# O Paradoxo de Banach-Tarski

João Carlos Motta dos Santos
Orientador: José Afonso Barrionuevo

## O Paradoxo

Em 1924, Stefan Banach e Alfred Tarski publicaram um artigo demonstrando entre outras coisas que uma bola sólida no espaço tridimensional pode ser decomposta em um número finito de partes disjuntas, de tal maneira que aplicando apenas movimentos rígidos nessas partes, construímos duas cópias idênticas da bola original. O paradoxo reside no fato de que esses movimentos não alteram volumes ou áreas.

## Conjuntos Não-Mensuráveis

Cada uma das partes nas quais a bola é dividida é um conjunto não-mensurável pois, tanto no sentido formal quanto no intuitivo, a medida de uma união disjunta é a soma das medidas das partes. Mostraremos que é possível obter uma decomposição do intervalo [0,2] em um número infinito enumerável de partes disjuntas, de tal maneira que transladando cada uma delas obtemos a reta inteira como resultado da união das partes transladadas.

## O Axioma da Escolha e a Ação do Grupo $SO_n$

Essas partições da bola e do intervalo são feitas através da ação do grupo de isometrias $SO_n$ e do Axioma da Escolha. No caso do intervalo temos uma decomposição em um número infinito enumerável de partes pois para $n = 1, 2$ $SO_n$ é solúvel. Para a bola a decomposição é finita pois $n \geq 3$ $SO_n$ possui um subgrupo livre gerado por duas rotações.

**Referências:**

Tao, Terence. The axiom of choice and Banach-Tarski paradoxes. Disponível em: http://www.math.ucla.edu/~tao/resource/general/121.1.00s/tarski.html. Acesso em: 05 de outubro de 2010.

Wagon, Stan (1994). The Banach-Tarski Paradox. Cambridge: Cambridge University Press.

João Carlos Motta dos Santos – e-mail: jcarlos_motta@pop.com.br