O Teorema de Equilíbrio de Nash via Teorema do Ponto Fixo de Kakutani

XXII SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

Alexandre Xavier dos Santos[1]; Antonio Carlos Lyrio Bidel[2]

alexandrexaviersg@hotmail.com; bidelac@gmail.com

[1]Acadêmico do Curso de Matemática; [2]Professor do Departamento de Matemática, UFSM

Introdução

Este trabalho apresenta um estudo da demonstração do Teorema de Equilíbrio de Nash utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani. Tal resultado, fundamental na Teoria de Jogos, estabelece que:

Todo jogo, definido por matrizes de payoffs, possui pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Tal resultado foi apresentado na tese de doutorado de John F. Nash Jr. pela Universidade de Princeton em 1949 causando grande impacto para as áreas de Economia e Ciências Sociais.

Conceitos Iniciais

- **Jogo Normal** $G=\{I,S_i,u_i\}$
- **Jogador** $i\in I=\{1,2,...,n\}$
- **Conjunto de Estratégias Puras de *i*:** $S_i=\{s_{i1},s_{i2},...,s_{im_i}\}$
- **Espaço de Estratégias Puras:** $S=S_1\times S_2\times...\times S_n$
- **Função Utilidade do jogador *i*:** $u_i(s):S\to\mathbb{R}$
- **Conjunto de Estratégias Mistas:**

$$\Delta(S_i)=\left\{\left(x_1,..,x_{m_i}\right)\in\mathbb{R}^{m_i}\mid x_1\geq 0,...,x_{m_i}\geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{m_i}x_k=1\right\}$$

- **Espaço de Estratégias Mistas:** $\Delta=\Delta(S_1)\times...\times\Delta(S_n)$
- **Perfil de estratégia:** $p=(p_i,p_{-i})\in\Delta$, com $p_i\in\Delta(S_i)$ e $p_{-i}\in\Delta(S_{-i})=\Delta(S_1)\times...\times\Delta(S_{i-1})\times\Delta(S_{i+1})\times...\times\Delta(S_n)$
- **Função Utilidade em Estratégias Mistas:** $u_i(p):\Delta\to\mathbb{R}$
- **Função Melhor Resposta do Jogador *i*:**

$$MR_i:\Delta(S_{-i})\to 2^{\Delta(S_i)}$$
$$p_{-i}\mapsto MR_i(p_{-i})=\underset{p_i\in\Delta(S_i)}{\arg\max}\ u_i(p_i,p_{-i})$$

- **Função Melhor Resposta do jogo *G*:**

$$MR:\Delta\to 2^{\Delta}$$
$$p\mapsto MR(p)=\left(MR_1(p_{-1}),MR_2(p_{-2}),...,MR_n(p_{-n})\right)$$

- Seja $K\subset\mathbb{R}^n$, compacto, tal que $\phi(x)\subseteq K$, $\forall x\in X$ e $\phi(x)\subset\mathbb{R}^n$, $\forall x\in X$. A função $\phi:X\to 2^X$ é ***semicontínua superiormente*** se, e somente se: *i.* $x_0\in X$; *ii.* $x_k\in X,\ k=1,2,...$ *iii.* $\lim_{k\to\infty}x_k=x_0$; *iv.* $y_k\in\phi(x_k)$; *v.* $\lim_{k\to\infty}y_k=y_0$
- Seja $X\subset\mathbb{R}^n$. Dizemos que $p^*\in X$ é um ***ponto fixo*** de uma função $\phi:X\to 2^X$ se $p^*\in\phi(p^*)$
- **Equilíbrio de Nash** é um perfil de estratégia $p^*=\left(p_i^*,p_{-i}^*\right)\in\Delta$ tal que: $u_i\left(p_i^*,p_{-i}^*\right)\geq u_i\left(p_i,p_{-i}^*\right)$.

Resultados Auxiliares

- Seja a função contínua $f:\Delta(S_i)\to\mathbb{R}$ tal que $f\left(x_1,...,x_{m_i}\right)=\sum_{k=1}^{m_i}x_k=1$

  A imagem inversa do conjunto fechado $\{1\}$, $f^{-1}(\{1\})=\Delta(S_i)$ é um conjunto ***fechado***.
- $\Delta(S_i)\subset B[0,1]$, portanto $\Delta(S_i)$ é ***limitado***.
- $\forall\ p_i,q_i\in\Delta(S_i),\quad 0\leq t\leq 1\quad\Rightarrow\quad(1-t)p_i+tq_i\in\Delta(S_i)$
- $\Delta(S_i)$ é ***compacto*** e ***convexo***.
- $\Delta=\Delta(S_1)\times...\times\Delta(S_n)$ é ***não-vazio***, ***compacto*** e ***convexo***.
- O conjunto $MR_i(p_{-i})=\underset{p_i\in\Delta(S_i)}{\arg\max}\ u_i(p_i,p_{-i})$ é ***não-vazio***.
- $\forall\ p\in\Delta,\ MR(p)$ é ***compacto***
- $\forall\ p\in\Delta,\ MR(p)$ é ***convexo***
- $MR:\Delta\to 2^{\Delta}$ é uma ***função semicontínua superiormente***

  i. $p^{(o)}\in\Delta$ *ii.* $p^{(k)}\in\Delta$ *iii.* $\lim_{k\to\infty}p^{(k)}=p^{(0)}$

  iv. $q^{(k)}\in MR\left(p^{(k)}\right)$ *iv.* $q^{(k)}\to q^{(0)}\Rightarrow q^{(0)}\in MR\left(p^{(0)}\right)$
- $p^*=\left(p_1^*,..,p_i^*,...,p_n^*\right)\in\Delta$ é um ***Equilíbrio de Nash*** em estratégias mistas se, e somente se, $p_i^*\in MR_i\left(p_i^*\right)$ $\forall i=1,...,n$ isto é, $p^*\in MR\left(p^*\right)$.

Teorema do Ponto Fixo de Kakutani

Estabelece condições de existência de pontos fixos para multifunções definidas em conjuntos compactos, convexos e não-vazios de $\mathbb{R}^n$.

Seja X um subconjunto compacto, convexo e não vazio de $\mathbb{R}^n$. Se $\phi:X\to 2^X$ é semicontínua superiormente e $\phi(x)$ é não-vazio e convexo para todo $x\in X$, então ϕ possui pelo menos um ponto fixo, isto é, existe $p^*\in X$ tal que $p^*\in\phi(p^*)$.

Em sua demonstração, é utilizada a propriedade que afirma que pontos fixos de Kakutani são invariantes sobre retrações. Assume-se que X é *K-simplex* e define-se também uma função $f_n:X\to X$ tal que $\forall p\in X$, é escolhido $f_n(p)\in\phi(p)$. Como f_n é contínua sobre um compacto e convexo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, tem um ponto fixo, digamos p_n^*. Supõe-se que $\lim_{n\to\infty}p_n^*=p^*$, e, pela semicontinuidade superior de ϕ e a convexidade de $\phi(x)$, o ponto fixo é p^*, ou seja, $p^*\in\phi\left(p^*\right)$.

Teorema de Nash

- ***Conclusão:*** Verificado que a função Melhor Resposta satisfaz a hipótese do Teorema do Ponto Fixo de Kakutani, conclui-se que existe o ponto fixo $p^*\in MR\left(p^*\right)$ e, pelo resultado que relaciona Função Melhor Resposta e Equilíbrio de Nash, tal ponto fixo p^*, é um Equlíbrio de Nash.

Bibliografia

- Bortolossi, H., Garbugio G. e Sartini, B. *Uma introdução à Teoria Econômica dos Jogos*, 26° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2007
- Kakutani, S., *A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem*, Duke Mathematical Journal, vol 8, pp. 457–459, 1941
- Lima, E. L. *Curso de Análise*, vol 2. 12.ed, IMPA, 2007
- Nash Jr, J. F. *Non-Cooperative Games*. PhD. Thesis. Princeton University Press, 1950
- Stuckless, T. *Brouwer's Fixed Point Theorem: Methods of Proof and Generalizations*, Dissertação de mestrado, Departamento de Matemática, Simon Fraser University, 2003