Ordenando Árvores pela sua Conectividade Algébrica

Israel Rocha
israelrocha@gmail.com
Orientador: Vilmar Trevisan

<u>Introdução:</u> O problema de ordenar árvores pela conectividade algébrica é uma área ativa de pesquisa em teoria espectral de grafos. Trabalhamos com classes de árvores chamadas de centopéias. Uma centopéia é uma árvore na qual a remoção de todos os vértices pendentes a torna um caminho. Apresentaremos um resultado obtido para caracterizá-las, o que nos possibilitou ordená-las pela conectividade algébrica. Esse resultado está no artigo [3].

- Acima vemos um exemplo de centopéia. Se removermos todos os vértices pendentes, restará apenas o caminho principal.

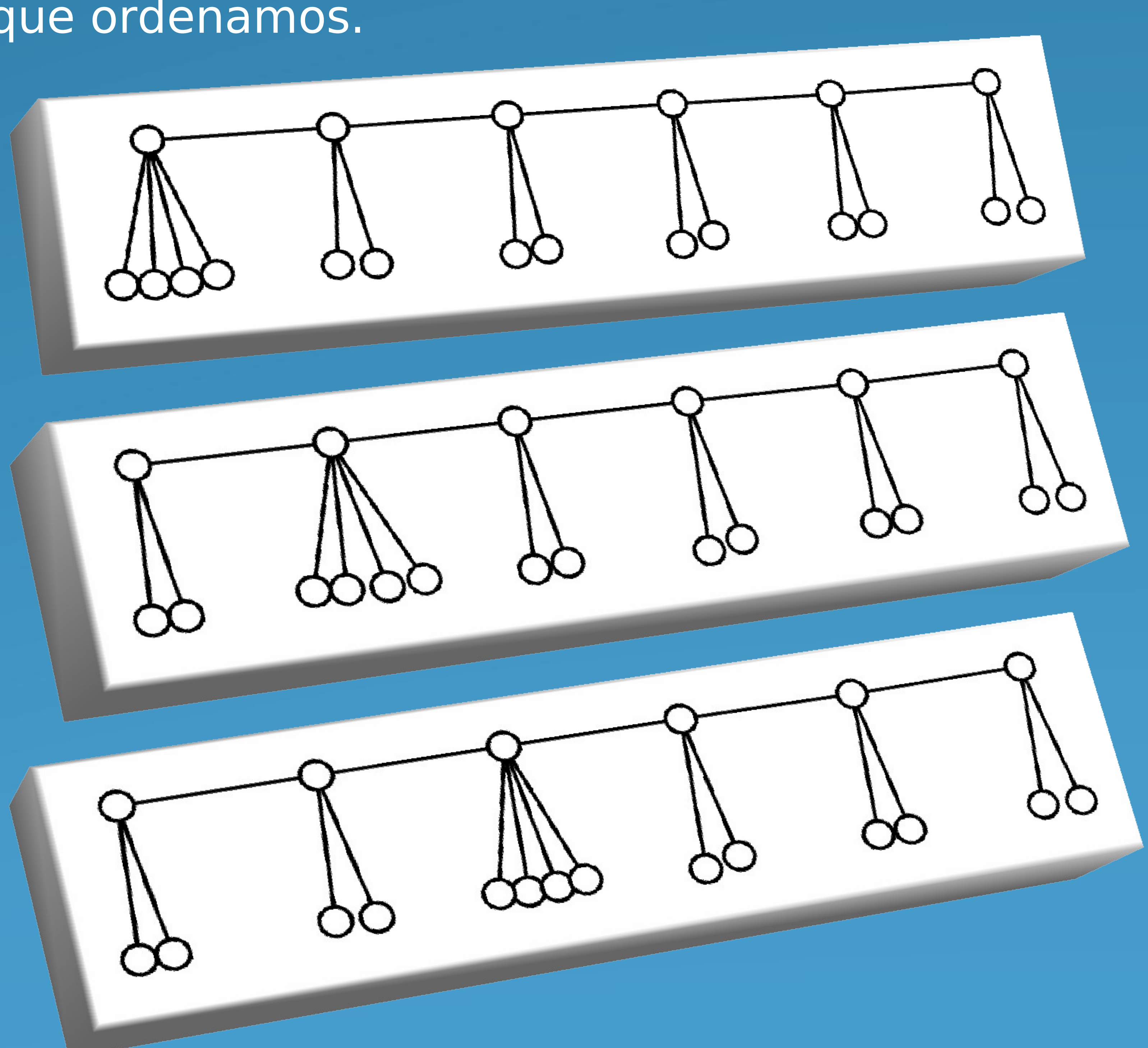
<u>Definição 1:</u> Seja D a matriz diagonal dos graus dos vértices de um grafo G e seja A a matriz de adjacência de G. A matriz

$$L=D-A$$

é chamada **matriz laplaciana** do grafo G.

- Sejam $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$ os autovalores de L. Chamamos μ_{n-1} de **conectividade algébrica** do grafo G.

- Abaixo estão dispostas em ordem crescente de conectividade algébrica exemplos de centopéias que ordenamos.



- No exemplo, para cada centopéia existe um vértice k com r=4 vértices pendentes. Os outros vértices no caminho principal possuem q=2 vértices pendentes.
- Quando k aumenta, a conectividade algébrica também aumenta.

- Denotaremos tais centopéias por $A_q(k)$.
- Assim, as três árvores são respectivamente denotadas por $A_2(1)$, $A_2(2)$ e $A_2(3)$.
- O seguinte Teorema devido a Fiedler é um resultado fundamental sobre árvores.

<u>Teorema 1:</u> Se f é um autovetor associado com μ_{n-1} então exatamente um dos dois casos ocorre:
- **(A)** Nenhuma entrada de f é 0. Nesse caso, existe um único par de vértices i e j tal que i e j são adjacentes $f_i > 0$ e $f_j < 0$.
- **(B)** Alguma entrada de f é 0. Além disso, existe um único vértice k tal que $f_k=0$ e k é adjacente ao vértice i com $f_i=0$.

<u>Definição 2:</u> T é chamada uma árvore do tipo II se vale (A) e os vértices i e j são chamados vértices característicos de T.
- T é chamada uma árvore do tipo I se vale (B) e o vértice k é chamado o vértice característico de T.

- O resultado obtido que classifica as nossas centopéias é o seguinte:

<u>Lema 1:</u> As centopéias em A_q são do tipo II com o mesmo vértice característico, exceto para $A_q(s)$ quando 2s=d.

<u>Conclusão:</u> Como conclusão obtivemos os seguintes ordenamentos:

<u>Teorema 2:</u> Para $1 \leq k \leq (d-1)/2$, se r>q então a conectividade algébrica de $A_q(k)$ é uma função estritamente crescente em k.

<u>Teorema 3:</u> Para $1 \leq k \leq (d-1)/2$, se r<q então a conectividade algébrica de $A_q(k)$ é uma função estritamente decrescente em k.

<u>Referências:</u>
- [1] M. Fiedler, A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its applications to graph theory, Czechoslovak Math. J., 25 (100) (1975), 619-633.
- [2] S. Kirkland, et al., Characteristic Vertices of Weighted Trees via Perron Values, Linear and Multilinear Algebra, 1996, Vol. 40, pp. 311-325.
- [3] O. Rojo, I. Rocha, V. Trevisan, A total ordering by algebraic connectivity on a subclass of caterpillars, Linear Algebra and its Applications. (submetido)