

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Instituto de Física

ESTUDO DE FEIXES COM SIMETRIA CILÍNDRICA EM
CANAIS SOLENOIDAIIS

Everton Granemann Souza

Tese realizada sob a orientação do Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato e co-orientação do Prof. Dr. Renato Pakter, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Porto Alegre

2012

Estudo de feixes com simetria cilíndrica em canais solenoidais

por

Everton Granemann Souza

Tese realizada sob a orientação do Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato e co-orientação do Prof. Dr. Renato Pakter, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de

Doutor em Ciências

Área de Concentração: Física de Plasmas

Orientadores: Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato
Prof. Dr. Renato Pakter (Co-Orientador)

Banca Examinadora: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana (UFPR)
Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IF-USP)
Prof. Dr. Pedro Luiz Grande (IF-UFRGS)
Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell (IF-UFRGS)

Coordenador do PPG-Fís.: Prof. Dr. Sérgio Ribeiro Teixeira

Porto Alegre, fevereiro de 2012

Toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil - e no entanto, é a coisa mais preciosa que temos.

Albert Einstein

Agradecimentos

- Aos meus pais pela educação que me deram e da qual tenho muito orgulho;
- Aos meus orientadores Felipe Barbedo Rizzato e Renato Pakter, não só pela orientação em si, mas também pelas nossas diversas conversas descontraídas sendo no âmbito da Física ou não;
- Ao Antônio Endler (*Arbeit macht frei*), que atuou em todos os trabalhos até então produzidos por essa tese, e mesmo que não oficialmente, é considerado por mim como um terceiro orientador;
- A minha namorada Thaís pela companhia, amizade e, principalmente, pela paciência por me aturar durante todo o doutorado;
- Aos membros da sala M208, nosso quartel general da Física no campus, na qual a elucubração prevalecia sobre o preconceito do erro, sem deixar de fora os tópicos de cunho vulgar e a libertinagem;
- Ao meu eterno professor e amigo, Luciano Camargo Martins, pelos longos debates sobre os mais variados assuntos, que como ele já bem definiu, "donde jamais chegamos à conclusão alguma, ou sequer aprendemos algo de novo";
- Ao Alex pela parceria nos congressos, pelas viagens, futebolis de sábado, churrascos, discussões de Física e é claro, pela amizade que conquistamos;
- Ao "Bija" que, embora eu ainda ache que o manicômio lhe adequada mais que a universidade, sempre proporcionou alegria com seus malabarismos, dancinhas e macaquices nas horas vagas.
- Ao Zé pelas nossas constantes discussões tanto no seio da Língua Portuguesa (com inúmeros anti-exemplos!) quanto na Física Geral;
- Ao Edgar, perito na arte da trambicagem, por me acolher em Grenoble e passar diversas dicas sobre a vida na França;

- Ao Arturzinho que, devido ao seu alto conhecimento, sempre esteve compartilhou comigo problemas de latex, linux, bash, gnuplot sem contar ainda os relacionados à Física;
- Ao Jardel pelo litro de Johnnie Walker e a motivação para com o estudo de teoria de campos;
- Aos meus colegas do Ensino de Física: Leo, Mara, Roberta, Nathan, Mozinho, pelos porres no Art & bar, churrascos, debates epistemológicos sobre ciência entre outros assuntos;
- Glauco, Felipe e a Jennifer pela parceria sempre certa! Seja no Imperial pra tomar aquela gelada, seja na casa de Portugal, PUC ou Bom Conselho pra jogar um futsal ou até mesmo pra tocar aquela viola de vez em quando;
- Aos membros da banca;
- Ao CNPq por financiar todo o meu doutorado.

Resumo

Neste trabalho estudaremos o comportamento de um feixe de partículas carregadas, radialmente simétrico, quando este é lançado em um canal solenoidal com campo magnético constante. Se esse feixe for denso e se propagar com uma velocidade muito menor que a da luz, sofrerá um forte efeito de repulsão Coulombiana, a qual competirá com a força magnética externa do canal solenoidal. Em um dado momento, entre o regime de transição do estado inicial para o estado final de relaxação, o feixe ejetará partículas do seu núcleo para a borda e, esse processo se intensificará à medida que o feixe se propaga no canal solenoidal. Analisaremos esse fenômeno de maneira detalhada, tanto para feixes com temperaturas quanto para feixes frios. Para isso, construiremos modelos numéricos e analíticos, onde ambos estabelecerão parâmetros que permitam otimizar o tempo de vida do feixe dentro do canal solenoidal até a primeira ejeção de partículas, [1], [2], [3], [4].

Com o intuito de entendermos a dinâmica do sistema como um todo, também estudaremos o estado estacionário do feixe. Para tanto, utilizaremos técnicas Lagrangeanas e quantidade conservadas, como a energia total, a fim de determinarmos a emitância do estado relaxado [5], [6].

Palavras chaves: Física de Aceleradores, Física de Feixes, Lei de Gauss, Quebra de Onda, Estado de Relaxação, Emitância RMS, Feixes com Temperatura.

Abstract

In this work, we will study the behavior of a charged particle beam, radially symmetrical, when it is launched in a solenoidal channel with constant magnetic field. If the beam is dense and propagate with speed much slower than the light, it will undergo a strong effect of Coulomb repulsion, which compete with the strength of the external magnetic solenoidal channel. At a certain point, between the transition from initial state to the ultimate state of relaxation, the beam will eject particles from the core to its edge, and this process will intensify as the beam propagates in the channel solenoidal. We will analyze this phenomenon in detail either for cold beams as for beams with temperature. To do this, we will construct analytical and numerical models, which both provide parameters to optimize the lifetime of the beam inside the solenoidal channel until the first ejection of particles, [1], [2], [3], [4].

In order to understand the dynamics of the system as a whole, we will also study the relaxed state of the beam. For this purpose, we will use Lagrangian techniques and conserved quantities, as the total energy, with the purpose of determine the emittance of the relaxed state [5], [6].

Key words: Accelerator Physics, Beam Physics, Gauss Law, Wave Breaking, Relaxation State, RMS Emittance, Beams with Temperature.

Sumário

Resumo	iii
Abstract	iv
Sumário	v
1 Introdução	2
1.1 Panorama Geral	2
1.2 Resultados do grupo de pesquisa	4
1.3 Descrição do feixe e das aproximações utilizadas	5
1.4 Objetivos do trabalho	6
2 Fundamentos	8
2.1 Força de Lorentz e a equação de movimento	8
2.2 A interpretação, generalização e adimensionalização da equação do movimento	18
2.3 Feixes homogêneos	20
2.4 Feixes não-homogêneos	23
2.5 Dinâmica da equação do movimento	24
3 Quebra de onda (<i>Wave breaking</i>)	28
3.1 Tratamento analítico para feixes casados	29
3.2 Tratamento analítico para feixes descasados	33
3.3 Controlando a quebra de onda	36
4 Regime de relaxação	39
4.1 Emitância de um feixe	40
4.1.1 Emitância RMS	41
4.2 Equação do envelope de um feixe	42
4.3 O modelo analítico para a não-homogeneidade χ	45
4.4 Órbita das partículas-teste	48

4.5	Descrição do halo através de partículas-teste	51
4.6	Cálculo da fração de partículas do halo através de conservação de energia . .	53
4.6.1	Cálculo da energia total do estado inicial	54
4.6.2	Cálculo da energia total do estado final estacionário	56
4.7	Conexão entre os estados inicial e final	61
4.8	Cálculo da emitância do estado relaxado	62
5	Feixe com temperatura	64
5.1	Modelagem de um feixe quente segundo equações de fluido ideal	65
5.2	Emitância térmica e direta	68
5.3	Transição na emitância térmica	70
6	Conclusões	74
	Apêndices	75
A		76
A.1	Trajетórias elípticas no espaço de fases	76
B		80
B.1	Conexão entre Temperatura e Velocidade	80
	Referências Bibliográficas	82

Capítulo 1

Introdução

1.1 Panorama Geral

Um feixe de partículas carregadas é um conjunto de partículas que se movem na mesma direção com aproximadamente a mesma energia cinética. O ramo da Física que estuda a interação dessas partículas com campos eletromagnéticos é a Física de feixes que, por sua vez, é uma sub-área da Física de Plasmas.

É difícil precisar a data dos primeiros trabalhos em Física de feixes (ou propriamente em Física de Plasmas). Contudo, podemos mencionar que algumas das primeiras contribuições vem através dos trabalhos de Child (1911) [7] e Langmuir (1913) [8] que, motivados pelas experiências de Joseph John Thompson com raios catódicos, determinaram qual a corrente máxima atingida por um fluxo de íons (de mesma carga) em um diodo planar.

Alguns anos mais tarde, em 1928, surge o primeiro acelerador de partículas. Sua origem é contada através de duas histórias paralelas. A primeira acontece na Inglaterra, no laboratório Cavendish, na cidade de Cambridge. Cockcroft e Walton, encorajados por Rutherford (o qual acreditava ser necessário muitos MeV para continuar sua pesquisa com núcleos atômicos), projetam um gerador de 800 keV. Mais tarde, este gerador recebe modificações alcançando 700keV e executando a primeira desintegração nuclear da história [9].

A segunda linha histórica data de 1924, quando Gustav Ising, diferentemente de Cockcroft e Walton, propõe um modelo de acelerador linear utilizando campos variáveis no tempo. Este modelo de acelerador só foi construído e aprimorado em 1928, pelo engenheiro Norueguês Rolf Wideröe, em Aaron, na Noruega [10]. Por se tratar do primeiro acelerador com campos variáveis no tempo, muitos autores consideram este como o “verdadeiro” primeiro acelerador [9], [11].

Enquanto os aceleradores eram construídos e testados tanto na Europa quanto na América do Norte, por volta de 1929, Tonks e Langmuir utilizam pela primeira vez o termo

plasma em um artigo científico [12], para descrever oscilações coletivas de elétrons em gases ionizados.

Em 1938, Anatoly Alexandrovich Vlasov dá uma importante contribuição ao mostrar que a equação de Boltzmann não é adequada para descrever a dinâmica de um plasma, devido a existência de forças coletivas de longo alcance (por exemplo, interações do tipo Coulomb). Por isso, propõe a equação de Vlasov (construída com base no teorema de Liouville, nas equações de Maxwell e na força de Lorentz) [13], que descreve as interações entre as partículas através dos campos auto-consistentes criados no próprio plasma e não apenas através de colisões.

Pouco após esta época, entre 1939 e 1945, o mundo entra em um período de conflitos, acontece a 2ª guerra mundial. Nesta fase, a tecnologia bélica evoluiu rapidamente, sendo crucial para o rumo do mundo. Esta corrida contra o tempo motiva os Estados Unidos, em 1942, a fundar o Laboratório Nacional de Los Alamos, no Novo México. O laboratório surge como parte do Projeto Manhattan, com o objetivo de ser um centro secreto para o desenvolvimento de pesquisas nucleares.

Após a guerra, a Europa sofre uma fase de reestruturação. Com o apoio da UNESCO, cria o CERN (*Organização Européia para a pesquisa nuclear*), na fronteira entre a França e a Suíça, com o intuito de promover a colaboração entre Países Europeus na área de Física de Altas Energias. Enquanto isso, os modelos teóricos continuaram a ser desenvolvidos, e em 1959, na antiga União Soviética, Kapchinsky e Vladimírsky [14] propõem uma solução particular para a equação de Vlasov, levando em conta feixes contínuos imersos em canais focalizadores periódicos, conhecida como distribuição K-V. Esta solução supõe que as forças transversais, geradas pela repulsão das partículas, variam linearmente com suas respectivas posições. Devido a sua simplicidade, a distribuição K-V é amplamente utilizada tanto em artigos científicos quanto em livros [15], [16], [17], [11], [18].

Em 1968, os Estados Unidos concebem mais outro grande laboratório, o Fermilab, com o intuito de amplificar os estudos em Física de Partículas.

Em 1970, os americanos Davidson e Krall [16] desenvolvem uma nova solução para a equação de Vlasov, só que agora levando em conta também a rotação do feixe e algumas modificações na estrutura de focalização (solenoidal uniforme), ou seja, criaram uma solução para o equilíbrio cinético do feixe.

A importância da distribuição K-V ganha mais notoriedade quando, em 1971, Sacherer e Lapostolle introduzem a descrição de feixes em termos de valores médios quadráticos (*root mean square - rms*) das quantidades fundamentais como: largura, divergência e emitância¹

¹Para detalhes sobre a emitância, vide a seção 4.1

[19], [20]. Também por eles, foi proposto a popular equação do envelope do feixe rms, a qual monitora, através de uma equação diferencial, a dinâmica do raio rms do feixe.

Em 1994, Gluckstern [18] propõe um modelo analítico para a formação de halo, também utilizando uma distribuição do tipo K-V. Seu artigo tornou-se referência para estudos em modos de oscilação coletiva [21], [22], [23], [24].

Em 1997, Chen, Pakter e Davidson [25], derivam uma nova solução para a equação de Vlasov, do tipo rotor-rígido, que leva em conta campos focalizadores periódicos e feixes com distribuição radial uniforme.

Em 2004, Moraes, Pakter e Rizzato [26], determinam uma solução de equilíbrio cinético para um feixe contínuo propagando-se fora do eixo de simetria. Até então, para todos os equilíbrios cinéticos assumia-se, sempre, que o feixe era perfeitamente alinhado com o eixo de simetria do campo focalizador.

Embora a lista de contribuições científicas possa ser estendida por páginas e páginas, ficaremos restritos ao estudo da dinâmica transversal de feixes intensos, e nesse breve resumo histórico, destacamos apenas os fatos que, de certa forma, possuem uma importância mais relevante no contexto global.

1.2 Resultados do grupo de pesquisa

Motivados pelo trabalho de Chen, Pakter e Davidson [25], citado na seção anterior, iniciou-se em 1997 o estudo específico de feixes de partículas carregadas no grupo de Física de Plasmas.

Apesar do grupo já ter uma vasta experiência com o estudo de interações não-lineares em ondas de Plasma, e caos em sistemas hamiltonianos, passou-se a focar os estudos não só no desenvolvimento de soluções de equilíbrio para equação de Vlasov, mas também soluções fora do equilíbrio além de estudo em: crescimento de emitância, formação de halo e análise do regime de relaxação.

Por exemplo, em 2007, Nunes e colaboradores, analisaram o regime de relaxação de um feixe frio, homogêneo e casado². Eles mostraram que é possível contabilizar a fração de partículas que migram do centro do feixe para o halo, sabendo apenas quantidades fundamentais como o tamanho do núcleo do feixe e tamanho do halo.

Neste mesmo ano, Rizzato, Pakter e Levin [1] estudaram o efeito de feixes frios, não-homogêneos, através de técnicas de perturbação. Estes resultados permitem que seja possível determinar o tempo em que o feixe ejeta suas primeiras partículas para o halo (a

²Para detalhes sobre feixe casado, vide seção 2.3

quebra de onda³).

Estes dois últimos artigos serviram como base para o desenvolvimento de dois trabalhos desta tese [2], [5], onde ambos sofreram mudanças com o intuito de que seus resultados abranjam situações mais gerais dentro da teoria. Além disso, um terceiro trabalho foi proposto (o qual se encontra em fase de conclusão), visando o entendimento de feixes com temperaturas (feixes quentes), que até então não tinha sido realizado no grupo. Entretanto, deixaremos a descrição básica sobre os trabalhos desenvolvidos para a seção de objetivos.

1.3 Descrição do feixe e das aproximações utilizadas

Estudaremos o comportamento de um feixe denso, composto por partículas de mesma carga. Lançaremos esse feixe em uma região de campo magnético, produzida por um canal solenoidal, o qual o fará espiralar e contrair. Devido a grande densidade de partículas, os *autocampos* que se originam nas cargas (causando efeito repulsivo) e nas correntes (causando efeito compressivo), também influenciarão na dinâmica do sistema, fazendo com que esta seja uma competição entre forças de atração e repulsão.

Em relação à classificação dos campos utilizados, eles podem ser estáticos ou dependentes do tempo. Na nossa modelagem, utilizaremos um campo magnético externo (do canal solenoidal), que além de estático, é constante e na direção de propagação do feixe. Para os *autocampos*, mencionados no parágrafo anterior, também consideraremos aproximações eletrostáticas e magnetostáticas.

Vale salientar que levaremos em conta que as componentes transversais da velocidade e o espalhamento das velocidades longitudinais são pequenas em relação à velocidade média de propagação do feixe, a chamada *aproximação paraxial*. Exemplos disso são feixes obtidos em aceleradores lineares, microscópios eletrônicos, tubos de raios catódicos (CRT), ou mesmo feixes curvos como os de *bétatrons*, *cíclotrons* e *síncrotrons* [15].

Sobre a geometria do feixe, consideraremos apenas feixes com simetria cilíndrica, contínuos e longos, onde a força de focalização é linear. Embora o feixe induza cargas na borda do tubo condutor que o envolve, vamos considerar que o centróide do feixe não oscila em relação ao eixo de simetria. Sendo assim, pela simetria do sistema, o tubo não exercerá força elétrica sobre o feixe (Lei de Gauss). Nenhuma preocupação será dada aos processos de colimação inicial e aceleração do feixe, já que vamos supor que o feixe se propaga com uma velocidade constante ($\approx c$) na direção longitudinal [27].

Os efeitos não-lineares relativo às aberrações no sistema de focalização, formam um

³Vide capítulo 3

campo altamente especializado e não serão tratados ao longo desse trabalho. Analisaremos, contudo, os efeitos não-lineares causados pela competição entre a força magnética devido ao campo externo e a força elétrica devido à repulsão Coulombiana entre as partículas, como já foi adiantado.

1.4 Objetivos do trabalho

Dentre os efeitos citados na seção anterior, estudaremos particularmente o fenômeno da quebra de onda, um dos responsáveis pela fuga de partículas do núcleo do feixe para a sua borda. Esta fuga resulta na perda do feixe ou na formação de uma estrutura indesejada, denominada halo.

Em suma, determinaremos quais serão os parâmetros ótimos para que, dada uma distribuição inicial de partículas homogênea ou não, o feixe mantenha-se por mais tempo estável dentro do canal solenoidal. Essa descrição será abordada tanto numericamente quanto analiticamente.

Embora a quebra de onda seja consistente para feixes frios, quando a velocidade inicial de todas as partículas do feixe é zero, tal fenômeno não ocorre em feixes quentes, mesmo que a ejeção de partículas para o halo ainda exista. Sendo assim, desenvolveremos um modelo, baseado na teoria de fluidos, para monitorar essa ejeção de partículas e caracterizá-la segundo os parâmetros de controle do sistema.

Sabendo que o crescimento de emitância (quantidade que em alguns casos pode ser vista como a área do feixe no espaço de fase) é um dos principais problemas da física de aceleradores [15], [11], [28], analisaremos o estado de equilíbrio do feixe, isto é, quando o feixe entre em um regime de relaxação (visto que todo crescimento de emitância está associado à relaxação do feixe e a um estado de equilíbrio [5], [29]). Faremos essa análise através de técnicas de Lagrangeano médio, conservação de energia, bem como técnicas numéricas, determinando a emitância do estado relaxado. Sendo os tópicos descritos há pouco os principais assuntos abordados nessa tese, optamos por dividi-la da seguinte maneira:

No Capítulo 2, deduziremos a equação de movimento do feixe a partir da força de Lorentz e dos campos aplicados, e na sequência, faremos a sua adimensionalização. Discutiremos algumas possíveis geometrias para a distribuição inicial de partículas na seção transversal do feixe (feixes parabólicos, uniformes, gaussianos) e por final ilustraremos a evolução temporal do feixe no espaço de fase.

No Capítulo 3 trataremos especificamente do fenômeno da quebra de onda (*wave breaking*), principalmente para feixes não-homogêneos. Começaremos através de uma revisão da literatura e depois definiremos matematicamente a quebra de onda. Seguiremos a

discussão propondo um modelo analítico, baseado em técnicas de perturbação, que estima o tempo de quebra de onda tanto para feixes casados (em equilíbrio) como descasados. No final do capítulo faremos a comparação dos cálculos analíticos e numéricos através de uma figura tridimensional (tamanho do feixe, não-homogeneidade e tempo de quebra de onda).

No Capítulo 4 discutiremos o estado de relaxação do feixe e definiremos conceitos típicos da área de Física de feixes como emitância e envelope. Com o intuito de estudar a dinâmica de relaxação do feixe, introduziremos um modelo unidimensional para a dinâmica de distribuição das partículas, com o auxílio da equação da continuidade e técnicas de Lagrangeano médio. Esse modelo será integrado em conjunto com uma simulação de partículas testes, e no final, comparado a uma simulação auto-consistente, onde, em ambos os casos, calcularemos a emitância do estado relaxado.

No Capítulo 5 falaremos sobre o feixe quente, deduzindo um modelo de fluido lagrangeano e comparando a uma simulação auto-consistente. Esta comparação será feita por meio do crescimento da emitância térmica, quantidade que será definida com base na emitância rms, e na divergência ou descontinuidade da compressibilidade (quantidade derivada da equação de fluido). Veremos que existe uma transição de fase no sistema, a qual pode ser controlada mediante mudanças na não-homogeneidade e na temperatura inicial do feixe.

E finalmente, no Capítulo 6, apresentaremos as conclusões finais, destacando os principais resultados e algumas perspectivas para a continuidade do trabalho.

Capítulo 2

Fundamentos

2.1 Força de Lorentz e a equação de movimento

Em Física, a equação que descreve o movimento de corpos carregados sob a influência de campos eletromagnéticos é chamada força de Lorentz, que no sistema CGS de unidades pode ser escrita como:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}). \quad (2.1)$$

Imagine que agora desejamos calcular a força de Lorentz que um fio (que passa pela origem O de um sistema de coordenadas), com corrente I e uma quantidade x de cargas q' , exerce sobre uma carga q , contida em um segundo fio, com corrente I_2 , situada à uma distância r do primeiro fio de acordo com a figura 2.1.

Para efetuarmos esse cálculo, necessitamos tanto do valor da indução magnética \vec{B} quanto do valor do campo elétrico \vec{E} no ponto onde desejamos saber o valor da força, o qual chamaremos de ponto P .

Se supormos que o fio 1 é infinitamente longo, e que a corrente I é uniforme, pela simetria do problema podemos dizer que a indução magnética \vec{B} , produzida pela corrente estacionária do fio 1, deve ser tangente a uma circunferência centrada no fio 1, como podemos ver na representação da figura 2.2. Nesse caso, podemos usar a lei de Ampère e escolher como amperiana a circunferência C , centrada no fio 1 (vide a mesma figura 2.2), ou seja:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi I}{c}; \quad (2.2)$$

$$B(2\pi r) = \frac{4\pi I}{c}; \quad (2.3)$$

$$\vec{B} = \left(\frac{2I}{rc}\right)\hat{\theta}. \quad (2.4)$$

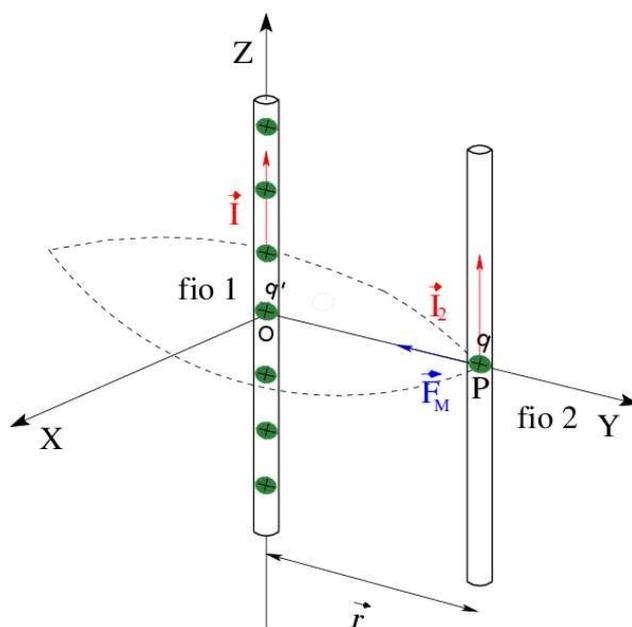


Figura 2.1: Dois fios condutores transportando correntes I e I_2 , com cargas q' e q respectivamente, separados por uma distância \vec{r} e com o fluxo de carga apontado na mesma direção. A força magnética (\vec{F}_m) que o fio 1 faz sobre o fio 2 é de atração, e a força elétrica entre as cargas de mesma espécie é de repulsão.

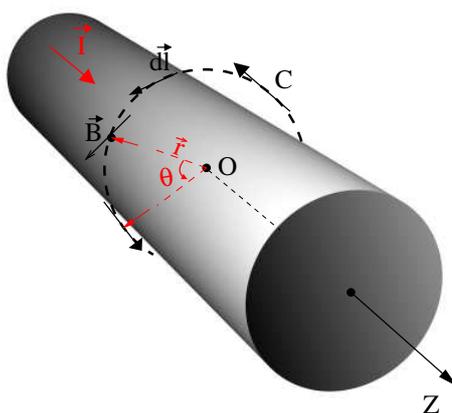


Figura 2.2: Fio condutor transportando um corrente constante I , envolvido por uma curva amperiana C de raio \vec{r} .

Sabendo a expressão de \vec{B} , agora nos resta calcular o campo elétrico \vec{E} gerado pelas cargas contidas no fio 1 no mesmo ponto P . Para isso redesenharemos a figura 2.2, substituindo a curva amperiana por uma superfície gaussiana. Se utilizarmos os mesmos argumentos de simetria que empregamos anteriormente, podemos aplicar a lei de Gauss pra calcular o campo elétrico que no sistema CGS é definida como:

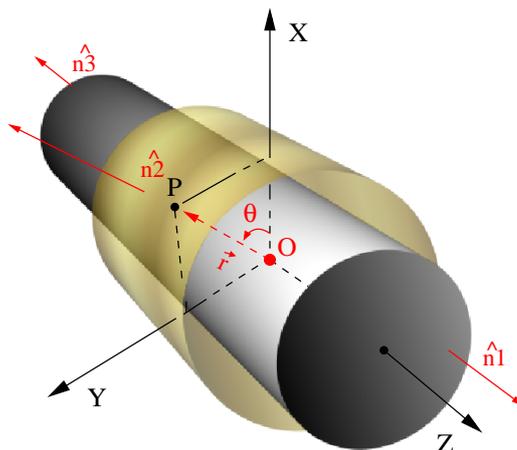


Figura 2.3: Distribuição cilíndrica de carga com densidade linear de carga λ e comprimento h , envolvida por uma superfície gaussiana de raio \bar{r} .

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 4\pi q'; \quad (2.5)$$

Como o ângulo entre \vec{E} e \hat{n}_1 (\hat{n}_3) é zero, já que \vec{E} é radial pra fora, o fluxo de campo elétrico ocorrerá apenas na superfície lateral do cilindro formado pela superfície gaussiana. Assim, o campo elétrico será:

$$EA \cos 0^\circ = 4\pi q'; \quad (2.6)$$

$$E(2\pi r h) = 4\pi q'; \quad (2.7)$$

se supormos que a carga encerrada pela superfície gaussiana possui uma densidade linear de carga λ , podemos reescrever a expressão da carga elétrica como:

$$E(2\pi rh) = 4\pi(\lambda h); \quad (2.8)$$

logo:

$$\vec{E} = \frac{2\lambda}{r}\hat{r}; \quad (2.9)$$

como sabemos o valor de \vec{E} e \vec{B} no ponto P , podemos calcular agora a força exercida pelo fio 1 sobre a carga q contida no fio 2. Entretanto, nos interessa saber qual o efeito desta força mediante a competição com uma outra força, que surge quando injetamos o feixe em um canal solenoidal com uma indução magnética constante, $\vec{B}_{ext} = B_0\hat{k}$.

Se incluirmos essa indução magnética externa \vec{B}_{ext} , no produto vetorial $\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$, temos em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{k} \\ \frac{v_r}{c} & \frac{v_\theta}{c} & \frac{v_z}{c} \\ 0 & \frac{2I}{rc} & B_0 \end{vmatrix};$$

$$\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} = \left(\frac{v_\theta B_0}{c} - \frac{v_z 2I}{c rc} \right) \hat{r} - \left(\frac{B_0 v_r}{c} \right) \hat{\theta} + \left(\frac{2I v_r}{rc^2} \right) \hat{k}; \quad (2.10)$$

nesse ponto, vamos supor que a velocidade de propagação do feixe na direção z é constante, o que implica diretamente em anular o último termo da equação (2.10), visto que é proporcional à aceleração em z . Sendo assim, e sabendo que $v_z/c = \beta$, podemos reescrever a equação (2.10) como:

$$\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \approx \left(\frac{v_\theta B_0}{c} - \frac{2I\beta}{rc} \right) \hat{r} - \left(\frac{B_0 v_r}{c} \right) \hat{\theta}. \quad (2.11)$$

Inserindo o produto vetorial calculado na equação anterior e o campo elétrico calculado pela equação (2.9), podemos reescrever a força de Lorentz (equação 2.1) como:

$$\vec{F} = q \left[\left(\frac{2\lambda}{r} - \frac{2I\beta}{rc} + \frac{v_\theta B_0}{c} \right) \hat{r} - \left(\frac{B_0 v_r}{c} \right) \hat{\theta} \right]. \quad (2.12)$$

Também podemos obter a força \vec{F} desse sistema eletromagnético através da segunda Lei de Newton na forma relativística:

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt = d(\gamma m \vec{v})/dt = \gamma m d\vec{v}/dt = \gamma m \vec{a}; \quad (2.13)$$

2.1. Força de Lorentz e a equação de movimento

onde $\gamma = (1 - (v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2)/c^2)^{-1/2}$, o fator relativístico, é constante no tempo através da consideração de que v_r e v_θ são muito menores que v_z , que é constante. Logo, se igualarmos a expressão anterior à equação (2.12), obtemos então:

$$\gamma m \vec{a} = q \left[\left(\frac{2\lambda}{r} - \frac{2I\beta}{rc} + \frac{v_\theta B_0}{c} \right) \hat{r} - \left(\frac{B_0 v_r}{c} \right) \hat{\theta} \right]; \quad (2.14)$$

que relaciona a segunda Lei de Newton a força de Lorentz. Agora vamos reescrever o vetor de aceleração \vec{a} e as componentes das velocidades v_r e v_θ em coordenadas polares. Por hora vamos apenas utilizar diretamente as expressões de \vec{a} , v_r e v_θ que se encontram deduzidas na referência [30]. Assim, para \vec{a} , temos:

$$\gamma m \vec{a} = \gamma m \left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\theta} \right]. \quad (2.15)$$

Sabemos que \vec{v} em coordenadas polares pode ser escrito como:

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} = \dot{r} \hat{r} + r\dot{\theta} \hat{\theta}; \quad (2.16)$$

comparando as componentes radiais das expressões (2.14) e (2.15), e ainda, levando em conta que $v_\theta = r\dot{\theta}$ pela equação (2.16), obtemos:

$$\gamma m (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = q \left[\frac{2}{r} \left(\lambda - \frac{I\beta}{c} \right) + \frac{B_0 v_\theta}{c} \right] = q \left[\frac{2}{r} \left(\lambda - \frac{I\beta}{c} \right) + \frac{B_0 r \dot{\theta}}{c} \right];$$

$$\boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{q}{\gamma m} \left[\frac{2}{r} \left(\lambda - \frac{I\beta}{c} \right) + \frac{B_0 r \dot{\theta}}{c} \right]} \quad (2.17)$$

Fazendo o mesmo procedimento para a componente angular ($\hat{\theta}$):

$$\gamma m (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -\frac{q B_0 \dot{r}}{c};$$

$$\boxed{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\frac{q B_0 \dot{r}}{\gamma m c}} \quad (2.18)$$

As equações (2.17) e (2.18) representam as componentes radial e angular, respectivamente, da força de Lorentz em coordenadas cilíndricas para um referencial inercial. Contudo, se

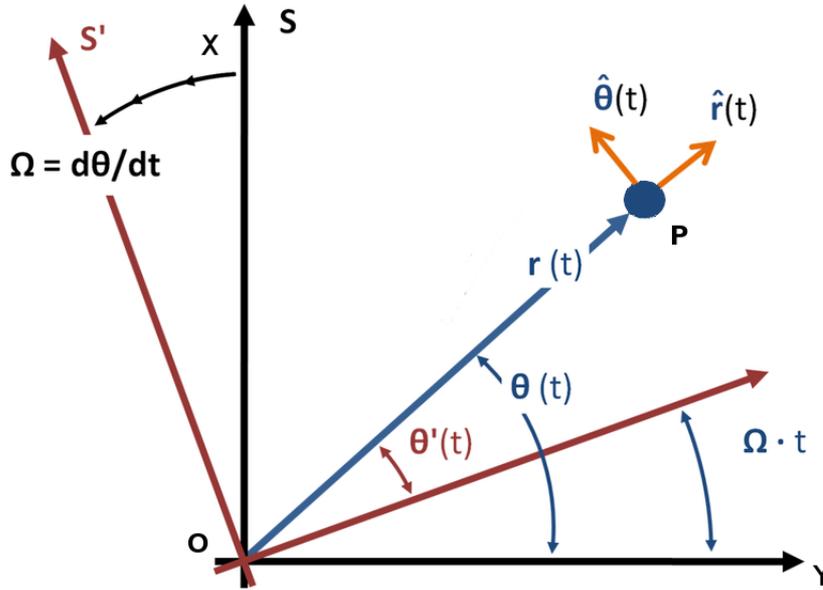


Figura 2.4: Representação entre dois referenciais concêntricos, onde S é um referencial inercial(fixo) e S' é não-inercial (girante).

quisermos saber como essas equações se modificam quando mudamos para um referencial girante (não-inercial), precisamos adaptá-las mediante uma transformada. Faremos isso com a ajuda da figura 2.4, na qual usaremos três variáveis (θ , θ' e Ωt) para facilitar no procedimento. Iremos identificá-las como:

- θ será o ângulo entre o ponto P, onde está o fio 2, e o referencial S;
- θ' será o ângulo entre o ponto P e o referencial S' ;
- E finalmente, Ωt será a distância angular entre os eixos dos referencial fixo S e o referencial girante S' .

Matematicamente, podemos expressar θ' em função de θ e Ωt . Logo:

$$\theta' = \theta - \Omega t. \quad (2.19)$$

Onde a equação acima nos fornece a transformação do referencial inercial S para o referencial não-inercial S' . Contudo, desejamos achar um referencial mais específico, um referencial não-inercial em que o fio 2, representado por um ponto P na figura 2.4, gire com a mesma velocidade angular que o referencial não-inercial S' (o chamado referencial de Larmor). Podemos ver pela geometria da figura 2.4 que se escolher θ' igual a zero, temos essa condição satisfeita, ou seja:

$$0 = \theta - \Omega t; \quad (2.20)$$

o que implica em:

$$\theta = \Omega t \Rightarrow \dot{\theta} = \Omega \Rightarrow \ddot{\theta} = 0; \quad (2.21)$$

se substituirmos os novos valores de $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$, dados pela equação (2.21), nas expressões (2.17) e (2.18), obtemos as novas componentes radial e angular da força de Lorentz, só que agora já adaptadas para o referencial de Larmor [ênfatizando novamente que esse é um referencial que gira com a mesma velocidade angular que o ponto P (fig 2)]. Começando esse procedimento pela parte angular, temos:

$$2\dot{r}\Omega = -\frac{qB_0\dot{r}}{\gamma mc} \Rightarrow \Omega = -\frac{qB_0}{2\gamma mc}; \quad (2.22)$$

para a parte radial:

$$\ddot{r} - r\Omega^2 = \frac{q}{\gamma m} \left[\frac{2}{r} \left(\lambda - \frac{I\beta}{c} \right) + \frac{B_0 r \Omega}{c} \right]; \quad (2.23)$$

$$\ddot{r} - r\Omega^2 = \frac{1}{r} \left[\frac{2q}{\gamma m} \left(\lambda - \frac{I\beta}{c} \right) \right] + \left(\frac{qB_0}{2\gamma mc} \right) \Omega r; \quad (2.24)$$

identificando que: $\Omega = -\frac{qB_0}{2\gamma mc}$ é a frequência angular, pela equação (2.22), podemos reescrever a equação (2.24) como:

$$\ddot{r} - r\Omega^2 = \frac{1}{r} \left[\frac{2q}{\gamma m} \left(\lambda - \frac{I\beta}{c} \right) \right] - 2\Omega^2 r;$$

Assim:

$$\ddot{r} + \Omega^2 r - \frac{1}{r} \left[\frac{2q}{\gamma m} \left(\lambda - \frac{I\beta}{c} \right) \right] = 0; \quad (2.25)$$

que representa a força de Lorentz entre um fio e uma carga, considerando também um campo externo \vec{B}_0 na direção z . Outra operação pertinente e comumente utilizada na área de física de feixes, é mudar a dependência da derivada de r , a qual é tomada com relação ao tempo

t , para uma derivada de r em relação à coordenada z . Fazemos isso com uma mudança de variável do tipo:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{dt}; \quad (2.26)$$

onde: $dz/dt = v_z$ e $\beta = v_z/c \Rightarrow v_z = \beta c$, o que implica em considerar que a velocidade na direção z é constante. Logo:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dz} \beta c; \quad (2.27)$$

substituindo o resultado de (2.27) na equação (2.25), obtemos:

$$\beta^2 c^2 \ddot{r} + \Omega^2 r - \frac{1}{r} \left[\frac{2q}{\gamma m} \left(\lambda - \frac{I\beta}{c} \right) \right] = 0; \quad (2.28)$$

onde \ddot{r} , de agora em diante, representa a derivada em relação à z , ou seja, dr/dz .¹ Se dividirmos a equação (2.28) por $\beta^2 c^2$, temos:

$$\ddot{r} + \frac{\Omega^2}{\beta^2 c^2} r - \frac{1}{r} \left[\frac{2q}{\gamma m \beta^2 c^2} \left(\lambda - \frac{I\beta}{c} \right) \right] = 0; \quad (2.29)$$

Identificando que βc representa a velocidade v_z , podemos definir a corrente I do feixe relativístico, na direção z , como $I = Nq\beta c$. Também é conveniente reescrever a densidade linear de carga como $\lambda = Nq$, onde N é o número de portadores por unidade de comprimento h , e a frequência Ω . Sendo assim, a equação (2.29) torna-se:

$$\ddot{r} + \left(-\frac{qB_0}{2\gamma m\beta c^2} \right)^2 r - \frac{1}{r} \left[\frac{2q}{\gamma m\beta^2 c^2} (Nq - Nq\beta^2) \right] = 0 \quad (2.30)$$

Evidenciando Nq e sabendo que $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow 1/\gamma^2 = 1-\beta^2$;

$$\ddot{r} + \left(-\frac{qB_0}{2\gamma m\beta c^2} \right)^2 r - \left(\frac{2Nq^2}{\gamma^3 m\beta^2 c^2} \right) \frac{1}{r} = 0. \quad (2.31)$$

O termo $\Omega_L \equiv qB_0/2\gamma m\beta c^2$ é conhecido como frequência de Larmor normalizada, e pode ser escrito em função de κ , a chamada constante de focalização [16], através da relação: $\kappa = \Omega_L^2$.

¹Vamos manter a mesma notação \ddot{r} , apenas para não carregarmos índices extras.

Já o termo adimensional $K = 2Nq^2/\gamma^3 m\beta^2 c^2$ é conhecido como perveância auto-consistente do feixe [16]. Definidos K e κ podemos reescrever a equação (2.31) como:

$$\ddot{r} + \kappa r - \frac{K}{r} = 0; \quad (2.32)$$

a equação anterior, observando do referencial do laboratório, descreve o movimento entre dois fios carregados. Nele o fio 1 encontra-se em repouso na origem O do sistema de coordenadas e o fio 2 gira em torno da origem O com a mesma velocidade angular Ω que o sistema de coordenadas S' (vide figura 2.4).

Imagine que agora ao invés de termos apenas o fio 2 tenhamos ξ fios transportando correntes I . Se todos esses ξ fios girarem com a mesma velocidade angular Ω em torno de O , esse movimento de cargas criará uma corrente que implicará na indução magnética de um \vec{B}_{auto} , no sentido oposto à indução magnética do campo externo $\vec{B} = B_0 \hat{k}$, ou seja, um $\vec{B}_{auto} = -B_{auto} \hat{k}$. Contudo, negligenciaremos esse \vec{B}_{auto} , pois no cálculo que segue provaremos que \vec{B}_{auto} é muito pequeno.

Para isso vamos supor que as linhas de campo magnético geradas pela indução magnética \vec{B}_{auto} são paralelas ao eixo z , semelhante à linha de campo formada no centro do solenóide, como podemos ver na figura 2.5 (a). Também vamos supor que nosso solenóide é grande e que o espaço entre as espiras é pequeno, para que \vec{B}_{auto} seja considerado uniforme.

Sendo assim, aplicando a Lei de Ampère para o caminho 1234, conforme indicado na figura 2.5 (b), obtemos para M espiras justapostas:

$$\int_C \vec{B}_{auto} \cdot d\vec{l} = M \frac{4\pi I}{c}; \quad (2.33)$$

$$\int_{12} \vec{B}_{auto} \cdot d\vec{l} + \int_{23} \vec{B}_{auto} \cdot d\vec{l} + \int_{34} \vec{B}_{auto} \cdot d\vec{l} + \int_{41} \vec{B}_{auto} \cdot d\vec{l} = M \frac{4\pi I}{c}; \quad (2.34)$$

Como:

$$\int_{23} \vec{B}_{auto} \cdot d\vec{l} = \int_{41} \vec{B}_{auto} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.35)$$

Devido ao produto escalar entre \vec{B} e $d\vec{l}$ ser nulo; e:

$$\int_{34} \vec{B}_{auto} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.36)$$

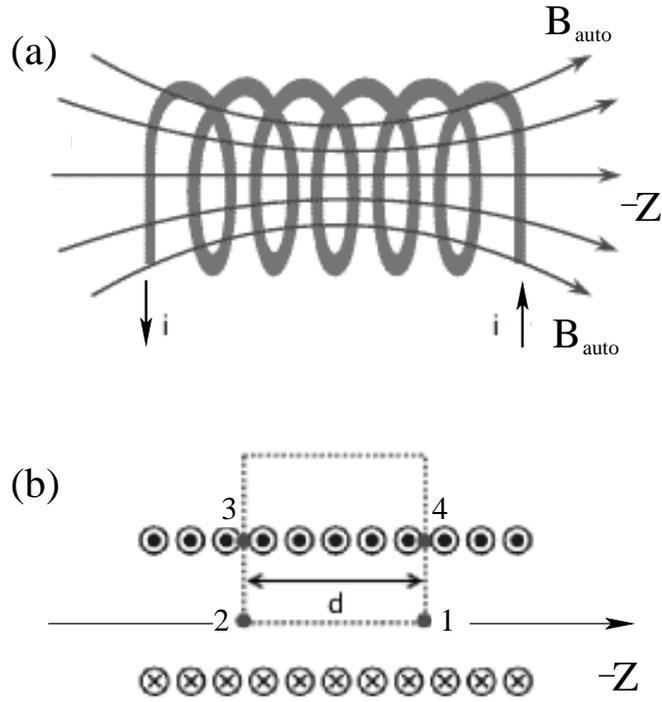


Figura 2.5: Indução magnética de um solenóide.

Por não existir indução magnética fora do solenóide (supomos que as linhas estão confinadas apenas dentro) a única integral não nula é a do caminho 12, logo:

$$-B_{\text{auto}}d = \frac{4\pi I}{c}; \quad (2.37)$$

o sinal negativo provém do fato de que o autocampo ser no sentido negativo de z . Contudo, se há M espiras no comprimento h do solenóide, no comprimento l haverá Ml/h espiras. Como cada espira transporta uma corrente I , a lei de Ampère para o solenóide é escrita como:

$$-B_{\text{auto}}d = \eta \frac{4\pi I}{c}; \quad (2.38)$$

Onde $\eta = M/l$ é o número de espiras por unidade de comprimento l . Se reescrevermos a corrente I em coordenadas polares, temos:

$$I = \int_0^r \int_0^d \vec{J} \cdot \hat{n} dA = \int_0^r \int_0^d nq\Omega dr dz \quad (2.39)$$

onde \vec{J} é a densidade de corrente, dA é um elemento infinitesimal de área, $\Omega = -qB_0/2\gamma mc$ (pela equação (2.22)) é a velocidade angular com que as partículas giram em torno da

origem, n é o número de portadores por unidade de volume e q é a carga de cada portador. Supondo que nosso perfil de densidade seja do tipo: $n = N/\pi r^2 \Rightarrow n = N/(2\pi \int r dr) \Rightarrow N/2\pi = n \int r dr$, onde N é o número de portadores por unidade de comprimento, se isolarmos q na equação (2.22) podemos reescrever a equação (2.39) como:

$$-B_{auto}d = -\eta \frac{4\pi}{c} \frac{qB_0}{2\gamma mc} \frac{Nd}{2\pi} = -\frac{Nq^2 B_0 d}{\gamma mc^2}; \quad (2.40)$$

o termo $\nu_b = Nq^2/mc^2$ é conhecido com parâmetro de Budker. Para o caso da aproximação paraxial² ν_b é muito menor que um [16], e que a densidade de espiras η é menor que γ , temos, aproximadamente que:

$$\frac{B_{auto}}{B_0} = \eta \frac{\nu_b}{\gamma} \Rightarrow \frac{B_{auto}}{B_0} \ll 1. \quad (2.41)$$

que é o que desejavamos provar.

2.2 A interpretação, generalização e adimensionalização da equação do movimento

A equação diferencial (2.32) é não-linear e foi deduzida para representar a força entre dois fios. Contudo, como já foi adiantado, não estamos interessados apenas na interação entre dois fios, mais sim entre N fios. Ou seja, podemos imaginar que entre o fio 1 e o fio 2 (figura 2.1) existam outros N fios. Sendo assim, torna-se necessário substituir a perveância K (que é proporcional ao quadrado da carga q do fio 1), por uma função que meça a carga líquida $Q(r)$ entre a origem, em $r = 0$, e uma distância $r(z)$, onde se deseja calcular o campo. Então, definiremos a nova perveância como: $Q(r) = KN(r)/n$, onde $N(r)$ é o número de partículas entre a origem $r = 0$ e o ponto P (localizado em $r(z) = r$) e n é o número de partículas por unidade de comprimento axial h . Agora, nossa nova equação do movimento fica definida como:

$$\ddot{r} + \kappa r - \frac{Q(r)}{r} = 0. \quad (2.42)$$

A equação (2.42) representa o movimento de “cada” um dos N fios no referencial de Larmor. Como o sistema é unidimensional e sua dinâmica depende apenas da coordenada

²A aproximação paraxial consiste em considerar que o momentos p_x e p_y , na direção transversal do movimento, são muito menores que o momento p_z na direção longitudinal de propagação das cargas, o que possibilita uma abordagem clássica na direção transversal e relativística na direção de propagação z .

radial r , podemos visualizar os N fios no plano transversal $x-y$ (supondo a mesma orientação de eixos da figura 2.2) como um feixe de partículas, onde cada partícula representa um pedaço de cada fio em um determinado tempo z . Sua evolução temporal (na verdade espacial por se tratar da evolução da coordenada z) será feita mediante integração da equação (2.42).

O termo κr representa o efeito de focalização sobre o feixe, proporcionado pela indução magnética externa \vec{B}_{ext} que é constante e na direção z . Já o segundo termo $Q(r)/r$ é o termo de repulsão Coulombiana, responsável pelo efeito de carga-espacial (“space charge”). Sendo assim, a dinâmica total das partículas será dada pela competição entre a força de focalização do campo magnético externo e os autocampos gerados pelas cargas e correntes das próprias partículas.

Feixes onde o efeito de carga espacial é relevante, normalmente são feixes densos [15], nos quais o efeito de repulsão Coulombiana torna-se intenso devido à grande quantidade de partículas. Entretanto estes feixes não podem ser muito energéticos, pois para feixes com alta energia cinética $v_z \approx c$, e o último termo da equação (2.30) (a saber, $Nq - Nq\beta^2$) torna-se nulo, já que $\beta = v_z/c \approx 1$. Como relação a geometria e o meio de propagação, consideraremos que o feixe se propaga no vácuo com velocidade axial v_z constante, e é azimutalmente simétrico ao redor do eixo z , conforme descrevemos na introdução desse trabalho.

Por questões de praticidade, a equação (2.42) ainda pode ser adimensionalizada em função de κ , eliminando sua dependência e deixando r e z como variáveis adimensionais. Fazemos isso supondo as transformações:

$$z' = \sqrt{\kappa}z \Rightarrow z = \frac{z'}{\sqrt{\kappa}}; \quad (2.43)$$

$$r' = \sqrt{\kappa}r \Rightarrow r = \frac{r'}{\sqrt{\kappa}}; \quad (2.44)$$

Substituindo as expressões (2.43) e (2.44) na equação (2.42), obtemos:

$$\frac{\frac{d^2 r'}{\sqrt{\kappa}}}{\left(\frac{dz'}{\sqrt{\kappa}}\right)^2} + \frac{\kappa r'}{\sqrt{\kappa}} - \frac{Q(r')}{\frac{r'}{\sqrt{\kappa}}} = 0; \quad (2.45)$$

Simplificando:

$$\frac{d^2 r'}{dz'^2} \sqrt{\kappa} + \sqrt{\kappa} r' - \sqrt{\kappa} \frac{Q(r')}{r'} = 0; \quad (2.46)$$

Dividindo ambos os lados por $\sqrt{\kappa}$:

$$\frac{d^2 r'}{dz'^2} + r' - \frac{Q(r')}{r'} = 0; \quad (2.47)$$

Apenas por questões estéticas vamos remover o índice ' (linha) e reescrever a equação de movimento em sua forma definitiva como:

$$\ddot{r} + r - \frac{Q(r)}{r} = 0; \quad (2.48)$$

onde as novas variáveis r e s são adimensionais.

2.3 Feixes homogêneos

Agora que temos a equação do movimento precisamos propor uma distribuição inicial de partículas para integrá-la. Primeiramente, vamos supor o perfil mais simples de todos, um perfil onde todas as partículas se distribuem de maneira uniforme e homogênea em sua secção transversal:

$$n(r) = \begin{cases} \frac{N}{\pi r^2}, & 0 \leq r < r_b; \\ 0, & r_b < r \leq r_w; \end{cases} \quad (2.49)$$

Onde n é a densidade de partículas por unidade de área, N é o número de partículas por secção transversal, r_b é o raio máximo do feixe no estado inicial, r_w é o raio do tubo que confina o feixe e r é o raio de cada partícula. Assim, temos partículas equidistantes distribuídas entre valores $r_0(z = 0) = 0$ e $r_b(z = 0) = 1$.³ Também vamos supor que o feixe é frio no estado inicial, ou seja, $v_0(z = 0) = 0$ para todas as partículas.

As condições propostas há pouco podem ser visualizadas nas figuras (2.6a) e (2.6b). Em (a) temos o espaço $x - y$ de um feixe frio composto por 10.000 partículas no instante inicial onde $z = 0$ e ao seu lado, na figura (2.6b), o seu respectivo espaço de fase. Note que exibimos apenas a condição inicial do feixe, contudo, se desejarmos visualizar sua evolução temporal, precisamos integrar a equação (2.42).

Excepcionalmente para o caso da distribuição uniforme com raio máximo ($r_b = 1$), o feixe não altera o seu comportamento depois de integrado. Isso se deve a duas condições mutuamente satisfeitas: a distribuição proposta é uma distribuição de equilíbrio e a escolha

³Novamente, gostaríamos de lembrar que fizemos uma mudança de variáveis na equação (2.27), e agora z faz o papel do tempo.

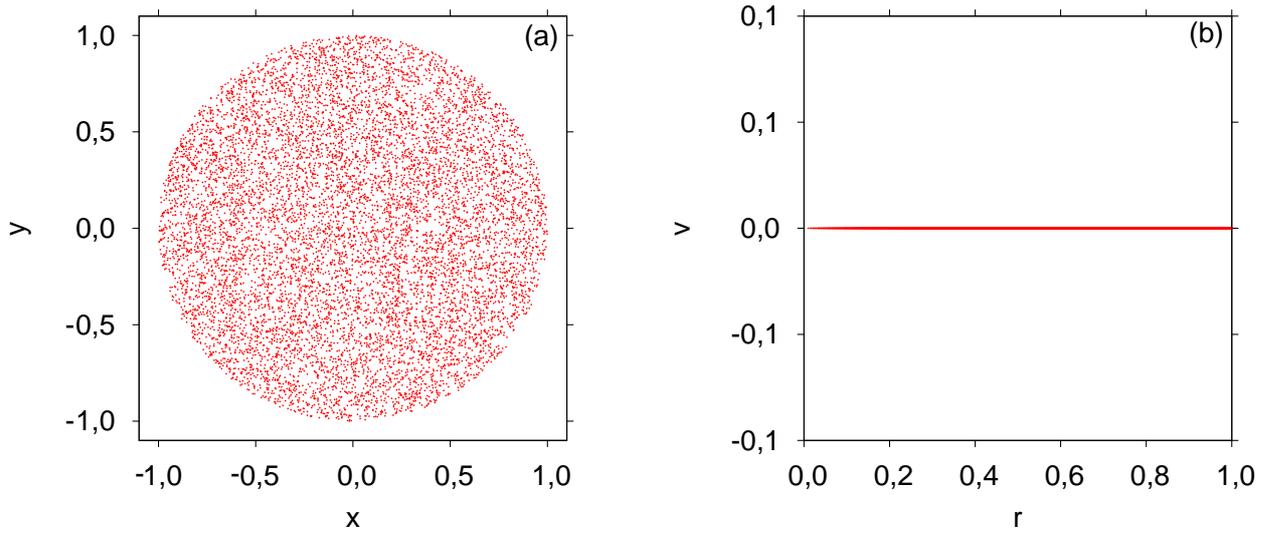


Figura 2.6: Em (a), espaço X - Y de um feixe frio com distribuição de partículas uniforme em r para $z = 0$ e $v_0(z = 0) = 0$. Em (b), a representação do mesmo feixe, só que no espaço de fase.

do raio máximo, $r_b = 1$, representa a condição de equilíbrio para a borda do feixe. Sabemos que para um corpo em equilíbrio estático, o somatório das forças atuantes sobre ele é nula [31]. Se aplicarmos essa condição a equação (2.48) teremos:

$$-r + \frac{Q(r)}{r} = 0; \quad (2.50)$$

Isolando r na equação acima, obtemos:

$$r = \sqrt{Q(r)}; \quad (2.51)$$

Como a carga total normalizada é conservada, então $Q(r_b) = 1$, logo:

$$r_{eq} = \pm 1; \quad (2.52)$$

Como $r_{eq} = -1$ não faz sentido fisicamente, teremos apenas em $r_{eq} = 1$ um ponto de aceleração nula, ou seja, um ponto de equilíbrio estático. É comum na linguagem de física de feixes dizer que o feixe é “casado” (em inglês *matched beam*) quando escolhemos a borda do feixe como o ponto de equilíbrio, nesse caso, $r_b = 1$.

Assim, para que haja uma dinâmica entre as partículas, escolheremos um feixe “descasado” (*unmatched beam*, $r_b \neq 1$) com um comportamento semelhante ao visto na figura 2.7.

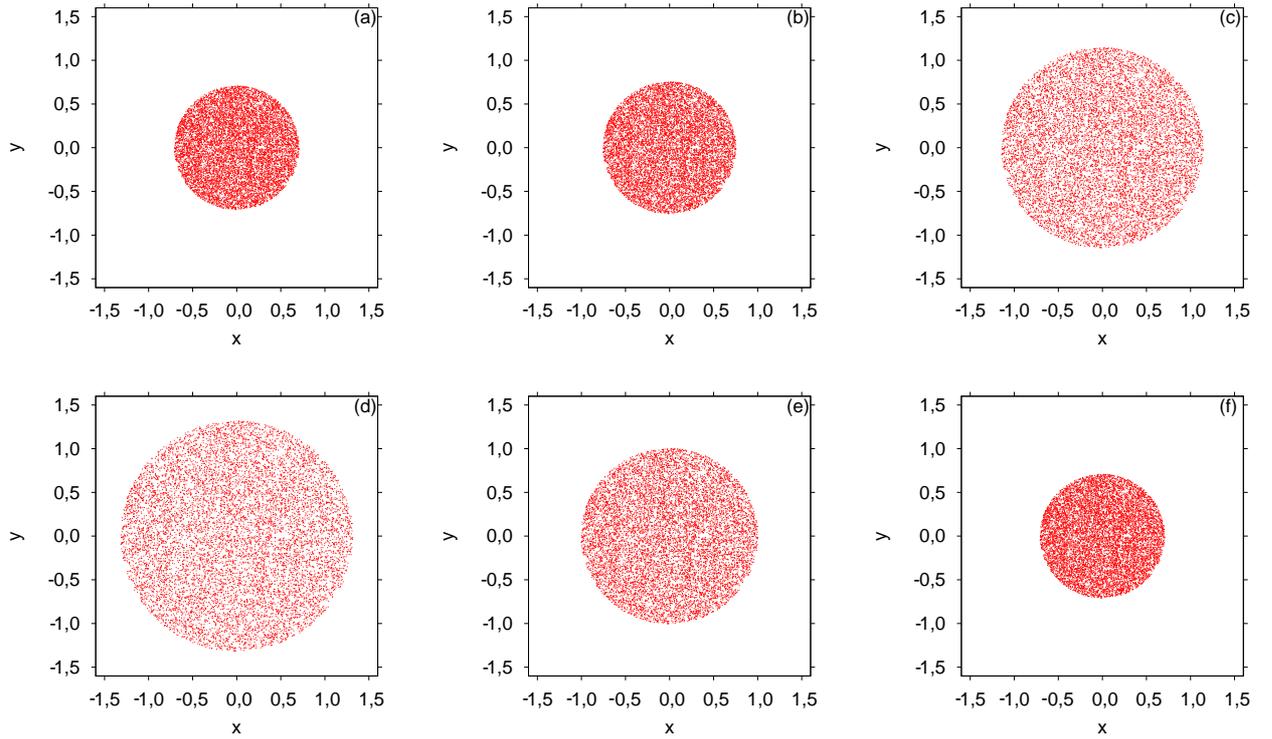


Figura 2.7: Evolução de um feixe homogêneo descasado com 10.000 partículas. Em (a) temos o feixe em seu estado inicial quando $z = 0$. Nos dois instantes seguintes, em (b) e (c), o feixe sofre uma expansão até quando, em (d), atinge a amplitude máxima e novamente contrai, em (e), até chegar ao tamanho inicial, em (f).

No painel (a) temos o feixe em seu estado inicial no espaço $x - y$. Em (b) ele é integrado uma unidade de tempo, donde verificamos uma expansão em relação ao estado inicial, devido à repulsão Coulombiana. Essa expansão continua, como em (c), até atingir um valor crítico, em (d), onde as forças Coulombianas são vencidas pelas forças do campo focalizador externo, e assim o feixe se contrai, como em (e), até voltar ao seu tamanho inicial, em (f), completando um ciclo de oscilação. Esse movimento de oscilação perdura-se ao longo do tempo, como pode ser visto na série temporal da figura 2.8 (a). Embora a partícula não se mantenha com a mesma amplitude de oscilação, pela figura 2.8 (b), nota-se que seu movimento é periódico.

Mesmo no caso do feixe descasado, quando temos uma dinâmica mais rica frente ao feixe casado, o feixe uniforme está longe de um perfil realístico [15]. Por isso, iremos propor um perfil de densidade não-uniforme na próxima seção, o qual será o objeto de estudo mais aprofundado nesse trabalho.

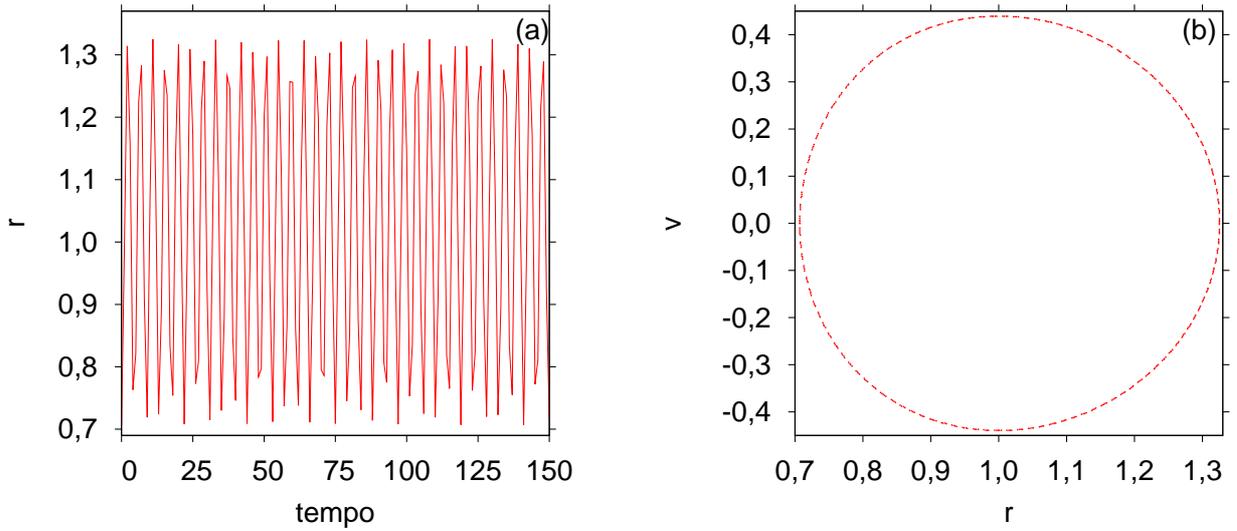


Figura 2.8: (a) Série temporal de uma partícula em um feixe homogêneo. E em (b), o seu respectivo espaço de fase para $z = 130$ tempos de integração.

2.4 Feixes não-homogêneos

Embora seja possível propor diversos perfis de feixes não-uniformes, optamos por um perfil parabólico, principalmente devido à sua simplicidade nos cálculos analíticos. Nesse perfil, todas as partículas são inicialmente distribuídas de acordo com a equação:

$$n(r, \chi) = \begin{cases} \frac{N}{\pi r_b^2} \left[1 + \chi \left(2 \frac{r^2}{r_b^2} - 1 \right) \right], & 0 \leq r < r_b; \\ 0, & r_b < r \leq r_w. \end{cases} \quad (2.53)$$

Note que agora, além de n depender de r depende também do parâmetro $\chi \in [-1, 1]$, o qual definiremos como “parâmetro de não-homogeneidade”. Queremos frisar também, que a equação (2.53) é um *ansatz*, e foi introduzida dessa maneira simplesmente por preencher os requisitos de parabolicidade e normalização que desejamos, já que $n(r, \chi) \approx Cr^2$ corresponde a um perfil parabólico.

Para entendermos o sentido desse *ansatz* e o efeito do parâmetro de não-homogeneidade χ , vamos analisar o seu comportamento na equação (2.53) em termos de r e da densidade de partículas n , como consta na figura 2.9.

Neste exemplo geramos cinco feixes em seus estados iniciais ($z = 0$), com diferentes valores de χ . Observe que para o extremo positivo, quando $\chi \approx 1.0$, temos um feixe completamente parabólico, onde as partículas populam mais a borda do feixe, próximo a $r_0/r_b = 1.0$. À medida que diminuimos o valor de χ , a parabolicidade do feixe vai tendendo a uma distribuição uniforme, que é o que acontece quando inicializamos o feixe com $\chi = 0.0$. Para

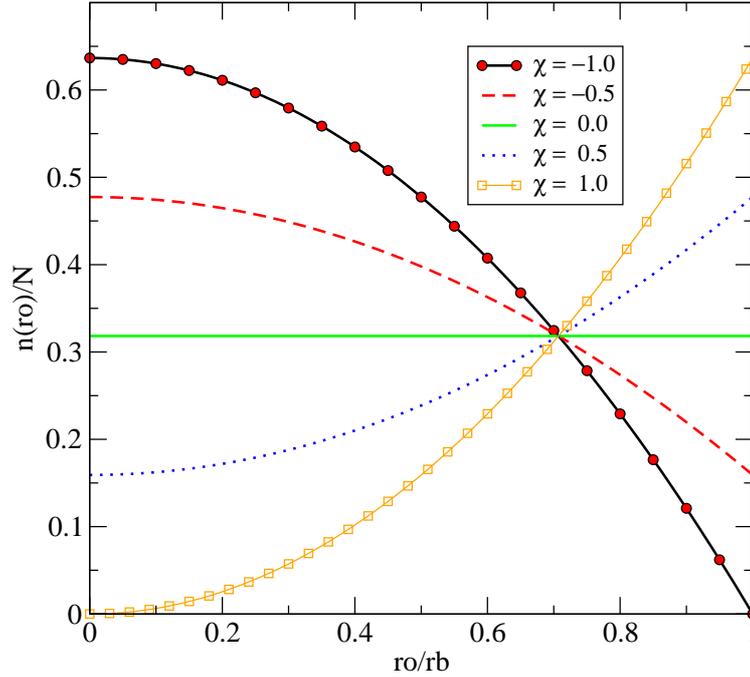


Figura 2.9: Comportamento da densidade de partículas inicial (equação (2.53)) em função do raio inicial do feixe para diferentes valores de χ .

valores de χ negativos o comportamento se inverte. As partículas tendem a se concentrar próximas a região central do feixe, $r_0/r_b \approx 0.0$, e esse comportamento se acentua quando atingimos o extremo negativo, em $\chi = -1.0$.

Sobre um outro ponto de vista, temos os mesmos cinco feixes reproduzidos a pouco no espaço $x - y$. Embora as diferenças entre os quadros (b), (c) e (d) não sejam tão visíveis, a discrepância entre os casos (a) e (e) é mais marcante, quando olhamos a população de partículas na borda e no centro do feixe.

Agora que temos uma distribuição inicial de partículas e uma equação de movimento, finalmente discutiremos um pouco sobre o processo de integração e principalmente sobre a dinâmica do sistema.

2.5 Dinâmica da equação do movimento

Como a equação de movimento (2.48) é não-linear, não é possível integrá-la analiticamente. Por isso, recorreremos a técnicas numéricas, no nosso caso, uma simulação auto-consistente. A idéia da simulação auto-consistente provém da interação dos campos eletromagnéticos com as coordenadas de posição e velocidade das partículas. A partir do momento que inicializamos um conjunto de partículas carregadas, podemos calcular os seus campos eletrostáticos e magnetostáticos. Estes campos, à medida que são gerados, alteram as

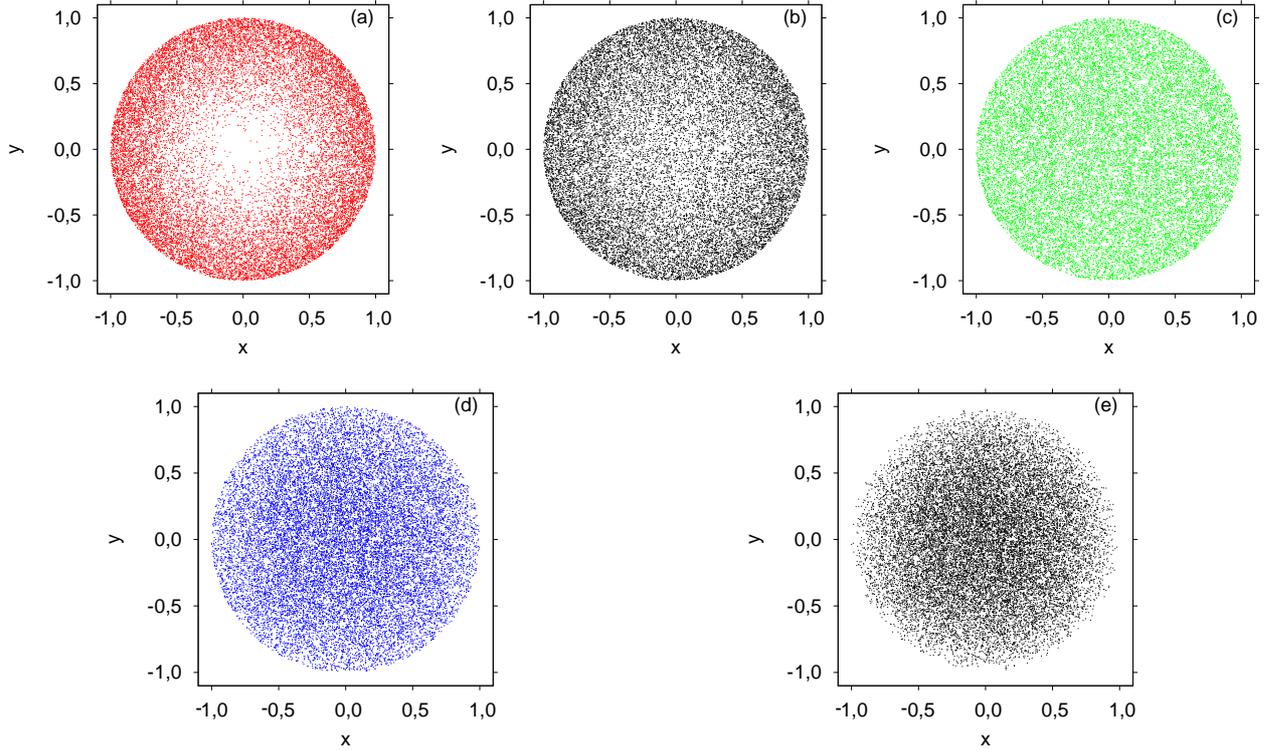


Figura 2.10: Espaço X - Y para cinco feixes com valores distintos de χ , distribuídos em sua secção reta de acordo com a equação (2.53) com $z = 0$, $r_b = 1$ e $v_0(z = 0) = 0$. Temos, (a) $\chi = 1,0$, (b) $\chi = 0,5$, (c) $\chi = 0,0$, (d) $\chi = -0,5$ e (e) $\chi = -1,0$.

coordenadas de posição e velocidade de cada partícula que os gerou. Estas novas mudanças de posição e velocidade gerarão novos campos e assim, o processo decorrerá de maneira auto-consistente.

Embora cada valor de χ da figura 2.9 possua um perfil particular para a distribuição inicial das partículas, todos eles possuem um grau de não-homogeneidade, com exceção do caso $\chi = 0,0$ que é uniforme. Sendo assim, escolheremos arbitrariamente o valor de $\chi = 0,6$ para ilustrar a dinâmica do feixe e o efeitos que surgirão.

Na figura 2.11 dividimos o espaço de fase em quadros, representando nove instantes de tempo distintos, os quais foram escolhidos especificamente para ilustrar as mudanças mais significativas que ocorrem no sistema. Ainda devemos lembrar que esse é um feixe casado e frio, ou seja, possui um raio máximo, $r_b = 1$, e todas as partículas foram inicializadas em $z = 0$ com velocidade radial nula, $v_0 = dr/dz = 0$.

No quadro (a) temos o estado inicial do feixe, onde todas as partículas estão distribuídas sobre a linha entre $r = 0$ e $r_b = 1$. Passados alguns instantes de tempo, inicia-se então um movimento de oscilação semelhante ao movimento de uma corda com as extremidades fixas, ou até mesmo de uma onda, como podemos observar no quadro (b).

O fato das extremidades se manterem fixas não é mera coincidência, mas sim um efeito direto da escolha de um feixe casado. A grande vantagem desse tipo de feixe é que ele restringe o trânsito das partículas entre $0 \leq r \leq r_b$ por um grande período de tempo. Essa restrição nos permitirá descrever analiticamente o fenômeno da quebra de onda com mais facilidade, como veremos nas próximas seções.

Em (c), vemos que à medida que o feixe evolui e as partículas vão interagindo entre si, formam-se frentes de ondas, com pequenos picos, até que em um determinado tempo crítico, $z_{wb} \approx 128$ (quadros (d), e (e)), ocorre o fenômeno da quebra de onda. Diferente de um processo ressonante onde as partículas seriam expelidas pouco a pouco para fora do feixe, a quebra de onda é um fenômeno brusco, ou seja, repentinamente jatos de partículas são expelidos do núcleo do feixe, circundando-o e criando uma nova estrutura em forma de anel, denominada “halo” (quadro (f)). Embora todos os mecanismos que formam o halo não sejam totalmente conhecidos [23], a quebra de onda tem função significativa neste processo, e por isso será o elemento de estudo da próxima seção.

No quadro (g), podemos notar que logo após o primeiro jato, outros sucessivos são lançados para o halo. Este processo mantém-se de maneira contínua, até resultar em uma difusão entre o halo e o núcleo do feixe⁴.

Mesmo que a ejeção de partículas não cesse, o sistema migra para um estado final de relaxação, ou seja, embora ainda exista uma troca de partículas entre o núcleo do feixe e o halo, o retrato do espaço de fase já não possui uma mudança tão significativa, como pode ser visto entre os quadros (h) e (i).

⁴No atual contexto, quando falamos em núcleo do feixe estamos nos referindo a linha de partículas mais escura que se destaca principalmente na região central do quadro (i) da figura.

2.5. Dinâmica da equação do movimento

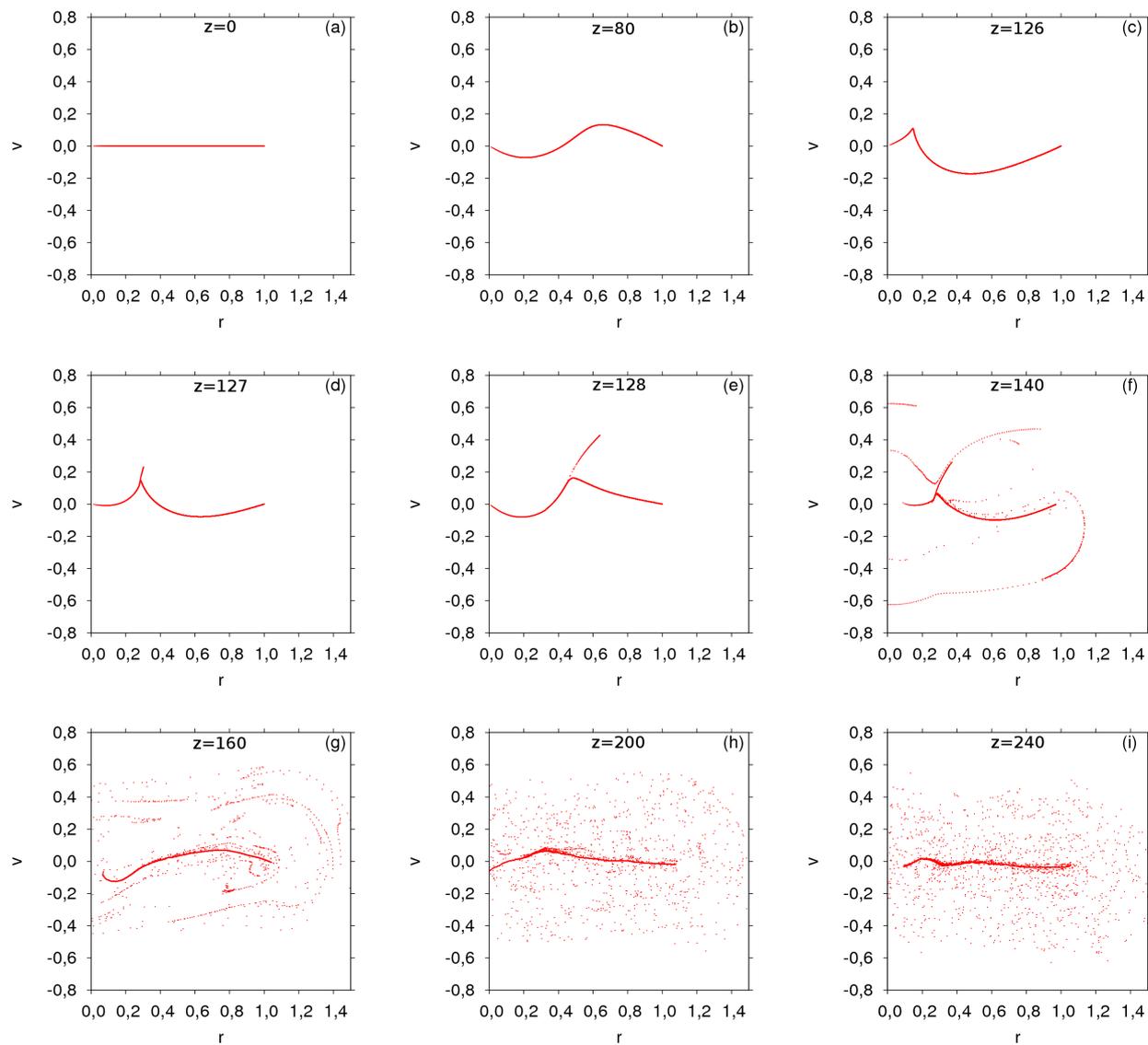


Figura 2.11: Evolução temporal de um feixe de partículas no espaço de fase. Dentro de cada um dos quadros exibimos o “tempo”, z , em que cada gráfico foi obtido.

Capítulo 3

Quebra de onda (*Wave breaking*)

Se estivermos tratando de um feixe frio e não-colisional, a dinâmica de todas as partículas será apenas de oscilação em torno de seus respectivos pontos de equilíbrio. Sendo assim, enquanto não houver o cruzamento entre elas, podemos interpretar o feixe como um fluido em regime laminar.

Isso nos permite afirmar que a carga, $Q(r, z)$, em uma determinada posição r , seja calculada através da carga inicial $Q(r_0, 0)$, onde $r_0 = r(z = 0)$. Logo, a quantidade de carga dQ , entre duas partículas vizinhas localizadas em uma posição r e $r + dr$, será dada por $dQ = 2\pi r n(r, z) dr = 2\pi r_0 n(r_0, 0) dr_0$, ou seja:

$$n(r, z) = n(r_0, 0) \frac{r_0}{r} \frac{1}{\partial r / \partial r_0} \quad (3.1)$$

Onde n determina a densidade de carga do sistema, e r a coordenada de cada partícula. A quebra de onda irá ocorrer quando a equação (3.1) desenvolver uma singularidade na função de densidade $n(r, z)$, ou seja, quando o fator $\partial r / \partial r_0$ tender a zero.

Aparentemente foi Dawson [32] o primeiro a descrever o fenômeno da quebra de onda relacionada à área de Física de Plasmas. Ainda que aplicado a um modelo de plasma frio, ele mostrou que, através de teorias de perturbação usuais [33], oscilações de grande amplitude podem provocar distorções no plasma, causando uma não unicidade do campo elétrico, e consequentemente, regiões com densidade de elétrons infinita.

Diferente de Dawson, Anderson [34] investigou a quebra de onda aplicada a feixes frios com efeito de carga espacial. Ele estimou o tempo de quebra de onda através da teoria de perturbação de Lindstedt-Poincaré [33] [35], que difere dos métodos tradicionais de perturbação pelo fato de considerar perturbações não só na amplitude mas também na frequência. Provavelmente, devido à ênfase do trabalho de Anderson ser focada na análise do crescimento da emitância e não na quebra de onda em si, ele desprezou os efeitos de quebra

de onda causados pela frequência de oscilação e efetuou seus critérios baseado puramente na amplitude de oscilação.

Mais recentemente Rizzato et al. [1], utilizando também a teoria de perturbação de Lindstedt-Poincaré, analisaram a quebra de onda no domínio da frequência para feixes casados.

Nossa principal contribuição nas seções seguintes será uma generalização do processo de quebra de onda. Analisaremos os seus efeitos tanto para o regime de frequências quanto de amplitudes. Essa análise ainda se estenderá para feixes descasados e, em trabalhos futuros, para feixes com temperatura.

3.1 Tratamento analítico para feixes casados

A solução da equação (2.48) pode ser aproximada através da teoria de perturbação de Lindstedt-Poincaré, isto é, vamos supor que cada partícula sofre pequenas flutuações ao redor do seu ponto de equilíbrio, $r_{eq} = \sqrt{Q(r)}$. Como as partículas não colidem, a carga inicial de cada uma delas é mantida até que ocorra a quebra de onda ($Q(r) = Q(r_0)$, onde $r_0 = r(z = 0)$). Dessa forma, para condições iniciais estacionárias, $v_0(z = 0) = 0$, temos em uma aproximação de primeira ordem para $r(z)$ [1] [2]:

$$r(z) \approx r_{eq} + A \cos(\omega z); \quad (3.2)$$

Onde $A = r_0 - r_{eq}$ é a amplitude de oscilação, $\omega = \omega(r_0) = \omega_0 + \omega_0 A^2 / 12r_{eq}^2$ [1] é a frequência renormalizada dependente de r_0 , e $\omega_0 = \sqrt{2}$ é a frequência não perturbada. A equação (3.2) é válida para qualquer tipo de feixe, casado ou não, e através dela podemos estimar o tempo de quebra de onda analiticamente.

Como mencionamos na seção anterior, a quebra de onda ocorre quando obtemos uma singularidade na função de densidade, ou seja, $\partial r(z) / \partial r_0 \rightarrow 0$. Sendo assim, se expressarmos a equação (3.2) em relação à derivada de r_0 , obtemos:

$$\frac{\partial r(z)}{\partial r_0} = \frac{\partial r_{eq}}{\partial r_0} + \frac{\partial [A \cos(\omega z)]}{\partial r_0}; \quad (3.3)$$

Derivando o segundo termo da direita por partes:

$$\frac{\partial r(z)}{\partial r_0} = \underbrace{\frac{\partial r_{eq}}{\partial r_0}}_{\mathbf{T}_1} + \underbrace{\cos(\omega z) \frac{\partial A}{\partial r_0}}_{\mathbf{T}_2} - \underbrace{Az \sin(\omega z) \frac{\partial \omega}{\partial r_0}}_{\mathbf{T}_3}; \quad (3.4)$$

Utilizando o critério de quebra de onda ($\partial r(z) / \partial r_0 \rightarrow 0$) e sabendo que $r_{eq} = \sqrt{Q(r_0)}$, temos:

$$0 = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{Q(r_0)}} \frac{\partial Q(r_0)}{\partial r_0}}_{T'_1} + \underbrace{\cos(\omega z) \frac{\partial A}{\partial r_0}}_{T'_2} - \underbrace{Az \operatorname{sen}(\omega z) \frac{\partial \omega}{\partial r_0}}_{T'_3}. \quad (3.5)$$

Quando a amplitude de oscilação “A” é suficientemente grande de tal forma que $\frac{\partial r_{eq}}{\partial r_0}$ seja maior que $\cos(\omega z) \frac{\partial A}{\partial r_0}$ na equação (3.4), a quebra de onda ocorre de maneira rápida (chamamos também de quebra de onda de amplitude), antes mesmo do $\cos(\omega z)$ completar um ciclo de oscilação. Nesse caso, também consideramos que o termo T_3 da equação (3.4) pode ser ignorado, já que ele cresce linearmente com z e a quebra acontece nos instante iniciais. Logo, podemos reescrever os mesmos termos T_1 , T_2 e T_3 , da equação (3.4), redefinidos como T'_1 , T'_2 e T'_3 através da equação (3.5), lembrando que estamos considerando $T'_3 = 0$. Sendo assim, obtemos a seguinte expressão para o tempo de quebra de onda:

$$z_{wb} \approx \min_{r_0} \left| \frac{1}{\omega_0} \arccos \left(- \frac{1}{2\sqrt{Q(r_0)}} \frac{\partial Q(r_0)/\partial r_0}{\partial A/\partial r_0} \right) \right|. \quad (3.6)$$

O fato de impormos que z_{wb} seja um mínimo em r_0 justifica-se simplesmente por querermos apenas a informação da primeira quebra de onda, e o sinal \approx deve-se ao fato de termos necessariamente que aproximar o valor de r_0 (que minimiza a função dentro do módulo), devido ao grau do polinômio formado. Veremos esses cálculos mais detalhadamente quando substituirmos $Q(r_0)$, ω_0 e A na equação (3.6).

Como foi mencionado anteriormente, o regime de quebra de onda rápida foi investigado por Anderson et al [34], por isso nos deteremos ao tratamento analítico da quebra de onda lenta (ou quebra de onda na frequência), e no final do capítulo analisaremos ambos os casos numericamente.

Quando a quebra de onda é um fenômeno puramente modulacional, ou seja, causado apenas por variações na frequência, o termo de amplitude $\cos(\omega z) \partial A / \partial r_0$ da equação (3.5) é nulo. Se escolhermos, por exemplo, um ponto onde temos um máximo de oscilação do seno¹, $\operatorname{sen}(\omega z) = 1$, podemos isolar z na equação (3.5) resultando em:

$$z_{wb} \approx \min_{r_0} \left| \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{Q(r_0)}} \frac{\partial Q(r_0)/\partial r_0}{A \partial \omega / \partial r_0}}_{T_4} \right|. \quad (3.7)$$

¹Como escolhemos um valor de específico para o $\operatorname{sen}(\omega z)$, nosso erro em z_{wb} é da ordem de um ciclo de seno.

Essa equação nos fornece a expressão para a quebra de onda lenta. Como as equações (3.6) e (3.7) são funções da carga, podemos determiná-las integrando o diferencial dQ . A saber:

$$dQ = \int_0^{r_0} 2\pi r n(r, \chi) dr. \quad (3.8)$$

Note que até agora todas as expressões obtidas são independentes do perfil de densidade escolhido, ou seja, até aqui estamos tratando o sistema de uma maneira geral. Se substituirmos o perfil de densidade parabólico obtido através da equação (2.53) na equação (3.8), teremos para a expressão da carga

$$Q(r_0) = \frac{r_0^2}{r_b^2} \left[\chi \left(\frac{r_0^2}{r_b^2} - 1 \right) + 1 \right]. \quad (3.9)$$

Agora nossa tarefa torna-se um pouco algébrica. Utilizando a expressão da carga $Q(r_0)$ para um feixe casado (equação (3.9) com $r_b = 1$) em conjunto com as expressões da amplitude de oscilação A e da frequência renormalizada ω (definidas através da equação (3.2)), obtemos para cada termo de T_4

$$\begin{aligned} \partial Q(r_0)/\partial r_0 &= 2 (r_0 - r_0\chi + 2r_0^3\chi) \\ A &= r_0 - \sqrt{Q(r_0)} = r_0 - \sqrt{r_0^2(1 + (-1 + r_0^2)\chi)} \\ \partial\omega/\partial r_0 &= \partial(\omega_0 + \omega_0 A^2/12r_{eq}^2)/\partial r_0 = \sqrt{2} + \frac{\left(r_0 - \sqrt{r_0^2(1 + (-1 + r_0^2)\chi)} \right)^2}{6\sqrt{2} r_0^2 (1 + (-1 + r_0^2)\chi)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substituindo os termos obtidos na equação (3.10) dentro da equação (3.7), obtemos para T_4

$$T_4 = -\frac{3\sqrt{2} (1 + (-1 + r_0^2)\chi)^{3/2} (1 + (-1 + 2r_0^2)\chi)}{r_0^2\chi (-1 + \sqrt{1 + (-1 + r_0^2)\chi})^2}; \quad (3.11)$$

Se minimizarmos T_4 em relação a r_0 estaremos encontrando o primeiro valor de r_0 (que para o exemplo específico da figura 3.1 encontra-se em torno de $r_0 \approx 0,4$) em que ocorre a quebra de onda. Contudo, nos interessa saber o mínimo de r_0 para um valor genérico de χ (primeiramente no domínio onde $\chi \in [0, 1]$), não apenas $\chi = 0,6$. O mínimo de uma função encontra-se no ponto onde sua derivada é nula. Se fizermos esse procedimento para T_4 , obtemos:

$$\frac{dT_4}{dr_0} = \frac{6 \left\{ 2(1 - \gamma) + \chi [6\eta - 2r_0^6\chi^2 + 4\gamma - r_0^2\eta(-3\eta + \gamma) - 2\chi(\chi + \gamma) + r_0^4\chi(\eta + 6\gamma)] \right\}}{\sqrt{2}r_0^3\chi(-1 + \gamma)^3} = 0; \quad (3.12)$$

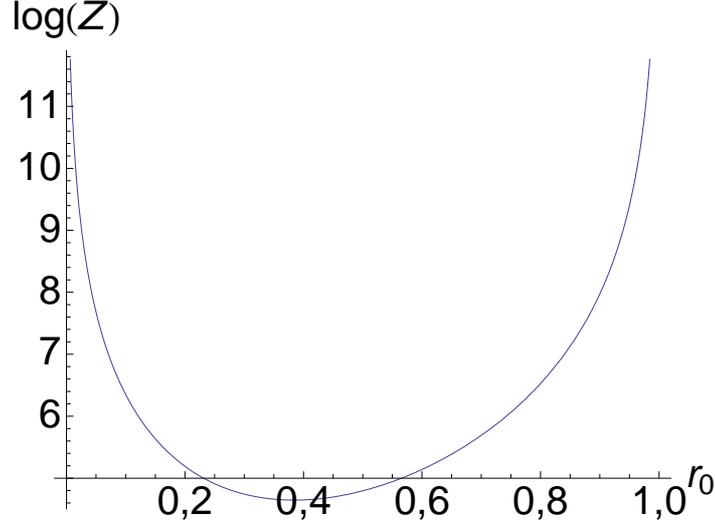


Figura 3.1: Quebra de onda (z_{wb}) em função do tamanho r_0 inicial de cada partícula para um perfil de densidade não-homogêneo com $\chi = 0,6$.

onde $\gamma = \sqrt{1 + (-1 + r_0^2)\chi}$ e $\eta = \chi - 1$. Note que dT_4/dr_0 é um polinômio que apresenta no mínimo grau 6, o que significa que não possui uma solução analítica simples, então, vamos optar por expandi-lo em série de potências e utilizar os termos de menor ordem. Em segunda ordem obtemos:

$$\frac{dT_4}{dr_0} \approx -6[\sqrt{2}(-1 + \chi)^2(-1 + \sqrt{1 - \chi} + \chi)] + 9\sqrt{2}(-1 + \chi)^2\chi r_0^2 + O[r_0]^4 = 0; \quad (3.13)$$

Com raízes:

$$r_0 = \pm \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(-1 + \chi)^2(-1 + \sqrt{1 - \chi} + \chi)}}{\sqrt{(-1 + \chi)^2\chi}}; \quad (3.14)$$

Como r_0 negativo não tem sentido físico para o nosso sistema, utilizaremos apenas a raiz positiva. Substituindo r_0 da equação anterior em T_4 (equação (3.11)), e esse resultado na equação (3.7), obtemos enfim a expressão da quebra de onda em função de χ

$$z_{wb} \approx \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \frac{\alpha^3(4\sqrt{1 - \chi} + \chi - 1)}{(\sqrt{3} - \alpha)^2(\sqrt{1 - \chi} + \chi - 1)}; \quad (3.15)$$

onde $\alpha \equiv (1 + 2\sqrt{1 - \chi} - \chi)^{3/2}$. A expressão acima é a mesma obtida por Rizzato et al [1], e vale apenas para feixes casados, ou seja, quando a partícula que está na borda do feixe, localizada em r_b , está parada.

3.2 Tratamento analítico para feixes descasados

Diferente do caso casado, o feixe descasado não possui uma partícula em repouso na sua borda, mas sim em algum ponto interno a ele. Sendo assim, precisamos determinar esse novo ponto de equilíbrio, o qual chamaremos daqui por diante de r^* .

Nosso ponto de partida será novamente a equação (2.48), que será combinada com a expressão da carga para feixes parabólicos (equação (3.9)). Como já mencionamos anteriormente, as partículas não se cruzam antes que ocorra a primeira quebra de onda, sendo assim podemos atribuir novamente os índices: $r = r(z = 0) = r_0$ e $Q(r) = Q(r_0)$ para os valores iniciais de posição e carga respectivamente. Logo:

$$r - \frac{Q(r)}{r} = r_0 - \frac{Q(r_0)}{r_0} = -r_0^2 + \frac{r_0^2}{r_b^2} \left[\chi \left(\frac{r_0^2}{r_b^2} - 1 \right) + 1 \right]; \quad (3.16)$$

evidenciando os termos comuns, obtemos:

$$\frac{\chi}{r_b^4} r_0^4 - \left(1 - \frac{1}{r_b^2} + \frac{\chi}{r_b^2} \right) r_0^2 = 0; \quad (3.17)$$

que é um polinômio de grau 4 com duas raízes iguais a zero e outras duas raízes iguais a:

$$r_0 = \pm r_b \sqrt{\frac{(r_b^2 - 1) + \chi}{\chi}}. \quad (3.18)$$

Desprezaremos a raiz negativa, pois para nossas análises apenas r^* positivo faz sentido fisicamente. Sendo assim:

$$r^* = r_b \sqrt{\frac{(r_b^2 - 1) + \chi}{\chi}}, \quad (3.19)$$

onde r^* é o novo ponto de equilíbrio para feixes descasados.

Na figura 3.2 selecionamos o espaço de fase de dois feixes descasados, diferindo em seu ponto de quebra de onda. Reparem que no quadro (a) temos um feixe que sofre quebra de onda na borda e em (b), ela ocorre no meio do feixe. Esse comportamento pode ser observado para outros tipos de feixes, com valores diferentes para o χ . Sendo assim, optamos em separar a dinâmica dos feixes em duas regiões: uma para $0 < r < r^*$ (quando a quebra de onda é no meio do feixe) e outra para $r > r^*$ (quando a quebra é na borda).

Assim, quando a quebra de onda é interna, ela se equivale ao caso do feixe casado, pois se calcularmos o campo elétrico em um ponto “P”, onde $r = r^*$, as partículas que possuem

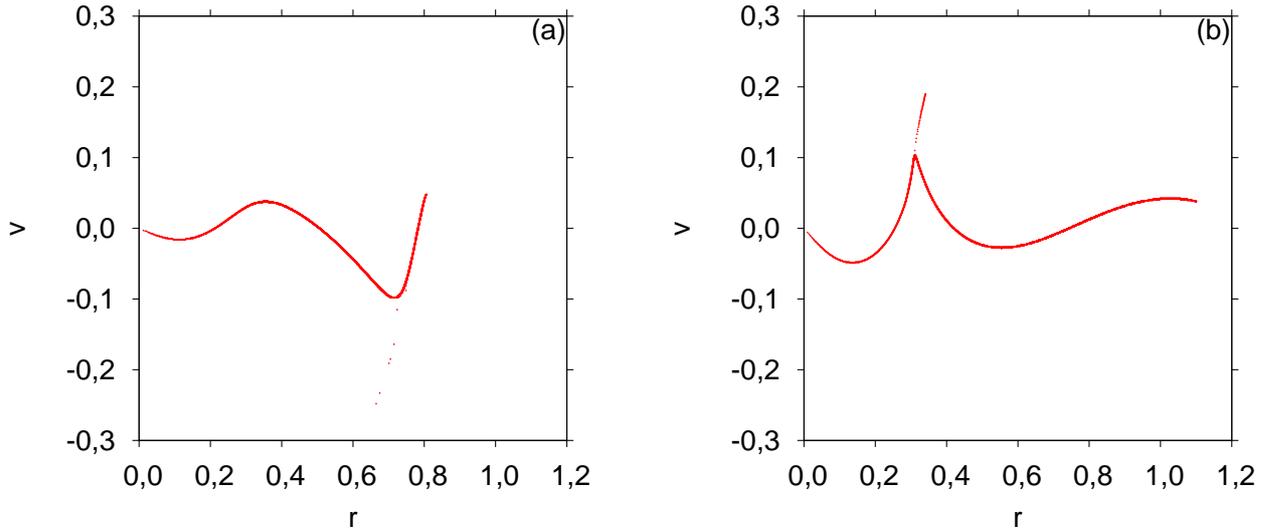


Figura 3.2: (a) Espaço de fase de um feixe descasado. Em (a), com $r_b = 0,80$ e $r^* > 0$. E em (b), com $r_b = 0,90$ e $0 > r > r^*$.

um raio $r > r^*$ não exercerão força elétrica em P, devido a simetria cilíndrica do feixe². Sendo assim o feixe descasado com quebra de onda interna se comportará como um feixe casado. Mas para que possamos reutilizar a expressão (3.7) dos feixes casados, precisamos renormalizar r_0 e $Q(r_0)$ em função de r^* e, por fim, restabelecer uma nova expressão para χ em função dos novos parâmetros. A renormalização de r_0 e $Q(r_0)$ pode ser feita via uma transformação linear do tipo:

$$r'_0 = \lambda_1 r_0; \quad (3.20)$$

$$Q' = \lambda_2 Q(r_0). \quad (3.21)$$

Nessas expressões r'_0 e Q' serão a nova carga e a nova posição de cada partícula, respectivamente, e λ_1 e λ_2 os respectivos fatores de conversão. O fator λ_1 não precisa ser calculado, e pode ser facilmente obtido com argumentos físicos, pois r'_0 é nada mais do que r_0 do feixe casado, normalizado pelo novo raio de equilíbrio r^* , ou seja, $\lambda_1 = 1/r^*$. Para calcular λ_2 , utilizaremos a expressão da carga (equação (3.9)) e substituiremos $Q(r_0)$ e r_0 pelas transformações obtidas em (3.21). Logo:

²Vide Lei de Gauss, teorema das cascas [31].

$$\begin{aligned}
 Q(r_0) &= \frac{r_0^2}{r_b^2} \left[\chi \left(\frac{r_0^2}{r_b^2} - 1 \right) + 1 \right] = \frac{r_0^2}{r_b^2} \left[(1 - \chi) + \chi \frac{r_0^2}{r_b^2} \right]; \\
 \frac{Q'}{\lambda_2} &= \frac{r_0'^2}{\lambda_1^2 r_b^2} \left[(1 - \chi) + \chi \frac{r_0'^2}{\lambda_1^2 r_b^2} \right]; \\
 Q' &= r_0'^2 \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2 r_b^2} (1 - \chi) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1^4 r_b^4} \chi r_0'^2 \right];
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Como a nova carga total Q' deve ser normalizada, temos $Q' = 1$. Assim:

$$1 = r_0'^2 \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2 r_b^2} (1 - \chi) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1^4 r_b^4} \chi r_0'^2 \right]; \tag{3.23}$$

Como sabemos que $\lambda_1 = 1/r_*$, podemos isolar λ_2 e enfim obtermos o seu valor em função de χ e r_b . Logo:

$$\lambda_2 = \frac{\chi}{r_b^2 (-1 + r_b^2 + \chi)}; \tag{3.24}$$

Como dissemos anteriormente, o feixe descasado com quebra de onda interna se comporta como um feixe casado. Logo se compararmos a antiga expressão da carga (equação (3.9) com $r_b = 1$) termo a termo com a nova expressão da carga (equação (3.22)) vemos que elas são iguais somente se:

$$\begin{aligned}
 (1 - \chi') &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2 r_b^2} (1 - \chi); \\
 \chi' &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1^4 r_b^4} \chi;
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde χ' é o novo fator de não-homogeneidade. Substituindo os valor de λ_1 e λ_2 em qualquer uma das equações de (3.25), obtemos para χ' :

$$\chi' = \frac{\chi}{\lambda_2 r_b^4} = 1 + \frac{(\chi - 1)}{r_b^2}; \tag{3.26}$$

Se substituirmos a equação (3.26) na expressão da quebra de onda (3.7), obtemos a equação para quebra de onda na borda:

$$z_{wb}^i \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha^3 (4r_b \sqrt{1 - \chi} + \chi - 1)}{r_b (r_b \sqrt{3} - \alpha)^2 (r_b \sqrt{1 - \chi} + \chi - 1)}; \tag{3.27}$$

Onde $\alpha = (1 + 2r_b\sqrt{1-\chi} - \chi)^{1/2}$, com a condição $r_*^2 > 0$, isto é, $r_b > \sqrt{1-\chi}$, satisfeita.

Da equação (3.27) podemos recuperar o resultado encontrado por Rizzato et al. [1] fazendo $r_b = 1$. Que estima a quebra de onda para feixes casados.

Quando $r > r_*$ temos a primeira quebra de onda na borda do feixe. Como o próprio nome sugere, o primeiro jato de partículas é expelido da borda do feixe. Sendo assim, o r_0 que minimiza o termo T_4 (na equação (3.11)) é o próprio r_b , pois, por definição, r_b é o raio máximo do feixe no instante inicial. Sendo assim, fazendo $r_0 = r_b$ na equação (3.11), e substituindo esse resultado na equação (3.7), temos para a quebra de onda na borda:

$$z_{wb}^b \approx \frac{3\sqrt{2}(\chi + 1)}{r_b(r_b - 1)^2\chi}. \quad (3.28)$$

Na seção seguinte discutiremos os aspectos z_{wb}^b e z_{wb}^i frente a soluções numéricas, bem como os efeitos que iremos prever.

3.3 Controlando a quebra de onda

O comportamento das expressões de z_{wb}^i e z_{wb}^b pode ser comparado à simulação auto-consistente se olharmos a figura 3.3. Nela analisamos o tempo de quebra de onda em função do descasamento inicial r_b para um feixe parabólico com não-homogeneidade $\chi = 0, 6$.

Um detalhe que chama muito a atenção na figura 3.3 é o fato do feixe casado ($r_b = 1$) não possuir o maior tempo sem quebra de onda. Esse comportamento inusitado de certa forma surpreende, pois vai contra a idéia de descasamento que, pra muitos autores é um dos responsáveis pela geração do halo [36].

Inspecionando a figura 3.3 vemos que o feixe que mais se prolonga até sofrer quebra de onda é o inicializado em $r_b \approx 0, 8527$ (ou como chamamos na figura, r_c), tempo este que é em torno de quatro vezes maior que o do feixe casado. E embora exista uma leve diferença entre a curva que representa o tempo de quebra de onda para z_{wb}^b e a solução numérica nas bordas da figura, ambas corroboram o máximo em r_c .

Vale lembrar que as expressões de z_{wb}^b e z_{wb}^i são válidas apenas para $\chi \in [0, 1]$. Para $\chi < 0$ utilizaremos o mesmo procedimento matemático das seções anteriores, e que por isso não será repetido aqui, resultando nas seguintes expressões:

$$z_{wb}^i \approx \frac{3}{5} \frac{[25(1-\chi)r_b^4 - 2\beta^2]\beta^3\sqrt{2}}{r_b^3(5r_b^3 - \beta)^2(2r_b^2 - \chi + 1)^2(r_b^2 + \chi - 1)}; \quad (3.29)$$

Onde $\beta = [4r_b^6 - (\chi - 1)(25r_b^4 + (\chi - 1)(3r_b^2 - \chi + 1))]^{1/2}$. E para a quebra de onda na borda:

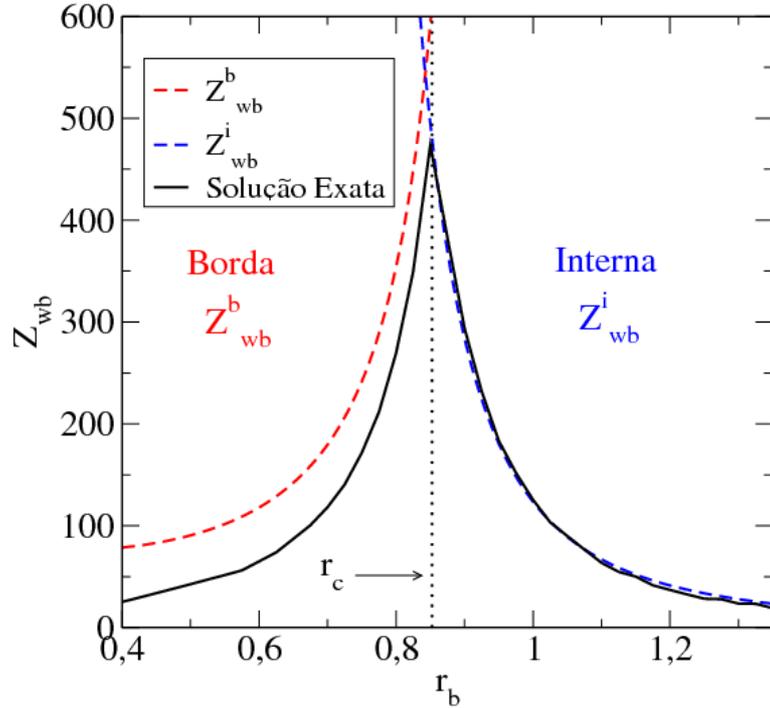


Figura 3.3: Tempo de quebra de onda em função do tamanho inicial do feixe. As curvas em tracejado representam as soluções analíticas (z_{wb}^b e z_{wb}^i) e a curva sólida, a solução numérica autoconsistente. Para ambas os casos, adotamos $\chi = 0,6$.

$$z_{wb}^b \approx -\frac{3\sqrt{2}(\chi + 1)}{r_b(r_b - 1)^2\chi}. \quad (3.30)$$

Uma observação importante é que, embora estejamos interessados na primeira quebra de onda, o comportamento do feixe após o primeiro jato de partículas é uma competição entre z_{wb}^b e z_{wb}^i , tanto para o caso de $\chi > 0$ quanto para $\chi < 0$. Ou seja, depois da primeira quebra, o tempo de quebra de onda será determinado através do mínimo: $z_{wb} = \min[z_{wb}^b, z_{wb}^i]$.

Para concluir nossa análise e deixá-la mais completa, podemos investigar a não-homogeneidade χ e o descasamento r_b do feixe de maneira unificada. Para isso, construímos a figura 3.4, onde o tempo de quebra de onda está codificado em uma escala de cores, e r_b e χ estão dispostos nos eixos horizontal e vertical respectivamente.

Podemos observar, para uma larga extensão de parâmetros, as regiões de quebra de onda rápida e quebra de onda lenta. As curvas analíticas, representadas pelas linhas pontilhadas, indicam o lugar onde a quebra de onda é máxima para um dado valor de χ e r_b . Novamente, se confirmam as nossas análises anteriores, mostrando que a quebra de onda não depende apenas da não-homogeneidade da distribuição de partículas ao longo do feixe, mas também do seu tamanho r_b inicial.

Outro ponto importante a ser observado é a transição entre a quebra de onda rápida

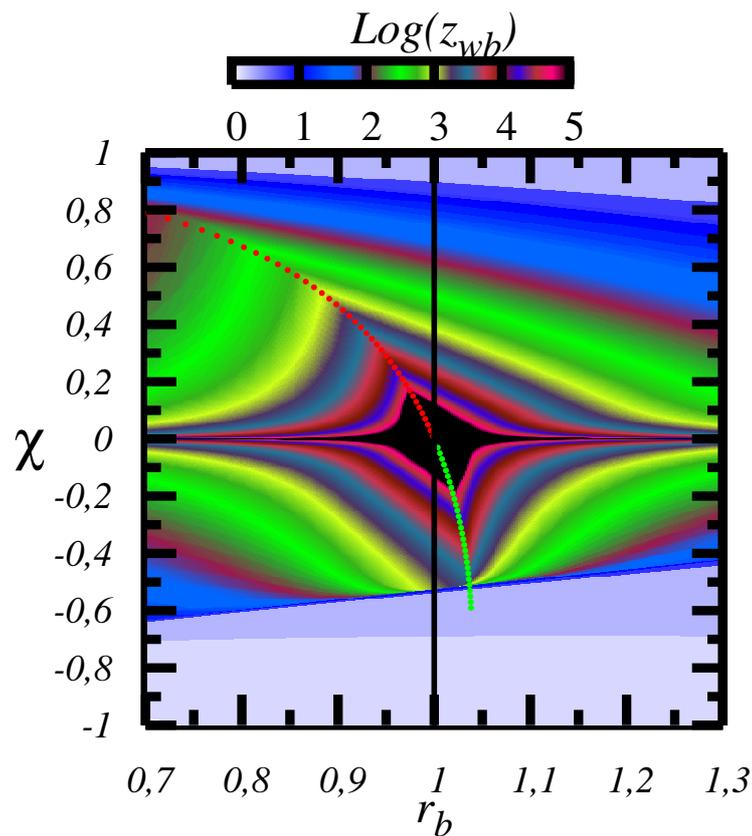


Figura 3.4: Representação, em escala \log_{10} , do tempo de quebra de onda do feixe (z_{wb}) em função da não-homogeneidade (χ) e raio máximo (r_b) iniciais.

e lenta (regiões claras próximas a zero na escala de cores) próxima as bordas da figura. Note que uma pequena mudança em r_b pode levar o sistema de uma quebra de onda longa para um regime de quebra de onda quase instantâneo, o que causaria efeitos catastróficos em um acelerador de partículas. Todos esses resultados foram publicados e encontram-se na referência [2].

Capítulo 4

Regime de relaxação

Até agora demos ênfase apenas à dinâmica não estacionária do feixe, ou seja nos preocupamos com o que acontece com ele a partir do momento em que ele é lançado no canal solenoidal até o momento que ocorre a primeira quebra de onda. Contudo, o que ocorre depois disso?

Esta pergunta pode ser respondida com base nos quadros da figura 2.11 da página 22. Como discutimos anteriormente, logo após a primeira quebra de onda (quadro (e)) o feixe ejeta continuamente jatos de partículas até chegar próximo de um estado de relaxação, um estado estacionário (quadro (i)).

Estudando o estado estacionário podemos entender melhor como certas condições iniciais podem implicar em comportamentos indesejados no estado final, como a formação do halo. Para tanto, utilizaremos técnicas Lagrangeanas para construir um modelo de baixa dimensionalidade, onde as equações diferenciais simulam a dinâmica da não-homogeneidade χ (nas análises das seções anteriores χ era determinado pelas condições iniciais e a dinâmica autoconsistente do sistema de partículas).

Estas equações diferenciais serão integradas simultaneamente com um modelo de partículas testes [18] e descreverão o movimento de oscilação médio do núcleo do feixe e como ele interage com as partículas-teste para formar o halo e subsequentemente provocar a relaxação do feixe. Esse resultado será comparado a uma simulação autoconsistente (baseado na equação (2.48)). E por fim, com o auxílio de quantidades conservadas e a equação do envelope do feixe, determinaremos a emitância do estado relaxado.

Na seção seguinte introduziremos os conceitos de emitância e envelope de um feixe. Na sequência construiremos o modelo para a dinâmica do núcleo do feixe baseada na não-homogeneidade χ . No final determinaremos a emitância do estado relaxado.

4.1 Emitância de um feixe

No momento em que geramos um feixe de partículas, cada ponto na superfície da fonte emite partículas em diferentes direções com diferentes velocidades. Isto faz com que existam diferenças na produção de feixe para feixe, tornando necessário medir a qualidade de cada um deles. A quantidade que mede esta qualidade é denominada “emitância” [15] [17].

Se cada partícula do feixe for descrita através de três coordenadas de posição (x, y, z) e três coordenadas de momentum (p_x, p_y, p_z) , elas representam um único ponto em um espaço de fase hexadimensional (na verdade um hiperespaço, por ter mais de três dimensões). Contudo, vemos que na prática (e em grande parte dos livros da área [15], [11], [16], [17], [9]), é mais conveniente trabalhar com projeções bidimensionais do espaço de fase, com ângulos x' e y' ao invés dos momentos p_x e p_y , a fase ϕ no lugar da coordenada z , e a energia ΔW no lugar do momento p_z . O que implica em tratar os seguintes planos: $x' - x$, $y' - y$ e $\Delta W - \Delta\phi$, onde os dois primeiros representam a emitância transversal $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ e o último a emitância longitudinal (ε_z) .

Devido a essa mudança de variáveis, normalmente medimos a emitância transversal em mm · mrad (milímetros x miliradianos) e a emitância longitudinal em deg · keV (graus x quilo-elétron volt) ou ns · keV (nanosegundos x quilo-elétron volt).

Quando as forças em um sistema conservativo são todas lineares, com autovalores imaginários puros (como é o caso de dipolos e quadrupolos), a trajetória de cada partícula no espaço de fase permanece dentro de uma elipse (apêndice B.1). Devido a essa tendência, torna-se conveniente definir a emitância como a área do espaço de fase dividida por π , ou seja:

$$\varepsilon = \frac{\text{Área}}{\pi}. \quad (4.1)$$

Essa elipse pode ser parametrizada e descrita por um equação geral do tipo:

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \varepsilon. \quad (4.2)$$

Onde γ , α e β são parâmetros geométricos que definem a forma da elipse no espaço de fase, chamados invariantes de Courant-Snyder [37] (ou *Twiss parameters* [9]), como podemos observar na figura 4.1.

Embora sistemas sob a ação de forças lineares preencham o espaço de fase de acordo com a figura de uma elipse de área constante (de acordo com as restrições que mencionamos), quando tratamos feixes reais algumas partículas não seguem essa geometria, podendo se

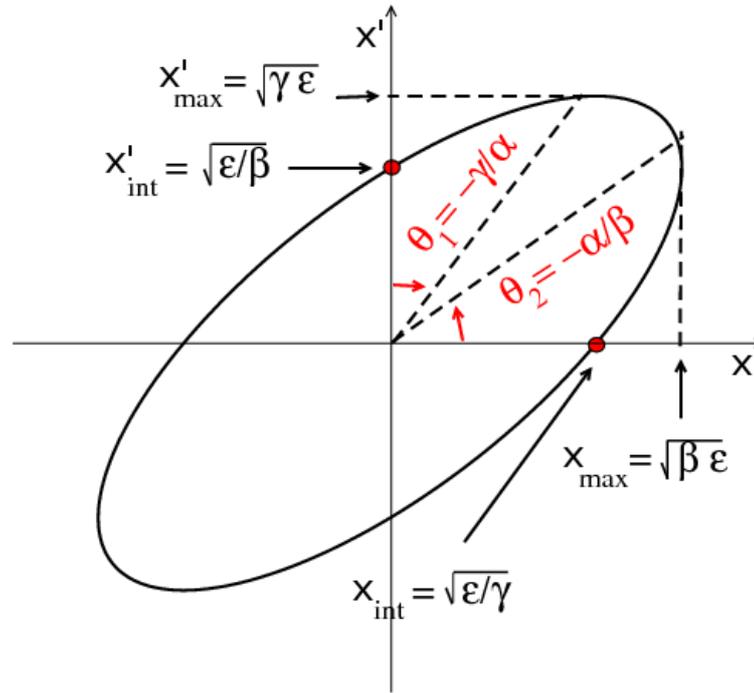


Figura 4.1: Elipse que representa a emitância transversal no espaço de fase e seus respectivos parâmetros geométricos.

dispersar um pouco do centro dessa elipse. Sendo assim, torna-se conveniente definir várias elipses, onde cada uma delas contém diferentes frações de partículas, como podemos ver na figura 4.2. Em nosso caso as curvas de emitância apresentam 65%, 95%, 99% e 100% das partículas do espaço de fase.

4.1.1 Emitância RMS

Quando o sistema possui forças não-lineares realmente consideráveis, ao ponto de expelir as partículas para longe do núcleo do feixe, a forma elíptica do espaço de fase é totalmente deformada (como podemos ver nos quadros da figura 2.11), página 22. Sendo assim, torna-se mais conveniente adotar o conceito de emitância RMS utilizado por Sacherer [19] e Lapostolle [20], que leva em conta os segundos momentos estatísticos de r e v , onde r é a posição de cada partícula e v a velocidade na direção radial. Logo, podemos escrever a emitância RMS radial como:

$$\epsilon_{rms}^r = \sqrt{4(\langle r^2 \rangle \langle v^2 \rangle - \langle rv \rangle^2)}. \quad (4.3)$$

Agora, não só a área do espaço de fase define a emitância, mas também leva-se em conta a correlação entre r e v , ou seja, o quanto r e v se relacionam linearmente. Um bom

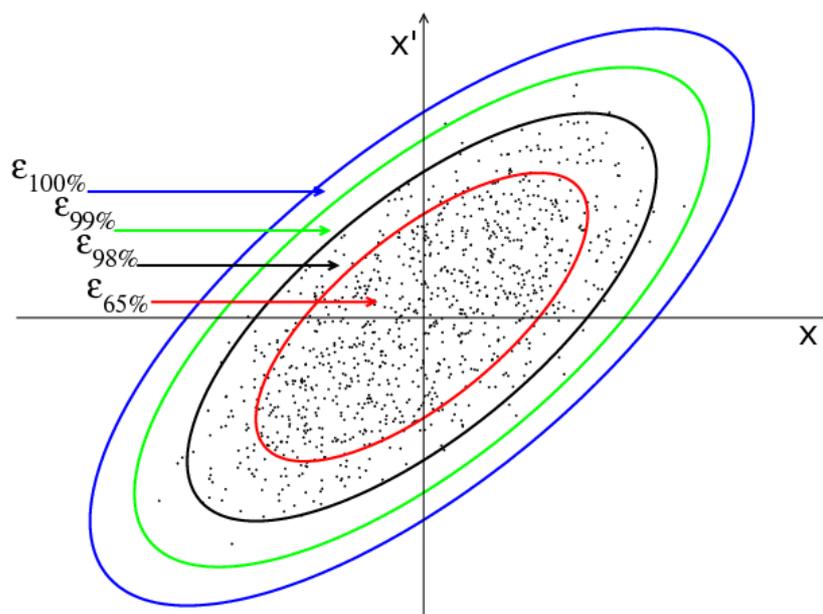


Figura 4.2: Comparação de quatro curvas de emitância no espaço de fase, com a porcentagem de partículas envolvida por elas. Todas elas foram geradas a partir de um feixe com 1000 partículas e uma distribuição gaussiana.

exercício para entender a influência do termo de correlação da emitância é observar alguns casos particulares, como os que mostramos na figura 4.3.

Nela exibimos o comportamento de dois feixes (nos quadros (a) e (b)) onde em ambos podemos ver que as partículas estão distribuídas no espaço de fase na forma de linhas. Sendo assim, ambas possuem área igual à zero. Em (a), temos uma distribuição de partículas que forma uma linha reta, nesse caso $\varepsilon_{rms} = 0$, pois a relação entre r e v é linear, logo tanto o primeiro quanto o segundo termo do radicando da equação (4.3) se equivalem.

Já em (b) a relação entre eles é não-linear, ou seja, o segundo termo do radicando da equação (4.3) é menor que o primeiro, e por isso a emitância é diferente de zero. Assim, podemos concluir que a definição de emitância rms não depende apenas da área ocupada no espaço de fase, como na definição da equação (4.1), mas também das distorções produzidas pelas forças não-lineares.

4.2 Equação do envelope de um feixe

A equação do envelope de um feixe nada mais é do que uma equação diferencial que descreve o comportamento do feixe sob a ótica do raio inicial máximo, r_b . Uma maneira simples de deduzi-la é partir diretamente da definição do raio do envelope e, depois, a partir de suas derivadas primeira e segunda, combiná-la com a definição de emitância RMS. Podemos definir o raio do envelope como:

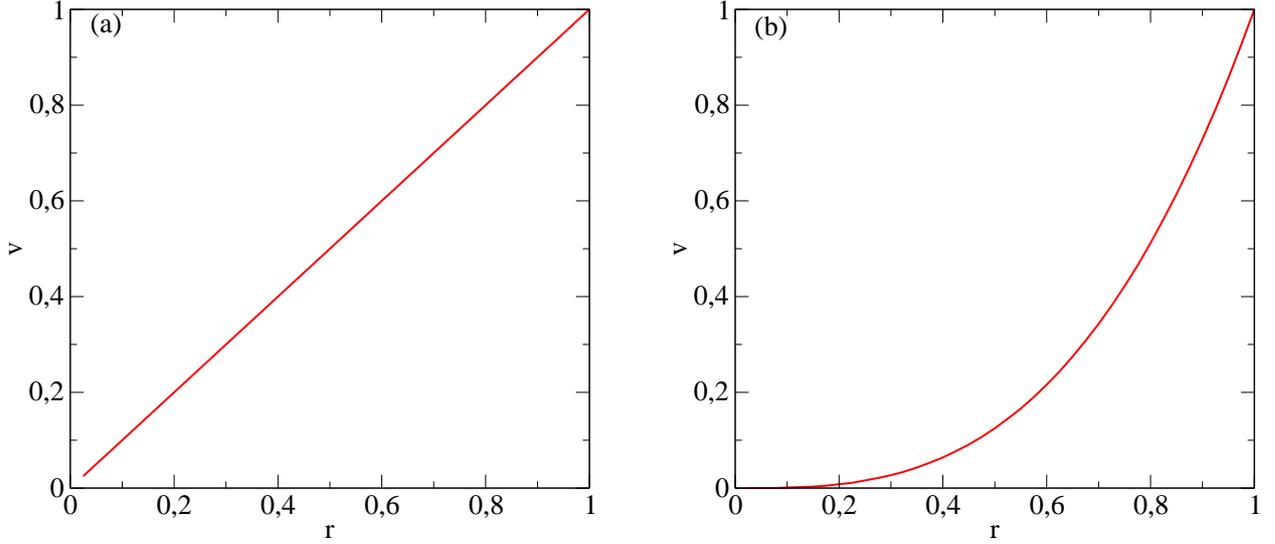


Figura 4.3: Espaço de fase de dois feixes com emitância radial rms, ε_{rms}^r , distinta. Em (a), uma linha reta onde $\varepsilon_{rms}^r = 0$ e em (b), uma linha curva onde $\varepsilon_{rms}^r \neq 0$.

$$r_b \equiv \sqrt{2\langle r^2 \rangle}. \quad (4.4)$$

Se lembrarmos que o vetor \vec{r} depende da coordenada z , ou seja, $\vec{r}(z)$, podemos derivar o raio do envelope (r_b) em relação a z , obtendo:

$$\frac{dr_b}{dz} \equiv \dot{r}_b = \sqrt{2} \frac{2\langle \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \rangle}{2\langle r^2 \rangle^{1/2}} = \frac{\overbrace{2\langle \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \rangle}^u}{\underbrace{r_b}_v}. \quad (4.5)$$

Calculando agora, com a derivada do quociente $\left(\frac{d}{dz} \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dz) - u(dv/dz)}{v^2}\right)$, a segunda derivada de r_b em relação a z :

$$\frac{d^2 r_b}{dz^2} \equiv \ddot{r}_b = \frac{2 \left[\underbrace{r_b}_v \overbrace{\langle \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} \rangle}^{u'} - \underbrace{\dot{r}_b}_{v'} \overbrace{\langle \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \rangle}^u \right]}{\underbrace{r_b^2}_v}. \quad (4.6)$$

Substituindo \dot{r}_b , da equação anterior, pelo valor encontrado na equação (4.5), obtemos com um pouco de álgebra:

$$\ddot{r}_b = \frac{2}{r_b^2} \left[r_b \langle \dot{r}^2 \rangle + r_b \langle \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} \rangle - \frac{2}{r_b} \langle \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \rangle^2 \right] = \frac{1}{r_b^3} \left(2r_b^2 \langle \dot{r}^2 \rangle - 4 \langle \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \rangle^2 \right) + \frac{2}{r_b} \langle \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} \rangle. \quad (4.7)$$

Substituindo r_b^2 , presente no numerador da equação anterior, pela definição de r_b da equação (4.4), temos:

$$\ddot{r}_b = \frac{1}{r_b^3} \left[\underbrace{4 \left(\langle r^2 \rangle \langle \dot{r}^2 \rangle - \langle \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \rangle^2 \right)}_{T_1} \right] + \frac{2}{r_b} \langle \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} \rangle. \quad (4.8)$$

Se observarmos o termo T_1 , sabendo que $\dot{r} = v$, podemos identificá-lo como o quadrado da emitância RMS (equação (4.3)). Sendo assim, podemos reescrever a equação anterior como:

$$\ddot{r}_b = \frac{\varepsilon_{rms}^2}{r_b^3} + \frac{2}{r_b} \langle \vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} \rangle. \quad (4.9)$$

A equação de movimento de uma partícula, na direção transversal, pode ser descrita como um termo atrativo (que representa a focalização magnética solenoidal), $-\kappa\vec{r}$, adicionada a uma função potencial repulsiva, $\nabla\psi(r, z)$, ou seja:

$$\ddot{\vec{r}} = -\kappa\vec{r} - \nabla\psi(r, z). \quad (4.10)$$

Se substituirmos $\ddot{\vec{r}}$ da equação anterior na equação (4.9), obtemos:

$$\ddot{r}_b = \frac{\varepsilon_{rms}^2}{r_b^3} + \frac{2}{r_b} \left\langle \vec{r} \cdot \left[-\kappa\vec{r} - \nabla\psi(r, z) \right] \right\rangle = \frac{\varepsilon_{rms}^2}{r_b^3} - \kappa r_b - \frac{2}{r_b} \langle \vec{r} \cdot \nabla\psi(r, z) \rangle. \quad (4.11)$$

O termo $\langle \vec{r} \cdot \nabla\psi(r, z) \rangle$ (que representará parte da força elétrica), pode ser reescrito através da própria definição de média, ou seja:

$$\langle \vec{r} \cdot \nabla\psi(r, z) \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_w} r dr \left(r \cdot \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) n(r). \quad (4.12)$$

Para determinarmos $n(r)$ na equação anterior, podemos utilizar a equação de Poisson escrita adequadamente em função do potencial adimensional ψ , como:

$$\nabla^2\psi = -\frac{2\pi K}{N} n(r, z), \quad (4.13)$$

assim, o Laplaciano na direção radial, $\nabla^2\psi$, pode ser escrito como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = -\frac{2\pi K}{N} n(r, z). \quad (4.14)$$

Isolando $n(r, z)$ na equação anterior e substituindo esse resultado na equação (4.12), obtemos:

$$\langle \vec{r} \cdot \nabla \psi(r, z) \rangle = \langle \vec{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \rangle = \frac{2\pi}{N} \int_0^{r_w} \left(r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \left(-\frac{N}{2\pi K} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) r dr; \quad (4.15)$$

$$\langle \vec{r} \cdot \nabla \psi(r, z) \rangle = -\frac{1}{K} \int_0^{r_w} \left(r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) d \left(r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right); \quad (4.16)$$

onde r_w é o raio do tubo que envolve o feixe e $\partial \psi / \partial r$ é o próprio campo elétrico radial, E_r .

Integrando a equação anterior:

$$\langle \vec{r} \cdot \nabla \psi(r, z) \rangle = -\frac{1}{2K} (r^2 E_r^2) \Big|_0^{r_w}. \quad (4.17)$$

Sabendo que o campo elétrico adimensional, E_r , pode ser definido em função da perveância, $E_r = K/r$ [16]. Logo:

$$\langle \vec{r} \cdot \nabla \psi(r, z) \rangle = -K/2. \quad (4.18)$$

Assim, se utilizarmos o resultado da expressão anterior, na equação (4.11), temos:

$$\ddot{r}_b = -\kappa r_b + \frac{K}{r_b} + \frac{\varepsilon_{rms}^2}{r_b^3}, \quad (4.19)$$

que é a equação do envelope do feixe para um perfil de densidade uniforme. Utilizaremos essa equação em seções seguintes, especialmente quando formos descrever as partículas-teste e sua dinâmica.

4.3 O modelo analítico para a não-homogeneidade χ

Novamente, como no caso da descrição analítica da quebra de onda, vamos considerar que as partículas do nosso feixe encontram-se em um regime de fluido laminar, ou seja, para cada coordenada r em determinado tempo z , podemos associar apenas uma única velocidade radial v . Também assumiremos que a carga de cada partícula que compõe o núcleo do feixe é a mesma em todos os instantes de tempo, ou seja, $Q(r, z) = Q(r_0)$, onde $r_0 = r(z = 0)$ é a coordenada de cada partícula no instante inicial $z = 0$.

Sabendo disto, a equação diferencial (2.48) pode ser modelada a partir do Lagrangeano \mathcal{L} de uma única partícula. Logo:

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}) = \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{r^2}{2} + Q(r_0) \ln(r). \quad (4.20)$$

Como nosso sistema possui N partículas, o Lagrangeano transversal total pode ser obtido multiplicando o Lagrangeano \mathcal{L} de uma única partícula, pelo número total de partículas desde $r_0 = r(z = 0)$ até um tamanho máximo r_b . Estas então serão somadas sobre toda a área da secção transversal através de uma integral e avaliadas sobre todas as condições iniciais, ou seja:

$$L = \int \mathcal{L}(r, \dot{r}) n(r, \chi) r dr d\theta, \quad (4.21)$$

onde $n(r, \chi)$ é a densidade parabólica já proposta pela equação (2.53) e $r dr d\theta$ é o elemento infinitesimal de área.

A proposta agora é utilizar a técnica do Lagrangeano Médio [38] para obter, de forma simples, um modelo de baixa dimensionalidade que simule a frequência e a amplitude de oscilação do núcleo do feixe, tal qual a simulação autoconsistente.

De maneira geral, o que faremos é supor um perfil de densidade $n = n(r, \chi(z))$, onde a dependência em z é relacionada indiretamente pelo fator $\chi = \chi(z)$, o qual terá sua dinâmica determinada através das equações de Euler-Lagrange [39]. Então, integramos a equação (4.21) desde $r_0 = r(z = 0)$ até um tamanho máximo r_b .

Entretanto, para efetuarmos essa integral, precisamos reescrever \dot{r} (da equação (4.20)) em função de r e χ , a fim de obtermos um modelo unidimensional. Para isso, utilizaremos a equação da continuidade [40]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0. \quad (4.22)$$

Como em nosso sistema z faz o papel de tempo e o divergente é tomado em coordenadas cilíndricas, a equação anterior torna-se:

$$\frac{\partial n}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v) = 0. \quad (4.23)$$

Isolando v na equação (4.23), obtemos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v) = -\frac{\partial n}{\partial z} \Rightarrow \int d(r n v) = - \int r \frac{\partial n}{\partial z} dr \Rightarrow v = \dot{r} = -\frac{1}{r n} \int_0^r r \frac{\partial n[r, \chi(z)]}{\partial z} dr. \quad (4.24)$$

Substituindo a expressão da densidade $n(r, \chi(z))$ da equação (2.53) na equação anterior e integrando em r , obtemos:

$$\dot{r} = -\frac{r(r^2 - r_b^2)\dot{\chi}(z)}{2[r_b^2 + (2r^2 - r_b^2)\chi(z)]}. \quad (4.25)$$

Agora que possuímos uma expressão adequada para \dot{r} , também precisamos determinar $Q(r_0)$ (presente na equação (4.20)) em função de r . Para isso utilizaremos a expressão da carga em função da densidade, ou seja:

$$Q(r_0) = \frac{1}{N} \int n(r, \chi) r dr d\theta. \quad (4.26)$$

Novamente, se substituirmos a expressão da densidade $n(r, \chi(z))$ (equação (2.53)), mas agora na equação (4.26) e integrarmos em r , obtemos:

$$Q(r_0) = \frac{r^2}{r_b^4} [r_b^2 + \chi(z)(r^2 - r_b^2)]. \quad (4.27)$$

Agora que temos uma expressão para $Q(r_0)$ e para v , onde ambas estão em função de r , podemos substituí-las na expressão do Lagrangeano \mathcal{L} da equação 4.20), ou seja:

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}) = \underbrace{\frac{r^2(r^2 - r_b^2)^2 \dot{\chi}(z)^2}{8[r_b^2 + (2r^2 - r_b^2)\chi(z)]^2}}_{E_{cin}} - \underbrace{\frac{r^2}{2}}_{V_{mag}} + \underbrace{\frac{r^2}{r_b^4} [r_b^2 + \chi(z)(r^2 - r_b^2)] \ln(r)}_{V_{elet}}; \quad (4.28)$$

onde E_{cin} é a energia cinética, V_{mag} a energia potencial magnética (representando o efeito do solenóide) e V_{elet} a energia potencial elétrica. Assim, podemos reescrever a equação que fornece o Lagrangeano Médio (equação (4.21)), como:

$$L = \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_b} K r dr d\theta}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_b} V_{mag} r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^{r_b} V_{elet} r dr d\theta}_{I_2 + I_3}. \quad (4.29)$$

Fazendo $\chi(z) = \chi$, apenas por simplicidade, e resolvendo a integral da energia cinética, temos:

$$I_1 = \frac{N r b^2 \{2\chi[3 + (3 - 2\chi)\chi] + 3(-1 + \chi)(1 + \chi)^2[-\ln(1 - \chi) + \ln(1 + \chi)]\} \dot{\chi}^2}{384\chi^4}. \quad (4.30)$$

Lembrando que agora $\chi \in [-1, 1]$. Resolvendo agora, a segunda e a terceira integral da equação (4.29):

$$I_2 + I_3 = -\frac{1}{48}N \left[6(1 + 2r_b^2) + \chi(-4 + 4r_b^2 + \chi) - 24\text{Log}(r_b) \right]. \quad (4.31)$$

Somando $I_1 + I_2 + I_3$, definimos então a expressão para o Lagrangeano Médio L :

$$L = \frac{N}{384} \left\{ -8(6(1 + 2r_b^2) + \chi(-4 + 4r_b^2 + \chi) - 24\text{Log}[r_b]) + (1/(\chi^4))r_b^2(2\chi(3 + (3 - 2\chi)\chi) + 3(-1 + \chi)(1 + \chi)^2(-\ln[1 - \chi] + \ln[1 + \chi]))\dot{\chi}^2 \right\}. \quad (4.32)$$

Com o Lagrangeano Médio L completamente descrito em função do tamanho do feixe r_b e da não-homogeneidade χ , podemos aplicar então a equação de Euler-Lagrange [39] e definir uma equação de movimento para a não-homogeneidade χ , da forma: $\ddot{\chi} = F[\chi, \dot{\chi}]$. Assim:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \chi} = 0. \quad (4.33)$$

Substituindo a expressão de L (equação (4.32)) na equação (4.33), depois de algumas derivadas encontramos a expressão final:

$$\begin{aligned} \ddot{\chi} = & \left\{ -8\chi^5(-2 + 2r_b^2 + \chi) + r_b^2 \left[-12\text{Atanh}(\chi) + \chi(z) \left[12 - 9\text{Atanh}(\chi) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \chi \left(9 + 6\text{Atanh}(\chi) + [-2 + 3\text{Atanh}(\chi)]\chi \right) \right] \right] \dot{\chi}^2 \right\} / \left\{ 2r_b^2\chi \left[-3\text{Atanh}(\chi) \right. \right. \\ & \left. \left. + \chi \left(3 - 3\text{Atanh}(\chi) + 3[1 + \text{Atanh}(\chi)]\chi + [-2 + 3\text{Atanh}(\chi)]\chi^2 \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

A dinâmica da equação (4.34) deve ser comparada frente a simulações autoconsistentes e integrada simultaneamente com as equações que governam o movimento das partículas-teste, como mostraremos na próxima seção.

4.4 Órbita das partículas-teste

A simulação de partículas-teste (ou *particle-core model* em inglês) é uma maneira simples de estudar como um conjunto de partículas é influenciado pelo movimento de oscilação ocasionado pelo núcleo do feixe. Embora a simulação não forneça uma riqueza de detalhes como a simulação autoconsistente, ela é vantajosa em relação ao tempo computacional, principalmente quando se quer determinar quantidades estatísticas no estado final do sistema.

O método consiste em definir uma equação que fornece a dinâmica do núcleo do feixe (*core*), e em seguida uma segunda equação para representar as partículas-teste que vão interagir com esse núcleo. Essa segunda equação, terá suas condições de contorno de acordo com a posição de cada partícula em relação ao núcleo (partícula dentro ou fora do núcleo do feixe).

Descreveremos o modelo de partículas-teste de acordo com as aproximações feitas principalmente por Davidson et al. [16] e de forma semelhante por Wangler et al. [28]. Nosso objetivo com essa simulação é estimar o tamanho máximo do núcleo do feixe, do halo e, conseqüentemente, calcular a fração de partículas pertencentes ao halo do feixe no estado relaxado.

Na seção anterior determinamos uma equação para a dinâmica da não-homogeneidade χ . Agora precisamos determinar uma equação que determina a dinâmica das partículas-teste em relação à posição do núcleo. Começaremos essa descrição a partir da equação do envelope, que fornecerá o movimento do núcleo do feixe, ou seja:

$$\ddot{r}_b + \kappa r_b - \frac{K}{r_b} - \frac{\varepsilon_{rms}^2}{r_b^3} = 0; \quad (4.35)$$

onde κ , K e ε são a constante de focalização, a perveância e a emitância, respectivamente, previamente definidas em seções anteriores; e r_b é o raio do núcleo do feixe. Já a órbita das partículas-teste será dada pela equação:

$$\ddot{\vec{r}} = -\kappa\vec{r} - \nabla\psi(r, z); \quad (4.36)$$

onde ψ é o potencial eletromagnético adimensional. Podemos determinar ψ através da equação de Poisson adimensional (equação (4.13)) [16], [41]:

$$\nabla^2\psi = -\frac{2\pi K}{N}n(r, z); \quad (4.37)$$

onde $n(r, z)$ é um perfil de densidade radial qualquer. Aplicando o Laplaciano em coordenadas cilíndricas na equação (4.13), podemos ver explicitamente a contribuição de $\nabla\psi(\vec{r}, z)$ na equação (4.36), ou seja:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\frac{2\pi K}{N}n(r, z). \quad (4.38)$$

Agora precisamos aplicar as condições de contorno impostas pelo modelo de partículas-teste, isto é, vamos supor que as partículas que estão dentro do núcleo do feixe (com $r < r_b$, onde

4.4. Órbita das partículas-teste

r_b é o tamanho máximo do feixe na inicialização ($z = 0$) sentem uma força diferente das partículas que estão fora do núcleo ($r \geq r_b$). Matematicamente isto equivale a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \begin{cases} -\frac{2\pi K}{N} n(r, z) & , \quad r < r_b; \\ 0 & , \quad r \geq r_b. \end{cases} \quad (4.39)$$

Para nossa análise escolheremos novamente um perfil de densidade não-homogêneo, dado pela equação (2.53). Lembramos que a mesma equação pode ser usada para obter um perfil homogêneo, fazendo $\chi = 0.0$ na equação de n_b . Essas análises encontram-se nas referências [41], [42].

Integrando (4.39) em ambos os lados, para $r < r_b$, e substituindo $n(r, z)$ na mesma equação, temos:

$$\int d \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\frac{2\pi K}{N} \int \frac{N}{\pi r_b^2} \left[1 + \chi(z) \left(2 \frac{r^2}{r_b^2} - 1 \right) \right] r dr. \quad (4.40)$$

Integrando e simplificando:

$$r \frac{\partial \psi_c}{\partial r} = \frac{-K r^2}{r_b^4} \left[r^2 \chi - r_b^2 (-1 + \chi) \right] + A; \quad (4.41)$$

onde ψ_c é o potencial do núcleo feixe. Isolando $\frac{\partial \psi_c}{\partial r}$, obtemos:

$$\frac{\partial \psi_c}{\partial r} = \nabla \psi(\mathbf{r}, z) = -K \frac{r[r_b^2 + (r - r_b^2)\chi(z)]}{r_b^4} + A; \quad (4.42)$$

onde A é a constante de integração obtida através da resolução das integrais anteriores. Para determiná-la, avaliamos o valor do campo elétrico $\frac{\partial \psi_c}{\partial r}$ na origem, ou seja, $\frac{\partial \psi_c}{\partial r} \Rightarrow 0$ quando $r \Rightarrow 0$, portanto, $A = 0$. Assim:

$$\frac{\partial \psi_c}{\partial r} = \nabla \psi(\vec{r}, z) = -K \frac{r[r_b^2 + (r - r_b^2)\chi(z)]}{r_b^4}. \quad (4.43)$$

Para a região onde $r \geq r_b$, utilizaremos o mesmo procedimento. Integrando a segunda parte da equação (4.39):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_h}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \int d \left(r \frac{\partial \psi_h}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{\partial \psi_h}{\partial r} + B = 0; \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \psi_h}{\partial r} = -\frac{B}{r}. \quad (4.45)$$

Onde ψ_h é o potencial do halo e B é a constante de integração que pode ser determinada pela continuidade do campo elétrico $\frac{\partial\psi}{\partial r}$ na interface da equação (4.39), ou seja, quando $r = r_b$, $\frac{\partial\psi_h}{\partial r} = \frac{\partial\psi_c}{\partial r}$. Assim:

$$\frac{\partial\psi_h}{\partial r} = \frac{\partial\psi_c}{\partial r}; \quad (4.46)$$

$$-K \frac{r[r_b^2 + (r - r_b^2)\chi(z)]}{r_b^4} = -\frac{B}{r}; \quad (4.47)$$

Para $r = r_b$, temos:

$$B = K, \quad (4.48)$$

logo:

$$\frac{\partial\psi_h}{\partial r} = -\frac{K}{r}. \quad (4.49)$$

Então, a equação que determina o movimento das partículas-teste pode ser reescrita como uma equação:

$$\ddot{r} = -\kappa r + \begin{cases} K \frac{r[r_b^2 + (r^2 - r_b^2)\chi(z)]}{r_b^4}, & r < r_b; \\ K/r, & r \geq r_b. \end{cases} \quad (4.50)$$

Finalmente, se resolvermos a equação (4.50) simultaneamente com a equação (4.34), obtemos a dinâmica das partículas-teste e sua interação com o núcleo do feixe. Na próxima seção, integraremos essas equações e estimaremos a fração de partículas f que saem do núcleo do feixe no estado inicial e permanecem no halo quando atingimos o estado estacionário.

4.5 Descrição do halo através de partículas-teste

A dinâmica da não-homogeneidade χ , que está acoplada diretamente com as partículas-teste através da equação (4.50), é completamente integrável e periódica, como podemos ver na figura 4.4, tanto em sua série temporal (quadro (a)) quanto em seu espaço de fase (quadro (b)).

Sendo assim, as partículas-teste podem ser representadas através de um mapa de Poincaré, onde gravaremos e plotaremos um conjunto de valores de $r(z)$ e $\dot{r}(z)$ para cada

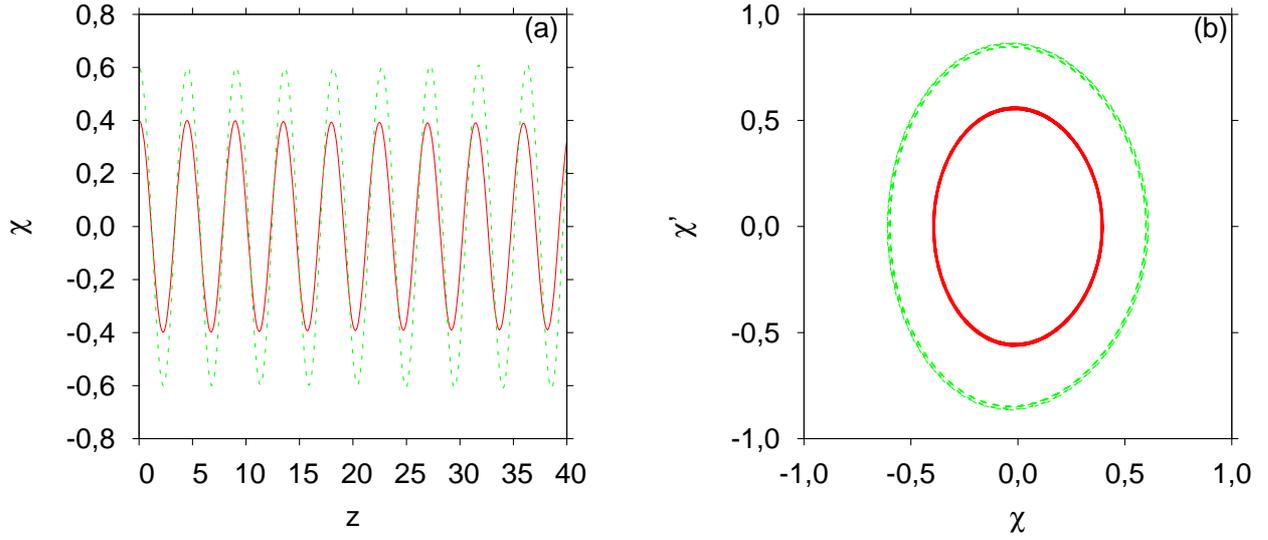


Figura 4.4: Dinâmica da não-homogeneidade χ para duas condições iniciais diferentes: $\chi(z=0) \equiv \chi_0 = 0.4$ e $\dot{\chi}(0) = 0$ para a linha sólida e $\chi(z=0) \equiv \chi_0 = 0.6$ e $\dot{\chi}(0) = 0$ para a linha pontilhada, ambas com $r_b = \kappa = K = 1$. Em (a), temos as séries temporais e em (b) os respectivos espaços de fase.

ciclo em que $\chi(z)$ completa um período. Se integrarmos simultaneamente a equação do envelope (4.35) que fornece o movimento do núcleo do feixe, a equação da dinâmica da não-homogeneidade (4.34) e a equação das partículas-teste (4.36), obtemos a figura (4.5).

Exceto pelo acúmulo de partículas próximas à linha de $v = 0.0$, as partículas-teste se distribuem uniformemente ao longo de uma região limitada do espaço de fase, como podemos ver no quadro (a) da figura 4.5. Já, o espaço de fase feito através de simulações auto-consistentes (quadro (b)), apresenta-se em uma versão um pouco mais achatada (a área do espaço de fase é menor). Contudo, como o objetivo é obter apenas uma descrição aproximada de quantidades de equilíbrio (emitância relaxada, por exemplo), essa discrepância não influencia significativamente os resultados. Podemos obter o tamanho do halo procedendo da seguinte maneira:

Primeiro, realizamos uma simulação de partículas-teste, tal qual fizemos para obter o quadro (a) da figura 4.5 (com exceção da curva que delimita esse espaço de fase). Depois, por inspeção direta do espaço de fase, extraímos a velocidade máxima das partículas-teste para $r = 0$, que nessa figura é $v_h \approx 0.504$.

Então, utilizamos o valor de v_h como condição inicial de uma nova simulação de partículas-teste, que agora, por simplicidade, pode ser feita com apenas uma única partícula teste. Nessa simulação vamos supor que as partículas que compõem o halo estão uniformemente distribuídas no espaço de fase, o que equivale a fazermos $\chi = 0$ na equação (4.50) e depois integrá-la em conjunto com a equação do envelope (4.35), que fornece o movimento do

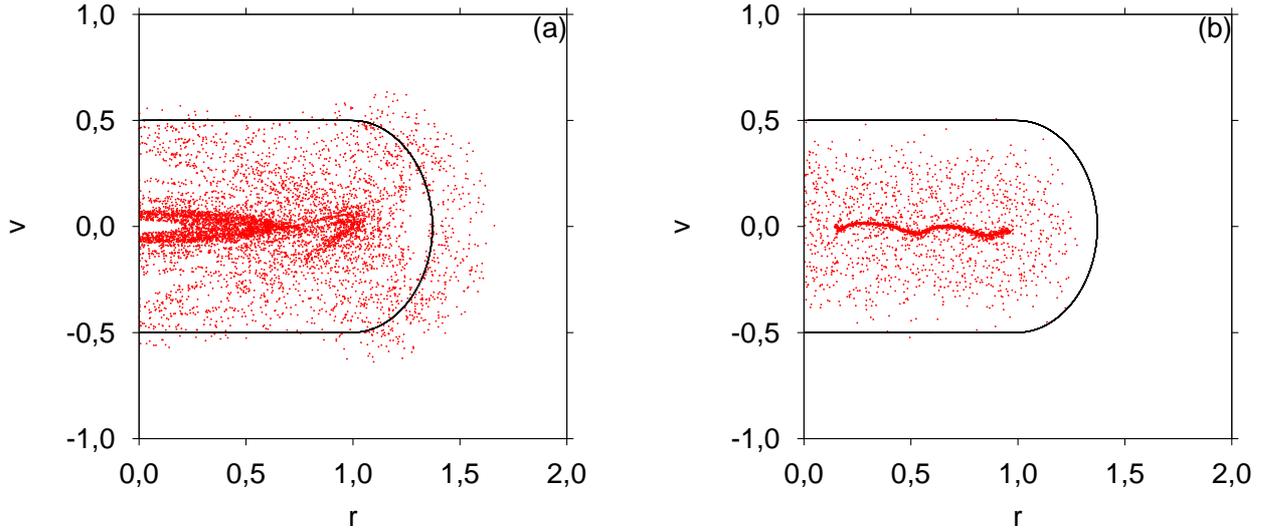


Figura 4.5: Em (a), o espaço de fases da dinâmica de 100 partículas-teste após 300 tempos de integração. Em (b), o mesmo espaço de fase, só que feito com simulações autoconsistentes para $N = 10.000$ partículas em $z = 1100$. Em ambos os casos as condições iniciais são $\chi(z = 0) \equiv \chi_0 = 0.4$ e $\dot{\chi}(0) = 0$, com $r_b = \kappa = K = 1$

núcleo do feixe. Esse procedimento resulta na linha mais espessa que circunda as partículas no espaço de fase, em ambos os painéis da figura (4.5). Por ela podemos visualizar que o tamanho máximo do halo é $r_h \approx 1,36$. Esse valor nos será útil na próxima seção, quando estimaremos a fração de partículas que migram do núcleo do feixe para o halo.

4.6 Cálculo da fração de partículas do halo através de conservação de energia

Embora saibamos aproximadamente o tamanho do halo, $r_h \approx 1,36$, precisamos estimar o número de partículas que migram do núcleo do feixe no estado inicial para compor o halo no estado final, pois nos beneficiaremos do fato de nosso sistema ser conservativo, para estimar a emitância do estado relaxado. Vamos começar introduzindo a expressão que define a energia total do nosso sistema [15]:

$$E = \text{constante} = \frac{\langle \dot{r}^2 \rangle}{2} + \frac{\kappa \langle r^2 \rangle}{2} + \mathcal{E}(z); \quad (4.51)$$

onde $\langle \rangle$ representa a média sobre todas as partículas. O primeiro termo do lado direito representa a energia cinética, o segundo a energia potencial do campo magnético externo e \mathcal{E} define a energia potencial eletrostática de interação entre as partículas. A energia potencial

eletrostática pode ser expressada em termos do gradiente de um potencial eletrostático. Sendo assim, podemos escrevê-la em sua forma adimensional [16] como:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi K} \int \int |\nabla\psi|^2 r dr d\theta; \quad (4.52)$$

onde $\nabla\psi$ pode ser obtido integrando a equação de Poisson, em sua forma adimensional (4.13).

4.6.1 Cálculo da energia total do estado inicial

Agora vamos determinar a energia total do estado inicial, começando pelo termo de energia potencial eletrostática inicial \mathcal{E}_0 .

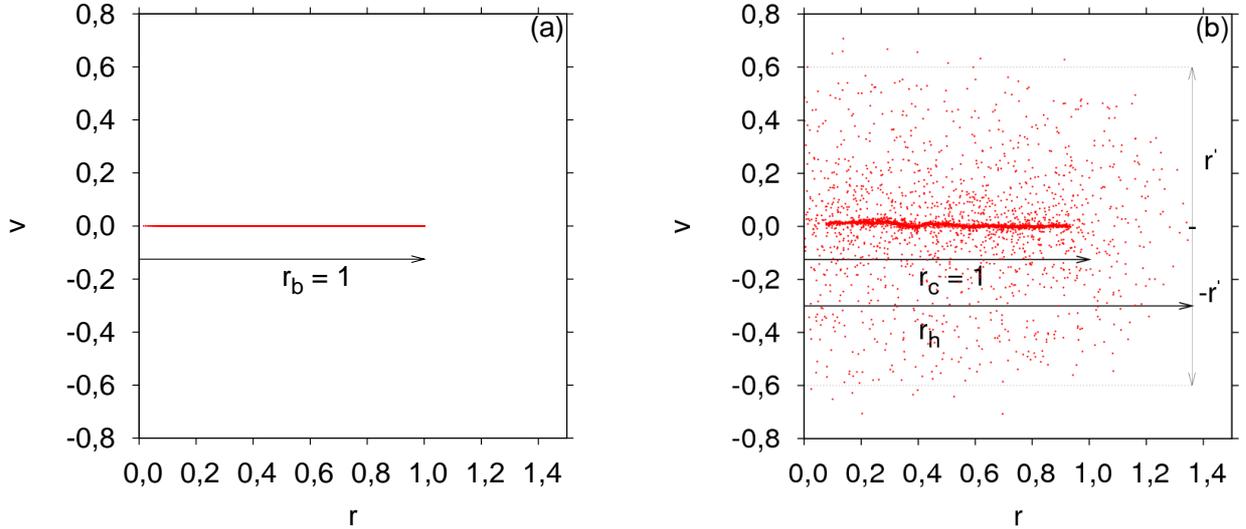


Figura 4.6: Secções transversais do espaço de fase para um feixe composto por $N = 10.000$, com não-homogeneidade $\chi = 0.6$. Em (a) temos o estado inicial, quando $z = 0$, e em (b) quando $z = 600$.

Se definirmos novamente a densidade do estado inicial de acordo com uma distribuição de partículas não-homogênea, semelhante à equação (2.53), podemos descrever a densidade inicial do feixe como:

$$n_0(r, \chi) = \begin{cases} \frac{N}{\pi} + \chi \left[\frac{N}{\pi} (2r^2 - 1) \right], & 0 \leq r \leq 1; \\ 0, & 1 < r \leq r_w; \end{cases} \quad (4.53)$$

onde aqui, r_w representa o raio do tubo aterrado que envolve o feixe (e que não interage com ele). Além disso, utilizamos $r_b = 1$, para simplificar os calculos que virão a seguir. Inserindo

termo a termo da equação anterior na equação de Poisson (4.13), podemos integrar este resultado, obtendo:

$$E_r^0 \equiv \left| \frac{\partial \psi}{\partial r} \right| = \begin{cases} E_c^0 = -\chi r^3 + (\chi - 1)r, & 0 \leq r \leq 1; \\ E_{vacuo}^0 = -1/r, & 1 < r \leq r_w. \end{cases} \quad (4.54)$$

Onde E_r^0 é o campo elétrico total do estado inicial, dividido em duas regiões: no vácuo, onde ele decresce com $-1/r$, e na região populada pelas partículas, que obedece ao polinômio $-\chi r^3 + (\chi - 1)r$. Note que o valor da não-homogeneidade χ (que equivale à forma com que as partículas são distribuídas na secção transversal) influencia diretamente no valor do campo, como era de se esperar. Se inserirmos a equação do campo elétrico, obtida anteriormente, na equação da energia média eletrostática (4.52), obtemos:

$$\mathcal{E}_0 \equiv \mathcal{E}(z = 0) = \frac{1}{4\pi K} \int \int |\nabla \psi|^2 r dr d\theta;$$

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{4\pi K} 2\pi \left\{ \int_0^1 [-\chi r^3 + (\chi - 1)r]^2 r dr + \int_1^{r_w} \left(-\frac{1}{r}\right)^2 r dr \right\}.$$

Calculando para o caso onde a perveância K é igual a um, temos:

$$\boxed{\mathcal{E}_0 = \frac{\chi^2}{48} - \frac{\chi}{12} + \frac{\ln(r_w)}{2} + \frac{1}{8};} \quad (4.55)$$

que é a expressão final da energia potencial eletrostática. O cálculo do termo relativo à energia cinética (média) inicial, pode ser feito via inspeção direta do espaço de fases na figura 4.6 (a). Nela vemos que todas as partículas são inicializadas com velocidade nula, logo, a energia cinética média inicial também é nula.

Já a energia potencial magnética média pode ser calculada a partir da definição de raio rms, ou seja:

$$r_{rms} = \sqrt{\langle r^2 \rangle}. \quad (4.56)$$

Como $\langle r^2 \rangle$ é uma média, podemos reescrever essa expressão na forma de uma integral:

$$r_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_b} r dr r^2 n(r, \chi)}, \quad (4.57)$$

onde r_b é o raio máximo do feixe em $z = 0$ e como estamos tratando um feixe casado, $r_b = 1$. Agora basta inserir a equação da densidade n_0 (equação (4.53)) na expressão acima e integrar. Isso resulta em:

$$r_{rms} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{(3 + \chi)}{6}} \Rightarrow \boxed{\langle r^2 \rangle = \frac{(3 + \chi)}{6}}. \quad (4.58)$$

Assim, determinamos a expressão da energia total média do estado inicial inserindo as expressões da energia cinética, potencial magnética e potencial eletrostática médias, termo a termo na expressão da energia total média (equação (4.51) com $\kappa = 1$), obtendo então:

$$\boxed{E_0 = \frac{\chi^2}{48} + \frac{3}{8} + \frac{\ln(r_w)}{2}}; \quad (4.59)$$

onde o índice zero indica que essa é a energia total média no estado inicial ($z = 0$).

4.6.2 Cálculo da energia total do estado final estacionário

Depois da propagação através do canal solenoidal, o feixe chega enfim em seu estado final relaxado, como podemos ver na figura 4.6 (b). Nesse estágio, para que tenhamos uma descrição analítica mais acurada, torna-se interessante segmentarmos a densidade de partículas $n_f(r)$ em duas partes: uma que considere apenas as partículas pertencentes ao núcleo do feixe, denominada n_c , e outra que agregue as partículas pertencentes ao halo, n_h . Sendo assim, a equação que descreve a densidade de partículas no estado estacionário assume o formato:

$$n_f(r) = \begin{cases} n_c + n_h, & 0 < r \leq r_c; \\ n_h, & r_c < r \leq r_h; \\ 0, & r_h < r < r_w; \end{cases} \quad (4.60)$$

Onde r_c representa as partículas do núcleo, r_w o raio do tubo que envolve o feixe e r_h determina o raio das partículas do halo, como podemos ver na figura 4.6 (b).

Para definir as partículas do núcleo, devemos fazer algumas considerações. Uma delas é que o número total de partículas é conservado, o que implica matematicamente em escrever:

$$N = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_w} n_f(r) r dr = N_c + N_h; \quad (4.61)$$

onde N_c e N_h são o número de partículas do núcleo e do halo, respectivamente, e $n_f(r)$ é a densidade de partículas, definida através da equação (4.60). Suporemos que as partículas

do núcleo, N_c , estão uniformemente distribuídas ao longo da secção transversal, a densidade superficial pode ser escrita como:

$$n_c = \frac{N_c}{\pi r_c^2}, \text{ para } 0 < r \leq r_c. \quad (4.62)$$

Como todas as quantidades calculadas até aqui são médias, é interessante expressar as densidades superficiais (n_c e n_h) em função de uma fração, a qual definiremos com a fração f das partículas que populam o halo, ou seja:

$$f \equiv N_h/N. \quad (4.63)$$

Utilizando a equação da conservação do número de partículas (equação (4.61)) podemos reescrever a fração f em função das partículas do núcleo:

$$N_c/N = 1 - f. \quad (4.64)$$

Assim, a densidade das partículas do núcleo (equação (4.62)) pode ser re-expressa como:

$$n_c = \frac{(1-f)N}{\pi r_c^2}, \text{ para } 0 < r \leq r_c. \quad (4.65)$$

Para determinar a densidade superficial das partículas do halo, n_h , vamos supor que estas partículas se distribuem de maneira uniforme no espaço de fase, com os extremos limitados por um retângulo (como pode ser visto na figura 4.6 (b)), de forma que a densidade linear do halo, λ_h , pode ser escrita como:

$$\lambda_h = \int_{-r'}^{r'} \sigma(r, r') dr; \quad (4.66)$$

onde r' representa a velocidade máxima das partículas no espaço de fase (indicado também na figura 4.6(b)) e $\sigma(r, r')$ é a densidade superficial do espaço de fase (parâmetro que será eliminado com o decorrer dos cálculos). Supondo $\sigma(r, r') \equiv \sigma = \text{constante}$, temos como resultado da integral (4.66):

$$\lambda_h = 2\sigma r'. \quad (4.67)$$

Nossa tarefa agora é conectar a densidade linear de partículas λ_h com a densidade superficial n_h , já que a equação de Poisson (4.13) está escrita em função de n_h (vamos manter

o índice h apenas por conveniência, contudo a dedução que segue é geral). Fazemos isso a partir da definição da densidade superficial de partículas, que é equivalente ao número de partículas dividido pela área da secção transversal na qual elas residem. Ou seja:

$$n_h = \frac{d^2 N_h}{r dr d\theta} \Rightarrow n_h r = \frac{d^2 N_h}{dr d\theta}. \quad (4.68)$$

Multiplicando por $d\theta$ e integrando ambos os lados da equação anterior, obtemos:

$$\int_0^{2\pi} n_h r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dN_h}{dr} \right) d\theta; \quad (4.69)$$

logo:

$$n_h 2\pi r = \frac{dN_h}{dr}. \quad (4.70)$$

Contudo, o número de partículas divididas por uma unidade de comprimento, dN_h/dr , é a própria definição de densidade linear de carga. E assim, concluímos que a relação entre n_h e λ_h é:

$$n_h = \frac{\lambda_h}{2\pi r}; \quad (4.71)$$

como $\lambda_h = 2\sigma r'$, pela equação (4.67), podemos substituir esse resultado na equação anterior, obtendo então:

$$n_h = \frac{\sigma r'}{\pi r}. \quad (4.72)$$

Para eliminar a dependência de σ , podemos utilizar a relação entre o número total de partículas do halo com a sua densidade superficial, que é:

$$N_h = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_h} n_h r dr d\theta. \quad (4.73)$$

Substituindo n_h que obtivemos na expressão (4.72) na equação anterior, obtemos:

$$N_h = 2\sigma r_h r' \Rightarrow \sigma r' = \frac{N_h}{2r_h}. \quad (4.74)$$

Utilizando o resultado anterior, podemos reescrever a equação (4.72) eliminando a dependência de σ :

$$n_h = \frac{N_h}{2\pi r_h r}, \text{ para } 0 < r \leq r_h. \quad (4.75)$$

Reescrevendo a densidade do halo em função da fração f , definida na equação (4.63), temos:

$$\boxed{n_h = \frac{Nf}{2\pi r_h r}}. \quad (4.76)$$

Agora que possuímos expressões de densidade tanto para o halo (equação (4.76)) quanto para o núcleo do feixe (equação (4.65)), podemos enfim inserir ambas na expressão de n_f (4.60) e calcularmos a energia eletrostática média do estado final. Fazendo isso:

$$n_f(r) = \begin{cases} \frac{(1-f)N}{\pi r_c^2} + \frac{Nf}{2\pi r_h r}, & 0 \leq r \leq r_c; \\ \frac{Nf}{2\pi r_h r}, & r_c < r \leq r_h; \\ 0, & r_h < r < r_w. \end{cases} \quad (4.77)$$

Substituindo termo a termo da equação (4.77) na equação de Poisson (4.13) e integrando esta última, obtemos para o campo eletrostático médio no estado estacionário:

$$E_r^F \equiv \left| \frac{\partial \psi}{\partial r} \right| = \begin{cases} E_c^F = -\frac{(1-f)r}{r_c^2} - \frac{f}{r_h}, & 0 \leq r \leq r_c; \\ E_h^F = -\frac{f}{r_h} - \frac{(1-f)}{r}, & r_c < r \leq r_h; \\ E_{vacuo}^F = -1/r, & r_h < r < r_w; \end{cases} \quad (4.78)$$

onde E_c^F e E_h^F são, respectivamente, os campos elétricos do núcleo e do halo do feixe e E_{vacuo}^F é o campo elétrico no vácuo. Uma das constantes de integração foi determinada utilizando a finitude do campo elétrico ($E_r^F = 0$ quando $r = 0$) e as outras duas pela continuidade do potencial elétrico nas interfaces que separam ($E_c^F = E_h^F$ quando $r_c = r$ e $E_h^F = E_{vacuo}^F$ quando $r_h = r$).

Agora podemos determinar a energia média armazenada nos campos elétricos do estado estacionário final do feixe. Inserindo os termos da expressão (4.78) na equação (4.52) e integrando em seus respectivos intervalos, obtemos:

$$\boxed{\mathcal{E}_f = \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_h}{r_c} \right) + \frac{2r_c}{3r_h} - \frac{5}{8} \right] f^2 + \left[\ln \left(\frac{r_c}{r_h} \right) - \frac{2r_c}{3r_h} + \frac{3}{4} \right] f + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_w}{r_c} \right) + \frac{1}{8}}. \quad (4.79)$$

Sendo a última expressão função apenas do raio do núcleo do feixe r_c , do raio do halo do feixe r_h e da fração de partículas do halo f , onde r_c e r_h foram estimados no começo desta seção, e f será determinado através da conservação de energia do sistema.

Precisamos calcular agora a energia potencial magnética média do estado final. Novamente como no caso do estado inicial, utilizaremos a expressão (4.57) e a definição de raio rms (4.56), contudo, separando dentro da integral do raio rms as densidades do núcleo e halo, ou seja:

$$r_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_0^{r_c} r dr r^2 n_c + \int_0^{r_h} r dr r^2 n_h \right]}. \quad (4.80)$$

Inserindo n_c e n_h obtidas nas respectivas expressões (4.65) e (4.76), obtemos:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{N_c r_c^2}{2N} + \frac{N_h r_h^2}{3N}, \quad (4.81)$$

que pode ser re-expressa em função da fração f de partículas do halo, tornando-se:

$$\boxed{\langle r^2 \rangle = \frac{(1-f)r_c^2}{2} + \frac{f r_h^2}{3}}. \quad (4.82)$$

Para calcular a energia cinética média do estado final, precisaremos utilizar a equação da emitância rms [16], [15]:

$$\varepsilon_{rms} = \sqrt{4(\langle v^2 \rangle \langle r^2 \rangle - \langle rv \rangle^2)}. \quad (4.83)$$

Note que esta é a definição de emitância rms utilizada para sistemas não-lineares (a qual discutimos nas seções anteriores), pois suas inúmeras definições na literatura causam muita confusão.

Como no estado estacionário as oscilações do raio rms, r_{rms} , são praticamente nulas (o sistema se encontra em um estado estacionário), podemos fazer a aproximação $dr_{rms}/ds \approx 0$, o que implica em anular o último termo da equação da emitância rms. Resultando em:

$$\varepsilon_{rms} = \sqrt{4(\langle v^2 \rangle \langle r^2 \rangle)}. \quad (4.84)$$

Utilizando a mesma aproximação, $dr_{rms}/ds \approx 0$, na equação do envelope (4.35), obtemos:

$$\kappa r_b - \frac{K}{r_b} - \frac{\varepsilon_{rms}^2}{r_b^3} = 0. \quad (4.85)$$

É importante frisar que nosso objetivo agora é encontrar uma expressão para a energia cinética média do estado estacionário. Para isso precisamos reescrever a equação (4.85), que está escrita em função do raio do envelope do feixe, r_b , e a equação (4.84), que está escrita em função do raio quadrático médio, $\langle r^2 \rangle$, ambas em função do raio rms. Então:

Se lembrarmos que a relação entre o raio do envelope, r_b , e o raio quadrático médio, $\langle r^2 \rangle$, vem através da definição de raio rms, r_{rms} , temos:

$$r_{rms} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \frac{r_b}{\sqrt{2}}. \quad (4.86)$$

Sendo assim, se utilizarmos as relações (4.86) obtemos para a emitância:

$$\varepsilon_{rms}^2 = 4(\langle v^2 \rangle r_{rms}^2), \quad (4.87)$$

e para a equação do envelope:

$$\kappa r_{rms} - \frac{K}{2r_{rms}} - \frac{\varepsilon_{rms}^2}{4r_{rms}^3} = 0. \quad (4.88)$$

Substituindo a nova expressão da emitância rms (4.87) na equação anterior e fazendo $\kappa = K = 1$, obtemos depois de um pouco de álgebra:

$$\boxed{\langle v^2 \rangle = r_{rms}^2 - 1/2.} \quad (4.89)$$

Assim, a energia total média do estado estacionário, E_F , pode ser obtida inserindo as expressões (4.89), (4.82) e (4.79) na equação da energia total (4.51), o que resulta em:

$$\left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_h}{r_c} \right) + \frac{2r_c}{3r_h} - \frac{5}{8} \right] f^2 + \left[\ln \left(\frac{r_c}{r_h} \right) - \frac{2r_c}{3r_h} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_h^2}{3} + \frac{3}{4} \right] f + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_w}{r_c} \right) + \frac{r_c^2}{2} - \frac{1}{8} \quad (4.90)$$

$$= E_f.$$

4.7 Conexão entre os estados inicial e final

Igualando as expressões do estado final de energia (4.90) e do estado inicial (4.59), obtemos finalmente uma equação que determina a fração de partículas que migram do núcleo para o halo, ou seja:

$$\begin{aligned}
 E_0 &= E_f; \\
 \frac{\chi^2}{48} + \frac{3}{8} + \frac{\ln(r_w)}{2} &= \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{r_h}{r_c}\right) + \frac{2r_c}{3r_h} - \frac{5}{8} \right] f^2 + \left[\ln\left(\frac{r_c}{r_h}\right) - \frac{2r_c}{3r_h} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_h^2}{3} + \frac{3}{4} \right] f; \\
 &+ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r_w}{r_c}\right) + \frac{r_c^2}{2} - \frac{1}{8}.
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

Podemos reescrever a equação acima de uma maneira mais compacta, através de polinômio com coeficientes constantes:

$$A f^2 + B f + C = 0. \tag{4.92}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r_h}{r_c}\right) + \frac{2r_c}{3r_h} - \frac{5}{8}; \\
 B &= \left(\ln\frac{r_c}{r_h} \right) - \frac{2r_c}{3r_h} - \frac{r_c^2}{2} + \frac{r_h^2}{3} + \frac{3}{4}; \\
 C &= -\frac{\ln(r_w)}{2} + \frac{r_c^2}{2} - \frac{\chi^2}{48} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

4.8 Cálculo da emitância do estado relaxado

De posse da equação (4.92) com seus respectivos coeficientes (equação 4.93) podemos enfim calcular a emitância do estado relaxado. Sabemos que $r_c = 1$ e que χ pode ser determinado pelas condições iniciais do nosso feixe. Resta saber r_h , o qual estipulamos de uma maneira aproximada na seção 4.5 como: $r_h \approx 1,36$. Sendo assim todas as variáveis presentes nos coeficientes da equação (4.93) são conhecidas.

Se fizermos $\chi = 0.4$, com $r_c = 1$ e $r_h \approx 1,36$, obtemos: $A \approx 0,0189384$, $B \approx 0,0688520$, $C \approx -0,0033333$, o que resulta em uma fração de partículas do halo $f \approx 0,045574943$. Sabido o valor de f , podemos determinar $\langle r^2 \rangle$ pela equação (4.82), ou seja:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{(1-f)r_c^2}{2} + \frac{f r_h^2}{3} \approx 0,505568; \tag{4.94}$$

e determinar o raio rms através da relação (4.86):

$$r_{rms} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \frac{r_b}{\sqrt{2}} \Rightarrow r_{rms} \approx 0,71103. \tag{4.95}$$

4.8. Cálculo da emitância do estado relaxado

Com o raio rms do item anterior, determinamos $\langle v^2 \rangle$ inserindo-o na equação (4.89):

$$\langle v^2 \rangle = r_{rms}^2 - 1/2 \approx 0,0055. \quad (4.96)$$

Assim, com a estimativa de $\langle r^2 \rangle$ e $\langle v^2 \rangle$, podemos estimar enfim a emitância rms através da equação (4.84):

$$\varepsilon_{rms} = \sqrt{4[\langle v^2 \rangle \langle r^2 \rangle]} \approx 0,106. \quad (4.97)$$

Na tabela a seguir temos a comparação dos valores de emitância em relação à simulação auto-consistente:

χ	$\varepsilon_{analítico}$	$\varepsilon_{simulação}$
0,2	0,053	0,051
0,4	0,106	0,099
0,6	0,152	0,140
0,8	0,211	0,175

Estes resultados estão publicados nas referências [5], [29] e [6].

Capítulo 5

Feixe com temperatura

Nos capítulos anteriores, discutimos os fenômenos da quebra de onda e relaxação sobre a ótica de um feixe frio, ou seja, quando todas as partículas são inicializadas com velocidade inicial igual a zero. Contudo, se o feixe for quente o que é que muda? Podemos obter a resposta com base na figura 5.11. Nela temos o espaço de fase de dois feixes onde a única mudança entre eles é a velocidade (temperatura) inicial.

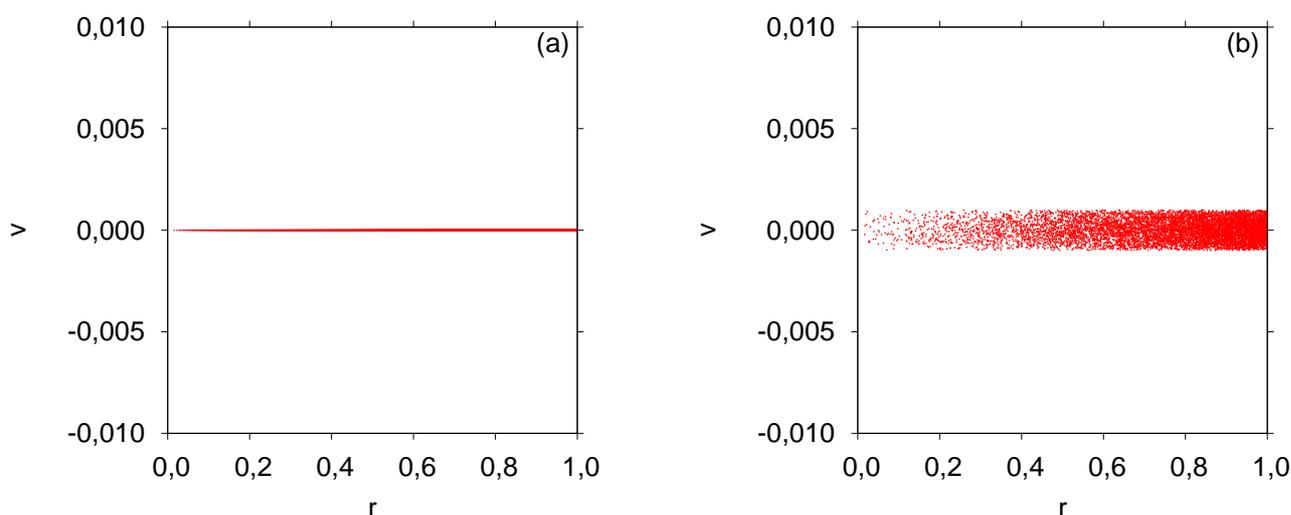


Figura 5.1: Em (a), temos um feixe inicializado frio e em (b), um feixe quente. Em ambos os casos foram utilizados os feixes estão inicialmente casados, $r_b = 1.0$, e com não-homogeneidade $\chi = 0.6$.

Observe que uma diferença visível está na maneira com que eles se agrupam no espaço de fase. Note que no quadro (a), o feixe frio, cada partícula que compõe a linha em $v = 0.0$ associa-se a uma única coordenada r . Já para o quadro (b), o feixe quente, podemos verificar que o agrupamento de partículas já não se restringe apenas a um valor singular de v , o que implica diretamente que um único r esteja associado a mais de um valor de velocidade. Este fato isolado já invalida o regime de fluido, proposto nas seções anteriores, no instante inicial

(por termos vários valores de velocidade para o mesmo valor de r), o que conseqüentemente acarreta na divergência da densidade n na equação da quebra de onda (equação (3.1)).

Sendo assim, necessitamos de outro critério para controlar os jatos de partículas que são ejetados pelo feixe¹. Isto será feito numericamente através de duas maneiras distintas: a primeira será baseada na equação da emitância rms (equação (4.3)) e a segunda na reformulação das equações de fluido, utilizando uma nova interpretação, na qual consideraremos o feixe como um elemento de fluido sofrendo a ação de um campo de pressão proporcional à temperatura.

Outra alteração necessária é na equação do movimento da simulação autoconsistente (equação (2.42)). Como agora cada uma das partículas possui uma velocidade total, $\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + (L_\theta/r)\hat{e}_\theta$, distinta e diferente de zero (no caso frio todas as partículas tinham momento angular igual a zero), é necessário adicionar um termo do tipo L_θ^2/r^3 , onde L_θ representará o momento angular distinto e constante de cada partícula, de maneira que a equação de movimento fica:

$$\ddot{r}_i + \kappa r_i - \frac{K}{r_i} + \frac{L_{\theta_i}^2}{r_i^3} = 0, \quad (5.1)$$

onde i denota o índice de cada partícula.

5.1 Modelagem de um feixe quente segundo equações de fluido ideal

Quando não há troca de calor entre um sistema termodinâmico e o meio externo podemos dizer que temos um processo adiabático. Sendo assim, a variação de energia interna sempre virá na forma de trabalho; levando nosso sistema termodinâmico (no caso de uma aproximação de gás ideal) à seguinte condição adiabática²

$$\frac{P}{n^\gamma} = \text{constante}, \quad (5.2)$$

onde P é a pressão exercida sobre o fluido pelo meio externo, n é a densidade volumétrica e γ é um fator dimensional definido como $\gamma = (f + 2)/f$, sendo f é o número de graus de liberdade do sistema. Para o caso de um sistema bi-dimensional, $\gamma = 3$, logo, a pressão pode

¹A partir de agora o termo “quebra de onda” será utilizado apenas para feixes frios e embora exista um processo de ejeção muito semelhante nos feixes quentes com baixa temperatura, ele não se enquadra na definição de quebra de onda utilizada 3.1.

²Vale ressaltar que utilizaremos a massa igual à unidade para a equação 5.2.

ser escrita como

$$P = \frac{n^2 P_0}{n_0^2}, \quad (5.3)$$

onde os índices zero denotam o estado inicial. Como a massa do sistema se conserva, podemos expressar n em função da densidade inicial do sistema na forma

$$nr\partial r d\theta = n_0 r_0 \partial r_0 d\theta_0 \Rightarrow n = \frac{r_0 n_0}{Cr}, \quad (5.4)$$

onde $C = \partial r / \partial r_0$ é a compressibilidade e $n_0 = \frac{N}{\pi r_b^2} \left(1 + \chi \left(\frac{2r_0^2}{r_b^2} - 1\right)\right)$ será a densidade inicial parabólica definida para o feixe. Se combinarmos as equações (5.3) e (5.4) com a equação de estado dos gases ideais ($P_0 = n_0 T_0$, com $k_b = 1$), obtemos que a pressão que o fluido sofre pelo meio externo é dada por:

$$P = \frac{n_0 r_0^2 T_0}{C^2 r^2}. \quad (5.5)$$

Contudo, ainda nos resta deduzir como o termo de pressão aparece na equação de movimento que irá governar a evolução desse fluido. Essa montagem será feita com base na figura 5.2.

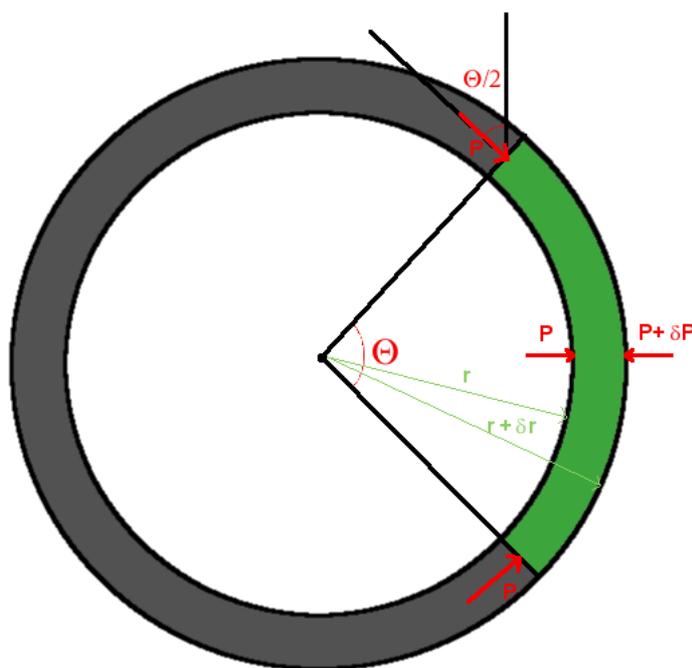


Figura 5.2: Representação bidimensional do elemento de fluido na forma de uma coroa circular.

Suponha que nosso elemento de fluido esteja localizado entre dois círculos concêntricos de raio interno r , e externo $r + \delta r$. Imagine também que esse sólido sofra uma pressão P

em suas paredes, gerada pelos fluidos que o rodeiam, conforme a indicação da figura 5.2. Se aplicarmos a Segunda Lei de Newton para o elemento infinitesimal de volume (indicado por uma projeção bidimensional, pela cor verde) e soubermos que o numero de partículas dessa região pode ser expresso como $dm = n dV$, obtemos:

$$F = n dV d^2 r / dz^2, \quad (5.6)$$

onde dV é o elemento infinitesimal de volume entre os círculos e n sua densidade volumétrica. Reescrevendo o módulo da força como a pressão multiplicada pela unidade de área, $F = PA$, temos para a direção radial

$$dz \{ Pr d\theta - [(P + dP)(r + dr) d\theta] + P dr \operatorname{sen}(d\theta/2) + P dr \operatorname{sen}(d\theta/2) \} = n dV d^2 r / dz^2. \quad (5.7)$$

Desprezando os termos de segunda ordem e fazendo $\operatorname{sen} d\theta \approx d\theta$, obtemos:

$$\begin{aligned} dz d\theta (Pr - Pr - P dr - dPr + P dr) &= n (drr d\theta dz) d^2 r / dz^2 \\ -dPr &= n (r dr) d^2 r / dz^2, \end{aligned} \quad (5.8)$$

logo, se isolarmos o termo de aceleração somos guiados a seguinte equação de movimento

$$\frac{d^2 r(r_0, z)}{dz^2} = -\frac{1}{n} \frac{dP(r_0, z)}{dr}. \quad (5.9)$$

A equação acima representa apenas o efeito da pressão sobre o elemento de fluido (efeito térmico), contudo, para que tenhamos uma equação comparável aos feixe utilizados dos capítulos anteriores, ainda precisamos adicionar os termos de força elétrica e magnética. Fazendo isso a equação que descreve o fluido fica:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -r + \frac{Q(r_0)}{r} - \frac{1}{n} \frac{dP}{dr}. \quad (5.10)$$

Substituindo os valores de n , P e calculando as derivadas, obtemos:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -r + \frac{Q(r_0)}{r} - \frac{2T_0}{rC^2} \left(1 + \frac{2\chi r_0^2}{r_b^2 \left(\left(\frac{2r_0^2}{r_b^2} - 1 \right) \chi + 1 \right)} \right) + \frac{2T_0 D r_0}{rC^3} + \frac{2T_0 r_0}{r^2 C}, \quad (5.11)$$

onde $r \equiv r(r_0, z)$, $Q(r_0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} n_0 r_0 dr_0 d\theta$ é a carga inicial integrada, $C = \partial r / \partial r_0$ e $D = \partial^2 r / \partial r_0^2$. A integração da equação (5.11) pode ser feita numericamente, entretanto, deixaremos esse procedimento para a última seção do capítulo, onde compararemos o modelo de fluido com as curvas de emitância térmica e direta, conceitos os quais discutiremos a seguir.

5.2 Emitância térmica e direta

A emitância térmica e direta não são mais do que maneiras de separar a emitância rms em duas partes, uma que dependa da velocidade média das partículas e outra da dispersão dessa média. O cálculo dessas quantidades pode ser feito resgatando o conceito de emitância rms (equação (4.3)), onde agora v e r são vetores, redefinindo a velocidade total como $\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \delta\vec{v}$, ou seja:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rms}^2 &= 4(\langle r^2 \rangle \langle v^2 \rangle - \langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle^2); \\ \varepsilon_{rms}^2 &= 4[\langle r^2 \rangle \langle (\bar{\vec{v}} + \delta\vec{v})^2 \rangle - \langle \vec{r} \cdot (\bar{\vec{v}} + \delta\vec{v}) \rangle^2]; \\ \varepsilon_{rms}^2 &= 4[\langle r^2 \rangle \langle \bar{v}^2 \rangle + 2\bar{\vec{v}} \cdot \delta\vec{v} + \langle \delta v^2 \rangle - (\langle \vec{r} \cdot \bar{\vec{v}} \rangle^2 + \langle 2r^2 \bar{\vec{v}} \cdot \delta\vec{v} \rangle + \langle \vec{r} \cdot \delta\vec{v} \rangle^2)].\end{aligned}\quad (5.12)$$

Sabendo que $\langle \delta\vec{v} \rangle = \bar{\vec{v}} - \bar{\vec{v}} = 0$, temos

$$\varepsilon_{rms}^2 = 4[\langle r^2 \rangle \langle \bar{v}^2 \rangle + \langle r^2 \rangle \langle \delta v^2 \rangle - \langle \vec{r} \cdot \bar{\vec{v}} \rangle^2]. \quad (5.13)$$

Na equação (5.13) podemos identificar termos que dependem de \bar{v} e δv , o que nos permite separar estas dependências em duas novas quantidades, definidas como emitância térmica e emitância direta:

$$\varepsilon_{direta}^2 = 4[\langle r^2 \rangle \langle \bar{v}^2 \rangle - \langle \vec{r} \cdot \bar{\vec{v}} \rangle^2]; \quad (5.14)$$

$$\varepsilon_{térmica}^2 = 4[\langle r^2 \rangle \langle \delta v^2 \rangle]. \quad (5.15)$$

Logo, podemos reescrever a emitância rms de uma maneira compacta como

$$\varepsilon_{rms}^2 = \varepsilon_{direta}^2 + \varepsilon_{térmica}^2. \quad (5.16)$$

Os efeitos dessa separação de emitâncias podem ser vistos na figura 5.3. Dividindo a emitância rms (curva (a)) em duas partes, nos beneficiamos em poder olhar os efeitos de oscilação média (macroscópica) do feixe pela emitância direta (curva (c)), e os efeitos cinéticos microscópicos através da emitância térmica (curva (b)). Para complementar essa análise, podemos verificar o que acontece no espaço de fase em dois instantes distintos, no instante inicial e no ponto de formação do primeiro jato de partículas, indicados na figura 5.3 por duas setas, e dispostos lado a lado na figura 5.4.

Ainda na figura 5.3, vemos que a emitância térmica no instante inicial, $z = 0$, oscila próxima de zero. Só não é exatamente zero devido aos efeitos de temperatura, que produzem uma largura inicial na direção de v , (figura 5.4, quadro (a)) e os efeitos numéricos causados

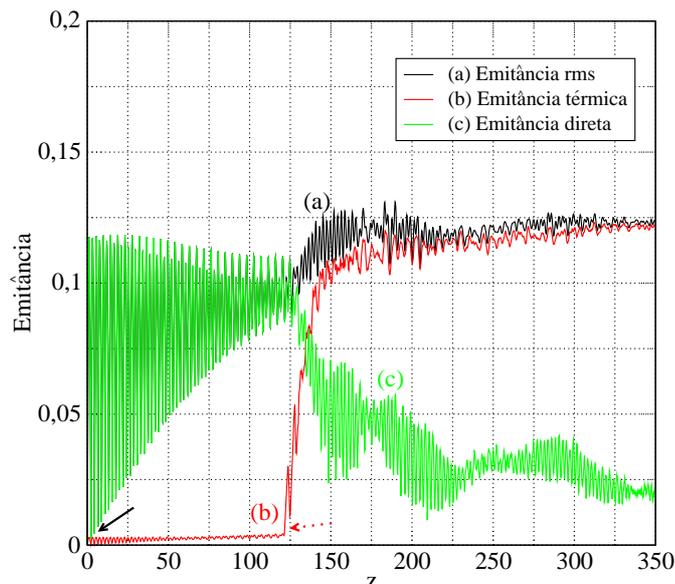


Figura 5.3: Em (a) temos a emitância rms e em (b) e (c) a emitância térmica e direta, respectivamente, de um feixe com baixa temperatura. Utilizamos $\chi = 0.6$ para a não-homogeneidade inicial.

pela baixa estatística de partículas ($n_{\text{partículas}} = 20.000$). Por consequência do valor da emitância térmica, a emitância direta é a praticamente a emitância rms. Quando $z \approx 120$ (figura 5.4, quadro (b)), temos o primeiro jato de partículas, fazendo com que a emitância térmica cresça abruptamente, e conseqüentemente, que a emitância direta tenha uma queda. Este crescimento da emitância térmica magnifica a detecção dos jatos em relação à emitância

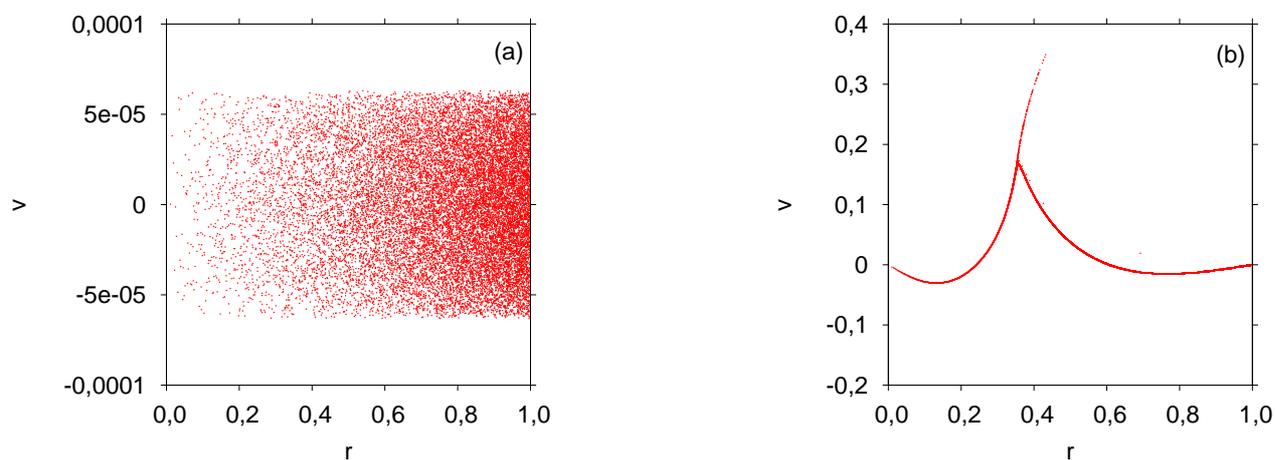


Figura 5.4: Espaço de fase para um feixe parabólico de um feixe quente com temperatura inicial $T_0 = 10^{-9}$. Em (a), no estado inicial com $z = 0$ e em (b), poucos instantes antes do primeiro jato de partículas, em $z \approx 120$.

rms, tornando-se mais útil para analisar fenômenos de ejeção de partículas no âmbito de feixes quentes. Sendo assim, reservaremos a próxima seção para examinar diversos feixes

quentes à medida que aumentamos a temperatura inicial. Veremos que conforme escolhemos os parâmetros o crescimento de emitância térmica se modifica, podendo ser abrupto ou suave. Estes comportamentos nos darão a idéia de quais feixes possuem um tempo de ejeção de partículas da mesma ordem do caso frio e quais demoram mais para atingir esse patamar. No final, compararemos o modelo de fluido proposto na seção 5.1 com a simulação autoconsistente através de gráficos de emitância térmica.

5.3 Transição na emitância térmica

Na seção anterior, mostramos o comportamento de um feixe quente com baixa temperatura por intermédio da figura 5.3, contudo, para que se tenha uma análise mais criteriosa, é necessário entender como o sistema evolui também para temperaturas mais altas. Fizemos isso na figura 5.5 plotando a emitância térmica de cinco feixes com temperaturas iniciais diferentes. A primeira curva que vamos investigar, a preta, é um feixe frio. Repare que tanto

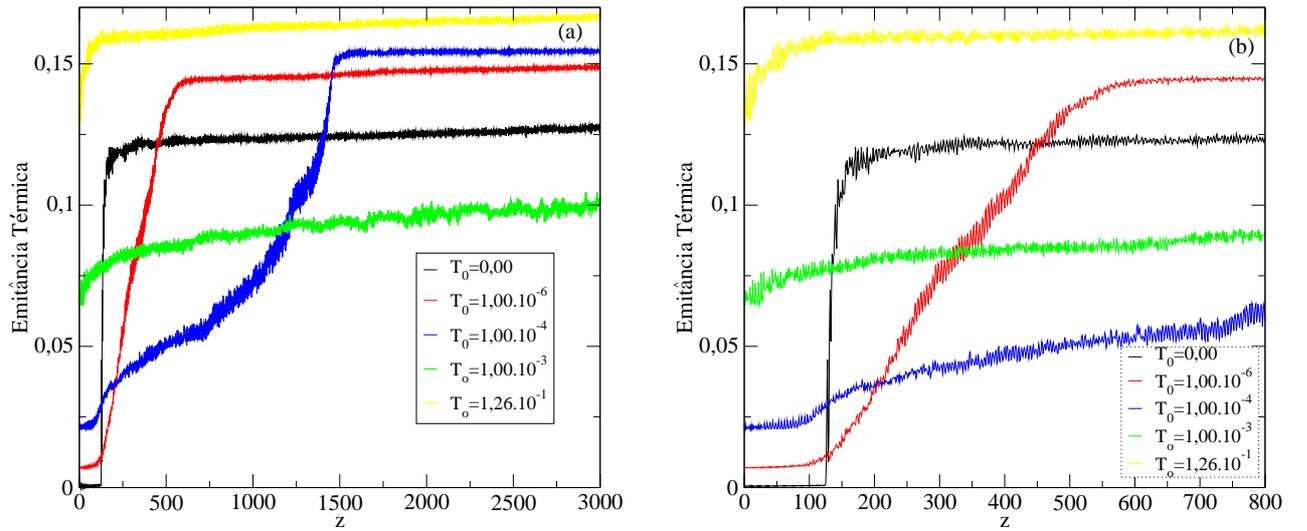


Figura 5.5: Curvas de emitância térmica para cinco feixes com valores distintos de temperatura inicial. Para todos os gráfico utilizamos 20.000 partículas e não-homogeneidade inicial $\chi = 0.6$. Em (a), temos as cinco curvas para $z = 1500$ e em (b), para um intervalo mais curto, até $z = 750$.

no quadro (a) quanto no quadro (b), ela possui uma subida abrupta próxima de $z \approx 128$. Este crescimento caracteriza um jato forte de partículas para o halo, como já discutimos na seção anterior, exibindo um comportamento típico dos feixes frios não-homogêneos. Se continuarmos a observar as curvas seguindo uma ordem crescente de temperatura, veremos que a curva vermelha já possui um crescimento de emitância um pouco mais demorado, indicando que, embora existam jatos, eles estão associados a um processo de ejeção relativamente mais lento do que o feixe frio. À medida que seguimos estas curvas, vemos que quanto

mais aumentamos a temperatura, menos abrupto é o crescimento da emitância. Em curvas como a verde e a amarela por exemplo, a temperatura já é alta o suficiente para que o feixe, em poucos ciclos de oscilação, atinja o seu estado de equilíbrio dinâmico e relaxe.

Então, o que nos chama a atenção, é que existe um processo de transição que relaciona os feixes de baixa temperatura e os feixes mais quentes, de modo que o conhecimento desse ponto de transição implica em um entendimento maior sobre a influência da temperatura na maneira com que os jatos são efetuados, e conseqüentemente, permite relacioná-los ao tempo de quebra de onda do caso frio.

Um meio de determinarmos, aproximadamente, para qual valor de temperatura ocorre a transição, é calcular, para cada curva no gráfico da emitância térmica (figura 5.5), a diferença entre o seu valor inicial e um valor final equivalente a 4 ou 5 vezes o tempo de quebra de onda do caso frio (que é quando a emitância térmica do caso frio (curva preta da figura 5.5) atinge um platô)³. Embora não seja uma técnica rigorosa, ela torna-se eficiente para fenômenos que ocorrem em um tempo finito.

Se tomarmos como exemplo a curva vermelha da figura 5.5 (b), esta diferença, que chamaremos de $\Delta\varepsilon$, seria o valor da emitância térmica em $z \approx 600$ (5 vezes o valor da emitância térmica do caso frio logo após o primeiro jato de partículas ($z \approx 128$)), subtraída da emitância térmica em $z = 0$, ou seja, $\Delta\varepsilon \approx 0.145 - 0.0065 \approx 0.138$. Se este procedimento for feito para várias curvas, além das expostas na figura 5.5, obteremos a figura 5.6

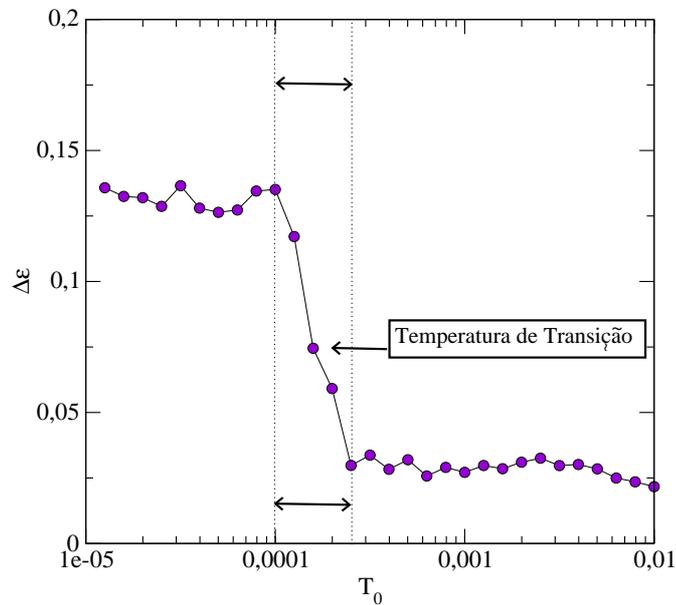


Figura 5.6: Transição de regimes de relaxação à tempo finito para 20.000 partículas com não-homogeneidade inicial $\chi = 0.6$.

³A escolha do fator 4 ou 5 é subjetiva, sendo feita simplesmente para facilitar o processo de comparação.

5.3. Transição na emitância térmica

Devido à flexibilidade dos critérios utilizados, o valor da temperatura de transição ($T_0 \approx 1.6 \cdot 10^{-4}$) fica estabelecido dentro de uma margem de erro, tendo esta sido estipulada através de um valor médio entre o último máximo e o primeiro mínimo da figura anterior.

Embora exista uma transição para uma dada temperatura em $\chi = 0,6$, ela não precisa, obrigatoriamente, ocorrer para outros valores de χ , ou simplesmente pode ocorrer para valores de temperatura diferentes.

Além do alto custo computacional necessário para plotarmos a figura 5.6, mas sobretudo para compararmos o modelo de fluido com resultados obtidos através da variação da emitância térmica (análogos à figura 5.6), evocaremos a equação (5.11), deduzida na seção 5.1., para construir uma figura mostrando o comportamento geral da não-homogeneidade χ em função da temperatura inicial (figura 5.7)(vide apêndice B).

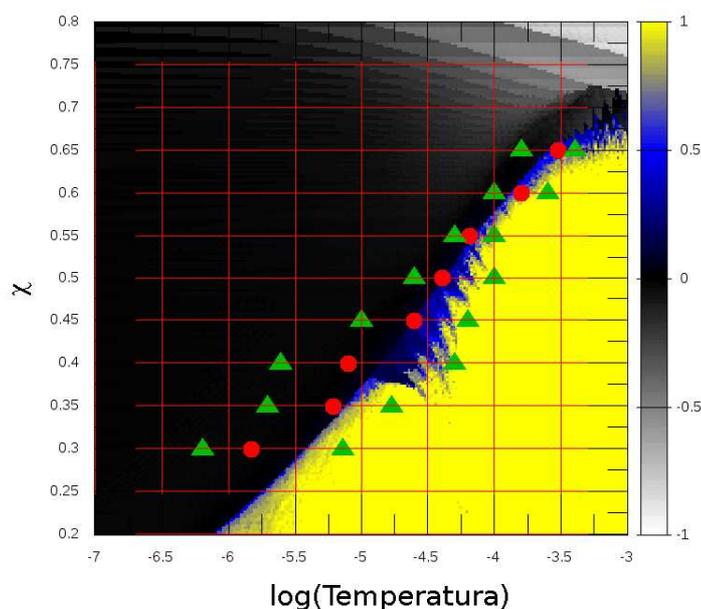


Figura 5.7: Gráfico da transição de fase na emitância térmica em função da não-homogeneidade e da temperatura inicial.

Nesta figura, a barra de cores representa o logaritmo da razão entre o tempo para que o modelo de fluido não seja mais válido, normalizado pelo tempo de quebra de onda do feixe frio. Por exemplo, quando a barra de cores é igual a um (preto), significa que o tempo de validade do modelo de fluido é da mesma ordem que o tempo de quebra de onda do caso frio (vide o tempo de quebra de onda do caso na figura 3.4).

A região amarela representa os valores de χ e T_0 para os quais o modelo de fluido precisa um tempo infinito para um crescimento abrupto da emitância. Entre a região escura

5.3. Transição na emitância térmica

e a região amarela, ocorre a transição do regime abrupto para o suave, determinado pela cor azul. Finalmente, os pontos vermelhos representam o valor da temperatura de transição obtida através da emitância térmica e os triângulos verdes, as respectivas barras de erro.

Capítulo 6

Conclusões

Como foi visto neste trabalho, investigamos o comportamento de um feixe de partículas carregadas, denso, quando este é lançado em um canal solenoidal. Dentre as inúmeras modificações que o sistema sofre, escolhemos estudar principalmente a ejeção de partículas para o halo e o estado de relaxação.

No âmbito da ejeção de partículas, dividimos o problema em duas partes. Na primeira, estimamos o ponto de equilíbrio de um feixe frio e, através de técnicas de perturbação, determinamos analiticamente o seu tempo de quebra de onda. Nesse caso, ainda foi possível generalizar esta aproximação tanto para feixes casados (ponto de equilíbrio na borda do feixe) quanto descasados (ponto de equilíbrio fora da borda do feixe). De maneira a sintetizar os resultados analíticos com as simulações numéricas, montamos uma figura que mostra para quais valores de não-homogeneidade χ e descasamento r_b iniciais obtemos um determinado tempo de quebra de onda.

Na segunda parte, analisamos o feixe quente por intermédio de dois modelos numéricos, um deles baseado em técnicas de fluidos ideais e o outro através de simulações auto consistentes (através do conceito de emitância térmica). Com a emitância térmica foi possível comparar a ordem de grandeza do tempo de ejeção das partículas para o halo, para diferentes valores de temperatura, em relação ao tempo de quebra de onda que obtivemos para o feixe frio. Mostramos também que esse tempo de ejeção apresenta três fases, sendo possível ser da mesma ordem de grandeza do caso frio, muito maior ou estar em um regime de transição. Para fornecer um panorama geral, esse resultado foi exposto através de uma figura que relaciona os tempos de ejeção com a não-homogeneidade e a temperatura inicial.

Para investigar o estado relaxado do feixe de uma maneira alternativa, utilizamos a técnica do Lagrangeano médio, determinando uma equação de movimento para a dinâmica da não-homogeneidade, tomada como um parâmetro constante nas análises de quebra de onda e ejeção de partículas. Esta equação foi acoplada à um conjunto de partículas-teste,

fornecendo assim uma descrição do espaço de fase. Partindo do espaço de fase foi possível estimar quantidades, como, o tamanho do núcleo e do halo do feixe, que foram essenciais para determinar a fração de partículas que migram do núcleo para o halo e por fim, a emitância do estado relaxado.

Como perspectiva natural para a continuidade do trabalho, propomos analisar o feixe quente com modelos de fluido mais abrangentes, visto que o modelo utilizado é ideal, funcionando bem apenas para alguns valores de temperatura e não-homogeneidade. Outra possibilidade seria a comparação dos resultados obtidos, tanto para o feixe frio quanto o quente, com medidas experimentais, de forma a estabelecer valores numéricos reais. Ainda podemos destacar que quantidades como entropia e expoente de Lyapunov ainda são pouco exploradas no contexto de feixes e, embora já tenham sido analisadas em alguns trabalhos, carecem de modelos mais abrangentes.

Apêndice A

A.1 Trajetórias elípticas no espaço de fases

Esboçaremos aqui, sobre certas condições matemáticas, que as soluções de um sistema linear conservativo ocupam uma elipse no espaço de fase. Suponha que esse nosso sistema linear seja descrito como

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Utilizando a equação secular, podemos calcularmos os autovalores da matriz A, obtendo o seguinte polinômio característico

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (\text{A.2})$$

que através da formula de Bháskara nos fornece:

$$\lambda = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} \quad (\text{A.3})$$

Se restringirmos o sistema às condições $a_{11} + a_{22} = 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, teremos as condições necessárias e suficientes para autovalores do tipo imaginários puros. Para facilitar a álgebra, ainda podemos simplificar o sistema dado como uma única equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} \quad (\text{A.4})$$

e sabendo que $a_{11} = -a_{22}$, pode reescrevê-la como:

$$\underbrace{(a_{21}x + a_{22}y)}_M dx + \underbrace{(a_{22}x - a_{12}y)}_N dy = 0 \quad (\text{A.5})$$

A equação anterior é uma EDO (equação diferencial ordinária) do tipo exata [43], pois $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = a_{22}$.

Como a equação (A.1) não possui termos de dissipação (proporcionais à velocidade, por exemplo), podemos achar sua solução definindo um vetor de campo \vec{F} , que representa o campo vetorial conservativo associado a esse sistema. Como todo campo conservativo é irrotacional, $\nabla \times \vec{F} = 0$, podemos escrevê-lo em função do gradiente de uma função arbitrária ϕ , (pois da mesma maneira, $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$), que em coordenadas retangulares pode ser expressa como:

$$\nabla\phi(x, y) = \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}\hat{j} \quad (\text{A.6})$$

Assim, se compararmos os termos das equações (A.5) e (A.6), obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} = a_{21}x + a_{22}y \Rightarrow \phi(x, y) = \frac{a_{21}x^2}{2} + a_{22}yx + k(y) \\ \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} = a_{22}x - a_{12}y \Rightarrow \phi(x, y) = -\frac{a_{12}y^2}{2} + a_{22}yx + k(x) \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

onde $k(x)$ e $k(y)$ são as constantes provenientes da integração de $\phi(x, y)$. Uma maneira de determiná-las, é escolher uma das equações de $\phi(x, y)$ em (A.7), (escolhemos a primeira) e depois derivá-la em relação à variável que k possui dependência implícita, nesse caso y .

$$\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} = a_{22}x + \frac{dk(y)}{dy} \quad (\text{A.8})$$

comparando $\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}$ entre a equação anterior e (A.7), obtemos $a_{22}x - a_{12}y = a_{22}x + \frac{dk(y)}{dy}$, logo:

$$\frac{dk(y)}{dy} = -a_{12}y \Rightarrow k(y) = -\frac{a_{12}y^2}{2} + C \quad (\text{A.9})$$

Agora que possuímos o valor de $k(y)$, voltamos na primeira equação de $\phi(x, y)$ em (A.7) e determinar-lo como

$$\phi(x, y) = \frac{a_{21}x^2}{2} + a_{22}xy - \frac{a_{12}y^2}{2} + C \quad (\text{A.10})$$

A constante de integração C se funde em uma única constante, que chamaremos de K , com o argumento de que sendo $\nabla\phi(x, y) = 0$, isso implicará que $\phi(x, y)$ também produza uma outra constante, ou seja $\phi(x, y) = C'$. Logo escreveremos (multiplicada por 2)

$$a_{21}x^2 + 2a_{22}xy - a_{12}y^2 = K \quad (\text{A.11})$$

onde K é uma constante arbitrária. Para facilitar a manipulação, escreveremos a matriz B na sua forma quadrática, ou seja

$$K = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{22} & -a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \vec{x} \cdot B \cdot \vec{x}^T \quad (\text{A.12})$$

Agora vamos analisar os coeficientes da matriz B para saber os sinais de seus autovalores [43].

- Se a_{21} é maior que zero, a matriz B é dita positiva definida, ou seja, o determinante de B e da sub-matriz formada pelo elemento a_{21} , são positivos. Nesse caso, todos os autovalores são positivos;
- Se a_{21} é menor que zero, a matriz B é dita negativa definida, ou seja, o determinante de B é maior que zero e da sub-matriz a_{21} é negativo. Nesse caso, todos os autovalores são negativos.

Em ambos os casos citados acima, os autovalores possuem o mesmo sinal. Além disso, como B é hermitiana ($B = \overline{B}^T$), sabemos que é diagonalizável e seus autovetores são ortogonais. Portanto, podemos encontrar uma matriz P que diagonalize B , fazendo uma mudança de variável $\vec{x} = P \cdot \vec{z}$, afim de eliminar os termos mistos da equação (A.12).

Na verdade, a ortogonalidade dos autovetores indica que a matriz P é, em geral, uma matriz de rotação. Deste modo, nossa mudança de variável causará apenas uma rotação na base da forma quadrática original. Se substituirmos $\vec{x} = P \cdot \vec{z}$ na forma quadrática original da equação (A.12), obtemos $K = z \cdot \vec{P} \cdot B \cdot P^T \cdot \vec{z}^T = \vec{z} \cdot D \cdot \vec{z}^T$, onde D é uma matriz diagonal cujos elementos são, justamente, os autovalores de B . Escrevendo explicitamente D , temos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Logo:

$$K = \vec{z} \cdot D \cdot \vec{z}^T = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Resolvendo o produto matricial, chegamos à seguinte expressão para a matriz na forma quadrática nas novas coordenadas $z = (\hat{x}, \hat{y})$

$$\lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 = K \quad (\text{A.15})$$

onde λ_1 e λ_2 possuem o mesmo sinal. Fazendo $\lambda_1 = K/c_1$ e $\lambda_2 = K/c_2$, obtemos finalmente

$$\frac{\hat{x}^2}{c_1} + \frac{\hat{y}^2}{c_2} = 1 \quad (\text{A.16})$$

que é a equação da elipse centrada na origem.

Apêndice B

B.1 Conexão entre Temperatura e Velocidade

Quando realizamos uma simulação auto-consistente é necessário um par de condições iniciais de posição e velocidade para cada uma das partículas. A posição é obtida através de um perfil parabólico de densidade (equação 2.53), e a velocidade é distribuída de maneira uniforme entre zero e um valor máximo. Já no modelo de fluido nossas condições iniciais são levemente diferentes, porque embora utilizemos o mesmo perfil de densidade ainda precisamos definir a temperatura inicial (equação 5.11). Sendo assim, é inevitável que tenhamos uma relação entre temperatura e a velocidade iniciais para comparar ambos os modelos. Um maneira de estabelecer esta conexão, como já adiantamos, é supor que a função de distribuição de velocidades uniforme entre zero e uma velocidade máxima, conforme a figura a seguir

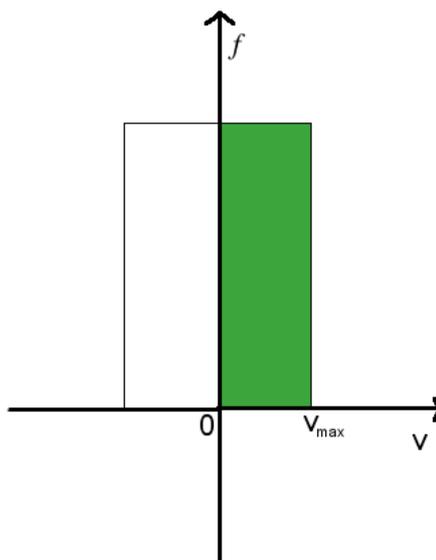


Figura B.1: Função de distribuição de velocidades.

Assumindo que no estado inicial todas as partículas tem a mesma temperatura, então, para

uma aproximação de gás ideal, cada grau de liberdade do nosso sistema contribuirá com $k_b T_0/2$, onde k_b é a constante de Boltzmann e T_0 é a temperatura inicial, para a energia cinética média total, segundo o teorema da equipartição. Como nosso sistema é bidimensional, logo, a contribuição total para o espaço de velocidades é do tipo: $m\langle v^2 \rangle/2 = k_b T_0$. Tomando $k_b = m = 1$, obtemos $\langle v^2 \rangle/2 = T_0$. Se calcularmos o valor de $\langle v^2 \rangle/2$, supondo f com uma função de Heaviside, temos em coordenadas cilíndricas

$$T_0 = \frac{\langle v^2 \rangle}{2} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^{v_{max}} \int_0^{2\pi} f v^2 v dv d\theta}{\int_0^{v_{max}} \int_0^{2\pi} f v dv d\theta} = \frac{v_{max}^2}{4} \quad (\text{B.1})$$

onde v_{max} é a velocidade inicial máxima permitida para cada partícula.

Referências Bibliográficas

- [1] F. B. Rizzato, R. Pakter, and Y. Levin. Wave breaking and particle jets in intense inhomogeneous charged beams. *Physics of Plasmas*, 14:110701, 2007.
- [2] E. G. Souza, A. Endler, R. Pakter, F. B. Rizzato, and R. P. Nunes. The controlling role of envelope mismatches in intense inhomogeneous charged beams. *Applied Physics Letters*, 96:141503, 2010.
- [3] E. G. Souza, A. Endler, F. Rizzato, and R. Pakter. Em preparação, Junho 2012.
- [4] E. G. Souza, R. Pakter, F. B. Rizzato, and A. Endler. An analytical lagrangian model for analyzing temperature effects in intense non-neutral beams. *Proceedings of IPAC11. San Sebastian, Espanha*, 2011.
- [5] R. P. Nunes, R. Pakter, F. B. Rizzato, A. Endler, and E. G. Souza. Relaxation of intense inhomogeneous charged beams. *Physics of Plasmas*, 16:1, 2009.
- [6] R. P. Nunes, A. Endler, E. G. Souza, R. Pakter, and F. B. Rizzato. Relaxation of intense inhomogeneous mismatched charged beams. *Proceedings of PAC09. Vancouver, BC, Canada*, 2009.
- [7] C. D. Child. Discharge from hot calcium oxide. *Phys. Rev. (Series I)*, 32:492–511, May 1911.
- [8] Irving Langmuir. The effect of space charge and residual gases on thermionic currents in high vacuum. *Phys. Rev.*, 2:450–486, Dec 1913.
- [9] P. Bryant and K. Johnsen. *Principle of circular accelerators and storage rings*. Cambridge University Press, 2009.
- [10] P. Waloschek. *Als die Teilchen laufen lernten – Leben und Werk des Rolf Wideröe*. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1994.
- [11] S. Y. Lee. *Accelerators Physics, 2nd edition*. World Scientific, 2004.

- [12] Lewi Tonks and Irving Langmuir. A general theory of the plasma of an arc. *Phys. Rev.*, 34:876–922, Sep 1929.
- [13] A. A. Vlasov. On the vibration properties of electron gás. *Soviet Physics Uspekhl.* (Tradução da versão original de 1938.), 10:721, 1968.
- [14] I. M. Kapchinskij and V. V. Vladmirskij. Limitations of proton beam current in a strong focusing linear accelerator associated with the beam space charge. *Proc. of the Int. Conf. on High Energy Accelerators*, 14-19:274–288, 1959.
- [15] M. Reiser. *Theory and design of charged particle beams*. John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [16] R. C. Davidson and H. Qin. *Physics of intense charged particle beams in high energy accelerators*. Imperial College Press, 2001.
- [17] T. Wangler. *RF linear accelerators*. John Wiley & Sons, 1998.
- [18] R. L. Gluckstern. Analytic model for halo formation in high current ion linacs. *Physical Review Letters*, 73:1247–1250, 1994.
- [19] F. J. Sacherer. Rms envelope equations with space charge. *IEEE Nuclear and Plasma Sciences Society*, doi 10.1109/TNS.1971.4326293, 18:1105–1107, 1971.
- [20] P. M. Lapostolle. Possible emittance increase through filamentation due space charge in continuous beams. *IEEE Nuclear and Plasma Sciences Society*, doi 10.1109/TNS.1971.4326292, 18:1101–1104, 1971.
- [21] H. Okamoto and M. Ikegami. Simulation study of halo formation in breathing round beams. *Physical Review E*, 55(n. 6):7557, June, 1997.
- [22] A. V. Fedotov. Beam halo formation in high-intensity beams. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 557:216–219, 2006.
- [23] A. V. Fedotov. Halo03 workshop. *AIP Conference Proceedings*, 693, 2003.
- [24] A. Balzani. Frequency map analysis for beam halo formation in high intensity beams. *AIP Conference Proceedings*, 693, 2003.
- [25] C. Chen, R. Pakter, and R. Davidson. Rigid-rotor vlasov equilibrium for an intense charged-particle beam propagating through a periodic solenoidal magnetic field. *Physical Review Letters*, 79:225–228, 1997.

- [26] J. S. Moraes, R. Pakter, and F. B. Rizzato. Equilibrium and stability of off-axis periodically focused particle beams. *Phys. Rev. Lett.*, 93:244801, Dec 2004.
- [27] L. C. Martins. *Estabilidade no transporte de feixes de partículas relativísticas em um tubo condutor*. PhD thesis, UFRGS, 2010.
- [28] T. P. Wangler, K. R. Crandall, R. Ryne, and T. S. Wang. Particle-core model for transverse dynamics of beam halo. *Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams*, 1:084201, 1998.
- [29] R. P. Nunes and F. B. Rizzato. An analytical characterization of initially non-homogeneous matched beams at equilibrium. *Proceedings of PAC09. Vancouver, BC, Canada*, 2009.
- [30] K. Symon. *Mechanics, 3rd edition*. Addison-Wesley, 1971.
- [31] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentos de Física, volume 3*. Editora LTC, 1994.
- [32] J. M. Dawson. Nonlinear electrons oscillations in a cold plasma. *The Physical Review*, 113, 1959.
- [33] A. H. Najfeh. *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 1973.
- [34] O.A. Anderson. Internal dynamics and emittance growth in space-charge dominated beams. *Part. Accel.*, 21:216–219, 1987.
- [35] A. J. Lichtenberg and M. A. Liebermann. *Regular and stochastic motion*, 1ª edição. Springer-Verlag, 1983.
- [36] F. Gerick. Beam halo formation in linacs, theory and experiment. *CERN-AB*, 054:RF, 2005.
- [37] E. D. Courant and H. S. Snyder. Theory of the alternating-gradient synchrotron. *Annals of Physics*, 281:360–408, 1958.
- [38] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Willey, New York, 1974.
- [39] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. Safko. *Classical Mechanics (3ª edição)*. Addison Wesley, 2002.
- [40] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics (Volume 6)*, 2ª edição. Pergamon Press, 1987.

- [41] R. P. Nunes. *Termalização de feixes não-neutros ultra-intensos sob confinamento solenoidal em canais lineares*. PhD thesis, UFRGS, 2008.
- [42] R. P. Nunes, R. Pakter, and F. B. Rizzato. Simplified self-consistent model for emittance growth in charged beams with mismatched envelopes. *Physics of Plasmas*, 14:023104, 2007.
- [43] V. da Silva Jr. *Estudo sobre a estabilidade dos pontos críticos de sistemas autônomos*. Master's thesis, Unisinos, 2004.