

Dr. Professor Klaus  
von Klitzing, a  
Berlim, Alemanha.

INFORMAÇÃO NUCLEAR ATRAVÉS DE ESPALHAMENTO  
QUASE-LIVRE COM PARTÍCULAS POLARIZADAS



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

INFORMAÇÃO NUCLEAR ATRAVÉS DE ESPALHAMENTO  
QUASE-LIVRE COM PARTÍCULAS POLARIZADAS \*

Cesar Augusto Zen Vasconcellos

Dissertação realizada sob a orientação do Dr. Th. A. J. Maris e da Dra. M. R. Teodoro, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento final dos requisitos para obtenção do Grau de Mestre em Física.

\* Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes instituições: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS) e German Agency for Technical Cooperation (GTZ).

Porto Alegre, 1978



OFERECIMENTO

A

*Dione, Marcos, Zaira*

*e Livonir...*



## AGRADECIMENTOS

Aos drs. *Theodor A.J. Maris* e *Maria R. Teodoro* agradeço pelos conhecimentos transmitidos, interesse e dedicação demonstrados e pelo incentivo constante durante o desenrolar desta dissertação.

A Dra. *Victoria E. Herscovitz* sou grato pelo dedicado apoio e por sugestões críticas apresentadas.

A *Cláudio Schneider* agradeço sinceramente não só por sugestões apresentadas como também pelo auxílio indispensável no trabalho de computação.

Aos demais colegas do grupo de física nuclear teórica, *Maria H. Steffani*, *Eliane A. Veit*, *Dionísio B. Filho*, *Paulo M. Mors* e *Joecir Palandí* agradeço pelo interesse e paciência demonstrados.

Agradeço ainda,

aos colegas da sala 307, *Silvio Cunha*, *Mercedes Gusmão*, *Miguel Gusmão*, *Flávio Horowitz* e *Alexandre Lago*, pelo apoio moral em muitos momentos;

aos componentes do Centro de Processamento de Dados da UFRGS, pela assistência técnica prestada durante a utilização do Computador B6700;

ao Sr. *Cleto Tartarelli*, pela cuidadosa confecção dos desenhos;

a *Lahyr Hubert* e *Amparo S. Mello*, pela ajuda durante as pesquisas bibliográficas;

a *Zuleika Berto*, pela eficiente elaboração da relação bibliográfica;

a *Dino del Pino*, *Antonio Dalpicol*, *Graziela E. Barcellos* e *Fátima E. Ilha*, da REDACTA, pelo cuidadoso trabalho, respectivamente, de revisão e datilografia do texto;

a *Maria C. do Amaral* e *Ana N.J. Nunes*, por alguns trabalhos datilográficos;

a *Frutuoso L. Borba* e *Waldomiro da S. Olivo*, pela elaboração de cópias da presente dissertação e

a todos aqueles que sempre me estimularam, tornando-se, desta forma, parceiros indiretos na criação deste trabalho.

Porto Alegre, 25 de julho de 1978.

CESAR A. Z. VASCONCELLOS

## RESUMO

Recentemente espalhamentos quase-livres com prótons polarizados nos núcleos de camada fechada  $^{16}\text{O}$  e  $^{40}\text{Ca}$  mostraram que o modelo, de acordo com o qual o espalhamento tem lugar em prótons nucleares efetivamente polarizados é, ao menos semi-quantitativamente, correto. Calculamos a polarização efetiva para a reação  $^{14}\text{N} (p,2p) ^{13}\text{C}$  para diferentes estados finais. Mostramos neste caso e em geral que para núcleos iniciais com spins não nulos medições com partículas polarizadas podem, de maneira relativamente simples, discriminar entre diferentes modelos teóricos dos estados nucleares, inicial e final.

## ABSTRACT

Recently quasi-free scatterings with polarized protons on the closed-shell nuclei  $^{16}\text{O}$  and  $^{40}\text{Ca}$  have shown that the model according to which the scattering takes place on effectively polarized nuclear protons is, at least semi-quantitatively, correct. We calculate the effective polarization for the reaction  $^{14}\text{N} (p,2p) ^{13}\text{C}$  going to different final states. We show in this case, and in general that for initial nuclei with non - zero spins the measurements with polarized particles may relatively simply discriminate between theoretical models of the initial and final nuclear states.

## SUMÁRIO

I - INTRODUÇÃO .....	10
II - ESPALHAMENTO QUASE-LIVRE (p,2p) COPLANAR .....	14
II.1 - Estudo Qualitativo .....	14
II.2 - Secção de Choque .....	22
II.3 - Potencial Ótico .....	33
III - ESPALHAMENTO QUASE-LIVRE (p,2p) COM PRÓTONS INCIDENTES POLARIZADOS .....	38
III.1 - Como forma de Medir a Interação Spin-Órbita ..	38
III.2 - Polarização Efetiva .....	45
III.3 - Resultados Teóricos Obtidos para o $^{16}\text{O}$ .....	48
IV - ESPALHAMENTO (p,2p) COM PRÓTONS POLARIZADOS NA PRESEN ÇA DE CONFIGURAÇÃO MISTA .....	51
IV.1 - Amplitude de Momentum Distorcida e Mistura de Configurações .....	51
IV.2 - Cálculo da Polarização Efetiva para a Reação $^{14}\text{N}(p,2p)^{13}\text{C}$ .....	75
IV.3 - Distribuição de Momentum, Polarização Efetiva e Mistura de Configurações .....	81
V - UMA APLICAÇÃO PRÁTICA (REAÇÃO $^{14}\text{N}(p,2p)^{13}\text{C}$ ) .....	88
V.1 - As Funções $\gamma^j$ , Relevância e Dificuldade de Obten ção Explícita .....	88
V.2 - Geometria, Parâmetros e Função de Onda do Núcleon- -Alvo Escolhidos .....	95

V.3 - Resultados Finais .....	107
VI - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES .....	123
VII - APÊNDICES .....	125
VIII - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	160

## I - INTRODUÇÃO

Nos últimos vinte e cinco anos, desde o advento do modelo de camadas<sup>(1,2)</sup>, considerável quantidade de informações a respeito da estrutura nuclear tem sido obtida. Muito contribuiu o estudo das reações quase-livres, especialmente as reações  $(p,2p)$ <sup>(3,4,5)</sup> e  $(e,e'p)$ <sup>(6,7,8)</sup>, na compreensão da estrutura das camadas nucleares mais internas.

Uma reação nuclear quase-livre é um processo nuclear em que uma partícula de alta energia (usualmente próton ou elétron) incide sobre um núcleo de número de massa  $A$  e arranca um nucleon localizado em uma camada nuclear, sem que ocorram interações adicionais violentas entre as partículas incidente e emergentes, com o núcleo. As reações quase-livres do tipo  $(p,2p)$  e  $(e,e'p)$  diferem entre si pelo comportamento da partícula incidente no interior do núcleo: os elétrons possuem um livre caminho médio bem maior do que os prótons e são, por isto mesmo, menos absorvidos. As experiências realizadas demonstraram a viabilidade da utilização de elétrons como pro

jéteis em espalhamentos quase-livres<sup>(7,8)</sup>.

Espalhamentos quase-livres com partículas incidentes não polarizadas permitem, através de experiências simétricas coplanares<sup>(9)</sup>, assimétricas coplanares e assimétricas não-coplanares<sup>(10)</sup>, o conhecimento direto da distribuição de momentum dos núcleons-alvo e da distribuição de energia de separação destes no núcleo. Como o espectro de energia dos pareres de partículas emergentes apresenta picos correspondentes às várias camadas nucleares das quais o núcleon pode ser arrancado, a análise de um espectro obtido através de uma reação quase-livre pode possibilitar o conhecimento do esquema de níveis de energia nuclear.

Outrossim, espalhamentos quase-livres (p,2p) e (e,e'p) demonstraram a existência das camadas nucleares mais internas, isto é, a camada 1s em núcleos 1p e as camadas 1s e 1p em núcleos 2s-1d<sup>(11)</sup>, sendo, por este motivo, experiências muito úteis no ato de testar a validade do modelo de camadas<sup>(12)</sup>.

Através de reações quase-livres com partículas incidentes polarizadas, pode-se medir o acoplamento spin-órbita experimentado por núcleons. O resultado combinado de absorção e acoplamento spin-órbita no processo de espalhamento quase-livre é o de que o núcleon-alvo tenha uma polarização efetiva ortogonal ao plano de espalhamento. Esta polarização pode ser medida usando-se, por exemplo, prótons incidentes polarizados e explorando-se a assimetria devida à considerável diferença entre as secções de choque "spin up - spin up" e "spin

up - spin down" causada em parte pela grande dissemelhança entre espalhamentos "singlet" e "triplet" livres<sup>(13)</sup>.

Até o presente momento, o formalismo das reações quase-livres com partículas incidentes polarizadas foi aplicado somente a núcleos-alvo dotados de spins nucleares nulos, quando no estado fundamental. Isto limitou as expressões relevantes do problema a aplicações a estados nucleares descritos por funções de onda de partícula única, pois que, devido à conservação de momentum angular, para um núcleo-alvo com spin nuclear igual a zero, a probabilidade de um núcleon-alvo ser arrancado de uma camada nuclear com momentum angular total único e bem definido, é máxima. Neste caso, a reação evidencia estados nucleares caracterizados por um acoplamento  $jj$  puro.

No entanto, para um núcleo-alvo dotado de spin nuclear diferente de zero, as leis de conservação de momentum angular indicam que o núcleon-alvo é descrito por uma mistura de configurações. É objetivo deste trabalho a obtenção de expressões mais gerais para a distribuição de momentum e polarização efetiva e a aplicação deste formalismo à reação  $^{14}\text{N}(p,2p)^{13}\text{C}$  onde o núcleo-alvo tem spin nuclear igual a um.

Nos capítulos II e III apresentamos um resumo quantitativo de um processo de espalhamento quase-livre coplanar com partículas incidentes não polarizadas e polarizadas, obtendo quantidades relevantes a estes processos de espalhamentos como: amplitudes de momentum, polarização efetiva, elemento de matriz transição  $T_{fi}$  e secção de choque de correlação. Também

são apresentados resultados obtidos para o  $^{16}_0(14)$ , que tem spin nuclear igual a zero quando no estado fundamental.

O capítulo IV foi reservado ao desenvolvimento do formalismo objetivando a obtenção das expressões mais gerais nomeadas testando-as em comparação com o caso do  $^{16}_0$ .

Além disso, aplicamos estas equações à reação  $^{14}_7\text{N} (p,2p) ^{13}_6\text{C}$  obtendo a polarização efetiva em função de um parâmetro de mistura de configurações. Como veremos mais tarde, este parâmetro é determinável através da comparação de curvas teóricas com resultados experimentais, sendo seu conhecimento muito importante para a obtenção de informações a respeito da estrutura nuclear.

No capítulo V são apresentados, através de tabelas e gráficos, os resultados computacionais das grandezas citadas, no caso da reação  $^{14}_7\text{N} (p,2p) ^{13}_6\text{C}$ . Para este trabalho foram utilizados os computadores B6700 do CPD (Centro de Processamento de Dados) da UFRGS e HP2100 do IF (Instituto de Física) da UFRGS.

O capítulo VI contém algumas conclusões deste trabalho e o capítulo VII (Apêndices), detalhes específicos de algumas relações desenvolvidas. As fontes bibliográficas utilizadas estão nomeadas no capítulo VIII.

Seria útil ressaltar que as referências (14), (15), (16) e (17) apresentam interessantes resenhas do formalismo do espalhamento quase-livre.

## II - ESPALHAMENTO QUASE-LIVRE (p,2p) COPLANAR

### II.1 Estudo Qualitativo

Em 1947, Serber<sup>(18)</sup> descreveu pela primeira vez, de maneira qualitativa, o processo de espalhamento de um próton ou nêutron de alta energia por um núcleo. Para uma reação deste tipo, o tempo de colisão entre a partícula incidente e uma partícula no núcleo, é curto quando comparado com o intervalo médio de tempo decorrido entre duas colisões sucessivas das partículas nucleares. Desta maneira, este processo pode ser considerado em termos de colisões entre a partícula incidente e as partículas nucleares individuais em detrimento ao processo, mais complexo, de colisão entre a partícula incidente e o núcleo-alvo como um todo.

Uma vez que o livre caminho médio de um núcleon no núcleo aumenta com sua energia, uma partícula de alta energia tem, conseqüentemente, um livre caminho médio considerável.

Além disso, se representarmos a matéria nu

clear, como um gás de Fermi degenerado, pequenas transferências de momentum se tornam menos prováveis pelo princípio de exclusão, pois tenderiam a levar um núcleon de um estado ocupado para outro já ocupado, aumentando, desta forma, o livre caminho médio da partícula incidente e tornando o núcleo transparente para esta partícula.

Chew,<sup>(19)</sup> em 1950, formulou o problema de espalhamento de nêutrons de alta energia por alvos constituídos por dêuterons, introduzindo a chamada aproximação de impulso, incorporada, a partir disto, na formulação teórica de um processo de espalhamento quase-livre por Maris, Hillman and Tyrén.<sup>(3)</sup>

As suposições fundamentais em que se baseia a aproximação de impulso, condições estas impostas por Chew e Goldberger,<sup>(19,20)</sup> são as seguintes:

- a) O tempo de colisão, no espalhamento núcleon-núcleo de alta energia é curto quando comparado aos tempos de colisões entre núcleons do núcleo.
- b) O núcleo-alvo e o núcleo residual têm uma estrutura difusa com respeito às partículas incidente e emergentes, isto é, durante a reação não há interações adicionais entre as partículas, incidente e emergentes e o núcleo.
- c) Somente grandes transferências de momentum

são permitidas entre a partícula incidente e o núcleon-alvo, assegurando, com isto, a natureza local da interação, uma vez que os comprimentos de onda de De Broglie, associados às transferências de momentum, são pequenos ( $\lambda_{DB} < 1.7 \text{ fm}$ ).

DB

Deve-se notar que estas suposições não são equivalentes à aproximação de Born para núcleos com muitos núcleons, pois em um processo quase-livre, a interação entre a partícula incidente e o núcleo-alvo não é desprezível.

Chew, ao formular o problema do espalhamento de nêutrons de alta energia por dêuterons, basicamente substituiu a função de onda que representava o espalhamento nêutron-dêuteron por uma função de onda que descrevia o espalhamento de um nêutron de momentum determinado, por um pacote de ondas associado ao próton livre, com a mesma distribuição de momentum que o próton ligado. Considerou ele que tal substituição correspondia a supor que, durante a interação do próton com o nêutron, o próton não interage com o resto do núcleo (o outro nêutron). O único efeito deste é gerar uma distribuição de momentum em um tempo muito anterior à chegada do nêutron incidente.

Assim, pode-se notar que, diferentemente de um processo livre, o processo quase-livre é caracterizado pelo fato de a partícula-alvo estar ligada ao potencial nuclear e apresentar, devido à existência deste potencial, uma distribuição de momentum.

A análise destes resultados mostra que as condições apresentadas tornam bem localizada a interação entre a partícula incidente e a partícula-alvo não ocorrendo, em uma reação deste tipo, praticamente nenhuma interação adicional violenta entre as partículas envolvidas e o núcleo, o que minimiza a probabilidade de ocorrência de espalhamentos múltiplos. No entanto, tais processos são importantes e ocasionam variações em energia e momento das partículas incidente e emergentes, originando, desta forma, distorções em um processo de espalhamento quase-livre: o espalhamento múltiplo elástico origina variações de fase das ondas associadas às partículas e o espalhamento múltiplo inelástico origina efeitos de absorção, isto é, decréscimo de amplitude destas ondas.

As distorções podem ser observadas na análise de resultados experimentais, pois são caracterizadas principalmente por alargamentos dos picos, reduções de máximos e preenchimento de mínimos nos espectros de energia e distribuições de correlação angular (associadas com a distribuição de momento do núcleon-alvo), assim como por redução do valor absoluto da secção de choque conectada ao espalhamento quase-livre<sup>(21)</sup>.

Deve-se acrescentar que os alargamentos dos picos dos estados internos são devidos, também, à vida finita do furo criado pelo arrancamento de um núcleon.<sup>†</sup>

Para levar em conta a existência de distorções, usa-se um potencial nuclear complexo na forma<sup>(22, 23, 24)</sup>

---

\*

Victoria E. Herscovitz - Comunicação Particular

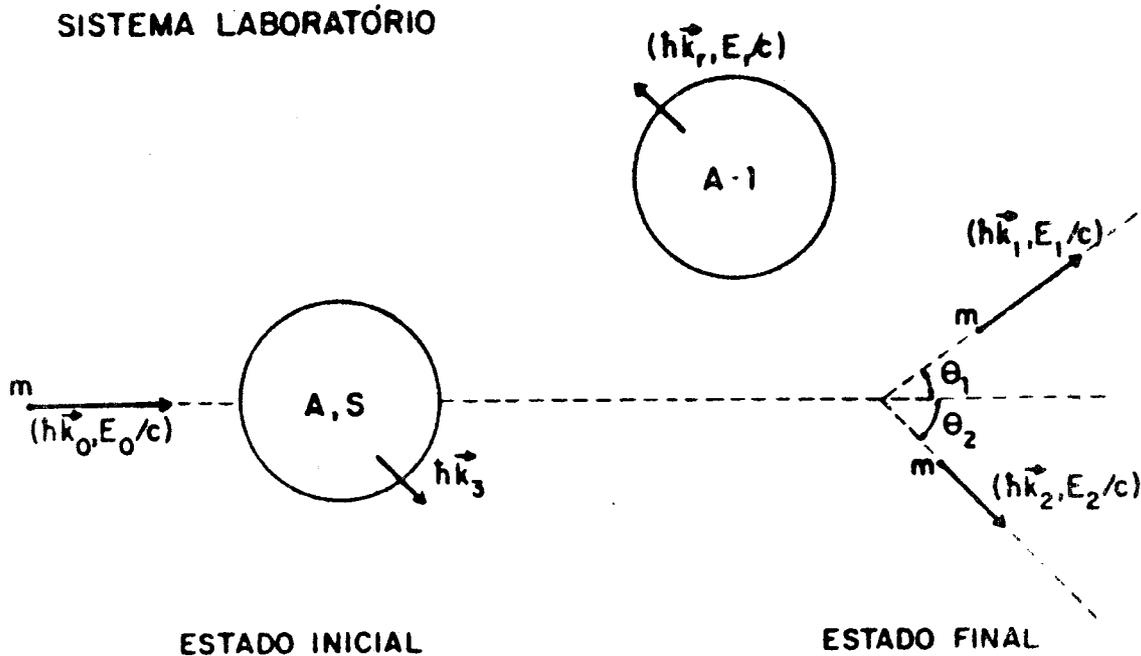
$$V_j(\vec{r}) = U_j(\vec{r}) + iW_j(\vec{r})$$

$$j = 0, 1, 2 \quad (\text{II.1-1})$$

sendo a parte real,  $U_j(\vec{r})$ , responsável pelos efeitos de variação de fase das ondas incidente e emergentes e a parte imaginária,  $W_j(\vec{r})$ , responsável pelo decréscimo de amplitude (absorção) das ondas associadas às partículas. A presença de distorções em um espalhamento quase-livre nos faz recorrer ao formalismo conhecido como aproximação de impulso com ondas distorcidas (D.W.I.A.) onde supomos que as ondas planas que descrevem o movimento das partículas são modificadas por potenciais óticos complexos, dependentes das energias destas partículas.

As reações quase-livres coplanares podem ser descritas de forma qualitativa da seguinte maneira (no caso em que a partícula incidente é um próton): no estado inicial (sistema laboratório) um próton de massa  $m$ , momentum  $\hbar\vec{k}_0$  e energia  $E_0$  incide sobre um núcleo-alvo, em repouso, de massa  $M_A$  e energia  $E_A = M_A c^2$ , interagindo com um núcleon caracterizado por uma energia de separação  $S$  e momentum  $\hbar\vec{k}_3$ . No estado final, dois prótons com momenta  $\hbar k_1$  e  $\hbar k_2$ , energias  $E_1$  e  $E_2$  e direções caracterizadas pelos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , em relação à direção de incidência, emergem do núcleo. O núcleo residual de massa  $M_{A-1}$ , após a reação, sofre um recuo com momentum  $\hbar\vec{k}_r$ .

Um esquema de uma reação desse tipo é apresentado na fig. II.1-1.



(Fig. II.1-1) - Esquema de um espalhamento quase-livre coplanar.

Se considerarmos o núcleon-alvo, antes da reação, como dotado de momentum  $\hbar\vec{k}_3$ , em relação ao centro de massa do núcleo o sistema de A-1 partículas está dotado de momentum  $-\hbar\vec{k}_3$  por conservação de momentum. Uma vez que a interação entre a partícula incidente e o núcleon-alvo é de natureza local (aproximação de impulso), esta interação não altera o momentum associado às A-1 partículas o que implica em que o momentum  $\hbar\vec{k}_r$  de recuo do núcleo residual é suposto igual ao momentum associado ao sistema de A-1 partículas antes da reação nuclear, ou

$$\hbar\vec{k}_r = -\hbar\vec{k}_3 \quad (\text{II.1-2})$$

Podemos expressar as leis de conservação de energia e momentum como

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_r$$

$$E_0 + E_A = E_1 + E_2 + E_r \quad (\text{II.1 - 3})$$

onde  $E_r$  inclui a energia de excitação do núcleo residual.

A energia de recuo associada ao núcleo residual é muito pequena de forma que este pode ser descrito por uma cinemática não relativística enquanto que os prótons emergentes, devido à alta energia a eles associada, por uma cinemática relativística.

Desta maneira, como

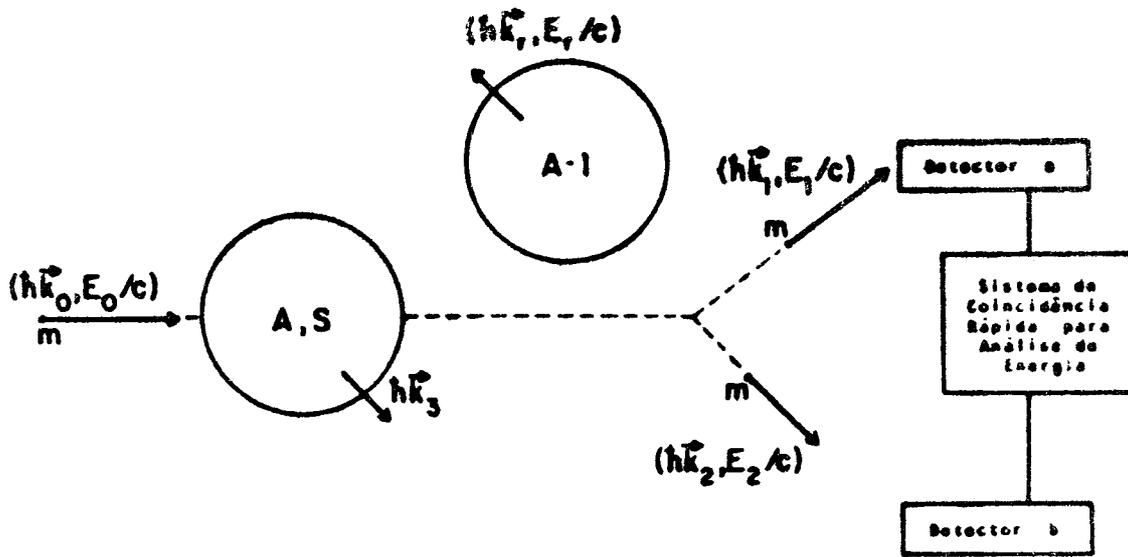
$$E_j = c^2 p_j^2 + m_j^2 c^4 \quad \text{temos que} \quad (\text{II.1 - 4})$$

$$T_0 - S = T_1 + T_2 + T_r$$

sendo  $T_j$  ( $j=0,1,2$ ) as energias cinéticas associadas aos prótons e relacionadas com os correspondentes vetores de onda pela equação relativística

$$k_j = \left(\frac{1}{\hbar c}\right) (T_j^2 + 2T_j m_j c^2)^{1/2}, \quad j = 0,1,2 \quad (\text{II.1 - 5})$$

Experimentalmente, deve-se medir as energias das partículas emergentes e os ângulos que as direções destas partículas formam com a direção de incidência, em coincidência (Figura II.1-2).

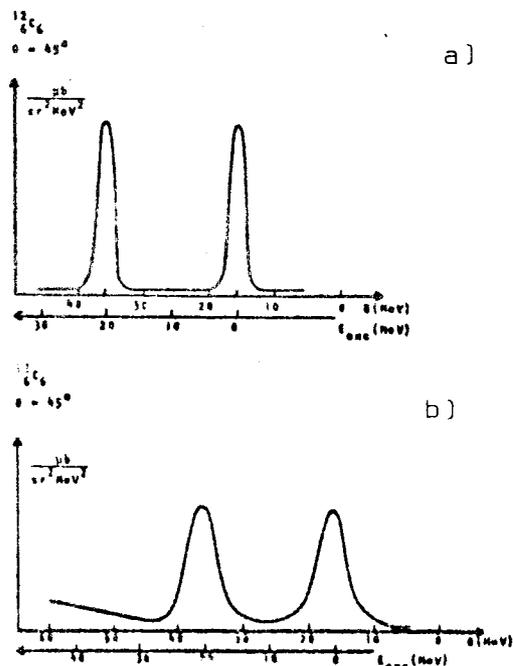


(Fig. II.1-2) - Diagrama de um possível arranjo experimental.

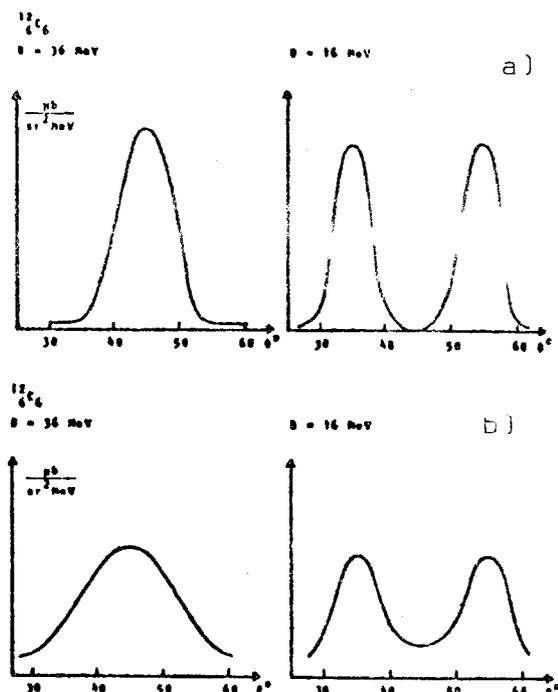
Como conhecemos  $\vec{k}_0$ , momentum associado à partícula incidente, após medirmos  $k_1, k_2, \theta_1$  e  $\theta_2$ , usando as equações anteriores podemos determinar o valor de  $\vec{k}_r$ , momentum de recuo do núcleo residual. Da mesma forma determinamos  $T_0, T_1, T_2$  e  $T_r$  e, conseqüentemente, a energia de ligação  $S$  do nucleon arrancado ao núcleo, caracterizando, com isto, uma dada camada nuclear. Com estes resultados, podemos construir curvas associadas ao espectro de energia nuclear (por exemplo Figura II.1-3 ( $^{12}\text{C}$ )).

Se fixarmos as energias associadas às partículas, mas variarmos os ângulos de observação convenientemente, podemos obter curvas que caracterizam distribuições angulares da partícula arrancada, curvas estas diretamente associadas à distribuição de momentum<sup>†</sup> nuclear (figura II.1-4).

<sup>†</sup> Resultados obtidos, de distribuições de momentum de processos (p, 2p) coplanares são apresentados, através de diagramas de contorno, na referência (25).



(Fig.II.1-3) - Espectro de energia característico: a) sem distorção, b) com distorção<sup>(21)</sup>.



(Fig.II.1-4) - Distribuição de correlação angular característica: a) sem distorção, b) com distorção<sup>(21)</sup>.

## II.2 Secção de Choque

Apresentamos, nesta seção, o formalismo teórico-quantitativo para obtenção da secção de choque associada a um processo de espalhamento quase-livre e conhecida como secção de choque de correlação. Este formalismo está contido de maneira mais completa, por exemplo, nas referências<sup>[14,16,17 e 26]</sup>.

O processo no qual estamos interessados descreve a transição de um estado inicial  $|i\rangle$ , que consiste em um núcleo A e em um próton incidente, para um estado final  $|f\rangle$  constituído de um núcleo A-1 e dois prótons emergentes.

A expressão geral para a secção de choque é

$$\frac{d^9\sigma}{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_r} = \frac{4\pi^2}{\hbar} \frac{E_0 E_A}{F} |t_{fi}|^2 \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_r - \vec{k}_0 - \vec{k}_A) \delta(E_1 + E_2 + E_r - E_0 - E_A) \quad (\text{II.2 - 1})$$

sendo F um invariante relativístico dado por

$$F = c \left[ (E_0 E_A - \hbar^2 c^2 \vec{k}_0 \cdot \vec{k}_A)^2 - c^8 m^2 M_A^2 \right]^{1/2} \quad (\text{II.2 - 2})$$

O elemento de matriz  $t_{fi}$ , está relacionado com o elemento de matriz  $T_{fi}$ , amplitude de transição núcleo-núcleo por

$$T_{fi} = \left(\frac{1}{2}\right) \pi^{-1} \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_r - \vec{k}_0 - \vec{k}_A) t_{fi} \quad (\text{II.2 - 3})$$

podendo  $T_{fi}$  ser expandido na forma

$$T_{fi} = \langle f | V + V(E_i - H_0 + i\epsilon)^{-1} V + \dots | i \rangle \quad (\text{II.2 - 4})$$

e relacionado com a matriz espalhamento S por

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) T_{fi} \quad (\text{II.2 - 5})$$

V define a interação entre o núcleo e o núcleo,  $H_0$  define o Hamiltoniano não perturbado,  $E_i = E_0 + E_A$  e  $E_f = E_1 + E_2 + E_r$ .

Usando a primeira aproximação de Born, como ponto de partida, obtemos para o elemento de matriz  $T_{fi}$ , em função das interações núcleo-núcleo

$$T_{fi} = \langle f | V | i \rangle = \sum_{\alpha \neq \beta=0}^A \int a \{ \exp(-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) S_2^\dagger(0) t_p^\dagger(0) \exp(-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1) S_1^\dagger(1) t_p^\dagger(1) \\ \times \psi_{A-1}^*(\vec{r}, m, \mu) \} V(\alpha, \beta) a \{ \exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_0) S_0(0) t_p(0) \psi_A(\vec{r}_1, m_1, \mu_1; \vec{r}, m, \mu) \} \\ \times d^3r_0 d^3r_1 d^3r \quad (\text{II.2 - 6})$$

sendo os prótons descritos por ondas planas;  $a\{\}$  é o operador antisimetriação e normalização;  $S(j)$  e  $t(j)$  são as funções de onda de spin e isospin da partícula  $j$ , e  $m_j$ ,  $\mu_j$  são as variáveis correspondentes nas funções de onda nucleares;  $\psi_A(\vec{r}_1, m_1, \mu_1; \vec{r}, m, \mu)$  e  $\psi_{A-1}(\vec{r}, m, \mu)$  são as funções de onda dos núcleos, inicial e final.

Uma vez que a interação núcleon-núcleon é simétrica com relação à troca de  $\alpha$  por  $\beta$ , podemos escrever

$$V = \sum_{\alpha \neq \beta=0}^A V(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}\right) A(A+1) V(0, 1)$$

(II.2 - 7)

e, substituindo a expressão acima na anterior, obtemos

$$T_{fi} = \left(\frac{1}{2}\right) A(A+1) \int a \left\{ \exp(-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) S_2^\dagger(0) t_p^\dagger(0) \exp(-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1) S_1^\dagger(1) t_p^\dagger(1) \right. \\ \times \psi_{A-1}^*(\vec{r}, m, \mu) \left. \right\} V(0, 1) a \left\{ \exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_0) S_0(0) t_p(0) \psi_A(\vec{r}_1, m_1, \mu_1; \vec{r}, m, \mu) \right\} \\ \times d^3r_0 d^3r_1 d^3r$$

(II.2 - 8)

Expandindo a função de onda  $\psi_A$  da seguinte maneira

$$\psi_A(\vec{r}_1, m_1, \mu_1; \vec{r}, m, \mu) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \sum_{n,j} \int \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}_1) S_n(1) t_j(1) g_A^{(n,j)}(\vec{k}; \vec{r}, m, \mu) d^3k$$

(II.2 - 9)

e inserindo-a na expressão de  $T_{fi}$ , esta pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 T_{fi} &= \int d^3k \sum_n A^{1/2} \int d^3r \psi_{A-1}^*(\vec{r}, m, \mu) g_A^{(n)}(\vec{k}, \vec{r}, m, \mu) \int d^3r_0 d^3r_1 a\{\exp(-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0)\} \\
 &\quad \times S_2^\dagger(0) t_p^\dagger(0) \exp(-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1) S_1^\dagger(1) t_p^\dagger(1) \{V(0,1) a\{\exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_0)\} \\
 &\quad \times S_0(0) t_p(0) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}_1) S_n(1) t_p(1)\} \\
 &= \sum_n \int d^3k A^{1/2} \left[ \int \psi_{A-1}^*(\vec{r}, m, \mu) g_A^{(n)}(\vec{k}, \vec{r}, m, \mu) d^3r \right] \langle \vec{k}_1, m_1, \vec{k}_2, m_2 | V_{pp} | \vec{k}_0, m_0, \vec{k}, n \rangle,
 \end{aligned}
 \tag{II.2-10}$$

onde as funções nucleares  $\psi_A$  e  $\psi_{A-1}$  foram normalizadas a unidade e sendo o elemento de matriz  $\langle \vec{k}_1, m_1, \vec{k}_2, m_2 | V_{pp} | \vec{k}_0, m_0, \vec{k}_3, m_3 \rangle$  definido como

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{k}_1, m_1, \vec{k}_2, m_2 | V_{pp} | \vec{k}_0, m_0, \vec{k}_3, m_3 \rangle &= \\
 &\int d^3r_0 d^3r_1 a\{\exp(-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) S_2^\dagger(0) t_p^\dagger(0) \exp(-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1) S_1^\dagger(1) t_p^\dagger(1)\} V(0,1) \\
 &\times a\{\exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_0) S_0(0) t_p(0) \exp(i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}_1) S_n(1) t_p(1)\}
 \end{aligned}
 \tag{II.2-11}$$

sendo  $g_A^{(n)} = g_A^{(n,p)}$  e  $t_p$  a função de isospin de próton.

Uma vez que a maneira usada para normalizar on das planas não é relativisticamente invariante, o elemento de matriz acima também não o é; e, como desejamos obter uma expressão para a seção de choque que seja um invariante rela-

tivístico, introduzimos uma matriz simbolizada por  $M$ , que permitirá a obtenção desta expressão e está relacionada com o elemento de matriz acima por

$$M(1,2; 0,3) \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_0 - \vec{k}_3) = (E_0 E_1 E_2 E_3)^{1/2} \langle \vec{k}_1, m_1; \vec{k}_2, m_2 | V_{pp} | \vec{k}_0, m_0; \vec{k}_3, m_3 \rangle \quad (\text{II.2-12})$$

onde  $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_0$  e  $E_3 = (\hbar^2 c^2 k_3^2 + m^2 c^4)^{1/2}$ . Com estes resultados obtemos para  $T_{fi}$ , em primeira aproximação de Born

$$T_{fi} = \sum_n A^{1/2} \int \psi_{A-1}^*(\vec{r}, m, \mu) g_A^{(n)}(\vec{k}_3; \vec{r}, m, \mu) d^3r (E_0 E_1 E_2 E_3)^{-1/2} M(1,2; 0, (\vec{k}_3, n)) \quad (\text{II.2-13})$$

e para  $t_{fi}$

$$t_{fi} = 2\pi \sum_n g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}_3) (E_0 E_1 E_2 E_3)^{-1/2} M(1,2; 0, (\vec{k}_3, n)) \quad (\text{II.2-14})$$

Se tomarmos a transformada de Fourier da equação (II.2-9), temos para a função  $g_A^{(n)}$

$$g_A^{(n)}(\vec{k}_3; \vec{r}, m, \mu) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} S_n^\dagger(1) S_p^\dagger(1) \int \exp(-i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}_1) \psi_A(\vec{r}_1, m_1, \mu_1; \vec{r}, m, \mu) d^3r_1 \quad (\text{II.2-15})$$

isto é,  $g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}_3)$  é a transformada de Fourier da integral de superposição entre os núcleos, inicial e final, e chamada de amplitude de momentum. Inserindo tal resultado na integral dependente de  $\vec{r}$  da equação (II.2-10)

$$\left[ \psi_{A-1}^* (\vec{r}, m, \mu) g_A^{(n)}(\vec{k}_3; \vec{r}, m, \mu) d^3 r = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} S_n^\dagger(1) t_p^\dagger(1) \right] \exp(-i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}_1) \\ \times \psi_{A-1}^* (\vec{r}, m, \mu) \psi_A(\vec{r}_1, m_1, \mu_1; \vec{r}, m, \mu) d^3 r_1 d^3 r \quad (\text{II.2-16})$$

É comum neste ponto a introdução de novas variáveis,  $\vec{R}_r$ , coordenada de centro de massa do núcleo final,  $\vec{x}_j = \vec{r}_j - \vec{R}_r$  ( $j=1, 2, \dots, A-1$ ) coordenadas relativas e também a expressão das funções de onda nucleares em termos de novas funções

$$\psi_{A-1}^* (\vec{r}, m, \mu) = \left[ (A-1)^{1/2} / (2\pi)^{3/2} \right] \exp(-i\vec{k}_r \cdot \vec{R}_r) \phi_{A-1}^* (\vec{x}, m, \mu) \quad \text{e} \\ \psi_A(\vec{r}_1, m_1, \mu_1; \vec{r}, m, \mu) = \left[ (A-1)^{1/2} / (2\pi)^{3/2} \right] \phi_A(\vec{x}_1, m_1, \mu_1; \vec{x}, m, \mu) \quad (\text{II.2-17})$$

onde as funções  $\phi_A$  e  $\phi_{A-1}$  são funções nucleares internas normalizadas que contêm  $A-1$  e  $A-2$  coordenadas  $\vec{x}_j$ .

Introduzindo as funções acima na expressão (II.2-16) obtemos, após integração sobre  $\vec{R}_r$

$$A^{1/2} \left[ \psi_{A-1}^* (\vec{r}, m, \mu) g_A^{(n)}(\vec{k}_3; \vec{r}, m, \mu) d^3 r = g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_0) \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_0 + \vec{k}_r) \right] \\ (\text{II.2-18})$$

sendo que a função  $g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k})$  é agora expressa por

$$g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}) = \frac{A^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \phi_{A-1}^* (\vec{x}, m, \mu) \phi_A(\vec{x}_1, m_1, \mu_1; \vec{x}, m, \mu) d^3 x_1 d^3 x \\ \times S_n^\dagger(1) t_p^\dagger(1) \quad (\text{II.2-19})$$

Com respeito a interpretação física associada à função  $g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k})$ , podemos dizer que, para um modelo extremo de partícula-única, por exemplo,  $|g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k})|^2$  representa a distribuição de momentum que o próton tinha no núcleo, antes de ser arrancado e pode ser interpretada como a probabilidade de encontrar um próton em um estado de momentum  $\hbar\vec{k}$  e estado de spin  $s_n$  enquanto o resto do núcleo está no estado  $\psi_{A-1}$  com função de onda interna  $\phi_{A-1}$  e momentum  $-\hbar\vec{k}$ .

Podemos escrever a secção de choque de correlação, após integrarmos a expressão (II.2-1) sobre as coordenadas do núcleo de recuo, as quais não são experimentalmente detectadas, como

$$\frac{d^6\sigma}{d^3k_1 d^3k_2} = \frac{(2\pi)^4}{\hbar} (E_A/F) (E_1 E_2 E_3)^{-1} \sum_n |M(1,2; 0, (\vec{k}_3, n))|^2 |g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}_3)|^2 \times \delta(E_1 + E_2 + E_r - E_o - E_A) \quad (\text{II.2-20})$$

Se usarmos a relação

$$(d^6\sigma/dE_1 d\Omega_1 dE_2 d\Omega_2) = \left[ E_1 E_2 k_1 k_2 / (\hbar c)^4 \right] (d^6\sigma/d^3k_1 d^3k_2) \quad (\text{II.2-21})$$

onde  $dE_i$  ( $i=1,2$ ) representa um intervalo de energia e  $d\Omega_i$  o elemento de ângulo sólido que subentende o cone infinitesimal de emissão de um próton, após a reação, obtemos para a secção de choque

$$\frac{d^6\sigma}{dE_1 d\Omega_1 dE_2 d\Omega_2} = \frac{(2\pi)^4}{\hbar c} (k_1 k_2 / \hbar^2 c^2 k_o E_3) \sum_n |M(1,2; 0, (\vec{k}_3, n))|^2 |g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}_3)|^2 \times \delta(E_1 + E_2 + E_r - E_o - E_A) \quad (\text{II.2-22})$$

sendo que inserimos na equação (II.2-19) a expressão  $F = \hbar c^2 k_c E_A$  do invariante relativístico obtida no caso em que o núcleo-alvo está inicialmente em repouso ( $\vec{k}_A = 0$ ).

No entanto, ao fazermos uso da aproximação de Born no elemento de matriz  $T_{fi}$ , cometemos um erro apreciável, uma vez que as condições para a validade da aproximação de Born não são satisfeitas pela interação nuclear (potencial nuclear fraco). Por este motivo, para a correção do erro cometido, procuramos obter uma relação entre o elemento de matriz  $M(1,2; 0, (\vec{k}_3, n))$  e a secção de choque diferencial próton-próton livre, no sistema centro de massa e após, substituímos, na secção de choque de correlação, a matriz  $M$  por esta secção de choque fenomenológica (isto corresponde a uma aproximação de impulso fenomenológica). Disso resulta uma expressão para a secção de choque do espalhamento quase-livre em função de uma grandeza mensurável experimentalmente, a secção de choque próton-próton livre.

Obtemos, para a secção de choque próton-próton livre

$$\frac{d\sigma^{pr}}{d\Omega} (1,2; \vec{0}, (\vec{k}_3, n)) = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{2\pi}{\hbar c}\right)^4 \left(\frac{1}{E_0}\right) |M(1,2; 0, (\vec{k}_3, n))|^2 \quad (\text{II.2-23})$$

onde usamos uma barra para simbolizar quantidades no sistema centro de massa e, para a secção de choque de correlação, usando a aproximação de impulso, a relação

$$\frac{d^6\sigma}{dE_1 d\Omega_1 dE_2 d\Omega_2} = \left(\frac{4}{(\hbar c)^2}\right) (k_1 k_2 \bar{E}_0^2 / k_0 E_3) \sum_n |g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}_3)|^2 \frac{d\sigma^{\text{fr}}}{d\bar{\Omega}}(\vec{1}, \vec{2}; \vec{0}, (\vec{k}_3, n))$$

$$\times \delta(E_1 + E_2 + E_r - E_0 - E_A) \quad (\text{II.2-24})$$

Já citamos, na seção anterior, a existência de distorções nestes processos de espalhamento, causadas por colisões múltiplas dos prótons no interior do núcleo, e o fato de que sua existência origina um tratamento formal deste tipo de reações em uma aproximação de impulso com ondas distorcidas.

Como já foi dito anteriormente, este tratamento admite que as ondas planas associadas aos prótons sofram distorções, e, para simbolizar estas ondas planas distorcidas, usamos

$$\exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_j) D_0(\vec{r}_j - \vec{R}_r) ,$$

$$\exp(-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_j) D_1(\vec{r}_j - \vec{R}_r) ,$$

e

$$\exp(-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_j) D_2(\vec{r}_j - \vec{R}_r) ; \quad (j=0,1) , \quad (\text{II.2-25})$$

onde as funções  $D_i(\vec{r})$  ( $i=0,1,2$ ), que representam a distorção sofrida pela partícula  $i$  no ponto  $\vec{r}$ , variam lentamente se comparadas com as ondas planas e tendem a um valor unitário quando o argumento for muito maior que o raio nuclear.

Se usarmos a aproximação semiclássica WKB, obtemos, para as distorções

$$D_0(\vec{r}) = \exp \left[ -i(E_0 / \hbar^2 c^2 k_0) \int_{-\infty}^0 V_0(\vec{r} + s\vec{k}_0) ds_0 \right] \quad e$$

$$D_j(\vec{r}) = \exp\left[-i(E_j/\hbar^2 c^2 k_j) \int_0^\infty V_j(\vec{r} + s\vec{k}_j) ds\right], \quad j=1,2 \quad (\text{II.2-26})$$

onde  $V_0$  e  $V_j$  representam os potenciais nucleares complexos sentidos pelas partículas 0 e j, respectivamente.

Levando em conta a existência de distorções, a expressão (II.2-13) para  $T_{fi}$  se torna

$$\begin{aligned} T_{fi} = & \frac{A^{1/2}}{2(2\pi)^{3/2}} \int \left[ \exp(-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_0) D_2(\vec{r}_0 - \vec{R}_r) S_2^\dagger(0) t_p^\dagger(0) \exp(-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1) \right. \\ & \times D_1(\vec{r}_1 - \vec{R}_r) S_1^\dagger(1) t_p^\dagger(1) - \exp(-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_1) D_2(\vec{r}_1 - \vec{R}_r) S_2^\dagger(1) t_p^\dagger(1) \\ & \times \exp(-i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_0) D_1(\vec{r}_0 - \vec{R}_r) S_1^\dagger(0) t_p^\dagger(0) \left. \right] \psi_{A-1}(\vec{r}, m, \mu) V(0,1) \\ & \times \left[ \exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_0) D_0(\vec{r}_0 - \vec{R}_r) S_0(0) t_p(0) \psi_A(\vec{r}_1, m_1, \mu_1; \vec{r}, m, \mu) \right. \\ & \left. - \exp(i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_1) D_0(\vec{r}_1 - \vec{R}_r) S_0(1) t_p(1) \psi_A(\vec{r}_0, m_0, \mu_0; \vec{r}, m, \mu) \right] d^3r_0 d^3r_1 d^3r \end{aligned} \quad (\text{II.2-27})$$

e a secção de choque (II.2-24)

$$\begin{aligned} \frac{d^6\sigma}{dE_1 d\Omega_1 dE_2 d\Omega_2} = & \left( \frac{4}{(\hbar c)^2} \right) \left( \frac{k_1 k_2 \bar{E}_0^2}{k_0 E_3} \right) \sum_n |g_{A-1,A}^{\prime(n)}(\vec{k}_3)|^2 \frac{d\sigma_{fr}}{d\bar{\Omega}}(\bar{1}, \bar{2}; \bar{0}, (\vec{k}_3, n)) \\ & \times \delta(E_1 + E_2 - E_r - E_0 - E_A) \end{aligned} \quad (\text{II.2-28})$$

onde  $g^{\prime(n)}$ , a chamada amplitude de momentum distorcida é definida por

$$g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}) = \frac{A^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left[ \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}_1) \phi_{A-1}^*(\vec{x}, m, \mu) \phi_A(\vec{x}_1, m_1, \mu_1; \vec{x}, m, \mu) D_0(\vec{x}_1) \right. \\ \left. \times D_1(\vec{x}_1) D_2(\vec{x}_1) d^3x_1 d^3x S_n^\dagger(1) t_p^\dagger(1) \right] \quad (\text{II.2-29})$$

Introduzimos a distorção e alguns de seus efeitos em nosso formalismo de maneira que agora nos referimos à quantidade  $|g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}_3)|^2$  como a distribuição de momentum distorcida em analogia à quantidade  $|g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}_3)|^2$  que representa a distribuição de momentum não distorcida.

Isto implica em que os prótons que participam da reação, antes e depois da colisão, são espalhados no núcleo e, desta maneira, a distribuição de momentum não corresponde à distribuição real de momentum que o próton tinha no núcleo, antes de ser arrancado.

O termo

$$\sum_n |g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}_3)|^2 \cdot \frac{d\sigma^{fr}}{d\Omega}(\vec{1}, \vec{2}; \vec{0}, (\vec{k}_3, n)) \quad (\text{II.2-30})$$

da equação (II.2-28) é igual a  $\sum_n |g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}_3)|^2$  vezes o correspondente elemento de matriz para espalhamento livre em um próton com a função de onda de spin normalizada

$$\sum_n |g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}_3)|^2 S_n \left( \sum_n |g_{A-1,A}^{(n)}(\vec{k}_3)|^2 \right)^{-1/2} \quad (\text{II.2-31})$$

Desta forma, podemos escrever a secção de choque fatorada no produto da distribuição de momentum distor-

cida pela secção de choque livre polarizada como consequência da aproximação de impulso. Considerando o eixo z como eixo de quantização, ao spin estará associado um vetor polarização efetiva  $\vec{P}$  cujas componentes são (4)

$$P_x(\vec{k}_3) = \frac{2 \operatorname{Re} \left( \sum_{m_{A-1}, m_A} g'(\vec{k}_3)^{*(+)} g'(\vec{k}_3)^{(-)} \right)}{\sum_{m_{A-1}, m_A} \sum_n |g'(\vec{k}_3)^{(n)}|^2}$$

$$P_y(\vec{k}_3) = \frac{2 \operatorname{Im} \left( \sum_{m_{A-1}, m_A} g'(\vec{k}_3)^{*(+)} g'(\vec{k}_3)^{(-)} \right)}{\sum_{m_{A-1}, m_A} \sum_n |g'(\vec{k}_3)^{(n)}|^2}$$

$$P_z(\vec{k}_3) = \frac{\sum_{m_{A-1}, m_A} \left( |g'(\vec{k}_3)^{(+)}|^2 - |g'(\vec{k}_3)^{(-)}|^2 \right)}{\sum_{m_{A-1}, m_A} \sum_n |g'(\vec{k}_3)^{(n)}|^2} \quad (\text{II.2-32})$$

sendo que os símbolos (+) e (-) indicam spin do próton nuclear e a presença de somas com respeito às projeções dos spins dos núcleos se deve ao fato destes não serem polarizados.

### II.3 Potencial Ótico

É fácil ver, usando a equação da continuidade, que a introdução de um potencial com parte imaginária na equação de Schrödinger, descreve a absorção de partículas.

Assim, para descrever o efeito das colisões múltiplas que originam, quando elásticas, variações de fase, e,

quando inelásticas, variações nas amplitudes das ondas associadas às partículas envolvidas na reação quase-livre, introduzimos no formalismo um potencial complexo dado por

$$V_j(\vec{r}) = U_j(\vec{r}) + iW_j(\vec{r}) \quad (\text{II.3 - 1})$$

como citado anteriormente no parágrafo (II.1).

Os parâmetros deste potencial são obtidos usualmente de maneira fenomenológica, de forma a reproduzirem dados experimentais de espalhamentos.

A forma destes potenciais varia, sendo em geral utilizados potenciais esfericamente simétricos dos quais o potencial do tipo Woods-Saxon é um bom exemplo.

No presente trabalho, por simplicidade, adotaremos potenciais tipo poço quadrado com partes real e imaginária, independentes de spin.

Uma vez que o livre caminho médio de prótons no núcleo é <sup>(24)</sup>

$$\lambda_j = \frac{\hbar^2 c^2 k_j}{2E_j |W_j|}, \quad j = 0, 1, 2 \quad (\text{II.3 - 2})$$

usando a aproximação semiclassical obtemos, para a parte da distorção responsável pelos efeitos de absorção, a expressão

$$D_j(\vec{r}) = \exp(-l_j/2\lambda_j), \quad \text{com } j = 0,1,2 \quad (\text{II.3 - 3})$$

sendo que  $l_j$  representa as trajetórias clássicas dos prótons no interior do núcleo.

A parte responsável por variações na amplitude das ondas é

$$\exp\left(i\left(\frac{l_0 U_0}{2\lambda_0 W_0} + \frac{l_1 U_1}{2\lambda_1 W_1} + \frac{l_2 U_2}{2\lambda_2 W_2}\right)\right) \quad (\text{II.3 - 4})$$

sendo que podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\exp\left(i\left(\frac{l_0 U_0}{2\lambda_0} + \frac{l_1 U_1}{2\lambda_1} + \frac{l_2 U_2}{2\lambda_2}\right)\right), \quad \text{com } U_i = \frac{U_i}{W_i} \quad (\text{II.3 - 5})$$

e desta maneira obtemos a expressão geral da distorção, levando em conta as partes real e imaginária do potencial, como

$$D(r) = \exp\left[-\left(\frac{l_0}{2\lambda_0} + \frac{l_1}{2\lambda_1} + \frac{l_2}{2\lambda_2}\right)\right] \exp\left(i\left(\frac{l_0 U_0}{2\lambda_0} + \frac{l_1 U_1}{2\lambda_1} + \frac{l_2 U_2}{2\lambda_2}\right)\right) \quad (\text{II.3 - 6})$$

a qual não é esféricamente simétrica e é dependente da geometria da reação. Nesta expressão consideramos efeitos de reflexão (parte real) e absorção (parte imaginária) mas desprezamos a dependência spin-órbita. Para determinar o livre caminho médio usamos a relação clássica

$$\lambda = \{1/\rho(r)\}/\langle \sigma \rangle \quad (\text{II.3 - 7})$$

onde  $\rho(r)$  é a densidade da matéria nuclear e  $\langle \sigma \rangle$  é a secção

de choque média para o espalhamento livre do próton incidente e do núcleon.

A expressão para a densidade da matéria nuclear  $\rho(r)$  adotada é

$$\rho(r) = \begin{cases} 3/4\pi L^3, & r < L \\ 0, & r > L \end{cases} \quad (\text{II.3-8})$$

sendo que  $L$  representa a largura do poço quadrado.

Usando esta função densidade, obtemos, para o raio quadrático médio nuclear  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3}{5}} L \quad (\text{II.3-9})$$

Podemos, portanto, obter o valor de  $L$  do valor experimental de  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  (27).

Já  $\langle \sigma \rangle$ , usando o modelo do gás de Fermi (28) para a matéria nuclear, é dado por (20)

$$\langle \sigma_i \rangle = \sigma_0 \left[ 1 - \frac{7}{5} \frac{k_F^2}{p_i^2} \right] \text{ para } p_i^2 \gg 2k_F^2 \quad e$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \sigma_0 \left[ 1 - \frac{7}{5} \frac{k_F^2}{p_i^2} + \frac{2}{5} \frac{k_F^2}{p_i^2} \left( 2 - \frac{p_i^2}{k_F^2} \right)^{5/2} \right] \text{ para } p_i^2 \ll 2k_F^2$$

(II.3-10)

onde  $k_F$  representa o momentum de Fermi,  $\sigma_0$  é a seção de choque total para espalhamento núcleon-núcleon livres e  $\vec{p}$  é o momentum associado ao  $i$ -ésimo próton no interior do núcleo.

Podemos reescrever a expressão anterior como <sup>(22)</sup>

$$\langle \sigma(T_{oi}) \rangle = \sigma_o(T_i) \left[ 1 - \frac{7}{5} \frac{\epsilon_F}{T_i} \right], \quad T_i > 2\epsilon_F \quad e$$

$$\langle \sigma(T_{oi}) \rangle = \sigma_o(T_i) \left[ 1 - \frac{7}{5} \frac{\epsilon_F}{T_i} + \frac{2}{5} \frac{\epsilon_F}{T_i} \left( 2 - \frac{T_i}{\epsilon_F} \right)^{5/2} \right], \quad T_i < 2\epsilon_F \quad (\text{II.3-11})$$

sendo  $\epsilon_F$  a energia de Fermi,  $T_i$  e  $T_{oi}$  as energias cinéticas da  $i$ -ésima partícula dentro e fora da matéria nuclear, respectivamente, e sendo que  $T_i = T_{oi} - U_i$ , onde  $U_i$  é a parte real do potencial ótico nuclear. O princípio de exclusão é levado em conta nestas expressões, exigindo-se que o projétil assim como a partícula-alvo estejam fora da esfera de ocupação, no espaço do momentum, depois da colisão. O raio da esfera é dado por

$$R = \hbar(3\pi^2 N/V)^{1/2} \quad (\text{II.3-12})$$

onde  $N$  é o número de nêutrons ou prótons e  $V$  é o volume nuclear. É fácil mostrar que o momentum transferido mais provável em uma colisão núcleon-núcleon de alta energia é da ordem de  $\hbar/r_o$  onde  $r_o$  é o alcance das forças nucleares. Como  $\frac{\hbar}{r_o} R$  é da ordem de  $1/2$ , uma considerável fração das colisões é proibida pelo princípio de Pauli e assim a seção de choque efetiva sofre um decréscimo. É exatamente este efeito que é computado nas expressões (II.3-11), nos termos  $\frac{7}{5} \frac{\epsilon_F}{T_i}$  e  $\frac{2}{5} \frac{\epsilon_F}{T_i} \left( 2 - \frac{T_i}{\epsilon_F} \right)^{5/2}$  <sup>(20)</sup>.

### III - ESPALHAMENTO QUASE-LIVRE (p,2p) COM PRÓTONS INCIDENTES POLARIZADOS

#### III.1 - Como Forma de Medir a Interação Spin- Órbita

O sucesso obtido pelo modelo nuclear de camadas na explicação da estabilidade nuclear de núcleos mágicos, na previsão tanto de momenta angulares totais de certos núcleos quanto da paridade de autofunções nucleares de núcleos com número atômico ímpar, tornou este modelo uma ferramenta poderosa para a descrição formal de configurações nucleares.

Como se sabe, Mayer, Jensen, et alii<sup>(1,2)</sup> postularam que o potencial correto a ser usado na equação de Schrödinger para um núcleon sob a ação de um potencial nuclear é

$$V_i = U(r) + f(r) \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\ell}_i \quad (i=1,2,\dots,A) \quad (\text{III.1-1})$$

e não um potencial de caráter puramente central, como era usado até então. Na equação acima,  $U(r)$  é um potencial esféricamente simétrico,  $\vec{\ell}_i$  é o operador momentum angular orbital

da  $i$ -ésima partícula e  $\vec{\sigma}_i$  é o operador spin de Pauli.

Estes mesmos autores postularam ser  $f(r)$  algum múltiplo do termo de Thomas que é o termo spin-órbita no caso atômico, com sinal contrário.

Na equação de onda relativística para um núcleon, tal termo aparece, mas é muito pequeno para explicar resultados experimentais.

Assim, uma das grandes contribuições de Meyer, Jensen et alii foi acrescentar ao potencial nuclear um termo que descreve a interação spin-órbita para os núcleons.

É útil, neste ponto, introduzirmos o número quântico momentum angular total para as partículas individuais definido por

$$\vec{j}_i = \vec{l}_i + \left(\frac{1}{2}\right) \vec{\sigma}_i \quad (\text{III.1-2})$$

o que significa que, uma vez que  $j_i = |\ell_i + \frac{1}{2} \sigma_i|, \dots, |\ell_i - \frac{1}{2} \sigma_i|, \sigma_i = \pm 1$ , então

$$j_i = \ell_i + \frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$$j_i = \ell_i - \frac{1}{2} \quad (\text{III.1-3})$$

Como consequência

$$|\vec{j}_i|^2 = \vec{j}_i \cdot \vec{j}_i = \left[ \left( \vec{l}_i + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_i \right) \cdot \left( \vec{l}_i + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_i \right) \right] = \ell_i^2 + \vec{\sigma}_i \cdot \vec{l}_i + \frac{1}{4} \sigma_i^2 \quad (\text{III.1-4})$$

$j_i^2$ ,  $l_i^2$  e  $\sigma_i^2$  comutam uns com os outros e também com  $\vec{\sigma}_i \cdot \vec{l}_i$ . Desta forma, é possível construir funções de onda dos núcleons que são autofunções simultaneas de  $j_i^2$ ,  $l_i^2$ ,  $\sigma_i^2$  e  $j_{i,z}$ .

Assim

$$(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{l}_i) \psi_{j_i m_i} = \left[ j_i^2 - l_i^2 - \frac{1}{4} \sigma_i^2 \right] \psi_{j_i m_i}, \quad (\text{III.1-5})$$

onde definimos  $\psi_{j_i m_i}$  como sendo a função de onda do  $i$ -ésimo núcleon dotado de momentum angular total  $j_i$ , projeção  $m_i$ , momentum angular  $l_i$  e spin 1/2. Usando os resultados conhecidos

$$j_i^2 \psi_{j_i m_i} = j_i (j_i + 1) \psi_{j_i m_i},$$

$$l_i^2 \psi_{j_i m_i} = l_i (l_i + 1) \psi_{j_i m_i},$$

$$\text{e } \sigma_i^2 \psi_{j_i m_i} = 3 \psi_{j_i m_i}, \quad (\text{III.1-6})$$

a equação (III.1-5) se torna

$$(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{l}_i) \psi_{j_i m_i} = \left[ j_i(j_i+1) - l_i(l_i+1) - \frac{3}{4} \right] \psi_{j_i m_i} \quad (\text{III.1-7})$$

Para  $j_i = l_i + \frac{1}{2}$  temos

$$(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{l}_i) \psi_{j_i m_i} = l_i \psi_{j_i m_i} \quad (\text{III.1-8a})$$

e para  $j_i = l_i - \frac{1}{2}$

$$(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{l}_i) \psi_{j_i m_i} = -(l_i + 1) \psi_{j_i m_i} \quad (\text{III.1-8b})$$

Inserindo estes resultados na equação (III.1-1) a expressão para o potencial fornece

$$V = U(r) + l_i f(r), \quad j_i = l_i + \frac{1}{2} \quad e$$

$$V = U(r) - (l_i + 1) f(r), \quad j_i = l_i - \frac{1}{2}$$

(III.1-9)

Inspecionando os resultados acima, vemos que para um dado  $l_i$  o nível de energia sofre um desdobramento em dois níveis, o mais baixo contendo núcleons cujos spin e momentum orbital têm o mesmo sentido, isto é,  $j_i = l_i + \frac{1}{2}$  e o mais alto com spin e momentum angular orbital de sentidos contrários, ou seja  $j_i = l_i - \frac{1}{2}$  (note-se que  $f(r)$  tem sinal negativo).

O modelo de camadas, postulado por Mayer e Jensen, é também conhecido como modelo nuclear de camadas com acoplamento  $jj$ ; neste  $n, l_i, j_i = l_i \pm \frac{1}{2}$  e  $m_i$ , dos núcleons individuais, são bons números quânticos e

$$j_{i,z} \psi_{j_i m_i} = m_i \psi_{j_i m_i}, \quad (\text{III.1-10})$$

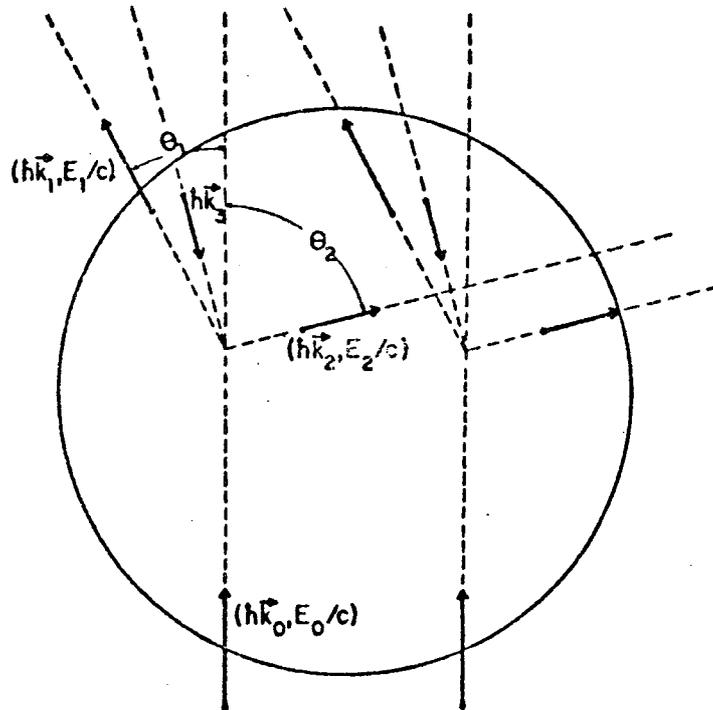
com  $m_i$  a projeção de  $j_i$  no eixo de quantização (eixo  $z$ ).

Os  $\vec{j}_i$  de cada núcleon individual se acoplam para dar  $\vec{J}$ , o spin total do núcleo. Neste ponto vemos a

importância do momentum angular dos núcleons no modelo de camadas, uma vez que esta é uma quantidade que serve para classificar as partículas nucleares.

Desta forma, cada núcleon no núcleo é identificado por quatro números quânticos: radial, momentum angular orbital, momentum angular total e número quântico magnético.

Um modelo, proposto e desenvolvido por G. Jacob, Th. A.J. Maris, C. Schneider e M. R. Teodoro<sup>(13)</sup> mostrou que as reações quase-livres assimétricas com prótons incidentes polarizados podem ser usadas como uma forma de medir o acoplamento spin-órbita.



(Fig. III. 1-1) - Cinemática de uma reação quase-livre assimétrica coplanar.

Para a cinemática mostrada na figura III.1-1, os prótons oriundos de colisões quase-livres que ocorrem no

lado direito do núcleo, têm, na média, que atravessar menos matéria nuclear do que os prótons provindos de colisões que ocorrem no lado esquerdo. Vamos considerar inicialmente os efeitos causados pela parte imaginária do potencial ótico, os efeitos de absorção (espalhamentos múltiplos inelásticos).

Como o livre caminho médio de um próton de energia média é da ordem do raio de um núcleo leve, o lado direito do núcleo contribui consideravelmente mais para reações quase-livres do que o lado esquerdo, pois os prótons oriundos de reações que ocorrem naquele lado atravessam menos matéria nuclear, sofrem na média menos colisões e, desta forma, têm menor probabilidade de serem absorvidos.

Tal situação pode ser tornada estatisticamente ainda mais provável se o livre caminho médio correspondente à energia  $E_2$  for menor que o correspondente às energias  $E_0$  e  $E_1$ , situação esta que sempre pode ser conseguida experimentalmente.

Se o momentum do próton nuclear tem um valor  $k_3$  e direção como a indicada na figura III.1-1, como resultado do domínio do lado direito do núcleo no espalhamento, observamos, classicamente, uma orientação bem definida para o momentum angular orbital do núcleon, sendo esta orientação ortogonal ao plano de espalhamento (horário, para a situação em pauta). Se o momentum angular orbital tem uma orientação bem definida, devido ao acoplamento spin-órbita, favorecerá uma orientação de spin, da mesma forma bem definida, para o próton nuclear (sentido horário para  $j = 3/2$  e anti-horário para  $j = 1/2$ ).

Assim, como resultado combinado de absorção e acoplamento spin-órbita, o próton nuclear, no espalhamento quase-livre, tem uma polarização efetiva ortogonal ao plano de espalhamento. Este é um efeito não só da parte imaginária do potencial ótico mas também da parte real.

Também deve-se enfatizar que a antisimetria do espalhamento está longe de ser uma presença indesejável, pois se o espalhamento for simétrico, nenhum resultado será observado, sendo a polarização efetiva  $P_3$  dos prótons-alvo nula porque nenhum dos lados do núcleo será favorecido (mais transparente que o outro). Por isto mesmo, também as colisões múltiplas são um fator essencial para a medida do acoplamento spin-órbita.

A polarização efetiva do próton nuclear pode ser observada com o uso de prótons incidentes polarizados explorando-se a considerável diferença entre as secções de choque próton-próton livres com spins paralelos e antiparalelos causada pela grande diferença entre espalhamentos "triplet" e "singlet".

Para isto, deve-se medir a secção de choque quase-livre coplanar para duas direções de polarização (ortogonais ao plano de espalhamento) do próton incidente, em uma geometria assimétrica determinada ou, equivalentemente, por invariância rotacional em duas geometrias-espelho mantendo a polarização do próton incidente fixa.

Tal diferença entre secções de choque pode ser entendida analisando-se, de forma qualitativa, a secção de choque próton-próton livre polarizada <sup>(13)</sup>

$$\frac{d\sigma^{fr}}{d\bar{\Omega}}(\bar{\theta}) = I_0(\bar{\theta}) \left[ 1 + (P_0 + P_3) P(\bar{\theta}) + P_0 P_3 C_{nn}(\bar{\theta}) \right], \quad (\text{III.1-11})$$

sendo  $\bar{\theta}$  o ângulo entre os prótons no sistema C.M.;  $P_0$  e  $P_3$  as polarizações do próton incidente e próton-alvo, respectivamente;  $P(\bar{\theta})$  e  $C_{nn}(\bar{\theta})$  funções par e ímpar em  $\bar{\theta}$ , e  $I_0(\bar{\theta})$  a secção de choque próton-próton livre não polarizada (caso em que  $P_0 = P_3 = 0$ ). A função par  $P(\bar{\theta})$  é a responsável pela assimetria no espalhamento de prótons polarizados em não polarizados e  $C_{nn}(\bar{\theta})$  representa o coeficiente de correlação de spin. Resultados relativos a estas grandezas, para as cinemáticas usadas em nosso trabalho, foram publicados na referência <sup>(13)</sup>, usando deslocamentos de fase de McGregor <sup>(29)</sup>. No caso de uma assimetria nula,  $C_{nn}(\bar{\theta})$  é igual a um, e, se os prótons incidentes forem totalmente polarizados ( $P_0 = 1$ ),  $d\sigma^{fr}(\bar{\theta})/d\bar{\Omega}$  é máxima se os spins dos prótons forem paralelos, e nula se forem antiparalelos, de forma que a razão

$$\frac{d\sigma^{fr}(\uparrow\uparrow)}{d\bar{\Omega}} / \frac{d\sigma^{fr}(\uparrow\downarrow)}{d\bar{\Omega}} \quad (\text{III.1-12})$$

onde  $(\uparrow\uparrow)$  e  $(\uparrow\downarrow)$  simbolizam os spins dos prótons, cresce infinitamente.

### III.2 - Polarização Efetiva

No caso de prótons incidentes polarizados, ex-

pressamos a seção de choque de correlação como <sup>(13)</sup>

$$\frac{d^6\sigma}{dE_1 d\Omega_1 dE_2 d\Omega_2} = \frac{4}{(\hbar c)^2} \frac{k_1 k_2 \bar{E}_0}{k_0 E_3} \sum_n |g'_{A-1,A}{}^{(n)}(\vec{k}_3)|^2 \frac{d\sigma^{fr}}{d\bar{\Omega}}(T_0, \bar{\theta}, P_0, P_3) \delta(E_1 + E_2 + E_r - E_0 - E_A)$$

(III.2-1)

onde  $\frac{d\sigma^{fr}}{d\bar{\Omega}}$  é a seção de choque próton-próton livre polarizada no sistema C.M.;  $P_0$  a polarização do próton incidente e  $P_3$  a polarização efetiva do próton nuclear. Esta relação não inclui informações da polarização dos prótons emergentes.

A polarização efetiva  $P_3$ , para uma geometria bem determinada no processo de espalhamento, pode ser escrita de forma geral por <sup>(4)</sup>

$$P_3(\vec{k}_3) = \frac{\sum_m |g'_{jm}{}^{(+)}(\vec{k}_3)|^2 - \sum_m |g'_{jm}{}^{(-)}(\vec{k}_3)|^2}{\sum_m |g'_{jm}{}^{(+)}(\vec{k}_3)|^2 + \sum_m |g'_{jm}{}^{(-)}(\vec{k}_3)|^2}$$

(III.2-2)

na qual os índices de soma referem-se a modelo de partícula-única que caracteriza os estados-furo, e os símbolos (+) e (-) indicam o spin do próton arrancado, o qual é quantizado na direção  $\vec{k}_2 \times \vec{k}_1$ .

A distribuição de momentum distorcida é

$$|g'_j(\vec{k}_3)|^2 = \sum_m |g_{jm}^{(+)}(\vec{k}_3)|^2 + \sum_m |g_{jm}^{(-)}(\vec{k}_3)|^2, \quad \text{(III.2-3)}$$

sendo que a amplitude de momentum distorcida é definida por <sup>(14)</sup>

$$g'_{jm}(\vec{k}_3) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp(-i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}) \prod_i D_i(\vec{r}) \psi_{jm}(\vec{r}) d^3r ; \quad (\text{III.2-4})$$

$i=0,1,2$

$\psi_{jm}(\vec{r})$  é a função de onda do próton arrancado, no espaço de configuração.

As funções  $\psi_{jm}(\vec{r})$  podem ser expressas como

$$\psi_{jm}(\vec{r}) = \sum_{\substack{m_s, m_\ell \\ (m=m_\ell+m_s)}} C(\ell, s; m_\ell, m_s | j, m) \psi_{\ell m_\ell}(\vec{r}) \chi_s^{m_s}, \quad (\text{III.2-5})$$

onde  $C(\ell, s; m_\ell, m_s | j, m)$  representa coeficientes de Clebsch-Gordan.

Da mesma forma

$$g'^{(\pm)}_{jm}(\vec{k}_3) = \sum_{\substack{m \\ (m=m_\ell+m_s)}} C(\ell, \frac{1}{2}; m_\ell, \pm \frac{1}{2} | j, m) g'_{\ell m_\ell}(\vec{k}_3), \quad (\text{III.2-6})$$

sendo  $g'_{\ell m_\ell}(\vec{k}_3)$

$$g'_{\ell m_\ell}(\vec{k}_3) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp(-i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}) \prod_i D_i(\vec{r}) \psi_{\ell m_\ell}(\vec{r}) d^3r \quad (\text{III.2-7})$$

Desta maneira, para obtermos a polarização efetiva para um determinado núcleon, devemos primeiramente obter para este a função definida pela relação (III.2-7), uma vez que a polarização efetiva é expressa como função das transformadas de Fourier distorcidas da integral de superposição entre os núcleos, inicial e final, dependentes de  $j$  e  $m$ .

### III.3 - Resultados Teóricos Obtidos para o $^{16}\text{O}$

Considerando o eixo z como eixo de quantização e perpendicular ao plano x-y de espalhamento e adotando o modelo de camadas, os seguintes resultados foram obtidos, no caso do  $^{16}\text{O}$  (14), para a amplitude de momentum distorcida, distribuição de momentum e polarização efetiva

#### a) Estado $1p_{1/2}$

Para este estado  $j = \frac{1}{2}$ ,  $m = \pm \frac{1}{2}$ ;  $l = 1$ ,  $m_l = 1, 0, -1$ ;  $s = \frac{1}{2}$ ,  $m_s = \pm \frac{1}{2}$  e, particularizando as expressões (III.2 - 5) e (III.2 - 6), temos

$$\begin{aligned} \psi_{j=1/2, m=1/2}(\vec{r}) &= \sqrt{2/3} \psi_{l=1, m_l=1}(\vec{r}) \chi_{1/2}^{-1/2} - \sqrt{1/3} \psi_{l=1, m_l=0}(\vec{r}) \chi_{1/2}^{1/2}, \\ \psi_{j=1/2, m=-1/2}(\vec{r}) &= -\sqrt{2/3} \psi_{l=1, m_l=-1}(\vec{r}) \chi_{1/2}^{1/2} + \sqrt{1/3} \psi_{l=1, m_l=0}(\vec{r}) \chi_{1/2}^{-1/2} \quad e \\ g_{j=1/2, m=1/2}^{(-)}(\vec{k}_3) &= \sqrt{2/3} g_{l=1, m_l=1}^{(-)}(\vec{k}_3) ; \quad g_{j=1/2, m=1/2}^{(+)}(\vec{k}_3) = -\sqrt{1/3} g_{l=1, m_l=0}^{(+)}(\vec{k}_3), \\ g_{j=1/2, m=-1/2}^{(+)}(\vec{k}_3) &= -\sqrt{2/3} g_{l=1, m_l=-1}^{(+)}(\vec{k}_3) ; \quad g_{j=1/2, m=-1/2}^{(-)}(\vec{k}_3) = \sqrt{1/3} g_{l=1, m_l=0}^{(-)}(\vec{k}_3) \end{aligned}$$

(III.3 - 1)

A distribuição de momentum distorcida (III.2 - 3)

fica dada por

$$|g'(\vec{k}_3)|^2 = \sum_m |g'_{jm}(\vec{k}_3)|^{2,+} + \sum_m |g'_{jm}(\vec{k}_3)|^{2,-} = \frac{2}{3} \left[ |g'_{\ell=1, m_\ell=1}(\vec{k}_3)|^2 + |g'_{\ell=1, m_\ell=-1}(\vec{k}_3)|^2 + |g'_{\ell=1, m_\ell=0}(\vec{k}_3)|^2 \right] \quad (\text{III.3-2})$$

e a polarização efetiva (III.2-2) por

$$P_3(\vec{k}_3) = \frac{|g'_{\ell=1, m_\ell=-1}(\vec{k}_3)|^2 - |g'_{\ell=1, m_\ell=1}(\vec{k}_3)|^2}{|g'_{\ell=1, m_\ell=1}(\vec{k}_3)|^2 + |g'_{\ell=1, m_\ell=-1}(\vec{k}_3)|^2} \quad (\text{III.3-3})$$

b) Estado  $1p_{3/2}$

Para este estado,  $j = \frac{3}{2}$ ,  $m = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$ ;  $\ell=1$ ,  $m_\ell = 1, 0, -1$ ;

$s = \frac{1}{2}$ ,  $m_s = \pm\frac{1}{2}$  e obtemos, para as funções  $g'_{j,m}$  e  $\psi_{jm}$

$$\psi_{j=3/2, m=3/2}(\vec{r}) = \psi_{\ell=1, m_\ell=1}(\vec{r}) \chi_{1/2}^{1/2}; \quad \psi_{j=3/2, m=-3/2}(\vec{r}) = \psi_{\ell=1, m_\ell=-1}(\vec{r}) \chi_{1/2}^{-1/2},$$

$$\psi_{j=3/2, m=1/2}(\vec{r}) = \sqrt{1/3} \psi_{\ell=1, m_\ell=1}(\vec{r}) \chi_{1/2}^{-1/2} + \sqrt{2/3} \psi_{\ell=1, m_\ell=0}(\vec{r}) \chi_{1/2}^{1/2};$$

$$\psi_{j=3/2, m=-1/2}(\vec{r}) = \sqrt{1/3} \psi_{\ell=1, m_\ell=-1}(\vec{r}) \chi_{1/2}^{1/2} + \sqrt{2/3} \psi_{\ell=1, m_\ell=0}(\vec{r}) \chi_{1/2}^{-1/2};$$

$$g'_{j=3/2, m=3/2}(\vec{k}_3) = g'_{\ell=1, m_\ell=1}(\vec{k}_3); \quad g'_{j=3/2, m=3/2}(\vec{k}_3) = g'_{j=3/2, m=-3/2}(\vec{k}_3) = 0,$$

$$g'_{j=3/2, m=-3/2}(\vec{k}_3) = g'_{\ell=1, m_\ell=-1}(\vec{k}_3); \quad g'_{j=3/2, m=1/2}(\vec{k}_3) = g'_{j=3/2, m=-1/2}(\vec{k}_3) = \sqrt{2/3} g'_{\ell=1, m_\ell=0}(\vec{k}_3),$$

$$g'_{j=3/2, m=1/2}(-) (\vec{k}_3) = \sqrt{1/3} g'_{\ell=1, m_\ell=1}(\vec{k}_3) ; g'_{j=3/2, m=-1/2}(+) (\vec{k}_3) = \sqrt{1/3} g'_{\ell=1, m_\ell=-1}(\vec{k}_3)$$

(III.3-4)

Para a distribuição de momentum distorcida

(III.2 - 3) temos

$$|g'(\vec{k}_3)|^2 = \frac{4}{3} \left[ |g'_{\ell=1, m_\ell=1}(\vec{k}_3)|^2 + |g'_{\ell=1, m_\ell=-1}(\vec{k}_3)|^2 + |g'_{\ell=1, m_\ell=0}(\vec{k}_3)|^2 \right],$$

(III.3-5)

e para a polarização efetiva (III.2 - 2)

$$P_3(\vec{k}_3) = -\frac{1}{2} \frac{\{ |g'_{\ell=1, m_\ell=-1}(\vec{k}_3)|^2 - |g'_{\ell=1, m_\ell=1}(\vec{k}_3)|^2 \}}{\{ |g'_{\ell=1, m_\ell=1}(\vec{k}_3)|^2 + |g'_{\ell=1, m_\ell=-1}(\vec{k}_3)|^2 \}}$$

(III.3- 6)

#### IV - ESPALHAMENTO (p, 2p) COM PRÓTONS POLARIZADOS NA PRESENÇA DE CONFIGURAÇÃO MISTA.

##### IV.1 - Amplitude de Momentum Distorcida e Mis tura de Configurações

Em um modelo extremo de partícula-única, os núcleons têm, quando no estado fundamental, movimentos dinamicamente pareados, de forma que a maioria das propriedades nucleares são devidas somente ao último núcleon não pareado, se existir. Além disso, estados de prótons e nêutrons são preenchidos independentemente. As correlações entre os núcleons não pareados, caracterizados por um valor de momentum angular  $j$  único e bem definido, são ignoradas. Neste modelo, núcleos par-par têm spin nuclear nulo, núcleos com  $A$  ímpar têm spin nuclear igual ao momentum angular  $j$  do núcleon não pareado e o spin nuclear de núcleos ímpar-ímpar não pode ser predito pois não há meio de escolha, entre as possíveis combinações dos vetores  $\vec{J}_1$  e  $\vec{J}_2$  (spins dos núcleons não pareados), daquela que leva ao spin do núcleo.

No modelo não extremo de partícula-única, consideram-se os núcleons em camadas fechadas como formando um caroço inerte e levam-se em consideração as interações entre os núcleons fora de camada fechada. Este é um modelo mais realístico, mas através dele obtêm-se as mesmas previsões para spin nuclear  $J$  que no modelo extremo, isto é, que o estado mais baixo de um número par de nêutrons ou prótons na mesma camada  $j$  é  $J=0$  e o estado mais baixo de número ímpar é  $J=j$ . É conhecido como modelo não extremo de partícula-única.

Note-se que ambos os casos são caracterizados por um único valor de  $j$  diferindo apenas com respeito ao fato de serem esquecidas, ou não, correlações entre prótons ou entre nêutrons fora de camada fechada. No modelo extremo de partícula-única, todos os estados com mesmo  $(n, l, j)$  mas diferentes valores de  $m$  (projeção de  $j$  em um dado eixo), são degenerados. No modelo não-extremo de partícula-única, ao considerar a interação entre as partículas fora do caroço inerte, a degenerescência é removida supondo-se que a interação entre estas é suficientemente forte para removê-la, mas não tão forte, comparativamente à força spin-órbita, que  $j$  deixe de ser um bom número quântico.

Em alguns casos, é necessário tomar-se para os estados nucleares uma superposição de funções de onda de dois ou mais estados com  $(n, l, j)$ , conhecida como mistura de configurações. Um estado nuclear deste tipo caracteriza-se não por um único valor de  $j$  mas por uma combinação de dois ou mais valores do momentum angular. Neste trabalho, focalizaremos so

nente o caso em que  $n$  e  $\ell$  são fixos, atendo-nos a misturas entre configurações caracterizadas por  $j = \ell + \frac{1}{2}$  e  $j = \ell - \frac{1}{2}$ .

Queremos desenvolver, inicialmente, uma expressão para a amplitude de momentum distorcida, que descreva uma reação quase-livre de forma mais geral no que diz respeito à possibilidade de que o próton nuclear, sujeito a acoplamento  $jj$ , esteja em um estado constituído por uma combinação linear de estados caracterizados por diferentes momenta angulares totais, isto é, que englobe a situação em que o núcleon-alvo obedeça a uma configuração mista. De posse desta expressão, determinaremos quantidades relevantes dentro do formalismo, como a polarização efetiva e a distribuição de momentum distorcida, de forma que comparações com resultados experimentais permitirão conclusões a respeito da estrutura nuclear.

A amplitude de momentum para um núcleon com momentum  $\vec{k}_A$  é expressa como a integral de superposição entre as funções de onda que descrevem os núcleos, inicial e final, da seguinte maneira<sup>(16)</sup>

$$g_{fi}(\vec{k}_A) = \int \psi_f^*(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-1}) \psi_i(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-1}, \vec{k}_A) d^3k_{A-1} \quad (\text{IV.1-1})$$

onde  $\psi_f(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-1})$  é a função de onda do núcleo final,  $\psi_i(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-1}, \vec{k}_A)$  é a função de onda do núcleo inicial e onde  $n = 1, \dots, A$ .

Introduzindo nesta expressão funções delta de Dirac, obtemos para a amplitude de momentum

$$g_{fi}(\vec{k}_A) = \int \psi_f^*(\vec{k}'_1, \dots, \vec{k}'_{A-1}) d^3k'_{A-1} \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \delta(\vec{k}_2 - \vec{k}'_2) \dots \delta(\vec{k}_{A-1} - \vec{k}'_{A-1}) \\ \times d^3k_{A-1} \psi_i(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_A) \quad (\text{IV.1-2})$$

Fazendo uso das definições  $\psi_f(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-1}) \equiv \langle \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-1} | f \rangle$  para a função de onda do núcleo final e  $\psi_i(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-1}, \vec{k}_A) \equiv \langle \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-1}, \vec{k}_A | i \rangle$  para a função de onda do núcleo inicial, projetadas no espaço de momentum e ainda das propriedades:

- a) os vetores de onda para os estados inicial e final são normalizados da seguinte maneira

$$\langle \vec{k}'_1, \dots, \vec{k}'_{A-1} | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-1} \rangle = \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \delta(\vec{k}_2 - \vec{k}'_2) \dots \delta(\vec{k}_{A-1} - \vec{k}'_{A-1}) \quad (\text{IV.1-3})$$

- b) o operador aniquilação  $a(d)$  de um núcleon no estado  $d$  é definido de maneira que

$$a(d) | a b c d \rangle \sim | a b c \rangle \quad (\text{IV.1-4})$$

- c) relação de clausura

$$\int |\vec{k}'_1, \dots, \vec{k}'_{A-1}\rangle d^3k'_{A-1} \langle \vec{k}'_1, \dots, \vec{k}'_{A-1}| = 1 \quad , \quad (\text{IV.1-5})$$

onde os  $\vec{k}'_1, \dots, \vec{k}'_{A-1}$  formam um conjunto completo de vetores de onda, é fácil ver que a expressão (IV.1-2) pode ser reescrita como<sup>(16)</sup>

$$g_{fi}(\vec{k}_A) = \langle f | a(\vec{k}_A) | i \rangle \quad (\text{IV.I-6})$$

na qual  $|f\rangle$  e  $|i\rangle$  representam as funções de onda dos núcleos, residual e inicial, no espaço vetorial de Hilbert, em notação de Dirac e  $a(\vec{k}_A)$  é o operador aniquilação de um núcleon de momentum  $\vec{k}_A$ .

Neste capítulo, onde apresentaremos expressões, para a distribuição de momentum e polarização efetiva, mais gerais, o momentum do núcleon-alvo será representado por  $\vec{k}$  e não  $\vec{k}_3$  como nos capítulos anteriores. Desta forma a função  $g_{fi}(\vec{k})$  pode ser escrita como

$$g_{fi}(\vec{k}) = \int \psi_f(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-1}) \psi_i(\vec{k}, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{A-1}) d^3k_{A-1} \quad , \quad (\text{IV.1-7})$$

ou então, de acordo com o exposto anteriormente

$$g_{fi}(\vec{k}) = \langle f | a(\vec{k}) | i \rangle \quad (\text{IV.1-8})$$

Se levarmos em conta a existência de distorções, devemos introduzir nas equações anteriores as funções distorções  $D_i(\vec{r})$ , ( $i=0,1,2,\dots$ ) obtendo para a amplitude de mo

mentum, ao tomar a transformada de Fourier de  $g(\vec{r})$

$$g'_{fi}(\vec{k}) = \int D(\vec{k}-\vec{k}') g_{fi}(\vec{k}') d^3k' = \int D(\vec{k}-\vec{k}') \langle f | a(\vec{k}') | i \rangle d^3k'$$

(IV.1-9)

conhecida como amplitude de momentum distorcida e representada por  $g'_{fi}(\vec{k})$  e sendo  $D(\vec{k}-\vec{k}') = \Pi_i D_i(\vec{k}-\vec{k}')$  a transformada tridimensional de Fourier de  $\Pi_i D_i(\vec{r})$ .

Para o desenvolvimento teórico que segue, usaremos a seguinte notação: o estado inicial será representado por  $|i\rangle = |A, \Pi, j_i, m_i\rangle$  onde  $A$  simboliza o número de núcleons do núcleo inicial;  $\Pi$  é a paridade do estado e  $j_i$  e  $m_i$  são o momentum angular total do núcleo e sua projeção, respectivamente. Já o estado final será representado por  $|f\rangle = |A-1, \Pi', j_f, m_f\rangle$  sendo  $A-1$  o número de núcleons no estado final;  $\Pi'$  a paridade do estado e  $j_f$  e  $m_f$  o spin nuclear e projeção.

Levando em consideração a possibilidade de que o núcleon arrancado tenha spin paralelo ou anti-paralelo em comparação ao spin do feixe incidente, obtemos, para a integral de superposição distorcida entre os estados inicial e final, do núcleo-alvo e do núcleo residual, uma vez que  $j_f$  e  $j_i$  são fixos, a expressão

$$g'_{m_f, m_i}(\pm)(\vec{k}) = \int D(\vec{k}-\vec{k}') \langle A-1, \Pi', j_f, m_f | a^{(\pm)}(\vec{k}') | A, \Pi, j_i, m_i \rangle d^3k'$$

(IV.1-10)

Os símbolos (+) e (-) representam as projeções de spin;  $\vec{j}_f = \vec{j}_i + \vec{j}$ ,  $m_f = m_i + m$  e  $a^{(\pm)}(\vec{k})$  é o operador aniquilação de um núcleon de momentum  $\vec{k}$ , momentum angular  $j$  e projeção de spin igual a  $m_s$ .

A seguir, expandimos o operador aniquilação de partícula (ou criação de buraco)  $a^{(\pm)}(\vec{k})$  em termos de funções amplitude de momentum com o intuito de obter uma expressão para a amplitude (IV.1-10) que possa descrever a possibilidade de que, em uma reação quase-livre, o núcleon arrancado esteja em um estado caracterizado por uma mistura de configurações. Obtemos

$$a^{(\pm)}(\vec{k}) = \sum_{n, \ell, j, m} g_{j, m}^{n, \ell(\pm)}(\vec{k}) a_{j, m}^{n, \ell}, \quad j = \ell \pm \frac{1}{2}, \quad m = m_\ell \pm \frac{1}{2} \quad (\text{IV.1-11})$$

onde as funções  $g_{j, m}^{n, \ell(\pm)}(\vec{k})$  são as funções amplitude de momentum associadas a estados nucleares caracterizados pelos números quânticos  $n$ ,  $\ell$ ,  $j$  e  $m$  e projeções de spin  $\pm \frac{1}{2}$ .

De (III.2-6) vemos que as funções  $g_{j, m}^{n, \ell(\pm)}(\vec{k})$ , podem ser expressas em termos das funções  $g_{\ell, m_\ell}^n(\vec{k})$  na forma

$$g_{j, m}^{n, \ell(\pm)}(\vec{k}) = \sum_{m_\ell} C(\ell, s; m_\ell, \pm \frac{1}{2} | j, m) g_{\ell, m_\ell}^n(\vec{k}) \quad (\text{IV.1-12})$$

Como a função amplitude de momentum  $g_{j,m}^{n,l}(\vec{k})$  é definida por

$$g_{j,m}^{n,l}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} g_{j,m}^{n,l(+)}(\vec{k}) \\ g_{j,m}^{n,l(-)}(\vec{k}) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1-13})$$

então

$$g_{j,m}^{n,l}(\vec{k}) = \sum_{\substack{m_\ell, m_s \\ m_\ell + m_s = m}} C(l, s; m_\ell, m_s | j, m) g_{\ell, m_\ell}^n(\vec{k}) \chi_s^{m_s} \quad (\text{IV.1-14})$$

sendo que  $\chi_s^{m_s}$  representa o spinor caracterizado por spin  $s$  e projeção  $m_s$ .

Desta forma o operador  $a^{(\pm)}(\vec{k})$  pode ser escrito como

$$a^{(\pm)}(\vec{k}) = \sum_{\substack{n, \ell, j, m, m_\ell \\ (m = m_\ell + m_s)}} C(l, s; m_\ell, \pm \frac{1}{2} | j, m) g_{\ell, m_\ell}^n(\vec{k}) a_{j,m}^{n,l} \quad (\text{IV.1-15})$$

Desprezando correlações entre estados caracterizados por diferentes pares  $n$  e  $\ell$ , ou seja, fixando esses números quânticos:

$$a_{j,m}^{(\pm)n,l}(\vec{k}) = \sum_{\substack{j, m, m_\ell \\ (m = m_\ell + m_s)}} C(l, s; m_\ell, \pm \frac{1}{2} | j, m) g_{\ell, m_\ell}^n(\vec{k}) a_{j,m}^{n,l} \quad (\text{IV.1-16})$$

Os índices correspondentes ao número quântico radial  $n$  em  $g_{\ell, m_\ell}^n(\vec{k})$  e  $a_{j,m}^{n,l}$  e ao momentum angular orbital  $\ell$  em  $a_{j,m}^{n,l}$ , uma vez que agora são fixos, não serão mais explicitamente apresentados. Assim temos

$$a^{(\pm)}(\vec{k}) = \sum_{\substack{j, m, m_\ell \\ (m=m_\ell+m_s)}} C(\ell, s; m_\ell, \pm \frac{1}{2} | j, m) g_{\ell, m_\ell}(\vec{k}) a_{j, m} \quad (\text{IV.1-17})$$

sendo que  $j$  representa o momentum angular total do n $\acute{u}$ cleon-alvo;  $\ell$  seu momentum angular orbital, fixo;  $s$  o spin;  $m, m_\ell$  e  $m_s$  as respectivas projeções em um dado eixo.

A integral de superposição, no caso de um n $\acute{u}$ cleon arrancado com "spin-up" ou "down" em relaça $\tilde{o}$  ao feixe incidente,  $\acute{e}$  agora expressa como

$$g'_{m_f, m_i}(\vec{k}) = \sum_{\substack{j, m, m_\ell \\ (m=m_\ell+m_s)}} C(\ell, s; m_\ell, \pm \frac{1}{2} | j, m) \int D(\vec{k}-\vec{k}') g_{\ell, m_\ell}(\vec{k}') \\ \times \langle A-1, \Pi', j_f, m_f | a_{j, m} | A, \Pi, j_i, m_i \rangle d^3k' \quad (\text{IV.1-18})$$

Usando o fato de que

$$g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k}) = \int D(\vec{k}-\vec{k}') g_{\ell, m_\ell}(\vec{k}') d^3k' \quad (\text{IV.1-19})$$

define a amplitude de momentum distorcida para estados com momentum angular orbital  $\ell$  e projeça $\tilde{o}$   $m_\ell$  obtemos de (IV.1-18).

$$g'^{(\pm)}_{m_f, m_i}(\vec{k}) = \sum_{\substack{j, m, m_\ell \\ (m=m_\ell+m_s)}} C(\ell, s; m_\ell, \pm \frac{1}{2} | j, m) g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k}) \langle j_f, m_f | a_{j, m} | j_i, m_i \rangle; \quad (\text{IV.1-20})$$

como  $\ell$   $\acute{e}$  fixo, os estados inicial e final t $\acute{e}$ m a mesma paridade ( $(-1)^\ell$ ) e por este motivo n $\tilde{a}$ o escrevemos o n $\acute{u}$ mero qu $\tilde{a}$ ntico

II de maneira explícita.

Expandindo o somatório com respeito a  $m_\ell$  ( $m_\ell = m \mp 1/2$ ) e  $m$  ( $m = m_f - m_i$ ) podemos expressar a amplitude de momentum distorcida para estados com projeções de spin-nuclear  $m_f$  e  $m_i$  da seguinte maneira

$$g'_{m_f, m_i}(\vec{k}) = \sum_j C(\ell, \frac{1}{2}; m_f - m_i \mp \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} | j, m_f - m_i) g'_{\ell, m_f - m_i \mp \frac{1}{2}}(\vec{k}) \times \langle j_f, m_f | a_{j, m_f - m_i} | j_i, m_i \rangle \quad (\text{IV.1-21})$$

pois  $m_f$  e  $m_i$  são fixos e no somatório com respeito a  $m$  o único valor possível para a projeção de  $j$  é  $m = m_f - m_i$ .

Deve-se notar que

$$g'_{m_f, m_i}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} g'_{m_f, m_i}(\vec{k})_{(+)} \\ g'_{m_f, m_i}(\vec{k})_{(-)} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1-22})$$

e a amplitude de momentum distorcida para um núcleon de momentum  $\vec{k}$  e projeção de spin 1/2 ("up") é agora expressa na forma

$$g'_{m_f, m_i}(\vec{k})_{(+)} = \sum_j C(\ell, \frac{1}{2}; m_f - m_i - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | j, m_f - m_i) g'_{\ell, m_f - m_i - \frac{1}{2}}(\vec{k}) \langle j_f, m_f | a_{j, m_f - m_i} | j_i, m_i \rangle \quad (\text{IV.1-23})$$

enquanto a amplitude de momentum distorcida para um núcleon de momentum  $\vec{k}$  e projeção de spin -1/2 ("down") é

$$g_{m_f, m_i}^{(-)}(\vec{k}) = \sum_j C\left(\ell, \frac{1}{2}; m_f - m_i + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \mid j, m_f - m_i\right) g_{\ell, m_f - m_i + \frac{1}{2}}^{(\vec{k})} \frac{1}{2} \langle j_f, m_f \mid a_{j, m_f - m_i} \mid j_i, m_i \rangle$$

(IV.1-24)

De acordo com o teorema de Wigner-Eckart podemos escrever os elementos de matriz  $\langle j_f, m_f \mid a_{j, m} \mid j_i, m_i \rangle$ , de maneira genérica, como

$$\begin{aligned} \langle j_f, m_f \mid a_{j, m} \mid j_i, m_i \rangle &= C(j_i, j; m_i, m \mid j_f, m_f) \langle j_f \parallel a_j \parallel j_i \rangle \\ &= C(j_i, j; m_i, m \mid j_f, m_f) \gamma^j, \end{aligned}$$

(IV.1-25)

onde expressamos o elemento reduzido de matriz  $\langle j_f \parallel a_j \parallel j_i \rangle$  por

$$\langle j_f \parallel a_j \parallel j_i \rangle \equiv \gamma^j$$

(IV.1-26)

Expandido em relação a  $j$  as expressões (IV.1-23) e (IV.1-24) e sabendo que

$$\begin{aligned} C\left(j_1, \frac{1}{2}; m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid j_1 \pm \frac{1}{2}, m\right) &= (\pm) \left( \frac{j_1 \pm m + \frac{1}{2}}{2j_1 + 1} \right)^{1/2}, \\ C\left(j_1, \frac{1}{2}; m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \mid j_1 \pm \frac{1}{2}, m\right) &= \left( \frac{j_1 \mp m + \frac{1}{2}}{2j_1 + 1} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

(IV.1-27)

obtemos

$$g_{m_f, m_i}^{(+)}(\vec{k}) = \left\{ \left( \frac{\ell + m_f - m_i + \frac{1}{2}}{2\ell + 1} \right)^{1/2} A - \left( \frac{\ell - m_f + m_i + \frac{1}{2}}{2\ell + 1} \right)^{1/2} B \right\} g_{\ell, m_f - m_i - \frac{1}{2}}^{(\vec{k})},$$

$$g_{m_f, m_i}^{(-)}(\vec{k}) = \left\{ \left( \frac{\ell - m_f + m_i + \frac{1}{2}}{2\ell + 1} \right)^{1/2} A + \left( \frac{\ell + m_f - m_i + \frac{1}{2}}{2\ell + 1} \right)^{1/2} B \right\} g_{\ell, m_f - m_i + \frac{1}{2}}^{'}(\vec{k})$$

(IV.1-28)

onde definimos

$$A \equiv C(j_i, \ell + \frac{1}{2}; m_i, m_f - m_i | j_f, m_f) \gamma^{\ell + \frac{1}{2}},$$

$$B \equiv C(j_i, \ell - \frac{1}{2}; m_i, m_f - m_i | j_f, m_f) \gamma^{\ell - \frac{1}{2}} \quad \text{(IV.1-29)}$$

Queremos calcular a distribuição de momentum distorcida e a polarização efetiva a partir das relações (III.2-2) e (III.2-3). Para tanto, como  $m$  é fixo e igual a  $m_f - m_i$ , expressamos (IV.1-23) e (IV.1-24) na forma

$$g_{m_f, m_i}^{(+)}(\vec{k}) = \sum_{j, m} C(\ell, \frac{1}{2}; m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | j, m) g_{\ell, m - \frac{1}{2}}^{'}(\vec{k}) \langle j_f, m_f | a_{j, m} | j_i, m_i \rangle$$

$$g_{m_f, m_i}^{(-)}(\vec{k}) = \sum_{j, m} C(\ell, \frac{1}{2}; m + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | j, m) g_{\ell, m + \frac{1}{2}}^{'}(\vec{k}) \langle j_f, m_f | a_{j, m} | j_i, m_i \rangle$$

(IV.1-30)

Assim, a distribuição de momentum distorcida para um núcleon com momentum  $\vec{k}$  e projeção de spin  $1/2$  ou  $-1/2$  é igual a

$$\sum_{m_f, m_i} |g'(\vec{k})|_{m_f, m_i}^{(\pm)}|^2 = \sum_{j', m'} \sum_{j, m} C(l, \frac{1}{2}; m' \mp \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} | j', m') C(l, \frac{1}{2}; m \mp \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} | j, m) \\ \times g'(\vec{k})_{l, m' \mp \frac{1}{2}}^\dagger g'(\vec{k})_{l, m \mp \frac{1}{2}} \sum_{m_f, m_i} \langle j_i, m_i | a_{j', m'}^\dagger | j_f, m_f \rangle \langle j_f, m_f | a_{j, m} | j_i, m_i \rangle$$

(IV.1-31)

Do teorema de Wigner-Eckart (IV.1-25), o somatório sobre as projeções de  $j_f$  e  $j_i$  do produto das matrizes  $\langle j_f, m_f | a_{j, m} | j_i, m_i \rangle$  por seus conjugados hermitianos, toma a forma

$$\sum_{m_f, m_i} \langle j_i, m_i | a_{j', m'}^\dagger | j_f, m_f \rangle \langle j_f, m_f | a_{j, m} | j_i, m_i \rangle = \langle j_i || a_{j'}^\dagger || j_f \rangle \langle j_f || a_j || j_i \rangle \\ \times \sum_{m_f, m_i} C(j_i, j'; m_i, m' | j_f, m_f) C(j_i, j; m_i, m | j_f, m_f) \quad (IV.1-32)$$

Utilizando as propriedades de simetria e ortogonalidade para os coeficientes de Clebsch-Gordan<sup>(30)</sup>

$$C(j_1, j_2; m_1, m_2 | j_3, m_3) = (-1)^{j_1 - m_1} \left( \frac{2j_3 + 1}{2j_2 + 1} \right)^{1/2} C(j_1, j_3; m_1, -m_3 | j_2, -m_2) \quad e$$

$$\sum_{m_1, m_2} C(j_1, j_2; m_1, m_2 | j, m) C(j_1, j_2; m_1, m_2 | j', m') = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (IV.1-33)$$

temos que

$$\sum_{m_f, m_i} \langle j_i, m_i | a_{j', m'}^\dagger | j_f, m_f \rangle \langle j_f, m_f | a_{j, m} | j_i, m_i \rangle = (-1)^{2j_i - 2m_i} \left( \frac{2j_f + 1}{2j' + 1} \right)^{1/2} \\ \times \left( \frac{2j_f + 1}{2j + 1} \right)^{1/2} \langle j_i || a_{j'}^\dagger || j_f \rangle \langle j_f || a_j || j_i \rangle \delta_{jj'} \delta_{mm'} \\ = \left( \frac{2j_f + 1}{2j + 1} \right)^{1/2} \left( \frac{2j_f + 1}{2j' + 1} \right)^{1/2} (\gamma^{j'})^\dagger \gamma^j \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (IV.1-34)$$

Desta forma a expressão (IV.1-31) pode ser es-

crita como

$$\sum_{m_f, m_i} \left| g_{m_f, m_i}^{(\pm)}(\vec{k}) \right|^2 = \sum_{j, m} \left( \frac{2j_f + 1}{2j + 1} \right) C^2 \left( \ell, \frac{1}{2}; m \mp \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \mid j, m \right) \left| g_{\ell, m \mp \frac{1}{2}}'(\vec{k}) \right|^2 |\gamma^j|^2$$

(IV.1-35)

Substituindo os coeficientes de Clebsch-Gordan pelas identidades (IV.1-27) temos, para a distribuição de momentum distorcida para um núcleon de momentum  $\vec{k}$  e projeção de spin 1/2

$$\sum_{m_f, m_i} \left| g_{m_f, m_i}^{(+)}(\vec{k}) \right|^2 = \left( \frac{2j_f + 1}{2\ell + 1} \right) \sum_{j, m} \left( \frac{\ell \pm m + \frac{1}{2}}{2j + 1} \right) \left| g_{\ell, m - \frac{1}{2}}'(\vec{k}) \right|^2 |\gamma^j|^2$$

(IV.1-36)

e, para projeção de spin -1/2

$$\sum_{m_f, m_i} \left| g_{m_f, m_i}^{(-)}(\vec{k}) \right|^2 = \left( \frac{2j_f + 1}{2\ell + 1} \right) \sum_{j, m} \left( \frac{\ell \mp m + \frac{1}{2}}{2j + 1} \right) \left| g_{\ell, m + \frac{1}{2}}'(\vec{k}) \right|^2 |\gamma^j|^2$$

(IV.1-37)

Na expressão (IV.1-36) deve-se usar sinal (+) quando  $j = \ell + 1/2$  e sinal (-) quando  $j = \ell - 1/2$ , enquanto na expressão (IV.1-37) o oposto deve ser feito.

Logo, podemos escrever para a distribuição de momentum distorcida (III.2-3)

$$|g'(\vec{k})|^2 = \left(\frac{2j_f+1}{2\ell+1}\right) \left\{ \sum_{j,m} \left(\frac{\ell \pm m + \frac{1}{2}}{2j+1}\right) |g'(\vec{k})_{\ell,m-\frac{1}{2}}|^2 |\gamma^j|^2 + \sum_{j,m} \left(\frac{\ell \mp m + \frac{1}{2}}{2j+1}\right) \right. \\ \left. \times |g'(\vec{k})_{\ell,m+\frac{1}{2}}|^2 |\gamma^j|^2 \right\} \quad (\text{IV.1-38})$$

e para a polarização efetiva (III.2-2)

$$P(\vec{k}) = \frac{\left\{ \sum_{j,m} \left(\frac{\ell \pm m + \frac{1}{2}}{2j+1}\right) |g'(\vec{k})_{\ell,m-\frac{1}{2}}|^2 |\gamma^j|^2 - \sum_{j,m} \left(\frac{\ell \mp m + \frac{1}{2}}{2j+1}\right) |g'(\vec{k})_{\ell,m+\frac{1}{2}}|^2 |\gamma^j|^2 \right\}}{\left\{ \sum_{j,m} \left(\frac{\ell \pm m + \frac{1}{2}}{2j+1}\right) |g'(\vec{k})_{\ell,m-\frac{1}{2}}|^2 |\gamma^j|^2 + \sum_{j,m} \left(\frac{\ell \mp m + \frac{1}{2}}{2j+1}\right) |g'(\vec{k})_{\ell,m+\frac{1}{2}}|^2 |\gamma^j|^2 \right\}} \quad (\text{IV.1-39})$$

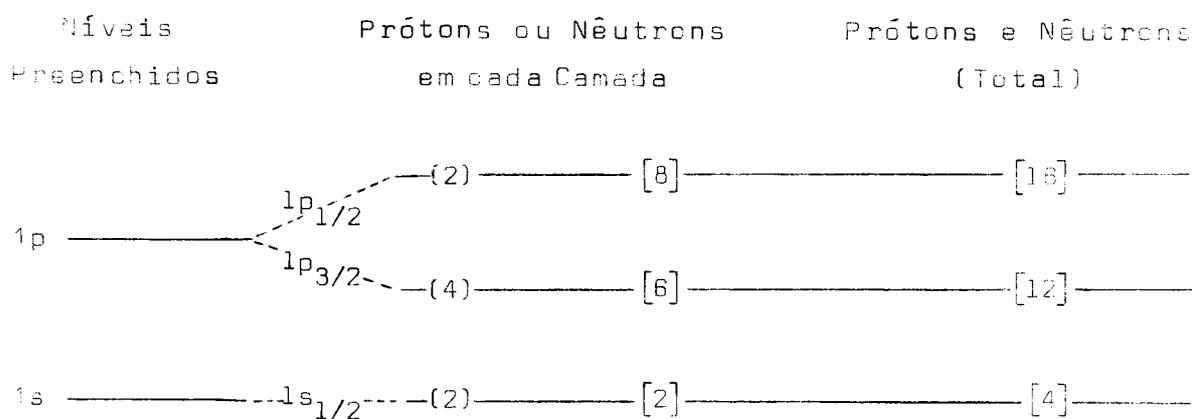
As expressões (IV.1-30) obtidas definem amplitudes de momentum distorcidas de caráter mais geral, no que diz respeito à configuração a que pertence o núcleon-alvo. São relações que permitem descrever o comportamento deste núcleon quer esteja ele associado a uma função de onda característica de um modelo de partícula-única, quer seja seu comportamento melhor caracterizado por uma mistura das configurações com  $\ell + \frac{1}{2}$  e  $\ell - \frac{1}{2}$ , sendo  $\ell$  fixo.

Claro que nossas expressões devem reproduzir, para o caso de acoplamento  $jj$  extremo, os mesmos resultados obtidos por M.R. Teodoro<sup>(14)</sup>, para a amplitude de momentum distorcida, para a distribuição de momentum distorcida e para a polarização efetiva no caso específico da reação  $^{16}\text{O}(p,2p)^{15}\text{N}$ . Com este objetivo, admitiremos o plano x-y como plano de es-

palhamento. O  $^{16}_8\text{O}$  tem spin nuclear igual a zero, é um núcleo par-par com níveis de energia de prótons e nêutrons completamente preenchidos até o número mágico igual a oito, caracterizando uma camada fechada, e o  $^{15}_7\text{N}$  tem um nêutron não pareado.

#### Caso Particular da Reação $^{16}_8\text{O}(p,2p)^{15}_7\text{N}$

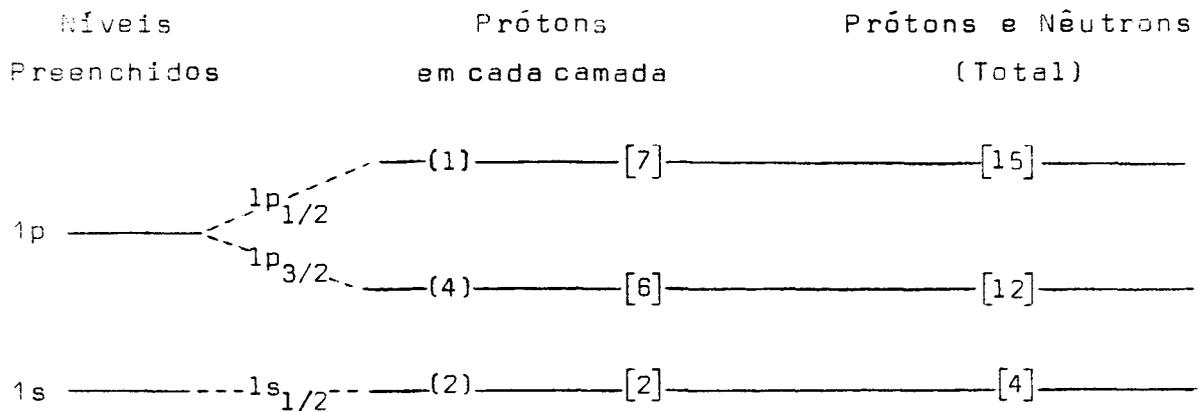
O  $^{16}_8\text{O}$  tem oito prótons e oito nêutrons distribuídos segundo o modelo de camadas  $jj$  (acoplamento  $jj$ ) da seguinte maneira:



(Fig. IV.1-1) - Níveis preenchidos segundo o modelo de camadas para o  $^{16}_8\text{O}$ .

A notação que estamos usando é a chamada notação espectroscópica padrão  $(n\ell j)$  onde  $n$  é o número quântico radial, as letras  $s, p, d, f, g, h, i$  representam, respectivamente, os valores  $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  para o momentum angular orbital e  $j = \ell \pm 1/2$ . Os estados nucleares caracterizados por diferentes números quânticos  $m$  ( $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ ), são degenerados. É comum referir-se aos  $2j+1$  (número total de projeções  $m$  de  $j$  em um dado eixo) estados  $\psi_{n\ell jm}$  como o nível  $(n\ell j)$ ; desta forma o número  $2(2j+1)$  fornece a quantidade to-

tal de núcleons que ocupa determinado nível. Assim o  $^{16}\text{O}$  tem quatro núcleons (dois prótons e dois nêutrons) no estado  $1s$ , oito núcleons (quatro prótons e quatro nêutrons) no estado  $1p_{3/2}$  e quatro núcleons (dois prótons e dois nêutrons) no estado  $1p_{1/2}$ . Além disso, o núcleo inicial tem spin nuclear ( $j_i$ ) igual a zero o que dá  $m_i = 0$ . O núcleo final,  $^{15}_7\text{N}_8$ , suposto no estado fundamental, tem oito nêutrons distribuídos como no caso anterior, e sete prótons distribuídos da maneira que segue, para o estado fundamental:



(Fig. IV.1-2) - Níveis preenchidos segundo o modelo de camadas para o  $^{15}_7\text{N}_8$  (estado fundamental).

Desta forma, vemos que o  $^{15}\text{N}$  tem quatro núcleons no estado  $1s$ , oito núcleons no estado  $1p_{3/2}$  e três núcleons (dois nêutrons e um próton) no estado  $1p_{1/2}$ , para o caso em que o  $^{15}\text{N}$  está no estado fundamental. Neste caso, o spin nuclear residual ( $j_f$ ) é igual a  $1/2$  o que dá  $m_f = \pm 1/2$ .

No primeiro estado excitado o  $^{15}\text{N}$  tem quatro núcleons no estado  $1s$ , sete núcleons no estado  $1p_{3/2}$  (quatro nêutrons e três prótons) e quatro núcleons no estado  $1p_{1/2}$ . Para este caso, o spin nuclear é igual a  $3/2$  o que dá  $m_f =$

$\pm 3/2, \pm 1/2$ . Vamos aplicar agora as expressões anteriormente obtidas, para estas situações particulares, admitindo um modelo extremo de partícula-única.

a) Estado  $1p_{1/2}$

Para este caso,  $n$  é igual a 1;  $\ell=1, m_\ell=1, 0, -1$ ;  $s=1/2, m_s = \pm 1/2$ ;  $j_i=0, m_i=0$ ;  $j_f=1/2, m_f = \pm 1/2$ ;  $j=1/2, m = \pm 1/2$ , sendo que  $\vec{j}_f = \vec{j}_i + \vec{j}$ . De (IV.1-30) obtemos, usando valores tabelados para os coeficientes de Clebsch-Gordan<sup>(31)</sup>

$$g_{-\frac{1}{2},0}^{(+)}(\vec{k}) = -\sqrt{\frac{2}{3}} g_{1,-1}^{(+)}(\vec{k}) \gamma^{1/2}; j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2},$$

$$g_{\frac{1}{2},0}^{(+)}(\vec{k}) = -\sqrt{\frac{1}{3}} g_{1,0}^{(+)}(\vec{k}) \gamma^{1/2}; j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2},$$

$$g_{-\frac{1}{2},0}^{(-)}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{1}{3}} g_{1,0}^{(-)}(\vec{k}) \gamma^{1/2}; j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2} \text{ e}$$

$$g_{\frac{1}{2},0}^{(-)}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{2}{3}} g_{1,1}^{(-)}(\vec{k}) \gamma^{1/2}; j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}$$

(IV.1-40)

onde  $\gamma^j$  é

$$\gamma^j = \langle j_f || a_j || j_i \rangle = \langle j_1, j_2, \dots, j_{A-1} || a_j || j_1, j_2, \dots, j_{A-1} \rangle$$

(IV.1-41)

Para o nosso caso,  $j$  é único e bem definido, pois estamos tratando com estado extremo de partícula-única o que implica em que, se  $j = 1/2$ , então

$$\gamma^{1/2} = 1 \quad \text{e} \quad \gamma^{3/2} = 0 \quad (\text{IV.1-42})$$

Dai, as equações (IV.1-40), para o estado  $1p_{1/2}$  do  $^{16}\text{O}$ , nos levam a

$$g_{-\frac{1}{2},0}^{(+)}(\vec{k}) = -\sqrt{\frac{2}{3}} g_{1,-1}^{+}(\vec{k}) ; j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2} ,$$

$$g_{\frac{1}{2},0}^{(+)}(\vec{k}) = -\sqrt{\frac{1}{3}} g_{1,0}^{+}(\vec{k}) ; j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} ,$$

$$g_{-\frac{1}{2},0}^{(-)}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{1}{3}} g_{1,0}^{-}(\vec{k}) ; j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$$g_{\frac{1}{2},0}^{(-)}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{2}{3}} g_{1,1}^{-}(\vec{k}) ; j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}$$

(IV.1-43)

Deve-se notar que todos os termos com  $j = l+1/2 = 3/2$  não aparecem em (IV.1-40), não havendo misturas de estados com  $l + 1/2$  e  $l - 1/2$ .

De (IV.1-36) e (IV.1-37) obtemos, para o estado

$$\sum_{m_f, m_i} |g'_{m_f, m_i}(\vec{k})|_{m_f, m_i}^{(+)}|^2 = \frac{1}{3} |g'_{1,0}(\vec{k})|^2 + \frac{2}{3} |g'_{1,-1}(\vec{k})|^2$$

$$\sum_{m_f, m_i} |g'_{m_f, m_i}(\vec{k})|_{m_f, m_i}^{(-)}|^2 = \frac{1}{3} |g'_{1,0}(\vec{k})|^2 + \frac{2}{3} |g'_{1,1}(\vec{k})|^2$$

(IV.1-44)

Com estes resultados a função distribuição de momentum distorcida (IV. 1-38) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} |g'(\vec{k})|^2 = \frac{2}{3} \left\{ |g'_{1,1}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,0}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,-1}(\vec{k})|^2 \right\} \quad (\text{IV.1-45})$$

e a polarização efetiva (IV.1-39), ortogonal ao plano x-y de espalhamento, como

$$P_{\frac{1}{2}}(\vec{k}) = \frac{\left[ |g'_{1,-1}(\vec{k})|^2 - |g'_{1,1}(\vec{k})|^2 \right]}{\left[ |g'_{1,0}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,1}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,-1}(\vec{k})|^2 \right]}$$

(IV.1-46)

sendo as funções que aparecem nestas expressões, as funções  $g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})$ .

b) Estado  $1p_{3/2}$

Neste caso temos  $n = 1$ ;  $\ell = 1$ ,  $m_\ell = 1, 0, -1$ ;  $j_i = 0$ ,  $m_i = 0$ ;  $j_f = 3/2$ ,  $m_f = \pm 3/2, \pm 1/2$ ;  $j = 3/2$ ,  $m = \pm 3/2, \pm 1/2$  e de (IV.1-28), sabendo que  $s = 1/2$ ,  $m_s = \pm 1/2$ ;  $\vec{j}_f = \vec{j}_i + \vec{j}$  e  $m_f = m_i + m$ , obtemos

$$g_{\frac{1}{2},0}^{(-)}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{1}{3}} g_{1,1}^{(-)}(\vec{k}) \gamma^{3/2}; j = \frac{3}{2}, m = \frac{1}{2},$$

$$g_{\frac{3}{2},0}^{(-)}(\vec{k}) = 0; j = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2},$$

$$g_{\frac{1}{2},0}^{(-)}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{2}{3}} g_{1,0}^{(-)}(\vec{k}) \gamma^{3/2}; j = \frac{3}{2}, m = -\frac{1}{2},$$

$$g_{\frac{3}{2},0}^{(-)}(\vec{k}) = g_{1,-1}^{(-)}(\vec{k}) \gamma^{3/2}; j = \frac{3}{2}, m = -\frac{3}{2},$$

$$g_{\frac{3}{2},0}^{(+)}(\vec{k}) = g_{1,1}^{(+)}(\vec{k}) \gamma^{3/2}; j = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2},$$

$$g_{\frac{1}{2},0}^{(+)}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{2}{3}} g_{1,0}^{(+)}(\vec{k}) \gamma^{3/2}; j = \frac{3}{2}, m = \frac{1}{2},$$

$$g_{\frac{1}{2},0}^{(+)}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{1}{3}} g_{1,-1}^{(+)}(\vec{k}) \gamma^{3/2}; j = \frac{3}{2}, m = -\frac{1}{2} \quad e$$

$$g_{\frac{3}{2},0}^{(+)}(\vec{k}) = 0; j = \frac{3}{2}, m = -\frac{3}{2}$$

(IV.1 47)

uma vez que, neste caso,  $\gamma^{\frac{3}{2}}=1$  e  $\gamma^{\frac{1}{2}}=0$ . Deve-se ressaltar que todos os termos com  $j = \ell - 1/2 = 1/2$  desapareceram.

De (IV.1-36) e (IV.1-37) temos que

$$\sum_{m_f, m_i} |g'_{m_f, m_i}(\vec{k})|^{(+)}|^2 = |g'_{1,1}(\vec{k})|^2 + \frac{2}{3} |g'_{1,0}(\vec{k})|^2 + \frac{1}{3} |g'_{1,-1}(\vec{k})|^2 \quad e$$

$$\sum_{m_f, m_i} |g'_{m_f, m_i}(\vec{k})|^{(-)}|^2 = \frac{1}{3} |g'_{1,1}(\vec{k})|^2 + \frac{2}{3} |g'_{1,0}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,-1}(\vec{k})|^2 \quad , \quad (\text{IV.1-48})$$

de maneira que a distribuição de momentum distorcida (IV.1-38) fica igual a

$$|g'_{\frac{3}{2}}(\vec{k})|^2 = \frac{4}{3} \{ |g'_{1,0}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,1}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,-1}(\vec{k})|^2 \} \quad (\text{IV.1-49})$$

e a polarização efetiva (IV.1-39)

$$P_{\frac{3}{2}}(\vec{k}) = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\left\{ |g'_{1,-1}(\vec{k})|^2 - |g'_{1,1}(\vec{k})|^2 \right\}}{\left[ |g'_{1,0}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,1}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,-1}(\vec{k})|^2 \right]} \quad (\text{IV.1-50})$$

Analisando as equações (IV.1-45), (IV.1-46), (IV.1-49) e (IV.1-50) vemos que

$$P_{\frac{3}{2}}(\vec{k}) = -\frac{1}{2} P_{\frac{1}{2}}(\vec{k}) \quad e$$

$$|g'_{\frac{3}{2}}(\vec{k})|^2 = 2 |g'_{\frac{1}{2}}(\vec{k})|^2 \quad (\text{IV.1-51})$$

resultado este válido somente se os estados  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$  são degenerados<sup>(14)</sup>.

Comparando os resultados (IV.1-43), (IV.1-45), (IV.1-46), (IV.1-47), (IV.1-49) e (IV.1-50) podemos notar que concordam integralmente com (III.3-1), (III.3-2), (III.3-3), (III.3-4)

(III.3-5) e (III.3-6), mostrando que nossas expressões reproduzem os resultados particulares da reação  $^{16}\text{O}(p,2p)^{15}\text{N}$  obtidos ao adotar um modelo extremo, isto é, nossas equações, de caráter mais geral com respeito à configuração que caracteriza o núcleon arrancado, se transformam em equações particulares.

Estes resultados podem ser interpretados fisicamente da seguinte maneira: no caso em que o momentum angular total do núcleo inicial for nulo ( $j_i=0$ ), devido à conservação de momentum ( $\vec{j}_f = \vec{j}_i + \vec{j}$ ), o momentum angular total do núcleon arrancado é dado por  $|\vec{j}| = |\vec{j}_f|$ , fato este que implica em que seja máxima a probabilidade (igual a 1) de que este núcleon esteja em um estado de momentum angular total único e bem definido, ou  $j = \ell + 1/2$  ou então  $j = \ell - 1/2$ , sendo  $\ell$  fixo. Não há, nesta situação, possibilidade de misturas de configurações. Neste caso, o estado ocupado pelo núcleon é um estado descrito por uma função de onda de partícula-única associada a um único valor de  $j$  e a polarização efetiva, resultante da interação spin-órbita, deve evidenciar esta propriedade.

Assim, para o caso em que  $j = 3/2$ , a polarização efetiva deve ser uma função do acoplamento spin-órbita que leva a um estado com momentum angular e spin paralelos, sendo nula para o caso contrário. Se  $j = 1/2$ , a polarização efetiva deve reproduzir a situação em que o acoplamento spin-órbita torne o momentum angular orbital e o spin anti-paralelos.

No caso particular da reação  $^{16}\text{O}(p,2p)^{15}\text{N}$ ,  $n = 1$ ,

$l = 1$ ,  $j_i = 0$  e se  $j_f = 1/2$ , o único valor de  $j$  possível, de acordo com as leis de conservação de momentum angular é  $j = 1/2$  o que indica que a reação quase-livre ocasiona o arrancamento de uma partícula com probabilidade máxima de estar no estado  $lp_{1/2}$ , sendo nula a probabilidade de estar no estado  $lp_{3/2}$ . O núcleo arrancado tem spin e momentum angular orbital anti-paralelos e a polarização efetiva deve, neste caso, refletir esta situação sendo dada pela polarização efetiva do estado  $lp_{1/2}$ .

Continuando, se  $n = 1$ ,  $l = 1$ ,  $j_f = 3/2$  e  $j_i = 0$ , o único valor possível de  $j$  é  $3/2$ , o que faz com que a reação nuclear ocasione o arrancamento de uma partícula que tem probabilidade máxima de estar no estado  $lp_{3/2}$  e probabilidade mínima (nula) de estar no estado  $lp_{1/2}$ . Neste caso a polarização efetiva deve ser definida pela polarização efetiva do estado  $lp_{3/2}$ .

No entanto, é bom lembrar que estes resultados foram obtidos para reações em que o spin nuclear do núcleo-alvo era nulo e sendo assim, o máximo que podemos dizer destas relações é que reproduzem casos particulares. Para conclusões mais precisas a respeito de sua validade, devemos aplicar este formalismo para núcleos mais complexos, como nos casos em que tanto o núcleo inicial como o núcleo final tenham spin nuclear diferentes de zero. É com esta finalidade que procederemos agora a um estudo da reação  $^{14}\text{N}(p,2p)^{13}\text{C}$  em que o núcleo inicial tem momentum angular total igual a 1 e o núcleo resi

dual igual a 1/2 quando no estado fundamental, e igual a 3/2 quando no primeiro estado excitado.

#### IV.2 - Cálculo da Polarização Efetiva para a Reação $^{14}\text{N}(p,2p)^{13}\text{C}$ .

Vamos proceder agora ao cálculo da polarização efetiva para o caso da reação nuclear  $^{14}\text{N}(p,2p)^{13}\text{C}$ .

##### a) Estado Fundamental do Núcleo Residual ( $^{13}\text{C}$ )

Como  $n = 1$ ;  $\ell = 1$ ;  $j_i = 1, 0, -1$ ;  $j_f = 1/2$ ,  $m_f = \pm 1/2$ ;  $j = 3/2, 1/2$  e  $m = \pm 3/2, \pm 1/2$  ou  $m = \pm 1/2$ , sendo ainda que  $s = 1/2$ ,  $m_s = \pm 1/2$  e como  $\vec{j}_f = \vec{j}_i + \vec{j}$  e  $m_f = m_i + m$ , de (IV.1-36) e de (IV.1-37) obtemos as relações

$$\sum_{m_f, m_i} |g'_{m_f, m_i}(\vec{k})|_{m_f, m_i}^{(+)}|^2 = \left[ \frac{1}{6} |Y_{ef}^{3/2}|^2 + \frac{6}{9} |Y_{ef}^{1/2}|^2 \right] |g'_{1, -1}(\vec{k})|^2 + \left[ \frac{1}{3} |Y_{ef}^{3/2}|^2 + \frac{1}{3} |Y_{ef}^{1/2}|^2 \right] \times |g'_{1, 0}(\vec{k})|^2 + \frac{1}{2} |Y_{ef}^{3/2}|^2 |g'_{1, 1}(\vec{k})|^2 \quad e$$

$$\sum_{m_f, m_i} |g'_{m_f, m_i}(\vec{k})|_{m_f, m_i}^{(-)}|^2 = \left[ \frac{1}{3} |Y_{ef}^{3/2}|^2 + \frac{1}{3} |Y_{ef}^{1/2}|^2 \right] |g'_{1, 0}(\vec{k})|^2 + \left[ \frac{1}{6} |Y_{ef}^{3/2}|^2 + \frac{6}{9} |Y_{ef}^{1/2}|^2 \right] \times |g'_{1, 1}(\vec{k})|^2 + \frac{1}{2} |Y_{ef}^{3/2}|^2 |g'_{1, -1}(\vec{k})|^2 \quad (\text{IV.2 - 1})$$

sendo que as letras ef simbolizam o estado fundamental do núcleo final.

Com estes resultados, a função distribuição de momentum distorcida (IV.1-38) pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
 |g'_{ef}(\vec{k})|^2 &= \frac{2}{3} \left\{ |\gamma_{ef}^{3/2}|^2 + |\gamma_{ef}^{1/2}|^2 \right\} \left[ |g'_{1,1}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,0}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,-1}(\vec{k})|^2 \right] \\
 &= |\gamma_{ef}^{3/2}|^2 \frac{|g'_1(\vec{k})|^2}{2} + \frac{1}{2} |\gamma_{ef}^{3/2}|^2 \alpha^{ef} |g'_3(\vec{k})|^2
 \end{aligned} \tag{IV.2 - 2}$$

em vista de (IV.1-45) e (IV.1-49). O parâmetro  $\alpha^{ef}$  é definido por

$$\alpha^{ef} = \frac{|\gamma_{ef}^{1/2}|^2}{|\gamma_{ef}^{3/2}|^2} \tag{IV.2 - 3}$$

A polarização efetiva (IV.1-39) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}
 P_{ef}(\vec{k}) &= - \frac{\left\{ \frac{1}{2} |\gamma_{ef}^{3/2}|^2 - |\gamma_{ef}^{1/2}|^2 \right\} \left[ |g'_{1,-1}(\vec{k})|^2 - |g'_{1,1}(\vec{k})|^2 \right]}{\left\{ |\gamma_{ef}^{3/2}|^2 + |\gamma_{ef}^{1/2}|^2 \right\} \left[ |g'_{1,1}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,0}(\vec{k})|^2 + |g'_{1,-1}(\vec{k})|^2 \right]}
 \end{aligned} \tag{IV.2 - 4}$$

Fazendo uso das expressões (IV.1-46), (IV.1-50) e (IV.1-51) para  $p_{1/2}$  e  $p_{3/2}$ , isto é, adotando como aproximação que os estados  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$  são degenerados, pode-se reescrever a relação (IV.2-4) da seguinte maneira

$$P_{ef}(\vec{k}) = \frac{\alpha^{ef}}{(1 + \alpha^{ef})} P_{\frac{1}{2}}(\vec{k}) + \frac{1}{(1 + \alpha^{ef})} P_{\frac{3}{2}}(\vec{k})$$

(IV.2 - 5)

$\alpha^{ef}$  é um parâmetro que mede razões entre elementos reduzidos de matrizes fortemente dependentes das configurações possíveis, com  $j=3/2$  e  $j=1/2$ , a que está sujeito o núcleo-alvo em uma reação quase-livre em que o núcleo final  $^{13}\text{C}$  permanece, após a reação, no estado fundamental. Assim obtivemos expressões para a distribuição de momentum distorcida e para a polarização efetiva como funções de um parâmetro que expressa a possibilidade de haver diferentes misturas das configurações  $1p_{3/2}$  e  $1p_{1/2}$ . Estas relações podem servir de teste para a escolha, quando comparadas a resultados experimentais, por exemplo, do melhor potencial nuclear que descreva a interação sofrida por um núcleon do  $^{14}\text{N}$ , uma vez que se sabe que uma forte interação spin-órbita no núcleo pode gerar uma configuração única e bem determinada, enquanto uma interação spin-órbita comparativamente mais fraca pode gerar misturas de configurações.

b) Primeiro Estado Excitado do Núcleo Residual  
( $^{13}\text{C}$ )

Agora temos  $n = 1$ ;  $\ell = 1$ ;  $j_i = 1$ ,  $m_i = 1, 0, -1$ ;  $j_f = 3/2$ ,  $m_f = \pm 3/2, \pm 1/2$ ;  $j = 3/2, 1/2$  ( $5/2$  está proibido uma vez que  $\ell$  é fixo ( $=1$ ) e  $j = 5/2$  implica em que  $\ell = 3, 2$ ),  $m = \pm 3/2, \pm 1/2$ ;  $s = 1/2$ ,  $m_s = \pm 1/2$ ;  $\vec{j}_f = \vec{j}_i + \vec{j}$ ,  $m_f = m_i + m$  e obtemos, usando (IV.1 - 36) e (IV.1 - 37), as seguintes expressões

$$\sum_{m_f, m_i} |g_{m_f, m_i}^{(+)}(\vec{k})|^2 = \left[ \frac{2}{3} |Y_{ee}^{3/2}|^2 + \frac{2}{3} |Y_{ee}^{1/2}|^2 \right] |g_{1,0}'(\vec{k})|^2 + \left[ \frac{1}{3} |Y_{ee}^{3/2}|^2 + \frac{4}{3} |Y_{ee}^{1/2}|^2 \right] \\ \times |g_{1,-1}'(\vec{k})|^2 + |Y_{ee}^{3/2}|^2 |g_{1,1}'(\vec{k})|^2$$

$$\sum_{m_f, m_i} |g_{m_f, m_i}^{(-)}(\vec{k})|^2 = \left[ \frac{2}{3} |Y_{ee}^{3/2}|^2 + \frac{2}{3} |Y_{ee}^{1/2}|^2 \right] |g_{1,0}(\vec{k})|^2 + \left[ \frac{1}{3} |Y_{ee}^{3/2}|^2 + \frac{4}{3} |Y_{ee}^{1/2}|^2 \right] \times |g_{1,1}(\vec{k})|^2 + |Y_{ee}^{3/2}|^2 |g_{1,-1}(\vec{k})|^2, \quad (\text{IV.2-6})$$

onde as letras ee simbolizam o primeiro estado excitado do  $^{13}\text{C}$ .

A função distribuição de momentum distorcida (IV.1-38), para um núcleon com momentum  $\vec{k}$  pode ser agora escrita como

$$|g_{ee}(\vec{k})|^2 = \frac{4}{3} \left\{ |Y_{ee}^{3/2}|^2 + |Y_{ee}^{1/2}|^2 \right\} \left[ |g_{1,0}(\vec{k})|^2 + |g_{1,1}(\vec{k})|^2 + |g_{1,-1}(\vec{k})|^2 \right] \\ = 2 |Y_{ee}^{3/2}|^2 |g_{1,1}(\vec{k})|^2 + |Y_{ee}^{3/2}|^2 \alpha^{ee} |g_{1,3}(\vec{k})|^2 \quad (\text{IV.2-7})$$

em vista de (IV.1-45), (IV.1-49) e (IV.1-51); sendo ainda  $\alpha^{ee}$  igual a

$$\alpha^{ee} = \frac{|Y_{ee}^{1/2}|^2}{|Y_{ee}^{3/2}|^2} \quad (\text{IV.2-8})$$

A polarização efetiva (IV.1-39) pode ser expressa como

$$P_{ee}(\vec{k}) = \frac{\alpha^{ee}}{(1 + \alpha^{ee})} P_{\frac{1}{2}}(\vec{k}) + \frac{1}{(1 + \alpha^{ee})} P_{\frac{3}{2}}(\vec{k})$$

(IV.2-9)

Deve-se notar que geralmente

$$\alpha_{ef} \neq \alpha_{ee} \quad (\text{IV.2-10})$$

e conseqüentemente

$$P_{ef} \neq P_{ee} \quad (\text{IV.2-11})$$

fato este que indica que, para esta reação quase-livre, há, de maneira geral, probabilidades diferentes do núcleo residual  $^{13}\text{C}$  ficar ou no estado fundamental ou no primeiro estado excitado, como conseqüência do arrancamento de um núcleon do  $^{14}\text{N}$ .

Estes resultados podem ser interpretados da maneira que segue: no caso em que os momentos angulares totais dos núcleos inicial e residual forem diferentes de zero ( $j_i \neq 0, j_f \neq 0$ ), devido à conservação de momentum angular ( $\vec{J}_f = \vec{J}_i + \vec{J}$ ), o momentum angular total do núcleon arrancado é dado por

$$\vec{J} = \vec{J}_f - \vec{J}_i \quad (\text{IV.2-12})$$

e se  $l$  for fixo, os valores de  $j$  são  $l + 1/2$  e  $l - 1/2$ , para um dado  $l$ . A reação nuclear em questão ocasiona, assim, o arrancamento de um núcleon de um estado resultante da combinação de dois estados puros, caracterizados pelos valores  $j = l + 1/2$  e  $j = l - 1/2$  e descrito por uma função de onda construída através de combinação linear na forma

$$\psi(\vec{k}) = a_1 \phi_{j=l+\frac{1}{2}}(\vec{k}) + a_2 \phi_{j=l-\frac{1}{2}}(\vec{k}) \quad (\text{IV.2-13})$$

sendo que os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  descrevem, probabilisticamente, o grau de participação de cada um dos estados particulares na formação da função de onda do núcleon.

Como  $l$  é fixo, teremos misturas de somente duas configurações. No entanto, para uma descrição mais completa seria necessário levar em conta a possibilidade da existência de misturas de um número maior de configurações.

A distribuição de momentum distorcida e a polarização efetiva, neste caso, devem confirmar a existência de misturas de configurações.

No caso particular da reação  $^{14}\text{N}(p,2p)^{13}\text{C}, n = 1$ ,  $l = 1$ ,  $j_f = 1/2$  e  $j_i = 1$ ,  $j$  tem dois valores possíveis,  $j = 3/2$  e  $j = 1/2$ , o que implica em que a reação nuclear ocasiona o arrancamento de um núcleon que possui probabilidades não nulas de estar nos estados  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$  simultaneamente, situação esta caracterizada necessariamente por uma mistura de configurações, contrariamente à da reação da secção IV.1. Em um caso muito particular, mesmo para núcleos com spins nucleares diferentes de zero, se poderia usar uma aproximação extrema ou não extrema de partícula-única. No entanto, basicamente, este é um estado impuro, de configuração mista e a polarização efetiva, assim como a distribuição de momentum distorcida, deve ser um espelho destes resultados, sendo ambas descritas como combinações lineares das polarizações efetivas e distribuições de momentum distorcidas dos estados  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$ . Exami

nando as equações (IV.2-2), (IV.2-5), (IV.2-7) e (IV.2-9) vemos que isto realmente acontece.

### IV.3 - Distribuição de Momentum, Polarização Efetiva e Mistura de Configurações

As expressões que foram obtidas para a distribuição de momentum e polarização efetiva, podem ser reescritas de uma forma um pouco mais compacta. Como a projeção  $m$  do momentum angular total do núcleon varia de valores positivos até valores negativos, simetricamente ( $m = j, j-1, \dots, -j$ ) e como a expressão (IV.1-37) contém módulos das funções  $g_{\ell, m}^{(\vec{k})}$ , se substituirmos nestas,  $m$  por  $-m$ , tal modificação significa, no caso, simples mudança de notação.

Assim

$$\sum_{m_f, m_i} |g_{m_f, m_i}^{(-) (\vec{k})}|^2 = \left( \frac{2j_f + 1}{2\ell + 1} \right) \sum_{j, m} \left( \frac{\ell \pm m + \frac{1}{2}}{2j + 1} \right) |g_{\ell, -m + \frac{1}{2}}^{(\vec{k})}|^2 |\gamma^j|^2 \quad (\text{IV.3 - 1})$$

Expandindo (IV.1-36) e (IV.3-1) com respeito a  $j$ , como  $m = m_f - m_i$ , obtemos a expressão conveniente

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{m_f, m_i} |g_{m_f, m_i}^{(+)}(\vec{k})|^2 \pm \sum_{m_f, m_i} |g_{m_f, m_i}^{(-)}(\vec{k})|^2 \right) = \frac{2j_f + 1}{(2\ell + 2)(2\ell + 1)} \left\{ \left[ (\ell + 1) |\gamma^{\ell + \frac{1}{2}}|^2 + (\ell + 1) |\gamma^{\ell - \frac{1}{2}}|^2 \right] \right. \\ & \times \sum_{m_f - m_i} \left( |g_{\ell, m_f - m_i - \frac{1}{2}}^{(\vec{k})}|^2 (\pm) |g_{\ell, m_i - m_f + \frac{1}{2}}^{(\vec{k})}|^2 \right) + \left[ |\gamma^{\ell + \frac{1}{2}}|^2 - \left( \frac{\ell + 1}{\ell} \right) |\gamma^{\ell - \frac{1}{2}}|^2 \right] \\ & \left. \times \sum_{m_f - m_i} (m_f - m_i - \frac{1}{2}) \left( |g_{\ell, m_f - m_i - \frac{1}{2}}^{(\vec{k})}|^2 (\pm) |g_{\ell, m_i - m_f + \frac{1}{2}}^{(\vec{k})}|^2 \right) \right\} \quad (\text{IV.3 - 2}) \end{aligned}$$

Notando que  $m_\ell = m_f - m_i \pm \frac{1}{2}$ , esta equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \left( \sum_{m_f, m_i} |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^{(+)}|^2 + \sum_{m_f, m_i} |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^{(-)}|^2 \right) &= \frac{2j_f + 1}{(2\ell + 2)(2\ell + 1)} \left\{ \left[ (\ell + 1) |\gamma^{\ell + \frac{1}{2}}|^2 + (\ell + 1) |\gamma^{\ell - \frac{1}{2}}|^2 \right] \right. \\ &\times \sum_{m_\ell = -\ell}^{\ell} \left( |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^2 + |g'_{\ell, -m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^2 \right) + \left[ |\gamma^{\ell + \frac{1}{2}}|^2 - \left( \frac{\ell + 1}{\ell} \right) |\gamma^{\ell - \frac{1}{2}}|^2 \right] \\ &\times \sum_{m_\ell = -\ell}^{\ell} m_\ell \left( |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^2 - |g'_{\ell, -m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^2 \right) \left. \right\} \quad (\text{IV.3 - 3}) \end{aligned}$$

No Apêndice A, propriedades de somas das funções  $g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})$  são obtidas.

De acordo com os resultados (A2), (A3), (A4) e (A5) podemos escrever

$$\sum_{m_f, m_i} |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^{(+)}|^2 + \sum_{m_f, m_i} |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^{(-)}|^2 = \left( \frac{2j_f + 1}{2\ell + 1} \right) \left[ |\gamma^{\ell + \frac{1}{2}}|^2 + |\gamma^{\ell - \frac{1}{2}}|^2 \right] \sum_{m_\ell = -\ell}^{\ell} |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^2$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{m_f, m_i} |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^{(+)}|^2 - \sum_{m_f, m_i} |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^{(-)}|^2 &= \frac{(2j_f + 1)}{(2\ell + 2)(2\ell + 1)} \left\{ \left[ |\gamma^{\ell + \frac{1}{2}}|^2 - \left( \frac{\ell + 1}{\ell} \right) |\gamma^{\ell - \frac{1}{2}}|^2 \right] \right. \\ &\times \sum_{m_\ell = -\ell}^{\ell} m_\ell \left( |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^2 - |g'_{\ell, -m_\ell}(\vec{k})|_{(\pm)}^2 \right) \left. \right\} \quad (\text{IV.3 - 4}) \end{aligned}$$

Logo, a distribuição de momentum (IV.1-38) po  
de ser expressa como

$$\begin{aligned}
 |g'(\vec{k})|^2 &= \left( \frac{2j_f + 1}{2l + 1} \right) \left[ |\gamma^{l + \frac{1}{2}}|^2 + |\gamma^{l - \frac{1}{2}}|^2 \right] \sum_{m_l = -l}^l |g'(\vec{k})|_{l, m_l}^2 \\
 &= \left( \frac{2j_f + 1}{2l + 1} \right) |\gamma^{l + \frac{1}{2}}|^2 \{1 + \alpha^l\} \sum_{m_l = -l}^l |g'(\vec{k})|_{l, m_l}^2 \quad (\text{IV.3 - 5})
 \end{aligned}$$

e a polarização efetiva (IV.1-39) na forma

$$P(\vec{k}) = \frac{\left[ |\gamma^{l + \frac{1}{2}}|^2 - \left( \frac{l+1}{l} \right) |\gamma^{l - \frac{1}{2}}|^2 \right] \sum_{m_l = -l}^l m_l \left( |g'(\vec{k})|_{l, m_l}^2 - |g'(\vec{k})|_{l, -m_l}^2 \right)}{2(l+1) \left[ |\gamma^{l + \frac{1}{2}}|^2 + |\gamma^{l - \frac{1}{2}}|^2 \right] \sum_{m_l = -l}^l |g'(\vec{k})|_{l, m_l}^2} \quad (\text{IV.3 - 6})$$

Essa relação pode ser ainda reescrita como:

$$P(\vec{k}) = \frac{\left[ l - (l+1)\alpha^l \right] \sum_{m_l = 0}^l m_l \left( |g'(\vec{k})|_{l, m_l}^2 - |g'(\vec{k})|_{l, -m_l}^2 \right)}{l(l+1)(1 + \alpha^l) \sum_{m_l = -l}^l |g'(\vec{k})|_{l, m_l}^2} \quad (\text{IV.3 - 7})$$

onde definimos

$$\alpha^l = \frac{|\gamma^{l - \frac{1}{2}}|^2}{|\gamma^{l + \frac{1}{2}}|^2} \quad (\text{IV.3 - 8})$$

que é um parâmetro de mistura de configurações para estados caracterizados por uma combinação linear de sistemas com momenta angulares  $j = \ell \pm 1/2$ .

Aplicando estes resultados para a reação  $^{14}\text{N}(p, 2p)^{13}\text{C}$  obtemos de (IV.3-5), para o estado fundamental ( $n = 1, \ell = 1, j_f = 1/2, j = 3/2, 1/2$ ) a seguinte expressão para a distribuição de momentum distorcida

$$|g_{ef}'(\vec{k})|^2 = \left| \gamma_{ef}^{\frac{3}{2}} \right|^2 |g_{\frac{1}{2}}'(\vec{k})|^2 + \frac{1}{2} \left| \gamma_{ef}^{\frac{3}{2}} \right|^2 \alpha^{ef} |g_{\frac{3}{2}}'(\vec{k})|^2$$

(IV.3-9)

e de (IV.3-7), para a polarização efetiva

$$P_{ef}'(\vec{k}) = \frac{\alpha^{ef}}{(1+\alpha^{ef})} P_{\frac{1}{2}}(\vec{k}) + \frac{1}{(1+\alpha^{ef})} P_{\frac{3}{2}}(\vec{k})$$

(IV.3-10)

Para o primeiro estado excitado ( $n = 1, \ell = 1, j_i = 1, j_f = 3/2, j = 3/2, 1/2$ ), de (IV.3-5), a expressão para a distribuição de momentum distorcida

$$|g_{ee}'(\vec{k})|^2 = 2 \left| \gamma_{ee}^{\frac{3}{2}} \right|^2 |g_{\frac{1}{2}}'(\vec{k})|^2 + \left| \gamma_{ee}^{\frac{3}{2}} \right|^2 \alpha^{ee} |g_{\frac{3}{2}}'(\vec{k})|^2$$

(IV.3-11)

enquanto de (IV.3-7), para a polarização efetiva

$$P_{ee}(\vec{k}) = \frac{\alpha^{ee}}{(1 + \alpha^{ee})} P_{\frac{1}{2}}(\vec{k}) + \frac{1}{(1 + \alpha^{ee})} P_{\frac{3}{2}}(\vec{k}) \quad (\text{IV.3-12})$$

Como se pode notar, estes resultados para o estado fundamental e primeiro estado excitado concordam com as afirmações expostas anteriormente de forma que as relações (IV.3-5) e (IV.3-7) são as expressões desejadas, para a distribuição de momentum e para a polarização efetiva, tanto para os casos em que núcleons-alvo sejam caracterizados por estados resultantes de mistura de configurações com  $j = \ell + \frac{1}{2}$  e  $j = \ell - \frac{1}{2}$ , como também para situações em que sejam descritos por estados puros, ou  $\ell + \frac{1}{2}$ , ou  $\ell - \frac{1}{2}$ .

Adotamos, como aproximação, que os estados com  $\ell + \frac{1}{2}$  e  $\ell - \frac{1}{2}$  são degenerados. Disso resulta que a polarização efetiva da camada  $\ell$ , expressa por <sup>(14)</sup>

$$P_{\ell}^{\text{efetiva}} = \sum_{j = \ell \pm \frac{1}{2}} (2j + 1) P_j \quad (\text{IV.3-13})$$

é nula. Isto porque, neste caso, se pode escolher uma base para a qual não existe correlação spin-órbita e, conseqüentemente, a distorção não pode selecionar núcleons efetivamente polarizados. Além disso, nesta expressão, foi levado em conta o número de ocupação das sub-camadas com  $\ell + \frac{1}{2}$  e  $\ell - \frac{1}{2}$ .

Expandindo este somatório com respeito a  $j$  obtemos

$$P_{\ell}^{\text{efetiva}} = \left[ 2\left(\ell + \frac{1}{2}\right) + 1 \right] P_{\ell + \frac{1}{2}} + \left[ 2\left(\ell - \frac{1}{2}\right) + 1 \right] P_{\ell - \frac{1}{2}} = 0 \quad (\text{IV.3-14})$$

Mostramos, assim, que as funções polarização efetiva associadas aos estados puros com  $\ell + \frac{1}{2}$  e  $\ell - \frac{1}{2}$  possuem, de maneira geral, uma relação na forma

$$P_{\ell + \frac{1}{2}} = - \frac{\ell}{\ell + 1} P_{\ell - \frac{1}{2}} \quad (\text{IV.3-15})$$

sendo as funções  $P_{\ell + \frac{1}{2}}$  e  $P_{\ell - \frac{1}{2}}$  definidas pela expressão (IV.3-7) ao se tomar os limites  $\alpha \rightarrow 0$  e  $\alpha \rightarrow \infty$ , respectivamente.

Para os estados da camada p temos que

$$P_{\frac{3}{2}} = - \frac{1}{2} P_{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.3-16})$$

Como consequência, a polarização efetiva do estado pode ser expressa como uma combinação linear das polarizações efetivas  $P_{\ell + \frac{1}{2}}$  e  $P_{\ell - \frac{1}{2}}$ :

$$P_{\ell}^{\text{efetiva}} = \frac{\alpha^{\ell}}{1 + \alpha^{\ell}} P_{\ell - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 + \alpha^{\ell}} P_{\ell + \frac{1}{2}} \quad (\text{IV.3-17})$$

Esta equação pode ser escrita ainda como

$$P_{\ell}^{\text{efetiva}} = \frac{\sum_j |\gamma^j|^2 P_j}{\sum_j |\gamma^j|^2}, \quad j_{\ell \text{ fixo}} = \ell \pm \frac{1}{2} \quad (\text{IV.3-18})$$

com  $P_j$  igual à polarização efetiva causada por  $a_{jm}$ .

A generalização natural desta expressão, sem li

mitarmos-nos a misturas entre somente duas configurações é<sup>(32)</sup>

$$P = \frac{\sum_j |\gamma^j|^2 |g'_j|^2 P_j}{\sum_j |\gamma^j|^2 |g'_j|^2}, \quad j \text{ qualquer} \quad (\text{IV.3-19})$$

sendo  $|g'_j|^2$  a distribuição de momentum distorcida da sub-cama da  $j$ . Da expressão (IV.3-19) fica claro que não existe interferência entre as diferentes contribuições em  $j$ .

## UMA APLICAÇÃO PRÁTICA (REAÇÃO $^{14}\text{N}(p,2p)^{13}\text{C}$ )

### V.1 As Funções $\gamma^j$ , Relevância e Dificuldade de Obtenção Explícita

Mostramos nesta secção que as funções  $\gamma^j$  (IV.1-26) podem ser expressas em termos dos coeficientes de expansão das funções de onda nucleares e são, desta forma, sensíveis ao tipo de acoplamento nuclear. São, portanto, funções fundamentais na obtenção de informações da estrutura nuclear. Como estes coeficientes de expansão são complexos, podem ser expressos como o produto de um número real por um fator de fase que inclui sua parte imaginária. No entanto, não é fácil a obtenção destes fatores de fase, o que dificulta, conseqüentemente, obter-se de forma explícita as funções  $\gamma^j$ . Por este motivo, no formalismo desenvolvido anteriormente, introduzimos o parâmetro  $\alpha$ , que é definido como a razão entre funções  $\gamma^j$  dependentes de diferentes valores de momentum angular e, portanto, parâmetro de mistura de configurações. Através da comparação entre resultados experimentais e teóricos de polarização efetiva

para núcleos sujeitos a misturas de configurações, pode-se chegar à determinação de  $\alpha$  e, desta forma, obter-se importantes informações sobre a estrutura nuclear embora sem a obtenção explícita das funções  $\gamma^j$ .

Consideramos que o estado inicial ( $^{14}\text{N}$ ) é formado por 16 partículas que preenchem completamente os estados  $1s_{1/2}$ ,  $1p_{3/2}$ , e  $1p_{1/2}$ , cujos spins e isospins se acoplam de maneira a dar  $J_{16 \text{ part.}}^{\text{TOTAL}} = 0$  e  $T_{16 \text{ part.}}^{\text{TOTAL}} = 0$  formando um caroço inerte e dois buracos, um buraco de nêutron e um buraco de próton com momenta angulares orbitais iguais a  $l$  ( $l = 1$ ). Supondo tal modelo, os núcleons não participam na formação de quantidades nucleares relevantes, uma vez que preenchem completamente as camadas  $s$  e  $p$  e, conseqüentemente, são os buracos os responsáveis por quantidades físicas importantes como spin e isospin do  $^{14}\text{N}$  o qual tem momentum angular total igual a um e isospin total igual a zero ( $J_i = 1$ ,  $T_i = 0$ ).

Desta forma, optamos pelo formalismo alternativo de que há criação de buracos como conseqüência da reação quase-livre, e vamos estudar as propriedades nucleares que podem ser obtidas através de informações fornecidas pelas funções de onda associadas a estes buracos.

Dentro deste contexto, admitimos que a função de onda do núcleo-alvo pode ser considerada como descrita pela função de onda de dois buracos e a do núcleo final ( $^{13}\text{C}$ ), pela função de onda de três buracos. No Apêndice B descrevemos de forma geral as funções de onda para dois e três buracos.

Para os cálculos que seguem, sempre que se fizer necessária a utilização dos estados fundamental e excitado do  $^{13}\text{C}$  (Apêndice C), estes estados serão expressos em sua forma mais geral, uma vez que, no presente trabalho, não há interesse na descrição dos estados possíveis originados em um estágio intermediário do acoplamento de dois buracos quaisquer ( $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ ) mas o que interessa é descrever possíveis estados oriundos do acoplamento total de três buracos, sendo os três equivalentes ou não.

No entanto é sempre bom ter-se em mente que, de acordo com o exposto no Apêndice C sempre é possível, através do conhecimento dos coeficientes de expansão dos estados gerais obter-se informações a respeito de estados particulares, como por exemplo, estados com acoplamento de dois buracos equivalentes com spins iguais a  $j$  que se acoplam para dar  $J'$  e que depois se acoplam com  $j'$  (não equivalente) para dar  $J$ , o momentum angular total do núcleo.

De (C 10) o estado inicial é dado por

$$|i\rangle = a_i \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; J_i = 1, M_i \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_i = 0, M_{T_i} \rangle_A + b_i \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2}; J_i = 1, M_i \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_i = 0, M_{T_i} \rangle_A \quad (\text{V.1-1})$$

Introduzimos o operador

$$a \begin{matrix} j_b, m_b \\ \end{matrix} \quad (\text{V.1-2})$$

operador criação de um buraco com spin  $j_b$ , projeção de spin  $m_b$ , isospin  $1/2$  e projeção de isospin  $+1/2$  e supomos as seguintes aproximações: em primeiro lugar, desprezamos rearranjos nucleares após a reação nuclear, isto é, como o núcleo inicial tinha dois buracos equivalentes supõe

mos que o terceiro buraco, ao ser criado, não destrói este forte compromisso entre os buracos já existentes, ou seja, após a reação, estes buracos continuam equivalentes; a segunda aproximação consiste em supor que o buraco criado se acopla com os já existentes de forma a dar  $J_f$  igual a  $1/2$  e  $T_f$  igual a  $1/2$  se o núcleo residual ficar no estado fundamental e se acoplam de forma a dar  $J_f = 3/2$  e  $T_f = 1/2$  quando o núcleo final ficar no primeiro estado excitado, não havendo portanto misturas de estados com diferentes valores de  $J_f$ .

Estas imposições atraentes por sua simplicidade, são justificáveis por estarmos interessados exclusivamente no estado fundamental, ou no primeiro estado excitado do  $^{13}\text{C}$ . Isto porque não é imprescindível, ao mostrar uma aplicabilidade das equações deduzidas no cap. IV, agrupar uma quantidade muito grande de coeficientes de expansões lineares os quais obscureceriam as interpretações físicas dos resultados finais.

Desta forma, para o estado fundamental

$$a_{ef}^{j'_b, m_b} |i\rangle = a_1 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} j'_b; J = \frac{1}{2}, M \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T = \frac{1}{2}, M_T \right\rangle_A + b_1 \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} j'_b; J = \frac{1}{2}, M \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T = \frac{1}{2}, M_T \right\rangle_A \right.$$

(V.1 - 3)

e para o primeiro estado excitado

$$a_{ee}^{j'_b, m_b} |i\rangle = a_1 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} j'_b; J = \frac{3}{2}, M \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T = \frac{1}{2}, M_T \right\rangle_A + b_1 \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} j'_b; J = \frac{3}{2}, M \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T = \frac{1}{2}, M_T \right\rangle_A \right.$$

(V.1 - 4)

onde  $\vec{j}' = \vec{j} + \vec{j}_b$ ;  $\vec{j} = \vec{j}' + \vec{j}_b$ ;  $\vec{t}' = \vec{t} + \vec{t}_b$ ;  $\vec{t} = \vec{t}' + \vec{t}_b$ , sendo que  $t = t' = 1/2$ ,  $j = 1/2$  ou  $j = 3/2$ .

Para o caso em que  $j'_b = 1/2$ , a primeira função do estado fundamental tem três buracos equivalentes e a segunda dois equivalentes; para o caso em que  $j'_b = 3/2$ , para o estado fundamental, a primeira função tem dois buracos equivalentes e a segunda tem três buracos equivalentes. Para o estado excitado, considerações similares podem ser feitas e a partir destas, a escolha da representação formal da função de onda, usando o exposto no Apêndice C, se torna mais fácil.

Além disso, deve-se ressaltar que as funções (V.1-3) e (V.1-4) obtidas são funções normalizadas e simetrizadas expressas segundo (B17) e (B26), dependendo se funções de dois ou três buracos equivalentes, respectivamente.

Dentro deste contexto, consideramos que

$$|a_i|^2 + |b_i|^2 = 1, \quad (\text{V.1 - 5})$$

o que não seria necessariamente verdadeiro se admitíssemos que o buraco criado pelo operador  $a^{j'_b, m_b}$  pudesse se acoplar com os buracos já existentes de maneira livre, isto é, se não tivéssemos imposto restrições a estes acoplamentos e menos verdadeiro ainda se destruíssemos o forte compromisso entre os buracos iniciais considerando rearranjos nucleares.

Para o estado fundamental, se  $j'_b = 1/2$  temos

$$a_{ef}^{j'_b = \frac{1}{2}, m_b} |i\rangle = a_i \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; J = \frac{1}{2}, M \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T = \frac{1}{2}, M_T \right\rangle_A + b_i \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2}; J = \frac{1}{2}, M \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T = \frac{1}{2}, M_T \right\rangle_A \right.$$

(V.1 - 6)

e se  $j'_b = \frac{3}{2}$ , temos

$$a_{ef}^{j'_b = \frac{3}{2}, m_b} |i\rangle = a_i \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2}; J = \frac{1}{2}, M \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T = \frac{1}{2}, M_T \right\rangle_A + b_i \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}; J = \frac{1}{2}, M \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T = \frac{1}{2}, M_T \right\rangle_A \right.$$

(V.1 - 7)

Para o primeiro estado excitado, se  $j'_b = \frac{1}{2}$  temos

$$a_{ee}^{j'_b = \frac{1}{2}, m_b} |i\rangle = a_i \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; J = \frac{3}{2}, M \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T = \frac{1}{2}, M_T \right\rangle_A + b_i \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2}; J = \frac{3}{2}, M \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T = \frac{1}{2}, M_T \right\rangle_A \right.$$

(V.1 - 8)

e se  $j'_b = \frac{3}{2}$ , então

$$a_{ee}^{j'_b = \frac{3}{2}, m_b} |i\rangle = a_i \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2}; J = \frac{3}{2}, M \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T = \frac{1}{2}, M_T \right\rangle_A + b_i \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}; J = \frac{3}{2}, M \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T = \frac{1}{2}, M_T \right\rangle_A \right.$$

(V.1 - 9)

de forma que obtemos para  $\gamma^{1/2}$  e  $\gamma^{3/2}$ , para o estado fundamental do  ${}^{13}\text{C}$  ( $C_{CG}^i$  representam coeficientes de Clebsch-Gordan):

$$\gamma_{ef}^{1/2} = \langle f_{ef} | a_{ef}^{j'_b = \frac{1}{2}, m_b} |i\rangle / C_{CG}^1 = \left\{ a_i (h_f^{ef})^* + b_i (d_f^{ef})^* \right\} / C_{CG}^1 \quad (V.1 - 10)$$

$$\gamma_{ef}^{3/2} = \langle f_{ef} | a_{ef}^{j'_b = \frac{3}{2}, m_b} |i\rangle / C_{CG}^2 = \left\{ a_i (c_f^{ef})^* + b_i (v_f^{ef})^* \right\} / C_{CG}^2 \quad (V.1 - 11)$$

e para o primeiro estado excitado do  ${}^{13}\text{C}$

$$\gamma_{ee}^{1/2} = \langle f^{ee} | a_{ee}^{j'_b = \frac{1}{2}, m_b} | i \rangle / C_{CG}^3 = \left\{ a_1 (h_f^{ee})^* + b_1 (d_f^{ee})^* \right\} / C_{CG}^3 \quad (C.1-12)$$

$$\gamma_{ee}^{3/2} = \langle f^{ee} | a_{ee}^{j'_b = \frac{3}{2}, m_b} | i \rangle / C_{CG}^4 = \left\{ a_1 (c_f^{ee})^* + b_1 (v_f^{ee})^* \right\} / C_{CG}^4 \quad (C.1-13)$$

sendo os estados finais descritos pelas equações (C42) e (C43).

Assim, as funções  $\gamma^j$  podem ser expressas, dentro deste modelo, em termos de coeficientes de expansão das funções de ondas dos estados inicial e final e sua determinação explícita depende do conhecimento preciso destes coeficientes.

No caso em que o spin do núcleo-alvo for nulo, como as correlações nucleares originam, em geral, excitações de múltiplas partículas e não estados de um buraco, este efeito é representado pelo fator  $\gamma^j$  suposto ser independente de estado, ao menos para cada camada. Este fator cancela-se ao tomar-se razões de secções de choque que ocorrem na expressão da polarização efetiva. Isto é plausível porque as correlações de curto alcance devem afetar as diferentes integrais de superposição da mesma maneira. No entanto, se  $J_1 \neq 0$ ,  $\gamma^j$  agora reflete não somente a diferença entre um próton livre e um próton nuclear, mas também o coeficiente de parentesco fracional expressando a probabilidade de ocorrência do estado final do núcleo residual no estado inicial do núcleo-al

vo. Da mesma forma este fator cancela-se no cálculo da polarização efetiva, quando somente um valor de  $j$  contribuir em cada caso.

## V.2 - Geometria, Parâmetros e Função de Onda do Núcleon-Alvo Escolhidos

A função amplitude de momentum distorcida para um núcleon com momentum  $\vec{k}_3$  em um estado caracterizado pelo momentum angular orbital  $\ell$  e projeção  $m_\ell$ , que é a transformada de Fourier distorcida da integral de superposição (overlap) entre estados nucleares inicial e final, pode ser escrita como (14)

$$g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k}) = (1/(2\pi)^{3/2}) \iiint \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r}) R_{n\ell}(\vec{r}) Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi) D(\vec{r}) d^3 r$$

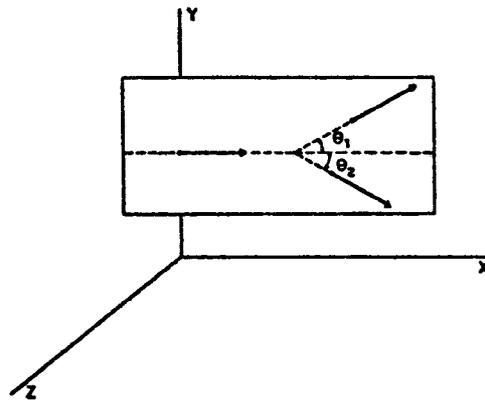
(V.2 - 1)

Esta quantidade é muito importante uma vez que tanto a distribuição de momentum quanto a polarização efetiva são expressas em função das diferentes amplitudes  $g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k}_3)$  e seu conhecimento, portanto, é essencial para obtenção das relações desenvolvidas no capítulo IV.

Procederemos agora a uma descrição formal dos métodos usados, assim como da geometria, parâmetros e função de onda do núcleon-alvo, escolhidos para a obtenção de resultados computacionais da distribuição de momentum e polarização efetiva, para diferentes razões de misturas de acoplamentos (diferentes razões  $|\gamma^{1/2}|^2/|\gamma^{3/2}|^2$ ).

Geometria:

A geometria escolhida é tal que um próton incide na direção x, sendo x-y o plano de espalhamento. Z define tanto a direção da polarização efetiva (ortogonal ao plano de espalhamento) quanto o eixo de quantização.



(Fig. V.2-1) Geometria coplanar escolhida.

Para o  $^{14}\text{N}$ , escolhemos as energias cinéticas  $T_0 = 320$  MeV,  $T_2 = 80$  MeV e  $T_1 = 240 - S$ , (uma vez que a energia cinética de recuo do núcleo residual pode ser desprezada), mantidas fixas para cada estado do núcleon-alvo e onde  $S$  é a energia de ligação deste núcleon.

Por estarmos tratando com estados resultantes da mistura de dois estados, usamos como valor de  $S$  uma média ponderada entre as energias estimadas dos estados  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$ , supondo o núcleon-alvo no estado fundamental, obtendo

$$\bar{S}_{\text{pon}} \approx \frac{4}{5} S_{3/2} + \frac{1}{5} S_{1/2} \approx 13.62 \text{ MeV} \quad (\text{V.2} \quad 2)$$

sendo  $S_{1/2} \approx 7.19$  MeV e  $S_{3/2} \approx 15.23$  MeV, valores estes es-

timados <sup>(17)</sup> do espalhamento  $^{14}\text{N}(p,2p)^{13}\text{C}$ .

Conseqüentemente

$$T_1 = 240 - \bar{S}_{\text{pon}} \approx 226.38 \text{ MeV} \quad (\text{V.2 - 3})$$

Também fixamos o ângulo  $\theta_1$ , que é dependente da energia de ligação, mas de forma a reproduzir a situação para a qual  $\hbar k_3 = 0$  e, assim, obtivemos gráficos de polarização efetiva e distribuição de momentum que cortam a origem de eixos; enquanto isto, consideramos que o ângulo  $\theta_2$  varia no plano de espalhamento de  $-90^\circ$  até  $-30^\circ$ .

O ângulo para o qual  $\hbar k_3 = 0$  pode ser encontrado se usarmos as relações (II.1-3), de forma que

$$\hbar k_1 \sin \theta_1 + \hbar k_2 \sin \theta_2 = 0$$

$$\hbar k_1 \cos \theta_1 + \hbar k_2 \cos \theta_2 = \hbar k_0$$

$$E_0 - E_1 - E_2 - (S - mc^2) = 0$$

$$T_0 = T_1 + T_2 + S \quad (\text{V.2 - 4})$$

Usando estas equações, após alguns rearranjos, temos

$$\cos \theta_1 = \frac{T_1 (T_0 + 2mc^2) + S (mc^2 + T_0 - T_1 - S/2)}{(\hbar c)^2 k_0 k_1}$$

$$(\text{V.2 - 5})$$

De posse de  $T_0, T_1$  e  $T_2$ , pode-se obter  $k_0, k_1$  e  $k_2$  além de  $E_0, E_1$  e  $E_2$  já que de (II.1-5) sabemos que

$$k_j = \frac{1}{\hbar c} (T_j^2 + 2 T_j m_j^2 c^4)^{1/2}, \quad j=0,1,2 \quad (\text{V.2 - 6})$$

e de (IV.1-4) que

$$E_j^2 = (\hbar k_j c)^2 + m_j^2 c^4 \quad (\text{V.2 - 7})$$

de forma que,  $\theta_1$  é dado por

$$\theta_1 = 27.90^\circ \quad (\text{V.2 - 8})$$

Por outro lado, para obtermos  $\theta_{k_3}$  ângulo que  $\vec{k}_3$  faz com a direção de incidência e  $k_3$  (ver figura V.2-2), para cada valor de  $\theta_2$ , usamos as relações (II.1-3) para o caso geral em que  $\hbar k_3 \neq 0$ , mantendo  $\theta_1$  fixo

$$\hbar k_1 \sin \theta_1 + \hbar k_2 \sin \theta_2 - \hbar k_3 \sin \theta_{k_3} = 0 \quad \text{e}$$

$$\hbar k_1 \cos \theta_1 + \hbar k_2 \cos \theta_2 - \hbar k_3 \cos \theta_{k_3} = \hbar k_0$$

(V.2 - 9)

Destas equações temos que

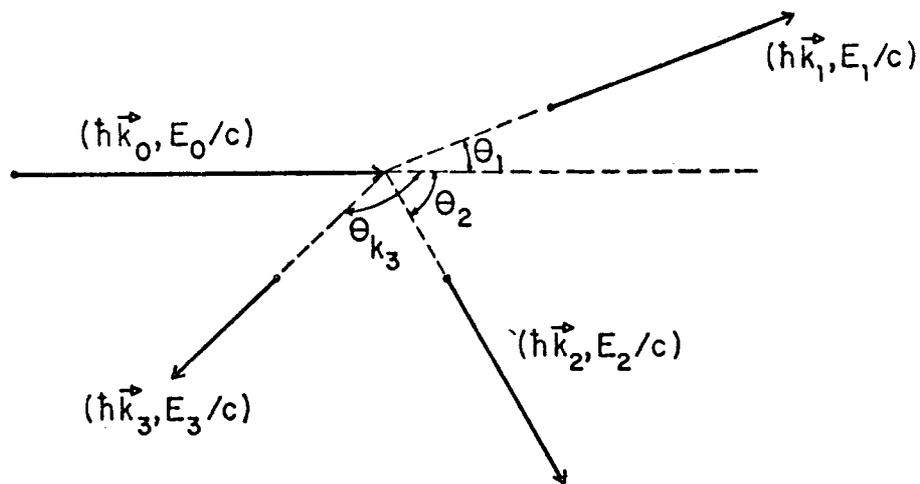
$$\theta_{k_3} = \arctan \left( (k_1 \sin \theta_1 + k_2 \sin \theta_2) / (k_1 \cos \theta_1 + k_2 \cos \theta_2 - k_0) \right)$$

(V.2 - 10)

e que

$$k_3 = (k_1 \sin \theta_1 + k_2 \sin \theta_2) / (\sin \theta_{k_3}) \quad (\text{V.2 - 11})$$

### SISTEMA LABORATÓRIO



(Fig. V.2-2) - Esquema do processo.

Usando um programa em linguagem Fortran, para o computador HP-2100/A do Instituto de Física da UFRGS obtivemos os seguintes resultados

Estado Fundamental do  $^{14}\text{N}$

$$\bar{S}_{\text{pon}} \approx 13.62 \text{ MeV}$$

$$T_1 \approx 226.38 \text{ MeV}$$

$$\theta_1 = 27.90^\circ$$

$\theta_2$ (graus)	$k_3$ (fm <sup>-1</sup> )	$\theta_{k_3}$ (graus)
-74.80	-0.7	25.25
-71.91	-0.6	26.70
-69.02	-0.5	28.14
-66.15	-0.4	29.58
-63.28	-0.3	31.01
-60.42	-0.2	32.44
-57.56	-0.1	33.87
-54.70	0.0	25.28
-51.84	0.1	36.73
-48.98	0.2	38.16
-46.12	0.3	39.59
-43.25	0.4	41.03
-40.37	0.5	42.47
-37.49	0.6	43.91
-34.59	0.7	45.36

(TABELA V.2-1) - Valores obtidos para  $\theta_{k_3}$  e  $k_3$ .

Distorção:

Consideramos, para os cálculos que estamos apresentando, tanto a parte real como a parte imaginária do potencial ótico de forma que a distorção, independente de spin é dada por

$$\begin{aligned}
 \psi(\vec{r}) &= \exp\left[-i\left(\frac{l_0}{2\lambda_0} + \frac{l_1}{2\lambda_1} + \frac{l_2}{2\lambda_2}\right)\right] \cdot \exp\left(i\left(\frac{l_0 U_0}{2\lambda_0 W_0} + \frac{l_1 U_1}{2\lambda_1 W_1} + \frac{l_2 U_2}{2\lambda_2 W_2}\right)\right) \\
 &= \exp\left[-i\left(\frac{l_0}{2\lambda_0} + \frac{l_1}{2\lambda_1} + \frac{l_2}{2\lambda_2}\right)\right] \cdot \exp\left(i\left(\frac{l_0 V_0}{2\lambda_0} + \frac{l_1 V_1}{2\lambda_1} + \frac{l_2 V_2}{2\lambda_2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

de acordo com (II.3-4) e (II.3-5), sendo  $v_i = U_i/W_i$  ( $i=0,1,2$ ) onde  $U_i$  é a parte real e  $W_i$  a parte imaginária do potencial (ótico) nuclear sentido pela  $i$ -ésima partícula.

As estimativas para o  $^{14}\text{N}$  de razões entre partes reais e imaginárias de potenciais óticos sentidos pelas partículas envolvidas em uma reação quase-livre de acordo com suas energias cinéticas, por nós adotadas, são as seguintes<sup>(33)</sup>:

$$v_0 = U_0/W_0 \approx 3.3 \times 10^{-1}$$

$$v_1 = U_1/W_1 \approx 6.5 \times 10^{-1}$$

$$v_2 = U_2/W_2 \approx 2.7 \quad (\text{V.2-13})$$

Seria útil ressaltar que existem diversas tabelas que fornecem, dependendo do núcleo de que se estiver tratando, valores teóricos ou experimentais de  $U_i$  e  $W_i$  relacionados com as respectivas energias cinéticas  $T_i$ , para espalhamentos de alta energia, como por exemplo o artigo de Dabrowski e Sobiczewski<sup>(23)</sup> que calcularam para matéria nuclear com  $k_F = 1.38 \text{ fm}^{-1}$  ( $r_0 = 1.1 \text{ fm}$ ) e  $T_0$  entre 0 e 320 MeV, curvas para  $U_i$  e  $W_i$  como função de  $T_i$ .

A largura  $L$  do poço quadrado de potencial do  $^{14}\text{N}$  está relacionada com o raio quadrado médio, segundo (II.3-9) por

$$L = (5/3)^{1/2} (\langle r^2 \rangle)^{1/2} \quad (\text{V.1-14})$$

Como o raio quadrático médio, obtido experimentalmente através de espalhamento elástico de elétrons<sup>(27)</sup>, para o  $^{14}\text{N}$ , é igual a

$$(\langle r^2 \rangle)^{1/2} = 2.45 \times 10^{-13} \text{ cm} , \quad (\text{V.2 - 15})$$

obtemos

$$L = 3.16 \text{ fm} \quad (\text{V.2 - 16})$$

Se a densidade de matéria nuclear for dada por uma função poço quadrado na forma

$$\rho(r) = \begin{cases} 3/4\pi L^3 , & r < L \\ 0 , & r > L \end{cases} \quad (\text{V.2 - 17})$$

para  $r < L$  teremos

$$\rho(r) = \frac{3}{4}\pi^{-1}L^{-3} = 0.76 \times 10^{-2} \text{ fm}^{-3} \quad (\text{V.2 - 18})$$

Além disso, supondo a matéria nuclear como descrita por um gás, como  $L = r_0 A^{1/3}$  e  $r_0 = 1.52/k_F^{(28)}$  sendo  $k_F$  o momentum de Fermi, obtemos, para a energia de Fermi

$$E_F = (27.61 \pm 0.58) \text{ MeV} \quad (\text{V.2 - 19})$$

Com estes resultados e supondo conhecidos os valores de  $U_i$  ( $i=0,1,2$ ), pode-se calcular os valores para  $\lambda_i$ , os livre-caminhos médios, uma vez que de (II.3-7) temos que

$$\lambda_i = 1 / \{ \rho \langle \sigma_i \rangle \} \quad ;$$

onde

$$\langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_0 \rangle \left[ 1 - \frac{7}{5} (E_F / T'_i) \right] \quad , \quad T'_i = T_i - U_i \quad (V.2-20)$$

Como os livre-caminhos médios  $\lambda_i$  associados à  $i$ -ésima partícula estão relacionados com os correspondentes  $W_i$ , valores da parte imaginária do potencial ótico, por

$$\lambda_i = \hbar^2 c^2 k_i / \{ 2E_i |W_i| \} \quad (V.2-21)$$

estes podem ser, desta forma obtidos. Alternativamente, a partir do conhecimento de  $U_i$ , poder-se-ia extrair os valores de  $W_i$  usando-se as razões  $v_i$  obtidas anteriormente. Deve-se notar que  $\langle \sigma_0 \rangle$  define a secção de choque núcleon-núcleon livres dada por exemplo por Goldberger<sup>(20)</sup> por

$$\langle \sigma_0 \rangle = 0.064 \text{ b} \quad (V.2-22)$$

Como o livre-caminho médio, para os prótons envolvidos em uma reação quase-livre não difere de maneira significativa para núcleos leves, supomos que

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \approx 3.6 \text{ fm} \quad (V.2-23)$$

que corresponde ao livre caminho-médio dos prótons incidentes no núcleo  $^{16}_0\text{O}$ <sup>(14)</sup>.

Com estes resultados, determinamos classicamente as trajetórias dos prótons, simbolizadas por  $l_i$  ( $i=0,1,2$ ),

de forma a obter, computacionalmente, o valor da distorção para cada ponto genérico de colisão.

Como um exemplo, segundo o exposto no Apêndice D, para uma colisão em um ponto  $r \approx 1.2$  fm, como  $r > x'$  e  $r > x''$  escolhemos  $x' \approx 1.0$  fm e  $x'' \approx 1.01$  fm, valores estes característicos para o problema em questão, obtendo de (D3), para a trajetória clássica do próton incidente no interior do núcleo

$$\ell_0 = r \cos\theta + \left( L^2 - (r \sin\theta)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{V.2-24})$$

e fazendo  $\theta \approx 40^\circ$ , temos

$$\ell_0 \approx 3.95 \text{ fm} \quad (\text{V.2-25})$$

De (D4)

$$P^2 \approx 0.44 \text{ fm} \quad (\text{V.2-26})$$

e desta forma obtemos o valor estimado para  $\ell_1$

$$\ell_1 \approx 2.09 \text{ fm} \quad (\text{V.2-27})$$

Finalmente, de (D8)

$$(P')^2 \approx 0.41 \text{ fm}^2, \quad (\text{V.2-28})$$

e assim temos que

$$\ell_2 \approx 2.08 \text{ fm} \quad (\text{V.2-29})$$

sendo  $\ell_1$  e  $\ell_2$  as trajetórias clássicas dos prótons, após a colisão, no interior do núcleo.

Uma vez que

$$D(r) = \exp\left[-\left(\frac{\ell_0}{2\lambda_0} + \frac{\ell_1}{2\lambda_1} + \frac{\ell_2}{2\lambda_2}\right)\right] \cdot \exp\left(i\left(\frac{\ell_0 W_0}{2\lambda_0 W_0} + \frac{\ell_1 W_1}{2\lambda_1 W_1} + \frac{\ell_2 W_2}{2\lambda_2 W_2}\right)\right) \quad (\text{V.2-30})$$

para  $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 3.6$  fm;  $U_0/W_0 = 3.3 \times 10^{-1}$ ,  $U_1/W_1 = 6.5 \times 10^{-1}$ ,  $U_2/W_2 = 2.7$ ;  $\ell_0 \approx 3.95$  fm,  $\ell_1 \approx 2.09$  fm e  $\ell_2 \approx 2.08$  fm podemos estimar o efeito da parte real da distorção sobre a função de onda do núcleon-alvo no interior do núcleo, como

$$|D(r)|^2 |R_{n\ell} Y_{\ell m_\ell}|^2 \approx 1.05 \times 10^{-1} \times |R_{n\ell} Y_{\ell m_\ell}|^2 \quad (\text{V.2-31})$$

Com este resultado, podemos notar que o efeito de distorção pode ser muito importante correspondendo para este exemplo muito especial a 30% dos efeitos existentes no espalhamento de alta energia próton-núcleo considerado.

#### Função de Onda do Núcleon-Alvo

Escolhemos a parte radial e angular da função de onda do núcleon-alvo como gerada por um potencial poço quadrado de largura  $L$  e expressa para o estado  $1p$  como

$$\psi(r, \theta, \phi)_{\ell=1, m_\ell=1, 0, -1} = \begin{cases} R(r') & Y(\theta, \phi) \\ n=1, \ell=1 & \ell=1, m_\ell=1, 0, -1 ; r' < L \\ R(r'') & Y(\theta, \phi) \\ n=1, \ell=1 & \ell=1, m_\ell=1, 0, -1 ; r'' > L \end{cases} \quad (\text{V.2-32})$$

sendo  $Y_{\ell, m_\ell}(\theta, \phi)$  os harmônicos esféricos para estados com  $\ell = 1$  e  $m_\ell = 1, 0, -1$  e eixo de quantização  $z$  e sendo ainda

$$R_{1,1}(r') = C_1 \left[ \frac{\text{sen}(\Delta r') - (\Delta r') \cos(\Delta r')}{(r')^2} \right]$$

$$R_{1,1}(r'') = C_2 \frac{(\beta r'' + 1)}{(r'')^2} \cdot \exp \beta (L - r'') \quad (\text{V.2 - 33})$$

onde

$$\Delta = \left( \frac{2m}{\hbar^2} (V_1 - |\bar{S}_{\text{pon}}|) \right)^{1/2}; \quad C_1 = \left[ \left( (2(\beta L + 1)^2 \Delta^2 + \beta^2 / L((\beta L + 1)^2 + (\beta L + 1) + 1) \Delta^4) \right)^{-1/2} \right]$$

$$\beta = \left( \frac{2m}{\hbar} (|\bar{S}_{\text{pon}}|) \right)^{1/2}; \quad C_2 = \left[ (2\Delta^2 L) / \left( ((\beta L + 1)^2 + (\beta L + 1) + 1) (\Delta^2 + \beta^2) \right) \right]^{1/2}$$

(V.2 - 34)

Os auto-estados de energia se relacionam com os parâmetros  $\Delta$  os quais podem ser obtidos através da resolução da equação transcendental

$$\frac{1}{\Delta L} \cotg(\Delta L) - \frac{1}{(\Delta L)^2} = \frac{1}{\beta L} \frac{1}{(\beta L)^2} \quad (\text{V.2-35})$$

Usando o método de Newton<sup>(34)</sup> para resolução de equações transcendentais e sabendo que

$$\beta = 0.8069 \text{ fm}^{-1}$$

obtemos

$$\Delta = 1.1277 \text{ fm}^{-1} \quad (\text{V.2-36})$$

Na próxima seção descreveremos os resultados computacionais obtidos para a polarização efetiva e distribuição de momentum para a reação  $^{14}\text{N}(p, 2p)^{13}\text{C}$ .

## V.3 - Resultados Finais

Com a finalidade de obter curvas teóricas para as equações desenvolvidas no capítulo anterior, no caso particular da reação  $^{14}\text{N}(p,2p)^{13}\text{C}$ , usamos um programa<sup>†</sup> em linguagem algol rodado no computador B6700 do Centro de Processamento de Dados da UFRGS. Neste programa foram introduzidos os dados discriminados na seção anterior para  $\beta$ ,  $\Delta$ , raio nuclear  $L$ , livre-caminhos médios  $v_0, v_1$  e  $v_2$  dos prótons envolvidos na reação quase-livre e razões  $v_0, v_1$  e  $v_2$  entre as partes reais e imaginárias dos potenciais óticos sentidos por estas partículas, sendo calculadas as trajetórias clássicas  $l_0, l_1$  e  $l_2$  dos prótons no interior do núcleo, através das equações expostas no apêndice D e a distorção para cada ponto genérico de colisão de acordo com a definição (II.3-6).

Supondo o potencial nuclear como sendo descrito por uma função do tipo poço quadrado com partes real e imaginária e alcance igual ao raio do núcleo, foram calculados valores para a amplitude de momentum distorcida para os estados  $lp_{1/2}$  e  $lp_{3/2}$  através da expressão (V.2-1), sendo as funções de onda do núcleon-alvo definidas por (V.2-32).

Em seguida, foram obtidas curvas para a distribuição de momentum distorcida e polarização efetiva para os estados puros  $lp_{1/2}$  e  $lp_{3/2}$ , usando o resultado (IV.1-51), e a partir destas, curvas de polarização efetiva (IV.3-7) para diferentes valores do parâmetro  $\alpha$ .

Estes resultados estão apresentados nas tabelas

<sup>†</sup> O trabalho computacional foi realizado graças à pronta colaboração do Prof. Claudio Schneider.

las V.3-1, V.3-2, V.3-3 e nas figuras V.3-1, V.3-2 e V.3-3. As curvas pontilhadas que aparecem no gráfico V.3-1 correspondem às distribuições de momentum não distorcidas. Além disso, para efeito de comparações, nas figuras V.3-4, V.3-5 e V.3-6 são apresentadas curvas de distribuição de momentum distorcida e polarização efetiva para o  $^{16}\text{O}$  calculadas<sup>(14)</sup> usando funções de onda de poço quadrado de alcance igual a 3.4 fm e distorção contendo somente o termo imaginário. Este é um núcleo com número de massa igual a 16 correspondendo a uma camada fechada (núcleo mágico-16). O  $^{14}\text{N}$  pode ser considerado como um núcleo de  $^{16}\text{O}$  com dois buracos, um buraco de próton e um buraco de nêutron. Por isto, espera-se que o comportamento das funções polarização efetiva associadas aos estados  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$  destes dois núcleos não varie significativamente. A comparação dos resultados mostra concordância com esta exposição demonstrando serem as funções polarização efetiva pouco sensíveis à pequenas variações tanto do potencial ótico<sup>(14)</sup> quanto do número de massa.

Nas figuras V.3-7, V.3-8, V.3-9 e V.3-10 são apresentadas curvas teóricas e resultados experimentais, obtidos para a secção de choque e assimetria como funções da energia de uma das partículas emergentes no caso da reação nuclear  $^{16}\text{O}(p, 2p)^{15}\text{N}$ , por P.Kitching et alii<sup>(34)</sup>, para diferentes geometrias (no caso  $\theta_1$  é fixo e  $\theta_2$  varia).

A assimetria em um espalhamento quase-livre é definida como

$$A_s = \frac{d\sigma(\uparrow)/d\Omega_1 d\Omega_2 dE - d\sigma(\downarrow)/d\Omega_1 d\Omega_2 dE}{d\sigma(\uparrow)/d\Omega_1 d\Omega_2 dE + d\sigma(\downarrow)/d\Omega_1 d\Omega_2 dE} \quad (\text{V.3-1})$$

onde ( $\uparrow$ ) e ( $\downarrow$ ) simbolizam as projeções de spin da partícula incidente. Assim, de (III.1-11) e (III.2-1) temos que a polarização efetiva pode ser expressa em termos de grandezas detectáveis na forma

$$P(\vec{k}_3) = \frac{A_s - P(\bar{\theta})}{C_{nn}(\bar{\theta}) - A_s P(\bar{\theta})} \quad (\text{V.3-2})$$

Como  $P(\bar{\theta})$  dentro da geometria adotada no presente trabalho, é pequena quando comparada a  $C_{nn}(\bar{\theta})$  e  $A_s$ ,  $P(\vec{k}_3)$  é aproximadamente proporcional a  $A_s$ .

Desta forma as curvas de assimetrias dos estados  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$  do  $^{16}\text{O}$  apresentadas nas figuras (V.3-9) e (V.3-10) são aproximadamente proporcionais as polarizações efetivas  $P_{1/2}$  e  $P_{3/2}$ .

A comparação destes resultados mostra concordância, ao menos semi-quantitativa, com o resultado previsto pela expressão (IV.3-16) e com os resultados teóricos apresentados nas figuras (V.3-2), (V.3-3) e (V.3-6).

$K_3$ (fm <sup>-1</sup> )	$P(\vec{k}_3)$ 1/2	$P(\vec{k}_3)$ 3/2	$ g'(\vec{k}_3) $ 1/2 (fm <sup>3</sup> )	$ g'(\vec{k}_3) $ 3/2 (fm <sup>3</sup> )
- 0.70	$5.73 \times 10^{-1}$	$- 2.865 \times 10^{-1}$	$8.217 \times 10^{-2}$	$1.643 \times 10^{-1}$
- 0.60	$5.72 \times 10^{-1}$	$- 2.860 \times 10^{-1}$	$1.051 \times 10^{-1}$	$2.102 \times 10^{-1}$
- 0.50	$5.81 \times 10^{-1}$	$- 2.905 \times 10^{-1}$	$1.195 \times 10^{-1}$	$2.390 \times 10^{-1}$
- 0.40	$6.07 \times 10^{-1}$	$- 3.035 \times 10^{-1}$	$1.199 \times 10^{-1}$	$2.398 \times 10^{-1}$
- 0.30	$6.76 \times 10^{-1}$	$- 3.380 \times 10^{-1}$	$1.009 \times 10^{-1}$	$2.018 \times 10^{-1}$
- 0.20	$7.57 \times 10^{-1}$	$- 3.785 \times 10^{-1}$	$7.152 \times 10^{-2}$	$1.430 \times 10^{-1}$
- 0.10	$6.91 \times 10^{-1}$	$- 3.455 \times 10^{-1}$	$4.409 \times 10^{-2}$	$8.818 \times 10^{-2}$
0.00	0.00	0.00	$3.431 \times 10^{-2}$	$6.862 \times 10^{-2}$
0.10	$- 6.78 \times 10^{-1}$	$3.390 \times 10^{-1}$	$4.691 \times 10^{-2}$	$9.382 \times 10^{-2}$
0.20	$- 7.93 \times 10^{-1}$	$3.965 \times 10^{-1}$	$7.402 \times 10^{-2}$	$1.480 \times 10^{-1}$
0.30	$- 7.59 \times 10^{-1}$	$3.795 \times 10^{-1}$	$1.008 \times 10^{-1}$	$2.016 \times 10^{-1}$
0.40	$- 7.24 \times 10^{-1}$	$3.620 \times 10^{-1}$	$1.139 \times 10^{-1}$	$2.278 \times 10^{-1}$
0.50	$- 7.12 \times 10^{-1}$	$3.560 \times 10^{-1}$	$1.092 \times 10^{-1}$	$2.184 \times 10^{-1}$
0.60	$- 7.17 \times 10^{-1}$	$3.585 \times 10^{-1}$	$9.162 \times 10^{-2}$	$1.832 \times 10^{-1}$
0.70	$- 7.38 \times 10^{-1}$	$3.690 \times 10^{-1}$	$6.721 \times 10^{-2}$	$1.344 \times 10^{-1}$

(TABELA V.3-1) - Resultados obtidos para as funções polarização efetiva e distribuição de momentum para os estados  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$  usando potencial poço quadrado e distorção com partes real e imaginária.

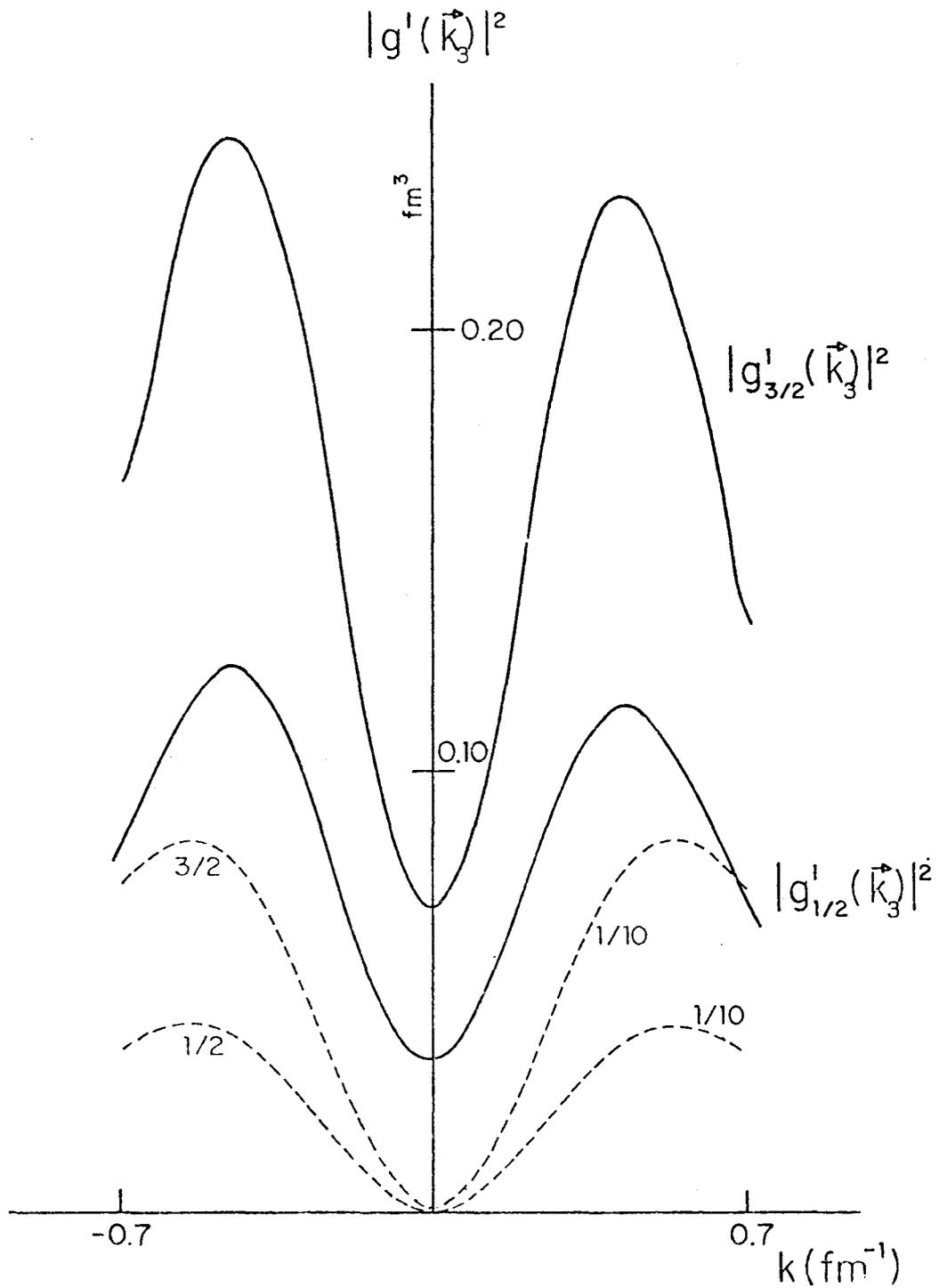
$K_3$ (fm <sup>-1</sup> )	$ g(\vec{k}_3) ^2_{1/2}$ (fm <sup>-1</sup> )	$ g(\vec{k}_3) ^2_{3/2}$ (fm <sup>-1</sup> )	Polarização
- 0.70	$3.696 \times 10^{-1}$	$7.392 \times 10^{-1}$	0.00
- 0.60	$4.113 \times 10^{-1}$	$8.226 \times 10^{-1}$	0.00
- 0.50	$4.150 \times 10^{-1}$	$8.300 \times 10^{-1}$	0.00
- 0.40	$3.665 \times 10^{-1}$	$7.330 \times 10^{-1}$	0.00
- 0.30	$2.678 \times 10^{-1}$	$5.356 \times 10^{-1}$	0.00
- 0.20	$1.442 \times 10^{-1}$	$2.884 \times 10^{-1}$	0.00
- 0.10	$4.059 \times 10^{-2}$	$8.118 \times 10^{-2}$	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00
0.10	$4.059 \times 10^{-2}$	$8.118 \times 10^{-2}$	0.00
0.20	$1.442 \times 10^{-1}$	$2.884 \times 10^{-1}$	0.00
0.30	$2.678 \times 10^{-1}$	$5.356 \times 10^{-1}$	0.00
0.40	$3.665 \times 10^{-1}$	$7.330 \times 10^{-1}$	0.00
0.50	$4.150 \times 10^{-1}$	$8.300 \times 10^{-1}$	0.00
0.60	$4.113 \times 10^{-1}$	$8.226 \times 10^{-1}$	0.00
0.70	$3.696 \times 10^{-1}$	$7.392 \times 10^{-1}$	0.00

(TABELA V.3-2) - Resultados obtidos para as funções polarização efetiva e distribuição de momentum para os estados  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$  sem a presença de distorção.

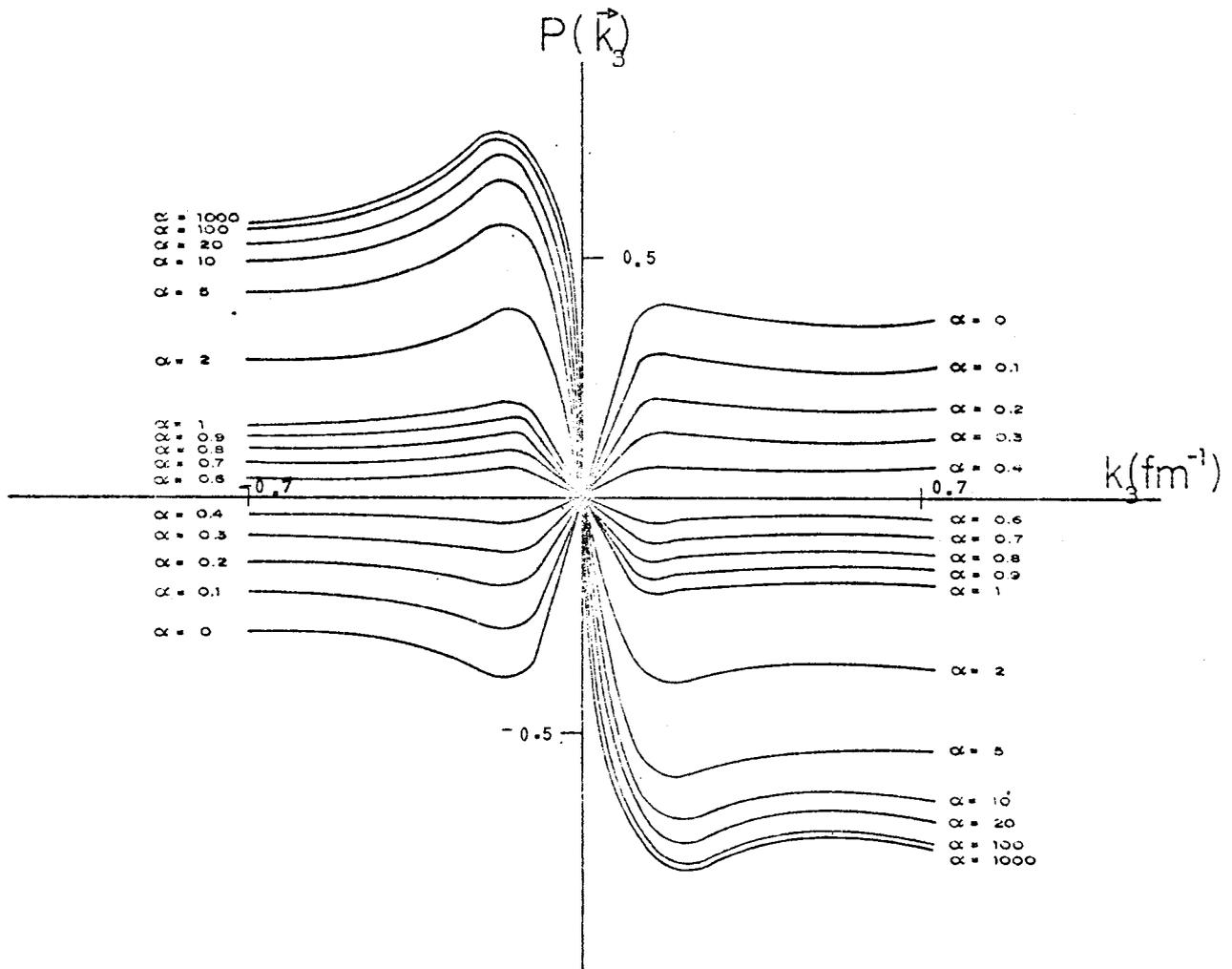
$$P(\vec{k}_j) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} P_{1/2}(\vec{k}_j) + \frac{1}{1 + \alpha} P_{3/2}(\vec{k}_j)$$

$(\text{Me}^{-1})$	$\alpha=0$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$	$\alpha=1$	$\alpha=2$	$\alpha=5$	$\alpha=10$	$\alpha=20$	$\alpha=100$	$\alpha=1000$
- 0.70	$-2.663 \times 10^{-1}$	$-2.002 \times 10^{-1}$	$-1.432 \times 10^{-1}$	$-8.815 \times 10^{-2}$	$-4.892 \times 10^{-2}$	0.00	$3.501 \times 10^{-2}$	$6.741 \times 10^{-2}$	$8.550 \times 10^{-2}$	$1.208 \times 10^{-1}$	$1.432 \times 10^{-1}$	$2.683 \times 10^{-1}$	$4.297 \times 10^{-1}$	$4.940 \times 10^{-1}$	$5.321 \times 10^{-1}$	$5.846 \times 10^{-1}$	$5.721 \times 10^{-1}$
- 0.80	$-2.660 \times 10^{-1}$	$-2.000 \times 10^{-1}$	$-1.430 \times 10^{-1}$	$-8.800 \times 10^{-2}$	$-4.885 \times 10^{-2}$	0.00	$3.575 \times 10^{-2}$	$6.729 \times 10^{-2}$	$8.533 \times 10^{-2}$	$1.204 \times 10^{-1}$	$1.430 \times 10^{-1}$	$2.660 \times 10^{-1}$	$4.290 \times 10^{-1}$	$4.940 \times 10^{-1}$	$5.311 \times 10^{-1}$	$5.835 \times 10^{-1}$	$5.714 \times 10^{-1}$
- 0.90	$-2.905 \times 10^{-1}$	$-2.113 \times 10^{-1}$	$-1.452 \times 10^{-1}$	$-8.930 \times 10^{-2}$	$-4.950 \times 10^{-2}$	0.00	$3.831 \times 10^{-2}$	$6.835 \times 10^{-2}$	$8.683 \times 10^{-2}$	$1.223 \times 10^{-1}$	$1.452 \times 10^{-1}$	$2.990 \times 10^{-1}$	$4.357 \times 10^{-1}$	$5.017 \times 10^{-1}$	$5.395 \times 10^{-1}$	$5.724 \times 10^{-1}$	$5.601 \times 10^{-1}$
- 0.40	$-3.035 \times 10^{-1}$	$-2.207 \times 10^{-1}$	$-1.517 \times 10^{-1}$	$-8.330 \times 10^{-2}$	$-4.338 \times 10^{-2}$	0.00	$3.784 \times 10^{-2}$	$7.147 \times 10^{-2}$	$1.072 \times 10^{-1}$	$1.228 \times 10^{-1}$	$1.517 \times 10^{-1}$	$3.035 \times 10^{-1}$	$4.552 \times 10^{-1}$	$5.242 \times 10^{-1}$	$5.636 \times 10^{-1}$	$5.979 \times 10^{-1}$	$6.061 \times 10^{-1}$
- 0.30	$-3.300 \times 10^{-1}$	$-2.450 \times 10^{-1}$	$-1.690 \times 10^{-1}$	$-1.040 \times 10^{-1}$	$-4.828 \times 10^{-2}$	0.00	$4.228 \times 10^{-2}$	$7.853 \times 10^{-2}$	$1.172 \times 10^{-1}$	$1.423 \times 10^{-1}$	$1.650 \times 10^{-1}$	$3.300 \times 10^{-1}$	$5.070 \times 10^{-1}$	$5.830 \times 10^{-1}$	$6.277 \times 10^{-1}$	$6.660 \times 10^{-1}$	$6.750 \times 10^{-1}$
- 0.20	$-3.785 \times 10^{-1}$	$-2.753 \times 10^{-1}$	$-1.892 \times 10^{-1}$	$-1.165 \times 10^{-1}$	$-5.407 \times 10^{-2}$	0.00	$4.731 \times 10^{-2}$	$8.808 \times 10^{-2}$	$1.282 \times 10^{-1}$	$1.589 \times 10^{-1}$	$1.892 \times 10^{-1}$	$3.785 \times 10^{-1}$	$5.677 \times 10^{-1}$	$6.530 \times 10^{-1}$	$7.029 \times 10^{-1}$	$7.467 \times 10^{-1}$	$7.559 \times 10^{-1}$
- 0.10	$-3.455 \times 10^{-1}$	$-2.513 \times 10^{-1}$	$-1.727 \times 10^{-1}$	$-1.093 \times 10^{-1}$	$-4.936 \times 10^{-2}$	0.00	$4.319 \times 10^{-2}$	$8.128 \times 10^{-2}$	$1.152 \times 10^{-1}$	$1.455 \times 10^{-1}$	$1.727 \times 10^{-1}$	$3.455 \times 10^{-1}$	$5.102 \times 10^{-1}$	$5.968 \times 10^{-1}$	$6.416 \times 10^{-1}$	$6.807 \times 10^{-1}$	$6.899 \times 10^{-1}$
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.10	$3.300 \times 10^{-1}$	$2.465 \times 10^{-1}$	$1.655 \times 10^{-1}$	$1.043 \times 10^{-1}$	$4.843 \times 10^{-2}$	0.00	$-4.227 \times 10^{-2}$	$-7.976 \times 10^{-2}$	$-1.130 \times 10^{-1}$	$-1.427 \times 10^{-1}$	$-1.693 \times 10^{-1}$	$-3.300 \times 10^{-1}$	$-5.085 \times 10^{-1}$	$-5.855 \times 10^{-1}$	$-6.296 \times 10^{-1}$	$-6.678 \times 10^{-1}$	$-6.769 \times 10^{-1}$
0.20	$3.865 \times 10^{-1}$	$2.884 \times 10^{-1}$	$1.982 \times 10^{-1}$	$1.220 \times 10^{-1}$	$5.661 \times 10^{-2}$	0.00	$-4.956 \times 10^{-2}$	$-8.329 \times 10^{-2}$	$-1.132 \times 10^{-1}$	$-1.489 \times 10^{-1}$	$-1.802 \times 10^{-1}$	$-3.865 \times 10^{-1}$	$-5.947 \times 10^{-1}$	$-6.849 \times 10^{-1}$	$-7.363 \times 10^{-1}$	$-7.812 \times 10^{-1}$	$-7.918 \times 10^{-1}$
0.30	$3.793 \times 10^{-1}$	$2.780 \times 10^{-1}$	$1.887 \times 10^{-1}$	$1.168 \times 10^{-1}$	$5.421 \times 10^{-2}$	0.00	$-4.744 \times 10^{-2}$	$-8.923 \times 10^{-2}$	$-1.128 \times 10^{-1}$	$-1.508 \times 10^{-1}$	$-1.887 \times 10^{-1}$	$-3.793 \times 10^{-1}$	$-5.692 \times 10^{-1}$	$-6.555 \times 10^{-1}$	$-7.040 \times 10^{-1}$	$-7.477 \times 10^{-1}$	$-7.579 \times 10^{-1}$
0.40	$3.620 \times 10^{-1}$	$2.633 \times 10^{-1}$	$1.810 \times 10^{-1}$	$1.114 \times 10^{-1}$	$5.171 \times 10^{-2}$	0.00	$-4.525 \times 10^{-2}$	$-8.510 \times 10^{-2}$	$-1.120 \times 10^{-1}$	$-1.524 \times 10^{-1}$	$-1.810 \times 10^{-1}$	$-3.620 \times 10^{-1}$	$-5.430 \times 10^{-1}$	$-6.253 \times 10^{-1}$	$-6.723 \times 10^{-1}$	$-7.152 \times 10^{-1}$	$-7.279 \times 10^{-1}$
0.50	$3.560 \times 10^{-1}$	$2.589 \times 10^{-1}$	$1.780 \times 10^{-1}$	$1.095 \times 10^{-1}$	$5.095 \times 10^{-2}$	0.00	$-4.450 \times 10^{-2}$	$-8.376 \times 10^{-2}$	$-1.110 \times 10^{-1}$	$-1.499 \times 10^{-1}$	$-1.780 \times 10^{-1}$	$-3.560 \times 10^{-1}$	$-5.340 \times 10^{-1}$	$-6.148 \times 10^{-1}$	$-6.611 \times 10^{-1}$	$-7.016 \times 10^{-1}$	$-7.109 \times 10^{-1}$
0.60	$3.565 \times 10^{-1}$	$2.607 \times 10^{-1}$	$1.782 \times 10^{-1}$	$1.103 \times 10^{-1}$	$5.121 \times 10^{-2}$	0.00	$-4.481 \times 10^{-2}$	$-8.435 \times 10^{-2}$	$-1.119 \times 10^{-1}$	$-1.509 \times 10^{-1}$	$-1.782 \times 10^{-1}$	$-3.565 \times 10^{-1}$	$-5.337 \times 10^{-1}$	$-6.139 \times 10^{-1}$	$-6.606 \times 10^{-1}$	$-7.003 \times 10^{-1}$	$-7.109 \times 10^{-1}$
0.70	$3.690 \times 10^{-1}$	$2.664 \times 10^{-1}$	$1.845 \times 10^{-1}$	$1.155 \times 10^{-1}$	$5.271 \times 10^{-2}$	0.00	$-4.612 \times 10^{-2}$	$-8.624 \times 10^{-2}$	$-1.120 \times 10^{-1}$	$-1.554 \times 10^{-1}$	$-1.845 \times 10^{-1}$	$-3.690 \times 10^{-1}$	$-5.535 \times 10^{-1}$	$-6.334 \times 10^{-1}$	$-6.813 \times 10^{-1}$	$-7.220 \times 10^{-1}$	$-7.369 \times 10^{-1}$

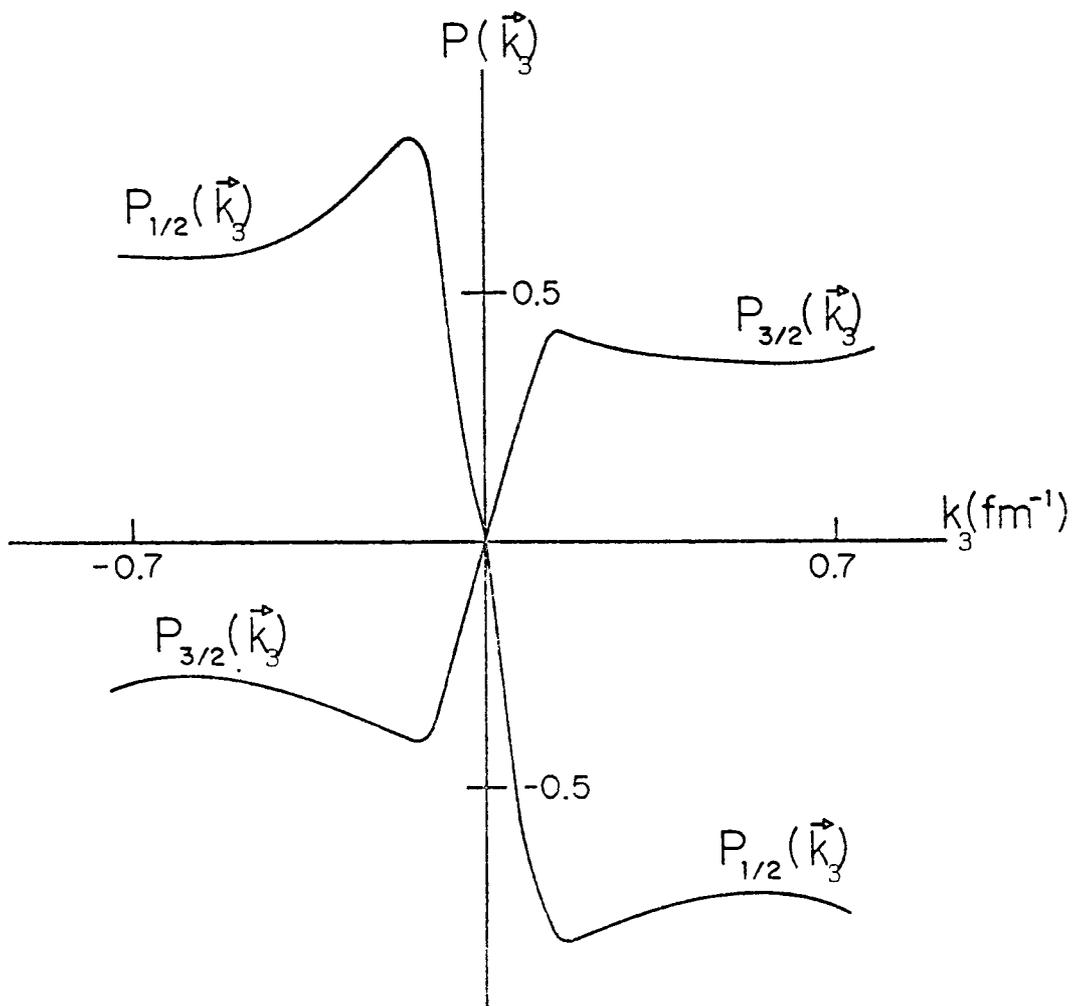
(TABELA V.3.3) - Resultados obtidos para a polarização efetiva do núcleo-  
 a]vo (reação  $^{14}\text{N}(p,2p)^{13}\text{C}$ ) para diferentes misturas das  
 configurações com  $j = 1/2$  e  $j = 3/2$ .



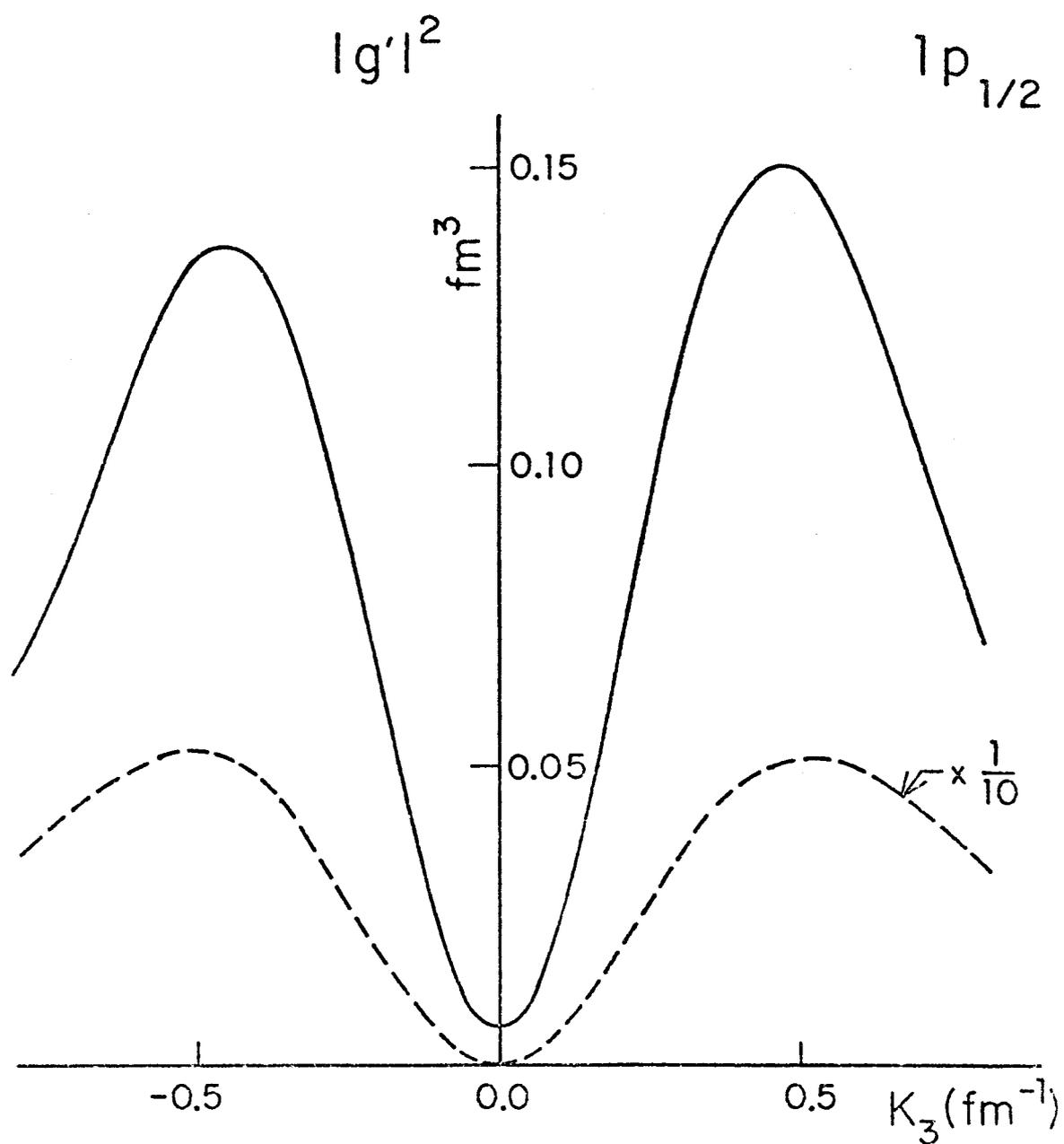
(Fig. V.3-1) - Distribuições de momento  $|g'_{1/2}(\vec{k}_3)|^2$  e  $|g'_{3/2}(\vec{k}_3)|^2$  do  $^{14}\text{N}$  obtidas de  $g'(\vec{k}_3)$  nos limites  $\alpha \rightarrow \infty$  e  $\alpha \rightarrow 0$ , respectivamente. As curvas pontilhadas correspondem ao caso não distorcido.



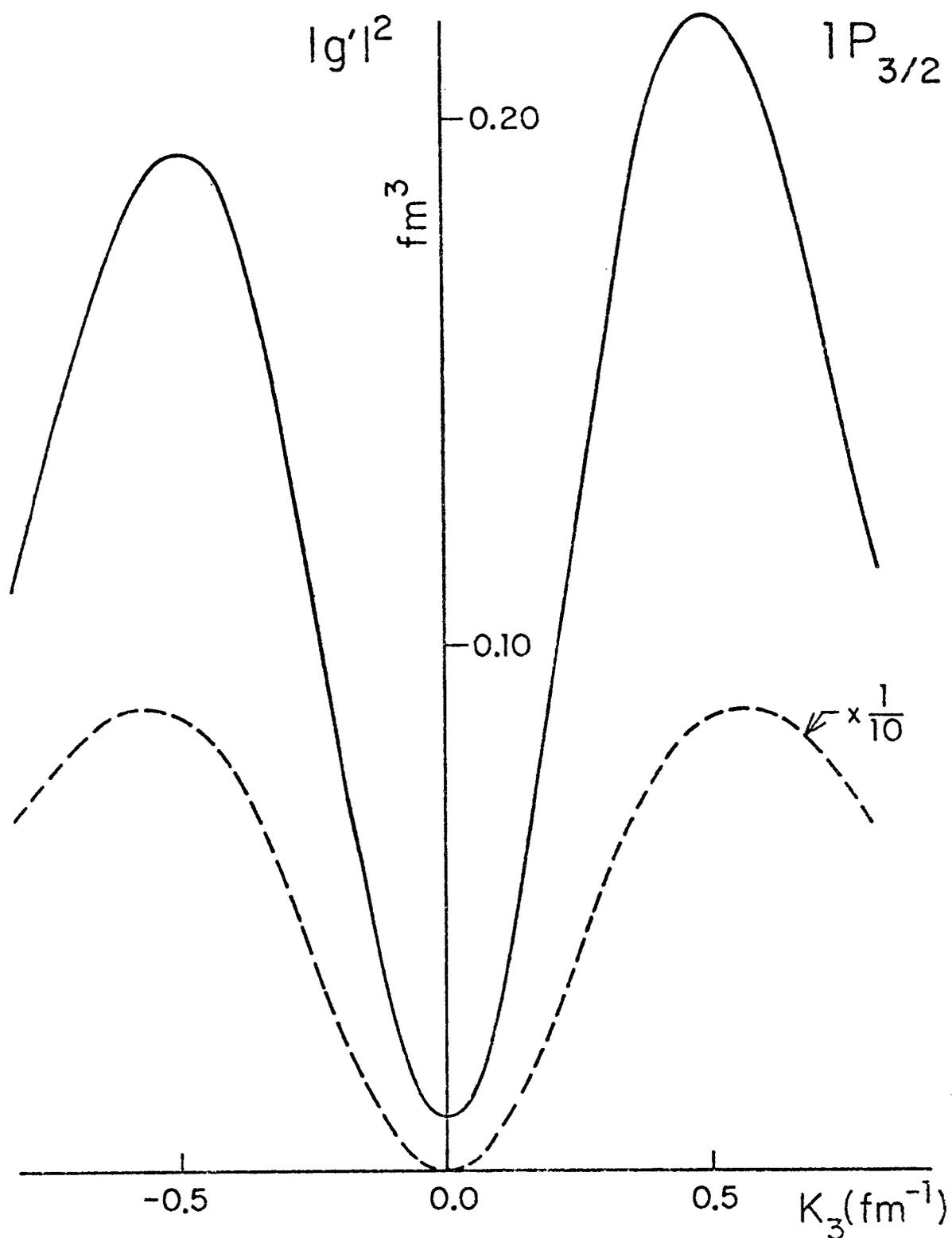
(Fig. V.3-2) - Polarização efetiva  $P(\vec{k}_3)$  do  $^{14}\text{N}$  para diferentes misturas das configurações com  $j=1/2$  e  $j=3/2$ .



(Fig. V.3-3) - Polarizações efetivas  $P_{1/2}(\vec{k}_3)$  e  $P_{3/2}(\vec{k}_3)$  do  $^{14}\text{N}$  obtidas de  $P(\vec{k}_3)$  nos limites  $\alpha \rightarrow \infty$  e  $\alpha \rightarrow 0$ , respectivamente. Estes resultados correspondem às curvas externas apresentadas na Figura (V.3-2).



(Fig. V.3-4) - Distribuição de momento distorcida para o estado  $1p_{1/2}$  do  $^{16}\text{O}$ , calculada<sup>(14)</sup> usando funções de onda de poço quadrado. A curva tracejada corresponde ao caso não distorcido.



(Fig. V.3-5) - Distribuição de momentum distorcida para o estado  $1p_{3/2}$  do  $^{16}\text{O}$ , calculada<sup>(14)</sup> com funções de onda do tipo poço quadrado. A curva tracejada corresponde ao caso não distorcido.

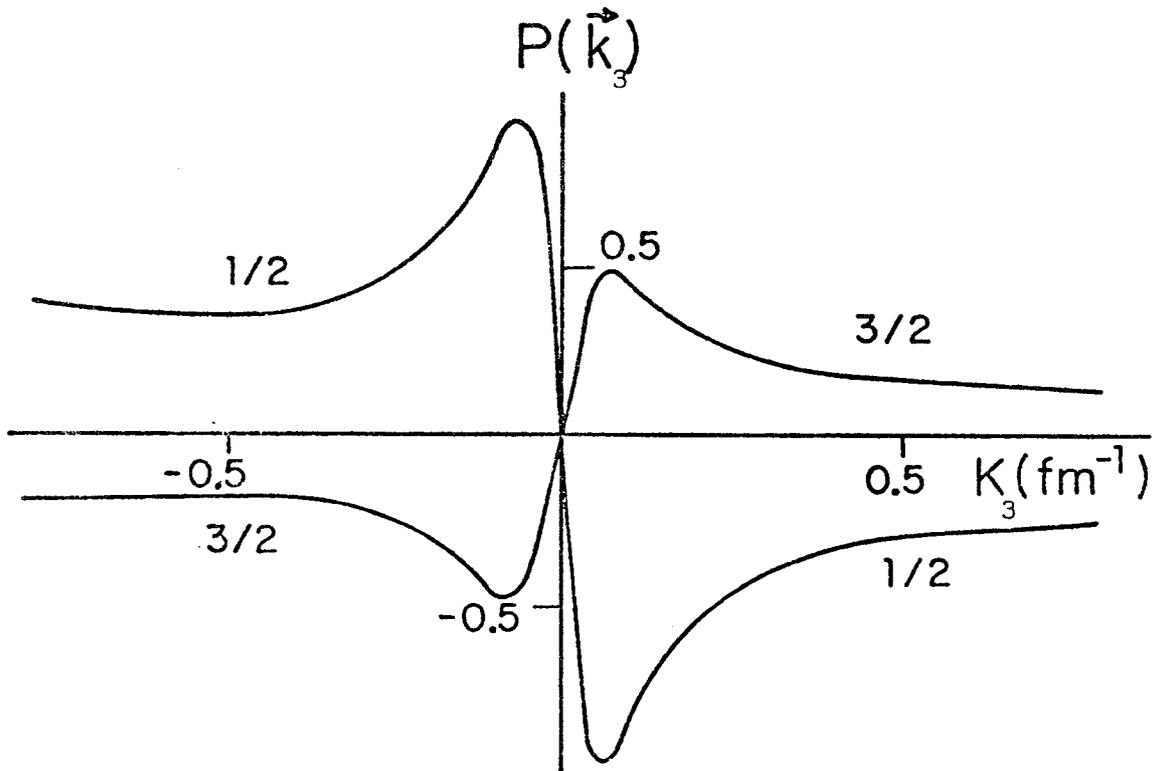
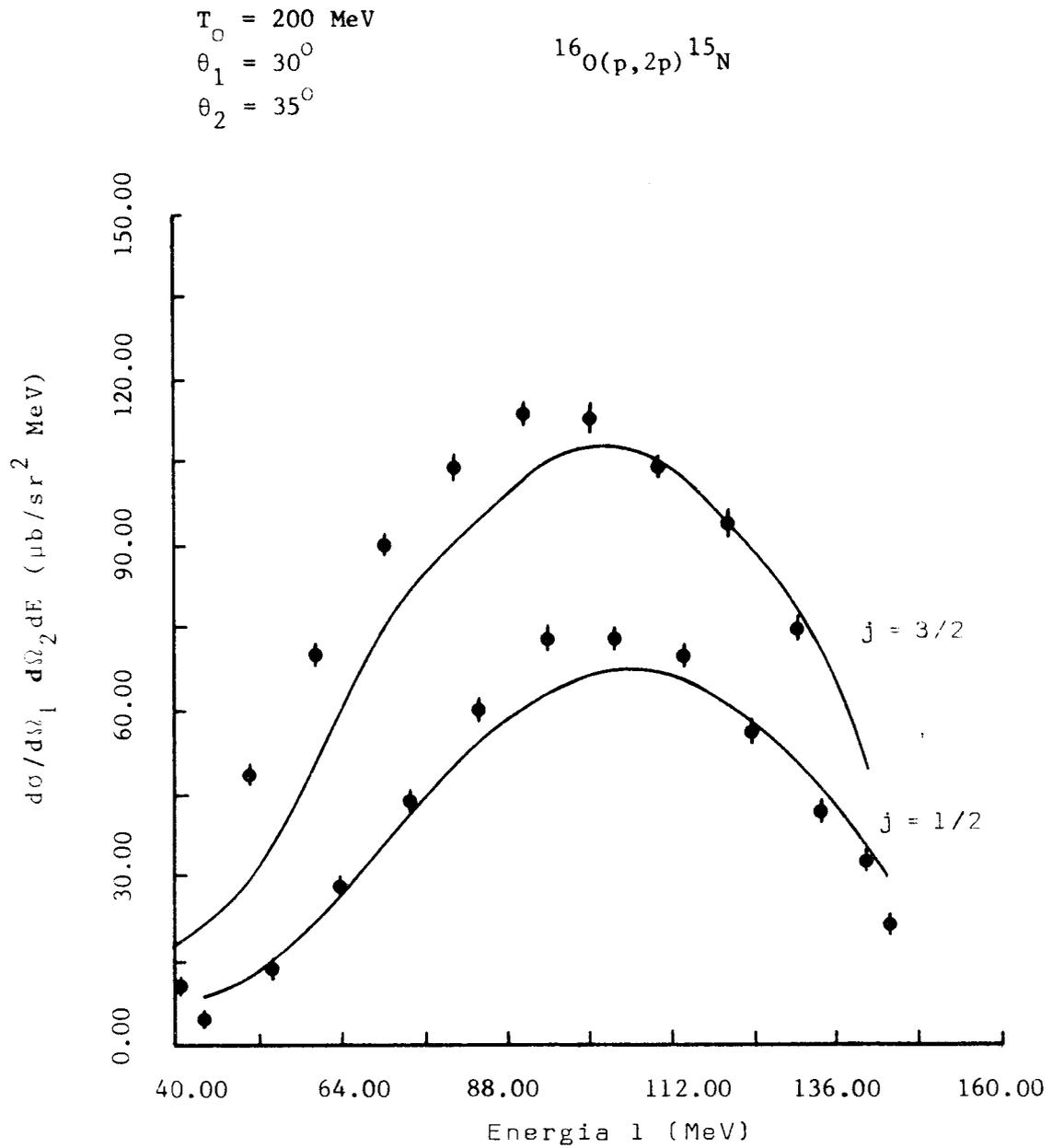
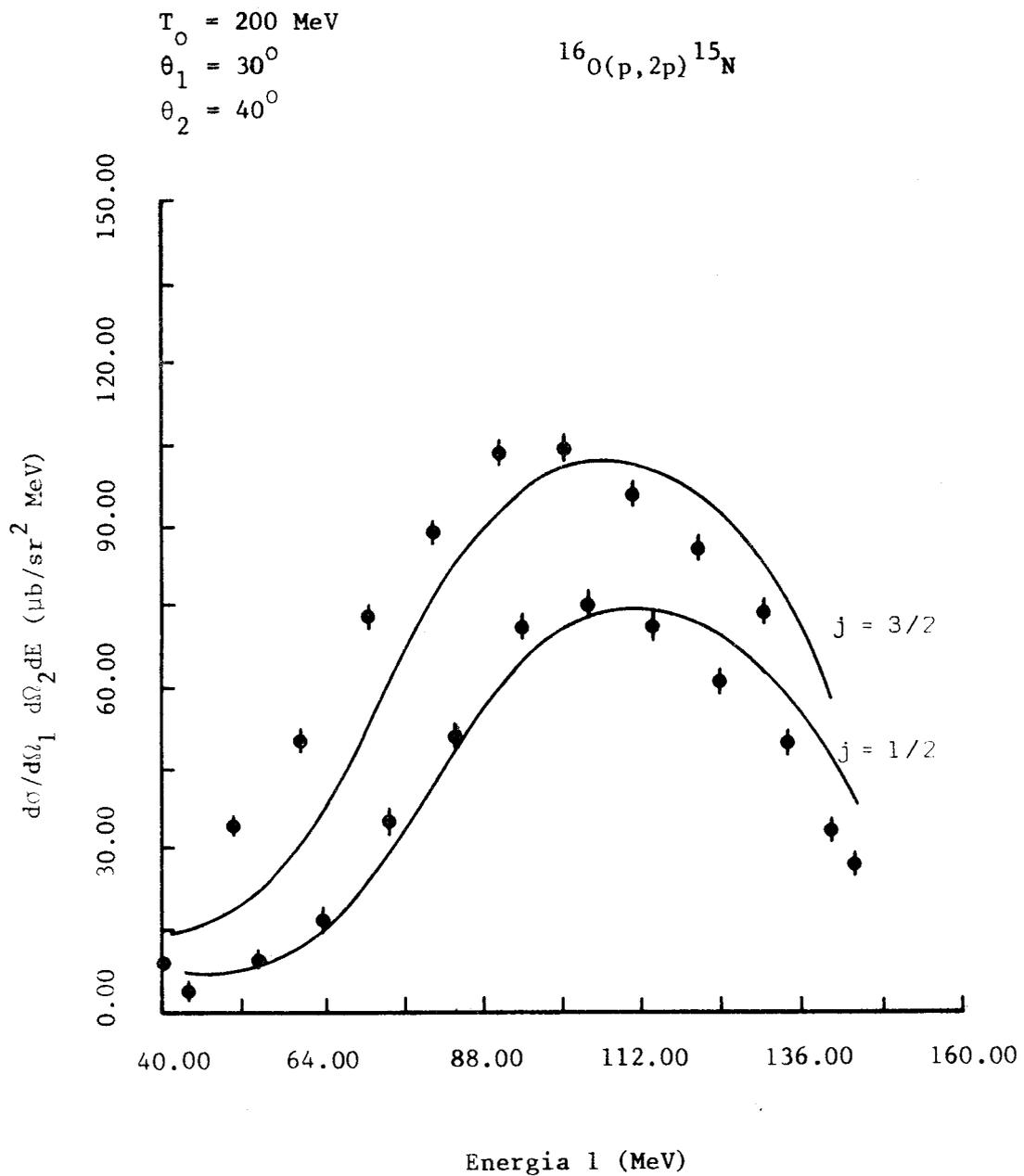


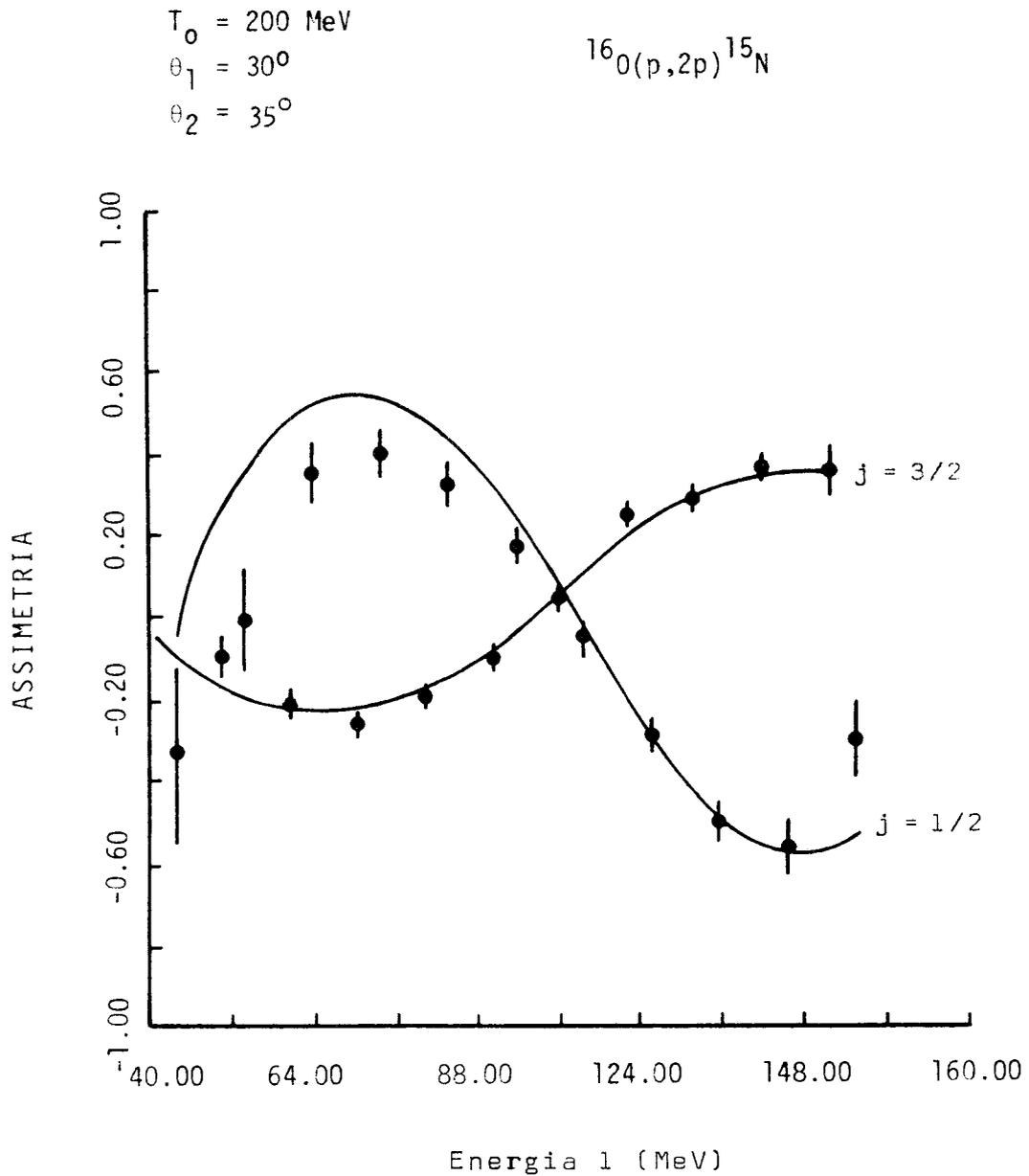
Fig. V.3-6) - Polarizações efetivas calculadas<sup>(14)</sup> para os estados  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$  do  $^{16}\text{O}$ , usando funções de onda de poço quadrado.



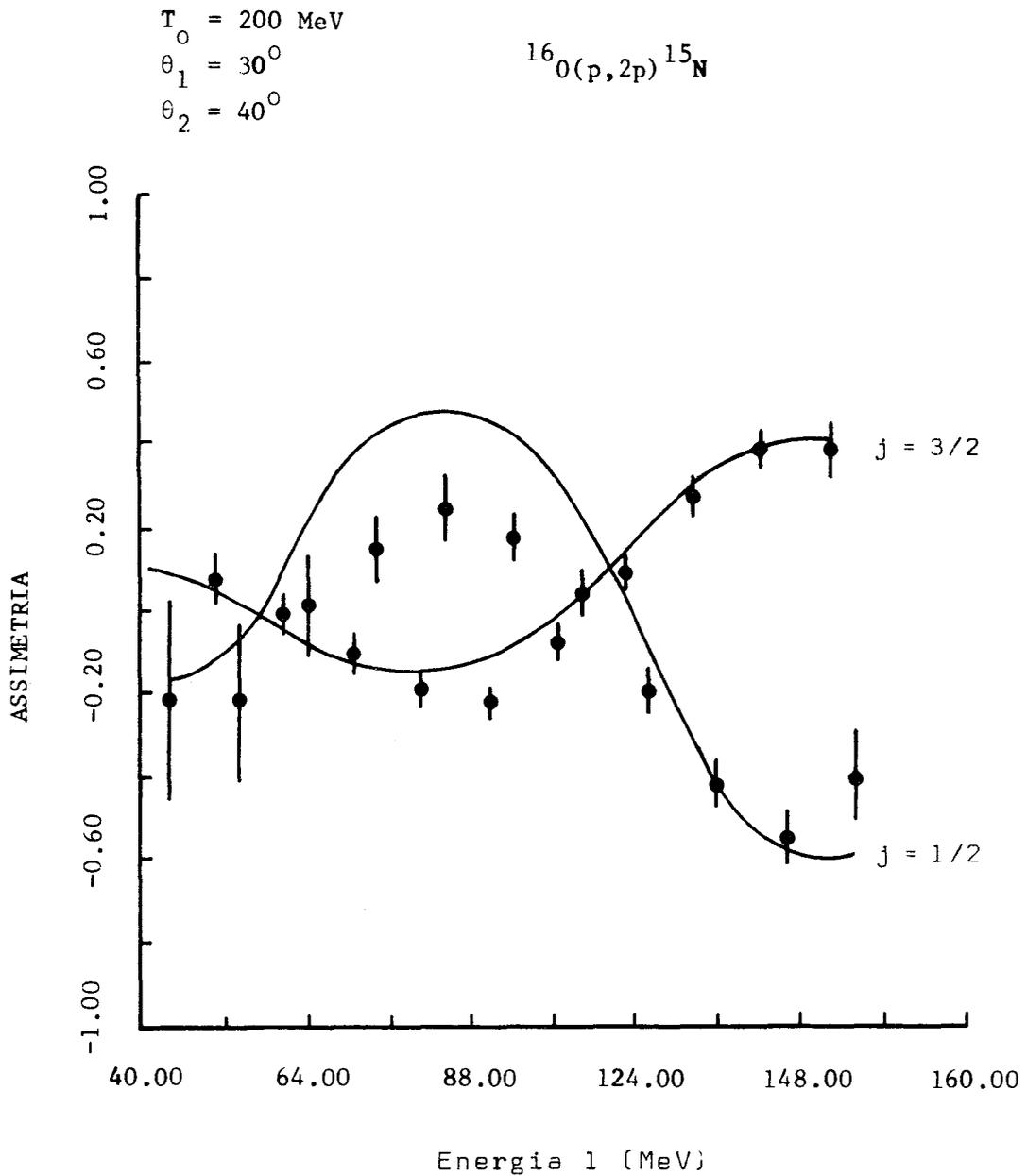
(Fig. V.3-7) - Curvas teóricas de secção de choque construídas através do método de deslocamentos da fase por C. Miller<sup>(35)</sup> e resultados experimentais para o  $^{16}\text{O}$  obtidos por P. Kitching et alii<sup>(34)</sup>.



(Fig. v.3-8) - Curvas teóricas de secção de choque construídas através do método de deslocamentos de fase por C.Miller<sup>(35)</sup> e resultados experimentais para o  $^{16}\text{O}$  obtidos por P.Kitching et alii<sup>(34)</sup>.



(Fig. V.3-9) - Curvas teóricas de assimetria construídas através do método de deslocamentos de fase por C. Miller<sup>(35)</sup> e resultados experimentais para o  $^{16}\text{O}$  obtidos por P. Kitching et alii<sup>(34)</sup>.



(Fig. V.3-10) - Curvas teóricas de assimetria construídas através do método de deslocamentos de fase por C. Miller<sup>(35)</sup> e resultados experimentais para o  $^{16}_0$  obtidos por P. Kitching et alii<sup>(34)</sup>.

## VI - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Se compararmos os resultados aqui apresentados com os resultados experimentais<sup>(35)</sup> vemos que a aproximação utilizada, que consiste em supor os estados caracterizados por  $\ell + 1/2$  e  $\ell - 1/2$  ( $\ell$  fixo) como degenerados, é suficientemente válido de forma a justificar sua adoção. Como consequência, as polarizações efetivas  $P_{\ell+1/2}$  e  $P_{\ell-1/2}$  se relacionam na forma descrita pela expressão (IV.3-15) demonstrada experimentalmente de maneira semi-quantitativa para o estado  $p$  do  $^{16}\text{O}$ .

Além disso, os exemplos considerados mostraram que estas funções são pouco sensíveis à pequenas modificações tanto dos potenciais óticos<sup>(13, 14)</sup> quanto do número de massa. Por isto, resultados experimentais das funções polarização efetiva dos estados puros,  $\ell+1/2$  e  $\ell-1/2$ , de núcleo mágico com número de massa próximo do núcleo no qual estamos interessados podem ser linearmente combinados com coeficientes ajustáveis, de maneira a reproduzirem curvas teóricas para obtenção de valores para  $\alpha^\ell$ . Estes valores de  $\alpha^\ell$  podem ser então compa

rados com possíveis valores de  $\alpha^{\ell}$  obtidos através do cálculo de funções de onda dos núcleos envolvidos na reação quase-livre em pauta. Das equações (IV.1-26) e (IV.3-8) fica claro que os valores de  $\alpha^{\ell}$ , assim determinados, são significativos para o conhecimento da estrutura do núcleo e podem discriminar entre diferentes modelos teóricos.

Por simplicidade consideramos casos no qual um próton é arrancado, como processos  $(p, 2p)$  e se a expressão (III.2-1) se aplica,  $(e, e'p)$  e  $(\pi, \pi p)$ . Mas, argumentos muito similares aos apresentados são também válidos para arrancamentos de nêutrons.

Além disso consideramos misturas entre somente duas configurações, com  $\ell+1/2$  e  $\ell-1/2$ . Casos em que um número maior de valores de  $j$  contribuam como pode ocorrer nas camadas mais altas podem ser tratados como uma generalização direta deste caso mais simples. Nestes casos se poderia definir parâmetros relativos de misturas de configurações os quais permitiriam, de maneira análoga ao caso mais simples aqui apresentado, a obtenção de informações à respeito da estrutura nuclear de núcleos mais complexos.

VII - APÊNDICES

## APÊNDICE A

## PROPRIEDADES DE SIMETRIA DAS FUNÇÕES DISTRIBUIÇÃO DE MOMENTUM

Expandindo as relações

$$m_{\ell} = \sum_{m_{\ell} = -\ell}^{\ell} m_{\ell} \left( \begin{array}{c} |g'(\vec{k})|^2 \\ \ell, m_{\ell} \end{array} (\pm) \begin{array}{c} |g'(\vec{k})|^2 \\ \ell, -m_{\ell} \end{array} \right) \quad e$$

$$m_{\ell} = \sum_{m_{\ell} = -\ell}^{\ell} \left( \begin{array}{c} |g'(\vec{k})|^2 \\ \ell, m_{\ell} \end{array} (\pm) \begin{array}{c} |g'(\vec{k})|^2 \\ \ell, -m_{\ell} \end{array} \right) \quad (A1)$$

temos que

ii)

$$m_{\ell} = \sum_{m_{\ell} = -\ell}^{\ell} m_{\ell} \left( \begin{array}{c} |g'(\vec{k})|^2 \\ \ell, m_{\ell} \end{array} + \begin{array}{c} |g'(\vec{k})|^2 \\ \ell, -m_{\ell} \end{array} \right) = -\ell \left( \begin{array}{c} |g'(\vec{k})|^2 \\ \ell, -\ell \end{array} + \begin{array}{c} |g'(\vec{k})|^2 \\ \ell, \ell \end{array} \right) + \dots$$

$$+ \ell \left( \begin{array}{c} |g'(\vec{k})|^2 \\ \ell, \ell \end{array} + \begin{array}{c} |g'(\vec{k})|^2 \\ \ell, -\ell \end{array} \right) = \text{Zero} \quad (A2)$$

2)

$$\begin{aligned}
\sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} m_\ell \left( |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|^2 - |g'_{\ell, -m_\ell}(\vec{k})|^2 \right) &= -\ell \left( |g'_{\ell, -\ell}(\vec{k})|^2 - |g'_{\ell, \ell}(\vec{k})|^2 \right) + \dots \\
+ \ell \left( |g'_{\ell, \ell}(\vec{k})|^2 - |g'_{\ell, -\ell}(\vec{k})|^2 \right) &= 2\ell \left( |g'_{\ell, \ell}(\vec{k})|^2 - |g'_{\ell, -\ell}(\vec{k})|^2 \right) + \dots \\
= 2 \sum_{m_\ell=0}^{\ell} m_\ell \left( |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|^2 - |g'_{\ell, -m_\ell}(\vec{k})|^2 \right) & \quad (A3)
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} \left( |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|^2 + |g'_{\ell, -m_\ell}(\vec{k})|^2 \right) &= \left( |g'_{\ell, -\ell}(\vec{k})|^2 + |g'_{\ell, \ell}(\vec{k})|^2 \right) + \dots \\
+ \left( |g'_{\ell, \ell}(\vec{k})|^2 + |g'_{\ell, -\ell}(\vec{k})|^2 \right) &= 2|g'_{\ell, \ell}(\vec{k})|^2 + 2|g'_{\ell, -\ell}(\vec{k})|^2 + \dots \\
= 2 \sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|^2 & \quad (A4)
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
\sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} \left( |g'_{\ell, m_\ell}(\vec{k})|^2 - |g'_{\ell, -m_\ell}(\vec{k})|^2 \right) &= \left( |g'_{\ell, -\ell}(\vec{k})|^2 - |g'_{\ell, \ell}(\vec{k})|^2 \right) + \dots \\
+ \left( |g'_{\ell, \ell}(\vec{k})|^2 - |g'_{\ell, -\ell}(\vec{k})|^2 \right) &= \text{Zero} \quad (A5)
\end{aligned}$$

## APÊNDICE B

## FUNÇÕES DE ONDA PARA DOIS E TRÊS BURACOS

A maior parte do que segue foi extraído do livro "Nuclear Shell Theory", de A. De-Shalit e I. Talmi<sup>(36)</sup>.

A função de onda de spin-isospin para dois buracos com momenta angulares  $j_1$  e  $j_2$  e isospin  $t_1$  e  $t_2$  não simetrizada é (30)

$$|j_1 j_2; JM | t_1 t_2; TM_T \rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | JM \rangle |j_1 m_1 \rangle |j_2 m_2 \rangle$$

$$\times \sum_{m_{t_1}, m_{t_2}} \langle t_1 t_2; m_{t_1} m_{t_2} | TM_T \rangle |t_1 m_{t_1} \rangle |t_2 m_{t_2} \rangle \quad (B1)$$

onde  $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ ;  $\vec{T} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$ ;  $M = m_1 + m_2$ ;  $M_T = m_{t_1} + m_{t_2}$

Propriedades de Simetria

Para função de onda de spin

$$|j_1 j_2; JM \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J} |j_2 j_1; JM \rangle \quad (B2-a)$$

e para função de onda de isospin

$$|t_1 t_2; TM_T \rangle = (-1)^{t_1 + t_2 - T} |t_2 t_1; TM_T \rangle \quad (B2-b)$$

Função de Onda para Dois Buracos, Simetrizada

I - Função de onda de spin:

A função de onda de spin, para dois buracos e simetrizada, tem a forma

$$\left(1/(2) \right)^{1/2} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | JM \rangle \left[ |j_1^{(1)} m_1^{(1)} \rangle |j_2^{(2)} m_2^{(2)} \rangle \pm |j_2^{(1)} m_2^{(1)} \rangle |j_1^{(2)} m_1^{(2)} \rangle \right] \quad (B3)$$

onde os sinais (+) e (-) são reservados para casos de funções de onda simétricas e anti-simétricas, respectivamente.

### II - Função de onda de isospin:

Da mesma forma, a função de onda de isospin para dois buracos, simétrica (+) e anti-simétrica (-) pode ser descrita como

$$\left(1/(2) \right)^{1/2} \sum_{m_{t_1}, m_{t_2}} \langle t_1 t_2; m_{t_1} m_{t_2} | TM_T \rangle \left[ |t_1^{(1)} m_{t_1}^{(1)} \rangle |t_2^{(2)} m_{t_2}^{(2)} \rangle \pm |t_2^{(1)} m_{t_2}^{(1)} \rangle |t_1^{(2)} m_{t_1}^{(2)} \rangle \right] \quad (B4)$$

### Função de Onda para Três Buracos

A função de onda para três buracos quaisquer não simetrizada é definida por (30)

$$\begin{aligned} & j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle = \sum_{m_1, m_2, M', m_3} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | J' M' \rangle \\ & \times \langle J' M'; j_3 m_3 | JM \rangle | j_1 m_1 \rangle | j_2 m_2 \rangle | j_3 m_3 \rangle \sum_{m_{t_1}, m_{t_2}, M'_T, m_{t_3}} \\ & \times \langle t_1 t_2; m_{t_1} m_{t_2} | T' M'_T \rangle \langle T' M'_T; t_3 m_{t_3} | TM_T \rangle | t_1 m_{t_1} \rangle | t_2 m_{t_2} \rangle | t_3 m_{t_3} \rangle \quad (B5) \end{aligned}$$

onde

$$\vec{J}' = \vec{J}_1 + \vec{J}_2; \quad \vec{J} = \vec{J}' + \vec{J}_3; \quad M' = m_1 + m_2; \quad M = M' + m_3; \quad \vec{T}' = \vec{t}_1 + \vec{t}_2; \quad \vec{T} = \vec{T}' + \vec{t}_3;$$

$$M'_T = m_{t_1} + m_{t_2}; \quad M_T = M'_T + m_{t_3}.$$

### Simetrização

Para anti-simetrizar a função de onda total, aplicamos o operador simetrização  $(1/n!) \sum_P (-1)^P \mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}$  é o operador permutação;  $P = \pm 1$  se a permutação for par ou ímpar, e  $n$  é o número de partículas), que atua nas coordenadas de spin e isospin, permutando-as, e obtemos, para as funções de onda de três buracos:

I - Três Buracos Não Equivalentes Caracterizados Por Diferentes Momentos Angulares  $J_i$

Dada a função de onda para três buracos não equivalentes

$$|j_1 j_2 j_3; JM | t_1 t_2 t_3; TM_T \rangle_A \quad (B6)$$

sendo  $j_1 \neq j_2 \neq j_3$  e onde  $A$  significa Anti-simetrizada, temos que

$$|j_1 j_2 j_3; JM | t_1 t_2 t_3; TM_T \rangle_A$$

$$= 1/(3!)^{1/2} \sum_P (-1)^P \mathbf{P} |j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1/6\right)^{1/2} \left\{ |j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle \right. \\
&- |j_2 j_1 (J') j_3; JM | t_2 t_1 (T') t_3; TM_T \rangle - |j_1 j_3 (J'') j_2; JM | t_1 t_3 (T'') t_2; TM_T \rangle \\
&- |j_3 j_2 (J''') j_1; JM | t_3 t_2 (T''') t_1; TM_T \rangle + |j_2 j_3 (J''') j_1; JM | t_2 t_3 (T''') t_1; TM_T \rangle \\
&\left. + |j_3 j_1 (J'') j_2; JM | t_3 t_1 (T'') t_2; TM_T \rangle \right\} \quad (B7)
\end{aligned}$$

sendo cada uma das funções  $|j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle$  definidas na equação (B5).

## II - Três Buracos Sendo Dois Equivalentes:

Devido às propriedades de simetria (B2-a) e (B2-b), podemos escrever a função de onda

$$\begin{aligned}
|j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle &= \sum_{m_1, m_2, M', m_3} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | J' M' \rangle \\
&\times \langle J' M'; j_3 m_3 | JM \rangle |j_1 m_1 \rangle |j_2 m_2 \rangle |j_3 m_3 \rangle \sum_{m_{t_1}, m_{t_2}, M'_T, m_{t_3}} \langle t_1 t_2; m_{t_1} m_{t_2} | T' M'_T \rangle \\
&\times \langle T' M'_T; t_3 m_{t_3} | TM_T \rangle |t_1 m_{t_1} \rangle |t_2 m_{t_2} \rangle |t_3 m_{t_3} \rangle \quad (B8)
\end{aligned}$$

na forma

$$|j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m_1, m_2, M', m_3} (-1)^{j_1+j_2-J'} (-1)^{t_1+t_2-T'} \langle j_2 j_1; m_2 m_1 | J' M' \rangle \\
&\times \langle J' M'; j_3 m_3 | JM \rangle |j_2 m_2\rangle |j_1 m_1\rangle |j_3 m_3\rangle \sum_{m_{t_1}, m_{t_2}, M', m_{t_3}} \langle t_2 t_1; m_{t_2} m_{t_1} | T' M' \rangle \\
&\times \langle T' M'_T; t_3 m_{t_3} | TM_T \rangle |t_2 m_{t_2}\rangle |t_1 m_{t_1}\rangle |t_3 m_{t_3}\rangle \quad (B9)
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
&|j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle = \\
&(-1)^{j_1+j_2-J'} (-1)^{t_1+t_2-T'} |j_2 j_1 (J') j_3; JM | t_2 t_1 (T') t_3; TM_T \rangle \quad (B10)
\end{aligned}$$

Mas como estamos tratando com três buracos, sendo dois equivalentes, podemos fazer, exemplificadamente,  $j_1 = j_2 = j$ , supondo que são os buracos rotulados de 1 e 2, os buracos equivalentes, de forma que teremos de (B10)

$$\begin{aligned}
&|j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle = \\
&(-1)^{2j} (-1)^{-J'} (-1)^1 (-1)^{-T'} |j_2 j_1 (J') j_3; JM | t_2 t_1 (T') t_3; TM_T \rangle \quad (B11)
\end{aligned}$$

uma vez que  $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}$ .

Como  $j$  é um número semi-inteiro, temos que

$$(-1)^{2j} (-1)^{-J'} (-1)^1 (-1)^{-T'} = (-1)^{-J'-T'} \quad (B12)$$

Como consequência, se  $J'$  e  $T'$  forem pares ou  $J'$  e  $T'$  forem ímpares, então

$$|j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle = |j_2 j_1 (J') j_3; JM | t_2 t_1 (T') t_3; TM_T \rangle \quad (B13)$$

e se fizermos o mesmo para as demais funções contidas em (B7) vemos que, como consequência de resultados similares a (B13),

$$\left(1/(3!)^{1/2}\right) \sum_P (-1)^P \mathbf{P} |j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle = \text{ZERO} \quad (B14)$$

Desta forma, os únicos valores de  $J'$  e  $T'$  possíveis para o caso de três buracos, sendo dois equivalentes, são aqueles em que

$J'$  for ímpar e  $T'$  for par

ou

$J'$  for par e  $T'$  for ímpar (B15)

Nestes casos, temos, por exemplo, que

$$|j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle = - |j_2 j_1 (J') j_3; JM | t_2 t_1 (T') t_3; TM_T \rangle \quad (B16)$$

e se fizermos o mesmo para as demais funções contidas em (B7), sempre considerando os dois primeiros buracos em cada uma das funções particulares como sendo os buracos equivalentes, teremos a seguinte função de onda anti-simetrizada para três buracos, sendo dois equivalentes

$$\left(1/(3!)^{1/2}\right) \sum_P (-1)^P \mathbf{P} |j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left(2/(6)^{1/2}\right) \left\{ |j_1=j, j_2=j(J')j_3 \neq j; JM |t_1 t_2(T')t_3; TM_T \rangle \right. \\
&- |j_1=j, j_3=j(J')j_2 \neq j; JM |t_1 t_3(T')t_2; TM_T \rangle \\
&+ \left. |j_2=j, j_3=j(J')j_1 \neq j; JM |t_2 t_3(T')t_1; TM_T \rangle \right\} \quad (B17)
\end{aligned}$$

### III - Três Buracos Equivalentes:

Para o caso de três buracos equivalentes,  $j_1=j_2=j_3=j$  e se representamos por A o operador antissimetrização

$$\begin{aligned}
&A |j_1 j_2(J')j_3; JM |t_1 t_2(T')t_3; TM_T \rangle \\
&= \left\{ |j_1=j, j_2=j(J')j_3=j; JM |t_1 t_2(T')t_3; TM_T \rangle \right. \\
&- |j_1=j, j_3=j(J')j_2=j; JM |t_1 t_3(T')t_2; TM_T \rangle \\
&+ \left. |j_2=j, j_3=j(J')j_1=j; JM |t_2 t_3(T')t_1; TM_T \rangle \right\} \quad (B18)
\end{aligned}$$

sendo  $\vec{J}' = \vec{j} + \vec{j}$ ;  $\vec{T}' = \vec{t} + \vec{t}$ ;  $\vec{J} = \vec{J}' + \vec{j}$  e  $\vec{T} = \vec{T}' + \vec{t}$ .

A segunda destas funções pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
&|j_1 j_3(J_{13})j_2; JM |t_1 t_3(T_{13})t_2; TM_T \rangle = \sum_{J_{12}, T_{12}} (-1)^{j_2 j_3 J_{13} J_{12}} (-1)^{t_2 t_3 T_{13} T_{12}} \\
&\times \left( (2J_{12}+1)(2J_{13}+1) \right)^{1/2} \left( (2T_{12}+1)(2T_{13}+1) \right)^{1/2} \begin{Bmatrix} j_1 j_2 j_{12} \\ j j_3 j_{13} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 t_2 T_{12} \\ T t_3 T_{13} \end{Bmatrix} \\
&\times |j_1 j_2(J_{12})j_3; JM |t_1 t_2(T_{12})t_3; TM \rangle = \sum_{J_{12}, T_{12}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle j_1 j_3 (J_{13}) j_2; JM | t_1 t_3 (T_{13}) t_2; TM_T | t_1 t_2 (T_{12}) t_3; TM_T | j_1 j_2 (J_{12}) j_3; JM \rangle \\ & \times | j_1 j_2 (J_{12}) j_3; JM | t_1 t_2 (T_{12}) t_3; TM_T \rangle \end{aligned} \quad (B19)$$

onde  $\vec{J}_{12} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ ;  $\vec{J}_{13} = \vec{J}_1 + \vec{J}_3$ ;  $\vec{T}_{12} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$ ;  $\vec{T}_{13} = \vec{t}_1 + \vec{t}_3$  e sendo os coeficientes desta expansão os coeficientes de Racah, que são elementos de uma matriz transformação, de um esquema de acoplamento para outro esquema de acoplamento.

Desta maneira, usando a transformação de Racah, temos de (B18)

$$\begin{aligned} A | j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle &= \left\{ | j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle \right\} \\ &- \left\{ \sum_{T'', J''} \langle t_1 t_3 (T') t_2; TM_T | t_1 t_2 (T'') t_3; TM_T \rangle \langle j_1 j_3 (J') j_2; JM | j_1 j_2 (J'') j_3; JM \rangle \right. \\ &\times | j_1 j_2 (J'') j_3; JM | t_1 t_2 (T'') t_3; TM_T \rangle \left. \right\} + \left\{ \sum_{T'', J''} \langle t_2 t_3 (T') t_1; TM_T | t_2 t_1 (T'') t_3; TM_T \rangle \right. \\ &\left. \langle j_2 j_3 (J') j_1; JM | j_2 j_1 (J'') j_3; JM \rangle | j_2 j_1 (J'') j_3; JM | t_2 t_1 (T'') t_3; TM_T \rangle \right\} \end{aligned} \quad (B20)$$

onde usamos uma representação alternativa para os coeficientes de Racah, e sendo ainda  $j_1 = j_2 = j_3 = j$ ,  $t_1 = t_2 = t_3 = t = \frac{1}{2}$ ,  $\vec{T}'' = \vec{t} + \vec{t}$ ,  $\vec{J}'' = \vec{j} + \vec{j}$ .

Se usarmos (B2a) e (B2b), a última função de onda da expressão anterior pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & | j_2 j_1 (J'') j_3; JM | t_2 t_1 (T'') t_3; TM_T \rangle = \\ & (-1)^{j_1 + j_2 - J''} (-1)^{t_1 + t_2 - T''} | j_1 j_2 (J'') j_3; JM | t_1 t_2 (T'') t_3; TM_T \rangle \end{aligned} \quad (B21)$$

Da mesma forma que para o caso de duas partículas equivalentes, os termos em  $T''J''$  que fornecem funções simétricas se anulam, permanecendo somente os termos com  $T''J''$ , que levam a funções anti-simétricas. Tais  $T''$  e  $J''$  satisfazem  $(-1)^{T''+J''} = -1$ .

Desta forma obtemos, para a função (B20)

$$\begin{aligned}
 A |j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle &= |j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle \\
 - 2 \sum_{T''+J''=\text{ímpar}} &\left( (2T'+1)(2T''+1)(2J'+1)(2J''+1) \right)^{1/2} \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & T'' \\ T & 1/2 & T' \end{Bmatrix} \\
 \times \begin{Bmatrix} j & j & J'' \\ J & j & J' \end{Bmatrix} & |j_1 j_2 (J'') j_3; JM | t_1 t_2 (T'') t_3; TM_T \rangle = \\
 \sum_{T''+J''=\text{ímpar}} &\left( \delta_{T''T'} \delta_{J''J'} - 2 \left( (2T'+1)(2T''+1)(2J'+1)(2J''+1) \right)^{1/2} \right. \\
 \times \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & T'' \\ T & 1/2 & T' \end{Bmatrix} &\left. \begin{Bmatrix} j & j & J'' \\ J & j & J' \end{Bmatrix} \right) |j_1 j_2 (J'') j_3; JM | t_1 t_2 (T'') t_3; TM_T \rangle
 \end{aligned}$$

$$\text{pois } j_1=j_2=j_3=j \text{ e } t_1=t_2=t_3=t=1/2. \quad (\text{B22})$$

Normalizando esta função de onda, temos que o fator de normalização pode ser expresso em termos dos coeficientes de parentesco fracional na forma <sup>(36)</sup>

$$nN \left[ j^{n-1} (J') j J | t^{n-1} (T') t T | j^n (J') J; t^n (T') T \right] = 1 \quad (\text{B23})$$

onde  $n = 3$  (número de núcleons) e  $N$  é o fator de normalização.

Se adotarmos a convenção de que o fator de normalização é positivo, vemos que o c.p.f. do parente principal é sempre positivo, e que

$$N^2 = \left( 3 \cdot \left[ 1 - 2(2T'+1)(2J'+1) \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & T' \\ T & 1/2 & T' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j & j & J' \\ J & j & J' \end{Bmatrix} \right] \right)^{-1} \quad (B24)$$

Comparando (B22) e (B24), vemos que a função de onda anti-simetrizada e normalizada, para três buracos equivalentes,

$$A |j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle \quad (B25)$$

pode ser escrita em termos dos coeficientes de parentesco fracionário como

$$A |j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle =$$

$$\sum_{T''+J''=\text{ímpar}} \left[ j_1 j_2 (T''; J'') j_3; TJ | \right] j^3 (T'; J') TJ \left| j_1=j, j_2=j(T''; J'') j_3=j; TJ \right\rangle$$

$$\text{sendo } j_1=j_2=j_3=j; \quad t_1=t_2=t_3=t; \quad \vec{J}''=\vec{j}+\vec{j}; \quad \vec{T}''=\vec{t}+\vec{t} \quad (B26)$$

## APÊNDICE C

FUNÇÕES DE ONDA PARA  $^{14}\text{N}$  E  $^{13}\text{C}$ Função de Onda do Estado Inicial

A função de onda spin-isospin para dois buracos com spins  $j_1$  e  $j_2$  e isospins  $t_1$  e  $t_2$ , sem levarmos em conta simetrização, segundo (B1), é definida por

$$|j_1 j_2; JM | t_1 t_2; TM_T \rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | JM \rangle |j_1 m_1 \rangle |j_2 m_2 \rangle \\ \times \sum_{m_{t_1}, m_{t_2}} \langle t_1 t_2; m_{t_1} m_{t_2} | TM_T \rangle |t_1 m_{t_1} \rangle |t_2 m_{t_2} \rangle \quad (C1)$$

onde  $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ ;  $\vec{T} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$ ;  $M = m_1 + m_2$ ;  $M_T = m_{t_1} + m_{t_2}$

Para determinar a simetria da função de onda total do estado inicial, vamos analisar as possibilidades de acoplamento para os estados  $1p_{1/2}$ ,  $1p_{3/2}$ :

Para Spin:

Como  $\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ , então

$$J = |j_1 + j_2|, \dots, |j_1 - j_2| = \begin{cases} 1, 0 & \text{se } j_1 = 1/2 \text{ e } j_2 = 1/2 \\ 3, 2, 1, 0 & \text{se } j_1 = 3/2 \text{ e } j_2 = 3/2 \\ 2, 1 & \text{se } j_1 = 1/2 \text{ e } j_2 = 3/2 \text{ ou} \\ & \text{se } j_1 = 3/2 \text{ e } j_2 = 1/2 \end{cases}$$

$$M = m_1 + m_2 = J, J - 1, \dots, -J \quad (C2)$$

Como para o estado inicial  $J_1 = 1$ , podemos notar que todas as combinações possíveis entre  $J_1 = 1/2, 3/2$  e  $j_2 = 1/2, 3/2$

fornecem entre outros resultados o valor desejado para o spin do núcleo inicial.

Para Isospin:

Como  $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ , então

$T = |t_1+t_2|, \dots, |t_1-t_2| = 1, 0$  com  $t_1=t_2=t=1/2$ ,

$$M_T = m_{t_1} + m_{t_2} = T, T-1, \dots, -T, \quad (C3)$$

sendo o isospin total do estado inicial igual a zero.

Usando a propriedade de simetria (B1-b), temos que

$$|t_1 t_2; T_i M_{T_i}\rangle = (-1)^{t_1+t_2-T_i} |t_2 t_1; T_i M_{T_i}\rangle \quad (C4)$$

Como  $T_i = 0$ ,  $t_1 = t_2 = 1/2$ , obtemos

$$|t_1 t_2; T_i M_{T_i}\rangle = - |t_2 t_1; T_i M_{T_i}\rangle \quad (C5)$$

de forma que o estado inicial de isospin do  $^{14}\text{N}$  é anti-simétrico.

Como consequência, já que a função de onda spin-isospin deve ser anti-simétrica, a função de onda de spin deve ser simétrica e de (B2-a) vemos que  $|j_1 j_2; J_i M_i\rangle$  deve portanto satisfazer

$$|j_1 j_2; J_i M_i\rangle = (-1)^{j_1+j_2-J_i} |j_2 j_1; J_i M_i\rangle = |j_2 j_1; J_i M_i\rangle$$

(C6)

Esta relação somente será correta se

$$(-1)^{j_1+j_2-J_i} = 1, \quad (C7-a)$$

ou seja, que

$$j_1+j_2-J_i = n^\circ \text{ par} = 2n, \text{ sendo } n \text{ inteiro} \quad (C7-b)$$

$$\text{Como } J_i = 1,$$

$$j_1+j_2-1 = 2n, \text{ ou } j_1+j_2 = 2n+1 = n^\circ \text{ ímpar} \quad (C8)$$

Uma vez que estamos tratando com estados  $p(\ell=1)$ , configurações com  $j_1 \neq j_2$  diferem por uma unidade ( $3/2-1/2=1$ ), e neste caso,  $j_1=j_2+1$ , de maneira que substituindo este valor em (C8) vemos que

$$2j_2 + 1 = 2n + 1, \text{ ou } j_2 = n \text{ e } j_1 = n + 1 \quad (C9)$$

Por este resultado,  $j_1$  e  $j_2$  seriam números inteiros mas na verdade tanto  $j_1$  quanto  $j_2$  são números semi-inteiros, de forma que a possibilidade  $j_1 \neq j_2$  leva a uma asserção falsa e está portanto excluída para o estado inicial, por simetria.

Assim  $j_1 = j_2 = 1/2$  ou  $j_1 = j_2 = 3/2$  e a função de onda do estado inicial pode ser escrita de maneira geral como uma combinação linear destas configurações na forma

$$|i\rangle = a_i \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; J_i=1, M_i \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2}, T_i=0, M_{T_i} \rangle_A + b_i \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2}; J_i=1, M_i \right| \frac{1}{2} \frac{1}{2}, T_i=0, M_{T_i} \rangle_A$$

(C10)

sendo as funções  $\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; J_i=1, M_i \right| \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_i=0, M_{T_i} \right\rangle_A e \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2}; J_i=1, M_i \right| \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_i=0, M_{T_i} \right\rangle_A$  normalizadas, simetrizadas e dadas por produtos entre funções respectivamente simétricas e anti-simétricas nas formas descritas pelas equações (B3) e (B4); além disso, é bom ressaltar que os coeficientes  $a_1$  e  $b_i$  descrevem o grau probabilístico de participação de cada um dos estados particulares no processo.

### Função de Onda do Estado Final

Consideramos o estado final como sendo descrito pela função de onda de três buracos de momenta angulares orbitais iguais a 1 e da mesma forma sendo estes buracos que contribuem para a formação do spin e isospin do núcleo residual ( $^{13}\text{O}$ ), que tem spin total e isospin total iguais a  $1/2$  ( $j_f = 1/2, T_f = 1/2$ ).

A função de onda para três buracos quaisquer com momenta angulares totais  $j_1, j_2, j_3$  e isospins  $t_1, t_2$  e  $t_3$ , desconsiderando simetrização, é definida, segundo (B5), por

$$\begin{aligned} |j_1 j_2 (J') j_3; JM | t_1 t_2 (T') t_3; TM_T \rangle &= \sum_{m_1, m_2, m_3} \langle j_1 j_2; m_1 m_2 | J' M' \rangle \\ &\langle J' M'; j_3 m_3 | JM \rangle | j_1 m_1 \rangle | j_2 m_2 \rangle | j_3 m_3 \rangle \sum_{m_{t_1}, m_{t_2}, m_{t_3}} \langle t_1 t_2; m_{t_1} m_{t_2} | T' M'_T \rangle \\ &\langle T' M'_T; t_3 m_{t_3} | TM_T \rangle | t_1 m_{t_1} \rangle | t_2 m_{t_2} \rangle | t_3 m_{t_3} \rangle \end{aligned} \quad (C11)$$

onde  $\vec{J}' = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ ;  $\vec{J} = \vec{J}' + \vec{j}_3$ ;  $M' = m_1 + m_2$ ;  $M = M' + m_3$ ;  $\vec{T}' = \vec{t}_1 + \vec{t}_2$ ;  $\vec{T} = \vec{T}' + \vec{t}_3$ ;

$$M'_T = m_{t_1} + m_{t_2}; \quad M_T = M'_T + m_{t_3}.$$

Para expressar a função de onda total do estado final devemos levar em conta que esta pode ser formada por combinações lineares de funções de onda que descrevem estados de três buracos, sendo dois deles equivalentes e estados de três buracos totalmente equivalentes.

O diagrama abaixo pode dar uma idéia destas possibilidades:

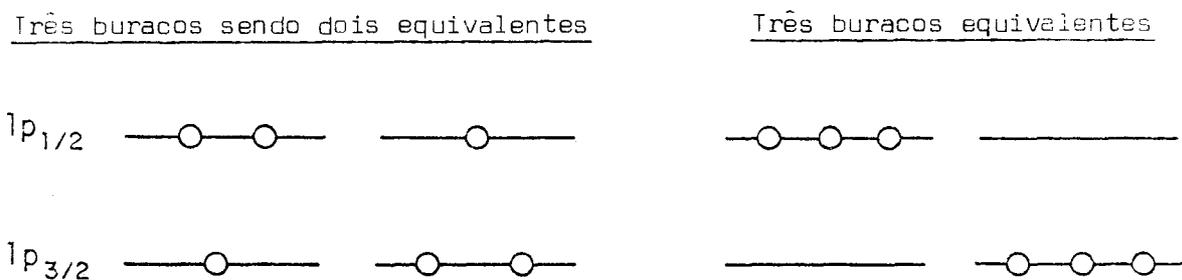


Diagrama (C1) - Possibilidades de ocupação por três partículas dos estados com  $j=1/2$  e com  $j=3/2$ .

Desta forma, vamos analisar as possibilidades de acoplamentos para cada um destes dois casos e depois expressaremos a função de onda total do núcleo final como uma combinação linear das funções que descrevem estas duas situações possíveis (ver Diagrama C1).

I - Estado com três buracos sendo dois deles equivalentes

Como  $\vec{J}'_f = \vec{j} + \vec{j}$ ,  $J_f = 1/2$  para o estado fundamental e  $J_f = 3/2$  para o primeiro estado excitado de  $^{13}\text{C}$ , então se

$$j_1 = j_2 = j = 1/2 \quad \text{e} \quad j_3 = j' = 3/2 ,$$

$$j_1 = j_3 = j = 1/2 \quad \text{e} \quad j_2 = j' = 3/2 ,$$

$$j_2 = j_3 = j = 1/2 \quad \text{e} \quad j_1 = j' = 3/2, \quad (\text{C12})$$

obtemos  $J'_f = 1, 0$ , sendo  $j$  o momentum angular dos buracos equivalentes. Disso resulta que, uma vez que  $\vec{J}_f = \vec{J}'_f + \vec{j}'$ , sendo  $j'$  o momentum angular do buraco não equivalente, se

$$J'_f = 1 \quad \text{e} \quad j' = 3/2 \quad \text{temos} \quad J_f = 5/2, 3/2, 1/2, \quad (\text{C13})$$

correspondendo além de outra possibilidade ao primeiro estado excitado e ao estado fundamental do  $^{13}\text{C}$ , e se

$$J'_f = 0 \quad \text{e} \quad j' = 3/2, \quad J_f = 3/2 \quad (\text{C14})$$

que é o primeiro estado excitado.

Por outro lado, se

$$j_1 = j_2 = j = 3/2 \quad \text{e} \quad j_3 = j' = 1/2,$$

$$j_1 = j_3 = j = 3/2 \quad \text{e} \quad j_2 = j' = 1/2,$$

$$j_2 = j_3 = j = 3/2 \quad \text{e} \quad j_1 = j' = 1/2, \quad (\text{C15})$$

obtemos que  $J'_f = 3, 2, 1, 0$  e daí então, se

$$J'_f = 3 \quad \text{e} \quad j' = 1/2, \quad J_f = 7/2, 5/2,$$

$$J'_f = 2 \quad \text{e} \quad j' = 1/2, \quad J_f = 5/2, 3/2 \quad (\text{C16})$$

que correspondem ao primeiro estado excitado e a outros estados possíveis do núcleo residual.

Se

$$J'_f = 1 \quad \text{e} \quad j' = 1/2, \quad J_f = 3/2, 1/2 \quad (\text{C17})$$

valores que caracterizam o primeiro estado excitado e o estado fundamental do  $^{13}\text{C}$ , respectivamente.

Por último, se

$$J'_f = 0 \text{ e } j' = 1/2 \text{ obtemos } J_f = 1/2 \quad (\text{C18})$$

que é o estado fundamental do  $^{13}\text{C}$ .

Além disso, o isospin total do núcleo residual é igual a  $1/2$  ou seja,  $T_f = 1/2$  e uma vez que  $\vec{T}'_f = \vec{t} + \vec{t}$  para dois buracos equivalentes com isospins iguais a  $t$ , temos que

$$T'_f = 1, 0 \quad (t = 1/2) \quad (\text{C19})$$

e como  $\vec{T}_f = \vec{T}'_f + \vec{t}'$  sendo  $t'$  o isospin do buraco não equivalente, obtemos, se

$$T'_f = 1 \text{ e } t' = 1/2, T_f = 3/2, 1/2,$$

$$T'_f = 0 \text{ e } t' = 1/2, T_f = 1/2 \quad (\text{C20})$$

Portanto,  $T'_f = 1$  e  $T'_f = 0$  contribuem para dar  $T_f = 1/2$ . No entanto de (B15) vemos que, devido a razões de simetria, as únicas funções de três buracos, sendo dois equivalentes, que contribuem para a função de onda total são aquelas para as quais

$$J'_f \text{ for ímpar e } T'_f \text{ par}$$

ou

$$J'_f \text{ for par e } T'_f \text{ ímpar} \quad (\text{C21})$$

de maneira que uma análise dos resultados anteriores mostra que, para o caso de dois buracos equivalentes na configuração

com  $j = 1/2$  e um não equivalente na configuração com  $j' = 3/2$  há um estado possível, com  $J'_f = 1, T'_f = 0$  se o  $^{13}\text{C}$  ficar no estado fundamental e dois estados possíveis, com  $J'_f = 0, T'_f = 1$  e com  $J'_f = 1, T'_f = 0$  se o  $^{13}\text{C}$  ficar no primeiro estado excitado, como consequência da reação quase-livre.

Já para dois buracos equivalentes na configuração com  $j$  igual a  $3/2$  e um não equivalente na configuração com  $j' = 1/2$  há dois estados possíveis, com  $J'_f = 1, T'_f = 0$  e  $J'_f = 0, T'_f = 1$  se o núcleo residual ficar no estado fundamental e dois estados possíveis, com  $J'_f = 1, T'_f = 0$  e  $J'_f = 2, T'_f = 1$  se o núcleo residual ficar no primeiro estado excitado.

Desta forma, a função de onda total, para três buracos sendo dois equivalentes, para o estado fundamental do  $^{13}\text{C}$  pode ser expressa de maneira geral como uma combinação linear das seguintes funções simetrizadas e normalizadas

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2}; J_f = 1/2, M_f \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = 1/2, M_{T_f} \right\rangle_A \quad e \\ & \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2}; J_f = 1/2, M_f \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = 1/2, M_{T_f} \right\rangle_A \quad (C22) \end{aligned}$$

sendo que a primeira tem  $J'_f = 1$  e  $T'_f = 0$  enquanto a segunda deve ser expressa por sua vez como uma combinação linear de estados com  $J'_f = 1, T'_f = 0$  e estados com  $J'_f = 0, T'_f = 1$  e sendo cada uma das funções  $|jj(J')j'; JM |tt(T')t'; TM_T\rangle_A$  dadas por (B17) como

$$|jj(J')j'; JM|tt(T')t'; TM_T\rangle_A =$$

$$\left(\frac{1}{(3!)}\right)^{1/2} \sum_P (-1)^P \mathbf{P} |j_1 j_2 (J') j_3; JM|t_1 t_2 (T') t_3; TM_T\rangle_A =$$

$$\left(\frac{2}{(6)}\right)^{1/2} \left\{ |j_1=j, j_2=j(J') j_3=j'; JM|t_1 t_2 (T') t_3; TM_T\rangle \right.$$

$$- |j_1=j, j_3=j(J') j_2=j'; JM|t_1 t_3 (T') t_2; TM_T\rangle$$

$$\left. + |j_2=j, j_3=j(J') j_1=j'; JM|t_2 t_3 (T') t_1; TM_T\rangle \right\} \quad (C23)$$

onde  $\vec{j}' = \vec{j} + \vec{j}$ ;  $\vec{T}' = \vec{t} + \vec{t}$  e  $t_1 = t_2 = t_3 = 1/2$ .

Como exemplo, podemos expressar a primeira delas na forma

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2}; J_f = \frac{1}{2}, M_f \right| \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right\rangle_A$$

$$= \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} (J'_f=1) \frac{3}{2}; J_f = \frac{1}{2}, M_f \right| \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} (T'_f=0) \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right\rangle_A$$

$$= \left(\frac{1}{(3!)}\right)^{1/2} \sum_P (-1)^P \mathbf{P} |j_1 j_2 (J'_f=1) j_3; J_f = \frac{1}{2}, M_f|t_1 t_2 (T'_f=0) t_3; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f}\rangle$$

(C24)

Após aplicação do operador permutação, obtemos, usando as propriedades (B11)

$$\left(\frac{2}{(6)}\right)^{1/2} \left\{ \left| j_1 = \frac{1}{2}, j_2 = \frac{1}{2} (J'_f=1) j_3 = \frac{3}{2}; J_f = \frac{1}{2}, M_f \right| \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right\rangle \right.$$

$$- \left| j_1 = \frac{1}{2}, j_3 = \frac{1}{2} (J'_f=1) j_2 = \frac{3}{2}; J_f = \frac{1}{2}, M_f \right| \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right\rangle$$

$$\left. + \left| j_2 = \frac{1}{2}, j_3 = \frac{1}{2} (J'_f=1) j_1 = \frac{3}{2}; J_f = \frac{1}{2}, M_f \right| \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right\rangle \right\}$$

onde  $t_1 = t_2 = t_3 = t = 1/2$ .

Para o primeiro estado excitado, pode-se expressar de maneira geral a função de onda para o caso de três buracos, sendo dois equivalentes, como uma combinação linear das funções

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2}; J_f = \frac{3}{2}, M_f \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right\rangle_A \quad e \\ & \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2}; J_f = \frac{3}{2}, M_f \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right\rangle_A \end{aligned} \quad (C26)$$

sendo que a primeira deve ser expressa por sua vez como uma combinação linear de estados com  $J'_f = 1, T'_f = 0$  e  $J'_f = 0, T'_f = 1$  enquanto a segunda deve ser expressa como uma combinação linear dos estados com  $J'_f = 1, T'_f = 0$  e  $J'_f = 2, T'_f = 1$  e sendo como uma das funções

$$|jj(J')j'; JM | tt(T')t'; TM_T \rangle_A \quad (C27)$$

definidas por (B17).

## II - Estados com três buracos equivalentes

Para três buracos equivalentes, como  $\vec{J}_f'' = \vec{j} + \vec{j}$ ;  $J_f = J_f'' + j$  (B26);  $J_f = 1/2$  para o estado fundamental e  $J_f = 3/2$  para o primeiro estado excitado do  $^{13}\text{C}$  e  $J_f'' + T_f'' = \text{ímpar}$  invocando as razões de simetria (B15), as únicas funções

$$|jj(J')j; JM | tt(T')t; TM_T \rangle_A, \quad \vec{J}' = \vec{j} + \vec{j}; \vec{T}' = \vec{t} + \vec{t} \quad (C28)$$

possíveis, são aquelas para as quais  $J_f''$  e  $T_f''$  satisfazem

$$(-1)^{J_f'' + T_f''} = -1 \quad (C29)$$

pois desta forma temos que, se  $J_f'' + T_f'' = \text{ímpar} = 2n + 1$ , então de acordo com (C29)

$$(-1)^{2n+1} = -1 \quad (C30)$$

Assim se  $j_1 = j_2 = j_3 = j = 1/2$  então  $J_f'' = 1, 0$  e desta forma, se

$$J_f'' = 1 \quad \text{temos} \quad J_f = 3/2, 1/2 \quad (C31)$$

que correspondem ao primeiro estado excitado e estado fundamental respectivamente do  $^{13}\text{C}$  e se

$$J_f'' = 0 \quad \text{obtemos} \quad J_f = 1/2 \quad (C32)$$

que é o estado fundamental do  $^{13}\text{C}$ .

Da mesma forma, como  $t_1 = t_2 = t_3 = t = 1/2$ , então  $T_f'' = 1, 0$  (se  $T_f'' = 1$ ,  $T_f = 3/2, 1/2$  e se  $T_f'' = 0$ ,  $T_f = 1/2$ ) e de (B15) temos dois casos possíveis para o estado fundamental e somente um caso possível para o primeiro estado excitado do núcleo final, os estados com  $J_f'' = 1, T_f'' = 0$  e  $J_f'' = 0, T_f'' = 1$  e o estado com  $J_f'' = 1, T_f'' = 0$ , respectivamente.

Além disso,  $\vec{J}_f = \vec{J}_f' + \vec{j}$  e como  $j = 1/2$  e  $\vec{J}_f' = \vec{j} + \vec{j}$  temos que  $J_f' = 1, 0$  o que implica em que, se

$$J_f' = 1, \quad J_f = 3/2, 1/2 \quad (C33)$$

que são o primeiro estado excitado e estado fundamental, e se

$$J'_f = 0, \quad J_f = 1/2 \quad (C34)$$

que corresponde ao estado fundamental de  $^{13}\text{C}$ .

Também temos que  $\vec{T}_f = \vec{T}'_f + \vec{t}$  sendo  $T'_f = 1,0$  e se

$$T'_f = 1, \quad T_f = 3/2, 1/2, \quad ,$$

$$T'_f = 0, \quad T_f = 1/2, \quad , \quad (C35)$$

de forma que estados com  $J'_f = 1,0$  e  $T'_f = 1,0$  também contribuem para a função de onda do estado fundamental, enquanto estados com  $J'_f = 1$  e  $T'_f = 1,0$  contribuem para a função de onda do primeiro estado excitado do núcleo residual, uma vez que agora, para três buracos equivalentes, não há restrições para estados possíveis com  $J'$  e  $T'$  como há para o caso de duas partículas equivalentes para as quais  $J' + T' = \text{ímpar}$ .

Para três buracos no estado  $1p_{3/2}$  temos que  $j_1 = j_2 = j_3 = j = 3/2$  e obtemos  $J''_f = 3, 2, 1, 0$  o que faz com que, se

$$J''_f = 3, \quad J_f = 9/2, 7/2, 5/2, 3/2,$$

$$J''_f = 2, \quad J_f = 7/2, 5/2, 3/2, 1/2, \quad (C36)$$

$$J''_f = 1, \quad J_f = 5/2, 3/2, 1/2,$$

$$J''_f = 0, \quad J_f = 3/2.$$

Como  $t_1 = t_2 = t_3 = t = 1/2$ , devido a (B15) temos dois casos possíveis para o estado fundamental e quatro casos possíveis para o primeiro estado excitado, os estados com  $J''_f = 2$ ,  $T''_f = 1$  e  $J''_f = 1$ ,  $T''_f = 0$  e os estados com  $J''_f = 3$ ,  $T''_f = 0$ ;  $J''_f = 2$ ,  $T''_f = 1$ ;  $J''_f = 1$ ,  $T''_f = 0$  e  $J''_f = 0$ ,  $T''_f = 1$ , respectivamente.

Além disso, como  $J'_f = 3, 2, 1, 0$  e  $T'_f = 1, 0$ , se

$$J'_f = 3 \quad , \quad J_f = 9/2, 7/2, 5/2, 3/2 \quad ,$$

$$J'_f = 2 \quad , \quad J_f = 7/2, 5/2, 3/2, 1/2$$

$$J'_f = 1 \quad , \quad J_f = 5/2, 3/2, 1/2 \quad ,$$

$$J'_f = 0 \quad , \quad J_f = 3/2. \quad (C37)$$

Também, se  $T'_f = 1$ , então  $T_f = 3/2, 1/2$  e se  $T'_f = 0$ , conseqüentemente  $T_f = 1/2$ , de forma que os estados com  $J'_f = 2, 1$  e  $T'_f = 1, 0$  também contribuem para o estado fundamental enquanto estados com  $J'_f = 3, 2, 1, 0$  e  $T'_f = 1, 0$  contribuem para o primeiro estado excitado de  $^{13}\text{C}$  pois, repetimos, agora não há restrição alguma para  $J'_f$  e  $T'_f$  e sim para  $J''_f$  e  $T''_f$ .

A função de onda total para três buracos equivalentes, para o estado fundamental do núcleo residual pode então ser expressa de maneira geral por uma combinação linear das seguintes funções, já simetrizadas e normalizadas.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; J_f = \frac{1}{2}, M_f \mid \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right\rangle_A \quad e \\ & \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}; J_f = \frac{1}{2}, M_f \mid \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right\rangle_A \quad (C38) \end{aligned}$$

sendo que a primeira deve ser escrita, por sua vez, como uma combinação linear de estados com  $J'_f = 1, 0$  e  $T'_f = 1, 0$  na forma  $\left| jj(J'_f)j; JM \mid tt(T'_f)t; TM_T \right\rangle_A$ , enquanto a segunda deve ser expressa como uma combinação linear de estados com  $J'_f = 2, 1$  e  $T'_f = 1, 0$  e sendo cada uma destas funções dadas, segundo (B26) por

$$\begin{aligned}
& |jj(J')j; JM|tt(T')t; TM_T \rangle_A \\
& = A |j_1=j, j_2=j(J')j_3=j; JM|t_1=t, t_2=t(T')t_3=t; TM_T \rangle \\
& = \sum_{J''+T''=\text{ímpar}} \left[ |j_1=j, j_2=j(T'', J'')j_3=j; TJ \rangle \right] j^3 [T', J'] TJ \\
& \times |j_1=j, j_2=j(T'', J'')j_3=j; TJ \rangle \tag{C39}
\end{aligned}$$

isto é, como uma combinação linear dos estados com  $J''$  e  $T''$  e sendo que, para a primeira das equações (C39)  $J_f'' = 1$ ,  $T_f'' = 0$  e  $J_f'' = 0$ ,  $T_f'' = 1$  e para a segunda  $J_f'' = 2$ ,  $T_f'' = 1$  e  $J_f'' = 1$ ,  $T_f'' = 0$ .

Para o primeiro estado excitado, a função de onda total para os três buracos equivalentes pode ser escrita de forma geral como uma combinação linear das funções já simetrizadas e normalizadas

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; J_f = \frac{3}{2}; M_f \right| \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right\rangle_A \text{ e} \\
& \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}; J_f = \frac{3}{2}, M_f \right| \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right\rangle_A \tag{C40}
\end{aligned}$$

sendo que a primeira tem  $J_f' = 1$ ,  $T_f' = 1, 0$ , enquanto que a segunda deve ser expressa como uma combinação linear de estados com  $J_f' = 3, 2, 1, 0$  e  $T_f' = 1, 0$ , sendo cada um dos estados

$$|jj(J')j; JM|tt(T')t; TM_T \rangle_A$$

expressos na forma (B26); além disso, a primeira das equações (C41) tem  $J_f'' = 1$ ,  $T_f'' = 0$ , enquanto a segunda equação tem  $J_f'' = 3$ ,

$T_f'' = 0$ ;  $J_f'' = 2$ ,  $T_f'' = 1$ ;  $J_f'' = 1$ ,  $T_f'' = 0$  e  $J_f'' = 0$ ,  $T_f'' = 1$ .

Escrevemos de maneira geral a função de onda total do estado fundamental de  $^{13}\text{C}$ , levando em conta todos estes resultados, como

$$\begin{aligned}
 |f\rangle_{ef} = & \left\{ c_f^{ef} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2}; J_f = \frac{1}{2}, M_f \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right. \right. \right. \\
 & + d_f^{ef} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2}; J_f = \frac{1}{2}, M_f \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right. \right. \\
 & + h_f^{ef} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; J_f = \frac{1}{2}, M_f \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + v_f^{ef} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}; J_f = \frac{1}{2}, M_f \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right. \right. \right. \right\} \quad (C41)
 \end{aligned}$$

e expressamos de maneira geral o primeiro estado excitado do  $^{13}\text{C}$  como

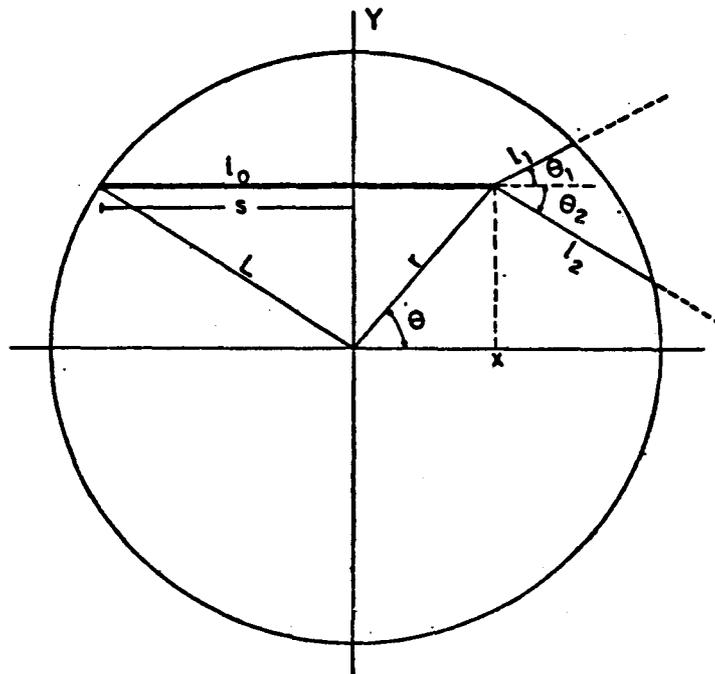
$$\begin{aligned}
 |f\rangle_{ee} = & \left\{ c_f^{ee} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2}; J_f = \frac{3}{2}, M_f \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right. \right. \right. \\
 & + d_f^{ee} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2}; J_f = \frac{3}{2}, M_f \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right. \right. \\
 & + h_f^{ee} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; J_f = \frac{3}{2}, M_f \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + v_f^{ee} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}; J_f = \frac{3}{2}, M_f \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}; T_f = \frac{1}{2}, M_{T_f} \right. \right. \right. \right\} \quad (C42)
 \end{aligned}$$

onde as letras ef indicam o estado fundamental e as letras ee indicam o primeiro estado excitado do núcleo final ( $^{13}\text{C}$ ).

## APÊNDICE D

Trajetórias Clássicas dos Prótons no Interior do Núcleo<sup>†</sup>

## I - Colisão no interior do núcleo

(Fig. D1) - Trajetória clássica  $l_0$  para colisão no interior do núcleo.

Da figura D1 é fácil notar-se que, se considerarmos o núcleo como sendo esférico, e o espalhamento quase-livre, coplanar, para uma colisão que ocorra no ponto  $(r, \theta, \phi)$ , obtemos

$$L^2 = S^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \quad (D1)$$

o que implica em que

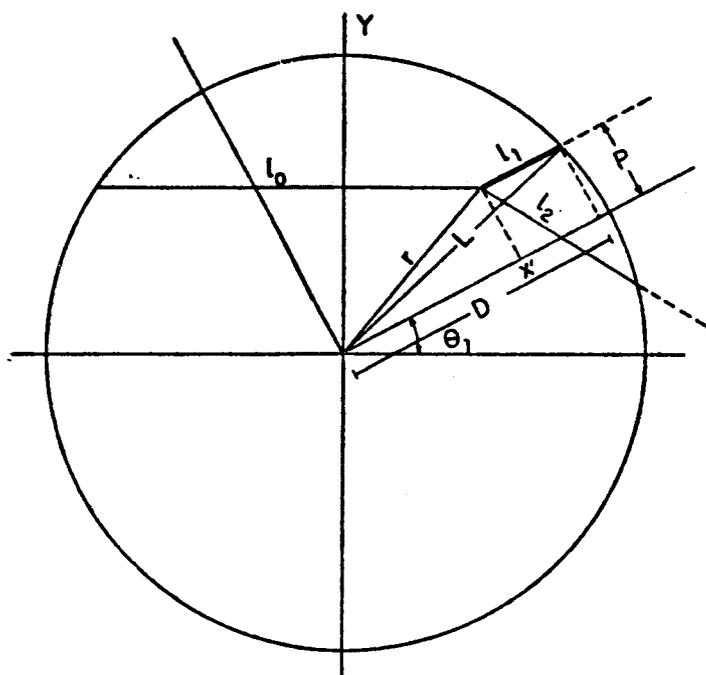
$$S = \sqrt{L^2 - r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} \quad (D2)$$

<sup>†</sup> As considerações apresentadas neste apêndice baseiam-se no exposto na referência (11).

Desta forma, a trajetória clássica  $l_0$  da partícula incidente, no interior do núcleo é

$$l_0 = r \cos(\theta) + S = r \cos(\theta) + \sqrt{L^2 - r^2 \sin^2(\theta)} \quad (D3)$$

Para encontrar  $l_1$  fazemos uma rotação de um ângulo  $\theta_1$  do referencial de forma que o eixo das abcissas fique paralelo à  $l_1$ .



(Fig. D2) - Trajetória clássica  $l_1$  para colisão no interior do núcleo.

Da figura D2 temos que

$$D^2 = L^2 - p^2 \quad (D4)$$

sendo  $P$  o parâmetro de impacto para a colisão. Neste caso, a trajetória clássica  $l_1$  é dada por

$$l_1 = D - x' = \sqrt{L^2 - p^2} - x' \quad (D5)$$

onde  $X'$  é igual a

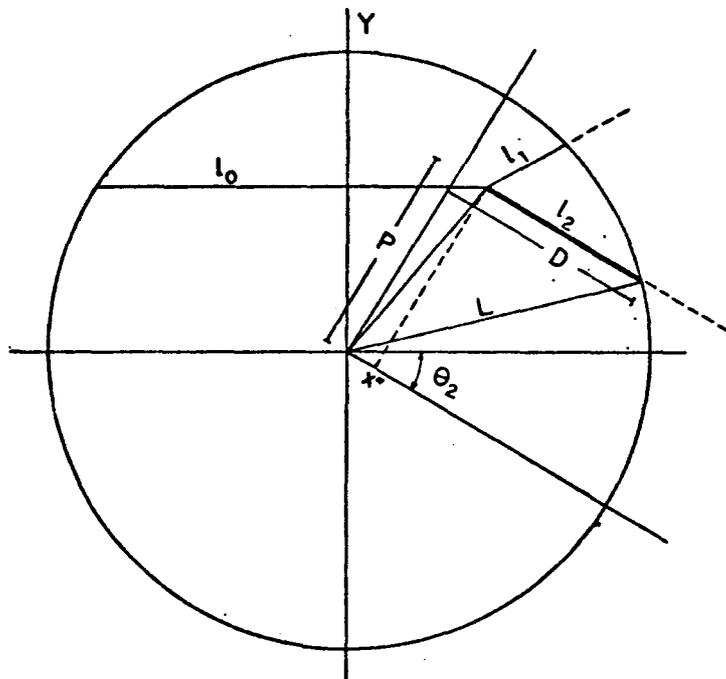
$$X' = X \cos(\theta_1) + Y \sin(\theta_1) \quad (D6)$$

$$= r \cos(\theta) \cos(\theta_1) + r \sin(\theta) \sin(\theta_1) \cos(\phi)$$

e  $P$  a

$$P = \sqrt{r^2 - (X')^2} \quad (D7)$$

Para encontrar  $\ell_2$  fazemos nova rotação do sistema de coordenadas, de um ângulo  $-\theta_2$ , de maneira que, agora, o eixo das abcissas fique paralelo a  $\ell_2$ .



(Fig. D3) - Trajetória clássica  $\ell_2$  para colisão no interior do núcleo.

Da figura D3

$$(D')^2 = L^2 - (P')^2 \quad (D8)$$

sendo  $P'$  o parâmetro de impacto.

A trajetória clássica  $l_2$  é, então

$$l_2 = D' - X'' = \sqrt{L^2 - (P')^2} - X'' \quad (D9)$$

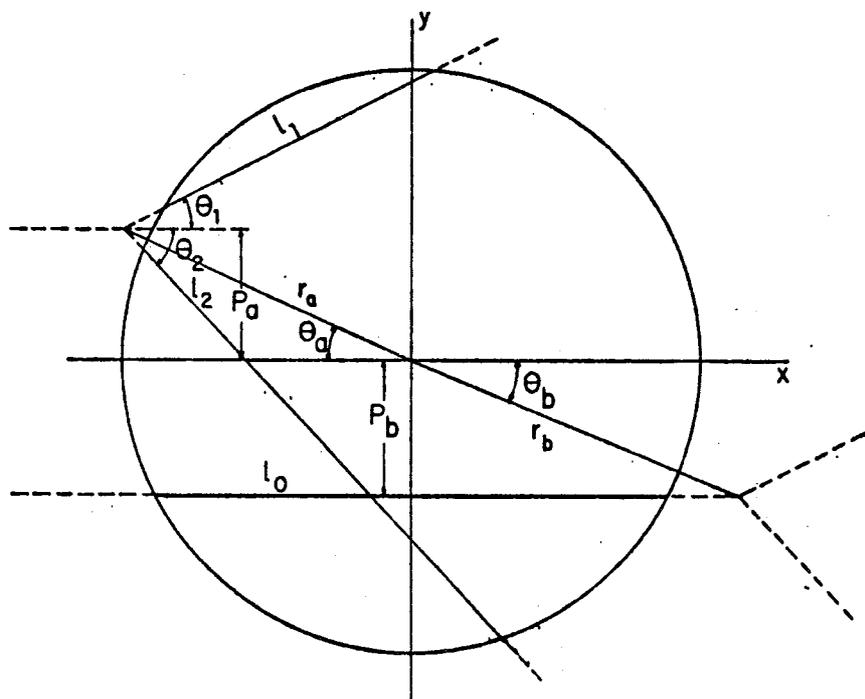
$X''$  é expresso por

$$\begin{aligned} X'' &= X \cos(-\theta_2) - Y \sin(-\theta_2) \\ &= r \cos(\theta) \cos(\theta_2) + r \sin(\theta) \sin(\theta_2) \cos(\phi) \end{aligned} \quad (D10)$$

e  $P'$  por

$$P' = \sqrt{r^2 - (X'')^2} \quad (D11)$$

II - Colisão no exterior do núcleo



(Fig. D4) - Trajetória clássica  $l_0$  para colisão no exterior do núcleo.

Da figura D4, o parâmetro de impacto  $P$  para uma colisão no ponto  $(r, \theta, \phi)$  é definido como

$$P = \sqrt{r^2 \sin^2(\theta)}$$

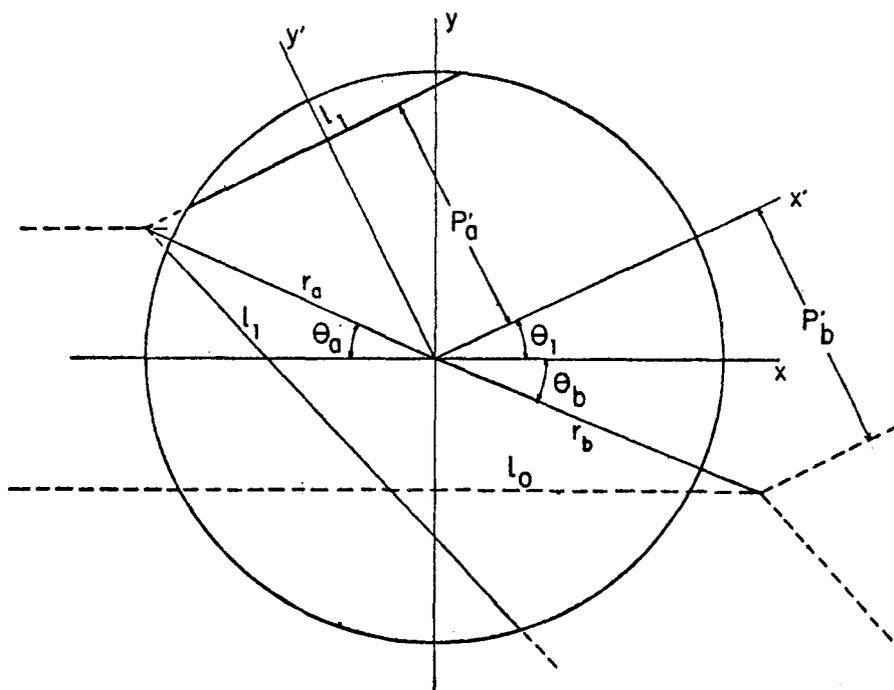
Se o parâmetro de impacto for maior que o raio nuclear ( $P > L$ ) ou  $X < 0$  então

$$l_0 = 0$$

Porém, se  $P < L$  e  $X > 0$ , a trajetória clássica  $l_0$  é expressa por

$$l_0 = 2\sqrt{L^2 - P^2}$$

Para analisar a trajetória  $l_1$ , fazemos uma rotação do referencial de um ângulo  $\theta_1$ , de maneira que o eixo horizontal se torne paralelo à trajetória 1.



(Fig. D5) - Trajetória clássica  $l_1$  para colisão no exterior do núcleo.

Da figura D5, o parâmetro de impacto  $P'$  é definido por

$$P' = \sqrt{r^2 - (X')^2}$$

sendo  $X'$  igual a

$$\begin{aligned} X' &= X \cos(\theta_1) + Y \sin(\theta_1) \\ &= r \cos(\theta) \cos(\theta_1) + r \sin(\theta) \sin(\theta_1) \cos \phi \end{aligned}$$

Se o parâmetro de impacto  $P'$  for maior que o raio do núcleo ( $P' > L$ ) ou se  $X' > 0$

$$\ell_1 = 0$$

mas, se  $P' < L$  e  $X' < 0$ , temos que

$$\ell_1 = 2 \sqrt{L^2 - (P')^2}$$

Para analisar  $\ell_2$ , fazemos outra rotação do sistema de coordenadas de um ângulo  $-\theta_2$  de forma a que o eixo horizontal se torne paralelo à trajetória 2.

Da figura D6, a seguinte expressão define o parâmetro do impacto  $P''$

$$P'' = \sqrt{r^2 - (X'')^2}$$

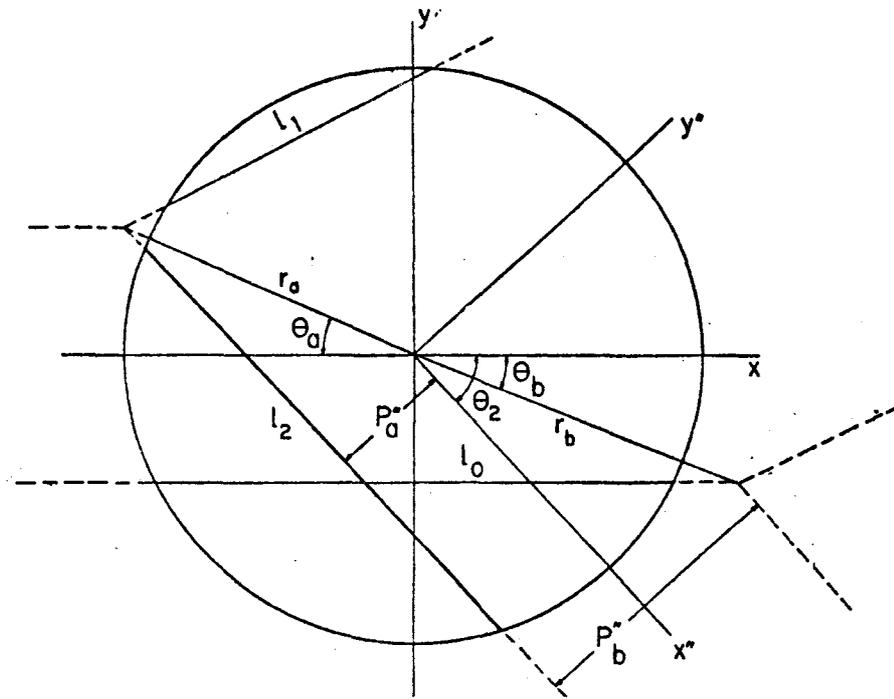
onde  $X''$  é dado por

$$\begin{aligned} X'' &= X \cos(-\theta_2) - Y \sin(-\theta_2) \\ &= r \cos(\theta) \cos(\theta_2) + r \sin(\theta) \sin(\theta_2) \cos \phi \end{aligned}$$

Se o parâmetro de impacto  $P''$  for maior que  $L$ ,

raio do núcleo ( $P'' > L$ ) ou  $X'' > 0$

$$l_2 = 0$$



(Fig. D6) - Trajetória clássica  $l_2$  para colisão no exterior do núcleo.

Por outro lado, se  $P'' < L$  e  $X'' < 0$

$$l_1 = 2 \sqrt{L^2 - (P'')^2}$$

## VIII - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. HAXEL, O.; JENSEN, J.H.D.; SUESS, H.E. Phys. Rev., 75 (1949) 1766.
2. MAYER, M.G. Phys. Rev., 75 (1949) 1969.
3. GLADIS, J.B.; HESS, W.N.; MAYER, B.J. Phys. Rev., 87 (1952) 425.  
CHAMBERLAIN, O. & SEGRÉ, E. Phys. Rev., 87 (1952) 81.
4. MARIS, Th.A.J.; HILLMAN, P.; TYRÉN, H. Nucl. Phys., 7 (1958) 1, 10.  
TYRÉN, H. & MARIS, Th.A.J. Nucl. Phys. 7 (1958) 24.
5. MARIS, Th.A.J. Nucl. Phys., 9 (1958/1959) 577.
6. JACOB, G. & MARIS, Th.A.J. Nucl. Phys., 31 (1962) 139, 152.
7. AMALDI Jr., U.; CAMPUS VENUTI, G.; CORTELLESSA, G.; FRONTEROTTA, C.; REALE, A.; SALVATORI, P.; HILMAN, P. Phys. Rev. Lett., 13 (1964) 341.  
AMALDI, Jr., U.; CAMPOS VENUTI, G.; CORTELESSA, G.; De SANCTIS, E.; FRULLANI, S.; LOMBARD, R.; SALBATORI, P. Phys. Lett., 22 (1966) 593.
8. BUSSIÈRE, A.; MDNGEY, J.; HO, Phan Xuan; PRION, M.; SICK, J. Lett. Nuovo Cimento, 2 (1971) 1149.
9. GOTTSCHALK, B. & STRAUCH, K. Phys. Rev., 120 (1960) 1005.  
GOTTSCHALK, B.; STRAUCH, K.; WANG, K.H. Quasi-elastic pp scattering in fluorine and some "medium" nuclei. In: GUGENBERGER, P. Comptes Rendus du Congrès International de Physique Nucléaire. Paris, Centre National de la Recherche Scientifique, 1964, v.2, p.324.

10. GOODING, T.J. & PUCH, H.G. Nucl.Phys., 18 (1960) 46.  
PUGH, H.G. & RILEY, K.F. Binding-energies of proton states in light nuclei. In: BIRKS, J.B. ed. Proceedings of the Rutherford jubilee international conference. London, Heywood, 1961, p.195.
11. HERSCOVITZ, V.E.; JACOB, G.; MARIS, Th.A.J.; SCHNEIDER, C. Rev.Bras.Fís. 1 (1971) 43.  
SCHNEIDER, C. Efeitos de distorção em espalhamento quase-livre. Porto Alegre, Instituto de Física, 1971. (Dissertação de mestrado).
12. KURATH, D. Phys. Rev., 101 (1956) 216.
13. JACOB, G.; MARIS, Th.A.J.; SCHNEIDER, C.; TEODORO, M.R. Phys.Lett. B. 45 (1973) 181.  
JACOB, G.; MARIS, Th.A.J.; SCHNEIDER, C.; TEODORO, M.R. Nucl.Phys. A, 257 (1976) 517.
14. TEODORO, M.R. Um modelo de espalhamento quase-livre com prótons polarizados. Porto Alegre, Instituto de Física, 1976. (Tese de doutorado)
15. BERGGREN, T. & TYRÉN, H. Ann.Rev.Nucl.Sci., 16 (1966) 153.
16. JACOB, G. & MARIS, Th.A.J. Rev.Mod.Phys., 45 (1973) 6.
17. JACOB, G. & MARIS, Th.A.J. Rev.Mod.Phys., 38 (1966) 121.
18. SERBER, R. Phys.Rev., 72 (1947) 1114.
19. CHEW, G.F. Phys.Rev., 80 (1950) 196.
20. GOLDBERGER, M.L. Phys.Rev., 74 (1948) 1269.  
YAMAGUCHI, Y. Prog. of Theor. Phys. 5 (1950) 332.
21. JACOB, G. Espalhamento quase-livre e estrutura nuclear. Porto Alegre, Instituto de Física, 1964.(Tese de doutorado)
22. CLEMENTEL, E. & VILLI, C. Nuovo Cimento, 2 (1955) 176.

23. DABROWSKI, J. & SOBIECZEWSKI, A. Phys.Lett., 5 (1963) 87.
24. KERMAN, A.K.; McMANUS, H.; THALER, R.M. Ann.Phys., 8 (1959)551.  
KOLTUN, D.S. The interaction of pions with nuclei. In:  
BARANGER, M. & VOGT, E. Advances in nuclear physics. New  
York, Plenum, 1968. v.3, p.71.
25. MORS, P.M. Sobre as distribuições de momentum em reações (p,2p).  
Porto Alegre, Instituto de Física, 1975. (Dissertação de  
Mestrado).
26. MARIS, Th.A.J. Quasi-free scattering and nuclear structure.  
In: WARREN, J.B. ed. Nuclear and particle physics at  
intermediate energies. New York, Plenum, 1976. p.425.
27. HERMAN, R. & HOFSTADTER, R. High-energy electron scattering  
tables. Stanford, University Press, 1960. p.82.
28. PRESTON, M.A. Physics of the nucleus. Reading, Addison-Wesley,  
1961.  
DeSHALIT, A & FESHBACH, H. Theoretical nuclear physics. New  
York, John Wiley, 1974.  
FETTER, A.L. & WALECKA, J.D. Quantum theory of many-particles  
systems. New York, McGraw-Hill, 1971.
29. MacGREGOR, M.H.; ARNOT, R.A.; WRIGHT, R.M. Phys.Rev., 182  
(1969) 1714.
30. ROSE, M.E. Relativistic electron theory. New York, John  
Wiley, 1961.  
ROSE, M.E. Elementary theory of angular momentum. New York,  
John Wiley, 1957.
31. ROTENBERG, M.; BIVINS, R.; METROPOLIS, N.; WOOTEN Jr., J.K.  
The 3-j and 6-j symbols. Cambridge, Technology Press, 1959.

32. MARIS, Th.A.J.; TEODORO, M.R.; VASCONCELLOS, C.A.Z. Nucl. Phys. (submetido a publicação).
33. JACOB, G. & MARIS, Th.A.J. Tabela. Porto Alegre, Instituto de Física. Pessoal.
34. HOUSEHOLDER, A.S. Principles of numerical analysis. New York, McGraw-Hill, 1953.
35. KITCHING, P.; MILLER, C.A.; HUTCHEON, D.A.; JAMES, A.N.; McDONALD, W.J.; CAMERON, J.M.; OLSEN, W.C. and ROY, G. Phys.Rev.Lett., 37 (1976) 1600.

