

FT 12.2.φ. (PACS95)
FT 11.10.εφ
F 11.80.Ωc

Instituto de Física

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIAS

EM

ELETRODINÂMICA QUÂNTICA

Bernardo Liberman

Tese apresentada ao Instituto de Física
da Universidade Federal do Rio Grande
do Sul para obtenção do título de Doutor
em Ciências.

Porto Alegre

- 1971 -



A Ligia

AGRADECIMENTOS

Este trabalho está relacionado com pesquisas efetuadas pelo grupo teórico do Instituto de Física sobre questões ligadas à Eletrodinâmica Quântica. Minha participação neste grupo possibilitou-me a aquisição de conhecimentos para a elaboração desta tese.

Desejo agradecer, de modo muito especial, ao Prof. Em. A.J. Paris a cuja orientação se deve a realização deste trabalho. A ele sou muito grato, também, pela dedicação prestada e pelos ensinamentos recebidos neste e nos demais campos da Física.

Agradeço, outrossim, ao Prof. Darcy Millenburg, além de suas valiosas sugestões quando da confecção desta tese, e ao Prof. Gerhard Jacob, pelos conhecimentos transmitidos.

Ao Prof. David Mesquita da Cunha, Diretor do Instituto de Física, e aos demais colegas, meu reconhecimento pelo apoio recebido.

A Rita Rocha Juliano, pelo auxílio na fase inicial, e a Maria Elizabeth Flori e Maria Teresinha Harb pelo cuidadoso trabalho de datilografia desta tese, meus agradecimentos.

O presente trabalho foi parcialmente financiado por: Banco Nacional do Desenvolvimento Econômico, Conselho Nacional de Pesquisas, Conselho de Pesquisas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, United States Army Research Office e Organização dos Estados Americanos.

Porto Alegre, julho de 1971.

Bernardo Liberman

RESUMO

Estuda-se a Eletrodinâmica Quântica realçando suas propriedades como uma teoria de operadores campo no espaço-tempo, em lugar de considerá-la apenas como uma teoria para as funções de Green como se faz usualmente. O objetivo desta análise consiste em adquirir maior discernimento em relação a propriedades que possam vir a ser úteis para outras teorias de campo. A teoria formulada neste sentido contém várias simetrias que são quebradas espontaneamente como resultado do processo de renormalização. O problema geral de quebras espontâneas de simetrias é analisado e uma hierarquia de possíveis simetrias é definida, a qual se estende desde uma invariância puramente matemática até uma invariância fisicamente exata. Esta hierarquia contém um tipo de quebra espontânea de simetria (chamada "local"), além da usual, que possui propriedades adequadas para a descrição das partículas elementares. A corrente relacionada a este tipo de quebra não é conservada e, portanto, o teorema de Goldstone não é aplicável. São dados dois modelos, um sendo solúvel exatamente e o outro sendo essencialmente a Eletrodinâmica Quântica, que são exemplos de quebras espontâneas de simetrias com correntes não conservadas. A conexão entre a quebra local de simetria e a renormalização é esclarecida. A renormalização é considerada como o processo de limite necessário para as definições da diferenciação e dos produtos de operadores campos num ponto, que são combinados de forma invariante para transformação de calibre. Isto conduz, de um modo natural, à definição das constantes de renormalização. As consequências desta nova formulação para a teoria de perturbação na Eletrodinâmica Quântica são estudadas e

mostra-se que surgem identidades generalizadas de Ward através das
quais são eliminadas divergências quadrática e logarítmica.

ABSTRACT

Quantum Electrodynamics is studied emphasizing its properties as a theory of operator field in space-time, instead of considering it only as a theory for the Green's functions as is the more usual approach. The purpose of this analysis is to gain more insight into general properties which could be useful for other field theories. The theory as formulated contains several symmetries which are spontaneously broken as a result of the renormalization procedure. The problem of spontaneously broken symmetries in general is analysed and a hierarchy of possible symmetries is defined, which reaches from a purely mathematical invariance up to the physically exact one. This hierarchy contains one type of spontaneously broken symmetry (called "local"), in addition to the usual one, which has suitable properties for the description of elementary particles. The current related to this type of breaking is not conserved and therefore the Goldstone theorem is not applicable. Two models are given, one being exactly solvable and the other essentially being Quantum Electrodynamics, which are examples of spontaneously broken symmetries with non-conserved currents. The connection between local symmetry breaking and renormalization is elucidated. The renormalization is considered as the limiting procedure necessary for the definitions of the differentiation and the products of field operators at one point, which are combined in a gauge invariant way. This leads in a natural way to the definition of renormalization constants. The consequences of this new formulation for the perturbation theory in Quantum Electrodynamics are studied and it is shown that generalized Ward identities arise by which quadratic and logarithmic divergences are eliminated.

I N D I C E

I - INTRODUÇÃO	1
I-1 Generalidades	1
I-2 Desenvolvimento da teoria convencional	3
I-3 Eletrodinâmica Quântica como Teoria Quântica de Campos	22
I-4 Divergência quadrática do tensor polarização do vácuo e os termos de Schwinger	34
I-5 Esquema da tese	41
II - QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIAS	42
II-1 Introdução	42
II-2 Uma hierarquia de simetrias	45
II-3 Um modelo com quebra espontânea de simetria local	53
III - TEORIA DE DOIS NEUTRINOS CARREGADOS	58
III-1 Introdução	58
III-2 A teoria de dois neutrinos carregados	61
III-3 Análise do modelo formulado mais consistentemente	75
III-4 Notas sobre a possibilidade de uma descrição unificada dos leptons	80
IV - ESTUDO DO DESENVOLVIMENTO PERTURBATIVO	88
IV-1 Introdução	88
IV-2 Regras para gráficos e identidades generalizadas de Ward	90
IV-3 O tensor polarização do vácuo $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(K_1, K_2, K_3, K_4)$	106

V - CONSIDERAÇÕES SOBRE A LAGRANGEANA	119
V-1 Introdução	119
V-2 A Lagrangeana	121
V-3 Regras para gráficos e identidades generalizadas de Ward	125
V-4 Observações	130
VI - CONCLUSÕES	131
REFERÊNCIAS	134

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I-1 Generalidades

Neste trabalho serão analisados dois aspectos da Eletrodinâmica Quântica: a) sua identificação como uma teoria com quebra espontânea de simetrias; b) conseqüências para o desenvolvimento perturbativo de uma formulação invariante frente à transformação de calibre.

A Eletrodinâmica Quântica descreve os fenômenos de interação entre fermions (elétrons, muons) e fótons. Sabemos que, embora as previsões obtidas através do desenvolvimento perturbativo renormalizado sejam experimentalmente satisfatórias [1,2], a sua formulação teórica como Teoria Quântica de Campos apresenta uma série de dificuldades conceituais que se refletem no aparecimento de quantidades não definidas. Para a obtenção de resultados finitos, estas quantidades são eliminadas por meio dos processos de renormalização e regularização. Assim, apesar do sucesso do desenvolvimento perturbativo das funções de Green na Eletrodinâmica Quântica, no contexto geral ele se apresenta dissociado da Teoria Quântica devido aos problemas conceituais apresentados pela formulação desta. Acreditamos que uma conceituação mais correta da teoria poderá permitir-nos uma compreensão e fundamentação melhores do desenvolvimento perturbativo que, então, seria obtido

naturalmente daquela.

Por outro lado, uma formulação consistente da Eletrodinâmica Quântica trará como consequência um melhor entendimento desta, principalmente, a sua construção para pequenas distâncias. A possibilidade de uma verificação experimental para os fenômenos de interação entre elétrons e fótons, habilita-nos a comprovar as suposições feitas, tornando insubsistentes as hipóteses que conduzem a contradições com a experiência. Devemos ressaltar a importância do conhecimento do comportamento da Teoria Quântica de Campos pois, atualmente, ela se constitui na teoria disponível para uma descrição dinâmica das demais partículas elementares.

Estas considerações mostram-nos os motivos da escolha do estudo da Eletrodinâmica Quântica, ou seja, a necessidade de construção de uma teoria suficientemente consistente e a possibilidade de entendermos, de maneira que julgamos ser mais natural, o comportamento da Teoria Quântica de Campos. Logicamente, esta nova formulação deverá fornecer-nos, pelo menos, os mesmos resultados que os dados pelo desenvolvimento perturbativo renormalizado convencional. Por outro lado, uma formulação mais consistente também viria em benefício de algumas teorias da Física das Partículas Elementares que constroem modelos baseados em generalizações de conceitos e propriedades da Eletrodinâmica Quântica, como no caso da Álgebra de Correntes.

As questões relacionadas com o estudo da Eletrodinâmica Quântica como uma Teoria Quântica de Campos têm se constituído num dos principais assuntos de pesquisa do grupo de física teórica do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Como resultado foi sugerida uma nova formulação para a

Eletrodinâmica Quântica [3,4] desenvolvida através do formalismo Lagrangeano. Uma das finalidades desta tese é estudar algumas conseqüências desta nova formulação.

Para uma melhor compreensão das dificuldades apresenta das pela Eletrodinâmica Quântica convencional e das várias suges tões introduzidas no sentido de uma construção mais consistente, resumiremos as principais etapas de seu desenvolvimento. A primei ra parte dêste resumo constituir-se-á num breve histórico da Ele- trodinâmica Quântica convencional e a segunda estará relacionada, principalmente, com as pesquisas realizadas neste Instituto. Êste resumo também terá a finalidade de introduzir as definições e e- quações necessárias para o desenvolvimento futuro. Na quarta se- ção apresentaremos uma análise do cancelamento da divergência qua- drática do tensor polarização do vácuo $\tilde{T}^{\mu\nu}(0)$. Como conclusão dêste capítulo esquematizaremos o plano do nosso trabalho.

1-2 Desenvolvimento da teoria convencional

Podemos citar o trabalho de Einstein (1904) sôbre o e- feito fotoelétrico como um dos primeiros estudos relativos à quan- tização do campo eletromagnético. Entretanto, foram os trabalhos de Dirac (1927) sôbre a teoria quântica da emissão e absorção da radiação por sistemas atômicos e os de Heisenberg e Pauli (1929) e Fermi (1930) onde é introduzida a quantização do campo eletro- magnético completo, que marcaram, efetivamente, o início da Ele- trodinâmica Quântica. Com o estabelecimento da teoria, verificou- -se a permanência de antigas dificuldades como a relativa a auto-

-energia infinita de uma carga puntual. Weisskopf (1939) mostrou que esta auto-energia era apenas logaritmicamente divergente. A estes problemas acrescentaram-se outros não existentes classicamente como a divergência da auto-energia do fóton. Além disso, o cálculo exato de quase todas as quantidades físicas resultava em integrais divergentes. Kramers (1947) chamou a atenção para o fato de que a massa despida do elétron não era observável experimentalmente. Neste sentido, ele sugeriu que somente a massa física possuiria um papel preponderante no desenvolvimento da teoria. Isso permitiu a aceitação do fato de que a variação na massa não observável pudesse ser infinita. Esta foi a primeira idéia de uma renormalização da massa.

O desenvolvimento posterior da teoria foi no sentido de obtenção de uma prescrição para a eliminação dos infinitos. As medidas do deslocamento de Lamb (1947) e do momento magnético intrínseco do elétron conduziram a um reexame na teoria que introduziu a idéia da renormalização da carga. Posteriormente com a aplicação de uma formulação manifestamente covariante, (Tomonaga 1946, Schwinger 1948), foram obtidas as prescrições para a obtenção de resultados finitos para as expressões de ordem maior do desenvolvimento da amplitude de espalhamento em série de potências relativas a constante de acoplamento renormalizada $g(\infty) = g_0(1 - \frac{g_0^2}{4\pi})$. Desta maneira, verificou-se que a polarização do vácuo, a massa do elétron e as propriedades eletromagnéticas do elétron forneciam resultados finitos (Schwinger, 1949).

Os trabalhos de Feynman (1949) relativos aos propagadores, além de fornecerem uma base para o estudo de problemas adicionais, possibilitaram uma obtenção mais prática dos resultados

da Eletrodinâmica Quântica. Dyson (1949) e Wick (1950) desenvolveram uma teoria de perturbação para a matriz de espalhamento onde cada termo da expansão na constante de acoplamento renormalizada era finito. Primeiramente Salam (1951) e após Weinberg (1960) demonstraram, rigorosamente, que este método (construído a partir das equações para as funções de Green) fornecia resultados finitos. Estes trabalhos, juntos com a formulação da teoria através do "Princípio da Ação" (Schwinger 1951, 1953), formam a estrutura da Eletrodinâmica Quântica usual.

Um outro ponto de vista apresentado para a manipulação das quantidades infinitas foi através do uso de reguladores. Pauli e Villars (1949) usaram consistentemente este método para a obtenção de valores definidos para as integrais divergentes. Bogoliubov e Parasiuk (1957) apresentaram uma outra alternativa para o processo de renormalização. Uma demonstração rigorosa da validade deste processo foi dada posteriormente por Hepp (1966).

Desta maneira, a obtenção de resultados finitos para a teoria convencional realiza-se através do uso de um conjunto de regras cujo efeito é o cancelamento das contribuições infinitas. Entretanto, todos estes métodos são aplicações somente para as equações dos propagadores e da função vértice ~~em~~ uma conexão clara com a Teoria de Campos. Portanto, a obtenção de resultados finitos através do desenvolvimento perturbativo renormalizado não nos auxilia a compreender melhor e, como consequência, a formular adequadamente a Teoria Quântica de Campos.

A Eletrodinâmica que descreve a interação relativisticamente invariante entre elétrons e fótons é formulada, u-

usualmente, através da seguinte densidade Lagrangeana local, não renormalizada [5]:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(\Psi) + \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(\Psi, A) \quad (I-1)$$

onde

$$\mathcal{L}_0(\Psi) = \frac{1}{4} \left[\bar{\Psi}(x) (i \vec{\partial} - m_0) \Psi(x) \right] + \frac{1}{4} \left[\bar{\Psi}(x) (-i \vec{\partial} - m_0) \Psi(x) \right] \quad (I-1a)$$

$$\mathcal{L}_0(A) = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu(x)) (\partial^\mu A^\nu(x)) \quad (I-1b)$$

$$\mathcal{L}(\Psi, A) = -e_0 j_\nu(x) A^\nu(x) \quad (I-1c)$$

Nestas relações (I-1a) e (I-1b) descrevem, respectivamente, os campos livres de elétrons e fótons; $\mathcal{L}(\Psi, A)$ descreve a interação local entre ambos os campos; m_0 e e_0 são, respectivamente, a massa e a carga despidas do elétron e $j_\nu(x)$ é definido por:

$$j_\nu(x) = \frac{1}{2} \left[\bar{\Psi}(x) \gamma_\nu \Psi(x) \right] \quad (I-2)$$

A validade da equação (I-1) deverá ser verificada através da comparação com os resultados experimentais e pela consistência do desenvolvimento teórico com o uso desta densidade Lagrangeana.

Usando a equação (I-1) desenvolvemos canonicamente a Eletrodinâmica Quântica, obtendo o seguinte conjunto de equações

não lineares que descrevem os fenômenos de interação entre elétrons e fótons:

$$(i\cancel{\partial} - m_0)\Psi(x) = e_0 A(x)\Psi(x) \quad (I-3a)$$

$$\square A^\nu(x) = e_0 j^\nu(x) \quad (I-3b)$$

e as seguintes regras de comutação para tempos iguais:

$$\{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(x')\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(x-x') \quad (I-4a)$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i g_{\mu\nu} \delta^3(x-x') \quad (I-4b)$$

A estas equações é necessário acrescentar a seguinte condição subsidiária

$$\left(\partial_\nu A^\nu(x)\right)^{(+)} \mid \Phi \rangle = 0 \quad (I-3c)$$

que significa que estamos restringindo os estados fisicamente possíveis somente àquêles cujo valor esperado do operador $\partial_\nu A^\nu(x)$ seja nulo.

A formulação usual da teoria fornecida pelas equações citadas acima apresenta dificuldades conceituais devido à existência de produtos entre operadores campo num mesmo ponto espaço-tempo, que não são definidos matematicamente. Estes produtos, devido às relações de comutação (I-4) introduzem singularidades na teoria.

A fim de que os propagadores do elétron $S_F(p)$, do fó

ton $D_{F_{\mu\nu}}(k)$ e o vértice $\Gamma_0(p,p)$ (para momentum transferido nulo) tendam aos valores correspondentes aos da partícula livre, quando $k \rightarrow m$ e $k^2 \rightarrow 0$ (m é a massa observável do elétron), são introduzidos os operadores campo renormalizados:

$$\psi(x) = Z_2^{-1/2} \psi'(x) \quad (I-5a)$$

$$A_\nu(x) = Z_3^{-1/2} A'_\nu(x) \quad (I-5b)$$

Destas relações obtemos os seguintes propagadores renormalizados:

$$S_F(p) = Z_2^{-1} S'_F(p) \quad (I-6a)$$

$$D_{F_{\mu\nu}}(k) = Z_3^{-1} D'_{F_{\mu\nu}}(k) \quad (I-6b)$$

O sinal (') refere-se às quantidades não renormalizadas.

Nestas equações Z_2^{-1} , Z_3^{-1} são as constantes de renormalização. No cálculo perturbativo elas se apresentam como quantidades divergentes refletindo, assim, a dificuldade básica da conexão entre a Teoria de Campos e a formulação da teoria através de equações para as funções de Green.

A densidade Lagrangeana e as relações de comutação para os operadores renormalizados possuirão a seguinte forma:

$$L(x) = Z_2 \bar{\psi}(x) (i \not{\partial} - m_0) \psi(x) + Z_3 L_0(A) - \frac{g_0}{2} Z_3^{1/2} Z_2 [\bar{\psi}(x), \gamma_\nu \psi(x)] A^\nu(x) \quad (I-7)$$

$$\left\{ \psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(x') \right\}_{x_0=x'_0} = Z_2^{-1} \delta^3(x-x') \delta_{\alpha\beta} \quad (I-8a)$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')]_{x_0=x'_0} = i Z_3^{-1} g_{\mu\nu} \delta^3(x-x') \quad (\text{I-8b})$$

Renormalizando a carga para o seu valor observável

$$e = Z_2 Z_1^{-1} Z_3^{1/2} e_0$$

e definindo $j_\nu(x)$ por $j_\nu(x) = Z_1 \bar{\Psi}(x) \gamma_\nu \Psi(x)$ (que corresponde à introdução da função vértice renormalizada: $\Gamma_\nu(p', p) = Z_1 \Gamma'_\nu(p', p)$), obtemos o termo de interação $e j_\nu(x) A^\nu(x)$.

Desenvolvendo a teoria em série de potências relativas à constante de acoplamento renormalizada α , eliminamos os infinitos, segundo a prescrição convencional, através da renormalização da massa e da carga [36-33]. Obtemos assim, resultados finitos em cada ordem do desenvolvimento em α . Estes resultados são perfeitamente comprovados experimentalmente.

Entretanto, do ponto de vista conceitual, esta remoção dos infinitos das quantidades observáveis não é satisfatória. Com efeito, a renormalização apresenta-se sob forma de uma receita artificial aplicada à teoria (e, portanto, sem uma ligação clara com esta) a fim de eliminar as consequências de uma formulação teórica inadequada.

Juntamente com estas observações devemos ressaltar que as constantes de renormalização Z_1 , Z_2 , Z_3 são em geral iguais a zero em teoria de perturbação. Assim, as relações (I-8a) e (I-8b) tornam-se sem sentido e isto indica que os operadores campo renormalizados são mais singulares que os livres. Por outro lado, o produto $Z \bar{\Psi}(x) \Psi(x)$ constante da densidade Lagrangeana (I-7) possui o significado de Ox^∞ . Claramente, isto indica a necessidade de definirmos um processo de limite para fornecer a estas

expressões um significado.

Queremos nesta síntese, que trata do desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica a partir de 1960, ressaltar os aspectos relacionados com a suposição de que a massa despida do elétron é nula. Estes são a invariância dilatacional da teoria e a não divergência do propagador de elétrons, no calibre de Landau. Este último aspecto está comprometido pelo fato do calibre de Landau ser muito singular [4]. Entretanto, como o uso deste calibre e as suas conseqüências foram resultados interessantes no desenvolvimento da Eletrodinâmica até 1969, citaremos suas linhas gerais.

Parece-nos razoável que, se considerarmos a Eletrodinâmica Quântica como uma teoria completa, ela poderá ser formulada dilatacionalmente invariante. Na realidade a Eletrodinâmica Quântica já é definida como sendo invariante frente à transformações dilatacionais, pois nas equações (I-1) m_0 pode ser considerado como possuindo um valor infinito, que posteriormente é renormalizado para a massa observável do elétron. Entretanto, como foi acentuado por Th.A.J.Maris (1963) [6], é mais natural para a invariância dilatacional da teoria a escolha do valor $m_0=0$ do que o uso de uma quantidade infinita não observável. Desta maneira, a massa observável do elétron teria origem puramente eletromagnética através da interação entre o campo do elétron e o do fóton.

O uso de $m_0=0$ e o aparecimento de uma massa finita para o elétron tem como conseqüência a identificação da Eletrodinâmica Quântica como uma teoria com quebra espontânea de simetria. Neste caso, a invariância dilatacional da teoria é quebrada através do aparecimento da massa observável do elétron. A idéia da aplicação da quebra espontânea de simetria para a Teoria Quântica

de Campos está ligada ao estudo do modelo de Bardeen, Cooper e Schrieffer para a supercondutividade, onde é explicada a criação de uma lacuna de energia para o estado fundamental de um superconductor [7] e a posterior aplicação desta idéia às partículas de interação forte [8]. Naturalmente, junto com a quebra espontânea de simetria há o problema do teorema de Goldstone [9,10] que, sob certas condições, implica no aparecimento de bosons de massa nula em interações de longo alcance. A discussão da quebra espontânea de simetria em geral será realizada no próximo capítulo. Queremos apenas ressaltar que esta identificação resolve o paradoxo da observada diferença entre as massas dos elétrons e dos muons, apesar de parecerem possuir essencialmente propriedades idênticas de interação [11-14].

Vamos analisar com mais detalhes o segundo aspecto relacionado com a suposição $m_0 = 0$, isto é, as soluções da equação de Schwinger-Dyson para o propagador do elétron. Esta equação é escrita como

$$S_F^{-1}(p) = S_F^{(0)-1}(p) - i \Sigma(p) \quad (I-9)$$

onde

$$S_F^{(0)-1}(p) = \not{p} \quad (I-10)$$

$$S_F^{-1}(p) = \not{p} - m(p^2) \quad (I-11)$$

$\Sigma(p)$ é a parte de auto-energia própria do elétron dada por

$$\Sigma(p) = e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D_{F_{\mu\nu}}(p-k) \Gamma^\mu(p,k) S_F(k) \gamma^\nu \quad (\text{I-12})$$

O propagador $D_{F_{\mu\nu}}(k)$, devido à invariância relativística da teoria, possui a seguinte forma:

$$D_{F_{\mu\nu}}(k) = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) D_L(k^2) - a \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k^2 + i\epsilon)} \quad (\text{I-13})$$

onde, em ordem zero na teoria de perturbação

$$D_L(k^2) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad (\text{I-14})$$

A relação (I-13) para $D_{F_{\mu\nu}}(k)$ depende explicitamente do calibre escolhido. Se $a=0$ temos o calibre de Landau, $a=1$ o de Fermi e $a=3$ o de Yennie.

O uso do calibre de Landau na equação (I-9) trás como vantagem a anulação da parte em k da integral de auto-energia [15,16,17]. Portanto, a equação (I-9), em primeira ordem na constante de acoplamento renormalizada, (com $D_L(k^2) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon}$ e $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$), fornecerá a seguinte expressão para a auto-massa:

$$m(p^2) = \frac{-3i\alpha}{4\pi^3} \int d^4 k \frac{m(k^2)}{k^2 - m^2(k^2)} \frac{1}{(p-k)^2 + i\epsilon} \quad (\text{I-15})$$

Como foi frisado na referência [18], em primeira ordem é válido aproximarmos $m^2(k^2)$ do denominador para m^2 , sendo m o valor escolhido para caracterizar a massa observável do elétron. Com esta aproximação, a equação (I-15) junto com a condição $m(p^2) = m$ para

$p^2 = m^2$ possui uma solução finita para todos os valores de α entre $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ dada por [18]:

$$m(p^2) = \frac{3\alpha}{\pi} m \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{1+\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}, 2; \frac{p^2}{m^2}\right)$$

sendo

$$\nu = \left(1 - \frac{3\alpha}{\pi}\right)^{1/2}$$

Em especial, quando $p^2 \rightarrow \infty$, a solução terá a seguinte forma:

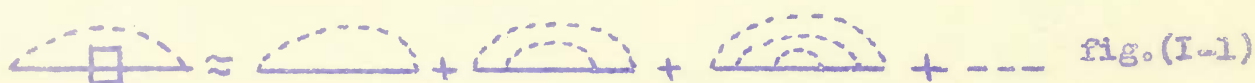
$$m(p^2) = m \left(\frac{p^2}{m^2}\right)^{\frac{-3\alpha}{4\pi}} \quad (I-16)$$

Para a obtenção deste resultado, supôs-se $m_0 = 0$, o calibre de Landau e Z_2^{-1} finito, ou seja, que o propagador de fótons possui o seguinte comportamento para $K^2 \rightarrow 0$:

$$D_{\mu\nu}(K) \rightarrow \left(-g_{\mu\nu} + (1-\alpha) \frac{K_\mu K_\nu}{K^2}\right) \frac{1}{K^2 + i\epsilon} \quad (I-17)$$

Devemos ressaltar a diferença entre a aproximação realizada para a obtenção de um resultado finito para (I-15) e a aproximação usual de menor ordem na teoria de perturbação onde se obtém um valor logaritmicamente divergente.

No primeiro caso utiliza-se o propagador do elétron completo e, assim, a equação (I-15) significa grãficamente o cálculo da seguinte expressão:



No segundo caso aproxima-se tanto $m(k^2)$ do numerador como o do denominador por um valor constante, o que significa que o cálculo usual corresponde ao do primeiro gráfico da expansão da fig. (I-1). Entretanto, como os demais termos da figura (I-1) também são logaritmicamente divergentes, a consideração de toda a série de infinitos termos divergentes é extremamente importante pois sua soma é um resultado convergente. De fato, expandindo-se a expressão (I-16) em série relativa a α , obtém-se

$$m(p^2) = m\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^{\frac{-3\alpha}{4\pi}} = m \exp\left(-\frac{3\alpha}{4\pi} \ln \frac{p^2}{m^2}\right) = m \left[1 - \frac{3\alpha}{4\pi} \ln \frac{p^2}{m^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{3\alpha}{4\pi} \ln \frac{p^2}{m^2}\right)^2 + \dots \right] \quad (I-18)$$

O segundo termo desta expansão corresponde ao valor usual para a quantidade \bar{O}_m [5] e representa o primeiro gráfico da fig. (I-1).

Assim, a equação (I-15) permite uma solução finita para $m(p^2)$. Na verdade, devido à invariância dilatacional da teoria, ela não só permite uma solução finita como também fornece um número infinito de soluções $\lambda^{-1} m(\lambda^2 p^2)$ matematicamente possíveis. A questão referente à existência de um número infinito de valores possíveis para $m(p^2)$ também será estudada no próximo capítulo.

Devemos frisar que a Eletrodinâmica Quântica com $m_0 = 0$ fornece os mesmos resultados que a teoria de perturbação renormalizada usual [18]. A compreensão das subtrações infinitas contidas em (I-18) decorre da necessidade de considerarmos somas contendo infinitas ordens de gráficos. A questão relacionada com a soma da série perturbativa é problema não resolvido na teoria de perturbação convencional.

Recentemente, foi apresentada outra modificação relacio

nada com a densidade Lagrangeana renormalizada, equação (I-4), |4|. Esta é a sugestão da adoção de $Z_3 \equiv 0$ |19|. De fato, os cálculos perturbativos atuais de Z_3^{-1} conduzem a um resultado divergente, tornando razoável a sugestão sobre a nulidade de Z_3 . A possibilidade de convergência da constante de renormalização para o propagador do fóton Z_3^{-1} estudada nas referências |20,21| não apresenta uma conclusão muito satisfatória. Nestas referências obteve-se que a parte divergente de Z_3^{-1} era constituída do produto de uma integral que divergia logaritmicamente (na primeira potência) por uma função da constante de acoplamento não renormalizada α_0 . A admissão de Z_3^{-1} não divergente surge com a possibilidade de existir algum valor positivo para α_0 que fôsse um zero desta função e, assim, anular o termo divergente. Esta função foi conjecturada, através da teoria de perturbação, até ordem α_0^3 . Porém não foi possível obter-se uma informação completa sobre ela nem sobre os seus zeros. Por outro lado, verificou-se posteriormente |22| que a anulação da função de α_0 multiplicativa da divergência logarítmica seria uma condição necessária porém não suficiente para a convergência de Z_3^{-1} . Além disso, recentemente reconheceu-se que até a ordem α_0^3 do desenvolvimento perturbativo, a forma desta função não mostrava a existência de zeros fisicamente aceitáveis |23,24|.

A adoção de $Z_3 \equiv 0$ introduz uma importante possibilidade para a teoria que é a da Eletrodinâmica Quântica fornecer, por si mesma, o valor da constante de acoplamento renormalizada |19, 4|. De fato, se definirmos o seguinte operador para o campo eletromagnético

$$A'_\nu(x) = e A_\nu(x) \quad (I-19)$$

observaremos que a carga renormalizada e constará somente no termo $Z_3 L_0(A')$ da equação (I-7). Se, entretanto, Z_3 for tomada como nula, então a teoria não possuirá nenhuma constante (m_0 é considerada nula). Desta maneira, o valor de e possivelmente poderia ser obtido como um resultado da teoria.

Por outro lado, a formulação apresentada pela densidade Lagrangeana (I-7) não é manifestamente invariante frente à transformação de calibre |4|. O termo que destrói esta invariância explícita é precisamente o proporcional à constante Z_3 .

Como a sugestão $Z_3 \equiv 0$ poderia ser considerada como um tanto estranha, vamos indicar brevemente a sua equivalência com a teoria usual. Para isto, mostraremos como o propagador de fótons $D_{F_{\mu\nu}}(k)$ calculado com a suposição $Z_3 \equiv 0$ é equivalente ao usual.

A equação para o propagador de fótons $D_{F_{\mu\nu}}(k)$ na representação de interação pode ser obtida do desenvolvimento em série de potências em α da seguinte expressão:

$$\langle 0 | T \{ A_\mu(x) A_\nu(y) \exp \left[i \int L_{int}(z) d^4z \right] \} | 0 \rangle \quad (I-20)$$

com

$$L_{int}(z) = (Z_2 - 1) L_0(\psi) + (Z_3 - 1) L_0(A) - e Z_1 A_\nu(z) \bar{\psi}(z) \gamma^\nu \psi(z) \quad (I-21)$$

Estamos usando a forma da matriz unitária S proposta na referência |25|, ou seja:

$$S = T \exp \left(i \int_{-\infty}^{+\infty} L_{int}(z) d^4z \right) \quad (I-22)$$

e cuja validade é demonstrada através das condições de covariância, unitariedade e causalidade, que são satisfeitas pela Eletrodinâmica Quântica.

Com o uso das relações (I-20) e (I-21) obtemos a seguinte equação para o propagador do fóton, no espaço de momenta:

$$Z_3 D_{F_{\mu\nu}}(K) = D_{F_{\mu\nu}}^{(0)}(K) - D_{F_{\mu\rho}}^{(0)}(K) \tilde{\Pi}^{\rho\sigma}(K) D_{F_{\sigma\nu}}(K) \quad (I-23)$$

com

$$i\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(K) = i(K_\mu K_\nu - g_{\mu\nu} K^2) \tilde{\Pi}(K^2) = \quad (I-24)$$

$$= -e^2 Z_1 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} (\gamma_\mu S_F(p) \Gamma_\nu(p-K, p) S_F(p-K))$$

e $D_{F_{\mu\nu}}^{(0)}(K)$ sendo o propagador livre para o fóton.

Esta equação, em qualquer calibre, admite a seguinte solução,

$$D_{F_{\mu\nu}}(K) = \frac{(-g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{K^2})}{K^2(Z_3 + \tilde{\Pi}(K^2))} - \frac{a K_\mu K_\nu}{K^2(K^2 + i\epsilon)} = \quad (I-25)$$

$$= \frac{(-g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{K^2})}{K^2(1 + \tilde{\Pi}_c(K^2))} - \frac{a K_\mu K_\nu}{K^2(K^2 + i\epsilon)}$$

donde

$$D_t(K^2) = \frac{1}{K^2(1 + \tilde{\Pi}_c(K^2))} \quad (I-26)$$

Para a obtenção da forma final de (I-25) usamos:

$$\tilde{\Pi}(K^2) = \tilde{\Pi}(0) + \tilde{\Pi}_c(K^2) = Z_3^{-1} - 1 + \tilde{\Pi}_c(K^2) \quad (I-27)$$

com $\pi_c (K^2)$ sendo a parte finita do tensor polarização do vácuo (equação (I-24)).

Entretanto, se admitirmos a hipótese $Z_3 \equiv 0$, então a densidade Lagrangeana total (I-7) terá a forma:

$$\mathcal{L}(Z) = Z_2 \mathcal{L}_0(Z) - e Z_1 A_\nu(Z) \bar{\Psi}(Z) \gamma^\nu \Psi(Z) \quad (I-28)$$

De maneira análoga, obtemos a seguinte equação para o propagador do fóton

$$D_{F_{\mu\nu}}^{(0)}(K) = D_{F_{\mu\sigma}}^{(0)}(K) \pi^{\sigma\rho}(K) D_{F_{\rho\nu}}(K) \quad (I-29)$$

cuja solução é

$$D_{F_{\mu\nu}}(K) = \frac{(-g_{\mu\nu} + \frac{K_\mu K_\nu}{K^2})}{K^2 \pi(K^2)} - \frac{a K_\mu K_\nu}{K^2 (K^2 + i\epsilon)} \quad (I-30)$$

Esta relação, através de (I-13), permite-nos escrever a seguinte forma para $D_t(K^2)$, quando $Z_3 \equiv 0$:

$$D_t(K^2) = \frac{1}{K^2 \pi(K^2)} = \frac{1}{K^2 (\pi(0) + \pi_c(K^2))} \quad (I-31)$$

Portanto, de acôrdo com o comportamento de $D_{F_{\mu\nu}}(K)$, para $K^2 \rightarrow 0$, dado pela expressão (I-17), e que determina \underline{e} na equação (I-19), obtemos a relação:

$$\pi(0) = 1 \quad (I-32)$$

A suposição $Z_3 \equiv 0$ seria invalidada se através dela obtivéssemos resultados não comprovados experimentalmente. Entre-

tanto, usando a relação (I-27), verificamos que as equações (I-30) e (I-32) reduzem-se ao propagador renormalizado convencional (equação (I-25)). De maneira mais simples verificamos que a expressão (I-31), com $\mathcal{V}(0) = 1$, reduz-se à usual (I-26). Portanto, não é introduzida nenhuma modificação que esteja em contradição com os resultados obtidos pela teoria renormalizada usual. Para isto constatamos que devemos supor que $\mathcal{V}(0)$ seja finito e possa, portanto, por uma escolha adequada de $\underline{\epsilon}$ ser normalizado a 1. Entretanto, como mencionamos acima, se definirmos um novo operador para o campo de fótons ($\hat{A}_\nu(Z) \equiv e A_\nu(Z)$) e supormos $Z_3 \equiv 0$, a teoria não possuirá nenhuma constante da natureza. O propagador do fóton definido através do operador $\hat{A}_\nu(Z)$ não terá a normalização requerida, ou seja, de que quando $K^2 \rightarrow 0$, ele se comporte como o propagador livre (equação (I-17)). Isto nos indica que, renormalizando o propagador do fóton, poderíamos obter o valor da constante de acoplamento α . Ou seja, α poderia ser obtida através da condição (I-32) se o tensor polarização do vácuo não fosse divergente, como o é no cálculo usual.

Queremos chamar a atenção de que, supondo $Z_3 \equiv 0$, a quantidade $j^\nu(x)$ que aparece na definição (I-1) não pode ser considerada como a densidade de corrente eletromagnética. Para $Z_3 \equiv 0$, obtemos a seguinte equação de movimento:

$$\frac{\delta L}{\delta A^\nu(x)} = -e j_\nu(x) = 0 \quad (I-33)$$

com $j_\nu(x)$ dado por:

$$j_\nu(x) = \sum_1 \bar{\Psi}(x) \gamma_\nu \Psi(x) \quad (I-34)$$

Quando $Z_3 \equiv 0$, a equação (I-33) mostra-nos que a quantidade $J_\nu(x)$ não pode ser interpretada como a densidade de corrente eletromagnética pois conduziria a ausência de interação. Consideremos, por exemplo, os elementos de matriz, entre estados físicos, para o operador $J_\nu(x)$ definido acima:

$$\langle 0 | T [\Psi(x) J^\mu(y) \bar{\Psi}(z)] | 0 \rangle \quad (I-35)$$

(o sinal \sim representa a transformada de Fourier). Desenvolvendo o membro direito desta expressão em série de potências relativas à α , obtemos graficamente:

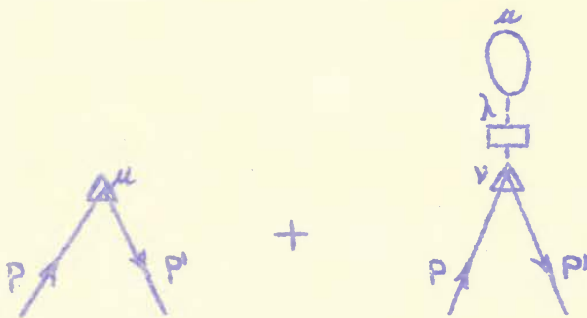


Fig. (I-2)

que corresponde a seguinte expressão analítica:

$$\langle 0 | T [\Psi(x) J^\mu(y) \bar{\Psi}(z)] | 0 \rangle = -S_F(p) \Gamma_\nu(p, p') [g^{\nu\mu} - \Pi_\lambda^\mu(k) D_F^{\nu\lambda}(k)] S_F(p') \quad (I-36)$$

Assim, para $Z_3 \equiv 0$, a expressão (I-36) (e, portanto, a figura (I-2)) é igual a zero por causa da relação (I-29). Portanto o elemento de matriz de $J_\nu(x)$ dado por (I-34), entre

estados físicos, é nulo, o que corresponderia à ausência de interação se $J_\nu(x)$ fosse interpretada como a corrente eletromagnética.

Como definição para a corrente eletromagnética foi apresentada na referência [4] a seguinte expressão:

$$J_{em}^\nu(x) = \square A^\nu(x) - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\mu} \quad (I-37)$$

que é coerente com as propriedades necessárias para a corrente eletromagnética. Em especial $\partial_\nu J_{em}^\nu(x) = 0$ por causa de (I-3c).

Resumindo, as suposições $Z_3 = 0$ e $m_0 = 0$ não introduzem incoerências na teoria. A adoção de $Z_3 = 0$, além de permitir uma formulação (formal devido à existência de produtos entre operadores campo num mesmo ponto) invariante de maneira explícita frente à transformação de calibre, indica-nos, em princípio, a possibilidade de obtermos o valor da constante de acoplamento observável α dentro do contexto da teoria. A dificuldade existente na teoria convencional para esta obtenção reside na divergência logarítmica de $\Pi^{\mu\nu}(k)$. Entretanto, uma conceituação mais coerente para a teoria, que será analisada na próxima seção, possibilita-nos esperar a eliminação desta divergência. Mostraremos isto, de maneira formal e qualitativa na quarta seção deste capítulo.

tulo.

I-3 Eletrodinâmica Quântica como Teoria Quântica de Campos

Com a finalidade de introduzir as idéias relacionadas com uma formulação adequada para a teoria, faremos um breve histórico das alternativas apresentadas para uma melhor definição da Eletrodinâmica Quântica.

Os primeiros passos neste sentido devem-se à Dirac e Heisenberg (1934) que forneceram um método para a manipulação das singularidades na Teoria Quântica de Campos. Este, essencialmente, introduz a regularização diretamente na densidade de corrente eletromagnética, definindo-a como:

$$j_{\mu}(x) = \lim_{x' \rightarrow x} e_0 \left\{ \frac{1}{2} [\bar{\Psi}(x'), \gamma_{\mu} \Psi(x)] + g_{\mu}(x, x') \right\} \quad (I-38)$$

onde $g_{\mu}(x, x')$ é uma quantidade que compensa as singularidades dos elementos de matriz da corrente usual (I-2). Este método foi aplicado por Valatin (1954) para o caso de um campo eletromagnético externo com a finalidade de uma melhor compreensão das questões relacionadas com as divergências na Teoria Quântica de Campos.

Posteriormente, Valatin estendeu-o para a Eletrodinâmica Quântica redefinindo as equações de Schwinger-Dyson para os propagadores de tal forma que as suas soluções fôssem finitas e idênticas às da teoria de perturbação renormalizada. O cancelamento das divergências ocorre através de um processo de limite

que é incorporado diretamente na definição das equações de movimento. Zimmermann aplicou estas idéias para a teoria do campo φ^4 .

Johnson sugeriu, posteriormente (1964), a seguinte definição para a corrente eletromagnética [27]

$$j_\mu(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left\{ \left[\bar{\Psi}(x-\epsilon), \gamma^\mu \Psi(x+\epsilon) \right] \exp\left(-i\epsilon \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} A_\nu(\xi) d\xi^\nu\right) + (\epsilon \rightarrow -\epsilon) \right\} \quad (I-39)$$

Nesta definição ϵ é um vetor tipo espaço. A introdução da forma (I-39) tinha por finalidade definir uma densidade de corrente que fosse invariante frente à transformação de calibre, e assim eliminar a divergência quadrática do tensor polarização do vácuo $\pi^{\mu\nu}(k)$ [27]. No cálculo usual, sabemos que a subtração da parte quadraticamente divergente de $\pi^{\mu\nu}(k)$ torna-o invariante frente à transformação de calibre. Podemos facilmente comprovar que o valor esperado do vácuo para a densidade de corrente definida de maneira não invariante frente à transformação de calibre é quadraticamente divergente, ou seja:

$$\langle 0 | j_\mu(x) | 0 \rangle = \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \left[S_1(2\epsilon) + S_1(-2\epsilon) \right] \right\} \quad (I-40)$$

com

$$j_\mu(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4} \left\{ \left[\bar{\Psi}(x+\epsilon), \gamma^\mu \Psi(x-\epsilon) \right] + (\epsilon \rightarrow -\epsilon) \right\}$$

Brandt (1967) apresentou uma formulação para a Eletrodinâmica Quântica (utilizando uma idéia proposta anteriormente por Valatin) baseada em equações de campo locais e finitas. Nestas equações, que possuem formas análogas às usuais, o produto local

de operadores é definido através de um processo de limite e por um complicado conjunto de subtrações. A forma para estes termos subtrativos é consequência do uso da hipótese geral de Wilson [28] para a conduta de produtos locais de operadores renormalizados. As soluções destas equações, são mostradas, através de um ajuste dos numerosos (15) parâmetros envolvidos, serem equivalentes às obtidas pela teoria de perturbação renormalizada usual. Brandt derivou uma forma explícita para a densidade de corrente eletromagnética que contém uma série de subtrações necessárias para a obtenção de um valor finito para a teoria. Esta corrente é mostrada possuir as propriedades de invariância frente à transformação de calibre e ser negativa frente à conjugação de carga.

As definições (I-39) e a fornecida por Brandt para a densidade de corrente eletromagnética possuem a necessária dependência explícita de $j_\mu(x)$ no operador campo eletromagnético $A_\nu(x)$ [29-32]. Podemos verificar a necessidade para tal dependência através da análise do seguinte comutador:

$$[j^\mu(x), F_{0i}(x')]_{x_0=x'_0}$$

Se $j_\mu(x)$ independesse de $A_\nu(x)$ concluiríamos que o comutador para tempos iguais entre a densidade de carga e da corrente seria nulo o que implicaria na ausência da interação.

Esta não comutatividade para tempos iguais entre a densidade de carga e de corrente é uma consequência de princípios gerais da Teoria Quântica de Campos. Pode-se demonstrá-la usando os princípios de localidade e covariância [31].

Estas considerações sugerem ser mais natural exigir a priori as necessárias condições de invariância do que deixar para

prová-las posteriormente através de um ajuste de muitas constantes. Em particular, uma definição consistente para a densidade de corrente eletromagnética seria através de um processo de limite para uma quantidade não local que dependesse explicitamente do operador campo eletromagnético $A_{\mu}(x)$ de maneira tal que $j_{\mu}(x)$ fosse invariante frente à transformação de calibre.

Como $j_{\mu}(x)$ deve depender explicitamente de $A_{\mu}(x)$, o termo convencional para a densidade Lagrangeana de interação (I-1c) é incorreto pois fornece o seguinte valor para a densidade de corrente:

$$\frac{\partial j_{\mu}(x)}{\partial A^{\mu}(x)} = - \frac{\delta L}{\delta A^{\mu}(x)} = e j_{\mu}(x) + e A^{\nu}(x) \frac{\partial j_{\nu}(x)}{\partial A^{\mu}(x)} \quad (I-41)$$

que não é consistente com $A^{\mu}(x) \frac{\partial j_{\mu}(x)}{\partial A^{\mu}(x)}$ diferente de zero.

Todas estas tentativas são baseadas diretamente nas equações de campo. Parece-nos mais natural, porém, utilizar uma formulação Lagrangeana, evitando assim problemas de consistência das equações de movimento. Uma primeira etapa neste sentido e que incorpora de uma maneira natural as questões apresentadas acima foi a introdução da seguinte densidade Lagrangeana (considerando $m=0$ e $Z_3=0$) [33]:

$$L(x) = \frac{1}{4} \sum_{\nu} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi^{\nu}(x, \epsilon^{\nu}) \psi^{\nu}(x, \epsilon^{\nu}) - \psi^{\nu}(x, \epsilon^{\nu}) \psi^{\nu}(x, \epsilon^{\nu})}{2\epsilon^{\nu}} \quad (I-42)$$

com

$$\psi^{\nu}(x, \epsilon^{\nu}) = -i \bar{\psi}(x + \epsilon^{\nu}) \gamma^{\nu} \psi(x, \epsilon^{\nu}) \psi(x - \epsilon^{\nu}) - (\epsilon^{\nu} - \epsilon^{\nu})^0 \quad (I-43)$$

e o índice c simbolizando a operação conjugação de carga. Nesta definição $m^{(\nu)}$ é um vetor unitário na direção do eixo ν .

A introdução da forma (I-42) para a densidade Lagrangeana é uma consequência da observação de que os processos de limite existentes para os operadores do campo de elétrons, ou sejam, a diferenciação que ocorre no termo $\bar{\Psi}(x) \not\partial \Psi(x)$ e o produto local $\Psi(x) \not\partial(x) \Psi(x)$ podem ser combinados matematicamente num só limite. Esta possibilidade deve-se ao fato de que estes dois limites, através da transformação de calibre, ocorrem juntos na combinação $i \not\partial_{\mu} - e A_{\mu}(x)$.

Definimos $\varphi(x, E^{\nu})$ por

$$\varphi(x, E^{\nu}) = T_{\epsilon} \exp\left(-ie \int_{-E^{\nu}}^{+E^{\nu}} A_{\nu}(x + \epsilon' m^{(\nu)}) d\epsilon'\right) \quad (I-44)$$

onde T_{ϵ} é um operador que ordena no tempo quando ϵ é positivo e anti-ordena quando ϵ é negativo, com a propriedade $\bar{T}_{\epsilon} = T_{\epsilon}$.

O operador $\varphi(x, E^{\nu})$ satisfaz a propriedade

$$\varphi^+(x, E^{\nu}) = \varphi(x, -E^{\nu}) \quad (I-45)$$

pois $\bar{T}_{\epsilon} = T_{\epsilon}$.

A densidade Lagrangeana apresentada acima pode ser escrita na seguinte forma:

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{\nu} \lim_{\epsilon^{\nu} \rightarrow 0} \frac{h^{\nu}(x, \epsilon^{\nu})^{\dagger}}{2\epsilon^{\nu}} \quad (I-46)$$

com $h^{\nu}(x, \epsilon^{\nu})$ sendo definido por:

$$h^{\nu}(x, \epsilon^{\nu}) = -i \bar{\Psi}(x + \epsilon^{\nu} n^{(\nu)}) \gamma^{\nu} \Psi(x - \epsilon^{\nu} n^{(\nu)}) \quad (\text{I-47})$$

O significado de $h^{\nu}(x, \epsilon^{\nu})_{\mp}^{\pm}$ é:

$$h^{\nu}(x, \epsilon^{\nu})_{\mp}^{\pm} = \frac{1}{4} [h^{\nu}(x, \epsilon^{\nu}) + h^{\nu c}(x, \epsilon^{\nu}) + h^{\nu t}(x, \epsilon^{\nu}) + h^{\nu ct}(x, \epsilon^{\nu})] \quad (\text{I-48})$$

O sinal positivo superior indica simetrização frente à conjugação de carga e o inferior simetrização frente à conjugação hermitiana.

A equivalência entre as definições (I-42) e (I-46) pode ser verificada através da igualdade:

$$h^{\nu}(x, \epsilon^{\nu} n^{(\nu)}) = h^{\nu}(x, \epsilon^{\nu} n^{(\nu)}) - h^{\nu c}(x, -\epsilon^{\nu} n^{(\nu)})$$

que é uma consequência da seguinte propriedade para $h^{\nu}(x, \epsilon^{\nu})$:

$$h^{\nu t}(x, \epsilon^{\nu}) = -h^{\nu}(x, -\epsilon^{\nu}) \quad (\text{I-49})$$

O caminho de integração contido na expressão (I-44) é definido de maneira natural: para cada componente devemos tomar a direção do correspondente eixo.

Observamos que o deslocamento dos operadores ocorre, também, na direção da componente tempo $\nu=0$. Isto torna a teoria, construída através da densidade Lagrangeana proposta, não canônica. Entretanto, este deslocamento também ocorre na teoria usual pois a definição da diferenciação temporal, que fornece a evolução do sistema, compreende um deslocamento temporal nos ope-

radores do campo dos elétrons. De qualquer maneira, não estamos supondo as regras de comutação canônicas.

Queremos ressaltar os seguintes aspectos relacionados com a densidade Lagrangeana definida acima:

1) Nas definições (I-42) e (I-46) os operadores são os renormalizados. Portanto, estamos implicitamente considerando o calibre de Landau. Entretanto, como este calibre tem a propriedade de ser muito singular, deveríamos adotar um outro e, portanto, a definição adequada para a densidade Lagrangeana seria:

$$L'(x) = Z_2 L(x)$$

2) Constatamos que $h^v(x, E^v)$ e, portanto a densidade Lagrangeana, somente é invariante frente à transformação de calibre definida pelas relações

$$A'_\nu(x) = A_\nu(x) + \partial_\nu \Lambda(x) \tag{I-50a}$$

$$\Psi'(x) = \exp(-ie\Lambda(x))\Psi(x) \tag{I-50b}$$

se $\Lambda(x)$ comutar com $A_\nu(x)$. Esta invariância de $h^v(x, E^v)$ é consequência da seguinte transformação de $\psi(x, E^v)$:

$$\psi(A_\nu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\nu}, x, E^v) = \exp(-ie\Lambda(x + E^v n^{\nu h}))\psi(A_\nu, x, E^v)\exp(ie\Lambda(x - E^v n^{\nu h})) \tag{I-51}$$

que é válida para $\Lambda(x)$ considerado como operador se

$$[A_\nu(x), \Lambda(x)] = 0$$

Entretanto, este comutador só será nulo no

calibre matematicamente singular de Landau. Como foi frisado na referênciã [4], a definiçãõ apropriada para a transformaçãõ de calibre com $\Lambda(x)$ sendo um operador é dada pelas equações

$$\Psi'(x) = \exp(-ie(b-1)\Lambda^-(x)) \Psi(x) \exp(-ie(b-1)\Lambda^+(x)) \quad (I-52a)$$

$$A'_\nu(x) = A_\nu(x) + (b-1) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Lambda(x) \quad (I-52b)$$

onde $\Lambda^+(x)$ e $\Lambda^-(x)$ sãõ, respectivamente, a freqüência negativa e positiva do operador $\Lambda(x)$ que é definido formalmente como

$$\Lambda(x) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \square^{-1} A^\nu(x) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int \bar{D}(x-x') \frac{\partial A^\nu(x')}{\partial x'^\nu} e^{-\beta|x_0|} d^4x' \quad (I-52c)$$

A densidade Lagrangeana é invariante frente a esta transformaçãõ de calibre sem a necessidade do comutador entre $\Lambda(x)$ e $A_\nu(x)$ precisar ser nulo.

3) O operador (I-44) nãõ está definido precisamente pois possui elementos de matriz singulares. Isto podemos constatar, para o caso de campos livres, considerando o seu valor esperado para o vácuo, com $\epsilon^\nu > 0$:

$$\langle 0 | T \exp\left(-ie \int_{-\epsilon^\nu}^{+\epsilon^\nu} A_\nu(x + \epsilon^\mu n^{(\mu)}) d\epsilon^\mu\right) | 0 \rangle = \exp\left(-\frac{ie^2}{2} \int_{-\epsilon^\nu}^{+\epsilon^\nu} d\epsilon'^\mu \int_{-\epsilon^\nu}^{+\epsilon^\nu} d\epsilon''^\nu D_{F_{\nu\mu}}[(\epsilon' - \epsilon'') n^{(\mu)}]\right) \quad (I-53)$$

Usando o valor do propagador do fóton $D_{F_{\nu\mu}}(x)$:

$$D_{F_{\nu\mu}}(x) = \frac{-i}{4\pi^2} \frac{g_{\nu\mu}}{x^2 + i\epsilon}$$

verificamos que a integral contida na expressão acima será logaritmicamente divergente pois obtemos para $\epsilon \neq 0$:

$$\langle 0 | \psi(x, \epsilon^\nu) | 0 \rangle = \exp \left[-\frac{e^2}{8\pi^2} \left(2 \log_2 0 - \log_2 2\epsilon^\nu n^{(4)} - \log_2 (-2\epsilon^\nu n^{(4)}) \right) \right]$$

Isto sugere a seguinte definição correta para o operador (I-44):

$$\psi'(x, \epsilon^\nu) = \frac{\psi(x, \epsilon^\nu)}{\langle 0 | \psi(x, \epsilon^\nu) | 0 \rangle} \quad (I-54)$$

Definindo a densidade Lagrangeana com o operador $\psi'(x, \epsilon^\nu)$ em vez de $\psi(x, \epsilon^\nu)$ estamos excluindo do desenvolvimento perturbativo todos os gráficos com contornos fechados num mesmo vértice para o propagador do fóton, conforme constatamos pela observação da relação (I-53).

4) Ignorando os problemas relacionados com a definição correta do operador $\psi(x, \epsilon^\nu)$ e do calibre de Landau, podemos usar a densidade Lagrangeana (I-46), manifestamente invariante frente à transformação de calibre, para estudar a divergência quadrática do tensor polarização do vácuo em ordem α . [34]. Esta análise é realizada através do desenvolvimento do termo exponencial contido no seguinte elemento de matriz:

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y) \exp(i \int_{int} L(Z) d^4 Z)) | 0 \rangle \quad (I-55)$$

em séries de potências de $A_p(x)$ e considerando apenas os termos proporcionais a α . No terceiro capítulo justificaremos o uso da densidade Lagrangeana total, no lugar de $\int_{int} L(Z)$ para o estudo do ten

por $\pi^{\mu\nu}(k)$.

Realizando o cálculo, observamos a existência de um termo adicional [34] quadraticamente divergente para $E^\nu \neq 0$, que possibilita o cancelamento desta divergência do tensor $\pi^{\mu\nu}(k)$ antes do limite $E^\nu \rightarrow 0$ ser realizado. Isso será mostrado na próxima seção.

A divergência quadrática do propagador de fótons é uma consequência da não invariância da teoria frente à transformação de calibre. Embora a definição (I-46) contenha as dificuldades relacionadas com o calibre de Landau e a definição do operador $\varphi(x, E^\nu)$, a sua forma explicitamente invariante frente à transformação (I-52) fornece uma teoria sem a divergência quadrática. Devemos ressaltar que este cancelamento é similar ao obtido por Johnson [27] (que se baseava numa formulação não Lagrangeana), porém, mais consistente devido à equação (I-44).

5) Supondo por um momento $Z_3 \neq 0$, obtemos a seguinte forma para a densidade de corrente eletromagnética

$$j^\nu(y) = \frac{-i}{4} \lim_{E^\nu \rightarrow 0} \int d^4x \delta_{E^\nu}(x-y) \left[h^\nu(x, E^\nu m^{(\nu)}) + h^{\nu c^+}(x, E^\nu m^{(\nu)}) - h^{\nu t}(x, E^\nu m^{(\nu)}) - h^{\nu c}(x, E^\nu m^{(\nu)}) \right] \quad (I-56)$$

onde usamos

$$\left. \frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} \varphi(x, E^\nu) \right|_{A=0} = -ie \delta_{\mu\nu} Z E^\nu \delta_{E^\nu}(x-y) \quad (I-57)$$

com

$$\int_{-E^V}^{+E^V} \delta(x + E^V n^{(V)} - y) dE^V = \theta(x - y + E^V n^{(V)}) - \theta(x - y - E^V n^{(V)}) \equiv 2E^V \delta_{E^V}(x - y) \quad (I-58)$$

Portanto, observamos que a densidade de corrente eletromagnética possui a necessária dependência explícita no operador campo eletromagnético $A_\nu(x)$.

6) Esta formulação não é manifestamente invariante frente à transformação de Lorentz, pois a direção de cada eixo de coordenadas possui um papel preferencial na definição da densidade Lagrangeana. Entretanto, este mesmo problema encontramos na teoria usual através da definição da diferenciação de um operador. A teoria será invariante frente à transformação de Lorentz se for possível definirmos através de um limite a diferenciação de um operador. Esta questão está ligada à dinâmica da teoria pois a obtenção de soluções finitas fornecerá a validade do limite.

7) Finalmente, como mencionamos anteriormente, a definição $\mathcal{L}(x) = \sum_2 \mathcal{L}(x)$ possui um significado somente através de um processo de limite pois ela se apresenta na forma $0 \times \infty$.

Em 1969 a seguinte densidade Lagrangeana foi proposta por Th. A. J. Maris, D. Dillenburger e G. Jacob [3,4]:

$$\mathcal{L}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_V Z(\epsilon^2) \frac{h(x, \epsilon n^{(V)})^\dagger}{2\epsilon} \quad (I-59)$$

As suas conseqüências, em especial para as equações de Schwinger-Dyson e o propagador de fermions, foram analisadas nas referências [3,4,26]. Esta proposição está ligada tanto a uma melhor definição para o produto local de operadores como a um melhor enten

dimento do significado da diferenciação. O produto de operadores e a diferenciação necessitam para suas definições de processos de limites. Ambos os processos podem ser combinados num só limite de maneira invariante frente à transformação de calibre definida pelas equações (I-52). Em geral, não podemos afirmar, sem primeiramente obtermos soluções finitas para a teoria, que o limite existe. Isto conduziu à introdução da função $Z(\mathcal{E}^2)$. A nova formulação permite, assim, uma compreensão natural do processo de renormalização dentro da Teoria Quântica de Campos.

Na definição (I-59) $h(x, \mathcal{E}_n^{(\nu)})$, com todos os \mathcal{E}^ν iguais, é dada por:

$$h(x, \mathcal{E}_n^{(\nu)}) = -i \bar{\Psi}(x + \mathcal{E}_n^{(\nu)}) \gamma_n \varphi(x, \mathcal{E}_n^{(\nu)}) \Psi(x - \mathcal{E}_n^{(\nu)}) \quad (\text{I-60})$$

com

$$\varphi(x, \mathcal{E}_n^{(\nu)}) = T_{\mathcal{E}} \exp\left(-ie \int_{-e}^{+e} A_\nu(x + \mathcal{E}'_n^{(\nu)}) d\mathcal{E}'\right) \quad (\text{I-61})$$

Nestas relações n é um vetor unitário com componente apenas na direção do eixo ν .

A função $Z(\mathcal{E}^2)$ é escolhida de maneira apropriada tal que permita a obtenção de um valor finito para o limite. Quando $\mathcal{E} \rightarrow 0$, $Z(0)$ é igual a constante de renormalização usual $Z_1 = Z_2$, que agora pode ser nula.

I-4 Divergência quadrática do tensor polarização do vácuo e os termos de Schwinger

Vamos usar a definição (I-59), com $Z_3 = 0$ e $m_0 = 0$, para analisar a divergência quadrática do tensor polarização do vácuo. Veremos, em especial, que esta divergência está relacionada com uma forma de $\pi_{\mu\nu}(k)$ não covariante frente à transformação de calibre nem frente à transformação de Lorentz.

Como estamos interessados na divergência quadrática de $\pi_{\mu\nu}(k)$ não vamos considerar o problema relacionado com a definição do operador $\psi(x, \epsilon_{\mu\nu}^{\lambda\rho})$ e adotar a sugestão mencionada anteriormente de negligenciar os gráficos com linhas de fótons fechadas num mesmo ponto. Para o cálculo do elemento de matriz (I-55), em ordem α , desenvolvemos o termo exponencial em série de potências relativas à $A_\mu(x)$ e tomamos apenas a seguinte expressão:

$$\frac{1}{2!} \sum_{\nu} \sum_{\mu} \int d^4z \int d^4z' A_\mu(z') A_\nu(z) \frac{\delta}{\delta A_\mu(z')} \frac{\delta}{\delta A_\nu(z)} \exp(i \int \mathcal{L}(z) d^4z) \Big|_{A=0} \quad (I-62)$$

Com o uso da relação (I-57), o tensor polarização do vácuo $\pi^{\mu\nu}(k)$ no espaço dos momenta é dado por:

$$\pi^{\mu\nu}(k) = -e^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ Z^2(\epsilon^2) \cos[(2p-k)_\mu \epsilon] \cos[(2p-k)_\nu \epsilon] \right\}$$

$$\cdot \tilde{\delta}(k_\mu, \epsilon) \tilde{\delta}(k_\nu, \epsilon) T_2 [\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\nu S_F(p-k)] + Z(\epsilon^2) \delta_{\mu\nu} 2\epsilon$$

$$\cdot \left. \sin 2p_\nu \epsilon \tilde{\delta}(k_\nu, \epsilon) \tilde{\delta}(k_\nu, \epsilon) T_2 [\gamma^\nu S_F(p)] \right\} \quad (I-63)$$

onde $\tilde{\delta}(K_\nu, \epsilon)$, transformada de Fourier de $\delta_{\epsilon m}^{(\nu)}(x-y)$, vale:

$$\tilde{\delta}(K_\nu, \epsilon) = \frac{\text{sen } K_\nu \epsilon}{K_\nu \epsilon} \quad (\text{I-64})$$

Devemos observar que se realizarmos o limite $\epsilon \rightarrow 0$ da expressão (I-63) de maneira formal, o primeiro termo tenderá à forma usual da polarização do vácuo, que é quadráticamente divergente, e o segundo termo a zero. Entretanto, em realidade, este termo comporta-se como ϵ^{-2} , ou seja, diverge quadráticamente.

Após integrarmos parcialmente o segundo termo da expressão (I-63) e colocarmos $\mu = \nu$ e $K = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned} \pi^{\mu\mu}(0) = & -e^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z(\epsilon^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left\{ Z(\epsilon^2) \cos^2 \epsilon p_\mu \epsilon \text{Tr} [\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p)] + \right. \\ & \left. + \cos \epsilon p_\mu \epsilon \frac{\partial}{\partial p_\mu} \text{Tr} [\gamma^\mu S_F(p)] \right\} \quad (\text{I-65}) \end{aligned}$$

O uso da relação (que é a expressão (I-24) a ser mostrada no terceiro capítulo):

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F^{-1}(p) = T^\mu(p, p) \quad (\text{I-66})$$

permite-nos comprovar que

$$\pi^{\mu\mu}(0) = 0 \quad (\text{I-67})$$

independentemente do limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Assim a expressão (I-63) para $\pi^{\mu\nu}(K)$ não contém nenhuma divergência quadrática e deverá, portanto, ser invariante fren-

te à transformação de calibre, ou seja, como foi demonstrado na referência [34]:

$$\sum_{\mu} K_{\mu} \pi^{\mu\nu}(k) = 0 \quad (I-68)$$

Queremos ressaltar que, quando $\xi_3 \neq 0$, a expressão (I-63) é proporcional à seguinte relação, no espaço de momenta:

$$i^2 \langle 0 | T \left(j^{\mu}(\tau) j^{\nu}(\tau) \right) | 0 \rangle \Big|_{\Lambda=0} + i \frac{\delta}{\delta A_{\mu}(\tau)} j^{\nu}(\tau) \Big|_{\Lambda=0} \quad (I-69)$$

fácilmente comprovável com a utilização de (I-56). Assim o primeiro termo desta relação, que corresponde ao primeiro da expressão (I-63), é proporcional à definição usual do tensor polarização de vácuo. Pela construção da forma (I-63) verificamos que somente to da esta expressão é invariante frente à transformação de calibre e, portanto, cada parcela de (I-69) não o será.

Cada parcela de (I-63) também não é covariante. Como complemento desta análise vamos verificar este fato para o produto ordenado no tempo de duas correntes através da definição da seguinte quantidade [30]:

$$M_{\mu\nu} = \int d^4x e^{-iPx} \langle 0 | T (j_{\mu}(x) j_{\nu}(0)) | 0 \rangle$$

Multiplicando-a por P^{μ} e realizando uma integração parcial, obtemos:

$$P^{\mu} M_{\mu\nu} = i \int d^4x e^{-iPx} \langle 0 | \left\{ T(\partial^{\mu} j_{\mu}(x) j_{\nu}(0)) + \delta(x_0) [j_0(x), j_{\nu}(0)] \right\} | 0 \rangle$$

Se $\partial^{\mu} j_{\mu}(x) = 0$ e usando

$$\langle 0 | [j_\mu(x), j_\nu(x')] | 0 \rangle_{x_0=x'_0} = i(2\pi)^3 \partial_\mu \delta^3(x-x') \int d^4x^2 \frac{j_\nu(x^2)}{x^2}$$

temos

$$p^\mu M_{\mu\nu} = (2\pi)^3 \delta_{\nu\kappa} \int d^4x e^{-i p x} \partial_\kappa \delta^3(x-x') \int d^4x^2 \frac{j_\nu(x^2)}{x^2}$$

o que demonstra explicitamente a não covariância de $M_{\mu\nu}$. Desta maneira a não covariância de um produto ordenado no tempo de operadores $j^\mu(x)$ está ligada à existência dos termos de Schwinger [32].

Portanto, através destas expressões relacionamos a invariância frente à transformação de calibre (a inexistência da divergência quadrática), a covariância e os termos de Schwinger [32].

Vamos seguir uma idéia desenvolvida na referência mencionada acima a fim de obter a expressão para o comutador, para tempos iguais, entre a carga e a corrente. Da condição de invariância frente à transformação de calibre infinitesimal, definida por:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \delta \Lambda(x)$$

obtemos a relação:

$$\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} T \left(\exp i e \int_{-\infty}^{+\infty} L(t) dt \right) = 0 \quad (I-70)$$

onde $L(t) = \int \mathcal{L}(x) d^3x$ e $T \exp \left(i e \int_{-\infty}^{+\infty} L(t) dt \right) \equiv U(+\infty, -\infty)$ é o operador unitário que descreve a evolução do sistema.

Efetuada a derivada variacional contida em (I-70), obtemos:

$$ie\partial_\mu [U(\infty, t) j^\mu(\vec{x}, t) U(t, -\infty)] = 0$$

que é equivalente a:

$$ieU(\infty, t) \left\{ ie \left[j^0(x), L(t) \right]_{x_0=t} + \partial_\mu j^\mu(x) \right\} U(t, -\infty) = 0$$

Portanto, a invariância frente à transformação de calibre é análoga a:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = -ie \left[j^0(x), L(t) \right]_{x_0=t} \quad (I-71)$$

que, através da aplicação de uma derivada variacional transforma-se em:

$$-ie \left[j^0(x), j^k(y) \right]_{x_0=y_0} = \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\delta j^l(x)}{\delta A_k(y)} \quad (I-72)$$

Usando a relação (I-56) e a definição de $\ell(Z, \varepsilon_m^{(l)})$ obtemos:

$$\left[j^0(x), j^k(y) \right]_{x_0=y_0} = \frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z(\varepsilon^2) \delta_{lk} \int d^4 Z \frac{\partial}{\partial x^l} \delta_{\varepsilon_m^{(l)}}(Z-x) \delta_{\varepsilon_m^{(l)}}(Z-y) \varepsilon \quad (I-73)$$

$$\left[\ell(Z, \varepsilon_m^{(l)}) - \ell(Z, -\varepsilon_m^{(l)}) \right]$$

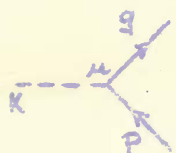
Desta expressão concluímos que os termos de Schwinger para a Eletrodinâmica Quântica são números. Uma expressão análoga a esta foi obtida na referência [33].

O desenvolvimento analítico da relação (I-55) pode ser realizado, também, por diagramas. Entretanto, como a interação

não é mais linear no operador $\hat{A}_\mu(x)$, existirão novos tipos de vértices com mais de uma linha de fóton. Um estudo detalhado do desenvolvimento perturbativo será realizado no quarto capítulo.

Observando a relação (I-63) concluímos a existência das seguintes modificações aos diagramas de Feynman usuais, em ordem α :

1) O vértice usual é multiplicado por uma função regularizadora:

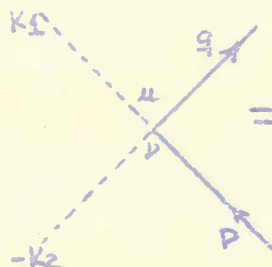


$$= -ie\gamma^\mu Z(\epsilon^2) \tilde{\delta}(K_\mu, \epsilon) \cos[(p+q)_\mu \epsilon] \delta^4(p-q-k) \quad (I-74)$$

com

$$\tilde{\delta}(K_\mu, \epsilon) = \frac{\text{sen } K_\mu \epsilon}{K_\mu \epsilon}$$

2) Existe um novo vértice:



$$= -ie^2 \gamma^\mu Z(\epsilon^2) 2\epsilon \delta_{\mu\nu} \tilde{\delta}(K_{1\mu}, \epsilon) \tilde{\delta}(K_{2\mu}, \epsilon) \text{sen}[(p+q)_\mu \epsilon] \delta^4(p-q+k_1-k_2) \quad (I-75)$$

Se a linha de fermion deste vértice contrair-se consigo mesma, isto representa uma contribuição $-i S_F(p)$.

Para cada nova linha de fóton corresponde um fator 2ϵ , como verificamos em (I-75) e veremos posteriormente no cálculo do tensor polarização do vácuo para um sistema de quatro fótons.

Como a densidade Lagrangeana (I-59) é invariante frente à conjugação de carga, o teorema de Furry continua válido.

Portanto, o cálculo de $\pi^{\mu\nu}(k)$ em ordem α , é equiva-

lente grãficamente a:

$$\pi^{\mu\nu}(k) = \text{---} \frac{\epsilon}{\mu} \text{---} \text{---} \frac{\epsilon}{\nu} \text{---} + \frac{\epsilon}{\mu=\nu}$$

Fig. (I-3)

O novo gráfico é quadrãticamente divergente e cancela a idêntica divergência do primeiro.

Finalmente, vamos verificar, através de uma análise dimensional, que nesta formulação o tensor $\pi^{\mu\nu}(k)$ não apresenta a divergência logarãtmica. Como constatamos, o tensor polarizaçã do vácuo $\pi^{\mu\nu}(k)$ (considerando a divergência quadrãtica já cancelada da forma mostrada nesta seçã) em ordem α , é proporcional a:

$$Z^2(\epsilon^2) \int d^4p \text{Tr} [\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\nu S_F(p+k)] \cdot \cos[(2p+k)_\mu \epsilon] \cos[(2p+k)_\nu \epsilon] \tilde{\delta}(k_\mu, \epsilon) \tilde{\delta}(k_\nu, \epsilon)$$

com $Z(\epsilon^2)$ e $S_F(p)$ dados por |26|:

$$Z(\epsilon^2) \approx (m^2 \epsilon^2)^{\frac{\alpha}{4\pi}}$$

$$S_F(p) = \left(\frac{-\not{p} + m}{m^2} \right)^{\frac{\alpha}{4\pi}} (\not{p} - m)^{-1}$$

Nestas relações m é a massa física do elétron e α a constante que define o calibre usado. Portanto, definindo $p' \equiv p \epsilon$, verificamos através de uma análise dimensional que a integral comporta-se como $(\epsilon^2)^{-\frac{2\alpha\alpha}{4\pi}}$ vezes uma quantidade finita. Assim, a existênciã do fator $Z^2(\epsilon^2)$, com o comportamento dado acima indicamos, qualitativamente, a não divergência do tensor $\pi^{\mu\nu}(k)$.

I-5 Esquema da tese

No próximo capítulo analisaremos a questão referente à aplicabilidade da quebra espontânea de simetrias para a Teoria Quântica de Campos. Apresentaremos uma hierarquia de simetrias que inclui um tipo de quebra espontânea (chamado local) que é adequado para a descrição das partículas elementares.

No terceiro capítulo construiremos um modelo, relacionado com a Eletrodinâmica Quântica, onde ocorre a quebra espontânea de simetria local. Ele é a teoria de dois neutrinos carregados, cada um possuindo duas componentes. Posteriormente, esta ideia será generalizada de maneira que possibilite a descrição da Eletrodinâmica Quântica de elétrons e muons e a inclusão da interação fraca entre os leptons.

No quarto capítulo analisaremos as consequências para o desenvolvimento perturbativo decorrentes da proposição (I-59). Em especial, apresentaremos novos tipos de vértices e identidades generalizadas de Ward. Como conclusão estudaremos o tensor polarização do vácuo para um sistema de quatro fótons.

Finalmente, no quinto capítulo mostraremos a necessidade de um refinamento para a densidade Lagrangeana (I-59). Utilizando uma nova proposição para $\mathcal{L}(x)$ apresentaremos as modificações que ocorrerão nas expressões analíticas dos vértices.

C A P Í T U L O I I

QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIAS

II-1 Introdução

Neste capítulo analisaremos a possibilidade da Eletrodinâmica Quântica ser identificada como uma teoria com quebra espontânea de simetria. Relacionada com esta identificação existe, em princípio, a questão sobre a aplicabilidade da idéia da quebra espontânea de simetria para a Teoria Quântica de Campos. Este assunto será estudado neste capítulo onde apresentaremos uma hierarquia de simetrias que compreende desde uma puramente matemática até uma fisicamente exata [35].

A existência de certas simetrias aproximadas que são úteis para a compreensão de leptons e hádrons, faz surgir a questão da possibilidade de derivarmos qualitativamente ou mesmo quantitativamente os desvios observados das invariâncias exatas. Para realizarmos isto devemos, naturalmente, partir de uma teoria simétrica, ou seja, uma na qual não ocorra nenhum desvio da simetria em questão. A assimetria deverá, assim, ser gerada por si mesma pela dinâmica da teoria.

Nas aplicações [45,8,46] desta idéia para a Teoria Quântica de Campos, ocorre, em princípio, uma dificuldade. Devido ao Teorema de Noether, uma teoria simétrica deverá possuir uma corrente de simetria conservada. Neste caso, é mostrado [9,10,39], usando-se condições gerais, que a simetria somente pode ser quebrada espontaneamente se a componente zero desta corrente conservada

aplicada ao vácuo criar um boson de massa nula. Entretanto, estes bosons de massa nula (ou as equivalentes interações de longo alcance) não são observados e, também, as correntes de simetria medidas não são conservadas. Para reproduzir estas observações é usual, por exemplo conforme na referência [8], quebrar externamente a simetria original da teoria. Entretanto, este procedimento abandona a principal motivação de todo o empreendimento, que é precisamente a possibilidade de derivar as assimetrias a partir da teoria.

Entretanto, existem alguns exemplos que sugerem a existência de um ponto fraco no desenvolvimento que conduz de uma teoria de campos simétrica para correntes conservadas e bosons de Goldstone (como são chamados os bosons de massa nula). A Teoria Quântica de Campos apresenta-nos um modelo em que ocorre a quebra espontânea de simetria sem a necessária ocorrência de bosons de massa nula. Este modelo é a Eletrodinâmica Quântica com massa despida nula para o elétron [18]. Nesta teoria ocorre a quebra da invariância dilatacional [6,11]. Como sabemos, a existência de soluções para o propagador do elétron, caracterizadas por uma massa finita e diferente de zero, quebra a simetria original da teoria no estado fundamental. Entretanto, a corrente dilatacional não é conservada.

Na eletrodinâmica Quântica de elétrons e muons [11,14, 16] com massas despidas nulas também observamos a quebra espontânea da invariância dilatacional. Neste modelo ainda ocorre a quebra espontânea da invariância frente a um grupo de simetria $U(2) \otimes U(2)$ [12] com as correspondentes correntes não conservadas. Na próxima seção apresentaremos um outro modelo neste sen

tido, que é a teoria de dois neutrinos carregados. Veremos que a corrente correspondente à simetria quebrada, mesmo definida formalmente, não é conservada.

Como os exemplos mencionados são tratados de maneira aproximada, poder-se-ia objetar que num cálculo exato estas correntes de simetrias resultariam ser conservadas. Neste sentido apresentaremos na terceira seção deste capítulo um modelo exatamente solúvel da Teoria Quântica de Campos onde ocorre uma quebra espontânea de simetria com uma corrente não conservada.

Na próxima seção mostraremos que a aplicação da quebra espontânea de simetria para a Teoria Quântica de Campos não requer a conservação da corrente de simetria. Esta circunstância já foi mencionada na literatura [40-43]. Um aspecto importante que devemos levar em conta é que a corrente deve ser definida através de um processo de limite e, assim, pode haver a possibilidade de que a prova usual de sua conservação seja invalidada. Com efeito, as propriedades singulares do produto de operadores num mesmo ponto tornam quase impossível a conservação dela na quebra de simetria [47, 40]. Isto desqualifica a aplicação do teorema de Goldstone. Devemos ressaltar que os modelos da Teoria Quântica de Campos que demonstram a necessidade da existência de bosons de massa nula para a ocorrência da quebra espontânea de simetria admitem a priori a conservação da corrente. Conforme a referência [40] uma condição muito especial, que é o teorema de Goldstone, é necessária para a corrente permanecer conservada quando a simetria do vácuo for quebrada.

Na próxima seção vamos definir o conceito de uma simetria passiva. Com o auxílio desta definição generalizaremos a noção usual da quebra espontânea de simetria. Supondo condições cada vez mais físicas, apresentaremos uma hierarquia de simetrias que se estende desde uma invariância puramente matemática até uma invariância fisicamente exata. Nesta hierarquia está incluído, além do usual, um certo tipo de quebra espontânea de simetria (que chamaremos de local) que é adequado para a descrição de propriedades das partículas elementares.

Na terceira seção, como mencionamos, forneceremos um modelo exato da Teoria Quântica de Campos [35] onde ocorre uma quebra espontânea de simetria do tipo local.

Queremos ressaltar que o caráter principal da próxima seção é o de apresentar alguns pontos físicos contidos no estudo das quebras espontâneas de simetrias e não fornecer um tratamento rigoroso. Devemos chamar a atenção que neste capítulo estamos seguindo completamente a referência [35].

II-2 Uma hierarquia de simetrias

Nesta seção vamos considerar algumas classes de soluções com simetria espontaneamente quebrada. Naturalmente, o tipo de solução para uma teoria física definida não é passível de escolha, mas é determinado pela dinâmica.

Vamos introduzir, primeiramente, as seguintes definições, conforme a referência [35]:

a) Uma teoria quântica de campos Ψ possui uma inva-

invariância passiva se existir uma transformação algébrica que atue em todos os seus operadores campo

$$\Psi_i \rightarrow \Psi_i' (\Psi_j) \quad (\text{II-1})$$

de tal maneira que transforme qualquer solução Ψ_i da teoria (dada como uma representação irreduzível da álgebra de campo num espaço de Hilbert) numa nova solução Ψ_i' .

Devemos observar que a definição (II-1) não requer a especificação de qualquer detalhe da teoria (a Lagrangeana, a equação de campo). Ela necessita apenas do conhecimento da existência de uma solução da teoria. Neste sentido o critério apresentado para a definição da invariância passiva elimina as possibilidades de confusão que possam surgir devido ao necessário processo de limite que pode destruir a simetria. O ponto decisivo para a presença da invariância passiva depende apenas da demonstração da existência de uma transformação que gera uma nova solução.

Em modelos que envolvem renormalizações infinitas ou finitas, devemos levar em conta que a renormalização depende, ela mesmo, da solução da teoria. Assim, ela se transforma com o operador campo frente à aplicação de (II-1). Naturalmente, na teoria (incluindo o processo de renormalização) não pode ocorrer qualquer condição que selecione, a priori, uma solução especial do conjunto de soluções definidas pela transformação (II-1). Se isto ocorresse, destruiria a invariância passiva. Assim, um aspecto interessante decorrente disto é que a presença de uma invariância passiva coloca uma condição no processo de renormalização.

Uma invariância passiva é uma propriedade da formulação matemática da teoria. Neste sentido ela caracteriza uma teoria to

talmente simétrica sob o ponto de vista puramente matemático. A invariância passiva corresponde a uma boa simetria sob o ponto de vista físico quando ela fôr representada por um operador unitário no espaço de Hilbert.

b) Dizemos que uma invariância passiva é espontaneamente quebrada na solução da teoria quando a transformação (II-1) não puder ser representada por um operador unitário no espaço de Hilbert da solução.

Iremos considerar apenas transformações que dependam de um parâmetro contínuo e que são locais nos campos básicos.

Se apenas as condições mencionadas nas definições dadas forem satisfeitas, a quebra espontânea de simetria não possui grande conteúdo físico.

Consideremos um plano tipo espaço arbitrário e admitamos que seja possível suplementar os operadores campo básico $\Psi(X)$ com um conjunto de operadores campo $\pi(X)$, construídos a partir dos $\Psi(X)$, tal que cada conjunto $(\Psi(X), \pi(X))$, com X no plano referido, é completo no sentido do Lema de Schur. Numa teoria canônica os operadores $\pi(X)$ poderiam ser os momenta canônicos. Devido à sua construção, a transformação (II-1) dos operadores campo básicos também induz uma transformação nos campos $\pi(X)$. Assim, temos: $(\Psi(X), \pi(X)) \rightarrow (\Psi'(X), \pi'(X))$.

Vamos supor, ademais, que temos um tipo especial de quebra espontânea de simetria, para o qual existe uma corrente local $f^\mu(X)$ que gera a transformação (II-1), no sentido da referência [10], se aplicada num conjunto completo $(\Psi(y), \pi(y))$ com todos os y num plano tipo espaço em relação ao ponto X . Para um plano com tempos iguais temos, por exemplo,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left[\int_V f^\circ(\vec{x}, x_0) d^3x, \phi(\vec{y}, x_0) \right] = -i \left. \frac{\partial \phi'(\vec{y}, x_0)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \quad (\text{II-2})$$

Nesta relação $\phi(y)$ simboliza qualquer expressão algébrica construída com o conjunto completo de operadores $(\Psi(y), \Pi(y))$; $\phi'(y)$ é a correspondente expressão formada com os campos transformados e a quantidade α denota o parâmetro da transformação passiva contínua. Para um plano tipo espaço arbitrário devemos tomar a componente da corrente ortogonal ao plano no lugar de $f^\circ(x)$.

Devemos notar que a relação (II-2) somente é válida para cada plano tipo espaço comum à carga e ao conjunto completo de operadores. Chamamos este tipo de quebra espontânea de simetria de local [42] pois a transformação passiva constitui-se num automorfismo algébrico apenas para a subálgebra quase local representada pelo conjunto de operadores (Ψ, Π) em cada plano tipo espaço.

Para um sistema físico descrito por uma solução do tipo mencionado acima decorrem as seguintes conseqüências:

a) A relação (II-2) para um conjunto completo de operadores define a carga $\lim_{v \rightarrow \infty} \int_V f^\circ(\vec{x}, x_0) d^3x$ quando ocorrer um comutador.

Assim, se existirem outras simetrias espontaneamente quebradas do tipo definido na relação (II-2), cujas transformações são geradas por correntes no sentido da referência [10], as cargas obedecerão a mesma álgebra de Lie que as transformações passivas correspondentes. Portanto, na ocorrência de uma quebra local espera-se, para cada plano tipo espaço, a validade de uma álgebra

de carga isomórfica à álgebra de Lie das invariâncias passivas.

b) A transformação passiva, cuja simetria é espontaneamente quebrada, muda uma representação irredutível da álgebra de campo para outra matematicamente inequivalente. Para descrevermos a física, devemos escolher uma destas soluções. Devido à invariância passiva, porém, a física deve ser igualmente bem descrita em cada uma das representações. Portanto, a teoria original somente é considerada como útil se qualquer quantidade, unívocamente mensurável, é representada pelo mesmo operador em cada uma das representações irredutíveis. Isto é, os observáveis devem ser invariantes frente à transformação de quebra espontânea de simetria. Somente as quantidades não observáveis variam frente às transformações mencionadas. Isto é uma propriedade geral de teorias com uma invariância passiva. Desta maneira, podemos explicar o problema relacionado com a existência de um número infinito de soluções para $m(p^2)$ (equação (I-15)) através da quebra espontânea de simetria dilatacional.

Consideremos que, numa teoria com quebra espontânea de simetria local, construímos um operador campo fenomenológico que interpõe bem entre os campos "in" e "out", e que corresponde a um estado ligado de algumas partículas pertencentes aos campos básicos. Devido ao fato de que a transformação relacionada com a quebra espontânea de simetria não é realizada unitariamente, os campos assintóticos e, portanto, os operadores campo fenomenológicos correspondentes, construídos em representações inequivalentes diferentes não serão em geral relacionados linearmente. Entretanto, suas transformações devem obedecer às regras de composição do grupo, pois este é o caso para as transformações passivas de descri-

ções inequivalentes entre si. Se, numa aproximação clássica, admitirmos que os campos fenomenológicos transformados são simplesmente funções locais dos campos originais, então um grupo de transformação relacionado com a quebra espontânea de simetria é realizado não linearmente pelas transformações dos campos fenomenológicos. Todos os observáveis devem ser invariantes frente a estas transformações não lineares. Se os observáveis são construídos de uma Lagrangeana fenomenológica, é natural, então, exigir que tal Lagrangeana seja invariante frente à realização, em geral não linear, das transformações de quebra espontânea de simetria dos campos em questão.

Comparando estes pontos com a situação atual da Física das Partículas Elementares, verificamos que o tipo de quebra local possui propriedades que concordam com as das simetrias aproximadas. Estas propriedades serão mencionadas no final desta seção.

Vamos considerar, agora, o caso em que a corrente de quebra espontânea de simetria fôr conservada. Neste caso, mostra-se [10] que a equação (II-2) permanece válida para tempos diferentes entre os operadores de campo e a carga, isto é:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left[\int_V j^\alpha(\vec{x}, x_0) d^3x, \phi(\vec{y}, y_0) \right] = -i \frac{\partial \phi'(\vec{y}, y_0)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (\text{II-3})$$

onde $\phi(y)$ e $\phi'(y)$ são expressões algébricas construídas com os operadores campo. Assim, a simetria passiva representa um automorfismo para toda a álgebra dos operadores quase-locais. A simetria somente pode ser quebrada devido à existência de operadores globais que não se transformam adequadamente como um resultado do processo de

limite contido em (II-3). Esta definição caracteriza o que chamamos de quebra assintótica de simetria. Este é o caso onde é necessária a existência de bosons de massa nula ou de interações de longo alcance. Isto, juntamente com a presença de uma corrente conservada, desqualifica este tipo de quebra espontânea de simetria para a descrição das simetrias aproximadas na Física das Partículas Elementares.

É interessante comparar a diferença física entre a quebra local e a assintótica. O modelo do ferromagneto de Heisenberg [44] é um exemplo onde ocorre a quebra espontânea de simetria assintótica. Este ferromagneto, que é descrito por uma teoria rotacionalmente invariante, é constituído de infinitos dipolos elementares dirigidos segundo uma certa direção. Claramente, seu estado fundamental não será rotacionalmente invariante devido à impossibilidade de construção de um operador unitário que implemente uma rotação infinita. Se todos os dipolos elementares contidos num volume finito forem girados através de um certo ângulo e após deixados livres, eles tenderão a retornar ao estado fundamental por oscilações de spin. Estas oscilações iniciam-se nas bordas do volume finito. Se esta região é tomada suficientemente grande, podemos manter o seu centro girado durante um tempo arbitrariamente grande. Esta possibilidade de realização, pelo menos local, da transformação é uma consequência do fato de que o operador unitário reproduz a transformação da invariância passiva para um volume tetradimensional arbitrariamente grande.

Por outro lado, no modelo da Eletrodinâmica Quântica de elétrons e muons, onde ocorre a quebra local do grupo $U(2) \otimes U(2)$ [12], não há possibilidade de obtenção, para um tempo finito, de um es-

tado, localmente estável, no qual o elétron é parcialmente transformado num muon. Isto deve-se ao fato de que as equações de movimento destas partículas contém derivadas temporais que não variam frente à transformação unitária como mudam frente à transformação relacionada com a invariância passiva. Isto reflete o fato de que a transformação unitária somente é equivalente à transformação passiva para um único tempo (conforme a equação (II-2)). Idêntico argumento é válido para a quebra da invariância dilatacional pois não podemos dilatar localmente o mundo físico durante um tempo finito.

Estes exemplos mostram o quanto as simetrias quebradas assintoticamente são próximas das exatas, pois o estado ativamente transformado pode ser mantido indefinidamente e como é não física a interpretação ativa da quebra local. Isto pode explicar, parcialmente, a atenção recebida pela quebra assintótica apesar de que, evidentemente, ela não é adequada para a descrição das simetrias aproximadas na Física das Partículas Elementares.

Como mencionamos, o tipo de quebra espontânea de simetria local possui propriedades que concordam com a situação atual da Física das Partículas Elementares. Estas são:

- a) A corrente relacionada com a quebra espontânea de simetria não é conservada. Isto torna o teorema de Goldstone inaplicável.
- b) Ela permite o estabelecimento de uma álgebra de carga isométrica à álgebra de Lie das transformações passivas [48].
- c) A transformação da invariância passiva para os operadores do campo fenomenológico é, em geral, não linear. Uma Lagrangeana fenomenológica deve ser invariante frente à estas transfor-

mações.

d) Torna-se compreensível porque os estados físicos são "rígidos" frente à uma operação ativa relacionada com a invariância passiva.

Resumindo, apresentamos nesta seção uma hierarquia de simetrias que se estende desde uma puramente matemática até uma físicamente exata. A invariância passiva, como foi definida na equação (II-1), tem um caráter meramente matemático. A sua ocorrência está relacionada com a existência de uma transformação algébrica que transforme as soluções da teoria. Neste sentido, não se torna necessária a especificação da teoria, como as equações de movimento, a Lagrangeana, mas apenas o conhecimento da existência das soluções. Impondo-se em seguida a existência de uma corrente de quebra espontânea de simetria não conservada, introduzimos um caráter físico na hierarquia. Como mencionamos o tipo de quebra local é apropriado para a descrição das simetrias aproximadas das partículas elementares. Se a corrente de quebra espontânea de simetria permanecer conservada ocorrerá a quebra assintótica. Neste caso há a necessidade dos bosons de Goldstone ou de interações de longo alcance. Entretanto, este tipo de quebra não é aplicável às partículas elementares.

II-3 Um modelo com quebra espontânea de simetria local

Nesta seção vamos apresentar um modelo onde ocorre uma quebra espontânea de simetria local. Consideremos um operador campo de fermions $\Psi_{\alpha}(x)$, de quatro componentes, que obedece a equação

$$\lim_{V \rightarrow 0} \int_V F_{\alpha\beta}(\Psi; x-x') \Psi_\beta(x') d^4x' = 0 \quad (\text{II-4})$$

e as regras de comutação para tempos iguais:

$$\{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta^\dagger(y)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \quad (\text{II-5a})$$

$$\{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(y)\} = \{\Psi_\alpha^\dagger(x), \Psi_\beta^\dagger(y)\} = 0 \quad (\text{II-5b})$$

$F_{\alpha\beta}(\Psi; x-x')$ é uma distribuição que é definida como a funcional do campo Ψ dada pelo inverso de seu propagador, que é considerada possuir uma densidade de Källén-Lehmann positiva:

$$-i \int F_{\alpha\beta}(\Psi; x-x'') \langle 0 | T \{ \Psi_\beta(x'') \bar{\Psi}_\alpha(x') \} | 0 \rangle d^4x'' = \delta_{\alpha\beta} \delta^4(x-x') \quad (\text{II-6})$$

O limite $V \rightarrow 0$ significa que o volume no qual a integração é realizada tende a zero, incluindo sempre o ponto x . Este processo de limite da equação (II-4) torna-se manifestamente local.

A teoria definida pelas equações (II-4), (II-5) e (II-6) é passivamente invariante frente à transformação

$$\Psi'(x) = e^{i\theta\gamma_5} \Psi(x) \quad (\text{II-7})$$

Obtemos:

$$F(\Psi'; x-x'') = e^{-i\theta\gamma_5} F(\Psi; x-x'') e^{-i\theta\gamma_5}$$

e, portanto, se $F(\Psi)\Psi=0$ também $F(\Psi')\Psi'=0$. Como Ψ' também obedece as regras de comutação (II-5), será uma nova solução da teoria e a transformação (II-7) é, por definição, uma simetria passiva.

A transformação (II-7) também é gerada no sentido da equação (II-2) pela corrente local:

$$j_5^\mu(x) = i \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \Psi(x) \quad (\text{II-8})$$

Esta corrente não é conservada. Portanto, o modelo definido pelas equações (II-4), (II-5) e (II-6) satisfaz as condições de uma quebra espontânea de simetria local.

Vamos verificar que o campo livre usual é uma solução espontaneamente quebrada particular da teoria. Com efeito, realizando duas vezes a transformada de Fourier da relação (II-6), obtemos:

$$F(\Psi_0; x-x') = (i \not{\partial}_x - m) \delta^4(x-x') \quad (\text{II-9})$$

Portanto, a equação (II-4) é satisfeita, pois é justamente a equação de Dirac para o campo livre.

A aplicação da transformação (II-7) da invariância passiva fornece-nos um conjunto contínuo de soluções inequivalentes. Em cada representação (caracterizada pelo parâmetro não observável θ) a equação (II-4) é equivalente a uma equação de Dirac generalizada:

$$(i \not{\partial} - m \cos 2\theta + i m \gamma_5 \sin 2\theta) \Psi(\theta; x) = 0 \quad (\text{II-10})$$

As equações com um valor fixo para o parâmetro não observável θ são válidas somente numa das possíveis representações inequivalentes e, portanto, não são invariantes [46]. Como mencionamos todas as quantidades observáveis são independentes de θ .

A solução normal (ou seja, para a qual a simetria passiva não é quebrada) é dada pelo campo do neutrino. Para tornar esta teoria trivial fisicamente única devemos estabelecer explicitamente a ocorrência da solução normal com quebra espontânea da simetria.

Devemos observar que a transformação de um operador não construído com as ψ num plano tipo espaço, como por exemplo $\frac{\partial \psi}{\partial x_0}$, não é gerada pela corrente j_5^μ . Isto está relacionado com a não conservação da corrente.

A invariância dilatacional também é uma simetria espontaneamente quebrada para as soluções fornecidas acima. Aplicando-se a transformação dilatacional numa solução geramos um conjunto de representações matematicamente inequivalentes caracterizadas pelo valor da massa. Fisicamente, estas representações são equivalentes porque a massa absoluta não é mensurável [6].

Vamos indicar, para este modelo, em que ponto falha a prova usual do teorema de Noether. Para isto vamos introduzir a densidade Lagrangeana correspondente ao modelo:

$$L(x) = \lim_{\forall \epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int \left\{ \bar{\psi}(x + \frac{\epsilon}{2}) F(\epsilon) \psi(x - \frac{\epsilon}{2}) + c.c. - v.e.v. \right\} d^4 \epsilon \quad (II-11)$$

Seguindo a demonstração do teorema de Noether, verificamos que uma transformação passivamente invariante tem o mesmo efeito na

Lagrangeana que a variação local do campo. A quantidade F não mudará se o campo for localmente variado devido ao caráter de número das variações. Entretanto, frente à uma transformação passiva, como esta se estende sobre todo o espaço, a quantidade F varia. Este fato invalida a demonstração do teorema de Noether.

O exemplo apresentado nesta seção poderia ser considerado artificial. Entretanto, no quinto capítulo desta tese, veremos como é possível estendê-lo de maneira que represente uma teoria realista, que no caso é a Eletrodinâmica Quântica.

Concluindo esta seção, vamos verificar num modelo clássico o mecanismo que autoconsistentemente causa a quebra local de simetria. Se no Hamiltoniano do ferromagneto de Heisenberg [44] é introduzido o termo de interação $\langle 0 | \vec{\sigma}(\vec{x}) | 0 \rangle \cdot \vec{\sigma}(\vec{x})$ [50], mantemos ainda a invariância rotacional passiva da teoria mas quebramos de maneira autoconsistente a conservação da corrente de spin. Isto deve-se à circunstância de que o valor esperado do spin é fixado pela direção do campo magnético causado pelos dipolos situados infinitamente afastados. Este exemplo mostra como uma propriedade global, no caso o campo magnético homogêneo causado pelos dipolos infinitamente afastados, possui um efeito local, quebrando a conservação da corrente de spin.

C A P Í T U L O I I I

TEORIA DE DOIS NEUTRINOS CARREGADOS

III-1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar um modelo, relacionado com a Eletrodinâmica Quântica, onde ocorre uma quebra espontânea de simetria do tipo local. Trata-se da teoria de dois neutrinos carregados, cada um com duas componentes. Estes dois neutrinos podem ser identificados como sendo um elétron de quatro componentes e, portanto, o modelo descreve a interação de elétrons e fótons. Como resultado da quebra espontânea de simetria da teoria constataremos o aparecimento de uma massa finita que é idêntica à massa observável do elétron.

Posteriormente, mencionaremos como esta análise pode ser estendida considerando quatro neutrinos carregados, cada um com duas componentes. Este modelo descreve a Eletrodinâmica Quântica de elétrons e muons. Generalizando para uma teoria com seis neutrinos, indicaremos sobre a possibilidade de descrevermos de maneira unificada as interações entre os leptons.

Històricamente, o primeiro exemplo reconhecido de uma quebra espontânea de simetria ocorreu na supercondutividade onde encontramos um fenômeno análogo ao do aparecimento da massa finita para o elétron. Este fenômeno é o da criação de uma lacuna de energia num supercondutor infinito (matematicamente solúvel) descrito pelo modelo de Bardeen-Cooper-Schrieffer [7,46]. Nesta teoria ex

plicamos a criação do intervalo de energia da seguinte maneira: o Hamiltoniano proposto por Bardeen, Cooper e Schrieffer para um volume finito é ativamente invariante frente às transformações de calibre. O Hamiltoniano livre será aproximadamente degenerado em energia com estados que possuem nenhum, um, dois, etc. elétrons excitados ligeiramente acima da superfície do mar de Fermi (o vácuo é representado por um mar de Fermi completo). Para o supercondutor infinito não perturbado, verificamos a nulidade do elemento de matriz $\langle 0 | \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle$, com as quantidades $\psi(x)$ sendo os operadores de destruição de elétrons. Introduzindo uma interação, estes estados aproximadamente degenerados misturar-se-ão. Neste caso, a expressão $\langle 0 | \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle$ não é mais nula, pois o estado fundamental será constituído de uma superposição dos estados com zero, dois, etc., pares de elétrons ligeiramente excitados acima do nível de Fermi. Como $\langle 0 | \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle$ não é mais nulo, temos caracterizada uma quebra espontânea da invariância de calibre (destruída pela existência deste termo) e, assim, o número de elétrons não será mais bem delineado no estado fundamental. A fim de obtermos um operador de destruição para o novo estado fundamental, devemos combinar linearmente os originais operadores de destruição e criação através de uma transformação de Bogoliubov.

Assim, apesar da teoria ser passivamente invariante frente à substituição $\psi \rightarrow \psi \exp(i\alpha)$, $\psi^\dagger \rightarrow \exp(-i\alpha) \psi^\dagger$, o estado fundamental não terá um número de elétrons bem definido. Este estado possuirá menor energia que o vácuo descrito pelo mar de Fermi, o que explica o aparecimento de uma lacuna de energia para um supercondutor infinito.

Nambu [8] aplicou esta idéia para as partículas elemen-

mentares desenvolvendo um modelo que sugere, de maneira similar à criação do intervalo de energia, o aparecimento de uma massa para o núcleon. Sua teoria contém uma constante de acoplamento dimensional e, portanto, não  dilatacionalmente invariante. De fato, le observa que escolheu êste caso a fim de evitar esta invariância. Mas um mecanismo similar pode funcionar numa teoria dilatacionalmente invariante. Considerando a teoria de dois neutrinos carregados, cada um com duas componentes, podemos usar êste mecanismo para interpretar a criao de uma massa para o elétron. Nesta teoria, a invariância dilatacional e a frente  transformao $t^3 \otimes 1 (\Xi \gamma_5)$ são quebradas simultaneamente. Quando os neutrinos são considerados como livres, supomos que o vácuo, representado por um mar de Fermi completo, seja aproximadamente degenerado em energia com estados que possuem um, dois, etc., pares de neutrinos de mesma quiralidade (vamos empregar êste trmo como traduo para "chirality"). Com a introduo de uma interao obtemos um estado dado por uma combinao linear dos anteriores aproximadamente degenerados. Isto resulta, em analogia  teoria da supercondutividade, numa lacuna de energia que, devido  invariância relativística da teoria, reflete-se na criao de uma massa finita para o elétron.

Vamos analisar com mais detalhes êste modelo considerando na próxima seo a teoria de dois neutrinos carregados. Queremos chamar a ateno de que não podemos fornecer uma soluço exata da teoria, pois nosso resultado, bem como os obtidos na Teoria Quântica de Campos,  aproximado. Entretanto, acreditamos que a simplicidade e a naturalidade do resultado indicam sua

validade mais geral.

III-2 A teoria de dois neutrinos carregados

Neste desenvolvimento o nosso objetivo é o da construção de um modelo onde ocorra a quebra espontânea de simetria. Por isto esta análise possui um caráter puramente formal e não iremos examinar as dificuldades da Teoria Quântica de Campos mencionadas no primeiro capítulo e que se refletem através da existência de infinitos. Este aspecto será considerado na próxima seção.

A teoria de dois neutrinos carregados interagindo com um campo eletromagnético é descrita formalmente pela seguinte densidade Lagrangeana renormalizada.

$$\mathcal{L}(x) = i Z_2 \psi^\dagger(x) \gamma^\nu (\partial_\nu + i e A_\nu(x)) \psi(x) + Z_3 \mathcal{L}_0(A) \quad (\text{III-1})$$

Nesta equação γ^ν é um tetra-vetor com as componentes:

$$\gamma^\nu = (t^0 \otimes \sigma^k, t^0 \otimes \sigma^0) \quad (\text{III-2})$$

onde os σ^k são as matrizes de Pauli; t^i são matrizes idênticas às de Pauli definidas, porém, no espaço do isospin e $t^0 = \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$. O tetra-vetor γ^ν possui a propriedade $(\gamma^\nu)^\dagger = \gamma^\nu$.

O operador campo $\psi(x)$ que descreve o sistema dos dois neutrinos carregados possui as componentes:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (\text{III-3})$$

com os operadores $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$,

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(x) \\ \psi_{12}(x) \end{pmatrix} \quad e \quad \psi_2(x) = \begin{pmatrix} \psi_{21}(x) \\ \psi_{22}(x) \end{pmatrix}$$

compostos cada um de duas componentes.

A aplicação das equações de Euler-Lagrange, fornece-nos as equações de movimento:

$$i Z_2 z^\nu (\partial_\nu + ie A_\nu(x)) \psi(x) = 0 \quad (\text{III-4a})$$

$$Z_3 \square A^\nu(x) = \frac{e}{2} Z_1 [\psi^\dagger(x), z^\nu \psi(x)] \quad (\text{III-4b})$$

Os operadores $\psi(x)$ e $A_\nu(x)$ satisfazem formalmente as relações de comutação canônicas:

$$\left\{ \psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(x') \right\}_{x_0=x'_0} = Z_2^{-1} \delta^3(x-x') \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{III-5a})$$

$$\left[A_\mu(x), A_\nu(x') \right]_{x_0=x'_0} = i Z_3^{-1} g_{\mu\nu} \delta^3(x-x') \quad (\text{III-5b})$$

A teoria construída a partir da densidade Lagrangeana (III-1) será passivamente invariante frente às transformações citadas abaixo. (Vamos apresentar somente as relacionadas com o operador campo $\psi(x)$). Devemos ressaltar que a teoria é ativamente invariante frente às transformações a-d.

a) Transformação homogênea própria e ortocrona de Lorentz definida como:

$$U(\Lambda)\varphi(x)U^{-1}(\Lambda) = L^{-1}(\Lambda)\varphi(\Lambda x) \quad (\text{III-6})$$

onde $U(\Lambda)$ é o operador unitário responsável pela transformação de Lorentz $X'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu}$ com $\det \Lambda = +1$ e $\Lambda^{\mu}_{\mu} \geq 1$.

No caso de uma transformação de Lorentz infinitesimal $X'^{\mu} = (\delta^{\mu}_{\nu} + \alpha^{\mu}_{\nu})X^{\nu}$, a matriz $L(\Lambda)$ possuirá a seguinte forma:

$$L(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4} \alpha_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}\right) \quad (\text{III-7})$$

onde
$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [g^{\mu}, g^{\nu}]$$

e g^{μ} é um tetra-vetor com componentes $g^{\mu} \equiv (it^2 \otimes \sigma^k, -t^1 \otimes 1)$. Neste caso: $\Sigma^{0k} = it^3 \otimes \sigma^k$ e $\Sigma^{jk} = -\sigma^k$ (jk em ordem cíclica).

Portanto, para rotações de um ângulo θ ao redor de um certo eixo obtemos a seguinte forma para a matriz unitária $L(\Lambda)$:

$$L(\Lambda) = \exp\left(+\frac{i}{2} 1 \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{\theta}\right) \quad (\text{III-8})$$

e para uma transformação de Lorentz ao longo de um certo eixo:

$$L(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2} t^3 \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{W}\right) \quad (\text{III-9})$$

com $t^3 W = v$ (v é a velocidade que caracteriza a transformação de Lorentz).

A forma explícita das matrizes $L(\Lambda)$ mostra-nos que elas possuem a propriedade

$$(t^i \otimes 1) L(\Lambda) (t^i \otimes 1) \gamma^\mu L^{-1}(\Lambda) = \gamma^\nu \Lambda_\nu{}^\mu \quad (\text{III-10})$$

Por outro lado, devido às regras de anticomutação entre as matrizes t^i , também obtemos a seguinte relação válida para qualquer $L(\Lambda)$:

$$L^{-1}(\Lambda) = t^i \otimes 1 L^+(\Lambda) t^i \otimes 1 \quad (\text{III-11})$$

O uso destas relações permite-nos demonstrar a invariância da teoria frente à transformação de Lorentz. De fato, usando a definição (III-6) e considerando que o operador $A_\nu(x)$ transforma-se como um tetra-vetor frente à transformação de Lorentz, obtemos a seguinte forma para a densidade Lagrangeana (III-1) após a aplicação do operador unitário $U(\Lambda)$.

$$i Z_2 \varphi^\dagger(\Lambda x) L^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu (\partial_\nu + ie(\Lambda^{-1})_\nu{}^\mu A_\mu(\Lambda x)) L^{-1}(\Lambda) \varphi(\Lambda x)$$

que devido à relação (III-11), equivale à

$$i Z_2 \varphi^\dagger(\Lambda x) (t^i \otimes 1) L(\Lambda) (t^i \otimes 1) \gamma^\nu [\partial_\nu + ie(\Lambda^{-1})_\nu{}^\mu A_\mu(\Lambda x)] L^{-1}(\Lambda) \varphi(\Lambda x)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} i Z_2 \varphi^\dagger(\Lambda x) \gamma^\mu \Lambda_\mu{}^\nu [\partial_\nu + ie(\Lambda^{-1})_\nu{}^\mu A_\mu(\Lambda x)] \varphi(\Lambda x) = \\ = i Z_2 \varphi^\dagger(x') \gamma^\mu [\partial_\mu(x') + ie A_\mu(x')] \varphi(x') \end{aligned}$$

o que demonstra nossa afirmação.

b) Inversão no espaço definida como:

$$U_P \psi(\vec{x}, t) U_P^{-1} = P \psi(-\vec{x}, t) \quad (\text{III-12})$$

com

$$P \equiv \exp(-i \sigma^3 \otimes 1) t^1 \otimes 1 \exp(i \sigma^3 \otimes 1) \quad (\text{III-13})$$

c) Inversão no tempo definida como:

$$U_T \psi(\vec{x}, t) U_T^{-1} = T \psi(\vec{x}, -t) \quad (\text{III-14})$$

com

$$T = 1 \otimes \sigma^2$$

A matriz T possui as seguintes propriedades:

$$T^{-1} \gamma^{\mu*} T = -\gamma^{\mu}$$

$$T^{-1} \gamma^0* T = \gamma^0$$

d) Conjugação de carga definida como:

$$U_C \psi(x) U_C^{-1} = C \psi^+(x) \quad (\text{III-15})$$

A matriz unitária C é dada por:

$$C \equiv t^2 \otimes \sigma^2$$

e possui a seguinte propriedade:

$$C^{-1} \gamma^\nu C = \gamma^{\nu T}$$

e) Transformação de calibre

$$\psi'(x) = \exp(i\alpha(x))\psi(x) \quad (\text{III-16a})$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (\text{III-16b})$$

f) Transformação frente a $t^3 \otimes 1$

$$\psi'(x) = \exp(i\alpha t^3 \otimes 1) \psi(x) \quad (\text{III-17})$$

Usando a equação de movimento livre no espaço de momento, $\gamma^\nu p_\nu \psi(p) = 0$ verificamos que o gerador desta transformação, $t^3 \otimes 1$, possui o significado de helicidade. Portanto, a invariância da teoria frente à transformação f é equivalente à conservação da helicidade.

g) Transformação dilatacional definida por:

$$\psi'(x) = \lambda^{3/2} \psi(\lambda x) \quad (\text{III-18a})$$

$$A'_\mu(x) = \lambda A_\mu(\lambda x) \quad (\text{III-18b})$$

onde λ é uma constante arbitrária diferente de zero.

Todas estas propriedades podem ser comprovadas pela sua aplicação na Lagrangeana que define a teoria.

A finalidade da apresentação d'êste modelo é o de verificarmos a quebra espontânea da invariância frente à transformação $t^3 \otimes 1$ e da invariância dilatacional. Devemos, portanto, examinar o propagador para o operador $\varphi(x)$ relativamente à existência de um polo para algum valor finito diferente de zero.

O propagador $S_F(x-x')$ é definido como:

$$S_{F_{\alpha\beta}}(x-x') = -i \langle 0 | T(\varphi_\alpha(x) \varphi_\beta^+(x')) | 0 \rangle \quad (\text{III-19})$$

O uso da definição (III-19) permite-nos verificar que a invariância do estado fundamental frente à qualquer transformação refletir-se-á no propagador. Isto é, supondo a existência de um operador unitário tal que $U|0\rangle = |0\rangle$, então: $S'_F(x-x') = S_F(x-x')$.

Se tôdas as transformações citadas acima fossem exatas, então o propagador no espaço dos momenta deveria ter forma:

$$S_F^{-1}(p) = \gamma^\nu P_\nu$$

Entretanto, tal propagador introduziria uma polarização do vácuo infinita. Assim, devemos admitir que algumas transformações citadas acima sejam espontaneamente quebradas. Supondo que o estado fundamental é invariante frente à transformação própria de Lorentz, a forma mais geral que podemos propor para o propagador, no espaço dos momenta, é

$$S_F^{-1}(p) = f(p^2) \gamma^\nu P_\nu - m_1(p^2) t^4 \otimes 1 - m_2(p^2) t^3 \otimes 1 \quad (\text{III-20})$$

Com o auxílio da equação (III-6) constatamos que a invariância de $S_F(x-x')$ frente à transformação de Lorentz é equivalente a:

$$S_F(x-x') = -i \langle 0 | T(\psi(\lambda x) \psi^\dagger(\lambda x')) | 0 \rangle = -i L(\lambda) \langle 0 | T(\psi(x) \psi^\dagger(x')) | 0 \rangle L^\dagger(\lambda)$$

Esta relação é satisfeita pela proposição (III-20). Com efeito, para rotações infinitesimais, obtemos

$$\exp\left(+\frac{i}{2} 1 \otimes \vec{0} \cdot \vec{\Theta}\right) \left[f(p^2) \gamma^\nu p_\nu - m_1(p^2) t^1 \otimes 1 - m_2(p^2) t^2 \otimes 1 \right]^{-1} \exp\left(-\frac{i}{2} 1 \otimes \vec{0} \cdot \vec{\Theta}\right) = \left[f(p'^2) \gamma^\nu p'_\nu - m_1(p'^2) t^1 \otimes 1 - m_2(p'^2) t^2 \otimes 1 \right]^{-1} = S_F(p')$$

onde $p'_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu p_\mu$

Analogamente, usando a propriedade (III-10), demonstramos a invariância de $S_F(p)$ frente à transformações de Lorentz ao longo de um eixo, ou seja:

$$\exp\left(\frac{i}{2} t^3 \otimes \vec{0} \cdot \vec{w}\right) \left[f(p^2) \gamma^\nu p_\nu - m_1(p^2) t^1 \otimes 1 - m_2(p^2) t^2 \otimes 1 \right]^{-1} \exp\left(-\frac{i}{2} t^3 \otimes \vec{0} \cdot \vec{w}\right) = S_F(p')$$

A forma (III-20) não será invariante frente à transformação $t^3 \otimes 1$ se $m_1(p^2)$ e $m_2(p^2)$ forem diferentes de zero. Para demonstrarmos a quebra espontânea desta simetria devemos mostrar que existem soluções em que as quantidades $m_1(p^2)$ e $m_2(p^2)$ são diferentes de zero.

Com este propósito, vamos examinar as soluções da equação de Schwinger-Dyson para o propagador renormalizado relativamente à existência de um polo para algum valor finito. Apenas por simplicidade vamos admitir a possibilidade do uso do cali-

bre de Landau .

A equação de Schwinger-Dyson para $S_F(p)$ é escrita, em ordem α , como:

$$S_F^{-1}(p) = S_F^{-1(0)}(p) - \frac{i\alpha}{4\pi^3} \int d^4k \gamma^\mu S_F(k) \gamma^\nu D_{F\mu\nu}(p-k) \quad (\text{III-21})$$

onde $S_F^{-1(0)}(p) \equiv \gamma^\nu P_\nu$. Nesta equação deveríamos usar para o vértice o valor que seria obtido através da identidade de Ward. Entretanto, como veremos em seguida $f(p^2) = 1$, o que justifica a forma usada $\Gamma^\nu = -ie\gamma^\nu$.

Explicitamente (III-21) possui a forma:

$$f(p^2)\gamma^\alpha P_\alpha - m_1(p^2)t^1 \otimes 1 - m_2(p^2)t^2 \otimes 1 = \gamma^\alpha P_\alpha - \frac{i\alpha}{4\pi^3} \int d^4k \gamma^\mu \frac{-t^3 \otimes \bar{U}^\mu_{kl} + i \otimes \bar{U}^\mu_{k0} + m_1(k^2)t^1 \otimes 1 + m_2(k^2)t^2 \otimes 1}{k^2 - [m_1^2(k^2) + m_2^2(k^2)]} \gamma^\nu D_{F\mu\nu}(p-k)$$

A admissão do calibre de Landau fornece-nos a possibilidade de desprezarmos a parte $-t^3 \otimes \bar{U}^\mu_{kl} + i \otimes \bar{U}^\mu_{k0}$ da integral da auto-massa. A demonstração desta afirmativa segue os mesmos caminhos que os realizados na referência [17] para a integral com \not{p} e assim não será apresentada. A omissão desta parcela possibilita-nos facilmente concluir que $f(p^2) = 1$.

Portanto, usando a forma explícita de $D_{F\mu\nu}(k)$ obtemos:

$$m_1(p^2)t^1 \otimes 1 + m_2(p^2)t^2 \otimes 1 = \frac{-3i\alpha}{4\pi^3} \int d^4k \frac{m_1(k^2)t^1 \otimes 1 + m_2(k^2)t^2 \otimes 1}{k^2 - [m_1^2(k^2) + m_2^2(k^2)]} \frac{1}{(p-k)^2 + i\epsilon} \quad (\text{III-22})$$

Assim, o cálculo de suas soluções equivale ao do seguinte sistema de equações integrais:

$$m_1(p^2) = \frac{-3i\alpha}{4\pi^3} \int d^4k \frac{n_1(k^2)}{k^2 - [n_1^2(k^2) + n_2^2(k^2)]} \frac{1}{(p-k)^2 + i\epsilon} \quad (\text{III-23a})$$

$$m_2(p^2) = \frac{-3i\alpha}{4\pi^3} \int d^4k \frac{n_2(k^2)}{k^2 - [n_1^2(k^2) + n_2^2(k^2)]} \frac{1}{(p-k)^2 + i\epsilon} \quad (\text{III-23b})$$

Integrando parcialmente as relações (III-23), usando as fórmulas do apêndice da referência [1] adaptadas para a nossa métrica, obtemos:

$$m_i(-s) = \frac{-3\alpha}{4\pi} \left[\int_s^\infty \frac{n_i(-s')}{-s' - [n_1^2(-s') + n_2^2(-s')] + i\epsilon} ds' - \frac{1}{s} \int_s^0 \frac{n_i(-s')}{-s' - [n_1^2(-s') + n_2^2(-s')] + i\epsilon} ds' \right]$$

onde $s \equiv -p^2$, $s' \equiv -k^2$ e $i = 1$ ou 2 .

Esta equação equivale a (com $\bar{s} \equiv -s$):

$$\frac{d^2(n_i(\bar{s})\bar{s})}{d\bar{s}^2} = \frac{-3\alpha}{4\pi} \frac{n_i(\bar{s})}{\bar{s} - m^2(\bar{s}) + i\epsilon} \quad (\text{III-24})$$

ou seja:

$$\bar{s} \frac{d^2 n_i(\bar{s})}{d\bar{s}^2} + 2 \frac{dn_i(\bar{s})}{d\bar{s}} + \frac{3\alpha}{4\pi} \frac{n_i(\bar{s})}{\bar{s} - m^2(\bar{s}) + i\epsilon} = 0 \quad (\text{III-25})$$

A quantidade $m^2(\bar{s})$ é definida por:

$$m^2(\bar{s}) = n_1^2(\bar{s}) + n_2^2(\bar{s}) \quad (\text{III-26})$$

Para a obtenção das soluções de (III-25) vamos aproximar o valor $m^2(\bar{s})$ para uma constante igual a m^2 (sendo m a massa observável do elétron). Esta aproximação não introduz grandes modificações no resultado pois, para $\bar{s} \rightarrow +\infty$, $m^2(\bar{s})$ é desprezível frente a \bar{s} e, para pequenos momenta, $m^2(\bar{s})$ é aproximadamente igual ao valor de ordem zero de sua expansão por teoria de perturbação: $m^2(\bar{s}) \approx m^2$.

Portanto, realizando a aproximação mencionada e a seguinte mudança de variável $s' = m^{-2} \bar{s}$, obtemos:

$$s'(1-s') \frac{d^2 n_i(s')}{ds'^2} + 2(1-s') \frac{dn_i(s')}{ds'} - \frac{3\alpha}{4\pi} n_i(s') = 0 \quad (\text{III-27})$$

Esta equação diferencial possui somente uma solução regular na origem $s=0$ que pode ser aproximada para

$$\left(\frac{s+m^2}{m^2} \right)^{-1/2 \pm 1/2 \sqrt{1-3\alpha/\pi}}$$

Portanto, as equações (III-23) possuem idênticas soluções regulares não nulas, ou seja $n_1(p^2)$ e $n_2(p^2)$ são proporcionais: $n_1(p^2) = \text{constante} \cdot n_2(p^2)$. Assim, levando em conta a relação (III-26) e $n_2(p^2) = \tan \varphi n_1(p^2)$, o propagador $S_F(p)$ é escrito como:

$$S_F(p) = \frac{-t^4 \otimes \gamma^k p_k + t^0 \otimes 1 p_0 + m(p^2) \cos \varphi t^4 \otimes 1 + m(p^2) \sin \varphi t^0 \otimes 1}{p^2 - m^2(p^2)} \quad (\text{III-28})$$

Escolhendo para a quantidade da definição (III-13) o valor $\varphi/2$, constatamos a invariância de $S_F(p)$ frente à transformação de inversão espacial. Esta inversão é consequência da solução $n_1(p^2)$

proporcional a $m_2(p^2)$ [13].

A obtenção de soluções finitas e diferentes de zero para as funções $m_1(p^2)$ e $m_2(p^2)$ mostra-nos a ocorrência da quebra espontânea de simetria relativa à transformação $t^3 \otimes 1$. Devemos ainda ressaltar que este resultado evita o problema da introdução de uma polarização do vácuo infinita.

Como conseqüência da quebra espontânea da simetria constatamos o aparecimento de um polo finito e diferente de zero no propagador $S_F(p)$ para $p^2 = m^2 (m^2(p^2) = m_1^2(p^2) + m_2^2(p^2))$. Isto nos permite concluir que a teoria dos dois neutrinos carregados, formulada de acôrdo com a proposição (III-1), identifica uma partícula carregada de massa m , gerada através de uma quebra espontânea de simetria. Esta massa é idêntica à massa física de um elétron pois a multiplicação de $m_1^2(p^2)$ ou $m_2^2(p^2)$ das equações (III-23) por $(1+t_3^2 \psi)^{1/2}$ fornece-nos:

$$m(p^2) = \frac{-3i\alpha}{4\pi^3} \int d^4k \frac{m(k^2)}{k^2 - m^2(k^2) + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 + i\epsilon} \quad (\text{III-29})$$

Esta é a equação usual para a auto-massa de um elétron (I-15). Desta maneira, numa imagem simples, podemos considerar um elétron como sendo um neutrino carregado contendo quiralidades opostas.

Na seção anterior foi mencionado que o aparecimento de uma massa finita para o elétron possui uma analogia matemática com a criação de uma lacuna de energia num supercondutor infinito. Efetivamente, podemos escrever o propagador $S_F(x-x')$ explíci-

tamente, em coordenadas t , como:

$$iS_F(x-x') = \begin{vmatrix} \langle 0 | T(\psi_1(x) \psi_1^+(x')) | 0 \rangle & \langle 0 | T(\psi_1(x) \psi_2^+(x')) | 0 \rangle \\ \langle 0 | T(\psi_2(x) \psi_1^+(x')) | 0 \rangle & \langle 0 | T(\psi_2(x) \psi_2^+(x')) | 0 \rangle \end{vmatrix}$$

ou seja, de acordo com (III-28), como:

$$S_F(p) = (p^2 - m^2)^{-1} \begin{vmatrix} -\sigma^k p_k + \sigma^0 p_0 & m(p^2) \exp(-i\varphi) \sigma^0 \\ m(p^2) \exp(i\varphi) \sigma^0 & \sigma^k p_k + \sigma^0 p_0 \end{vmatrix}$$

Como o nosso modelo permite soluções finitas e diferentes de zero para $m(p^2)$, os elementos de matriz $\langle 0 | T(\psi_1(x) \psi_2^+(x')) | 0 \rangle$ e $\langle 0 | T(\psi_2(x) \psi_1^+(x')) | 0 \rangle$ serão não nulos. Estas quantidades evidentemente não são invariantes frente à operação quiralidade que é justamente a transformação $\psi_1'(x) = \exp(i\alpha) \psi_1(x)$ e $\psi_2'(x) = \exp(-i\alpha) \psi_2(x)$. Estas considerações são análogas à não invariância frente à transformação de calibre de $\langle 0 | \psi(x) \psi(y) | 0 \rangle$ no modelo do supercondutor infinito de Bardeen-Cooper-Schrieffer.

Adaptando o modelo do supercondutor infinito, citado anteriormente, para o nosso caso, podemos considerar o estado fundamental físico como uma superposição de estados com nenhum, um, dois, etc, pares de neutrinos de quiralidades diferentes. Isto explica a não nulidade dos elementos de matriz mencionados acima e a não conservação da quiralidade no estado fundamental físico. A formulação da teoria, entretanto, é passivamente invariante frente às transformações $\psi'(x) = \exp(i\alpha t^3 \otimes 1) \psi(x)$ e $\psi_1'(x) = \exp(i\alpha(x)) \psi_1(x)$ $\psi_2'(x) = \exp(-i\alpha(x)) \psi_2(x)$. Isto nos faria pensar que o núme-

ro de neutrinos de diferentes quiralidades deveria ser, separadamente, conservado no estado fundamental. Porém, devido à quebra espontânea de simetria tal fato não ocorre. Devemos ressaltar que ao nos referirmos a um estado fundamental estamos caracterizando, uma das possíveis representações irredutíveis dos operadores de campo.

Portanto, a analogia com a supercondutividade fornece-nos um modelo que explica a quebra espontânea da simetria $t^3 \otimes 1$ e o conseqüente aparecimento de uma massa.

De acôrdo com o modelo citado acima para o elétron podemos definir seu operador campo $\Psi(x)$ como possuindo as componentes:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}$$

Assim, adotando uma representação para as matrizes γ tal que γ_5 seja diagonal, ou seja $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, constatamos que:

$$\psi_1(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi(x) \quad (\text{III-30a})$$

$$\psi_2(x) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1 - \gamma_5}{2} \Psi(x) \quad (\text{III-30b})$$

isto é $\Psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$

Usando a representação citada para a matriz γ_5 e realizando a substituição (III-30) na densidade Lagrangeana (I-1), verificamos que esta reduz-se a (III-1). Observamos nas equações (III-30) que o operador campo $\psi_1(x)$ está relacionado com a quiralidade $(1 + \gamma_5)$ e o $\psi_2(x)$ com $(1 - \gamma_5)$.

Vamos mostrar, para este modelo, que a corrente associada com a simetria $t^3 \otimes 1$, mesmo definida formalmente, não é conservada. Seguindo as mesmas etapas que as realizadas na Eletrodinâmica Quântica de elétrons e muons, com massas despidas [42], obtemos a seguinte relação:

$$S_F^{-1}(p) \int e^{-ipx} e^{ipz} \langle 0 | T [\partial_\nu j^\nu(x) \psi(y) \psi^\dagger(z)] | 0 \rangle d^4y d^4z S_F^{-1}(p) =$$

(III-31)

$$= -it^3 \otimes 1 S_F^{-1}(p) + i S_F^{-1}(p) t^3 \otimes 1$$

A corrente de simetria $j^\nu(x)$ é definida, formalmente, por:

$$j^\nu(x) = \bar{\psi}(x) \tilde{\gamma}^\nu t^3 \otimes 1 \psi(x)$$

Usando para $S_F^{-1}(p)$ a expressão (III-20), obtemos o seguinte valor para o membro esquerdo da relação (III-31):

$$2 \left[-m_1(p^2) t^3 \otimes 1 + m_2(p^2) t^1 \otimes 1 \right]$$

A existência de soluções finitas e diferentes de zero para $m_1(p^2)$ e $m_2(p^2)$, indica-nos a não conservação da corrente associada com a simetria quebrada $t^3 \otimes 1$. Isto mostra-nos que a quebra espontânea de simetria é do tipo local.

III-3 Análise do modelo formulado mais consistentemente

Nesta seção vamos reexaminar o sistema de dois neutrinos carregados usando uma formulação mais consistente. Embora o estudo realizado na seção anterior fôsse dirigido no sentido da apresentação de um modelo onde ocorra uma quebra espontânea de si-

metria, a equação (III-1) possui as mesmas dificuldades conceituais que a (I-1). Adotando as sugestões apresentadas anteriormente [3, 4] introduzimos a seguinte densidade Lagrangeana para a descrição do sistema de dois neutrinos carregados:

$$\mathcal{L}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z(\epsilon^2) \sum_{\nu} \frac{g_{\nu}^{+}(x, \epsilon_n^{(\nu)})}{2\epsilon} + \sum_3 \mathcal{L}_0 \quad (\text{A}) \quad (\text{III-32})$$

onde $Z(\epsilon^2)$ e ϵ possuem os mesmos significados que na relação (I-59) e $g_{\nu}^{+}(x, \epsilon_n^{(\nu)})$ é definido por:

$$g_{\nu}^{+}(x, \epsilon_n^{(\nu)}) = \frac{1}{4} \left[g(x, \epsilon_n^{(\nu)}) + g^{+}(x, \epsilon_n^{(\nu)}) + g^c(x, \epsilon_n^{(\nu)}) + g^{c+}(x, \epsilon_n^{(\nu)}) \right] \quad (\text{III-33})$$

sendo

$$g(x, \epsilon_n^{(\nu)}) = -i \psi^{+}(x + \epsilon_n^{(\nu)}) \gamma^{\nu} \phi(x, \epsilon_n^{(\nu)}) \psi(x - \epsilon_n^{(\nu)}) \quad (\text{III-34})$$

Nesta equação $\psi(x)$ é o operador campo definido por (III-3) e γ^{ν} é o tetra-vetor (III-2). A função $\phi(x, \epsilon_n^{(\nu)})$ é dada por

$$\phi(x, \epsilon_n^{(\nu)}) = T \epsilon \exp\left(-ie \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} n \cdot A(x + \epsilon' n^{(\nu)}) d\epsilon'\right)$$

Usando $(\gamma^{\nu})^{\dagger} = \gamma^{\nu}$, facilmente comprovamos que $g(x, \epsilon_n^{(\nu)})$ possui as seguintes propriedades

$$g^{+}(x, \epsilon_n^{(\nu)}) = -g(x, -\epsilon_n^{(\nu)}) \quad (\text{III-35a})$$

e

$$g^{c+}(x, \epsilon_m^{(v)}) = -g^c(x, -\epsilon_m^{(v)}) \quad (\text{III-35b})$$

Estas relações permitem-nos escrever a seguinte forma para (III-33):

$$g_+^+(x, \epsilon_m^{(v)}) = \frac{1}{4} \left[g(x, \epsilon_m^{(v)}) - g(x, -\epsilon_m^{(v)}) + g^c(x, \epsilon_m^{(v)}) - g^c(x, -\epsilon_m^{(v)}) \right]$$

Entre as transformações anteriormente citadas, verificamos que a Lagrangeana, para $\epsilon \neq 0$, continua sendo invariante frente às transformações de inversão espacial, temporal, conjugação de carga, de calibre, frente à $t^3 \otimes 1$ e translação. Naturalmente não é invariante frente à transformação homogênea de Lorentz.

Nossa intenção é utilizar esta formulação do modelo de dois neutrinos carregados para reexaminar as soluções da equação de Schwinger-Dyson para o propagador $S_F(p)$. Esta equação pode ser deduzida através do cálculo da transformada de Fourier das parcelas obtidas pela expansão da exponencial pertencente ao seguinte elemento de matriz:

$$i S_F(x-y) = \langle 0 | T \left[\psi(x) \psi^+(y) \exp\left(i \int_{int} \mathcal{L}(z) d^4z\right) \right] | 0 \rangle \quad (\text{III-36})$$

onde

$$\mathcal{L}(z) = \mathcal{l}(z) - \mathcal{L}_0(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z(\epsilon^2) \sum_V \frac{g_+^+(z, \epsilon_m^{(v)})}{2\epsilon} - \frac{1}{4} \sum_V \frac{\partial \mathcal{l}^+(z, \epsilon_m^{(v)})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} - \mathcal{L}_0(A) \quad (\text{III-37})$$

e

$$l(z, \epsilon_n^{(\nu)}) = -i \varphi^+(z + \epsilon_n^{(\nu)}) z^\nu \varphi(z - \epsilon_n^{(\nu)}) \quad (\text{III-38})$$

O sinal positivo da função $l(z, \epsilon_n^{(\nu)})$ significa que devemos considerá-la como sendo par frente à conjugação de carga.

Realizando o cálculo mencionado, obtemos o seguinte de-senvolvimento para $S_p(p)$:

$$S_F^\epsilon(p) = S_F^{(0)\epsilon}(p) + i S_F^{(0)\epsilon}(p) \left\{ e^{2Z(\epsilon^2)} \sum_\mu \sum_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\delta}(k_\mu, \epsilon) D_{F_{\mu\nu}}^\epsilon(k) z^\mu S_F^\epsilon(p-k) \right. \\ \left. \Gamma^\nu(p-k, p) \cos[(2p-k)_\mu \epsilon] \right\} S_F^\epsilon(p) - S_F^{(0)\epsilon}(p) Z(\epsilon^2) \frac{\text{sen } 2P_\mu \epsilon}{P_\mu \epsilon} p_\mu S_F^\epsilon(p) + S_F^\epsilon(p) \quad (\text{III-39})$$

Nesta expressão $S_F^{(0)\epsilon}(p)$ é o propagador livre. O índice nas fun-ções de Green D_F, S_F, Γ^ν indica que as estamos considerando para $\epsilon \neq 0$.

A relação (III-39) pode ser modificada para:

$$Z(\epsilon^2) p_\mu \frac{\text{sen } 2P_\mu \epsilon}{2P_\mu \epsilon} = S_F^{-i\epsilon}(p) + i \Sigma^\epsilon(p) \quad (\text{III-40})$$

com

$$\Sigma^\epsilon(p) = e^{2Z(\epsilon^2)} \sum_\mu \sum_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D_{F_{\mu\nu}}^\epsilon(k) \tilde{\delta}(k_\mu, \epsilon) z^\mu S_F^\epsilon(p-k) \Gamma^\nu(p-k, p) \cdot (\text{III-41}) \\ \cdot \cos[(2p-k)_\mu \epsilon]$$

Portanto:

$$S_F^{-i\epsilon}(p) = Z(\epsilon^2) p_\mu \frac{\text{sen } 2P_\mu \epsilon}{2P_\mu \epsilon} - i \Sigma^\epsilon(p) \quad (\text{III-42})$$

Gráficamente, a equação (III-42) equivale a:

$$\Sigma(\not{E}) \rightarrow \text{[Diagram]} \text{ fig(III-1)}$$

A resolução da equação (III-42) é idêntica à apresentada para o propagador de fermions na referência [26] onde encontramos uma análise detalhada e completa. Por este motivo, apenas citamos as conclusões relativas às soluções. Usando para $D_{F_{\mu\nu}}(K)$ a relação (I-13) e uma forma apropriada para a função vértice $\Gamma^*(p-k, p)$, satisfazendo entre outras condições a da identidade de Ward-Takahashi, obtemos a seguinte forma para o propagador $S_F(p)$:

$$S_F(p) = \left(\frac{m^2 - p^2}{m^2} \right)^{\alpha/4\pi} (\not{p} - m)^{-1} \quad \text{(III-43)}$$

A quantidade m^2 é o valor finito adotado para $m^2(-p^2)$; α uma constante que define o calibre usado e $\not{p} \equiv \gamma^\nu p_\nu$.

A existência de tal solução mantém válidas as conclusões da seção anterior relativamente à ocorrência de uma quebra espontânea da simetria $t^3 \otimes 1$ para o modelo dos dois neutrinos carregados.

III-3 Notas sôbre a possibilidade de uma descrição unificada dos leptons

Nas seções anteriores verificamos que um elétron pode ser descrito por um neutrino carregado contendo ambas as quiralidades $(1+\gamma_5)$ e $(1-\gamma_5)$ (conforme verificamos nas equações (III-30)). Assim, representamos um elétron pelo seguinte operador com quatro componentes:

$$\Psi_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^+(x) \\ \varphi_1^-(x) \end{pmatrix} \quad (\text{III-44})$$

onde os operadores com duas componentes $\varphi_1^+(x)$ e $\varphi_1^-(x)$ representam respectivamente os neutrinos de quiralidades $(1+\gamma_5)$ e $(1-\gamma_5)$.

Através de um raciocínio análogo também podemos afirmar que um muon é descrito por dois neutrinos carregados $\varphi_2^+(x)$ e $\varphi_2^-(x)$; ou seja, pelo operador

$$\Psi_2(x) = \begin{pmatrix} \varphi_2^+(x) \\ \varphi_2^-(x) \end{pmatrix} \quad (\text{III-45})$$

Nesta seção vamos estender, de uma maneira formal, o modelo dos dois neutrinos carregados. Esta extensão sugere-nos uma possível maneira de formularmos unificadamente as interações fraca e eletromagnética dos leptons. Para isto, devemos também introduzir um operador $\Psi_3(x)$, de quatro componentes, que represente o neutrino não carregado. A introdução deste operador na forma

$$\Psi_3(x) = \begin{pmatrix} \varphi_3^+(x) \\ \varphi_3^-(x) \end{pmatrix} \quad (\text{III-46})$$

conduz-nos a um problema de coerência entre a densidade Lagrangeana a ser definida e a usual que descreve a interação fraca dos leptons. Podemos verificar que a forma usual desta densidade Lagrangeana requer a definição de um operador cujas componentes estejam relacionadas apenas com a quiralidade $(1+\gamma_5)$. Isto parece destruir a simetria da formulação pois, neste caso, possuiríamos no total quatro neutrinos associados com $(1+\gamma_5)$ e dois com $(1-\gamma_5)$. Para evitar esta dificuldade, iremos reinterpretar os neutrinos do elétron e do muon como neutrinos de diferentes quiralidades. Isto pode ser conseguido descrevendo o muon físico como um antifermion. Assim, resolvemos esta dificuldade usando o operador conjugado de carga de (III-45). Como constataremos, este procedimento implicitamente contém o termo $(1+\gamma_5)$ constante do modelo usual para a interação fraca dos leptons. Além disso, possibilita-nos escrever a Lagrangeana para a interação eletromagnética dos elétrons e muons numa forma invariante frente ao grupo $SU(2) \otimes SU(2)$.

A Lagrangeana que descreve a interação de dois neutrinos carregados $\psi_1^+(x)$ e $\psi_1^-(x)$, com o campo eletromagnético pode ser formalmente escrita como:

$$L_{int}(t) = \frac{-Z_2 e}{2} \int d^3x (\psi_1^+(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \psi_1^-(x) + PC) \quad (III-47)$$

onde PC refere-se à transformação conjunta de conjugação de carga e inversão espacial.

Definindo o operador $\psi_2'(x)$ constituído pelas componentes

$$\Psi_2'(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^+(x) \\ \psi_2^+(x) \\ \psi_1^-(x) \\ \psi_2^-(x) \end{pmatrix} \quad \text{(III-48)}$$

generalizamos a relação (III-47) com a introdução formal da seguinte densidade Lagrangeana para a interação eletromagnética dos elétrons e muons:

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -\frac{Z_2 e}{2} \left\{ \Psi_2'^{\dagger}(x) S^\nu A_\nu(x) \Psi_2'(x) + PC \right\} \quad \text{(III-49)}$$

O sinal ('') dos operadores $\psi_2^{\dagger}(x)$ e $\psi_2^{\prime}(x)$ indica que estamos levando em conta os operadores conjugados de carga destes. O tetra-vetor S^ν é definido pelas seguintes componentes $S^\nu \equiv (t^3 \otimes \rho^3 \otimes \sigma^k, 1 \otimes \rho^3 \otimes \sigma^0)$ com $k=1,2,3$. As matrizes ρ_j ($j=1,2,3$), com dimensões 2×2 , possuem formas análogas às das matrizes de Pauli. A introdução da matriz ρ^3 deve-se ao fato de que o elétron e o muon possuem diferentes sinais para a carga.

A expressão (III-49) é invariante frente ao grupo $SU(2) \otimes SU(2)$, gerado por $(\frac{1+t^3}{2}) \otimes \rho_j$ e $(\frac{1-t^3}{2}) \otimes \rho_j$, com $j=1,2,3$, como podemos facilmente observar pela sua forma matricial explícita

Vamos mostrar a equivalência da definição (III-49) com a usual. Desenvolvendo, matricialmente a primeira parcela de (III-49), obtemos:

$$-Z_2 \left[e \psi_1^{\dagger}(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \psi_1(x) - e \psi_2^{\dagger}(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \psi_2(x) \right]$$

Usando uma representação para as matrizes γ^i ($i=1,2,3,4$) tal que $\gamma^i \gamma^k = t^3 \otimes \sigma^k$ e $\gamma^5 = t^3 \otimes 1$, esta relação torna-se

$$-Z_2 \left[e \bar{\Psi}_1(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \Psi_1(x) - e \bar{\Psi}'_2(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \Psi'_2(x) \right]$$

Realizando as substituições $\bar{\Psi}'_2(x) = C^{-1} \bar{\Psi}_2(x)$ e $\Psi'_2(x) = -\bar{\Psi}_2(x) C$ e usando a propriedade $C \gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}$, obtemos para (III-49) a expressão usual para a densidade Lagrangeana de elétrons e muons com massa despida nula:

$$-Z_2 \left[e \bar{\Psi}_1(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \Psi_1(x) + e \bar{\Psi}_2(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \Psi_2(x) \right]$$

Podemos entender a relação (III-49) de tal maneira que também inclua o neutrino. Para isto, definimos seguinte o operador $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^+(x) \\ \psi_2^+(x) \\ \psi_3^+(x) \\ \psi_1^-(x) \\ \psi_2^-(x) \\ \psi_3^-(x) \end{pmatrix} \quad (\text{III-50})$$

e introduzimos formalmente a densidade Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{int}(x) = \frac{-Z_2 e}{2} \left\{ \Psi^\dagger(x) \Sigma^\nu A_\nu(x) \Psi(x) + PC \right\} \quad (\text{III-51})$$

O tetra-vetor Σ^ν é definido pelas componentes: $\Sigma^\nu \equiv (t^3 \otimes \lambda_3 \otimes \sigma^k, i \otimes \lambda_3 \otimes \sigma^0)$ onde $\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, pois devemos levar em conta as cargas +1, -1, 0 do elétron, anti-muon e do neutrino, respectivamente.

Vamos apresentar uma proposição que inclua também a interação fraca dos leptons. A intenção em realizar tal proposição tem a finalidade de indicar a possibilidade de uma descrição unificada dos leptons. Para a construção desta Lagrangeana vamos basear-nos no modelo que propõe que a descrição dos fenômenos devi

do à interação fraca seja realizada através de um campo interme
diário $W_\nu(x)$ [49]. Nesta proposição as reações para bai-
xas energias são descritas por gráficos análogos aos existentes
no espalhamento de Möller.

Assim, como uma extensão dos modelos apresentados acima,
e apenas com a finalidade de indicar a existência de uma possibi-
lidade para uma descrição unificada dos leptons, definimos for-
malmente a seguinte Lagrangeana renormalizada:

$$L(\Sigma) = \frac{-Z_2}{2} \int d^3x \left\{ \bar{\Psi}(x) \left[e A_\nu(x) \Sigma^\nu + g(W_\nu(x)(\Sigma_1^\nu + \Sigma_2^\nu) + h.c) \right] \Psi(x) + p.c \right\} \quad (\text{III-52})$$

com o operador de 12 componentes $\Psi(x)$ e o tetra-vetor Σ^ν ci-
tados anteriormente em (III-51). Os tetra-vetores Σ_1^ν e Σ_2^ν são
definidos, respectivamente, por:

$$\Sigma_1^\nu = \left[\left(\frac{t^0 + t^3}{2} \right) \otimes (\lambda_4 - i\lambda_5) \otimes \sigma^\nu \right] \quad (\text{III-53a})$$

$$\Sigma_2^\nu = \left[\left(\frac{t^0 - t^3}{2} \right) \otimes (\lambda_6 + i\lambda_7) \otimes \sigma^\nu, \left(\frac{t^3 - t^0}{2} \right) \otimes (\lambda_6 + i\lambda_7) \otimes 1 \right] \quad (\text{III-53b})$$

As matrizes λ possuem dimensões 3 x 3 e são os geradores do gru-
po $SU(3)$.

A parte entre colchete de (III-52) apresenta-se matri
cialmente como:

(III-54)

$eA_\nu(x)\sigma^\nu$	0	$2gW_\nu^+(x)\sigma^\nu$	0	0	0
0	$-eA_\nu(x)\sigma^\nu$	0	0	0	0
$2gW_\nu(x)\sigma^\nu$	0	0	0	0	0
0	0	0	$eA_\nu(x)\sigma_\nu$	0	0
0	0	0	0	$-eA_\nu(x)\sigma_\nu$	$-2gW_\nu(x)\sigma_\nu$
0	0	0	0	$-2gW_\nu^+(x)\sigma_\nu$	0

Vamos mostrar que a proposição (III-52) exhibe as formas usuais para as Lagrangeanas das interações fraca e eletromagnética. Realizando o produto matricial indicado acima, esta expressão vale

$$L_{int}(t) = \frac{-Z_0}{2} \int d^3x \left\{ e \Psi_1^+(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \Psi_1(x) - e \Psi_2^{'+}(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \Psi_2'(x) + \right. \quad \text{(III-55)}$$

$$\left. + g \left[\Psi_3^+(x) (t^3 + t^0) \otimes \sigma^\nu W_\nu(x) \Psi_1(x) - \Psi_2^{'+}(x) (t^3 - t^0) \otimes (\sigma^k W_k(x) - \sigma^0 W_0(x)) \Psi_3(x) + h.c. \right] + P.C. \right\}$$

Novamente, usando uma representação para as matrizes γ^i ($i=1,2,3,4,5$) talque $\gamma^0 \gamma^k = t^3 \otimes \sigma^k$ e $\gamma^5 = t^3 \otimes 1$, podemos escrever esta relação como:

$$L_{int}(t) = \frac{-Z_0}{2} \int d^3x \left\{ e \bar{\Psi}_1(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \Psi_1(x) - e \bar{\Psi}_2'(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \Psi_2'(x) - \right. \\ \left. - g \left[\bar{\Psi}_3(x) \gamma^\nu W_\nu(x) (1 + \gamma^5) \Psi_1(x) - \bar{\Psi}_2'(x) \gamma^\nu W_\nu(x) (1 - \gamma^5) \Psi_3(x) + h.c. \right] + P.C. \right\}$$

Realizando a substituição $\bar{\Psi}_2^1(x) = C^{-1} \Psi_2(x)$ e $\Psi_3(x) = -\bar{\Psi}_3 C$ e usando a seguinte propriedade $C \gamma^\nu (1-\gamma^5) C^{-1} = -[(1-\gamma^5) \gamma^\nu]^T$, a expressão (III-55) transforma-se em:

$$L_{Int}(t) = \frac{Z_2}{2} \int d^3x \left\{ -e \bar{\Psi}_1(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \Psi_1(x) - e \bar{\Psi}_2(x) \gamma^\nu A_\nu(x) \Psi_2(x) - g \left[\bar{\Psi}_3(x) \gamma^\nu W_\nu(x) (1+\gamma^5) \Psi_1(x) + \bar{\Psi}_3(x) \gamma^\nu W_\nu(x) (1+\gamma^5) \Psi_2(x) + h.c. \right] + PC \right\}$$

que é a definição usual para as interações eletromagnética e fraca dos leptons. Assim, constatamos que a proposição (III-52) contém implicitamente o termo $(1+\gamma^5)$ característico das interações fracas [40]. Isto sugere a validade da Lagrangeana (III-52):

Finalmente, queremos mencionar que este modelo poderia ser entendido através de uma quebra espontânea de simetria. Com efeito, supondo a possibilidade de construção de uma Lagrangeana tal que fosse invariante frente a um grupo mais amplo de transformações, a definição (III-52) na ocorrência de uma quebra espontânea de simetria, identificaria um certo sub-espaço irredutível em relação a um conjunto de operadores. Neste caso a quebra de simetria se caracterizaria pelo fato de que a constante de acoplamento para certos termos da Lagrangeana se reduzisse a carga elétrica ou fôsse igual a $g \neq$ zero para outros. Em outras palavras, usando esta Lagrangeana mais ampla para uma auto-determinação das constantes de acoplamento, como no caso do operador campo eletromagnético $A_\nu(x)$ (ver por exemplo a equação (I-32)), observaríamos que as constantes relacionadas com os zeros da expressão (III-54) anular-se-iam. Por outro lado, existe também a possibilidade da teoria auto-determinar a equação para o propagador $\langle 0 | T(W^\mu(x) W^\nu(y)) | 0 \rangle$ de uma maneira análoga à realizada

na Eletrodinâmica Quântica para o propagador $\langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(y))|0\rangle$ quando $Z_3=0$ [4] e mencionada no primeiro capítulo. Devemos ressaltar que no atual estágio estas idéias são apenas vagas e devemos considerá-las somente como indicação da existência de tais possibilidades.

C A P Í T U L O I V

ESTUDO DO DESENVOLVIMENTO PERTURBATIVO

IV-1 Introdução

No presente capítulo vamos analisar as modificações que são produzidas na descrição perturbativa da teoria devido à introdução da seguinte definição (ver equação (I-59)) para a densidade Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_V \Sigma(\epsilon^2) \frac{h(X, E_m^{(V)})^+}{2\epsilon} \quad (\text{IV-1})$$

Como foi mencionado no primeiro capítulo, um dos pontos essenciais levados em conta para a construção da proposição (IV-1) constituiu-se na obtenção de uma teoria manifestamente invariante frente à transformação de calibre definida pelas equações (I-52). Como consequência deste fato, constatamos o cancelamento da divergência quadrática do tensor polarização do vácuo $\pi^{\mu\nu}(k)$. Isto deve-se à ocorrência de um novo diagrama, caracterizado por possuir um tipo de vértice com duas linhas de fótons, que está relacionado ao usual através de uma identidade generalizada de Ward.

A não linearidade do operador campo eletromagnético $A_\nu(X)$ na definição (IV-1) fornece-nos, no desenvolvimento perturbativo das funções de Green, gráficos relacionados à vértices diferentes do usual. A intenção deste capítulo consiste em completar as re-

gras fornecidas anteriormente de maneira que possamos obter as expressões analíticas relacionadas com qualquer tipo de gráfico do desenvolvimento perturbativo. Estas regras, claramente, estão relacionadas a vértices com um número n (n inteiro) de linhas de fótons. Ao mesmo tempo fornecemos as identidades generalizadas de Ward que existem entre estes vértices. Como conclusão e exemplificação da utilização das regras citadas, analisamos o sistema de quatro fótons.

Sabemos que no desenvolvimento usual o tensor polarização do vácuo do sistema de quatro fótons $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ é finito [5]. A parte que comporta-se como divergente, contida no termo com todos os k_i ($i = 1, 2, 3, 4$), iguais a zero, é nula, ou seja $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i=0)=0$. Este resultado deve-se a uma propriedade de simetria dos índices que resulta no cancelamento do termo logicamente divergente. Verificaremos que a nova formulação (IV-1) também nos permite obter estes resultados. Isto é, concluímos que $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0)=0$, para $\epsilon \neq 0$, e, portanto, que o tensor polarização do vácuo é finito. Neste caso não se torna necessário usar a mencionada propriedade de simetria. O cancelamento é um resultado direto da invariância de calibre da teoria de maneira completamente análoga à anulação da divergência quadrática de $\Pi^{\mu\nu}(k)$. Queremos ressaltar que ambos os resultados são obtidos para ϵ finito e diferente de zero, o que justifica, para estes casos, o desenvolvimento não local da teoria.

IV-2 Regras para gráficos e identidades generalizadas de Ward

Nesta seção derivaremos, em primeiro lugar, as expressões correspondentes aos vértices com um número n de linhas de fótons. Logo após, apresentaremos uma série de relações existentes entre os vértices que se constituem nas identidades generalizadas de Ward.

O desenvolvimento perturbativo dos propagadores (veja equações (I-20) e (III-36)) é obtido através dos valores esperados do vácuo para os seguintes produtos ordenados no tempo:

$$iD_{F_{\mu\nu}}(x-x') = \langle 0 | T [A_{\mu}(x) A_{\nu}(x') \exp(i \int_{int} \mathcal{L}(z) d^4z)] | 0 \rangle \quad (IV-2)$$

$$iS_{F_{\alpha\beta}}(x-x') = \langle 0 | T [\Psi_{\alpha}(x) \bar{\Psi}_{\beta}(x') \exp(i \int_{int} \mathcal{L}(z) d^4z)] | 0 \rangle \quad (IV-3)$$

onde $\mathcal{L}_{int}(z)$ representa a densidade Lagrangeana de interação.

Como mencionamos a não linearidade do operador campo eletromagnético $A_{\nu}(x)$ na relação (IV-1) causa o aparecimento de vértices com mais de uma linha de fótons. Isto pode ser explicitamente verificado pela expansão da função $\varphi(x, \mathcal{E}_n^{(v)})$ contida em $h(x, \mathcal{E}_n^{(v)})$:

$$\left[-i \bar{\Psi}(z + \mathcal{E}_n^{(v)}) \delta^{\nu} \left(1 - i e \int_{-E}^{+E} A_{\nu}(z + \mathcal{E}_m^{(v)}) d\mathcal{E}' + \frac{(-ie)^2}{2} T_{\mathcal{E}} \int_{-E}^{+E} d\mathcal{E}' \int_{-E}^{+E} d\mathcal{E}'' A_{\nu}(z + \mathcal{E}_n^{(v)}) \cdot A_{\nu}(z + \mathcal{E}_m^{(v)}) + \dots \right) \Psi(z - \mathcal{E}_m^{(v)}) \right] \quad (IV-4)$$

Cada uma das parcelas da expansão da função $\varphi(x, \mathcal{E}_n^{(v)})$ contribuirá para a forma analítica de um vértice com um número de linhas de

fótons igual ao número de operadores campo eletromagnético $A_\nu(Z)$.

Neste sentido, as expressões analíticas dos vértices para $E \neq 0$ são obtidas dos seguintes valores esperados do vácuo

$$i \int d^4 Z \langle 0 | T [\Psi(x) \bar{\Psi}(y) A_{\mu_1}(z^1) \dots A_{\mu_n}(z^n) \mathcal{L}_{int}(Z)] | 0 \rangle \quad (IV-5)$$

Queremos mencionar que as partes relacionadas com a densidade Lagrangeana livre ($\mathcal{L}_{int}(Z) = \mathcal{L}(Z) - \mathcal{L}_0(Z)$) somente ocorrem, no desenvolvimento perturbativo das funções de Green, como contribuições aos propagadores do fóton e elétron. Evidentemente, todas estas contribuições são levadas em conta se considerarmos os propagadores completos. Neste caso, considerando os propagadores completos podemos usar a densidade Lagrangeana total $\mathcal{L}(Z)$ para o cálculo de cada vértice de um diagrama.

Neste cálculo devemos usar em $\mathcal{L}(Z)$ o termo de ordem n da expansão da exponencial $\varphi(Z, E_n^{(v)})$, sendo n igual ao número de fótons pertencentes ao vértice em estudo.

A forma da função $\varphi(Z, E_n^{(v)})$ permite-nos desenvolver a densidade $\mathcal{L}(Z)$ em série de potências relativas ao operador campo eletromagnético $A_\nu(y)$. Ou seja:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Z) = & \mathcal{L}(Z) \Big|_{A=0} + \sum_{\nu} \int d^4 z A_\nu(z) \frac{\delta}{\delta A_\nu(z)} \mathcal{L}(Z) \Big|_{A=0} + \\ & + \frac{1}{2} \int d^4 z \int d^4 z' \sum_{\nu, \mu} A_\nu(z') A_\mu(z) \frac{\delta}{\delta A_\nu(z)} \frac{\delta}{\delta A_\mu(z')} \mathcal{L}(Z) \Big|_{A=0} + \dots \end{aligned} \quad (IV-6)$$

Podemos também obter as expressões dos vértices, para $E \neq 0$, a partir deste desenvolvimento. Para isto devemos substituir em (IV-5) o termo de ordem n do desenvolvimento (IV-6). Mostraremos para o vértice com uma linha de fóton que ambas alternativas, (IV-4) e (IV-6), são equivalentes.

No cálculo que segue a quantidade $q(Z, \epsilon_n^{(v)})$ é definida como:

$$q(Z, \epsilon_n^{(v)}) = -i \bar{\Psi}(Z + \epsilon_n^{(v)}) \gamma^\nu \Psi(Z - \epsilon_n^{(v)}) \quad (IV-7)$$

e $q_-(Z, \epsilon_n^{(v)})$ por:

$$q_-(Z, \epsilon_n^{(v)}) = \frac{1}{4} \left[q(Z, \epsilon_n^{(v)}) - q^+(Z, \epsilon_n^{(v)}) - q^c(Z, \epsilon_n^{(v)}) + q^{c+}(Z, \epsilon_n^{(v)}) \right] \quad (IV-8)$$

O duplo sinal negativo significa que a relação (IV-8) é ímpar frente à conjugação de carga (sinal superior) e frente à conjugação hermitiana (sinal inferior).

Substituindo a segunda parcela de (IV-4) na expressão (IV-5) obtemos:

$$e \int d^4 Z \sum_\nu \frac{Z(\epsilon^2)}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} d\epsilon' \langle 0 | T \left[\Psi(x) \bar{\Psi}(y) A_\mu(z') A_\nu(z + \epsilon_n^{(v)}) q_-(z, \epsilon_n^{(v)}) \right] | 0 \rangle \quad (IV-9)$$

Por outro lado, substituindo a segunda parcela da expansão (IV-6) em (IV-5) e levando em conta que:

$$\left. \frac{\delta \Psi(Z, \epsilon_n^{(v)})}{\delta A_\rho(z)} \right|_{A=0} = -ie \delta_{\rho\nu} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(Z + \epsilon_n^{(v)} - z) d\epsilon'$$

obtemos:

$$e \int d^4z \sum_{\nu} \frac{Z(\epsilon z)}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} d\epsilon' \int d^4z' \langle 0 | T \left[\psi(x) \bar{\psi}(y) A_{\mu}(z') A_{\nu}(z) \delta^+(z + \epsilon'_m{}^{(\nu)} - z) \cdot q_{-}(z, \epsilon_m{}^{(\nu)}) \right] | 0 \rangle \quad (IV-10)$$

Portanto, a transformada de Fourier de (IV-9) ou de (IV-10) permite-nos obter a expressão analítica, para $\epsilon \neq 0$, para o vértice com uma linha de fóton resultante da formulação (IV-1).

A observação do desenvolvimento (IV-4) mostra-nos que o elemento de matriz dos vértices com um número ímpar de linhas de fótons conterá a quantidade $q_{-}(z, \epsilon_m{}^{(\nu)})$ e o dos com um número par, o fator $q_{+}(z, \epsilon_m{}^{(\nu)})$. O duplo sinal positivo de $q(z, \epsilon_m{}^{(\nu)})$ significa que ele deve ser tomado como par frente à conjugação de carga e à conjugação hermitiana.

Substituindo a terceira parcela de (IV-6) em (IV-5), obtemos a expressão para o vértice com duas linhas de fótons. Para os demais vértices devemos seguir um caminho análogo.

A forma da relação (IV-6) mostra-nos que as expressões analíticas dos vários vértices estão relacionadas por uma diferenciação. Como veremos nesta seção, isto nos permitirá definir as identidades generalizadas de Ward.

Antes de derivarmos as regras para os vértices em ordem mais baixa, vamos apresentar algumas considerações gerais decorrentes da análise das afirmações mencionadas acima:

a) No desenvolvimento perturbativo da teoria, a cada vértice corresponde um fator $L(z)$.

b) O número de linhas de fótons pertencentes a um vértice está re

lacionado com a ordem da derivada da densidade Lagrangeana em relação ao operador campo eletromagnético.

c) O fator $g_-(Z, \epsilon_n^{(v)})$ contribuirá ao elemento de matriz de um vértice com um número ímpar de linhas de fótons e $g_+(Z, \epsilon_n^{(v)})$ com um número par.

d) A expressão de um vértice com n linhas de fótons deverá conter o fator ϵ^{n-1} . Isto explica a nulidade destas expressões, com exceção da do vértice com uma linha de fóton, quando realizamos o limite $\epsilon \rightarrow 0$ de maneira formal. Isto justamente fornecerá o resultado usual. Devemos ressaltar que os fatores ϵ podem ser compensados se o vértice ocorrer num contorno fechado suficientemente divergente. Isto resulta numa contribuição extra exigida pela invariância de calibre e que cancela a divergência quadrática que, de outra maneira, deveria ser subtraída artificialmente.

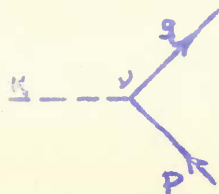
A expressão para o vértice com uma linha de fótons pode ser obtida da transformada de Fourier de (IV-9) ou (IV-10). Assim por exemplo, tomando (IV-10)

$$\frac{e}{A} \sum_{\nu} Z(\epsilon^2) \int d^4z \int d^4z' \delta_{\epsilon_n^{(v)}}(z-z') \langle 0 | T \left[\psi(x) \bar{\psi}(y) A_{\mu}(z') A_{\nu}(z) \cdot (-i \bar{\psi}(z + \epsilon_n^{(v)}) \gamma^{\nu} \psi(z - \epsilon_n^{(v)}) + (\epsilon \rightarrow -\epsilon) + cc) \right] | 0 \rangle$$

e realizando as contrações indicadas, obtemos

$$\frac{1}{A} Z(\epsilon^2) \sum_{\nu} \int d^4z \int d^4z' \delta_{\epsilon_n^{(v)}}(z-z') \left[i S_F(x-z-\epsilon_n^{(v)}) \gamma^{\nu} i S_F(z-\epsilon_n^{(v)}-y) \cdot i D_{F_{\mu\nu}}(z'-z) + (\epsilon \rightarrow -\epsilon) \right]$$

Esta relação, escrita no espaço dos momenta, fornece-nos a seguinte regra para um vértice com uma linha de fótons:



$$= -ie \gamma^{\nu} Z(\epsilon^2) \tilde{\delta}(k, \epsilon) \cos[(p+q), \epsilon] \delta^4(p-q-k) \quad (IV-11a)$$

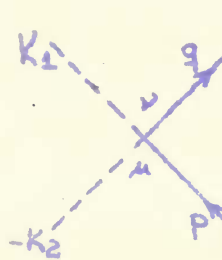
onde $\tilde{\delta}(k_\nu, \epsilon) \equiv \frac{\sin k_\nu \epsilon}{k_\nu \epsilon}$ é a transformada de Fourier de $\delta_{\epsilon m}^{(\nu)}(Z-3)$.

A realização formal do limite $\epsilon \rightarrow 0$ reduz a forma (IV-11a) ao vértice usual: $-ie\gamma^\nu Z_1$, com $Z_1 \equiv Z(0)$ [4].

No cálculo do elemento de matriz, para um gráfico com um número par de linhas de fótons, devemos usar a quantidade $q_+^-(Z, \epsilon_m^{(\nu)})$. Desta maneira, a sua expressão analítica é obtida da relação:

$$\frac{-ie^2}{\epsilon} Z(\epsilon^2) \sum_{\nu} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} d\epsilon' \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} d\epsilon'' \left[d^4 Z \langle 0 | T \left[\bar{\Psi}(x) \bar{\Psi}(y) A_\lambda(Z') A_\mu(Z'') A_\nu(Z + \epsilon'_m{}^{(\nu)}) \cdot A_\nu(Z + \epsilon''_m{}^{(\nu)}) \frac{q_+^-(Z, \epsilon_m^{(\nu)})}{2\epsilon} \right] | 0 \rangle \right]$$

que fornece a regra



$$= -ie^2 \gamma^\nu Z(\epsilon^2) 2\epsilon \delta_{\mu\nu} \tilde{\delta}(k_{1\nu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{2\nu}, \epsilon) \cdot \sin[(p+q)_\nu \epsilon] \delta^4(p-q+k_1-k_2) \quad (IV-11b)$$

Estendendo estes resultados, observaremos que as expressões analíticas correspondentes aos vértices com um ímpar de linhas de fótons conterão a função cosseno (devido à $q_-^-(Z, \epsilon_m^{(\nu)})$) e o fator $(2\epsilon)^{n-1}$, por causa das n ($n = 1, 3, 5, \dots$) integrações entre os intervalos $(-\epsilon, +\epsilon)$ que fornecem a quantidade $(2\epsilon)^n$ e do ϵ constante no denominador da definição (IV-1). Os vérti-

ces com um número par de linhas de fótons estarão relacionados com a função seno (devido à $q_+^+(z, \epsilon_n^{(v)})$) e também ao fator $(2\epsilon)^{n-1}$.

Por exemplo, para os vértices com três e quatro linhas de fótons temos:



$$= (-ie)^3 \gamma^{\nu\lambda} (\epsilon^2) (2\epsilon)^2 \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\lambda} \tilde{\delta}(K_{1\nu}, \epsilon) \tilde{\delta}(K_{2\nu}, \epsilon) \tilde{\delta}(K_{3\nu}, \epsilon) \cdot \cos[(p+q)_\nu \epsilon] \delta^4(p + K_1 + K_3 - K_2 - q) \quad (IV-11c)$$



$$= (-i)^3 e^4 \gamma^{\nu\lambda} (\epsilon^2) (2\epsilon)^3 \tilde{\delta}_{\mu\nu} \tilde{\delta}_{\mu\lambda} \tilde{\delta}_{\mu\rho} \tilde{\delta}(K_{1\nu}, \epsilon) \quad (IV-11d)$$

$$\tilde{\delta}(K_{2\nu}, \epsilon) \tilde{\delta}(K_{3\nu}, \epsilon) \tilde{\delta}(K_{4\nu}, \epsilon) \sin[(p+q)_\nu \epsilon] \delta^4(p + K_1 + K_2 - K_3 - K_4 - q)$$

As relações (IV-11) e as considerações realizadas acima permitem-nos obter a seguinte generalização para as regras que fornecem os vértices com um número qualquer de linhas de fótons, para $\epsilon \neq 0$, e em ordem mais baixa do desenvolvimento perturbativo.

- a) aos vértices com um número ímpar $2n+1$ ($n=0, 1, \dots$) de linhas de fótons corresponde:

$$-ie (ie)^{2n} \epsilon^2 (\epsilon^2) (2\epsilon)^{2n} \gamma^\nu \left[\tilde{\delta}(K_\nu, \epsilon) \right] \cos[(p+q)_\nu \epsilon] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{2n+1} \delta_{\mu_j \mu_l} \delta^4(p - q + \sum_{i=1}^{2n+1} K_i) \quad (IV-12)$$

- b) aos vértices com um número par $2n$ ($n=1, 2, \dots$) de linhas de fótons corresponde:

$$i (ie)^{2n} \epsilon^2 (\epsilon^2) (2\epsilon)^{2n-1} \gamma^\nu \left[\tilde{\delta}(K_\nu, \epsilon) \right] \sin[(p+q)_\nu \epsilon] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{2n} \delta_{\mu_j \mu_l} \delta^4(p - q + \sum_{l=1}^{2n} K_l) \quad (IV-13)$$

A análise destas regras permite-nos escrever as seguintes modificações para os diagramas:

1) Se o vértice possuir um número par de linhas de fótons devemos usar a função seno e se for ímpar, a função cosseno.

2) Cada nova linha de fóton adiciona o fator $\pm e 2\epsilon \tilde{\delta}(k, \epsilon)$ se o novo possuir $(2n+1)$ linhas (com o sinal negativo) ou $2n$ linhas (com o sinal positivo). Em ambos os casos $n=1, 2, \dots$

Devemos, também, considerar o fator $-iS_F(p)$ correspondente a cada linha de fermion contraída consigo mesma. Adicionando estas regras às usuais, conforme a referência [5], podemos obter as expressões analíticas correspondentes aos diagramas do desenvolvimento perturbativo da teoria.

Como frisamos, com a realização formal do limite $\epsilon \rightarrow 0$, somente a expressão (IV-11a) não será nula, reduzindo-se ao vértice usual: $-ie \gamma^\mu \delta^4(p-q-k)$.

As expressões apresentadas para os vértices podem ser interligadas entre si através de uma diferenciação. Isto torna-se mais evidente pela observação da forma explícita dos exemplos citados. Esta conexão possibilita-nos definir uma série de relações entre eles que se constituem em diferentes formas da identidade generalizada de Ward. Com esta finalidade vamos representar um vértice com um número n de linhas de fótons da seguinte maneira:

$$= e^n \Gamma(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; k_1, k_2, \dots, k_n, p) \quad (IV-14)$$

com

$$\Gamma_{(K_1, K_2, \dots, K_m, P)}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m} = (i)^{m+1} Z(E^2) (2E)^{m-1} \gamma^{\nu} \left[\tilde{\delta}(K_{\nu}, E) \right]^m \sin 2P_{\nu} E \delta^4 \left(z - \sum_{i=1}^m K_i \right) \quad (\text{IV-15})$$

se n fôr par e

$$\Gamma_{(K_1, K_2, \dots, K_n, P)}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n} = -(i)^n Z(E^2) (2E)^{n-1} \gamma^{\nu} \left[\tilde{\delta}(K_{\nu}, E) \right]^n \cos 2P_{\nu} E \delta^4 \left(z - \sum_{i=1}^n K_i \right) \quad (\text{IV-16})$$

se n fôr ímpar.

Fácilmente, comprovamos a existência da seguinte conexão entre os vértices com uma e duas linhas de fótons:

$$\sum_{\mu_2} K_{2, \mu_2} \Gamma_{(K_1, K_2, P)}^{\mu_1, \mu_2} = \Gamma_{(K_1, P - \frac{K_2}{2})}^{\mu_1} - \Gamma_{(K_1, P + \frac{K_2}{2})}^{\mu_1} \quad (\text{IV-17a})$$

Analogamente, entre os vértices com duas e três linhas de fótons existe a relação:

$$\sum_{\mu_3} K_{3, \mu_3} \Gamma_{(K_1, K_2, K_3, P)}^{\mu_1, \mu_2, \mu_3} = \Gamma_{(K_1, K_2, P - \frac{K_3}{2})}^{\mu_1, \mu_2} - \Gamma_{(K_1, K_2, P + \frac{K_3}{2})}^{\mu_1, \mu_2} \quad (\text{IV-17b})$$

Generalizando, obtemos a identidade:

$$\sum_{\mu_m} K_{m, \mu_m} \Gamma_{(K_1, K_2, \dots, K_m, P)}^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m} = \Gamma_{(K_1, K_2, \dots, K_{m-1}, P - \frac{K_m}{2})}^{\mu_1, \dots, \mu_{m-1}} - \Gamma_{(K_1, K_2, \dots, K_{m-1}, P + \frac{K_m}{2})}^{\mu_1, \dots, \mu_{m-1}} \quad (\text{IV-18})$$

Devemos ressaltar que nas relações apresentadas acima, a repetição de índices idênticos não possui o significado de soma.

Um caso especial pode ocorrer quando um dos k_i for nulo. Por exemplo, se derivarmos a relação (IV-18) em relação a k_m e colocarmos $k_m=0$, obtemos a seguinte identidade:

$$\Gamma^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m}(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m=0, p) = -\frac{\partial}{\partial p_{\mu_m}} \Gamma^{\mu_1, \dots, \mu_{m-1}}(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, p) \quad (\text{IV-19})$$

Em particular, entre os vértices com uma e duas linhas de fótons e os com duas e três linhas, existem as conexões:

$$\Gamma^{\mu_1, \mu_2}(k_1, k_2=0, p) = -\frac{\partial}{\partial p_{\mu_2}} \Gamma^{\mu_1}(k_1, p) \quad (\text{IV-20a})$$

$$\Gamma^{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(k_1, k_2, k_3=0, p) = -\frac{\partial}{\partial p_{\mu_3}} \Gamma^{\mu_1, \mu_2}(k_1, k_2, p) \quad (\text{IV-20b})$$

No desenvolvimento apresentado as expressões para os vértices eram obtidas pela multiplicação do elemento de matriz (IV-5) pelos fatores $-i D_{F_{\mu\nu}}$, $-i S_F^{-1}$ e por um outro $-i S_F^{-1}$.

Assim, quando não existirem linhas de fótons, o vértice $\Gamma^{\nu}(p, p)$ será dado simplesmente por $S_F^{-1}(p)$.

Utilizando a relação (IV-17a) e suprimindo a linha do fóton relacionado ao momentum k_1 , obtemos:

$$\sum_{\mu} k_{2\mu} \Gamma^{\mu}(k_2, p) = -S_F^{-1}\left(p - \frac{k_2}{2}\right) + S_F^{-1}\left(p + \frac{k_2}{2}\right)$$

Esta relação fornece-nos o seguinte caso especial para a identidade de de Ward:

$$\Gamma^\mu(p, p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F^{-1}(p) \quad (\text{IV-21})$$

Da qual segue a relação usual:

$$S_F(p) \Gamma^\mu(p, p) S_F(p) = - \frac{\partial S_F(p)}{\partial p_\mu} \quad (\text{IV-22})$$

A identidade (IV-19) permite-nos substituir a expressão de um vértice relacionado com n linhas de fótons, quando um ou mais momenta forem nulos, pela derivada de um vértice correspondente a $n-1$ linhas. Como constatamos no primeiro capítulo deste trabalho, a demonstração do cancelamento da divergência quadrática de $\Pi^{\mu\nu}(K)$ é uma consequência direta do uso destas relações. Na próxima seção mostraremos que elas também nos possibilitam a obtenção do resultado $\Pi^{\mu\nu}(0,0,0,0) = 0$ para $\epsilon \neq 0$ e finito.

Queremos mencionar, sem fornecer a prova, de que a relação (IV-19) permanece válida para os vértices completos definidos adequadamente (a parte própria).

Concluindo esta seção, vamos apresentar alguns novos tipos de diagramas que aparecem no desenvolvimento perturbativo das funções de Green. Devido à existência do fator ϵ^n ($n \geq 1$) nas expressões correspondentes aos vértices, somente os diagramas divergentes cujas integrais comportam-se como $\epsilon^{-(n+1)}$ e os finitos contribuirão no limite local da teoria.

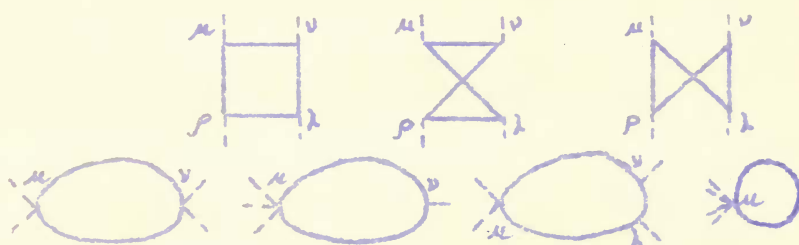
Para o tensor polarização do vácuo $\Pi^{\mu\nu}(k)$, em ordem α , podemos somente formar os seguintes diagramas:



fig(IV-1)

O diagrama (a) é construído com o auxílio de dois vértices (IV-11a) e o (b) com o (IV-11b). Como mencionamos, a expressão analítica do gráfico (b) comporta-se como \mathcal{E}^{-2} e cancela a parte quadraticamente divergente de (a).

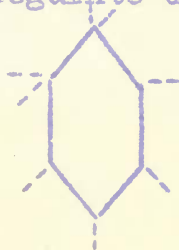
Outros diagramas que poderão contribuir no limite $\mathcal{E} \rightarrow 0$ são os relacionados com o sistema de quatro fótons em ordem mais baixas:



fig(IV-2)

Os três primeiros comportam-se como $l_n \mathcal{E}$ e os quatro últimos são finitos. Por exemplo, o último gráfico contém o fator \mathcal{E}^3 multiplicado por uma integral cúbicamente divergente.

Os gráficos associados com seis vértices, e diferentes do usual, serão sempre nulos no limite $\mathcal{E} \rightarrow 0$. Isto deve-se à multiplicação de um fator \mathcal{E}^n ($n \geq 4$) por uma integração finita. Assim, por exemplo, o seguinte diagrama não contribuirá no limite $\mathcal{E} \rightarrow 0$.



Para a parte de auto energia própria do elétron $\Sigma(p)$ podemos formar, em ordem α , apenas o gráfico usual. Entretanto, em ordem α^2 , além das contribuições usuais para $\Sigma(p)$ existirão as seguintes:



Uma análise de suas formas analíticas, facilmente obtidas com o uso das relações (IV-11), fornece-nos valores finitos para estes diagramas. Por exemplo, ao gráfico (a) corresponde a expressão

$$ie^4 \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{\lambda} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z^0(\epsilon^2) 2\epsilon \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{\delta}(k_{\mu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{\nu}, \epsilon) \cos[(2p-k)_{\mu} \epsilon] \gamma^{\mu} S_F(p-k) \gamma^{\nu} D_{F_{\mu\nu}}(k) \cdot \left(\frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \tilde{\delta}(k'_{\nu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k'_{\lambda}, \epsilon) \cos[(2p-k')_{\lambda} \epsilon] S_F(p-k') \gamma^{\lambda} D_{F_{\nu\lambda}}(k') \sin[(2p-k-k')_{\nu} \epsilon] \right)$$

que comporta-se como o produto de ϵ por uma integral linearmente divergente e por outro fator que pertence a auto energia própria do elétron $\Sigma(p)$ (que é finita). Estes diagramas serão discutidos no próximo capítulo onde apresentaremos um refinamento natural na definição da densidade Lagrangeana.

Queremos ressaltar que, devido à invariância frente à conjugação de carga da formulação (IV-1), o teorema de Furry permanece válido. Isto segue do ponto c) da página 94. Assim, nas construções exemplificadas acima, omitimos os diagramas, ou parte deles, que possuem conexões através de um número ímpar de fótons.

Como ilustração do desenvolvimento perturbativo,

mos indicar a maneira como podemos obter as expressões analíticas para o tensor polarização do vácuo de um sistema de quatro fótons, em ordem α^6 . Para isto, devemos calcular a transformada de Fourier do seguinte elemento de matriz, na representação de interação:

$$\langle 0 | T \left[A_\alpha(x) A_\beta(x') A_\gamma(x'') A_\delta(x''') \exp(i \int_{int} \mathcal{L}(z) d^4z) \right] | 0 \rangle \quad (IV-23)$$

Como mencionamos, podemos levar em conta as contribuições devidas à densidade Lagrangeana livre considerando os propagadores completos. Neste sentido, o cálculo para a obtenção da forma do tensor $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ pode ser realizado com o uso da densidade total $\mathcal{L}(z)$.

Substituindo nesta expressão o termo correspondente da expansão da exponencial em série de potências relativas ao operador campo eletromagnético $A_\nu(y)$,

$$\frac{1}{4!} \int d^4y \int d^4y' \int d^4y'' \int d^4y''' \sum_{\mu\nu\lambda\rho} A_\mu(y''') A_\nu(y'') A_\lambda(y') A_\rho(y) \frac{\delta}{\delta A_\mu(y''')} \cdot \frac{\delta}{\delta A_\nu(y'')} \frac{\delta}{\delta A_\lambda(y')} \frac{\delta}{\delta A_\rho(y)} \exp(i \int \mathcal{L}(z) d^4z) \Big|_{A=0}$$

obtemos:

$$\int d^4y \int d^4y' \int d^4y'' \int d^4y''' \sum_{\mu\nu\lambda\rho} \mathcal{D}_{F_{\alpha\mu}}(x-y''') \mathcal{D}_{F_{\beta\nu}}(x'-y'') \mathcal{D}_{F_{\gamma\lambda}}(x''-y') \mathcal{D}_{F_{\delta\rho}}(x'''-y)$$

$$\cdot \Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(y, y', y'', y''')$$

com $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(y, y', y'', y''')$ dado por:

$$\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(y, y', y'', y''') = \langle 0 | T \left[\frac{\delta}{\delta A_\mu(y''')} \frac{\delta}{\delta A_\nu(y'')} \frac{\delta}{\delta A_\lambda(y')} \frac{\delta}{\delta A_\rho(y)} \exp(i \int \mathcal{L}(z) d^4z) \right] | 0 \rangle \quad (IV-24)$$

A diferenciação contida nesta definição, mostra-nos que o tensor polarização do vácuo possuirá quinze termos, que serão os valores esperados do vácuo dos seguintes produtos ordenados no tempo:

$$i^4 \frac{\delta}{\delta A_\mu(y''')} \int \mathcal{L}(z) d^4z \frac{\delta}{\delta A_\nu(y'')} \int \mathcal{L}(z) d^4z \frac{\delta}{\delta A_\lambda(y')} \int \mathcal{L}(z) d^4z \frac{\delta}{\delta A_\rho(y)} \int \mathcal{L}(z) d^4z \quad (\text{IV-25a})$$

$$i^3 \frac{\delta}{\delta A_1} \frac{\delta}{\delta A_2} \int \mathcal{L}(z) d^4z \frac{\delta}{\delta A_3} \int \mathcal{L}(z) d^4z \frac{\delta}{\delta A_4} \int \mathcal{L}(z) d^4z \quad (\text{IV-25b})$$

$$i^2 \frac{\delta}{\delta A_1} \frac{\delta}{\delta A_2} \int \mathcal{L}(z) d^4z \frac{\delta}{\delta A_3} \frac{\delta}{\delta A_4} \int \mathcal{L}(z) d^4z \quad (\text{IV-25c})$$

$$i^2 \frac{\delta}{\delta A_1} \frac{\delta}{\delta A_2} \frac{\delta}{\delta A_3} \int \mathcal{L}(z) d^4z \frac{\delta}{\delta A_4} \int \mathcal{L}(z) d^4z \quad (\text{IV-25d})$$

$$i \frac{\delta}{\delta A_\mu(y''')} \frac{\delta}{\delta A_\nu(y'')} \frac{\delta}{\delta A_\lambda(y')} \frac{\delta}{\delta A_\rho(y)} \int \mathcal{L}(z) d^4z \quad (\text{IV-25e})$$

onde A_1, A_2, A_3, A_4 , simbolizam as possíveis combinações entre $A_\mu(y''')$, $A_\nu(y'')$, $A_\lambda(y')$ e $A_\rho(y)$. Todas estas relações são tomadas para $A_\mu(z)=0$. As expressões analíticas dos diagramas da figura (IV-2) serão obtidas pela transformada de Fourier da definição (IV-24) com o auxílio das relações (IV-25). Este cálculo, como veremos na próxima seção, indica-nos, explicitamente, a maneira como poderão ocorrer os diversos cancelamentos para a demonstração de que $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0)=0$, quando $\epsilon \neq 0$.

A relação (IV-25b) possuirá seis termos que são as combinações de quatro elementos dois a dois, a (IV-25c) terá três e a (IV-25d) terá quatro. Isto nos mostra que existirão seis dia

gramas do tipo (f) da figura (IV-2), que corresponde à expressão (IV-25b); três para (d), correspondente à (IV-25c) e quatro do (e). Além disso, devemos levar em conta que cada tipo de diagrama poderá ocorrer duplamente devido aos dois sentidos para a linha do elétron. Este fato decorre da dupla possibilidade de contração dos pares de operadores campo de elétrons. As expressões analíticas destes diagramas serão idênticas.

Estas considerações permitem-nos formular as seguintes regras para a obtenção do número relacionado a cada tipo de gráfico que ocorrerá no desenvolvimento perturbativo das funções de Green:

a) Cada tipo de diagrama ocorrerá um número de vezes idêntico ao necessário para a simetrização dos índices pertencentes aos vértices.

b) Cada tipo de diagrama poderá também ocorrer duas vezes se ambos os contornos fechados do elétron fornecerem gráficos diferentes.

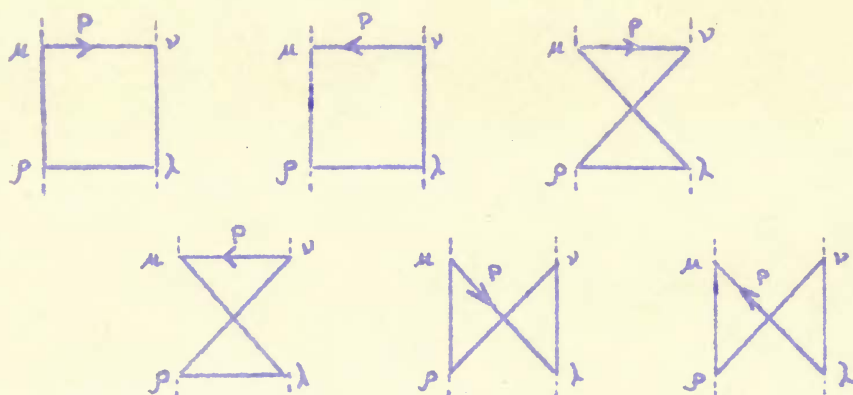
Concluindo esta seção, queremos comparar os pontos de vista adotados em relação ao limite $\epsilon \rightarrow 0$ na formulação apresentada acima e o da proposição (I-46). No cálculo do tensor $\Pi^{\mu\nu}(k)$ e na análise, a ser apresentada, do comportamento do tensor polarização do vácuo para um sistema de quatro fótons $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$, desenvolvemos em primeiro lugar a teoria não localmente e, somente após a obtenção dos resultados realizamos o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Verificamos que no caso do tensor $\Pi^{\mu\nu}(k)$ esta circunstância não introduziu nenhuma dificuldade para a teoria. O mesmo será válido para $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$. Entretanto, uma maneira mais correta de desenvolvermos a teoria seria através de diferentes ϵ^i .

($i= 1, 2, 3, \dots n$), (conforme na definição (I-46)) com seus limites definidos segundo certa prescrição, mencionada na referência [34]. Porém, esta maneira de realização dos limites acarreta problemas com a unitariedade da teoria pois os \mathcal{E}^i dependem da posição. Neste sentido, preferimos considerar, primeiramente, a teoria como sendo não local e somente realizar o limite nos resultados finais. Queremos ressaltar que o uso da definição (I-46) com os diferentes \mathcal{E}^i fornece os mesmos resultados tanto para o tensor $\Pi^{\mu\nu}(k)$ como para $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$. Ou seja, neste último caso, também $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0)=0$. Entretanto, o cancelamento processa-se de uma maneira diferente da que será mostrada na próxima seção. Isto nos indica que os resultados independem da maneira como o deslocamento é definido, mas estão relacionados com uma formulação invariante frente à transformação de calibre.

Resumindo, analisamos nesta seção alguns aspectos do desenvolvimento perturbativo da teoria formulada através da relação (IV-1). Em especial, apresentamos as expressões analíticas dos novos tipos de vértices e as conexões (as identidades generalizadas de Ward) que podem ocorrer entre eles.

IV-3 O tensor polarização do vácuo $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$.

No cálculo usual, o tensor polarização do vácuo do sistema de quatro fótons $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ descrito, em ordem α^2 , pelos seguintes gráficos:



fig(IV-4)

A estes gráficos corresponde a expressão:

$$\tilde{\Pi}^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \chi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \chi^{\mu\nu\rho\lambda}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \chi^{\mu\lambda\nu\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) \quad (IV-26)$$

com $\chi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ dado por:

$$\chi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -2e^4 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\nu S_F(p') \gamma^\lambda S_F(p'') \gamma^\rho S_F(p''') \right] \quad (IV-27)$$

onde o valor 2 é devido à igual contribuição dos gráficos com ambos os sentidos da linha do elétron.

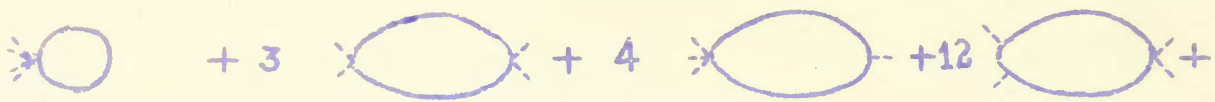
Como observamos na expressão (IV-27), cada parcela de (IV-26) contém um termo logaritmicamente divergente correspondente a todos os $k_i = 0$ ($i=1, 2, 3, 4$). Entretanto, através de uma integração simétrica o coeficiente deste termo logaritmicamente divergente é nulo e, portanto $\tilde{\Pi}^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ finito [5.].

Como mencionamos na seção anterior, existirão novos tipos de gráficos além dos apresentados acima que, como constataremos, fornecerão expressões finitas. Os gráficos usuais (figura (IV-4)) contribuem com partes logaritmicamente divergentes e finitas. Veremos que estas expressões divergentes cancelam-se en-

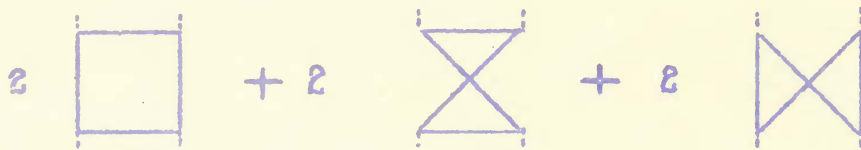
tre si e a parte finita dos diagramas usuais, para todos os $\kappa_i = 0$, anula a dada pela soma das contribuições dos novos gráficos. Desta maneira, obteremos, considerando $\epsilon \neq 0$, o resultado convencional $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0) = 0$. Isto está de acôrdo com a invariância da teoria frente à transformação de calibre [5]. Devemos ressaltar que usualmente o termo correspondente aos gráficos da figura (IV-4), com todos os $\kappa_i = 0$, é nulo. No nosso caso ele não é zero para $\epsilon \neq 0$, e o seu valor é necessário para o cancelamento das demais contribuições finitas. Estes resultados serão obtidos diretamente através da aplicação das identidades generalizadas de Ward definidas anteriormente. Estas conclusões para $\epsilon \neq 0$, e o cancelamento da divergência quadrática de $\Pi^{\mu\nu}(k)$, também realizado para $\epsilon \neq 0$, indicam-nos, para estes casos, a validade do desenvolvimento não local da teoria.

Finalmente, mostraremos que, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos o mesmo valor finito que o convencional para o tensor $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ em ordem α^2 .

Vamos analisar graficamente este tensor, em ordem α^2 , decorrente da proposição (IV-1) para a densidade Lagrangeana. Como verificamos, com o auxílio dos diversos vértices apresentados anteriormente, podemos apenas construir os diagramas apresentados na figura (IV-2) para o sistema de quatro fótons. Como resultados, cada tipo de diagrama pode ocorrer mais de uma vez. Levando em conta as duas regras mencionadas na seção anterior, o tensor $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ é constituído graficamente por:



fig(IV-5)



O número em frente a cada gráfico indica a sua frequência de ocorrência.

Comparando as figuras (IV-5) e (IV-4) observamos que o tensor polarização do vácuo conterà novas contribuições. O nosso propósito reside na análise da validade das propriedades usuais, para $E \neq 0$. Vamos estudar primeiramente a condição $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0) = 0$.

Antes de investigarmos com mais detalhes este resultado vamos demonstrá-lo gráficamente com o uso da identidade generalizada (IV-19) com todos os K_i nulos e para $\mu = \nu = \lambda = \rho$. O cancelamento das contribuições dos gráficos da figura (IV-5) ocorrerá através das seguintes conexões:

Diagrammatic equation showing a tadpole diagram with index μ equal to the negative of a self-energy loop diagram with index μ .

fig(IV-6a)

Diagrammatic equation showing a self-energy loop diagram with index μ equal to the negative of a vacuum polarization loop diagram with index μ minus 2 times another self-energy loop diagram with index μ .

fig(IV-6b)

Diagrammatic equation showing a square diagram with index μ equal to the negative of a crossed square diagram with index μ minus another crossed square diagram with index μ minus 3 times a ghost loop diagram with index μ .

fig(IV-6c)

Por exemplo, o cancelamento indicado na figura (IV-6a) ocorre pela substituição do vértice $\Gamma^{\mu\mu\mu\mu}(0,0,0,0,p)$ do gráfico à esquerda por $-\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Gamma^{\mu\mu\mu\mu}(0,0,0,0,p)$ (de acordo com a identidade (IV-19)) e através de uma integração parcial que, devido à relação (IV-22), introduz um novo vértice no contorno fechado do elétron. Análogamente, usando estas identidades generalizadas demonstramos as conexões restantes das figuras (IV-6b) e (IV-6c) e, portanto, que $\Pi^{\mu\mu\mu\mu}(0,0,0,0) = 0$.

Usando as regras para os vértices fornecidas na seção anterior, verificamos que o primeiro diagrama da figura (IV-5) contribuirá analiticamente com a expressão:

$$A^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) = e^4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z(\epsilon^2) (2\epsilon)^3 \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda} \delta_{\mu\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\delta}(k_{1\mu}, \epsilon) \cdot \quad (IV-28)$$

$$\tilde{\delta}(k_{2\mu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{3\mu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{4\mu}, \epsilon) \text{sen } 2 p_\mu \epsilon \text{Tr} [\gamma^\mu S_F(p)]$$

Novamente, chamamos a atenção de que a repetição de índices não tem o significado de somatório.

Para os seguintes três diagramas



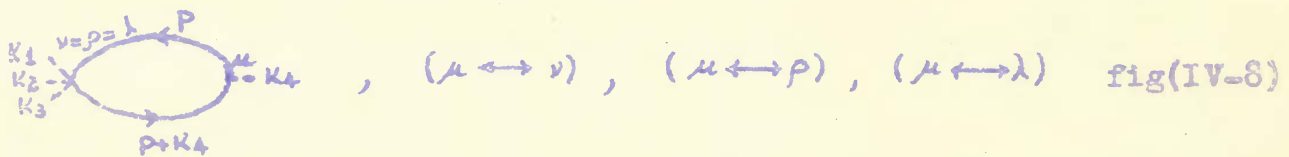
obtemos:

$$B^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda} + B^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\rho} + B^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} \quad (IV-29a)$$

com

$$B^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) \tilde{\delta}_{\mu\rho} \tilde{\delta}_{\nu\lambda} = - e^4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} z^2 (\epsilon^2) (2\epsilon)^2 \left(\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\delta}(k_{1\mu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{2\mu}, \epsilon) \right. \\ \left. \tilde{\delta}(k_{3\nu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{4\nu}, \epsilon) \text{sen}[(2p+k_1+k_2)_\nu \epsilon] \text{sen}[(2p+k_1+k_2)_\mu \epsilon] \text{Tr}[\delta^\nu \mathcal{S}_F(p) \delta^\mu \mathcal{S}_F(p+k_1+k_2)] \right) \quad (\text{IV-29b})$$

Analogamente, aos quatro gráficos



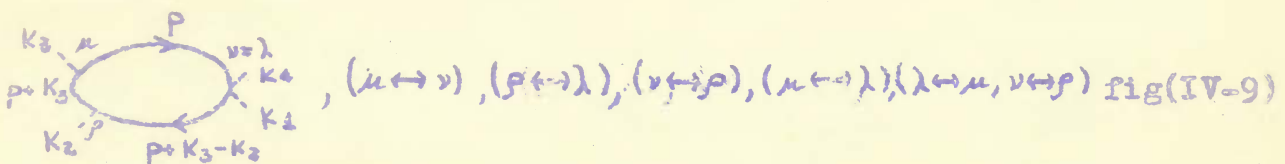
corresponde:

$$C^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) \tilde{\delta}_{\lambda\rho} \tilde{\delta}_{\mu\nu} + C^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) \tilde{\delta}_{\mu\lambda} \tilde{\delta}_{\nu\rho} + C^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) \tilde{\delta}_{\mu\nu} \tilde{\delta}_{\lambda\rho} + C^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) \tilde{\delta}_{\mu\rho} \tilde{\delta}_{\nu\lambda} \quad (\text{IV-30a})$$

com

$$C^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) \tilde{\delta}_{\lambda\rho} \tilde{\delta}_{\mu\nu} = e^4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} z^2 (\epsilon^2) (2\epsilon)^2 \left(\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\delta}(k_{1\nu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{2\nu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{3\nu}, \epsilon) \right. \\ \left. \tilde{\delta}(k_{4\mu}, \epsilon) \cos[(2p+k_4)_\nu \epsilon] \cos[(2p+k_4)_\mu \epsilon] \text{Tr}[\delta^\mu \mathcal{S}_F(p) \delta^\nu \mathcal{S}_F(p+k_4)] \right) \quad (\text{IV-30b})$$

Das doze contribuições ao quarto gráfico da fig(IV-5), seis são relacionadas com a simetrização dos índices, ou seja:



e as restantes seis diferem destas apenas pelo sentido da linha fechada do elétron. Análogamente aos casos anteriores, obtemos as seguintes expressões para estes gráficos:

$$D^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i)\delta_{\lambda\nu} + D^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i)\delta_{\nu\rho} + D^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i)\delta_{\lambda\rho} + D^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i)\delta_{\mu\lambda} + D^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i)\delta_{\mu\rho} + D^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i)\delta_{\mu\nu} \quad (\text{IV-31a})$$

com:

$$D^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)\delta_{\lambda\nu} = -2e^4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z^2(\epsilon^2) 2\epsilon \left(\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\delta}(k_{3\mu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{2\rho}, \epsilon) \right)$$

$$\tilde{\delta}(k_{1\nu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{4\nu}, \epsilon) \cos[(2p+k_3)_\mu \epsilon] \cos[(2p+2k_3-k_2)_\rho \epsilon] \quad (\text{IV-31b})$$

$$\cdot \sin[(2p+k_3-k_2)_\nu \epsilon] \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\nu S_F(p+k_3-k_2) \gamma^\rho S_F(p+k_3) \right]$$

O fator dois corresponde às idênticas contribuições dos gráficos com ambos os contornos.

Finalmente, os três últimos diagramas da figura (IV-5) possuem a seguinte expressão:

$$E^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -2e^4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z^4(\epsilon^2) \tilde{\delta}(k_{1\mu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{2\nu}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{3\lambda}, \epsilon) \tilde{\delta}(k_{4\rho}, \epsilon) \quad (\text{IV-32})$$

$$\left\{ \chi^{\mu\nu\lambda\rho} + \chi^{\mu\nu\rho\lambda} + \chi^{\mu\lambda\nu\rho} \right\}$$

com

$$\chi^{\mu\nu\lambda\rho} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos[(2p+k_2)_\nu \epsilon] \cos[(2p+2k_2-k_3)_\lambda \epsilon] \cos[(2p+k_2-k_3-k_1)_\rho \epsilon]$$

$$\cdot \cos[(2p-k_1)_\mu \epsilon] \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\nu S_F(p+k_2) \gamma^\lambda S_F(p+k_2-k_3) \gamma^\rho S_F(p-k_1) \right] \quad (\text{IV-33a})$$

$$\chi^{\mu\nu\lambda\rho} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos[(2p+k_2)_\nu \epsilon] \cos[(2p+2k_2-k_4)_\rho \epsilon] \cos[(2p+k_2-k_4-k_1)_\lambda \epsilon] \cdot \cos[(2p-k_1)_\mu \epsilon] T_2 \left[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\nu S_F(p+k_2) \gamma^\rho S_F(p+k_2-k_4) \gamma^\lambda S_F(p-k_1) \right] \quad (IV-33b)$$

$$\chi^{\mu\lambda\nu\rho} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos[(2p-k_3)_\lambda \epsilon] \cos[(2p-2k_3+k_2)_\nu \epsilon] \cos[(2p-k_3+k_2-k_1)_\rho \epsilon] \cdot \cos[(2p-k_1)_\mu \epsilon] T_2 \left[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\lambda S_F(p-k_3) \gamma^\nu S_F(p-k_3+k_2) \gamma^\rho S_F(p-k_1) \right] \quad (IV-33c)$$

O fator 2 possui o mesmo significado que o da relação (IV-31b).

Desta maneira, obtemos:

$$\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) = A^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) + B^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) + C^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) + D^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) + E^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i) \quad (IV-34)$$

Com as expressões para A , B , C e D dados acima, verificamos que elas são finitas no limite $\epsilon \rightarrow 0$. As integrações nelas contidas fornecem um valor finito multiplicado, respectivamente, por ϵ^{-3} , ϵ^{-2} , ϵ^{-2} , ϵ^{-1} (que é a máxima divergência pertencente a cada integração) que é cancelado pela existência de um correspondente fator ϵ^n . As quantidades (IV-33) possuem uma divergência logarítmica, para $\epsilon \rightarrow 0$, relacionada com o termo em que todos os k_i são nulos. Se realizarmos formalmente o limite $\epsilon \rightarrow 0$, verificaremos que os termos A , B , C , e D serão nulos e a relação (IV-32) recai na usual (IV-26). Vamos, primeiramente, analisar o tensor $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ com todos os k_i nulos.

Escrevendo explicitamente o traço indicado na relação (IV-30b), verificamos através da simetrização da integral que es-

ta somente será diferente de zero se $\mu = \nu$. O mesmo é válido para as demais três expressões. Análogamente, constatamos que as quantidades (IV-33) só não serão nulas se todos os índices ou pares deles forem iguais e a relação (IV-31b) somente se todos os índices ou os relacionados com os fatores cossenos forem iguais.

Usando as formas analíticas das expressões que constituem o tensor $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0)$ verificamos que a sua soma é nula. Assim, por exemplo, a relação (IV-28), com todos os k_i nulos, possui a forma:

$$-e^4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z(\epsilon^2)(2\epsilon)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d}{dp_\mu} \cos 2p_\mu \epsilon \text{Tr} [\gamma^\mu S_F(p)]$$

Efetuada uma integração parcial e usando a identidade (IV-22) obtemos:

$$-e^4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z^2(\epsilon^2)(2\epsilon)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos 2p_\mu \epsilon \cos 2p_\mu \epsilon \text{Tr} [\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p)]$$

Esta relação cancela uma das (IV-30a).

Análiticamente, o cancelamento indicado nas figuras (IV-6) equivale a:

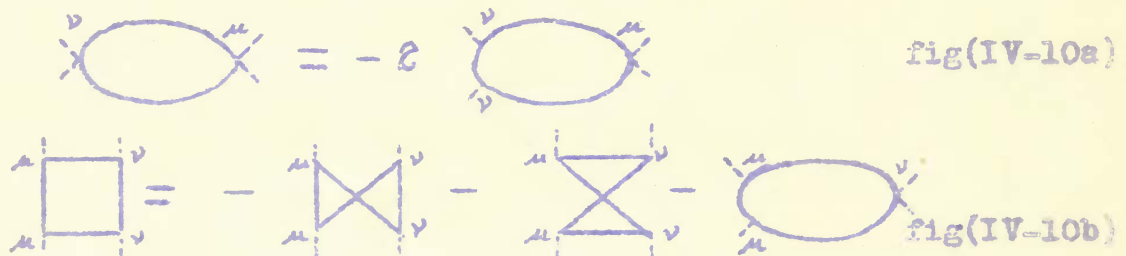
$$A^{\mu\mu\mu\mu}(0) + C^{\mu\mu\mu\mu}(0) = 0 \quad (\text{IV-35a})$$

$$C^{\mu\mu\mu\mu}(0) + B^{\mu\mu\mu\mu}(0) + D^{\mu\mu\mu\mu}(0) = 0 \quad (\text{IV-35b})$$

$$E^{\mu\mu\mu\mu}(0) + 3D^{\mu\mu\mu\mu}(0) = 0 \quad (\text{IV-35c})$$

Portanto, podemos concluir que $\Pi^{\mu\mu\mu\mu}(0,0,0,0) = 0$ para ϵ finito e diferente de zero. Entretanto, devemos ainda mostrar o can

celamento dos gráficos que são nulos apenas quando certos pares de índices forem idênticos. Como indicamos acima, eles correspondem aos das figuras (IV-4), (IV-7) e (IV-9). Vamos supor que $\mu = \rho$ e $\nu = \lambda$. Facilmente verificamos que somente contribuirão quatro gráficos dos doze pertencentes à figura (IV-9) quando $\mu = \rho$ e $\nu = \lambda$ (que são os relacionados com $D^{(0)} \delta_{\lambda\nu}^{\mu\nu\rho}$ e $D^{(0)} \delta_{\mu\rho}^{\mu\nu\rho}$) e apenas um dos três da figura (IV-7) (relacionado com $B^{(0)} \delta_{\mu\rho}^{\mu\nu\rho} \delta_{\nu\lambda}$). Novamente o uso das identidades generalizadas fornece-nos as seguintes conexões:



Análiticamente, estas relações são equivalentes a:

$$B^{(0)} \delta_{\mu\rho\nu\lambda}^{\mu\nu\rho} + D^{(0)} \delta_{\lambda\nu}^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (IV-36a)$$

$$E^{(0)} \delta_{\nu\lambda}^{\mu\nu\rho} \delta_{\mu\rho} + D^{(0)} \delta_{\mu\rho}^{\mu\nu\rho} = 0 \quad (IV-36b)$$

Observamos na relação indicada pela figura (IV-6c) que as partes logaritmicamente divergentes contidas em $E^{(0)}$ cancelam-se entre si. Vamos verificar explicitamente este fato. Sabemos que a expressão (IV-33a) com todos os K_i iguais a zero somente não será nula se todos os índices ou pares deles forem iguais.

Considerando $\mu = \nu = \lambda = \rho$ (para o outro caso o cálculo é idêntico) ela é escrita como:

$$E^{\mu\mu\mu\mu}(0) = -2e^4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z^4(\epsilon^2) \left(\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos^4 2p_\mu \epsilon \left\{ \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \right] \right\} \right) \quad (\text{IV-37})$$

Usando a identidade (IV-22) para a primeira parcela da (IV-37), e integrando parcialmente, obtemos para ela:

$$4e^4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z^4(\epsilon^2) \left(\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos^4 2p_\mu \epsilon \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \right] + \right. \\ \left. + 6e^4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z^3(\epsilon^2) 2\epsilon \left(\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos^2 2p_\mu \epsilon \sin 2p_\mu \epsilon \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \right] \right) \right) \quad (\text{IV-38})$$

A primeira parcela desta relação, que é logaritmicamente divergente, cancela a segunda da (IV-37). Portanto, quando $\epsilon \neq 0$, obtemos uma expressão finita diferente de zero (que, como verificamos é necessária para o cancelamento das contribuições dos novos gráficos) para os diagramas da figura (IV-4), ou seja:

$$E^{\mu\mu\mu\mu}(0) = 6e^4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z^3(\epsilon^2) 2\epsilon \left(\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos^2 2p_\mu \epsilon \sin 2p_\mu \epsilon \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \gamma^\mu S_F(p) \right] \right)$$

ao contrário do resultado usual que é nulo.

Resta-nos verificar que o valor finito obtido para o tensor $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ é idêntico ao usual no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Com esta finalidade, vamos expandir o tensor $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ em série de potências relativas aos k_i , isto é:

$$\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \widetilde{\Pi}^{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0) + \sum_{i=1}^4 \sum_{\alpha} k_i^{\alpha} \left. \frac{\partial \widetilde{\Pi}^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i, 0, 0, 0)}{\partial k_i^{\alpha}} \right|_{k_i=0} + \quad (IV-39)$$

$$+ \sum_{\substack{i,j \\ i+j}} \sum_{\alpha\beta} k_i^{\alpha} k_j^{\beta} \left. \frac{\partial}{\partial k_i^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial k_j^{\beta}} \Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_i, k_j, 0, 0) \right|_{\substack{k_i=0 \\ k_j=0}} + \dots$$

Observando as formas explícitas das expressões para $A(k_i)$, $B(k_i)$, $C(k_i)$ e $D(k_i)$ concluímos que, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, elas somente contribuirão ao termo $\widetilde{\Pi}^{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0)$ desta expansão, que é nulo. Isto podemos facilmente explicar pela análise dos diversos termos contidos na derivação. Assim, a derivada de qualquer ordem das funções $\widetilde{\delta}(k_{\mu}, \epsilon)$ é sempre nula, no limite $\epsilon \rightarrow 0$; as de ordem n das funções cosseno ou seno introduzem um fator ϵ^n e as dos propagadores tornam as integrais n vezes mais convergentes. Portanto, nesta expansão, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, somente a expressão $E^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$, que não contém nenhum fator ϵ^m ($m \geq 1$) na sua forma analítica, irá contribuir. Desta maneira, este desenvolvimento é equivalente ao da expressão (IV-26).

Devenos ressaltar que para $\epsilon \neq 0$, obtemos para o tensor $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ um valor finito e naturalmente diferente do usual devido aos novos gráficos. Por exemplo, a expressão (IV-30b) possui a seguinte forma explícita:

$$C^{\nu\mu}(k_1, k_2, k_3, k_4) = e^A \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z^2(\epsilon^2)(2\epsilon)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos[(2p+k_4)_{\nu} \epsilon] \cos[(2p+k_4)_{\mu} \epsilon]$$

$$\widetilde{\delta}(k_{1\nu}, \epsilon) \widetilde{\delta}(k_{2\nu}, \epsilon) \widetilde{\delta}(k_{3\nu}, \epsilon) \widetilde{\delta}(k_{4\nu}, \epsilon) \frac{8P^{\mu\nu} - 4g^{\mu\nu} P^2 + 4g^{\mu\nu} m^2 + 4P^{\mu} k_4^{\nu} + 4P^{\nu} k_4^{\mu} - 4g^{\mu\nu} P k_4}{[P^2 - m^2] [(P+k_4)^2 - m^2]}$$

(No cálculo acima usamos $S_F^{-1}(p) = \not{p} - m$).

As duas primeiras parcelas são canceladas pelos termos independentes de k_i dos demais gráficos. As quatro últimas integrações fornecem valores finitos proporcionais à $\ln \epsilon$ ou ϵ^{-1} . Portanto, devido ao existente ϵ^2 , estas parcelas serão finitas para $\epsilon \neq 0$ e nulas no limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Em resumo, com a nova formulação da teoria existirão no desenvolvimento perturbativo para $\epsilon \neq 0$ novos tipos de gráficos. Estes, no caso de $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$ contribuirão com expressões finitas. Para $\epsilon \neq 0$, obtemos para este tensor o resultado $\Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(0,0,0,0) = 0$, que é consequência do uso das identidades generalizadas de Ward e o mesmo valor finito que o convencional, no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Porém, quando $\epsilon \neq 0$, o seu valor finito será naturalmente diferente do usual devido à existência das novas contribuições.

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES SOBRE A LAGRANGEANA

V-1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar uma expressão modificada e mais consistente para a densidade Lagrangeana da Eletrodinâmica Quântica [35]. Como mencionamos no capítulo anterior, esta nova forma constitui-se num refinamento da proposição (IV-1) e fornece uma atenuação mais natural e adequada para a teoria. A introdução destas alterações tem por finalidade reparar duas diferentes dificuldades contidas na definição (IV-1).

A primeira relaciona-se com a não existência de um fator de corte efetivo, mesmo considerando ϵ como finito e diferente de zero. Isto significa que algumas integrais do desenvolvimento perturbativo da teoria permanecerão como divergentes. Por exemplo, na expressão (I-65) para $\Pi^{\mu\nu}(0)$ verificamos explicitamente a não ocorrência de uma atenuação efetiva. Isto deve-se à existência do fator $\cos^2 2p_\mu \epsilon$, contido na primeira parcela, que não possui a necessária propriedade de atenuação. Analogamente, constatamos que outras integrações, onde as funções trigonométricas aparecem numa potência par, também não possuem um significado preciso, como a da relação (IV-3 a). Esta dificuldade é uma consequência do aparecimento, nos valores esperados do vácuo do desenvolvimento perturbativo, de produtos de expressões do t_i

po $\bar{\Psi}(x+\epsilon)\gamma^\mu \Psi(x-\epsilon)$ e $\bar{\Psi}(y+\epsilon)\gamma^\nu \Psi(y-\epsilon)$. Estas quantidades coincidem quando x for igual a y . Assim, por exemplo, $\langle 0|T(\bar{\Psi}(x+\epsilon)\gamma^\mu \Psi(x-\epsilon)\bar{\Psi}(y+\epsilon)\gamma^\nu \Psi(y-\epsilon))|0\rangle$ tornar-se-á bastante singular quando $x=y$. A existência de tais expressões dá origem ao termo $h_+^+(x, \epsilon_n^{(v)})$ contido na densidade Lagrangeana (IV-1).

A segunda dificuldade reside na maneira como é definido o "smearing" para os operadores do campo de fermions. A expressão original para $Z(\epsilon^2)h_+^+(x, \epsilon_n^{(v)})/\partial\epsilon$ pode ser escrita como

$$Z(\epsilon^2) \frac{h_+^+(x, \epsilon_n^{(v)})}{\partial\epsilon} = \frac{-i}{4} \left\{ \int d\epsilon' Z(\epsilon'^2) \int_{\epsilon'} (\epsilon') \left[\bar{\Psi}(x+\epsilon_n^{(v)}) \gamma^\mu \Psi(x, \epsilon') \Psi(x-\epsilon_n^{(v)}) \right]_+^{(v-1)} + c.c. \right\}$$

com $\int_{\epsilon'} (\epsilon')$ dado por

$$\int_{\epsilon'} (\epsilon') = \frac{\delta(\epsilon'-\epsilon) - \delta(\epsilon'+\epsilon)}{\partial\epsilon} \quad (V-2)$$

Estas relações mostram-nos que os operadores do campo de fermions apresentam-se separados puntualmente (que corresponde à introdução de uma distribuição singular para a função "smearing") segundo a direção de cada eixo. Entretanto, parece ser mais natural a introdução de um "smearing" relacionado com um volume tetrádimensional finito $V(\epsilon)$ definido em torno do ponto x .

Portanto, de acordo com estas considerações devemos substituir o termo $h_+^+(x, \epsilon_n^{(v)})/\partial\epsilon$ por um outro mais conveniente.

Na próxima seção apresentaremos outra forma para a densidade Lagrangeana. Constataremos que ela introduzirá um fator de corte efetivo e um "smearing" para os operadores do campo de

fermions definido num volume finito e diferente de zero. Ao mesmo tempo, mostraremos as novas expressões para os vértices e as formas das identidades generalizadas de Ward.

V-2 A Lagrangeana

A expressão para a densidade Lagrangeana pode ser conjecturada através da comparação com a fornecida no segundo capítulo para o campo de fermions livres. Conforme a relação (II-11), os fermions livres são descritos pela seguinte densidade Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_{\text{livre}}(x) = \frac{1}{2} \lim_{V(\mathcal{E}) \rightarrow 0} \int_{V(\mathcal{E})} \left[\bar{\Psi}(x + \frac{\mathcal{E}}{2}) S^{-1}(\mathcal{E}) \Psi(x - \frac{\mathcal{E}}{2}) + \text{c.c.} - \text{Y.E.V.} \right] d^4 \mathcal{E} \quad (\text{V-3})$$

A quantidade $S^{-1}(\mathcal{E})$ (de acordo com (II-6)) é definida como sendo uma funcional do operador campo $\Psi(x)$ dada pelo inverso de seu propagador, que é considerado possuir uma densidade de Källén-Lehmann positiva, ou seja:

$$-i \int_{\alpha\beta} S^{-1}(\Psi; x-x'') \langle 0 | T \{ \Psi_\beta(x'') \bar{\Psi}_\alpha(x') \} | 0 \rangle d^4 x'' = \delta_{\alpha\beta} \delta^4(x-x') \quad (\text{V-4})$$

A integração contida em (V-3) é realizada sobre um volume $V(\mathcal{E})$ finito que inclui o ponto x . O limite $V(\mathcal{E}) \rightarrow 0$ indica a localidade da teoria.

A forma (V-3) sugere a seguinte definição para a densidade Lagrangeana da Eletrodinâmica Quântica [35], supondo $Z_3 = 0$:

$$L(x) = \frac{1}{2} \lim_{V(\epsilon) \rightarrow 0} \int \left[\bar{\psi}(x + \frac{\epsilon}{2}) F(\epsilon) \psi(x, \frac{\epsilon}{2}) \psi(x - \frac{\epsilon}{2}) + c.c. \text{valor esperado do vácuo} \right] d^4\epsilon \quad (V-5)$$

Nesta definição $F(\epsilon)$ é definido por:

$$F(\epsilon) = \frac{-i\epsilon}{\epsilon^6} Z(\epsilon^2) - \frac{g(\epsilon^2)}{\epsilon^4} \quad (V-6)$$

A forma desta quantidade foi conjeturada pela análise da transformada de Fourier do propagador do fermion para o caso de interação.

A função $\psi(x, \frac{\epsilon}{2})$ é dada, como em (I-6.1) por:

$$\psi(x, \frac{\epsilon}{2}) = T \epsilon \exp \left\{ -ie \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} A_\nu(x + \epsilon'_m(\nu)) d\epsilon' \right\} \quad (V-7)$$

As funções $Z(\epsilon^2)$ e $g(\epsilon^2)$ são autodeterminadas de uma maneira consistente através das equações de Schwinger-Dyson exigindo que elas possuam soluções finitas. A introdução do termo $g(\epsilon^2)$ tem a finalidade de tornar mais consistente a equação (14) para $m_\epsilon(S)$ da referência [26]. Se nesta equação colocarmos $S = \epsilon^2$ constatamos que $m(\epsilon^2)$ deverá ser igual a zero. Entretanto, a introdução do termo $g(\epsilon^2)$ na densidade Lagrangeana fará com que apareça na equação (14) da referência [26] mais uma parcela (proporcional a $g(\epsilon^2)$) evitando, assim, a dificuldade mencionada. Este termo pode ser autodeterminado calculando o valor de $m(S)$ para

certo ϵ ; em especial de $m_{\epsilon}(0) = 0$. A determinação da constante $Z(\epsilon^2)$ pelas equações de Schwinger-Dyson segue as mesmas etapas que da referência [26].

Queremos chamar a atenção para o fato de que no modelo do campo livre, a função $F(\epsilon)$ é dada como sendo a inversa do propagador de fermions. Entretanto, no caso de campos em interação, provavelmente, com um ajuste das constantes, $F(\epsilon)$ torne-se aproximadamente $S^{-1}(\epsilon)$.

Observamos que a proposição (V-5) repara as duas dificuldades mencionadas na introdução deste capítulo. O requerido "smearing" dos operadores do campo de fermions em relação a um volume tetradimensional finito está contido nela. A introdução de uma integração relativa ao volume finito $V(\epsilon)$ desfaz a dificuldade apresentada pelas expressões do tipo $\bar{\Psi}(x+\epsilon)\gamma^{\mu}\Psi(x-\epsilon)\bar{\Psi}(y+\epsilon)\gamma^{\nu}\Psi(y-\epsilon)$ quando $x=y$ pois neste caso elas possuem a forma $\bar{\Psi}(x+\epsilon')\gamma^{\mu}\Psi(x-\epsilon')\bar{\Psi}(y+\epsilon'')\gamma^{\nu}\Psi(y-\epsilon'')$. Assim, quando x for igual a y o valor esperado destas quantidades não se tornará bastante singular o que permite o aparecimento dos necessários fatores de corte. Veremos este fato explicitamente, no espaço dos momentos, quando mencionarmos as novas expressões para os vértices.

Vamos fazer algumas observações em relação à densidade Lagrangeana (V-5). A primeira refere-se à existência da invariância passiva frente ao grupo γ_5 [35]. A segunda está ligada com o comportamento ϵ^{-5} da função $F(\epsilon)$. Vamos mostrar, de uma maneira qualitativa, que este comportamento não introduz nenhuma dificuldade no desenvolvimento perturbativo da teoria. Desprezando as constantes, a densidade Lagrangeana possui a forma:

$$\int \frac{k}{\epsilon^6} Z(\epsilon^2) \bar{\Psi}(x + \frac{\epsilon}{2}) \psi(x, \frac{\epsilon}{2}) \Psi(x - \frac{\epsilon}{2}) d^4 \epsilon \quad (V-8)$$

Como a função k/ϵ^6 é ímpar, somente as partes ímpares do fator $\bar{\Psi}(x + \frac{\epsilon}{2}) \psi(x, \frac{\epsilon}{2}) \Psi(x - \frac{\epsilon}{2})$ contribuirão para a integral. Isto é:

$$\left[\bar{\Psi}(x + \frac{\epsilon}{2}) \psi(x, \frac{\epsilon}{2}) \Psi(x - \frac{\epsilon}{2}) \right]^- = \left[\bar{\Psi}(x + \frac{\epsilon}{2}) \Psi(x - \frac{\epsilon}{2}) \right]^- \psi^+(x, \frac{\epsilon}{2}) + \left[\bar{\Psi}(x + \frac{\epsilon}{2}) \Psi(x - \frac{\epsilon}{2}) \right]^+ \psi^-(x, \frac{\epsilon}{2})$$

com os sinais (+) e (-) representando as partes pares e ímpares, respectivamente. Por outro lado sabemos que o propagador de fermions possui a máxima divergência igual a k/ϵ^4 e a função $\psi(x, \frac{\epsilon}{2})$ é dada pelo desenvolvimento exponencial de (V-7). Assim, a parcela $\left[\bar{\Psi}(x + \frac{\epsilon}{2}) \Psi(x - \frac{\epsilon}{2}) \right]^+ \psi^-(x, \frac{\epsilon}{2})$ fornecerá as seguintes contribuições para a integração (V-8)

$$\int \frac{k}{\epsilon^6} Z(\epsilon^2) \frac{k}{\epsilon^2} \epsilon^\nu d^4 \epsilon + \int \frac{k}{\epsilon^6} Z(\epsilon^2) \epsilon^\nu d^4 \epsilon \quad + \text{partes convergentes}$$

A quantidade $\frac{k}{\epsilon^2 \epsilon^6}$ é devido à $\bar{\Psi} \Psi$ e o fator ϵ^ν ao primeiro termo do desenvolvimento de $\psi(x)$.

A primeira parcela desta expressão, que é quadraticamente divergente, cancela-se com o termo de segunda ordem de $\left[\bar{\Psi}(x + \frac{\epsilon}{2}) \Psi(x - \frac{\epsilon}{2}) \right]^- \psi^+(x, \frac{\epsilon}{2})$ igual a

$$\int Z(\epsilon^2) \frac{k}{\epsilon^6} \frac{k}{\epsilon^2} \epsilon^2 d^4 \epsilon$$

que também é quadraticamente divergente. A segunda parcela é finita devido à presença do fator $Z(\epsilon^2)$.

O termo $[\bar{\Psi} \Psi]^{-1} \Psi^\dagger$ fornecerá as seguintes contribuições: $\int Z(\epsilon^2) \frac{\delta}{\epsilon^6} \frac{\delta}{\epsilon^4} d^4\epsilon$ que é cancelado pela subtração do valor esperado do vácuo e $\int Z(\epsilon^2) \frac{\delta}{\epsilon^6} \frac{\delta}{\epsilon^2} d^4\epsilon$ que comporta-se como $\frac{1}{\epsilon^2}$. Entretanto, este termo é relacionado com a densidade Lagrangeana livre para os fermions. No desenvolvimento perturbativo da teoria esta possível dificuldade não afetará os cálculos pois $\mathcal{L}_{int}(x) = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}_{livre}(x)$ e esta parcela será, assim, cancelada.

V-3 Regras para gráficos e identidades generalizadas de Ward

Como já mencionamos, devido à existência da função $\Psi(x, \epsilon_n^{(v)})$ na definição da densidade Lagrangeana, continuarão a existir vértices com mais de uma linha de fótons. Vamos apresentar as novas expressões para estes vértices decorrentes da proposição (V-5). Ao mesmo tempo citaremos as novas formas para as identidades generalizadas de Ward.

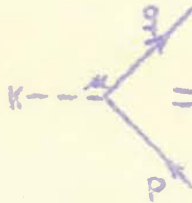
Realizando um cálculo análogo ao da segunda seção do capítulo IV, isto é, analisando as expressões decorrentes do desenvolvimento do elemento de matriz:

$$\langle 0 | T [\Psi(x) \bar{\Psi}(y) A_{\mu_1}(z^1) \dots A_{\mu_n}(z^n) \exp(i \int \mathcal{L}(z) d^4z)] | 0 \rangle$$

com $\mathcal{L}(z)$ dado por (V-5), obtemos as seguintes expressões ana

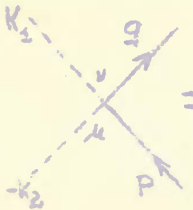
líticas para os vértices:

a) Para o vértice com uma linha de fóton corresponde:



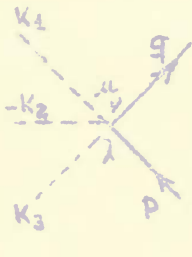
$$V(\epsilon) = -ie \int d^4\epsilon \epsilon^\mu \tilde{\delta}(k, \frac{\epsilon}{2}) \cos\left[(p+q) \cdot \frac{\epsilon}{2}\right] Z(\epsilon^2) \frac{\epsilon^\rho}{\epsilon^2} \delta^4(p+q-k) \quad (V-9a)$$

b) Para o vértice com duas linhas de fótons:



$$V(\epsilon) = -ie^2 \int d^4\epsilon \delta_{\mu\nu} \epsilon^\mu \epsilon^\nu \left[\tilde{\delta}(k, \frac{\epsilon}{2}) \right]^2 \cos\left[(p+q) \cdot \frac{\epsilon}{2}\right] Z(\epsilon^2) \frac{\epsilon^\rho}{\epsilon^2} \delta^4(p+q+k_1-k_2) \quad (V-9b)$$

c) Para o vértice com três linhas de fótons:



$$V(\epsilon) = ie^3 \int d^4\epsilon \delta_{\mu\nu} \delta_{\nu\lambda} Z(\epsilon^2) \epsilon^\mu \epsilon^\nu \epsilon^\lambda \left[\tilde{\delta}(k, \frac{\epsilon}{2}) \right]^3 \cos\left[(p+q) \cdot \frac{\epsilon}{2}\right] \frac{\epsilon^\rho}{\epsilon^2} \delta^4(p+k_1+k_3-k_2-q) \quad (V-9c)$$

Nestas relações $\tilde{\delta}(k, \frac{\epsilon}{2})$ é definido como:

$$\tilde{\delta}(k, \frac{\epsilon}{2}) = \frac{\text{sen } k \cdot \frac{\epsilon}{2}}{k \cdot \frac{\epsilon}{2}}$$

Em todas as quantidades (V-9) colocamos para $F(\epsilon)$ o valor $\frac{-ie}{\epsilon^2} Z(\epsilon^2)$ pois o termo $-m(\epsilon^2) / \epsilon^4$ torna antissimétricas as integrações e, portanto, nulas.

Generalizando estas expressões, verificamos que:

a) aos vértices com um número ímpar $2n+1$ ($n=0, 1, \dots$) de

linhas de fótons corresponde:

$$-i(-1)^m e^{2n+1} \int_{V(\varepsilon)} d^4\varepsilon Z(\varepsilon^2) \varepsilon^{\mu_1} \dots \varepsilon^{\mu_{2n+1}} \left[\tilde{\delta}\left(k, \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]^{2n+1} \cos\left[(p+q)\frac{\varepsilon}{2}\right] \frac{\varepsilon}{\varepsilon^6} \cdot$$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{2n+1} \delta_{\mu_j \mu_l} \delta^4\left(p-q + \sum_{i=1}^{2n+1} k_i\right)$$

(V-10a)

b) e aos com um número par $2n$ ($n=1, 2, \dots$) de linhas de fótons:

$$-i(-1)^{m+1} e^{2n} \int_{V(\varepsilon)} d^4\varepsilon Z(\varepsilon^2) \varepsilon^{\mu_1} \dots \varepsilon^{\mu_{2n}} \left[\tilde{\delta}\left(k, \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]^{2n} \sin\left[(p+q)\frac{\varepsilon}{2}\right] \frac{\varepsilon}{\varepsilon^6} \cdot$$

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{2n} \delta_{\mu_j \mu_l} \delta^4\left(p-q + \sum_{i=1}^{2n} k_i\right)$$

(V-10b)

Como regra geral, constatamos que:

1) Se o vértice possuir um número par de linhas de fótons devemos usar a função seno, e se for ímpar, a função cosseno.

2) Cada nova linha de fóton adiciona a um vértice o fator $e \tilde{\delta}\left(k, \frac{\varepsilon}{2}\right) \varepsilon^\mu$ com o sinal mais ou menos conforme a paragem seja para um vértice com um número par ou ímpar de linhas de fótons.

3) Como a densidade Lagrangeana é invariante frente à transformação de calibre, permanece válido o teorema de Furry.

4) A uma contração da linha de fóton consigo mesma deve-se acrescentar o fator $-iS_F(p)$.

Vamos mostrar, qualitativamente, que a expressão (V-9a) reduz-se ao vértice usual. Devido à simetria da integração em

ϵ , escrevemos esta relação como:

$$-ie\delta_{\mu} \int_{V(\epsilon)} d^4\epsilon Z(\epsilon^2) \frac{\epsilon^{\mu} \epsilon^{\mu}}{\epsilon^6} \tilde{\delta}(k, \frac{\epsilon}{2}) \cos \left[(p+q) \cdot \frac{\epsilon}{2} \right] \delta^4(p-q-k)$$

Para pequenos valores de $p\epsilon$ e $k\epsilon$ esta expressão reduz-se a:

$$-ie\delta_{\mu} \int_{V(\epsilon)} d^4\epsilon Z(\epsilon^2) \frac{\epsilon^{\mu} \epsilon^{\mu}}{\epsilon^6} \delta^4(p-q-k)$$

Usando $Z(\epsilon^2) = (m^2 \epsilon^2)^{\alpha\alpha/4\pi}$ |26| e levando em conta que $\frac{1}{\epsilon^6} (\epsilon^2)^{\alpha\alpha/4\pi}$ é proporcional à $-i \int d^4p \chi e^{-i p \epsilon} (p^2)^{-\alpha\alpha/4\pi}$, a relação acima pode ser escrita como:

$$-e(m^2)^{\alpha\alpha/4\pi} \delta^4(p-q-k) \int_{V(\epsilon)} d^4\epsilon \epsilon^{\mu} \int d^4p \chi e^{-i p \epsilon} (p^2)^{-\alpha\alpha/4\pi}$$

Escolhendo um volume particular mostra-se, qualitativamente, que esta expressão é proporcional a $-ie\delta^{\mu} Z(m^2) \delta^4(p-q-k)$. No limite $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos a forma do vértice usual, com $Z_1 = Z(0)$.

Para não pequenos valores de $p\epsilon$ e $k\epsilon$, o fator $\tilde{\delta}(k, \frac{\epsilon}{2}) \cos \left[(p+q) \cdot \frac{\epsilon}{2} \right]$ comporta-se como uma função atenuadora. Como no final o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é tomado para cada valor fixo do momentum, é lícito afirmar-se que o resultado da integral será proporcional ao valor usual do vértice.

De maneira análoga ao capítulo anterior, simbolizando as expressões (V-10) (omitindo o fator e) por $\Gamma^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}(k_1, k_2, \dots, k_n, p)$, constatamos a existência da seguinte identidade generalizada de Ward:

$$k_{n\mu_n} \Gamma^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}(k_1, k_2, \dots, k_n, p) = \Gamma^{\mu_1, \dots, \mu_{n-1}}(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, p - \frac{k_n}{2}) - \Gamma^{\mu_1, \dots, \mu_{n-1}}(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, p + \frac{k_n}{2}) \quad (V-11)$$

Como exemplo, entre os vértices com uma e duas linhas de fôtons existe a relação:

$$k_{2,\mu_2}^{\mu_1,\mu_2} \Gamma(k_1, k_2, p) = \Gamma(k_1, p - \frac{k_2}{2}) - \Gamma(k_1, p + \frac{k_2}{2}) \quad (V-12)$$

Em especial, se um dos k_i de algum vértice fôr colocado igual a zero, obtemos a identidade:

$$\Gamma(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n=0, p) = -\frac{\partial}{\partial p_{\mu_n}} \Gamma(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, p) \quad (V-13)$$

Em particular:

$$\Gamma(k_1, k_2=0, p) = -\frac{\partial}{\partial p_{\mu_2}} \Gamma(k_1, p)$$

As relações apresentadas acima são para os vértices mencionados nas relações (V-10). Possivelmente elas permanecem válidas para os vértices completos, definidos pelas suas partes próprias.

Usando as regras apresentadas, o tensor polarização do vácuo $\Pi^{\mu\nu}(k)$ possuirá para $k=0$ e $\mu=\nu$, a forma

$$\Pi^{\mu\mu}(0) = -e^2 \int \frac{d^4 \epsilon'}{v(\epsilon')} \int \frac{d^4 \epsilon}{v(\epsilon)} Z(\epsilon'^2) Z(\epsilon^2) \frac{\epsilon'^\mu}{\epsilon'^6} \frac{\epsilon^\nu}{\epsilon^6} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos p\epsilon' \cos p\epsilon \quad (V-14)$$

$$\cdot \text{Tr} [S_F(p) \not{\epsilon}' S_F(p) \not{\epsilon}] - e^2 \lim_{v(\epsilon) \rightarrow 0} \int \frac{d^4 \epsilon}{v(\epsilon)} Z(\epsilon^2) \frac{\epsilon^\mu \epsilon^\mu}{\epsilon^6} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{sen } p\epsilon \text{Tr} [S_F(p) \not{\epsilon}]$$

Utilizando as identidades generalizadas de Ward demonstramos, de maneira análoga às anteriores, que $\Pi^{\mu\mu}(0) = 0$.

A permanência da validade das formas apresentadas para as identidades generalizadas de Ward, também nos permite concluir os mesmos resultados que os do quarto capítulo relativamente ao tensor $\Pi^{uv\lambda\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4)$.

V - 4 Observações

Podemos generalizar de uma maneira natural a densidade Lagrangeana (V-5) através da introdução da função "smearing" $f_m(\epsilon)$. Assim, $\mathcal{L}(x)$ apresenta-se como:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow 0} \int \left[f_m(\epsilon) \bar{\Psi}(x + \frac{\epsilon}{2}) F(\epsilon) \varphi(x, \epsilon) \Psi(x - \frac{\epsilon}{2}) + c.c.-v.e.v \right] d^4\epsilon \quad (V-15)$$

Como mencionamos no capítulo anterior, os gráficos da figura (IV-3), calculados a partir da densidade Lagrangeana (V-1), dão contribuições finitas. As contribuições dessas mesmos gráficos obtidas da forma (V-15) dependerão da escolha da função $f_m(\epsilon)$. Duas questões podem ser formuladas:

1) Essas contribuições finitas poderão ser incluídas na constante de acoplamento? Neste caso, as conseqüências observáveis independem dos $f_m(\epsilon)$, escolhidos de uma classe de funções adequadas?

2) Existirá uma certa função $f_m(\epsilon)$ que permita, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, a anulação dos gráficos adicionais de $\Sigma(p)$?

Estes problemas no desenvolvimento perturbativo permanecem abertos. Acreditamos, porém, que ambas as questões possuem respostas afirmativas.

C A P Í T U L O V I

CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES

Neste trabalho analisamos a Eletrodinâmica Quântica como uma teoria de campos, em contraposição ao ponto de vista que considera apenas as equações para as funções de Green. Esta maneira de encarar a teoria tem por objetivo possibilitar a obtenção de conclusões gerais que possam ser válidas para outras Teorias Quânticas de Campo. Neste sentido constatamos a existência de dois aspectos diferentes, porém relacionados entre si, que são de importância geral:

1) As definições para o produto de operadores campo num mesmo ponto e para a diferenciação de operadores exigem a ocorrência de processos de limite. Estes dois processos são combinados num só de maneira invariante frente à transformação de calibre. Podemos encarar a combinação $\partial_x^\mu + ie A^\mu(x)$ da Eletrodinâmica Quântica como simbolizando essa unificação invariante dos limites mencionados. Como requisito de uma definição correta para o limite é introduzido na formulação da teoria a função $Z(\epsilon^2)$.

Verificamos que com estas proposições obtemos as equações para as funções de Green renormalizadas bem como resolvemos os problemas das divergências quadrática e logarítmica. Estes aspectos da formulação indicam-nos que o processo usual de renormalização e as equações convencionais para as funções de Green devem ser considerados como uma maneira simbólica de escrever os limites mencionados. A existência apenas da função $Z(\epsilon^2)$

mostra-nos que as constantes Z_1 e Z_2 , definidas como $Z(\epsilon^2=0)$, são as mesmas quantidades. Seu anulamento é perfeitamente aceitável, contrariamente ao ponto de vista usual.

A invariância frente à transformação de calibre fornece de maneira natural as identidades generalizadas de Ward.

2) As funções $Z(\epsilon^2)$ e $g(\epsilon^2)$ são implicitamente determinadas pelas soluções da teoria. Neste sentido, a renormalização pode quebrar espontaneamente várias simetrias. Constatamos que na Eletrodinâmica Quântica de elétrons com massas despidas nulas há a ocorrência da quebra espontânea local das invariâncias dilatacionais frente à transformação γ_5 . As correntes correspondentes não são conservadas e, portanto, o teorema de Goldstone não é aplicável. Também verifica-se a quebra espontânea da simetria frente à transformação de calibre de segunda classe. Na Eletrodinâmica Quântica de elétrons e muons livres, em adição, a quebra espontânea da simetria local para um grupo $SU(2) \otimes SU(2)$.

Concluindo, mencionaremos os seguintes problemas que permanecem abertos:

- 1) As propriedades exatas da função "smearing" $f_m(\epsilon)$ no processo de limite, que são necessárias para a eliminação explícita de certos gráficos não desejados (mencionados na última seção do quinto capítulo) da auto-energia própria do elétron.
- 2) A verificação explícita da não ocorrência da divergência logarítmica para o tensor $\Pi^{\mu\nu}(k)$. Este ponto é importante, pois poderá possibilitar a autodeterminação da constante de acoplamento α dentro do contexto da Eletrodinâmica Quântica.
- 3) A possibilidade de existência de um critério de estabilidade

que permita a determinação da razão entre as massas do muon e do elétron na Eletrodinâmica Quântica.

4) A inclusão das interações fracas na teoria de seis neutrinos (três "quarks leptônicos"), conforme apresentada no terceiro capítulo.

REFERÊNCIAS

- [1] R. Gatto, em "High Energy Physics" (ed. E. H. S. Burhop, Academic Press).
- [2] S.J.Brodsky, em "Proceedings Symposium on Electron and Photon Interactions", Daresbury, 1969.
- [3] Th.A.J.Maris, Nuovo Cimento Letters 1 (1969) 775.
- [4] Th.A.J.Maris, D.Dillenburg e G.Jacob, Nuclear Physics B 18 (1970) 366.
- [5] Estamos considerando a métrica e a notação de J.D.Bjorken and S.D.Drell, "Relativistic Quantum Fields" (McGraw Hill, 1965).
- [6] Th.A.J.Maris, Nuovo Cimento 30 (1963) 378.
- [7] J.Bardeen, L.N.Cooper e J.R.Schrieffer, Phys. Rev. 108 (1957) 1175.
- [8] Y.Nambu e G.Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345.
- [9] J.Goldstone, A.Salam e S.Weinberg, Phys. Rev. 127 (1962) 965.
- [10] D.Kastler, D.W.Robinson e J.A.Swieca, Com. Math. Phys. 2 (1966) 108.
- [11] R.Haag e Th.A.J.Maris, Phys. Rev. 132 (1963) 2325.
- [12] Th.A.J.Maris, V.E.Herscovitz e G.Jacob, Nuovo Cimento 34 (1964) 946.
- [13] Th.A.J.Maris, V.E.Herscovitz e G.Jacob, Nuovo Cimento 40 (1965) 214.
- [14] M.Baker e S.L.Glashow, Phys. Rev. 128 (1962) 2462.
- [15] K.Johnson, M.Baker e R.Willey, Phys. Rev. Letters 11 (1963) 518.
- [16] K.Johnson, M.Baker e R.Willey, Phys. Rev. 136 (1964) B1111.

- |17| Th.A.J.Maris, V.E.Herscovitz e G.Jacob, Nuovo Cimento 33 (1964) 1633.
- |18| Th.A.J.Maris, V.E.Herscovitz e G.Jacob, Phys. Rev. Letters 12 (1964) 313.
- |19| R.P.Feynman, em "La Théorie Quantique Des Champs, Solvay Conference" 1961 (ed.: R.Stoops, Interscience, 1962).
- |20| K.Johnson, R.Willey e H.Baker, Soviet Physics JETP 25 (1967) 205.
- |21| K.Johnson, R.Willey e H.Baker, Phys. Rev. 163 (1967) 1699.
- |22| R.Jackiw, Nuclear Physics B5 (1968) 158.
- |23| Ick-Joh Kim e C.R.Hagen, Phys. Review D, Nº 8 (1970) 1511.
- |24| H.Baker e K.Johnson, Phys. Review 183 (1969) 1292.
- |25| N.Bogoliubov e D.V.Shirkov, "Introduction to the Theory of Quantized Fields" (Interscience, 1959).
- |26| D.Dillenburg e Th.A.J.Maris, Nuclear Physics B18 (1970) 390.
- |27| K.Johnson, em "Particles and Field Theory - Brandeis Lectures" 1964.
- |28| K.Wilson, "On Products of Quantum Field Operators at Short Distances", (não publicado).
- |29| D.G.Boulware e S.Deser, Phys. Review 151 (1966) 1278.
- |30| K.Johnson, Nuclear Physics 25 (1961) 431.
- |31| J.Schwinger, Phys. Review Letters 3 (1959) 296.
- |32| B.S.Brown, Phys. Review 150 (1966) 1338.
- |33| Th.A.J.Maris, D.Dillenburg e G.Jacob, Nuovo Cimento 53A (1968) 823.
- |34| Th.A.J.Maris, D.Dillenburg, C.E.T.Gonçalves da Silva, G.Jacob e B.Lieberman, Nuovo Cimento 55A (1968) 590.

- |35| Th.A.J.Maris, D.Dillenburg, G.Jacob e B.Liberman, "Degrees of Symmetry in Quantum Field Theories", a ser publicado na revista Nuclear Physics.
- |36| F.J.Dyson, Phys.Rev. 75 (1949) 1736.
- |37| A.Salam, Phys.Rev. 82 (1951) 217.
- |38| A.Salam, Phys.Rev. 84 (1951) 426.
- |39| H.Ezawa e J.A.Swieca, Con.Math.Phys. 5 (1967) 330.
- |40| Th.A.J.Maris, Nuovo Cimento 2 (1969) 821.
- |41| Th.A.J.Maris e Gerhard Jacob, Phys.Review Letters 17(1966)1300
- |42| Th.A.J.Maris, Gerhard Jacob e B.Liberman, Nuovo Cimento 52A (1967) 116.
- |43| K.Johnson em "Proceedings of the Ninth Latin American School of Physics" (editado por I. Saavedra, Benjamin 1969).
- |44| W.Heisenberg, Z.Physik 49 (1928) 619.
- |45| W.Heisenberg, Rev.Mod.Phys. 29 (1957) 269.
- |46| R.Haag, Nuovo Cimento 25 (1952) 287.
- |47| K.Johnson, Phys.Letters 5 (1963) 253.
- |48| H.Gell-Mann, Physics 1 (1964) 63.
- |49| S.Gasiorowicz, "A Survey of the Weak Interactions", Universidade de Karlsruhe.
- |50| Th.A.J.Maris, Nuovo Cimento 45A (1966) 223.
- |51| J.H.Jauch e F.Rohrlich, "Theory of Photons and Electrons" (Addison-Wesley, 1955).

Página	Onde se lê	Leia-se
Abstract, linha 2	field	fields
4, linha 15	intrínseco	intrínseco
6, relação (I-1)	$l(A)$	$l_0(A)$
7, relação (I-4a)	$\Psi_\beta(x')$	$\Psi_\beta^+(x')$
7, relação (I-4b)	i	-i
9, relação (I-8b)	i	-i
12, linha 11	trás	traz
18, relação (I-28)	$l_0(z)$	$l_0(\psi)$
20, linha 8	o membro direito desta	esta
26, linha 13	ordena no tempo	ordena em ϵ
31, linha 3	$\epsilon^v \neq 0$	$\epsilon^v = 0$
35, relação (I-66)	$S_F^{-1}(p)$	$-i S_F^{-1}(p)$
43, última linha	Na próxima seção	No próximo capítulo
48, relação (II-2)	-1	1
50, relação (II-3)	-1	1
55, relação (II-8)	$\int_S^\mu(x) = i \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \Psi(x)$	$\int_S^\mu(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \Psi(x)$
59, linha 18	delineado	definido
62, relação (III-5b)	i	-i
78, relação (III-39)	$S_F^{0E}(p) Z(\epsilon^2) \frac{\sin 2P_\mu E}{P_\mu E} P_\mu E S_F^E(p)$	$\sum_\mu S_F^{0E}(p) Z(\epsilon^2) \frac{\sin 2P_\mu E}{2P_\mu E} P_\mu^3 S_F^E(p)$
78, relação (III-40) e (III-42)	$Z(\epsilon^2) P_\mu E \frac{\sin 2P_\mu E}{2P_\mu E}$	$\sum_\mu Z(\epsilon^2) P_\mu^3 \frac{\sin 2P_\mu E}{2P_\mu E}$
79, figura (III-1)	$\left(P_\mu E \frac{\sin 2P_\mu E}{2P_\mu E} \right)^{-1}$	$\left(\sum_\mu P_\mu^3 \frac{\sin 2P_\mu E}{2P_\mu E} \right)^{-1}$
82, linha 12	ρ_j	ρ_3
98, relação (IV-15) e (IV-16)	$\delta^4(v - \sum_{i=1}^n k_i)$	$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^n \delta_{\mu_j}^{\mu_l}$
99, última linha	$S_F^{-1}(p \pm \frac{k}{2})$	$-i S_F^{-1}(p \pm \frac{k}{2})$
100, relação (IV-21) e (IV-22)	$S_F^{-1}(p)$	$-i S_F^{-1}(p)$
102, linha 7	gráfico (a)	primeiro gráfico

107, linha 11

|51|

119, linha 13

(IV-33a)

101 - Aos diagramas da figura (IV-2) correspondem os símbolos (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), respectivamente.