 \lambda^2 + 238 + 33960960 \lambda^3 + 68017 \lambda) b^{16} \\
& - 4 \lambda (-14429440 \lambda^3 - 1099544 \lambda^2 + 136 + 57344 \lambda^4 - 28483 \lambda) b^{15} \\
& - 4 \lambda^2 (1073152 \lambda^3 - 44055360 \lambda^2 + 1605682 \lambda - 68017) b^{14} \\
& - 4 \lambda^2 (1943633 \lambda - 109886384 \lambda^2 + 1255424 \lambda^3 + 13224) b^{13} \\
& + 4 \lambda^2 (-13264 - 155401436 \lambda^2 + 1943633 \lambda + 2003968 \lambda^3) b^{12} \\
& + 4 \lambda^2 (-17408 + 1605682 \lambda - 38185893 \lambda^2 + 790752 \lambda^3) b^{11} \\
& - \lambda^2 (54272 \lambda^4 + 4398176 \lambda^3 + 4398176 \lambda - 799888095 \lambda^2 + 54272) b^{10} \\
& - 4 \lambda^3 (17408 \lambda^3 - 1605682 \lambda^2 + 38185893 \lambda - 790752) b^9 \\
& - 4 \lambda^3 (-1943633 \lambda^2 + 13264 \lambda^3 + 155401436 \lambda - 2003968) b^8 \\
& - 4 \lambda^3 (1943633 \lambda^2 + 1255424 + 13224 \lambda^3 - 109886384 \lambda) b^7 \\
& + 4 \lambda^3 (-1073152 + 44055360 \lambda - 1605682 \lambda^2 + 68017 \lambda^3) b^6 \\
& - 4 \lambda^3 (-1099544 \lambda^2 + 136 \lambda^4 + 57344 - 14429440 \lambda - 28483 \lambda^3) b^5 \\
& + 4 \lambda^4 (68017 \lambda^2 - 790752 \lambda + 238 \lambda^3 + 33960960) b^4 \\
& - 16 \lambda^4 (61 \lambda^3 + 500992 \lambda + 3306 \lambda^2 + 4050944) b^3 \\
& + 16 \lambda^4 (-3316 \lambda^2 - 10035200 + 61 \lambda^3 + 313856 \lambda) b^2 \\
& - 8 \lambda^4 (-536576 \lambda - 2326528 + 8704 \lambda^2 + 119 \lambda^3) b \\
& + \lambda^4 (\lambda - 32) (3 \lambda^3 + 640 \lambda^2 - 33792 \lambda - 851968)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = & -512 \lambda^2 [2 (14336 \lambda^2 + 864 \lambda + 3) (32 \lambda - 1)^2 b^{22} \\
& + (32 \lambda - 1) (163840 \lambda^3 + 124416 \lambda^2 + 2288 \lambda - 21) b^{21} \\
& - 2 (-1164 \lambda + 134656 \lambda^2 - 3 + 82051072 \lambda^4 - 4145152 \lambda^3) b^{20} \\
& - 2 \lambda (1937 + 46864 \lambda + 2376704 \lambda^2 + 69353472 \lambda^3) b^{19} \\
& + 2 \lambda (-6198400 \lambda^2 + 1937 + 137944 \lambda + 139161600 \lambda^3) b^{18} \\
& + 8 \lambda (37425152 \lambda^3 - 291 + 4183 \lambda + 8192 \lambda^4 + 284320 \lambda^2) b^{17} \\
& - \lambda (3817472 \lambda^4 + 22911520 \lambda^2 - 250931 \lambda - 2960 - 8424960 \lambda^3) b^{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -8\lambda(-49464080\lambda^3 + 1036288\lambda^4 - 4183\lambda + 168 - 252247\lambda^2)b^{15} \\
 & +\lambda^2(4753408\lambda^3 + 384091840\lambda^2 + 275888 + 13469741\lambda)b^{14} \\
 & +\lambda^2(-93728 - 13469741\lambda - 15473200\lambda^2 + 12396800\lambda^3)b^{13} \\
 & -4\lambda^2(568640\lambda^3 + 67328 + 90673167\lambda^2 + 18944\lambda^4 + 504494\lambda)b^{12} \\
 & -\lambda^2(51200\lambda^4 + 51200 - 22911520\lambda^3 + 1301259963\lambda^2 - 22911520\lambda)b^{11} \\
 & -4\lambda^2(568640\lambda + 67328\lambda^4 + 90673167\lambda^2 + 18944 + 504494\lambda^3)b^{10} \\
 & -\lambda^3(-12396800 + 93728\lambda^3 + 13469741\lambda^2 + 15473200\lambda)b^9 \\
 & +\lambda^3(4753408 + 384091840\lambda + 275888\lambda^3 + 13469741\lambda^2)b^8 \\
 & -8\lambda^3(-4183\lambda^3 + 168\lambda^4 - 49464080\lambda - 252247\lambda^2 + 1036288)b^7 \\
 & +\lambda^3(-3817472 + 250931\lambda^3 + 2960\lambda^4 + 8424960\lambda - 22911520\lambda^2)b^6 \\
 & -8\lambda^3(291\lambda^4 - 284320\lambda^2 - 4183\lambda^3 - 37425152\lambda - 8192)b^5 \\
 & +2\lambda^4(1937\lambda^3 - 6198400\lambda + 137944\lambda^2 + 139161600)b^4 \\
 & -2\lambda^4(69353472 + 46864\lambda^2 + 1937\lambda^3 + 2376704\lambda)b^3 \\
 & +2\lambda^4(4145152\lambda - 134656\lambda^2 + 3\lambda^4 + 1164\lambda^3 - 82051072)b^2 \\
 & +\lambda^4(\lambda - 32)(21\lambda^3 - 2288\lambda^2 - 124416\lambda - 163840)b \\
 & +2\lambda^4(3\lambda^2 + 864\lambda + 14336)(\lambda - 32)^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_3 = & 64\lambda^2[32(80\lambda + 3)(32\lambda - 1)^3b^{24} \\
 & -4(8192\lambda^2 + 608\lambda + 3)(32\lambda - 1)^2b^{23} \\
 & - (32\lambda - 1)(18153472\lambda^3 - 741376\lambda^2 + 19264\lambda + 513)b^{22} \\
 & -4(3 + 5578\lambda + 2347008\lambda^3 + 20352\lambda^2 + 121569280\lambda^4)b^{21} \\
 & +96(-11178\lambda^2 + 401\lambda - 1088896\lambda^3 - 1 + 18735104\lambda^4)b^{20} \\
 & +96\lambda(49152\lambda^4 - 401 - 7315\lambda + 5961216\lambda^3 + 552976\lambda^2)b^{19} \\
 & +8\lambda(2789 + 49885184\lambda^3 + 132087\lambda - 3020928\lambda^2 + 49152\lambda^4)b^{18} \\
 & -32\lambda(-46502080\lambda^3 + 1833150\lambda^2 - 41355\lambda + 89 + 1308672\lambda^4)b^{17} \\
 & +8\lambda(-450123968\lambda^3 + 1173504\lambda^4 + 132087\lambda + 208 + 6032076\lambda^2)b^{16} \\
 & +2\lambda(-3328 + 52267008\lambda^4 - 351120\lambda - 3874187296\lambda^3 - 2577843\lambda^2)b^{15} \\
 & -6\lambda^2(8192\lambda^4 + 178848 - 859281\lambda + 8847616\lambda^3 + 77466416\lambda^2)b^{14} \\
 & +12\lambda^2(-4021384\lambda - 6784 + 2013952\lambda^3 + 254965399\lambda^2 + 9216\lambda^4)b^{13} \\
 & -3\lambda^2(-19553600\lambda^3 + 452608 + 452608\lambda^4 - 939532581\lambda^2 - 19553600\lambda)b^{12} \\
 & -12\lambda^2(6784\lambda^4 - 2013952\lambda - 254965399\lambda^2 + 4021384\lambda^3 - 9216)b^{11} \\
 & -6\lambda^2(-859281\lambda^3 + 8847616\lambda + 178848\lambda^4 + 77466416\lambda^2 + 8192)b^{10} \\
 & -2\lambda^3(-52267008 + 2577843\lambda^2 + 3874187296\lambda + 351120\lambda^3 + 3328\lambda^4)b^9 \\
 & +8\lambda^3(-450123968\lambda + 208\lambda^4 + 132087\lambda^3 + 1173504 + 6032076\lambda^2)b^8 \\
 & -32\lambda^3(89\lambda^4 - 46502080\lambda - 41355\lambda^3 + 1308672 + 1833150\lambda^2)b^7 \\
 & +8\lambda^3(-3020928\lambda^2 + 132087\lambda^3 + 49152 + 49885184\lambda + 2789\lambda^4)b^6 \\
 & -96\lambda^3(-49152 - 552976\lambda^2 - 5961216\lambda + 401\lambda^4 + 7315\lambda^3)b^5 \\
 & -96\lambda^4(1088896\lambda + 11178\lambda^2 - 401\lambda^3 + \lambda^4 - 18735104)b^4 \\
 & -4\lambda^4(5578\lambda^3 + 121569280 + 20352\lambda^2 + 2347008\lambda + 3\lambda^4)b^3 \\
 & +\lambda^4(\lambda - 32)(513\lambda^3 + 19264\lambda^2 - 741376\lambda + 18153472)b^2 \\
 & -4\lambda^4(3\lambda^2 + 608\lambda + 8192)(\lambda - 32)^2b \\
 & -32\lambda^4(3\lambda + 80)(\lambda - 32)^3]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 = & -16\lambda[2(64\lambda + 1)(32\lambda - 1)^4b^{26} + 2(16\lambda + 1)(496\lambda + 1)(32\lambda - 1)^3b^{25} \\
 & +4\lambda(8192\lambda^2 + 20224\lambda + 341)(32\lambda - 1)^2b^{24} \\
 & +2\lambda(32\lambda - 1)(15319040\lambda^3 - 1516032\lambda^2 + 108912\lambda - 1297)b^{23} \\
 & +4\lambda(890688\lambda^2 - 5500\lambda + 580321280\lambda^4 - 23977984\lambda^3 + 341)b^{22} \\
 & +2\lambda(7340032\lambda^5 - 416 + 51988480\lambda^3 + 2322208\lambda^2 - 436633600\lambda^4 - 3559\lambda)b^{21} \\
 & +2\lambda(1614872\lambda^2 - 77003776\lambda^3 - 64 - 972455936\lambda^4 + 7602176\lambda^5 + 3559\lambda)b^{20} \\
 & -8\lambda^2(10092544\lambda^4 + 850267\lambda + 19576032\lambda^2 - 2750 + 106708480\lambda^3)b^{19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda^2 (-15828485 \lambda + 300832 + 518342784 \lambda^2 - 5097559040 \lambda^3 + 127664128 \lambda^4) b^{18} \\
& +8 \lambda^2 (9195069 \lambda^2 + 11988992 \lambda^4 + 672327104 \lambda^3 - 850267 \lambda + 800) b^{17} \\
& +2 \lambda^2 (-28880387 \lambda^2 + 262144 \lambda^5 + 1614872 \lambda + 4764155776 \lambda^3 - 38144 - 51988480 \lambda^4) b^{16} \\
& -2 \lambda^2 (30610480 \lambda^3 - 77003776 \lambda^4 - 2048 - 28880387 \lambda^2 - 2322208 \lambda + 778240 \lambda^5) b^{15} \\
& -24 \lambda^3 (243361161 \lambda^2 + 156160 \lambda^4 - 148448 - 6525344 \lambda^3 + 3065023 \lambda) b^{14} \\
& +6 \lambda^3 (1667072 \lambda^4 - 86390464 \lambda - 86390464 \lambda^3 + 1667072 + 766772529 \lambda^2) b^{13} \\
& +24 \lambda^3 (-243361161 \lambda^2 + 6525344 \lambda + 148448 \lambda^4 - 156160 - 3065023 \lambda^3) b^{12} \\
& +2 \lambda^3 (-778240 + 77003776 \lambda + 2048 \lambda^5 - 30610480 \lambda^2 + 2322208 \lambda^4 + 28880387 \lambda^3) b^{11} \\
& -2 \lambda^3 (28880387 \lambda^3 - 1614872 \lambda^4 + 38144 \lambda^5 - 262144 + 51988480 \lambda - 4764155776 \lambda^2) b^{10} \\
& +8 \lambda^4 (9195069 \lambda^2 + 672327104 \lambda - 850267 \lambda^3 + 800 \lambda^4 + 11988992) b^9 \\
& +\lambda^4 (-5097559040 \lambda + 300832 \lambda^4 - 15828485 \lambda^3 + 127664128 + 518342784 \lambda^2) b^8 \\
& +8 \lambda^4 (-10092544 + 2750 \lambda^4 - 850267 \lambda^3 - 19576032 \lambda^2 - 106708480 \lambda) b^7 \\
& -2 \lambda^4 (64 \lambda^5 - 1614872 \lambda^3 + 77003776 \lambda^2 - 3559 \lambda^4 + 972455936 \lambda - 7602176) b^6 \\
& -2 \lambda^4 (-2322208 \lambda^3 + 436633600 \lambda + 416 \lambda^5 + 3559 \lambda^4 - 7340032 - 51988480 \lambda^2) b^5 \\
& +4 \lambda^5 (580321280 - 23977984 \lambda - 5500 \lambda^3 + 341 \lambda^4 + 890688 \lambda^2) b^4 \\
& +2 \lambda^5 (\lambda - 32) (1297 \lambda^3 - 108912 \lambda^2 + 1516032 \lambda - 15319040) b^3 \\
& +4 \lambda^5 (341 \lambda^2 + 20224 \lambda + 8192) (\lambda - 32)^2 b^2 - 2 \lambda^5 (\lambda + 496) (\lambda + 16) (\lambda - 32)^3 b + 2 \lambda^5 (\lambda + 64) (\lambda - 32)^4]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & 4 \lambda [8 (32 \lambda - 1)^5 b^{28} + 18 (32 \lambda + 1) (32 \lambda - 1)^4 b^{27} \\
& -6 (9728 \lambda^2 + 488 \lambda - 3) (32 \lambda - 1)^3 b^{26} \\
& -4 (295936 \lambda^3 + 62976 \lambda^2 - 249 \lambda - 2) (32 \lambda - 1)^2 b^{25} \\
& -3 \lambda (32 \lambda - 1) (8126464 \lambda^3 + 2214912 \lambda^2 - 17088 \lambda + 1633) b^{24} \\
& +4 \lambda (112916 \lambda - 3192512 \lambda^2 - 362217472 \lambda^4 + 10485760 \lambda^5 + 121 + 27719680 \lambda^3) b^{23} \\
& +6 \lambda (23441408 \lambda^3 + 9437184 \lambda^5 - 58556416 \lambda^4 - 2343840 \lambda^2 + 51923 \lambda + 776) b^{22} \\
& -6 \lambda (339697664 \lambda^4 + 3686504 \lambda^2 + 13893632 \lambda^5 + 51923 \lambda + 288 - 125926656 \lambda^3) b^{21} \\
& +4 \lambda (64258016 \lambda^3 - 112916 \lambda + 3845471 \lambda^2 + 320 - 573363200 \lambda^4 + 45547520 \lambda^5) b^{20} \\
& +12 \lambda^2 (-46302792 \lambda^2 + 15687680 \lambda^4 - 63170560 \lambda^3 + 2056277 \lambda + 17336) b^{19} \\
& +4 \lambda^2 (76864 + 92652736 \lambda^3 + 3845471 \lambda + 655360 \lambda^5 - 27719680 \lambda^4 - 140496194 \lambda^2) b^{18} \\
& +48 \lambda^2 (-460813 \lambda - 33490960 \lambda^3 + 7143975 \lambda^2 + 24576 \lambda^5 + 5792 - 2930176 \lambda^4) b^{17} \\
& +144 \lambda^2 (-97660 \lambda + 86515940 \lambda^3 - 256 - 5246944 \lambda^4 + 27648 \lambda^5 - 2381325 \lambda^2) b^{16} \\
& +8 \lambda^2 (-1596256 \lambda + 1994752 \lambda^5 - 44841296 \lambda^3 - 32129008 \lambda^4 + 70248097 \lambda^2 + 10240) b^{15} \\
& +18 \lambda^3 (-487570503 \lambda^2 + 30868528 \lambda + 460288 \lambda^4 + 30868528 \lambda^3 + 460288) b^{14} \\
& +8 \lambda^3 (-1596256 \lambda^4 + 1994752 - 44841296 \lambda^2 - 32129008 \lambda + 70248097 \lambda^3 + 10240 \lambda^5) b^{13} \\
& -144 \lambda^3 (97660 \lambda^4 + 256 \lambda^5 - 27648 - 86515940 \lambda^2 + 2381325 \lambda^3 + 5246944 \lambda) b^{12} \\
& +48 \lambda^3 (-460813 \lambda^4 - 33490960 \lambda^2 + 7143975 \lambda^3 + 24576 + 5792 \lambda^5 - 2930176 \lambda) b^{11} \\
& +4 \lambda^3 (76864 \lambda^5 + 92652736 \lambda^2 - 27719680 \lambda - 140496194 \lambda^3 + 655360 + 3845471 \lambda^4) b^{10} \\
& +12 \lambda^4 (2056277 \lambda^3 + 17336 \lambda^4 + 15687680 - 63170560 \lambda - 46302792 \lambda^2) b^9 \\
& +4 \lambda^4 (-573363200 \lambda + 3845471 \lambda^3 - 112916 \lambda^4 + 320 \lambda^5 + 45547520 + 64258016 \lambda^2) b^8 \\
& -6 \lambda^4 (51923 \lambda^4 + 339697664 \lambda - 125926656 \lambda^2 + 3686504 \lambda^3 + 13893632 + 288 \lambda^5) b^7 \\
& +6 \lambda^4 (51923 \lambda^4 + 23441408 \lambda^2 + 9437184 + 776 \lambda^5 - 2343840 \lambda^3 - 58556416 \lambda) b^6 \\
& +4 \lambda^4 (10485760 + 121 \lambda^5 - 362217472 \lambda + 27719680 \lambda^2 - 3192512 \lambda^3 + 112916 \lambda^4) b^5 \\
& +3 \lambda^5 (\lambda - 32) (1633 \lambda^3 - 17088 \lambda^2 + 2214912 \lambda + 8126464) b^4 \\
& +4 \lambda^5 (2 \lambda^3 + 249 \lambda^2 - 62976 \lambda - 295936) (\lambda - 32)^2 b^3 \\
& -6 \lambda^5 (3 \lambda^2 - 488 \lambda - 9728) (\lambda - 32)^3 b^2 \\
& +18 \lambda^5 (\lambda + 32) (\lambda - 32)^4 b - 8 \lambda^5 (\lambda - 32)^5]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_0 = & -(32 \lambda - 1)^6 b^{30} - 24 \lambda (32 \lambda - 1)^5 b^{29} - 6 \lambda (64 \lambda + 7) (32 \lambda - 1)^4 b^{28} \\
& -6 \lambda (256 \lambda^2 + 560 \lambda + 7) (32 \lambda - 1)^3 b^{27} \\
& +12 \lambda (10240 \lambda^3 - 12192 \lambda^2 - 753 \lambda - 2) (32 \lambda - 1)^2 b^{26} \\
& -6 \lambda (32 \lambda - 1) (1048576 \lambda^5 - 5816320 \lambda^4 + 735232 \lambda^3 + 35824 \lambda^2 + 821 \lambda - 32) b^{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -12 \lambda^2 (-4610048 \lambda^3 + 34734080 \lambda^4 + 10485760 \lambda^5 + 625 + 109696 \lambda^2 - 4444 \lambda) b^{24} \\
& -6 \lambda^2 (112 - 39640064 \lambda^3 - 2959 \lambda - 91328 \lambda^2 + 1048576 \lambda^5 + 290422784 \lambda^4) b^{23} \\
& +6 \lambda^2 (832 - 324896 \lambda^2 + 17563648 \lambda^5 + 8458240 \lambda^3 - 152608768 \lambda^4 - 2959 \lambda) b^{22} \\
& +48 \lambda^2 (-80 - 1111 \lambda + 3284992 \lambda^5 + 14102528 \lambda^4 - 6268472 \lambda^3 + 170821 \lambda^2) b^{21} \\
& -3 \lambda^2 (229550752 \lambda^3 + 19104 \lambda - 8885403 \lambda^2 + 5120 - 58687488 \lambda^5 + 5242880 \lambda^6 - 929390592 \lambda^4) b^{20} \\
& -24 \lambda^3 (327680 \lambda^5 + 16976 - 341642 \lambda + 2305024 \lambda^4 + 60862016 \lambda^3 - 12433105 \lambda^2) b^{19} \\
& +12 \lambda^3 (-162448 \lambda + 262144 \lambda^5 + 13408000 \lambda^3 + 22691899 \lambda^2 + 16000 - 19820032 \lambda^4) b^{18} \\
& +12 \lambda^3 (17408 - 22691899 \lambda^2 + 733184 \lambda^5 + 224658704 \lambda^3 - 4229120 \lambda^4 + 45664 \lambda) b^{17} \\
& +24 \lambda^3 (9728 \lambda^5 + 12536944 \lambda^4 - 10240 - 12433105 \lambda^2 + 68678813 \lambda^3 - 54848 \lambda) b^{16} \\
& -4 \lambda^3 (163840 \lambda^6 + 163840 + 616704 \lambda + 616704 \lambda^5 + 1472170247 \lambda^3 - 172163064 \lambda^2 - 172163064 \lambda^4) b^{15} \\
& -24 \lambda^4 (12433105 \lambda^3 - 68678813 \lambda^2 + 54848 \lambda^4 - 12536944 \lambda - 9728 + 10240 \lambda^5) b^{14} \\
& +12 \lambda^4 (17408 \lambda^5 - 4229120 \lambda + 733184 + 45664 \lambda^4 + 224658704 \lambda^2 - 22691899 \lambda^3) b^{13} \\
& +12 \lambda^4 (262144 + 22691899 \lambda^3 - 162448 \lambda^4 + 13408000 \lambda^2 - 19820032 \lambda + 16000 \lambda^5) b^{12} \\
& -24 \lambda^4 (2305024 \lambda + 16976 \lambda^5 - 341642 \lambda^4 + 60862016 \lambda^2 + 327680 - 12433105 \lambda^3) b^{11} \\
& -3 \lambda^4 (-58687488 \lambda + 229550752 \lambda^3 + 19104 \lambda^5 - 929390592 \lambda^2 - 8885403 \lambda^4 + 5120 \lambda^6 + 5242880) b^{10} \\
& -48 \lambda^5 (1111 \lambda^4 + 6268472 \lambda^2 - 170821 \lambda^3 - 3284992 + 80 \lambda^5 - 14102528 \lambda) b^9 \\
& +6 \lambda^5 (-152608768 \lambda + 832 \lambda^5 + 8458240 \lambda^2 + 17563648 - 2959 \lambda^4 - 324896 \lambda^3) b^8 \\
& -6 \lambda^5 (-2959 \lambda^4 + 1048576 - 91328 \lambda^3 + 112 \lambda^5 - 39640064 \lambda^2 + 290422784 \lambda) b^7 \\
& -12 \lambda^5 (-4610048 \lambda^2 + 109696 \lambda^3 - 4444 \lambda^4 + 10485760 + 625 \lambda^5 + 34734080 \lambda) b^6 \\
& -6 \lambda^5 (\lambda - 32) (32 \lambda^5 - 821 \lambda^4 - 35824 \lambda^3 - 735232 \lambda^2 + 5816320 \lambda - 1048576) b^5 \\
& -12 \lambda^6 (2 \lambda^3 + 753 \lambda^2 + 12192 \lambda - 10240) (\lambda - 32)^2 b^4 \\
& +6 \lambda^6 (7 \lambda^2 + 560 \lambda + 256) (\lambda - 32)^3 b^3 \\
& -6 \lambda^6 (7 \lambda + 64) (\lambda - 32)^4 b^2 + 24 \lambda^6 (\lambda - 32)^5 b - \lambda^6 (\lambda - 32)^6
\end{aligned}$$

Apêndice C

Bifurcações Tangentes e de Dobramento de Período para o Período 5

C.1 Bifurcações Tangentes

As curvas de bifurcação tangente de período 5 são dadas por $w_{5+}^{(1)} = 0$ onde:

$$w_{5+}^{(1)}(a, b) = \sum_{n=0}^{11} B_n a^n, \quad (\text{C.1})$$

sendo os coeficientes B_n dados por:

$$B_{11} = 4194304,$$

$$B_{10} = -1048576 (31 b^2 + 14 b + 31),$$

$$B_9 = 524288 (208 b^4 + 206 b^3 + 377 b^2 + 206 b + 208),$$

$$B_8 = -131072(1702 b^6 + 2694 b^5 + 4227 b^4 + 4434 b^3 + 4227 b^2 + 2694 b + 1702),$$

$$B_7 = 16384(20548 b^8 + 44312 b^7 + 60168 b^6 + 85020 b^5 + 88867 b^4 + 85020 b^3 + 60168 b^2 + 44312 b + 20548),$$

$$B_6 = -4096(98258 b^{10} + 270188 b^9 + 321780 b^8 + 453116 b^7 + 559873 b^6 + 638882 b^5 + 559873 b^4 + 453116 b^3 + 321780 b^2 + 270188 b + 98258),$$

$$B_5 = 2048(185073 b^{12} + 643140 b^{11} + 763141 b^{10} + 733318 b^9 + 1178442 b^8 + 1243690 b^7 + 982437 b^6 + 1243690 b^5 + 1178442 b^4 + 733318 b^3 + 763141 b^2 + 643140 b + 185073),$$

$$B_4 = -512(585838 b^{14} + 2442442 b^{13} + 3213091 b^{12}$$

$$\begin{aligned}
& +2106672 b^{11} + 3237512 b^{10} + 3191242 b^9 \\
& +2112993 b^8 + 1931970 b^7 + 2112993 b^6 \\
& +3191242 b^5 + 3237512 b^4 + 2106672 b^3 \\
& +3213091 b^2 + 2442442 b + 585838),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 = & 64(3301996 b^{16} + 14632868 b^{15} + 19390854 b^{14} \\
& +14315584 b^{13} + 20529630 b^{12} + 9310456 b^{11} \\
& -12385960 b^{10} - 4667736 b^9 + 5255641 b^8 \\
& -4667736 b^7 - 12385960 b^6 + 9310456 b^5 \\
& +20529630 b^4 + 14315584 b^3 + 19390854 b^2 \\
& +14632868 b + 3301996),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & -48(2502444 b^{18} + 10501808 b^{17} + 13759660 b^{16} \\
& +13654304 b^{15} + 11940758 b^{14} - 1960324 b^{13} \\
& -9924060 b^{12} - 614856 b^{11} - 11671987 b^{10} \\
& -24558694 b^9 - 11671987 b^8 - 614856 b^7 \\
& -9924060 b^6 - 1960324 b^5 + 11940758 b^4 \\
& +13654304 b^3 + 13759660 b^2 + 10501808 b + 2502444),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = & 4(15699857 b^{20} + 56126244 b^{19} + 72590096 b^{18} \\
& +60039808 b^{17} + 30463278 b^{16} - 24070088 b^{15} \\
& -58375782 b^{14} - 109347612 b^{13} - 130080468 b^{12} \\
& -36308556 b^{11} + 65734446 b^{10} - 36308556 b^9 \\
& -130080468 b^8 - 109347612 b^7 - 58375782 b^6 \\
& -24070088 b^5 + 30463278 b^4 + 60039808 b^3 \\
& +72590096 b^2 + 56126244 b + 15699857),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0 = & -28629151 b^{22} - 75728722 b^{21} - 96195139 b^{20} \\
& -54834660 b^{19} + 32995656 b^{18} + 104670352 b^{17} \\
& +77210656 b^{16} - 60807464 b^{15} - 176332464 b^{14} \\
& -106118964 b^{13} + 184444410 b^{12} + 351994980 b^{11} \\
& +184444410 b^{10} - 106118964 b^9 - 176332464 b^8 \\
& -60807464 b^7 + 77210656 b^6 + 104670352 b^5 \\
& +32995656 b^4 - 54834660 b^3 - 96195139 b^2 - 75728722 b - 28629151.
\end{aligned}$$

C.2 Bifurcações de Dobramento de Período

A desestabilização dos movimentos de período 5, ou seja o dobramento de período de $5to10$ ocorre em:

$$W_{5^-} = W_5(a, b; \lambda = -1) = \sum_{n=0}^{15} C_i a^n, \quad (\text{C.2})$$

onde os coeficientes C_i são dados por:

$$C_{15} = 1073741824,$$

$$\begin{aligned}
C_{14} &= -536870912 (16 b^2 + b + 16), \\
C_{13} &= 67108864 (448 b^4 + 60 b^3 + 669 b^2 + 60 b + 448), \\
C_{12} &= -33554432 (1919 b^6 + 513 b^5 + 2688 b^4 + 695 b^3 + 2688 b^2 + 513 b + 1919), \\
C_{11} &= 8388608(12004 b^8 + 6027 b^7 + 8549 b^6 + 7966 b^5 + 8877 b^4 \\
&\quad + 7966 b^3 + 8549 b^2 + 6027 b + 12004), \\
C_{10} &= -1048576(118147 b^{10} + 93928 b^9 - 45606 b^8 + 63750 b^7 - 81016 b^6 + 56276 b^5 \\
&\quad - 81016 b^4 + 63750 b^3 - 45606 b^2 + 93928 b + 118147), \\
C_9 &= 262144(462764 b^{12} + 519980 b^{11} - 754580 b^{10} - 263580 b^9 - 363092 b^8 \\
&\quad - 549356 b^7 - 1899347 b^6 - 549356 b^5 - 363092 b^4 - 263580 b^3 \\
&\quad - 754580 b^2 + 519980 b + 462764), \\
C_8 &= -131072(759856 b^{14} + 1168764 b^{13} - 2154185 b^{12} - 2076276 b^{11} + 1484163 b^{10} \\
&\quad - 2860867 b^9 - 2114656 b^8 + 1148387 b^7 - 2114656 b^6 - 2860867 b^5 + 1484163 b^4 \\
&\quad - 2076276 b^3 - 2154185 b^2 + 1168764 b + 759856), \\
C_7 &= 32768(2222462 b^{16} + 3720698 b^{15} - 10017708 b^{14} - 11595640 b^{13} + 13897184 b^{12} \\
&\quad - 10169997 b^{11} - 9353923 b^{10} + 6517818 b^9 + 11389037 b^8 + 6517818 b^7 \\
&\quad - 9353923 b^6 - 10169997 b^5 + 13897184 b^4 - 11595640 b^3 \\
&\quad - 10017708 b^2 + 3720698 b + 2222462), \\
C_6 &= -4096(11351480 b^{18} + 11861004 b^{17} - 73525116 b^{16} - 49463064 b^{15} \\
&\quad + 72439657 b^{14} - 98764960 b^{13} - 36738054 b^{12} + 296344790 b^{11} + 88498928 b^{10} \\
&\quad - 136332380 b^9 + 88498928 b^8 + 296344790 b^7 - 36738054 b^6 - 98764960 b^5 \\
&\quad + 72439657 b^4 - 49463064 b^3 - 73525116 b^2 + 11861004 b + 11351480), \\
C_5 &= 3072(8992929 b^{20} + 4750312 b^{19} - 55212976 b^{18} - 18950384 b^{17} + 46425988 b^{16} \\
&\quad + 17887812 b^{15} + 62402948 b^{14} + 150762956 b^{13} - 212483068 b^{12} - 54132980 b^{11} \\
&\quad + 269525301 b^{10} - 54132980 b^9 - 212483068 b^8 + 150762956 b^7 + 62402948 b^6 \\
&\quad + 17887812 b^5 + 46425988 b^4 - 18950384 b^3 - 55212976 b^2 + 4750312 b + 8992929), \\
C_4 &= -4608(3260950 b^{22} + 153021 b^{21} - 19184898 b^{20} - 14893710 b^{19} + 32332446 b^{18} \\
&\quad + 33010768 b^{17} + 3933547 b^{16} + 44668864 b^{15} + 40682731 b^{14} - 1610443 b^{13} \\
&\quad - 39860580 b^{12} - 149687267 b^{11} - 39860580 b^{10} - 1610443 b^9 + 40682731 b^8 \\
&\quad + 44668864 b^7 + 3933547 b^6 + 33010768 b^5 + 32332446 b^4 - 14893710 b^3 \\
&\quad - 19184898 b^2 + 153021 b + 3260950), \\
C_3 &= 1728(3279584 b^{24} - 1224036 b^{23} - 23116621 b^{22} - 17664748 b^{21} + 70444160 b^{20} \\
&\quad + 19029952 b^{19} + 15699632 b^{18} + 58886336 b^{17} - 135465976 b^{16} - 290683278 b^{15} \\
&\quad - 15481138 b^{14} + 114211228 b^{13} + 99946685 b^{12} + 114211228 b^{11} - 15481138 b^{10} \\
&\quad - 290683278 b^9 - 135465976 b^8 + 58886336 b^7 + 15699632 b^6 + 19029952 b^5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +70444160b^4 - 17664748b^3 - 23116621b^2 - 1224036b + 3279584), \\
C_2 = & -1296(1844766b^{26} + 6588450b^{25} - 628716b^{24} + 13807266b^{23} + 29886212b^{22} \\
& - 12188562b^{21} - 22257854b^{20} - 7693128b^{19} - 71107349b^{18} + 64226368b^{17} \\
& + 119677526b^{16} - 3332166b^{15} - 73134576b^{14} + 69843526b^{13} - 73134576b^{12} \\
& - 3332166b^{11} + 119677526b^{10} + 64226368b^9 - 71107349b^8 - 7693128b^7 \\
& - 22257854b^6 - 12188562b^5 + 29886212b^4 + 13807266b^3 - 628716b^2 \\
& + 6588450b + 1844766), \\
C_1 = & 972(1288408b^{28} + 2723226b^{27} - 8196298b^{26} - 4171596b^{25} - 2400783b^{24} \\
& - 6645732b^{23} - 2316790b^{22} - 11243594b^{21} - 11180412b^{20} - 1506988b^{19} \\
& + 4366956b^{18} - 7535168b^{17} + 55747824b^{16} - 2718424b^{15} - 40621258b^{14} \\
& - 2718424b^{13} + 55747824b^{12} - 7535168b^{11} + 4366956b^{10} - 1506988b^9 \\
& - 11180412b^8 - 11243594b^7 - 2316790b^6 - 6645732b^5 - 2400783b^4 \\
& - 4171596b^3 - 8196298b^2 + 2723226b + 1288408), \\
C_0 = & -729(b^4 + b^3 + b^2 + b + 1)(1771561b^{26} - 483153b^{25} - 732050b^{24} - 644204b^{23} \\
& - 300806b^{22} + 105479b^{21} + 2048505b^{20} + 1498236b^{19} - 1878560b^{18} - 2909980b^{17} \\
& - 3301042b^{16} + 8927450b^{15} - 1012680b^{14} - 5857512b^{13} - 1012680b^{12} + 8927450b^{11} \\
& - 3301042b^{10} - 2909980b^9 - 1878560b^8 + 1498236b^7 + 2048505b^6 + 105479b^5 \\
& - 300806b^4 - 644204b^3 - 732050b^2 - 483153b + 1771561).
\end{aligned}$$

Apêndice D

Bifurcações Tangentes e de Dobramento de Período para o Período 6

D.1 Bifurcações Tangentes

As curvas que definem o nascimento de movimentos de período 6 provindos de bifurcações tangentes são dadas por:

$$w_{6+}^{(1)}(a, b) = \sum_{n=0}^{20} B_n a^n, \quad (\text{D.1})$$

onde os coeficientes B_n são:

$$B_{20} = 1099511627776,$$

$$B_{19} = -549755813888(19b^2 + 8b + 19),$$

$$B_{18} = 68719476736(653b^4 + 664b^3 + 1224b^2 + 664b + 653),$$

$$B_{17} = -34359738368(3543b^6 + 6140b^5 + 9696b^4 + 10824b^3 + 9696b^2 + 6140b + 3543),$$

$$B_{16} = 4294967296(57260b^8 + 140280b^7 + 208390b^6 + 316848b^5 + 328747b^4 + 316848b^3 + 208390b^2 + 140280b + 57260),$$

$$B_{15} = -2147483648(185849b^{10} + 581392b^9 + 870523b^8 + 1440120b^7 + 1847522b^6 + 2019240b^5 + 1847522b^4 + 1440120b^3 + 870523b^2 + 581392b + 185849),$$

$$B_{14} = 268435456(1996323b^{12} + 7614184b^{11} + 12188012b^{10} + 18979848b^9 + 29224895b^8 + 35033744b^7 + 37874656b^6 + 35033744b^5 + 29224895b^4 + 18979848b^3 + 12188012b^2 + 7614184b + 1996323),$$

$$B_{13} = -134217728(4602551b^{14} + 20529772b^{13} + 36157728b^{12} + 51561536b^{11} + 86804674b^{10} + 113701028b^9 + 132541965b^8 + 143995552b^7 + 132541965b^6 + 113701028b^5 + 86804674b^4 + 51561536b^3 + 36157728b^2 + 20529772b + 4602551),$$

$$\begin{aligned}
B_{12} &= 16777216(37620583 b^{16} + 189041560 b^{15} + 359999942 b^{14} + 495627296 b^{13} \\
&\quad + 835108095 b^{12} + 1180604896 b^{11} + 1336057350 b^{10} + 1637141880 b^9 \\
&\quad + 1841089611 b^8 + 1637141880 b^7 + 1336057350 b^6 + 1180604896 b^5 \\
&\quad + 835108095 b^4 + 495627296 b^3 + 359999942 b^2 + 189041560 b + 37620583), \\
B_{11} &= -8388608(68778154 b^{18} + 383797192 b^{17} + 781849920 b^{16} + 998319440 b^{15} \\
&\quad + 1673309298 b^{14} + 2576924664 b^{13} + 2762989812 b^{12} + 3306260464 b^{11} \\
&\quad + 4194771415 b^{10} + 4388554296 b^9 + 4194771415 b^8 + 3306260464 b^7 \\
&\quad + 2762989812 b^6 + 2576924664 b^5 + 1673309298 b^4 + 998319440 b^3 \\
&\quad + 781849920 b^2 + 383797192 b + 68778154), \\
B_{10} &= 1048576(462091352 b^{20} + 2807767664 b^{19} + 6080943804 b^{18} + 6657991232 b^{17} \\
&\quad + 10561983754 b^{16} + 20060020560 b^{15} + 18494297860 b^{14} + 17267850720 b^{13} \\
&\quad + 30941311963 b^{12} + 33163314424 b^{11} + 25986018344 b^{10} + 33163314424 b^9 \\
&\quad + 30941311963 b^8 + 17267850720 b^7 + 18494297860 b^6 + 20060020560 b^5 \\
&\quad + 10561983754 b^4 + 6657991232 b^3 + 6080943804 b^2 + 2807767664 b + 462091352), \\
B_9 &= -524288(718370550 b^{22} + 4677498928 b^{21} + 10672917846 b^{20} + 10630791472 b^{19} \\
&\quad + 12497555040 b^{18} + 26466131368 b^{17} + 30021083934 b^{16} + 22187955408 b^{15} \\
&\quad + 28401475613 b^{14} + 35238731412 b^{13} + 36399900828 b^{12} + 37715032168 b^{11} \\
&\quad + 36399900828 b^{10} + 35238731412 b^9 + 28401475613 b^8 + 22187955408 b^7 \\
&\quad + 30021083934 b^6 + 26466131368 b^5 + 12497555040 b^4 + 10630791472 b^3 \\
&\quad + 10672917846 b^2 + 4677498928 b + 718370550), \\
B_8 &= 65536(4027931607 b^{24} + 28506916400 b^{23} + 70925410584 b^{22} + 66781096464 b^{21} \\
&\quad + 33214974146 b^{20} + 107210255040 b^{19} + 156827679860 b^{18} + 44050042032 b^{17} \\
&\quad + 58928539086 b^{16} + 71587925864 b^{15} - 143911293238 b^{14} - 2739852112 b^{13} \\
&\quad + 265410653223 b^{12} - 2739852112 b^{11} - 143911293238 b^{10} + 71587925864 b^9 \\
&\quad + 58928539086 b^8 + 44050042032 b^7 + 156827679860 b^6 + 107210255040 b^5 \\
&\quad + 33214974146 b^4 + 66781096464 b^3 + 70925410584 b^2 + 28506916400 b + 4027931607), \\
B_7 &= -32768(5296143097 b^{26} + 39769443392 b^{25} + 105798788443 b^{24} \\
&\quad + 108433111104 b^{23} + 24427489454 b^{22} + 40725209104 b^{21} + 69331878250 b^{20} \\
&\quad - 58113426928 b^{19} - 37585033525 b^{18} - 174574468992 b^{17} - 453475866023 b^{16} \\
&\quad - 235169435848 b^{15} - 309290529824 b^{14} - 644105314856 b^{13} - 309290529824 b^{12} \\
&\quad - 235169435848 b^{11} - 453475866023 b^{10} - 174574468992 b^9 - 37585033525 b^8 \\
&\quad - 58113426928 b^7 + 69331878250 b^6 + 40725209104 b^5 + 24427489454 b^4 \\
&\quad + 108433111104 b^3 + 105798788443 b^2 + 39769443392 b + 5296143097), \\
B_6 &= 4096(25631231003 b^{28} + 201089629608 b^{27} + 585371564932 b^{26} \\
&\quad + 661348667768 b^{25} + 98014616947 b^{24} - 346832006704 b^{23} - 641402222336 b^{22} \\
&\quad - 417696273648 b^{21} + 196718359371 b^{20} - 1689634942408 b^{19} - 3868086783636 b^{18} \\
&\quad - 3612723922856 b^{17} - 4746861459397 b^{16} - 3864422440576 b^{15} - 1493660850536 b^{14} \\
&\quad - 3864422440576 b^{13} - 4746861459397 b^{12} - 3612723922856 b^{11} - 3868086783636 b^{10} \\
&\quad - 1689634942408 b^9 + 196718359371 b^8 - 417696273648 b^7 - 641402222336 b^6 \\
&\quad - 346832006704 b^5 + 98014616947 b^4 + 661348667768 b^3 + 585371564932 b^2
\end{aligned}$$

$$+201089629608 b + 25631231003),$$

$$\begin{aligned} B_5 = & -18432(3195805431 b^{30} + 26785261020 b^{29} + 76036465008 b^{28} + 95589565512 b^{27} \\ & + 34948910426 b^{26} - 53697082052 b^{25} - 65922224635 b^{24} - 47990209072 b^{23} \\ & - 186769164023 b^{22} - 366281576948 b^{21} - 289127839590 b^{20} - 280519633584 b^{19} \\ & - 586372702472 b^{18} - 729710318268 b^{17} - 544448186433 b^{16} - 409626405344 b^{15} \\ & - 544448186433 b^{14} - 729710318268 b^{13} - 586372702472 b^{12} - 280519633584 b^{11} \\ & - 289127839590 b^{10} - 366281576948 b^9 - 186769164023 b^8 - 47990209072 b^7 \\ & - 65922224635 b^6 - 53697082052 b^5 + 34948910426 b^4 + 95589565512 b^3 \\ & + 76036465008 b^2 + 26785261020 b + 3195805431), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4 = & 6912(4895475732 b^{32} + 36063577032 b^{31} + 106529419514 b^{30} + 170449539568 b^{29} \\ & + 134611975673 b^{28} - 50456933344 b^{27} - 229879515358 b^{26} - 233843743880 b^{25} \\ & - 91218634391 b^{24} + 233935097528 b^{23} + 80180632642 b^{22} - 773402402224 b^{21} \\ & - 958095106339 b^{20} - 203947483696 b^{19} + 189172429754 b^{18} - 608899350184 b^{17} \\ & - 1340487395286 b^{16} - 608899350184 b^{15} + 189172429754 b^{14} - 203947483696 b^{13} \\ & - 958095106339 b^{12} - 773402402224 b^{11} + 80180632642 b^{10} + 233935097528 b^9 \\ & - 91218634391 b^8 - 233843743880 b^7 - 229879515358 b^6 - 50456933344 b^5 \\ & + 134611975673 b^4 + 170449539568 b^3 + 106529419514 b^2 + 36063577032 b \\ & + 4895475732), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 = & -3456(4501133091 b^{34} + 37116309888 b^{33} + 109420823421 b^{32} \\ & + 151685573256 b^{31} + 50660549338 b^{30} - 103887675472 b^{29} - 15761149096 b^{28} \\ & + 250170107336 b^{27} + 309455042833 b^{26} - 7833040552 b^{25} - 226334380135 b^{24} \\ & + 203933750208 b^{23} + 750472449252 b^{22} + 365215845832 b^{21} - 751297263310 b^{20} \\ & - 870911447216 b^{19} + 517692780142 b^{18} + 1437675375776 b^{17} + 517692780142 b^{16} \\ & - 870911447216 b^{15} - 751297263310 b^{14} + 365215845832 b^{13} + 750472449252 b^{12} \\ & + 203933750208 b^{11} - 226334380135 b^{10} - 7833040552 b^9 + 309455042833 b^8 \\ & + 250170107336 b^7 - 15761149096 b^6 - 103887675472 b^5 + 50660549338 b^4 \\ & + 151685573256 b^3 + 109420823421 b^2 + 37116309888 b + 4501133091), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 = & 3888(7b^4 + 2b^3 - 11b^2 + 2b + 7) \times (6417873 b^{28} + 28653534 b^{27} + 57403647 b^{26} \\ & + 41587266 b^{25} + 32610056 b^{24} + 95595270 b^{23} + 70637419 b^{22} - 74959682 b^{21} \\ & + 41430184 b^{20} + 498076918 b^{19} + 480845133 b^{18} - 264406950 b^{17} - 526455537 b^{16} \\ & + 344023756 b^{15} + 1021592434 b^{14} + 344023756 b^{13} - 526455537 b^{12} - 264406950 b^{11} \\ & + 480845133 b^{10} + 498076918 b^9 + 41430184 b^8 - 74959682 b^7 + 70637419 b^6 \\ & + 95595270 b^5 + 32610056 b^4 + 41587266 b^3 + 57403647 b^2 + 28653534 b + 6417873) \times \\ & (7b^2 + 2b + 7)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 = & -5832 (b^2 + b + 1) (3b^8 + 45b^7 + 60b^6 + 59b^5 + 26b^4 + 59b^3 + 60b^2 + 45b + 3) \times \\ & (9b^4 - 3b^3 - 4b^2 - 3b + 9)^2 (7b^4 + 2b^3 - 11b^2 + 2b + 7)^3 (7b^2 + 2b + 7)^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_0 = & 729(7b^2 + 10b + 7) (b^2 - b + 1) (b^2 + b + 1)^2 (9b^4 - 3b^3 - 4b^2 - 3b + 9)^3 \times \\ & (7b^4 + 2b^3 - 11b^2 + 2b + 7)^3 (7b^2 + 2b + 7)^4. \end{aligned}$$

D.2 Bifurcações de Dobramento de Período

As curvas que descrevem o dobramento do período $6 \rightarrow 12$ são dadas por:

$$W_{6^-} = W_6(a, b; \lambda = -1) = \sum_{n=0}^{27} C_i a^n, \quad (\text{D.2})$$

onde os coeficientes C_i 's são :

$$C_{27} = 18014398509481984,$$

$$C_{26} = -9007199254740992 (26 b^2 + 3 b + 26),$$

$$C_{25} = 1125899906842624(1248 b^4 + 352 b^3 + 2161 b^2 + 352 b + 1248),$$

$$C_{24} = -281474976710656(18753 b^6 + 9616 b^5 + 40476 b^4 + 16738 b^3 + 40476 b^2 + 9616 b + 18753),$$

$$C_{23} = 281474976710656(50698 b^8 + 40996 b^7 + 114818 b^6 + 89612 b^5 + 148237 b^4 + 89612 b^3 + 114818 b^2 + 40996 b + 50698),$$

$$C_{22} = -140737488355328(214098 b^{10} + 247494 b^9 + 451247 b^8 + 576082 b^7 + 672096 b^6 + 719779 b^5 + 672096 b^4 + 576082 b^3 + 451247 b^2 + 247494 b + 214098),$$

$$C_{21} = 17592186044416(2962751 b^{12} + 4562348 b^{11} + 5403876 b^{10} + 9960824 b^9 + 9140420 b^8 + 13142516 b^7 + 10409891 b^6 + 13142516 b^5 + 9140420 b^4 + 9960824 b^3 + 5403876 b^2 + 4562348 b + 2962751),$$

$$C_{20} = -4398046511104(17284834 b^{14} + 33809254 b^{13} + 26945662 b^{12} + 60792004 b^{11} + 56285479 b^{10} + 74182476 b^9 + 61528892 b^8 + 78032190 b^7 + 61528892 b^6 + 74182476 b^5 + 56285479 b^4 + 60792004 b^3 + 26945662 b^2 + 33809254 b + 17284834),$$

$$C_{19} = 549755813888(174016384 b^{16} + 417549008 b^{15} + 242394570 b^{14} + 521967944 b^{13} + 685300888 b^{12} + 511736368 b^{11} + 534848504 b^{10} + 438214216 b^9 + 489100755 b^8 + 438214216 b^7 + 534848504 b^6 + 511736368 b^5 + 685300888 b^4 + 521967944 b^3 + 242394570 b^2 + 417549008 b + 174016384),$$

$$C_{18} = -274877906944(385479791 b^{18} + 1100877428 b^{17} + 519691554 b^{16} + 681413550 b^{15} + 1864925878 b^{14} + 471470072 b^{13} + 422250243 b^{12} - 85800460 b^{11} - 9455602 b^{10} - 809039983 b^9 - 9455602 b^8 - 85800460 b^7 + 422250243 b^6 + 471470072 b^5 + 1864925878 b^4 + 681413550 b^3 + 519691554 b^2 + 1100877428 b + 385479791),$$

$$C_{17} = 34359738368(3052405076 b^{20} + 10115127528 b^{19} + 4404639852 b^{18} - 719317656 b^{17} + 15916487454 b^{16} + 1185207488 b^{15} - 11847527508 b^{14} - 6630923896 b^{13} - 10363515260 b^{12} - 22752862536 b^{11} - 24390074893 b^{10} - 22752862536 b^9$$

$$-10363515260 b^8 - 6630923896 b^7 - 11847527508 b^6 + 1185207488 b^5 \\ + 15916487454 b^4 - 719317656 b^3 + 4404639852 b^2 + 10115127528 b + 3052405076),$$

$$C_{16} = -8589934592(10960485200 b^{22} + 41234382280 b^{21} + 18321598828 b^{20} \\ - 34250009800 b^{19} + 49936302196 b^{18} + 15373127964 b^{17} - 135254213236 b^{16} \\ - 34284455536 b^{15} - 42364975433 b^{14} - 162696893984 b^{13} - 164356143340 b^{12} \\ - 97901376426 b^{11} - 164356143340 b^{10} - 162696893984 b^9 - 42364975433 b^8 \\ - 34284455536 b^7 - 135254213236 b^6 + 15373127964 b^5 + 49936302196 b^4 \\ - 34250009800 b^3 + 18321598828 b^2 + 41234382280 b + 10960485200),$$

$$C_{15} = 2147483648(36138063363 b^{24} + 151135106488 b^{23} + 71909608592 b^{22} \\ - 243752163584 b^{21} + 98054943936 b^{20} + 163919190536 b^{19} - 786759592738 b^{18} \\ - 225782826512 b^{17} + 117876428320 b^{16} - 675814390912 b^{15} - 693154594672 b^{14} \\ - 371465752288 b^{13} - 472589538576 b^{12} - 371465752288 b^{11} - 693154594672 b^{10} \\ - 675814390912 b^9 + 117876428320 b^8 - 225782826512 b^7 - 786759592738 b^6 \\ + 163919190536 b^5 + 98054943936 b^4 - 243752163584 b^3 + 71909608592 b^2 \\ + 151135106488 b + 36138063363),$$

$$C_{14} = -1073741824(54879436372 b^{26} + 251612861413 b^{25} + 135404131136 b^{24} \\ - 591064816004 b^{23} - 70742778847 b^{22} + 550920538912 b^{21} - 1459211341266 b^{20} \\ - 820724311710 b^{19} + 1178269645938 b^{18} - 1275006342572 b^{17} - 1602991827247 b^{16} \\ + 1462708730960 b^{15} + 462239158416 b^{14} - 1958820887584 b^{13} + 462239158416 b^{12} \\ + 1462708730960 b^{11} - 1602991827247 b^{10} - 1275006342572 b^9 + 1178269645938 b^8 \\ - 820724311710 b^7 - 1459211341266 b^6 + 550920538912 b^5 - 70742778847 b^4 \\ - 591064816004 b^3 + 135404131136 b^2 + 251612861413 b + 54879436372),$$

$$C_{13} = 134217728(308158867848 b^{28} + 1536253596864 b^{27} + 986342964047 b^{26} \\ - 4617773933144 b^{25} - 2734583430260 b^{24} + 5808651034760 b^{23} \\ - 7388351860372 b^{22} - 10318939865712 b^{21} + 13253101318750 b^{20} \\ - 4912040576408 b^{19} - 9089286883204 b^{18} + 23922346496200 b^{17} \\ + 8720856753460 b^{16} - 1513189946464 b^{15} + 15099546581376 b^{14} \\ - 1513189946464 b^{13} + 8720856753460 b^{12} + 23922346496200 b^{11} \\ - 9089286883204 b^{10} - 4912040576408 b^9 + 13253101318750 b^8 \\ - 10318939865712 b^7 - 7388351860372 b^6 + 5808651034760 b^5 - 2734583430260 b^4 \\ - 4617773933144 b^3 + 986342964047 b^2 + 1536253596864 b + 308158867848),$$

$$C_{12} = -33554432(803454851203 b^{30} + 4302278322056 b^{29} + 3280005998568 b^{28} \\ - 14956527269386 b^{27} - 15532132359536 b^{26} + 20425579803224 b^{25} \\ - 13302938018113 b^{24} - 36486768176640 b^{23} + 59595079430100 b^{22} \\ + 3256869310668 b^{21} - 32661058354964 b^{20} + 101481831286520 b^{19} \\ + 36040167397260 b^{18} - 47963147051576 b^{17} + 67373529225888 b^{16} \\ + 142648190521248 b^{15} + 67373529225888 b^{14} - 47963147051576 b^{13} \\ + 36040167397260 b^{12} + 101481831286520 b^{11} - 32661058354964 b^{10} \\ + 3256869310668 b^9 + 59595079430100 b^8 - 36486768176640 b^7 \\ - 13302938018113 b^6 + 20425579803224 b^5 - 15532132359536 b^4 \\ - 14956527269386 b^3 + 3280005998568 b^2 + 4302278322056 b + 803454851203),$$

$$C_{11} = 4194304(3889105273656 b^{32} + 22062256188336 b^{31} + 18985765481400 b^{30}$$

$$\begin{aligned}
& -82222819958448 b^{29} - 116709531770260 b^{28} + 92624680919728 b^{27} \\
& + 34240889880792 b^{26} - 88651093391248 b^{25} + 258143658346392 b^{24} \\
& + 13855483123840 b^{23} - 193042131699156 b^{22} + 357392911783056 b^{21} \\
& + 147847513910144 b^{20} + 136363358059648 b^{19} + 651854028310016 b^{18} \\
& + 155610764680368 b^{17} - 427603450858231 b^{16} + 155610764680368 b^{15} \\
& + 651854028310016 b^{14} + 136363358059648 b^{13} + 147847513910144 b^{12} \\
& + 357392911783056 b^{11} - 193042131699156 b^{10} + 13855483123840 b^9 \\
& + 258143658346392 b^8 - 88651093391248 b^7 + 34240889880792 b^6 \\
& + 92624680919728 b^5 - 116709531770260 b^4 - 82222819958448 b^3 \\
& + 18985765481400 b^2 + 22062256188336 b + 3889105273656),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{10} = & -2097152(4480083004328 b^{34} + 25696982650024 b^{33} + 21534631124404 b^{32} \\
& - 96425041609480 b^{31} - 154868359671384 b^{30} + 87842751433028 b^{29} \\
& + 182190268787896 b^{28} - 78095667196984 b^{27} - 14953455367578 b^{26} \\
& + 60137519598000 b^{25} - 70323510908124 b^{24} + 597599568819396 b^{23} \\
& + 210408892616068 b^{22} - 756407478811024 b^{21} - 162786303063070 b^{20} \\
& + 5186703690680 b^{19} - 323530525456198 b^{18} - 140283273357397 b^{17} \\
& - 323530525456198 b^{16} + 5186703690680 b^{15} - 162786303063070 b^{14} \\
& - 756407478811024 b^{13} + 210408892616068 b^{12} + 597599568819396 b^{11} \\
& - 70323510908124 b^{10} + 60137519598000 b^9 - 14953455367578 b^8 \\
& - 78095667196984 b^7 + 182190268787896 b^6 + 87842751433028 b^5 \\
& - 154868359671384 b^4 - 96425041609480 b^3 + 21534631124404 b^2 \\
& + 25696982650024 b + 4480083004328),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_9 = & 262144(19895127698940 b^{36} + 107000235839376 b^{35} + 73322242224656 b^{34} \\
& - 386785282094496 b^{33} - 722882757678224 b^{32} + 70705465023664 b^{31} \\
& + 1071207758850628 b^{30} - 152345397807088 b^{29} - 84492275508888 b^{28} \\
& + 1893534722157776 b^{27} - 321912527313704 b^{26} - 1755743422973472 b^{25} \\
& - 3952329743154232 b^{24} - 1231123994946048 b^{23} + 4482542867368872 b^{22} \\
& - 7260578585557136 b^{21} - 10676637973344424 b^{20} - 896874062161488 b^{19} \\
& + 1461317424167657 b^{18} - 896874062161488 b^{17} - 10676637973344424 b^{16} \\
& - 7260578585557136 b^{15} + 4482542867368872 b^{14} - 1231123994946048 b^{13} \\
& - 3952329743154232 b^{12} - 1755743422973472 b^{11} - 321912527313704 b^{10} \\
& + 1893534722157776 b^9 - 84492275508888 b^8 - 152345397807088 b^7 \\
& + 1071207758850628 b^6 + 70705465023664 b^5 - 722882757678224 b^4 \\
& - 386785282094496 b^3 + 73322242224656 b^2 + 107000235839376 b + 19895127698940),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_8 = & -65536(41320702108920 b^{38} + 201445276255992 b^{37} + 78723688537864 b^{36} \\
& - 921962661220752 b^{35} - 1728404727194460 b^{34} + 658984073246576 b^{33} \\
& + 4427919103381504 b^{32} + 2522096797621192 b^{31} - 542827323090560 b^{30} \\
& - 3950290983191936 b^{29} - 7657873198893716 b^{28} + 2339635200188960 b^{27} \\
& + 6277012442312688 b^{26} - 5768834122613232 b^{25} - 16539732256254960 b^{24} \\
& - 22938984496809056 b^{23} + 7190354420982449 b^{22} + 26729222341691376 b^{21} \\
& - 16383371185881220 b^{20} - 46869783122259086 b^{19} - 16383371185881220 b^{18} \\
& + 26729222341691376 b^{17} + 7190354420982449 b^{16} - 22938984496809056 b^{15} \\
& - 16539732256254960 b^{14} - 5768834122613232 b^{13} + 6277012442312688 b^{12} \\
& + 2339635200188960 b^{11} - 7657873198893716 b^{10} - 3950290983191936 b^9 \\
& - 542827323090560 b^8 + 2522096797621192 b^7 + 4427919103381504 b^6
\end{aligned}$$

$$+658984073246576 b^5 - 1728404727194460 b^4 - 921962661220752 b^3 \\ +78723688537864 b^2 + 201445276255992 b + 41320702108920),$$

$$C_7 = 32768(40570964246800 b^{40} + 169109957366480 b^{39} - 4160270137630 b^{38} \\ - 1011879625156072 b^{37} - 980817478779696 b^{36} + 2292759575059008 b^{35} \\ + 4567593073988448 b^{34} + 438208602766856 b^{33} - 6077082514615189 b^{32} \\ - 3027421446338688 b^{31} + 8690332790846096 b^{30} + 1938773991810944 b^{29} \\ - 10774955082368880 b^{28} - 8739185215126368 b^{27} + 11507389699313088 b^{26} \\ + 24012564833222816 b^{25} + 440844933006172 b^{24} - 18664414356798216 b^{23} \\ - 13704791309081940 b^{22} + 11400461374694440 b^{21} + 34577225583151254 b^{20} \\ + 11400461374694440 b^{19} - 13704791309081940 b^{18} - 18664414356798216 b^{17} \\ + 440844933006172 b^{16} + 24012564833222816 b^{15} + 11507389699313088 b^{14} \\ - 8739185215126368 b^{13} - 10774955082368880 b^{12} + 1938773991810944 b^{11} \\ + 8690332790846096 b^{10} - 3027421446338688 b^9 - 6077082514615189 b^8 \\ + 438208602766856 b^7 + 4567593073988448 b^6 + 2292759575059008 b^5 \\ - 980817478779696 b^4 - 1011879625156072 b^3 - 4160270137630 b^2 \\ + 169109957366480 b + 40570964246800),$$

$$C_6 = -16384(37332878139375 b^{42} + 157051333388300 b^{41} + 34178748690710 b^{40} \\ - 1085350276184802 b^{39} - 1184190126412630 b^{38} + 850703157893968 b^{37} \\ + 1895393095875407 b^{36} + 3285044096321444 b^{35} + 71977889638860 b^{34} \\ - 3925914482747915 b^{33} - 2218584731608648 b^{32} - 3235770209561440 b^{31} \\ + 14215297143781896 b^{30} + 29136345008389760 b^{29} + 2790127300570352 b^{28} \\ - 15996449632236272 b^{27} + 3430327479308364 b^{26} + 42447282461258324 b^{25} \\ + 24414445026260186 b^{24} - 305803362419172 b^{23} + 18460631561504944 b^{22} \\ + 25810764306156474 b^{21} + 18460631561504944 b^{20} - 305803362419172 b^{19} \\ + 24414445026260186 b^{18} + 42447282461258324 b^{17} + 3430327479308364 b^{16} \\ - 15996449632236272 b^{15} + 2790127300570352 b^{14} + 29136345008389760 b^{13} \\ + 14215297143781896 b^{12} - 3235770209561440 b^{11} - 2218584731608648 b^{10} \\ - 3925914482747915 b^9 + 71977889638860 b^8 + 3285044096321444 b^7 \\ + 1895393095875407 b^6 + 850703157893968 b^5 - 1184190126412630 b^4 \\ - 1085350276184802 b^3 + 34178748690710 b^2 \\ + 157051333388300 b + 37332878139375),$$

$$C_5 = 2048(145496517237500 b^{44} + 559593192587000 b^{43} - 763807585849100 b^{42} \\ - 5638160993456680 b^{41} - 6051595892894190 b^{40} + 6864898984787088 b^{39} \\ + 21340632610119812 b^{38} + 6496587727637944 b^{37} - 33578539018887996 b^{36} \\ - 31241759325756328 b^{35} + 32134699071408879 b^{34} + 70098023268076608 b^{33} \\ + 19335621218116664 b^{32} - 41828028246755168 b^{31} - 1996525216709728 b^{30} \\ + 81080815594328256 b^{29} + 83276318267645202 b^{28} - 25692424003544920 b^{27} \\ - 24061736674891048 b^{26} + 119085740964714672 b^{25} + 173815633442453208 b^{24} \\ + 30972681568676312 b^{23} - 97038002146787622 b^{22} + 30972681568676312 b^{21} \\ + 173815633442453208 b^{20} + 119085740964714672 b^{19} - 24061736674891048 b^{18} \\ - 25692424003544920 b^{17} + 83276318267645202 b^{16} + 81080815594328256 b^{15} \\ - 1996525216709728 b^{14} - 41828028246755168 b^{13} + 19335621218116664 b^{12} \\ + 70098023268076608 b^{11} + 32134699071408879 b^{10} - 31241759325756328 b^9 \\ - 33578539018887996 b^8 + 6496587727637944 b^7 + 21340632610119812 b^6 \\ + 6864898984787088 b^5 - 6051595892894190 b^4 - 5638160993456680 b^3$$

$$-763807585849100 b^2 + 559593192587000 b + 145496517237500),$$

$$\begin{aligned} C_4 = & -512(246018741800000 b^{46} + 460478578235000 b^{45} - 959413298369500 b^{44} \\ & - 1976986907051000 b^{43} + 2134596162335780 b^{42} + 11337834799794068 b^{41} \\ & + 5658769129760284 b^{40} - 22315390456343712 b^{39} - 22433682110014833 b^{38} \\ & + 19200736814652520 b^{37} - 15153460371833384 b^{36} - 39801603924457242 b^{35} \\ & - 6207817792577120 b^{34} + 65931829729478872 b^{33} - 32178422323519909 b^{32} \\ & - 196330760993251136 b^{31} - 136019925373929380 b^{30} + 74662634592722100 b^{29} \\ & + 176306122728136164 b^{28} - 76752829976320392 b^{27} - 312975157897471246 b^{26} \\ & - 228061115613296984 b^{25} + 17859147491868360 b^{24} + 185638255077616036 b^{23} \\ & + 17859147491868360 b^{22} - 228061115613296984 b^{21} - 312975157897471246 b^{20} \\ & - 76752829976320392 b^{19} + 176306122728136164 b^{18} + 74662634592722100 b^{17} \\ & - 136019925373929380 b^{16} - 196330760993251136 b^{15} - 32178422323519909 b^{14} \\ & + 65931829729478872 b^{13} - 6207817792577120 b^{12} - 39801603924457242 b^{11} \\ & - 15153460371833384 b^{10} + 19200736814652520 b^9 - 22433682110014833 b^8 \\ & - 22315390456343712 b^7 + 5658769129760284 b^6 + 11337834799794068 b^5 \\ & + 2134596162335780 b^4 - 1976986907051000 b^3 - 959413298369500 b^2 \\ & + 460478578235000 b + 246018741800000), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 = & 64(878554656890625 b^{48} + 4646007873650000 b^{47} + 6994105647880000 b^{46} \\ & - 5487557505768000 b^{45} - 29783611632028800 b^{44} - 2275274471442960 b^{43} \\ & + 57823827938883316 b^{42} - 1732129801054656 b^{41} - 175024962022241208 b^{40} \\ & - 264517432612651632 b^{39} + 12775263988961032 b^{38} + 244595304331922768 b^{37} \\ & + 15143000249950164 b^{36} - 689062638896657424 b^{35} - 846187049470869528 b^{34} \\ & - 160301429736607536 b^{33} + 434100660187080360 b^{32} - 72933505186779936 b^{31} \\ & - 1125586425679529460 b^{30} - 1293672985889848976 b^{29} - 514135342861736560 b^{28} \\ & + 89662037932596192 b^{27} - 214307703400346160 b^{26} - 982012064785912080 b^{25} \\ & - 1323009418426318762 b^{24} - 982012064785912080 b^{23} - 214307703400346160 b^{22} \\ & + 89662037932596192 b^{21} - 514135342861736560 b^{20} - 1293672985889848976 b^{19} \\ & - 1125586425679529460 b^{18} - 72933505186779936 b^{17} + 434100660187080360 b^{16} \\ & - 160301429736607536 b^{15} - 846187049470869528 b^{14} - 689062638896657424 b^{13} \\ & + 15143000249950164 b^{12} + 244595304331922768 b^{11} + 12775263988961032 b^{10} \\ & - 264517432612651632 b^9 - 175024962022241208 b^8 - 1732129801054656 b^7 \\ & + 57823827938883316 b^6 - 2275274471442960 b^5 - 29783611632028800 b^4 \\ & - 5487557505768000 b^3 + 6994105647880000 b^2 + 4646007873650000 b \\ & + 878554656890625), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 = & -32(146196618750 b^{38} + 160137956875 b^{37} - 1335849050250 b^{36} \\ & - 4214724124000 b^{35} - 799118257990 b^{34} + 7177885274840 b^{33} \\ & + 5946523523400 b^{32} - 15922247172846 b^{31} - 34021841572392 b^{30} \\ & - 17245232633576 b^{29} + 21592703572018 b^{28} + 27989448390304 b^{27} \\ & - 23615988391590 b^{26} - 77530010777835 b^{25} - 67787998817838 b^{24} \\ & - 2871626634688 b^{23} + 41303068697876 b^{22} + 8906527911056 b^{21} \\ & - 63122856168384 b^{20} - 103296741673060 b^{19} - 63122856168384 b^{18} \\ & + 8906527911056 b^{17} + 41303068697876 b^{16} - 2871626634688 b^{15} \\ & - 67787998817838 b^{14} - 77530010777835 b^{13} - 23615988391590 b^{12} \\ & + 27989448390304 b^{11} + 21592703572018 b^{10} - 17245232633576 b^9 \\ & - 34021841572392 b^8 - 15922247172846 b^7 + 5946523523400 b^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +7177885274840 b^5 - 799118257990 b^4 - 4214724124000 b^3 \\
& -1335849050250 b^2 + 160137956875 b + 146196618750) \times \\
& (4225 b^{12} - 3120 b^{11} - 1632 b^{10} + 4620 b^9 - 1488 b^8 + 2352 b^7 - 1162 b^6 + 2352 b^5 \\
& -1488 b^4 + 4620 b^3 - 1632 b^2 - 3120 b + 4225),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & -4(1040 b^{10} - 2528 b^9 - 6105 b^8 - 8432 b^7 + 392 b^6 + 2646 b^5 + 392 b^4 \\
& -8432 b^3 - 6105 b^2 - 2528 b + 1040) \times (5 b^2 + 3 b + 5) \times \\
& (13 b^4 + 21 b^3 + 32 b^2 + 21 b + 13) \times \\
& (4225 b^{12} - 3120 b^{11} - 1632 b^{10} + 4620 b^9 - 1488 b^8 + 2352 b^7 - 1162 b^6 + 2352 b^5 \\
& -1488 b^4 + 4620 b^3 - 1632 b^2 - 3120 b + 4225)^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_0 = & -(5 b^2 + 3 b + 5) \times (13 b^4 + 21 b^3 + 32 b^2 + 21 b + 13) \times \\
& (4225 b^{12} + 6240 b^{11} + 5172 b^{10} - 5076 b^9 - 1740 b^8 + 5448 b^7 + 16406 b^6 + 5448 b^5 \\
& -1740 b^4 - 5076 b^3 + 5172 b^2 + 6240 b + 4225) \times \\
& (4225 b^{12} - 3120 b^{11} - 1632 b^{10} + 4620 b^9 - 1488 b^8 + 2352 b^7 - 1162 b^6 + 2352 b^5 \\
& -1488 b^4 + 4620 b^3 - 1632 b^2 - 3120 b + 4225)^3.
\end{aligned}$$

Apêndice E

Método de Newton Aplicado ao Mapa de Hénon

Consideremos duas funções g e h tais que

$$\begin{aligned}g &= g(x, y), \\h &= h(x, y).\end{aligned}$$

as soluções numéricas deste sistema são dadas pelo uso do método de Newton para equações simultâneas:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + \frac{h(x_i, y_i) g_y(x_i, y_i) - g(x_i, y_i) h_y(x_i, y_i)}{D}, \\y_{i+1} &= y_i + \frac{g(x_i, y_i) h_x(x_i, y_i) - h(x_i, y_i) g_x(x_i, y_i)}{D}.\end{aligned}$$

Onde:

$$h g_y - g h_y = \begin{vmatrix} h & g \\ h_y & g_y \end{vmatrix},$$

$$g h_x - h g_x = \begin{vmatrix} g & h \\ g_x & h_x \end{vmatrix}.$$

e

$$D = \begin{vmatrix} g_x & h_x \\ g_y & h_y \end{vmatrix} = g_x h_y - h_x g_y.$$

Vemos então claramente que o processo de convergência acima proposto requer duas condições iniciais, x_i e y_i .

Consideremos então agora o mapa de Hénon no contexto do método de Newton, ou seja, consideremos as funções F e G já definidas anteriormente, como funções as quais aplicaremos o método de Newton. Formalmente:

$$\begin{aligned}g &= G, \\h &= H.\end{aligned}$$

Notamos então que pela definição do método de Newton, ou seja pela sua relação de iteração, temos que considerar as derivadas das funções F e G . Relembramos que as equações que definem os “zeros” dos diversos períodos do mapa de Hénon cujas equações são dadas por :

$$\begin{aligned}G &= x_n - x_0, \\H &= y_n - y_0.\end{aligned}$$

Sendo o índice n , nas equações acima, denota um período específico.

E.1 O Processo de Derivação para o Mapa de Hénon

Tomemos por simplicidade o período 3 do mapa de Hénon para o cálculo das suas derivadas parciais, após generalizaremos o processo para o caso geral (período n).

Pela definição do mapa de Hénon temos para o período 3:

$$\begin{aligned}x_3 &= a - x_2^2 + by_2, \\y_3 &= x_2.\end{aligned}$$

Mas ainda vemos que:

$$\begin{aligned}x_2 &= a - x_1^2 + by_1, \\y_2 &= x_1. \\x_1 &= a - x_0^2 + by_0, \\y_1 &= x_0.\end{aligned}$$

Ou seja vemos que na verdade as únicas “variáveis” em questão estão na última relação apresentada anteriormente, ou seja as relações para x_1 e y_1 onde estão contidos explicitamente os termos x_0 , e y_0 que são os termos em função dos quais todos os outros “ x_n ”, são calculados. Vemos então que temos uma estrutura de funções compostas, sendo que isto nos dá a possibilidade da utilização da regra da cadeia para o cálculo das derivadas parciais.

Começemos considerando as derivadas parciais das funções que estão englobadas na equação do período em questão:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial x} &= -2x_0, \\ \frac{\partial x_1}{\partial y} &= b, \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} &= 1, \\ \frac{\partial y_1}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2}{\partial x} &= -2 x_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + b \frac{\partial y_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial y} &= -2 x_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} + b \frac{\partial y_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} &= \frac{\partial x_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial y_2}{\partial y} &= \frac{\partial x_1}{\partial y}.\end{aligned}$$

Tomemos agora finalmente as derivadas das funções $G(x_0, y_0)$, e $H(x_0, y_0)$ para o período em questão.

$$\begin{aligned}G_x &= -2 x_2 \frac{\partial x_2}{\partial x} + b \frac{\partial y_2}{\partial x} - 1, \\ G_y &= -2 x_2 \frac{\partial x_2}{\partial y} + b \frac{\partial y_2}{\partial y}, \\ H_x &= \frac{\partial y_2}{\partial x}, \\ H_y &= \frac{\partial y_2}{\partial y} - 1.\end{aligned}$$

Vemos então que o processo de derivação para as funções $F(x_0, y_0)$, e $G(x_0, y_0)$ de um determinado período pode ser visto como um processo em cadeia dotado de uma certa simetria, simetria esta da qual nos valeremos juntamente com uma extrapolação algébrica para o período n .

Vemos então que:

$$\begin{aligned}G_x &= -2 x_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x} - 1, \\ G_y &= -2 x_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial y} + b \frac{\partial y_{n-1}}{\partial y}, \\ H_x &= \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x}, \\ H_y &= \frac{\partial y_{n-1}}{\partial y} - 1.\end{aligned}$$

As equações acima valem para qualquer período em que se queira tomar as derivadas parciais, mas podemos escreve-las numa forma ainda mais compacta, como veremos agora.

Pela extrapolação feita pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_n}{\partial x} &= -2 x_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x}, \\ \frac{\partial x_n}{\partial y} &= -2 x_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial y} + b \frac{\partial y_{n-1}}{\partial y}, \\ \frac{\partial y_n}{\partial x} &= \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x}, \\ \frac{\partial y_n}{\partial y} &= \frac{\partial x_{n-1}}{\partial y}.\end{aligned}$$

Para facilitar-nos a construção de uma regra conveniente e rápida para a obtenção das derivadas parciais, nada nos impede de tomarmos as duas últimas relações acima e escreve-las como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_n}{\partial x} &= 1 \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x} + 0 \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x}, \\ \frac{\partial y_n}{\partial y} &= 1 \frac{\partial x_{n-1}}{\partial y} + 0 \frac{\partial y_{n-1}}{\partial y}.\end{aligned}$$

Usando agora algebra matricial, é em princípio fácil montar um produto de matrizes cujo resultado reproduz as relações acima. Vemos então que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x} & \frac{\partial y_n}{\partial x} \\ \frac{\partial x_n}{\partial y} & \frac{\partial y_n}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x} \\ \frac{\partial x_{n-1}}{\partial y} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 x_{n-1} & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Lembremos agora que o processo de derivação é um processo em recursivo, no nosso caso, logo da mesma forma expressamos as derivadas parciais de x_n , e y_n como um produto de duas matrizes, podemos igualmente expressar as derivadas parciais de x_{n-1} , e y_{n-1} como um produto de duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x} \\ \frac{\partial x_{n-1}}{\partial y} & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{n-2}}{\partial x} & \frac{\partial y_{n-2}}{\partial x} \\ \frac{\partial x_{n-2}}{\partial y} & \frac{\partial y_{n-2}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 x_{n-2} & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Se seguirmos então este processo, para um determinado período n , é facil ver que chegaremos ao seguinte produto de matrizes:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial x} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y} & \frac{\partial y_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 x_1 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 x_0 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 x_1 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Este fato agora nos mostra que podemos escrever a matriz das derivadas parciais de x_n , e y_n como um produto simples de matrizes:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x} & \frac{\partial y_n}{\partial x} \\ \frac{\partial x_n}{\partial y} & \frac{\partial y_n}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 x_0 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 x_1 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} -2 x_{n-1} & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 x_n & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando agora a averiguação anterior podemos escrever uma forma geral para as derivadas parciais de $F(x_0, y_0)$, e $G(x_0, y_0)$, que são as funções para um determinado período n :

$$\begin{bmatrix} G_x & H_x \\ G_y & H_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 x_0 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 x_1 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} -2 x_{n-1} & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 x_n & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificamos então que pode-se escrever as derivadas parciais em uma notação compacta dada por:

$$\begin{bmatrix} G_x & H_x \\ G_y & H_y \end{bmatrix} = \left(\prod_{i=0}^n \begin{bmatrix} -2 x_i & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo a equação acima válida para qualquer período, como estamos trabalhando com o período 6 temos então que nas equações acima consideremos o caso específico $n = 6$. Notemos ainda que

esta representação das derivadas parciais é de grande utilidade para a aplicação do método de Newton para equações simultâneas uma vez que o determinante da matriz apresentada acima é exatamente a forma requerida no método em questão.

Apêndice F

Trabalhos Publicados

Referências

- [1] BOLLT, E. M.; STANFORD, T; LAI, Y.-C.; ZYCZCZKOWSKI, K. Validity of threshold-crossing analysis of symbolic dynamics from chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v.85, n.16, p. 3524-3527, Oct. 2000.
- [2] CATS Cyclist Team. Webbok. Disponivel em: <<http://www.nbi.dk/ChaosBook/>> . Acesso em: 25/10/2001
- [3] PLUMECOQ, J.; LEFRANC, M. From template analysis to generating partitions II: Characterization of the symbolic encodings. *Physica D* , Amsterdam, v.144, n.3/4, p. 259-278, Oct. 2000.
- [4] ZYCZKOWSKI, K. ; LAI, Y.C. Devil-staircase behavior of dynamical invariants in chaotic scattering. *Physica D* , Amsterdam, v.142, n.3/4, p. 197-216, Aug. 2000.
- [5] ZHOU, Z.; PENG, S.-L. Cyclic star products and universalities in symbolic dynamics of trimodal maps. *Physica D* , Amsterdam, v.140, n.3/4, p. 213-226, Jun. 2000.
- [6] STERLING, D.; RUBIN, H. R.; MEISS, J.D. Homoclinic bifurcations for the Henon map. *Physica D* , Amsterdam, v.134, n.2, p.153-184, Oct. 1999.
- [7] BOLLT, E. M.; DOLNIK, M. Encoding information in chemical chaos by controlling symbolic dynamics. *Phys. Rev. E* , Woodbury, v.55, n.6 pt. A, p. 6404-6413, Jun. 1997.
- [8] JAEGER, L.; KANTZ, H. Structure of generating partitions for two-dimensional maps. *J. Phys. A-Math. Gen.* , Bristol, v.30, n.16, p.L567-L576, Aug. 1997.
- [9] HANSEN, K. T.; GÜTTLER, S. Symbolic dynamics for hydrogen in a magnetic field. *J. Phys. A-Math. Gen.* , Bristol, v.30, n.10, p.3421-3440, May. 1997.
- [10] CHRISTIANSEN F.; POLITI, A. Guidelines for the construction of a generating partition in the standard map. *Physica D* , Amsterdam, v.109, n.1/2, p.32-41, Nov. 1997.
- [11] POLLNER P.; VATTAY, G. New method for computing topological pressure. *Phys. Rev. Lett.* , Woodbury, v.76, n.22, p.4155-4158, May 1996.
- [12] BADI, R. Generalized entropies of chaotic maps and flows: A unified approach. *Chaos* , Woodbury, v.7, n.4, p.694-700, Dec. 1997.
- [13] EISELE, M. Comparison of several generating partitions of the Hénon map. *J. Phys. A: Math. Gen.*, Bristol, n.32, v.9, p.1533-1545, Mar. 1999.
- [14] GRASSBERGER, P.; KANTZ, H. Universal scaling of long tails in Hamiltonian-systems. *Phys. Lett. A* , Amsterdam, v.113, n.4, p.167-171, Dec. 1985.
- [15] MIRA, C. *Chaotic Dynamics*. Singapore: World Scientific, 1987.

- [16] HÉNON, M. A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor. *Commun. Math. Phys.*, New York, v.50, n.1, p.69-77, Oct. 1976.
- [17] DICKSON, L.E. *Elementary Theory of Equations*: New York: Wiley, 1914.
- [18] PERRON, O. *Algebra*. Berlim: Walter de Gruyter, 1951. v.2: Theorie der algebraischen Gleichungen (Göschens Lehrbücherei; v.8).
- [19] HITZL, D.L.; ZELE, F. An Exploration of The Hénon Quadratic Map. *Physica D*, Amsterdam, v.14, n.3, p. 305-326, May 1984.
- [20] YUNG-NIEN, H. An algebraic analytical method for exploring periodic orbits of the Hénon map. *Scientia Sinica*, Peking, v.29A, n.12, p.1302-1317, Dec. 1986.
- [21] YUNG-NIEN, H. Determination of the stable periodic orbits for the Hénon map by analytical method. *Chinese Phys. Lett.*, Beijing, v.2, n.3, p.97-100, 1985.
- [22] ZHENG, W.M. Pairing of Legs in the Parameter Plane of the Hénon Map. *Commun. Theor. Phys.*, Wuhan, v.25, n.1, p.55-60, Feb. 1996.
- [23] CARCASSÈS, J.P.; KAWAKAMI, H. Existence of a cusp point on a fold bifurcation curve and stability of the associated fixed point: Case of an n -dimensional map. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, Singapore, v.9, n.5, p.875-894, May 1999.
- [24] HANSEN, K.T. Remarks on the symbolic dynamics for the Hénon map. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 165, n.2, p.100-104, May 1992.
- [25] LING, F.H. A Numerical Method for Determining Bifurcations Curves of Mappings. *Phys. Lett.*, Amsterdam, v. 111A, n.3, p.116-120, Jul. 1985.
- [26] BOSCH, M. Cusp bifurcations in the dissipative Henon map. In: EUROPEAN CONFERENCE ON ITERATION THEAORY, 1987, Caldes de Malavella, *Proceedings*. [Singapore]: World Scientific, [1987]. p. 133-138.
- [27] ENDLER, AN.; GALLAS, J.A.C. Arithmetical signatures of the dynamics of the Hénon map, *Phys. Rev. E*, Woodbury, v.65, n.3 pt. 2A, art. n. 036231, Mar. 2002.
- [28] HANSEN, K.T.; CVITANOVIĆ, P. Bifurcation structures in maps of Hénon type, *Nonlinearity*, Bristol, v. 11, n. 11, p. 1233-1261, Sep. 1998.
- [29] GALLAS, J.A.C. Units: remarkable points in dynamical systems. *Physica A*, Amsterdam, v.222, n.1/4, p.125-151, Dec. 1995.
- [30] GALLAS, J.A.C. Dissecting shrimps: results for some one dimensional physical models. *Physica A*, Amsterdam, v. 202, n.1/2, p.196-223, Jan. 1994.
- [31] GALLAS, J.A.C. Nonlinear dependencies between sets of periodic orbits. *Europhys. Lett.*, Les Ulis Cedexa, v.47, n.6, p.649-655, Sep. 1999.
- [32] PANDO C.L.; LUNA ACOSTA, G.A.L.; MEUCCI, R.; CIOFINI, M. Highly dissipative Hénon map behavior in the four-level model of the CO₂ laser with modulated losses, *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v.199, n.3/4, p.191-198, Mar. 1995.
- [33] CRAWFORD, J.D. Introduction to bifurcation theory. *Rev. Mod. Phys.*, Woodbury, v.63, n.4, p.991-1037, Oct. 1991.

- [34] DULLIN, H.R.; MEISS, J.D. Generalized Hénon maps: the cubic diffeomorphisms of the plane. *Physica D*, Amsterdam, v.143, n.3/4, p.262-289, Sep. 2000.
- [35] KAPLAN, H. Consequences of the constant Jacobian determinant of the Hénon map. *Physical Review A*, Woodbury, v.45, n.4, p.2187-2191, Feb. 1992.
- [36] PISARCHIK, A.N.; GOSWAMI, B.K. Annihilation of one of the coexisting attractors in a bistable system. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v.84, n.7, p.1423-1426, Feb. 2000.
- [37] PISARCHIK, A.N. Controlling the multistability of nonlinear systems with coexisting attractors. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v.64, n.4 pt. 2, p.046203 1-5, Oct. 2001.
- [38] ENDLER, A.; GALLAS, J.A.C. Period four stability and multistability domains for the Hénon map. *Physica A*, Amsterdam, v.295, n.1/2, p.285-290, Jun. 2001.
- [39] GIOVANINI, F.; POLITI, A. Generating partitions in Hénon-type maps. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v.161, n.332, p.332-337, Jan. 1992.
- [40] GRASSBERGER, P.; KANTZ, H. Generating partitions for the dissipative Hénon map. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v.113A, n.5, p.235-238, Dec. 1985.
- [41] HEAGY, J.F. A physical interpretation of the Hénon map. *Physica D*, Amsterdam, v.57, n.3/4, p.436-446, Aug. 1992
- [42] GRAHAM, R.; TÉL, T. Quantization of Hénon's Map with Dissipation. *Z. Phys. B - Condensed Matter*, New York, v.60, n.2/4, p.127-136, Sep. 1985.
- [43] POSTON, T.; STEWART, I. *Catastrophe Theory and its Applications*. London: Pitman, 1978.
- [44] ABEL, N.H. Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement. *J. reine angew. Math.*, Berlin, v.4, p.131-156, 1829.
- [45] DANDO, P.A.; MONTEIRO, T.S.; OWEN, S.M. Periodic Orbit Theory for Rydberg Atoms in External Fields. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v.80, n.13, p.2797-2800, Mar. 1998.
- [46] SARAGA, D. S.; MONTEIRO, T.S.; ROUBEN, D.C. Periodic orbit theory for resonant tunneling diodes: Comparison with quantum and experimental results. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v.58, n.3 pt. A, p.R2701-R2704, Sep. 1998.
- [47] SARAGA, D. S.; MONTEIRO, T.S. Quantum Chaos with Nonperiodic, Complex Orbits in the Resonant Tunneling Diode. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v.81, n.26, p.5796-5799, Dec. 1998.
- [48] KUŚ, M.; HAAKE, F.; DELANDE, D. Prebifurcation Periodic Ghost Orbits in Semiclassical Quantization. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v.71, n.14, p.2167-2171, Oct. 1993.
- [49] MAIN, J.; MANDELSHTAM, V. A.; TAYLOR, H.S. High Resolution Quantum Recurrences Spectra: Beyond the Uncertainty Principle. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v.78, n.23, p.4351-4354, Jun., 1997.