Solução da Equação de Difusão da Teoria Multigrupo de Nêutrons em Geometria Cartesiana pela Técnica da Transformada Integral e Diagonalização

Marcelo Schramm, Cynthia Feijó Segatto
marceloschramm@hotmail.com; *cynthia.segatto@ufrgs.br*

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos uma atenção especial foi realizada para procurar soluções analíticas para a equação de difusão, e a literatura é escassa em soluções analíticas para a equação de difusão de nêutrons. Apesar deste fato, alguns casos específicos foram resolvidos através da GITT. O elemento-chave desta metodologia compreende os seguintes passos: expansão dos fluxos rápido e térmico em uma série escrita em termos de uma série de autofunções ortogonais. Substituindo estas expansões na equação original e tomando momentos, aparecem uma equação diferencial matricial de segunda ordem, conhecida no quadro desta metodologia como o problema transformado da GITT. Neste ponto, nós devemos relembrar que a solução deste tipo de problema é dada pela combinação linear de funções senos e cossenos de uma raiz quadrada de uma matriz. Isto significa uma função composta de duas funções matriciais. Algoritmos eficientes para encontrar este tipo de soluções não estão disponíveis na literatura exceto por um problema muito específico, a maioria necessitando matrizes de ordem baixa. Para contornar esta dificuldade, nós apresentamos uma abordagem eficiente do ponto de vista computacional. Depois de diagonalizar a matriz, nós definimos uma nova variável em uma determinada forma que a matriz remanescente nesta equação transformada é diagonal. Como consequencia, este novo sistema de equações é uma série de equações desacopladas, que é resolvida utilizando resultados para equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Uma vez que a solução do problema transformado é conhecida, a solução da equação da difusão de nêutrons para um retângulo homogêneo está determinada. Este tipo de solução pode ser estendida para placas heterogêneas, seguindo a ideia de [BoViFeBa10]. Finalmente, nós completamos nossa análise apresentando um critério de convergência para a solução proposta utilizando a Teoria do Teorema Cardinal de Interpolação, que permite determinar resultados com qualquer precisão prescrita. Além disso o teorema de Cauchy-Kowalewski garante a existência e unicidade da solução encontrada, então um número finito de termos na série já é um algoritmo robusto e adequado para gerar soluções exatas com uma precisão escolhida. Nós devemos também realçar que este tipo de solução é apropriada para ser usada para validação de modelos físicos.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Foi considerada a equação de difusão de nêutrons com dois grupos em um retângulo homogêneo (para 0<x<M e 0<y<L):

$$-D_g\frac{\partial^2\phi_g(x,y)}{\partial x^2}-D_g\frac{\partial^2\phi_g(x,y)}{\partial y^2}+\Sigma_{Rg}\phi_g(x,y)= \qquad (1.1)$$

$$=\frac{1}{k_{eff}}\chi_g\sum_{g'=1}^{2}\nu\Sigma_{fg}\phi_{g'}(x,y)+\sum_{\substack{g'=1\\ g'\neq g}}^{2}\Sigma_{gg'}\phi_{g'}(x,y)\ ,$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\phi_g(0,y)=\phi_g(M,y)=0 \qquad (1.2)$$

$$\phi_g(x,0)=0 \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial\phi_g}{\partial y}(x,L)=-\frac{\phi_g(x,L)}{d} \qquad (1.4)$$

em que d é a distância extrapolada. Aqui g é o índex que denota o grupo de energia (1 para rápido, 2 para térmico); $\phi_g(x,y)$ é o fluxo escalar de nêutrons do grupo g de energia; D_g é o coeficiente de difusão para o grupo g de energia; $\sum_{Rg}$ é a seção de choque macroscópica de remoção do grupo g de energia; $\sum_{ag}$ é a seção de choque macroscópica de absorção do grupo g de energia; $\sum_{gg'}$ é a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g de energia para o grupo g' de energia; $\sum_{fg}$ é a seção de choque macroscópica de fissão do grupo g de energia; k_{eff} é o fator de multiplicação efetivo; υ é o número médio de nêutrons liberados por fissão; χ_g é o espectro integrado de fissão do grupo g de energia e $\sum_{Rg}=\sum_{ag}+\sum_{gg'}$.

Para resolver (1.1) pela abordagem da GITT, foram inicialmente expandimos os fluxos rápido e térmico em uma expansão em série em termos de um conjunto de autofunções ortonormais $\psi_i(x)=sen(\lambda_i x)$ com os respectivos autovalores $\lambda_i=i\pi/M$ para $i=1,\ldots,N_{max}$.

$$\phi_g(x,y)=\sum_{i=1}^{N_{max}}\frac{\psi_i(x)\varphi_{gi}(y)}{N_i^{\frac{1}{2}}} \qquad (1.5)$$

Aqui N_i denota a norma. Substituindo (1.5) em (1.1), multiplicando a equação resultante pelo operador integral ortogonal associado, obteve-se a seguinte equação diferencial matricial linear de segunda ordem,

$$Y''(y)+UY(y)=0 \qquad (1.6)$$

que é conhecida como a equação transformada da GITT. Aqui, o vetor $Y(y)$ é um vetor coluna, $Y(y)=(\varphi_{11}(y)\ldots\ \varphi_{21}(y)\ldots)^T$, tem dimensão $2\ N_{max}$ e a matriz U é a matriz dos coeficientes constantes dos termos não derivados nas equações diferenciais transformadas.

Lembrando que os autovalores da matriz U são distintos uma vez que o operador associado à equação de difusão de nêutrons é auto-adjunto, no próximo passo nós diagonalizamos a matriz U, obtendo

$$Y''(y)+PHP^{-1}Y(y)=0 \qquad (1.7)$$

em que P é a matriz dos autovalores da matriz U e H é a matriz diagonal dos autovalores da matriz U. Definindo uma nova variável $R(y)=P^{-1}\,Y(y)$ e multiplicando (1.7) por P^{-1}, o sistema matricial resultante fica desacoplado, restando apenas equações diferenciais lineares de segunda ordem a coeficientes constantes, que têm solução bem conhecida. Uma vez que o vetor $R(y)$ seja conhecido, retoma-se às funções originais pela relação $Y(y)=P\,R(y)$, encontrando as funções auxiliares ($\varphi_{gi}(y)$) do problema da GITT, e utiliza-se (1.5) para reencontrar as funções $\phi_g(x,y)$,originais do problema. É conveniente lembrar que esta metodologia é inteiramente analítica, em que os únicos erros encontrados são os de truncamento e arredondamento.

Para fins de resultados numéricos, o truncamento da série e seu teste de convergência se dá através do Teorema Cardinal de Interpolação, que diz: "Uma função quadrática integrável $\eta=\int_r\rho_j(t)dt\in \boldsymbol{L^2}$ com autovalores α_j com $j=1\ldots Q$ que é limitada por $m/\sum_T$ tem uma solução exata para uma expansão finita". Juntamente, o Teorema de Parseval completa a análise de convergência pela determinação do erro ao truncar a série.

RESULTADOS E CONCLUSÃO

Como um exemplo-teste foi realizado, com o procedimento descrito no corpo do texto, a Tabela 1 mostra os parâmetros nucleares utilizados para uma geometria de $L=M=200cm$, referenciados em [AbHa08]; e Tabela 2 mostra valores dos fluxos de nêutrons rápido e térmico para alguns pontos do domínio com a série truncada no seu 2º termo.

Propriedades do material	Grupo de energia (g)	
	1	2
D_g (cm)	1.35	1.08
$\Sigma_{ag}(cm^{-1})$	0.001382	0.00569
ν	2.41	2.41
$\Sigma_{fg}(cm^{-1})$	0.000242	0.00428
$\Sigma_{gg'}(cm^{-1})$	0.0023	0
$k_{eff}=1.000008$		

Tabela 1.

Ponto do domínio (x,y)	Fluxo de nêutrons rápido $[N/cm^2 * s]$	Fluxo de nêutrons térmico $[N/cm^2 * s]$
(50,50)	0.197212	0.167536
(50,100)	0.268498	0.228091
(50,150)	0.168486	0.142740
(100,50)	0.278900	0.236932
(100,100)	0.379713	0.322570
(100,150)	0.238275	0.201865
(150,50)	0.197212	0.167536
(150,100)	0.268498	0.228091
(150,150)	0.168486	0.142740

Tabela 2.

Como era de se esperar, os fluxos de nêutrons rápido e térmico tiveram comportamento máximo no centro do domínio e mínimo no seu contorno, mantendo valores positivo em todos os pontos, além de a ordem de grandeza do resultado estar consistente com as condições do problema, o que dá uma garantia de que o algoritmo foi bem construído e possui consistência em seu resultado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[BoViFeBa10]: Bodmann, B., Vilhena, M. T., Ferreira, L. S., Bardaji, J. B., 2010, **"An Analytical Solver for The Multi-Group Two Dimensional Neutron-Diffusion Equation by Integral Transform Techniques"**, Il Nuovo Cimento della Società Italiana di Fisica, C. Geophysics and Space Physics , vol.1, pp.1-10.

[AbHa08]: Aboanber, A. E., Hamada, Y. M., 2008, **"Generalized Runge-Kutta Method for Two- and Three-Dimensional Space-Time Diffusion Equations with A Variable Time Step"**, Annals of Nuclear Energy, vol.35, pp.1024-1040.

AGRADECIMENTOS

À toda a equipe do DENUC pelo apoio moral e intelectual;
Ao CNPq pela oportunidade e apoio financeiro.