Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

SEQUÊNCIAS KNEADING E CLASSIFICAÇÃO DE APLICAÇÕES MONÓTONAS POR PARTES

Dissertação de Mestrado

Elismar R. Oliveira

Porto Alegre, 11 de março de 2004

Dissertação submetida por Elismar R. Oliveira *, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Artur Oscar Lopes

Banca examinadora:

Prof. Dr. Artur Oscar Lopes (IMAT-UFRGS, ORIENTADOR)

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Matos Brietzke (IMAT-UFRGS)

Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (IMAT-UFRGS)

Prof. Dr. Mário Jorge Dias Carneiro (IMAT-UFMG)

*Bolsista do CNPq-Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

À minha esposa, Lisiane,

e aos meus ex-professores

Andrei Bourchtein e
Lioudmila Bourchtein.

Agradecimentos

Especial à minha esposa, Lisiane, pela paciência comigo, nesses dois anos de mestrado, e acima de tudo, pelo apoio, sem o qual eu não teria vencido mais esta etapa. Agradeço também ao meu orientador, professor Artur, pela atenção dispensada a mim na realização deste trabalho, assim como, ao longo destes dois anos na orientação dos meus estudos. Agradeço ainda, a todos que direta, ou indiretamente, colaboraram para o sucesso deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, nós estudamos propriedades básicas de aplicações monótonas por partes, utilizando a Teoria Kneading na obtenção de uma condição suficiente para a existência de conjugação topológica entre uma certa classe de aplicações padrão.

Abstract

In this work we study basic properties of piecewise - monotone maps using Kneading Theory to obtain a sufficient condition to existence of a topological conjugation between maps of a certain class of standard applications.

Índice

Introdução

Neste trabalho, estudamos a Teoria Kneading, para aplicações monótonas por partes, contínuas, tendo como objetivo, a classificação, através de conjugação topológica, de uma certa classe de funções que denominaremos *aplicações padrão*.

Nossa principal referência, é o trabalho de [1], ao qual fazemos um estudo detalhado, evidenciando os principais aspectos da teoria, e provando aqueles que são omitidos em [1]. Estudos relativos a esta abordagem também são encontrados em [5]. Todavia a obra pioneira no emprego da Teoria Kneading é o trabalho de John Milnor e Willian Thurston de 1988, ver [2], onde são introduzidos e largamente utilizados os conceitos fundamentais da teoria como os *itinerários.*

No capítulo 1, colocamos os pré-requisitos mínimos para o entendimento do texto, com o objetivo, não apenas de tornar o texto mais auto suficiente, mas também de evitar confusões acerca de qual a definição do conceito que estamos utilizando no nosso contexto, assim como da notação utilizada.

No capítulo 2, iniciamos o texto propriamente dito, introduzindo as idéias básicas da Teoria Kneading, como ponto de retorno (turning points), voltas (laps) e itinerário, para a classe de aplicações monótonas por partes, contínuas, num intervalo compacto, com fronteira invariante, que passamos a chamar, ℓ-modais. A seguir demonstramos o Lema 2.9 e seu Corolário 2.10, que per-

mitirão provar o Teorema 2.11, esclarecendo a relação entre a periodicidade das órbitas de f e seus respectivos itinerários. Em particular, o Corolário 2.10, segue de [4], e vai permitir falar em limites de itinerários no capítulo 4.
No capítulo 3, seguimos em parte a notação de [2]. Nosso objetivo aqui é produzir uma ordenação no espaço dos itinerários. Para isto, introduzimos diversos elementos e provamos resultados, que vão permitir, não só provar que a aplicação itinerário é não decrescente, como também servirão de ferramentas para os resultados do capítulo 4. Neste ponto aparece a definição de *aplicação padrão*, que será classe sobre a qual a aplicação itinerário é uma bijeção que preserva ordem, este é o resultado do Teorema 3.18.
No capítulo 4, apresentamos a definição de *invariantes kneading*, como certos limites laterais, que servirão para definir as sequências *admissíveis* e caracterizar a imagem da aplicação itinerário, de uma aplicação, ℓ-modal, padrão. Isto é obtido no Teorema 4.11. De posse deste resultado, concluímos nosso trabalho, com o Corolário 4.12, que classifica, quanto à conjugação topológica, as aplicações ℓ-modais, padrão, utilizando seus *invariantes kneading*.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo inicial, introduzimos algumas notações e definições da teoria geral de sistemas dinâmicos, que utilizaremos neste trabalho.

Neste capítulo, o par (X, d), será sempre um espaço métrico localmente compacto(possivelmente compacto), com a métrica d. Em todo o trabalho, denotamos $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Em geral, para quaisquer $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, denotaremos por $B(x, \varepsilon) \subset X$, o conjunto, $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$. Ainda, para um subconjunto $A \subseteq X$, denotaremos $\bar{A}$ como sendo o fecho de A na topologia dada pela métrica d.

Definição 1.1. Seja $f : X \to X$, contínua. Diremos que a família $\mathcal{F} = \{f^n : X \to X \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ é um *sistema dinâmico a tempo discreto.* Cujo estudo consiste no entendimento dos iterados $f^n(x)$ para $n \geq 0$ e $x \in X$.

É nesta classe de sistemas dinâmicos que vamos trabalhar. Assim, quando nos referirmos a uma função, $f : X \to X$ contínua, estaremos nos referindo ao sistema dinâmico correspondente $\mathcal{F} = \{f^n : X \to X \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Definição 1.2. Seja $f : X \to X$, contínua. Denominaremos a *órbita positiva* de $x \in X$, como sendo a sequência $\mathcal{O}^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), ...\} \subset X^{\mathbb{N}_0}$.

Definição 1.3. Seja $f : X \to X$, contínua. Um ponto $x \in X$ é dito:

- *fixo*, se $f(x) = x$;
- *periódico*, se existe $q > 0$, tal que, $f^q(x) = x$;
- *eventualmente periódico*, se existe $N \in \mathbb{N}_0$, tal que, $f^N(x)$ seja periódico.

Seja $x \in X$, um ponto periódico. Qualquer $q > 0$, tal que, $f^q(x) = x$, será dito *um período* para x. O valor $T = min\{q > 0 \;\mid\; f^q(x) = x\}$, será dito o *período minimal* de x.

Definimos, ainda, os conjuntos:

$$Per(f) = \{x \in X \mid \exists q > 0, \quad f^q(x) = x\}$$
$$Fix(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

Definição 1.4. Seja $f : X \to X$, contínua. Um subconjunto $A \subseteq X$, será dito, *f-invariante*, se $f(A) \subseteq A$, e portanto $f^n(A) \subseteq A$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Definição 1.5. Sejam $f : X_1 \to X_1$ e $g : X_2 \to X_2$, contínuas, com (X_1, d_1), (X_2, d_2), espaços métricos localmente compactos. Diremos que f e g são *topologicamente conjugadas*, se existir um homeomorfismo, $h : X_1 \to X_2$, tal que, $h \circ f = g \circ h$. Assim, h será dito, uma *conjugação*. Caso tenhamos $h \circ f = g \circ h$, e h seja apenas uma sobrejeção, diremos que f e g são *semi-conjugadas*, e h será dito, uma *semi-conjugação*.

Dois sistemas dinâmicos topologicamente conjugados são ditos *equivalentes*, pois tem as mesmas características dinâmicas topológicas. Mais precisamente, se f e g são equivalentes, então existe uma conjugação que leva ponto periódico de mesmo período em ponto periódico de mesmo período, ponto fixo em ponto fixo, e assim por diante.

Definição 1.6. Seja o conjunto $\mathbb{S} = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_n\}$, um conjunto arbitrário de n símbolos. Podemos tomar o conjunto $\sum_n$ das sequências infinitas, assumindo valores em $\mathbb{S}$, que será naturalmente:

$$\sum_n = \{t = (t_0, t_1, t_2, ...) \mid t_k \in \mathbb{S}, \forall k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Tal conjunto pode ser munido de uma métrica natural, $d : \sum_n \times \sum_n \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(s,t) = \begin{cases} 0 & , se \quad s = t \\ \frac{1}{2^N} & , se \quad s \neq t \end{cases}$$

onde $s, t \in \sum_n$ são quaisquer, e $N = min\{k \in \mathbb{N}_0, s_k \neq t_k\}$. Assim $(\sum_n, d)$ será um espaço métrico compacto.

Podemos definir uma função $\sigma : \sum_n \to \sum_n$, denominada *shift unidirecional à esquerda*, dada por, $\sigma(t_0, t_1, t_2, ...) = (t_1, t_2, t_3, ...)$, para todo $t \in \sum_n$.

Pode-se mostrar que o shift é uma aplicação contínua na métrica d, e portanto, um sistema dinâmico da mesma classe que estamos tratando.

Definição 1.7. Seja $f : X \to X$, contínua. Um ponto $x \in X$, fixo para f, será dito *atrator bi-lateral*, se existir uma vizinhança U de x, na topologia de X, tal que:

- $\bar{U}$ é compacto;
- $f(\bar{U}) \subseteq U$;
- $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = \{x\}$.

Um ponto periódico, de período $q > 0$, será dito *ponto periódico atrator bi-lateral*, se for ponto fixo atrator bi-lateral para f^q.

Definição 1.8. Sejam $f : X \to X$, contínua, e um ponto $x \in Per(f)$. Diremos que $\mathcal{O}(x)$ é *atratora*, se a *bacia de atração de x*,

$$BA(x) = \{y \in I | f^n(y) \to \mathcal{O}(x)\}$$

contém um intervalo aberto.

Observe que a órbita de qualquer ponto atrator bi-lateral é atratora, embora a recíproca não seja sempre verdadeira. Segundo alguns autores (ver [5], Pg 94) um ponto com esta propriedade é também denominado *two-sided attractor* ou ainda *atrator pelos dois lados*.

Definição 1.9. Seja $f : X \to X$, contínua. Dados $x, y \in X$, diremos que x e y são assintóticos, se $\lim\limits_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.

Capítulo 2

Aplicações monótonas por partes e Codificação de órbitas

Neste capítulo vamos introduzir as aplicações monotótonas por partes, e alguns dos elementos básicos para o seu entendimento.

Definição 2.1. Seja $I = [a, b]$, onde $a < b$. Uma aplicação $f : I \rightarrow I$, contínua, é *monótona por partes*, se existe um número finito de pontos distintos, $a = c_0 < c_1 < ... < c_\ell < c_{\ell+1} = b$, tais que, $\ell \geq 1$ e f é estritamente crescente ou decrescente em cada intervalo $I_k = [c_{k-1}, c_k]$, $1 \leq k \leq \ell + 1$, maximal para esta propriedade.

Em consequência da Definição 2.1, os pontos $c_1, c_2, ..., c_\ell \in I$, são pontos de extremo local de f, pois f deve mudar de orientação em torno destes pontos, já que cada I_k é maximal.

Definição 2.2. Sejam $c_1, c_2, ..., c_\ell \in I$ os pontos da Definição 2.1. Então estes pontos serão denominados *pontos de retorno* de f em I, e os intervalos $I_1, I_2, ..., I_{\ell+1} \subset I$ serão denominados *voltas* de f em I. Os pontos $c_0 = a$ e $c_{\ell+1} = b$ serão denominados *pontos extremos* de I.

Sem grande perda de generalidade, vamos nos restringir às aplicações tais que $f(\partial I) \subset \partial I$, ou seja, onde o conjunto dos pontos extremos de I é f-invariante.

Definição 2.3. Uma aplicação $f : I \to I$, contínua, monótona por partes, tal que, $f(\partial I) \subset \partial I$ será denominada,

i) *ℓ-modal*, se f tem $\ell > 1$, pontos de retorno;

ii) *uni-modal*, se f tem um único ponto de retorno.

Dado um ponto $x \in I$, desejamos entender sua órbita $\mathcal{O}^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), ...\}$. Para uma aplicação ℓ-modal, f, surge de modo natural, a idéia de codificar $\mathcal{O}^+(x)$ pela posição que os iterados de x ocupam em relação às voltas e pontos de retorno de f.

Definição 2.4. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal. Denotamos por $S[f]$, o conjunto dos pontos de retorno e voltas de f,

$$S[f] = \{I_1, c_1, I_2, c_2, ..., c_\ell, I_{\ell+1}\}.$$

Definimos então, a *aplicação endereço*, $A : I \to S[f]$ como,

$$A(x) = \begin{cases} I_k & ,se \quad x \in I_k \quad e \quad x \notin \{c_1, c_2, ..., c_\ell\} \\ c_k & ,se \quad x = c_k \qquad\qquad 1 \leq k \leq \ell \end{cases}$$

Observamos que os pontos $c_0 = a$ e $c_{\ell+1} = b$, não pertencem a $S[f]$. $A(c_0) = I_1$ e $A(c_{\ell+1}) = I_{\ell+1}$, ou seja, os pontos extremos de I tem endereço em $\{I_1, I_{\ell+1}\} \subset S[f]$.

Definição 2.5. Dado $\ell \geq 1$, consideremos o espaço $\sum^{\ell}$, das sequências abstratas dos símbolos $\{I_1, c_1, I_2, ..., c_\ell, I_{\ell+1}\}$, isto é, $\sum^{\ell} = \{I_1, c_1, I_2, ..., c_\ell, I_{\ell+1}\}^{\mathbb{N}_0}$, ou ainda, $\sum^{\ell} = \{t = (t_0, t_1, t_2, ...) \mid t_k \in \{I_1, c_1, I_2, ..., c_\ell, I_{\ell+1}\}, \forall k \in \mathbb{N}_0\}$. Em particular, se $f : I \to I$ é ℓ-modal, podemos associar, $\sum^{\ell} = S[f]^{\mathbb{N}_0}$.

Na Definição 2.5, o espaço $\sum^{\ell}$ é independente de uma f particular, isto é, $\sum^{\ell}$ é o mesmo para qualquer aplicação ℓ-modal. Os elementos de $\sum^{\ell}$ serão utilizados para codificar as órbitas de f.

Definição 2.6. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal. Dado $x \in I$, definimos o *itinerário de* x como sendo $i(x) = (A(x), A(f(x)), A(f^2(x)), ...) \in \sum^{\ell}$, ou abreviadamente, $i(x) = (i_k(x))_{k \in \mathbf{N}_0}$ onde, $i_k(x) = A(f^k(x)) \in S[f]$. Assim, definimos a *aplicação itinerário*, $i_f : I \to \sum^{\ell}$ que, a cada ponto $x \in I$, faz corresponder seu itinerário $i(x)$.

Esta aplicação vai desempenhar o papel principal em nosso estudo. No restante deste capítulo, e nos próximos, vamos nos dedicar ao seu entendimento. A menos que haja confusão, vamos nos referir apenas a $i(x)$, em vez de $i_f(x)$, quando houver apenas uma aplicação em questão.

Proposição 2.7. Sejam $f : I \to I$, ℓ-modal, $i : I \to \sum^{\ell}$, a sua aplicação itinerário e $\sigma : \sum^{\ell} \to \sum^{\ell}$, o shift à esquerda. Então, para todo $x \in I$, $(i \circ f)(x) = (\sigma \circ i)(x)$, isto é, a aplicação itinerário faz comutar σ e f.

Demonstração: Dado $x \in I$ temos $(i \circ f)(x) = i(f(x)) = (A(f(x)), A(f^2(x)), A(f^3(x)), ...) = \sigma(A(x), A(f(x)), A(f^2(x)), A(f^3(x)), ...) = \sigma(i(x)) = (\sigma \circ i)(x)$. □

Proposição 2.8. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal. Se $x \in I$ é periódico (ou eventualmente periódico) para f, então $i(x) \in \sum^{\ell}$ é periódico (ou eventualmente periódico) para σ.

Demonstração: Pela Proposição 2.7, $(i \circ f)(x) = (\sigma \circ i)(x)$, indutivamente, $(i \circ f^n)(x) = (\sigma^n \circ i)(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Sendo x periódico para f, existe $q > 0$, tal que, $f^q(x) = x$, logo $(i \circ f^q)(x) = i(x)$. Como $(i \circ f^q)(x) = (\sigma^q \circ i)(x)$, temos $\sigma^q(i(x)) = i(x)$. Portanto $i(x)$ é periódico para σ. A demonstração para o caso em que x é eventualmente periódico é totalmente análoga. $\square$

A recíproca da Proposição 2.8, não é, em geral, verdadeira. Isto é, se $i(x)$ é periódico (eventualmente periódico), não podemos afirmar nem mesmo que x é eventualmente periódico para f. Entretanto, se $i(x)$ é eventualmente periódico, então, assintoticamente, a órbita de x se aproxima da órbita de algum ponto periódico para f. Para provar este resultado, precisamos de um Lema que é um dos principais resultados sobre codificação de órbitas na Teoria Kneading.

Lema 2.9. Sejam $f : I \to I$, ℓ-modal e $x \in I$.

i) Se existe $\varepsilon > 0$, tal que, $B(x, \varepsilon) \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \{x\}$ e $B(f(x), \varepsilon) \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \{f(x)\}$ ou $\varnothing$. Então, $\forall x_1, x_2 \in B(x, \varepsilon) \backslash \{x\}$, tais que $f(x_1), f(x_2) \in B(f(x), \varepsilon)$, segue que, $A(f(x_1)) = A(f(x_2))$ e $f(x_1), f(x_2) > f(x)$ ou $f(x_1), f(x_2) < f(x)$;

ii) Se existe $\varepsilon > 0$, tal que, $B(x, \varepsilon) \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \varnothing$ e $B(f(x), \varepsilon) \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \{f(x)\}$ ou $\varnothing$. Então, $\forall x_1, x_2 \in B(x, \varepsilon) \backslash \{x\}$, tais que $f(x_1), f(x_2) \in B(f(x), \varepsilon)$, segue que, se $x_1, x_2 > x$ ou $x_1, x_2 < x$, então $A(f(x_1)) = A(f(x_2))$ e $f(x_1), f(x_2) > f(x)$ ou $f(x_1), f(x_2) < f(x)$.

Demonstração:

i) Como $B(x, \varepsilon) \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \{x\}$, temos que x é ponto de retorno, e $B(x, \varepsilon)$ não contém outros pontos de retorno. Assim, x é também, ponto de extremo global em $B(x,\varepsilon)$. Suponha, sem perda de generalidade, que x é ponto de máximo. Então, dados quaisquer $x_1, x_2 \in B(x,\varepsilon)\backslash\{x\}$, teremos $f(x_1), f(x_2) < f(x)$. Como $f(x_1), f(x_2) \in B(f(x),\varepsilon)$, temos duas possibilidades.

Se $B(f(x),\varepsilon) \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \{f(x)\}$, temos $f(x) = c_k$, para algum k, $1 \leq k \leq \ell$, e $f(x_1), f(x_2) \in (c_k - \varepsilon, c_k) \subset I_k$, logo $A(f(x_1)) = A(f(x_2))$. Se $B(f(x),\varepsilon) \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \varnothing$, temos $B(f(x),\varepsilon) \subset I_k$, $1 \leq k \leq \ell + 1$, logo $A(f(x_1)) = A(f(x_2))$

ii) Como $B(x,\varepsilon)\cap\{c_1, ...c_\ell\} = \varnothing$, temos que, $B(f(x),\varepsilon) \subset I_k$, $1 \leq k \leq \ell+1$. Assim, f é estritamente monótona em $B(f(x),\varepsilon)$. Suponha, sem perda de generalidade, que f é estritamente crescente em $B(f(x),\varepsilon)$. Então, se $x_1, x_2 > x$ ou $x_1, x_2 < x$ em $B(f(x),\varepsilon)$ teremos $f(x_1), f(x_2) > f(x)$ ou $f(x_1), f(x_2) < f(x)$, respectivamente. Como $f(x_1), f(x_2) \in B(f(x),\varepsilon)$, temos duas possibilidades.

Se $B(f(x),\varepsilon) \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \{f(x)\}$, então $f(x) = c_k$, $1 \leq k \leq \ell$, e pela monotonicidade de f, $f(x_1), f(x_2) \in (c_k - \varepsilon, c_k) \subset I_k$ ou $f(x_1), f(x_2) \in (c_k, c_k+\varepsilon) \subset I_{k+1}$, logo $A(f(x_1)) = A(f(x_2))$. Se $B(f(x),\varepsilon)\cap\{c_1, ...c_\ell\} = \varnothing$, então $B(f(x),\varepsilon) \subset I_k$, $1 \leq k \leq \ell + 1$, logo $A(f(x_1)) = A(f(x_2))$. $\square$

Corolário 2.10. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal . Dados $x \in I$ e $n \in \mathbb{N}_0$, existe $\delta > 0$ tal que,

i) $\forall y \in (x - \delta, x)$, $A(f^n(y)) = cte \in \{I_1, I_2, ..., I_{\ell+1}\}$;

ii) $\forall y \in (x, x + \delta)$, $A(f^n(y)) = cte \in \{I_1, I_2, ..., I_{\ell+1}\}$.

Demonstração: Vamos demonstrar apenas (i) pois (ii) é análogo. Primeiramente consideremos $\{x, f(x), ..., f^n(x)\}$, como temos número finito, podemos obter $\delta_0 > 0$, tal que, para todo k, $0 \leq k \leq n$, $B(f^k(x), \delta_0) \cap \{c_1, ...c_\ell\} =$

$\{f^k(x)\}$ ou $\varnothing$.

Como f é contínua em x, existe $\varepsilon_1 > 0$, tal que, $f(B(x, \varepsilon_1)) \subset B(f(x), \delta_0)$.

Como f^2 é contínua em x, existe $\varepsilon_2 > 0$, tal que, $f^2(B(x, \varepsilon_2)) \subset B(f^2(x), \delta_0)$.

....

Como f^n é contínua em x, existe $\varepsilon_n > 0$, tal que, $f^n(B(x, \varepsilon_n)) \subset B(f^n(x), \delta_0)$.

Tomando $\delta = min\{\delta_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_n\}$, temos que, para qualquer $y \in B(x, \delta)$, $f^k(y) \in B(f^k(x), \delta_0)$, $0 \leq k \leq n$. Consideremos quaisquer $y_1, y_2 \in (x - \delta, x)$, note que, $B(x, \delta) \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \{x\}$ ou $\varnothing$, e $f(y_1), f(y_2) \in B(f(x), \delta_0)$, com $B(f(x), \delta_0) \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \{f(x)\}$ ou $\varnothing$. Pelo Lema 2.9, teremos $A(f(y_1)) = A(f(y_2))$ e $f(y_1), f(y_2) > f(x)$ ou $f(y_1), f(y_2) < f(x)$. Repetindo o argumento para $\tilde{y_1} = f(y_1)$ e $\tilde{y_2} = f(y_2)$, teremos $A(f(\tilde{y_1})) = A(f(\tilde{y_2}))$, ou seja, $A(f^2(y_1)) = A(f^2(y_2))$ e $f^2(y_1), f^2(y_2) > f^2(x)$ ou $f^2(y_1), f^2(y_2) < f^2(x)$.

Podemos repetir o procedimento até n, pois, para cada $f^k(y_1), f^k(y_2) \in B(f^k(x), \delta_0)$ teremos, $f^{k+1}(y_1), f^{k+1}(y_2) \in B(f^{k+1}(x), \delta_0)$, já que $y_1, y_2 \in (x - \delta, x) \subset B(x, \delta)$, assim $A(f^n(y_1)) = A(f^n(y_2))$.

Ainda, em cada etapa $f^k(y_1), f^k(y_2) > f^k(x)$ ou $f^k(y_1), f^k(y_2) < f^k(x)$ e $B(f^k(x), \varepsilon) \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \{f^k(x)\}$ ou $\varnothing$, logo $A(f^n(y_1)) = A(f^n(y_2)) = cte \in \{I_1, I_2, ..., I_{\ell+1}\}$. $\square$

O Lema 2.9 e o Corolário 2.10, aparentemente técnicos, são na verdade, a expressão do comportamento local dos pontos de I em relação à codificação dada pela aplicação itinerário. Mais precisamente o Corolário 2.10 diz que para uma certa vizinhança à direita ou à esquerda de x todos os pontos compartilham do mesmo itinerário até o n-ésimo iterado. É claro que, tal vizinhança pode tornar-se pequena, se n se tornar muito grande. Por outro lado, convém notar que só temos chance de ter o mesmo itinerário à direita ou à esquerda de x, se ele não for ponto de retorno, caso contrário, os pontos à direita e à esquerda de x terão itinerários distintos desde o primeiro iterado.

Teorema 2.11. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal . Dado $x \in I$, $i(x)$ será eventualmente periódico para σ se, e somente se, $\mathcal{O}^+(x)$ convergir a uma órbita periódica de f.

Demonstração:($\Rightarrow$) Devemos mostrar que $\lim_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(z)| = 0$, onde z é tal que $f^q(z) = z$, com $q > 0$. Por hipótese, $i(x)$ é eventualmente periódico, portanto, existe $N > 0$, tal que, $\sigma^N(i(x))$ é periódico, ou seja, existe $q > 0$, tal que, $\sigma^q(\sigma^N(i(x))) = \sigma^N(i(x))$. Notemos que, $\sigma^N(i(x)) = i(f^N(x))$. Fazendo $y = f^N(x)$ vem $\sigma^q(i(y)) = i(y)$. Temos, então, duas possibilidades para $\mathcal{O}^+(y)$. Se $\mathcal{O}^+(y) \cap \{c_1, ..., c_\ell\} \neq \varnothing$, então existe $T > 0$, tal que, $f^T(y) = c_k$, $1 \leq k \leq \ell$, logo $i_T(y) = c_k$. Como $\sigma^q(i(y)) = i(y)$ temos $i_T(y) = i_{T+q}(y)$, logo $f^T(y) = f^{T+q}(y)$, ou seja, $f^q(f^T(y)) = f^T(y)$. Tomando $\tilde{z} = f^T(y)$, temos $f^q(\tilde{z}) = \tilde{z}$, portanto $\tilde{z}$ é periódico de período q. Note que $\tilde{z} = f^T(y) = f^{T+N}(x)$ e que, $f^{jq}(\tilde{z}) = \tilde{z}$, $\forall j \in \mathbb{N}_0$ portanto existe $j_0 \in \mathbb{N}_0$, tal que, $T + N < j_0 q$. Escolhemos $z = f^{j_0 q-(T+N)}(\tilde{z})$. Pela nossa escolha z é periódico pois z está na órbita de $\tilde{z}$, e $\lim_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(z)| = 0$, pois $f^n(x) = f^n(z), \forall n \geq T + N$.

Por outro lado, se $\mathcal{O}^+(y) \cap \{c_1, ..., c_\ell\} = \varnothing$, como $i(y)$ é periódico de período q, temos que, para qualquer s, $0 \leq s \leq q - 1$, $i_s(y) = i_{s+kq}(y)$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Já que, $\mathcal{O}^+(y) \cap \{c_1, ..., c_\ell\} = \varnothing$, temos $i_s(y) = I_{j_s}$, onde $I_{j_s} \in \{I_1, I_2, ..., I_{\ell+1}\}$, portanto $i_{s+kq}(y) = I_{j_s}$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Lembremos que $i_{s+kq}(y) = A(f^{s+kq}(y))$ e $I_{j_s} = [c_{j_s-1}, c_{j_s}]$, portanto $f^{s+kq}(y) \in (c_{j_s-1}, c_{j_s})$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$ e para cada $0 \leq s \leq q - 1$. Afirmamos que $(f^{2kq}(y))_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge monotonamente a um ponto periódico de período $2q$.

De fato, definimos $\varepsilon_{j_s} = \{\pm 1\}$, a orientação* de f em cada intervalo I_{j_s}, então, dados $y, f^{2q}(y) \in I_{j_0}$, e supondo, sem perda de generalidade, que

*Mais, precisamente, $\varepsilon_{j_s} = +1$, se f é estritamente crescente em I_{j_s} e $\varepsilon_{j_s} = -1$, se f é estritamente decrescente em I_{j_s}.

$y \leq f^{2q}(y)$, então, $\varepsilon_{j_0} f(y) \leq \varepsilon_{j_0} f^{2q+1}(y)$, $\varepsilon_{j_0}\varepsilon_{j_1} f^2(y) \leq \varepsilon_{j_0}\varepsilon_{j_1} f^{2q+2}(y)$, ..., $\varepsilon_{j_0}...\varepsilon_{j_{q-1}} f^q(y) \leq \varepsilon_{j_0}...\varepsilon_{j_{q-1}} f^{3q}(y)$. Repetindo o procedimento em mais q passos, obtemos $\varepsilon_{j_0}...\varepsilon_{j_{q-1}}\varepsilon_{j_0}...\varepsilon_{j_{q-1}} f^{2q}(y) \leq \varepsilon_{j_0}...\varepsilon_{j_{q-1}}\varepsilon_{j_0}...\varepsilon_{j_{q-1}} f^{4q}(y)$, ou seja, $f^{2q}(y) \leq f^{4q}(y)$, pois $\varepsilon_{j_0}...\varepsilon_{j_{q-1}}\varepsilon_{j_0}...\varepsilon_{j_{q-1}} = +1$. Indutivamente $(f^{2kq}(y))_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge, não decrescentemente, a um ponto $\tilde{z} \in I_{j_0}$, pois $f^{2kq}(y) \in I_{j_0}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Como $f^{2kq}(y) \longrightarrow \tilde{z} \in I_{j_0}$ temos, pela continuidade de f, que $f^{2(k+1)q}(y) \longrightarrow f^{2q}(\tilde{z})$, logo $f^{2q}(\tilde{z}) = \tilde{z}$, ou seja, $\tilde{z}$ é periódico de período $2q$. Note que $y = f^N(x)$, e já que $f^{2kq}(y) \longrightarrow \tilde{z}$, então $f^{2kq+N}(x) \longrightarrow \tilde{z}$. Como f é contínua, temos que para cada $0 \leq s \leq 2q-1$, $f^{2kq+N+s}(x) \longrightarrow f^s(\tilde{z})$.

Observemos que, para mostrar $\lim\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(z)| = 0$, onde $f^{2q}(z) = z$, com $2q > 0$, basta mostrar que para cada $0 \leq s \leq 2q-1$, $\lim\limits_{n\to\infty} |f^{2kq+s}(x) - f^s(z)| = 0$. Para ver isto, basta fazer $n = k2q + s$, e notar que, $f^n(z) = f^s(z)$.

Como $f^{2q}(\tilde{z}) = \tilde{z}$, temos $f^{2jq}(\tilde{z}) = \tilde{z}, \forall j \in \mathbb{N}_0$ portanto existe $j_0 \in \mathbb{N}_0$, tal que, $N < 2j_0q$. Tomamos $z = f^{2j_0q-N}(\tilde{z})$. Pela nossa escolha z é periódico pois z está na órbita de $\tilde{z}$. Fixado $0 \leq s \leq 2q-1$, teremos $f^{2kq+N+s}(x) \longrightarrow f^s(\tilde{z})$, usando a continuidade de f^{2j_0q-N}, pois $N < 2j_0q$, vem $f^{2kq+N+s+2j_0q-N}(x) \longrightarrow f^{s+2j_0q-N}(\tilde{z})$, ou seja, $f^{s+2(k+j_0)q}(x) \longrightarrow f^s(z)$, para cada $0 \leq s \leq 2q-1$, pois $f^{2j_0q-N}(\tilde{z}) = z$. Pela nossa observação anterior concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(z)| = 0$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que existe $z \in I$ e $q > 0$ tais que $f^q(z) = z$ e $\lim\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(z)| = 0$. Devemos mostrar que $i(x)$ é eventualmente periódico, isto é, que existe $N \geq 0$, tal que, $i(f^N(x))$ é periódico para σ. Como $\mathcal{O}^+(z) = \{z, f(z), ..., f^{q-1}(z)\}$ e f é contínua, dizer que $\lim\limits_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(z)| = 0$, equivale a dizer que, para cada $0 \leq j \leq q-1$, $\lim\limits_{k\to\infty} |f^{kq+j}(x) - f^j(z)| = 0$. Para mostrar que, $i(x)$ é eventualmente periódico basta mostrarmos que, fixado j, $0 \leq j \leq q-1$, temos $A(f^{kq+j}(x)) = cte$, para todo $k \geq k_j$, para algum

$k_j \in \mathbb{N}_0$. Vamos dividir em dois casos.

Se $\mathcal{O}^+(x) \cap \mathcal{O}^+(z) \neq \varnothing$, então é claro que x será eventualmente periódico e, pela Proposição 2.8, $i(x)$ será eventualmente periódico. Vamos assumir então que $\mathcal{O}^+(x) \cap \mathcal{O}^+(z) = \varnothing$. Como $\mathcal{O}^+(z)$ é finita, podemos obter $\varepsilon > 0$, tal que, para cada j, $0 \leq j \leq q-1$ temos, $B(f^j(z), \varepsilon) \cap \{c_1, , ..., c_\ell\} = \{f^j(z)\}$ ou $\varnothing$. Cada $f^{kq+j}(x) \to f^j(z)$, quando $k \to \infty$, assim, podemos escolher algum $K_0 \in \mathbb{N}_0$, tal que, para cada j, $0 \leq j \leq q-1$ e para todo $k \geq K_0$, $f^{kq+j}(x) \in B(f^j(z), \varepsilon)$. Afirmamos que, nessas condições $A(f^{kq+j}(x)) = cte$, para todo $k \geq \tilde{K}_0$, com $\tilde{K}_0 \geq K_0$. Temos duas possibilidades. Se $B(f^j(z), \varepsilon) \cap \{c_1, ..., c_\ell\} = \varnothing$, para todo j, $0 \leq j \leq q-1$, isto é, se $\mathcal{O}^+(z)$ não contém pontos de retorno, então, cada $B(f^j(z), \varepsilon)$ está contida em uma volta I_{s_j}, como $f^{kq+j}(x) \in B(f^j(z), \varepsilon)$, para todo $k \geq K_0$, temos que $A(f^{kq+j}(x)) = I_{s_j} = cte$, para todo $k \geq K_0$. Logo $i(x)$ será eventualmente periódico. Por outro lado, se $B(f^j(z), \varepsilon) \cap \{c_1, ..., c_\ell\} \neq \varnothing$, isto é, que $\mathcal{O}^+(z)$ contém algum ponto de retorno, temos que existe j_0, $0 \leq j_0 \leq q-1$, tal que, $B(f^{j_0}(z), \varepsilon) \cap \{c_1, ..., c_\ell\} = \{f^{j_0}(z)\}$. Afirmamos que, $\forall k \geq K_0 + 1$, $A(f^{kq+j_0}(x)) = cte$ e $f^{kq+j_0}(x) \in (f^{kq+j_0}(z) - \varepsilon, f^{kq+j_0}(z)), \forall k \geq K_0 + 1$ ou $f^{kq+j_0}(x) \in (f^{kq+j_0}(z), f^{kq+j_0}(z) + \varepsilon), \forall k \geq K_0 + 1$.

De fato, tomemos $f^{K_0 q+j_0}(x), f^{(K_0+1)q+j_0}(x) \in B(f^{j_0}(z), \varepsilon) \backslash \{f^{j_0}(z)\}$, como $B(f^{j_0}(z), \varepsilon) \cap \{c_1, , ..., c_\ell\} = \{f^{j_0}(z)\}$ ou $\varnothing$, concluímos, pelo Lema 2.9, (i), que $A(f^{K_0 q+j_0+1}(x)) = A(f^{(K_0+1)q+j_0+1}(x))$ e $f^{K_0 q+j_0+1}(x), f^{(K_0+1)q+j_0+1}(x)$ estão do mesmo lado de $f^{j_0+1}(z)$, excluindo-o. Assim, podemos aplicar o Lema 2.9 q vezes, independentemente dos demais pontos de $\mathcal{O}^+(z)$ serem ou não pontos de retorno, obtendo, $A(f^{(K_0+1)q+j_0}(x)) = A(f^{(K_0+2)q+j_0}(x))$ e $f^{(K_0+1)q+j_0}(x), f^{(K_0+2)q+j_0}(x)$ estão do mesmo lado de $f^{j_0}(z)$. Indutivamente teremos $A(f^{kq+j_0}(x)) = cte$, $\forall k \geq K_0 + 1$ e todos os pontos $f^{kq+j_0}(x)$, $\forall k \geq K_0 + 1$ estarão do mesmo lado de $f^{j_0}(z)$.

Vamos supor, sem perda de geralidade, que $f^{kq+j_0}(x) \in (f^{j_0}(z), f^{j_0}(z)+\varepsilon)$, $\forall k \geq K_0+1$. Vamos mostrar que para os outros índices $j \neq j_0$, $A(f^{kq+j}(x)) = cte$, $\forall k \geq \tilde{K_0} \geq K_0+1$. Como $j \neq j_0$ temos que existe $0 \leq s_j \leq q-1$, tal que, $f^{s_j}(f^{j_0}(x)) = f^j(x)$. Tomamos $\tilde{x} = f^{j_0}(z)$, como $s_j > 0$, pelo Corolário 2.10, existe $\delta > 0$, tal que, para todo $\tilde{y} \in (\tilde{x}, \tilde{x}+\delta)$, $A(f^{s_j}(\tilde{y})) = cte$. Basta tomar $\delta < \varepsilon$ e notar que $f^{kq+j_0}(x) \in (f^{j_0}(z), f^{j_0}(z)+\varepsilon)$, $\forall k \geq K_0+1$ e $f^{kq+j_0}(x) \to f^{j_0}(z)$, quando $n \to \infty$, logo, vai existir $\tilde{K_0} \geq K_0+1$, tal que, $f^{kq+j_0}(x) \in (f^{j_0}(z), f^{j_0}(z)+\delta)$, $\forall k \geq \tilde{K_0}$, assim se $\tilde{y} = f^{kq+j_0}(x)$ temos $A(f^{s_j}(f^{kq+j_0}(x))) = cte$, $\forall k \geq \tilde{K_0}$. Para concluirmos, basta notar que $f^{s_j}(f^{j_0}(x)) = f^j(x)$ logo $A(f^{s_j}(f^{kq+j_0}(x))) = A(f^{kq}(f^{s_j}(f^{j_0}(x)))) = A(f^{kq}f^{s_j}(f^{j_0}(x))) = A(f^{kq+j}(x)) = cte$. $\square$

Capítulo 3

Ordenação em $\sum^\ell$ e a Injetividade da aplicação itinerário

Lembremos que dada $f : I \to I$, ℓ-modal, definimos o conjunto dos seus pontos de retorno e voltas como, $S[f] = \{I_1, c_1, I_2, c_2, ..., c_\ell, I_{\ell+1}\}$, e $\sum^\ell$ como $\sum^\ell = S[f]^{\mathbb{N}_0}$.

Vamos agora estabelecer uma ordenação em $\sum^\ell$, para que, posteriormente, com as ferramentas desenvolvidas, possamos fechar este capítulo com a prova da injetividade da aplicação itinerário, para uma certa classe de aplicações modais, que vamos definir mais adiante.

Definição 3.1. Definimos a *aplicação sinal*, $\varepsilon : S[f] \to \{\pm 1\}$, como

$$\begin{cases} \varepsilon(I_1) = \pm 1 & \\ \varepsilon(I_{k+1}) = (-1)\varepsilon(I_k), & 1 \leq k \leq \ell \\ \varepsilon(c_k) = 1, & 1 \leq k \leq \ell \end{cases}$$

Com o auxílio de ε, podemos definir um sinal lexicográfico em $\sum^{\ell}$, o sinal $\prec$, que representará uma relação de ordem.

Definição 3.2. Definimos a *aplicação* τ_n, $\tau_n : \sum^{\ell} \to \{\pm 1\}$, para $n \in \mathbb{N}$, como

$$\tau_n(s) = \varepsilon(s_0)\varepsilon(s_1)...\varepsilon(s_{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon(s_k)$$

onde $s = (s_0, s_1, ..., s_{n-1}, s_n, ...) \in \sum^{\ell}$.

Esta família de aplicações, indexadas pelo parâmetro n, vai proporcionar um controle sobre a orientação de f no n-ésimo, iterado. Mais precisamente na Proposição 3.9 vamos ver que, em certos casos, τ_n será a orientação de f^n no ponto em questão.

Definição 3.3. Dado o conjunto $S[f] = \{I_1, c_1, I_2, c_2, ..., c_{\ell}, I_{\ell+1}\}$, definimos o conjunto, totalmente ordenado, $\hat{S}[f]$, como segue

$$\hat{S}[f] = \{-I_{\ell+1} < -c_{\ell} < ... < -c_1 < -I_1 < I_1 < c_1 < ... < c_{\ell} < I_{\ell+1}\}$$

e a *aplicação coordenada*, $\theta : \sum^{\ell} \to \hat{S}[f]^{\mathbb{N}_0}$, dada por

$$\theta(s) = (\theta_0(s), \theta_1(s), \theta_2(s), ..., \theta_n(s), ...)$$

onde $s = (s_0, s_1, s_2, ...) \in \sum^{\ell}$, e

$$\begin{cases} \theta_0(s) = s_0 \\ \theta_n(s) = \tau_n(s)s_n, \quad para \quad n \geq 1. \end{cases}$$

A aplicação coordenada θ, proporciona uma sequência mais útil para nossa análise, pois possui, não apenas a informação sobre a posição dos iterados de f, como também da orientação nestes pontos.

Definição 3.4. Definimos o sinal $\prec$ em $\sum^{\ell}$ como:

$s \prec t$ se $s_0 < t_0$ em $\hat{S}[f]$ ou, se existe $n > 0$, tal que, $\theta_k(s) = \theta_k(t)$, para todo k, $0 \leq k \leq n-1$, e $\theta_n(s) < \theta_n(t)$, em $\hat{S}[f]$.

Por abuso de notação podemos dizer que $s \prec t$ se, e somente se, $\theta(s) < \theta(t)$ comparando-os como números racionais, coordenada a coordenada com a ordem de $\hat{S}[f]$.

Proposição 3.5. $(\sum^{\ell}, \prec)$ é totalmente ordenado.

Demonstração: Temos que provar que a relação $\prec$ é total, antissimétrica e transitiva.

Afirmação 1: A relação $\prec$ é total, isto é, para quaisquer $s, t \in \sum^{\ell}$, temos $s = t$ ou $s \prec t$ ou $s \succ t$.

De fato, se $s = t$ está pronto, então suponha $s \neq t$, logo existe $n \geq 0$, tal que, $s_k = t_k, \quad 0 \leq k \leq n-1$ e $s_n \neq t_n$. Se $n = 0$ então $s_0 \neq t_0$ logo $s_0 < t_0$ ou $s_0 > t_0$, pois $s_0, t_0 \in \hat{S}[f]$, que é totalmente ordenado. Assim, se $s_0 < t_0$ temos $s \prec t$ e, se $s_0 > t_0$, então $s \succ t$, pela Definição 3.4. Vamos então examinar o caso em que $n > 0$.

$s_0 = t_0 \Rightarrow \theta_0(s) = \theta_0(t)$

$s_1 = t_1 \Rightarrow \theta_1(s) = \tau_1(s)s_1 = \varepsilon(s_0)s_1 = \varepsilon(t_0)t_1 = \tau_1(t)t_1 = \theta_1(t)$

....

$s_{n-1} = t_{n-1} \Rightarrow \theta_{n-1}(s) = \theta_{n-1}(t)$.

Note ainda que $\tau_n(s) = \prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon(s_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon(t_k) = \tau_n(t)$. Como $s_n \neq t_n$ temos $s_n < t_n$ ou $s_n > t_n$, pois $s_n, t_n \in \hat{S}[f]$, que é totalmente ordenado. Logo, sendo $\tau_n(s) = \tau_n(t)$, temos $\tau_n(s)s_n < \tau_n(t)t_n$ ou $\tau_n(s)s_n > \tau_n(t)t_n$, portanto, $\theta_n(s) < \theta_n(t)$ ou $\theta_n(s) > \theta_n(t)$. Como $\theta_k(s) = \theta_k(t)$ para $0 \leq k \leq n-1$, temos, pela Definição 3.4, que $s \prec t$ ou $s \succ t$.

Afirmação 2: A relação $\prec$ é antissimétrica, isto é, para quaisquer $s, t \in \sum^{\ell}$, se $s \preceq t$ e $s \succeq t$, então $s = t$.

Como $s \preceq t$, se $s = t$ está pronto. Suponha por absurdo que $s \prec t$ então $s_0 < t_0$, ou existe $n > 0$, tal que, $\theta_k(s) = \theta_k(t)$ para $0 \leq k \leq n-1$ e $\theta_n(s) < \theta_n(t)$. Se $s_0 < t_0$, temos contradição com $s \succeq t$, pois isto implica que $s_0 \geq t_0$. Por outro lado, se $s_0 = t_0$, basta notar que $\theta_k(s) = \theta_k(t)$ para $0 \leq k \leq n-1$ e $s \succeq t$ logo $\theta_n(s) \geq \theta_n(t)$ contradizendo $\theta_n(s) < \theta_n(t)$.

Afirmação 3: A relação $\prec$ é transitiva, isto é, para quaisquer $s, t, w \in \sum^{\ell}$, se $s \prec t$ e $t \prec w$ então $s \prec w$.

De fato, pela Definição 3.4, temos que:

$s_0 < t_0$, ou existe $n_1 > 0$, tal que, $\theta_k(s) = \theta_k(t)$ para $0 \leq k \leq n_1 - 1$ e $\theta_{n_1}(s) < \theta_{n_1}(t)$;

$t_0 < w_0$, ou existe $n_2 > 0$, tal que, $\theta_k(t) = \theta_k(w)$ para $0 \leq k \leq n_2 - 1$ e $\theta_{n_2}(t) < \theta_{n_2}(w)$.

Se $s_0 < t_0$, ou, $t_0 < w_0$, é claro que, $s_0 < w_0$, logo $s \prec w$. Supondo $s_0 = t_0$ e $t_0 = w_0$ temos $s_0 = w_0$. Tomando $n = min\{n_1, n_2\}$, por transitividade em $\hat{S}[f]$, vem $\theta_k(s) = \theta_k(w)$ para $0 \leq k \leq n-1$ e $\theta_n(s) < \theta_n(w)$, logo $s \prec w$. $\square$

Definição 3.6. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal. Atribuímos a $\sum^{\ell}$ *um sinal natural* $\prec_f$, como na Definição 3.4, fixando uma aplicação sinal, ε_f, dada por

$$\varepsilon_f(I_k) = \begin{cases} +1 & se \quad f \quad é \quad estritamente \quad crescente \quad em \quad I_k \\ -1 & se \quad f \quad é \quad estritamente \quad decrescente \quad em \quad I_k \end{cases}$$

para $1 \leq k \leq \ell + 1$, e $\varepsilon_f(c_k) = 1$, para $1 \leq k \leq \ell$. Neste caso, diremos que $(\sum^{\ell}, \prec_f)$ é *f-ordenado.*

Pela observação, após a Definição 2.1, f deve mudar de orientação em torno dos pontos c_k, ou seja, $\varepsilon_f(I_{k+1}) = (-1)\varepsilon_f(I_k)$ para $1 \leq k \leq \ell$. Pela Definição 3.6 temos, de fato, $(\sum^{\ell}, \prec_f)$ totalmente ordenado já que a aplicação ε_f definida é uma aplicação sinal.

Daqui em diante, quando estiver claro em relação a qual aplicação f definimos a ordenação de $\sum^{\ell}$, vamos escrever $\prec$ em vez de $\prec_f$. e diremos que $\sum^{\ell}$ é simplesmente, ordenado, em vez de f-ordenado. Ainda, vamos escrever ε em vez de ε_f.

Proposição 3.7. Sejam $s = (s_0, s_1, s_2, ...) \in \sum^{\ell}$ e $\sigma : \sum^{\ell} \to \sum^{\ell}$, $\tilde{\sigma} : \hat{S}[f]^{\mathbb{N}_0} \to \hat{S}[f]^{\mathbb{N}_0}$, shifts unidirecionais à esquerda. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\sigma}^n(\theta(s)) = \tau_n(s)\theta(\sigma^n(s)) \text{ ou, } \theta(\sigma^n(s)) = \tau_n(s)\tilde{\sigma}^n(\theta(s)).$$

Demonstração: Nesta demonstração vamos usar, indistintamente, σ para os dois shifts, ficando óbvio a qual shift estamos nos referindo, pelo seu argumento. Provamos por indução.

Para **n=1**, consideremos $s = (s_0, s_1, s_2, ..., s_n, ...)$ e $\sigma(s) = (s_1, s_2, ..., s_{n+1}, ...)$ tomando $t = \sigma(s)$ vem $t_n = s_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Assim

$\sigma(\theta(s)) =$

$= \sigma(s_0, \tau_1(s)s_1, \tau_2(s)s_2, ..., \tau_{n+1}(s)s_{n+1}, ...) =$

$= (\tau_1(s)s_1, \tau_2(s)s_2, ..., \tau_{n+1}(s)s_{n+1}, ...) =$

$= \tau_1(s)(s_1, \frac{\tau_2(s)}{\tau_1(s)}s_2, ..., \frac{\tau_{n+1}(s)}{\tau_1(s)}s_{n+1}, ...) =$

$= \tau_1(s)(t_0, \frac{\tau_2(s)}{\tau_1(s)}t_1, ..., \frac{\tau_{n+1}(s)}{\tau_1(s)}t_n, ...)$.

Note que $\frac{\tau_{n+1}(s)}{\tau_1(s)} = \tau_n(t)$, logo $\sigma(\theta(s)) = \tau_1(s)(t_0, \tau_1(t)t_1, ..., \tau_n(t)t_n, ...) = \tau_1(s)\theta(t) = \tau_1(s)\theta(\sigma(s))$.

Suponha que vale a hipótese para algum **n**, mostremos que vale também para **n+1**. Temos $\sigma^n(\theta(s)) = \tau_n(s)\theta(\sigma^n(s))$, assim $\sigma^{n+1}(\theta(s)) = \sigma(\sigma^n(\theta(s))) = \sigma(\tau_n(s)\theta(\sigma^n(s))) = \tau_n(s)\sigma(\theta(\sigma^n(s)))$. Tomamos $t = \sigma^n(s) = (s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, ...)$, então, $\sigma(\theta(\sigma^n(s))) = \sigma(\theta(t)) = \tau_1(t)\theta(\sigma(t)) = \tau_1(t)\theta(\sigma^{n+1}(s))$. Para concluir, basta notar que, $\tau_1(t) = \varepsilon(t_0) = \varepsilon(s_n)$ pois $t_0 = s_n$. Assim, $\sigma^{n+1}(\theta(s)) = \tau_n(s)\sigma(\theta(\sigma^n(s))) = \tau_n(s)\varepsilon(s_n)\theta(\sigma^{n+1}(s)) = \tau_{n+1}(s)\theta(\sigma^{n+1}(s))$. Portanto $\sigma^{n+1}(\theta(s)) = \tau_{n+1}(s)\theta(\sigma^{n+1}(s))$. $\square$

Com este resultado, fica mais claro o comportamento das sequências em $\sum^\ell$ quanto ao shift e à relação de ordem $\prec$. Vamos explorar um pouco mais a relação $\prec$ em $\sum^\ell$.

Proposição 3.8. Sejam $t, s \in \sum^\ell$.

i) Dado $n > 0$, $t_k = s_k$, para todo k, $0 \leq k \leq n-1$ se, e somente se, $\theta_k(t) = \theta_k(s)$, $1 \leq k \leq n-1$;

ii) Dado $n > 0$, tal que, $t_k = s_k$, $0 \leq k \leq n-1$ temos $\tau_j(t) = \tau_j(s)$, $1 \leq j \leq n$;

iii) Se $t \prec s$ e $t_0 = s_0$, existe $n > 0$, tal que, $t_k = s_k$, $0 \leq k \leq n-1$ e $t_n \neq s_n$;

iv) Dado $n > 0$, tal que, $t_k = s_k$, para todo k, $\quad 0 \leq k \leq n-1 \quad$ e $\quad t \prec s$ temos:

$$\begin{aligned} &\text{Se } \tau_n(t) = +1 \quad \text{então} \quad \sigma^n(t) \prec \sigma^n(s). \\ &\text{Se } \tau_n(t) = -1 \quad \text{então} \quad \sigma^n(t) \succ \sigma^n(s). \end{aligned}$$

Demonstração:

i) Suponha que $t_k = s_k$, $0 \leq k \leq n-1$ e $n > 0$, então, fixado k, $0 \leq k \leq n-1$, temos que, se $k = 0$ então $\theta_0(t) = t_0 = s_0 = \theta_0(s)$, se $1 \leq k \leq n-1$ então $\theta_k(t) = \prod_{j=0}^{k-1} \varepsilon(t_j) t_k = \prod_{j=0}^{k-1} \varepsilon(s_j) s_k = \theta_k(s)$. Reciprocamente, se $\theta_k(t) = \theta_k(s)$, $0 \leq k \leq n-1$ então,

$t_0 = \theta_0(t) = \theta_0(s) = s_0$,

$\theta_1(t) = \theta_1(s)$ e $t_0 = s_0$, logo $t_1 = s_1$,

....

$\theta_{n-1}(t) = \theta_{n-1}(s)$ e $t_{k-2} = s_{k-2}$, logo $t_{n-1} = s_{n-1}$.

Portanto $t_k = s_k$, $0 \leq k \leq n-1$.

ii) Suponha $n > 0$ e $t_k = s_k$, $0 \leq k \leq n-1$, então para cada $1 \leq j \leq n$ temos $\tau_j(t) = \prod_{k=0}^{j-1} \varepsilon(t_k) = \prod_{k=0}^{j-1} \varepsilon(s_k) = \tau_j(s)$.

iii) Se $t \prec s$ e $t_0 = s_0$ existe $n > 0$, tal que, $\theta_k(t) = \theta_k(s)$ para $0 \leq k \leq n-1$, e $\theta_n(t) < \theta_n(s)$. Por (i), $t_k = s_k$, $0 \leq k \leq n-1$, e por (ii) $\tau_n(t) = \tau_n(s)$ logo $t_n \neq s_n$ pois do contrário teríamos $\theta_n(t) = \theta_n(s)$, contradizendo $\theta_n(t) < \theta_n(s)$.

iv) Suponha que existe $n > 0$, tal que, $t_k = s_k$, $0 \leq k \leq n-1$ e $t \prec s$, então $\theta(t) \prec \theta(s)$, isto é, $\theta_k(t) = \theta_k(s)$, $0 \leq k \leq n-1$ e $\theta_n(t) < \theta_n(s)$. Por definição teremos $\sigma^n(\theta(t)) \prec \sigma^n(\theta(s))$. Temos agora duas possibilidades:
Se $\tau_n(t) = \tau_n(s) = +1$, então $\tau_n(t)\sigma^n(\theta(t)) \prec \tau_n(s)\sigma^n(\theta(s))$.
Se $\tau_n(t) = \tau_n(s) = -1$, então $\tau_n(t)\sigma^n(\theta(t)) \succ \tau_n(s)\sigma^n(\theta(s))$.
Pela Proposição 3.7, temos que, $\theta(\sigma^n(t)) = \tau_n(t)\sigma^n(\theta(t))$ e $\theta(\sigma^n(s)) = \tau_n(s)\sigma^n(\theta(s))$, assim
Se $\tau_n(t) = \tau_n(s) = +1$, então $\sigma^n(t) \prec \sigma^n(s)$.
Se $\tau_n(t) = \tau_n(s) = -1$, então $\sigma^n(t) \succ \sigma^n(s)$. □

Proposição 3.9. Sejam $f : I \to I$, ℓ-modal, e $x, y \in I$.

i) Se $\{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\} \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \varnothing$, para algum $n > 0$, então $\tau_n(i(x)) \in \{\pm 1\}$ é a orientação de f^n em x;

ii) Se $i(x) \prec i(y)$ e $i_0(x) = i_0(y)$, então existe $n > 0$, tal que, $i_k(x) = i_k(y)$, $0 \leq k \leq n-1$ e $i_n(x) \neq i_n(y)$. Os intervalos $\{[x, y], f([x, y]), ..., f^{n-1}([x, y])\}$ não contém pontos de retorno, ou seja, são homeomorfos;

iii) Dado $n > 0$, tal que, $i_k(x) = i_k(y)$, $0 \leq k \leq n-1$ e $i_n(x) \neq i_n(y)$. Se $i(x) \prec i(y)$ temos

$$\begin{aligned} \sigma^n(i(x)) \prec \sigma^n(i(y)), &\quad \text{se} \quad \tau_n(i(x)) = +1. \\ \sigma^n(i(x)) \succ \sigma^n(i(y)), &\quad \text{se} \quad \tau_n(i(x)) = -1. \end{aligned}$$

Demonstração:

i) Lembramos que a orientação de f^n em x é ± 1 conforme f^n seja, respectivamente, estritamente crescente ou estritamente decrescente em $(x-\delta, x+\delta)$ para algum $\delta > 0$. Como $\{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\}$ não contém pontos de retorno podemos obter $\delta > 0$, tal que, $B(f^k(x), \delta) \cap \{c_1, ...c_\ell\} = \varnothing$, para cada k, $0 \leq k \leq n-1$, e que, para qualquer $y \in B(x,\delta), f^k(y) \in B(f^k(x), \delta)$, para cada k, $0 \leq k \leq n-1$. Assim, cada $B(f^k(x), \delta) \subset I_{j_k}$, $1 \leq j_k \leq \ell + 1$, ou seja, f é estritamente monótona , com orientação $\varepsilon(I_{j_k})$ em $B(f^k(x), \delta)$.

Tomamos quaisquer $y, z \in B(x, \delta)$ com $y < z$,

$\varepsilon(I_{j_0})f(y) < \varepsilon(I_{j_0})f(z)$,

$\varepsilon(I_{j_0})\varepsilon(I_{j_1})f^2(y) < \varepsilon(I_{j_0})\varepsilon(I_{j_1})f^2(z)$,

....

$\varepsilon(I_{j_0})...\varepsilon(I_{j_{n-1}})f^n(y) < \varepsilon(I_{j_0})...\varepsilon(I_{j_{n-1}})f^n(z)$,

ou seja, se $y < z$ então $\tau_n(i(x))f^n(y) < \tau_n(i(x))f^n(z)$. Logo $\tau_n(i(x)) = \prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon(I_{j_k})$ é a orientação de f^n em $B(x, \delta)$.

ii) Tomando $t = i(x)$ e $s = i(y)$ teremos $t_0 = s_0$ e $t \prec s$. Pela Proposição 3.8, existe $n > 0$, tal que, $i_k(x) = i_k(y)$, $0 \leq k \leq n-1$ e $i_n(x) \neq i_n(y)$. Para a segunda afirmação, suponha, por absurdo, que exista $k \in \mathbb{N}_0$, tal que, $f^k([x,y]) \cap \{c_1, ...c_\ell\} \neq \varnothing$. Se existir ponto de retorno no interior de $f^k([x,y])$, teremos $i_k(x) \neq i_k(y)$, com $0 \leq k \leq n-1$, contradição. Por outro lado, se existir um ponto de retorno na fronteira de $f^k([x,y])$ teríamos, $f^k(x) = f^k(y)$ que implica, $f^n(x) = f^n(y)$, contradizendo $i_n(x) \neq i_n(y)$.

iii) Segue diretamente de (iv) da Proposição 3.8, tomando $t = i(x)$ e $s = i(y)$. $\square$

As proposições 3.5, 3.7, 3.8 e 3.9, nos dão uma visão geral sobre a relação de ordem em $\sum^{\ell}$ e sua ligação com as propriedades da aplicação itinerário. Nosso próximo resultado vai no sentido de explorar a ligação entre a ordem de $\sum^{\ell}$ e a ordem do intervalo I.

Lema 3.10. Sejam $f : I \to I$, ℓ-modal e $x, y \in I$. Se $x < y$ então $i(x) \preceq i(y)$. Reciprocamente, se $i(x) \prec i(y)$ então $x < y$.

Demonstração: Suponha $x < y$, se $i(x) = i(y)$ então está pronto. Vamos considerar $i(x) \neq i(y)$, então existe $n \geq 0$, tal que, $i_n(x) \neq i_n(y)$. Se $n = 0$ então $i_0(x) \neq i_0(y)$ e $x < y$ logo, $i(x) \prec i(y)$. Por outro lado, se $n > 0$ podemos tomar n, como o número mínimo para esta propriedade. Assim, $i_k(x) = i_k(y)$, $0 \leq k \leq n-1$ e $i_n(x) \neq i_n(y)$. Pela Proposição 3.9, f^n é monótona em $[x, y]$ com orientação $\tau_n(i(x)) = \tau_n(i(y))$, sendo $x < y$, temos $\tau_n(i(x))f^n(x) < \tau_n(i(y))f^n(y)$. Como $i_k(x) = i_k(y)$, $0 \leq k \leq n-1$, temos $\theta_k(i(x)) = \theta_k(i(y))$, $0 \leq k \leq n-1$ e $\theta_n(i(x)) \neq \theta_n(i(y))$ pois $i_n(x) \neq i_n(y)$.
Surgem então, duas possibilidades:
Se $\tau_n(i(x)) = \tau_n(i(y)) = +1$ então, $i_n(x) < i_n(y)$, pois $f^n(x) < f^n(y)$. Assim, $\theta_n(i(x)) < \theta_n(i(y))$, e portanto, $i(x) \prec i(y)$.
Se $\tau_n(i(x)) = \tau_n(i(y)) = -1$ então, $-i_n(x) < -i_n(y)$, pois $f^n(x) > f^n(y)$. Assim, $\theta_n(i(x)) < \theta_n(i(y))$, e portanto, $i(x) \prec i(y)$.
Reciprocamente, se $i(x) \prec i(y)$ então necessariamente $x < y$, pois se $x \geq y$, pela primeira parte teremos $i(x) \succeq i(y)$ contradizendo $i(x) \prec i(y)$. $\square$

O Lema 3.10 não garante a injetividade da aplicação itinerário, pois, podemos ter $i(x) = i(y)$ mesmo que $x \neq y$. Isto nos leva a analisar o subconjunto de I formado pelos pontos que tem mesmo itinerário.

Lema 3.11. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal e denotemos por $I(x) = \{y \in I \mid i(y) = i(x)\}$.

i) $I(x)$ é um intervalo (que pode consistir de um só ponto);

ii) Se $I(x) \neq \{x\}$ então $f^n(I(x))$ não possui pontos de retorno para qualquer $n \geq 0$. Em particular, qualquer potência de f é estritamente monótona em $I(x)$ com orientação $\tau_n(i(x))$;

iii) Os iterados $\{I(x), f(I(x)), f^2(I(x)), ...\}$ são, dois a dois disjuntos, ou qualquer ponto em $I(x)$ tem sua órbita convergindo a uma órbita periódica de f.

Demonstração:

i) Se $I(x) = \{x\}$ está pronto. Caso seja $I(x) \neq \{x\}$ então teremos $I(x)$ conexo, pois dados quaisquer $y, z \in I(x)$ com $y < z$, para cada $u \in I, \quad y < u < z$, pela Proposição 3.10, $i(y) \preceq i(u) \preceq i(z)$. Como $i(y) = i(x) = i(z)$ temos $i(u) = i(x)$, ou seja, $u \in I(x)$.

ii) A prova é por indução. Para **n=0**, $I(x)$ não contém pontos de retorno pois se existir um ponto de retorno $c_k \in I(x)$, como $I(x) \neq \{x\}$, teremos dois pontos em $I(x)$ com itinerários distintos, contradizendo a definição de $I(x)$. Suponhamos, agora, que a hipótese vale para algum $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$, mostremos então que vale para **n+1**. Temos que $\{I(x), f(I(x)), , ...f^n(I(x))\}$ não contém pontos de retorno então, $f^n : I(x) \longrightarrow f^n(I(x))$ é um homeomorfismo. Suponha, por absurdo, que exista um ponto de retorno $c_k \in f^{n+1}(I(x))$, já que $I(x)$ é homeomorfo a $f^n(I(x))$ e f é estritamente monótona em $f^n(I(x))$, pois este não contém pontos de retorno, temos que $I(x)$ é homeomorfo a $f^{n+1}(I(x))$, portanto existem pontos distintos $y, z \in I(x)$, tais que, $f^{n+1}(y) < c_k < f^{n+1}(z)$, logo $i_{n+1}(y) \neq i_{n+1}(z)$, contradizendo o fato de que $i(y) = i(z)$.

Supondo que os iterados $\{I(x), f(I(x)), f^2(I(x)), ...\}$ não contém pontos de retorno, fixado n, temos que, cada $f^j(I(x))$, $0 \leq j \leq n-1$, está contido em um intervalo (volta) I_{k_j}, $1 \leq k_j \leq \ell + 1$. Assim, f tem orientação dada por $\varepsilon(I_{k_j})$ em cada $f^{k_j}(I(x))$. Tomando quaisquer $y, z \in I(x)$, com $y < z$, temos

$\varepsilon(I_{k_0})f(y) < \varepsilon(I_{k_0})f(z)$,

$\varepsilon(I_{k_0})\varepsilon(I_{k_1})f^2(y) < \varepsilon(I_{k_0})\varepsilon(I_{k_1})f^2(z)$,

....

$\varepsilon(I_{k_0})...\varepsilon(I_{k_{n-1}})f^n(y) < \varepsilon(I_{k_0})...\varepsilon(I_{k_{n-1}})f^n(z)$,

ou seja, se $y < z$ então $\tau_n(i(x))f^n(y) < \tau_n(i(x))f^n(z)$. Logo $\tau_n(i(x)) = \varepsilon(I_{k_0})...\varepsilon(I_{k_{n-1}})$ é a orientação de f^n em $I(x)$.

iii) Se os iterados de $I(x)$ são dois a dois disjuntos está pronto. Caso contrário, existe $N \geq 0, \quad q > 0$, tal que, $f^N(I(x)) \cap f^{N+q}(I(x)) \neq \varnothing$. Temos duas possibilidades, se $I(x) = \{x\}$ então $f^N(x) = f^{N+q}(x)$, logo $\mathcal{O}^+(x)$ é eventualmente periódico e está pronto. Vamos assumir então que $I(x) \neq \{x\}$ então por (ii) $f^n(I(x))$ não contém pontos de retorno, para todo $n \geq 0$, isto é, para qualquer $y \in f^N(I(x))$ temos $A(y) = cte$. Tomemos $z \in f^N(I(x)) \cap f^{N+q}(I(x))$, então existem $x_1, x_2 \in I(x)$ tais que $f^N(x_1) = z$ e $f^{N+q}(x_2) = z$ logo $A(f^N(x_1)) = A(f^{N+q}(x_2))$. Como $A(f^N(x_1)) = A(f^N(x))$ e $A(f^{N+q}(x_2)) = A(f^{N+q}(x))$ temos $A(f^N(x)) = A(f^{N+q}(x))$. Note que $f^N(I(x)) \cap f^{N+q}(I(x)) \neq \varnothing \Rightarrow f^{N+q}(I(x)) \cap f^{N+2q}(I(x)) \neq \varnothing$, portanto, por raciocínios análogos, obtemos $A(f^{N+q}(x)) = A(f^{N+2q}(x))$ e, indutivamente temos $A(f^{N+kq}(x)) = cte$. De modo análogo mostramos que para cada $0 \leq s \leq q-1$ temos $A(f^{s+N+kq}(x)) = cte$. Portanto $i(x)$ é eventualmente periódico, e para qualquer $y \in I(x)$, $i(x) = i(y)$, assim $i(y)$ será eventualmente periódico. Pelo Teorema 2.11, temos que para qualquer $y \in I(x)$, $\mathcal{O}^+(y)$ converge a uma órbita periódica de f. $\square$

A afirmação (iii) do Lema 3.11, nos indica um comportamento especial dos intervalos $I(x)$, em particular quando $I(x) \neq \{x\}$, para algum $x \in I$. Supondo que $I(x) \neq \{x\}$, para algum $x \in I$, temos que, uma das hipóteses excludentes abaixo deve ocorrer com $I(x)$.

- Os iterados de $I(x)$, não são, mutuamente disjuntos. **(1)**
- Os iterados de $I(x)$ são mutuamente disjuntos e convergem a alguma órbita periódica de f; **(2)**
- Os iterados de $I(x)$ são mutuamente disjuntos e não convergem a qualquer órbita periódica de f. **(3)**

A condição (3), dá origem à seguinte definição.

Definição 3.12. Sejam $f : I \to I$, ℓ-modal, e $J \subset I$ um intervalo. Diremos que J é *errante* se os iterados $\{J, f(J), f^2(J), ...\}$ são dois a dois disjuntos, isto é, $f^i(J) \cap f^j(J) = \varnothing$, para quaisquer $i \neq j$ e os iterados de J não convergem a qualquer órbita periódica de f, isto é, $f^n(J) \not\to \mathcal{O}(z)$, $\forall z \in Per(f)$. Caso contrário J é dito *não-errante*.

Observemos que a expressão $f^n(J) \to \mathcal{O}(z)$ é usada no sentido de que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tal que, $d(f^n(x), f^n(z)) < \varepsilon, \quad \forall n > N, \quad \forall x \in J$, ou seja, os pontos em J são uniformemente assintóticos a z. Com a Definição 3.12, a condição (3) fica: "$I(x)$ é errante".

Quanto à condição (2), note que $I(x) \neq \{x\}$ e por (i) do Lema 3.11, $I(x)$ é intervalo, logo deverá conter um intervalo aberto J, tal que, $f^n(J) \to \mathcal{O}(z)$, para algum $z \in Per(f)$, ou seja, $J \subset BA(z)$. Pela Definição 1.8 temos que $\mathcal{O}(z)$ é atratora. Portanto a condição (2) implica que f possui alguma órbita periódica atratora.

A condição (1) é mais difícil de analisar, assim vamos obter alguns resultados para determinar suas implicações.

Lema 3.13. Seja $\varphi : L \to L$, contínua, estritamente monótona. Com $L \subset \mathbb{R}$, intervalo compacto com interior não vazio. Então, L possui um intervalo de pontos periódicos de φ ou um ponto periódico atrator bi-lateral.

Demonstração: Primeiramente notemos que φ estritamente monótona em L e $\varphi(L) \subset L$ implica que $\varphi^2 : L \to L$, é contínua e estritamente crescente em L, com $\varphi^2(L) \subset L$. Como o interior de L é não vazio, dado qualquer $x \in L$, a sequência $(x, \varphi^2(x), \varphi^4(x), ...)$ converge monótonamente para um ponto $p \in L$, pois L é compacto. Como φ^2 é contínua e a sequência é monótona temos que $\varphi^2(p) = p$, isto é, $Fix(\varphi^2) \neq \varnothing$, o que implica, $Per(\varphi) \neq \varnothing$. Assim, se $Per(\varphi)$ contém um intervalo, está pronto. Vamos supor, então, que não existem intervalos de pontos periódicos. Pela continuidade de φ^2 temos que todo ponto em $Fix(\varphi^2)$ é isolado em L. Vamos mostrar que, neste caso, L contém um ponto fixo atrator bi-lateral para φ^2. Consideremos $L = [a, b]$ com $|a|, |b| < \infty$, temos dois casos a considerar.

Caso 1: Se $b \in Fix(\varphi^2)$, como b deve ser isolado em $Fix(\varphi^2)$, temos que existe $\delta > 0$ tal que, ou $\forall x \in (b-\delta, b),\ \ \varphi^2(x) > x$, ou $\forall x \in (b-\delta, b),\ \ \varphi^2(x) < x$. Se for $\varphi^2(x) > x, \forall x \in (b - \delta, b)$ então $(x, \varphi^2(x), \varphi^4(x), ...)$ converge crescentemente para b, logo b atrai $(b - \delta, b]$ aberto em L, portanto é atrator bi-lateral. Por outro lado, se $\forall x \in (b - \delta, b),\ \ \varphi^2(x) < x$, então $(x, \varphi^2(x), \varphi^4(x), ...)$ converge decrescentemente para um ponto $y < b$ e $\varphi^2(y) = y$, portanto $y \in Fix(\varphi^2)$ e $\varphi^2(x) < x, \forall x \in (y, b)$.

Podemos ter duas situações. Se $y = a$ temos que dado $x \in (y, b)$, $(x,\varphi^2(x), \varphi^4(x), ...)$ converge decrescentemente para a, logo a atrai $[a, a+\varepsilon)$ aberto em L, para algum $\varepsilon > 0$, portanto é atrator bi-lateral. Caso contrário, se $y \in (a, b)$ subdividimos em dois casos novamente. Se $\varphi^2(x) \leq x, \forall x \in (a, y)$ então, dado

x suficientemente próximo de a teremos $\varphi^2(x) < x$ e $(x, \varphi^2(x), \varphi^4(x), ...)$ convergindo decrescentemente para a e, pela argumentação acima, a será atrator bi-lateral. Suponha então que exista $x_0 \in (a, y)$, tal que, $\varphi^2(x_0) > x_0$, portanto existirá um ponto fixo z de φ^2 em (a, y) tal que, para algum $\varepsilon > 0$, $\forall x \in (z - \varepsilon, z)$, $\varphi^2(x) > x$, e $\forall x \in (z, z + \varepsilon)$, $\varphi^2(x) < x$. Assim, pelas mesmas argumentações acima teremos que z é ponto fixo atrator bi-lateral de φ^2. Concluímos, assim, que se $b \in Fix(\varphi^2)$ então existe ponto fixo atrator bi-lateral.

Caso 2: Se $b \notin Fix(\varphi^2)$ temos que existe um valor máximo $\tilde{b} \in Fix(\varphi^2)$, com $\tilde{b} < b$. Note que φ^2 é estritamente crescente em L, então $\forall x \in [a, \tilde{b}], \varphi^2(x) \leq \varphi^2(\tilde{b}) = \tilde{b}$. Portanto tomando $\tilde{L} = [a, \tilde{b}]$ temos $\varphi^2(\tilde{L}) \subset \tilde{L}$ e pelo caso 1, vai existir um ponto fixo atrator bi-lateral para φ^2 em $\tilde{L} \subset L$. $\square$

Lema 3.14. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal. Se $I(x) \neq \{x\}$ e os iterados de $I(x)$ não são mutuamente disjuntos, para algum $x \in I$, então existe $q > 0$ e $L \subset I$, intervalo compacto com interior não vazio, tal que, $f^q(L) \subset L$ e f^q é estritamente monótona em L. Ainda, L não contém pontos de retorno em seu interior.

Demonstração: Como os iterados de $I(x)$ não são mutuamente disjuntos temos que, existe $N \geq 0$ e $q > 0$, tal que, $f^N(I(x)) \cap f^{N+q}(I(x)) \neq \varnothing$. Consideremos $L_0 = \bigcup_{k \geq 0} f^{kq}(f^N(I(x)))$. Note que L_0 é intervalo pois $f^{N+kq}(I(x)) \cap f^{N+(k+1)q}(I(x)) \neq \varnothing$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, e cada um dos iterados $f^{N+kq}(I(x))$ é um intervalo com interior não vazio, já que $I(x) \neq \{x\}$. Ainda, L_0 não contém pontos de retorno, pois, pelo Lema 3.11, $I(x) \neq \{x\}$, implica que cada um dos iterados $f^{N+kq}(I(x))$ não contém pontos de retorno. Fixado qualquer s, com $0 \leq s \leq q-1$, temos que $f^{N+s}(I(x)) \cap f^{N+s+q}(I(x)) \neq \varnothing$, logo podemos construir $L_s = \bigcup_{k \geq 0} f^{kq}(f^{N+s}(I(x)))$, com as mesmas propriedades de L_0, isto é, L_s é um intervalo com interior não vazio e sem pontos de retorno. Consideremos a sequência dos intervalos $\{L_0, L_1, ...L_{q-1}\}$. Note que para cada s, com $0 \leq s \leq q-1$, temos que $f^q(L_s) \subset L_s$ e para cada s, com $0 \leq s \leq q-2$ temos $f(L_s) \subset L_{s+1}$ e $f(L_{q-1}) \subset L_0$. Como cada L_s não contém pontos de retorno, temos que $L_s \subset I_{j_s}$, consideremos então $\varepsilon(I_{j_s}) \in \pm 1$ a orientação de f em cada L_s, $0 \leq s \leq q-1$. Nessas condições temos que, para quaisquer $y, z \in L_0$ com $y < z$,

$\varepsilon(I_{j_0})f(y) < \varepsilon(I_{j_0})f(z)$,

$\varepsilon(I_{j_0})\varepsilon(I_{j_1})f^2(y) < \varepsilon(I_{j_0})\varepsilon(I_{j_1})f^2(z)$,

....

$\varepsilon(I_{j_0})...\varepsilon(I_{j_{q-1}})f^q(y) < \varepsilon(I_{j_0})...\varepsilon(I_{j_{q-1}})f^q(z)$.

Seja $\tau = \varepsilon(I_{j_0})...\varepsilon(I_{j_{n-1}})$, então, se $y < z$ temos $\tau f^q(y) < \tau f^q(z)$. Portanto τ é a orientação de f^q em L_0, ou seja, f^q é estritamente monótona em L_0. Tomamos $L = \bar{L_0}$. Como L_0 é intervalo limitado com interior não vazio, temos que L é intervalo compacto com interior não vazio. Pela continuidade de f^q temos que f^q é estritamente monótona em L. Ainda, L só pode conter pontos de retorno em sua fronteira pois o interior de L e L_0 coincidem. Resta apenas mostrar que L é f^q-invariante. Para ver isto, basta notar que dado $y \in L$ temos que existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset L_0$ com, $y_n \longrightarrow y$, logo $f^q(y) \in L$, pois f^q é contínua e $f^q(L_0) \subset L_0$. $\square$

Corolário 3.15. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal. Se $I(x) \neq \{x\}$ e os iterados de $I(x)$ não são mutuamente disjuntos, para algum $x \in I$, então f possui um intervalo de pontos periódicos ou um ponto periódico atrator bi-lateral.

Demonstração: Pelo Lema 3.14 existe $q > 0$ e $L \subset I$, intervalo compacto com interior não vazio, tal que, $f^q(L) \subset L$ e f^q é estritamente monótona em L. Tomando $\varphi = f^q$ temos, pelo Lema 3.13, que φ possui intervalo de pontos periódicos ou ponto periódico atrator bi-lateral. Como $Per(\varphi) \subset Per(f)$, temos o resultado procurado. $\square$

Com o Corolário 3.15, a condição (1) da observação implica na existência de intervalos de pontos periódicos ou ponto periódico atrator bi-lateral. A partir das condições (1), (2) e (3) podemos formular a seguinte proposição.

Proposição 3.16. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal. Se existir $x \in I$, tal que, $I(x) \neq \{x\}$. Então vale uma das condições abaixo:

i) $I(x)$ é um intervalo errante;

ii) f possui um intervalo de pontos periódicos ou órbita periódica atratora.

Demonstração: Como existe $x \in I$, tal que, $I(x) \neq \{x\}$ então vale uma das condições (1), (2) ou (3). Se valer (3) temos que $I(x)$ é um intervalo errante. Por outro lado, pelo Corolário 3.15, a condição (1) implica na existência de intervalos de pontos periódicos ou ponto periódico atrator bi-lateral, que, em particular, tem órbita periódica atratora, conforme observação após a Definição 1.8. Caso contrário vale a condição (2) que, pela observação após a Definição 3.12, implica na existência de órbita periódica atratora. $\square$

Esta proposição indica como obter um subconjunto das aplicações ℓ-modais, onde a aplicação itinerário seja injetiva. Para isto temos a seguinte definição.

Definição 3.17. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal. Vamos dizer que f é *padrão* se f não tem intervalos errantes, nem intervalos de pontos periódicos ou órbita periódica atratora.

Teorema 3.18. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal, padrão. A aplicação itinerário $i : I \to \sum^{\ell}$ é injetiva, e portanto uma bijeção sobre sua imagem $i(I) \subset \sum^{\ell}$, que preserva ordem estrita.

Demonstração: Para ver que i é injetiva basta mostrar que $I(x) = \{x\}$, $\forall x \in I$, o que é obtido pela contraposição da Proposição 3.16, já que f é padrão.

Para ver que f preserva ordem estrita basta usar o Lema 3.10, junto com o fato de que a aplicação itinerário é injetiva, logo $x < y$ se, e somente se, $i(x) \prec i(y)$. $\square$

Capítulo 4

Caracterização de i(I) e Classificação de aplicações padrão

Já sabemos que para toda aplicação padrão, a aplicação itinerário é uma bijeção sobre sua imagem, resta determinar qual subconjunto de $\sum^{\ell}$, será $i(I)$. Primeiramente vamos desenvolver algumas ferramentas.

Lembremos que i tem domínio em I e imagem em $\sum^{\ell}$, e que, $I \subset \mathbb{R}$ tem a topologia induzida de $\mathbb{R}$ que é localmente compacto. Para $\sum^{\ell}$ podemos introduzir a topologia usual dada pela métrica $d : \sum^{\ell} \times \sum^{\ell} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$d(s,t) = \begin{cases} 0 & , se \quad s = t \\ \frac{1}{2^n} & , se \quad s \neq t \end{cases}$$

onde $s, t \in \sum^{\ell}$ são quaisquer, e $n = min\{k \in \mathbb{N}_0, s_k \neq t_k\}$.

Assim $(\sum^{\ell}, d)$ será um espaço métrico compacto. Agora podemos questionar se i é contínua em $x \in I$.

Inicialmente, como exemplo, notemos que i é necessariamente descontínua em $c_k \in I$, $1 \leq k \leq l$. De fato, dado $\varepsilon = 1/2$, $\forall \delta > 0, \forall y \in (c_k, c_k + \delta)$. Temos $i_0(c_k) = c_k$ e $i_0(y) = I_{k+1} > c_k$, portanto $d(i(c_k), i(y))) = 1/2^0 = 1 > 1/2$. Vamos, então, estudar os limites laterais de $i(x)$ em particular para $x = c_k$, $1 \leq k \leq l$. Tais limites serão chamados *invariantes kneading* (ou *sequências kneading*), e serão de fundamental importância para caracterizar $i(I)$ e encontrar uma conjugação entre aplicações padrão.

Proposição 4.1. Sejam $f : I \to I$, ℓ-modal e $i : I \to \sum^\ell$ sua aplicação itinerário. Dado $x \in I$, tal que $i_k(x) \cap \{c_1, ..., c_\ell\} = \varnothing$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Então i será contínua em x.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Por hipótese, $\{x, f(x), ..., f^n(x)\}$ não contém pontos de retorno, logo existe $\delta_0 > 0$, tal que, $B(f^k(x), \delta_0) \subset I_{j_k}$, $0 \leq k \leq n$. Pela continuidade da familia $\{f, f^2, ..., f^n\}$, existe $\delta < \delta_0$ tal que $\forall y \in B(x, \delta)$, $f^k(y) \in B(f^k(x), \delta_0)$, $0 \leq k \leq n$. Assim, $\forall y \in B(x, \delta)$, $i_k(x) = i_k(y)$,$0 \leq k \leq n$, portanto $d(i(x), i(y)) \leq 1/2^{n+1} < 1/2^n < \varepsilon$. $\square$

Corolário 4.2. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal. Se f é descontínua em $x \in I$, então existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^n(x) \in \{c_1, ..., c_\ell\}$.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $f^n(x) \notin \{c_1, ..., c_\ell\}$. Então, $i_k(x) \cap \{c_1, ..., c_\ell\} = \varnothing$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, logo f é contínua em x pela Proposição 4.1, contradizendo a hipótese. $\square$

Passamos a analisar a existência e propriedades dos limites de cada coordenada $i_n(x)$. Lembramos que $A : I \to S[f]$ e $i_n(x) = A(f^n(x))$. Como $S[f] = \{I_1, c_1, ..., c_\ell, I_{\ell+1}\}$ é um conjunto discreto, consideramos a topologia, em $S[f]$, onde cada ponto é um aberto. Portanto, a aplicação endereço só pode ser contínua em $x \in I$, se for constante em algum intervalo $(x-\delta, x+\delta)$, para algum $\delta > 0$. A mesma situação vale para os limites laterais.

Proposição 4.3. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal e $A : I \to S[f]$ a sua aplicação endereço associada. Então, para cada $x \in I$ e $n \in \mathbb{N}_0$ existem os limites laterais

$$\lim_{y \to x^+} A(f^n(y)), \lim_{y \to x^-} A(f^n(y)) \in \{I_1, I_2, ..., I_{\ell+1}\}.$$

Demonstração: Provamos para $y \to x^+$. Fixe $n \geq 0$, pelo Corolário 2.10, existe $\delta > 0$ tal que $\forall y \in (x, x+\delta)$, $A(f^n(y)) = cte \in \{I_1, ..., I_{\ell+1}\}$. Seja $A(f^n(y)) = I_{k_n}$, então, pela observação precedente existe $\lim\limits_{y \to x^+} A(f^n(y)) = I_{k_n}$. $\square$

Definição 4.4. Seja$f : I \to I$, ℓ-modal. Dados $x \in I$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Definimos

$$i_k(x^+) = \lim_{y \to x^+} A(f^k(y)) \in \{I_1, I_2, ..., I_{\ell+1}\}$$
$$i_k(x^-) = \lim_{y \to x^-} A(f^k(y)) \in \{I_1, I_2, ..., I_{\ell+1}\}$$

Caso $x = c_0$, definimos

$$i_k(c_0^+) = \lim_{y \to c_0^+} A(f^k(y))$$

e para $x = c_{\ell+1}$,

$$i_k(c_{\ell+1}^-) = \lim_{y \to c_{\ell+1}^-} A(f^k(y)).$$

Ainda definimos as sequências

$$i(x^+) = (i_0(x^+), i_1(x^+), ...) \in \{I_1, I_2, ..., I_{\ell+1}\}^{\mathbb{N}_0}$$
$$i(x^-) = (i_0(x^-), i_1(x^-), ...) \in \{I_1, I_2, ..., I_{\ell+1}\}^{\mathbb{N}_0}$$

Proposição 4.5. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal. Então, dado $x \in I$. Sempre existem $\lim_{y \to x^+} i(y) = i(x^+)$ e $\lim_{y \to x^-} i(y) = i(x^-)$

Demonstração: Provamos o primeiro. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $1/2^n < \varepsilon$. Para cada k, $\lim_{y \to x^+} i_k(y) = i_k(x^+)$, logo, existe $\delta_k > 0$, tal que, $A(f^k(y)) = i_k(x^+)$, $\forall y \in (x, x + \delta_k)$. Tomemos $\delta = \min_{0 \le k \le n} \delta_k$, então $\forall y \in (x, x + \delta)$, $i_k(y) = i_k(x^+)$, $0 \le k \le n$. Portanto $d(i(y), i(x^+)) \le 1/2^{n+1} < 1/2^n < \varepsilon$. Logo, existe $\lim_{y \to x^+} i(y) = i(x^+)$. $\square$

Proposição 4.6. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal. Dados $x \in I, n > 0$ tais que $\{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\} \cap \{c_1, c_2, ..., c_l\} = \varnothing$. Então,

$$\sigma^n(i(x^+)) = i((f^n(x))^+), \text{ se } \tau_n(x) = +1.$$
$$\sigma^n(i(x^+)) = i((f^n(x))^-), \text{ se } \tau_n(x) = -1.$$

Reciprocamente, $\lim_{y \to x^+} i(f^n(y)) = \sigma^n i(x^+)$.

Demonstração: Mostremos quando $\tau_n(x) = +1$. Lembre que $\sigma^n(i(x^+)) = (i_n(x^+), i_{n+1}(x^+), ...)$ e, sendo f^n contínua, quando $y \to x$, $f^n(y) \to f^n(x) = z$. Assim, $i((f^n(x))^+) = i(z^+) = (i_0(z^+), i_1(z^+), ...)$. Logo devemos mostrar que, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $i_{n+k}(x^+) = i_k(z^+)$. Basta notar que, $i_{n+k}(x^+) = \lim_{y \to x^+} A(f^{n+k}(y)) = \lim_{y \to x^+} A(f^k(f^n(y)))$. Como $\{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\}$ não contém pontos de retorno, temos que $\tau_n(x)$ é a orientação de f^n em x. Portanto, sendo $\tau_n(x) = +1$, se $y \to x^+$, temos $f^n(y) \to f(x) = z$ pela direita, isto é, $f^n(y) \to z^+$. Assim, $\lim_{y \to x^+} A(f^k(f^n(y))) = \lim_{f^n(y) \to z^+} A(f^k(f^n(y))) = i_k(z^+)$. Reciprocamente, como σ é contínua em Σ^ℓ, basta notar que $\lim_{y \to x^+} i(f^n(y)) = \lim_{y \to x^+} \sigma^n(i(y)) = \sigma^n(i(x^+))$, pois o limite do argumento existe. $\square$

Definição 4.7. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal. Definimos os *invariantes kneading* $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\ell \in \{I_1, I_2, ..., I_{\ell+1}\}^{\mathbb{N}_0}$ como sendo os limites $\nu_k = \lim_{y \to c_k^+} i(y) = i(c_k^+)$, para $1 \le k \le \ell$. Por questão de completude definimos $\nu_0 = \lim_{y \to c_0^+} i(y)$, $\nu_{\ell+1} =$

$\lim\limits_{y \to c_{\ell+1}^-} i(y) \in \{I_1, I_{\ell+1}\}^{\mathbb{N}_0}$.
Note que, em alguma vizinhança de c_0 e de $c_{\ell+1}$, não existem pontos de retorno, logo $\nu_0 = i(c_0)$ e $\nu_{\ell+1} = i(c_{\ell+1})$, são denominados os *itinerários dos pontos extremos de* I.

Apenas $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\ell$ são invariantes kneading de f. Sendo f, ℓ-modal, temos $f(\partial I) \subset \partial I$ assim, ν_0 e $\nu_{\ell+1}$ têm um número finito de possibilidades. Mais precisamente, podemos ter apenas quatro pares distintos, a saber:
Se $f(a) = a$ e $f(b) = b$, $\nu_0 = (I_1, I_1, ...)$, $\nu_{\ell+1} = (I_{\ell+1}, I_{\ell+1}, ...)$.
Se $f(a) = a$ e $f(b) = a$, $\nu_0 = (I_1, I_1, ...)$, $\nu_{\ell+1} = (I_{\ell+1}, I_1, I_1, ...)$.
Se $f(a) = b$ e $f(b) = b$, $\nu_0 = (I_1, I_{\ell+1}, I_{\ell+1}, ...)$, $\nu_{\ell+1} = (I_{\ell+1}, I_{\ell+1}, ...)$.
Se $f(a) = b$ e $f(b) = a$, $\nu_0 = (I_1, I_{\ell+1}, I_1, ...)$, $\nu_{\ell+1} = (I_{\ell+1}, I_1, I_{\ell+1}, ...)$.
onde $I = [a, b]$.

Lema 4.8. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal, padrão. Então, para cada $x \in I$ e $n \geq 0$ vale uma das condições abaixo

i) $\sigma^n(i(x)) = i(c_k)$, se $f^n(x) = c_k$, $0 \leq k \leq \ell + 1$;

ii) $\sigma(\nu_k) \prec \sigma^{n+1}(i(x)) \prec \sigma(\nu_{k+1})$, se $f^n(x) \in I_{k+1} \backslash \{c_k, c_{k+1}\}$ e $\varepsilon(I_{k+1}) = +1$, $0 \leq k \leq \ell$;

iii) $\sigma(\nu_k) \succ \sigma^{n+1}(i(x)) \succ \sigma(\nu_{k+1})$, se $f^n(x) \in I_{k+1} \backslash \{c_k, c_{k+1}\}$ e $\varepsilon(I_{k+1}) = -1$, $0 \leq k \leq \ell$.

Demonstração:
i) Supondo $f^n(x) = c_k$, então $i(f^n(x)) = i(c_k)$, e, pela Proposição 2.7, temos $\sigma^n(i(x)) = i(c_k)$.
ii) Vamos supor que $f^n(x) \in I_{k+1} \backslash \{c_k, c_{k+1}\}$, para algum $n \geq 0$, dividimos a prova em dois casos, $0 \leq k \leq \ell - 1$ e $k = \ell$.

Caso1: Assumimos que $0 \leq k \leq \ell - 1$, ou seja, $I_{k+1} \in \{I_1, I_2, ..., I_\ell\}$. Como f é estritamente crescente em $I_{k+1} = [c_k, c_{k+1}]$, pois $\varepsilon(I_{k+1}) = +1$, temos que para todo $y \in [c_k, c_{k+1}]$, tal que, $c_k < y < f^n(x)$, vale $f(c_k) < f(y) < f^{n+1}(x)$, sendo f padrão, $i(f(c_k)) \prec i(f(y)) \prec i(f^{n+1}(x))$, ou seja, $\sigma(i(c_k)) \prec \sigma(i(y)) \prec \sigma^{n+1}(i(x))$. Note que, para todo $z \in (c_k, y)$, temos $i(f(c_k)) \prec i(f(z)) \prec i(f(y))$, ou seja, $\sigma(i(c_k)) \prec \sigma(i(z)) \prec \sigma(i(y))$. Assim, quando $y \longrightarrow c_k^+$, $\sigma(i(y)) \longrightarrow \sigma(\nu_k)$, decrescentemente, logo $\sigma\nu_k \prec \sigma^{n+1}(i(x))$. Ainda, $\varepsilon(I_{k+1}) = +1$ implica que $\varepsilon(I_{k+2}) = -1$, pois $k \leq \ell - 1$, logo c_{k+1} é ponto de máximo global em $I_{k+1} \cup I_{k+2}$. Como $c_k < f^n(x) < c_{k+1}$ temos $f^{n+1}(x) < f(c_{k+1})$, logo, existe $\delta > 0$, tal que para todo $y \in (c_{k+1}, c_{k+1} + \delta)$, temos $f^{n+1}(x) < f(y) < f(c_{k+1})$, portanto, sendo f padrão, $i(f^{n+1}(x)) \prec i(f(y)) \prec i(f(c_{k+1})))$, ou seja, $\sigma^{n+1}(i(x)) \prec \sigma(i(y)) \prec \sigma(i(c_{k+1}))$. Note que, para todo $z \in (c_{k+1}, y)$, temos $f(y) < f(z) < f(c_{k+1})$, pois f é decrescente em (c_{k+1}, y), como f padrão, temos que $\sigma(i(y)) \prec \sigma(i(z)) \prec \sigma(i(c_{k+1}))$. Assim, quando $y \longrightarrow c_{k+1}^+$, $\sigma(i(y)) \longrightarrow \sigma(\nu_{k+1})$, crescentemente, logo $\sigma^{n+1}(i(x)) \prec \sigma\nu_{k+1}$.Com a desigualdade obtida anteriormente, temos $\sigma\nu_k \prec \sigma^{n+1}(i(x)) \prec \sigma(\nu_{k+1})$.

Caso2: $k = \ell$, ou seja, $I_{k+1} = I_{\ell+1}$. Neste caso, $\nu_{k+1} = \nu_{\ell+1}$ é obtido como $\nu_{\ell+1} = i(c_{\ell+1}^-) = i(c_{\ell+1})$(ver definição 4.7). Por hipótese, $\varepsilon(I_{\ell+1}) = +1$ e $c_\ell < f^n(x) < c_{\ell+1}$, logo $f(c_\ell) < f^{n+1}(x) < f(c_{\ell+1})$. Como f é padrão, temos $i(f(c_\ell)) \prec i(f^{n+1}(x)) \prec i(f(c_{\ell+1}))$, ou seja, $\sigma(i(c_\ell)) \prec \sigma^{n+1}(i(x)) \prec \sigma(i(c_{\ell+1})) = \sigma(\nu_{\ell+1})$. Portanto $\sigma^{n+1}(i(x)) \prec \sigma(\nu_{\ell+1})$.

Para completar a desigualdade, basta notar que, dado $y \in (c_\ell, f^n(x))$, temos $\sigma(i(c_\ell)) \prec \sigma(i(y)) \prec \sigma^{n+1}(i(x))$, e para todo $z \in (c_\ell, y)$, $\sigma(i(c_\ell)) \prec \sigma(i(z)) \prec \sigma(i(y))$, logo, quando $y \longrightarrow c_\ell^+$, $\sigma(i(y)) \longrightarrow \sigma(\nu_\ell)$, decrescentemente, logo $\sigma(\nu_\ell) \prec \sigma^{n+1}(i(x))$. Concluímos assim, que, também neste caso, $\sigma(\nu_\ell) \prec \sigma^{n+1}(i(x)) \prec \sigma(\nu_{\ell+1})$.

iii) A demonstração é totalmente análoga à anterior. $\square$

Convém observar que, no Lema 4.8, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ as condições (i), (ii) e (iii), são excludentes, pela preservação do sinal $\prec$. Mais precisamente, se, por exemplo, $f^n(x) \in I_{k+1}$, com $\varepsilon(I_{k+1}) = +1$, para que valha (i), deveríamos ter $f^n(x) = c_k$ ou $f^n(x) = c_{k+1}$, que são os pontos de fronteira de I_{k+1}. Se $f^n(x) = c_k$, então $\sigma\nu_k \succeq \sigma^{n+1}i(x)$ contradizendo (ii). Se $f^n(x) = c_{k+1}$, então $\sigma\nu_{k+1} \preceq \sigma^{n+1}i(x)$ contradizendo (ii).

Definição 4.9. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal, padrão, com itinerários dos pontos extremos $\nu_0, \nu_{\ell+1} \in \{I_1, I_{\ell+1}\}^{\mathbb{N}_0}$ e invariantes kneading $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\ell \in \{I_1, I_2, ..., I_{\ell+1}\}^{\mathbb{N}_0}$. Definimos *o conjunto das sequências admissíveis para* f, $\sum_f \subset \sum^\ell$, como sendo o conjunto de todas as sequências $t = (t_0, t_1, ...t_n, ...) \in \sum^\ell$, que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, satisfazem as condições abaixo:

1) $\sigma^n(t) = i(c_k)$, se $t_n = c_k$, $0 \le k \le \ell + 1$;

2) $\sigma\nu_k \prec \sigma^{n+1}t \prec \sigma\nu_{k+1}$, se $t_n = I_{k+1}$ e $\varepsilon(I_{k+1}) = +1$, $0 \le k \le \ell$;

3) $\sigma\nu_k \succ \sigma^{n+1}t \succ \sigma\nu_{k+1}$, se $t_n = I_{k+1}$ e $\varepsilon(I_{k+1}) = -1$, $0 \le k \le \ell$.

Também definimos o conjunto $\hat{\sum}_f \subset \sum^\ell$, onde f não é necessariamente padrão, que é o conjunto das sequências em $\sum^\ell$ que verificam as condições de 1 a 3 com os sinais $\prec$ e $\succ$ substituídos por $\preceq$ e $\succeq$, respectivamente. Ficando claro que $\sum_f \subseteq \hat{\sum}_f$.

Lema 4.10. Sejam $f, g : I \to I$, ℓ-modais, padrão. Denominando ν_j^f, ν_j^g, para $1 \le j \le \ell$, e $\nu_0^f, \nu_{\ell+1}^f, \nu_0^g, \nu_{\ell+1}^g$, os invariantes kneading e itinerários dos pontos extremos de f e g, respectivamente. Se $\nu_j^f = \nu_j^g$, para $0 \le j \le \ell + 1$, então f e g definem a mesma relação de ordem em $\sum^\ell$ e $\sum_f = \sum_g$.

Demonstração: Para provar que $(\sum^\ell, \prec_f) = (\sum^\ell, \prec_g)$, basta notar que as relações de ordem $\prec_f$ e $\prec_g$, são definidas totalmente conhecendo-se as orientações de f e g em I_1, isto é, $\varepsilon_f(I_1)$ e $\varepsilon_g(I_1)$. Mas isto é equivalente a conhecer ν_0^f e ν_0^g. Como $\nu_0^f = \nu_0^g$ temos que a relação de ordem é a mesma. Resta mostrar que $\sum_f = \sum_g$. Para isto, note que, dado $t \in \sum_f$, e $n \geq 0$, temos:

Se $t_n = c_k$ então $\sigma^n(t) = i(c_k)$ pois t é admissível.

Se $t_n = I_{k+1}$ com $\varepsilon_g(I_{k+1}) = +1$, então $\varepsilon_f(I_{k+1}) = +1$, logo $\sigma\nu_k^f \prec_f \sigma^{n+1}t \prec_f \sigma\nu_{k+1}^f$, pois t é admissível para f. Como $\nu_k^f = \nu_k^g$, $\nu_{k+1}^f = \nu_{k+1}^g$ e as relações $\prec_f$ e $\prec_g$ são equivalentes, temos $\sigma\nu_k^g \prec_g \sigma^{n+1}t \prec_g \sigma\nu_{k+1}^g$.

Se $t_n = I_{k+1}$ com $\varepsilon_g(I_{k+1}) = -1$, então $\varepsilon_f(I_{k+1}) = -1$, logo $\sigma\nu_k^f \succ_f \sigma^{n+1}t \succ_f \sigma\nu_{k+1}^f$, pois t é admissível para f. Como $\nu_k^f = \nu_k^g$, $\nu_{k+1}^f = \nu_{k+1}^g$ e as relações $\prec_f$ e $\prec_g$ são equivalentes, temos $\sigma\nu_k^g \succ_g \sigma^{n+1}t \succ_g \sigma\nu_{k+1}^g$.

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, t verifica as três condições da Definição 4.9, para g, ou seja, t é admissível para g. Logo $\sum_f \subset \sum_g$. Analogamente mostra-se que $\sum_f \supset \sum_g$, portanto $\sum_f = \sum_g$. □

Teorema 4.11. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal, padrão. Com itinerários dos pontos extremos de I, $\nu_0, \nu_{\ell+1} \in \{I_1, I_{\ell+1}\}^{\mathbb{N}_0}$ e invariantes kneading $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\ell \in \{I_1, I_2, ..., I_{\ell+1}\}^{\mathbb{N}_0}$. Então $i(I) = \sum_f$, e portanto $i : I \to \sum_f$ é uma bijeção que preserva ordem.

Demonstração: Dado $x \in I$, pelo Lema 4.8, temos que $i(x)$ é admissível, isto é, $i(x) \in \sum_f$. Portanto $i(I) \subset \sum_f$. Vamos mostrar agora a inclusão contrária, ou seja, $i(I) \supset \sum_f$.

Seja $t \in \sum_f$, vamos supor, por absurdo, que $t \notin i(I)$. Então para todo $x \in I$, temos $i(x) \neq t$. Como $\prec$ é uma ordem total em $\sum^\ell$ teremos $i(x) \prec t$ ou $i(x) \succ t$. Definimos, então, os seguintes subconjuntos de I:

$$L_t = \{x \in I | i(x) \prec t\} \text{ e } R_t = \{x \in I | i(x) \succ t\}$$

Por construção, temos que $L_t \cap R_t = \varnothing$ e $L_t \cup R_t = I$. Primeiramente vamos demonstrar que $L_t, R_t \neq \varnothing$. Pela definição de ν_0 e $\nu_{\ell+1}$ temos apenas quatro possibilidades para a escolha destes itinerários. Escolhemos, sem perda de generalidade, um caso para a demonstração. Suponha que $f(a) = f(b) = a$, então, pela definição 4.7, temos $\nu_0 = (I_1, I_1, ...)$ e $\nu_{\ell+1} = (I_{\ell+1}, I_1, I_1, ...)$.

Afirmação 1: $c_0 = a \in L_t$.

Como $t \notin i(I)$ temos que $t \neq i(c_0) = \nu_0$. Logo, existe $n \geq 0$, tal que, $t_n \neq i_n(c_0) = I_1$, isto é, $I_1 < t_n$. Tomemos n o mínimo para esta propriedade. Se $n = 0$, então $\nu_0 \prec t$ e $c_0 \in L_t$. Se $n > 0$, então $\nu_0 \prec t$, pela Proposição 3.8, pois $\tau_n(t) = \tau_n(\nu_0) = +1$. Logo $c_0 \in L_t$.

Afirmação 2: $c_{\ell+1} = b \in R_t$.

Como $t \notin i(I)$ temos que $t \neq i(c_{\ell+1}) = \nu_{\ell+1}$. Logo, existe $n \geq 0$, tal que, $t_n \neq i_n(c_{\ell+1})$. Se $n = 0$, então $t_0 \neq i_0(c_{\ell+1}) = I_{\ell+1}$, $\Rightarrow t_0 < i_0(c_{\ell+1}) \Rightarrow t \prec i(c_{\ell+1})$. Portanto $c_{\ell+1} \in R_t$. Se $n > 0$, tomando n mínimo para esta propriedade, temos $t_k = i_k(c_{\ell+1})$ para $0 \leq k \leq n-1$ e $t_n \neq i_n(c_{\ell+1})$. Assim, $t_n \succ i_n(c_{\ell+1})$, pois $i_n(c_{\ell+1}) = I_1$. Ainda, $\tau_n(i(c_{\ell+1})) = \varepsilon(I_{\ell+1})\varepsilon(I_1)...\varepsilon(I_1) = -1$. Pela Proposição 3.8, temos que $t \prec i(c_{\ell+1})$ e portanto, $c_{\ell+1} \in R_t$.

Como L_t e R_t são não-vazios podemos falar de valores supremo e ínfimo de cada conjunto. Note que para quaisquer $y \in L_t$ e $z \in R_t$ temos $y < z$, pois $i(y) \prec t \prec i(z)$. Assim $\sup\limits_{y \in L_t} y \leq \inf\limits_{z \in R_t} z$, mais que isso vale a igualdade pois, $L_t \cap R_t = \varnothing$ e $L_t \cup R_t = I$. Consideremos o ponto $u \in I$ dado por $u = \sup\limits_{y \in L_t} y = \inf\limits_{z \in R_t} z$. Temos que $u \in L_t$ ou $u \in R_t$, assumimos que $u \in L_t$, pois o caso $u \in R_t$ leva à contradição de modo análogo.

Como $u \in L_t$ temos $i(u) \prec t$. Por outro lado, para qualquer $\delta > 0$ temos que $\{(u, u+\delta) \cap I\} \subset R_t$, logo para qualquer $z \in (u, u+\delta)$, $t \prec i(z)$. Fazendo $z \longrightarrow u^+$ temos $t \preceq i(u^+)$, portanto $i(u) \prec t \preceq i(u^+)$. Concluímos, assim, que $i(u) \neq i(u^+)$, ou seja, u é um ponto de descontinuidade da aplicação itinerário. Pelo Corolário 4.2, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(u) \in \{c_1, ..., c_\ell\}$, ou seja, $f^n(u) = c_k$, $1 \leq k \leq \ell$. Adicionalmente escolhemos n como o número mínimo para esta propriedade. O caso $n = 0$ leva a contradição facilmente, portanto, para não repetir a argumentação, tratamos o caso $n > 0$ que é mais delicado. Assim $\{u, f(u), ..., f^{n-1}(u)\}$ não contém pontos de retorno e $f^n(u) = c_k$. Temos,

$$
\begin{aligned}
i(u) &= (i_0(u), i_1(u), ..., i_{n-1}(u), c_k, i_{n+1}(u), ...), \\
t &= (t_0, \quad t_1, \quad ..., \quad t_{n-1}, \quad t_n, \quad t_{n+1}, \quad ....), \\
i(u^+) &= (i_0(u^+), i_1(u^+), ..., i_{n-1}(u^+), i_n(u^+), i_{n+1}(u^+), ...).
\end{aligned}
$$

Primeiramente, notemos que, fixado j, $0 \leq j \leq n-1$, como $i_j(u) \in \{I_1, ..., I_{\ell+1}\}$ temos, $i_j(u^+) = \lim\limits_{y \to u^+} A(f^j(y)) = i_j(u)$. Assim $i_j(u) = t_j = i_j(u^+)$, para $0 \leq j \leq n-1$, e $i_n(u^+) = I_k$ ou I_{k+1}, pois $i_n(u) = c_k$. Pelo Corolário 2.10, existe $\delta > 0$, tal que, para todo $y \in (u, u+\delta)$, $A(f^n(y)) = cte$, ainda, pela Proposição 3.9, $\tau_n(i(u))$ é a orientação de f^n em $(u, u+\delta)$, pois $\{u, f(u), ..., f^{n-1}(u)\}$ não contém pontos de retorno. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\tau_n(i(u)) = +1$, então $i_n(u^+) = I_{k+1}$(se fosse $\tau_n(i(u)) = -1$ então $i_n(u^+) = I_k$). Concluímos que $i_n(u) = c_k \leq t_n \leq I_{k+1} = i_n(u^+)$, onde uma das desigualdades é estrita.

Caso1: Se $t_n = c_k$, como $t \in \sum_f$ teremos, $\sigma^n(t) = i(c_k)$. Já que $f^n(u) = c_k$, temos $t_j = i_j(u)$, para todo $j \geq n$. Como $t_j = i_j(u)$, para $0 \leq j \leq n-1$, vem $t = i(u)$, contradizendo o fato de que $t \notin i(I)$.

Caso2: Se $t_n = I_{k+1}$, temos duas possibilidades. Se $\varepsilon(I_{k+1}) = +1$, pela admissibilidade de t, temos $\sigma\nu_k \prec \sigma^{n+1}t \prec \sigma\nu_{k+1}$. Por outro lado, $t_j = i_j(u^+)$, $0 \leq j \leq n-1$ e $t_n = I_{k+1} = i_n(u^+)$, logo $\theta_j(t) = \theta_j(i(u^+))$, $0 \leq j \leq n$. Como $t \preceq i(u^+)$ temos que $t_{n+1} \leq i_{n+1}(u^+)$, pois, $\tau_{n+1}(t) = \tau_{n+1}(i(u^+)) = \tau_n(i(u^+))\varepsilon(I_{k+1}) = +1$. Pela Proposição 3.8, $\sigma^{n+1}t \preceq \sigma^{n+1}i(u^+) = \sigma(\sigma^n(i(u^+))$, e pela Proposição 4.6, $\sigma^n i(u^+) = i((f^n(u))^+) = i(c_k^+) = \nu_k$, logo $\sigma^{n+1}t \preceq \sigma\nu_k$, contradizendo, $\sigma\nu_k \prec \sigma^{n+1}t \prec \sigma\nu_{k+1}$. Se $\varepsilon(I_{k+1}) = -1$, usando o critério de admissibilidade e, os mesmos argumentos, chegamos a contradição. Portanto $t \in \sum_f$.

A nossa segunda afirmação segue diretamente do Teorema 3.16, e do fato já demonstrado, de que $i(I) = \sum_f$. □

Corolário 4.12. Sejam $f, g : I \to I$, ℓ-modais, padrão, tais que seus invariantes kneading e itinerários dos pontos extremos sejam iguais, então f e g são conjugadas.

Demonstração: Pelo Lema 4.10 , $\sum_f = \sum_g$, com a mesma relação de ordem induzida. Pelo Teorema 4.11, $i_f : I \to \sum_f$ e $i_g : I \to \sum_g$, são bijeções que preservam ordem(a mesma ordem em $\sum_f$ e $\sum_g$). Assim definimos uma aplicação $h : I \to I$, dada por $h = i_g^{-1} \circ i_f$. Por construção, h será uma bijeção, que preserva ordem, portanto contínua e com inversa contínua, ou seja, um homeomorfismo de I. Ainda, é fácil ver, que $h \circ f = g \circ h$, já que i_f e i_g são bijeções, e pela Proposição 2.7, temos $f = i_f^{-1} \circ \sigma \circ i_f$ e $g = i_g^{-1} \circ \sigma \circ i_g$. Portanto f e g são topologicamente conjugadas. □

Como fechamento da nossa exposição vamos apresentar um critério útil para determinar sob quais condições podemos garantir que uma aplicação ℓ-modal é padrão.

Lema 4.13. Seja $I = [a; b]$, com $a < b$, um intervalo e $f : I \to I$ uma aplicação contínua. Suponha que

i) $\overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(x)} = I, \forall x \in I$;

ii) $Fix(f) \cap (a; b) \neq \varnothing$;

iii) $f(\partial I) \subset \partial I$.

Então f não possui intervalos errantes, nem órbitas periódicas atratoras nem intervalos de pontos periódicos.

Demonstração: De fato, para cada intervalo $J \subset I$, com interior não vazio, podemos tomar $y_0 \in J$ e por (i) teremos $\overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(y_0)} = I$. Como $J \subset I$, tem interior não vazio, podemos obter $z \in J \setminus \{y_0\}$ e $n > 0$, tal que, $f^n(z) = y_0$, ou seja, $z \in \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(y_0)$, assim $f^n(J) \cap J \neq \varnothing$. Logo não existem intervalos errantes, pois os iterados de qualquer subintervalo de I não são mutuamente disjuntos.

Para provar a segunda afirmação, vamos supor por absurdo, que exista uma órbita periódica atratora, isto é, que exista $z \in Per(f)$ e $J \subset BA(z)$, um intervalo aberto. Por (ii) existe um ponto $x_0 \in Fix(f) \cap (a;b)$, ou seja, $f(x_0) = x_0$ e $x_0 \notin \partial I$. Note que, neste caso $z = x_0$, pois $\overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(x_0)} = I$ logo existe $y \in J$, $y \neq z$, tal que, $f^k(y) = x_0$, para algum $k \geq 0$. Portanto $f^n(y) = x_0$, para todo $n \geq k$, como $y \in J \subset BA(z)$ temos $z = x_0$. Assim $J \subset BA(x_0)$ e $f(x_0) = x_0$. Por outro lado, tomando $y \in \partial I$, ($y = a$ ou $y = b$), temos $\overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(y)} = I$, logo existe $x \in J$, tal que, $x \neq x_0$ e $f^k(x) = y$, para algum $k \geq 0$. Portanto $f^n(x) \in \partial I$, para todo $n \geq k$, já que $f(\partial I) \subset \partial I$. Como $x_0 \notin \partial I$ temos contradição, pois $x \in J \subset BA(x_0)$.

Finalmente, suponhamos que exista um intervalo $J \subset Per(f)$, com interior não vazio. Primeiramente fixamos $y_0 \in J$ e definimos o conjunto das suas pré-imagens

$$f^{-1}(y_0) = \{z \in I \mid f^n(z) = y_0, \text{ para algum } n \geq 0\}.$$

Afirmamos que $f^{-1}(y_0) \cap Per(f)$ é um conjunto finito. Para ver isto, basta notar que este conjunto não é vazio pois contém y_0, assim podemos tomar um ponto $\zeta \in f^{-1}(y_0) \cap Per(f)$, isto é, existem $q > 0$ e $n \geq 0$, tais que,

$f^q(\zeta) = \zeta$ e $f^n(\zeta) = y_0$. Tome agora qualquer $x \in f^{-1}(y_0) \cap Per(f)$ então existem $Q > 0$ e $N \geq 0$, tais que, $f^Q(x) = x$ e $f^N(x) = y_0$. Podemos escrever $N = kQ + r$ com $k \in \mathbb{N}_0$ e $0 \leq r < Q$. Assim $y_0 = f^N(x) = f^{kQ+r}(x) = f^r(x)$, ou seja, $f^r(x) = y_0$. Portanto $f^n(\zeta) = y_0 = f^r(x)$ e, sendo $0 \leq r < Q$, está bem definida a aplicação f^{Q-r}, dai $f^{Q-r}(f^n(\zeta)) = f^{Q-r}(f^r(x)) = f^Q(x) = x$, logo $x = f^{(Q-r)+n}(\zeta) \in \mathcal{O}^+(\zeta)$. Assim $f^{-1}(y_0) \cap Per(f) \subset \mathcal{O}^+(\zeta)$ e sendo $\#\mathcal{O}^+(\zeta) = q$, temos que, $f^{-1}(y_0) \cap Per(f)$ é finito. Como $J \subset Per(f)$, existe apenas um número finito de pré-imagens de y_0 em J, entretanto J tem interior não vazio, o que contradiz a densidade de $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(y_0)$ em I. $\square$

Corolário 4.14. Seja $f : I \to I$, ℓ-modal, tal que, as pré-imagens de quaisquer pontos de I sejam densas e que f possua um ponto fixo no interior de I. Então f é padrão.

Demonstração: Como f é ℓ-modal temos que ∂I é f-invariante, além disso f é contínua. Como qualquer ponto tem seu conjunto de pré-imagens denso e existe ponto fixo fora da fronteira de I, vale o Lema 4.13. Pela Definição 3.17, f é padrão. $\square$

Vamos agora considerar alguns exemplos de onde a teoria se aplica, mostrando que a classe das aplicações padrão não é vazia.

Vamos considerar a seguinte família de aplicações uni-modais do tipo *tenda* $f_c : [0;1] \longrightarrow [0;1]$, para $c \in (0;1)$ dada por

$$f_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} \cdot x & , se \quad x \in [0;c] \\ \frac{1}{c-1} \cdot (x-1) & , se \quad x \in (c;1] \end{cases}$$

Primeiramente notemos que estas aplicações são de fato uni-modais. Mais que isso para cada intervalo $J \subset [0;1]$, existe $n \geq 0$, tal que, $f_c^n(J) = [0;1]$, logo o conjunto das pré-imagens de qualquer ponto é denso em I, e sempre existe um ponto fixo em (c;1), portanto fora de ∂I. Ainda, sendo f uni-modal temos ∂I f-invariante. Assim, pelo Corolário 4.14, $\{f_c\}$ é uma família de aplicações padrão.

Um exame mais detalhado dos itinerários de pontos a direita do único ponto de retorno c mostra que o invariante kneading de qualquer aplicação desta família é sempre

$$\nu_1 = (I_2, I_2, I_1, I_1, I_1, I_1, ...).$$

Finalmente os itinerários dos pontos extremos de qualquer aplicação desta família são

$$\nu_0 = (I_1, I_1, I_1, I_1, I_1, I_1, ...)$$
$$\nu_2 = (I_2, I_1, I_1, I_1, I_1, I_1, ...)$$

Portanto, pelo Corolário 4.12, quaisquer duas aplicações desta família são topologicamente conjugadas (equivalentes).

Referências Bibliográficas

[1] Michael Brin and Garret Stuck, *"Introduction to dynamical systems"*, Cambridge University Press , 2002.

[2] John Milnor and Wiliam Thurston, *"On iterated maps of the interval"*, Dynamical Systems (College Park, MD, 1986-87). Vol. 1342 of Lecture Notes in Mathematics. pp 456-563. Springer, Berlin, 1988.

[3] Pierre Collet and Jean-Pierre Eckmann, *"Iterated maps on the interval as dinamical systems"*, Birkhäuser. Boston, 1980.

[4] R. Galeeva and S. van Strien, *"Which families of ℓ-modal maps are full?"*, Transactios of Americam Mathematical Society. Vol. 348. Number 8. pp 3215-3221, 1996.

[5] W. de Melo and S. van Strien, *"One-dimensional Dynamics"*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.