

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE FÍSICA

SOBRE O ENSINO DO CONCEITO DE EVOLUÇÃO TEMPORAL EM  
MECÂNICA QUÂNTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GLAUCO COHEN FERREIRA PANTOJA

PORTO ALEGRE  
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA  
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE FÍSICA

SOBRE O ENSINO DO CONCEITO DE EVOLUÇÃO TEMPORAL EM  
MECÂNICA QUÂNTICA

GLAUCO COHEN FERREIRA PANTOJA

Dissertação de Mestrado<sup>1</sup> apresentada no programa de pós-graduação em Ensino de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, sob orientação do Prof. Dr. Marco Antonio Moreira e co-orientação da Prof. Dra. Victoria Elnecave Herscovitz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

PORTO ALEGRE  
2011

---

<sup>1</sup>Trabalho parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES).

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Alguns problemas na pesquisa em Ensino de Física . . . . .	1
1.2	A contextualização do problema . . . . .	2
1.3	Questões de pesquisa . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Revisão da literatura</b>	<b>8</b>
2.1	Introdução . . . . .	8
2.2	Propostas didáticas . . . . .	9
2.3	Implementações de propostas didáticas . . . . .	10
2.4	Estudo de concepções . . . . .	17
2.4.1	Concepções de estudantes acerca do conteúdo de Física . . . . .	17
2.4.2	Concepções de professores relativas à relevância de conteúdos específicos de Física . . . . .	21
2.5	Análise curricular e críticas a cursos introdutórios de Mecânica Quântica	22
2.6	Análise teórica/epistemológica . . . . .	23
2.7	Considerações finais acerca da revisão de literatura . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Referencial teórico</b>	<b>28</b>
3.1	Aspectos gerais da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel . . . . .	28
3.1.1	Significado e Aprendizagem Significativa . . . . .	28
3.1.2	Representações, conceitos e proposições: um olhar epistemológico do conhecimento predicativo . . . . .	29
3.1.3	Tipo de Aprendizagem Significativa . . . . .	30
3.2	Teoria da Assimilação . . . . .	31
3.2.1	A aquisição . . . . .	32
3.2.2	A retenção . . . . .	32
3.2.3	A obliteração . . . . .	33
3.2.4	Tipos diferentes de assimilação de conhecimento . . . . .	34
3.3	Variáveis da estrutura cognitiva . . . . .	35
3.3.1	Disponibilidade . . . . .	36
3.3.2	Discriminabilidade . . . . .	36
3.3.3	Estabilidade e clareza dos subsunçores . . . . .	37
3.4	Princípios programáticos e estratégias de ensino . . . . .	37
3.4.1	Diferenciação progressiva . . . . .	37
3.4.2	Reconciliação integradora . . . . .	38
3.4.3	Consolidação e prática . . . . .	39
3.5	A Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud . . . . .	39

3.5.1	Duas formas de construção do conhecimento: conhecimento predicativo e conhecimento operatório . . . . .	40
3.5.2	A noção esquema . . . . .	41
3.5.3	A noção de Campo Conceitual . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Metodologia</b>	<b>45</b>
4.1	Metodologia de ensino . . . . .	45
4.1.1	Conteúdo abordado na proposta didática . . . . .	45
4.1.2	Uso de situações-problema como facilitadores de superordenação conceitual e o uso de princípios programáticos ausubelianos . . . . .	48
4.2	Metodologia de pesquisa . . . . .	50
4.2.1	A investigação qualitativa – aspectos gerais . . . . .	50
4.2.2	Análise do conhecimento na forma predicativa . . . . .	53
4.2.3	Análise do conhecimento na forma operatória . . . . .	54
4.2.4	Análise de conteúdo . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Instrumentos de pesquisa e dados coletados</b>	<b>61</b>
5.1	Instrumentos de pesquisa . . . . .	62
5.1.1	Pré-teste . . . . .	62
5.1.2	Tarefa 1 – Sistemas físicos . . . . .	62
5.1.3	Tarefa 2 – Variáveis dinâmicas . . . . .	62
5.1.4	Tarefa 3 – Estado de um sistema físico . . . . .	63
5.1.5	Tarefa 4 – Energia e função hamiltoniana/operador hamiltoniano . . . . .	64
5.1.6	Tarefa 5 – Evolução temporal I . . . . .	65
5.1.7	Tarefa 6 – Evolução temporal II . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Resultados</b>	<b>67</b>
6.1	Análise de conteúdo . . . . .	67
6.2	Análise do conhecimento na forma predicativa . . . . .	77
6.2.1	Turma 1 . . . . .	77
6.2.2	Turma 2 . . . . .	116
6.2.3	Turma 3 . . . . .	142
6.3	Análise do conhecimento na forma operatória . . . . .	167
6.3.1	Turma 1 . . . . .	168
6.3.2	Turma 2 . . . . .	173
6.3.3	Turma 3 . . . . .	178
<b>7</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>183</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>189</b>
	<b>Apêndice A – Texto de apoio</b>	<b>196</b>
	<b>Apêndice B – Entrevistas</b>	<b>245</b>

Dedico este trabalho a meus pais, a meu irmão e à minha namorada como forma de agradecimento ao suporte imprescindível recebido ao longo desta árdua jornada.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus. Responsável, a meu ver, pela minha criação, por me guiar ao longo do caminho do bem e dos estudos durante minha vida e por ser parte da sólida estrutura psicológica desenvolvida por mim ao longo destes dois anos de estada em Porto Alegre.

Agradeço também à minha família (a original, pois adquiri uma segunda em Porto Alegre), composta pelos meus pais (a grandíssima “dona Rina” e o heróico “seu Pantoja”) e pelo meu irmão (o estupendo Felipe), que formaram a estrutura fundamental para que eu não desistisse devido à imensa saudade sentida por Belém/PA e por eles. Nestas linhas torna-se impossível descrever a gratidão que tenho por eles, os que mais me incentivaram a continuar na carreira acadêmica ao me considerar o “futuro doutor” da família.

Uma pessoa muito especial em minha vida a quem devo imensa gratidão é a minha namorada Jennefer Bentes, que muito me incentivou a vir estudar em Porto Alegre, a despeito do potencial de dificuldades a serem enfrentadas pela grande distância física que nos separava. Sua importância tanto em minha vida acadêmica como pessoal é simplesmente inefável.

Agradeço também ao grande professor Marco Antonio Moreira, meu mentor e ídolo acadêmico, por me ter guiado nesta jornada. Sou grato tanto pelo acolhimento, pelos conselhos acadêmicos e pela confiança em mim depositada, além de ter sido uma pessoa que muito me motivou durante os períodos de dificuldade durante a construção do caminho da minha pesquisa.

Não posso me esquecer da grande maestra da Mecânica Quântica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a professora Victoria Herscovitz que muito me ensinou durante este período em que trabalhei com ela. Talvez uma das lições mais importantes da minha vida, tenha aprendido com ela, a saber, que temos sempre que estar numa “zona de desconforto”, ou seja, sempre buscando a melhor forma possível para aquilo que fazemos. Sou extremamente grato por ela me ter aberto os olhos para isso.

Gostaria também de agradecer a cada um dos amigos que fiz em Porto Alegre.

Agradeço também à Vera e à Adri que muito “quebraram o galho” em relação às coisas que tinha a entregar ao professor Moreira, bem como à Cida, com suas execuções extremamente eficazes na secretaria do PPGENFIS/UFRGS.

Gostaria de agradecer aos sujeitos da pesquisa que se mostraram extremamente abertos à nova intervenção didática, bem como ao professor César Zen Vasconcelos por me ter concedido espaço em suas turmas para a realização da intervenção.

## RESUMO

O Ensino de Mecânica Quântica Não Relativística é uma linha de pesquisa que tem adquirido relevância na área de Ensino de Física. A investigação de conceitos estruturantes facilitadores da aprendizagem deste ramo do conhecimento é de suma importância, sobretudo dadas as dificuldades de aprendizagem observadas, maiores nesta área do que em muitas da Física Clássica. Foi delineada uma proposta didática enquadrada nos moldes das teorias da Aprendizagem Significativa de D. Ausubel e dos Campos Conceituais de G. Vergnaud, visando facilitar a aprendizagem significativa dos conceitos de sistema físico, variáveis dinâmicas, estado de um sistema físico e evolução temporal. Tais conceitos foram selecionados por sua posição basilar na Física e pelas diferenciações, algumas sutis e outras não, na comparação entre a Física Clássica e a Física Quântica Não Relativística. Foram estudados os padrões de assimilação na forma predicativa do conhecimento, bem como o uso de invariantes operatórios no domínio de situações-problema em Instrução com carga horária de 12 horas-aula presenciais (além de períodos extra-classe para resolução de tarefas pelos participantes). A Instrução constituiu-se de 6 aulas do tipo expositivo-dialogado no qual se incitava a negociação de significados entre professor e aprendizes tanto pelo uso de situações-problema como por perguntas em que era necessária a manipulação conceitual. Os estudantes apresentaram, em sua maioria, conceitos vagos no pré-teste, que deram indícios de ser modificados ao longo da Instrução. Há evidências de que alguns destes conceitos mudaram para formas bem claras, outros foram parcialmente melhorados e ainda uns poucos, por mau entendimento ou falta de reforço instrucional, pareceram transformar-se em obstáculos epistemológicos. Há indicações de que os conceitos de sistema físico e de variáveis dinâmicas foram aprendidos, no que tange a seus atributos essenciais mais gerais; enquanto o primeiro parece ser aceito nas situações clássicas e quânticas, o segundo apresenta diferenciações que deram evidências de ser bem absorvidas por grande parte dos alunos. O conceito de estado de sistema físico no âmbito da Mecânica Quântica, por incluir novas facetas, apresentou maior dificuldade de aquisição e, além disto, parece ter sido subsumido como uma modificação do conceito de variáveis dinâmicas. Há indicativos de assimilação do conceito de superposição de estados sob o de probabilidade ao invés do de amplitude de probabilidade, propiciando entendimento por muitos dos alunos, de princípios quânticos como relacionados a uma informação incompleta ou a uma impossibilidade de determinação dos estados de sistemas quânticos. A despeito da confusão associada a este aspecto específico da noção de superposição de estados, tal conceito pareceu ter sido dominado pela maioria dos estudantes na forma operatória. Menciona-se como ponto positivo que o conceito de evolução temporal foi modificado ao longo da instrução, apesar de revelar-se associado na maioria das vezes ao conceito de sistema físico, fato não esperado inicialmente. Além disto, o conceito de evolução temporal parece ter sido associado ao de causalidade, que dá indícios de ter assumido uma forma estável. Alguns dos estudantes, porém, mostraram evidência de relação entre o conceito de evolução temporal em Mecânica Quântica e a idéia incorreta de falta de preditividade de estados quânticos, o que os levou a crer que a determinação de um estado quântico só é possível se este for um auto-estado do operador associado à variável dinâmica que está sendo medida. A análise das respostas aos problemas e, em partes, à entrevista (realizada com uma das turmas) evidenciou o uso de invariantes operatórios, isto é, posse por parte dos estudantes de proposições relativamente fixas consideradas como verdadeiras acerca

do real.

## ABSTRACT

Non Relativistic Quantum Mechanics Teaching constitutes a research topic that has acquired relevance in Physics Teaching. Inquiry on structural concepts that facilitate meaningful learning in this area of knowledge is quite important, taking into account the learning difficulties that are greater in this field than in the ones associated with Classical Physics. We designed a didactic approach based on Ausubel's Meaningful Learning Theory and Vergnaud's Conceptual Fields Theory in order to facilitate the Meaningful Learning of the concepts of physical system, dynamical variables, state of a physical system and time evolution. These concepts were selected by their structural position in Physics and by the differentiations, some subtles and others not in the comparison between Classical Physics and Non-Relativistic Quantum Mechanics. The assimilation patterns in the predicative form of knowledge were studied, as well as the use of operatory invariants (concepts-in-action and theorems-in-action) in the mastering of situations proposed in an instruction with average duration of 12 hours inside class (besides the period of problem solving consumed by the students that occurred outside class). The instruction had six expositive-dialogued lectures in which meaning negotiation between teacher and learners was stimulated by problem-situations or by conceptual manipulation. Most of the students shown vague concepts in the pre-test that seemed to be changed during the Instruction. There are evidences that some of these concepts changed into quite accurately forms, others partially modified and some few concepts, because of misunderstanding or lack of instructional reinforcement, seemed to change into epistemological obstacles. There are some indications that the concepts of physical system and dynamical variables have been mastered quite well, taking into account the more general essential attributes of these concepts; while the first seemed to be accepted in Classical and Quantum situations, the second shows some differentiations that most of times gave evidence of being well assimilated by the very great part of the students. The concept of quantum state, for including new features, was acquired with a higher level of difficulty and, besides that, it seemed to be subsumed as a differentiation of the one of dynamical variable. There are some evidences indicating the assimilation of the concept of state superposition under the one of probabilities instead of the one of probability amplitude, what led much students to understand quantum principles as related to an incomplete information or to impossibility of determination of quantum states. Despite this confusion associated to this specific feature of the concept of state superposition, it seemed to be mastered by most of the students in the operatory form. We mention as a positive aspect the modification of the concept of time evolution during the instruction, in spite of showing a strong association to the concept of physical system, which turned out to be an element, or variable, we had not anticipated at the beginning of this research. Moreover the concept of time evolution seemed to be attached to the one of causality which seemed to assume a stable form, however, some of the students shown some evidence of relation between this concept and the wrong idea of lack of predictability of quantum states. The last finding led them to believe that determination of the quantum state is only possible if it's an eigenstate of the operator attached to the dynamical variable that is being measured. The analysis of the answers to the problems and, in some sense, to the interview (made with one of the groups) shown evidence of using of operatory invariants, this means students' beliefs in relatively steady propositions considered true about reality.

# Lista de Figuras

6.1	Mapa conceitual sobre o conceito de sistema físico e variáveis dinâmicas elaborado por Bartolomeu . . . . .	79
6.2	Primeiro mapa incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Bartolomeu . . . . .	83
6.3	Segundo mapa incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Bartolomeu (a parte marcada corresponde ao conteúdo acrescentado no mapa anterior) . . . . .	85
6.4	Primeiros mapas conceituais sobre os conceitos de sistemas físicos e variáveis dinâmicas apresentados por Moisés (esquerda) e por Adriele (direita) . . . . .	86
6.5	Segundo mapa conceitual sobre sistemas físicos e variáveis dinâmicas apresentado por Adriele . . . . .	87
6.6	Terceiro mapa conceitual apresentado por Adriele (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	89
6.7	Primeiro mapa incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Adriele . . . . .	91
6.8	Segundo mapa conceitual sobre os conceitos de sistema físico e variáveis dinâmicas apresentado por Moisés . . . . .	94
6.9	Terceiro mapa conceitual apresentado por Moisés (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	96
6.10	Terceiro mapa conceitual apresentado por Moisés (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	98
6.11	Primeiro mapa conceitual sobre sistemas físicos e variáveis dinâmicas apresentado por Ana . . . . .	100
6.12	Mapa conceitual (um fluxograma, na verdade) sobre sistemas físicos e variáveis dinâmicas apresentado por Ana . . . . .	101
6.13	Terceiro mapa conceitual apresentado por Ana (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	103
6.14	Primeiro mapa incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Ana . . . . .	105
6.15	Segundo mapa incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Ana . . . . .	106
6.16	Primeiro mapa conceitual sobre sistemas físicos e variáveis dinâmicas elaborado por Betânia . . . . .	107
6.17	Segundo mapa conceitual apresentado por Betânia (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	109
6.18	Mapas conceituais sobre o conceito de sistema físico apresentados por Samuel (esquerda) e Silas (direita) . . . . .	117

6.19	Mapa conceitual apresentado por Samuel (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	119
6.20	Segundo mapa conceitual sobre os conceitos de sistema físico e de variáveis dinâmicas apresentado por Silas . . . . .	121
6.21	Mapas conceituais apresentados por Jacó (esquerda), Silas (acima) e Sara (abaixo) – (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	124
6.22	Mapas conceituais sobre o conceito de sistema físico apresentados por Dalila (esquerda), Jacó (centro) e Sara (direita) . . . . .	126
6.23	Mapa conceitual apresentado por Dalila (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	127
6.24	Mapa conceitual sobre o conceito de sistema físico apresentado por Josué . . . . .	130
6.25	Mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Jacó . . . . .	137
6.26	Mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Sara . . . . .	142
6.27	Mapa conceitual sobre sistemas físicos apresentado por André . . . .	143
6.28	Segundo mapa conceitual sobre os conceitos de sistema físico e de variáveis dinâmicas apresentado por Maria . . . . .	144
6.29	Mapa conceitual apresentado por André (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	145
6.30	Mapa conceitual sobre sistemas físicos apresentado por Úrsula . . . .	147
6.31	Mapa conceitual apresentado por Úrsula (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	148
6.32	Primeiro mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Úrsula . . . . .	149
6.33	Segundo mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Úrsula. . . . .	150
6.34	Mapa conceitual sobre sistemas físicos apresentado por Maria . . . .	152
6.35	Segundo mapa conceitual sobre os conceitos de sistema físico e de variáveis dinâmicas apresentado por Maria . . . . .	153
6.36	Mapa conceitual apresentado por Maria (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	154
6.37	Primeiro mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Maria . . . . .	156
6.38	Segundo mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Maria . . . . .	157
6.39	Mapa conceitual sobre sistemas físicos apresentado por Eva . . . . .	158
6.40	Mapa conceitual apresentado por Eva (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	160
6.41	Mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Eva . . . . .	162
6.42	Mapa conceitual sobre sistemas físicos apresentado por Judith . . . .	163
6.43	Mapa conceitual apresentado por Judith (livre-arbítrio na escolha de conceitos) . . . . .	165
6.44	Problema 3.6.a . . . . .	172
6.45	Problema 3.6.b . . . . .	172

7.1	Terra e Sol "vistos" de um referencial que está sobre a Lua. . . . .	199
7.2	Desenho esquemático do experimento de Stern-Gerlach. . . . .	206
7.3	Experimento de Stern-Gerlach com dois eletroímãs cujo campo não homogêneo aponta na direção $z$ . . . . .	207
7.4	Experimento de Stern-Gerlach com dois eletroímãs cujo campo não homogêneo aponta na direção $z$ . . . . .	208
7.5	Menina em um balanço . . . . .	214
7.6	Gráfico de potencial do Oscilador Harmônico Duplo. Retirado de Merzbacher (1970, p.67) . . . . .	224
7.7	$\psi_0(x)$ . . . . .	225
7.8	$\psi_1(x)$ . . . . .	225
7.9	Configurações de equilíbrio da molécula de amônia – nitrogênio à esquerda do plano formado pelos átomos de hidrogênio e à direita deste plano . . . . .	226
7.10	Sistema massa-mola . . . . .	238
7.11	Energia potencial do sistema massa-mola . . . . .	239

# Lista de Tabelas

2.1	Número de publicações consultadas por ano . . . . .	24
2.2	Número de artigos publicados por ano em cada categoria . . . . .	25
6.1	Palavras associadas ao conceito de sistema físico . . . . .	68
6.2	Exemplos de variáveis dinâmicas apresentados pelos alunos . . . . .	68
6.3	Concepções sobre Variáveis Dinâmicas compatíveis . . . . .	69
6.4	Concepções sobre Variáveis Dinâmicas incompatíveis . . . . .	69
6.5	Relação do princípio da incerteza com variáveis dinâmicas incompatíveis	69
6.6	Concepções acerca do conceito de estado de um sistema físico . . . . .	69
6.7	Concepções sobre o conceito de estado quântico . . . . .	70
6.8	Interpretação da equação de autovalores . . . . .	70
6.9	Determinação de valores de Variáveis Dinâmicas ( $s_x$ ) no experimento de Stern-Gerlach . . . . .	71
6.10	Determinação de valores de Variáveis Dinâmicas ( $s_z$ ) no experimento de Stern-Gerlach . . . . .	71
6.11	Diferenças entre operador e função hamiltoniana levantadas pelos alunos	72
6.12	Significado dos termos da hamiltoniana para o sistema de dois corpos	72
6.13	Interação do spin com o campo magnético não homogêneo (sobre a interação ocorrente) . . . . .	73
6.14	Interação do spin com o campo magnético não homogêneo (número de valores de energia possíveis) . . . . .	73
6.15	Relações entre os conceitos de variáveis dinâmicas incompatíveis e superposição de estados levantadas pelos alunos . . . . .	74
6.16	Sobre a evolução temporal de estados em MQ ser causal . . . . .	74
6.17	Evolução temporal do estado de um sistema de spin 1/2 interagindo com um campo magnético não homogêneo na direção $z$ (item a) . . .	75
6.18	Evolução temporal do estado de um sistema de spin 1/2 interagindo com um campo magnético não homogêneo na direção $z$ (item b) . . .	75
6.19	Evolução temporal do estado de um sistema de spin 1/2 interagindo com um campo magnético não homogêneo na direção $z$ (item c) . . .	75
6.20	Evolução temporal do estado de um sistema de spin 1/2 interagindo com um campo magnético não homogêneo na direção $z$ (item d) . . .	75
6.21	O papel da equação de Schrödinger em MQ segundo os alunos . . . . .	76
6.22	Sobre a determinação de posição e momentum para um objeto quântico livre de interações . . . . .	76
6.23	Sobre a dinâmica dos estados de momentum do objeto quântico livre de interações . . . . .	76
6.24	Sobre as diferenças entre as equações de Heisenberg e Schrödinger . . .	77

"Respect, walk" (Pantera<sup>2</sup> - Walk)

---

<sup>2</sup>Banda estadounidense de Rock pesado

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Alguns problemas na pesquisa em Ensino de Física

A pesquisa em Ensino de Física enfrenta alguns problemas a serem resolvidos. Autores como Olsen (2002, p. 565) afirmam que o currículo de Física do Ensino Médio encontra-se bastante desatualizado. O pesquisador ressalta que embora recentemente se tenha completado um século da introdução da constante de Planck na Física, ente físico que apresenta radicais novidades na forma de pensar esta área do conhecimento (Hadzidaki, 2000, p.259), o currículo escolar ainda é fortemente influenciado pelo que se denomina Física Clássica Não-Relativística (MC, Teoria Eletromagnética Clássica e Termodinâmica Clássica).

O primeiro fator aqui referido como problema no Ensino de Ciências/Física pode explicar o surgimento de outro que compromete a formação adequada de um estudante, seja ele do Ensino Médio (EM) ou Superior (ES), no conteúdo de Mecânica Quântica (MQ), a saber, a falta de uma estrutura conceitual lógica para a aprendizagem (Kalkanis et al., 2000, p.258; Çaliskan et al., 2009, p. 202; Rezende Júnior e Souza Cruz, 2009, p. 307). Alguns autores como Rezende Júnior e Souza Cruz (ibid) classificam um conjunto de saberes como formativo quando é constituído de uma base devidamente estruturada de conceitos. Outros pesquisadores como Kalkanis et al. (2000, p.58) ressaltam que se deve fornecer aos estudantes uma visão qualitativa de conceitos da MQ, desde que esta seja mostrada como essencialmente distinta da Física Clássica (FC).

Dois problemas se desdobram dos dois acima arrolados. O primeiro diz respeito ao fato de que algumas pesquisas mostram certo grau de deficiência em cursos de licenciatura (Kalkanis et al., ibid; Rezende Junior e Souza Cruz, ibid; Lobato e Greca, 2005, p. 129). O segundo deles relaciona-se ao fato de que decisões importantes no processo educativo devem ser tomadas pelos mesmos professores formados de maneira inadequada, segundo Rezende Júnior e Souza Cruz (ibid).

Lobato e Greca (ibid) denunciam um grave problema na formação de professores, a saber, o uso de concepções alternativas. Kalkanis et al. (ibid) apontam uma questão de cunho mais grave (que a ressaltada ainda por Lobato e Greca), a de que muitos professores permanecem com concepções alternativas desenvolvidas ainda no EM. Longuini e Nardi (Longuini e Nardi, 2003, p. 4 apud Rezende Junior e Souza Cruz, 2009, p. 317) afirmam no mesmo sentido que

*“... a maior parte dos licenciandos analisados, apesar de cursar o último ano de licenciatura em Física, e portanto, prestes a estar ‘aptos’ a exercer a profissão, possuía um conhecimento do conteúdo específico próximo ao de alunos de nível médio”.*

Julgamos ser extremamente importante no processo de ensino o conteúdo específico para o domínio de algumas competências e, desta forma, os professores, agentes que tomarão decisões neste sentido, serão influenciados, certamente, pelas suas concepções alternativas, sendo isto prejudicial aos alunos. Vê-se, então, que os problemas apontados propagam-se, prejudicando de forma direta os alunos do Ensino Médio, por exemplo.

Outro problema que, se sanado, poderia influenciar na resolução dos dois citados é o distanciamento dos professores do meio acadêmico (Rezende Junior e Souza Cruz, 2009, p. 319). Este distanciamento torna, de certo modo, os professores do EM menos esclarecidos acerca dos problemas de aprendizagem específicos enfrentados pelos estudantes, bem como dos resultados de propostas didáticas eficazes possíveis de serem implementadas (com o uso das devidas adaptações) aos seus alunos. Em Física Moderna (que envolve fundamentos de MQ) o problema é agravado, pois muitos dos professores alegam não se sentirem preparados e não terem carga horária suficiente para a discussão sobre o conteúdo (Oliveira et al., 2007, p.451).

A pesquisa em concepções de estudantes em MQ até o final da década de 1990 era bastante escassa, segundo Greca e Moreira (2000, p. 30). É preciso, portanto, realizar-se mais estudos neste sentido para que nós, como comunidade acadêmica, saibamos que conhecimentos prévios carregam os estudantes e assimilam novos conteúdos neste ramo do conhecimento. Segundo Çaliskan et al. (2009, p. 203) estas pesquisas, quando comparadas às realizadas em concepções sobre FC, são pouco numerosas.

No período supracitado, a quantidade de trabalhos sobre propostas didáticas era muito maior que a de pesquisas em concepções, segundo Greca e Moreira (2000, p. 30). Este dado, à primeira vista nos dá a falsa ilusão de que já se estabeleceram as bases do ensino de MQ, porém como advertem os autores na revisão da literatura, grande parte das propostas até então analisadas não havia sido efetivamente testadas (ibid).

Os problemas levantados integram parte de uma conjuntura muito mais ampla, relacionada à necessidade de o Ensino de Ciências estar em um patamar além da pura formação acadêmica (Hadzidaki, 2008, p.49), visto que os futuros cientistas serão muito menos numerosos se comparados às pessoas que não seguirão a carreira acadêmica em Física, por exemplo. Hadzidaki (ibid) menciona que aspectos como a natureza da Ciência, além de facilitarem a aprendizagem, podem ser elementos estruturadores do conteúdo de Física tanto para uma educação para a ciência quanto para uma educação não-científica. A autora ressalta ainda que a Física relaciona-se à cultura de forma mais ampla, o que aumenta a importância da necessidade de aprendizagem dessa disciplina. Vê-se, portanto, que os problemas levantados têm implicações muito maiores para os educandos em Ciências se não forem sanados.

## 1.2 A contextualização do problema

O ensino de uma área específica do conhecimento desde uma perspectiva construtivista deve levar em conta o conhecimento prévio relevante na estrutura cognitiva

dos aprendizes ao longo do processo de aprendizagem (Mortimer, 1996, p. 22). A detecção de concepções constitui, então, uma peça fundamental no sentido de reconhecer a partir de que estruturas conceituais os estudantes progridem no domínio do conhecimento, tanto na forma predicativa, quanto na forma operatória do conhecimento<sup>1</sup>.

As concepções alternativas, no entanto, formam um caso especial de concepções, pois são rígidas estruturas conceituais (na forma de modelos e teoremas) que servem como obstáculos epistemológicos no domínio do conhecimento científico. Devemos conhecê-las para que possamos, embasados em teoria, propor estratégias de ensino para tentar tornar os estudantes conscientes de que suas concepções diferem do conhecimento científico em um contexto específico. Deve-se, portanto, introduzir a Ciência como uma nova forma de enxergar o mundo, integrada a uma cultura mais ampla (Matthews, 2001, p. 361), para que os estudantes percebam a importância da aquisição deste saber.

Para Olsen (2002, p.565), as concepções alternativas são frutos de pensamento do senso comum, mas podem também ser influenciadas pela interação do conhecimento prévio com novas idéias expressas na forma predicativa durante o processo de ensino (op. cit., p. 566). Para o autor, não se pode classificar uma concepção errônea em MQ como alternativa, justamente pelo fato de que a MQ não possui relação direta com os fenômenos observados no mundo clássico, logo ele adota o nome concepção errônea (misconception) para os modelos intuitivos dos alunos desenvolvidos na aprendizagem de MQ.

Para Kalkanis et al. (2000, p. 259), as concepções alternativas são entendidas como obstáculos epistemológicos no processo de aprendizagem, sendo originárias da superposição de modelos da FC e da FQ (FQ), por parte dos alunos, o que os faz gerar modelos semiclássicos, muitas vezes estáveis, em suas estruturas cognitivas. Para estes autores, uma das causas deste acontecimento é a não explicitação das radicais diferenças existentes entre a FQ e a FC no processo de ensino.

Para Tsarpalis e Papaphotis (2009, p. 897), os estudantes pensam não só de forma semiclássica, porém o fazem segundo alguns modelos da Antiga Teoria Quântica (ATQ), que, segundo os autores, não são misconceptions, pois são modelos iniciais propostos pelos cientistas. Os pesquisadores advertem, contudo, que estes modelos podem funcionar como fortes obstáculos epistemológicos para a aprendizagem de conceitos da Teoria Quântica Moderna (TQM), formulada por Heisenberg, Schrödinger e Dirac. Os pesquisadores ressaltam ainda, a maior simplicidade dos modelos presentes na ATQ, tais como os do efeito fotoelétrico, do efeito Compton, etc, que são modelos clássicos que adotam a quantização de energia como atributo quântico.

Vários autores enfatizam o aspecto da formulação de modelos híbridos em MQ (Greca e Freire Jr., 2003, p. 552, Ireson, 2000; Tsarpalis e Papaphotis, 2009), compatível com a idéia de Kalkanis et al., da construção de modelos mentais semiclássicos para o entendimento de MQ.

As dificuldades de aprendizagem em MQ para Çaliskan et al. (2009), por exemplo, se originam do fato de o determinismo dos estados dos sistemas clássicos ser

---

<sup>1</sup> "Permiti-me estabelecer de imediato, a distinção entre a forma operatória do conhecimento, que permite atuar em situação (e ter êxito eventualmente), e a forma predicativa do conhecimento, que enuncia os objetos de pensamento, suas propriedades, suas relações e transformações." (Vergnaud, 2007, p.286)

facilmente assimilável pelo seu nível de plausibilidade, fato coerente com os achados de Tsarpalis e Papaphotis (2009, p. 897) e Carvalho Neto et al. (2009, p. 65) sobre a dificuldade dos alunos com o entendimento do conceito de probabilidade em MQ. Vale fazermos, no entanto, algumas reflexões: até que ponto superestimamos os estudantes, julgando que a FC é clara para eles, se o maior número de trabalhos em concepções alternativas ocorre em MC (MC)? Será o determinismo um conceito tão explícito, ou ele surge somente na forma operatória para os estudantes? Questões como essas devem também ser respondidas.

Outro problema, de cunho mais pragmático, que deve ser ressaltado é o uso excessivo do formalismo matemático sobre uma postura instrumentalista (Popper, 1972, p.128). Greca e Herscovitz (2005, p. 75) afirmam ser a abordagem puramente formal ineficaz para a mudança de concepções dos alunos. Concordamos com as autoras, complementando com a ideia de que o formalismo matemático deve ser introduzido como representação simbólica, de forma potencialmente significativa, ao contrário de ser apresentado de forma arbitrária (e na maioria das vezes literal), logo desconexa do conteúdo físico. Olsen (2009, p. 571) afirma, no mesmo sentido, que muitas vezes os estudantes calculam o comprimento de onda de um elétron sem ao menos saber o que estão fazendo, ou seja, apresenta um caso particular de aprendizagem mecânica.

Vários pesquisadores ressaltam ainda a importância do ensino de MQ pela diferenciação radical desta em relação à MC como, por exemplo, Ireson (2000, p. 20) e Kalkanis et al. (2000, p. 259). Para uns, as razões são de cunho epistemológico e para outros, mais pragmáticas, porém todas as justificativas convergem no sentido de que MQ e MC possuem linguagens diferentes, logo diferentes visões de mundo.

Nosso ponto de vista não se coloca de forma tão radical. Reconhecemos que haja muitas diferenças entre a FQ e a FC e que essas diferenças devam ser devidamente explicitadas. Percebemos, no entanto, que existem conceitos similares nas duas instâncias, possuidores de alguns atributos criteriosais<sup>2</sup> semelhantes e de outros bastante diferentes. Nossa proposta vem no sentido de reconciliar semelhanças e destacar diferenças entre estes dois domínios da Física, a FC e a FQ.

Outro ponto que deve ser salientado é o baixo índice de pesquisa sobre a aprendizagem de alguns conceitos que julgamos fundamentais para o domínio do campo conceitual da MQ. São poucas as referências na literatura que tratam de concepções acerca dos conceitos de estado de um sistema físico (Singh, 2008; Greca e Moreira, 2001), superposição de estados (Greca e Herscovitz, 2005) e, em especial, o de evolução temporal em MQ (Singh, 2008). A maioria das pesquisas em ensino-aprendizagem deste campo específico da Física, no entanto, concentra-se em temas que cobrem a ATQ, como o efeito fotoelétrico, por exemplo. Cremos que os conceitos mencionados são estruturadores quer na Física como um todo (à exceção da superposição de estados) quer na MQ especificamente e, por isso, julgamos serem gerais, logo, aqueles que devem ser primeiramente ensinados (Ausubel, 1980, p. 159). Cremos, todavia, que existem outros conceitos possíveis de serem usados na subsunção dos conceitos supracitados, a saber, os conceitos de sistema físico e de variável dinâmica (observáveis), componentes do grupo de conceitos estruturadores da proposta.

Nossa premissa está associada ao fato de que nem a abordagem histórica nem a abordagem puramente formal têm apresentado sucesso (Greca e Herscovitz, 2005,

---

<sup>2</sup>Usamos o termo no sentido empregado por Ausubel (2000).

p.62) na facilitação do processo de aprendizagem significativa de conceitos fundamentais em MQ. A primeira<sup>3</sup> delas, a nosso ver, apresenta fatos desconexos de uma estrutura conceitual coerente, a menos do conceito de quantização da energia. A segunda, puramente formal, é apresentada de maneira que os estudantes em formação inicial acabam relacionando de modo arbitrário e, na maioria das vezes, literal, a representação simbólica à estrutura cognitiva (Ausubel, 1980, p.37).

Curiosamente, o conceito de evolução temporal, foco principal da pesquisa presente, é um conceito integrador no currículo francês, embora pesquisas sobre este tema sejam escassas. Segundo Lobato e Greca (2005, p. 122-123).

*”O programa de Física do último ano do ES francês (Terminal S), baseia-se na compreensão da evolução dos sistemas, em termos quantitativos, estudada tanto teórica como experimentalmente. Segundo as orientações deste currículo, do ponto de vista experimental, observar uma evolução é medir taxas de variação de certas grandezas físicas. Quer se trate da propagação de uma perturbação num meio, do estabelecimento de uma corrente num circuito elétrico, do movimento de um satélite ou da desintegração de um núcleo radioativo, são sempre as taxas de variação associadas que são relevantes em termos de estudo. Do ponto de vista teórico, a taxa de variação instantânea representa-se por uma derivada e, estudando os parâmetros que influenciam a derivada de uma grandeza física, estabelece-se uma equação diferencial cuja resolução permite antecipar a evolução real do sistema. A matemática é, portanto, encarada como parte constituinte da Física e não como mera ferramenta de trabalho. A variedade dos temas abordados durante o ano tem como fio condutor a evolução temporal dos sistemas físicos, o que permite enquadrar os diferentes assuntos abordados e fixar os respectivos limites. A execução de um método numérico interativo permite ancorar as idéias de determinismo e causalidade. A TQ aparece no segmento do estudo dos sistemas mecânicos. Algumas constatações simples (a identidade de sistemas nucleares ou atômicos comparada com a variedade de sistemas planetários, o tamanho dos átomos) sugerem que a dinâmica que rege os sistemas nucleares, atômicos e moleculares deve ser diferente da dinâmica clássica. Segundo expresso no currículo, não se pretende avançar na explicação das questões levantadas que, provisoriamente, ficarão sem resposta, mas criar uma abertura para o mundo quântico introduzido pela constante de Planck”.*

### 1.3 Questões de pesquisa

Depois da discussão introdutória que fundamenta o desenvolvimento do trabalho, exporemos agora as questões de pesquisa norteadoras do processo de investigação. Sob a óptica de Gérard Vergnaud, o domínio de um dado campo conceitual<sup>4</sup> ocorre não apenas de forma que o conhecimento obtido neste processo seja expresso em linguagem verbal, através da explicitação das operações de pensamento realizadas,

---

<sup>3</sup>Não estamos falando do uso de História da Física/Ciência, mas da abordagem que trata dos fatos na ordem cronológica em que aconteceram, ou seja, desde a hipótese de Planck até a Mecânica Ondulatória de Schrödinger, passando pelo efeito fotoelétrico, átomo de Bohr, efeito Compton, etc. A diferenciação aqui exposta é importante, pois cremos que o uso da História da Ciência pode inclusive ajudar os estudantes na compreensão de vários aspectos epistemológicos, como a própria Natureza da Ciência, por exemplo (Hadzidaki, 2008, p. 50).

<sup>4</sup>Segundo proposto por Vergnaud (1990, p.23).

embora também dependa destas etapas. A distinção, recorrente no trabalho, entre as formas predicativa (declarativa) e operatória (procedimental) do conhecimento (Vergnaud, 1998, p.173) justifica a proposição da identificação de subsunçores e invariantes operatórios dos estudantes no domínio do conhecimento, bem como o estudo da modificação dos últimos e a assimilação de conceitos na forma predicativa. As duas primeiras questões de pesquisa são, então, apresentadas.

- Quais os invariantes operatórios usados na progressão de um sujeito no campo conceitual da MQ e como eles influenciam no domínio do conceito de evolução temporal na forma operatória do conhecimento?
- Quais os subsunçores usados para a assimilação dos conceitos anteriormente arrolados, em MQ e como eles influenciam na assimilação do conceito de evolução temporal na forma predicativa do conhecimento?

É importante para o reconhecimento destes invariantes operatórios e subsunçores, a inferência de quais processos cognitivos foram usados pelos estudantes na progressão deste campo conceitual para melhor investigarmos a aprendizagem destes sujeitos. Propõe-se também outra questão.

- Que padrões de assimilação são construídos (mais próximos do pólo significativo ou do mecânico) no processo de aquisição de conhecimento em MQ (na forma predicativa) e como eles influenciam nas variáveis da estrutura cognitiva e no domínio do conceito de *evolução temporal*?

Deve-se ressaltar, também, que estes processos de aprendizagem não podem figurar sem que haja um processo de ensino, embora não ocorra necessariamente relação de causa e efeito entre eles. Propomos, portanto, uma abordagem didática embasada nos referenciais de D.P. Ausubel (2002) e G. Vergnaud (1990) para ensinar conceitos como os de sistema físico (objetos e interações), variáveis dinâmicas (grandezas físicas, medição, variáveis dinâmicas compatíveis e variáveis dinâmicas incompatíveis), estado de um sistema físico (auto-estados, superposição linear e probabilidade) e, em especial, de evolução temporal (evolução do estado, causalidade, evolução de variáveis dinâmicas).

Nossa escolha recaiu nestes conceitos, pois julgamos serem integradores em Física, além de poderem ser especificados segundo as peculiaridades da MQ. São, ademais, conceitos que subsumem o conceito de evolução temporal adotado por nós como conceito principal para a realização do estudo. Cabe, portanto estabelecer a pergunta:

- Uma abordagem didática embasada nos referenciais escolhidos facilita a aprendizagem significativa de conceitos de MQ que subsumem o conceito de evolução temporal?

Apresentamos na sequência (capítulo 2) uma revisão da literatura sobre a pesquisa em Ensino de MQ, no intuito de situar a relevância do trabalho no contexto de pesquisa. Após a qual, incluímos (capítulo 3) uma explanação sobre o referencial teórico usado, a saber, a teoria de aprendizagem de D.P. Ausubel e a teoria dos Campos Conceituais de G. Vergnaud. Nos capítulos seguintes é apresentado o conteúdo específico do trabalho realizado, dedicando-se o capítulo 4 às metodologias

de ensino e pesquisa, o capítulo 5 à apresentação dos instrumentos de pesquisa e dos dados coletados e o capítulo 6 aos resultados obtidos. Conclusões encerram a apresentação do trabalho, sendo incluídos também, além das referências consultadas, o Texto de Apoio elaborado para as aulas dadas e parte do material apresentado pelos alunos quer como respostas escritas a tarefas propostas, quer como manifestações orais durante entrevistas ou ainda como expresso em mapas conceituais por ele confeccionados.

# Capítulo 2

## Revisão da literatura

### 2.1 Introdução

A MQ é parte da Física que provocou uma revolução científica na área de estudo referenciada durante o século passado, porém ainda hoje há dificuldade de inseri-la nos currículos de Ensino Médio. Têm-se verificado, ademais, entraves na facilitação da apropriação deste conteúdo por parte dos alunos. Por outro lado, ao mesmo tempo em que há obstáculos cognitivos, sociais e mesmo institucionais para o seu ensino, a MQ provê um amplo campo de pesquisa no que diz respeito aos processos de ensino-aprendizagem e avaliação que aos poucos vem sendo desbravados.

No intuito de complementar as revisões de literatura de Greca e Moreira (2001) e Ostermann e Moreira (2000), apresentando o panorama da pesquisa em Ensino de MQ no período de 1999 a 2009, realizamos uma revisão dos trabalhos publicados em revistas de Ensino de Física/ Ciências durante o período de 1999 a 2009, cujas classificações segundo o qualis da CAPES, no ano de 2009, possuíam índices A1, A2, B1 e B2. Consultamos os seguintes periódicos: *Science Education*, *Science and Education*, *Latin American Journal of Physics Education*, *American Journal of Physics*, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, *Cognition and Instruction*, *Computers and Education*, *Enseñanza de las Ciencias*, *International Journal of Science Education*, *Investigações em Ensino de Ciências*, *Journal of Computer Assisted Learning*, *Journal of Research on Science Education*, *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*, *Research in Science Education*, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, *Revista de Enseñanza de la Física*, *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, *Research in Science and Technological Education*, *Ciência e Educação e Physics Education*. Foram consultadas todas as edições do período mencionado e a escolha dos artigos foi feita mediante a leitura dos resumos dos artigos.

Baseados em Greca e Moreira (2001) e Ostermann e Moreira (2000) elaboramos cinco grandes grupos para classificação dos artigos, a saber, *propostas didáticas*, *implementações de propostas didáticas*, *análise curricular e crítica a cursos de MQ*, *estudos de concepções e análise teórica/epistemológica*. Na sequência, apresentamos uma breve descrição por categorias dos artigos consultados.

É necessário esclarecer, todavia, que há trabalhos de teses e dissertações associados ao Ensino de MQ. A literatura não foi tão explorada por nós quanto a presente nos periódicos, porém, apresentamos uma síntese destes trabalhos antes de iniciar a descrição da literatura presente nos periódicos investigados.

Soares (2008) construiu uma unidade didática para o ensino de conceitos básicos de MQ a partir do uso de modelagem, simulações computacionais e material de instrução escrito pela autora. Um dos focos da proposta era a contextualização para despertar o interesse dos participantes da pesquisa.

Rocha (2008) estudou as dificuldades de compreensão dos alunos acerca de dois conceitos fundamentais de MQ, o de estado de sistema quântico e o de superposição linear de estados. O autor afirma ter sido alta a aceitação da unidade didática construída, embora não tenha conseguido evidência de aprendizagem significativa, dado a proposta didática ter sido apresentada em um curto intervalo de tempo.

Hilger (2009) estudou as representações sociais de 494 estudantes (universitários e de Ensino Médio). A autora propôs a possibilidade de essas representações serem fortemente influenciadas por meios de divulgação e o uso dessas idéias como subsunçores no processo de aprendizagem.

De Paulo (2006) realizou uma investigação com dois grupos de estudantes de Ensino Médio versando sobre a aprendizagem de conceitos básicos de MQ, como o não determinismo, causalidade, interpretação probabilística, incerteza, entre outros, sob a interpretação de Copenhagen. A autora identificou que os estudantes captam significados de forma diversificada e que alguns deles aprendem certos conceitos quânticos de forma mais “fluida” quando comparados com conceitos clássicos.

Na sequência adentraremos à revisão da literatura realizada nos periódicos supracitados.

## 2.2 Propostas didáticas

Neste grupo incluímos os artigos que apresentam uma organização de conteúdo exposta em forma de sugestão de apresentação em sala de aula. Discussões conceituais com o mesmo fim também foram incluídas na categoria.

Michelini et al. (2000) apresentam uma proposta didática de inserção da MQ via formulação de Dirac. Um dos conteúdos a guiar esta inserção seria a polarização de fótons em cristais birrefringentes. Os pesquisadores descrevem o formalismo a ser introduzido e narram uma breve tentativa de implementação, porém o foco real do trabalho é a proposta didática. Os pesquisadores afirmam ainda que há um fator facilitador na proposta, que é a possibilidade de uso de experimentos.

Cavalcante e Tavolaro (2001) descrevem uma proposta de quatro atividades de baixo custo para a inserção da Física Moderna no Ensino Médio. As atividades estão embasadas em conceitos de óptica ondulatória (como difração e interferência) e culminam em um experimento sobre o efeito fotoelétrico. A proposta surgiu a partir da análise de algumas concepções de alunos sobre a Física Moderna.

Abd-El-Khalic (2002) relata a construção de um “experimento de Rutherford” que está embasado na premissa de que o mesmo pode ser uma ponte para a introdução de uma nova visão acerca da natureza da ciência aos alunos. O pesquisador apresenta também evidência de que a manipulação da ferramenta descrita, em sala de aula, estimulou os alunos a uma mudança de visão epistemológica da Ciência.

Budde et al. (2002) propõem a ferramenta didática “electronium”, para o ensino de conceitos de MQ, a partir das concepções prévias dos estudantes. O modelo é descrito como uma substância fluida distribuída no espaço (analogia para a densidade de probabilidade). Os autores apresentam as limitações do modelo no que diz respeito às forças eletrostáticas, mas garantem que o modelo alcança a “ressonância

cognitiva” com as estruturas cognitivas dos estudantes. Justificam a introdução deste modelo recorrendo às dificuldades de aprendizagem que surgem no uso do modelo probabilístico tradicional. Os pesquisadores afirmaram que os estudantes concebem: o elétron como uma partícula clássica; o processo de medição semelhante ao processo de medição clássico; a probabilidade no sentido subjetivo do termo, ou seja, derivada de erros de medição.

Zollman et al. (2002) propõem uma série de materiais instrucionais para o ensino de MQ que podem ser utilizados ao longo do primeiro ano do curso de Física. Descrevem também a possibilidade de transferência de alguns materiais e da abordagem básica a cursos de nível mais alto. As atividades propostas são do tipo computacional envolvendo os seguintes temas: níveis e espectros de energia, espectroscopia e emissão, bandas de energia em sólidos, funções de onda. Os autores narram resultados da implementação do projeto proposto, realizada por professores do Ensino Médio e universitário dos EUA, argumentando através destes a potencialidade do projeto.

Peduzzi e Basso (2005) discutem a avaliação de um texto, que trata sobre o átomo de Bohr, escrito para professores do Ensino Médio. O texto busca fazer a introdução do conteúdo através de uma filosofia da ciência lakatosiana como uma alternativa mais adequada ao empirismo-indutivismo, concepção implícita na grande maioria dos livros didáticos do Ensino Médio, segundo os autores. O material foi exposto à análise de estudantes de licenciatura, mestrandos e doutorandos da UFRGS e UFSC. Os analistas se posicionaram como favoráveis ao material e sugeriram várias modificações que os autores informaram que incorporariam ao material.

Fanaro e Otero (2007; 2009) e Fanaro et al. (2008) descrevem uma proposta didática para o ensino de conceitos de MQ tais como: distribuição de probabilidades, sistema quântico, amplitude de probabilidades, constante de Planck, etc., através da introdução da idéia qualitativa das integrais de caminho de Feynmann. Os pesquisadores propõem o uso da ferramenta Modellus para a modelagem de alguns experimentos quânticos como: o experimento da dupla fenda (como uma das situações a dar sentido aos conceitos) e destacam a importância de se abordar o conteúdo através de situações-problema.

Johansson e Milstead (2008) discutem tópicos importantes relativos ao conteúdo do Princípio da Incerteza de Heisenberg. Sugerem a inserção deste conteúdo através do experimento de dupla fenda para elétrons e comentam que outros tópicos podem ser abordados sob o olhar desse princípio.

Goff (2008) propõe um jogo denominado quantum tic-tac-toe para a introdução de conceitos de MQ tais como: estado, superposição de estados, colapso, não-localidade, emaranhamento, princípio da correspondência, interferência quântica e decoerência.

## 2.3 Implementações de propostas didáticas

Nesta categoria foram enquadrados os artigos que tratam de implementações de propostas didáticas em sala de aula. Artigos incluindo a proposta didática no corpo do texto, mas apresentando resultados experimentais que justificam a sua ênfase na aplicação de uma sugestão didática à sala de aula, foram classificados como implementações das propostas.

Pinto e Zanetic (1999), embasados na epistemologia de Gaston Bachelard, prepararam uma intervenção didática em forma de mini-curso para alunos de uma escola pública em Guarulhos, São Paulo. O mini-curso teve a duração de 12 horas e versou principalmente sobre a descrição histórica da construção do conceito de Luz em Física (até a MQ, com a introdução do modelo fotônico) e sua avaliação envolveu três etapas, a saber, o esboço de um perfil epistemológico através de um teste, uma etapa de trabalhos culturais e a elaboração de um relatório final. Através de uma feira de ciências e do relatório final, os alunos deixaram suas impressões e comentários relativos ao mini-curso, tais como: dificuldade de leitura do material, falta de ênfase na parte experimental, prejuízo no conteúdo em virtude do descarte da matemática e interesse pela possibilidade de múltiplas interpretações. Estas críticas foram usadas no processo de reconstrução da unidade de ensino.

Müller e Wiesner (2001) apresentam os resultados de um curso (embasado em pesquisa) no qual aspectos conceituais da MQ são ensinados em um nível introdutório no Ensino Superior. Uma das metodologias de ensino usada no curso foca o contexto dos laboratórios virtuais que, segundo os autores, fazia os estudantes perceberem as grandes diferenças entre os fenômenos clássicos e quânticos. No intuito de contrapor as concepções alternativas dos alunos, fundamentadas na MC, os pesquisadores decidiram enfatizar aspectos da MQ que segundo eles diferiam radicalmente dos da MC. Outra vertente do enfoque lançou o olhar sobre a conceitualização em um primeiro momento (com o auxílio do uso de experimentos virtuais) e a formalização do conteúdo em uma segunda etapa. O processo de ensino seguiu um currículo em espiral através da introdução do conceito de fóton, seguida de uma discussão qualitativa do conceito de dualidade onda-partícula, da interpretação probabilística e noções sobre propriedades dinâmicas na MQ. Na segunda fase da espiral, usaram os elétrons no experimento de dupla fenda e introduziram qualitativamente a interpretação probabilística com funções de onda, o que tornou possível a introdução do conceito de superposição de estados. No fim do curso foram discutidos também aspectos como redução de estado, complementaridade, o experimento de pensamento do gato de Schrödinger e o fenômeno da decoerência. Os autores informam que resultados foram positivos e mostram que os alunos usam muitas das concepções da FC erroneamente extrapoladas para a FQ.

Bao e Redish (2001) desenvolveram uma série de tutoriais para o ensino de Física Moderna a estudantes de engenharia. Os tutoriais tratam do conceito de probabilidade, intrínseco à MQ e não é entendido de forma correta pelos estudantes, segundo os autores. Para avaliar os alunos, os pesquisadores usaram dois testes do tipo “quiz” (múltipla escolha), um teste do tipo exame e entrevistas com 16 indivíduos participantes da investigação. Os autores afirmam ter detectado nas visões estocásticas de probabilidade, isto é, determinísticas nas entrevistas. Os pesquisadores afirmam, ainda, que os estudantes nunca haviam usado probabilidade para estudar um sistema físico.

Budde et al. (2002a) narram os resultados da aplicação do modelo “electronium”, proposto como ferramenta didática em outro trabalho do grupo (Budde et al. 2002b). Neste artigo, os pesquisadores analisam tanto as potencialidades empíricas verificadas na realização de um estudo de caso em profundidade que envolveu dois estudantes, quanto a pertinência das premissas por eles adotadas. Concluíram que os resultados da implementação foram bons, pois conforme esperado, o modelo gerou uma espécie de “ressonância cognitiva” na estrutura cognitiva dos estudantes, visto

ter sido desenvolvido com base nas concepções prévias de estudantes. O câmbio de premissas de ensino se baseou no fato de que a continuidade dos fluidos (conteúdo analógico) não necessariamente leva à noção de que o “electronium” também seja contínuo.

Kalkanis et al. (2003) implementaram um modelo de instrução baseado na mudança conceitual radical, fundamentado na epistemologia de Thomas Kuhn, para ensinar MQ. O estudo foi realizado com 200 estudantes de ensino superior, 98 destes formando o grupo experimental e 102 o grupo de controle. Os estudantes eram oriundos de três públicos distintos (que foram igualmente distribuídos nos grupos de controle e experimental): alunos do segundo ano do curso de Pedagogia, alunos do departamento de História e Filosofia da Ciência e professores do Ensino Médio. Os sujeitos foram distribuídos de forma aleatória; os pesquisadores supuseram igualdade nas amostras e, seguiram, então, à etapa de análise do conhecimento prévio dos estudantes através de entrevistas semi-estruturadas realizadas com estudantes do grupo experimental escolhidos aleatoriamente e de um questionário ministrado ao grupo de controle, embasado nos resultados da entrevista anteriormente citada. O conhecimento prévio dos estudantes guiou a escolha do tópico da instrução implementada, a saber, o modelo atômico, pois as concepções dos alunos a respeito deste tema se configuraram como obstáculos epistemológicos. Os estudantes acreditavam que o modelo cientificamente aceito é o devido a Niels Bohr e que objetos clássicos eram similares aos objetos quânticos, evidenciando uma justaposição de idéias clássicas e quânticas. Foram ministradas 12 aulas de 45 minutos sobre o tema. O embasamento na epistemologia kuhniana fez com que os autores tratassem a MC e a MQ como incomensuráveis e radicalmente distintas. Ao final de cada sessão foram realizadas novas entrevistas semi-estruturadas e ao término da implementação foi repassado o (mesmo) teste a ambos os grupos. Os autores afirmam que a maioria dos alunos do grupo experimental apresentou uma visão de mundo diferente da que tinham anteriormente (mais próxima da científica) e que, por isso, há evidências de que a proposta tenha sido frutífera.

Greca e Herscovitz (2002, 2005) descrevem a implementação de uma proposta didática para o ensino de conceitos como: superposição de estados, princípio da incerteza, dualidade onda-partícula, medição, entre outros. O estudo foi feito com 89 estudantes de nível superior e foi realizado à luz da teoria dos modelos mentais de Johnson-Laird. Os 89 alunos foram distribuídos em quatro grupos, sendo dois de controle (que absorveram 20 alunos) e dois experimentais (que foram compostos pelos 69 alunos restantes). Uma investigação prévia com outros 26 estudantes submetidos a uma abordagem dita tradicional levou as autoras à construção de uma unidade didática de 24 horas ministrada aos 69 estudantes dos grupos experimentais. Além do procedimento de análise qualitativa para análise dos dados, foram realizados testes de associação de conceitos, um pré-teste e um pós-teste que, segundo as autoras, mostraram um avanço significativo para os grupos experimentais. A afirmação é explicitada pela classificação dos estudantes em quatro núcleos de modelos mentais (objeto quântico, objeto quântico incipiente, clássico com ingredientes quânticos e indeterminado), nos quais os alunos do grupo experimental foram enquadrados, em sua maioria (65%), nos dois núcleos mais próximos do conhecimento científico. Greca e Freire Jr. (2003), embasados em filosofia realista (que atribui realidade ao vetor de estado), por outro lado, analisam também os estudos mencionados.

Ostermann e Ricci (2004; Ostermann et al., 2008) narram o resultado da aplicação de uma proposta didática voltada para a mudança conceitual de professores em formação continuada. A proposta didática foi estruturada em torno da diferenciação entre conceitos da Física Moderna e da FC. Na abordagem, não foram usados modelos semi-clássicos para não dificultar o processo de evolução conceitual. Foi usado um interferômetro de Mach-Zender virtual no tratamento do conceito de interferência e para a introdução de conceitos da MQ. Os pesquisadores verificaram diferenças estatisticamente significativas (resultados positivos) entre o pré-teste e o pós-teste a um nível  $p < 0.001$  e constataram, ademais, evoluções nas concepções dos estudantes.

Os mesmos autores (Ostermann e Ricci, 2005), discutem a implementação de uma proposta didática que tem como premissa a minimização do uso do formalismo matemático e maximização do conteúdo conceitual, a um grupo de 19 professores do Ensino Médio. O curso teve 18 encontros (de três horas-aula cada um) e seu conteúdo versou sobre temas como diferenças entre os objetos clássicos e quânticos, analogias com a óptica ondulatória, efeito fotoelétrico, espalhamento Compton, difração e interferência de feixes de partículas. A estrutura da disciplina foi dividida em três unidades, a saber, a conceitual (cujos resultados são expostos no trabalho referenciado), a formal e a de aplicações. A ênfase do curso residiu no uso de experimentos virtuais (o experimento de Mach-Zender, por exemplo) como ferramenta de exploração das características peculiares dos sistemas quânticos. De acordo com os autores, os resultados obtidos revelaram uma melhora significativa nas respostas formuladas.

Greca e Herscovitz (2001; 2005; Greca et al., 2001) discutem a aplicação de uma proposta didática cujo objetivo é o ensino de conceitos como o de estado de um sistema físico, princípio de incerteza, superposição linear de estados, resultados de medições e distribuição de probabilidades, de forma conceitual-fenomenológica. O referencial teórico usado no estudo é o da teoria dos modelos mentais de Johnson-Laird. O estudo envolveu 94 estudantes (três turmas de cursos de engenharia de uma disciplina de Física Geral IV) que formaram o grupo experimental (GE) e 24 outros estudantes, sendo dez de uma turma de Física Geral IV (FG-IV) também de engenharia, dez de uma turma da disciplina de Introdução à MQ (IMQ) e quatro de um grupo que já havia cursado MQ I do curso de Física, formando o grupo de controle (GC). O GE participou de uma intervenção didática de 24 horas-aula, assim como os alunos de FG-IV do GC, enquanto os alunos da IMQ estiveram no curso regular de 60 horas-aula. A metodologia de avaliação foi o uso de pré-teste, pós-teste e de um teste de associação de conceitos. Como resultado as autoras afirmam que 25% dos alunos de grupo experimental se enquadraram em um núcleo que usava os conceitos de MQ de forma desejável. 40

*”As respostas do grupo da disciplina de FGIV ‘tradicional’ (dividindo-se entre respostas clássicas e sem resposta) refletem o fato de que estes estudantes não receberam instrução específica acerca deste princípio, sendo praticamente apenas apresentados a uma definição... O mesmo, porém, não se pode dizer dos outros grupos considerados: embora a discussão conceitual sobre tal princípio possivelmente tenha sido escassa, dadas as características das abordagens destes cursos (tradicional e técnica—centrada na resolução de exercícios), todos os alunos resolveram em alguma instância problemas onde o uso do princípio era necessário. Isto pode refletir uma aprendizagem superficial e ‘mecânica’ desta propriedade fundamental: aparentemente muitos dos estudantes se limitam a aplicar o formalismo quântico, sem tentar entendê-lo”. (Greca*

e Herscovitz, 2005, p.74)

Barros e Bastos (2007) publicaram os resultados da introdução do corolário do ciclo da experiência kellyana a uma proposta didática envolvendo o conceito de difração de elétrons. A proposta foi implementada em Campina Grande (Paraíba), com um grupo de 15 alunos no qual parte cursava a disciplina de Física Moderna e parte a disciplina de MQ. Os autores aplicaram uma série de questionários e realizaram entrevistas como avaliação. A metodologia das aulas reuniu elementos experimentais (tipo experimento virtual) e aulas expositivas. A conclusão apresentada foi que a conceitualização destes alunos melhorou, mas que seu conhecimento prévio de MQ era incipiente, assim como o conhecimento de Óptica Ondulatória.

McKagan et al. (2008) discutem a construção e implementação de uma unidade curricular para o ensino do efeito fotoelétrico. A unidade foi caracterizada pelo uso de simulações computacionais, aulas interativas com “peer instruction” e resolução de problemas (tanto conceituais quanto quantitativos). Os objetivos do curso eram: 1) induzir os alunos a prever corretamente os resultados de experimentos envolvendo o efeito fotoelétrico; 2) descrever como os resultados dos experimentos levaram ao modelo “fotônico” da luz. Os pesquisadores elaboraram duas questões para testar as metas e verificaram que 85% dos estudantes previram corretamente os resultados do efeito fotoelétrico, além de afirmarem que as inferências feitas pelos estudantes eram corretas, embora não estivessem conectadas às observações, fato que os autores associam a uma falta de raciocínio lógico relativo à produção de inferências a partir de observações.

Singh (2008b) discute o desenvolvimento e a avaliação de tutoriais interativos para o ensino de MQ. São apresentados os resultados de estudos de caso de cursos que usaram tutoriais interativos para ensinar três temas, a saber, evolução temporal, princípio da incerteza e o interferômetro de Mach-Zender. A metodologia do estudo envolveu um pré-teste de detecção de dificuldades iniciais, a implementação dos tutoriais e um pós-teste seguido de entrevistas de uma hora e meia com seis estudantes voluntários, realizadas como uma análise de protocolo do tipo “pensando alto” (think aloud). Uma das importantes dificuldades dos estudantes descritas no estudo é a concepção de que as funções de onda somente representariam estados estacionários. Quanto à eficácia do tutorial de ensino de evolução temporal, Singh (ibid) comenta que houve melhora no aproveitamento, de 53% de acertos para 85% do pré-teste para o pós-teste. No que tange ao tutorial sobre o princípio da incerteza, o melhoramento foi de 42% de acertos para 83% (do pré-teste para o pós-teste). O tutorial relativo ao interferômetro de Mach-Zender teve resultado semelhante.

Sales et al. (2008) apresentam o resultado da implementação de uma proposta de um objeto de aprendizagem denominado pato quântico, um jogo metafórico para a aprendizagem do efeito fotoelétrico. Os autores concluíram que a atividade foi motivante e divertida para os alunos e não apresentaram nenhuma conclusão direta acerca da aprendizagem.

Fanaro e Otero (2008; 2009) implementaram uma proposta didática sobre a formulação de integrais de caminho de Feynmann para o Ensino Médio (registre-se que houve adaptações – transposição didática) embasada na teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud. O estudo foi realizado com 30 estudantes na faixa de 17-18 anos e a coleta de dados foi basicamente qualitativa com o uso de análise de protocolos, gravação de conversas entre os alunos, e outras fontes. Em outros trabalhos (Fanaro et al., 2007, Fanaro et al., 2009) os pesquisadores descreveram

a proposta didática, motivo pelo qual discutiremos aqui somente os resultados da proposta neste momento. Um dos resultados, intuitivamente esperado, é o de que o comportamento probabilístico do elétron é um incômodo para os estudantes. Além disso, os pesquisadores detectam vários teoremas-em-ação, que foram formulados em termos de linguagem dos alunos, tais como:

- “se bolinhas são disparadas ao azar, a distribuição de probabilidades é uniforme” (Fanaro e Otero, 2008, p.314);
- “os elétrons têm uma característica especial: atravessar paredes” (op cit., p.316);
- “os elétrons são bolinhas muito pequenas” (ibid).

Krey e Moreira (2009a; 2009b) descrevem a implementação de uma proposta didática, embasada nas teorias de Ausubel e Vergnaud, que versa sobre Física Nuclear e Radiação (Krey e Moreira, 2009a) e sobre Partículas Elementares (Krey e Moreira, 2009b) em uma disciplina de Estrutura da Matéria. O curso foi realizado em duas etapas, sendo a primeira classificada como tradicional (uma espécie de grupo de controle, com 28 alunos) e a segunda classificada como inovadora (uma espécie de grupo experimental, com 37 alunos) no ano seguinte. As aulas da segunda etapa foram baseadas em situações-problema, tanto teóricas, isto é, discussões dirigidas, ou problemas de lápis-e-papel, ou procedimentais, que exigiam participação ativa na execução das tarefas. Como instrumento comparativo entre os dois grupos, foi usada uma avaliação escrita, feita em duplas na primeira etapa e realizada individualmente na segunda. De modo geral os autores concluíram que houve:

- evidências de aprendizagem significativa na segunda etapa, além de maior satisfação por parte dos alunos;
- detecção de possíveis invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) conflituosos com o conhecimento científico em ambas as etapas.

Carvalho Neto et al. (2009) implementaram uma proposta didática sobre a natureza preditiva da MQ e seu caráter intrinsecamente probabilístico a um grupo de dez alunos do terceiro ano do Ensino Médio baiano. A metodologia de pesquisa usada foi a observação participante, técnica bastante adotada na pesquisa em educação. Os autores estudaram as concepções de cinco estudantes de forma qualitativa, antes e depois de um mini-curso envolvendo os fundamentos da MQ. Este mini-curso teve a duração de 20 horas, sendo discutidos aspectos como o efeito fotoelétrico (focando nas semelhanças e diferenças com a radiação clássica), o átomo de Bohr (com a introdução da discretização do momentum angular), a dualidade onda-partícula (dando ênfase à complementaridade) e por fim a MQ formulada entre 1925 e 1927. O estudo passou à segunda fase (consistindo na reformulação do primeiro mini-curso) envolvendo outros cinco estudantes no ano de 2005. Nesta etapa os conteúdos de discussão foram o experimento de dupla-fenda e o princípio da complementaridade, para induzir a percepção dos estudantes ao aspecto preditivo da MQ. Como conclusão do estudo, os autores afirmaram que houve evidência de aprendizagem significativa, visto que ocorreu uma diferenciação do conceito de

probabilidade presente na estrutura cognitiva dos estudantes (o que facilitou a interpretação correta do Princípio de Incerteza de Heisenberg), bem como a percepção da natureza preditiva da MQ, por parte dos alunos.

Pereira et al. (2009a) discutem a utilização de um interferômetro virtual de Mach-Zender para a introdução de conteúdos da FQ como: dualidade onda-partícula, efeito fotoelétrico, experimento de dupla fenda, interferômetro de Mach-Zender, entre outros. O estudo enfocou a análise do discurso de alunos da Licenciatura em Física que interagem em grupo com o *software*. Os pesquisadores apresentaram conclusões qualitativas a respeito do processo de negociação de significados, dentre as quais:

- um dos colegas assume a postura de parceiro mais capaz;
- existe um processo de organização da ação do locutor que ocorre internamente de forma similar à fala egocêntrica;
- a interanimação de vozes elicia uma construção colaborativa de significados de tal modo que, muitas vezes, fica inidentificável o autor de uma resposta ao problema. Desta forma, os pesquisadores tratam o interferômetro de Mach-Zender como um instrumento que pode facilitar a negociação de significados em MQ.

Em outro trabalho, Pereira et al. (2009b) discutem novamente a potencialidade do interferômetro de Mach-Zender para o ensino de conceitos de MQ. A abordagem foi caracterizada pela introdução de conteúdos através de analogias entre a MQ e a Física Ondulatória Clássica. A unidade didática é baseada em duas hipóteses de ensino, a saber, que a analogia deve facilitar a aprendizagem do princípio da correspondência (uso do limite clássico da MQ) e que o experimento de Mach-Zender deve facilitar o entendimento do problema do “caminho” seguido pelo fóton. Esta unidade didática foi implementada com 11 estudantes que, em grupos, analisavam o experimento de Mach-Zender (quatro grupos compostos por dois estudantes e outro composto por três). Como conclusões gerais do trabalho, os pesquisadores afirmam que:

- “a sequência de atividade seguida pelo guia naturalmente levou os estudantes a estabelecer uma analogia entre FQ e Óptica Ondulatória”;
- “muitos dos fenômenos observados na simulação computacional mostram o comportamento anormal do fóton, evitando a concepção errônea de que os objetos quânticos são vistos como ‘partículas clássicas’”.

Asikanen e Hirvonen (2009) descrevem o desenvolvimento e a implementação de um curso de Física para professores de Física em formação e em serviço (*pre-service e inservice teachers*). A metodologia da pesquisa foi do tipo estudo de caso que envolveu 25 professores (oito em formação e 17 em serviço). A evolução na aprendizagem indicou que a abordagem pode ajudar os professores-aprendizes (*teachers-learners*) a ganhar profundidade no entendimento no conteúdo. Os atributos que caracterizam tal curso são o uso de modelagem, enfoque na História e na Filosofia das Ciências e a incorporação da visão de que o professor é um mediador de postura ativa dos estudantes.

Carr e McKagan (2009) realizaram um estudo na Escola de Minas de Colorado (EUA) usando inovações em aspectos como: conteúdo, livro-texto, métodos de ensino e ferramentas de avaliação. Enfatizaram o progresso da MQ nos últimos cinquenta anos na parte do conteúdo. Para isto usaram na implementação da proposta didática, livros-texto que tratam deste período da MQ (na primeira etapa da pesquisa usaram o livro de La Bellac e na segunda o de Gottfried e Yan), incorporaram uma variedade de técnicas de ensino baseadas em pesquisas em Ensino de Física e usaram ferramentas de avaliação, segundo eles, eficazes na medição do efeito das reformas. Como fruto da pesquisa apresentaram um questionário denominado *Graduate Quantum Mechanics Conceptual Survey* e os resultados da avaliação de outro teste prévio, o *Quantum Mechanics Conceptual Survey*. Os autores concluíram que a habilidade dos estudantes em resolver questões conceituais (do teste proposto) está altamente correlacionada à habilidade de resolver questões matemáticas acerca do tema e que, aparentemente, as disciplinas de MQ de graduação não facilitam o entendimento dos conceitos em nível de graduação.

## 2.4 Estudo de concepções

Tal categoria inclui artigos que tratam de concepções de estudantes e professores sobre o conteúdo de FQ e de opiniões de professores sobre a relevância de conteúdos específicos desta área.

### 2.4.1 Concepções de estudantes acerca do conteúdo de Física

Ireson (2000) narra a aplicação de um pré-teste e de um pós-teste a um grupo de 342 estudantes que seguiam um curso de Física de nível avançado, no qual aproximadamente metade dos estudantes ainda iria estudar "fenômenos quânticos". A metodologia usada pelo autor na entrevista foi a aplicação de um questionário de tipo Likert com resultados estudados à luz da técnica estatística da Análise de *Clusters* (para a procura de padrões aproximados de resposta). De início, o autor agrupou as questões em quatro *clusters*: 1) imagens mentais e estruturais de entidades; 2) pensamento mecanicista (*mechanistic thinking*); 3) pensamento quântico; 4) pensamento mecanicista conflitante (os *clusters* dois e quatro mostraram confusões dos estudantes). A aplicação posterior ao estudo gerou três *clusters*: 1) pensamento quântico; 2) pensamento quântico conflitante e 3) pensamento mecanicista conflitante (*conflicting mechanistic thinking*). Os *clusters* dois e três mostraram confusões dos estudantes. Os itens mostraram significância estatística ao nível de 1

Singh (2001) analisou as dificuldades de 89 estudantes que estavam no final de um curso de MQ de um ano de duração. Tal curso versava sobre conceitos relacionados ao problema da medida e à evolução temporal. A metodologia foi o estudo através de um teste com os 89 estudantes, seguido de entrevistas com nove destes, escolhidos arbitrariamente. A autora afirma que os estudantes tiveram dificuldades na compreensão de conceitos tais como os de estados estacionários, auto-estados e dependência temporal dos valores esperados. A pesquisadora conjectura que tais dificuldades sejam oriundas de uma possível incapacidade de discriminação, por parte dos alunos, de conceitos relacionados e de uma tendência a extrapolar o conteúdo de outros domínios de conhecimento (tal como a FC) para o domínio da MQ.

Cataloglu e Robinett (2002) construíram um instrumento de avaliação projetado para testar o entendimento conceitual e usual de MQ, denominado *Quantum Mechanics Visualization Instrument*. O teste foi aplicado a estudantes americanos de níveis de escolaridade denominados *sophomore* e *junior-senior undergraduate* (estudantes de graduação do primeiro ano e seguinte) e verificaram diferenças significativas entre os estudantes destes níveis.

Montenegro e Pessoa Jr. (2002) narram o resultado de um estudo sobre concepções a respeito do conteúdo de MQ, realizado com oito turmas de uma disciplina de MQ, no período final de seus cursos (com exceção de uma das turmas). O estudo envolveu 121 alunos e a metodologia usada para a pesquisa foi a de análise de questionários e realização de entrevistas, cujos conteúdos versaram sobre o experimento de dupla fenda, o princípio da incerteza, o conceito de estado quântico, o conceito de retrodição e o postulado da projeção. A categorização usada para dividir os dados foi a mesma usada por Pessoa Jr. na obra *Conceitos de Física Quântica* (Pessoa Jr, 2003), a saber, interpretação ondulatória realista, interpretação corpuscular realista, interpretação dualista realista e interpretação dualista positivista. Os autores concluíram que:

- *"o conhecimento que um aluno tem de uma área de Física não é perfeitamente integrado em sua mente. Às vezes, para um mesmo problema, isso o leva a enunciar uma frase e logo em seguida a se contradizer"* (Montenegro e Pessoa Júnior, 2002, p. 123);
- *"um aluno pode utilizar representações internas (scripts) distintas, ou interpretações privadas distintas e até contraditórias, para analisar problemas diferentes"*. (ibid);
- *"há uma diferença grande entre defender explicitamente ou oficialmente uma interpretação, por um lado, e utilizá-la implicitamente ou privadamente para compreender um problema de FQ, de outro"* (ibid);
- há *"uma razoável correlação positiva (seção 6), ou seja, em muitos casos o aluno utilizou a mesma interpretação privada em dois problemas diferentes"* (op. cit., p. 124).

Taber (2004) fez um estudo exploratório sobre as concepções de estudantes de um *college* britânico (faixa etária de 16 a 18 anos), acerca dos conceitos de orbital eletrônico, spin, hibridização, camadas e níveis de energia, entre outros. O instrumento de pesquisa adotado foi a realização de entrevistas semi-estruturadas, analisadas a partir da ferramenta das tipologias de impedimento de aprendizagem, uma espécie de obstáculo epistemológico. Os resultados mais gerais da pesquisa apontam para o fato de os alunos apresentarem concepções alternativas. Os autores destacam as dificuldades dos alunos de: aceitar a idéia de quantização; formar o conceito de orbital de um elétron; diferenciar os conceitos de camada, subcamada, orbital e níveis de energia; distinguir entre orbitais atômicos e moleculares; formar estruturas conceituais compatíveis com as cientificamente aceitas no que diz respeito ao conceito de estruturas ressonantes.

Souza et al. (2006) narram os resultados do estudo das concepções de 99 estudantes do Ensino Médio mineiro relativas aos modelos atômicos de Thomson e Bohr,

bem como o modo pelo qual compreendiam suas respectivas analogias, a saber, o pudim de passas e o sistema solar. Aplicaram questionários de perguntas abertas cujas respostas foram categorizadas segundo o entendimento dos alunos sobre as analogias. Os autores verificaram que a compreensão pelos alunos da analogia do pudim de passas é deficiente e que os mesmos se posicionam acriticamente em relação ao que lhes é apresentado no contexto escolar. Muitos alunos não entendem a própria estrutura interna da analogia. Quanto à analogia do sistema solar, a compreensão dos alunos foi também classificada como deficiente, apesar de a porcentagem dos alunos que conseguiram identificar as relações analógicas entre o átomo e o sistema solar ter sido maior do que no caso do pudim de passas.

Singh (2008a) desenvolveu um teste para estimar o conhecimento sobre MQ de 202 estudantes de Física (de sete universidades) do início da graduação. A pesquisadora também realizou uma entrevista com estudantes que haviam concluído um curso que versava sobre o mesmo conteúdo do teste. A autora concluiu que embora alguns estudantes tenham obtido resultados diferentes, muitos compartilhavam dificuldades comuns como as de entendimento do processo de medição e do valor esperado, a de distinção entre os conceitos de estado em geral e auto-estado, por exemplo, além das de entendimento do formalismo da MQ.

Çaliskan et al. (2009) constituíram um questionário de concepções em MQ, o *quantum concepts questionnaire* (QCQ), que foi aplicado a 71 alunos de Física de uma universidade turca. O QCQ é um questionário do tipo Likert de 26 questões e teve o seu coeficiente alfa de Cronbach, que está associado à fidedignidade do teste, calculado no valor . Como resultado das aplicações, os pesquisadores constataram que os alunos, entre outras concepções:

- associam a MQ à probabilidade e à estatística;
- acreditam que a trajetória do elétron não pode ser determinada;
- discordam que a medição da posição do elétron resulte sempre no mesmo valor;
- acreditam que o elétron, segundo o princípio da complementaridade, é onda e partícula;
- acreditam que o movimento do elétron no átomo é semelhante ao movimento planetário;
- discordam de que o módulo quadrático da função de onda tenha significância física.

Tsarparlis e Papaphotis (2009) discutem a realização de entrevistas e aplicação de um teste sobre conceitos de MQ para estudantes de faixa etária entre 17 e 18 anos, da 12ª série da escola secundária grega. O estudo quantitativo envolveu 125 estudantes e 23 destes foram selecionados para a realização de entrevistas. As entrevistas foram feitas em grupos (de três ou quatro) e individualmente. Como resultado, os pesquisadores afirmam que o modelo de Bohr estava altamente presente na estrutura cognitiva dos estudantes enquanto o modelo probabilístico era incipiente, além de muitos estudantes não entenderem o Princípio da Incerteza, atribuindo-o a falhas experimentais. A metodologia usada para o teste quantitativo consistiu na proposição de cinco questões de tipo algoritmo (resolução de problemas usando

equações) e o restante, de problemas conceituais (baseados em um trabalho anterior dos autores). Os pesquisadores afirmam que a performance do grupo foi muito melhor nas questões de tipo algoritmo, o que poderia ser um indicativo de aprendizagem mecânica, dado o baixo índice na *performance* de questões de entendimento conceitual. Os autores exibem as concepções errôneas dos estudantes, levantadas no processo de entrevista.

Wuttprom et al. (2009) narram a construção de um questionário de MQ e aplicação deste em uma turma de estudantes de cursos de Física. O questionário passou por um processo de validação por *experts* (validação externa) e também foi aplicado (n=312), e teve o coeficiente de fidedignidade calculado como 0.97 através de dois procedimentos estatísticos distintos. Além disso, os autores também calcularam a média de dificuldade do teste e o seu poder de discriminabilidade, obtendo resultados satisfatórios em relação à literatura. O teste versava sobre efeito fotoelétrico, ondas e partículas, comprimento de onda de De Broglie, experimento de dupla fenda e Princípio da Incerteza. Outra conclusão que os autores apresentam no estudo é a de que os estudantes acertam mais questões factuais e procedimentais do que conceituais, o que pode ser um indicativo de aprendizagem mecânica neste contexto.

Stefani e Tsarpalis (2009) apresentam um estudo de concepções de estudantes sobre temáticas de química/FQ como orbitais atômicos e moleculares, equação de Schrödinger, hibridização e ligação química. O estudo teve como referencial teórico, a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel e envolveu 19 estudantes de nível universitário. As respostas dos estudantes foram classificadas primeiramente em duas categorias, a saber, o nível de explicação e o nível de aprofundamento das concepções epistemológicas das respostas. O nível de explicação incluiu quatro categorias denominadas A (com três alunos), B (com três alunos), C (com cinco alunos) e D (com oito alunos), em ordem de complexidade, sendo as categorias A e B associadas ao pólo da aprendizagem mecânica e as categorias C e D, ao pólo da aprendizagem significativa. O critério para esta divisão foi a existência de inferências causais nas explicações, visto que essas expressam o caráter de não-arbitrariedade de tais explicações. Como conclusões do estudo, os autores afirmam que as respostas continham proposições que: variavam da simples reprodução de frases de livros-texto a explicações formuladas pelo próprio sujeito; revelavam as concepções epistemológicas dos estudantes; indicavam um alto teor de concepções alternativas que geralmente são frutos de interpretações embasadas na antiga MQ ou provém de raciocínio concreto-pictórico.

Moreira et al. (2009) apresentam um estudo de concepções de estudantes acerca da MQ à luz do referencial das representações sociais. Os pesquisadores comentam os resultados de um teste de associação de conceitos realizado com aproximadamente 2000 respondentes. Nesta etapa, os conceitos (expressões) mais ligados à MQ foram os de:

- alma, espiritualidade, FQ, incerteza, partícula, pensamento, probabilidade, quantum, sobrenatural e êxito.

Os pesquisadores ainda discutem a realização de um teste de proximidade entre os conceitos com 530 estudantes (165 alunos de Física, 135 de outros cursos universitários e 230 do Ensino Médio).

Em relação aos alunos do primeiro ano de Física, os conceitos mais correlacionados à MQ foram os de:

- partícula, energia, quantum, incerteza e átomo.

Em relação aos alunos do último ano de Física, os conceitos mais correlacionados à MQ foram os de:

- incerteza, probabilidade, Equação de Schrödinger, dualidade onda-partícula e quantização.

Para os alunos de primeiro e terceiro anos do Ensino Médio, os conceitos mais próximos à MQ foram os de:

- êxito, pensamento, incerteza e probabilidade.

### 2.4.2 Concepções de professores relativas à relevância de conteúdos específicos de Física

Oliveira et al. (2007) narram os resultados de uma pesquisa com dez professores do Ensino Médio fluminense (seis pós-graduados e quatro graduados) sobre a sua opinião quanto à introdução de conteúdos de Física Moderna no Ensino Médio, em especial do tema Raios-X. Os autores detectaram que a maioria dos professores entrevistados não abordava o conteúdo de Física Moderna em suas aulas (a maior justificativa foi falta de tempo), embora grande parte deles achasse interessante tanto o uso de História da Ciência nas aulas quanto a introdução do tema mencionado.

Nashon et al. (2008) narram os resultados de um estudo de concepções de 16 futuros professores de Física sobre a abordagem CTS e sobre o uso de História e Filosofia da Ciência (HFC). Os pesquisadores aplicaram questionários e implementaram uma observação participante na turma. Na coleta de dados foi perguntado aos futuros docentes quais temas eles consideravam mais problemáticos no ensino da Física, ao que 80

Rezende Júnior e Cruz (2009) entrevistaram 31 estudantes de Licenciatura em Física no intuito de obter informações acerca de como estes estudantes vislumbravam a pertinência de introduzir conceitos de Física Moderna e Contemporânea (FMC) no Ensino Médio. 15 deles estudavam em universidades catarinenses e 16 em universidades mineiras.

Como resultado, os autores *destacaram* que:

- os professores, em sua maioria, se interessavam em levar a FMC para a escola do Ensino Médio, mas as declarações que fizeram são preocupantes no que tange à sua formação inicial e podem refletir o uso da cultura dos pré-requisitos;
- não demonstraram clareza acerca dos conhecimentos prévios necessários para se aprender FMC;
- tendiam a reproduzir a sequência dos temas estudados durante suas formações quando questionados sobre a possibilidade de implementação de tópicos e temas da FMC no Ensino Médio;
- consideravam que, por causa da Matemática, o conteúdo de FMC deveria ser tratado somente de forma informativa.

## 2.5 Análise curricular e críticas a cursos introdutórios de Mecânica Quântica

Nesta seção estão incluídas as análises curriculares, isto é, o exame dos conteúdos que compõem um dado currículo e sua relevância para os contextos aos quais são destinados. São incorporadas as críticas aos cursos introdutórios no mesmo bojo, pois frequentemente a categorização destas está correlacionada à análise curricular. Sugestões de inovações em conteúdos e estudo da presença de conteúdos em livros-texto são enquadrados nesta categoria, sendo consideradas incursões no mesmo terreno.

Araújo e Rodrigues (2001) esboçam uma comparação entre as disciplinas de Física Moderna e MQ (MQ), afirmando que a primeira é relativa aos cursos de licenciatura e bacharelado em Física e a segunda somente à grade do bacharelado em Física. Concluíram, a partir da análise dos livros didáticos mais usados nos cursos, que a disciplina Física Moderna tem um viés mais conceitual do que a disciplina MQ, que possui caráter mais matemático e formal. Concluíram também que a disciplina de Física Moderna é uma introdução de MQ, sendo suficiente para prover os licenciandos do conteúdo de Teoria Quântica necessário para os futuros professores do Ensino Médio. A disciplina de MQ seria, entretanto, um aprofundamento necessário somente aos alunos do bacharelado, dada a matematização inerente à disciplina.

Lobato e Greca (2005) investigam a inserção de conteúdos de Teoria Quântica (TQ) nos currículos de Física do Ensino Médio de alguns países europeus, a saber, Portugal, Espanha, França, Inglaterra, País de Gales, Dinamarca, Suécia, Itália e Finlândia, e alguns outros países não-europeus como Canadá e Austrália concluindo que

- Portugal, Espanha, Itália e Finlândia, têm currículos no enfoque tradicional (que utiliza via histórica), ou seja, inserção da TQ através da hipótese de Planck e do efeito fotoelétrico, seguidos do princípio da incerteza e da dualidade onda-partícula. Alguns destes países dão ênfase à parte experimental (a Finlândia, por exemplo) enquanto outros ressaltam o aspecto filosófico do conteúdo;
- Dinamarca, Suécia, Canadá e Austrália seguem um padrão semelhante ao da Inglaterra, que adotou a perspectiva de Feynmann exibida em seu livro intitulado *Quantum Electrodynamics (QED)*, na tentativa de mudar a proposta tradicional.

Velentzas et al. (2007) fizeram uma procura em 25 livros de Física (15 livros populares – LP – 10 livros-texto – LT) pelo uso de experimentos de pensamento (gedaken experiment – EP). O marco referencial desta investigação foi o conjunto de experimentos de pensamento encontrados nos trabalhos de Brown (1991), Soresen (1992) e Horowitz & Massey (1991) e a classificação dos EP segundo o trabalho de Brown. Os EPs identificados em MQ foram: o do microscópio de Raios Gama de Heisenberg, o do gato de Schrödinger, o paradoxo EPR e o da caixa com luz e relógio (devido a Bohr). Os autores concluíram que: tanto os LT quanto os LP usam os experimentos de pensamento como ferramentas didáticas para apresentar conceitos físicos; no Ensino de MQ, 80

Niaz e Fernández (2008) analisaram 55 livros de Química que enfocavam a MQ, através de cinco critérios para avaliação da elaboração do texto, a saber, se os materiais levavam em conta: as origens da teoria quântica; as diferentes interpretações

da teoria; a diferenciação entre orbital e densidade eletrônica; a diferenciação e comparação entre MC e MQ; a introdução de números quânticos com base na densidade eletrônica. Como conclusão os autores destacaram que nenhum dos livros analisados:

- trata a hipótese de Planck como ajuste empírico. Em outras palavras que não foi Planck quem deu a significância física para a hipótese quântica, senão que foi Einstein;
- aborda as distintas interpretações da MQ;
- propõe uma forma de facilitar a transição do limite quântico para o clássico.

## 2.6 Análise teórica/epistemológica

Nesta categoria estão incluídas as discussões teóricas ou epistemológicas de apresentação de conteúdo sob o ponto de vista de uma teoria de aprendizagem ou epistemologia, bem como as discussões epistemológicas sobre o conteúdo de MQ com implicações educacionais.

Treagust (2000) faz uma análise epistemológica, diferenciando os conceitos de descrição e explicação, afirmando que muitos alunos confundem os termos. O autor estuda, também, as explicações que devem ser dadas por professores e as que devem ser dadas por cientistas. A partir disto e da leitura do texto de Richard Feynmann "*Atoms in motion*", o pesquisador justifica o uso do mesmo como um referencial explicativo (*explanatory framework*) para o uso em sala de aula, visto que sua simplicidade facilita a transposição didática do conteúdo de Física Moderna.

Hadzidaki et al. (2000) analisam epistemologicamente o processo de ensino-aprendizagem de MQ, embasados na epistemologia de Kuhn. Fundamentam, pois, uma teoria de ensino que é denominada teoria dos níveis de realidade, que leva em conta aspectos do referencial epistemológico kuhniano e premissas da psicologia cognitiva. O modelo é parecido ao de mudança conceitual, porém leva em seu bojo aspectos peculiares que o distinguem do modelo referenciado, embora, segundo os autores, seja frutífero na transição de um nível de realidade (Mecânica Newtoniana, por exemplo) para outro (MQ, por exemplo).

Brockington e Pietrocola (2005) descrevem a teoria da transposição didática de Yves Chevallard e exploram as possibilidades de aplicação das regras desta para os conceitos de MQ ao nível do Ensino Médio, bem como as limitações e condições necessárias para tal. Criticam, com base na teoria, as posturas de alguns materiais didáticos e discutem a possibilidade da ênfase na argumentação filosófica como meio de privilegiar o debate e as características mais qualitativas deste conhecimento.

Hadzidaki (2008a), seguindo a linha de outro trabalho publicado (Hadzidaki, 2008b) faz uma discussão epistemológica da MQ em torno do princípio da separabilidade dos sistemas físicos, válido na MC e inválido na MQ, como sendo uma das principais diferenças entre os dois paradigmas. A discussão abarca também o Princípio da Complementaridade de Niels Bohr, que tem sua potencialidade didática valorizada. Os trabalhos de Hadzidaki nesta linha fundamentam uma proposta didática que foca na mudança conceitual como uma mudança paradigmática.

## 2.7 Considerações finais acerca da revisão de literatura

O maior número de publicações analisado se encontra na categoria de implementação de propostas didáticas (27 trabalhos) e o menor nas categorias de análise teórica/epistemológica e análise curricular (quatro trabalhos em cada uma). Percebemos, além disto, que os artigos nas áreas de concepções de alunos e professores têm se tornado, em número, mais relevantes. Alguns dos trabalhos, entretanto, são introdutórios, pois focam na construção de questionários para a detecção de concepções e por vezes descrevem mais a capacidade do instrumento do que as concepções obtidas.

Ano	$n^\circ$ de publicações
1999	1
2000	4
2001	7
2002	7
2003	2
2004	2
2005	5
2006	1
2007	4
2008	2
2009	15

Tabela 2.1: Número de publicações consultadas por ano

Outro ponto a ser destacado é o progresso da pesquisa nesta temática. O número de artigos por ano vem apresentando avanços e retrocessos, porém, em termos gerais o número tem aumentado (Tabela 2.1). Os anos com menor número de publicações foram os de 1999 (1 artigo), 2003 (2 artigos), 2004 (2 artigos) e 2006 (1 artigo) e os anos com maior número de publicações foram os de 2008 (12 artigos) e 2009 (15 artigos). Deve-se destacar que os artigos consultados são os que versam sobre a pesquisa em Ensino de Física em si.

Na categoria de propostas didáticas (PD) o número de publicações foi de modo aproximadamente uniforme distribuído ao longo do tempo. Já na categoria de implementações de propostas didáticas (IPD), ocorreu um salto no número de publicações nos anos de 2008 (5 artigos) e 2009 (8 artigos). No que tange à classificação dos estudos de concepções (EC), o salto também ocorreu em 2009 (6 artigos). Nas duas classificações restantes (Análise curricular ou Críticas a cursos introdutórios - AC/CCI -, Análise teórica ou Análise epistemológica - AE/AT) a distribuição foi quase uniforme. (Tabela 2.2)

Deve-se destacar ainda a quantidade de estudos de concepções que vem progredindo ao longo do tempo, que é crucial para o avanço da área de pesquisa em Ensino de MQ, visto que nos permite tanto verificar o conhecimento prévio dos estudantes bem como suas concepções alternativas (ou errôneas), um fator fundamental para a determinação de pontos de partida para o desenvolvimento de estratégias didáticas que facilitem a aprendizagem. Greca e Moreira (2001, p.30) e Ostermann e Moreira (p.32) afirmam que o número de publicações é baixo, fato com que estamos de

Ano	PD	IPD	EC	AC/CCI	AE/AT
1999	0	1	0	0	0
2000	4	0	1	0	0
2001	1	4	1	1	0
2002	3	2	2	0	0
2003	2	0	0	0	0
2004	0	1	1	0	0
2005	1	2	0	1	1
2006	0	0	1	0	0
2007	1	1	1	1	0
2008	3	5	2	1	1
2009	1	8	6	0	0

Tabela 2.2: Número de artigos publicados por ano em cada categoria

acordo, pois 15 artigos em dez anos é um número baixo, porém, felizmente como é possível observar, o número de artigos voltados a esta problemática tem crescido de forma importante na literatura.

Na categoria de propostas didáticas, é possível notar pontos similares em alguns dos trabalhos no que diz respeito aos seguintes critérios: uso de referencial teórico, propostas de intervenção no Ensino Superior (Graduação e Pós-Graduação), propostas de intervenção no Ensino Médio, uso de atividades de experimentação, ênfase em conteúdos de Teoria Quântica Moderna<sup>1</sup>, ênfase em conteúdos novos e propostas de mudança em determinado conteúdo.

No primeiro critério foram registrados quatro trabalhos fundamentados em referenciais de aprendizagem/epistemologia para construção de unidade didática (Peduzzi e Basso, 2005; Fanaro e Otero, 2007; Fanaro e Otero, 2009; Fanaro et al., 2009), um número baixo considerando o número de trabalhos analisados (11 artigos), pois três foram escritos pelos mesmos autores. No que tange ao número de propostas a serem empregadas no Ensino Superior, verificou-se a quantidade de dois trabalhos (Zollmann et al. 2002; Peduzzi e Basso, 2005) e com respeito ao número de propostas construídas no intuito de serem implementadas no Ensino Médio, foram registradas nove (Michelini et al., 2000; Cavalcante e Tavolaro, 2001; Abd-El-Khalic, 2002; Budde et al. 2002a; Fanaro e Otero, 2007; Fanaro et al., 2008; Johansson e Milstead, 2008; Goff, 2008 e Fanaro e Otero., 2009), sendo três muito semelhantes por terem sido escritas pelos mesmos autores.

Em relação ao número de publicações cujas propostas enfatizam o uso de atividades de experimentação (com equipamentos de alto e baixo custo), foram registrados três trabalhos (Michelini et al., 2000; Cavalcante e Tavolaro 2001 e Abd-El-Khalic, 2002), o que vai contra a tese fundamentada no senso comum de que é impossível realizar-se experimentos com Física Moderna no Ensino Médio, embora pareça mais complicado que em Mecânica Clássica ou Termodinâmica, por exemplo. Outro

<sup>1</sup>O critério para classificação de um conteúdo como Mecânica Quântica Moderna ou Antiga Teoria Quântica advém da necessidade de se distinguir entre conteúdos que partem de premissas semi-clássicas (como quantização do momentum angular ao mesmo tempo em que se consideram trajetórias definidas) e conteúdos que partem da forma elaborada da Mecânica Quântica Não-Relativística.

ponto importante é o aspecto inovador das propostas, pois oito das 11 enfatizam conteúdos de Mecânica Quântica Moderna (Michellini et al., 2000; Budde et al., 2002; Zollmann et al., 2002; Fanaro e Otero, 2007; Fanaro et al. 2008; Goff, 2008; Johansson e Milstead; 2008; Fanaro e Otero; 2009), enquanto três apresentam ênfase em conteúdos relativos à Antiga Teoria Quântica (Cavalcante e Tavolaro, 2001; Abd-El-Khalic, 2002 e Peduzzi e Basso, 2005). Tal ponto deve ser ressaltado, pois conforme será visto na categoria de concepções de estudantes, muitas concepções alternativas em Mecânica Quântica guardam semelhanças com modelos que vigiam durante o período da denominada Antiga Teoria Quântica. Em comparação com a numeração levantada por Greca e Moreira (2001), verificamos uma queda relativa no número de propostas didáticas na literatura. Esta categoria não teve maior número de artigos computados, dado que contraria, neste período, o fato apresentado por Greca e Moreira (ibid). Isto representa, em linhas gerais, um avanço em relação ao período de 1970-1999, pois atualmente, as propostas parecem estar sendo efetivamente testadas em maior número. Em outras palavras, é muito provável que as conjecturas estejam sendo postas à prova. Além disso, como os conteúdos estão mais voltados à introdução da Mecânica Quântica Moderna no Ensino Médio, é possível que os estudos cobrindo conteúdos acerca da Antiga Teoria Quântica estejam sendo esgotados.

O número de trabalhos em implementação de propostas didáticas foi de 25 trabalhos, o que corrobora a ideia de ter ocorrido crescimento no número de propostas didáticas efetivamente implementadas no contexto do Ensino de Mecânica Quântica. A maioria destas implementações ocorre, principalmente, no Ensino Superior, totalizando 21 trabalhos (os trabalhos descrevendo estudos no Ensino Médio são, pois, quatro: Pinto e Zanetic, 1999; Budde et al., 2002; Sales et al., 2008; Fanaro e Otero, 2008.) Ponto positivo é a grande quantidade de trabalhos a usar referenciais teóricos, seja de aprendizagem, seja de epistemologia, para a fundamentação das intervenções. 18 dos 25 trabalhos valem-se de fundamentação teórica para a construção da instrução.

A aula expositiva é a metodologia mais usada pelos autores para o desenvolvimento da instrução, tendo 12 dos trabalhos encabeçados pela metodologia. Outra metodologia de expressivo uso nas pesquisas é a de instrução via laboratórios virtuais, sendo esta explícita em seis dos 25 trabalhos. A combinação entre as duas metodologias mais usadas ocorre em três dos trabalhos e outras metodologias contabilizam quatro ocorrências (tutoriais, jogos, etc). A integração entre laboratórios virtuais e aulas expositivas no Ensino de Mecânica Quântica, revela-se, portanto, como um fértil campo de pesquisa na área.

Corroborando a hipótese apresentada anteriormente, a saber, a de os conteúdos de ATQ terem sido menos explorados, encontramos somente três trabalhos enfatizando o assunto, enquanto maior parte dos (22) enfatiza a Teoria Quântica Moderna (conforme formulada por Dirac, Heisenberg e Schrödinger, principalmente), porém tratando de conceitos distintos. Alguns trabalhos como o de Greca et al. (2001) e Singh (2008), por exemplo, estudam sob diferentes perspectivas, a aquisição de conceitos estruturantes da TQM, tais como, estado quântico, superposição de estados e evolução temporal, enquanto outros trabalhos enfocam conceitos mais específicos.

Os trabalhos em estudos de concepções, em síntese, parecem não usar tanto referenciais teóricos de aprendizagem na sua construção, pois somente um terço destes apropria-se desta ferramenta. Ao considerarmos o fato de os trabalhos serem estudos

de concepções, este dado se torna justificável, pois neste tipo de pesquisa o objetivo principal é a descrição da forma da estrutura cognitiva ao invés da explicação dos mecanismos subjacentes à aquisição de conhecimento pela mesma. Em alguns trabalhos como, por exemplo, de Montenegro e Pessoa Jr. (2002), a referência epistemológica cabe no processo de identificação de interpretações privadas em Mecânica Quântica, já o trabalho de Stefani e Tsarpalis (2009), por exemplo, encaixa-se na detecção de padrões de assimilação por parte dos estudantes. Como o objetivo fundamental da maioria é a descrição das concepções e não a explicação de como se formaram, torna-se inteligível o não uso do referencial teórico.

O maior objetivo dos autores ao publicarem trabalhos desse tipo é apresentar um novo questionário para detecção de concepções, narrando o processo de validação (Tsarpalis e Papaphotis, 2009; Wuttprom et al., 2009; Çaliskan, 2009; Cataloglu e Robinett, 2002), bem como a apresentação das possíveis concepções dos estudantes. Outros estudos focam somente na apresentação das concepções usando técnicas de questionários abertos, testes quantitativos e entrevistas, bem como suas combinações (que denominamos técnicas triangulativas).

Uma relativa surpresa diz respeito ao conteúdo das concepções investigadas. O número de trabalhos focando a pesquisa em concepções acerca da ATQ (quatro) é muito próximo do número de trabalhos enfatizando a pesquisa em concepções acerca da TQM (cinco). Isto é, no entanto, compatível com os dados de Greca e Moreira (2001), pois segundo os autores, esta era uma das categorias acerca da qual menos se conhecia, portanto, pouco se sabia tanto sobre as concepções acerca da ATQ quanto da TQM. Outro achado é o número não desprezível de trabalhos enfocando concepções sobre conceitos associados à categoria que denominamos química quântica (dois): englobavam conteúdos mais específicos da Química, tais como, hibridização, orbitais, etc.

Dos quatro trabalhos arrolados, pertinentes à categoria de análise curricular ou críticas a cursos introdutórios de MQ, vemos que três deles atacam problemas relativos ao Ensino Médio. Um deles (Lobato e Greca, 2005) estuda os currículos europeus e de alguns países desenvolvidos, enquanto os outros dois (Niaz e Fernández, 2008; Velentzas et al., 2007) preocupam-se com a estrutura de livros didáticos (e de divulgação, em um dos trabalhos, a saber, Velentzas et al., 2007) de Física (Química) do nível médio. O trabalho restante apresenta a diferença, quase óbvia, entre os cursos de Física Moderna (Estrutura da Matéria em algumas universidades) e Mecânica Quântica. São poucos os trabalhos de análise curricular, talvez por caracterizarem-se, em grande parte, pelo fôlego e domínio de conteúdo exigido para tal.

A categoria de análise teórica e análise epistemológica, não existente no trabalho de Greca e Moreira (2001), ilustra a presença de trabalhos fundamentais para a apresentação de novas propostas de linhas de pensamento em Ensino de Física. Três deles, potencialmente voltados para o conteúdo de Física como um todo (Hadzidaki et al., 2000; Brockington e Pietrocola, 2005; Hadzidaki, 2008a), são usados para justificar a proposta de um dado viés para a construção de unidades didáticas em Mecânica Quântica (Física Moderna, Estrutura da Matéria). O trabalho restante preocupa-se em fundamentar epistemologicamente um texto didático passível de ser usado no Ensino Médio. Tal categoria é de grande valia na reflexão da organização do conteúdo tanto no que tange ao uso de teorias de aprendizagem quanto de epistemologia.

No próximo capítulo é apresentado o referencial teórico da pesquisa.

# Capítulo 3

## Referencial teórico

### 3.1 Aspectos gerais da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel

#### 3.1.1 Significado e Aprendizagem Significativa

Aprendizagem significativa é um processo de aprendizagem cujo produto é a aquisição de novos significados. Para evitar circularidade, exibiremos o que Ausubel concebe como significado:

*“... o significado não é uma resposta implícita, mas antes uma experiência consciente claramente articulada e precisamente diferenciada que surge quando signos, símbolos, conceitos ou proposições potencialmente significativos se relacionam e incorporam componentes relevantes da estrutura cognitiva de um determinado indivíduo numa base não-arbitrária e não-litera” (Ausubel, 2000, p. 43).*

Para Ausubel, o significado é, então, consciente e articulado. O autor afirma ainda que o significado é predicativo, isto é, explícito através de linguagem verbal (conceitos, proposições, símbolos). O referencial teórico ausubeliano é altamente eficaz para a explicação e descrição de processos cognitivos que levam em conta a aquisição de novos conhecimentos na forma predicativa.

Para que ocorra a aprendizagem significativa, Ausubel afirma que são necessárias duas condições fundamentais:

- disposição para aprendizagem significativa por parte do aluno, isto é, este deve realizar um esforço cognitivo deliberado para relacionar à estrutura cognitiva, o conteúdo a ser aprendido, numa base não-arbitrária e não-litera;
- o material a ser aprendido deve ser potencialmente significativo, ou seja, incorporável à estrutura cognitiva de forma significativa.

Os processos de aprendizagem podem, então, ser classificados dentro de um contínuo cujos pólos são a aprendizagem significativa, não-arbitrária e substantiva, e a aprendizagem mecânica, arbitrária e literal. Toda tarefa de aprendizagem está localizada dentro deste domínio, independente de ser uma tarefa de aprendizagem por recepção ou descoberta.

De um lado do contínuo está a aprendizagem significativa, cujo produto é a aquisição de novos significados que emergem da relação não-arbitrária e não-literal dos materiais a serem aprendidos com a estrutura cognitiva e, de outro, está a aprendizagem mecânica, que é arbitrária e literal, logo, desprovida de significado. Este fato, no entanto, não significa que a aprendizagem mecânica ocorra num vácuo cognitivo, mas que neste processo, as relações entre conhecimento prévio e conhecimento a ser aprendido, são realizadas numa base puramente arbitrária e literal.

Outro aspecto a se ressaltar é a distinção entre dois tipos de significado: o lógico e o psicológico. O primeiro é o aspecto que determina se o material de aprendizagem é ou não relacionável à estrutura cognitiva de forma significativa considerando um dado grupo de estudantes que, embora com estruturas cognitivas diferentes, devem possuir aspectos comuns relativos ao nível de desenvolvimento cognitivo e a algumas variáveis da estrutura cognitiva.

O segundo tipo de significado, o psicológico, é o produto da transformação do significado lógico em um conteúdo cognitivo *diferenciado e idiossincrático*, devido ao processo de aprendizagem significativa (Ausubel, 1980, p.41, grifo nosso).

Desta forma, a análise dos significados emergentes do processo de aprendizagem significativa deve ser feita no sentido de se categorizar significados compartilhados. Embora idiossincráticos, é possível que possam ser classificados em categorias em que sejam substancialmente semelhantes.

### 3.1.2 Representações, conceitos e proposições: um olhar epistemológico do conhecimento predicativo

Até agora expusemos alguns aspectos mais básicos e gerais da aquisição de conhecimento predicativo. Referíamos-nos a "material a ser aprendido" quando falávamos das unidades de conhecimento a serem adquiridas por um indivíduo em um dado nível de desenvolvimento cognitivo e com um conjunto particular de conhecimentos prévios ou estrutura cognitiva. Vamos distinguir essas unidades de conhecimento predicativo na sequência.

Basicamente podemos classificar as unidades de conhecimento/conteúdo em representações, conceitos e proposições. A aprendizagem destas unidades, segundo Ausubel, segue a mesma via epistemológica da aprendizagem significativa, embora possua peculiaridades que devam ser ressaltadas.

*Representações* são símbolos que possuem um valor equivalente unívoco aos referentes, os objetos aos quais estes símbolos se referem. Podemos mencionar a palavra gato, que para uma criança pode possuir uma equivalência única ao animal ao qual ela se refere. Tais símbolos podem ser aprendidos de forma significativa<sup>1</sup>, pois são relacionáveis à estrutura cognitiva de forma não-arbitrária e não-literal.

A aprendizagem de representações em Física é algo muito importante, visto que epistemologicamente, a Física é uma representação da natureza e, afinal, adotamos representações que têm equivalência aos aspectos e fenômenos que ocorrem na natureza, tais como campos, ondas, forças, etc.

Outra unidade possível de conhecimento predicativo é o que Ausubel denomina *conceito*. Conceitos representam objetos, eventos, situações, ou propriedades que

---

<sup>1</sup>Embora a aprendizagem representacional incorpore elementos da aprendizagem significativa, ela se encontra mais próxima do pólo da aprendizagem mecânica (Ausubel, 2000, p.1).

possuem atributos essenciais comuns que são designados por algum signo ou símbolo (Ausubel, 2000, p. 47).

Vê-se que os conceitos possuem símbolos, geralmente linguísticos, que os representam; logo, para serem aprendidos devem ocorrer posteriormente a aprendizagem de uma representação, no caso de terem nomes. A palavra-conceito é este nome que representa o que Ausubel denomina atributos essenciais dos conceitos, que são aquelas características que os formam. Em Física, por exemplo, o conceito de interação eletromagnética pode ser descrito em termos dos seus atributos essenciais: gerada por cargas e correntes, gerada por campos induzidos, intermediada por fótons, uma das interações da natureza, etc.

Mais um aspecto a ressaltar acerca dos conceitos é que eles expressam regularidades. O conceito de trajetória, por exemplo, expressa uma regularidade, de que em Mecânica Clássica os objetos físicos descrevem uma determinada curva durante o movimento. O conceito de campo elétrico expressa uma regularidade, a de que uma região do espaço é modificada quando nela se introduz uma carga elétrica.

É muito comum subestimar-se o papel dos conceitos na Física. Esta Ciência é constituída de um corpo de conceitos articulados de forma coerente, que nos permite modelar, explicar e prever fenômenos. Conceitos como precessão, volume, densidade, vazão, spin, momentum angular, etc, estruturam a disciplina inteira e são (ou deveriam ser) focos do Ensino da Física.

As unidades de conhecimento predicativo ainda podem ser classificadas como *proposições*, ideias compósitas expressas verbalmente em frases que contêm significados de palavras quer denotativos, quer conotativos, e nas funções sintáticas e nas relações entre palavras (Ausubel, 2000, p.3). A proposição como um todo possui um significado que é diferente da soma dos significados individuais nela inseridos.

Proposições estão presentes em todos os ramos do conhecimento e grande parte da aprendizagem se processa através da aquisição dos seus significados. Proposições são muito importantes na Física, pois podem revelar aspectos de relações de causalidade entre conceitos, tais como ocorrem no princípio da incerteza, nas equações de Maxwell, etc.

Munidos destas ideias, discutiremos a seguir alguns tipos de aprendizagem significativa e os atributos que tornam peculiar cada tipo de aprendizagem.

### 3.1.3 Tipo de Aprendizagem Significativa

Retornando à sequência em que diferenciamos as unidades de conhecimento predicativo, ou seja, representações, conceitos e proposições, distinguiremos agora entre os tipos de aprendizagem: *representacional*, *conceitual* e *proposicional*.

A aprendizagem representacional ocorre quando o significado de símbolos arbitrários se iguala, de maneira unívoca, aos referentes, de modo que o significado dos símbolos se torna igual ao dos referentes. Em outras palavras, o símbolo se relaciona à estrutura cognitiva de forma significativa, de maneira que ele signifique univocamente aquilo que representa, ou seja, o referente.

A aprendizagem das representações matemáticas na Física deveria ocorrer desta forma. Aprenderíamos o conceito de campo elétrico de forma significativa e depois aprenderíamos um símbolo ( $\vec{E}$ , por exemplo) que passaria a representar o conceito de campo, neste caso o referente. Muitas vezes o processo ocorre ao contrário, pois aprendemos a equação ou a palavra que representa o conceito, mas só após é

executado o ensino dos atributos essenciais, o que pode dificultar a aprendizagem, visto que a aprendizagem representacional é, de certo modo, mais limitada, pois se aproxima do pólo da aprendizagem mecânica segundo Ausubel (2000, p. 1).

A aprendizagem conceitual envolve duas etapas: a aquisição dos atributos dos conceitos através de assimilação significativa<sup>2</sup> (em jovens e adultos) e a aquisição por aprendizagem representacional, da palavra-conceito que simboliza o conceito a ser aprendido (op. cit., p. 2).

Ausubel nos fala que a compreensão e a resolução significativa de problemas dependem da disponibilidade de subsunçores<sup>3</sup> (idéias relevantes na estrutura cognitiva). Ainda é possível afirmar que os seres humanos interpretam experiências captadas pela percepção a partir de conceitos particulares na estrutura cognitiva (a afirmação de que uma pessoa está com febre, quando sentimos que ela está quente, por exemplo).

Na Física, grande parte das teorias que aprendemos está formulada em termos de poucos conceitos que se relacionam de forma relativamente coesa. A aprendizagem e a formulação de proposições neste campo do conhecimento dependem da disponibilidade, clareza, estabilidade e discriminabilidade dos conceitos subsunçores na estrutura cognitiva de um indivíduo particular (ibid).

Ausubel ressalta também que alguns conceitos possuem nomes e outros não e que os conceitos representáveis por palavras são aprendidos mais facilmente, pois existe uma palavra de equivalência representacional aos atributos essenciais do conceito. O autor afirma ainda que, geralmente, os nomes dos conceitos são adquiridos através de aprendizagem representacional significativa, após a aquisição dos significados do próprio conceito, ou seja, da relação dos atributos essenciais do conceito com subsunçores de forma não-arbitrária e não-literal, com os subsunçores na estrutura cognitiva.

A aprendizagem proposicional por sua vez, é semelhante à aprendizagem representacional (ibid), na medida em que são adquiridos novos significados após a relação e interação da proposição com a estrutura cognitiva. Neste tipo de aprendizagem ocorre uma interação da proposição a ser aprendida com um subsunçor, que modifica ambas as ideias (prévia e nova) e as mantém dissociáveis durante um dado intervalo de tempo. O significado, neste processo, é originado da interação significativa da proposição com a estrutura cognitiva. Esta interação gera um produto interacional dependente da maneira particular pela qual ocorreu e constitui o significado psicológico da proposição assimilada.

Na sequência vamos adentrar à teoria da assimilação e aproveitaremos a oportunidade para fundamentar a distinção epistemológica entre proposições e conceitos no que tange ao teor de abstração, generalidade e inclusividade destes.

## 3.2 Teoria da Assimilação

Trataremos agora do mecanismo proposto por Ausubel para explicar os processos cognitivos ocorrentes na aprendizagem significativa de novas unidades de conheci-

---

<sup>2</sup>A aprendizagem de conceitos por crianças é explicada, por Ausubel, por um processo diferente denominado formação de conceitos, que não será tratado aqui. Pode-se ler mais sobre a formação de conceitos em Ausubel (2000, p.2).

<sup>3</sup>Não sendo funções desta unicamente.

mento predicativo. As etapas serão divididas em: aprendizagem, retenção e obliteração.

### 3.2.1 A aquisição

Ausubel usa o nome aprendizagem significativa para tratar da primeira etapa da assimilação, porém cremos que este nome pode gerar confusões, pois o termo já abarca tanto o produto quanto o processo de aprendizagem, do qual entendemos que o esquecimento faz parte. Vamos, portanto, denominar *aquisição* à primeira etapa de assimilação já supondo que estamos considerando-a significativa.

O processo de aquisição, portanto, consiste da fase em que há a relação não-arbitrária e não-literal de uma idéia potencialmente significativa  $a$ , com um subsunçor  $A$ . Desta interação decorre a geração de um produto interacional que modifica tanto a idéia nova quanto a idéia prévia. Nesta fase é que ocorre a transição de significado lógico para psicológico.

Vale ressaltar aqui que a modificação das ideias é o que distingue os processos de aprendizagem significativa dos de aprendizagem puramente mecânica. A interação não-arbitrária e substantiva (não-literal) é a responsável por esta modificação, que posteriormente veremos ser muito importante.

Ainda devemos ressaltar o fato de que dificilmente ocorre uma interação como foi descrita aqui, isto é, uma idéia nova relacionando-se a um subsunçor somente. Geralmente ocorre que as idéias novas se relacionam, com mais de um subsunçor, ou seja,

$$A + a \longrightarrow A'a',$$

$$B + a \longrightarrow B'a',$$

ou mesmo

$$A + B \longrightarrow A'B' + a \longrightarrow A''B''a''$$

que significa que dois subsunçores podem se ligar na estrutura cognitiva e ainda interagir com uma idéia nova que modifica o produto interacional  $A'B'$ , para  $A''B''$ , por exemplo, na nova interação. Na sequência vamos tratar do processo que segue o de aquisição, denominado retenção.

### 3.2.2 A retenção

Após o período de aprendizagem, as ideias do produto interacional, na estrutura cognitiva, permanecem dissociáveis. Isto é,

$$A + a \longrightarrow A'a' \quad (\text{Aquisição}),$$

$$A'a' \xleftrightarrow{\text{dissociabilidade}} A + a' \quad (\text{Retenção}),$$

as ideias são dissociáveis das idéias ancoradas e são reproduzíveis como entidades separadas (Ausubel, 2000, p.108).

Para explicar esta dissociabilidade, Ausubel introduz dois parâmetros ocorrentes na retenção:

- a força de dissociabilidade;
- o limiar da disponibilidade.

Até dado limite, as ideias (nova e prévia) permanecem dissociáveis na estrutura cognitiva. A faixa para a qual isto ocorre equivale à superioridade da força de dissociabilidade em relação ao limiar da disponibilidade.

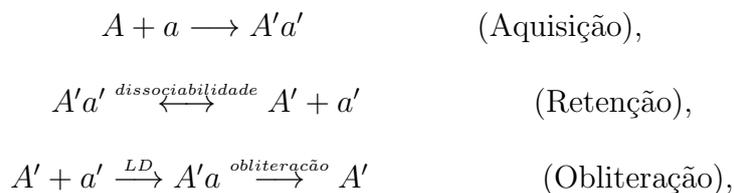
A força de dissociabilidade é um parâmetro contínuo na aprendizagem significativa. O seu máximo, segundo Ausubel, ocorre logo depois do processo de aprendizagem (ibid), reduzindo-se ao longo do tempo para que ocorra a terceira etapa do processo de assimilação, a obliteração. A força de dissociabilidade é função das variáveis da estrutura cognitiva (este tópico ficará mais claro adiante).

O limiar da disponibilidade é um parâmetro também variável que depende de variáveis da estrutura cognitiva e também afetivas, como atenção, ansiedade, alteração de contexto, etc (op. cit., p.109). Este limiar é o ponto no qual a força de dissociabilidade se torna tão pequena a ponto de as ideias não serem mais reproduzíveis separadamente, senão como o produto interacional modificado. A partir deste ponto começa-se a adentrar a etapa de obliteração.

### 3.2.3 A obliteração

Aprendemos e retemos ideias. Porém, para Ausubel, a cognição adota um procedimento econômico de redução gradual das idéias adquiridas às variantes reduzidas e menos diferenciadas das proposições e aos conceitos mais estáveis e gerais. Desta forma, a estrutura cognitiva vai reduzindo os significados das ideias mais específicas e diferenciadas aos significados das idéias mais gerais que as ancoram para permitir ao indivíduo que possa continuar aprendendo.

O processo descrito brevemente acima é o que Ausubel denomina obliteração ou esquecimento. Tal processo ocorre depois que a força de dissociabilidade alcança um nível que está abaixo do limiar de disponibilidade (LD), o que torna as ideias indissociáveis e como consequência da tendência reducionista da memória, o produto interacional modificado é reduzido ao próprio subsunçor modificado. Repetindo os processos da etapa de assimilação, temos:



Assim, no processo de obliteração há redução do composto  $A'a'$  ao subsunçor modificado. Começamos, então, com um conhecimento prévio  $A$  e terminamos o processo de assimilação significativa com o subsunçor modificado  $A'$ . No processo de aprendizagem mecânica, contrariamente, não há diferenciação dos subsunçores, em virtude das relações arbitrárias e literais estabelecidas entre o material a ser aprendido e os subsunçores.

Vamos ressaltar aqui três pontos importantes para explicar alguns processos de esquecimento que ocorrem durante a assimilação de novas unidades de conhecimento predicativo, pois estes fatores elevam o limiar da disponibilidade. Estes são:

- choque da aprendizagem inicial;
- competição de memórias alternativas ou conflituosas;
- repressão.

O choque de aprendizagem inicial eleva o limiar da disponibilidade, pois nesta condição a estrutura cognitiva é relativamente menos diferenciada, clara e estável. A competição de memórias alternativas conflituosas, que está associada à interferência, influencia na discriminabilidade das idéias na estrutura cognitiva, enquanto a repressão é um fator motivacional que influencia na aprendizagem, pois atitudes negativas em relação ao conteúdo a ser aprendido, geram propensão ao esquecimento pela mesma razão que os fatores supracitados.

O processo de obliteração está sempre presente na assimilação de novos conteúdos, logo devemos estar atentos para a sua ocorrência. É importante, pois, lembrar que a aprendizagem significativa (produto) não é inobliterável.

### 3.2.4 Tipos diferentes de assimilação de conhecimento

Já tratamos das etapas do processo de assimilação, mas não especificamos o teor de generalidade das ideias prévias e das ideias ancoradas. Ausubel enumera três formas distintas de aprendizagem: aprendizagem por subordinação, aprendizagem por superordenação e aprendizagem por combinação.

A aprendizagem por subordinação ocorre quando a ideia âncora é mais geral e abstrata do que a ideia nova a ser aprendida. Disto resulta que ao fim do processo de assimilação temos, sem nenhum problema, o subsunçor mais geral modificado de acordo com o que foi comentado anteriormente.

Este tipo de aprendizagem é, ainda, dividido em dois tipos: derivativa ou correlativa. A aprendizagem por subordinação é derivativa se a nova ideia a ser aprendida é uma ilustração do subsunçor mais geral como, por exemplo, no caso de aprendizagem do campo elétrico gerado por uma esfera carregada ( $a$ ) a partir do conceito de campo elétrico gerado por distribuição contínua de carga ( $A$ ). O processo de assimilação resultante deste tipo de aprendizagem é caracterizado pelo fato de que a obliteração ocorre mais rapidamente, embora a assimilação ocorra com menos esforço cognitivo, pois o produto interacional  $A'a'$  é substituído, sem problemas, pelo subsunçor mais geral  $A'$  que abarca o exemplo específico (Ausubel, 1980, p.49).

A aprendizagem por subordinação é do tipo correlativa se a ideia nova a ser aprendida é uma extensão, elaboração ou qualificação dos subsunçores (ibid). Em virtude de o seu significado não poder ser representado adequadamente pelos subsunçores mais gerais, a obliteração no processo de assimilação no qual este tipo de aprendizagem está implícito, ocorre mais lentamente. A aprendizagem dos conceitos de campo elétrico gerado por distribuição discreta ( $a$ ) e por distribuição contínua ( $b$ ) a partir do conceito mais geral de campo elétrico ( $A$ ) são casos típicos de subordinação correlativa.

A aprendizagem pode, também, ocorrer por superordenação quando um conjunto de subsunçores é relacionado de forma não-arbitrária a uma ideia nova mais geral e inclusiva que abrange estes subsunçores. No caso de superordenação conceitual, diz-se que os conceitos aprendidos possuem atributos essenciais que englobam as ideias que subordinam, isto é, os subsunçores. A aprendizagem do teorema de Noether ( $a$ )

a partir de simetrias e leis de conservação específicas (conservação de momentum –  $A$  –, conservação de momentum angular –  $B$  –) previamente conhecidas configura um caso de aprendizagem por superordenação.

A obliteração de aprendizados superordenados ocorre, entretanto, de maneira diferente do esquecimento de aprendizados subordinados. Na superordenação, a ideia a ser aprendida, embora mais geral, é relativamente menos estável que os subsunçores que subordina. Ocorre inicialmente, portanto, uma redução do significado superordenado mais instável às ideias subordinadas mais estáveis. Depois da diferenciação desta ideia sobreordenada, ocorre uma sequente estabilização da mesma, que passa a ser mais estável que os subsunçores. A obliteração nesta fase ocorre, então, como no sentido usual, ou seja, no sentido de reduzir as ideias mais específicas às mais gerais. Como exemplo deste caso, apresentamos a aprendizagem do conceito de variável dinâmica a partir dos subsunçores posição e momentum mais específicos, porém inicialmente mais estáveis.

Ainda podemos ter um tipo de aprendizagem que ocorre quando as ideias novas não são nem superordenadas nem subordinadas a algumas ideias particulares na estrutura cognitiva. Tal tipo de aprendizagem é denominado aprendizagem por combinação e se processa com a interação de unidades que interagem com a estrutura cognitiva como um todo.

Até aqui descrevemos, de forma geral, como ocorre a assimilação de novas ideias e discutimos também como ocorre este processo ao nível de generalidade e inclusividade destas ideias. Deve-se falar ainda dos fatores que tornam as estruturas cognitivas e, portanto, os processos assimilativos, diferentes entre pessoas. Estes fatores são denominados variáveis da estrutura cognitiva.

### 3.3 Variáveis da estrutura cognitiva

A estrutura cognitiva, segundo Ausubel é o fator isolado mais importante no processo de aprendizagem (op. cit., p.137). Isto significa que ela é dotada de variáveis que nos informam acerca do poder cognitivo de aquisição de conhecimento, possuído por um dado indivíduo. Tais variáveis serão discutidas na sequência de maneira mais pormenorizada.

Para Ausubel, a clareza, a estabilidade e organização da estrutura cognitiva, são fatores que propiciam a emergência de significados não ambíguos e precisos, cuja força de dissociabilidade é alta, o que aumenta a retenção e a disponibilidade destes. Caso contrário, os significados gerados são rapidamente obliterados, dada a baixa estabilidade (op. cit., p.138).

O autor afirma, ainda, que devido à maior estabilidade dos subsunçores mais gerais, os detalhes de uma disciplina são mais bem aprendidos se vinculados a estes subsunçores de uma forma estrutural, para que os significados emergentes tenham maior retenção (ibid). Ele afirma, ainda, que é possível manipular a estrutura cognitiva deliberadamente, através de princípios programáticos (a serem discutidos em outra ocasião) para que a aprendizagem opere no seu ponto ótimo.

Ausubel (ibid) ressalta que:

*”As mais importantes variáveis de estrutura cognitiva consideradas... são (1) a disponibilidade, na estrutura cognitiva do aprendiz, de idéias de esteio [subsunçores] especialmente relevantes num nível ótimo de inclusividade, generalidade e abstração;*

*(2) a extensão na qual tais idéias são discrimináveis de conceitos similares e diferentes (mas potencialmente passíveis de confusão) no material de aprendizagem; e (3) a estabilidade e clareza das idéias de esteio [subsunçores]<sup>4</sup>”.*

### 3.3.1 Disponibilidade

A disponibilidade de subsunçores a um nível apropriado de abstração e inclusividade, certamente influencia na aprendizagem de material logicamente significativo, dado que provê uma possibilidade de subordinação (correlativa ou derivativa), aprendizagem por combinação ou superordenação (op. cit., p.141). Se não existem subsunçores nesta condição, a única possibilidade é a aprendizagem mecânica. Pode ocorrer de haver um conjunto de ideias tangencialmente relevantes que podem assimilar as ideias novas, porém a aprendizagem será, provavelmente, uma combinação ou subordinação, cuja ligação será de pouca relevância, o que gera significados instáveis e com pouca longevidade (ibid).

O processo supracitado é passível de ocorrer mesmo se o aprendiz tem as idéias prévias relevantes no nível adequado de abstração e generalidade mas não percebe que o material a ser aprendido pode ser relacionado de forma não-arbitrária e não-literal à estrutura cognitiva. Na Física, podemos mencionar o exemplo do aluno que possui os conceitos de campo elétrico e carga elétrica e não percebe a relação destes com o conceito de polarização, por exemplo.

Ausubel sugere, então, que comecemos o processo de ensino a partir dos conceitos mais gerais e inclusivos de forma que estes sejam percebidos pelo estudante como potencialmente significativos, ou seja, relacionáveis aos seus conceitos prévios, supostos num nível ótimo de inclusividade, abstração e generalidade, para que os novos significados se tornem mais estáveis (dado o aumento da força dissociativa).

### 3.3.2 Discriminabilidade

O nível de discriminação dos subsunçores entre si e em relação ao material a ser aprendido é uma variável importante da estrutura cognitiva, a qual Ausubel denomina discriminabilidade. Quando são assimiladas extensões de subsunçores, se elas não são discrimináveis em relação aos últimos, a força de dissociabilidade assume uma magnitude tal que promove a obliteração mais rapidamente, isto é, as ideias rapidamente se tornam indissociáveis e o produto interacional é reduzido ao próprio subsunçor (já que  $a = A$ ), o que diminui a retenção. Desta forma, apenas variantes categóricas discrimináveis ou significados estabelecidos mais inclusivos possuem potencialidades de retenção a longo prazo (op. cit., p.142).

Percebe-se, então que a discriminabilidade tem uma influência notável na retenção, que é o intervalo de tempo que mais nos interessa tornar longo no processo de aprendizagem.

---

<sup>4</sup>Na obra referenciada, tradução para o português do texto original de Ausubel intitulado *Educational Psychology: a cognitive view*, o conceito de subsunçor, mais popular, aparece com o nome de *idéia esteio*.

### 3.3.3 Estabilidade e clareza dos subsunçores

Para Ausubel, a terceira variável importante da estrutura cognitiva é a estabilidade (e clareza) dos subsunçores (ibid). Para o autor, esta variável influencia tanto na etapa da aprendizagem quanto na retenção, pois ideias claras e estáveis oferecem uma possibilidade de relação adequada, além de fortes subsunçores para materiais potencialmente significativos. A clareza (e a estabilidade) está muito relacionada à discriminabilidade dos subsunçores em relação a idéias novas e uma depende da outra para a facilitação da retenção.

## 3.4 Princípios programáticos e estratégias de ensino

Tendo discutido brevemente como as variáveis da estrutura cognitiva influenciam o processo de assimilação, vamos agora expor os princípios propostos por Ausubel para manipular deliberadamente a estrutura cognitiva no intuito de alcançar um ponto ótimo de aprendizagem.

Ausubel, ao contrário de outros autores, não torna o estudo dos processos de aprendizagem um fim em si mesmo, mas propõe princípios programáticos de ensino para facilitar a aprendizagem (e conseqüentemente a retenção) significativa. Esboçaremos, a seguir, em algumas linhas o uso destes princípios como fundamentação para um método de ensino segundo a teoria.

### 3.4.1 Diferenciação progressiva

O princípio programático da diferenciação progressiva impõe que devemos programar o conteúdo de forma que as ideias mais inclusivas e gerais do material a ser ensinado sejam apresentadas em primeiro lugar. Tais ideias devem ser diferenciadas, então, progressivamente em termos de detalhe e especificidade (op. cit., p.159).

Ausubel justifica que a forma generalidade-particularidade é presumivelmente correspondente à seqüência natural de aquisição da consciência e sofisticação cognitiva adotada por seres humanos no domínio de um campo desconhecido de um dado corpo de conhecimentos. O autor afirma ainda que isto corresponde ao modo em que o conhecimento é representado, organizado e armazenado no sistema cognitivo (ibid).

Como consequência destas premissas é possível postular segundo as palavras de Ausubel que:

*”... (1) É menos difícil para os seres humanos compreender os aspectos diferenciados de um todo previamente aprendido, mais inclusivo, do que formular o todo inclusivo a partir de suas partes diferenciadas previamente aprendidas. (2) Num indivíduo, a organização do conteúdo de uma disciplina particular consiste de uma estrutura hierárquica na sua própria mente. As idéias mais inclusivas ocupam uma posição no topo desta estrutura e abrangem proposições, conceitos e dados factuais progressivamente inclusivos e mais diferenciados.” (ibid)*

Tomando como verdadeiros estes postulados, é razoável admitir, então, que a aprendizagem e a retenção ótimas (levando em conta a estabilidade e disponibili-

dade de subsunçores na estrutura cognitiva) podem ocorrer quando os professores implementam o princípio da diferenciação progressiva.

Ausubel afirma ainda que, embora este princípio seja relativamente autoevidente, muitos livros texto não o adotam. Segundo Ausubel:

*”A prática mais comum é segregar materiais topicamente homogêneos em capítulos e subcapítulos separados e ordenar a organização dos tópicos e subtópicos (e o material em cada um deles) somente com base na relação tópica, sem considerar o seu nível relativo de abstração, generalidade e inclusividade... Desta forma, na maioria dos casos exige-se que os estudantes apreendam os detalhes de disciplinas novas e não familiares antes que tenham adquirido um corpo adequado de subordinadores relevantes.”* (op. cit., p.160)

### 3.4.2 Reconciliação integradora

Podemos ver que o princípio da diferenciação progressiva leva implicitamente em seu bojo, à manipulação de duas importantes variáveis da estrutura cognitiva: a estabilidade (tomada como premissa de que conceitos mais gerais são, via de regra, mais estáveis) e a disponibilidade de subsunçores num nível ótimo de inclusividade.

Ausubel nos provê de um segundo princípio que nos poupa de diferenciar infinitamente uma unidade de conhecimento predicativo. Este princípio propõe que sejam apresentadas e ressaltadas as semelhanças e diferenças entre outros conceitos a serem aprendidos a partir daqueles que os subsumem. Tal princípio é o da reconciliação integradora, que facilita a manipulação de outra variável da estrutura cognitiva, a discriminabilidade.

O princípio da reconciliação integradora impõe que devem ser explicitadas relações entre as ideias apresentadas de modo que sejam assinaladas semelhanças e diferenças significativas, e de reconciliar inconsistências reais ou aparentes (op. cit., 167).

Percebe-se, então, que o não uso da técnica pode dificultar a aprendizagem na medida em que, se conceitos diferentes são percebidos como idênticos, não ocorrerá aprendizagem, pois a ideia nova será obliterada ao subsunçor prévio e se conceitos diferentes são captados como ambíguos ou incoerentes, os significados originários da aprendizagem são igualmente instáveis e não longevos.

Pode-se aplicar o princípio da reconciliação integradora para o ensino de um assunto organizado em linhas paralelas, ou seja, quando são apresentados materiais sem dependência sequencial intrínseca entre eles. Tais materiais, embora independentes intrinsecamente, podem ser postos a interagir cognitivamente (ensino de Mecânica Clássica e Mecânica Quântica, ou o ensino de epistemologia ao se trabalhar distintos epistemólogos, por exemplo). Desta forma Ausubel afirma que:

*”Elementos previamente aprendidos de uma sequência paralela desempenham um papel orientador subordinador em relação aos elementos apresentados posteriormente”* (op.cit., p. 162).

Ausubel nos fala ainda sobre um problema que ocorre frequentemente: as aparentes contradições entre subsunçores e ideias a aprender. O autor afirma que o aprendiz pode considerar as novas proposições como não válidas, pode compartimentalizá-las como entidades isoladas afastadas dos subsunçores (ligação arbitrária

da unidade à estrutura cognitiva<sup>5</sup>), ou tentar uma reconciliação integradora sob um subsunçor mais inclusivo. Os dois primeiros problemas podem ser resolvidos através do uso deste princípio, enquanto a terceira possibilidade pode ser facilitada por ele.

### Organização sequencial

Alguns conceitos planejados para serem ensinados possuem dependência sequencial natural, da qual se pode tirar proveito para o ensino. A aprendizagem verbal e retenção significativas podem ser facilitadas e melhoradas através do planejamento do conteúdo segundo uma sequência natural que vincule novos tópicos a unidades anteriormente aprendidas (op. cit., p.164).

Para Ausubel:

*"A organização sequencial das tarefas de aprendizagem se apóia, em parte, no efeito facilitador geral da disponibilidade das idéias esteio [subsunçores] relevantes na estrutura cognitiva, sobre a aprendizagem significativa e a retenção. Para cada tópico dado, contudo, há o problema da averiguação acerca de qual a sequência particular mais eficiente. Isto envolve considerações de análise lógica da tarefa, diferenciação progressiva, nível evolutivo do funcionamento cognitivo, reconciliação integradora e hierarquias de aprendizagem"* (ibid).

### 3.4.3 Consolidação e prática

A consolidação (mestria) das lições prévias é outro princípio programático fundamental no planejamento de uma estrutura conceitual a ser ensinada. A consolidação consiste na certificação de que o conteúdo prévio aprendido está disponível, estável e diferenciado na estrutura cognitiva antes que um novo conteúdo seja apresentado. Tal princípio pode ser implementado através de prática, revisão, clarificação e correção, por exemplo (op. cit., p.165).

Este princípio é fundamental para a manipulação das variáveis da estrutura cognitiva. Consolidar o conhecimento prévio antes de se adentrar uma nova tarefa de aprendizagem aumenta a disponibilidade e a estabilidade (e clareza) dos subsunçores na estrutura cognitiva, o que conseqüentemente os torna potencialmente distinguíveis de novas idéias possivelmente confusas ou ambíguas, ou seja, promove o aumento da discriminabilidade entre conceitos.

## 3.5 A Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud

A teoria da assimilação nos provê de mecanismos explicativos poderosos para processos cognitivos que envolvem o conhecimento predicativo, isto é, aquele que pode ser expresso verbalmente. A teoria, no entanto, não provê a fundamentação para explorar o conhecimento operatório, isto é, o saber-fazer, que não é tão explícito, formalizado e articulado como o conhecimento predicativo. A evolução do conhecimento num dado conteúdo inclui, invariavelmente, esta modalidade de conhecimento que, por este motivo, não pode ser ignorada. É por esta razão que introduziremos

---

<sup>5</sup>Caso particular de Aprendizagem Mecânica

aspectos da teoria formulada por Gérard Vergnaud, denominada teoria dos campos conceituais.

### 3.5.1 Duas formas de construção do conhecimento: conhecimento predicativo e conhecimento operatório

Quando se usam as expressões *conhecimento operatório* e *conhecimento predicativo*, quer-se distinguir, por um lado, um conhecimento implícito na ação, de um conhecimento que é explícito, formalizado e articulado, por outro. Vergnaud destaca bem esta diferença e nos provê de uma teoria que permite explicar e descrever os processos cognitivos que ocorrem no conhecimento predicativo.

O primeiro ponto a ser discutido é o de a ação carregar conhecimentos (proposições e conceitos) que são, via de regra, implícitos e, muitas vezes, não explícitáveis. Vergnaud critica a tentativa de ignorar este conhecimento:

*“... alguns deles [psicólogos cognitivos] desenvolveram uma abordagem que tenta evitar o problema de opor o conhecimento procedimental [operatório] ao conhecimento declarativo [predicativo], e esvaziando o conhecimento procedimental de conceitos e teoremas. Eu vejo esta tentativa como uma visão esquizofrênica da cognição.”* (Vergnaud, 1998, p.173)

Por isto, Vergnaud considera que a pedra angular da cognição é a conceitualização (ibid). Afinal, a construção de conceitos e teoremas está encrustada nas duas formas de conhecimento, embora a construção e organização destes nas duas categorias sejam diferenciadas.

Outra distinção explorada por Vergnaud é o fato de que o conhecimento na sua forma predicativa pode ser debatido, enquanto o conhecimento na forma operatória, por ser implícito, não. Segundo o autor

*“Uma proposição explícita pode ser debatida, uma proposição tida por verdadeira de maneira totalmente implícita, não pode ser. Assim, pois, o caráter do conhecimento muda se este é comunicável, debatido e compartilhado”* (Vergnaud, 1996, p.204, grifo nosso).

Devemos, então, tomar cuidado, pois aquilo que não se explicita pode ser uma fonte de obstáculos epistemológicos e deve ser clarificado para a facilitação da aprendizagem. Para isto, muitas vezes, é necessário colocar ao aprendiz uma gama de situações potencialmente significativas para que ele possa organizar o seu “saber-fazer”, com a ajuda de um professor-mediador. Disto resulta que o domínio de um campo específico de conhecimento demanda tempo, dado que um sujeito deve dominar várias das situações que o compõem.

Vergnaud ainda discute a existência de duas correntes epistemológicas vinculadas à Matemática: os formalistas e os intuicionistas. Segundo o autor, os primeiros acreditavam que tudo deveria ser expresso formalmente, sem ambigüidade, sendo a última meta da área, reduzir a verdade matemática à coerência sintática de formas e sistemas simbólicos (Vergnaud et al., 1990, p.20). Desta forma, a concepção formalista falha se as idéias matemáticas forem implícitas. O autor nos diz que:

*”O que é errado na visão formalística é sua cegueira ao fato de as idéias matemáticas crescerem e mudarem durante um largo período de desenvolvimento cognitivo, através de uma variedade de situações e atividades, e que o conhecimento formal e axiomatizado pode ser somente o último estado de desenvolvimento do conhecimento de um estudante, a pequena porção do iceberg”* (op. cit., p.21).

É importante ressaltar aqui que não criticamos a formalização e explicitação do conhecimento, porém criticamos, embasados no pensamento de Vergnaud, o radicalismo de pesquisadores que considerem irrelevante o conhecimento operatório no processo de ensino-aprendizagem. Podemos expressar isto brevemente no discurso do psicólogo do desenvolvimento:

*”Então, um dos problemas do ensino é desenvolver ao mesmo tempo a forma operatória do conhecimento, isto é, o saber-fazer, e a forma predicativa do conhecimento, isto é, saber explicitar os objetos e suas propriedades”*(Vergnaud, 1996, p.12).

É, então, nesta dialética entre conhecimento predicativo e conhecimento operatório que buscamos fundamentar a necessidade do uso das duas teorias no trabalho.

### 3.5.2 A noção esquema

Para Vergnaud, a maior parte dos nossos conhecimentos são competências que se desenvolvem, diferenciam, melhoram e se deterioram ao longo de nossa experiência e são funções das situações com as quais nos confrontamos (Vergnaud, 1996, p.200). Para dar conta desta característica, Vergnaud se apropria do conceito piagetiano de esquema.

Para o autor o esquema é a organização invariante do comportamento frente a uma classe de situações. Tais esquemas são totalidades dinâmicas funcionais, que não se restringem à atividade sensório-motora, mas também à atividade intelectual (ibid).

As situações às quais Vergnaud se refere, então, não são somente aquelas que envolvem o aparelho sensório-motor, como apanhar um objeto, ou fazer um gesto, por exemplo, embora incluam também estas. Estas situações-problema envolvem, também, aspectos intelectuais-cognitivos como soluções e “gerenciamento” de problemas específicos a um campo de conhecimento, tais como a Mecânica Quântica ou a Álgebra Linear.

Por outro lado, o psicólogo resalta que o nosso conhecimento adquire sentido a partir das situações que progressivamente dominamos. Para uma dada classe de situações temos esquemas que foram formulados ou acomodados a partir de confrontos com situações prévias da mesma classe. Para uma nova classe de situações, é necessária a reformulação de esquemas prévios para a execução da atividade.

Um esquema não é um estereótipo, não é um comportamento invariante, mas, antes, a organização invariante do comportamento. Para que ocorra um esquema, deve haver conhecimento na forma operatória e, em função disto, o esquema será composto de alguns itens que devem ser ressaltados<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>Neste ponto surge a primeira diferença do conceito de esquema segundo Vergnaud, em relação ao conceito original de esquema formulado por Piaget.

- objetivos e antecipações
- regras de ação, de aprovisionamento e de controle de informação;
- invariantes operatórios;
- possibilidades de inferência.

Por objetivos e antecipações, Vergnaud quer afirmar que um esquema se dirige a uma classe de situações em que o sujeito pode descrever uma finalidade da atividade, em que pode esperar certos efeitos ou fenômenos (op. cit., p.201). Isto está associado à previsão de uma solução para um dado problema.

As regras de ação permitem a geração da continuidade das ações de transformação da realidade, do aprovisionamento de informação e dos controles e resultados da ação, o que permite garantir o êxito da atividade num contexto de permanente evolução (ibid).

Invariantes operatórios são entes que constituem a base conceitual implícita ou explícita, que permite a obtenção da informação pertinente e a inferência, a partir das informações e dos objetivos a serem alcançados, das regras de ação mais pertinentes. Os invariantes operatórios são divididos em conceitos-em-ação e teoremas-em-ação (ibid). Tais categorias formam a base da conceitualização do esquema e serão discutidas de forma mais detalhada adiante.

O esquema ainda leva em seu bojo possibilidades de inferência, pois toda atividade requer cálculos do tipo "aqui e agora" em situação ou inferências do tipo "se temos  $x$ , então ocorrerá  $y$ " (op. cit., p.202), que são regras condicionais.

O esquema é a unidade de análise fundamental de Vergnaud usada para o estudo do sujeito-em-situação e figura como elemento crucial para a conceitualização do real (núcleo do desenvolvimento cognitivo), pois está atrelado às situações. Desta forma, Vergnaud afirma ter mais sentido tratarmos da interação esquema-situação ao invés da interação sujeito-objeto.

Para Vergnaud, então:

*"... a educação e a formação têm que contribuir a formar um repertório diversificado de esquemas evitando, ademais, que estes esquemas não se convertam em esteriótipos ancilosados"* (op. cit., p.203).

### 3.5.3 A noção de Campo Conceitual

Vergnaud propõe uma teoria para o estudo de como as pessoas dominam um dado conhecimento específico. A sua proposta é uma continuação natural da idéia de que os esquemas possuem conteúdos que estão presentes nos denominados invariantes operatórios, hipótese não levada em conta por Piaget, que se preocupava com o desenvolvimento de estruturas lógicas gerais de pensamento.

Para o autor, campos conceituais são:

*"... amplos conjuntos de situações cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos, e representações simbólicas que estão conectadas umas às outras"* (Vergnaud, 1990, p.23).

A definição é clarificada quando é introduzida a noção de conceito segundo Vergnaud. Para ele, um conceito é um triplete de conjuntos:

$$C = (S, I, R),$$

onde  $S$  é o conjunto de situações que fazem o conceito ser útil e significativo,  $I$  é um conjunto de invariantes que podem ser usados por indivíduos para lidar com as situações (invariantes operatórios) e  $R$  é o conjunto de representações, linguísticas, gráficas ou gestuais, que podem ser usadas para representar estes invariantes, situações e procedimentos (Vergnaud, 1997, p.6).

Fica clara, então, a proposição de que o sujeito domina um dado campo conceitual a partir da interação dos seus esquemas com as situações em que é posto. Os esquemas são compostos de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, que são os conteúdos relativos ao campo conceitual em questão. A partir destes o sujeito, junto com os outros mecanismos presentes no esquema, domina as situações relativas a um dado campo conceitual.

Resta-nos, então, definir, segundo Vergnaud, o que são teoremas-em-ação e conceitos-em-ação. Para ele:

*"Um teorema-em-ação é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real; um conceito-em-ação é uma categoria de pensamento considerada como pertinente"* (Vergnaud, 1996, p.202).

E ainda:

*"O principal interesse teórico do esquema é proporcionar o vínculo imprescindível entre a conduta e a representação. Por outra parte, são os invariantes operatórios que formam a articulação essencial, já que a percepção, a busca e a seleção de informação, se baseiam inteiramente no sistema de conceitos-em-ação disponíveis no sujeito (objetos, atributos, relações, condições, circunstâncias) e nos teoremas-em-ação subjacentes em sua conduta"* (ibid).

É necessário, ainda, detalhar a distinção entre os dois conceitos. Os esquemas precisam de conceitos, entes fundamentais à categorização, pois na ação selecionamos uma pequena parte da informação disponível e para que esta seleção ocorra devemos ter conceitos que para Vergnaud significam objetos, classes, predicados, condições que são ou não relevantes no domínio de uma dada situação (Vergnaud, 1998, p.172).

Teoremas são, por outro lado, falsos ou verdadeiros. Tal característica oferece a possibilidade de realizar a concretude da idéia de uma representação computável. Em outras palavras, a existência de teoremas, que podem ser verdadeiros ou falsos, nos permite raciocinar em termos de inferências e de antecipações de eventos (ibid).

Deve haver também, em um campo conceitual, representações simbólicas que possibilitem representar estes conceitos e teoremas. Algumas representações são mais potentes que outras, mas não podem ser manipuladas antes que o sujeito incorpore o seu significado. Diagramas de Euler-Venn são representações menos poderosas que equações, entretanto, podem ser mais úteis do que equações se o uso destas últimas não for factível para o sujeito, por exemplo.

Munidos destas ideias, prosseguiremos, na sequência, distinguindo a metodologia de pesquisa da metodologia de ensino usada na intervenção didática planejada.

As duas metodologias estão embasadas no referencial teórico aqui mencionado, pois é preciso, no processo de ensino, como já apontado por Vergnaud, desenvolver simultaneamente a forma predicativa e a forma operatória do conhecimento. Estes desenvolvimentos devem ser analisados, então, no processo de pesquisa.

# Capítulo 4

## Metodologia

Neste capítulo discutiremos as metodologias utilizadas no trabalho realizado, tanto no que concerne o processo de ensino e de pesquisa adotados. O referencial teórico escolhido, a saber, o da aprendizagem significativa introduzido por D. P. Ausubel e o da Teoria dos Campos Conceituais e de G. Vergnaud. embasa as abordagens metodológicas.

### 4.1 Metodologia de ensino

O objeto de ensino escolhido para este trabalho é um corpo de conceitos considerados básicos em um aprendizado introdutório de MQ. Foi preparado material didático específico para apresentar em aulas de curso de licenciatura em Física e de Mestrado Profissional em Ensino de Física. O material escrito foi distribuído aos alunos para facilitar o acompanhamento do conteúdo desenvolvido em aulas. Os encontros com os alunos, com duração de duas horas-aula em geral, se caracterizaram por aulas de natureza expositiva, entremeadas por perguntas dirigidas aos alunos incentivando sua participação em discussões que propiciavam a manifestação dos mesmos sobre a matéria. Propiciou-se, com tais procedimentos, dar às aulas um caráter de diálogo. Foram também distribuídas aos alunos em todas as aulas listas de problemas a serem respondidas dentro ou fora da sala de aula, inclusive com elaboração de mapas conceituais. Além destes procedimentos foram realizadas avaliações escritas e entrevistas com alguns dos alunos cujo enfoque dominante foi o de propiciar ao docente a percepção sobre o aprendizado dos alunos.

#### 4.1.1 Conteúdo abordado na proposta didática

O conteúdo abordado na proposta didática compreendeu os conceitos de *sistema físico*, *variáveis dinâmicas*, *estado de um sistema físico* e *evolução temporal* (do estado ou das variáveis dinâmicas). Entendemos que estes conceitos estão entre os mais gerais e inclusivos em MQ (e são também importantes na FC, a despeito de algumas diferenças), logo, são mais facilmente assimilados à estrutura cognitiva, possuindo maior potencial para serem diferenciados posteriormente. Entendemos, ademais, que a aquisição significativa de conteúdos de Mecânica Quântica deve constituir parte dos objetivos do Ensino de Física não só na Educação Superior como também na Educação Básica (mais precisamente no Ensino Médio).

É factível, também, esperar que tais conceitos tenham caráter integrador na estrutura cognitiva e que alguns deles, principalmente os de sistema físico e variáveis dinâmicas, sejam superordenados a partir dos subsunçores, mais específicos, dos estudantes, o que será discutido adiante. Tal superordenação pode, então, facilitar a diferenciação dos tais conceitos nos domínios das Físicas Clássica e Quântica, bem como dos conceitos de estado e de evolução temporal que estão correlacionados aos conceitos acima arrolados. A evidenciação de aspectos semelhantes e diferentes entre os conceitos pode facilitar a reconciliação integradora.

O conceito de *evolução temporal*, em especial, é o foco do estudo. As razões para verificar os processos cognitivos ocorrentes no domínio deste conceito são várias, porém destacaremos algumas de suma importância.

A primeira das razões é a importância intrínseca do conceito não só em MQ, mas também em toda a FC. A compreensão dos aspectos da evolução do estado do (ou das variáveis dinâmicas associadas ao) sistema nos permite ressaltar características bastante gerais como a causalidade ou mesmo a preditividade de um fenômeno físico, ou seja, conhecida a configuração inicial de um sistema físico e as interações nele ocorrente, podemos prever o futuro. Estes aspectos são pedras angulares na própria construção da Física.

O segundo fator a ser ressaltado é o de o tema ser pouco investigado, como foi possível verificar na revisão de literatura apresentada. Considerando que a evolução temporal é um atributo importantíssimo para o estudo da MQ (bem como suas diferenças em relação à FC), a pesquisa acerca dos processos cognitivos realizados na aquisição deste conceito é, pois, importante tanto para a produção de conhecimento na área, quanto para o planejamento de intervenções didáticas que facilitem a aprendizagem significativa do conteúdo.

Para se tratar do conceito de evolução temporal, é necessário especificar que ente físico sofre este tipo de modificação, o que nos leva aos conceitos de estado e de variáveis dinâmicas, conceitos igualmente importantes tanto no estudo da FC quanto da FQ.

O conceito de estado, fundamental na teoria quântica, surge de forma relativamente direta na teoria, porém apresentado muitas vezes como algo completamente novo, o que pode dificultar, de alguma forma, a assimilação do mesmo. Em cursos convencionais de Teoria Quântica, o estado é associado a um vetor (no formalismo de Dirac) que é muitas vezes, segundo Singh (2008), por exemplo, mal interpretado pelos estudantes. Deve-se lembrar que um conceito associado à estrutura cognitiva de forma isolada e arbitrária, conduz à aprendizagem mecânica, cuja força de dissociabilidade é discreta e, portanto, cai abaixo do limiar da disponibilidade muito rapidamente, o que implica em uma obliteração<sup>1</sup> rápida.

O conceito de estado como um vetor é por nós apresentado como representação e não como o conceito propriamente dito, isto é, os atributos essenciais que compõem este conceito estão associados ao estado ser um ente físico que nos dá a informação acerca dos observáveis físicos que queremos medir (amplitudes de probabilidade e valores possíveis de serem obtidos na medição).

A representação vetorial foi, então, planejada para ser apresentada depois da

---

<sup>1</sup>Deve-se lembrar, ainda, que no processo de aprendizagem mecânica não há modificação dos subsunçores e, desta forma, a assimilação não ocorre no sentido de tornar mais “madura” a estrutura cognitiva.

explicitação de uma "definição"<sup>2</sup> para o conceito através de situações da FC e da FQ.

O conceito de estado está, então, associado de forma estreita ao de variáveis dinâmicas que são os observáveis físicos associados a um sistema. O conhecimento prévio dos alunos (de Ensino Superior – curso de Física) foi suposto tal que contivesse disponíveis conceitos como: posição, velocidade (momentum – pouco trabalhado na FC), campo elétrico, energia, pressão, etc, dado o nível de instrução que já tiveram (todos os alunos já cursaram as Físicas do ciclo básico). Tais conceitos são superordenados pelo conceito mais geral de variáveis dinâmicas, o que foi corroborado posteriormente na investigação. Alguns destes conceitos parecem mais estáveis que outros, porém este aspecto será pormenorizado na seção em que tratamos dos resultados.

O conceito de variáveis dinâmicas em MQ deve, ainda, diferenciado em variáveis dinâmicas compatíveis, que são observáveis possíveis de serem determinados simultaneamente<sup>3</sup> (caracterizam um mesmo estado), e em variáveis dinâmicas incompatíveis, os observáveis que não possuem tal característica. Isto foi explorado através da situação do experimento de Stern-Gerlach, cuja aplicabilidade didática será discutida posteriormente.

Os conceitos de estado e de variáveis dinâmicas estão vinculados ao conceito mais primário de sistema físico que é, portanto, o que primeiro queremos estudar. Este conceito envolve objetos caracterizados por atributos como massa, carga, spin, etc., e que interagem uns com os outros via interações conhecidas, a saber, eletromagnética, fraca, forte e gravitacional. Tal conceito, assim como o de variáveis dinâmicas é, também, um superordenador conceitual de casos que dele derivam como, por exemplo, sistema massa-mola, sistema planetário, dipolo elétrico, gás ideal, átomo de hidrogênio, etc, intrinsecamente diferentes entre si e que precisam, portanto, de relações físicas que descrevam sua dinâmica, tanto pela modificação temporal do estado do sistema quanto pela evolução temporal das variáveis dinâmicas<sup>4</sup>.

Seguindo a premissa de Gérard Vergnaud de que são as situações que dão sentido aos conceitos, isto é, que novos esquemas são produzidos a partir do confronto do sujeito com novas classes de situações, escolhemos alguns sistemas quânticos específicos sobre os quais foram feitos questionamentos no intuito de introduzir o conteúdo de MQ<sup>5</sup>. Tais situações giraram em torno, basicamente, do experimento de Stern-Gerlach e em menor frequência do átomo de hidrogênio e da molécula de amônia ( $NH_3$ ).

As razões que nos levaram a escolher o experimento de Stern-Gerlach foram basicamente duas: a primeira, a de que a percepção da existência de momentum angular intrínseco (não nulo) para entes como o elétron, o próton e o nêutron tem consequências importantes na natureza (existência de átomos, por exemplo), a segunda é que um sistema de spin meio (abstraindo de outros graus de liberdade) é um dos sistemas quânticos mais simples de ser tratado. Interessam-nos neste expe-

---

<sup>2</sup>Definição entre aspas significa explicitação dos atributos criteriais mais gerais do conceito. Na prática falamos de medições de diferentes variáveis dinâmicas

<sup>3</sup>Na prática falamos de medições de diferentes variáveis dinâmicas em um curto intervalo de tempo entre as medições, ou seja, medições sequenciais.

<sup>4</sup>Deve-se enfatizar que duas escolhas de descrição temporal, em particular, fazem com que separemos essas duas instâncias da evolução temporal em MQ, a saber a de Schrödinger e a de Heisenberg.

<sup>5</sup>Registre-se que o mesmo foi feito para iniciar o conteúdo mais geral também aplicado em FC.

rimento o estudo do momentum angular intrínseco (spin) do elétron, variável que analisamos em destaque. Restringimo-nos, então, ao subespaço do spin do elétron nas discussões do experimento, ou seja, a um sistema de spin meio que é um sistema de dois níveis.

O experimento de Stern-Gerlach tem, porém, alguns aspectos que podem dificultar, em certo grau, a assimilação, pois é completamente novo para muitos estudantes, o que torna necessário um maior intervalo de tempo para a análise do mesmo, para que os estudantes se adaptem às novas idéias e à fenomenologia do experimento. A interação entre um campo magnético não homogêneo e o momento magnético, aparentemente desconhecida pelos alunos, é uma das razões para afirmarmos isto.

Escolhemos outra situação-problema adicional ao experimento de Stern-Gerlach, o átomo de hidrogênio, pois é um sistema quântico basicamente conhecido pelos estudantes, não pela sua dinâmica, mas pela sua constituição. São conhecidos pelos alunos os fatos de nesse sistema ocorrer uma interação eletromagnética e o de ele ser composto por um próton e por um elétron, a despeito de sua dinâmica ser concebida pelos alunos como explicada pelo modelo do átomo de Bohr como assinala, por exemplo, Hadzidaki (2002, p.264). Aproveitou-se a oportunidade para a discussão do princípio da incerteza de Heisenberg, bem como a discussão da idéia de probabilidades e variáveis dinâmicas incompatíveis.

Foi adotado, também, o caso da molécula de amônia para a discussão de alguns conceitos, o que a torna uma intermediária entre uma situação-problema e um caso particular de idéia assimilável por subordinação derivativa, ou seja, um exemplo. Este sistema pode ser considerado uma situação no sentido de que propúnhamos o problema do tunelamento quântico, bem como apresentávamos aspectos relevantes não só ao conceito de evolução temporal, mas também dos conceitos anteriormente tratados.

#### **4.1.2 Uso de situações-problema como facilitadores de superordenação conceitual e o uso de princípios programáticos ausubelianos**

Entendemos que devemos justificar, em primeiro lugar, o porquê da proposição de situações em FC (MC, Teoria Eletromagnética) e em FQ não somente desde a teoria de Vergnaud, mas também pela teoria de Ausubel.

Os conceitos que queremos ensinar são mais inclusivos que os conceitos específicos dominados pelos alunos como, por exemplo, o conceito de sistema massa-mola que inclui uma interação e objetos específicos, sendo menos amplo que o conceito de sistema físico. A apresentação de situações em vários domínios da Física pode, então, teoricamente facilitar a superordenação conceitual, pois alguns dos conceitos a serem ensinados são mais gerais que os conceitos subsunçores nas estruturas cognitivas dos estudantes.

A primeira razão de planejarmos a superordenação conceitual leva em conta o fato de a MQ estar organizada em torno de conceitos relativamente gerais que podem ser diferenciados de forma progressiva e reintegrados, sob aspectos semelhantes e diferentes, na estrutura cognitiva, no intuito de o aluno construir uma estrutura de conhecimento em MQ desde o seu conhecimento prévio.

Outra razão que imaginamos ser um fator relevante a longo prazo, é a consonância necessária com a literatura acadêmica de MQ como, por exemplo, Messiah (1999)

e Sakurai (1994), que são obras amplamente usadas como referências em cursos de MQ (de graduação e pós-graduação) e carregam a nomenclatura por nós adotada. Tal adoção é proposital, pois cremos que os alunos mais interessados no conteúdo possam vir a buscar a ampliação de seu conhecimento na disciplina de MQ.

A idéia básica foi promover a superordenação conceitual dos conceitos apresentados como importantes para a Física como um todo e depois diferenciar progressivamente os conceitos nos domínios da FC e da FQ. A intenção foi, então, não enfatizar somente os aspectos em que a FQ difere da FC, mas também, os aspectos em que estas teorias são semelhantes.

Foi preparado, desta forma, um material de ensino (apêndice A<sup>6</sup>), ambos baseado nos princípios Ausubelianos mencionados anteriormente para a implementação da proposta didática. Os conceitos foram selecionados segundo a forma descrita. O curso estava pensado inicialmente para 24 horas-aula, pois havíamos planejado sessões de discussão mediadas pelo professor, porém, em virtude de dificuldades práticas (dificuldade em se conseguir uma turma disponível para a carga-horária planejada) o curso foi reduzido para 12 horas-aula. Duas implementações ocorreram em turmas de disciplinas distintas em nível de graduação cuja ementa incluía tópicos de MQ. Outra abordagem foi realizada em uma turma de pós-graduação e um estudo piloto, realizado em um curso de extensão, foi aplicado a professores do Ensino Médio, cujos resultados não serão narrados neste trabalho, justamente por se tratar de um estudo inicial cujos resultados influenciaram no sentido de ajustar alguns aspectos da proposta aqui discutida.

Usamos como metodologia de avaliação problemas de lápis-e-papel, entrevistas, notas de campo e mapas conceituais. As tarefas e as listas de tarefas usadas, durante as intervenções podem ser encontradas na seção 5.1 do capítulo 5, que expõe os instrumentos de pesquisa usados.

Estas tarefas tinham como temática central os conceitos apresentados em sala de aula e presentes no material de ensino produzido. Eram entregues em um dado dia e deveriam ser devolvidas resolvidas uma semana depois. Muitos alunos ficaram inadimplentes, o que acarretou uma perda de parte dos dados, uma vez que não realizaram qualquer das tarefas propostas. Desconsideramos estes sujeitos do processo de pesquisa, pois não podemos afirmar algo sobre como adquiriram conhecimento.

Uma dificuldade encontrada no processo de implementação, foi a de encontrar uma turma em que fosse possível a imersão do pesquisador por completo no contexto de pesquisa, devido à necessidade de planejamento prévio junto à comissão de graduação para a atuação do pesquisador em turmas de graduação em um período de tempo que não dispúnhamos.

Outro entrave encontrado foi a necessidade de seguimento do cronograma planejado pelos professores para as disciplinas que ministravam (associado à razão anteriormente exposta). Isto nos levou a condensar a proposta e diminuir espaços no processo de pesquisa tais como sessões de discussão e trabalhos em grupo. Listas de questões, uma para cada aula expositiva além de atividades extra-classe, permitiram reconfigurar para doze horas-aula a atividade desenvolvida.

Apesar das dificuldades, foi factível realizar um estudo exploratório acerca das concepções, implícitas e explícitas, carregadas pelos estudantes no processo de aprendizagem dos conceitos trabalhados.

---

<sup>6</sup>O texto de apoio é intitulado "Evolução Temporal em MQ: conceitos fundamentais para o seu estudo".

Na sequência discutiremos aspectos gerais da metodologia usada tanto para o estudo dos dados obtidos na pesquisa, como para a coleta destes dados.

## 4.2 Metodologia de pesquisa

### 4.2.1 A investigação qualitativa – aspectos gerais

O procedimento de pesquisa adotado no trabalho está associado à investigação qualitativa, bastante correlacionada a um paradigma denominado naturalista, que enxerga a realidade como possuidora de aspectos que evidenciam múltiplas formas. O fato de o significado ser considerado um ente cognitivo idiossincrático por nós, está, portanto, correlacionado ao fato de que a realidade é apreendida de forma individual, embora com muitas facetas compartilhadas que no caso de uma matéria de ensino, como a MQ, são aqueles aceitos no contexto dos usuários desta matéria (professores, físicos, etc).

Nossa problemática de pesquisa gira em torno de aspectos cognitivos relativos ao domínio de um dado campo do conhecimento, portanto, é necessário realizar-se recortes no processo de pesquisa. Não levaremos em conta fatores externos que independam do sujeito, como por exemplo, a influência do meio social no qual está imerso este indivíduo, embora os consideremos fundamentais para a análise do processo de desenvolvimento de habilidades e competências específicas.

Nosso olhar volta-se à cognição e à tentativa de descrever a dinâmica da parcela da estrutura cognitiva associada ao conhecimento de MQ sobretudo a partir do referencial teórico apresentado. A tarefa de descrição, porém, está relacionada de forma direta à metodologia de investigação qualitativa.

Deve-se destacar que a investigação qualitativa é interpretativa, descritiva. O detalhamento do objetivo de pesquisa é, portanto, fundamental. Os dados são obtidos a partir de palavras, imagens, e outros que são frutos de técnicas como redação de notas de campo, entrevistas, aplicação de testes discursivos, entre outros. Como o aspecto descritivo é uma das facetas reais relevantes da pesquisa qualitativa, a apresentação dos dados na sua forma o mais natural possível, torna-se extremamente necessária. Busca-se uma descrição interpretativa, persuasiva, detalhada de uma realidade construída.

Nada é dado, nada pode ser tratado como trivial para o pesquisador qualitativo, o que nos leva a considerar que muitas coisas podem emergir a partir destes dados e que cada palavra pode gerar uma alteração de significado.

Para Bogdan e Biklen (1994, p.50), o pesquisador qualitativo interessa-se mais pelo processo que pelo produto propriamente dito. Isto não significa que o produto perca totalmente sua importância nesta perspectiva, mas que não é o único foco da pesquisa. Processos de negociação e aquisição de significados em situação “formal” de ensino e em situações de resolução de problemas potencialmente significativos podem lançar luz sobre os produtos do processo de aprendizagem. Perguntas sobre o modo pelo qual as pessoas adquirem (ativamente) conhecimento em MQ nas formas predicativa e operatória estão, então, associadas às tentativas de resposta apresentadas neste trabalho.

Outro aspecto a ser ressaltado na investigação qualitativa é o de o significado ter importância vital na pesquisa qualitativa. Para obter rigor no que tange à percepção do significado, alguns pesquisadores usam abordagens de triangulação para

que se tenha maior certeza acerca do entendimento do processo. O questionamento aos sujeitos de pesquisa torna-se, também, fundamental, dado que pode facilitar a negociação de significados.

Bogdan e Biklen (op. cit., p.50) afirmam que a pesquisa qualitativa pode gerar uma teoria fundamentada nos dados, porém nosso objetivo é o inverso, dado que usaremos duas teorias de aprendizagem para analisar os registros de pesquisa. Discutiremos na sequência, portanto, o papel da teoria no processo de pesquisa qualitativa.

Para Bogdan e Biklen (op. cit., p.52):

*”O modo como utilizamos o conceito [de teoria] está muito mais de acordo com a utilização que lhe é dada em sociologia e antropologia, sendo semelhante ao termo paradigma (Ritzer, 1975). Um paradigma consiste num conjunto aberto de asserções, conceitos ou proposições logicamente relacionados e que orientam o pensamento e a investigação... Seja ou não explícita, toda a investigação se baseia numa orientação teórica.”*

A orientação teórica que adotamos (tanto Ausubel quanto Vergnaud) considera o significado sob uma óptica idiossincrática. Constroem-se significados de maneira pessoal e este fato é compatível com uma orientação de pressuposto fenomenalista. Para investigar significados emergentes no processo de aprendizagem é necessário, portanto, adotar um ponto de vista de que cada estrutura cognitiva é singular tanto em níveis de generalidade, discriminabilidade dos conceitos, bem como nas tendências à superordenação ou à subordinação, na construção de invariantes operatórios, etc, isto é, as pessoas apreendem a realidade de maneiras distintas<sup>7</sup>.

Um ponto que Bogdan e Biklen (1994, p.54) reforçam é o de que os fenomenalistas, embora subjetivistas, não negam a existência de uma realidade “exterior” ao sujeito, que tende, porém, à intangibilidade. A realidade, para os fenomenalistas, só é conhecida por um ser humano através de sua percepção, embora não duvidem que ela exista independentemente do sujeito.

Não nos comprometemos com se esta realidade existe ou não, porém acreditamos que o significado, sendo uma ferramenta útil na compreensão do mundo pelo sujeito e sendo, ademais, pessoal, nos leva ao encontro da perspectiva fenomenalista, o que revela um caráter extremamente importante atribuído por nós à cognição.

A coleta de dados, outro tópico importante na pesquisa qualitativa, é multifacetada. É prudente, portanto, especificarmos o que se compreende por dados. Estes são os próprios registros de pesquisa a serem analisados, ou seja, são as informações “cruas” obtidas no mundo empírico que serão transformadas a partir de processos de interpretação, codificação, etc. No caso particular de nossa pesquisa os dados estão na forma de questionários discursivos (de escrita livre), mapas conceituais, entrevistas (em alguns casos) e notas de campo.

Os dados da pesquisa foram analisados sob dois aspectos complementares. Consideramos o ponto de vista, expresso por Vergnaud, de o conhecimento poder assumir duas formas, em princípio, a saber, a operatória e a predicativa (já discutidas no referencial teórico). A sistemática de análise será pormenorizada em seções seguintes. Os dados foram, também, organizados e analisados seguindo a metodologia da análise de conteúdo segundo proposta por Bardin (2008).

---

<sup>7</sup>Embora compatíveis culturalmente.

A análise multifacetada (uso de vários instrumentos de pesquisa) foi escolhida para maior precisão da análise e para respaldo da credibilidade da pesquisa. Considerando, principalmente, o caráter implícito do conhecimento operatório, a análise de dados feita desta forma pode facilitar a identificação de conhecimentos-em-ação, pois os sujeitos são postos em diversas situações nas quais, fatalmente, os usam.

A formulação das notas de campo foi feita seguindo um aspecto de fluidez incentivado por Bogdan e Biklen (1994, p.151):

*"... Um aspecto agradável das notas de campo é não requererem tantas exigências como a generalidade dos textos escritos. Espera-se que as notas de campo fluam, que saiam diretamente da sua cabeça e que representem o seu estilo particular. Adicionalmente, você é encorajado a escrever na primeira pessoa."*

Como assinalam Bogdan e Biklen (op. cit., p.152) as notas de campo são fundamentais para aspectos descritivos subjacentes à pesquisa qualitativa. Como expresso ainda pelos autores tal descrição deve ser feita da forma mais completa possível envolvendo, inclusive, aspectos relativos aos sujeitos de pesquisa, que em nosso caso revelam-se como respostas a questionamentos e perguntas realizadas no ambiente de sala de aula.

Outro aspecto a ser destacado no processo de pesquisa qualitativa é a existência de dados na forma de entrevista. Entrevistas podem, segundo Bogdan e Biklen (op. cit., 134), ser entendidas como:

*"... uma conversa intencional, geralmente entre duas pessoas, embora por vezes possa envolver mais pessoas (Morgan, 1988), dirigida por uma das pessoas, com o objetivo de obter informações sobre a outra."*

Os autores afirmam, também, que a utilidade fundamental da entrevista é a coleta de dados descritivos na linguagem do sujeito pesquisado, fato que permite ao investigador um desenvolvimento intuitivo de idéias acerca do entendimento do sujeito acerca de aspectos do mundo (ibid).

É importante lembrar que um procedimento ético adotado na investigação e igualmente levantado pelos autores supracitados é o de informar explicitamente aos sujeitos pesquisados sobre o caráter confidencial das entrevistas. A identidade dos "objetos" de pesquisa não foi revelada e a cada um destes participantes foi atribuído um nome fictício, bem como foram omitidas informações profissionais e, além disso, não divulgamos, no trabalho, em que disciplinas foi implementada a proposta.

As entrevistas foram realizadas de forma semi-estruturada, isto é, tínhamos perguntas sobre as quais queríamos que os sujeitos dissertassem, porém estas serviam somente como guia inicial e à medida que os observados se expressavam, fazíamos apontamentos e questionamentos não planejados previamente à pesquisa, o que nos coloca entre os pólos da entrevista totalmente estruturada e da entrevista completamente aberta. Guiamo-nos por questões relativamente gerais, em que a explicação de aspectos específicos era solicitada aos sujeitos durante o processo de entrevista, conforme necessário. As transcrições das entrevistas também podem ser encontradas no apêndice E, bem como as perguntas feitas aos sujeitos. Segundo Bogdan e Biklen (op.cit., p.137):

*"Não existem regras que se possam aplicar constantemente a todas as situações de entrevista, embora possam ser feitas algumas afirmações gerais. O que se revela mais*

*importante é a necessidade de ouvir cuidadosamente. Ouça o que as pessoas dizem. Encare cada palavra como se ela fosse potencialmente desvendar o mistério que é o modo de cada sujeito olhar para o mundo. Se a princípio não conseguir compreender o que o sujeito está a tentar dizer, peça-lhe uma clarificação. Faça perguntas, não com o intuito de desafiar, mas sim de clarificar.*

O último ponto a ser discutido é o formato de dados escritos pelos sujeitos, categoria que engloba a resolução de problemas de lápis-e-papel e a produção de mapas conceituais. A partir destes documentos, fizemos a análise de conhecimento predicativo e a análise do conhecimento operatório, que podem ser complementadas com a investigação realizada sobre os dados descritos anteriormente.

As tarefas apresentadas podem ser encontradas no capítulo 5 e foram estruturadas de forma que os estudantes usassem de forma explícita e implícita, vários conceitos para a resolução de um problema.

Procuramos, ademais, não apresentar perguntas cujas respostas fossem *Sim ou Não*, sendo um dos motivos teórico e o outro mais prático.

O motivo teórico associado à escolha supracitada está relacionado ao fato de, segundo Ausubel (2002), o limiar de disponibilidade para a recordação ser maior que o do reconhecimento. As perguntas de Sim ou Não são perguntas de múltipla escolha, nas quais apresentamos uma proposição em relação à qual o estudante deve posicionar-se contrário ou favorável, o que configura, a nosso ver, o reconhecimento. Para maior estímulo à reconciliação integradora de conceitos na estrutura cognitiva, cremos que problemas em que o estudante operasse no grau mais elevado do limiar de disponibilidade pudessem estimular o seu “pensamento” no sentido de que aumentassem a força de dissociabilidade das idéias, evitando assim a obliteração.

O motivo prático está correlacionado ao fato de podermos retirar mais informações acerca dos processos cognitivos realizados na resolução de problemas, tais como as inferências, as regras de ação e de controle de informação, bem como a possibilidade de conhecimento de invariantes operatórios.

Descrevemos, na sequência, o delineamento de pesquisa utilizado e as dificuldades encontradas nesta implementação, bem como que estratégias temos pensado no sentido de superar tais entraves. Em consonância com o referencial teórico e com a metodologia de ensino, realizamos tanto na análise de conhecimento na forma predicativa como na operatória, além de uma análise de conteúdo.

### 4.2.2 Análise do conhecimento na forma predicativa

Realizamos em primeiro lugar a investigação de padrões de aprendizagem significativa, ou seja, em que a interação das ideias novas com as prévias (subsunoeres) se dá de forma não-arbitrária e não-literal, e a seguir de aprendizagem mecânica, ou seja, arbitrária e literal, baseados no estudo do conhecimento explícito verbalmente (através de respostas a questionários discursivos, entrevistas e mapas conceituais), i. e., conhecimento predicativo exposto pelos alunos.

O estudo a que procedemos desta forma buscou, antes de tudo, informações acerca da parte da estrutura cognitiva que pode ser explicitada verbalmente e que pode, inclusive, explicitar padrões de aprendizagem significativa ou mecânica. As evidências de assimilação significativa foram observadas a partir da modificação (diferenciação) dos subsunoeres na estrutura cognitiva, seja através do aumento da

precisão de uma proposição ou pela assimilação de novos atributos essenciais pelos conceitos subsunçores.

Foi possível obter indicadores de mudanças em importantes variáveis da estrutura cognitiva (tais como clareza, discriminabilidade, estabilidade e disponibilidade de subsunçores) no processo de aprendizagem, estudar a obliteração ocorrente na assimilação, inferir quais conceitos foram assimilados e analisar como ocorreu a aquisição dos novos conhecimentos (de forma mais significativa ou mecânica), a partir deste tipo de análise.

Foi possível a obtenção de evidência de padrões de superordenação, subordinação ou combinação de proposições na estrutura cognitiva e dos atributos essenciais mais usados para a realização destas tarefas de aprendizagem. O objetivo da realização desses processos era inferir como ocorreu nos casos analisados, a aquisição de ideias nesse campo do conhecimento particularmente novo aos estudantes.

Os objetivos estiveram, portanto, em torno da verificação de: como estes alunos adquirem conhecimento verbal; quais conceitos tiveram sua aprendizagem facilitada a partir da implementação da proposta didática planejada nos modos da Teoria da Aprendizagem Significativa e que influencia sofreu a aprendizagem do conceito de evolução temporal em MQ, por parte dos estudantes, a partir da assimilação de conceitos dos quais este depende para ser adquirido, também, na forma predicativa.

### 4.2.3 Análise do conhecimento na forma operatória

Entendemos, assim como Vergnaud, que a parte explicitável da estrutura cognitiva cobre somente a “ponta do iceberg” da conceitualização. Procedemos, pois, de forma análoga ao anterior, porém, inferindo teoremas e conceitos usados pelos estudantes na solução de problemas que relacionavam estes conceitos e como eles influenciavam no domínio de situações que envolviam o conceito de evolução temporal em MQ.

Buscou-se complementar a análise de conhecimento predicativo através da investigação de teoremas e conceitos usados, geralmente, de forma implícita no domínio de situações apresentadas. A progressão em um campo conceitual envolve operações de pensamento complexas que englobam não somente inferências, regras de ação e antecipações, mas que também estão atreladas ao uso de conceitos, ou seja, categorias, predicados, etc, que podem ser ou não pertinentes ao domínio de uma situação, bem como à utilização de teoremas, isto é, proposições tomadas como verdadeiras sobre a situação (realidade) que o sujeito analisa.

A busca por evidências de invariantes operatórios foi feita através da verificação de teoremas e conceitos usados de forma semelhante em situações distintas, porém correlacionadas. Foi necessário, ainda, o uso de inferências a partir de lacunas deixadas, conscientemente ou não, pelo sujeito durante o processo de solução de um dado problema como, por exemplo, o uso de alguma representação simbólica de forma aparentemente ilógica ou respostas semelhantes a situações diferentes, sem motivo aparente.

A partir desta investigação foi possível verificar quais os teoremas-em-ação corretos em relação ao conhecimento científico e quais os que podem ser classificados como concepções alternativas em MQ. Para que se possa extrair os invariantes operatórios usados por um sujeito, é preciso uma análise cuidadosa de distintas situações cujo domínio é executado por meio do uso de proposições, explícitas ou implícitas, consideradas como verdadeiras sobre o real. Vergnaud, ademais, corrobora a linha de

raciocínio apresentada quando afirma que um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações e tampouco uma situação é analisada somente com um conceito (Moreira, 2002).

Na sequência discutiremos alguns aspectos relativos a uma metodologia que usaremos como um fator triangulativo, no intuito de aumentar a credibilidade da pesquisa qualitativa. Tal metodologia é denominada Análise de Conteúdo e engloba basicamente as mesmas ferramentas usadas para a análise de conhecimento predicativo e operatório. Ela pode ser vista como um recurso independente no qual nos ancoramos para a descrição das duas outras metodologias apresentadas.

#### 4.2.4 Análise de conteúdo

Bardin (2008) descreve uma sistemática de análise de dados que segundo ela, facilita o enriquecimento da leitura de dados e diminui a incerteza da interpretação, visto possuir uma função heurística no processo de extração de informações de mensagens emitidas na comunicação, através do contorno do caminho da interpretação espontânea ou intuitiva. Embasamo-nos em sua obra intitulada Análise de Conteúdo para tratar desta de análise de dados.

O domínio da análise de conteúdo não inclui alguns tipos de dados:

*“Excluimos do campo de aplicação da análise de conteúdo tudo o que não é propriamente lingüístico, tal como filmes, representações pictóricas, comportamentos (considerados “simbólicos”), etc, embora em certos aspectos o tratamento destes materiais levante problemas semelhantes aos da análise de conteúdo.”* (Henry e Moscovici apud Bardin, 2008, p.35)

Bardin define, ainda, a análise de conteúdo como sendo:

*“Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.”* (Bardin, 2008, p.37)

A análise de conteúdo se enquadra como um conjunto de técnicas que busca inferir informações de como se produz um dado conhecimento e por isto requer indicadores que assegurem certeza a estas inferências. Tais inferências seguem um procedimento de dedução lógica que permite ir da descrição à interpretação. Consideram-se, portanto, no processo de dedução lógica, fatores relativos ao questionamento das causas dos enunciados, bem como às consequências possíveis de serem produzidas (op. cit., p.41).

A AC visa o estudo do que Bardin denomina variáveis inferidas. Estas podem ser variáveis sociológicas e culturais, relativas à situação de comunicação ou do contexto de produção da mensagem, que são deduzidas logicamente a partir dos indicadores mencionados, isto é, procura-se a articulação entre a superfície dos textos, descrita e analisada e os fatores determinantes destas características (op. cit., p.42). Em nosso caso, variáveis inferidas podem ser invariantes operatórios, subsunçores ou categorias de concepções dos alunos a serem apresentados na discussão dos resultados.

Outro modo de se enxergar os fins da AC é observando que ela busca analisar a correspondência entre estruturas semânticas (ou lingüísticas) e as estruturas

psicológicas ou sociológicas dos enunciados (op. cit., p.43). Tal consideração é compatível com o intuito da verificação de estruturas psicológicas (padrões de assimilação significativa, subsunções e invariantes operatórios) a partir de estruturas lingüísticas e semânticas (textos, falas, resolução de problemas conceituais).

A análise de conteúdo proposta por Bardin (2008) é organizada em torno de três etapas: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados (leia-se inferência e interpretação).

Durante a pré-análise os dados são organizados. Esta etapa é constituída de cinco fases que não necessariamente devem ser seguidas de acordo com a sequência exposta aqui. A pré-análise é organizada em torno das etapas de: leitura "flutuante"; escolha dos documentos; formulação de hipóteses e dos objetivos; referência a índices e a elaboração de indicadores; preparação do material.

A leitura "flutuante" é a etapa em que o pesquisador tem o primeiro contato com o material e se deixa invadir por intuições, impressões, ou mesmo pressupostos teóricos norteadores da formulação de hipóteses.

A etapa de escolha dos documentos ocorre quando se decide acerca do universo a ser estudado. No nosso caso o objetivo é determinado a priori (estudar aspectos da dinâmica da estrutura cognitiva na aprendizagem do conceito de evolução temporal) e, desta forma, buscam-se dados que devem ser demarcados para a realização da análise. Os dados selecionados para esta análise constituem o que Bardin (2008, p.122) denomina *corpus*. Em nosso caso, o *corpus* é constituído das respostas às tarefas propostas aos alunos. A constituição do *corpus* segue algumas regras como:

- regra da exaustividade – na definição do campo do *corpus* é necessário levar em conta todos os elementos deste. Não se pode realizar uma exclusão injustificável no plano de rigor (dificuldade de acesso, não-interesse em obtenção dos dados). Em nosso caso, o seguimento da regra da exaustividade é satisfeito, pois analisamos as tarefas de todos os alunos que as entregaram, dado que é impossível analisar dados inexistentes (tarefas não realizadas), o que, a nosso ver, é justificável segundo o plano de rigor;
- regra da representatividade – a análise pode ser restringida a uma parte da amostra desde que esta seja representativa da população. Assim, pode-se realizar generalização. No nosso caso, em uma das turmas, que tinha 12 alunos, somente oito realizaram as tarefas, o que nos impede de afirmar que estes oito sejam representativos da população (os 12 alunos da turma). O universo é heterogêneo, o que dificulta ainda mais a afirmação de algo acerca da representatividade;
- regra da homogeneidade – os documentos devem obedecer a critérios precisos de escolha e não apresentar muita singularidade fora destes critérios. No caso específico da pesquisa, distribuimos tarefas idênticas aos grupos e um conjunto de tarefas correlatas no estudo piloto. As perguntas tratavam sempre da mesma temática numa dada tarefa, porém através de relações conceituais com conceitos previamente ensinados;
- regra da pertinência – diz respeito à adequação dos documentos para os fins da análise. cremos que já argumentamos a este respeito ao longo do texto.

Outra etapa do processo de pré-análise está associada à formulação de hipóteses e objetivos. A formulação de hipóteses é um procedimento no qual elaboramos uma assertiva provisória a ser verificada através da análise. O objetivo, por outro lado, é o fim geral a que nos propomos, o quadro teórico e/ou pragmático, no qual os resultados obtidos serão utilizados (op. cit., p.124). O nosso objetivo inicialmente é uma pesquisa acadêmica como um fim em si mesmo, porém, pode servir como contribuição ao ensino de MQ, por exemplo.

Vale destacar o que Henry e Moscovici consideram ser, segundo Bardin, procedimentos exploratórios:

*“... procedimentos de exploração, aos quais podem corresponder técnicas ditas sistemáticas (e nomeadamente automáticas), permitem a partir dos próprios textos, apreender as ligações entre as diferentes variáveis, funcionam segundo o processo dedutivo e facilitam a construção de novas hipóteses.”* (op. cit., p.125)

Creemos que isto está de acordo com o que planejamos no processo de pesquisa. A partir da análise do conhecimento predicativo e do conhecimento operatório, fazemos a triangulação com a análise de conteúdo desde a dedução lógica, facilitando a formação de padrões convergentes e divergentes na análise, partindo dos próprios textos.

É necessário escolher ainda os índices que são organizados em indicadores que facilita a inferência lógica, núcleo da AC. A escolha de índices e indicadores será pormenorizada na seção em que tratarmos dos resultados. Isto foi feito para facilitar a leitura dos mesmos. Houve um maior nível de rigor na etapa da Análise de Conteúdo em si do que nas análises de conhecimento predicativo e operatório, pois o controle excessivo de indicadores poderia tolher o viés interpretativo e idiossincrático (quanto às concepções) da pesquisa qualitativa empregada para estudo da estrutura cognitiva.

É necessário, também, editar o material antes de se passar à etapa de análise propriamente dita. Trata-se, pois, de uma fase de reorganização dos dados para organizar a análise.

Passa-se, então, à etapa de tratamento dos resultados e interpretação, na qual se realiza uma condensação dos dados e se adentra às inferências. A síntese de dados pode ser feita à base de operações estatísticas como porcentagem, análise fatorial ou alguma transformação que facilite a compreensão dos dados para a realização de inferências.

Completado este último processo, é possível criar novas hipóteses recomeçando, desta forma, o ciclo ou mesmo usando os resultados com fins práticos ou teóricos (op. cit., p. 128).

Devemos expor, entretanto, idéias gerais acerca do processo de transformação do conteúdo bruto (registros) em dados elaborados através da codificação que segundo Holsti:

*“... é o processo pelo qual os dados em bruto são transformados sistematicamente e agregados em unidades, as quais permitem uma descrição exata das características pertinentes do conteúdo”* (Holsti, 1969 apud Bardin, 2008, p.129).

O processo supracitado envolve recortes, agregação e enumeração que permitam uma representação do conteúdo de forma que este se torne um elemento esclarecedor

das características do texto. De fato, a codificação, segundo Bardin (2008), envolve três escolhas:

- o recorte, que consiste na escolha das unidades;
- a enumeração, realizada pela escolha das regras de contagem;
- a classificação e a agregação, consistentes na seleção de categorias.

Em primeiro lugar, para que se realize o recorte do texto, deve-se ter noção da porção a ser selecionada. A questão gira em torno da proposição de uma sistemática que facilite o recorte. Bardin apresenta, então, o que denomina unidade de registro, que para ela é uma

*“unidade de significação a codificar e corresponde ao segmento de conteúdo a considerar como unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial” (Bardin, 2008, p.130).*

A autora menciona as duas unidades de registro mais usadas, a saber, a palavra e o tema. A primeira pode ser qualquer coisa em lingüística, porém Bardin parece considerar a palavra no sentido usual. Pode-se distinguir entre palavras plenas e palavras vazias, bem como as palavras segundo a categorização em termos de funções sintáticas (adjetivos, substantivos, verbos). A palavra, portanto, pode ser um segmento de conteúdo passível de ser considerado como unidade de base.

O tema, segundo Berelson (apud Bardin 2008, p.131) é uma afirmação acerca de um assunto, isto é, uma frase composta, resumo, etc. Para d’Unrug (1994, apud Bardin, 2008, p.131) o tema é uma unidade de significação complexa, de comprimento variável, cuja validade é de ordem psicológica. A nosso ver, tema e significado estão, amplamente correlacionados.

Outras unidades de registro podem, ainda, ser utilizadas. Enfocamos, no nosso trabalho, a palavra e o tema como possíveis unidades de registro no processo de pesquisa, dado o nosso interesse específico no modo pelo qual os alunos conceitualizam implícita ou explicitamente.

É preciso, também, apresentar as denominadas unidades de contexto usadas na análise de conteúdo. Estas compõem elementos úteis na codificação de unidades de registro, sendo o contexto de inserção das últimas. Em outras palavras, as unidades de contexto, além de superiores, em dimensão, às unidades de registro, possibilitam a compreensão exata da significação destas (op. cit., p.133). Pode-se dizer, ademais, que a frase é uma unidade de contexto para a palavra e que o parágrafo, por exemplo, é uma unidade de contexto para o tema.

Bardin posiciona-se de forma pragmática quanto à seleção de unidades de contexto, pois afirma que são fundamentais dois critérios para a realização da tarefa mencionada. Tais critérios são o custo e a pertinência, que juntos levam o pesquisador a decidir a dimensão ótima das unidades de contexto (se cobrem um parágrafo, uma folha ou um texto inteiro).

A autora segue, também, algumas regras de enumeração das unidades de registro, que são apresentadas na seção em que narramos o processo de uso da análise de conteúdo na pesquisa, ou seja, no ato da discussão dos resultados, sendo selecionados alguns dos critérios, como a presença de unidades de registro no texto e a frequência com a qual são usadas.

É tratado, ademais, além dos tópicos anteriormente comentados, o processo de categorização que facilita a tomada de inferências e organização de dados no trabalho. Categorizar, segundo Bardin (op. cit., p. 145) é realizar

*“... uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com os critérios previamente definidos.”*

As categorias resultantes do processo reúnem unidades de registro sob um título comum, podendo o critério de categorização ser semântico, sintático (funções sintáticas), léxico (segundo o sentido das palavras) ou expressivo (ligado a perturbações de linguagem). Vê-se, portanto, que as unidades de registro podem ser agrupadas, desta forma, segundo diversos critérios que acentuam diferentes aspectos da realidade (op. cit., p.146). É necessário, pois, determinar sob que ângulo se quer focar a análise categorial de conteúdo através do estabelecimento de distintas dimensões de análise.

Categorizar de forma estruturalista, segundo Bardin (ibid), envolve dois procedimentos, o do estabelecimento de um inventário no qual os elementos são isolados e o da classificação consistente na repartição dos elementos de forma organizada e sistemática nas categorias.

A classificação pode ser feita através do procedimento por caixas, no qual as categorias são dadas a priori e os dados dispostos nelas, procedimento aproximado de um pólo teórico-hipotético; pode ser feita, também, de forma progressiva, através do agrupamento de elementos semelhantes em categorias definidas a posteriori, cujo viés é mais pragmático.

Em ambos os processos de categorização, as categorias terminais devem ser preferencialmente:

- mutuamente excludentes: cada elemento não coexiste em duas categorias distintas;
- homogêneas: um único princípio de classificação governa a organização da categoria. Deve-se, logo, utilizar um tipo de unidade de registro por dimensão de análise em uma categoria;
- pertinentes: as categorias devem ser pertinentes ao quadro teórico definido/adaptado ao material de análise;
- objetivas e fidedignas: as variáveis tratadas devem ser bem definidas e fidedignas no que tange às suas classificações;
- produtivas: as categorias devem ser férteis no que diz respeito aos aspectos de potencialidade na geração de hipóteses novas, dados exatos e índices de inferência.

O último aspecto relativo à análise de conteúdo tratado por ora é o relativo às possibilidades de inferência. A partir dos procedimentos adotados, podem ser realizadas inferências causais no sentido de identificar as variáveis inferidas (causas) a partir dos indicadores presentes no texto (consequências).

As variáveis inferidas no trabalho foram subsunçores e invariantes operatórios. Usamos, pois, a AC como um método complementar às análises do conhecimento nas formas predicativa e operatória.

A AC fica, então, desenhada como uma técnica de organização e análise sistemática de indicadores (unidades de registro), a partir de codificação e categorização, seguidas de inferência. Reiteramos que buscamos seguir o mais próximo do indicado por Bardin (ibid) o processo de AC, o que nos poupará de retomar em detalhes este processo na discussão dos resultados.

No próximo capítulo serão apresentados os instrumentos de pesquisa e os dados coletados.

## Capítulo 5

# Instrumentos de pesquisa e dados coletados

Neste capítulo apresentamos os instrumentos de pesquisa adotados para a realização da coleta de dados. Os dados coletados poderão ser encontrados em versão integral (transcritos) nos apêndices B (respostas às tarefas propostas), C (entrevistas), D (mapas conceituais).

Foi aplicado inicialmente um pré-teste para o estudo das concepções prévias (os atributos criteriosais dos conceitos em um limiar da disponibilidade compatível com o da recordação) dos estudantes acerca dos conceitos que foram ensinados. Apresentamos o pré-teste na seção 5.1.1.

Intercaladas com as intervenções didáticas em formato expositivo dialogado, foram propostas seis tarefas apresentadas nas seções 5.1.2.1 a 5.1.2.6. Cada tarefa era constituída em média de quatro a cinco questões acerca dos conceitos tratados em aula. Para facilitar a reconciliação integradora (na estrutura cognitiva dos alunos) propusemos as tarefas de modo que os conceitos tratados em uma intervenção anterior fossem rememorados em tarefas posteriores, por exemplo, pedíamos para os alunos relacionarem conceitos enfatizados em distintas intervenções.

Foram ministradas seis aulas de duas horas aula, sendo a primeira aula dedicada à discussão do conceito de sistema físico, a segunda ao conceito de variável dinâmica, a terceira ao conceito de estado, a quarta enfatizando uma caracterização do estado e das interações através do conceito de energia (na qual introduzimos tanto a função hamiltoniana quanto o operador hamiltoniano), a quinta e a sexta enfatizando o conceito de evolução temporal.

Ao final da  $n$ -ésima aula era distribuída a  $n$ -ésima tarefa relativa aos conceitos tratados na  $n$ -ésima aula, ou seja, ao final da aula sobre estado (a terceira), foi aplicada a terceira tarefa. Cada tarefa era composta de questões de resolução de problemas via manipulação conceitual explícita (em que os alunos deveriam manipular explicitamente os conceitos para chegar a uma conclusão), questões de manipulação conceitual implícita (em que deveriam articular os conceitos necessários para a solução do problema sem a menção explícita dos mesmos) e um mapa conceitual.

Foi suposto o conhecimento dos alunos sobre a técnica de construção de mapas conceituais, o que se mostrou posteriormente uma hipótese errada. O detalhe presente na existência de conectores entre os conceitos e o aspecto de mapas conceituais serem compostos de conceitos, dificultou em alguns aspectos a compreensão da relação dos conceitos através destes instrumentos, porém esses serviram, juntamente

com as questões escritas, de elementos possibilitadores da estimativa da intensidade das relações conceituais estabelecidas pelos alunos.

Seguem, portanto, o pré-teste e as tarefas propostas.

## 5.1 Instrumentos de pesquisa

### 5.1.1 Pré-teste

Nome:

Formação:

O que você entende por:

1. *Sistema físico?*
2. *Variáveis dinâmicas?*
3. *Estado de um sistemas físicos?*
4. *Evolução temporal?*
5. *Física Clássica?*
6. *Física Quântica?*

### 5.1.2 Tarefa 1 – Sistemas físicos

1. Faça um mapa conceitual do conceito de Sistema Físico.
2. Apresente dois exemplos de sistemas físicos, indicando os objetos que os constituem, as características externas dos mesmos, as interações que neles ocorrem e, também, se o sistema apresenta estrutura interna. Comente a relevância do estudo destes sistemas físicos para o estudo da Física.
3. Dê dois exemplos de sistema físicos pertinentes à MQ. Discuta a relevância destes sistemas.
4. Dê três exemplos de Variáveis Dinâmicas relativas a quaisquer áreas da Física.
5. Além de posição e velocidade da Terra e do Sol no exemplo do par Terra-Sol, que outras variáveis dinâmicas você associaria ao sistema? Por quê?
6. O que você entende por um sistema elementar? Devemos utilizar este conceito apenas quando absoluto, ou podemos adotá-lo de forma aproximada? Dê um exemplo de sistema elementar em um dado contexto.

### 5.1.3 Tarefa 2 – Variáveis dinâmicas

1. Faça um mapa conceitual relacionando os conceitos de sistema físico e de variáveis dinâmicas. Como você distinguiria o conceito de variáveis dinâmicas do de características externas?

2. O que você entende por variáveis dinâmicas compatíveis? O que você entende por variáveis dinâmicas incompatíveis? Há alguma relação das mesmas com (ou algum reflexo sobre) o Princípio da Incerteza?
3. As três componentes cartesianas ortogonais de posição de um elétron são variáveis compatíveis? E as três componentes de momentum? Justifique sua resposta.
4. Dê exemplos de variáveis incompatíveis em MQ.
5. No experimento de Stern-Gerlach, só podemos caracterizar os átomos de prata por uma das componentes do spin ( $s_x$  ou  $s_y$  ou  $s_z$ ), pois ao medir uma das variáveis dinâmicas, perdemos a informação prévia acerca das outras duas obtidas em medições anteriores. Como você entende esta afirmativa?
6. Imagine três experiências seqüenciais de Stern-Gerlach, com campos magnéticos não-homogêneos nas direções  $\hat{z}$ ,  $\hat{x}$  e  $\hat{z}$  respectivamente. Um feixe de 100.000 átomos de prata passa pelo primeiro eletroímã e resulta em dois feixes, com 80.000 (+) e 20.000 (−) átomos respectivamente.
  - a) O feixe de menor intensidade passa pelo segundo eletroímã. Quantos átomos você espera encontrar após esta passagem, com projeção de spin (+) e quantos com projeção de spin (−)? Em quais direções?
  - b) Após a passagem, pelo terceiro eletroímã, do feixe com projeção de spin (−) resultante da passagem pelo segundo eletroímã, como você espera encontrar o feixe? Como você expressaria o seu estado?
  - c) Expresse o estado de spin do feixe de 80.000 átomos de prata, gerado quando da passagem do feixe inicial pelo primeiro eletroímã.

### 5.1.4 Tarefa 3 – Estado de um sistema físico

1. Faça um mapa conceitual (inclusive com exemplos) do conceito de estado de um sistema físico, incluindo a relação deste com conceitos anteriormente estudados.
2. Como você entende o conceito de estado de um sistema físico: em MC, na Teoria Eletromagnética, na Termodinâmica e na MQ? Exponha diferenças e semelhanças entre estes domínios. Apresente exemplos de estados de sistemas físicos nas áreas da Física acima mencionadas.
3. O que você entende por superposição de estados em MQ? Qual sua significância física? Como você relaciona a superposição ao conceito de medição? E ao de auto-estados?
4. Considere um operador  $\hat{H}$  que representa uma variável dinâmica, cujos auto-estados são  $|E'\rangle$  e cujos autovalores  $E'$  são valores de energia. Interprete fisicamente a equação de autovalores  $\hat{H}|E'\rangle = E'|E'\rangle$ .
5. Suponha que em um experimento de Stern-Gerlach temos um feixe inicialmente preparado no estado de spin  $\frac{1}{2}$ ,  $|s_x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z, +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z, -\rangle$ . Qual a variável dinâmica que tem um valor definido neste estado  $s_x$  ou  $s_z$ ? Qual a

probabilidade de obtermos, numa medição de  $s_z$ , o valor  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ ? E de obtermos o valor  $s_x = -\frac{\hbar}{2}$ , numa medição de  $s_x$ ? O estado  $|s_x, +\rangle$  é auto-estado do operador  $\hat{s}_z$ ; do operador  $\hat{s}_x$ ?

### 5.1.5 Tarefa 4 – Energia e função hamiltoniana/operador hamiltoniano

1. Explique, com suas palavras, as principais diferenças entre a função hamiltoniana e o operador hamiltoniano. Não se esqueça de mencionar exemplos concretos.
2. Considere a função hamiltoniana em coordenadas esféricas (não é preciso fazer contas!)

$$H = \frac{1}{2m} \left[ p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right] + \frac{1}{2M} \left[ p_R^2 + \frac{p_\Theta^2}{R^2} + \frac{p_\Phi^2}{R^2 \sin^2 \Theta} \right] + \frac{GMm}{|r - R|}$$

onde  $r$  é a distância radial de um objeto de massa  $m$  ao centro de massa do sistema,  $R$  é a distância radial de um objeto de massa  $M$  ao centro de massa do sistema.  $\vartheta$  e  $\Theta$  são ângulos polares,  $\varphi$  e  $\Phi$  e são ângulos azimutais (coordenadas esféricas).  $p_r$ ,  $p_\vartheta$  e  $p_\varphi$  são os momenta conjugados às coordenadas  $r$ ,  $\vartheta$  e  $\varphi$  respectivamente, enquanto  $p_R$ ,  $p_\Theta$  e  $p_\Phi$  são os momenta conjugados às coordenadas  $R$ ,  $\Theta$  e  $\Phi$  respectivamente.

- a) Identifique a interação (o termo da equação e o tipo de interação) que ocorre neste sistema, justificando sua resposta.
  - b) Que sistemas físicos podem ter suas dinâmicas tratadas com o uso da hamiltoniana exposta?
  - c) O que significa cada termo desta expressão?
3. Considere o operador hamiltoniano que representa a interação que sofre um objeto quântico de spin  $\frac{1}{2}$  (elétron, átomo de prata):

$$\hat{H} = - \left( \frac{e}{m_e c} \right) \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$$

em que o vetor  $\mathbf{B}$  caracteriza um campo magnético não uniforme orientado em uma direção que consideraremos ser  $z$  (vertical).

- a) Com que objeto ou ente físico, o objeto quântico interage? Justifique sua resposta.
  - b) A interação exposta é de que natureza (gravitacional, eletromagnética, fraca, forte)?
  - c) Sabendo que  $\hat{s}_z |s_z, \pm\rangle = s_z |s_z, \pm\rangle$ , ou seja, a componente  $z$  do spin assume dois valores:  $s_z = \frac{\hbar}{2}$  ou  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$  e que tal sistema é considerado conservativo, *quantos* valores possíveis de energia o sistema pode adotar?
4. Qual a relação existente entre o conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis e a superposição de estados?

### 5.1.6 Tarefa 5 – Evolução temporal I

1. Construa um mapa conceitual que envolva os conceitos de sistema físico, variáveis dinâmicas, estado de um sistema físico e evolução temporal. Relacione a estes conceitos, outros que julgar mais importantes.
2. Comente a afirmativa abaixo, diferenciando a noção de estado em MC da noção de estado em MQ. "A evolução temporal do estado de um sistema físico é causal, tanto em MC quanto em MQ".
3. Um átomo de prata com valor inicial de componente  $x$  do spin igual a  $\frac{\hbar}{2}$ , ou seja, preparado inicialmente no auto-estado  $|s_x = \frac{\hbar}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$ , é posto a interagir com um campo magnético não uniforme orientado na direção  $z$ . A interação é do tipo

$$\hat{H} = - \left( \frac{e}{m_e c} \right) \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = - \left( \frac{e}{m_e c} \right) s_z B_z$$

sendo  $e$  a carga do elétron,  $m$  sua massa,  $c$  a velocidade da luz,  $B_z$  a intensidade do campo magnético e  $\hat{s}_z$  o operador projeção de spin na direção  $z$ .

O estado do elétron em um instante de tempo  $t$ , posterior ao inicial, onde  $\omega = \frac{eB_z}{m_e c}$ , é:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}} |s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} |s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle,$$

- a) Se no instante de tempo inicial, tomado em  $t = 0$ , for realizada a medida da variável dinâmica  $s_x$ , o que se obterá?
  - b) Se no instante de tempo inicial tomado em  $t = 0$ , for realizada a medida da variável dinâmica  $s_z$ , o que se obterá?
  - c) Sabendo-se que (o auto-estado)  $|s_y = \frac{\hbar}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$ , em que instantes de tempo uma medição da variável dinâmica  $s_y$  resultará no valor definido  $\frac{\hbar}{2}$ ? Nestes instantes, qual será a probabilidade de obtermos valor de  $s_y$  negativo?
  - d) No instante de tempo  $t = \frac{2\pi}{\omega}$ , alguma variável dinâmica terá valor definido? Justifique sua resposta.
4. Qual o papel comum das equações de Schrödinger, de Maxwell e de Newton?

### 5.1.7 Tarefa 6 – Evolução temporal II

1. Construa um mapa conceitual que envolva os conceitos de *sistema quântico*, *variáveis dinâmicas*, *estado de um sistema quântico* e *evolução temporal*. Relacione a estes conceitos outros que julgar importantes. Lembre-se que este mapa deve articular tais conceitos de acordo com o conteúdo de MQ apresentado.

2. Considere o operador hamiltoniano de uma partícula quântica livre de massa  $m$  no espaço tridimensional em coordenadas cartesianas ortogonais,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2]$$

Sabe-se que as componentes de momentum ( $p_x, p_y$  e  $p_z$ ) são variáveis dinâmicas compatíveis, logo existem auto-estados de  $\hat{H}$  simultâneos das mesmas. Sabe-se, ainda, que a energia é autovalor do operador hamiltoniano e é uma função do momentum. Podemos, então, escrever o estado da partícula livre em termos de auto-estados de momentum.

Considere agora o caso unidimensional (operador  $\hat{p}_x$ , denotado simplesmente  $\hat{p}$ ). Suponha que preparemos o sistema com um valor de momentum  $p'$ , isto é,

$$|\psi(t)\rangle = \lim_{\delta p' \rightarrow 0} \int_{p'}^{p'+\delta p'} |p\rangle dp.$$

- a) Neste instante de tempo ( $t = 0$ ), o que podemos afirmar acerca da posição desta partícula livre? Que relação pode ser estabelecida com o conceito de trajetória clássica?
- b) O estado do sistema evolui ao longo do tempo, apresentando posteriormente a seguinte configuração:

$$|\psi(t)\rangle = \lim_{\delta p' \rightarrow 0} \int_{p'}^{p'+\delta p'} \exp\left[-\frac{iE(p)t}{\hbar}\right] |p\rangle dp.$$

Que valor de momentum se obterá no processo de medida desta variável dinâmica? Justifique sua resposta, lembrando que para uma partícula livre, o momentum se conserva.

- c) Qual a relação do conceito de função de onda com o de estado do sistema? Qual o significado físico da função de onda?

3. Dadas as equações de Schrödinger e de Heisenberg, respectivamente:

$$i\hbar \frac{d}{dt} [|\psi(t)\rangle] = \hat{H} [|\psi(t)\rangle],$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} [\hat{A}_h(t)] = [\hat{A}_h(t), \hat{H}_h(t)] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\hat{A}_h(t)],$$

comente acerca do caráter de evolução temporal presente nas duas.

Uma vez descrita a metodologia, os instrumentos e os dados coletados, passa-se à apresentação dos resultados.

# Capítulo 6

## Resultados

Neste capítulo discutiremos os resultados da pesquisa buscando a explicação dos dados desde a teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e da teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Este detalhamento específico será feito nas seções em que tratamos da progressão dos alunos no campo conceitual da MQ a partir dos conceitos selecionados para a investigação. A teoria de Ausubel, como já mencionado, está relacionada ao domínio de conhecimento explícito e verbalizado, ou seja, domínio de conhecimento predicativo, enquanto a de Vergnaud nos apresenta uma visão acerca do conhecimento adquirido na ação.

Usaremos a AC das proposições dos alunos para mapear padrões coletivos de concepções e como elas estão associadas à progressão dos estudantes no campo conceitual da MQ. Este esclarecimento será fundamental para tornar possível conjecturar padrões de aprendizagem deste conteúdo especificamente. Esta sistemática será discutida na próxima seção, pois é mais simples ao leitor a identificação de padrões gerais seguida de uma leitura específica dos padrões de aquisição de conhecimento de um estudante do que o processo inverso.

Por fim, levantaremos as conclusões e esboçaremos as perspectivas para novas pesquisas que darão continuidade ao estudo aqui descrito. O aprofundamento das questões de pesquisa é importante para uma melhor compreensão dos processos cognitivos envolvidos no domínio do campo de conhecimento da MQ. O conhecimento destes processos pode facilitar a construção de uma abordagem didática facilitadora da tão almejada aprendizagem significativa.

### 6.1 Análise de conteúdo

Iniciamos a discussão dos resultados da análise de conteúdo seguindo a ordem cronológica da aquisição de dados, isto é, começando pela análise do primeiro conceito estudado, o de sistema físico, até chegar ao último, o de evolução temporal, passando por outros relevantes como o de estado e o de variáveis dinâmicas.

É importante, também, notar a mortalidade das amostras, ou seja, a diminuição do número de objetos de pesquisa. É possível que estes tenham diminuído a amplitude da obtenção de dados, no entanto, não podemos estimar a significância desta diminuição. Acreditamos, todavia, que esta mortalidade não tenha prejudicado a pesquisa a ponto de ter perdido sua validade e aclaramos este aspecto para assegurar o rigor da sistemática adotada, ou seja, queremos dizer que as somas das frequências apresentadas nas tabelas, muitas vezes, não serão iguais, porém isto será indicado

quando necessário.

A Tabela 6.1 apresenta, por exemplo, o número de palavras usadas no contexto da identificação de um sistema físico e não o número de alunos que as usou. Percebe-se através da contagem de presença do uso das palavras associadas às partículas subatômicas apresentadas na primeira linha da tabela e pela ocorrência da concepção de átomo como sistema quântico que, embora os estudantes reconheçam estes como pertinentes à MQ, o nível de especificidade parece ser baixo. Exemplos clássicos como o sistema massa-mola e o sistema Terra-Sol parecem ser muito utilizados, o que pode ser um indicativo de pensamento prioritariamente clássico-mecanicista.

Tarefa 1 – Palavras associadas ao conceito de Sistema Físico	$n^\circ$ de palavras
Prótons/Elétrons/Nêutrons/Fótons	15
Terra-Lua/Terra-Sol/Corpos massivos	11
Átomo como sistema quântico	7
Sistema massa-mola	5
Partículas carregadas/Relâmpago	5

Tabela 6.1: Palavras associadas ao conceito de sistema físico

A hipótese do pensamento clássico-mecanicista fica corroborada na Tabela 6.2, através da maior relevância das variáveis posição (quase totalidade) e velocidade.

Tarefa 1 – Palavras associadas ao conceito de Variáveis Dinâmicas	$n^\circ$ de palavras
Posição	14
Velocidade	10
Momentum linear	6
Pressão	3
Temperatura	3

Tabela 6.2: Exemplos de variáveis dinâmicas apresentados pelos alunos

Com relação às questões sobre variáveis compatíveis e incompatíveis torna-se importante ressaltar dois aspectos relativos a esta classificação. Os alunos crêm ser o conceito de variáveis incompatíveis associado ao de medição e não ao de determinação. Muitos deles acreditam que medir e determinar sejam coisas diferentes quando questionados sobre a diferença dos termos, sendo o primeiro associado ao experimento e o segundo à teoria, na visão destes (entrevista com a turma 1). Outro ponto importante a ser destacado é o fato de dois alunos crerem que os conceitos de variáveis dinâmicas compatíveis e incompatíveis estão associados à realização de dois experimentos simultaneamente (e não medições sequenciais como foi trabalhado durante a intervenção), conforme pode ser visto na Tabela 6.3 e na Tabela 6.4.

Percebe-se através da Tabela 6.5 que somente dois alunos generalizaram o princípio da incerteza para quaisquer variáveis dinâmicas incompatíveis, enquanto os alunos que relacionaram o princípio da incerteza às variáveis compatíveis, o aplicaram para o caso especial de posição e momentum.

Outro ponto pertinente na discussão foi a aparente assimilação do conceito de estado como uma diferenciação do conceito de variáveis dinâmicas, conforme pode

Tarefa 2 – O que são Variáveis Dinâmicas compatíveis?	frequência
Variáveis que podem ser medidas ao mesmo tempo	14
Variáveis mensuráveis numa mesma medição	2
Variáveis que se relacionam	1

Tabela 6.3: Concepções sobre Variáveis Dinâmicas compatíveis

Tarefa 2 – O que são Variáveis Dinâmicas incompatíveis?	frequência
Variáveis que não podem ser medidas ao mesmo tempo, pois a medição de uma altera o valor da outra	9
Variáveis que não podem ser medidas ao mesmo tempo, pois a medição de uma altera o sistema	7
Variáveis que não se relacionam	1

Tabela 6.4: Concepções sobre Variáveis Dinâmicas incompatíveis

Tarefa 2 – Princípio da incerteza	frequência
Maior $\Delta x$ , menor $\Delta p_x$ , sendo $x$ a posição e $p_x$ o momentum	7
Nada afirmou	5
Maior $\Delta A$ , menor $\Delta B$ , dado que $A$ e $B$ são incompatíveis	2
Alteração do estado	1
Não podemos medir em nível atômico	1
Relaciona Variáveis Dinâmicas incompatíveis	1

Tabela 6.5: Relação do princípio da incerteza com variáveis dinâmicas incompatíveis

ser visto na Tabela 6.6 e na Tabela 6.7. O conceito parece ter sido entendido como um conjunto de variáveis dinâmicas e não como a configuração deste conjunto (apresentação de valores simultâneos de variáveis dinâmicas compatíveis e impossibilidade de determinação de valores simultâneos – expressa pela superposição de estados em MQ).

Tarefa 3 – O que significa um estado físico?	frequência
Um ente composto por variáveis dinâmicas relevantes	16
Descrição do sistema em um instante de tempo	1

Tabela 6.6: Concepções acerca do conceito de estado de um sistema físico

O conceito de estado como sendo um ente probabilístico parece ter sido facilitado desde a apresentação das situações do experimento de Stern-Gerlach e do átomo de hidrogênio (com um caráter mais quantitativo para a primeira). A idéia de probabilidade expressando uma característica intrínseca da MQ parece ter sido, em alguns casos, assimilada coerentemente. Outra concepção pertinente à discussão é a de que a MQ não nos permite previsões, porém somente probabilidades, estabelecida por um dos 17 alunos e apontada na Tabela 6.7.

A aquisição da representação simbólica parece ter sido um obstáculo devido ser extremamente nova aos alunos, que somente já haviam ouvido falar dela (alguns).

Tarefa 3 – O que significa um estado quântico	frequência
Um ente que nos provê maior informação possível acerca do sistema	6
Um ente associado às variáveis dinâmicas compatíveis e às distribuições de probabilidade	5
Um ente associado às variáveis dinâmicas compatíveis	2
Não podemos conhecer o estado, mas somente a probabilidade de encontrar o sistema em um estado ou em outro	1
Um ente especificado por algumas variáveis específicas como energia e momentum	1
Representado por funções de onda	1
Nada afirmou	1

Tabela 6.7: Concepções sobre o conceito de estado quântico

A Tabela 6.8 nos mostra alguns indicativos disto. A identificação da formulação de Dirac com a formulação usual de vetores complexos parece ter sido a maior dificuldade. A associação do hamiltoniano com a energia, aparentemente realizada a partir do conhecimento prévio da segunda, parece ter facilitado a aprendizagem do aspecto associado ao retorno dos valores de energia para sistemas conservativos desde este operador.

Tarefa 3 – O que significa a equação de auto-valores?	frequência
O operador hamiltoniano retorna valores relativos ao auto-estado em que se encontra o sistema (auto-estado)	8
Representa uma medição em que não ocorre alteração do estado	4
O operador hamiltoniano retorna valores relativos ao auto-estado em que se encontra o sistema (auto-estado) e informa, ademais, sobre as interações ocorrentes no sistema	1
Não podemos conhecer o estado, mas somente a probabilidade de encontrar o sistema em um estado ou em outro	1
A equação de auto-valores nos informa a probabilidade de obter um dado valor numa medida	1
$E'$ são funções de energia	1
Informa as interações	1
Nada afirmou	1

Tabela 6.8: Interpretação da equação de autovalores

Alguns dos alunos parecem ter apresentado confusão acerca da expressão "variável dinâmica definida", conforme observado na Tabela 6.9. Uma fração de alunos considerava  $s_x$  definida, pois seu valor estava determinado (conhecido) e outra porção igual afirmou ser  $s_y$  a variável definida, pois conhecemos os valores das probabilidades para medição de  $s_z$ , bem como, os auto-estados de  $s_x$  são escritos como superposição de auto-estados de  $s_z$ .

Para o resultado, aparentemente animador, indicando que os alunos tenham relacionado a noção de amplitude de probabilidade com o conceito de probabilidade

Tarefa 3 – Em um experimento de SG, em que o sistema quântico foi preparado em um auto-estado $ s_x, +\rangle$ , qual a variável dinâmica definida?	frequência
$s_z$	6
$s_x$	6
Nada afirmou	3
$s_z$ , pois pode ser medida	1
$s_z$ , pois tem valores com spin para cima e para baixo	1

Tabela 6.9: Determinação de valores de Variáveis Dinâmicas ( $s_x$ ) no experimento de Stern-Gerlach

em si, apresentado na Tabela 6.10, temos uma possível hipótese rival explicativa. Conjecturamos ser este resultado indicativo da geração de uma regra de ação (carregada de um teorema) usada por alguns dos alunos (visto que alguns explicitaram a relação entre os conceitos supracitados) afirmativa de que no experimento de Stern-Gerlach, quando ocorrem medições sequenciais de variáveis dinâmicas incompatíveis, há a quebra do feixe em dois de igual intensidade. A hipótese inicial levantada, no entanto, expressa uma clarificação do conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis.

Tarefa 3 – Em um experimento de Stern-Gerlach, em que o sistema quântico foi preparado em um auto-estado $ s_x, +\rangle$ , que probabilidade temos de encontrar o sistema com valor $s_z = \frac{\hbar}{2}$ ?	frequência
50%	12
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	2
100%	1
Menor que 50%	1
0%	1

Tabela 6.10: Determinação de valores de Variáveis Dinâmicas ( $s_z$ ) no experimento de Stern-Gerlach

Os alunos, em sua maioria, relacionam a hamiltoniana e o operador hamiltoniano à energia, de acordo com a Tabela 6.11, um ponto positivo no que tange à assimilação deste conceito de difícil aprendizagem para aqueles que não estudaram Mecânica Analítica previamente. Um maior número de alunos entendeu a hamiltoniana como uma variável dinâmica, não percebendo a sutileza da relação entre os conceitos, atribuindo igualdade de significados aos dois conceitos mencionados. Conjecturamos que seja devido à estreita relação entre as expressões "associada a" (a hamiltoniana está associada à energia) e "ser" (a hamiltoniana é a energia).

Quando exposta uma função hamiltoniana, a maioria dos estudantes identificou os termos ocorrentes na equação, segundo a Tabela 6.12. Um dos alunos diferenciou energia cinética de translação e de rotação, mostrando um teor de discriminação maior quando comparado a outros alunos. Uma das respostas foi feita relacionando a notação de energia cinética diretamente ao momentum, talvez pelo não reconhecimento da primeira.

Vemos várias justificativas diferentes para o fato de os alunos associarem o campo

Tarefa 4 – Diferenças entre a função hamiltoniana e o operador hamiltoniano	frequência
FH e OH são VDs, porém a primeira é compatível com todas as VDs, enquanto OH não	5
FH é clássica e OH quântico. Ambos informam a energia e as interações ocorrentes no sistema	3
FH é clássica e OH quântico. Ambos informam a energia	3
FH descreve a energia de um sistema clássico e OH independe do tempo	1
FH é determinística e OH probabilístico	1
FH é a expressão matemática associada à energia e OH é uma operação matemática associada à energia que modifica ou não o estado do sistema	1
FH é a expressão matemática associada à energia e OH é uma operação matemática associada à energia que modifica ou não o estado do sistema	1
FH informa o estado mecânico de um sistema e OH informa a energia	1
FH é clássica e OH é quântico	1
Nada afirmou	1

Tabela 6.11: Diferenças entre operador e função hamiltoniana levantadas pelos alunos

Tarefa 4 – O que significam os termos da hamiltoniana?	frequência
Energia cinética de cada um dos corpos e energia potencial (interação)	14
Energias do movimento de translação e rotação e o potencial gravitacional	1
Momentum linear e energia potencial	1
Nada afirmou	1

Tabela 6.12: Significado dos termos da hamiltoniana para o sistema de dois corpos

magnético à interação ocorrente entre este ente e o spin (Tabela 6.13). A maioria dos alunos justificou pelo fato de o campo magnético estar presente na expressão da hamiltoniana, fato sugestivo de que de alguma forma os estudantes relacionam a hamiltoniana às interações ocorrentes em um sistema físico. Outras respostas mais tangenciais foram esboçadas e outras mais substantivas como a associação do spin à partícula (característica da mesma) e a seqüente relação do fator  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$  à interação do spin com o campo, foram apresentadas em menor número.

A maioria dos alunos crê em uma relação direta entre o número de valores possíveis de spin e o número de valores possíveis de energia (Tabela 6.14). Esta inferência é válida somente para o caso de espectro não degenerado, ou seja, em que cada auto-estado está associado a um valor diferente de energia. Alguns alunos crêem, por outros motivos que só haja um valor associado e precisamos de mais evidências para afirmar algo sobre a concepção acerca do conceito de energia que

Tarefa 4 – Com que objeto o sistema quântico interage?	frequência
Campo magnético, pois está presente na equação	6
Campo magnético	6
Campo magnético, pois o spin é uma característica do elétron que está acoplada ao campo	2
Campo eletromagnético	1
Campo magnético, pois o objeto é carregado	1
partículas carregadas	1

Tabela 6.13: Interação do spin com o campo magnético não homogêneo (sobre a interação ocorrente)

estes alunos possuem.

Tarefa 4 – Quantos valores de energia o sistema pode adotar?	frequência
Dois, pois há uma relação direta entre valores de projeção de spin ( $s_z$ ) e do hamiltoniano	10
Dois valores	4
Uma, pois a mudança da orientação do spin não muda a energia	1
Um valor	1
nada afirmou	1

Tabela 6.14: Interação do spin com o campo magnético não homogêneo (número de valores de energia possíveis)

A maioria dos alunos relacionou de alguma forma as variáveis dinâmicas incompatíveis à superposição de estados, pela idéia de indefinição ou de probabilidade (Tabela 6.15). Alguns afirmaram que por serem indetermináveis simultaneamente, quando o estado do sistema está em um auto-estado do operador referente à variável dinâmica que queremos medir, é possível escrever o estado do sistema como a superposição de auto-estados de outro operador (referente a uma variável dinâmica incompatível com a anteriormente mencionada). A linguagem usada pelos alunos obviamente não é a esboçada por nós, porém algumas respostas estão substantivamente equivalentes à apresentada. Alguns alunos também indicam que por causa da indeterminação simultânea inerente às variáveis dinâmicas incompatíveis, somente é possível descrever o estado do sistema por uma ou por outra destas variáveis dinâmicas.

Quanto à evolução temporal é possível verificar que os atributos mais relevantes nesta discussão são os de causalidade e preditividade (Tabela 6.16). Um grupo de seis alunos entende que ambas as teorias, MC e MQ são causais e percebem diferenças na descrição dos estados das duas. Alguns entendem a idéia de probabilidade como associada à impossibilidade de conhecer o estado do sistema em um instante futuro, porém uma impossibilidade intrínseca à teoria. Cremos que a segunda concepção seja um dos obstáculos epistemológicos na construção de significados em MQ e, portanto, devem ser apresentadas mais situações para que os alunos notem a restrição dos seus teoremas construídos neste sentido. A partir daqui, trabalha-se com o número de 14 estudantes (ao invés de 17), pois este foi o número de estudantes que entregou a

Tarefa 4 – Qual a relação do conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis e o de superposição de estados?	frequência
Quando determinamos uma VD, as VDIs com ela ficam indefinidas e isto é representado pela superposição de estados	5
Nada afirmou	3
Inexistência de estados simultâneos	3
Soma de estados	2
A superposição de estados é uma solução para um sistema que tem VDIs associadas	1
Define probabilidades para medir VDIs	1
Impossibilidade de determinar o estado do sistema	1
Incerteza	1

Tabela 6.15: Relações entre os conceitos de variáveis dinâmicas incompatíveis e superposição de estados levantadas pelos alunos

quinta atividade.

Tarefa 5 – A evolução temporal em MQ e em MC é causal? Comente	frequência
O estado pode ser previsto nas duas teorias, desde que especificadas as condições iniciais, sendo em MQ o estado probabilístico	6
A evolução temporal é probabilística em MQ e determinística em MC, logo não existe predividade em MQ	4
Interações causam a evolução temporal	2
Confusão entre causalidade e determinismo	1
Causal, pois causa mudança de estados	1

Tabela 6.16: Sobre a evolução temporal de estados em MQ ser causal

Vemos que a maioria dos alunos consegue prever a partir do estado, o resultado das medições no experimento de Stern-Gerlach em um instante de tempo inicial, conforme apresentado nas Tabelas 6.17 e 6.18. Os alunos parecem não ter, porém, a mesma clareza quando se trata de fazer o estado do sistema evoluir no tempo, conforme pode ser observado nas Tabelas 6.19 e 6.20. Não podemos descartar a possibilidade de interpretação errônea da pergunta ou mesmo a continuação de interpretações errôneas acerca do que seja uma variável definida.

Os alunos parecem ter percebido que a equação de Schrödinger é a equação fundamental da MQ, pois apresenta a evolução temporal dos estados dos sistemas físicos, visto que dos 14 alunos que resolveram a tarefa, nove expuseram respostas associadas a este significado. Isto pode ser observado na Tabela 6.21.

A tarefa 6, resolvida por 12 alunos, estava associada a um problema mais complexo, por tratar-se de algo difícil, embora conhecido pelos alunos, a saber, as variáveis de posição e momentum em MQ, relativas a espectros contínuos de autovalores. De acordo com os dados apresentados na Tabela 6.22 a maioria dos alunos (sete) recordou que, por serem variáveis incompatíveis, posição e momentum não

Tarefa 5 – Item 3a – O que acontecerá se medirmos $s_x$ ?	frequência
100% de chances de obtermos $s_x$ positivo	10
50% de chances de obtermos $s_x$ positivo e 50% de obtermos $s_x$ negativo	3
0% de chances de obtermos $s_x$ negativo	1

Tabela 6.17: Evolução temporal do estado de um sistema de spin 1/2 interagindo com um campo magnético não homogêneo na direção  $z$  (item a)

Tarefa 5 – Item 3b – O que acontecerá se medirmos $s_z$ ?	frequência
50% de chances de obtermos $s_z$ positivo e 50% de obtermos $s_z$ negativo	9
Nada	2
100% de chances de obtermos um valor de $s_z$	1
Nada afirmou	2
$s_z$ estará definido depois da medida	1

Tabela 6.18: Evolução temporal do estado de um sistema de spin 1/2 interagindo com um campo magnético não homogêneo na direção  $z$  (item b)

Tarefa 5 – Item 3c – Qual o tempo necessário para encontrarmos o valor de $s_y = \frac{\hbar}{2}$	frequência
Nada afirmou	10
Qualquer instante	2
1 segundo $s_z$	1

Tabela 6.19: Evolução temporal do estado de um sistema de spin 1/2 interagindo com um campo magnético não homogêneo na direção  $z$  (item c)

Tarefa 5 – Item 3d – Depois de um intervalo de tempo $t = \frac{2\pi}{\omega}$ , que variável dinâmica terá seu valor definido?	frequência
$s_x$	4
$s_z$	3
$s_y$ definido como $\frac{\hbar}{2}$	2
Nenhuma	2
Não respondeu/respondeu	3

Tabela 6.20: Evolução temporal do estado de um sistema de spin 1/2 interagindo com um campo magnético não homogêneo na direção  $z$  (item d)

são determináveis simultaneamente. Uma aluna apresentou o conceito de probabilidade em sua explicação, o que está indiretamente relacionado ao fato de o sistema encontrar-se em uma superposição de auto-estados de posição. Uma possível confusão na notação simbólica foi também detectada, a saber, a interpretação errônea do termo  $\delta p \rightarrow 0$  que significa a possibilidade de detectarmos o momentum com valor entre  $p$  e  $p + \delta p$  (ademais da necessária correção dimensional feita em termos

Tarefa 5 – Qual o papel da equação de Schrödinger em MQ?	frequência
Determinar a evolução temporal do estado de sistemas físicos	9
Descrição das interações	2
Determinar a variação temporal de um sistema quântico	1
Descrição de sistemas quânticos	1
Nada afirmou	1

Tabela 6.21: O papel da equação de Schrödinger em MQ segundo os alunos

dos auto-estados de operadores cujo espectro é contínuo), enquanto que pelos alunos foi entendido que seria uma espécie de aceleração (variação do momentum).

Tarefa 6 – Dado que temos uma partícula livre preparada com certo valor de momentum, o que se pode afirmar sobre sua posição?	frequência
A posição fica indefinida, pois é incompatível ao momentum	7
Nada foi dito	2
Tem valor constante, pois a variação do momentum* tende a zero	2
Descrição de sistemas quânticos	1
Tem-se uma região de probabilidade	1

Tabela 6.22: Sobre a determinação de posição e momentum para um objeto quântico livre de interações

A maioria dos alunos parece ter percebido que como a partícula estava livre de interações, o momentum deveria ser conservado, pois houve uma intensa diminuição do limiar da disponibilidade com uma "dica" dada, como pode ser observado na tarefa 6 (capítulo 5). É a hipótese que enxergamos como mais plausível para explicar a maior parte dos alunos respondendo a partir da conservação do momentum para uma partícula livre, como observado na Tabela 6.23.

Tarefa 6 – Item 2b – O que ocorre com o momentum ao longo do tempo?	frequência
É conservado	7
Nada afirmou/afirmações fora de contexto	2
É conservado, pois a partícula é livre	1
O momentum se altera, pois existe uma operação dependente do tempo	1
Diferentes valores, pois a partícula está numa superposição de estados de momentum	1

Tabela 6.23: Sobre a dinâmica dos estados de momentum do objeto quântico livre de interações

Embora tenha sido alto o nível de generalidade expresso nas respostas (o que é esperado, devido à alta taxa de obliteração, principalmente da equação de Heisen-

berg – tratada muito superficialmente devido ao pouco tempo disponível para isto) expostas na Tabela 6.24, devido ao conhecimento apresentado ser novo para eles, muitos alunos associaram (não se sabe se pela representação simbólica ou de forma arbitrária) a equação de Heisenberg à evolução das variáveis dinâmicas e a equação de Schrödinger à evolução do estado.

Tarefa 6 – Diferenças entre as equações de Heisenberg e Schrödinger	frequência
O estado evolui com o tempo para Schrödinger, enquanto para Heisenberg os operadores variam com o tempo	7
Nada afirmou	2
O estado não evolui com o tempo para Schrödinger, enquanto a equação de Heisenberg é constituída de operadores que comutam	2
O estado é fixo para Heisenberg, enquanto as variáveis dinâmicas mudam. Para Schrödinger o sistema está numa superposição de estados ao longo do tempo	1

Tabela 6.24: Sobre as diferenças entre as equações de Heisenberg e Schrödinger

## 6.2 Análise do conhecimento na forma preditiva

Nesta seção apresentamos uma descrição individualizada, ou seja, aluno a aluno das características de seus desempenhos e alguns possíveis esquemas de pensamento por eles revelados no domínio do campo conceitual tomado por referência. A cada aluno das três turmas (denominadas turma 1, turma 2 e turma 3) foi atribuído um nome fictício no intuito de preservar suas identidades. Assim sendo, na turma 1 consideramos os resultados apresentados por Bartolomeu, Adriele, Moisés, Ana, Betânia e Pedro. Na turma 2 mapeamos os padrões de assimilação de Samuel, Silas, Dalila, Josué, Jacó e Sara. Na turma 3 consideramos André, Úrsula, Maria, Eva e Judith. Os padrões de assimilação são apresentados para cada turma.

### 6.2.1 Turma 1

#### Mapeamento dos padrões de assimilação de Bartolomeu

No pré-teste, Bartolomeu apresenta um amplo nível de generalidade no processo de conceitualização da expressão sistema físico, a saber, de que seria um conjunto de objetos a serem estudados. A pouca especificação dos atributos do conceito nos levam a tal afirmação. Assim, por exemplo, na frase:

*“São objetos de estudo e suas relações, em uma análise de certo fenômeno físico”.*

No que diz respeito ao conceito de variáveis dinâmicas, percebemos que este estaria isolado do de sistema físico, pois seria uma espécie de variável matemática (variável dependente). Deve-se ressaltar, desta forma, o alto nível de generalidade expresso pelo aluno no enunciado do conceito:

*"É uma variável dependente que muda seu valor em função de uma outra variável, ou seja, em função de uma variável independente".*

Ainda no questionário apresentado como pré-teste o aluno demonstra uma relação entre o conceito de estado, por ele expresso como as condições em que se encontra o sistema, e o conceito de sistema físico. É uma relação válida, a nosso ver, por mais que seja indireta. O nível de generalidade deste subsunçor é relativamente alto, assim como o dos conceitos anteriores, segundo expresso pela proposição:

*"São as condições físicas em que o sistema se encontra."*

O conceito de evolução temporal associa-se, porém, ao conceito de estado, dado o fato de o aluno considerar que a evolução temporal está associada ao tempo. Como é possível ver nas respostas ao pré-teste, o conceito de evolução temporal do aluno possui atributos gerais (ligação ao conceito de tempo e modificação do estado) importantes para a aquisição de características mais específicas, como os conceitos de causalidade e preeditividade, por exemplo.

*Tem relação com a variável independente "tempo", e define o estado de um sistema físico, o qual pode sofrer alterações em decorrência da evolução desta variável (tempo).*

O conhecimento prévio do estudante permite tanto a aprendizagem significativa do conteúdo, quanto a aquisição de atributos relativos ao conceito de variáveis dinâmicas, que parece um pouco mais isolado na sua estrutura cognitiva.

Na tarefa 1, relativa ao conceito de sistema físico, o aluno constrói um mapa conceitual que inclui todos os atributos ensinados (conceito de objetos, interações, características externas, estrutura), porém, a partir da primeira análise dos dados, foi possível verificar confusão nos conceitos de estrutura e características externas, pois os atributos do primeiro são representados pelo segundo, o que parece mais um problema de aprendizagem representacional errônea. Parte do mapa da Figura 6.1 (parte da esquerda) compõe o mapa apresentado na primeira tarefa. Na segunda tarefa, discutida adiante, o aluno apresenta a outra ramificação.

O aluno apresenta diferenciação nos exemplos de interação e objetos no que tange à MC, isto é, formula sistemas e classifica, segundo a denominação proposta, os componentes destes de forma correta, ou seja, distingue objetos e interações. Nos exemplos relativos à MQ, não expõe muitos atributos, talvez em função da pergunta proposta ou mesmo por possuir um conhecimento superficial da área. Não podemos descartar o fato de o aluno parecer desconhecer as interações que ocorrem a nível quântico.

*"Sistema: Terra-Lua/ Objetos: Terra e Lua, desconsiderando-se as demais influências./ Características externas: considerados esféricos e com massa uniforme./ Interação: Gravitacional./ Relevância: Entender e prever o movimento dos astros é imprescindível para que possa existir a exploração espacial, como por exemplo a ida do homem à lua. Sistema: Massa-mola (oscilando em um plano com atrito)/ Objetos: Bloco de massa "m", mola de constante "k" e a superfície com " $\mu_c$ " em relação ao bloco./ Características externas: bloco de formato cúbico, mola helicoidal e superfície plana./ Interação: eletromagnética, resultando em força de atrito e força elástica."/*

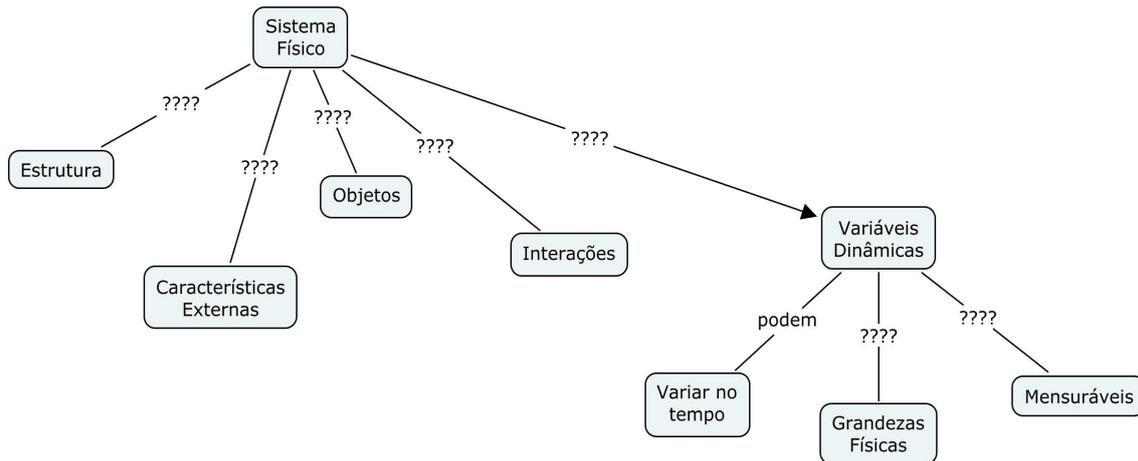


Figura 6.1: Mapa conceitual sobre o conceito de sistema físico e variáveis dinâmicas elaborado por Bartolomeu

*Estrutura interna: Bloco de massa homogênea e mola com massa desprezível./ Relevância: Importante para o estudo das relações energéticas e características dos materiais.”*

*Fóton-elétron (interagindo no efeito fotoelétrico ou efeito Compton). Próton-elétron (no interior de um átomo).*

Os outros exemplos nos mostram que o aluno parece ter realizado a superordenação do conceito de variáveis dinâmicas, embora considere somente variáveis dinâmicas pertinentes à MC, como por exemplo:

*”Posição, velocidade, impulso.”*

Na tarefa 2, o conceito de sistema físico parece ter sido modificado pela introdução do de variáveis dinâmicas. A superordenação é facilitada pelo conhecimento prévio de variáveis dinâmicas específicas relativamente estáveis na estrutura cognitiva como, por exemplo, posição e momentum. O aluno incorpora em seu mapa atributos do conceito tais como a mensurabilidade, o fato de serem grandezas ou observáveis físicos associados aos sistemas, que podem variar no tempo. Veja figura 6.1

Uma aprendizagem subordinativa é realizada no sentido de diferenciar variáveis dinâmicas compatíveis de incompatíveis. Tais conceitos são relacionados de forma não-literal e não-arbitrária ao conceito de medição, diferenciado pela introdução do atributo de simultaneidade, o que representa uma elaboração do conceito de variáveis dinâmicas. Tal distinção é facilitada e corroborada pelo princípio da incerteza e aumenta a discriminabilidade dos subsunçores. Na resposta à terceira pergunta desta tarefa o aluno reforça o enunciado do Princípio da Incerteza, o que facilita a ligação entre os conceitos de variáveis dinâmicas incompatíveis  $x_i$  e  $p_i$  em MQ. Vemos, por exemplo, em:

*”As variáveis dinâmicas incompatíveis não podem ser medidas de modo simultâneo, como por exemplo a posição e a velocidade de um elétron. Existe sim uma relação com o Princípio da Incerteza, como no exemplo dado anteriormente.”*

*"A posição e o momentum de um elétron, medidos em uma mesma componente, são incompatíveis. Porém, se medirmos a posição de um elétron em uma certa componente e sua velocidade em outra componente, simultaneamente, elas não serão incompatíveis."*

O aluno apresenta, entretanto, a relação  $[x_i, p_j]$  (com  $i \neq j$ ) em forma de palavras, o que nos parece ter sido feito sob uma base arbitrária.

É importante ressaltar que neste ponto ainda não havia sido destacado o caráter de evolução temporal das variáveis dinâmicas. A discussão centra-se nos atributos de compatibilidade, grandezas físicas e medição. Outro aspecto a ser enfatizado é o de os conceitos de medição e determinação não estarem diferenciados na sua estrutura cognitiva.

Na questão 5 desta tarefa o aluno relaciona a frase apresentada com o fato de o processo de medição alterar o estado do sistema quântico (perda de informação prévia), mostrando que o conceito de estado começa a incluir atributos consonantes com os do conceito de variáveis dinâmicas. A proposição do aluno é ainda relativamente geral, porém podemos considerar a subsunção realizada como profícua. As variáveis dinâmicas são para ele, informações, conforme pode ser visto na citação abaixo:

*"A medição altera o estado quântico do observável. Trata-se de um processo ligado à aquisição de uma nova informação."*

Na situação específica do experimento de Stern-Gerlach, o estudante parece relacionar de forma não-arbitrária a quebra do feixe à perda de informação prévia, pois relacionando o que havia mencionado previamente com o respondido nos itens a e b da mesma questão, percebe-se a associação ocorrente entre as instâncias supracitadas. É relevante, ademais, observar a associação da idéia de probabilidade à idéia de medição.

*"a) Como mudamos da direção  $z$  para a  $x$ , ao passar pelo segundo eletroímã, e sendo o número de átomos igual a 20.000 (-), ou seja, de menor intensidade, ocorrerá uma nova separação em spin (+) e spin (-), com probabilidade de 50% para cada. Em outras palavras, é provável que 10.000 átomos de spin + passarão na direção  $s_x+$  e 10.000 átomos de spin - passarão na direção  $s_x-$ ./ b) Desta vez, ao passar pelo terceiro eletroímã, em uma direção  $z$ , teremos a probabilidade de encontrar 5.000 átomos de prata com spin + na direção  $z+$  e 5.000 átomos de prata com spin - na direção  $s_z-$ ."*

Pela determinação do estado, o aluno parece ter associado a probabilidade à intensidade do feixe. Creio que a apresentação errônea de um vetor de estado seja derivada da confusão da caracterização deste nas etapas da medição, ou seja, ao invés de expor o estado do sistema no instante posterior à medição ele apresentou algo relacionado à intensidade do feixe antes da medição (o que não implica que o estado do feixe estivesse correto).

*"... c)  $|\psi\rangle = 0,8|s_z, +\rangle + 0|s_z, -\rangle$ "*

Na tarefa 3 o aluno mantém seu mapa conceitual, porém apresenta alguns exemplos na forma de texto. Tais dados foram omitidos, pois se tratava de uma explicação de por que o aluno não havia construído um mapa específico para a tarefa.

O aluno apresenta o conceito de estado como um ente definitivo de um sistema físico, na forma de um conjunto de grandezas. O estado é, pois, subsumido pelo conceito de variáveis dinâmicas determináveis simultaneamente. Ele relaciona, portanto, a determinação do estado ao conceito de variáveis dinâmicas compatíveis.

Para ele o conceito de superposição linear está ligado ao seu significado mais direto, a soma de estados e está associado a uma indefinição relacionada à não ocorrência de medição (um caso particular em que se enquadra o conceito). O sistema para ele se encontra indefinido, logo estaria em uma superposição de estados, porém não menciona relação alguma com a existência de variáveis dinâmicas incompatíveis.

*"A superposição de estados acontece quando o estado de um sistema não está definido, ou seja, não foi medido ou não houve interação."*

O aluno associa a equação de autovalor à medição sem modificação do sistema, de forma bastante geral, pois não menciona o colapso do vetor de estado. Associa a equação, entretanto, às variáveis dinâmicas, possivelmente pelo enunciado proposto.

*"A equação  $\hat{H}|E'\rangle = E'|E'\rangle$  nos diz que o operador  $\hat{H}$  atua sobre o auto-estado  $|E'\rangle$  sem modificá-lo, retornando um valor de medição, neste caso um valor de energia, que é o autovalor  $E'$ ."*

A não-arbitrariedade está somente na não alteração do estado, porém o uso dos termos operador e auto-estado pode ser um indicativo de aprendizagem representacional, mais próxima do pólo da aprendizagem mecânica.

Bartolomeu entende que o sistema só pode assumir, depois da medição, um dos valores da variável dinâmica medida, assim como o fato de a preparação de um sistema com um dado valor de uma variável dinâmica impossibilitar a obtenção de outro valor para aquela variável em uma medição sequencial<sup>1</sup>. Tal subsunção pode ter ocorrido através do atributo medição sequencial (o que implica em não haver passado um intervalo de tempo suficiente para ter ocorrido modificação no sistema). As proposições apresentadas pelo aluno encontram-se abaixo.

*"A Hamiltoniana em MC é uma função a qual está associada a variável dinâmica Energia. Já o Hamiltoniano em MQ é um operador que está associado também a variável dinâmica Energia. Ambos definem as interações que ocorrem em um sistema físico."*

Os conceitos foram assimilados numa base não-literal em relação ao conceito de interações, porém não podemos garantir, neste caso, que esta assimilação tenha ocorrido de forma não-arbitrária.

Na tarefa 4, percebemos que os conceitos de função hamiltoniana e operador hamiltoniano foram assimilados (subordinados) desde os conceitos de energia e de variáveis dinâmicas.

---

<sup>1</sup>Associado à ortogonalidade dos auto-estados de um operador hermiteano de espectro não-degenerado.

*A função Hamiltoniana  $H$  está relacionada com a Energia Mecânica de um sistema composto por dois corpos, um de massa  $m$  e outro de massa  $M$ .*

O aluno associa a função hamiltoniana à energia total, o que corrobora parte do que foi concluído das respostas à questão 1 (citação acima). Menciona que o sistema Terra-Lua pode ser tratado pela hamiltoniana dada. A associação de  $H$  com a energia torna-se mais estreita, logo menos arbitrária, através da identificação justificada plausivelmente, dos termos de energia cinética e potencial, associando indiretamente as interações à energia potencial e diretamente a energia cinética ao momentum (velocidade).

*"a) A função Hamiltoniana  $H$  está relacionada com a Energia Mecânica de um sistema composto por dois corpos, um de massa  $m$  e outro de massa  $M$ . A interação entre estes corpos é do tipo gravitacional, visível (pelo menos pra mim) no último termo (terceiro termo da esquerda para a direita)./ b) Os sistemas físicos que podem ter suas dinâmicas tratadas com o uso da Hamiltoniana em questão são os sujeitos a atração gravitacional, os quais descrevem um movimento de rotação e translação. Um exemplo seria a Lua orbitando a Terra./ c) Pelo fato do termo  $P$  representar o momentum de cada corpo, evidenciados no 1º e 2º termos da equação, verificamos que estes dois termos tem relação com a Energia Cinética de ambos. Mais especificamente, o 1º termo refere-se a Energia Cinética do corpo de massa  $m$  e o 2º termo refere-se a Energia Cinética do corpo de massa  $M$ . Já o 3º e último termo refere-se a Força Gravitacional existente entre os corpos de massa  $M$  e  $m$ , em função do raio que os separa. Pelo fato da Hamiltoniana caracterizar a Energia Mecânica do sistema, somos levados a crer que este último termo (o 3º termo), refere-se a Energia Potencial"*

Verificamos ainda uma relação plausível (lógica) estabelecida pelo aluno a partir da equação presente no item c da mesma questão. A identificação do elétron como um objeto que possui carga, massa e spin, mostra a dedução da interação entre o campo magnético e o objeto, visto que o hamiltoniano incorpora interações.

*"O objeto quântico, que no caso é um elétron, dotado de carga elétrica e massa, interage com o campo magnético não uniforme que está orientado em uma direção específica (vertical, eixo  $z$ ). O objeto elétron é dotado de uma característica chamada Spin, que efetivamente interage com o ente físico campo magnético não uniforme".*

Bartolomeu estabelece o vínculo entre a superposição de estados e as variáveis dinâmicas pelo atributo de indeterminação de medição para as variáveis dinâmicas incompatíveis. Os conceitos de variáveis dinâmicas incompatíveis e de superposição de estados foram, portanto, modificados, tornando-se mais claros, ou seja, houve a percepção do fato de, na determinação de uma variável, ocorrer indeterminação em uma variável incompatível a ela, o que fica expresso como uma das interpretações possíveis para a superposição de estados. Isto pode ser visto na proposição:

*"as variáveis dinâmicas incompatíveis não podem ser medidas simultaneamente, pois a medida de uma grandeza afeta o valor da outra... Quando temos duas variáveis dinâmicas incompatíveis, sendo que preparamos ou conhecemos o estado de uma delas, a outra estará em Superposição de Estados, uma vez que nada poderemos saber a respeito dela."*

A frase *”nada poderemos saber a respeito dela”* indica, entretanto, uma concepção incompleta ou até errônea acerca da superposição de estados e mesmo do princípio da incerteza.

Na tarefa 5, o conceito de variáveis dinâmicas exposto pelo aluno parece ser o que mais está ligado a outros conceitos, conforme pode ser visualizado no seu mapa conceitual. Veja Figura 6.2

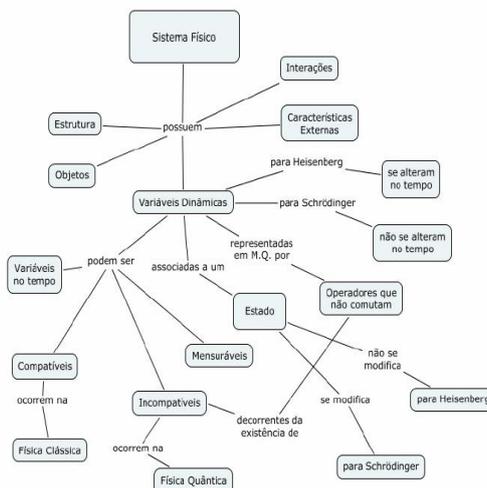


Figura 6.2: Primeiro mapa incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Bartolomeu

Os atributos do conceito incluem agora a associação a um estado, bem como a representação por operadores que, em geral, não comutam em MQ. O conceito de estado surge, portanto, como uma diferenciação do conceito de variáveis dinâmicas e o de evolução temporal surge implicitamente (sem o uso da palavra conceito) como associado à modificação do estado do sistema (das variáveis dinâmicas) ao longo do tempo.

O conceito de estado apresentado pelo aluno é agora a configuração que um sistema físico assume em um dado instante de tempo, sendo diferenciado nos domínios da FC e da FQ. Estados Clássicos são determinísticos (ele não usa a palavra conceito), enquanto os Estados Quânticos são probabilísticos (amplo – não específico). Ele afirma que para conhecermos o estado no futuro, devemos conhecer as condições iniciais e as interações, logo, para ele a causalidade estaria associada estreitamente à evolução temporal.

*”Consideramos Estado de um sistema físico a configuração que ele assume em certo instante. Em MC, se conhecemos as condições iniciais e as interações, podemos saber em um dado instante o valor que será medido. Em MQ a idéia de Estado está associado a uma probabilidade. Porém, tanto na MC quanto na MQ o Estado de um sistema depende das condições iniciais, ou causas primordiais, e das interações, sendo que a causalidade surge da evolução temporal dos sistemas.”*

O aluno apresenta ainda uma relação entre a preparação do sistema e a determinação de um valor para a variável dinâmica, bem como a indeterminação de um valor para uma variável dinâmica incompatível a ela, no caso específico do experimento de Stern-Gerlach, considerando uma medição da variável  $s_z$ . A preparação do

estado com um valor de implica que haja uma probabilidade associada aos valores de  $s_x$ . Probabilidade está, portanto, associada aos conceitos de  $s_x$ ,  $s_z$ , auto-estados, variáveis dinâmicas, etc.

*"a) No instante inicial, como o sistema está preparado em  $s_x$  e este possui spin "positivo" ( $+\frac{\hbar}{2}$ ), obteremos spin "positivo" para o átomo de prata. b) Como o sistema não está preparado em  $s_z$ , mas sim em  $s_x$ , obteremos uma probabilidade de 50% de encontrar o átomo de prata com spin "positivo" e 50% de encontrar o átomo de prata com spin "negativo"./ c) Neste caso vemos que o operador depende do tempo. Portanto, como o sistema já está preparado em  $s_y$  com valor "positivo" para o spin ( $\frac{\hbar}{2}$ ), com uma medição realizada em um instante inicial ( $t = 0$ ) obteremos o valor "positivo" para o spin. No instante inicial ( $t = 0$ ) a probabilidade de obtermos spin "negativo" ( $-\frac{\hbar}{2}$ ) em  $s_y$  é praticamente zero. Isso ocorre porque as características físicas de um sistema (seja clássico ou quântico) não permanecem as mesmas ao longo do tempo, sofrendo alterações depois de decorrido algum período. Se o tempo passasse, haveria uma modificação dos operadores e também no estado do sistema./ d) No instante de tempo ( $t = \frac{2\pi}{\omega}$ ) a variável dinâmica que terá seu valor definido será ( $\frac{\hbar}{2}$ ), ou seja, spin "positivo". Quando substituímos ( $t = \frac{2\pi}{\omega}$ ) na equação apresentada e fazemos o módulo ao quadrado para encontrar a probabilidade, verificamos que o valor encontrado para o primeiro operador, pelo fato do expoente ser positivo, é muito superior ao valor encontrado no segundo operador, pelo fato deste ter expoente negativo."*

Bartolomeu não consegue perceber que os operadores independem implicitamente do tempo (na representação de Schrödinger), pois para ele a evolução temporal, se associada ao estado, faria evoluir também as variáveis dinâmicas, pois estas estão associadas àquele, segundo pode ser visto na frase

*"porque as características físicas de um sistema (seja clássico ou quântico) não permanecem as mesmas ao longo do tempo, sofrendo alterações depois de decorrido algum período. Se o tempo passasse, haveria uma modificação dos operadores e também no estado do sistema".*

Ele relaciona de forma geral a equação de Schrödinger, as equações de Maxwell e de Newton às leis de evolução temporal na MQ, Teoria Eletromagnética e MC, respectivamente. Desta forma, cremos haver um nível maior de arbitrariedade na afirmativa, pois a equação de Schrödinger, como expressão lingüística é um mero nome, tratando-se no máximo de aprendizagem representacional sob esta perspectiva.

Na tarefa 6 o aluno modifica somente um aspecto em seu mapa conceitual: a associação das interações à causa da evolução temporal, atributo que consideramos importantíssimo no domínio deste campo conceitual. Veja Figura ??.

Bartolomeu não faz relação direta com o que havia sido pedido na questão 2 e talvez, na letra b tenha respondido mais a partir da representação simbólica exposta do que pela frase que fornece a resposta ao problema ("justifique sua resposta, lembrando que para uma partícula livre, o momentum se conserva").

*"a) O tempo em zero nos retorna, de certa forma, uma constante. Ou seja, a posição não sofre alteração, pois neste instante de tempo muito curto não ocorre a evolução*

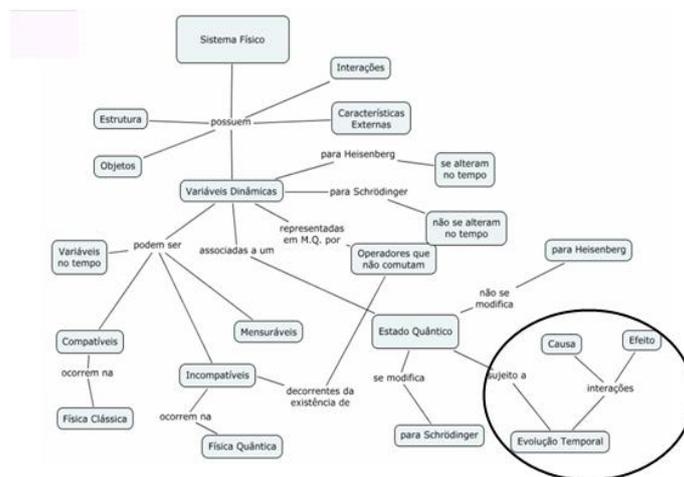


Figura 6.3: Segundo mapa incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Bartolomeu (a parte marcada corresponde ao conteúdo acrescentado no mapa anterior)

*temporal no sistema. A trajetória na MC é quem descreve a evolução temporal de um sistema de partículas./ b) Agora, com a existência de um operador dependente do tempo, e devido a evolução temporal, o sistema terá sofrido alteração. Aparentemente, segundo a equação, o momentum será maior./ c) A função de onda nos mostra o local onde é mais provável de ser encontrada a partícula, levando-se em consideração que toda partícula possui uma função de onda associada, uma vez que o estado de uma partícula apresenta características comuns às ondas, inclusive com a capacidade de se superporem.”*

O estudante associa a superposição de estados à natureza ondulatória da MQ. Tal característica do estado é relacionada à função de onda que está associada à probabilidade. Algumas relações não são bem explicitadas pelo aluno, conforme pode ser visto na tabela supracitada.

Percebemos que o aluno distingue as equações de Heisenberg e de Schrödinger através da representação simbólica, de forma não-arbitrária e não-literal, pois a usa para justificar que segundo a formulação de Heisenberg os operadores associados às variáveis dinâmicas variam com o tempo, enquanto para Schrödinger são os estados (escritos como superposições) que variam ao longo do tempo.

*”Analisando as equações de Schrödinger e Heisenberg, verificamos que os operadores de Heisenberg variam no tempo. Já os operadores de Schrödinger são estacionários. A formulação de Schrödinger impõe a evolução temporal para o sistema físico, se considerarmos fixas as variáveis dinâmicas ao longo do tempo.”*

### Mapeamento dos padrões de assimilação de Adriele

No pré-teste Adriele apresenta o conceito de sistema físico como um conjunto de elementos interagentes, do qual inferimos um nível intermediário de generalidade, segundo frase por ela apresentada:

*”É um conjunto formado por elementos interagindo em um espaço pré-determinado, resultando em um fenômeno passível de quantização.”*

A aluna, entretanto, introduz a idéia de quantização, porém de maneira aparentemente arbitrária ou talvez por se tratar de um curso de MQ. O conceito de variáveis dinâmicas possui um nível amplo de generalidade, pois para ela as variáveis são elementos do sistema (não especificados pela aluna) que podem modificar-se ao longo do tempo.

*“Variável dinâmica é o elemento de um sistema físico que, ao sofrer variação, causa mudança no fenômeno a ser quantizado”.*

O conceito de estado de um sistema físico é também portador de um nível amplo de generalidade, pois assim como para Bartolomeu, é concebido como as condições dos elementos do sistema. Inferimos, portanto, que são condições gerais dos sistemas físicos, dada a falta de especificidade.

*“São as condições gerais (dos elementos que formam o sistema) num determinado momento da quantização.”*

O conceito de evolução temporal parece ser o mais específico dos quatro, dada a explicitação do atributo mais importante do mesmo, a saber, a modificação do sistema ao longo do tempo. A frase elaborada pela aluna nos mostra que ela entende o conceito como

*“... as modificações no sistema observadas no decorrer do tempo, na interação das variáveis físicas com a passagem temporal.”*

Os conceitos parecem independentes uns dos outros, a não ser os de sistema físico e evolução temporal, o que pode dificultar a aprendizagem significativa dos conceitos arrolados para o ensino de MQ nesta proposta.

Na tarefa 1 a aluna apresenta um mapa conceitual no qual os atributos dos conceitos parecem relativamente os mesmos apresentados no pré-teste, dada a disposição no mapa. O conceito de variáveis dinâmicas mostrou-se ligado ao conceito de sistema físico, o que deve expressar a modificação do último. Veja Figura ??.

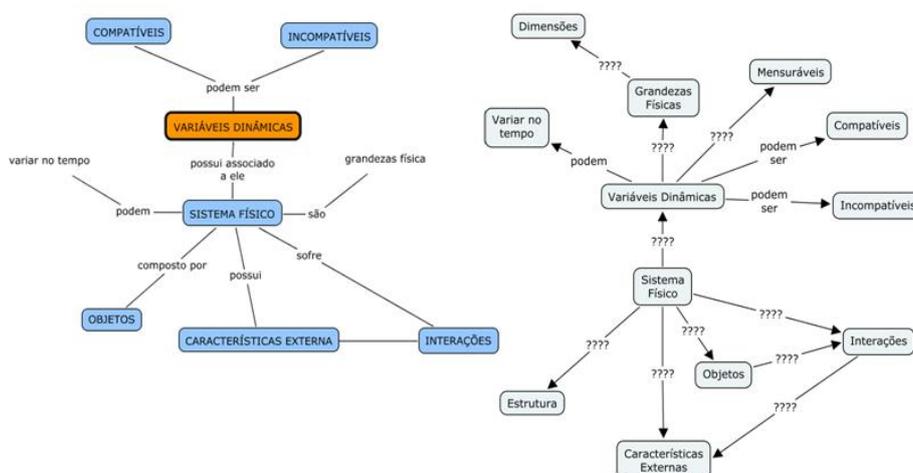


Figura 6.4: Primeiros mapas conceituais sobre os conceitos de sistemas físicos e variáveis dinâmicas apresentados por Moisés (esquerda) e por Adriele (direita)

A identificação dos atributos do conceito é uma evidência de que a superordenação do conceito ocorreu corretamente para a FC.

*”Exemplo 1: Partícula em queda livre/ Objetos: Partícula e a Terra/ Interação: gravitacional/ Características externas: massa da Terra e da Partícula./ A estrutura da partícula nesse sistema é irrelevante./ Este sistema é muito simples, mas básico para a compreensão inicial deste tipo de movimento. No Ensino médio é interessante iniciar com sistemas mais simples, com menos grandezas, e ir introduzindo novos fatores aos poucos (como a resistência do ar e a estrutura da partícula, por exemplo). Exemplo 2: Sistema Terra-Lua/ Objetos: Terra e Lua/ Interação: Gravitacional/ Características externas: massas da Terra e da Lua./ Estruturas: os corpos são considerados esféricos./Um sistema como esse costuma ser tratado também com mais simplicidade que a realidade pelo mesmo motivo do sistema do exemplo 1: facilitar a compreensão inicial e construir uma base para o conhecimento.”*

Já para a MQ, o conceito de sistema físico parece estar indiferenciado, pois a estudante menciona os atributos sem muitos esclarecimentos, como pode ser visto na passagem:

*”Ex: interação próton-elétron./ Ex: interação fóton-elétron.”*

No que tange ao mapa conceitual vinculado ao conceito de sistemas físicos, encabeçado pelo de variáveis dinâmicas, a aluna apresenta os atributos essenciais do conceito e diferencia, ainda, as variáveis dinâmicas em compatíveis e incompatíveis. No que diz respeito às variáveis dinâmicas, parece haver indícios de êxito da superordenação inicialmente planejada.

*”Exemplos de variáveis dinâmicas: velocidade, aceleração e corrente elétrica, pressão, volume, temperatura, spin.”*

No mapa conceitual da tarefa 2 a aluna mantém os atributos do conceito de variáveis dinâmicas, o que pode ser uma possível estabilização do conceito. O conceito de características externas foi diferenciado do de variáveis dinâmicas de maneira que o atributo diferenciador destes conceitos fosse a possibilidade de evolução temporal associada ao segundo. Veja a Figura 6.5.

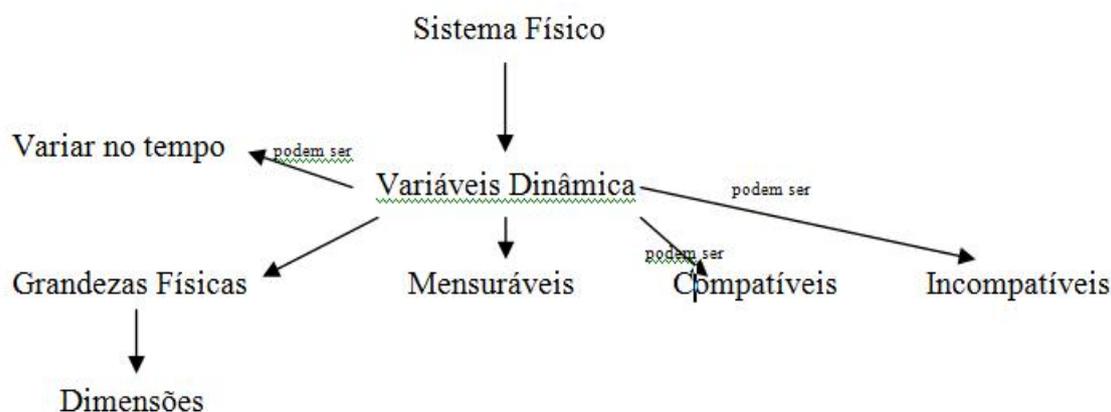


Figura 6.5: Segundo mapa conceitual sobre sistemas físicos e variáveis dinâmicas apresentado por Adrielle

Houve diferenciação entre variáveis dinâmicas incompatíveis e compatíveis a partir do atributo de possibilidade de medição simultânea, que aparentemente não está discriminado do conceito de determinação simultânea, ou seja, a aluna concebe aparentemente a medição como determinação ou como impossível para duas variáveis dinâmicas incompatíveis. Para ela a existência de variáveis dinâmicas incompatíveis está diretamente relacionada com o princípio da incerteza, erroneamente entendido como associado à impossibilidade de medições a nível atômico.

*"Variáveis Dinâmicas Compatíveis são grandezas que podem ser medidas simultaneamente. Enquanto as incompatíveis não podem. As grandezas incompatíveis não podem ser medidas simultaneamente, pois ao se mensurar uma delas, destruímos informações sobre as outras. O que se aproxima muito do princípio da incerteza que também afirma ser impossível mensurar grandezas em nível atômico."*

Para a aluna, no exemplo específico da determinação de valores de posição e momentum, existe uma relação entre o aspecto de medição/determinação e o conhecimento simultâneo necessário para a determinação destas variáveis.

*"... a posição e o momento são definidos pelas suas componentes. Variáveis compatíveis podem ser medidas simultaneamente, logo, para se medir a posição, as componentes devem ser medidas simultaneamente..."*

A destruição de informação prévia de  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  em medições seqüenciais de pares destas variáveis dinâmicas, está relacionada diretamente ao fato de serem incompatíveis. Tal atributo pode ter sido assimilado a partir do experimento de Stern-Gerlach. Adriele, no entanto, usa o termo medir com o significado do termo determinar:

*"... as componentes do spin são variáveis incompatíveis. Ou seja, medi-las simultaneamente é impossível."*

Na última questão da tarefa 2 a aluna expressa dificuldades na determinação do estado do sistema. Não podemos descartar a hipótese de confusão acerca da questão. cremos, porém, que houve dificuldade na relação da definição de estado com o uso da mesma.

*"a) Após passar pelo eletroímã temos apenas os 80000 (+), pra cima./ b) O feixe volta a ter spin(+) e spin(-). Não sei se consigo expressar o estado de um sistema... Se o estado de um sistema é a configuração de suas variáveis dinâmicas e o sistema parece voltar a suas condições iniciais.../c) Expressar o estado... Bem, acho que não entendo o que isso quer dizer."*

No mapa conceitual apresentado na tarefa 3, o conceito de estado de um sistema físico é subordinado ao de variáveis dinâmicas e representa uma elaboração deste conceito. Veja Figura 6.6.

No que tange à questão em que se pede a discussão do conceito de estado de um sistema físico, a aluna faz uma cópia parcial do material de apoio, mas seu conceito de estado é ainda muito inclusivo, embora relacionado ao de variáveis dinâmicas e na MQ a um conjunto de variáveis compatíveis.

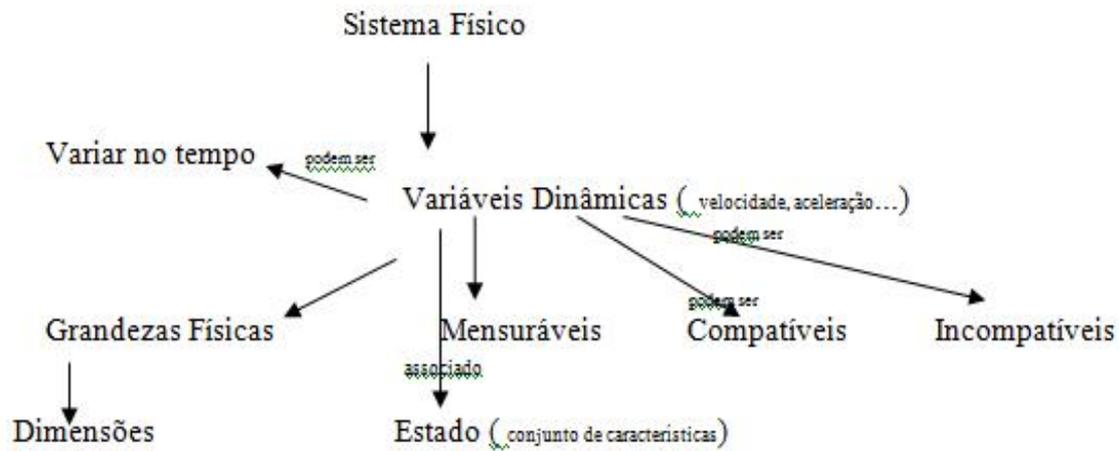


Figura 6.6: Terceiro mapa conceitual apresentado por Adriele (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

*"Estado de um sistema físico é o conjunto de características e grandezas físicas associadas ao sistema, que vão desde forma, tamanho, disposição molecular até grandezas mensuráveis por dispositivos próprios, como velocidade, aceleração, momento, temperatura, pressão, etc."*

A noção de superposição para ela foi relacionada, provavelmente, de forma não-arbitrária e não-literal à idéia de conjunto de variáveis dinâmicas (o que não garante a correção da associação). Associa o conceito à idéia de probabilidade, porém de forma relativamente isolada.

*"Uma superposição de estados é a representação de um conjunto de variáveis compatíveis que me permitam caracterizar um sistema físico, inclusive probabilisticamente."*

Adriele consegue expressar-se relativamente bem com respeito à equação de autovalores, mas nos faltam evidências para afirmar que tenha relacionado isto ao conteúdo conceitual assimilado. Em outras palavras, não podemos garantir que ela tenha integrado os conceitos assimilados (operantes durante a retenção) na estrutura cognitiva para formular uma interpretação para a equação de autovalores.

*"Esta é uma equação que afirma que um operador aplicado ao estado de um sistema resulta numa medida de autovalor, e apenas a medida, sem alterar o estado do sistema."*

Na quinta questão da tarefa 3 a aluna demonstra confusão nas respostas, pois quando é necessário o uso do conceito de probabilidade ela claramente demonstra significados ambíguos e confusos. Para ela, de fato, o conceito de estado foi assimilado como relacionado à idéia de variáveis dinâmicas, porém as idéias de medição e probabilidade não foram assimiladas junto ao conceito de estado de forma significativa.

*"A variável dinâmica definida é  $s_x$ .  $|s_x, +\rangle$  e  $|s_x, -\rangle$  são auto-estados da variável dinâmica  $s_x$ . Os auto-estados de  $s_x$  são escritos como superposição linear de  $s_z$ ./ A*

*probabilidade de encontrar  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$  numa medição de  $s_z$  é de 50%, mesma probabilidade de encontrar  $s_x = -\frac{\hbar}{2}$  numa medição de  $s_x$ ./ O estado  $|s_x, +\rangle$  é auto-estado do operador  $s_x$ .*"

Na tarefa 4 a aluna associa o hamiltoniano (a hamiltoniana) ao conceito de estado como sendo uma descrição. Talvez a relação seja não-arbitrária, pois ela pode crer que o conhecimento da energia esteja ligado à determinação do estado. A relação do conceito de variáveis dinâmicas com o de estado e a classificação da energia como um caso particular do conceito de variáveis dinâmicas corroboram esta hipótese. Vemos que:

*"A função hamiltoniana é uma função que descreve e caracteriza o estado de um sistema físico clássico, já o operador hamiltoniano tem função parecida, mas aplicado a sistemas quânticos."*

Adrielle relaciona a hamiltoniana às interações e à energia, na questão 2, item a, dando a identificação correta dos elementos que compõem o hamiltoniano no item c, corroborando a associação do conceito ao de energia.

*"A hamiltoniana descreve interações e energia total relacionada a dois corpos com um centro de massa comum..."*

Na terceira questão faz a relação do conceito de interações com a representação simbólica. Reconhece o sistema físico clássico pelo enunciado e pelas características expostas na equação. Entende que haja características do elétron e do campo no hamiltoniano. Mais informações não podem ser obtidas sob a óptica do conhecimento operatório, pois incluem elementos implícitos nas respostas. Podemos observar a resposta de Adrielle:

*"O elétron do átomo de prata interage com o campo magnético não uniforme, pois são os termos (elétron – carga, massa, velocidade – e campo) descritos no operador..."*

A aluna entende, agora, a superposição de estados como associada a probabilidades e às variáveis dinâmicas incompatíveis. Como na medição de variáveis dinâmicas ocorre alteração do estado do sistema, surge, então, a idéia de probabilidade, expressa pela superposição de estados. A idéia de indeterminação não é explicitada, mas é apresentada implicitamente. Parece ter havido uma diferenciação, logo, seguinte aumento da estabilidade do conceito, que outrora parecia bem menos claro.

*"Variáveis dinâmicas incompatíveis são grandezas físicas que não podem ser medidas simultaneamente, pois essa medição pode mudar o estado de um sistema físico quântico... determinamos um estado com probabilidades de medidas para essas variáveis incompatíveis. Essa "soma" de estados é o que chamamos superposição de estados."*

No mapa conceitual apresentado na tarefa 5, o conceito de variáveis dinâmicas parece ser o mais diferenciado, dado o fato de outros conceitos ancorarem-se nele, como o de evolução temporal que se relaciona de forma relativamente arbitrária aos nomes dos físicos Heisenberg e Schrödinger e aos conceitos de variáveis dinâmicas e de estado de um sistema físico, respectivamente. A evolução temporal está ligada

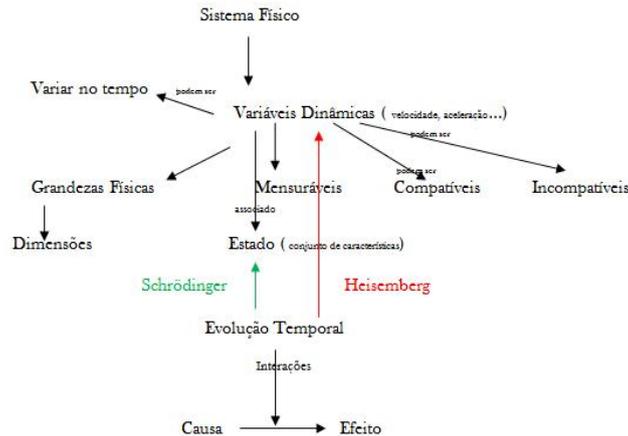


Figura 6.7: Primeiro mapa incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Adrielle

às interações que são causas daquelas, gerando uma relação de causalidade. Veja a Figura 6.7.

Para a aluna, a evolução temporal gera interações que modificam estados. O teor de arbitrariedade é considerável. É uma afirmativa aparentemente não razoável a de a evolução temporal gerar interações. Entende, porém, que o atributo de causalidade está presente tanto na MC quanto na MQ (modificação dos estados).

*"Isso significa que evolução temporal causa interações gerando efeitos, modificando estados."*

A terceira questão será analisada unicamente sob a óptica do conhecimento operacional, dado o baixo teor de explicitação presente na resposta.

Na tarefa 6, a aluna apresenta um mapa linear em que alguns aspectos foram obliterados do mapa anterior. O sistema quântico, uma especificação do conceito mais geral de sistema físico, tem características mais gerais que no mapa anterior, o que corrobora o pensamento majoritariamente clássico dos estudantes.

Adrielle apresenta aspectos tangenciais ao segundo problema. Afirma ser a posição uma constante, pois a variação do momentum é nula (velocidade igual a zero, posição constante). Deve-se ressaltar que mesmo classicamente este raciocínio é errôneo. Além disto, a solução do problema não está ligada à percepção de que  $p_x$  e  $x$  são variáveis dinâmicas incompatíveis e que quando uma é determinada a outra fica indeterminada (numa superposição de estados). Levantamos três hipóteses que podem ter levado a estudante a esta resposta:

- esquecimento do significado do conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis;
- não percepção de que, para um objeto quântico,  $p_x$  e  $x$  são variáveis dinâmicas incompatíveis;
- não percepção de que o problema envolva um objeto quântico.

A terceira hipótese é descartada, pois a aluna distingue a trajetória clássica do conceito em MQ. As duas primeiras hipóteses estão relacionadas, sendo mais provável a explicação pela hipótese 2, dado que o conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis parece mais estável na sua estrutura cognitiva.

*"a) Como a variação do momentum tende a zero, podemos considerar como um valor constante. Nas trajetórias clássicas, só podemos traçá-las por conhecer o comportamento do momentum./b)  $|\psi(t)\rangle = \lim_{\delta p' \rightarrow 0} \int_{p'}^{p'+\delta p'} \exp\left[-\frac{iE(p)t}{\hbar}\right] |p\rangle dp$ . Este valor indica apenas que pode-se encontrar a partícula, pois ela existe./ c) Segundo a relação de de Broglie o movimento de uma partícula é relacionada a propagação de uma função de onda associada. Isto é, a partícula deve estar em um local onde as ondas tenham uma amplitude apreciável, ou seja, existe uma relação entre a probabilidade de uma partícula ser encontrada em uma coordenada se for feita uma medida da localização da partícula associada a uma função de onda."*

A aluna relaciona a probabilidade de presença do objeto quântico em uma dada região à função de onda de forma tangencial. Para ela o movimento de objetos quânticos está associado a uma onda, o que mostra estar o conceito de movimento disponível em sua estrutura cognitiva mesmo quando não solicitado, o que pode estar associado a um pensamento mecanicista. A resposta da aluna está localizada na mesma tabela da citação acima, pois se trata da mesma questão.

A aluna apresenta ainda relações confusas e relativamente isoladas na estrutura cognitiva a menos do uso de alguns conceitos anteriormente trabalhados na intervenção. Usa algumas informações de forma arbitrária para justificar argumentos expostos aleatoriamente. A obliteração provavelmente ocorrerá mais rapidamente no sentido de tornar o conceito de evolução temporal restrito aos atributos de causa e efeito.

### Mapeamento dos padrões de assimilação de Moisés

No pré-teste, Moisés apresenta conceitos em bom nível de generalidade. O conceito de sistema físico está associado a um conjunto de objetos específicos (corpos e partículas) aos quais são atribuídas características. Outros atributos como os conceitos de grandezas físicas e leis físicas estão associados ao conceito.

*"Sistema físico consiste em um ou mais corpos ou em uma ou mais partículas sobre as quais será feito um estudo, atribuindo características, grandezas físicas, parâmetros e verificando se esse sistema obedece a determinadas leis."*

O conceito de variáveis dinâmicas está, assim como o de sistema físico, em um nível ótimo de generalidade, pois inclui grandezas físicas que se alteram no tempo e encontra-se ligado ao conceito de sistema físico. Moisés é mais específico se comparado a outros estudantes.

*"Variável dinâmica é uma grandeza física que se altera com o decorrer do tempo."*

O conceito de estado, menos específico que os anteriormente apresentados, está associado ao de sistema físico, como um ente que caracteriza o comportamento do sistema em um dado instante de tempo e associado a propriedades físicas não especificadas.

*"Se caracteriza pelo comportamento do sistema num determinado instante de tempo, ou seja... o sistema... possui características físicas e propriedades físicas que descrevem o seu estado."*

O conceito de evolução temporal, mais específico, engloba os atributos de alterações associadas ao sistema ao longo do tempo.

*A evolução temporal caracteriza as alterações que um sistema físico pode, ou não, sofrer com o passar do tempo.*

Na tarefa 1, o aluno apresenta um mapa conceitual relativo ao conceito de sistema físico e expõe os atributos que considera essenciais ao conceito: possibilidade de ocorrência de interações, composto por objetos e características externas. O mapa apresenta os mesmos atributos inicialmente considerados pelos outros alunos e a não diferenciação do mapa nos impede de ir além no entendimento dos processos cognitivos realizados pelo estudante na aquisição dos conceitos. Veja Figura 6.4

O conceito de variáveis dinâmicas se mostra associado ao de sistema físico. A diferenciação do conceito fica mais explícita quando se destaca que o aluno considera as variáveis dinâmicas como associadas ao sistema físico. Outro ponto a destacar é o caráter de compatibilidade das variáveis dinâmicas, ressaltado por ele.

Moisés identifica corretamente elementos de sistemas físicos em FC, isto é, objetos e interações ocorrentes neste domínio, o que pode evidenciar uma superordenação conceitual exitosa, dado o nível de inclusividade e generalidade ótimos (e aparente estabilidade e clareza dos subsunçores do estudante).

*”Sistema físico: Oscilador massa-mola vertical/ Objetos: Objeto preso à mola, mola e Terra/ Interações: eletromagnética e gravitacional/ Características externas: Massa do objeto, Constante elástica da mola e Massa da Terra/ É importante, no estudo da Física, que se entenda as oscilações de um objeto em torno de um ponto de equilíbrio e as grandezas físicas que se relacionam com esses fenômenos. Em algumas situações de estudo, antes de um sistema possuem comportamento semelhante ou muito próximo de osciladores harmônicos e o conhecimento dessa área leva, muitas vezes, ao progresso do estudo, como foi o caso em que Planck imaginava que as paredes de um corpo negro eram formadas por osciladores harmônicos. Sistema Físico: Terra-Lua/Objetos: Terra e Lua/ Características externas: Massa da Terra, Massa da Lua, Raio médio da Terra, Raio da Lua e Distância média entre os astros./ A compreensão do sistema Terra-Lua, incluindo as grandezas envolvidas como posição, velocidade, momentum, energia mecânica e força gravitacional forma uma base de conhecimento que favorece a compreensão de outros sistemas físicos como por exemplo duas cargas elétricas, uma em movimento circular em relação à outra fixa; carga elétrica em movimento circular num campo magnético; e até mesmo o elétron em movimento ao redor do núcleo atômico.”*

No que tange à MQ, ele identifica corretamente também os exemplos e os diferencia em um nível próximo de generalidade dos apresentados em FC como, por exemplo, o caso do átomo de hidrogênio.

*”Exemplo 1: Átomo de hidrogênio/ Objetos: próton e elétron/ Interações: eletromagnética./ Características externas: massa, carga, spin.”*

O conceito de variáveis dinâmicas parece ter sido superordenado com maior facilidade, devido aos exemplos dados.

Cabe ressaltar que o estudante não enfatiza o aspecto de evolução temporal (como também os outros alunos), pois nada é mencionado na resolução da lista de

problemas e não havia sido dada a ênfase necessária ao conceito de evolução quando proposta a tarefa.

Na segunda tarefa o conceito de sistema físico parece ter sofrido uma leve desestabilização, pois no seu mapa o aluno considera que as variáveis dinâmicas compõem um sistema. Levantamos duas possibilidades, uma associada à obliteração e outra associada à falha de linguagem. Mesmo com evidência dirigida para a primeira, dada a frase usada na discriminação dos conceitos de características externas e variáveis dinâmicas, não podemos concluir algo. Veja a Figura 6.8.

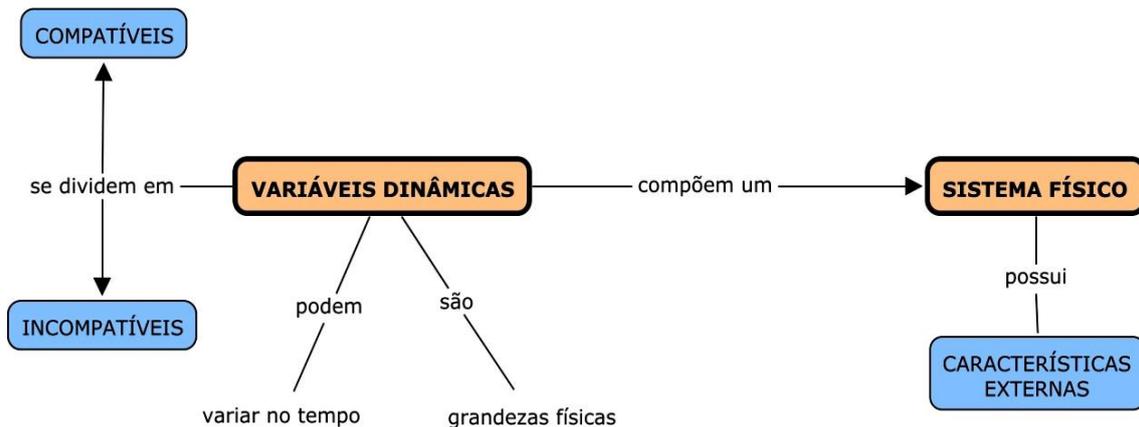


Figura 6.8: Segundo mapa conceitual sobre os conceitos de sistema físico e variáveis dinâmicas apresentado por Moisés

De forma muito semelhante aos outros alunos, Moisés subsume a partir do conceito de variáveis dinâmicas, os conceitos de variáveis dinâmicas compatíveis e incompatíveis. O elo foi realizado a partir do conceito de medição simultânea (que para ele parece significar determinação também). Relaciona isto para o caso específico de posição e momentum (princípio da incerteza) e mostra relativa diferenciação da situação do princípio de incerteza quando apresenta a explicação. O conceito de incerteza, neste momento, não pode ainda ser caracterizado como semelhante ao conhecimento científico, dada a falta de evidências, porém tem noção da especificidade da validade do princípio para uma das componentes da posição e seu momentum conjugado.

*"... variáveis... compatíveis... podem ser medidas simultaneamente, ou seja, a medida de uma variável não interfere... a medida de outra... quando duas grandezas não podem ser medidas simultaneamente, elas são chamadas incompatíveis. Um exemplo... dado sobre esse assunto é a medida da posição e do momento de um elétron. O princípio da incerteza afirma... que quanto maior a certeza da componente horizontal da posição de um elétron, menor será a certeza da componente horizontal do momento dessa partícula."*

Não justifica a resposta à terceira questão da tarefa 2, embora responda corretamente, o que nos tolhe de concluir algo mais que a possível realização de um acerto arbitrário.

Moisés descreve com alguns pequenos deslizos de linguagem (obter duas medidas quando queria falar dois feixes, cada um com componente de spin definida), porém

fenomenologicamente bem, o aparelho de Stern-Gerlach, para justificar o exemplo dado que se refere ao conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis. A situação parece ter facilitado a aprendizagem dos conceitos de medição, componentes de spin, variáveis dinâmicas incompatíveis, entre outros. Associa também estes conceitos ao atributo de destruição de informação prévia. A descrição processual do experimento mostra o nível de diferenciação do conceito desenvolvido pelo aluno. Usa ainda os argumentos para responder ao item 6. Relaciona, então, a probabilidade com a superposição de estados, embora expresse o estado  $|s_x, +\rangle$  quando foi pedido, implicitamente, que se expressasse o estado  $|s_x, -\rangle$ . Podemos, porém, ver que o conceito de probabilidade naturalmente foi associado ao de superposição, que foi relacionado ao de variáveis dinâmicas e medida. É possível verificar, pouco a pouco, a diferenciação dos conceitos, o que também pode evidenciar aprendizagem significativa. A resposta à tarefa é citada abaixo:

*"No exemplo 2 já foi mencionado um exemplo de variáveis incompatíveis em MQ. Mas outro exemplo que pode ser mencionado ainda é a respeito do experimento de Stern-Gerlach: mede-se a componente  $s_z$  de um feixe de prata que passa por um eletroímã alinhado na direção  $z$  e obtém-se duas medidas  $s_z = \frac{\hbar}{2}$  e  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ . Selecionando apenas o feixe positivo e passando por um eletroímã orientado na direção  $x$ , voltamos a obter as duas medidas do spin, mas agora na direção  $x$  ( $s_x = \pm \frac{\hbar}{2}$ ). Se mais uma vez selecionarmos apenas o feixe positivo e agora passarmos por outro eletroímã orientado na direção  $z$ , obteremos novamente as duas medidas de spin ( $s_z = \pm \frac{\hbar}{2}$ ). Dessa forma,  $s_x$  e  $s_z$  são variáveis incompatíveis, uma vez que a medição de  $s_x$  anula as informações acerca da medição em  $s_z$ ."*

*"Em sintonia com o que foi exposto na questão anterior, entendo que a medida do spin em uma direção é incompatível com a medida do spin em outra direção. Por isso que ao medir umas das variáveis, perdemos informações a respeito das outras."*

O aluno relacionou a probabilidade de encontrar o feixe com valor de projeção de spin (antes da medição) com o estado posterior à medição e introduziu a amplitude de probabilidade como sendo igual à intensidade relativa do feixe em relação ao feixe inicial (0,8), o que pode ser um problema resultante do entendimento de algum aspecto específico do problema da medição como a confusão entre probabilidade e amplitude de probabilidade.

Na tarefa 3, o aluno constrói um mapa conceitual que não inclui o conceito de estado, porém apresenta vários exemplos associados aos conceitos ensinados, que parecem ter sido aprendidos. Veja a Figura 6.9.

O conceito de estado, por ser mais amplo, também foi assimilado com um alto teor de generalidade por parte do aluno. Este, entretanto, diferencia em MC, Teoria Eletromagnética, Termodinâmica e MQ, a noção de estado, apresentando variáveis dinâmicas relevantes aos problemas. A partir dos conceitos de variáveis dinâmicas compatíveis e variáveis dinâmicas incompatíveis, o aluno diferencia sua noção de estado em MQ, admitindo que haja um conjunto de variáveis dinâmicas compatíveis, o que está de acordo com os exemplos que dá. Para ele estado é caracterizado por um conjunto de variáveis dinâmicas que podem ser determinadas simultaneamente.

*"Entende-se por estado físico de um sistema o arranjo das variáveis dinâmicas de importância em questão."*

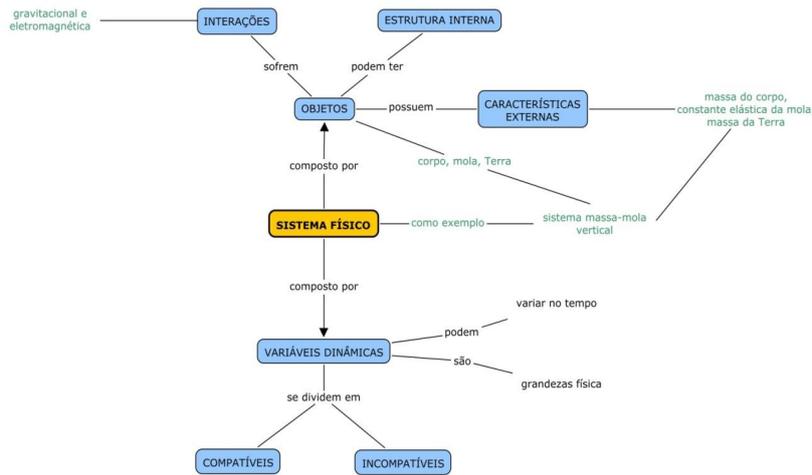


Figura 6.9: Terceiro mapa conceitual apresentado por Moisés (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

Moisés associa, ainda, a noção de amplitude de probabilidade como necessária para a determinação do estado. Tal noção deve estar diretamente associada à de probabilidade (mas fica difícil inferir pelo conhecimento predicativo como é esta relação de proporcionalidade). Menciona o aparato de Stern-Gerlach como exemplo, o que pode ser resultado de subsunção derivativa.

*“Na MQ, quando conhecidas as variáveis dinâmicas compatíveis em um instante de tempo e as amplitudes de probabilidade de se obter determinada medida, determinamos completamente o sistema físico.”*

O aluno relaciona a idéia de superposição de estados tanto à idéia de soma de estados possíveis quanto à indeterminação de uma variável dinâmica. Usa ainda o experimento de Stern-Gerlach para justificar a ligação que envolve os conceitos de variáveis dinâmicas incompatíveis, probabilidade, medição, etc.

*“Se dois vetores  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  representam estados possíveis de um sistema, podemos combiná-los a ponto de formar outro possível estado do mesmo sistema físico:  $|\psi_3\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle \dots$  Consideremos o experimento de Stern-Gerlach: quando um feixe de átomos de prata está preparado em  $|s_z, +\rangle$  e passa por um campo na direção  $x$ , a medição mostra que a variável dinâmica  $s_x$  passa a ficar definida e a variável dinâmica  $s_z$  fica com valor indefinido.”*

Ele relaciona, ademais, os operadores às variáveis dinâmicas, os autovalores à energia (variável dinâmica tratada no caso) e considera que medições de variáveis dinâmicas definidas não alteram o estado do sistema.

*“Quando o operador  $\hat{H}$ , que representa a variável dinâmica que queremos medir, atua sobre o auto-estado  $|E'\rangle$  de energia, obtém-se a medida  $E'$  (que se chama autovalor) de energia sem modificar esse auto-estado  $|E'\rangle$  do sistema. ”*

Moisés também parece ter realizado aprendizagem representacional da simbologia, pois consegue identificar que:

- $|s_x, +\rangle$  é auto-estado de  $\hat{s}_x$ ;
- $|s_x, +\rangle$  é uma superposição de auto-estados de  $\hat{s}_z$ ;
- $s_x$  é a variável dinâmica de valor definido;
- a probabilidade de obter o valor  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$  em uma medição. Parece, porém, ter relacionado muito fortemente a idéia de medição em MQ à idéia de probabilidade, tanto que admite que haja resultados essencialmente probabilísticos na medição de  $s_z$ , sabendo que  $s_x$  estava definido.

*"A variável dinâmica definida é  $s_x$ .  $|s_x, +\rangle$  e  $|s_x, -\rangle$  são auto-estados da variável dinâmica  $s_x$ . Os auto-estados de  $s_x$  são escritos como superposição linear de  $s_z$ ./ A probabilidade de encontrar numa medição de  $s_z = \frac{\hbar}{2}$  é de 50%, mesma probabilidade de encontrar  $s_x = -\frac{\hbar}{2}$  numa medição de  $s_x$ ./ O estado  $|s_x\rangle$  é auto-estado do operador  $\hat{s}_x$ ."*

O aluno demonstra relativa clareza no conhecimento que adquire, porém é óbvio que existem rupturas, que no seu caso parecem ser menores que as filiações.

Na tarefa 4 o aluno não identifica inicialmente a energia como associada à função hamiltoniana, mas a uma forma de descrição do estado do sistema. Associa, entretanto, a energia ao operador hamiltoniano, ressaltando que ela pode assumir vários valores (espectro). Ele nada afirma sobre as interações.

*"O operador hamiltoniano representa a energia total de um sistema quântico, enquanto a função hamiltoniana representa o estado de um sistema mecânico em termos das variáveis posição e momentum."*

Moisés identifica, posteriormente (questão 2 da tarefa 4), a interação na hamiltoniana clássica, vincula explicitamente a hamiltoniana clássica à energia, bem como a energia potencial às interações.

*"A interação que ocorre no sistema é do tipo gravitacional, mostrada pelo termo da equação acima... o terceiro termo da equação  $\left(\frac{GMm}{|r-R|}\right)$  representa a energia potencial gravitacional entre os corpos de massa  $M$  e  $m$ ."*

No exemplo relativo à MQ, demonstra que sob o limiar da disponibilidade do reconhecimento tem ativada a idéia de que o spin interage com o campo magnético, relacionando tal idéia com a de energia.

*"A interação que existe ocorre entre o spin do elétron e um campo magnético não uniforme, fato que fica bem evidenciado pela presença do campo magnético e da energia do elétron na equação acima"*.

Para Moisés a superposição de estados é consequência da existência de variáveis dinâmicas incompatíveis, porém não explicita a relação entre os dois conceitos. Ele menciona a alteração do estado do sistema no processo de medição no mesmo contexto, o que é muito tangencial ao tratado na questão proposta, embora esteja, em geral, substancialmente correto ao comentar a alteração do estado.

*”As variáveis dinâmicas incompatíveis... são variáveis que só podem ser medidas em tempos distintos... Contudo, a medição de uma variável, modifica o estado do sistema. Dessa forma, a superposição de estados é uma consequência da existência de variáveis dinâmicas incompatíveis.”*

Na tarefa 5 o aluno apresenta um mapa conceitual em que o conceito de estado encontra-se ausente e a evolução temporal está associada às variáveis dinâmicas. Isto sugere que o conceito de estado tenha sido obliterado ao de variáveis dinâmicas, pois conforme conjecturado o estado de um sistema físico havia sido aprendido como uma diferenciação do de variáveis dinâmicas. Veja a Figura ??.

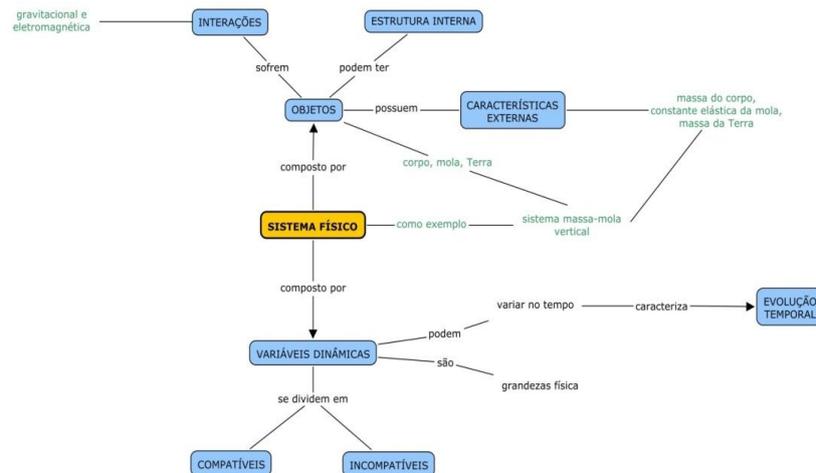


Figura 6.10: Terceiro mapa conceitual apresentado por Moisés (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

Quando houve a diminuição do limiar de disponibilidade para o conceito de estado, este se mostrou disponível. A pergunta gira ao redor da evolução do estado do sistema no tempo. As causas da modificação do estado (evolução temporal) são apontadas pelo aluno com sendo as condições iniciais (estado inicial) e interações e a similaridade do atributo de causalidade é percebida por ele como geral.

*”Sabendo-se a condição inicial de um sistema físico e conhecendo-se as condições iniciais que o regem, podemos inferir seu estado em qualquer instante de tempo, ou seja, tanto em MQ quanto em MC, conhecendo-se a(s) causa(s) (condições iniciais e interações no sistema) pode-se inferir sobre o comportamento do sistema em qualquer instante de tempo (efeito).”*

O aluno parece relacionar a definição de uma variável dinâmica a um único valor possível de ser obtido para esta variável dinâmica no processo de medição seqüencial posterior à preparação do sistema com este valor de variável dinâmica, porém parece perceber que uma variável dinâmica incompatível àquela pode assumir vários valores no processo de medição, dado ter sido preparada em um auto-estado distinto. Moisés usa corretamente a notação simbólica.

*”a) Obteremos o valor  $\frac{\hbar}{2}$ , uma vez que o sistema já está definido em  $s_x$ ./ b) Após a medição na direção  $z$ , teremos  $s_z$  definido:  $\pm \frac{\hbar}{2}$ . Obteremos:  $|s_x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z, +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z, -\rangle$  e  $|s_x, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z, +\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z, -\rangle$ ./ c)./d) ”*

Para o aluno, a evolução temporal está associada aos sistemas físicos, mas reconhece que as leis fundamentais descrevem a evolução temporal em diferentes domínios da Física.

*"As equações acima são as 'leis' que ditam a evolução temporal dos sistemas físicos... A equação de Schrödinger é uma 'lei' que governa a evolução temporal de sistemas quânticos."*

Na última tarefa o aluno apresenta o mesmo mapa conceitual da quinta atividade. Moisés não apresenta um raciocínio explícito para o item a da segunda questão da tarefa 6, mas concebe que o valor definido de momentum acarreta um valor indefinido de posição. Justifica de duas formas que os auto-estados de momentum são estacionários (sem usar tal linguagem).

*"... o momentum da partícula está definido, mas a posição não..."*

*"... Ao longo do tempo, o momentum permanece constante..."*

*"... No processo de medida, obteremos o mesmo valor do momentum inicial..."*

O sujeito associa a função de onda a uma representação do estado. O caráter probabilístico dos estados é exposto por ele pela "definição" que apresenta para a função de onda.

*"A função de onda é a representação em espaços de coordenadas do estado de um sistema. O módulo quadrado da função de onda, para um determinado ponto do espaço, é proporcional à probabilidade de encontrar a partícula naquele ponto."*

Para Moisés a equação de Schrödinger parece muito mais específica (menciona a forma específica da superposição de estados) que a de Heisenberg (muito possivelmente pela ênfase dada). O aluno afirma também serem as duas formulações, descrições da MQ, nos levando à conjectura de que o conceito de evolução temporal tenha sido modificado tanto pela sua relação com o estado quanto pela sua associação às variáveis dinâmicas.

*"A equação de Schrödinger impõe a evolução temporal ao estado do sistema, considerando as variáveis dinâmicas fixas ao longo do tempo... Na equação de Heisenberg, a variável dinâmica se modifica no tempo, enquanto o estado do sistema quântico permanece constante."*

### **Mapeamento dos padrões de assimilação da Ana**

No pré-teste, Ana parece demonstrar um nível de generalidade muito alto para alguns conceitos tais como o de sistema físico que seria uma estrutura para estudar um fenômeno. O nível de inclusividade do conceito de variáveis dinâmicas é, também, alto para a realização da aprendizagem em nível ótimo. O conceito apresenta-se associado ao de sistema físico, as variáveis sendo grandezas e situações do sistema que se modificam ao longo do tempo (atributo talvez eliciado pela palavra dinâmica).

*"Sistema físico é estrutura na qual verifica-se a aplicação de um determinado fenômeno, ou seja, o campo de estudos desse ou daquele fenômeno..."*

*“... Pode ser entendida como uma situação que se modifica no sistema no decorrer da análise do fenômeno.”*

Ela concebe o estado como um conjunto de características das variáveis. O seu conceito inclui os atributos de modificação ao longo do tempo, bem como as características das variáveis em um dado instante. Entendemos que o nível de generalidade esteja aceitável para a realização da aprendizagem.

*“Estado de um sistema são as características das variáveis que o compõem em um determinado instante.”*

Por último, a aluna parece apresentar o conceito de evolução temporal como isolado da estrutura cognitiva, pois entende que ele trata de evoluções ocorridas na Ciência, isto é, acréscimo de conhecimento científico. A proposição por ela apresentada está contextualmente errada.

*“Entende-se pelos acréscimos ocorridos nas Ciências Físicas, os avanços e estudos originados a partir da interminência de análises que passaram a requerer mais explicações e a questionar as leis até então firmadas”*

Na primeira tarefa a aluna apresenta um mapa conceitual no qual é possível verificar a diferenciação (modificação) do conceito de sistema físico, que passa agora a possuir objetos e variáveis dinâmicas associadas. As variáveis dinâmicas, segundo o mapa, continuam possuindo os atributos de evolução no tempo e de serem grandezas. O conceito de sistema, entretanto, parece mais estável em relação à sua versão apresentada no pré-teste. Veja a Figura 6.11.

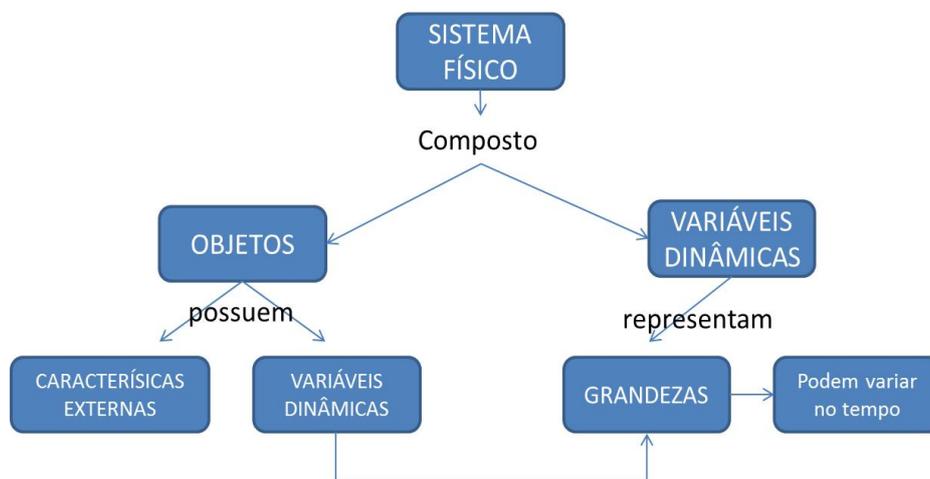


Figura 6.11: Primeiro mapa conceitual sobre sistemas físicos e variáveis dinâmicas apresentado por Ana

Ana não inclui as interações em seu mapa conceitual, porém podemos ver que o conceito de sistema físico incorpora, para ela, este atributo, cujo nível de especificidade ainda não foi possível estimar. Pode-se afirmar, então, que ele já se encontra retido, o que pode ser evidência de uma superordenação.

*”Movimento da Lua em torno do Sol./ Objetos: Terra e Lua; características externas: Massa da Terra e Massa da Lua; interações: gravitacional. Um sistema massa-mola oscilando verticalmente./ Objetos: bloco, Terra, mola; características externas: massa; interações: gravitacionais, eletromagnéticas.”*

Os exemplos usados no contexto da MQ podem refletir que seu conhecimento prévio provavelmente associado à Antiga Teoria Quântica, dado serem exemplos pertinentes a esta classificação, a saber, o efeito fotoelétrico e o experimento de dupla fenda.

*”Efeito fotoelétrico./ Objetos: feixe de luz e placa metálica; características externas: frequência da luz, massa, carga dos elétrons; interações: eletromagnéticas. Experimento de dupla fenda./ Objetos: feixe de elétrons, tela opaca com fendas; características externas: frequência dos elétrons, carga do elétron, massa; interações: eletromagnéticas.”*

Os exemplos de variáveis dinâmicas apresentados podem mostrar que houve superordenação, principalmente a partir do atributo de grandezas físicas presente no conceito. Ana, assim como os outros estudantes, pelo contexto das atividades, talvez não tenha enfatizado o aspecto de evolução temporal das variáveis dinâmicas.

*”Oscilador harmônico: constante elástica, alongação, energia cinética, energia potencial./ Queda Livre - MRUV: velocidade, aceleração, posição.”*

Na tarefa 2, a aluna constrói um mapa conceitual mais organizado no qual carrega os atributos dos conceitos expostos. Veja a Figura 6.12.

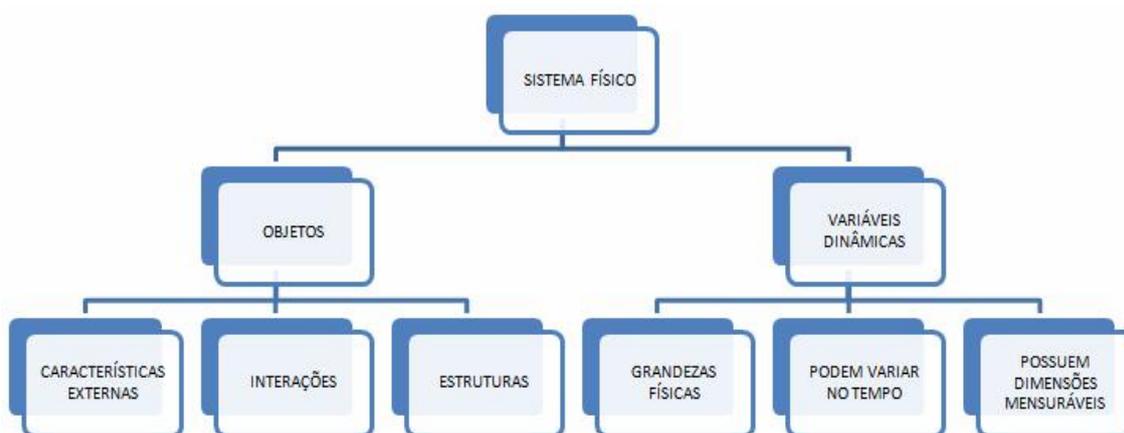


Figura 6.12: Mapa conceitual (um fluxograma, na verdade) sobre sistemas físicos e variáveis dinâmicas apresentado por Ana

A aluna não diferencia, no mapa conceitual, o conceito de variáveis dinâmicas compatíveis do conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis, porém, quando solicitada o faz.

A aluna usa como critério de diferenciação o conceito de determinação simultânea, sendo este aparentemente semelhante ao de medição simultânea, para ela. Para Ana a impossibilidade de determinação simultânea está relacionada de forma não-arbitrária, porém confusa, a uma alteração no sistema, resultante da medição prévia

de outra variável incompatível com a que se mede. Cremos ter ocorrido subordinação no seguinte sentido: variáveis dinâmicas  $\rightarrow$  variáveis  $\rightarrow$  dinâmicas incompatíveis  $\rightarrow$  indeterminação simultânea  $\rightarrow$  alteração do sistema.

*"Variáveis compatíveis é um conjunto de variáveis dinâmicas, cujos valores podem ser simultaneamente apresentados. São grandezas que interagem entre si, são observáveis que caracterizam um estado físico específico e podem ser obtidas simultaneamente./ Variáveis dinâmicas incompatíveis são grandezas que não podem ser medidas simultaneamente, pois a medição de uma delas altera o sistema e, portanto a determinação do valor da outra. São grandezas que não pertencem a um estado físico no mesmo intervalo de tempo. É quando a observação de uma grandeza está na dependência da alteração do fenômeno, o que se dá pela medição de uma primeira variável. Poderia se dizer que cada variável pertence a uma parte fracionada de um sistema físico./ A incerteza se caracteriza pelo fato de um estado ser alterado pela medição de outra em função de um pequeno intervalo de tempo, considerando medições sequenciais. "*

A estudante relaciona a existência de variáveis dinâmicas incompatíveis ao princípio da incerteza, o que gera uma diferenciação do conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis, que adquire este novo atributo e associa ao estado tal incerteza.

*"A incerteza se caracteriza pelo fato de um estado ser alterado pela medição de outra [variável]."*

No exemplo específico de determinação de variáveis dinâmicas incompatíveis afirma não podermos determinar simultaneamente as componentes de momentum. Ela diferencia o conceito de componentes de momentum e variáveis dinâmicas incompatíveis a partir de idéias aparentemente intuitivas (ou arbitrarias) que devem ser estudadas com maior profundidade sob a óptica da análise de conhecimento na forma operatória.

*"As componentes de posição de um elétron são variáveis compatíveis. As componentes de momentum não são compatíveis..."*

Ana reafirma idéias prévias interligadas (de forma não-litera, mas com possibilidade de existência de arbitrariedade), relativas às variáveis dinâmicas incompatíveis, pois identifica a informação dada com a frase que usa para responder à questão 5. A resposta correta nos dá a idéia de que ela tenha relacionado o desdobramento dos feixes no experimento de Stern-Gerlach à indeterminação de componentes de spin.

Foi-nos possível observar, portanto, algumas evidências de aprendizagem significativa de conceitos de FQ durante a realização da tarefa. Isto não quer dizer que Ana apresente um comportamento completamente compatível com o de aprendizagem significativa, pois em algumas passagens é visível o teor de arbitrariedade usado nas respostas.

Na realização da tarefa 3, a aluna apresenta um mapa conceitual que não inclui o conceito de estado, porém quando solicitada, expõe o mesmo. Veja a Figura 6.13.

O estado, agora, para ela é visto como um conceito subordinado ao de sistema físico, pois este é entendido como compreendendo um conjunto de variáveis dinâmicas.

*"O estado de um sistema físico compreende um conjunto de variáveis que descrevem o sistema físico em um dado momento."*

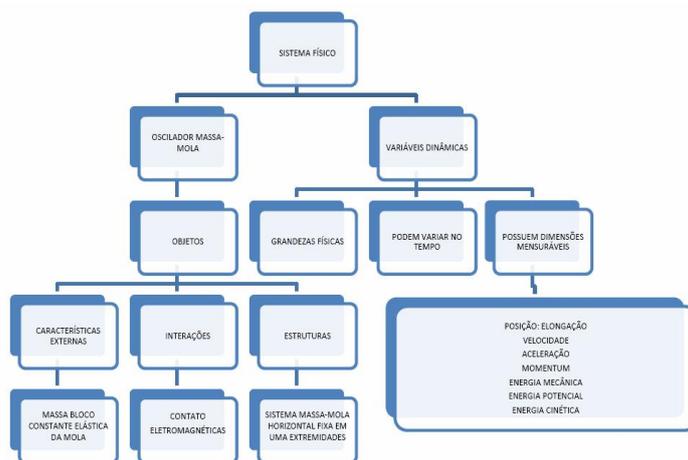


Figura 6.13: Terceiro mapa conceitual apresentado por Ana (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

A aluna apresenta exemplos coerentes da determinação do estado de um sistema físico na FC, o que demonstra uma modificação (especificação) do conceito em sua estrutura cognitiva.

*”O estado de um sistema físico compreende um conjunto de variáveis que descrevem o sistema físico em um dado momento./ Em MC, por exemplo, a determinação da posição, velocidade e aceleração, entre outras, de um sistema massa-mola compreende um estado físico desse sistema./ Já na Teoria Eletromagnética caracterizam um estado físico a determinação do campo elétrico e magnético, entre outros, de um sistema físico como uma carga elétrica imersa em um campo magnético./ Em Termodinâmica, podem ser citadas a determinação de Temperatura, pressão e volume, para caracterizar um estado físico nessa área./ Em MQ, por exemplo, para caracterizar o estado de um sistema, é necessária a determinação de momentum, energia, entre outros./ Momentum e energia são variáveis dinâmicas de sistemas físicos das mais diversas áreas da Física. ”*

Quando conceitualiza em MQ, seu entendimento parece não ter levado em conta a existência de variáveis dinâmicas incompatíveis, ou seja, o conceito de estado não carrega o atributo de que as variáveis dinâmicas devem ser simultaneamente determinadas.

*“Em MQ, por exemplo, para caracterizar o estado de um sistema, é necessária a determinação de momentum, energia, entre outros.”*

O conceito de superposição de estados apresentado pela aluna está relacionado à medida e o conceito de auto-estado parece ainda estar vago em sua estrutura cognitiva, o que configura uma dificuldade para realização de aprendizagem significativa. A aluna precisa de maior clarificação no que tange a este conceito.

*”... [Superposição de estados] representa a caracterização de uma evolução temporal devido a mudança nas variáveis de estados físicos mediante a atuação de operadores ao sistema. Auto-estados são estados elementares de um sistema físico.”*

Verificamos dificuldade na aquisição do conceito de auto-estados, pois Ana demonstra confusão na classificação do auto-estado, ao afirmar que os autovalores (estado relativo, segundo sua linguagem) são os auto-estados, quando analisa a equação de autovalores. O conceito foi ancorado ao de variáveis dinâmicas e está associado à medição de forma geral, logo falta ainda ser diferenciado para maior compreensão em MQ. Isto, provavelmente, fortaleceria as ligações entre os conceitos e facilitaria a reconciliação de semelhanças e percepção de diferenças entre eles. A nomenclatura pode também ser usada para a facilitação da compreensão. Vemos confusão na resposta da aluna:

*"O  $\hat{H}$  representa um operador do estado relativo  $E'$ , ou seja,  $E'$  é um auto-estado do operador  $\hat{H}$ .  $E'$  representa uma função do valor de energia medido em uma dada situação, do estado  $E'$ ."*

Ana não relaciona a superposição de estados à indeterminação de uma variável dinâmica a ser medida (se o estado do sistema está em uma superposição de auto-estados do operador correspondente àquela variável). Ela demonstra, também, claramente uma confusão na noção de determinação com a superposição de estados, porém embora afirme que  $s_x$  tem  $|s_x, +\rangle$  como auto-estado, realiza uma inversão na classificação das variáveis dinâmicas como definidas ou indefinidas.

*"A variável dinâmica que possui um valor definido é  $s_z$ ./ A probabilidade de obtermos numa medição de  $s_z$ , o valor  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$  de 100%. / A probabilidade de obtermos um valor  $s_x = -\frac{\hbar}{2}$  em uma medição de  $s_x$  é de 50%. / O estado  $|s_x, +\rangle$  é auto-estado do operador  $\hat{s}_x$ ."*

Na tarefa 4 a aluna apresenta várias assertivas vagas associadas à energia, algumas delas desprovidas de sentido (pois estas frases não têm relação com qualquer aspecto enfatizado na intervenção) como pode ser visto nas respostas dadas à primeira questão da atividade.

*"... [A] função Hamiltoniana representa a generalização das coordenadas de energia de um sistema clássico... O operador Hamiltoniano não está definido em todo o espaço, apenas em um domínio de abrangência."*

No exemplo específico da MC, Ana identifica a hamiltoniana com a energia total e a interação à energia potencial. A relação entre energia e hamiltoniana/hamiltoniano e interações é tornada estreita pela explicitação da identificação dos termos do hamiltoniano.

*"A Hamiltoniana representa a energia total de um sistema com interação gravitacional mostrada pelo termo  $\frac{GMm}{|r-R|}$ ."*

Ana identifica pela equação dada na questão 4, a interação do spin com o campo magnético. A identificação do fato de que a aluna relaciona variáveis dinâmicas compatíveis a auto-estados simultâneos é explicitada.

*"Os objetos que interagem são o spin do elétron e um campo magnético não uniforme. Isso se deve a presença do campo magnético e energia do elétron..."*

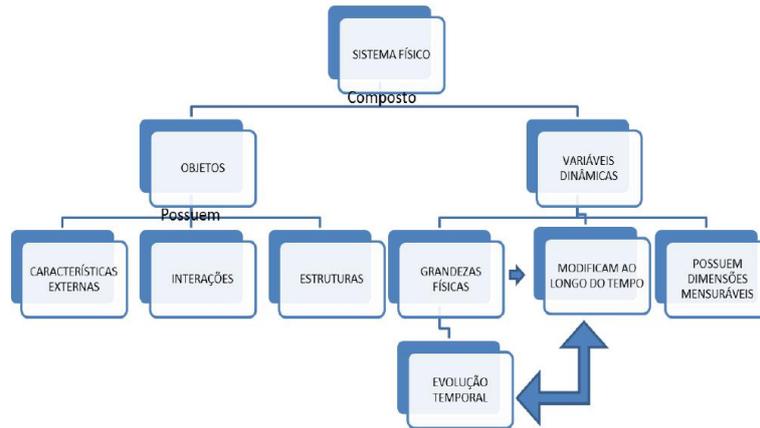


Figura 6.14: Primeiro mapa incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Ana

A aluna apresenta um mapa conceitual na tarefa 5, no qual não inclui o conceito de estado, atribuindo ao conceito de variáveis dinâmicas o caráter de evolução temporal. Veja a Figura 6.14.

A aluna distingue a MC da MQ de forma não tão articulada, mas substantivamente correta, pelas características de determinismo associadas aos estados clássicos e probabilismo, associadas aos estados quânticos. As razões para tal classificação não são explicitadas, mas talvez sejam oriundas de discussões anteriores. Ana também considera o atributo causalidade associado tanto à MC quanto à MQ, o que pode ser um indicativo tanto da aquisição da idéia de preditividade no segundo domínio como da incorporação do aspecto de as interações causarem a mudança de estados na Física como um todo.

*“... sendo informadas as condições no instante inicial e as interações que ocorrem no sistema, pode-se antever o resultado das medidas de estado em um tempo posterior, devido às leis de evolução temporal que nos informam o comportamento das variáveis dinâmicas de um sistema...”*

*“... na MQ, para antever o estado de um sistema posterior ao instante inicial utiliza-se a ideia de amplitudes de probabilidades...”*

Apresentaremos as inferências feitas sobre os possíveis conhecimentos-em-ação que conduziram a estudante a responder a questão 3 da forma realizada. O teor de explicitação sendo baixo nos impede de inferir algo sob a óptica da análise por ora feita.

Ana associa a evolução temporal a sistemas físicos. Na resposta à questão 4 diferencia as três equações pelos seus domínios. A característica de evolução temporal é o que basicamente as torna semelhantes em alguns aspectos.

*“A equação de Schrödinger tem como função determinar a variação temporal de um sistema quântico./ As equações de Maxwell representam as leis de evolução temporal da Teoria Eletromagnética Clássica./ As equações de Newton têm como objetivo determinar o comportamento de um sistema físico clássico, relacionado na grande maioria, pelas equações de movimentos./ Em geral, as equações funcionam como operadores geradores da evolução temporal.”*

Na tarefa 6 a aluna constrói um mapa conceitual (um fluxograma, na verdade) cujos aspectos devem ser salientados. Ela apresenta algumas ligações de variáveis dinâmicas incompatíveis com evolução temporal, a superposição de estados como associada ao estado e às probabilidades e as últimas à evolução temporal e a operadores. A aluna sinaliza as ligações, mas não estabelece os conectores (fundamentais para a construção do mapa). Veja a Figura 6.15

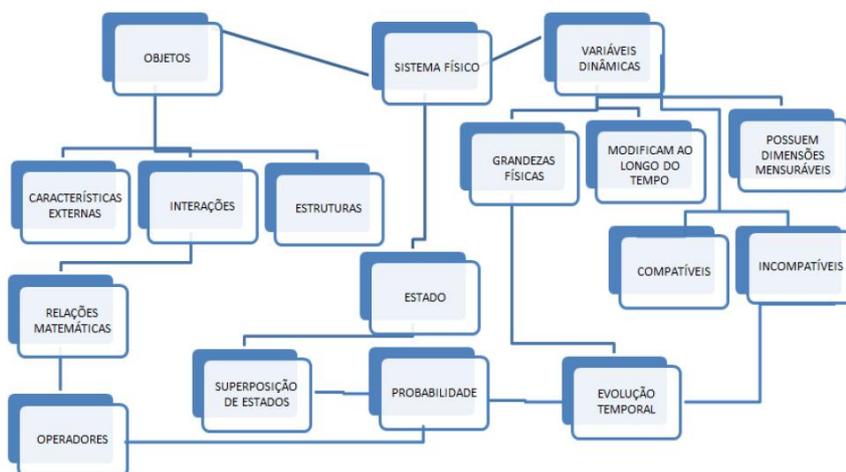


Figura 6.15: Segundo mapa incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Ana

A aluna copia as respostas aos problemas. As cópias são identificadas como relativas aos trabalhos de Moisés e Adriele. Isto é um indicativo, na melhor das hipóteses, de aprendizagem mecânica de alguns conceitos como, por exemplo, sobre a determinação da evolução temporal tratando de espectro contínuo (momentum e posição).

### Mapeamento dos padrões de assimilação de Betânia

No pré-teste, Betânia revela um conceito de sistema físico em um nível amplo de generalidade, visto afirmar que um sistema é um conjunto de parâmetros e variáveis usados para o estudo da Física. É visível a falta de especificação dos atributos do conceito. O conceito de variável dinâmica, igualmente amplo em nível de generalidade, está associado às variações que ocorrem no sistema físico (segundo sua própria linguagem).

*"[Sistema físico] É um sistema constituído de parâmetros e variáveis sobre o qual é construído um modelo científico, envolvendo algum fenômeno."*

*"[Variável dinâmica] É um dado fornecido ou obtido para algum sistema que sofre variações a partir de outro ou outros dados/variáveis."*

O conceito prévio de estado para a aluna está associado às condições de energia do sistema. O conceito parece isolado na estrutura cognitiva, pois se associa somente ao de energia. O conceito de evolução temporal, entretanto, é entendido como uma transformação do sistema ao longo do tempo. Desta forma, classificamos o nível de generalidade do conceito como alto.

*"[Estado do sistema] Se refere às condições de energia do sistema."*

*"[Evolução temporal] Conjunto de princípios, leis, teorias utilizados para descrever os fenômenos físicos... com idealizações suficientes para descrever... esses fenômenos."*

O ensino de conceitos para Betânia mostra-se possível, pois a aluna possui, aparentemente disponíveis, os conceitos em um nível razoável de generalidade para o que se vai ensinar.

Na tarefa 1, a aluna inclui no mapa conceitual dois atributos que tornam diferenciado o conceito de sistema físico, a saber, as noções de objetos e de interações. Foi introduzido, ainda, o atributo de características externas, mas da análise inicial o conceito parece potencialmente confuso no momento da assimilação. O mapa é, na verdade, um fluxograma, porém pela descrição coerente de exemplos, inclusive classificação, foi possível notar a assimilação dos atributos de interação e objetos. Veja a Figura 6.16.



Figura 6.16: Primeiro mapa conceitual sobre sistemas físicos e variáveis dinâmicas elaborado por Betânia

No caso da MQ a aluna não classifica os objetos, o que dificulta a inferência de que, a partir da diferenciação do conceito de sistemas físicos, haja possibilidade de ela trazer exemplos específicos. Esboçamos duas conjecturas para isto:

- a aluna pode ter desconhecimento de objetos e interações neste domínio, ou seja, os atributos deste conceito (sistema) não carregam exemplos específicos;
- a aluna menciona exemplos, mas não identifica, os objetos e interações do sistema, o que pode ser uma transposição de ideias da FC para a FQ.

*"O átomo de hidrogênio e o oscilador harmônico unidimensional escrito a maneira quântica."*

As duas outras questões tratam do conceito de variáveis dinâmicas. Cremos que, por ser este conceito mais definido que o de características externas e potencialmente semelhante a este, provavelmente os alunos irão obliterar o conceito de características externas. Vemos que Betânia identifica variáveis dinâmicas relevantes, porém não as diferencia.

*"Posição, densidade de carga, momentum."*

*"Momentum angular do sistema e variação da energia mecânica."*

Na tarefa 2, percebe-se, também, que a aprendizagem do conceito de variáveis dinâmicas ocorre, de fato, por superordenação. Vemos isto pelos exemplos que dele derivam. Além disso, no mapa conceitual fica também claro que o conceito de sistema físico é modificado no processo de aprendizagem, pois ele agora contém um atributo que está associado ao conceito de variáveis dinâmicas, isto é, sistemas físicos são caracterizados por variáveis dinâmicas.

Percebe-se também que o nível de generalidade do conceito de variáveis dinâmicas esboçado pela aluna em relação ao conceito que queríamos ensinar é bem maior do que o nível de generalidade do conceito de sistema físico por ela possuído em relação ao conceito que queríamos ensinar. Conjecturamos que isto se deva a uma semelhança dos níveis de generalidade dos conceitos prévios em sua estrutura cognitiva. É possível ver pelo mapa conceitual (que mais parece um fluxograma) que o conceito de variáveis dinâmicas está associado aos de medição/determinação, variáveis dinâmicas compatíveis, variáveis dinâmicas incompatíveis e à transformação ao longo do tempo (evolução temporal).

*"Variáveis dinâmicas compatíveis são aquelas que não sofrem nenhum tipo de restrição para medida precisa e simultaneamente de seus valores. Já as variáveis dinâmicas incompatíveis são grandezas que não podem ser medidas simultaneamente e precisamente considerando um sistema idênticamente preparado para sua medição. O que vem de encontro com o que diz o princípio da incerteza, ou seja, não se pode conhecer com precisão absoluta a posição e o momentum de uma partícula. Para medir qualquer uma dessas variáveis acabamos alterando o sistema, e isto não é uma limitação tecnológica, é da natureza das partículas."*

Betânia consegue, então, diferenciar o conceito de variáveis dinâmicas compatíveis do de variáveis dinâmicas incompatíveis através do conceito de medição simultânea. Os atributos deste conceito estão ligados à determinação, porém não levam em conta a possibilidade de executar um arranjo experimental que realize a medição; em outras palavras, ainda não consegue realizar a diferenciação entre medição e determinação (conhecimento de valores).

O princípio da incerteza se mostra para ela como uma espécie de subsunção que ancora o conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis. Algo a se investigar é o entendimento da aluna do conceito de precisão.

Não havia sido discutido até o momento da realização da tarefa (e nem havia sido questionado) qualquer aspecto relativo à evolução temporal, então as concepções da estudante estavam basicamente centradas nos conceitos de variáveis dinâmicas compatíveis e incompatíveis, medição, determinação e outros.

Quando questionada acerca do exemplo específico da compatibilidade das componentes de posição e momentum ela introduz, além do conceito de preparação do sistema com um dado valor de variável dinâmica, o conceito de independência entre componentes de posição. Esta subordinação se mostra incorreta, pois as equações para  $x$ ,  $y$  e  $z$ , mesmo em MC nem sempre são independentes (equações diferenciais acopladas em movimentos com forças resistivas, por exemplo).

*”As três componentes de posição  $x$ ,  $y$  e  $z$  são variáveis compatíveis assim como também as componentes de momentum,  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$ . Uma componente é ”independente” da outra, são coordenadas geometricamente distintas...”*

Seu conceito prévio de estado parece bastante isolado na estrutura cognitiva, sendo bastante geral e relacionado somente ao conceito de energia.

A assimilação do conceito é realizada através do conceito de variáveis dinâmicas. No seu mapa conceitual, a aluna não torna específicos os atributos do conceito de estado, logo este permanece indiferenciado. Veja a Figura 6.17.

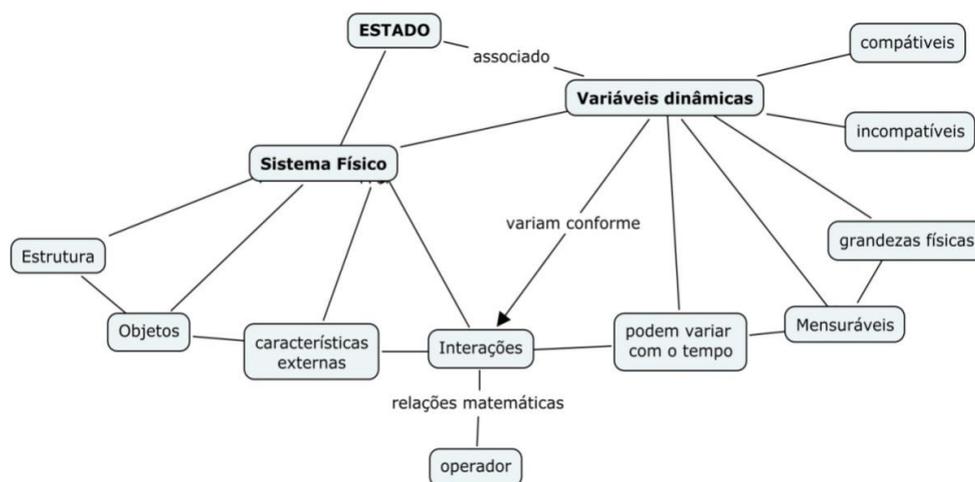


Figura 6.17: Segundo mapa conceitual apresentado por Betânia (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

O conceito parece ter sido assimilado como uma elaboração do conceito de variáveis dinâmicas, por ser interpretado como um conjunto de variáveis dinâmicas relevantes. Menciona a MC, a Termodinâmica, a Teoria Eletromagnética e a MQ, apresentando diferenciações destes conceitos integradas à definição geral por ela dada.

*”Estado de um sistema físico é a configuração num determinado intervalo de tempo de todas as variáveis dinâmicas do sistema./ Na a MC, estado de um sistema físico, em um dado intervalo de tempo, se configura através do conhecimento simultâneo das variáveis dinâmicas posição e momentum para todos os pontos do sistema e assim também é possível prever o futuro do sistema ou reconstruir seu passado./ No caso da termodinâmica, o estado de um sistema se configura pelo conhecimento simultâneo das variáveis dinâmicas: pressão, temperatura e volume./ Na Teoria eletromagnética, o estado eletromagnético é conhecido se souber a configuração e a intensidade, num determinado instante de tempo, dos campos elétrico e magnético do sistema./ Na MQ, para determinar o estado de um sistema físico é necessária a escolha de um conjunto de variáveis dinâmicas compatíveis que sejam relevantes ao estudo do sistema. ”*

Um dos atributos importantes do conceito de estado em MQ é a possibilidade de superposição, ressaltada por ela sem a característica de indefinição associada (por muitos alunos) ao conceito (quando queremos medir uma variável e o estado do sistema se encontra em uma superposição de auto-estados do operador representativo desta variável). Betânia relaciona a idéia de probabilidades à superposição (soma) de estados do sistema, usando como exemplo a molécula de amônia.

*"A superposição de estados é a combinação de todos os possíveis estados de um sistema. Utilizando o exemplo da molécula de amônia, ela pode ser preparada para o estado de energia  $E_0$  e  $E_1$ , ou seja, a molécula pode ser preparada não mais com energia  $E_0$ , ou com energia  $E_1$ , mas na superposição dos auto-estados de energia,  $E_0$  e  $E_1$ ."*

A relação entre hamiltoniana e energia parece ter sido diferenciada pela aluna para o caso específico do problema de dois corpos em MC. A identificação de alguns dos termos do hamiltoniano como energia cinética corrobora esta hipótese. A energia potencial é associada às interações, porém de forma menos explícita, conforme pode ser visto na junção das respostas da aluna.

*"A interação é gravitacional e para conhecer o estado do sistema deve-se conhecer as interações entre momentum e coordenadas... Os dois primeiros termos se referem a energia cinética de  $m$  e  $M$ , respectivamente, e o último termo se refere a energia potencial gravitacional."*

Vamos analisar a terceira questão desde a óptica da análise do conhecimento na sua forma operatória, dado o reduzido teor de explicitação das operações de pensamento realizadas para que Betânia chegasse à resposta.

A relação entre os conceitos de superposição de estados e variáveis incompatíveis é estabelecida por ela de forma indireta, o que pode indicar algum teor de arbitrariedade. Betânia afirma uma decorrer da outra, sem explicar a razão desta relação dialética.

*"... A determinação de grandezas incompatíveis se dá em estados com configurações diferentes, e assim pode-se dizer que a superposição de estados físicos se dá em função de variáveis incompatíveis."*

### **Mapeamento dos padrões de assimilação de Pedro**

No pré-teste percebemos, pelos atributos apresentados no conceito de sistema físico, que Pedro possui o conceito em um nível de maior especificidade, se comparadas suas respostas às dos outros alunos. O aluno não apresenta as palavras-conceito interação e objeto, porém o faz implicitamente. Os atributos enumerados por ele são os de posse de uma vizinhança pelo sistema físico, a associação à descrição por leis e teorias, bem como pela apresentação de um exemplo e pela classificação de um sistema físico como sendo uma parte separada do universo para ser estudada.

*"É o que separamos no Universo para ser estudado através das Leis, princípios ou teorias que se ajustam ao fenômeno em estudo. O que não é considerado o "sistema físico" é considerado a vizinhança do sistema."*

O conceito de variáveis dinâmicas apresenta também um menor nível de generalidade e inclusividade, pois inclui os atributos essenciais mais relevantes necessários para a subsunção inicial, ou seja, o fato de serem grandezas físicas variáveis no tempo.

*"... penso que seja uma grandeza física cuja variação é dada em relação ao tempo."*

O conceito de estado expresso pelo estudante encontra-se em um nível ótimo de generalidade. Este conceito inclui, inclusive, exemplos de sistemas físicos e estados específicos. Apresenta o conceito de variáveis dinâmicas com valores bem determinados.

*“É como se apresenta o sistema num determinado instante de tempo. Este estado é caracterizado por um conjunto de variáveis que apresentam um determinado valor num determinado instante de tempo”.*

Pedro associa a evolução temporal às variáveis dinâmicas (e ao estado, ao mesmo tempo), o que configura um bom nível de generalidade para o conceito inicial de evolução temporal. O conceito se enquadra em uma proposição cujo significado associa-se à evolução temporal de variáveis de estado.

*“É o estudo de como as ‘variáveis de estado’ variam com o tempo. Pode-se assim, acompanhar a evolução temporal do sistema.”*

O conhecimento prévio em sua estrutura cognitiva está em um nível adequado de clareza e generalidade para realizar o processo de aprendizagem. Esta condição pode facilitar a retenção do conteúdo ensinado, bem como a organização estrutural e aparentemente organizada do conteúdo na sua estrutura cognitiva, evidenciada pelas relações estabelecidas entre os conceitos entre si e entre os atributos essenciais expostos.

Na primeira tarefa Pedro expõe um mapa conceitual no qual os atributos essenciais do conceito estão em bom número. Introduce o aspecto de modelagem de um sistema físico (realizando uma associação com a previsão de fenômenos). O aluno relaciona, também, as interações às características externas, mas não expõe um conector expressando qual a ligação entre os conceitos. O conceito de variáveis dinâmicas é, então, diferenciado em variáveis dinâmicas compatíveis e variáveis dinâmicas incompatíveis.

Pedro parece ter assimilado o conceito de sistema físico e vê-se isso pela modificação e elaboração do conceito através da diferenciação dos aspectos pertinentes, ou seja, fica evidente em exemplos da MQ (primeira citação) e da MC (segunda citação), que houve a geração de um significado coerente com o que foi exposto na unidade de ensino.

*“Exemplo 1. Átomo de hidrogênio já apresentado na questão anterior. Exemplo 2. Núcleo do átomo de Hélio./ Objetos: Prótons (2) e nêutrons (2)./ Características externas: Massa, carga e spin./ Interações: eletromagnética, nuclear.”*

*“Exemplo 1. Queda de uma pedra de uma certa altura da superfície da Terra./ Sistema físico: Pedra+Terra./ Objetos: Pedra e Terra./ Características externas: Massa da Pedra e Massa da Terra./ Interações: Gravitacional./ Estrutura interna: Forma irregular (Pedra), Forma esférica e homogênea (Terra)./ Exemplo 2. Átomo de hidrogênio./ Sistema físico: átomo de hidrogênio./ Objetos: Próton e elétron./ Características externas: massa, carga, spin./ Interações: eletromagnética.”*

O conceito de variáveis dinâmicas parece ter sido superordenado através dos exemplos dados inicialmente.

*"Posição, momentum e energia."*

Na tarefa 2, o aluno realiza a diferenciação do conceito de variáveis dinâmicas em compatíveis e incompatíveis com base no atributo medição simultânea. O aluno relaciona as relações de incerteza às variáveis dinâmicas incompatíveis em MQ.

*"[Variáveis dinâmicas compatíveis] São variáveis representativas de observáveis que podem ser medidas simultaneamente... [Variáveis dinâmicas incompatíveis] São variáveis representativas de observáveis que não podem ser medidas simultaneamente; ao medir-se uma delas com precisão, perde-se informação sobre a outra."*

Um aspecto que deve ser destacado é que o aluno crê ser o tempo uma variável dinâmica. Deve-se destacar que até o momento não havia sido discutido que o tempo é, na verdade, um parâmetro, na Física Não Relativística.

O aluno associa, ainda, o caráter de incompatibilidade de variáveis dinâmicas à destruição de informação prévia relativa a uma variável dinâmica medida antes de uma incompatível com ela, considerando uma medição sequencial.

*" $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  são variáveis dinâmicas incompatíveis."*

Pedro também apresenta explicitamente o raciocínio construído para chegar às respostas relativas ao problema de Stern-Gerlach, porém alguns elementos ficaram implícitos nas explicações, tais como o colapso do estado (talvez por ele considerar óbvio), bem como a noção de probabilidade, que serão analisados mais profundamente sob a óptica do conhecimento operatório.

Na terceira tarefa, o aluno parece subsumir a idéia de estado como um conjunto de variáveis dinâmicas determináveis simultaneamente. Ele explicita isto, porém apresenta tal idéia nos exemplos.

*"[Em MC] Se um corpo está em movimento em relação a certo referencial, conhecer a posição e o momentum do corpo num certo instante de tempo "t" é especificar o estado do sistema físico, que neste caso é o corpo em movimento./ [Na Teoria Eletromagnética] Conhecer a massa ( $m$ ) de uma partícula material, bem como sua carga elétrica ( $q$ ) e os campos elétricos  $\vec{E}$  e o magnético  $\vec{B}$  que estão agindo na partícula no instante "t" de tempo, é estar especificando o estado do sistema (partícula)./ [Na Termodinâmica] Se tivermos um gás (sistema físico), o estado do mesmo pode ser especificado pelas variáveis  $V$  (volume),  $T$  (temperatura) e  $P$  (pressão), considerado fechado o sistema físico./ [Na MQ] Um possível sistema físico seria caracterizar um elétron de valência de um determinado átomo. Seu estado poderia ser caracterizado pela sua energia  $E$ , momentum angular orbital  $\vec{L}$  e intrínseco de "spin"  $\vec{s}$ ."*

O estudante não relaciona a superposição de estados à existência de variáveis dinâmicas incompatíveis, porém ressalta aspectos muito interessantes, tais como a relação deste conceito com o problema da medida, a reconstituição de um novo "pacote de ondas" ao longo do tempo, redução de estado, assim como o fato de o sistema se encontrar numa superposição de estados antes da primeira medida. Como explica (justifica) fenomenologicamente, acreditamos que tais relações sejam não-arbitrárias e não-literais.

*"A superposição de estados representa o estado físico em que se encontra um sistema físico, antes do processo de medida. Isto é, na verdade, uma lei da natureza; a natureza é assim! Antes de procedermos uma medida de uma determinada variável dinâmica, o sistema encontra-se numa superposição de autoestados desta variável. O processo de medida interage com o sistema e o coloca num auto-estado..."*

Pedro faz relação dos auto-estados com o problema da medida e subsume a relação de autovalores ao conceito de variáveis dinâmicas e ao problema da medida através do conceito de auto-estados.

*"Fisicamente significa interagir com um sistema quântico que está no autoestado  $|E'\rangle$ , sem mudar o autoestado e obter o valor da energia em que se encontra. Isto é, na verdade, o processo da medida!"*

O estudante trabalha no caso específico  $s_x, s_z$  e aplica o conhecimento na forma predicativa para explicar o fato de que  $|s_x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z, +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z, -\rangle$ , usando uma argumentação relacionada à ideia de que antes da medida o sistema está numa superposição de estados (proposição nem sempre verdadeira, a não ser no caso anterior à primeira medida). O aluno entende, porém, que os valores de variáveis dinâmicas estão associados a auto-estados ortogonais, sendo plausível a suposição de que a subsunção tenha ocorrido desde o conceito de determinação.

*" $|s_x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z, +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z, -\rangle$ ,  $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $|c_2|^2 = \frac{1}{2}$ , portanto probabilidade de 50%. [Probabilidade de numa medição de  $s_z$ , se obter valor igual a  $-\frac{\hbar}{2}$ ]./ 0%, pois o sistema está num autoestado  $|s_x, +\rangle$  correspondente a  $s_x = \frac{\hbar}{2}$ . [Probabilidade de numa medição de  $s_x$ , se obter valor igual a  $-\frac{\hbar}{2}$ ]./ Do operador  $\hat{s}_x$  [O estado  $|s_x, +\rangle$  é auto-estado do operador  $\hat{s}_z$ ; do operador  $\hat{s}_x$ ?]."*

Na tarefa 4, o estudante associa o hamiltoniano à MQ (operador) e a hamiltoniana à MC (função). Para ele, ambos estão ligados de forma substantiva à energia, o que é percebido pelo exemplo apresentado. A diferença entre o operador e a função é explicitada na primeira questão da tarefa.

*"Função hamiltoniana: entendo como sendo a expressão matemática da energia de um sistema físico... Operador hamiltoniano: entendo como sendo a expressão de uma operação matemática que ao ser aplicada a uma função matemática, tem como resultado uma outra função, igual ou diferente da primeira. Em MQ, o resultado desta operação são auto-estados de energia, ou uma superposição de auto-estados de energia..."*

O aluno relaciona a hamiltoniana à energia do sistema apresentado na questão 2 da tarefa 4 (problema de dois corpos interagindo sob a ação de uma força central), bem como a energia potencial à força (interação). A relação é tornada explícita quando o estudante expõe o significado dos termos presentes na expressão para a hamiltoniana proposta.

*"a) Dois termos de energia cinética, um para o corpo de massa  $m$  e o outro para o corpo de massa  $M$ ./ Um termo de energia potencial gravitacional decorrente da interação gravitacional entre " $m$ " e " $M$ ", dada pela lei de Gravitação Universal de*

*Newton, ou seja,  $F = \frac{GMm}{|r-R|^2}$ ./ b) Sistema de corpos submetidos à interação gravitacional dada pela Lei da Gravitação Universal de Newton, por exemplo, sistema Terra-Lua e sistema Sol-Terra./ c)  $\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta}$  energia cinética da massa  $m$  em coordenadas esféricas,  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ ./  $\frac{p_R^2}{2m} + \frac{p_\Theta^2}{2mR^2} + \frac{p_\Phi^2}{2mR^2 \sin^2 \Theta}$  energia cinética da massa  $M$  em coordenadas esféricas,  $R$ ,  $\Theta$  e  $\Phi$ ./  $\frac{GMm}{|r-R|}$  energia potencial do sistema.”*

Pedro relaciona o operador hamiltoniano à interação de uma partícula de spin  $1/2$  com um campo magnético na questão 3. Ele afirma existir uma força quando uma partícula carregada está em movimento. Não é o caso, pois se trata da interação do spin (proporcional ao momento de dipolo magnético) com um campo magnético não-homogêneo.

*”O ente físico é o campo magnético  $\mathbf{B}$ ! Sabe-se que uma partícula carregada interage com um campo magnético quando está em movimento.”*

O aluno estabelece uma relação entre os autovalores possíveis para o hamiltoniano e para o spin. Isto não pode ser justificado pelo conhecimento predicativo, pois ele não explicita as operações de pensamento usadas para chegar à resposta. Mas basicamente afirma que existem auto-estados simultâneos de  $\hat{s}_z$  e  $\hat{H}$ .

*”Para as situações (auto-estados) de  $|s_z, +\rangle$  e  $|s_z, -\rangle$ . Portanto, são possíveis dois valores de energia.”*

Na última questão, o aluno apresenta uma afirmativa compreensível se evocarmos o seguinte teorema (em-ação), relativo a uma mudança de base:

$$|a'\rangle = \sum_{b''} \langle b''|a'\rangle |b'\rangle,$$

com

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0,$$

e  $\hat{A}|a'\rangle = a'|a'\rangle$  e  $\hat{B}|b'\rangle = b'|b'\rangle$ . Como tal operação de pensamento não foi explicitada (mesmo sem o uso do raciocínio matemático), a resposta a esta questão deve ser feita desde a análise do conhecimento na forma operatória.

Na tarefa 5 o aluno diferencia os estados clássicos dos quânticos descrevendo de forma detalhada o que entende por determinismo e probabilismo. Afirma, entretanto, que o probabilismo está associado a uma imprevisão do estado no futuro, enquanto na FC, existe uma certeza absoluta. Apesar de uma ou outra dificuldade, compreende que a mudança de um estado inicial para um final é provocada pelas interações (associadas ao hamiltoniano). Os conceitos mencionados ligam-se de forma não-arbitrária e não-literal na estrutura cognitiva.

*”Tanto em MC quanto em MQ a relação de ”causa e efeito” está presente, entretanto, em MC o efeito é determinístico, ou seja, é possível afirmar com certeza igual a 1, em qual estado estará o sistema num instante de tempo futuro, desde que se conheçam as suas condições iniciais e a forma como interage com o resto do universo. Em MQ também é importante conhecer as condições iniciais e os campos de interação com o sistema, entretanto, o estado em que se encontrará o sistema num instante de tempo futuro é indeterminado, ou melhor, só é possível conhecer a probabilidade de encontrar o sistema num determinado estado e isto é caracterizado somente com o processo de medida!”*

Pedro relaciona a probabilidade de 100% de encontrar o elétron com um valor de  $s_x = \frac{\hbar}{2}$ , à determinação de um valor definido para esta variável dinâmica. Ele associa, também, os coeficientes da superposição de estados às amplitudes de probabilidade de encontrar o sistema com um valor da variável dinâmica que se quer medir.

*”O resultado da medida será 100%  $s_x = \frac{\hbar}{2}$ , pois o sistema foi preparado neste auto-estado... Se considerarmos  $t = 0$  o instante de tempo em que o sistema ainda estava no autoestado  $|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle$ , então uma medida de  $s_z$  será 100%, pois  $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$ , probabilidade, 50% + 50% = 100%, sendo 50% em  $s_z = \frac{\hbar}{2}$  e 50% em  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ .”*

O aluno não calcula, entretanto, o tempo necessário para o sistema assumir o valor  $s_y = \frac{\hbar}{2}$ , mas compreende que os valores possíveis para esta variável dinâmica são mutuamente excludentes no processo de medição.

*” $\left[ i \frac{\exp(\frac{\omega t}{2})}{\sqrt{2}} \right] = 0 \rightarrow -\frac{\exp(-i\omega t)}{2} \rightarrow \exp(-i\omega t) = 0$ . Veja que ao medir  $s_y = \frac{\hbar}{2}$ , o estado do sistema neste instante está no auto-estado  $|s_y = \frac{\hbar}{2}\rangle$ . A probabilidade logo após de medir  $s_y = \frac{\hbar}{2}$  é 0%”*

Pedro descreve de forma relativamente detalhada o papel de cada uma das equações de movimento da MC, Teoria Eletromagnética e MQ. Relaciona a idéia de função de onda à probabilidade de encontrar o sistema em um estado específico. Afirma que todas as equações mencionadas descrevem a evolução temporal do estado. Logo, relaciona a idéia de determinismo aos estados clássicos que evoluem de forma causal ao longo do tempo e a idéia de probabilidade aos estados quânticos que também evoluem de forma causal.

*”A equação de Schrödinger é a equação que descreve a evolução temporal de um sistema quântico, para qualquer tempo ”t” sendo que a solução da equação são funções de onda, cujo  $|\psi|^2$  fornece a probabilidade de encontrar o sistema em determinado estado.”*

Na sexta tarefa relembra que posição e momentum são variáveis dinâmicas incompatíveis e associa isto ao princípio de incerteza e à destituição do sentido<sup>2</sup> ao conceito de trajetória em MQ. O aluno relaciona a ausência de interações à conservação de momentum.

*”A posição é completamente indefinida, porém como o sistema é preparado com este momentum, pois a partícula é livre... Pode-se, aqui, lembrar do Princípio da Incerteza; com total conhecimento de ”p” decorre total desconhecimento da posição ”x”. Assim, o conceito de trajetória é completamente destituído de sentido em MQ.”*

A relação da função de onda com o vetor de estado é tal que ambos descrevem o estado, o que nos leva a concluir que os conceitos estão atrelados uns aos outros e provavelmente com a equação de Schrödinger. A explicação incompleta sobre a função de onda é devida à falta de especificação sobre qual auto-estado ele se refere.

<sup>2</sup>O termo sentido está empregado segundo seu significado lingüístico e não segundo o significado físico.

*"... Ambos descrevem o estado do sistema quântico. Sendo " $\psi$ " a função de onda do sistema, é a probabilidade de encontrar o sistema naquele auto-estado."*

Pedro relaciona não arbitrariamente (através do uso convincente da notação simbólica) a equação de Schrödinger à evolução do vetor de estado e a equação de Heisenberg à evolução dos operadores que representam as variáveis dinâmicas.

*"A equação de Schrödinger fornece a evolução temporal da função de onda [vetor de estado]  $|\psi(t)\rangle$  enquanto que, a eq. de Heisenberg fornece a evolução temporal de operadores."*

## 6.2.2 Turma 2

### Mapeamento dos padrões de assimilação de Samuel

Samuel foi um estudante que progrediu até a resolução da tarefa 4, portanto, descreveremos os aspectos levantados da dinâmica da sua estrutura cognitiva (relativa ao conhecimento na forma predicativa) até o ponto em que discute o conceito de energia e operador hamiltoniano.

O aluno apresenta um conceito de sistema físico bastante geral, embora coerente. O conceito é expresso como uma parte da natureza a ser investigada. O aluno afirma, porém, não ter conhecimento acerca do conceito de variáveis dinâmicas, o que nos impede de inferir o nível de generalidade deste conceito.

*"Um sistema físico é uma parte da natureza que tem as suas propriedades investigadas (interpretadas) pela ciência."*

O conceito de estado é apresentado como um ente representacional do sistema, bem como de suas propriedades. Verifica-se, portanto, que o conceito está associado ao de sistema físico e está em um maior nível de especificidade se comparado ao conceito de sistema físico. O conceito de evolução temporal, igualmente amplo em termos de generalidade, inclui atributos de descrição do sistema e das propriedades ao longo do tempo.

*"Estado é a representação de um sistema físico de acordo com as suas propriedades (físicas) no tempo."*

*"Descrição matemática do estado das propriedades físicas de um sistema ao longo do tempo."*

Samuel apresenta na primeira atividade um mapa conceitual que contém conceitos tangencialmente relevantes, isto é, não estão diretamente ligados ao conteúdo ensinado. Os conceitos de sistema físico e variável dinâmica estão relacionados, sendo o primeiro elaborado pelo segundo. Veja a Figura 6.18.

Na descrição dos sistemas físicos, o aluno identifica objetos do sistema e variáveis dinâmicas relevantes (não estamos julgando, neste momento se os objetos são ou não corretos, mas como ele realiza esta classificação), mas não apresenta outros atributos do sistema. Quando é solicitado a enumerar exemplos de sistemas quânticos, evidencia um alto teor de generalidade nos exemplos dados. Revela, portanto, um nível de conceitualização demasiado amplo para o que foi proposto em aula.

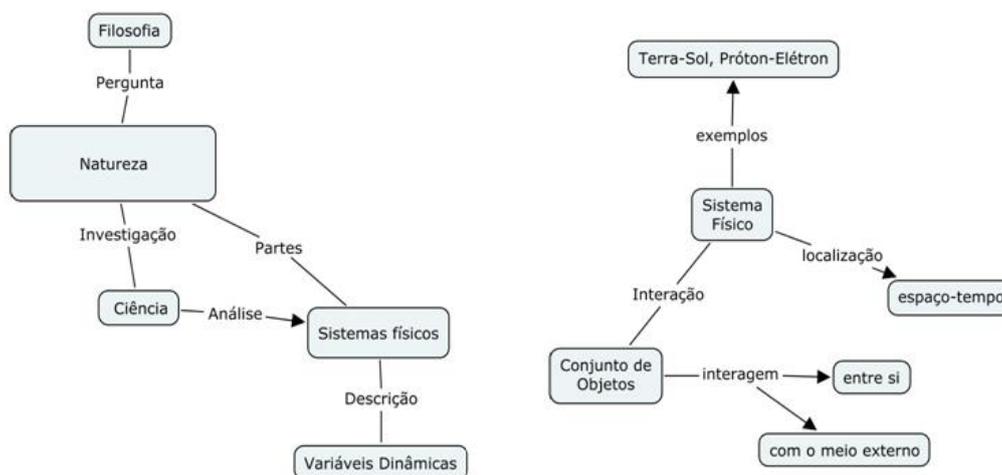


Figura 6.18: Mapas conceituais sobre o conceito de sistema físico apresentados por Samuel (esquerda) e Silas (direita)

*”Sistemas de fluídos: Possuem estrutura interna formada por átomos, moléculas. Apresentam variáveis dinâmicas como pressão, temperatura, energia interna. São importantes para o estudo da estrutura da matéria./ Imãs: Suas partículas apresentam movimento ordenado. Geram uma propriedade a qual denominamos campo elétrico. Essencial para o início do estudo do eletromagnetismo e toda sua evolução posterior decorrente de sua aplicação e aprimoramento.”*

*”O núcleo atômico e o elétron”*

A superordenação do conceito de variáveis dinâmicas parece ter sido realizada a partir do conceito de grandezas físicas, por ele reconhecidas a partir do seu conhecimento prévio de Física. Em FC isto fica mais evidente.

Na tarefa 2 os conceitos começam a se mostrar mais relevantes e o conceito de sistema físico apresenta o atributo de interações, que se encontra relacionado ao de variáveis dinâmicas por um conector ”descrevem”, afirmando que, desta forma, as variáveis dinâmicas associam-se às interações, o que é tangencialmente correto.

Para o aluno, a diferenciação entre variáveis dinâmicas compatíveis e incompatíveis é feita baseada no atributo não exposto no mapa conceitual, de determinação simultânea, que não é diferenciado do atributo de medição. O aluno, deste ponto de vista, realiza corretamente a diferenciação e elabora o conceito de sistema físico que, na FC, não tem sua configuração alterada no processo de medição sequencial, fato este que superordena a idéia de determinismo na FC. Na FQ, a alteração do estado (configuração do sistema para ele) causa a impossibilidade de ”medição” simultânea, o que superordena a idéia de probabilidade, que aparece relacionada às imprecisões pertinentes ao princípio de incerteza.

*”Variáveis dinâmicas compatíveis: são variáveis que podem ser medidas simultaneamente, de modo que o processo de medição de uma não altere o valor de outra, ou seja, o sistema não mude sua configuração pelo processo das medidas... Variáveis dinâmicas incompatíveis: é o conjunto daquelas que não podem ser medidas com um bom grau de precisão simultaneamente. A medição de uma altera o valor da outra. Temos a associação de uma probabilidade a cada valor destas variáveis: condição*

*importante, mas não geral, para a MQ... O princípio da incerteza nos apresenta esta relação de incompatibilidade, pois medindo a posição de uma partícula com boa precisão (baixa incerteza), por exemplo, temos uma incerteza grande relacionada ao momentum linear. Assim o valor mínimo que o produto da incerteza do momentum e da posição pode atingir é  $\frac{\hbar}{2}$ .*"

Samuel apresenta ainda um exemplo não convencional de variáveis dinâmicas incompatíveis em MQ, a saber, as componentes de momentum angular e seus respectivos ângulos talvez como diferenciação (subordinação derivativa) do princípio da incerteza.

*"As coordenadas angulares e seus correspondentes momenta angulares."*

Para o aluno, a relação da destruição prévia de informação que caracteriza a impossibilidade de determinação simultânea para valores de diferentes componentes de spin está associada ao fato de que estas são variáveis dinâmicas incompatíveis.

*"As componentes do spin são variáveis incompatíveis."*

O aluno não justifica o procedimento adotado para chegar à resposta, porém entende que os feixes no experimento de Stern-Gerlach são divididos. Samuel expressa, ainda, o estado  $|s_z, +\rangle$  como uma superposição de  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ , com um fator  $i$  (provavelmente introduzido arbitrariamente), porém ele não afirma se os estados  $|+\rangle$   $|-\rangle$  são auto-estados do tipo  $|s_x, \pm\rangle$  ou  $|s_y, \pm\rangle$ , o que dificulta a análise em primeira instância.

*"a) 10000 positivo e 10000 negativo na direção x./ b) 5000 positivos e 5000 negativos na direção Z.  $|s_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$  c)  $|s_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle$ "*

Samuel escreve corretamente o estado do sistema na última questão (a menos das amplitudes de probabilidade), mostrando uma possibilidade de associação conceitual entre as configurações das variáveis dinâmicas compatíveis do sistema.

Na terceira tarefa, o aluno apresenta um mapa conceitual de estado, estabelecendo o conceito como integrador dos conceitos de variáveis dinâmicas e sistema físico. Ele expõe, também, o estado como representativo das interações. Os conceitos parecem estar muito correlacionados para o estudante. Os conectores, porém, indicam algum grau de arbitrariedade que pode ser explicado por dois fatores: o mau uso da ferramenta ou mesmo falta de discriminabilidade de alguns conceitos, que o leva a associar o conteúdo à estrutura cognitiva de forma arbitrária.

O conceito de estado apresenta-se fortemente correlacionado ao de variáveis dinâmicas. Algumas confusões surgem, porém cremos que mais por dificuldades na construção do texto, pois as respostas estão substancialmente corretas. O aluno associa o estado em MQ à determinação de variáveis dinâmicas compatíveis e à determinação das distribuições de probabilidade. Parece que o nível de generalidade do conceito de estado é o mesmo do de variáveis dinâmicas, o que sugere uma aprendizagem por combinação, dada a não ocorrência de subordinação ou de superordenação e tendo em vista a interação do novo conceito com a estrutura cognitiva como um todo.

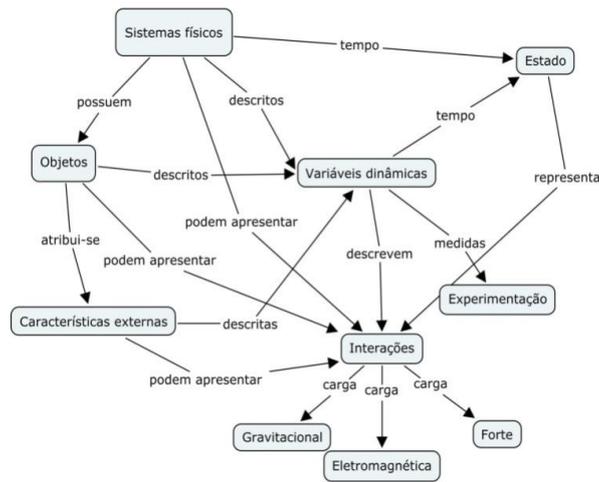


Figura 6.19: Mapa conceitual apresentado por Samuel (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

*”Estados na MC tratam de descrever qualitativamente o movimento e as interações de ordem macroscópicas como colisões, a própria gravitação, em um dado instante... Na MQ para que possamos obter o estado de um sistema físico devemos estar atentos a algo que era negligenciado na FC. O estado só será obtido quando apenas as variáveis compatíveis do sistema forem consideradas e suas respectivas distribuições de probabilidade.”*

Samuel apresenta de forma coerente o conceito de auto-estado, relacionando-o com a idéia de probabilidade e à superposição de estados. Para ele um auto-estado corresponde a uma das possibilidades em que podemos encontrar o sistema com um dado valor de variável dinâmica. Este último conceito, no caso específico da MQ, parece estar associado à existência de múltiplos valores possíveis para uma dada variável.

*”... auto-estado é uma destas possibilidades que o sistema se encontra.”*

*”Devemos considerar todos os estados possíveis de uma variável dinâmica e assim avaliar probabilisticamente a possibilidade de um único estado...”*

Quando solicitado a interpretar a equação de autovalores, o estudante realiza a identificação (quando na verdade é uma relação de representação) de  $\hat{H}$ , um operador, a uma variável dinâmica, embora não especifique qual seja esta variável. Associa os autovalores aos valores de energia obtidos na medição e  $|E'\rangle$  é reconhecido como um auto-estado representativo do valor  $E'$ . Parece ter havido a subsunção da idéia de que as variáveis dinâmicas apresentam vários valores e que estes estão associados de alguma forma aos auto-estados.

*” $\hat{H}$  representa um operador que é a variável dinâmica que estamos analisando.  $E'$  é um valor encontrado para esta variável e  $|E'\rangle$  é o estado (auto-estado) referente a variável.”*

Em função do baixo teor de explicitação na última questão da tarefa, procrastinaremos a análise das operações de pensamento realizadas na solução deste problema, em particular para a análise do conhecimento na forma operatória.

Na tarefa 4, Samuel apresenta uma percepção da função hamiltoniana (do operador hamiltoniano) como um caso particular de variável dinâmica (subsunção derivativa). O estudante relaciona, portanto, o conceito de função hamiltoniana às variáveis dinâmicas compatíveis e o operador hamiltoniano tanto à classe de observáveis mencionada quanto às variáveis incompatíveis. Adiantamos que a hamiltoniana (o hamiltoniano) não é uma variável dinâmica propriamente dita, porém está associada às vezes à energia que pode, por sua vez, ser classificada como tal.

*"A diferença entre a função hamiltoniana e o operador é que: para qualquer variável a função pode ser aplicada, mas para o operador a comutação entre elas precisa ser considerada, pois podem ser incompatíveis..."*

Percebe-se que o estudante relaciona, ainda, o hamiltoniano à energia e a última às interações no problema específico da identificação de uma função hamiltoniana clássica. Estas relações são feitas aparentemente de forma substantiva (leitura de equações, questionamentos, etc).

*"a) Interação gravitacional, pois há o termo de energia potencial gravitacional entre as cargas massas  $M$  e  $m$ ,  $\frac{GMm}{|r-R|}$ ./ b) Sistemas de dois corpos com interação gravitacional, por exemplo, planetas./ c) Os termos com  $p^2$  são os termos de energia cinética com a relação as coordenadas esféricas para cada uma das massas. O termo  $\frac{GMm}{|r-R|}$  é termo de energia potencial gravitacional."*

*"a) Com um imã devidamente configurado para produzir um campo magnético não uniforme./ b) Eletromagnética./ c) Dois  $-\frac{Be\hbar}{2m_e c}$  e  $\frac{Be\hbar}{2m_e c}$ ."*

Por fim, o aluno relaciona a superposição de estados à imprecisão de uma variável dinâmica quando uma variável incompatível com ela esteja determinada. Presente nesta assertiva está a idéia de probabilidade. Analisaremos a terceira questão da quarta tarefa especificamente sob a óptica do conhecimento na forma operatória, dado o baixo nível de explicitação.

*"Se existem duas variáveis e elas são incompatíveis, determinando o estado de um observável com boa precisão o outro fica sujeito a uma superposição de muitos estados."*

### Mapeamento dos padrões de assimilação de Silas

Silas foi o único aluno da turma a faltar à aula em que foi realizado o pré-teste. Isto nos impossibilita inferir algo sobre o nível de generalidade e disponibilidade em sua estrutura cognitiva, dos conceitos a serem ensinados.

Na tarefa 1, o aluno apresenta, um mapa conceitual do conceito de sistema físico. Silas apresenta alguns atributos e exemplos: sistema físico como um conjunto de objetos interagentes e localizados. Apresenta como exemplos o sistema Terra-Sol, bem como um próton interagindo com um elétron. Veja a Figura 6.18

O aluno apresenta um fenômeno e em seguida o identifica como um sistema físico quando solicitada a exposição de um exemplo de sistema. Silas possui um conceito de interação pouco diferenciado, bastante geral. Apresenta variáveis relevantes ao problema, mas parece não diferenciar as variáveis dinâmicas das características externas.

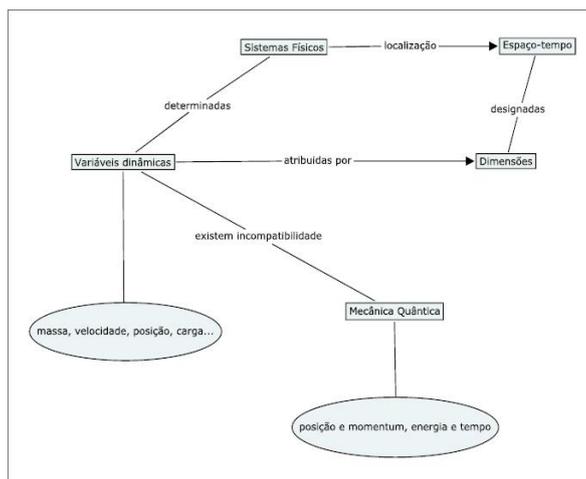


Figura 6.20: Segundo mapa conceitual sobre os conceitos de sistema físico e de variáveis dinâmicas apresentado por Silas

*”Exemplo 1 – Uma colisão de duas bolinhas. Nesta colisão, existe estrutura interna, mas não é significativa para o nosso interesse de estudo, que é a colisão. O formato das bolinhas, a velocidade com que elas se encontram, as suas respectivas massas, a forma da superfície e a sua rugosidade são variáveis que devem ser relevantes no problema. Este problema é de real importância no estudo da física devido a inúmeras aplicações e por ser um problema que sempre tem aplicações em outras áreas da física./ Exemplo 2 – A dilatação de um corpo. Na dilatação deve-se ter em mente variáveis como tipo de material, gradiente de temperatura, pressão, dimensões. A estrutura interna do material é importante, pois é ali que temos as interações ocorrendo, de forma que o que acontece em seu interior é de extrema relevância para o que ocorre na parte externa (externo resultado do interno). O problema tem relevância pelo mesmo motivo do exemplo 1.”*

Silas parece inicialmente não distinguir entre os conceitos de fenômeno e sistema físico, no que tange à MQ. O conceito de variáveis dinâmicas parece ter sido superordenado a partir da idéia de grandezas físicas, que muito provavelmente compõem seu conhecimento prévio.

*”O átomo de hélio (interação elétron-próton) e o **tunelamento quântico (probabilidade)**.”(grifo nosso).*

Na tarefa 2, o estudante apresenta um mapa conceitual no qual o conceito de sistema físico perde os atributos de interação e de ”conjunto de objetos”. Uma possível causa, embora pouco plausível, seja a obliteração dos conceitos. Veja a Figura 6.20.

O conceito de variáveis dinâmicas é diferenciado a partir de um atributo denominado relação cujo termo não é explicado pelo aluno. Para ele variáveis dinâmicas compatíveis se relacionam, enquanto variáveis dinâmicas incompatíveis não.

*”Variáveis compatíveis se relacionam entre si, podendo ser por meio de uma equação... Variáveis incompatíveis acabam não se relacionando entre si, que em alguns casos se apresenta na MQ.”*

A distinção incoerente entre posição e momentum na citação abaixo (claramente errônea) para a justificativa de  $(p_x, p_y, p_z)$  e  $(x, y, z)$  serem incompatíveis, é desprovida de sentido.

*Momento é um operador e posição é um escalar. Em geral, operadores não comutam. Deste modo, as variáveis de posição não são variáveis compatíveis, mas as variáveis de momentum são.*

O aluno associa incompatibilidade entre variáveis dinâmicas à comutatividade entre elas e a compatibilidade com a não comutatividade, o que mostra a tentativa do aluno de estabelecer a relação por ele apresentada de forma arbitrária, o que gerou um produto cognitivo isolado na estrutura cognitiva. Vemos isto, pois entende que  $s_x$  e  $s_z$  satisfazem uma relação de incerteza (provavelmente associada à destruição de informação prévia), ou seja, ele considera o fato de variáveis incompatíveis não serem simultaneamente determináveis, porém não relaciona isto às operações de não comutatividade de forma substantiva.

*”As componentes do spin entre si comutam. É como se tivéssemos uma “incerteza” relacionada à medição dos spins em determinadas direções.”*

Na última questão, o aluno entende que o feixe se divide e entende que esta divisão acarreta iguais intensidades para os feixes resultantes. Ele parece associar a intensidade do feixe à idéia de probabilidade, e as duas à idéia de estado. É possível ver isto quando expressa o estado do feixe de 80.000 átomos como uma superposição que envolve as frações relativas  $4/5$  e  $1/5$  equivalentes às intensidades dos feixes depois da medição inicial. O conceito precisa, portanto, ser diferenciado.

*”a) Metade com spin + e metade com spin -. Spin na direção do eixo x./ b) spin na direção do eixo z, com metade com  $s = \frac{1}{2}$  e metade com  $s = -\frac{1}{2}$ . Representação:  $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle + \frac{1}{2}|-\rangle$ ./ c)  $|\psi\rangle = \frac{1}{5}|+\rangle + \frac{4}{5}|-\rangle$ ”*

Na tarefa 3, o estudante apresenta o conceito de estado aparentemente como uma elaboração do conceito de variáveis dinâmicas, como é possível observar ao longo das descrições. Em MQ, especificamente, leva em conta a existência de variáveis dinâmicas incompatíveis, que impedem o conhecimento de todas as variáveis do sistema logo, para ele, o estado em MQ é um ente que nos fornece toda a informação possível para um sistema físico.

*”MQ: Um sistema quântico não pode ser descrito perfeitamente por suas variáveis dinâmicas, pois estas não são muitas vezes compatíveis umas com as outras. O que se faz é usar variáveis dinâmicas compatíveis entre si e tentar dali extrair o máximo de informação possível.”*

Silas apresenta o conceito de superposição de estados como a coexistência de estados (sistema com mais de um estado). O aluno compreende relativamente bem o processo de medição: antes da medida temos um estado cujo valor de variável dinâmica está indefinido, devido à ”soma de superposições” (auto-estados), contudo ele considera a superposição como sendo um auto-estado, invertendo a relação. Trata-se de um caso de aprendizagem representacional errônea.

*"Entendo como sendo superposição de estados um sistema onde tenho presente dois ou mais tipos diferentes de estados. Sua interpretação física se refere em o sistema físico poder então assumir diferentes valores referentes às variáveis dinâmicas. No ato da medição, estaremos fazendo uma escolha de uma dessas superposições. O auto-estado é referente ao todo, a soma dessas superposições."*

O aluno relaciona o operador hamiltoniano às interações e à informação dos valores de energia para o sistema, quando solicitada a interpretação física da equação de autovalores, conforme pode ser visto abaixo.

*"A variável dinâmica  $H$  é um operador que torna explícita as interações que ocorrem no sistema. No exemplo, a hamiltoniana  $H$  atuando num auto-estado  $|E\rangle$  nos dá os valores de energia desse auto-estado."*

Na última questão, Silas parece associar o conceito de determinação ao de probabilidade de medição. Entende, entretanto, que  $s_x = \frac{\hbar}{2}$  e  $s_x = -\frac{\hbar}{2}$  são alternativas excludentes, porém que  $s_x = \frac{\hbar}{2}$  lança o sistema numa superposição de auto-estados de  $\hat{s}_z$ , através das respostas dadas.

*"A variável dinâmica que tem valor definido é a variável  $s_z$ , pois esta pode ser medida./ A probabilidade de obtermos  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$  é de 50%./ A probabilidade de obtermos  $s_x = -\frac{\hbar}{2}$  numa medição de  $s_x$  é de zero por cento, porque o sistema foi preparado com valores de  $s_x$  positivos./ O estado  $|s_x, +\rangle$  é auto-estado do operador  $\hat{s}_x$  e não é auto-estado do operador  $\hat{s}_z$ ."*

Na tarefa 4, o aluno discorre sobre o operador hamiltoniano (a função hamiltoniana), associado de forma não-arbitrária e não literal às interações.

*"Função hamiltoniana e operador hamiltoniano identificam quais as interações que ocorrem num dado sistema físico. Utilizamos a função hamiltoniana para sistemas físicos clássicos e operador hamiltoniano para sistemas físicos quânticos. Tanto a função quanto o operador possuem em sua forma matemática toda a informação possível acerca das interações que ocorrem em tal sistema físico..."*

O aluno apropria-se do fato de o hamiltoniano estar associado à energia para especificar e identificar os termos na hamiltoniana como a interação e os termos de energia cinética (subsunção derivativa). Isto é evidência de um aumento de clareza (e estabilidade) do conceito na estrutura cognitiva. Silas reconhece a hamiltoniana como relativa ao problema de dois corpos, porém não conseguimos afirmar se este fato é oriundo de processos cognitivos ou de processos perceptuais.

*"a) Para facilitar a minha digitação, simplifico a equação por uma notação:  $H = (1) + (2) + (3)$ , onde a ordem dos fatores não muda em relação a equação original. Pela análise da equação, podemos ver que se trata de dois corpos de massa  $M$  e  $m$ , na qual rotacionam em torno de um centro de massa constituído por eles. A distância  $R$  é referente à distância do corpo de massa  $M$  até o centro de massa e a distância  $r$  é referente à distância do corpo de massa  $m$  até o centro de massa. Logo, (3) é uma interação gravitacional entre os dois corpos. (1) é referente à energia cinética de rotação em torno do centro de massa do corpo  $m$ . (2) é referente à energia cinética de rotação em torno do centro de massa do corpo  $M$ ./ b) Podemos tratar, por exemplo, a cinemática de movimento de dois corpos celestes a partir da função hamiltoniana exposta no problema./ c) Resposta inclusa no item a."*

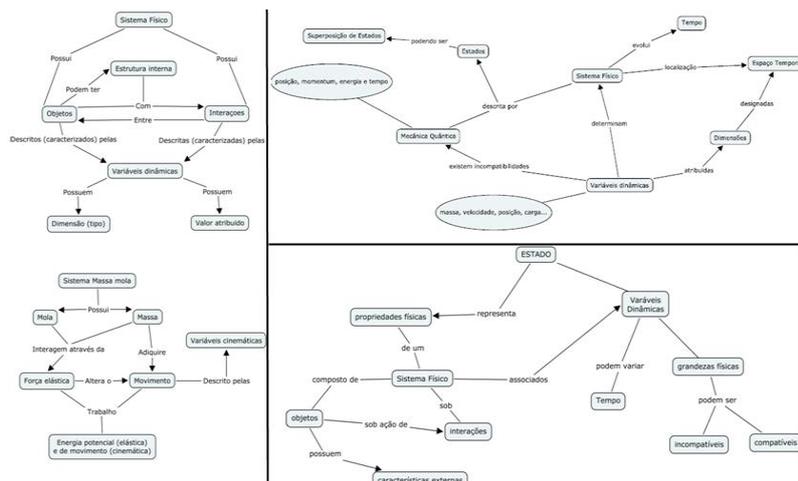


Figura 6.21: Mapas conceituais apresentados por Jacó (esquerda), Silas (acima) e Sara (abaixo) – (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

”a) O objeto quântico interage somente com o campo magnético. O termo  $s.B$  é a interação do spin com o campo./ b) A interação exposta é de natureza eletromagnética./ c) o sistema só pode assumir 2 valores de energia, pois os spins que o elétron pode assumir só são up e down.”

O conceito de operador hamiltoniano como ente informativo das interações ocorrentes no sistema é também evidenciado na relação com a energia do sistema, bem como a interação identificada como ocorrendo entre o objeto (elétron) e o campo.

O aluno clarifica, por fim, o conceito de superposição de estados, quando a relaciona à situação do experimento de Stern-Gerlach. Esta relação é estabelecida de forma relativamente tangencial à existência de variáveis dinâmicas incompatíveis. Em virtude de o conceito ser relativamente novo, a sua instabilidade é natural.

”... Quando falamos de superposição de estados, temos um sistema físico caracterizado por portar diferentes estados da mesma variável dinâmica. Um exemplo disso é o experimento de Stern-Gerlach, onde acontece a separação dos spins quando o feixe de prata passa por um campo magnético não-uniforme.”

Na tarefa 5, a última entregue, o aluno apresenta um mapa conceitual no qual os conceitos estão conexos. Expõe uma relação de determinação do sistema físico pelas variáveis dinâmicas (ou vice-versa, que é mais razoável). O conceito de superposição de estados é apresentado como uma especificação do conceito de estado, que é a descrição dos sistemas físicos. O aluno coloca exemplos de variáveis dinâmicas e associa a incompatibilidade de variáveis dinâmicas à MQ em particular. Veja a Figura ??.

O aluno, na questão 2 da tarefa 5, lê o termo “causal” como casual, conforme podemos ver abaixo.

”Esta afirmativa está incorreta. A evolução temporal na MC se dá de forma definida. Já na MQ, aí sim a evolução se dá de forma **casual**, onde, por exemplo, não tenho definidos posição e momento ao mesmo tempo na MQ, o que são completamente definidos na MC...” (grifo nosso).

É possível ter havido um problema de entendimento do item c da terceira questão da tarefa 5, pois o aluno parece ter entendido que a situação determinava a preparação do estado do sistema no instante de tempo inicial no auto-estado de projeção  $y$  do spin positiva (considerando o campo na mesma direção). O aluno consegue manipular a simbologia para tirar conclusões e por isso inferimos o possível problema de entendimento da questão.

Ainda na terceira questão, Silas relaciona a preparação do estado em  $|s_x = \frac{\hbar}{2}\rangle$ , com o valor definido para esta variável dinâmica, respondendo corretamente ao problema da medida e da mesma forma para as medições da projeção  $z$  do spin. Ele parece, entretanto, não levar em conta que os itens c e d eram continuação das letras a e b. Talvez tenha suposto que  $|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle = |s_y = \frac{\hbar}{2}\rangle$  nos itens c e d.

*"a)  $s_x = \frac{\hbar}{2}$ . b) metade da probabilidade obteremos  $\frac{\hbar}{2}$ , metade da probabilidade  $-\frac{\hbar}{2}$ . c) Sempre teremos valores positivos, em qualquer tempo d) em relação ao auto-estado do item c), teremos definido sempre valores do estado  $s_y$ ."*

Por fim, o aluno afirma serem a equação de Schrödinger, equações de Maxwell e de Newton, as equações de evolução temporal da Mecânica Quântica Não Relativística e da FC, equações que descrevem sistemas ao invés de estados e variáveis dinâmicas.

*"Equações de Schrödinger: descrever sistemas em escalas muito pequenas, menores que alguns nanômetros. Chamamos este domínio de MQ... Equações de Newton: descrever sistemas clássicos, onde as variáveis dinâmicas são bem definidas. Tem o limite de validade na MQ."*

### Mapeamento dos padrões de assimilação de Dalila

No pré-teste, Dalila apresenta o conceito de sistema físico como um modelo teórico. Atribuímos então um nível de generalidade alto a este conceito. O conceito de variáveis dinâmicas também é bastante geral, dada sua apresentação como um ente variável no tempo.

*"[Sistema físico] É um modelo teórico que visa descrever a nossa realidade, as nossas leis físicas, o mundo que nos cerca."*

*"[Variável dinâmica] É uma variável que varia no espaço-tempo."*

O conceito de estado de um sistema físico encontra-se em um nível amplo de generalidade, pois está associado à morfologia da palavra, ou seja, a forma como o sistema "está". Em outras palavras, ela considera o estado como uma "fotografia do sistema". O conceito apresenta-se, entretanto, associado ao de sistema físico como um ente descritivo. O conceito de evolução temporal é expresso como o modo pelo qual se modifica o estado, o que nos faz atribuir a ele um alto teor de generalidade.

*"[Estado de um sistema físico] É como se encontra um determinado sistema físico, num determinado tempo."*

*"É como se modifica um dado estado físico no tempo."*

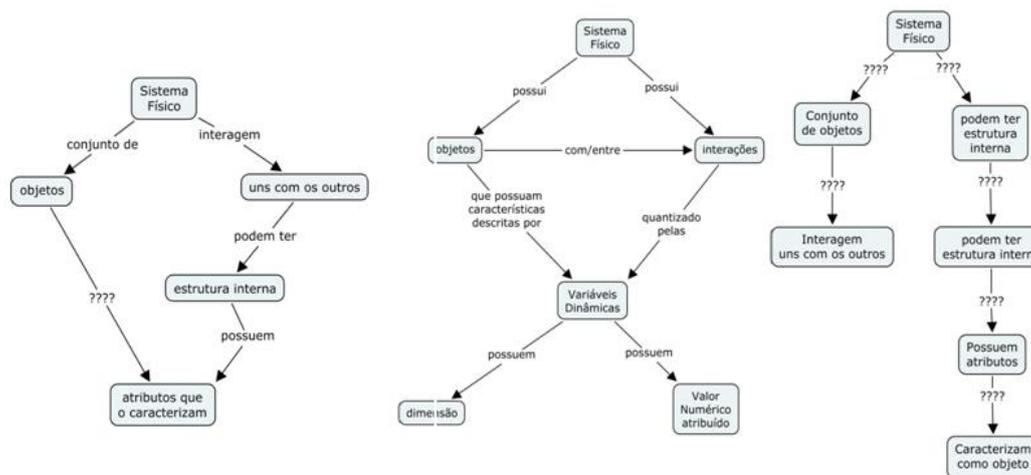


Figura 6.22: Mapas conceituais sobre o conceito de sistema físico apresentados por Dalila (esquerda), Jacó (centro) e Sara (direita)

Na tarefa 1 a aluna parece subordinar os atributos de objetos e interações a partir da idéia de modelo teórico. Tal conclusão é construída a partir da análise de seu mapa conceitual. Este caso parece ser uma aprendizagem em que os atributos do conceito de sistema físico foram subordinados do subsunçor da aluna, porém superordenados a partir dos exemplos expostos no material de apoio. Dalila identifica os objetos e entende o conceito de características externas como um atributo caracterizador do sistema. Reconhece as interações, porém copia (transcreve completamente) um exemplo do texto de apoio fornecido, o que nos impede de demonstrar a superordenação. Veja a Figura 6.22.

Na tarefa 2 a aluna copiou partes do material de apoio fornecido, o que é um caso de indisposição para realizar aprendizagem significativa, ou seja, um material com significação lógica foi arbitrariamente associado à estrutura cognitiva.

*"A determinação destas variáveis, então, não pode ser feita "de forma simultânea". pois a medição de uma destas variáveis dinâmicas em geral altera o sistema e, portanto a determinação de valores da outra, em relação aos que seriam obtidos numa medição numa medição sobre o sistema antes de ser alterado."*

Na tarefa 3, Dalila reconstrói uma espécie de mapa conceitual para o conceito de sistema físico. Ela inclui o estado como uma configuração associada a variáveis dinâmicas relevantes ao problema físico. Veja Figura 6.23.

Dalila apresenta o estado como relacionado a variáveis dinâmicas independentes. Distingue as variáveis dinâmicas em variáveis dinâmicas compatíveis e incompatíveis subsumindo significativamente. A aluna associa a independência às variáveis dinâmicas compatíveis (não alteram o estado do sistema para a medida das próximas numa medição seqüencial). O conceito de estado é subordinado ao de variáveis dinâmicas, logo o último, mesmo remanescente de uma obliteração, estará modificado.

*"Conseguimos descrever o estado de um sistema físico se soubermos o maior número de variáveis dinâmicas independentes que interessam ao problema físico, mas em MC não precisamos nos preocupar com o fato das variáveis serem independentes ou*

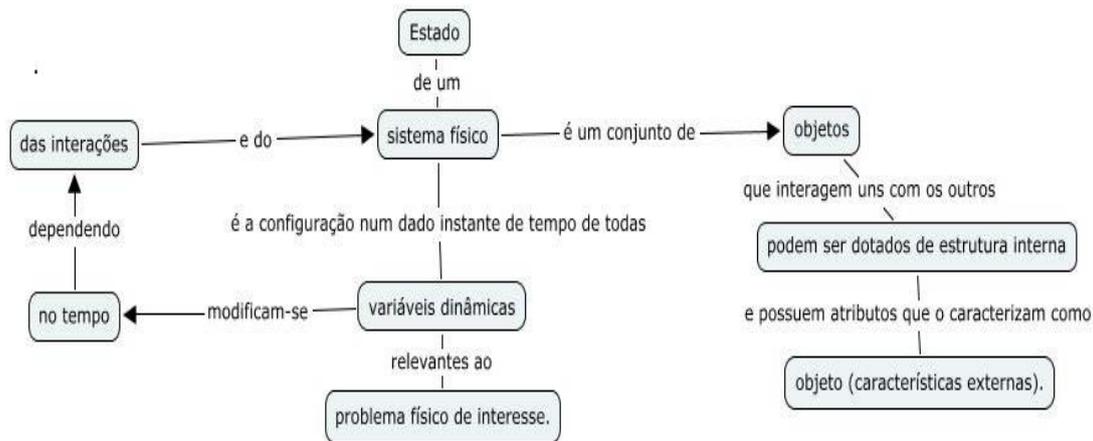


Figura 6.23: Mapa conceitual apresentado por Dalila (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

*... não, pois todas elas são compatíveis, ou seja, independentes, podem ser determinadas simultaneamente sem interferir nos valores umas das outras.”*

A aluna apresenta a noção de que em FC todas as variáveis são compatíveis, então se escolhem algumas variáveis de estudo simultaneamente determináveis. Coloca, ademais, exemplos plausíveis.

Dalila estabelece algumas relações tangenciais dos conceitos a serem relacionados na questão 3. Discorre sobre o problema da medição, sobre a evolução do estado ao longo do tempo, sobre as interpretações da MQ e sobre o colapso. O último está associado à medição (alteração do estado), bem como a superposição de estados à evolução temporal pela equação de Schrödinger. A aluna relaciona a superposição de estados ao experimento de pensamento do gato de Schrödinger.

*“O problema da medição em MQ, é um problema não resolvido de como acontece o colapso da função de onda. A incapacidade de observar esse processo diretamente deu origem as diversas interpretações da MQ, e possuiu um conjunto chave de questões que cada interpretação devem responder. A função de onda, na MQ, evolue de acordo com a equação de Schrödinger em uma superposição linear de diferentes estados, mas a medida real sempre encontra o sistema físico em um estado definitivo. Qualquer evolução futura é baseada no estado do sistema que foi descoberto ao se realizar a medição, significando que a medição “fez alguma coisa” sobre o processo em questão. Em termos populares, equivaleria um “gato” de Schrödinger super gelado e superconductor na condição quântica de meio-morto meio - vivo.”*

A estudante associa os operadores às variáveis dinâmicas a serem medidas, embora não as reconheça. Entende, contudo, que  $\hat{H}$  apresenta vários valores.  $|E'\rangle$  é entendido como o estado associado ao valor  $E'$ . Considera, portanto, a equação de autovalores como representação do processo de medida.

*“Isso fisicamente quer dizer que a variável dinâmica que queremos medir ( $\hat{H}$ ) no estado que queremos medir  $|E'\rangle$  é  $E'$  que é um valor de energia no estado  $|E'\rangle$ .”*

Tentaremos reconstituir as operações de pensamento realizadas pela aluna na análise do conhecimento na forma operatória, dado não haver argumentos plausíveis para a resposta dada à questão 5. Afirmamos, porém, que ela subsumiu o conceito de auto-estado a partir do de medição e o associou à equação de autovalores, realizando uma conexão entre os conceitos.

Na tarefa 4, a aluna apresenta exemplos específicos onde enfatiza o determinismo da FC, logo associado à função hamiltoniana, bem como o probabilismo da MQ, automaticamente relacionado ao operador hamiltoniano. A diferenciação exposta pela aluna é basicamente a que segue.

*"Na MC usamos a função hamiltoniana e na MQ usamos o operador hamiltoniano, pois na MC temos resultados determinísticos, ou seja, se soubermos as condições iniciais e as interações nós teremos sempre o mesmo resultado para N sistemas idênticos no mesmo estado. Já na MQ temos resultados probabilísticos, ou seja, para N sistemas idênticos no mesmo estado teremos uma certa amplitude de probabilidade de obtermos um certo valor..."*

Dalila associa a energia potencial à interação gravitacional (na forma de forças). Parece relacionar também o hamiltoniano à energia, ressaltando que identifica termos de energia cinética no caso específico, porém isto é feito de forma literal. O texto apresentado é demasiadamente formal para o nível da disciplina e pode sugerir que Dalila o tenha copiado de alguma referência não reconhecida por nós.

*"O seu potencial tem como causa, como o nome sugere, a força da gravidade, que por definição, está relacionada com a massa dos corpos e sua distância./ Fórmula genérica./ Sabe-se que o campo das forças gravitacionais entre dois corpos 1 e 2, cuja posição relativa é o vetor  $\vec{r}$  é:  $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}$ ./ Se o campo gravitacional for conservativo, é possível definir o seu potencial como uma função  $U(\vec{r})$  tal que:  $\nabla U(\vec{r}) = -\vec{F}(\vec{r})$ ./ Partindo da definição, tem-se que:  $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}$ ./ Logo, a função potencial é:  $U(d) = \frac{Gm_1m_2}{d}$ ./ Da fórmula acima, é possível perceber que a energia potencial depende da distância entre os dois corpos, sem a necessidade de levar em consideração o vetor-posição de um em relação ao outro. Então pode ser escrita como:  $\Delta U(\vec{r}) = \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ./ Considerando que se saiba que o campo gravitacional é conservativo, também é possível determinar o potencial através da fórmula:  $\Delta U = -\int \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$ ./ Cujos resultados são iguais ao determinado anteriormente./*

*b) Dados dois corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$ , a uma distância  $r$  entre si, esses dois corpos se atraem mutuamente com uma força que é proporcional à massa de cada um deles e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa esses corpos. Matematicamente, essa lei pode ser escrita assim:  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$  / onde  $\vec{F}_1$  ( $\vec{F}_2$ ) é a força, sentida pelo corpo 1 (2) devido ao corpo 2 (1), medida em newtons;  $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$  é constante gravitacional universal, que determina a intensidade da força,  $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos corpos que se atraem entre si, medidas em quilogramas; e  $r$  é a distância entre os dois corpos, medida em metros;  $\hat{r}$  o versor do vetor que liga o corpo 1 ao corpo 2./*

*c)  $\frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta}$ . Este termo significa a energia cinética do corpo de massa  $m$  e  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ ./  $\frac{p_R}{2m} + \frac{p_\Theta}{2mR^2} + \frac{p_\Phi^2}{2mR^2 \sin^2 \Theta}$  do corpo de massa  $M$ ./  $\frac{GmM}{|r-R|}$ . Este termo significa a energia potencial do corpo de massa  $m$  e do corpo de massa  $M$ ."*

A aluna apresenta, ainda, um parágrafo desconexo sobre a Teoria Eletromagnética quando foi solicitado que se falasse da interação da partícula com o campo, bem como

uma cópia do material de apoio na questão 4. A aluna segue copiando respostas às tarefas 5 e 6, retomando o comportamento de indisposição para a aprendizagem significativa exposto na realização da tarefa 2.

### Mapeamento dos padrões de assimilação de Josué

No pré-teste Josué associa o conceito de sistema físico a um modelo de um fenômeno e nada mais específica. Entendemos, então, que o conceito encontra-se em um alto grau de generalidade, conforme segue abaixo.

*"É um modelo que serve para descrever fenômenos observados."*

O aluno nada comenta sobre os conceitos de variável dinâmica e estado de um sistema físico, o que nos faz inferir que estes conceitos não estão disponíveis em sua estrutura cognitiva na forma de subsunçores.

O nível de conceitualização do conceito de evolução temporal é demasiadamente amplo, dada a forma pela qual apresenta o mesmo (desenvolvimentos ocorridos no sistema).

*"Evolução temporal é o desenvolvimento do sistema no tempo."*

Os conceitos disponíveis na estrutura cognitiva do estudante são os de sistema físico e de evolução temporal, que estão em um nível relativamente amplo de generalidade.

Na segunda questão da tarefa 1 o aluno diferencia o conceito de sistema físico acrescentando-lhe de forma parcialmente não-arbitrária e não-literal o atributo de interação. O atributo de objeto é mais facilmente aprendido de forma significativa e isto é visível pela característica da identificação dos sistemas físicos. O exemplo em MQ, entretanto, é menos diferenciado, pois quando fala de átomos o faz de uma maneira um tanto geral (o aluno não especifica uma configuração, as interações). O conceito de interações pode, além disso, estar indiferenciado.

*"Terra-Sol; Objetos: Terra e Sol; características externas: massa; interações: gravitacional; possuem estrutura interna tanto o Sol quanto a Terra. Importante para compreensão do movimento dos corpos causado pela força gravitacional./ b. Átomo; Objetos: elétrons, prótons e nêutrons; características externas: carga, massa; interações: eletromagnéticas e forte; possuem estrutura interna. Importante para compreensão das ligações atômicas."*

No caso do conceito de sistema quântico é possível notar um alto nível de generalidade como se observa na questão 3 desta tarefa, quando ele diferencia sistemas atômicos e nucleares por meio de objetos relativamente gerais.

*"Sistema atômico: elétrons e núcleo; e o sistema nuclear: prótons e nêutrons."*

O conceito de variáveis dinâmicas parece ter sido inicialmente superordenado a partir das situações apresentadas, porém foi preciso analisar a tarefa 2 para corroborar o afirmado. Assim, na questão 4 da tarefa 1 o aluno menciona as variáveis dinâmicas

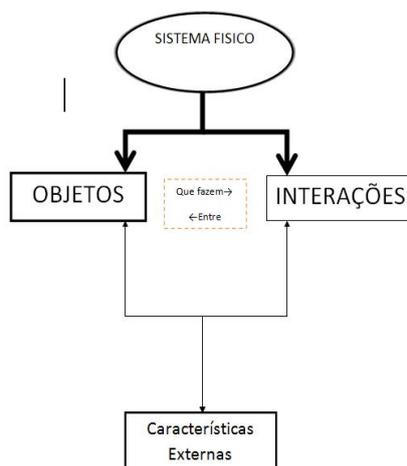


Figura 6.24: Mapa conceitual sobre o conceito de sistema físico apresentado por Josué

*"Posição, momentum linear e campo elétrico."*

Na tarefa 2, o aluno apresenta um mapa conceitual (primeira questão) no qual consta o conceito de variáveis dinâmicas, modificando o de interações. O conector está relacionado a esta modificação. Para ele as interações alteram os valores das variáveis dinâmicas, porém este produto cognitivo não pode ser analisado em termos de arbitrariedade, devido à falta de evidências.

O atributo de mensurabilidade é incorporado no conceito de variáveis dinâmicas, que cremos ter tido sua assimilação facilitada pela apresentação de situações potencialmente significativas. Tais situações tornaram possível relacionar o conhecimento prévio de variáveis dinâmicas específicas (como posição e momentum) a um conceito mais geral. Este mesmo atributo diferencia o conceito de variáveis dinâmicas em variáveis dinâmicas compatíveis e incompatíveis (subordinação correlativa).

*"Variáveis dinâmicas compatíveis são variáveis que podem ser medidas ao mesmo tempo, ou seja, a medição de uma não interfere na medição da outra, e variáveis dinâmicas incompatíveis são variáveis onde a medição de uma altera a medição de outra. O princípio da incerteza trata da medida de duas variáveis incompatíveis, ou seja, se você medir a posição com exatidão, sem incerteza, o momentum não pode ser medido, tem inexatidão infinita."*

O conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis está associado para o aluno ao princípio de incerteza de Heisenberg, que parece não estar diferenciado em sua estrutura cognitiva, pois ele trata as dispersões estatísticas como variações de velocidade de um objeto ao longo do tempo (como se fora uma espécie de aceleração tangencial) e não como uma indefinição intrínseca para um ensemble de sistemas identicamente preparados.

*"... você só consegue saber a posição de um objeto se ele estiver parado e, portanto, vai interferir na velocidade (momentum) e vice-versa."*

A questão 3 reflete uma possível confusão oriunda da aplicação arbitrária do princípio de incerteza à classificação de  $(x, y, z)$  e  $(p_x, p_y, p_z)$  como variáveis mutuamente incompatíveis.

Na questão 4 o aluno considera as projeções de spin nas direções  $(x, y, z)$  variáveis incompatíveis. Na resposta à questão 5, contudo, o aluno não relaciona a afirmativa de que estas componentes correspondem a variáveis dinâmicas incompatíveis e sim a relaciona ao conceito de variáveis dinâmicas apenas.

*”Essa afirmativa reflete o que são variáveis dinâmicas.”*

Na última questão da tarefa o aluno considera o desdobramento dos feixes nas medições, porém não explicita o porquê das respostas, fato a ser analisado em outro momento.

Na tarefa 3, conforme conjecturado, o conceito de estado parece estar subordinado ao de variáveis dinâmicas e isto se torna visível pelo exemplo dado pelo aluno.

*”... Em MC seria a descrição da posição e dos momenta, em teoria eletromagnética seria conhecer os valores dos campos elétricos e magnéticos, em termodinâmica conhecer os valores de pressão, temperatura e potencial químico e em quântica conhecer as probabilidades de um determinado estado...”*

Em MQ a noção de estado é ligeiramente confusa, pois foi misturada à ideia de probabilidade e a subsunção da versão probabilística do estado foi feita de forma significativa, porém errônea.

*”Estado de um sistema é a descrição do sistema em determinado instante de tempo... Na quântica diferente dos outros domínios não é possível conhecer o estado do sistema físico, mas somente a probabilidade de ele se encontrar em um estado ou outro.” (grifo nosso).”*

O conhecimento a respeito o estado (e a relação com as variáveis dinâmicas), no seu ponto de vista, é evidenciada quando fala intuitivamente do postulado da projeção. A subsunção parece ter sido realizada sob o subsunçor incerteza, associado à superposição de estados (por ele entendida como coexistência de estados distintos). Para Josué, o conceito de auto-estados está estreitamente correlacionado ao de medição.

*”Superposição de estados é a possibilidade de haver mais de um estado em um sistema físico, em quântica só se sabe o estado do sistema físico quando se mede, mas ao medir se altera o sistema, ou seja, antes de ser medido, o sistema pode ter qualquer estado ou todos os estados. Auto-estados são estados em que o sistema se encontra após o processo de medição.”*

Na questão 4, da interpretação da equação de autovalores, ele entende  $E'$  como a probabilidade de obtermos  $\hat{H}$  em um auto-estado  $|E'\rangle$ . Não compreendemos a linha de raciocínio usada pelo aluno e, portanto, analisamos esta questão em particular sob a óptica do conhecimento na forma operatória. Isto é feito também com a quinta questão.

Na tarefa 4, o estudante concebe o operador hamiltoniano (a função hamiltoniana) como sendo variável dinâmica, logo, enquadrando os conceitos como casos particulares do último mencionado. Como o operador hamiltoniano é quântico, o aluno afirma que ele é uma variável dinâmica incompatível com algumas variáveis.

*”A função hamiltoniana é válida para a MC e é compatível com qualquer variável dinâmica para um sistema conservativo, ou seja, é válido independente da variável que se queira comparar, enquanto o operador hamiltoniano é válido para a MQ e só compatível com algumas variáveis dinâmicas.”*

O aluno estreita a relação do hamiltoniano (quântico) com as interações, dada a identificação de uma interação no operador. A relação entre energia potencial e interação é também fortalecida. A associação entre hamiltoniana e energia é, também, estabelecida pelo reconhecimento dos termos de energia na função, embora não tenha justificado porquê.

*”O termo da interação é o último termo:  $\frac{GMm}{|r-R|}$  e é relativo à interação gravitacional...”*

*”O ente físico interage com o campo magnético  $\mathbf{B}$ ...”*

Para Josué, incerteza, variáveis dinâmicas incompatíveis e superposição de estados estão entrelaçados, porém ele concebe o conceito de incerteza como associado à indeterminação do estado e não à impossibilidade de determinação de valores simultâneos para variáveis dinâmicas incompatíveis.

*”As variáveis dinâmicas estão relacionadas com o conceito da incerteza, e é o conceito de incerteza que traz a idéia de superposição de estados. Como há uma incerteza em determinada variável, não é possível determinar o estado em que se encontra um sistema...”*

Na quinta e última tarefa entregue por Josué, o conceito de evolução temporal está associado ao conceito de interações, sendo o último classificado como gerador do primeiro, no mapa conceitual apresentado. O estudante nada afirma sobre o estado, fator indicativo de uma baixa força de dissociabilidade atrelada ao conceito.

*”O que determina a evolução temporal em ambos os casos são as interações que ocorrem em cada caso, e por isso se diz que ele é causal (tem uma causa).”*

Na quarta questão, o aluno menciona de forma muito geral o papel das equações fundamentais da FC e da MQ Não Relativística. Ele associa, contudo, as equações às interações (não sabemos como), atribuindo à descrição destas a finalidade das equações, mas, provavelmente entende que elas descrevam algum tipo de evolução temporal.

*”Essas equações servem para descrever as interações de sistemas físicos. Cada uma das equações tem seu “domínio” (onde são melhores aplicadas).”*

Pode-se verificar, portanto, que este aluno realizou assimilações de caráter relativamente geral, provavelmente dado o nível de generalidade do seu conhecimento prévio. O conceito de estado, relativamente novo, parece ter sido obliterado ao de variáveis dinâmicas, fato esperado, pois o estado parece ter sido assimilado como uma diferenciação das variáveis. O conceito de evolução temporal parece não ter sido muito modificado (no que tange ao conhecimento predicativo), a menos de uma relação aparentemente significativa com o conceito de interações. O aluno não apresentou a tarefa 6, o que nos impede de extrair mais informações acerca do conhecimento manifestado em relação a este conceito.

### Mapeamento dos padrões de assimilação de Jacó

No pré-teste, Jacó apresenta um alto nível de generalidade para o conceito de sistema físico, pois também concebe, como Josué, este conceito como um modelo teórico explicativo de um fenômeno. O conceito de variável dinâmica, todavia, tem um nível menos amplo de generalidade, pois é visto como uma propriedade física, o que muito se associa às grandezas físicas.

*”[Sistema físico] Um modelo teórico que visa explicar um fenômeno observado.”*

*”[Variável dinâmica] Uma ou mais propriedades físicas correlacionadas em uma evolução em uma ou mais dimensões.”*

O conceito de estado apresenta-se associado ao de sistema físico e é entendido como um conjunto de características e propriedades (não especificadas), o que nos fez inferir um amplo nível de inclusividade para este conceito. O conceito de evolução temporal, associado ao de estado como sendo a modificação deste ao longo do tempo, é visto por nós como associado a um nível bom de generalidade a ele associado.

*”[Estado de um sistema físico] Conjuntos de características e propriedades de um determinado sistema.”*

*”[Evolução temporal] Evolução, mudança do estado de um sistema com o passar do tempo.”*

Na tarefa 1, Jacó apresenta um mapa conceitual cujas relações estão muitas vezes mal estabelecidas, tais como: “interações quantizado pelas variáveis dinâmicas”. Ele constrói, contudo, os conceitos de variável dinâmica e de sistema físico. O primeiro tem alguns dos atributos ensinados e o segundo carrega como atributos os conceitos de objeto e interações. Pode-se dizer que o conceito de sistema físico foi diferenciado. Veja a Figura 6.22.

Na identificação de sistemas físicos, Jacó logra identificar e enumerar elementos de sistemas da FC. Menciona, ademais, dois exemplos na FC. No exemplo relativo à MQ, menciona o átomo de hidrogênio e um elétron, porém não os diferencia, o que nos leva à conclusão de que o nível de generalidade associado aos exemplos da FQ é maior do que o nível de inclusividade dos conceitos da FC.

*”Sistema 1: Atração gravitacional entre dois corpos./Objetos: dois corpos com massas gravitacionais, puntiformes. Interação a distância, força gravitacional... Variáveis dinâmicas principais: velocidade, posição, potencial e massa.”*

*”Descrição do átomo de hidrogênio.”*

O conceito de variáveis dinâmicas foi superordenado, porém o aluno recupera somente exemplos da FC, tais como posição, momentum, energia mecânica, etc.

*”Posição, velocidade...”*

Na segunda tarefa o aluno apresenta basicamente o mesmo mapa conceitual exposto na primeira. Ele assimila o conceito de variável dinâmica como sendo uma generalização do conceito de características externas.

Para o aluno, medição simultânea significa medir duas variáveis em uma só medição. Além disso, não relaciona este conceito ao de medições sequenciais realizadas em um intervalo de tempo infinitesimal. Para Jacó, a medição simultânea está relacionada às variáveis dinâmicas incompatíveis pela alteração resultante nestas variáveis no ato da determinação de uma variável incompatível a elas. Para o estudante, o conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis está fortemente associado ao princípio da incerteza, porém o teor da resposta é relativamente vago.

*"São variáveis mensuráveis em uma mesma medição..."*

*"... Quando medimos uma determinada variável dinâmica, alteramos outras. A variável medida é incompatível com as que se alteraram..."*

*"... Está ligado fortemente ao princípio da incerteza, pois para medir uma grandeza, devemos alterar ou tornar a medição de outra inviável..."*

Na diferenciação do conceito de posição em MQ, o aluno constrói um teorema enganoso ao confundir a medição de posição de um objeto quântico que possui uma propriedade indefinida (posição), com a possibilidade de determinar simultaneamente as componentes de posição (momentum) do elétron. O aluno, por conta de uma significação fora de contexto, realiza subordinação de forma errônea.

*"Não [as componentes de posição são compatíveis?]. Pois para sabermos onde está o elétron é necessário que esse interaja com algum instrumento de medida que esteja ajustado para uma determinada direção..."*

Jacó relaciona a perda de informação prévia numa medição à existência de variáveis dinâmicas incompatíveis e relaciona também ao princípio da incerteza e à alteração do sistema físico.

*"Entendo que são variáveis dinâmicas incompatíveis. Nesse caso, para medir uma das componentes temos que alterar as demais componentes."*

A sexta questão é respondida de forma confusa e nos furtamos de analisá-la.

Na tarefa 3, Jacó apresenta o estado como um grupo de variáveis dinâmicas. O aluno relaciona a medição à alteração de estado do sistema, o que é traduzido explicitamente no seu discurso ao salientar a alteração de valores das variáveis dinâmicas, o que para ele implica na limitação da medição em MQ. No seu caso, a MQ possui esta particularidade associada à incerteza.

*"... Quanto a MQ temos que lidar com incertezas de ordem muito maior que na MC. Temos também a ideia de distribuição de probabilidade de estados do sistema. A principal diferença entre a MQ e as teorias clássicas decorre do domínio de estudo, no qual a medição é mais limitada. Temos um limite intrínseco a MQ..."*

A superposição de estados é entendida como uma soma, coexistência de distintos auto-estados. Tal conceito pode ter adquirido tanto significado morfológico (soma) quanto ter sido associada ao conceito de probabilidades conforme descrito pelo aluno. Jacó entende, sem usar nomenclatura da MQ, que apenas um valor é assumido na medida (o que corrobora o fato de ele acreditar que a superposição de estados esteja ligada à probabilidade), ou seja, o problema da redução de estado.

*”Temos possíveis diferentes estados ao mesmo tempo, ou seja, em um estado físico, pode-se ter probabilidade não nula de encontrá-lo em diferentes estados... Quanto a medição, a superposição de estado converge para apenas um estado...”*

Jacó interpreta corretamente a equação de autovalores, ou seja, entende que se usa uma representação simbólica para uma variável dinâmica (operador) que possui vários valores prováveis (em algum momento o autovalor é denominado valor estimado) e que os auto-estados indicam valor definido de energia. O estudante faz isto para o caso específico do hamiltoniano, porém a subsunção é feita pelo uso de uma combinação de conceitos, a saber, variáveis dinâmicas, estado, auto-estado e medição.

*”Utilizarei ”§”no lugar do ”^”para indicar o operador. Por exemplo:  $A\hat{\xi}$ , operador  $A$ .  $H\hat{\xi} \rightarrow$  Operador hamiltoniano, indica a variável dinâmica, a energia total do sistema em termos do potencial e do momenta.  $E' \rightarrow$  um dos valores de energia obtidos em um determinado processo de medição... Poderia ser o valor estimado, não necessariamente medido, ou valor que se espera em uma medição.  $|E'\rangle \rightarrow$  Estado relativo ao valor  $E'$ , ou seja, para cada valor, há um estado diferente...”*

O aluno entende que  $|s_x, +\rangle$  representa um estado com valor definido de  $s_x$ . Ele faz, além disso, a relação explícita desta variável com uma incompatível a ela, a saber,  $s_z$ , porém parece associar a existência de variáveis dinâmicas incompatíveis à indeterminação de uma quando a outra está determinada. Analisamos estes aspectos a partir da óptica do conhecimento operatório, pois assim podemos inferir com maior clareza que conceitos ele usa na resolução do problema conceitual.

Na tarefa 4, o aluno diferencia os conceitos de operador hamiltoniano e função hamiltoniana pelo caráter determinístico da MC, ou seja, para ele o operador hamiltoniano é não-determinístico, pois é usado em MQ. A função hamiltoniana é relacionada à energia e o operador hamiltoniano é relacionado (não sabemos de que forma ele concebe esta relação) a um conjunto de variáveis dinâmicas.

*”A diferença está, basicamente, no determinismo, quanto a função hamiltoniana fornece a interação e a energia de movimento de um dado sistema em função das variáveis dinâmicas, o operador é o que caracteriza o conjunto de variáveis dinâmicas de um estado ou de uma superposição de estados....”*

Jacó também estabelece uma ligação entre os conceitos de força, interação e energia potencial. Relaciona, no entanto, erroneamente o conceito de energia ao hamiltoniano (através de uma relação de identidade). O conceito de variáveis dinâmicas, ademais, parece não ter sido tão modificado em sua estrutura cognitiva, se comparado ao da última tarefa realizada.

*"a) Interação do tipo forças centrais, entre dois corpos, devido ao potencial variar apenas com o inverso de  $r$  e descrever a energia de dois corpos. A força em questão é a gravitacional, pois varia com o produto das massas e é ajustada pela constante da Lei da Gravitação Universal./ b) Órbitas de diversos corpos tais como planetas, cometas, asteróides, satélites (naturais e artificiais), lançamento de projéteis (subatmosférico e espacial), queda livre de corpos e oscilação sistemas binários./ c) Na ordem, da direita para a esquerda: energia do movimento de translação, energias do movimento angular, potencial gravitacional."*

*"a) O objeto em questão (elétron) interage com o campo magnético, pois a sua descrição hamiltoniana varia com essa intensidade./ b) Eletromagnética quântica./ c) Uma. A mudança da orientação do Spin não muda a energia do elétron. (Fiquei com dúvida nessa)."*

Pudemos perceber, entretanto, pela segunda e pela terceira questão a relação construída pelo aluno entre hamiltoniano e interações.

O conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis, em particular, parece ter sido modificado pela associação com o conceito de superposição de estados. Antes, Para Jacó, as variáveis dinâmicas incompatíveis não podiam ser determinadas simultaneamente, pois o conceito de simultaneidade estava ligado ao significado estrito da palavra. Posteriormente o conceito se referia à impossibilidade de determinação de auto-estados simultâneos para as variáveis dinâmicas incompatíveis. A medição simultânea aproxima-se à medição sequencial, à idéia de probabilidade e de superposição de estados (substancialmente correta), no caso em que consideramos variáveis dinâmicas incompatíveis.

*"Quando medimos uma variável impossibilitamos a medição das variáveis dinâmicas incompatíveis a que medimos, com isso, alteramos o sistema, mudando a precisão na medição e o valor dessas demais variáveis, podendo... encontrar valores diferentes dos valores anteriores a primeira medição..."*

Na quinta tarefa, Jacó apresenta um mapa conceitual sucinto, porém com ligações precisas e diretas, embora gerais. O aluno apresenta também um mapa conceitual específico associado ao mapa mais geral. O estudante parece ter bem organizado o conhecimento explícito. Veja Figura 6.21.

O aluno apresenta uma relação entre os conceitos de evolução temporal, causalidade e modificação do estado ao longo do tempo. Ele também considera implicitamente que a evolução temporal em MQ se dá em termos de evoluções de vetores escritos como combinações lineares de outros e nada comenta sobre o papel das interações, embora as enumere no mapa.

*"É causal pois, em ambas, as variáveis dinâmicas dependem de seus estados iniciais. ... Na MQ, a equação de estado em função do tempo depende do estado inicial, ..."*

Jacó também parece ter compreendido a lógica da evolução do vetor de estado ao longo do tempo, pois consegue manipular a notação. Iremos, no entanto, analisar isto sob o ponto de vista do conhecimento na forma operatória. A relação entre estado e variáveis dinâmicas é, também, corroborada.

O aluno não ressalta o papel integrador da evolução temporal que permeia as equações fundamentais da FC e da MQ Não Relativística. Por outro lado, não

podemos afirmar que ele não relacione isto à evolução temporal. Uma diminuição do limiar de disponibilidade pode revelar aspectos importantes neste sentido.

*”A ES é uma problematização estatística do estado quântico considerando as densidades de probabilidades como funções de onda, através dela podemos encontrar a função de estado dependente do tempo.”*

Jacó introduz um mapa conceitual na sexta tarefa. No mapa ele encaixa conteúdos de cunho filosófico externos à tarefa. Ele relaciona, entretanto, os conceitos apresentados na intervenção de forma a corroborar aquilo que pensávamos acerca da integração dos conceitos na estrutura cognitiva. Não entendemos muito bem uma relação estabelecida por ele, a saber, a de variáveis dinâmicas serem regidas por interações. Conjecturamos a possibilidade de ser explicada pela associação feita pelo aluno do hamiltoniano com as variáveis dinâmicas e considerando que o hamiltoniano seja o próprio regente da evolução temporal, assim a evolução temporal das variáveis dinâmicas seria regida pelas interações.

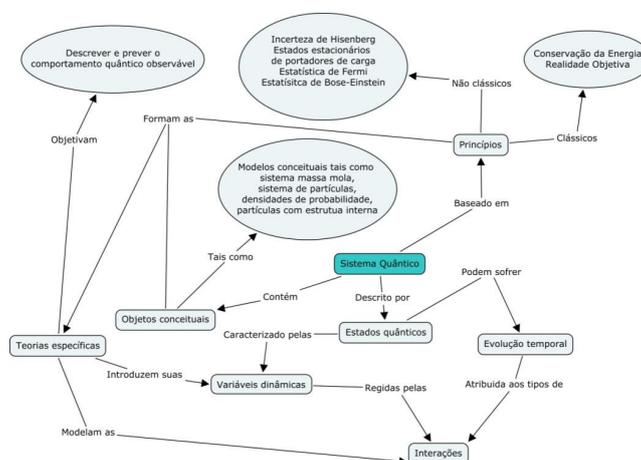


Figura 6.25: Mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Jacó

O estudante demonstra que mesmo sob um limiar de disponibilidade relativamente alto, ainda possui disponível a idéia de que variáveis dinâmicas incompatíveis não podem ser simultaneamente determinadas. Afirma que os estados  $|p', E(p')\rangle$  são estacionários, o que não ocorre para a posição (devem ser ressaltadas algumas falhas na linguagem utilizada). Ele relaciona a medição/determinação à preparação do sistema em um dado auto-estado, bem como afirma que em MC, a posição e momentum possuem auto-estados simultâneos.

*”A posição não está definida, pois o momento está. Pelo fato de serem variáveis dinâmicas incompatíveis...”*

*”O estado atribuído ao operador momento e energia, não, mas os estados atribuídos a posição evoluem no tempo...”(grifo nosso)*

*”Na MC preparamos as duas variáveis (momentum e posição) no mesmo instante, ao contrário na MQ...”*

Para Jacó, existe uma relação do conceito de superposição de estados com o de indeterminação. Ele associa a evolução do pacote de onda à superposição. A representação (introdução de  $\delta p$ ) pode tê-lo levado a entender que neste caso teremos vários valores de momentum e, ademais, o aluno não leva em conta o fato de o momentum se conservar.

*"... Isso quer dizer que a partícula foi inicialmente preparada com uma superposição de auto-estados de momenta, em diversas medidas serão detectados diversos estados diferentes para o momentum..."*

Outra associação a ser salientada é a feita entre a função de onda, a probabilidade e o comportamento ondulatório da matéria (não tratado no curso) quando é solicitada a explicitação da relação entre a função de onda e o vetor de estado.

*"... Indica um comportamento ondulatório, podendo, inclusive, apresentar comprimento de onda."*

Jacó também associa, cremos que desde o uso da representação simbólica, a equação de Schrödinger tanto à evolução no tempo da função de onda como do estado, enquanto a de Heisenberg (de forma mais vaga) à evolução das variáveis dinâmicas.

*" $|\psi(t)\rangle$  – é o estado do sistema./  $\hat{H}$  significa as interações da segunda equação.  
 $\frac{d}{dt}[\hat{A}_h(t)]$  aqui temos uma derivada total da equação – que são as variáveis dinâmicas..."*

O aluno parece ter assimilado as idéias mais gerais da evolução temporal na MQ, desde o seu conhecimento prévio relevante inicialmente desorganizado e geral.

### Mapeamento dos padrões de assimilação de Sara

Sara apresenta um conceito de sistema físico bastante geral no pré-teste, pois o entende como um modelo. O conceito de variáveis dinâmicas carece de sentido, pois ela afirma ser o estado de um sistema físico. Assim também afirma para o conceito de estado de um sistema físico, o que nos tolhe de estimar um nível de generalidade para este conceito. O conceito de evolução temporal encontra-se ligado ao sistema, como sendo a evolução (transformação) deste, porém, o nível de generalidade é substancialmente elevado.

*"[Sistema físico] Modelo teórico que tenta descrever um experimento observado."*

*"[Variáveis dinâmicas] Estado do sistema num determinado instante de tempo."*

*"[Estado de um sistema] Estado do sistema num determinado instante de tempo."*

*"[Evolução temporal] Evolução do sistema num determinado tempo."*

Na tarefa 1, a aluna apresenta um mapa linear do conteúdo. Ela manipula a ferramenta de maneira errônea, pois confunde conceitos com proposições. O mapa linear indica que as relações serão rapidamente obliteradas ao subsunçor mais geral a partir do qual foi realizada a aprendizagem. Veja a Figura 6.22.

Sara é bem sucinta na identificação dos elementos componentes do sistema quando solicitada, o que pode dificultar a análise do conhecimento na forma predicativa. Ela identifica elementos dos sistemas (erroneamente no caso do átomo de hidrogênio), porém não faz diferenciações entre eles, ou seja, sempre apresenta o conceito de forma pouco concreta.

*"Átomo de hidrogênio: Elétrons, prótons, nêutrons. Interações eletromagnéticas."*

*"Terra – Lua. Objetos que o constituem: Terra e Lua/ Interações: força gravitacional."*

Sara parece ter, entretanto, subordinado corretamente as idéias relativas a sistemas físicos e variáveis dinâmicas. No que tange à categorização do tempo como variável dinâmica, ela pode não ter percebido o papel de parâmetro na MQ associado a esta grandeza. Apresenta na maioria das vezes, variáveis dinâmicas clássicas, o que evidencia maior domínio da MC frente à MQ.

*"Posição e momentum do spin do elétron."*

*"Porque as variáveis de momentum (spin) são incompatíveis."*

Na segunda tarefa, a aluna apresenta um mapa mais rico conceitualmente que o apresentado na primeira tarefa. Inclui os atributos de caracterização dos sistemas físicos e de medição simultânea, bem como parece diferenciar os conceitos de variáveis dinâmicas em compatíveis e incompatíveis (subsunção correlativa). Veja a Figura 6.21.

Sara também apresenta várias vezes padrões mecânicos de resposta, pois depois de diferenciar os conceitos de variáveis compatíveis e incompatíveis, não explica a relação deste último com o princípio da incerteza. As respostas são, portanto, bastante superficiais. Ela usa um tipo de argumento mecanizado que de forma geral responde às perguntas, porém que falha em respondê-las de forma específica.

*"Quando não podemos apresentar duas variáveis dinâmicas simultaneamente, chamamos essas variáveis de incompatíveis. Quando podemos apresentar essas variáveis sem conflitos, chamamos de compatíveis..." (Adaptação do material de apoio).*

*"Acredito que sim, exista uma relação com o princípio da incerteza."*

A aluna afirma mecanicamente (arbitrariamente) que  $(x, y, z)$  e  $(p_x, p_y, p_z)$  são ternas de variáveis incompatíveis.

*"São incompatíveis, porque não podem ser medidas de forma simultânea."*

Nas respostas à sexta questão, entende que o feixe será dividido, porém expressa um raciocínio não muito articulado, ou seja, bastante intuitivo.

*"a) Foi bloqueado o feixe de maior intensidade (+), isto é, 80000 átomos. Então está passando por z 20000 átomos (-). Após a passagem no segundo eletroímã orientado em x, o feixe se divide em dois, nas direções (+) e (-). 80% deles vai para (+) e 20% para (-). Então temos 4000 na direção (-)./ b) O feixe se divide em 2 novamente, e 80% dos átomos vão para (+) e 20% para (-). Então temos 800 átomos na direção z (-)./ c) . "*

Verificamos que pelo seu conceito inicial de variável dinâmica, a superordenação deve ter sido realizada a partir de algumas variáveis que conhecia como posição e velocidade, por exemplo.

Na terceira tarefa inclui em seu mapa conceitual o conceito de estado como representativo das propriedades de um sistema. Parece ser uma especificação de algum elemento do sistema. Ela relaciona o conceito de sistema físico ao de variáveis dinâmicas e parece realizar a subsunção do segundo em relação ao primeiro. Sara acrescenta, ademais, o atributo de modificação das variáveis dinâmicas ao longo do tempo.

Ao diferenciar o conceito de estado ela apresenta uma subordinação do conceito às instâncias específicas da Física (MC, Teoria Eletromagnética, Termodinâmica e MQ) de maneira muito geral, sem muito detalhar o que expressa. A aluna parece apresentar confusão do conceito de estado em relação ao de evolução temporal no que tange à própria MC. Sara considera o estado como algo (a melhor palavra para transcrever o que imagina) determinado a partir de variáveis dinâmicas. O teor de generalidade do conceito mostra uma baixa modificação do mesmo, ou seja, a permanência da idéia não modificada.

*”MC: Representa, de forma abstrata, as propriedades físicas de um sistema em função do tempo. Representa a evolução de um sistema de um estado para outro... MQ: Na MQ, as variáveis dinâmicas nem sempre podem ser medidas de forma simultânea, o que diferencia da análise feita de um estado na mec. Clássica.”*

Quando se pede para expressar o entendimento acerca da superposição de estados, apresenta proposições cujos significados são confusos. Relaciona de forma muito geral e tangencial a superposição de estados à medição, porém não expressa diferenciação na frase proposta. Ela relaciona as probabilidades aos “coeficientes da superposição”, porém não especifica mais do que isto.

*”Superposição de estados é uma consequência da natureza ondulatória da matéria. É a probabilidade onde cada componente da superposição determina, uma união de propriedades possíveis para o objeto. A relação com medição e auto-estados, é quando existe uma maior probabilidade de se obter uma medição de um valor.”*

No problema que solicita a interpretação da equação de autovalores, a aluna relaciona a equação às interações, confusão possivelmente oriunda de uma provável associação do operador hamiltoniano às interações ocorrentes no sistema, ou seja, aplicação de um atributo do operador a um contexto errado. Interpretamos que Sara parece relacionar muitos dos conceitos de forma arbitrária à estrutura cognitiva, corroborando a hipótese de que realize assimilações próximas ao pólo mecânico da aprendizagem. A assimilação geralmente ocorre de forma tangencial e mesmo linear.

*”Essa equação de autovalores são interações ocorrentes em sistemas conservativos.”*

Na tarefa 4 Sara classifica a hamiltoniana (o hamiltoniano) como variável dinâmica. Desde este aspecto, diferencia os conceitos de função hamiltoniana e operador hamiltoniano. A aluna parece relacionar os conceitos de forma linear (isolada) na estrutura cognitiva ou mesmo ter uma rápida tendência à obliteração. Cremos que tenha estável a ideia de serem todas as variáveis dinâmicas compatíveis em FC, porém não o serem em FQ. Tal idéia, embora estável em sua estrutura cognitiva, é demasiadamente geral para os objetivos do curso.

*"Hamiltoniana – usada na MC, é compatível com qualquer variável dinâmica ./Hamiltoniano – usado na MQ, só é compatível com algumas variáveis dinâmicas."*

A estudante apresenta frases isoladas na questão que busca avaliar a compreensão de aspectos específicos da função hamiltoniana (questão 2). Ela relaciona, porém, a hamiltoniana às interações via energia potencial (não o faz diretamente) e não faz referência à energia cinética; julgamos ser possível que ela iguale a função hamiltoniana à energia.

*" $\frac{p_r^2}{2m} + V$  – hamiltoniana, onde  $V$  (potencial) é  $\frac{GMm}{|r-R|}$ . Essa equação nos mostra a interação de um sistema de massa  $m$  com um de massa  $M$ . Acredito que é parecido com a interação Terra-Lua e a equação mostra a interação pela energia potencial gravitacional. Os momenta  $p_r, p_\theta, p_\phi$  e  $p_R, p_\Theta, p_\Phi$  são as variáveis dinâmicas, que são compatíveis nesse sistema físico. A hamiltoniana pode ser usada em sistemas conservativos. Um sistema é conservativo quando as interações independem do tempo e da velocidade."*

A quarta questão demonstra a não integração dos conceitos na estrutura cognitiva. Sara deve usar, porém, uma regra de controle de informação para chegar à resposta. Percebe-se que a frase é aparentemente destituída de sentido.

*"Considerando que superposição de estados não variam com o tempo e que, nesse caso, não podemos fazer uma medição simultânea, analisamos então as variáveis dinâmicas incompatíveis."*

Na quinta tarefa, a aluna apresenta um mapa desorganizado no qual alguns conceitos aparecem bastante isolados. O conceito de evolução temporal, ao menos no mapa, parece muito com o revelado no conhecimento prévio da aluna, mostrando pouca diferenciação do conceito. Em tarefas anteriores foi detectado um padrão de assimilação mecânica do tipo "cópia e cola" do material de apoio. Mesmo os conceitos mais diferenciados, os de sistema físico e variável dinâmica, se encontram em uma forma geral.

O atributo de causalidade é usado por Sara como artifício para justificar a evolução temporal, mas ao invés de ser equiparado às interações, o conceito de causa, para ela, gera as interações. A assimilação pode ter sido realizada erroneamente devido ao alto grau de generalidade, logo baixo índice de discriminabilidade entre os conceitos de evolução temporal, interações e propriedades físicas.

*"Com base num conhecimento prévio do estado de um sistema, se interfere, de modo causal nesse estado em qualquer instante de tempo, tanto na MC, quanto na MQ, para analisar o comportamento e as interações que ocorrem nesse sistema."*

A aluna apresenta de forma muito ampla, logo muito geral, o papel das equações fundamentais da FC e da MQ Não Relativística. Isto parece ser mais uma característica da aluna do que decorrência de obliteração propriamente dita.

*"Apresentar a evolução temporal de um sistema."*

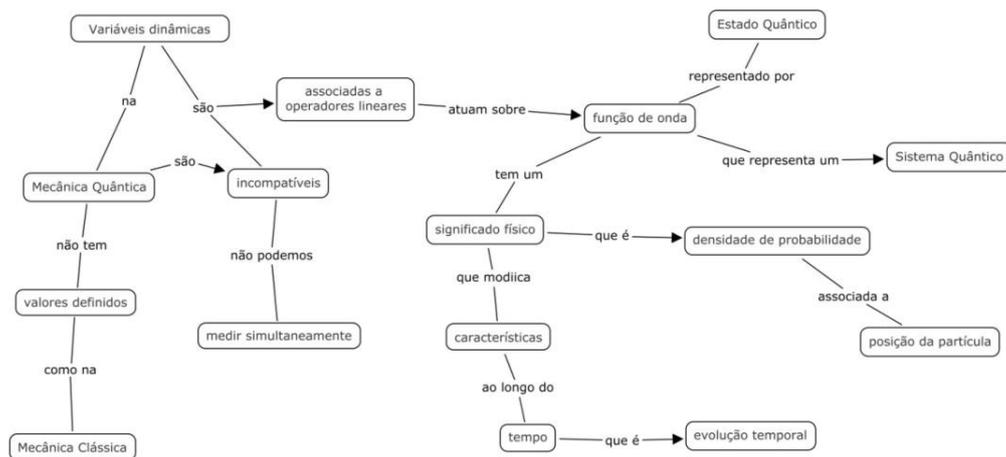


Figura 6.26: Mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Sara

Sara constrói um mapa conceitual no qual os conceitos de evolução temporal e de estado parecem muito isolados na sua estrutura cognitiva. O padrão de aprendizagem mecânica é ressaltado por este aspecto. O teor de generalidade demonstra tanto a estabilidade do conhecimento prévio da estudante, como padrões de assimilação mecânica, ou seja, arbitrária (sem justificativas) e literal (não-substantiva).

A aluna considera a existência de trajetórias em MQ, mas o faz sem relação aparente com os conceitos de posição e momentum. O item b da questão 2 da tarefa 6 é respondido incorretamente. Quando Sara responde ao item c, ela afirma ser o estado um conceito associado ao de função de onda, sendo o último relacionado arbitrariamente à probabilidade.

*“... Como o momentum da partícula se conserva, a velocidade deve ser constante. Logo, o valor do momentum é o mesmo durante a trajetória.” (Problema da partícula quântica livre.)*

A aluna confunde as equações de Schrödinger e Heisenberg (interferência retro-ativa), devido à arbitrariedade com que interpreta a equação, isto é, sem o uso de justificativas para a manipulação da representação simbólica.

*“ $|\psi(t)\rangle$  – é o estado do sistema./  $\hat{H}$  significa as interações da segunda equação./  $\frac{d}{dt}[\hat{A}_h(t)]$  aqui temos uma derivada total da equação – que são as variáveis dinâmicas./  $\frac{\partial}{\partial t}[\hat{A}_h(t)]$  aqui temos uma derivada parcial, que nos mostra que as variáveis dinâmicas sofreram uma modificação no sistema. Consequentemente, o estado se modifica.”*

É possível ver, contudo, um padrão de assimilação mecânica do conteúdo que não permitiu à aluna uma modificação substantiva de seu conhecimento prévio inicial. Ausubel (2000) afirma não haver geração de significados neste tipo de aprendizagem.

### 6.2.3 Turma 3

#### Mapeamento dos padrões de assimilação de André

André, no pré-teste, apresenta um nível de conceitualização muito amplo, dado considerar um sistema físico como um conjunto de elementos atuantes sobre algo. O

conceito de variáveis dinâmicas é igualmente amplo, pois ele julga ser uma variável (não especifica qual) que se modifica (não especifica a forma nem em termos do que ocorre essa modificação).

*"[Sistema físico] É um conjunto de elementos que atuam em 'algo' ou sobre 'algo'."*

*"É uma variável que pode sofrer mudanças..."*

O conceito de estado é embasado em uma idéia mecanicista (estado de movimento), sendo associado a uma configuração (não explicitada), logo possui um amplo nível de generalidade. O conceito de evolução temporal, também bastante amplo leva em conta o atributo de alterações ocorrentes ao longo do tempo.

*"[Estado de um sistema] É o 'como' se encontra o sistema, se está parado ou se está em movimento sofrendo alguma ação."*

*"[Evolução temporal] É o que aconteceu durante certo período de tempo."*

É possível que a subsunção ocorra de forma menos detalhada em função do choque de aprendizagem inicial e em virtude do amplo nível de generalidade carregado pelos conceitos expostos pelo estudante.

Na tarefa 1 o aluno apresenta um mapa conceitual bastante reduzido, o que nos impede de inferir os atributos que caracterizam cada um dos conceitos ligados ao de sistema físico.

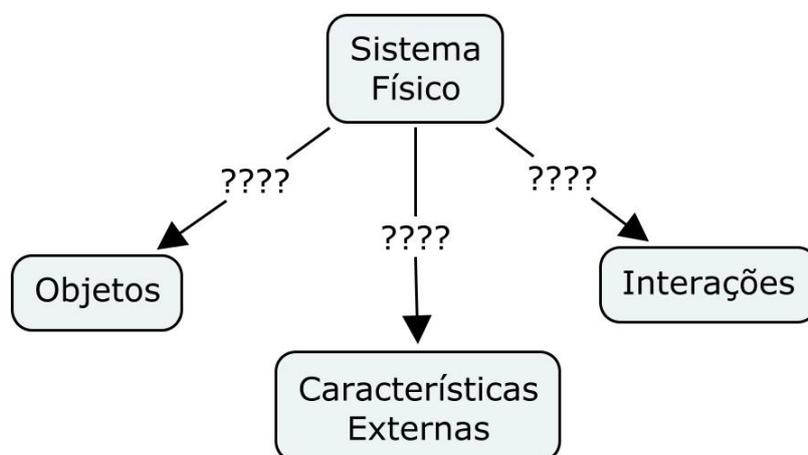


Figura 6.27: Mapa conceitual sobre sistemas físicos apresentado por André

O aluno identifica, entretanto, objetos, interações e estrutura pertinentes a objetos da FC de forma relativamente específica. Quanto à especificação dos sistemas em MQ, o aluno mostra uma conceitualização mais vaga do que em FC. Ele consegue identificar, entretanto, vários sistemas quânticos, o que pode sugerir eficácia no processo de superordenação.

*"Um exemplo de sistema físico pode ser um conjunto de corpos massivos, como por exemplo o par Terra-Sol. Eles interagem de acordo com a lei de Gravitação Universal, com estruturas esféricas..."*

*”Na MQ a palavra sistema físico pode referir-se, por exemplo, a um elétron ou um próton, a um átomo de hidrogênio ou ao átomo de urânio...”*

André reconhece também várias variáveis dinâmicas relevantes à FC, demonstrando ter realizado a superordenação deste conceito.

*”Alguns exemplos de variáveis dinâmicas são: posição, velocidade, pressão, temperatura, campo elétrico, campo magnético.”*

Na tarefa 2, o aluno traz um mapa conceitual que incorpora as características de dependência temporal e de variáveis dinâmicas como grandezas físicas. Ambos os fatores evidenciam a superordenação anteriormente conjecturada.

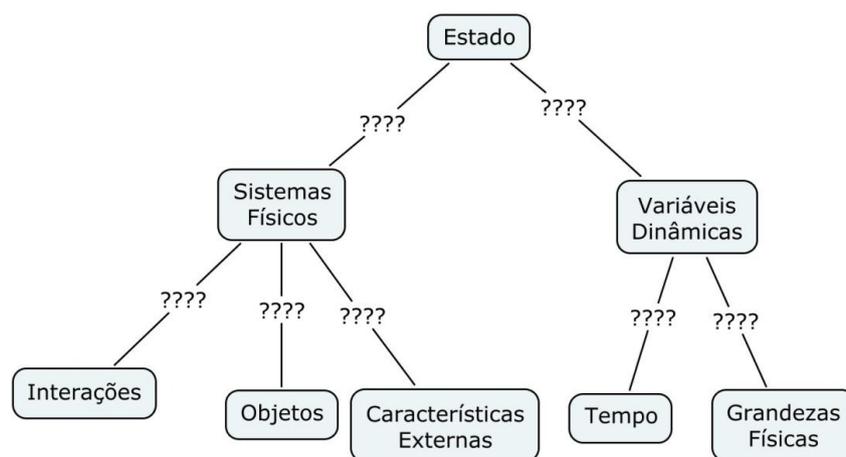


Figura 6.28: Segundo mapa conceitual sobre os conceitos de sistema físico e de variáveis dinâmicas apresentado por Maria

O conceito de variáveis dinâmicas é elaborado a partir do atributo de mensurabilidade simultânea. A subsunção é realizada de modo que a distinção entre variáveis dinâmicas incompatíveis e compatíveis seja feita em termos deste atributo. O conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis está associado a uma modificação das condições em que o sistema se encontra, o que é uma leve alteração do conceito agora vinculado ao atributo de mensurabilidade associado ao conceito de variáveis dinâmicas.

*”Variáveis dinâmicas compatíveis são aquelas em que é possível a medição de variáveis simultaneamente sem que isso altere o valor obtido. Variáveis dinâmicas incompatíveis são aquelas em que a medição de uma variável altera a condição do sistema, assim prejudicando a medição da outra variável.”*

No terceiro item, o aluno demonstra confusão no entendimento da pergunta e acaba indicando a associação de variáveis incompatíveis e princípio da incerteza para duas variáveis dinâmicas em particular.

*”Não, as componentes de posição e de momentum são variáveis incompatíveis.”*

André associa também, no quarto item da tarefa, o atributo de perda de informação prévia à existência de variáveis dinâmicas incompatíveis.

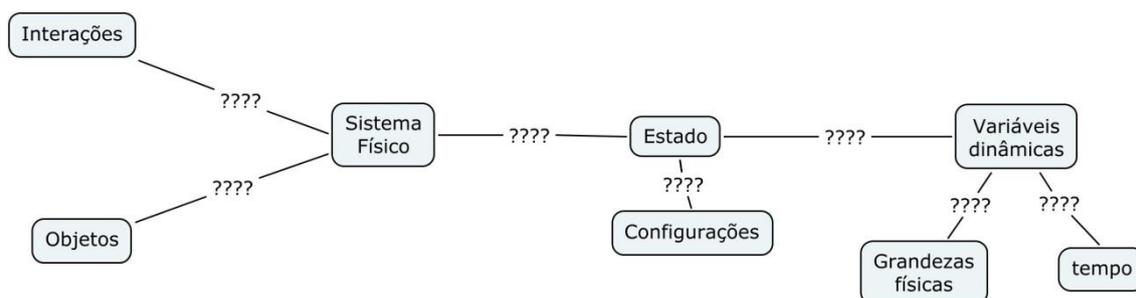


Figura 6.29: Mapa conceitual apresentado por André (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

*”Entendo que as componentes do spin são variáveis incompatíveis, pois a medição de uma altera a informação prévia relativa a outra.”*

O estudante relaciona, também, a divisão dos feixes no aparato de Stern-Gerlach à medição de uma variável dinâmica incompatível com uma variável anteriormente medida. Isso pode ser uma evidência demonstrativa da facilitação da aprendizagem do conceito para o aluno.

*“... Após a passagem pelo terceiro eletroímã, o feixe estará necessariamente dividido: parte na direção  $\hat{z}$  positiva e parte na  $\hat{z}$  negativa...”*

André calcula, no entanto, as intensidades dos feixes erroneamente, pois aplica uma regra de proporção da divisão dos feixes semelhante à usada para o feixe inicial, ou seja, a divisão do feixe sempre segue uma proporção do tipo 80% do feixe inicial assume valor positivo da componente do spin e 20% assume valor negativo. Esta concepção é explorada sob a óptica do conhecimento operatório, na seção 6.3.

Na tarefa 3 o aluno apresenta um mapa conceitual no qual o conceito de estado aparenta ter um amplo nível de generalidade, mas ainda estando associado aos conceitos de variável dinâmica e de sistema físico. Os atributos essenciais aparentemente mais estáveis dos respectivos conceitos são os de grandeza física e variação temporal para o primeiro e objetos e interações para o segundo, pois foram incluídos no mapa (indicador de disponibilidade e, no caso, estabilidade dos conceitos). Veja a Figura 6.29.

Para o aluno, o estado é uma representação de propriedades do sistema. André especifica o conceito para a MC, para a Teoria Eletromagnética e para a Termodinâmica. Ele não especifica os atributos essenciais do conceito, porém afirma ser o estado representado pelas funções de onda e por “vetores de onda” (vetores de estado).

*”Um estado é uma forma de representação das propriedades físicas de um sistema em função do tempo... Na MQ as funções de onda e os vetores de onda representam os estados de um sistema físico.”*

O estudante entende superposição de estados como a coexistência de dois valores para uma variável dinâmica. Afirma que na medida o estado é colapsado para um dos valores da superposição (auto-estado) de forma aleatória. É possível, partindo desta informação, notar um aspecto: a ideia de superposição como soma o leva a interpretar o conceito como coexistência (soma, superposição, justaposição etc). O aluno subsume, no entanto, a ideia de colapso à de medição.

*"A superposição é a soma de dois estados, sendo que o resultante também é um estado. Isso ocorre quando um objeto simultaneamente possui dois ou mais valores para uma quantidade observável. Se a quantidade é medida, o estado será aleatoriamente colapsado para um dos valores da superposição."*

André entende a equação de autovalores como o problema da medida. Ele associa, também, a energia ao operador hamiltoniano, talvez pela relação não-arbitrária estabelecida com o valor de energia informado na equação, bem como da relação  $A \rightarrow a'$  a ser analisada de forma mais profunda sob a óptica da análise do conhecimento na forma operatória. Percebem-se alguns erros de linguagem quando ele afirma estar a variável dinâmica em um auto-estado, ao estabelecer que o estado está em um auto-estado do hamiltoniano.

*"Quando a variável dinâmica estiver em um autoestado ela assumirá o valor. A hamiltoniana representa a energia total do sistema."*

Na tarefa 4, o aluno classifica tanto a função hamiltoniana quanto o operador hamiltoniano como variáveis dinâmicas. A assimilação destes novos conceitos é, pois, realizada desde o subsunção variável dinâmica.

*"A função hamiltoniana  $H$  e o operador hamiltoniano  $\hat{H}$  têm dimensão de Energia, e ambos representam a caracterização do estado de um sistema. A diferença entre elas é que a função  $H$  é compatível com qualquer variável dinâmica, enquanto que o operador  $\hat{H}$  só é compatível com algumas variáveis dinâmicas."*

André associa a energia potencial à interação gravitacional e relaciona significativamente a energia à hamiltoniana, inclusive pelo conhecimento dos termos de energia cinética.

*"a) O termo  $\frac{GMm}{|r-R|}$  representa a lei de gravitação universal./ b) Podemos tratar sistemas com objetos mássicos como o sistema Terra-Sol./ c) O 1º termo representa a energia cinética de um objeto de massa  $m$  com distância  $r$  do centro de massa do sistema. O 2º termo representa a energia cinética de um objeto de massa  $M$  com distância  $R$  do centro de massa do sistema. O último termo representa a interação gravitacional."*

Em função de André ser um dos alunos que apresentou somente as quatro primeiras tarefas, a análise dos padrões de assimilação realizados por ele só foi feita cobrindo até a temática de operador hamiltoniano (função hamiltoniana).

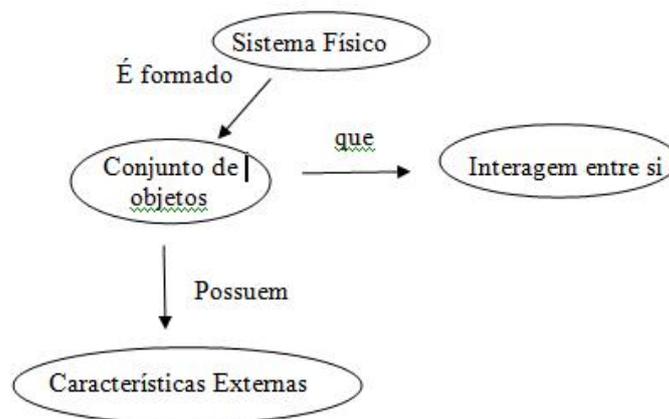


Figura 6.30: Mapa conceitual sobre sistemas físicos apresentado por Úrsula

### Mapeamento dos padrões de assimilação de Úrsula

Úrsula faltou à aula em que foi realizado o pré-teste, impedindo-nos de formular conclusões acerca do seu conhecimento prévio. Na tarefa 1, ela copia partes do material de apoio, exibindo então uma indisposição para a aprendizagem significativa ou mesmo padrões de assimilação mecânica.

*”Interação eletromagnética: ocorre entre todos objetos dotados de carga elétrica, podendo ser atrativa se as cargas são de sinais contrários e repulsiva, se as cargas são de mesmo sinal. É relevante em todas as áreas da Física. (cópia do material de apoio)./ Interação forte: ocorre entre os constituintes do próton e do nêutron (e de outras partículas), os chamados quarks. Nesse nível a interação forte aumenta se tentamos separar os quarks. A interação que ocorre entre prótons e nêutrons mantendo o núcleo coeso é uma interação forte residual atrativa, bastante curiosa, pois é de curto alcance, intensa até uma distância e que, ou decresce significativamente ou se anula de forma muito brusca para distâncias maiores do que o tamanho do núcleo. É relevante no contexto da MQ. (cópia do texto de apoio).”*

Na tarefa 2, a aluna apresenta um mapa com elementos não abordados no curso, tais como a localização no que ela denomina espaço-tempo. Veja a Figura 6.30

A estudante apresenta cópias do material de apoio na questão 2, porém relaciona o conteúdo ao princípio de incerteza.

*”Variáveis dinâmicas compatíveis são variáveis cujos valores podem ser apresentados “simultaneamente” sem conflitos, ou seja, podem ser medidas ao mesmo tempo e com precisão (cópia do material de apoio)./ Variáveis dinâmicas incompatíveis são variáveis cujos valores não podem ser apresentados “simultaneamente” sem conflitos, ou seja, não podem ser medidas ao mesmo tempo, pois se tenho precisão da medida de uma variável perco a precisão na medida da outra variável./ Sim [sobre a conexão com o princípio da incerteza]./ Segundo o princípio da incerteza, não se pode conhecer com precisão absoluta a posição ou o momentum (e, portanto, a velocidade) de uma partícula. Isto acontece porque para medir qualquer um desses valores acabamos os alterando, e isto não é uma questão de medição, mas sim de FQ e da natureza das partículas./ O princípio da incerteza é equacionado através da fórmula:  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ .”*

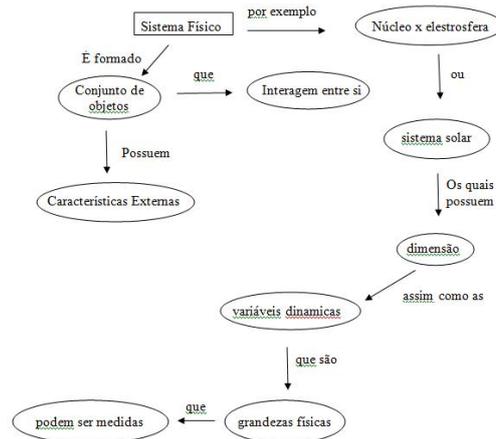


Figura 6.31: Mapa conceitual apresentado por Úrsula (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

Para Úrsula, a determinação de posição só pode ser feita de forma unidimensional, pois crê ser possível somente a determinação de uma das componentes de posição (este resultado é interessante, pois indica a possibilidade de alguns alunos acreditarem em objetos quânticos não localizáveis no espaço).

*"Não, pois ao medir uma das variáveis dinâmicas, perdemos informação acerca das outras duas, somente podemos saber a posição  $x$  ou  $y$  ou  $z$  e assim também é com o momentum."*

A estudante intuitivamente crê na divisão do feixe no aparato de Stern-Gerlach (talvez relacione às variáveis dinâmicas incompatíveis), mas imagina uma linha de raciocínio de proporcionalidade, isto é, quando houver divisão do feixe, as intensidades dos feixes resultantes terão a mesma proporção das intensidades dos feixes iniciais, inferência encontrada também em outros estudantes.

Na terceira tarefa a aluna apresenta um mapa conceitual linear e uma cópia do material de apoio.

Úrsula relaciona a superposição de estados à indeterminação de forma muito tangencial. Ela insere arbitrariamente na explicação o conceito de colapso, porém posteriormente relaciona o conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis ao de superposição de estados de forma mais direta. Para ela a superposição de estados significa a ocorrência simultânea de dois eventos, provavelmente o significado morfológico atribuído por ela à palavra.

*"Eu entendo por superposição de estados o fato de no mundo quântico duas possibilidades de um evento acontecer poderem ocorrer simultaneamente..."*

Na questão 4, a aluna apresenta novamente uma cópia do material de apoio. O uso recorrente deste recurso está associado a padrões de aprendizagem mecânica, dado a uma indisposição para a aprendizagem significativa.

*"Onde  $H$  é o operador, que representa a variável dinâmica que queremos medir,  $E'$  é um dos valores obtidos em um processo de medição de tal variável dinâmica representada por  $H$  e  $|E'\rangle$ , é o estado relativo a este valor, denominado auto-estado do operador  $H$ , caracteriza a chamada equação de autovalores. Autovalores é o conjunto de valores possíveis da variável dinâmica." (cópia do material de apoio).*

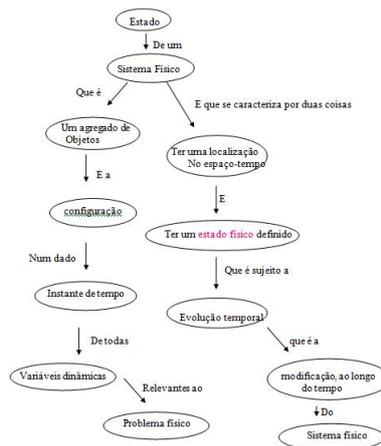


Figura 6.32: Primeiro mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Úrsula

Na tarefa 4 a aluna não realiza qualquer distinção entre a função hamiltoniana e o operador hamiltoniano, sob uma base não-arbitrária. Ela parece perceber que ele está associado à energia, porém não relaciona os termos de energia apresentados à energia cinética, embora reconheça a energia potencial e afirme que  $\hat{H}$  represente a energia.

*”A função hamiltoniana trata da FC e o operador hamiltoniano trata da FQ...”*

A aluna apresenta uma conceitualização tangencial (e em parte errônea) da superposição de estados, bem como a relação feita com as variáveis dinâmicas incompatíveis.

*”Tanto na superposição de estados como nas variáveis incompatíveis temos duas situações que ocorrem simultaneamente, no entanto só podemos saber acerca de uma delas. Nas variáveis incompatíveis, temos duas grandezas que não podemos obter informações acerca ao mesmo tempo, e na superposição de estados, no momento em que há a interação do indivíduo é decidido qual das duas situações ocorreu, não podemos obter informações das duas situações.”*

Na tarefa 5, a aluna apresenta um mapa conceitual linear com proposições confusas. O conceito de estado parece estar ligado arbitrariamente ao conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis, parecendo ser supérfluo na sua estrutura cognitiva. A evolução temporal é atribuída ao sistema e não ao estado (que ela menciona sofrer evolução). O mapa linear evidencia falta de conexão entre os conceitos. Veja a Figura 6.32.

O conceito de estado parece ser supérfluo para a aluna. Estabelecemos nossa hipótese pela percepção de ela atribuir as características de determinismo e probabilismo à evolução temporal que, de forma mais geral, parece ser mais facilmente assimilável. A aluna não faz a distinção em termos dos estados, isto é, estados clássicos são determinísticos e estados quânticos em sua maioria, probabilísticos.

*”Em MC podemos fazer predições. Por exemplo, podemos montar  $N$  sistemas físicos com as mesmas condições iniciais e obteremos sempre o mesmo valor. Podemos*

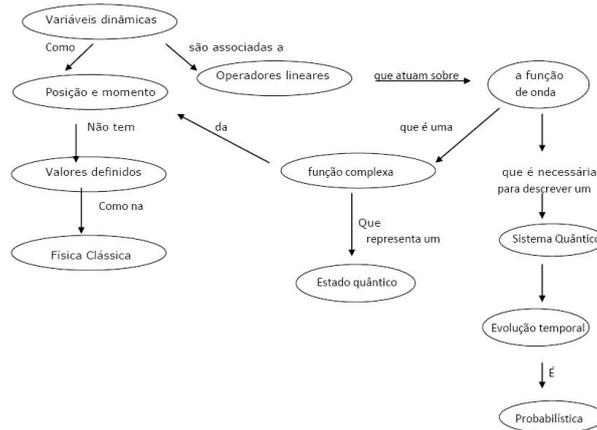


Figura 6.33: Segundo mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Úrsula.

*fazer a predição teórica e a prática irá nos devolver os mesmos valores. Já em MQ não podemos fazer coisas como predições, e mesmo se montarmos  $N$  sistemas físicos com as mesmas condições iniciais não obteremos as mesmas medidas para diversas medições. Neste caso então dizemos que em MC a teoria de evolução temporal é essencialmente determinística e em MQ é probabilística.”*

Úrsula analisa, ademais, os estados dados na questão 3 sob o ponto de vista das variáveis dinâmicas, fato que corrobora nossa hipótese de que para ela estado é um conceito supérfluo. Mais uma evidência desta hipótese deriva da associação do conceito de evolução temporal ao sistema físico na MQ e às variáveis dinâmicas na FC, na resposta à questão 4. Uma das razões possíveis para isto é uma obliteração deste conceito ao de variáveis dinâmicas, o que pode ser visualizado pelos procedimentos por ela adotados na solução da terceira questão.

*“... Equação de Schrödinger: Descreve a evolução temporal de uma partícula com massa não relativista. É de importância central na teoria da MQ, onde representa para as partículas microscópicas um papel análogo à segunda lei de Newton na MC.” (grifo nosso).”*

Na sexta tarefa, a aluna apresenta um mapa linear no qual o conceito de estado está isolado na representação da estrutura cognitiva. Este conceito está associado somente ao de função complexa, o que mostra uma atribuição de relevância matemática a este conceito, ou seja, a função de onda é um instrumento de cálculo. O conceito de evolução temporal surge novamente associado ao sistema físico.

Úrsula nada explicita acerca da posição no item a da segunda questão e afirma, também, que conhecemos a trajetória pelas condições iniciais. Isto é corroborado quando afirma ser o momentum conservado ao longo da trajetória, considerando, portanto, o conceito válido para objetos quânticos. A aluna entende, portanto, com uma diminuição do limiar da disponibilidade (a frase “lembrando que para uma partícula livre o momentum se conserva”), que o momentum é constante. A resposta da aluna é semelhante à de Sara (aluna da turma 2), o que corrobora o padrão “cópia e cola” já mencionado em outras situações.

A aluna apresenta uma descrição literal da função de onda (carregando certa arbitrariedade). O estado fica associado à função de onda como no mapa, porém de forma completamente isolada na estrutura cognitiva.

*“... O estado é representado por uma função complexa das posições ou do momentum de cada partícula que compõe o sistema. Essa representação é chamada função de onda.”*

A aluna apresenta diferenciações matematicamente coerentes, porém numa base arbitrária e literal, quando solicitada a discussão sobre as funções das equações de Schrödinger e Heisenberg. O nível de detalhamento destoa do adotado por ela quando responde em uma base substantiva (com suas próprias palavras).

*“Equação de Schrödinger:/ - Descreve a evolução temporal de uma partícula em massa não relativista. É de importância central na teoria da MQ. Numa Representação de Schrödinger, o estado de um sistema evolui com o tempo, onde a evolução para um sistema quântico fechado é provocada por operador unitário chamado de operador da evolução temporal. Isto difere de uma Representação de Heisenberg onde os estados são constantes enquanto os observáveis evoluem com o tempo./ - Equação de Heisenberg:/ - Na física a Representação de Heisenberg, é a formulação da MQ onde os operadores (observáveis) são dependentes do tempo e o estado quântico é independente do tempo. Isto demonstra o contraste com a Representação de Schrödinger na qual os operadores são constantes e o estado quântico se desenvolve no tempo. Estas duas representações apenas se diferem pela mudança na dependência do tempo. Formalmente falando a Representação de Heisenberg é a formulação da mecânica matricial numa base arbitrária, onde o Hamiltoniano não é necessariamente diagonal.”*

A respeito desta aluna, é possível afirmar que muitos dos conceitos foram aprendidos mecanicamente a partir do material de ensino fornecido e de livros didáticos. Isto a fez relacionar o conhecimento a ser aprendido à sua estrutura cognitiva numa base puramente arbitrária e literal, caracterizando, portanto, uma aprendizagem mais próxima ao pólo mecânico. Alguns conceitos, extremamente novos, como o de estado, foram assimilados arbitrariamente à estrutura cognitiva. Este fato está relacionado à pouca modificação da estrutura cognitiva da estudante, por exemplo. O conceito de evolução temporal ancora conceitos de probabilismo/determinismo, bem como está associado aos sistemas físicos em MQ.

### **Mapeamento dos padrões de assimilação de Maria**

Maria, no pré-teste, apresenta um conceito inicial de sistema físico com nível de generalidade muito alto, pois o concebe como “algo” influenciado pelo meio. O conceito de variáveis dinâmicas, por sua vez, apresenta-se como “aquilo” que se modifica, demonstrando assim ter um nível alto de inclusividade.

*“[Sistema físico] É um sistema que é analisado. E este sofre influência do meio que o cerca.”*

*“[Variável dinâmica] É aquilo que se modifica.”*

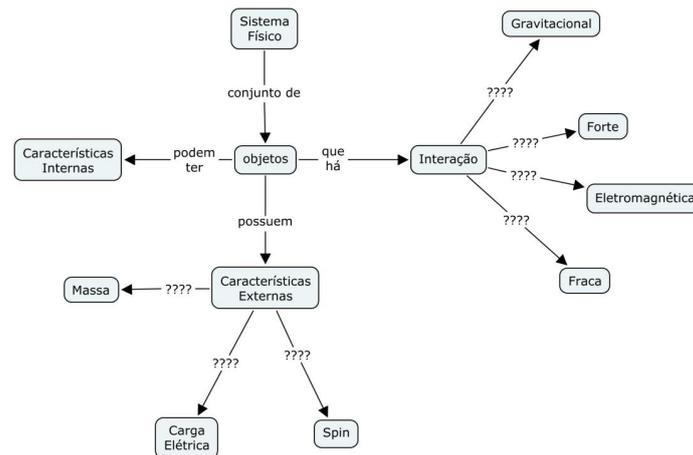


Figura 6.34: Mapa conceitual sobre sistemas físicos apresentado por Maria

O conceito de estado, mais amplo e vago que os outros dois, é expresso como sendo uma configuração (não específica do que) e o conceito de evolução temporal é o mais geral de todos, pois é concebido como sendo o passar do tempo.

*"[Estado de um sistema físico] Repouso, oscilando, acelerado."*

*"[Evolução temporal] É o passar do tempo."*

Em virtude do alto nível de generalidade dos conceitos na sua estrutura cognitiva e do choque de aprendizagem inicial para alguns conceitos, é possível que a aluna tenha algumas dificuldades no processo de aprendizagem.

Na tarefa 1 a aluna introduz em seu mapa as diferenciações feitas sobre os conceitos. Ela introduz atributos que podem denunciar uma falta de estabilidade posteriormente. O conceito de sistema físico mostra-se, entretanto, modificado por ora. Veja a Figura 6.34.

Maria identifica corretamente os objetos relativos a sistemas clássicos, bem como as interações ocorrentes

*"... o sistema Terra-Lua, onde há dois objetos (podendo ser considerados como uma partícula ou esfera) que interagem de acordo com a lei da gravitação universal, levando em consideração a massa de cada um..."*

O exemplo usado em MQ é relativamente diferenciado, a menos do conceito de interação que parece ter atributos desconhecidos.

*"... o sistema próton-nêutron (sendo que cada um possui massa e carga). A interação deve-se à chamada 'interação forte'..."*

A aluna parece também ter realizado superordenação exitosa no que tange aos conceitos de sistema físico e variáveis dinâmicas, porém será discutida adiante a retenção destes conceitos, bem como sua estabilidade. Como exemplos temos

*"Posição, velocidade e energia."*

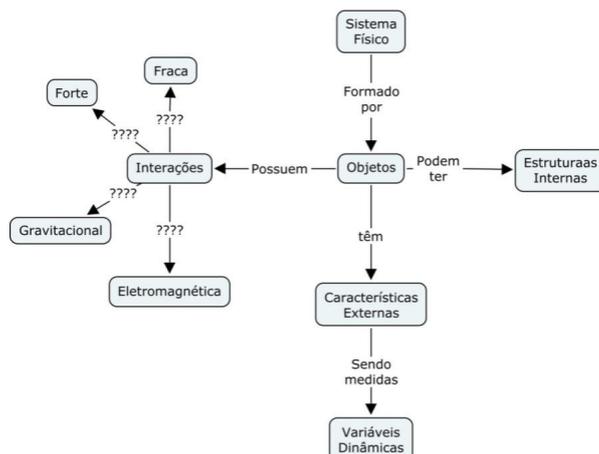


Figura 6.35: Segundo mapa conceitual sobre os conceitos de sistema físico e de variáveis dinâmicas apresentado por Maria

Na tarefa 2 Maria apresenta o mesmo mapa conceitual exposto na primeira tarefa, porém liga ao conceito de características externas, o de variáveis dinâmicas que seriam medições destas características.

A aluna realiza a elaboração do conceito de variáveis dinâmicas através da discriminação entre variáveis dinâmicas compatíveis e incompatíveis. O atributo que as diferencia é a mensurabilidade. Ela apresenta uma mesma falta de diferenciação do conceito de medição, pois o conceito parece ser semelhante ao de determinação. Há também outro atributo relacionado ao de variáveis dinâmicas incompatíveis, que é a descaracterização do sistema no ato da medição sequencial de variáveis dinâmicas incompatíveis, impossibilitando assim a determinação simultânea. É possível, então, que o atributo usado na subsunção dos conceitos supracitados tenha sido o de medição.

*“Há casos em que ao medir alguma variável dinâmica de um sistema físico não haverá alteração deste sistema para a medida das outras variáveis dinâmicas. Para esta situação, as variáveis dinâmicas são chamadas compatíveis. Já no caso oposto, onde a medida de uma variável dinâmica altera o sistema, tem-se a situação descrita por variáveis incompatíveis, como por exemplo, o princípio da incerteza, onde não se pode medir simultaneamente o momentum linear e a posição, já que a medida de uma dessas variáveis altera o sistema.”*

Maria realiza uma subordinação derivativa para o caso da posição. A extensão errônea de que a posição possui componentes incompatíveis está relacionada ao fato de que a medição altera o sistema, porém é uma generalização nem sempre válida (como por exemplo, na determinação sequencial da mesma variável dinâmica).

*“São incompatíveis, uma vez que, por mais que sejam sistemas físicos idênticos, a medida de uma variável modifica todo o sistema.”*

A aluna relaciona o conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis à destruição de informação prévia na medição das mesmas. Na situação específica do experimento de Stern-Gerlach, ela consegue discriminar as situações em que o estado do sistema é modificado (medições sequenciais de variáveis dinâmicas incompatíveis e da mesma variável dinâmica).

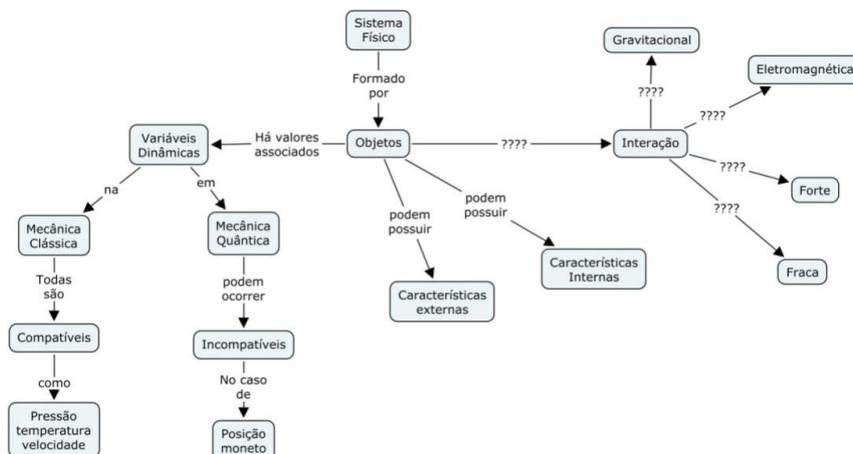


Figura 6.36: Mapa conceitual apresentado por Maria (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

*”Se deixarmos passar apenas um deles pelo segundo, será notado que para aquela direção, não haverá modificação do sistema, assim, este guarda tal informação daquela variável dinâmica. Por outro lado, se o campo magnético estiver na direção  $\hat{x}$ , tem-se o spin nesta direção e o feixe se dividirá em duas partes. Colocando um terceiro eletroímã direcionando o campo magnético em  $\hat{z}$  e bloqueando a passagem de  $s_z$  negativa, o feixe se dividirá novamente, já que ao se medir uma variável haverá destruição das informações referentes a outra variável.”*

Maria consegue esboçar uma especificação do conceito de determinação (que para ela é igual à medição) de variáveis dinâmicas, parecendo demonstrar clareza no argumento de destruição de informação prévia. A aluna, entretanto, nada menciona acerca da ideia de probabilidade, embora descreva corretamente o experimento de Stern-Gerlach.

Maria relaciona ainda o desdobramento do feixe à medição de uma variável dinâmica incompatível a uma previamente medida, através das respostas dadas à questão 6. Ela relaciona cada feixe a um valor de variável dinâmica, o que pode indicar uma estreita relação com a ideia de indeterminação e com a multiplicidade de valores de variáveis dinâmicas.

*”a) Ao passar pelo primeiro eletroímã em  $z$ , continuará igual, 20.000 (-). Quando o campo magnético estiver em  $\hat{x}$ , haverá divisão novamente em dois feixes, com spin positivo  $\frac{\hbar}{2}$  e spin negativo  $-\frac{\hbar}{2}$ . /b) Este feixe será dividido novamente, com spin positivo e negativo.”*

Na tarefa 3, a aluna apresenta praticamente o mesmo mapa conceitual construído na tarefa 2. O conceito de estado está ausente do mapa. Veja a Figura 6.36.

O conceito de estado para ela é, também, uma especificação do conjunto de variáveis dinâmicas em um dado instante. Para Maria os estados quânticos estão associados à probabilidade, porém nenhuma ligação foi estabelecida com o conceito de variável dinâmica, somente com o de probabilidade. O conceito de superposição é entendido como coexistência de duas variáveis dinâmicas.

*”O conceito de estado de um sistema está associado aos valores das variáveis dinâmicas num determinado instante de tempo... para a MQ, podemos considerar como exemplo*

*o experimento de Stern-Gerlach, assim, o estado do sistema será determinado através da função de probabilidade  $|\psi\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$  e também pelas variáveis dinâmicas compatíveis...*

*"É quando ocorre uma superposição de auto-estados e, conseqüentemente de variáveis dinâmicas."*

A aluna entende que o hamiltoniano represente a energia, porém não foi possível estabelecer até o momento se isto foi feito em uma base completamente mecânica, completamente significativa ou incorporando elementos de ambos os perfis.

*"O operador [hamiltoniano] define a energia do sistema."*

Na tarefa 4 a aluna compara a função hamiltoniana ao operador hamiltoniano ressaltando a semelhança de ambos estarem associados à energia. Maria parece não ter assimilado a maioria dos atributos do conceito, pois enxerga características da função hamiltoniana como não pertinentes ao operador hamiltoniano, sendo tal pertinência existente. Consideramos terem ocorrido assimilações incompletas ou talvez rápida obliteração em função do choque da aprendizagem inicial, restando somente o atributo de energia associado aos dois conceitos. Percebe-se, no entanto, um nível relativamente alto de estabilidade para o conceito de energia, indicando ter havido uma estabilização do conceito de variável dinâmica, que assimilou os dois conceitos mencionados.

*"A função hamiltoniana é usada na MC para descrever a energia total de uma partícula, dependendo da posição instantânea e o momentum linear dela;  $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ . Já para a MQ o operador hamiltoniano independe do tempo, podendo ser escrito, de acordo com a equação de Schrödinger:  $H\psi = E\psi$ ."*

A hipótese acima é corroborada quando a aluna analisa a hamiltoniana do sistema de dois corpos. Ela primeiramente usa termos de energia para compreender o sistema, a equação, bem como a interação ocorrente.

*"a) A interação deste sistema é do tipo gravitacional, identificada pelo termo  $\frac{GMm}{|r-R|}$ . / b) Esse sistema pode-se referir a dois corpos, no caso do movimento de um planeta e seu satélite. / c) Os termos (1) e (2) referem-se às energias cinéticas e (3), energia potencial gravitacional."*

Na terceira questão, sob a condição do reconhecimento, Maria lembra que o hamiltoniano (a hamiltoniana) está ligado (a) às interações, dado que as reconhece.

*"O objeto interage com o campo magnético..."*

A idéia de superposição como assimilada desde o significado morfológico da palavra (coexistência, soma) é estável, dada sua manutenção. Nenhuma relação é estabelecida, entretanto, com o conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis, mas ressaltamos a possibilidade de o conceito estar associado ao de probabilidade.

*"Superposição de estados é quando há uma superposição ("soma") de auto-estados. E para cada auto-estado há variáveis dinâmicas associadas."*

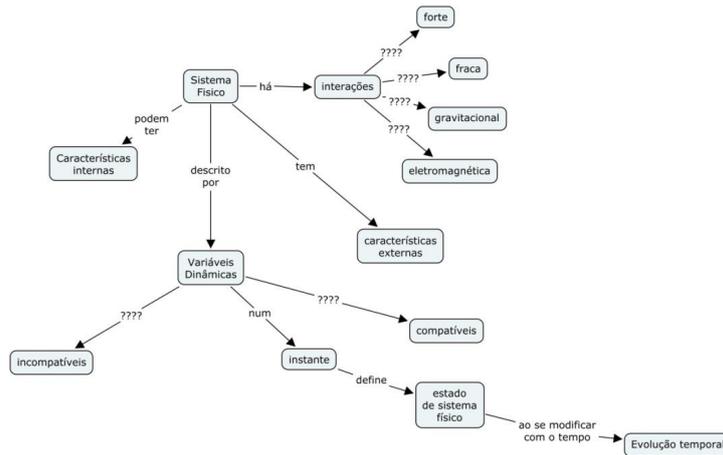


Figura 6.37: Primeiro mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Maria

Na tarefa 5, Maria apresenta um mapa que corrobora algumas das nossas hipóteses, dada a disposição dos conceitos. O primeiro ponto a ressaltar é o conceito de estado como uma diferenciação do conceito de variáveis dinâmicas. Outro aspecto importante é a presença de conceitos indiferenciados talvez devido ao choque de aprendizagem inicial. Veja a Figura 6.37.

O conceito de evolução temporal está associado ao de estado e ao de variáveis dinâmicas, como um processo.

*“Para que o estado do sistema evolua com o tempo, é necessário que haja uma causa, verifica-se isso tanto na MC quanto na MQ...”*

O limiar de disponibilidade para o conceito de interações (recordação) é aumentado e então a aluna reconhece que haja uma causa para a modificação do estado do sistema ao longo do tempo, embora não explicita as interações como sendo as responsáveis pela promoção da evolução temporal. O conceito de estado, por outro lado, é necessariamente probabilístico na MQ sob a perspectiva da aluna, no entanto, sob um entendimento de não determinação do estado, o que é incorreto.

*“... podemos determinar o comportamento do sistema clássico ao saber as condições iniciais, não sendo dessa forma para um quântico que só poderá ser probabilístico, ou seja, apenas com a probabilidade de saber como o sistema pode se comportar.”*

A aluna consegue manipular bem a notação simbólica na questão em que solicitamos a análise do estado do sistema ao longo do tempo. Ela também detalha o papel da evolução temporal nas equações mencionadas na questão 4, porém o faz de forma geral.

*“Para  $|\psi(t)\rangle = \frac{\exp(\frac{i\omega t}{2})}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{\exp(-\frac{i\omega t}{2})}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$  no instante  $t = 0: |\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$  valor do spin de componente x que foi preparado inicialmente. b) Na verdade, não podemos determinar a variável dinâmica  $s_z$ , mas há probabilidade de 50% de  $\frac{\hbar}{2}$  e 50% de  $-\frac{\hbar}{2}$ ./ c)./ d) Para  $t = \frac{2\pi}{\omega}$  /  $|\psi(t = \frac{2\pi}{\omega})\rangle = \frac{\exp(\frac{i\omega 2\pi}{2})}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{\exp(-\frac{i\omega 2\pi}{2})}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$  /  $|\psi(t = \frac{2\pi}{\omega})\rangle = \frac{\exp(i\pi)}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{\exp(-i\pi)}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$  /  $|\psi(t = \frac{2\pi}{\omega})\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$ ”*

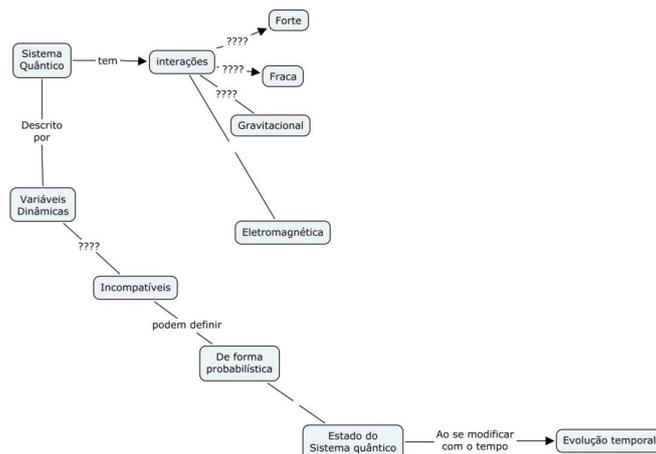


Figura 6.38: Segundo mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Maria

Na tarefa 6 a aluna pouco modifica seu mapa, o que pode refletir uma estabilidade nos conceitos (devido à generalidade). Ela acrescenta um atributo de probabilidade associado às variáveis dinâmicas incompatíveis. Veja a Figura 6.38.

Maria apresenta, sob uma diminuição do limiar da disponibilidade, o uso do conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis corretamente, mostrando estabilidade e disponibilidade do conceito. Para ela, a evolução temporal está vinculada ao conceito de sistema físico, sendo uma possível causa a obliteração do conceito de estado ao de variável dinâmica, visto como uma especificação deste. Como variáveis dinâmicas estão associadas aos sistemas físicos na estrutura cognitiva da aluna, ela atribui a modificação ao próprio sistema e não ao seu estado.

*"O papel dessas equações é **descrever como se dá a evolução temporal dos sistemas** para a MQ, eletromagnetismo e MC..."(grifo nosso).*

A distinção feita entre as equações de Heisenberg e Schrödinger, que não podemos afirmar ter sido realizada sob uma perspectiva significativa, é feita com base na modificação do estado/variáveis dinâmicas. Não temos evidência suficiente para afirmar o uso deliberado da representação simbólica, embora não anulemos esta possibilidade.

*"Para Schrödinger, as variáveis dinâmicas estão fixas ao longo do tempo. Já para Heisenberg as variáveis dinâmicas se alteram no tempo, assim os auto-estados dos operadores também devem variar."*

### Mapeamento dos padrões de assimilação de Eva

Eva não consegue apresentar, no pré-teste, o conceito de sistema físico em palavras, porém menciona exemplos, o que nos impossibilita, por um lado, de afirmar o nível de generalidade do conhecimento prévio (em função da especificidade dos conceitos) e por outro concluir sobre a abrangência do conceito. Sabe-se, entretanto, que apresenta conhecimentos prévios relevantes para a ocorrência de uma possível subordinação.

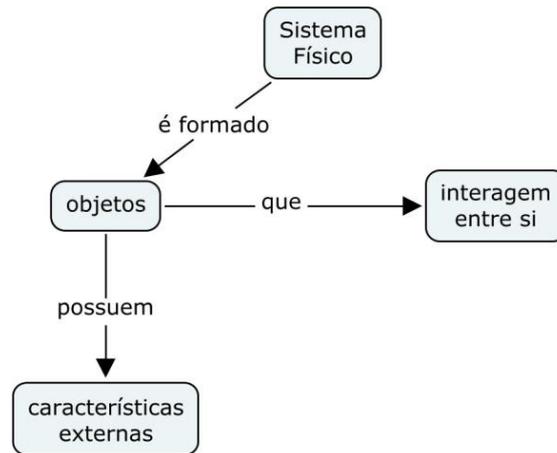


Figura 6.39: Mapa conceitual sobre sistemas físicos apresentado por Eva

*"Alguns exemplos do que eu acho ser um sistema físico... sistema de partículas... sistema massa-mola."*

A aluna afirma não ter idéia do significado do conceito de variáveis dinâmicas, o que nos impede de conjecturar acerca do entendimento do conceito. A conceitualização relativa ao (conceito de) estado é semelhante à realizada para o conceito de sistema físico, ou seja, através de exemplos. Em função de o conceito de estado ser aparentemente menos estável, a assimilação do mesmo em outras instâncias mais específicas, como a MQ, pode ser dificultada.

*"Não tenho idéia."*

*"É a maneira como ele se encontra no momento em que se analisa."*

O conceito de evolução temporal é relativamente geral, pois carrega o atributo de modificação dos sistemas físicos ao longo do tempo. Atribuímos a ele nível de generalidade alto, em função da pouca especificação.

*"É como o sistema se comporta durante certo tempo."*

Na primeira tarefa, Eva apresenta um mapa relativamente simples com uma forma aproximadamente linear que, porém, apresenta os atributos de modo compacto. Veja a Figura 6.39<sup>3</sup>.

A aluna identifica interações, sistemas físicos (caracteriza superficialmente a dinâmica) e objetos. Como exemplo temos

*"... Sistema Terra- Sol: Constituído pelo planeta Terra e pela estrela Sol... Ocorre entre eles interação gravitacional. E a partir dele estudasse movimentos planetários, órbita e etc."*

Para sistemas físicos em MQ, a aluna apresenta exemplos vagos, como é possível observar no exemplo abaixo

<sup>3</sup>Foi questionado à aluna se havia entregado o mapa a outros. A semelhança entre os mapas pode ser coincidência, pois a mesma afirmou não ter compartilhado a tarefa.

*"Núcleo x elestrosfera, átomo x átomo."*

Eva não consegue justificar a ligação da relação de incerteza com as variáveis dinâmicas incompatíveis e subsume os conceitos de variáveis dinâmicas compatíveis e incompatíveis para a determinação de posição, o que pode caracterizar tanto uma diferenciação dos conceitos de posição (momentum), quanto uma estabilização do conceito de variáveis dinâmicas compatíveis.

*"Variáveis dinâmica compatíveis podem ser medidas na mesma medição sem perdas. As variáveis dinâmicas incompatíveis ao serem medidas impossibilitam a determinação de outras v.d.i. Sim, não sei justificar porque [relação com o princípio da incerteza]."*

Eva relaciona a destruição de informação prévia ao fato de as projeções do spin serem mutuamente incompatíveis, o que pode ser uma evidência da aquisição do atributo criterial do conceito de variáveis dinâmicas incompatíveis.

*"Entendo como as componentes do spin sendo variáveis dinâmicas incompatíveis; ao medir uma alteramos todo o sistema impedindo a medição 'simultânea' de outra."*

A aluna concebe que no experimento de Stern-Gerlach os feixes "guardam" informações que são determinadas na passagem do feixe. Cremos não ser possível explicar esta subsunção pela teoria de Ausubel, pois este elemento cognitivo parece mais um modelo mental formado para a assimilação da situação, uma espécie de modelo analógico.

*"Imagino que a questão quer dizer que o primeiro eletroímã está 'captando' em z, o segundo em x e o terceiro em z..."*

A aluna relaciona a divisão do feixe às variáveis dinâmicas incompatíveis, talvez por uma relação com a idéia de destruição de informação prévia. Ela segue um modelo de proporção linear para a intensidade dos feixes no experimento de Stern-Gerlach, tal como fazem Úrsula e André. É possível que haja relação destas intensidades com a probabilidade de encontrar um feixe com um dado valor de determinada projeção do spin, porém não temos evidências suficientes para corroborar tal hipótese.

Na terceira tarefa, a aluna apresenta um mapa no qual o conceito de estado é exposto como uma diferenciação do de variável dinâmica, como sendo um conjunto destas que caracteriza o sistema em um instante de tempo específico. Veja a Figura ??.

Em MQ, especificamente, Eva crê podermos escolher um conjunto de variáveis dinâmicas compatíveis para a determinação do estado.

*"Para mim estado físico de um sistema são as características momentâneas do sistema... em MQ só as variáveis dinâmicas compatíveis não são suficientes, porém busca-se ter as que nos dão uma melhor visualização do sistema."*

A aluna faz algumas colocações sobre o conceito de superposição de estados. Para ela as variáveis dinâmicas incompatíveis têm associados vários estados que não estão relacionados entre si e, desta forma, devem coexistir, ou seja, ser superpostos; logo ela entende superposição de estados como coexistência de variáveis dinâmicas.

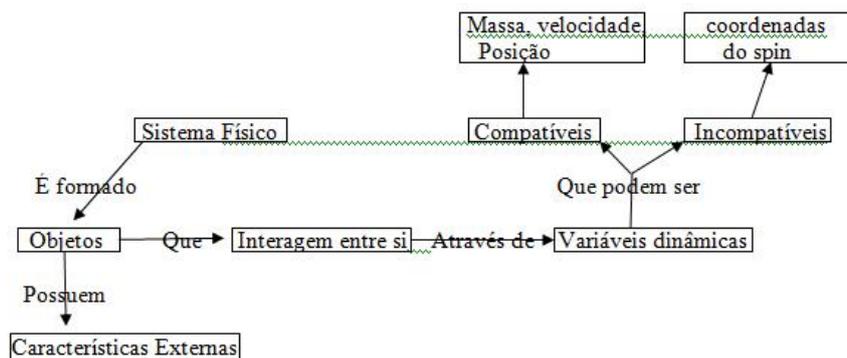


Figura 6.40: Mapa conceitual apresentado por Eva (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

*“Como temos variáveis dinâmicas incompatíveis, podemos ter vários estados de sistema num mesmo instante... por isso existe a superposição de estados, estados diferentes num mesmo sistema em um mesmo instante. Acredito que o auto-estado seja justamente o valor de cada plano das variáveis incompatíveis (uso plano para denominar eixo  $x$ ,  $y$  e  $z$ ), já que cada uma das variáveis guardará um estado em um mesmo instante.”*

Não vamos por ora nos alongar na discussão sobre tal conceito, pois o conhecimento está basicamente na forma operatória (uso de inferências cuja conceitualização reside em teoremas-em-ação). Superposição para ela, porém, assemelha-se à ideia de camadas para estados que coexistem ao mesmo tempo. Parece um subterfúgio para evitar o isolamento do conceito na estrutura cognitiva.

Para Eva, a ideia de auto-estado está associada a valores determinados de uma variável dinâmica: para este caso específico, auto-estados de energia da questão 4. A conceitualização é relativamente inclusiva, talvez por problemas com o uso da linguagem, porém é possível perceber que o conceito de variável dinâmica é fundamental para a realização da subsunção.

*“A variável dinâmica  $H$  é valores de energia diferentes ligados a cada auto estado.”*

Na tarefa 4, percebemos a subsunção do conceito de hamiltoniana em relação ao conceito de variáveis dinâmicas, tanto que a diferenciação entre a função hamiltoniana e o operador hamiltoniano não é feita na multiplicidade de autovalores para o último, mas sim enfatizando que este é utilizado por ser mais simples seu tratamento com variáveis dinâmicas incompatíveis.

*“A função hamiltoniana é usada na MC, justamente por depender de variáveis que podem ser determinadas simultaneamente. O operador hamiltoniano é utilizado em quântica por ser mais fácil seu tratamento com as variáveis incompatíveis.”*

Na questão 2 da mesma tarefa, a aluna reconhece a atração gravitacional e que a hamiltoniana representa a energia para um sistema de dois corpos em coordenadas esféricas. A notação simbólica parece ter sido assimilada ao conceito de energia de forma não-arbitrária e não-literal, dado o raciocínio explicitado.

*"a) Acredito que essa equação seja representativa de interação gravitacional, porque o último termo que se soma é força gravitacional e os dois primeiros termos caracterizam a energia cinética de cada corpo em função do momentum em coordenadas esféricas. Porque chego nesta conclusão, primeiro sei que energia cinética é um meio de  $m v$  quadrado, se  $p$  é igual a  $mv$  quer dizer que  $v$  quadrado é  $p$  quadrado sobre  $m$  quadrado, logo ficamos com 1 sobre  $2m$  e como o momentum depende da distância radial e esta está variando temos os termos dentro do parênteses caracterizando isso./ b) Sistemas de dois corpos (se eu entendi a pergunta)./ c) Respondido na questão 2-a-."*

Percebemos que Eva usou na questão 3 a notação do hamiltoniano associada com a noção de interação para justificar a interação do elétron com o campo magnético.

*"Com um campo magnético. Pois ele está presente no lado direito da equação..."*

O conceito de superposição de estados está relativamente estável, pois traz a ideia de que as variáveis dinâmicas estão superpostas, conforme conjecturado anteriormente. O conceito está em um nível amplo de generalidade. Embora conceitualmente impreciso, o conceito está associado à indeterminação simultânea de variáveis dinâmicas incompatíveis.

*"Variáveis incompatíveis não podem ser determinadas simultaneamente, por isso ao medirmos uma as outras ficam sem ser determinadas. A superposição de estados está associada a isso, enquanto medimos uma as outras estão lá escondidas mas não podem ser determinadas, por isso há a superposição de estados várias variáveis incompatíveis em estados diferentes num mesmo momento..."*

A aluna não apresenta um mapa conceitual para a tarefa 5, o que nos impossibilita de analisar de uma perspectiva geral o nível de organização cognitiva, bem como possíveis relações entre os conceitos.

A aluna considera a evolução temporal dependente das condições iniciais, estando estas associadas à determinação de variáveis dinâmicas em um instante de tempo inicial e na MQ, em particular, ligadas a probabilidades, porém (de modo parcialmente errôneo) afirmando ser o elétron não localizável, provavelmente pensando em auto-estados de energia.

*"... em MC a evolução temporal depende das condições iniciais a que se submete o problema e por isso temos uma noção do que acontecerá, por exemplo: poderei saber onde um carro vai estar, depois de determinado tempo, sabendo sua velocidade e posição inicial e sua aceleração. Em MQ há uma "pequena" diferença, o sistema também depende das condições iniciais do problema, porém, nunca saberemos com exatidão onde o elétron se encontrará, teremos uma região de probabilidade, mas não um ponto certinho..."*

Eva apela à intuição e atribui a evolução temporal a uma causa muito geral e ampla como podemos ver a seguir:

*"... as duas são causais, pois para que haja... evolução temporal, que são as mudanças que o sistemas sofre com o passar do tempo, o sistema tem que estar fazendo algo... uma situação utópica onde não há evolução temporal em MQ seria um elétron*

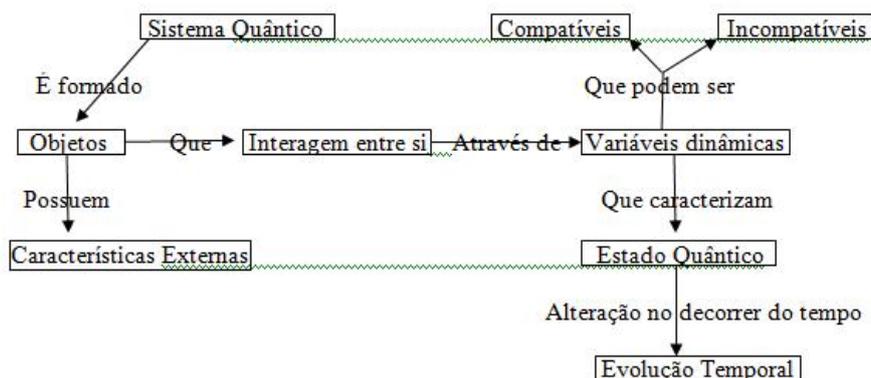


Figura 6.41: Mapa conceitual incluindo o conceito de evolução temporal apresentado por Eva

*parado no vácuo sem nenhuma interação acontecendo, sem nada acontecendo... Ou em MC um carro parado, aí acredito que a evolução temporal seria sempre igual e desnecessária, porque não há mudanças de estado do sistema ele não está fazendo nada... não há nada "causando" mudança de estado, portanto não há evolução temporal..."*

Eva considera, não sabemos se conscientemente, a evolução temporal associada aos sistemas físicos (o sistema muda), supondo implicitamente de modo incorreto que um elétron parado apresenta posição e momentum simultaneamente conhecidos. Eva relaciona de forma muito indireta a evolução temporal às interações (associadas ao hamiltoniano). Outro ponto a ser ressaltado é que ela relaciona a evolução temporal em alguns momentos ao estado e em outros, ao sistema, o que pode ser indicativo de instabilidade neste sentido.

Eva distingue as equações da MQ Não Relativística e da FC de forma a enfatizar as probabilidades na primeira e o determinismo na segunda. Ela apresenta, no entanto, um caráter integrador relacionado ao conceito de evolução temporal.

*"[Equação de] Schrödinger: calcula a evolução temporal do sistema levando em consideração as variáveis fixas, mas dá valores probabilísticos. Serve para MQ..."*

Na sexta tarefa a aluna apresenta um mapa denso, no qual atribui a evolução temporal ao estado do sistema e não ao sistema em si. Um atributo do mapa nos causou estranhamento, a saber, o de objetos interagirem através de variáveis dinâmicas. Veja a Figura 6.41.

A aluna associa a determinação do momentum a uma região espacial de probabilidade, fato por ela não justificado. Eva afirma que as medições de momentum levarão ao mesmo valor (constante), porém cremos que isto esteja associado à diminuição do limiar de disponibilidade.

*"a) Não sei como responder essa. Mas acho que terei uma região de probabilidade de onde a partícula pode estar./ b) "*

Por último, Eva parece associar arbitrariamente a equação de Schrödinger à evolução temporal do estado e a de Heisenberg a uma variação das variáveis dinâmicas e auto-estados dos operadores relativos às variáveis dinâmicas.

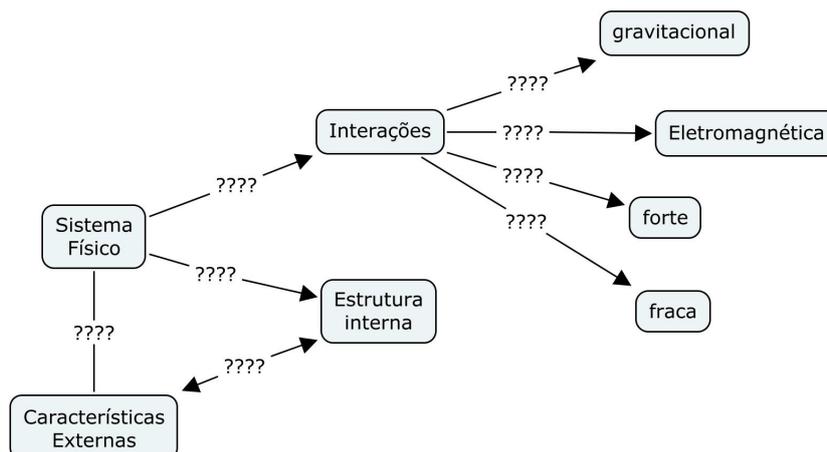


Figura 6.42: Mapa conceitual sobre sistemas físicos apresentado por Judith

*“Na formulação de Heisenberg o estado do sistema permanece fixo ao longo do tempo, ou seja, as variáveis e auto estados variam uniformemente para manter o estado fixo. Na formulação de Schrödinger o estado de um sistema ao longo do tempo é dado uma superposição de auto-estados...”*

### Mapeamento dos padrões de assimilação de Judith

No pré-teste, Judith apresenta um conceito de sistema físico em um alto grau de generalidade, como algo isolado onde são definidas as propriedades físicas. O conceito de variável dinâmica não é definido por ela, logo nada podemos afirmar sobre seu nível de generalidade, senão que é indisponível na sua estrutura cognitiva.

*“[Sistema físico] É um sistema isolado no qual são observadas ou definidas as propriedades físicas.”*

O conceito de estado está associado, através do atributo características físicas, ao de sistema físico. O conceito, todavia, é muito genérico e abstrato. O conceito de evolução temporal, por outro lado, tem a si associado um nível de generalidade bem menor, pois está ligado a mudanças relacionadas à passagem do tempo, embora esteja relativamente isolado dos outros conceitos.

*“[Estado de um sistema físico] É a maneira como ele se encontra no momento em que se analisa.”*

*“[Evolução temporal] Em um determinado instante o sistema apresenta características que definem seu estado.”*

O amplo nível de generalidade dos conceitos pode dificultar a assimilação, porém não a torna impossível, a nosso ver.

Na tarefa 1, Judith constrói um mapa conceitual na forma de fluxograma (pois não acrescenta conectores). Ela parece ter inicialmente realizado a superordenação do conceito de sistema físico e esta modificou o conceito que agora possui maior nível de especificidade na determinação dos objetos e interações. Veja a Figura 6.42.

No que tange à MQ, um dos exemplos, o do átomo, mostra a especificação para este campo da Física, o que pode indicar a reconciliação integradora sob o subsunçor

sistema físico. Os exemplos parecem, no entanto, muito gerais, embora ela tenha avançado no nível de especificidade.

*"Exemplo 1: átomo... interação é eletromagnética (supondo este com prótons e elétrons)."*

O conceito de variável dinâmica parece ter sido aprendido através da superordenação das ideias de grandezas físicas específicas que muito provavelmente já estavam na estrutura cognitiva da estudante. É possível que a superordenação tenha gerado a modificação específica dos conceitos de momentum e campo elétrico, por exemplo, pela introdução do atributo de modificação ao longo do tempo (evolução temporal).

*"Posição e velocidade, campo elétrico e magnético, pressão e temperatura."*

*"Campo elétrico e magnético do Sol."*

Na tarefa 2 notamos uma diferenciação do conceito de variável dinâmica. O conceito anteriormente não explicitado, ganha forma através da aprendizagem representacional e a palavra conceito ganha atributos relativos às grandezas físicas conhecidas por Judith. O atributo de evolução temporal é também levado em conta, estando associado às interações.

Para o atributo de medição simultânea, o conceito de variáveis dinâmicas é, então, elaborado. Judith relaciona este aspecto ao princípio da incerteza e à possibilidade de se determinar com precisão arbitrária somente uma de duas variáveis dinâmicas incompatíveis.

A aluna consegue, ainda, classificar variáveis incompatíveis com base na ideia de determinação simultânea. Ela desenvolve um argumento no qual relaciona esta ideia com a possibilidade de determinação de posição. Judith estabelece, também, uma relação entre a existência das variáveis dinâmicas incompatíveis e a destruição de informação prévia numa medição sequencial deste tipo de variável.

*"As variáveis compatíveis são aquelas que podemos medir ao mesmo tempo sem que ocorra mudanças no sistema, já as variáveis incompatíveis não podem ser medidas ao mesmo tempo, pois quando realizamos a medição o sistema se altera e não conseguimos mais determinar a outra variável. O princípio da incerteza diz que quando temos precisão máxima de uma variável temos imprecisão máxima da outra, com isso concluo que são variáveis incompatíveis na MQ."*

A estudante não identifica as intensidades dos feixes no problema proposto sobre o experimento de Stern-Gerlach, porém associa as ideias de variáveis dinâmicas incompatíveis, destruição de informação prévia e impossibilidade de determinação simultânea, à divisão do feixe.

*"Ao perder a informação a respeito das duas estas variáveis se mostram incompatíveis."*

Judith parece, até o momento da realização da tarefa, ter subsumido em um nível maior de generalidade, porém é visível a progressão no processo de aprendizagem.

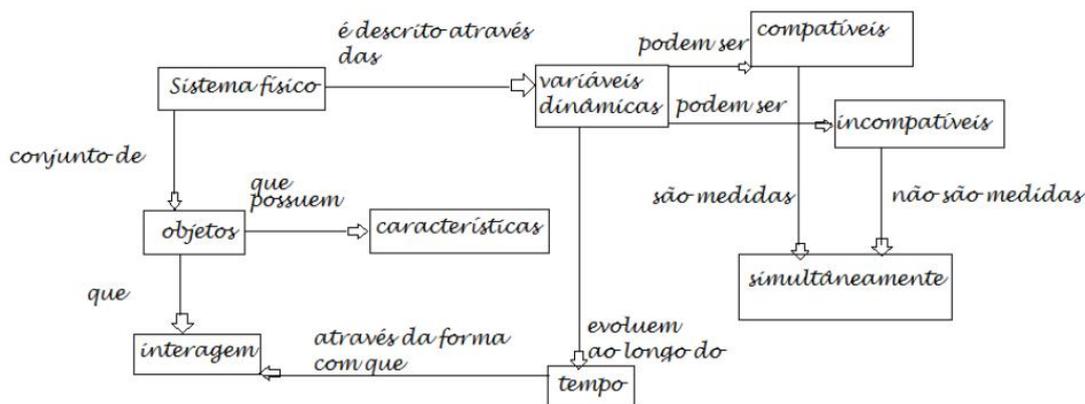


Figura 6.43: Mapa conceitual apresentado por Judith (livre-arbítrio na escolha de conceitos)

Na tarefa 3 a aluna apresenta um mapa construído de forma a estabelecer proposições explícitas, o que antes não era feito e possivelmente este fato esteja associado a um domínio da ferramenta. A aluna apresenta boas relações que demonstram maior estabilidade dos conceitos. Veja a Figura 6.43.

Para Judith, o conceito de estado é uma diferenciação do de variáveis dinâmicas relevantes ao problema. Ela acrescenta que a determinação do estado em MQ incorpora não somente variáveis dinâmicas, mas também as probabilidades de obtenção de distintos valores para a mesma variável dinâmica. Isto evidencia ter havido assimilação do conceito de probabilidade a partir do conhecimento de as variáveis apresentarem vários valores possíveis, o que pode ter sido facilitado pela apresentação da situação do experimento de Stern-Gerlach.

Judith associa a ideia de superposição à coexistência de auto-estados. Como os auto-estados, para ela, são estados cujos valores de variáveis dinâmicas são definidos, a superposição fica, então, associada à indeterminação. Os conceitos de superposição de estados e de auto-estado estão, portanto, associados aos de variáveis dinâmicas.

*"O estado inicial de um sistema é a combinação linear de dois auto-estados. O significado físico indica que é possível encontrar o sistema em um estado em que ocorra a superposição de dois auto-estados diferentes..."*

A aluna realiza a subordinação derivativa para o entendimento do caso particular de medição de energia. Ela entende que numa medição podemos obter vários valores para uma variável dinâmica, o que corrobora a ideia de o experimento de Stern-Gerlach promover a facilitação da aprendizagem de conceitos em MQ. Para ela  $E'$  e  $|E'\rangle$  são: valor obtido e estado que se refere a este valor, respectivamente. Pode ter havido aprendizagem combinatória para aquisição do conceito.

*" $\hat{H}$  é a variável dinâmica que queremos medir,  $E'$  é um dos valores obtidos no processo de medição e o auto-estado de  $H$  é o estado relativo a este valor."*

Na tarefa 4, a aluna parece ter assimilado o atributo energia como comum aos conceitos de função hamiltoniana e operador hamiltoniano. Judith também associa de forma aparentemente arbitrária um à FQ e o outro à FC. Ela informa sobre as interações.

*”A função hamiltoniana e o operador hamiltoniano estão ambos normalmente ligados a energia, mas o primeiro é da MC e o segundo é da MQ...”*

A estudante identifica os elementos da hamiltoniana através da associação dos termos a elementos com dimensão de energia. Fica claro que para ela a energia é uma variável dinâmica, logo a hamiltoniana é assimilada desde este conceito. Ela também reconhece o fato de existirem termos descritivos das interações nos sistemas físicos, presentes na hamiltoniana, embora não expresse isso espontaneamente (somente sob a diminuição do limiar da disponibilidade – item a da segunda questão).

*”a) Interação gravitacional./ b) Duas esferas massivas quaisquer que se deslocam ao longo do tempo./ c) Através da equação podemos perceber que os dois primeiros termos são relacionados a energia cinética e o terceiro e último a energia potencial.”*

A aluna relaciona a superposição de estados com a existência de variáveis dinâmicas incompatíveis de uma forma tangencial e quase arbitrária, o que pode levar a uma rápida obliteração desta relação.

*”Devido as variáveis dinâmicas incompatíveis para encontrar a solução de um sistema devemos utilizar a superposição de estados.”*

Na quinta tarefa a aluna diferencia o caráter determinístico dos estados em MC e o probabilismo associado aos estados quânticos. Tal informação é subsumida a partir do conhecimento prévio de MC (determinismo) da possibilidade de determinação simultânea de todas as variáveis dinâmicas associadas ao sistema. Ela justifica o caráter causal distinguindo a situação clássica da quântica em função das características de probabilismo e determinismo. O conceito de evolução temporal mostra-se, portanto, associado de forma não-arbitrária e não-literal ao conceito de estado e variáveis dinâmicas.

*”... na MQ, a equação de Schrödinger descreve o estado de um sistema físico. A evolução temporal é dita causal porque, no caso da MC é possível prever, através de suas leis, o resultado de medição de variáveis dinâmicas desde que tenham sido determinadas condições iniciais no sistema. Na MQ o mesmo acontece considerando algumas informações iniciais do sistema, porém, neste caso, deve-se levar em conta o caráter probabilístico, pois na MQ existem variáveis dinâmicas incompatíveis.”*

Analisaremos a questão 3 mais profundamente desde a análise do conhecimento na forma operatória, porém observamos que os conceitos de variáveis dinâmicas e de auto-estados parecem estar relacionados por dois atributos: multiplicidade de valores e determinação das variáveis dinâmicas pelos auto-estados, que são mutuamente excludentes.

Judith responde de forma superficial sobre o papel das equações fundamentais da FC e da MQ Não Relativística. O limiar de disponibilidade, supostamente aumentado pela questão, parece ter influenciado na disponibilidade (retenção) das idéias mais específicas na estrutura cognitiva.

*”Descrever a evolução temporal de um sistema físico.”*

Na tarefa 6 a aluna afirma não estar definida a posição do objeto quântico, pois seu momentum está definido. Ela não justifica tal argumento pelo fato de serem variáveis dinâmicas incompatíveis. A aluna afirma não ser possível associar uma trajetória ao sistema, deixando subentendida a dependência desta à determinação simultânea de posição e momentum.

*Pode-se afirmar que o momentum está definido, mas a posição não. Na MC com as mesmas informações é possível determinar a trajetória enquanto na MQ não...*

Sob a diminuição do limiar da disponibilidade a aluna entende que o momentum se conserve, dada a ausência de interações. Ela relaciona, também, a função de onda à probabilidade, mas não diretamente ao estado, senão associa o conceito aos de densidade de probabilidade e amplitude de probabilidade sem diferenciá-los.

*"... sabemos que o momentum se conserva."*

*"... A função de onda informa a densidade de probabilidade de encontrar um objeto e o estado também informa sobre a amplitude de probabilidade de uma variável dinâmica assumir um certo valor."*

Judith relaciona também a função de onda à densidade de probabilidade e não diretamente ao estado, ao qual relaciona a amplitude de probabilidade.

A aluna ressalta ainda o probabilismo da MQ e apresenta a diferenciação entre as equações de Schrödinger e Heisenberg corretamente (não eliminamos a probabilidade de isto ter sido feito a partir da representação simbólica).

*"Na equação de Schrödinger os estados evoluem ao longo do tempo enquanto as variáveis dinâmicas se mantêm fixas. Já na equação de Heisenberg os operadores que representam as variáveis dinâmicas evoluem enquanto o estado se mantêm fixo..."*

### 6.3 Análise do conhecimento na forma operatória

Nesta seção discutiremos como ocorre o domínio do campo conceitual da MQ na forma operatória do conhecimento. É relevante mencionar que estamos investigando a parte conceitual dos esquemas de assimilação em particular. Para isso é importante estudar operações gerais de pensamento, tais como regras de controle de informação, inferências e metas que estão, em geral, implícitas no processo de domínio das situações.

Vale ressaltar que os invariantes foram extraídos através desta investigação e que são coerentes com alguns aspectos do conhecimento predicativo, influenciando também no domínio deste último. Deve-se destacar, adicionalmente, que dentre os invariantes operatórios aqui levantados, alguns são explícitos, outros implícitos e alguns até, talvez, inconscientes. Saliente-se, também, que muitos deles são possibilidades a serem corroboradas em investigações mais específicas e, portanto, certos conhecimentos-em-ação aqui destacados possuem um caráter talvez provisório.

Considere-se, ainda, o fato de teoremas-em-ação<sup>4</sup> serem compostos de conceitos-em-ação. Ressaltamos aqui somente os conceitos-em-ação externos aos considerados

<sup>4</sup>Cabe reiterar que o significado de teorema-em-ação usado nesta pesquisa é o proposto por Vergnaud, qual seja, o de proposições que o sujeito acredita serem verdadeiras sobre a realidade, ainda que não o sejam do ponto de vista do conhecimento científico.

no campo conceitual da MQ (isto é, aqueles usuais nas situações associadas a este conhecimento específico), como velocidade, por exemplo. Consideramos serem os teoremas-em-ação propostos, compostos de conceitos-em-ação, por isso a ênfase sobre os teoremas.

### 6.3.1 Turma 1

#### Possíveis invariantes operatórios usados por Bartolomeu

Na tarefa 2 verificamos dois possíveis teoremas a partir da tentativa de reconstituição das operações de pensamento realizadas pelo estudante no domínio de algumas situações específicas, sem os quais seria impossível, de certa forma, entender a solução das situações abordadas por Bartolomeu. Enumeramos estes teoremas abaixo:

1. "Em medições sequenciais das variáveis  $s_z$  e  $s_x$ , sempre há a quebra do feixe no aparato de Stern-Gerlach"
2. "O estado carrega informações da intensidade relativa do feixe"

O teorema 2, em especial, é fortemente justificado pela caracterização do estado por parte do estudante através da intensidade relativa do feixe (o valor de 0,8). Este teorema-em-ação parece ter sido modificado através das discussões, devido à análise recursiva do experimento de Stern-Gerlach, transformando-se em um teorema mais amplo. Como exemplo, usaremos a parte de uma das respostas que nos levou a esta conclusão.

*"a) Como mudamos da direção  $z$  para a  $x$ , ao passar pelo segundo eletroímã, e sendo o número de átomos igual a 20.000 (-), ou seja, de menor intensidade, ocorrerá uma nova separação em  $spin +$  e  $spin -$ , com probabilidade de 50% para cada. Em outras palavras, é provável que 10.000 átomos de  $spin +$  passarão na direção  $s_x +$  e 10.000 átomos de  $spin -$  passarão na direção  $s_x -$ . b) Desta vez, ao passar pelo terceiro eletroímã, em uma direção  $z$ , teremos a probabilidade de encontrar 5.000 átomos de prata com  $spin +$  na direção  $s_z +$  e 5.000 átomos de prata com  $spin -$  na direção  $s_z -$ . c)  $|\psi\rangle = 0,8|s_z, +\rangle + 0|s_z, -\rangle$ "*

Na tarefa 3, conseguimos mapear um teorema que possivelmente é usado inconscientemente por Bartolomeu. Este teorema-em-ação envolve como conceitos-em-ação, os de variável dinâmica, superposição de estados, medição e probabilidade e foi por nós intitulado teorema 3, enunciado como:

3. "Se temos  $|\psi\rangle = |a'\rangle$ , onde  $\hat{A}|a'\rangle = a'|a'\rangle$ , em uma medição da variável dinâmica  $A$ , não há alteração do estado do sistema, porém se o sistema se encontra em uma superposição de estados do tipo  $|\psi\rangle = c_{a'}|a'\rangle + c_{a''}|a''\rangle$ , existe uma probabilidade associada à obtenção dos valores  $a'$  e  $a''$ , sendo o estado modificado pela medição".

Verificamos na tarefa 5 que o aluno usa o teorema acima no domínio das situações-problema 3a, 3b e 3d, o que é uma evidência de que ele carregue de fato este teorema-em-ação. Como exemplo do teorema 3, enumeramos os itens da questão 3 da tarefa 5.

"a) No instante inicial, como o sistema está preparado em  $s_x$  e este possui spin "positivo" ( $\frac{\hbar}{2}$ ), obteremos spin "positivo" para o átomo de prata. b) Como o sistema não está preparado em  $s_z$ , mas sim em  $s_x$ , obteremos uma probabilidade de 50% de encontrar o átomo de prata com spin "positivo" e 50% de encontrar o átomo de prata com spin "negativo". c) Neste caso ... o sistema já está preparado em  $s_y$  com valor "positivo" para o spin ( $\frac{\hbar}{2}$ ), com uma medição realizada em um instante inicial ( $t = 0$ ) obteremos o valor "positivo" para o spin..."

Ainda na mesma tarefa ele parece apresentar um teorema associado ao estado quântico, a saber,

4. "As configurações dos sistemas quânticos são conhecidas através de probabilidades".

Percebe-se, portanto, o uso do conceito de probabilidades como um conceito-em-ação no contexto específico da MQ. Tal teorema é usado também no domínio do problema 2c da sexta tarefa.

### Possíveis invariantes operatórios usados por Adriele

Na tarefa 3, inferimos um teorema, possivelmente usado por ela, também, no domínio de algumas situações, como o problema 4 da tarefa 4. O teorema é enunciado como

1. "A superposição de estados é a coexistência de valores de variáveis dinâmicas sobre as quais podemos obter conhecimento"

*"Uma superposição de estados é a representação de um conjunto de variáveis compatíveis que me permitam caracterizar um sistema físico, inclusive probabilisticamente." (grifo nosso)*

*"Para que possamos então, saber as reais condições do sistema determinamos um estado com probabilidades de medidas para essas variáveis incompatíveis. Essa "soma" de estados é o que chamamos superposição de estados." (grifo nosso)*

Destes dois exemplos inferimos que a estudante imagine que a superposição de estados esteja associada à existência de conjuntos de estados relativos a diferentes variáveis, que são somados para que se conheça a real condição do sistema.

A partir das respostas dadas à tarefa 5, foi possível inferir mais um possível teorema usado por Adriele no domínio de situações

2. "Variáveis dinâmicas incompatíveis não podem ser medidas simultaneamente. Só é possível, portanto, a obtenção de informação acerca de uma delas."

*"No instante inicial, tem-se 50% de probabilidade para encontrar  $-\frac{\hbar}{2}$  e 50% de chance de se encontrar  $\frac{\hbar}{2}$ . b) Nada, ainda".*

### Possíveis invariantes operatórios usados por Moisés

Na situação que envolve o experimento de Stern-Gerlach na tarefa 2 enunciámos o teorema 1

1. "No experimento de Stern-Gerlach, a **medição sequencial** de várias projeções do spin causa um desdobramento no feixe"

O teorema 1 está associado, portanto, à impossibilidade de determinação de duas variáveis dinâmicas incompatíveis; o conceito de *medição sequencial* foi posto em negrito por ser caracterizado como um conceito-em-ação. É possível que o aluno formule também outros teoremas relativos a esta situação. Na situação-problema 6 da tarefa 2 o aluno apresenta o seguinte raciocínio:

"a) Espera-se encontrar 10.000 átomos (+) e 10.000 (-) na direção x. b) Espera-se encontrar o feixe com 50% de probabilidade da medida estar com spin  $s_z$  (+) e 50% com spin  $s_z$  (-).  $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle \dots$ "

O denominado teorema 2, usado para responder duas questões nesta tarefa pode ser expresso como:

2. "O estado nos informa a intensidade de cada componente do feixe, sendo esta proporcional à probabilidade de encontrar o sistema com um valor de determinada projeção de spin."

"b)...  $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$ . c)  $|\alpha\rangle = 0,8|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle$ ."

Percebe-se, então, que a probabilidade é o módulo quadrado da amplitude expressa pelo aluno. As operações realizadas resultam na própria intensidade relativa dos feixes iniciais.

Percebemos o aparente uso de dois teoremas para solucionar os problemas da tarefa 3, enunciados como:

3. "A probabilidade está associada à indefinição expressa pela superposição de estados"
4. "Em Mecânica Quântica, as medições podem alterar o estado do sistema"

Grifamos algumas passagens do aluno e apresentamo-nas abaixo:

"Os auto-estados de  $s_x$  são escritos como superposição linear de  $s_z$ . A probabilidade de encontrar  $s_z = \frac{\hbar}{2}$  numa medição de  $s_z$  é de 50%..."

"a) Obteremos o valor  $\frac{\hbar}{2}$ , uma vez que o sistema já está definido em  $s_x$ ./ b) **Após a medição na direção z, teremos  $s_z$  definido:  $\pm\frac{\hbar}{2}$ . Obteremos:  $|s_x = \frac{\hbar}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$  e  $|s_x = -\frac{\hbar}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|s_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle$ ...**"

Percebemos a noção da medição alterando o estado do sistema na segunda resposta, bem como a associação à probabilidade, feita a partir da superposição de estados. É possível que nos problemas que tratam de probabilidade, o aluno use a superposição de estados implicitamente, devido a esta associação ser desenvolvida, em parte, durante a intervenção. O teorema 3 é também usado na solução da situação-problema 2a da sexta tarefa e para explicar tanto as quebras dos feixes no experimento de Stern-Gerlach quanto o princípio da incerteza.

Um último teorema, apresentado na tarefa 5, está associado à evolução temporal

5. "É possível conhecer o estado do sistema ao longo do tempo, a despeito das probabilidades. Este comportamento do estado é regido pela equação de Schrödinger"

### Possíveis invariantes operatórios usados por Ana

Na tarefa 3, conjecturamos que Ana tenha se valido de um teorema que associa uma probabilidade à medida de variáveis dinâmicas em MQ. O teorema é enunciado como:

1. "Existe uma probabilidade associada à medição das variáveis dinâmicas"

Contudo, como fica claro na citação, Ana não compreende o que significa a preparação de um estado.

- "a)... A probabilidade de obtermos numa medição de  $s_z$ , o valor  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$  é de 100%.  
b) A probabilidade de obtermos um valor  $s_x = \frac{\hbar}{2}$  em uma medição de  $s_x$  é de 50%..."

Este teorema é também utilizado na tarefa 5:

- "a)... A probabilidade de encontrar um valor de  $s_x$  é nula. b) Obteremos a probabilidade de 100% de encontrar um valor de  $s_z$ ... A probabilidade de encontrar  $s_y$  negativo é de 50%"

Outro teorema-em-ação possível de ser enumerado, registre-se que é um teorema falso, estabelece que

2. "Se o estado do sistema está escrito como superposição de auto-estados de uma variável dinâmica, esta variável dinâmica tem valor definido".

Afirmamos isto, pois a aluna usa este teorema na tarefa 3 ao resolver a questão 5, conforme visto abaixo:

"... A variável dinâmica que possui um valor definido é  $s_z$  ." [quando na verdade é a projeção  $x$  de spin].

- "a)... Obteremos a probabilidade de 100% de encontrar um valor de  $s_z$  [quando na verdade é 50%, neste caso]... b) A probabilidade de encontrar  $s_y$  negativo é de 50% [quando é 0%, neste caso]"

Na tarefa 5, conjecturamos sobre o uso, por Ana, de um teorema-em-ação associado à evolução temporal, afirmando que:

3. "A Física é preditiva. Em MQ podemos prever probabilidades"

Este teorema está coerente com a visão da preditividade adotada por Carvalho Neto et al. (2009) e ainda presente na resolução de outras questões.

"Para antever o estado de um sistema posterior ao instante inicial utiliza-se a ideia de amplitudes de probabilidades..."

**Possíveis invariantes operatórios usados por Betânia**

Percebemos o uso de três teoremas-em-ação por Betânia, sendo o primeiro mais evidentemente usado na tarefa 1, o segundo na tarefa 2 e questão 4 da tarefa 3 e o terceiro nas situações envolvendo o aparato de Stern-Gerlach. Notamos, ademais, o uso do conceito de velocidade como um conceito-em-ação na tarefa 2. Enumeramos abaixo os dois possíveis teoremas-em-ação:

1. "variáveis dinâmicas são grandezas físicas."
2. "A medição em MQ altera os sistemas físicos."
3. "No experimento de Stern-Gerlach, a direção do campo determina a direção da divisão do feixe em dois ao se medir as variáveis  $s_x$  e  $s_z$ , sendo tal divisão oriunda de destruição de informação prévia."

Dada a generalidade dos teoremas, vários exemplos podem ser encontrados durante a realização das tarefas.

**Possíveis invariantes operatórios usados por Pedro**

A partir da tarefa 2 e da resolução de algumas questões da tarefa 5 e da tarefa 3, conjecturamos que o aluno apresente uma versão própria do postulado da projeção como teorema-em-ação:

1. "Se temos  $|\psi\rangle = |a'\rangle$ , onde  $\hat{A}|a'\rangle = a'|a'\rangle$ , em uma medição da variável dinâmica  $A$ , não há alteração do estado do sistema, porém se o sistema se encontra em uma superposição de estados do tipo  $|\psi\rangle = c_{a'}|a'\rangle + c_{a''}|a''\rangle$ , existe uma probabilidade associada à obtenção dos valores  $a'$  e  $a''$ , sendo o estado modificado pela medição".

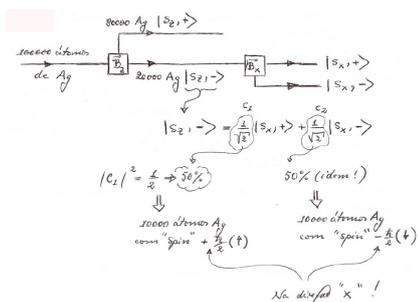


Figura 6.44: Problema 3.6.a

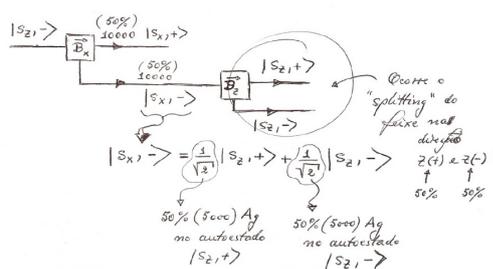


Figura 6.45: Problema 3.6.b

Na tarefa 3 o aluno usa o postulado da projeção para justificar suas idéias acerca da superposição de estados, conforme apresentado na Figura 6.44 e na Figura 6.45. Na tarefa 5 o aluno apresenta um teorema-em-ação confirmado na entrevista

2. "A evolução temporal lança o estado do sistema em uma superposição de auto-estados de um dado operador".

Este teorema não é geral, pois em MQ é possível a existência de estados estacionários; por exemplo, para alguns sistemas conservativos (com análogo clássico) preparados em um auto-estado do hamiltoniano, para os quais o operador hamiltoniano está associado à energia, este operador comuta com o operador de evolução temporal (pois este comuta com o hamiltoniano neste caso). Por exemplo, a situação do átomo de hidrogênio preparado no nível fundamental.

Durante a entrevista (comentário sobre estados estacionários), o estudante pareceu compreender a restrição do seu teorema-em-ação. Apresentamos uma citação da questão 2 da tarefa 5, que pode evidenciar este invariante operatório:

*"... o estado em que se encontrará o sistema num instante de tempo futuro é indeterminado, ou melhor, só é possível conhecer a probabilidade de encontrar o sistema num determinado estado e isto é caracterizado somente com o processo de medida..."*

O aluno apresenta, ainda, mais dois teoremas-em-ação:

3. "é possível somente a determinação de probabilidades de obtenção de um dado valor de variável dinâmica para o sistema em um instante futuro"
4. "A superposição de estados expressa indeterminação"

O terceiro teorema é usado na quinta tarefa e está atrelado ao quarto, aparentemente usado em outras ocasiões como nas questões sobre o aparato de Stern-Gerlach.

### 6.3.2 Turma 2

#### Possíveis invariantes operatórios usados por Samuel

Na tarefa 2, foi possível evidenciar um teorema-em-ação usado posteriormente por Samuel nas situações envolvendo o aparato de Stern-Gerlach:

1. "No experimento de Stern-Gerlach, toda vez que medimos variáveis dinâmicas incompatíveis, ocorre uma divisão do feixe"

Este possível teorema-em-ação já foi observado em outros estudantes e fica evidente na questão 6 da tarefa 2:

*"a) 10000 positivo e 10000 negativo na direção x. b) 5000 positivos e 5000 negativos na direção z..."*

Na análise da tarefa 3 (a partir, principalmente, das questões 4 e 5), inferimos sobre o uso de um possível teorema-em-ação no domínio das situações apresentadas. Tal teorema-em-ação pode ser enunciado como:

2. "Sistemas quânticos são aleatórios. A medição lança o sistema em um dos auto-estados aleatórios"

Alertamos que este teorema pode ser um obstáculo na aprendizagem do conceito de evolução temporal em MQ como associado à preditividade (a consideração da aleatoriedade para um sistema quântico), caso considerado de maneira errônea. Em função de o aluno não ter resolvido as tarefas 5 e 6 não pudemos inferir este aspecto.

### Possíveis invariantes operatórios usados por Silas

Silas, no confronto com as situações da tarefa 1, parece fazer o uso de um teorema-em-ação enunciado como:

#### 1. "Sistemas físicos são fenômenos"

Adiantamos ser falso este teorema, pois fenômenos são acontecimentos e regularidades ocorrentes em sistemas físicos, logo não podem ser identificados com os últimos. O aluno usa tal teorema em quase todas as situações nas quais são requeridos exemplos de sistemas físicos, inclusive em MQ, ao mencionar o tunelamento e o efeito fotoelétrico:

*"Uma colisão de duas bolinhas. Nesta colisão, existe estrutura interna, mas não é significativa para o nosso interesse de estudo, que é a colisão..."*

*"... o tunelamento quântico (probabilidade)."*

Na tarefa 2, conjecturamos a construção de um teorema-em-ação, expresso como:

#### 2. "Na medição sequencial das projeções $x$ e $z$ do spin, temos a quebra do feixe em dois".

Este teorema tem um potencial de explicitação espontânea baixo, ou seja, é preciso apresentar, com a mediação do professor, várias situações a este estudante para haver explicitação do teorema.

*"a)... metade com spin + e metade com spin -. Spin na direção do eixo  $x$ . b) spin na direção do eixo  $z$ , com metade com  $s = \frac{1}{2}$  e metade com  $s = -\frac{1}{2}$ ..."*

*"... A probabilidade de obtermos  $s_z = \frac{\hbar}{2}$  é de 50%..."*

Na mesma tarefa, foi também possível mapear um teorema-em-ação (errôneo, no caso) nas operações de pensamento realizadas pelo estudante no domínio de algumas das situações

#### 3. "O estado fornece a intensidade dos feixes resultantes da passagem pelo eletroímã no aparato de Stern-Gerlach"

Tal possível teorema-em-ação é justificado pela exposição das frações relativas de átomos em cada feixe na expressão do estado, realizada pelo aluno.

*"b)... spin na direção do eixo  $z$ , com metade com  $s = \frac{1}{2}$  e metade com  $s = -\frac{1}{2}$ . Representação:  $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|+\rangle + \frac{1}{2}|+\rangle$ . c)  $|\psi\rangle = \frac{1}{5}|+\rangle + \frac{4}{5}|+\rangle$ ."*

Na tarefa 3, cremos ser possível a utilização de um teorema-em-ação para o domínio de algumas situações.

#### 4. "Quando medimos, obtemos um dos valores da variável dinâmica medida. Auto-estados de um mesmo operador associado a uma variável dinâmica são mutuamente excludentes"

Logicamente o estudante não formula seu teorema usando esta linguagem e o conceito de excludência é um conceito-em-ação implícito e talvez inconsciente, porém imprescindível para a conceitualização. Este teorema é também usado para solucionar os itens 3a e 3b da tarefa 5.

*"a) . b) metade da probabilidade obteremos  $\frac{\hbar}{2}$ , metade da probabilidade  $-\frac{\hbar}{2}$ . c) Sempre teremos valores positivos, em qualquer tempo [Ele entende que o sistema tenha sido preparado em um auto-estado de  $s_y$ ]. d) em relação ao auto-estado do item c), teremos definido sempre valores do estado  $s_y$ ."*

Alguns dos invariantes operatórios deste estudante devem ser "diferenciados", ou seja, moldados para ficarem mais precisos. Os teoremas a serem moldados como, por exemplo, o teorema 3, não são necessariamente obstáculos epistemológicos, porém devem ser lapidados para a introdução, neste caso, da idéia de probabilidades e de amplitudes de probabilidade.

### Possíveis invariantes operatórios usados por Dalila

A aluna apresenta um índice muito elevado de cópia de materiais. Resolve poucos problemas com os conceitos presentes na sua estrutura cognitiva. Isto nos impede, portanto, de extrair invariantes operatórios que ela possa ter.

### Possíveis invariantes operatórios usados por Josué

O aluno parece realizar operações de pensamento que carregam dois teoremas-em-ação: um envolvendo os conceitos de variáveis dinâmicas e de medição e o outro relativo ao desdobramento dos feixes no experimento de Stern-Gerlach

1. "A medição de uma variável dinâmica altera o valor de outra"
2. "A intensidade dos feixes resultantes de uma segunda medição serão proporcionais às intensidades dos feixes resultantes da primeira medição"

O segundo teorema-em-ação foi usado também por outros alunos como Úrsula e André na questão 6 da tarefa 2 e é discutido adiante. O primeiro teorema-em-ação é exemplificado abaixo:

*"... para medir uma das componentes temos que alterar as demais componentes..."*

*"... ao se medir qualquer uma das componentes de posição se altera as outras..."*

*"... ao medir se altera o sistema..."*

Na tarefa 3 Josué, em particular, e também no restante das tarefas que envolvem medição, parece usar um teorema enunciado como:

3. "Em MQ, as medições são probabilísticas"

Este teorema pode ser visto pela expressão de probabilidades nas respostas acerca de medição. Este teorema é de abrangência restrita não podendo ser invocado se o estado do sistema é preparado em um auto-estado da variável dinâmica que se queira medir.

Na tarefa 5 o aluno parece evocar um teorema (incrustado em uma regra de controle de informação) associado ao conceito de evolução temporal, que estabelece:

4. "Interações são descritas por equações fundamentais. Como causalidade é ter interações, a evolução temporal é causada por elas."

*"O que **determina a evolução temporal** em ambos os casos são as **interações** que ocorrem em cada caso e **por isso se diz que ela é causal...**" (grifo nosso).*

*"Essas equações servem para **descrever as interações** de sistemas físicos." (grifo nosso).*

### Possíveis invariantes operatórios usados por Jacó

Na tarefa 2 o aluno parece apresentar um teorema-em-ação plausível em nível teórico, porém impraticável em nível empírico. Este teorema-em-ação está associado à identificação da medição simultânea de diferentes variáveis dinâmicas, como ocorrentes ao mesmo tempo e não como medições sequenciais.

1. "A medição simultânea de variáveis dinâmicas ocorre, literalmente, ao mesmo tempo"

A citação que contém o possível teorema-em-ação é apresentada abaixo:

*"[Variáveis dinâmicas compatíveis] São variáveis mensuráveis em uma mesma medição..."*

Um teorema inconsciente aparentemente usado por Jacó no domínio de algumas situações afirma que:

2. "Elétrons são tratados corretamente desde a eletrodinâmica clássica"

Apresentamos uma citação do uso deste teorema-em-ação que é, entretanto, recorrente em outras tarefas.

*"... utilizando duas placas com um campo elétrico uniforme, podemos medir a energia liberada pelo elétron, e assim calcular sua velocidade..."*

Neste exemplo específico, o elétron teria seu operador hamiltoniano escrito como  $\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + E_x x$  (caso unidimensional, logo o momentum da equação foi considerado na direção  $x$ ), o que impossibilita determinar a energia e numa medição imediatamente sequencial determinar a sua velocidade. Outros exemplos podem ser observados nas respostas do aluno, como:

*"Após, lançá-lo [elétron, átomo de prata] em um campo magnético uniforme de tal dimensão que separe metade dos mais energéticos e os lance em um campo elétrico contrário, paralelamente, com um detector após o campo. Assim poderíamos **medir o spin, sua massa, velocidade e energia.**" (grifo nosso)*

Das tarefas 3 e 4, inferimos um teorema semelhante ao postulado da projeção para o estudante:

3. "Se temos  $|\psi\rangle = |a'\rangle$ , onde  $\hat{A}|a'\rangle = a'|a'\rangle$ , em uma medição da variável dinâmica  $A$ , não há alteração do estado do sistema, porém se o sistema se encontra em uma superposição de estados do tipo  $|\psi\rangle = c_{a'}|a'\rangle + c_{a''}|a''\rangle$ , existe uma probabilidade associada à obtenção dos valores  $a'$  e  $a''$ , sendo o estado modificado pela medição".

Este teorema é amplamente usado para responder várias das questões propostas (quarta questão da tarefa 4, questão 3, itens a, b e c, da tarefa 5, por exemplo).

*”Quando medimos uma variável impossibilitamos a medição das variáveis dinâmicas incompatíveis a que medimos, com isso, **alteramos o sistema**, mudando a precisão na medição e o valor dessas demais variáveis, **podendo, em futuras medições dessas, encontrar valores diferentes dos valores anteriores a primeira medição**. Ou seja, quando medimos uma variável, as variáveis incompatíveis podem assumir diferentes valores, caracterizando diferentes estados ao mesmo tempo, até que sejam medidas. Nisso temos superposição de estados.”*

Outro possível teorema-em-ação inferido a partir da tentativa da reconstituição das operações de pensamento realizadas pelo aluno na tarefa 5 estabelece que:

4. ”O estado do sistema se modifica ao longo do tempo, sendo descrito por um vetor/função dependente das condições iniciais, conhecido pela solução da equação de Schrödinger”

Verificamos o uso deste teorema para as questões 3d da tarefa 5 e 3 da tarefa 6.

*”a) Um feixe na direção  $x$ , no sentido positivo do eixo./ b) Dois feixes na direção  $z$ , um positivo e outro negativo. Dois feixes de, aproximadamente, intensidades iguais./ c) (Nessa questão não entendi qual ou como será a evolução temporal do estado... devo utilizar a mesma modelagem do  $|\phi(\mathbf{t})\rangle$ ? Acho que temos uma função de onda que faz oscilar o estado entre os eixos... seria isso?)/ d) **Considerando o estado inicial definido inicialmente e que a evolução temporal oscila tal como uma função de onda**, teremos o mesmo estado inicial definido, positivo em  $x$ . Pois  $\frac{2\pi}{\omega}$  retornaria um valor semelhante na função de onda a  $t = 0$ .”*

### Possíveis invariantes operatórios usados por Sara

Na tarefa 2, inferimos a existência de um teorema-em-ação usado por Sara inconscientemente, qual seja o de que

1. ”objetos quânticos são não localizáveis”

Afirmamos inconsciência, por parte da aluna, pois ela parece não perceber as implicações do uso deste teorema, conforme é possível observar no exemplo abaixo:

*”[As componentes de posição] São incompatíveis, porque não podem ser medidas de forma simultânea.”*

Na tarefa 3, a estudante usa um possível teorema-em-ação enunciado como:

2. ”Medições em MQ são sempre probabilísticas”.

Apresentamos abaixo um exemplo no qual há o uso do teorema mesmo-em-ação sendo desnecessário o uso de probabilidades, uma proposição usada inclusive quando o esquema de assimilação falha.

*"a) Os spins se dividem em  $s_z$  positivo e  $s_z$  negativo. b) Encontraremos spin up e down na direção  $z$ . c) A probabilidade de obter-se  $s_y$  positivo é 50% e de  $s_y$  negativo também."*

Sara acha que sempre teremos spin-up e spin-down em toda a medida e por isso as medições são probabilísticas. Mesmo que o estado do sistema seja um auto-estado da variável dinâmica que se quer medir, a aluna impõe uma divisão dos feixes, o que reforça o teorema.

Na tarefa 5, formulamos um possível teorema-em-ação, segundo a linguagem da aluna, que cremos ser usado no domínio de situações associadas ao experimento de Stern-Gerlach. Tal teorema-em-ação pode ser enunciado como

3. "Na passagem de um feixe de átomos de prata por um aparato de Stern-Gerlach, 'os spins' são divididos em iguais intensidades".

Este fato é corroborado nas explicações dadas em voz alta durante as aulas, pois a aluna apontava o dedo indicador para cima balançando-o para cima e para baixo para expressar "os spins", ou seja, os átomos tendo uma grandeza apontando para cima e para baixo, literalmente.

Na tarefa 6, conjecturamos mais dois possíveis teoremas-em-ação usados por Sara quando confrontada com os problemas a serem resolvidos. O primeiro deles associa uma trajetória (definida e ultrapassando os limites impostos pela incerteza) a objetos quânticos e o segundo associa a evolução temporal às variáveis dinâmicas e ao estado, simultaneamente.

4. "Um objeto quântico segue uma determinada trajetória"
5. "Se o Estado do sistema evolui no tempo e é determinado por Variáveis Dinâmicas, estas devem, também, variar ao longo do tempo"

É importante ressaltar que o quinto teorema é correto somente desde a perspectiva da FC, pois em MQ é possível equacionar a evolução temporal em esquemas conjuntos ou não de estados do sistema físico e variáveis dinâmicas<sup>5</sup>.

### 6.3.3 Turma 3

#### Possíveis invariantes operatórios usados por André

Na tarefa 2, André parece usar um raciocínio particular para a análise do experimento de Stern-Gerlach. Este raciocínio carrega implícito um teorema-em-ação que possivelmente ocorre para Josué, Úrsula e Sara. Enunciamos este possível teorema-em-ação como:

1. "A intensidade dos feixes resultantes de uma segunda medição serão proporcionais às intensidades dos feixes resultantes da primeira medição"

---

<sup>5</sup>É possível usar a denominada descrição de interação (interaction picture) em MQ para fazer evoluir no tempo o estado e as variáveis dinâmicas simultaneamente, porém temos a convicção de que não é o caso imaginado pela aluna, pois tal descrição não foi trabalhada ou sequer mencionada na intervenção.

Ao interpretarmos a citação abaixo à luz do teorema-em-ação proposta, torna-se evidente a linha de raciocínio possivelmente adotada pelos alunos.

*"a) 16.000 átomos na direção  $\hat{x}$  positiva. 4.000 átomos na direção  $\hat{x}$  negativa. b) Após a passagem pelo terceiro eletroímã, o feixe estará necessariamente dividido: parte na direção  $z$  positiva e parte na  $\hat{z}$  negativa..."*

Na tarefa 3, a construção de um possível teorema-em-ação e de uma regra de inferência parecem lançar luz sobre o processo de resolução de problemas por parte do estudante. Tal teorema é enunciado da seguinte forma:

2. "Superposição consiste na coexistência (indefinição) de dois valores definidos para uma variável dinâmica. A medição é que lança o **estado** do sistema em um dos **auto-estados** que se quer medir".

Os conceitos em negrito são conceitos-em-ação, pois a formulação do teorema seria impossível sem o uso implícito (ou não) dos mesmos. A inferência (i.1) por nós proposta para explicar o raciocínio de André sobre algumas respostas, em especial, da questão 5, segue como:

- i.1. "Se  $|s_x\rangle$  é escrito como superposição de auto-estados de  $s_z$ , ele é a grandeza indefinida. Como no estado  $|s_x, +\rangle$  coexistem valores de  $s_z$ , a coexistência é indefinida e os valores de  $s_z$ , definidos. Como a variável  $s_x$  é indefinida e seu auto-estado uma combinação linear de auto-estados de  $s_z$ , os auto-estados  $|s_x, +\rangle$  são auto-estados de  $s_z$ ".

Seguem abaixo algumas citações corroborando o teorema-em-ação e a inferência conjecturados

*"[qual a variável definida?]  $s_z$  ..." (questão 5 – tarefa 3)*

*"... é auto-estado de  $s_z$ ..." (questão 5 – tarefa 3)*

*"A superposição é a soma de dois estados, sendo que o resultante também é um estado. Isso ocorre quando um objeto simultaneamente possui dois ou mais valores para uma quantidade observável..." (questão 3 – tarefa 3)*

### Possíveis invariantes operatórios usados por Úrsula

Em função do alto índice de cópia da aluna, poucos invariantes operatórios desenvolvidos por Úrsula foram inferidos. Algumas observações, no entanto, são pertinentes. O primeiro teorema-em-ação que conjecturamos ser adotado por ela é igual ao primeiro teorema-em-ação desenvolvido por André, na solução do aparato de Stern-Gerlach.

1. "A intensidade dos feixes resultantes de uma segunda medição serão proporcionais às intensidades dos feixes resultantes da primeira medição"

Achamos factível também ela carregar um teorema-em-ação associado à superposição de estados como sendo a coexistência de distintos valores de uma variável dinâmica, ou, citando um exemplo pertinente, o elétron poder estar simultaneamente em muitos lugares.

2. "A superposição de estados está associada à posse de vários valores simultâneos na medição de uma Variável Dinâmica."

Outro possível teorema-em-ação que inferimos afirma que:

3. "Em MQ só podemos conhecer probabilidades".

Tal teorema ignora a possibilidade de conhecermos estados de sistemas físicos (e, portanto, amplitudes de probabilidade) e que, além disto, é restrito ao caso em que temos medições sequenciais de variáveis dinâmicas incompatíveis ou às situações em que realizamos a medição de uma variável dinâmica para um sistema cujo estado é escrito como uma superposição de estados desta variável. Este teorema pode ser obstáculo no domínio de algumas ideias, como a noção de que a MQ é preditiva.

### Possíveis invariantes operatórios usados por Maria

Hipotetizamos a formação de um teorema-em-ação, usado por Maria na classe de situações associadas ao experimento de Stern-Gerlach:

1. "No aparato de Stern-Gerlach, a divisão de feixes representa a modificação do sistema, devido à medição de variáveis dinâmicas incompatíveis".

Este teorema é usado pela aluna em várias questões, em especial na questão 6 da tarefa 2, e é generalizado para outras situações, conforme discutimos adiante.

*"Ao passar pelo primeiro eletroímã em z, continuará igual, 20.000 (-). Quando o campo magnético estiver em x, haverá divisão novamente em dois feixes, com spin positivo  $\frac{\hbar}{2}$  e spin negativo  $-\frac{\hbar}{2}$ ..."*

Outro teorema importante que parece ser usado pela estudante no domínio das situações é explicitado como:

2. "Estados em MQ sempre são probabilísticos. Só é possível, portanto, conhecer a probabilidade de o sistema se comportar de uma dada forma"

Apesar do importante papel das probabilidades em MQ, devemos ressaltar que este teorema é restrito. Deve, portanto, ser apresentada uma classe de situações à estudante para que ela (assim como vários alunos) tome consciência da restrição do teorema formulado.

*"Já para a MQ, podemos considerar como exemplo o experimento de Stern-Gerlach, assim, o estado do sistema será determinado através da função de probabilidade  $|\psi\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$ "*

*"A probabilidade está associada às amplitudes, tendo 50% de encontrarmos  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$  numa medição de  $s_z$  e, também 50% de  $s_x = -\frac{\hbar}{2}$  numa medição de  $s_x$ ..."*

Um possível teorema formulado pela estudante, intitulado teorema 3, está associado à previsão do estado de um sistema quântico ao longo do tempo. Este teorema-em-ação, embora simples, é extremamente importante, pois pode facilitar o domínio de conceitos como causalidade e preditividade, ambos associados à evolução temporal. Contudo, este teorema-em-ação deve ser elaborado de modo a incluir o importante conceito de amplitude de probabilidade. Tal teorema é condensado como:

3. "É possível conhecermos o estado de um sistema quântico ao longo do tempo, porém ele só nos informa probabilidades."

Tal teorema está associado fortemente ao teorema-em-ação anterior (teorema-em-ação 2), logo, possivelmente influenciado por esse. Apresentamos uma citação ilustrando o uso deste teorema.

*"Para que o estado do sistema evolua com o tempo, é necessário que haja uma causa, verifica-se isso tanto na MC quanto na MQ, contudo podemos determinar o comportamento do sistema clássico ao saber as condições iniciais, não sendo dessa forma para um quântico que só poderá ser probabilístico, ou seja, apenas com a probabilidade de saber como o sistema pode se comportar..."*

Um quarto teorema-em-ação surge ao longo de outras tarefas como uma generalização do primeiro teorema apresentado (teorema-em-ação 1) e é expresso como:

4. "Não podemos determinar valores simultâneos para as variáveis dinâmicas incompatíveis. O conhecimento de uma provoca indeterminação da outra".

### Possíveis invariantes operatórios usados por Eva

Um importante teorema-em-ação que conjecturamos Eva ter usado é enunciado como:

1. "Em MQ, medir variáveis dinâmicas incompatíveis acarreta uma alteração do sistema. As perdas resultantes destas alterações tornam a teoria aleatória."

Outro possível teorema-em-ação cuja forma foi explicitada pela estudante tanto em discussões pessoais quanto em sala de aula, mais parece um modelo estável e é enunciado como:

2. "Se variáveis dinâmicas não podem ser simultaneamente determinadas, há estados independentes associados a elas que coexistem. No processo de medição a informação acerca de uma das variáveis é permitida, enquanto as outras ficam 'escondidas'."

Temos como um dos exemplos a seguinte citação:

*"Variáveis incompatíveis não podem ser determinadas simultaneamente, por isso ao medirmos uma, as outras ficam sem ser determinadas. A superposição de estados está associada a isso, enquanto medimos uma as outras estão lá escondidas mas não podem ser determinadas, por isso há a superposição de estados várias variáveis incompatíveis em estados diferentes num mesmo momento..."*

Um possível teorema-em-ação associado à evolução temporal, pode ter sido formulado, porém o conceito-em-ação específico que completa este teorema não foi identificado por nós. Tal teorema-em-ação é enunciado como:

3. "A evolução temporal é um processo causado por algo."

A palavra *algo* é a palavra-conceito cujo significado não foi identificado. Tal ponto carece de informações e mais investigação é necessária.

### Possíveis invariantes operatórios usados por Judith

Um possível teorema-em-ação associado à superposição de estados quânticos, pode ser enunciado como:

1. "Estados quânticos podem ser superpostos, sendo a causa a indefinição na medida."

Isto significa que a superposição é atribuída a uma indefinição no processo de medida, para a aluna.

Um teorema associado à evolução temporal em MQ especificamente pode ser enunciado como:

2. "Para a alteração do estado/variáveis dinâmicas ao longo do tempo há uma causa comum em MC e em MQ. Tal alteração é dada por leis de evolução específicas."

Este teorema está associado à importante idéia de causalidade, incrustada no conceito de evolução temporal. Apresentamos abaixo uma citação da aluna que pode ser interpretada à luz deste teorema-em-ação proposto:

*"... A evolução temporal é dita causal porque, no caso da MC é possível prever, através de suas leis, o resultado de medição de variáveis dinâmicas desde que tenham sido determinadas condições iniciais no sistema. Na MQ o mesmo acontece considerando algumas informações iniciais do sistema, porém, neste caso, deve-se levar em conta o caráter probabilístico, pois na MQ existem variáveis dinâmicas incompatíveis."*

Judith também parece elaborar um terceiro teorema, já apresentado por outros alunos enunciado como:

3. "Estados quânticos são probabilísticos, devido às Variáveis Dinâmicas incompatíveis."

Em função da discussão prévia acerca deste teorema, não traremos exemplos específicos expostos por Judith. Se o leitor queira verificar os dados, sugerimos que traga consigo tal invariante operatório.

O primeiro teorema-em-ação aparece posteriormente sob uma forma mais evoluída. Tal teorema pode ser enunciado como:

4. "A superposição de estados informa sobre os valores possíveis na medição. Medir é lançar o sistema em um auto-estado. As amplitudes de probabilidade nos informam sobre as probabilidades de obter um dado valor de uma variável dinâmica que se queira medir."

Tal teorema é usado, ademais, para a resolução de dos itens a e b da questão 3 da tarefa 5, principalmente.

A seguir apresentamos as conclusões acerca do trabalho e descrevemos perspectivas para pesquisas futuras.

# Capítulo 7

## Conclusões e perspectivas

Relatamos neste trabalho a realização e análise de resultados de uma instrução especialmente planejada e preparada para apresentar a alunos de cursos de Licenciatura em Física, a Licenciados em Física e áreas afins e a Professores de Ensino Médio em Física, em geral.

O conteúdo apresentado teve como objetivo introduzir alguns conceitos relevantes em Física (e em particular em Mecânica Quântica) com vistas, ao final, à abordagem do conceito de Evolução Temporal em Mecânica Quântica. Os conceitos enfocados foram, inicialmente, os de Sistemas Físicos e Variáveis Dinâmicas, ambos com a apresentação de várias situações ocorrentes em Física Clássica e em Física Quântica. Atendendo, a seguir, a especificações da Mecânica Quântica, foram abordados os conceitos de Variáveis Dinâmicas Compatíveis e Incompatíveis, Estados de Sistemas Físicos, Superposição de Estados de Sistemas Quânticos e Evolução Temporal de Estados ou de Variáveis Dinâmicas de Sistemas Quânticos. Neste último tema foram introduzidas as equações de Schrödinger e de Heisenberg correspondentes.

O Referencial Teórico norteador do trabalho foi composto pela Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e pela Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, servindo de baliza não apenas para a construção do material da Instrução, mas também para a análise dos resultados de aprendizagem colhidos.

Os dados obtidos a respeito do aprendizado dos alunos foram apresentados e discutidos no corpo do trabalho e compreendem tanto uma análise do conhecimento na forma predicativa, como uma análise do conhecimento na forma operatória, além de uma análise de conteúdo.

Foram preparadas seis tarefas para serem realizadas por escrito pelos estudantes, precedidas de um pré-teste. Um diário de bordo e algumas entrevistas foram também matéria de avaliação.

Foram relatados no trabalho resultados relativos a 17 alunos, seis deles matriculados em disciplina de curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física (uma turma) e 11 outros, em disciplina de curso de Licenciatura em Física (duas turmas, uma diurna e uma noturna).

O pré-teste abordou os conceitos de sistema físico, variáveis dinâmicas, estado de sistema físico e evolução temporal. Apenas dois alunos não apresentaram conceitualização relativa a sistemas físicos indicando que, embora revelando um muito alto nível de generalidade, uma noção inicial sobre sistemas físicos estava presente para os alunos. Quanto ao conceito de variáveis dinâmicas (não abordado por três alu-

nos), as respostas ao pré-teste indicaram uma apenas razoável familiaridade com o conceito por parte de alunos de uma das turmas, enquanto a manifestação da maioria dos estudantes das duas outras turmas revelou-se conceitualmente falha. O conceito de estado de sistema físico (sobre o qual três alunos não se manifestaram), embora apresentando-se menos claro do que o de estado, não indicou diferenças tão marcantes entre os três grupos de alunos. Quanto ao conceito de evolução temporal, o nível de generalidade extremamente alto revelado por alguns estudantes, além da inadequação das conceituações apresentadas pela maioria dos alunos, indica que pode ser desconsiderado como ponto de partida para a Instrução.

Na tarefa 1 foram investigados os reflexos das colocações e da discussão sobre os conceitos de sistemas físicos e de variáveis dinâmicas, na aprendizagem dos alunos, destacando-se a apresentação por eles de um bom número de citações de situações tanto relativas a sistemas físicos (43), como concernentes a variáveis dinâmicas (36). É de se observar, contudo, que várias das situações arroladas haviam sido apresentadas na Instrução.

Muitos alunos souberam mencionar características externas dos sistemas, um aspecto quase sempre negligenciado nas análises feitas tradicionalmente. Além disto, na consideração de sistemas não elementares as interações mereceram destaque, revelando uma queda apreciável no nível de generalidade relativo ao conceito de sistemas físicos.

No que se refere ao conceito de variável dinâmica, o nível de generalidade melhorou quando foram distinguidas variáveis compatíveis de incompatíveis, em geral, mas as variáveis incompatíveis em Mecânica Quântica ainda ficaram limitadas às mais básicas: posição, momentum e energia. Dos 17 alunos avaliados, 16 apresentaram explicações sobre estes dois itens, enquanto no questionamento sobre eventual relação de variáveis incompatíveis com o princípio de incerteza cerca de seis décimos das respostas apresentadas foram satisfatórias.

O conceito de estado de sistema físico, presente com alto nível de generalidade na estrutura cognitiva dos alunos anteriormente ao ensino planejado, apresentou modificação imputável à Instrução, mas evidenciou subordinação ao conceito de variável dinâmica tanto nas situações clássicas como quânticas.

Quanto ao papel dos operadores em Mecânica Quântica, importante para a compreensão de eventuais restrições de valores de grandezas físicas, o ensino relativo às equações de autovalores de energia (por exemplo no caso do átomo de hidrogênio) mostrou resultados positivos, ainda que limitados. Em particular, a introdução do experimento de Stern-Gerlach foi dificultada pela falta de familiaridade dos alunos com a situação clássica de interação de uma partícula carregada com um campo magnético não homogêneo, o conceito de momentum angular intrínseco (spin) não se ancorando no de momentum angular orbital, como desejável. Apesar disto, esta situação propiciou reforço na compreensão do conceito de estado de um sistema físico, definido em um espaço bidimensional.

O conceito de superposição de estados, atualmente de suma importância em si, para a construção de estados convenientes a determinadas situações de consequências tecnológicas sutis, como no caso de comunicações à distância, foi absorvido substancialmente (ou até para a maioria dos alunos, apenas) sob o enfoque de aspecto probabilístico.

A conceituação sobre a evolução temporal em Mecânica Quântica, embora não aparentando dificuldades, visto que as equações de Schrödinger e de Heisenberg

foram arroladas por muitos alunos adequadamente mostrou, contudo, que aspectos do conceito de estado de sistemas quânticos foram obliterados em favor dos de variáveis dinâmicas. A noção de causalidade parece, porém, ter sido adquirida com maior estabilidade, embora restringida pela de determinação de valores de medidas de variáveis dinâmicas, como se estados de sistemas físicos não pudessem ser efetivamente determinados (conhecidos) ao longo do tempo, ou ainda, como se conhecer o estado de um sistema físico só fosse possível quando o sistema se encontrasse em um auto-estado de um operador que corresponde a algum observável.

Após a discussão pormenorizada, em capítulos anteriores, das evidências de aprendizagem apresentadas pelos alunos e a exposição acima resumida, dos resultados obtidos nas tarefas propostas, ou seja, após a discussão dos dados obtidos em decorrência da Instrução oferecida, é possível agora esboçar algumas conclusões gerais acerca do processo de investigação adotado, bem como indicar perspectivas para trabalhos futuros.

Foi possível observar, em primeiro lugar, que as superordenações planejadas para facilitação da aprendizagem dos conceitos de sistema físico e de variáveis dinâmicas foram frutíferas. O experimento de Stern-Gerlach e o exemplo do átomo de hidrogênio e de seus níveis de energia (em algumas instâncias) despontam como situações profícuas para tal aprendizado pois, como é possível perceber através da análise de conteúdo e das análises de conhecimento nas formas predicativa e operatória, a aprendizagem desses conceitos parece ter sido realizada de forma coerente com a proposta, a despeito de algumas dificuldades encontradas pelos alunos. Foi observado que até um certo nível razoável de generalidade, as idéias principais foram assimiladas. Retomadas recursivas do conteúdo podem ser frutíferas na diferenciação progressiva da estrutura cognitiva dos alunos e são, pois, recomendáveis em aplicações futuras de tal material didático.

Um dos pontos a ser destacado nos resultados do presente trabalho é o de uma provável igualdade, estabelecida pelos alunos, entre os conceitos de medição e de determinação. Esta indistinção entre os dois conceitos, seja por falta de percepção dos alunos ou por falta de insistência no tratamento desta temática, levou a maioria dos estudantes, aparentemente, a crer que é impossível executar medições sequenciais de variáveis dinâmicas incompatíveis sobre um sistema, quando na verdade o que não se consegue é construir auto-estados simultâneos delas, o que implica em não reprodutibilidade de valores de medida de (pelo menos) uma delas, em medidas sobre um grande número de sistemas, todos preparados da mesma maneira (i. é, todos no mesmo estado).

Observou-se, também, que o conceito de estado de um sistema físico foi assimilado como uma especificação do conceito de variáveis dinâmicas, o que contribuiu para uma obliteração muito rápida do conceito de estado ao conceito de variáveis dinâmicas, obliteração esta reforçada pelo fato de tal conceito apresentar-se sob facetas novas no caso quântico. Um atributo associado aos estados de sistemas quânticos, cujo aprendizado se mostrou relativamente estável, foi o de que eles se revelam, em medidas, como essencialmente probabilísticos. Isto, porém, tem um lado negativo, a saber, o de que, nessa forma, pode servir de obstáculo epistemológico para a noção de o estado do sistema físico ser o objeto principal de investigação e não somente, ainda que muito importantes, as probabilidades de ocorrência de composições de estados de variáveis dinâmicas de interesse, ou seja, almejar-se apenas uma informação incompleta dos sistemas, como se a Mecânica Quântica fosse

incapaz de desvendar na plenitude os estados dos sistemas. Alguns alunos compreenderam o conceito com entusiasmante clareza, mas outros (a maioria, aliás), parecem tê-lo obliterado, em Mecânica Quântica, a um conjunto de variáveis associadas a probabilidades de ocorrência, em face da existência de variáveis dinâmicas incompatíveis. Este é, certamente, um aspecto que deve ser debatido com maior amplitude em futuras aplicações da Instrução e que merece cuidado especial em qualquer programação de ensino de conceitos em Mecânica Quântica, pelas suas peculiaridades e diferenciação do caso clássico.

Alguns alunos adquiriram uma concepção (na forma de subsunçores e/ou teoremas-em-ação) de que o estado em Mecânica Quântica é imprevisível no futuro. A sutileza na distinção entre os conceitos de causalidade, determinismo e probabilismo pode ser um dos fatores explicativos desta dificuldade. Em geral quando significados muito parecidos são apresentados aos alunos, a menos que os subsunçores em suas estruturas cognitivas estejam muito diferenciados, há uma obliteração mais rápida do conhecimento aprendido ao subsunçor (pouco modificado). A Instrução adotada revela, então, a necessidade de ampliar-se o debate sobre estes aspectos em futuras intervenções, bem como em apresentar maior número de situações e tarefas sobre o tema.

A idéia de a Mecânica Quântica ser uma ciência não previsiva é uma dificuldade que pode se transformar em obstáculo epistemológico para a aprendizagem de conceitos em Mecânica Quântica, como o caso da evolução temporal, por exemplo.

O conceito de superposição de estados em Mecânica Quântica, talvez por ser uma diferenciação de um conceito que por alguns foi mal entendido, parece ter evocado significados confusos, principalmente associados ao conhecimento predicativo. Muitos dos alunos conseguiam, no entanto, resolver problemas envolvendo superposições de estados como, por exemplo, o de conhecer a probabilidade de se obter o valor de uma variável dinâmica, tendo o estado do sistema sido preparado em uma superposição de auto-estados do operador associado à variável dinâmica em questão, revelando uma aquisição inicial de conhecimento procedimental relativa a este conceito. Pela importância basilar deste conceito pretende-se no futuro discuti-lo em etapa anterior à das considerações sobre probabilidades em resultados de medidas de observáveis.

Outro ponto a ser comentado, é a realização de aspectos da formulação hamiltoniana para os alunos investigados. Este conhecimento é necessário para o entendimento substantivo das formulações de Schrödinger e Heisenberg (mencionadas na intervenção). Algum êxito foi notado na aprendizagem da função hamiltoniana desde os subsunçores energia e interações. O conceito de função hamiltoniana (operador hamiltoniano) é, de fato, mais amplo que o conceito de energia, porém, cremos ser o conceito de energia, relativamente estável (e geral) nas estruturas cognitivas dos alunos, o subsunçor adequado para a aprendizagem inicial deste conhecimento.

Um aspecto a ser discutido, também, é o da aparente facilidade de os alunos compreenderem melhor os exemplos usados que envolvem o átomo de hidrogênio do que aqueles tratando do experimento de Stern-Gerlach. Algumas razões podem ser enumeradas para tanto: a maior familiaridade com as variáveis do problema do átomo de hidrogênio (energia, posição, momentum, entre outros) do que as do experimento Stern-Gerlach (em que se tem como variáveis o spin e suas projeções); a construção prévia de um modelo (mesmo semiclássico como o átomo de Bohr) para o entendimento do sistema quântico e outros. Cogita-se a possibilidade de

apresentar mais situações-problemas e exemplos tratando o sistema do experimento de Stern-Gerlach em ocasiões futuras.

O conceito de evolução temporal parece, apesar dos senões, ter sido modificado, pois além de ter associado a si uma noção relativamente vaga de preditividade (vinculada à possibilidade de se estudar como evolui um sistema no tempo), foi relacionado também à noção de causalidade que, na maioria das vezes, parece ser diferenciada das noções de determinismo e probabilismo. Outro ponto a ressaltar acerca da aquisição deste conceito é o fato de que muitos alunos associam, talvez de forma não deliberada, a evolução temporal ao sistema, ao invés de associá-la ao estado ou às variáveis dinâmicas.

Foi possível observar no processo de ensino que, devido ao pouco tempo disponível, as formulações de Schrödinger (que associa a evolução temporal aos estados) e de Heisenberg (que associa a evolução temporal às variáveis dinâmicas) não puderam ser muito diferenciadas, sendo, portanto, discutidas em nível mais geral. Um dos objetos de trabalhos futuros é tentar implementar um curso de maior extensão em que se possa discutir aspectos mais específicos associados a estas formulações, bem como introduzir exemplos especiais (oscilador harmônico quântico, por exemplo), o estudo do limite clássico da MQ e a relação e equivalência entre as duas formulações.

Uma possível mudança a ser realizada na proposta é a de enfatizar mais a equação de Heisenberg, pois os alunos parecem ter maior familiaridade com o conceito de evolução temporal de variáveis dinâmicas do que com o de estado. Atribuir inicialmente a evolução temporal ao conceito de variáveis dinâmicas pode facilitar a compreensão daquele conceito sendo possível, então, resultar a diferenciação das estruturas cognitivas dos alunos (em MQ), preparando-as para a assimilação posterior do conceito de estado e das ideias associadas à equação de Schrödinger.

É preciso ainda planejar uma proposta, na qual mais situações associadas ao conceito de evolução temporal sejam apresentadas, para facilitar a aquisição de novos atributos criteriosais para o conceito através do domínio deste campo conceitual. A diferenciação deste importante conceito o tornará mais estável e claro.

As análises realizadas permitiram, também, obter algumas respostas para as questões de pesquisa lançadas, conforme exposto no capítulo relativo aos resultados (através da verificação dos padrões de assimilação, de estimativa qualitativa de nível de generalidade de subsunçores e da construção de possíveis invariantes operatórios). Para melhora da precisão dos resultados, tal proposta deverá ser desenvolvida posteriormente durante um maior intervalo de tempo, enfatizando menos os conceitos mais facilmente assimilados como os de sistema físico e variável dinâmica e, portanto, oferecendo maior oportunidade de estudo dos conceitos de estado e de evolução temporal.

Pretende-se em novo projeto de pesquisa continuar com a proposta (aumentando substancialmente o número de estudos), bem como focar a análise do conhecimento operatório sob um ponto de vista mais aprofundado e ampliando o tempo de investigação e a apresentação de situações potencialmente significativas (além do experimento de Stern-Gerlach) para facilitar a aprendizagem do conceito de evolução temporal. Outras perspectivas para o trabalho são: a introdução de noções matemáticas sobre espaços vetoriais, maior discussão quanto ao formalismo de Dirac, introdução de conceitos de aspectos epistemológicos e históricos relativos à MQ (como sobre as interpretações do formalismo da teoria) e, além disso, encontrar

conceitos estruturantes que possam agregar estabilidade à estrutura conceitual inicialmente planejada, bem como facilitar a aprendizagem de outros conceitos. Um possível elemento a ser introduzido é, por exemplo, o conceito de simetrias que às vezes se relaciona ao conceito de evolução temporal, por exemplo.

Percebeu-se também que a maioria dos alunos (salvo dois ou três casos dentre os 17 analisados) opera mais próximo do pólo significativo da aprendizagem, visto que parece realizar, na maioria das vezes, interações entre o já conhecido e os elementos a serem aprendidos de forma não-arbitrária e não-literal. Isto não significa, entretanto, que a intervenção não deva ser aprimorada, porém, sugere que vale adotar-se uma intervenção mais longa para maior domínio no campo conceitual escolhido para a proposta. O domínio de um campo conceitual é progressivo tanto em uma perspectiva de Gérard Vergnaud, quanto de David Ausubel. Para o primeiro, os processos de aprendizagem ocorrem seguindo rupturas e filiações, devido à ocorrência de obstáculos epistemológicos a serem rompidos, bem como à existência de continuidades no processo, enquanto o segundo postula que os mecanismos de assimilação de conhecimento predicativo ocorrem em uma sequência de aprendizagem, retenção e obliteração<sup>1</sup>. O aprendido, portanto, é depois esquecido, mas deixa um resíduo de modificação no subsunçor.

Pretende-se, também, estudar em trabalhos futuros como se dá a interação entre a forma predicativa e a forma operatória do conhecimento, para verificar os efeitos da ação sobre a aprendizagem de conhecimentos explícitos em MQ e vice-versa, bem como ocorre o domínio da representação simbólica usada neste campo específico do conhecimento.

Temos, ademais, a intenção de estudar com maior profundidade o conhecimento operatório sob a proposta integradora de Greca e Moreira (2002), uma associação da teoria dos modelos mentais de Johnson-Laird com a teoria dos campos conceituais de Vergnaud. Tal marco teórico está fundamentado na ideia de que os modelos mentais são levados a esquemas de assimilação no processo de resolução de problemas.

Um relato pessoal da experiência, que se mostra muito valioso, foi a solicitação de uma considerável parcela da turma ao proponente do trabalho, de oferecimento de um curso de MQ durante o período de férias. Isto parece ser um indicativo de aceitação positiva da proposta didática apresentada neste trabalho.

---

<sup>1</sup>Sequência não necessariamente invariável, dado ser possível retornar à fase de retenção devido a uma diminuição induzida do limiar de disponibilidade (Ausubel, 2002).

# Bibliografia

- [1] ABD-EL-KHALIC, F. Rutherford's enlarged: a content-embedded activity to teach about nature of science. **Physics Education**, London, v. 37, n. 1, p. 64-68, Jan. 2002.
- [2] ARAÚJO, W. S.; RODRIGUES, C. G. Comparação entre as ementas de um curso de mecânica quântica e física moderna. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 23, n. 3, p. 360-365, set. 2001.
- [3] ASIKAINEN, M. A.; HIRVONEN, P. E. A study of pre-service and inservice physics teachers' understanding of photoelectric phenomenon as part of the development of a research-based quantum physics course. **American Journal of Physics**, Melville, v. 77, n. 7, p. 658-666, July 2009.
- [4] AUSUBEL, D. P. **The acquisition and retention of knowledge**: a cognitive view. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [5] AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.
- [6] BAO, L.; REDISH, E. Understanding probabilistic interpretations of physical systems: a prerequisite to learning quantum physics. **American Journal of Physics**, Melville, v. 70, n. 3, p. 210-217, Mar. 2002.
- [7] BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2008.
- [8] BARROS, M. A.; BASTOS, H. F. B. N. Investigando o uso do ciclo da experiência Kellyana na compreensão do conceito de difração de elétrons.  **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 24, n. 1, p. 26-49, abr. 2007.
- [9] BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Qualitative research for education: an introduction to theory and methods**. Boston: Allyn and Bacon, 1994.
- [10] BROCKINGTON, G.; PIETROCOLA, M. Serão as regras da transposição didática aplicáveis aos conceitos de física moderna?  **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 10, n. 3, p. 387-404, dez. 2005.
- [11] BUDDE, M.; NIEDDERER, H.; SCOTT, P.; LEACH, J. 'Electronium': a quantum atomic teaching model. **Physics Education**, London, v. 37, n. 3, p. 197-203, May 2002a.
- [12] . The quantum atomic model 'Electronium': a successful teaching tool. **Physics Education**, London, v. 37, n. 3, p. 204-210, May 2002b.

- [13] ÇALISKAN, S.; SEZGIN, G. S.; EROL, M. Students understanding of some quantum physical concepts. **Latin American Journal of Physics Education**, Mexico, v. 3, n. 2, p. 202-206, May 2009.
- [14] CAMPBELL, D.; STANLEY, J. **Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social**. Buenos Aires: Amorrortu Editores, 1966.
- [15] CARR, L. D.; McKAGAN, S. B. Graduate quantum mechanics reform. **American Journal of Physics**, Melville, v. 77, n. 4, p. 308-319, Mar. 2009.
- [16] CARVALHO NETO, R. A de; FREIRE JR, O.; SILVA, J. L. P. B. Improving student's meaningful learning on the predictive nature of quantum mechanics. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 14, n. 1, p. 65-81, mar. 2009.
- [17] CATALOGLU, E.; ROBINETT, R. W. Testing the development of student conceptual and visualization understanding in quantum mechanics through the undergraduate career. **American Journal of Physics**, Melville, v. 70, n. 3, p. 238-251, Mar. 2002.
- [18] CAVALCANTE, M. A.; TAVOLARO, C. R. C. Uma oficina de física moderna que vise sua inserção no ensino médio. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 18, n. 3, p. 289-316, dez. 2001.
- [19] FANARO, M. A.; OTERO, M. R. Basic quantum mechanics teaching in secondary school: one conceptual structure based on path integrals methods. **Latin American Journal of Physics Education**, Mexico, v. 2, n. 2, p. 103-112, May 2008.
- [20] . Teoremas en acto y situaciones de mecánica cuántica en la escuela media. *Latin American Journal of Physics Education*, Mexico, v. 3, n. 2, p. 307-323, May 2009.
- [21] FANARO, M. A.; ARLEGO, M.; OTERO, M. R. El método de caminos múltiples de Feynman como referencia para introducir los conceptos fundamentales de la mecánica cuántica en la escuela secundaria. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 24, n. 2, p. 233-260, ago. 2007.
- [22] . Teaching the foundations of quantum mechanics in secondary school: a proposed conceptual structure. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 14, n. 1, p. 37-64, mar. 2009.
- [23] GOFF, A. Quantum tic-tac-toe: a teaching metaphor for superposition in quantum mechanics. **American Journal of Physics**, Melville, v. 74, n. 11, p. 962-973, Nov. 2006.
- [24] GRECA, I. M.; FREIRE JR., O. Does an emphasis on the concept of quantum states enhance student's understanding of quantum mechanics? **Science and Education**, Dordrecht, v. 12, n. 5/6, p. 541-557, Aug. 2003.

- [25] GRECA, I. M.; HERSCOVITZ, V. E. Superposição linear em ensino de mecânica quântica. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, Belo Horizonte, v. 5, n. 1, p. 61-77, jan. 2005.
- [26] . Construyendo significados en mecánica cuántica: fundamentación y resultados de una propuesta innovadora para su introducción en el nivel universitario. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 20, n. 2, p. 327-338, abr./jun. 2002.
- [27] GRECA, I. M. **Construindo significados em mecânica quântica**: resultados de uma proposta didática a estudantes de física geral. 2000. 284 p. Tese (Doutorado em Ciências) – Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.
- [28] GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. Uma revisão da literatura sobre estudos relativos ao ensino da mecânica quântica introdutória. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 6, n.1, p. 29-56, jan. 2001.
- [29] GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A.; HERSCOVITZ, V. E. Uma proposta para o ensino de mecânica quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 23, n.4, p. 444-457, dez. 2001.
- [30] HADZIDAKI, P. 'Quantum Mechanics' and 'scientific explanation' an explanatory strategy aiming at providing 'understanding'. **Science and Education**, Dordrecht, v.17, n.1, p. 49-73, Jan. 2008a.
- [31] . The Heisenberg microscope: a powerful instructional tool for promoting meta-cognitive and meta scientific thinking on quantum mechanics and the nature of science. **Science and Education**, Dordrecht, v. 17, n. 6, p. 613-639, June 2008b.
- [32] HADZIDAKI, P.; KALKANIS, G.; STAVROU, D. Quantum mechanics: a systemic component of the modern physics paradigm. **Physics Education**, London, v. 35, n. 6, p. 386-392, Nov. 2000.
- [33] HILGER, T. R. **Representações sociais da física quântica**. 2009. 102 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) – Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.
- [34] IRESO, G. The quantum understanding of pre-university physics students. **Physics Education**, London, v. 35, n.1, p. 15-21, Jan. 2000.
- [35] JOHANSSON, K. E.; MILSTEAD, D. Uncertainty in the classroom: teaching quantum physics. **Physics Education**, London, v. 43, n. 2, p. 173-179, Mar. 2008.
- [36] KALKANIS, G.; HADZIDAKI, P.; STAVROU, D. An instructional model for a radical conceptual change towards quantum mechanics concepts. **Science Education**, Hoboken, v. 87, n. 2, p. 257-280, Mar. 2003.
- [37] KREY, I.; MOREIRA, M. A. Implementación y evaluación de una propuesta de enseñanza para el tópico física de partículas en una disciplina de estructura

- de la matéria basada en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias**, Vigo, v. 8, n. 3, p. 812-833, dez. 2009.
- [38] . Abordando tópicos de física nuclear e radiação em uma disciplina de estrutura da matéria do currículo de licenciatura em ciências através de situações-problema. **Latin American Journal of Physics Education**, Mexico, v. 3, n. 3, p. 595-605, Sept. 2009.
- [39] LOBATO, T.; GRECA, I. M. Análise da inserção de conteúdos de teoria quântica nos currículos de física do ensino médio. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 11, n.1, p. 119-132, abr. 2005.
- [40] MATTHEWS, M. How pendulum studies can promote knowledge of the nature of science. **Journal of Science Education and Technology**, Heidelberg, v. 10, n. 4., p. 359-368, Dec. 2001.
- [41] McKAGAN, S. B.; PERKINS, K. K.; DUBSON, M.; MALLEY, C.; REID, S.; LeMASTER, R.; WIEMAN, C. E. Developing and researching PhET simulations for teaching quantum mechanics. **American Journal of Physics**, Melville, v. 76, n. 4/5, p. 406-419, Apr. 2008.
- [42] MESSIAH, A. **Quantum mechanics**. Mineola: Dover Publications. 1999.
- [43] MICHELINI, M.; RAGAZZON, R.; SANTI, L.; STEFANEL, A. Proposal for quantum physics in secondary school. **Physics Education**, London. v. 35, n. 6, p. 406-410, Nov. 2000.
- [44] MONTENEGRO, R.; PESSOA JR, O. Interpretações da teoria quântica e as concepções dos alunos do curso de física. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v.7, n. 2, p. 107-126, set. 2002.
- [45] MOREIRA, M. A. teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, jan. 2002.
- [46] . **La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área**. In: MOREIRA, M. A. (Org.). **La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud: la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área**. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS. 2004. p. 41-66.
- [47] MOREIRA, M. A.; HILGER, T.; PRÄSS, A. R. Representaciones sociales de la física y de la mecánica cuántica. **Revista de Enseñanza de la Física**, Buenos Aires, v. 22, n. 1, p. 15-30, jan/jun. 2009.
- [48] MORTIMER, E. Construtivismo, mudança conceitual e ensino de ciências: para onde vamos? **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 1, n. 1, p. 20-39, mar. 1996.
- [49] MÜLLER, R.; WIESNER, H. Teaching quantum mechanics on an introductory level. **American Journal of Physics**, Melville, v. 70, n. 3, p. 200-209, Mar. 2002.

- [50] NASHON, S.; NIELSEN, W.; PETRINA, S. Whatever happened to STS? Pre-service teachers and the history of quantum mechanics. **Science and Education**, Dordrecht, v. 17, n. 4, p. 387-401, Apr. 2008.
- [51] NIAZ, M.; FERNÁNDEZ, R. Understanding quantum numbers in general chemistry textbooks. **International Journal of Science Education**, London, v. 30, n. 7, p. 869-901. June 2008.
- [52] OLIVEIRA, F. F.; VIANNA, D. M.; GERBASSI, R. S. Física moderna no ensino médio: o que dizem os professores? **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 29, n. 3, p. 447-454, set. 2007.
- [53] OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. Uma revisão bibliográfica sobre a área de pesquisa "física moderna e contemporânea no ensino médio". **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 5, n. 1, p. 23-48, jan. 2000.
- [54] OSTERMANN, F.; RICCI, T. Construindo uma unidade didática conceitual sobre mecânica quântica: um estudo na formação de professores de física. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 10, n. 2, p.235-257, ago. 2004.
- [55] . Conceitos de física quântica na formação de professores: relato de uma experiência didática centrada no uso de experimentos virtuais. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 22, n. 1, p. 9-35, abr. 2005.
- [56] OSTERMANN, F.; PRADO, S. D.; RICCI, T. Investigando a aprendizagem de professores de física acerca do fenômeno da interferência quântica. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 14, n. 1, p.35-54, abr. 2008.
- [57] PAULO, I. J. C. de. **A aprendizagem significativa crítica de conceitos da mecânica quântica segundo a interpretação de Copenhagen e o problema da diversidade de propostas de inserção da física moderna e contemporânea no ensino médio**. 2006. 235 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências) – Departamento de Didáticas Específicas, Universidade de Burgos, Burgos, 2006.
- [58] PEDUZZI, L. O. Q.; BASSO, A. Para o ensino do átomo de Bohr no nível médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 27, n. 4, p. 545-557, dez. 2005.
- [59] PEREIRA, A.; OSTERMANN, F.; CAVALCANTI, C. O ensino de física quântica na perspectiva sociocultural: uma análise de um debate entre futuros professores mediado por um interferômetro virtual de Mach-Zender. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias**, Vigo, v. 8, n. 2, p. 376-398, ago. 2009.
- [60] . On the use of a virtual Mach-Zender interferometer in the teaching of quantum physics. *Physics Education*, London v. 44, n. 3, p. 281-291, May 2009.
- [61] PINTO, A. C.; ZANETIC, J. É possível levar a física quântica para o ensino médio? **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 16, n. 1, p. 7-34. abr. 1999.

- [62] POPPER, K. R. **Conjecturas e refutações**. Brasília: Editora da Universidade de Brasília. 1972.
- [63] REZENDE JR, M. F.; CRUZ, F. F. S. Física moderna e contemporânea na formação de licenciados em física: necessidades, conflitos e perspectivas. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 15, n. 2, p. 305-321. ago. 2009.
- [64] ROCHA, C. R. **Sobre o ensino do conceito de estado em cursos introdutórios em mecânica quântica**. 2008. 179 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) – Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.
- [65] SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics**. rev. ed. Reading: Addison-Wesley, 1994.
- [66] SALES, G. L.; VASCONCELOS, F. H. L.; CASTRO FILHO, J. A.; PEQUENO, M. C. Atividades de modelagem exploratória aplicada ao ensino de física moderna com a utilização do objeto de aprendizagem pato quântico. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 3051-3063, set. 2008.
- [67] SINGH, C. Students' understanding of quantum mechanics. **American Journal of Physics**, Melville, v. 69, n. 8, p. 885-895, Aug. 2001.
- [68] . Interactive learning on quantum mechanics. *American Journal of Physics*, Melville, v. 76, n. 4/5, p. 400-405, Apr. 2008.
- [69] . Student understanding of quantum mechanics at the beginning of graduate instruction. *American Journal of Physics*, Melville, v. 76, n. 3, p. 277-287, Mar. 2008.
- [70] SOARES, S. M. **Um curso de mecânica quântica para professores de física do ensino médio**. 2008. 169 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.
- [71] SOUZA, V.; JUSTI, R.; FERREIRA, P. Analogias utilizadas no ensino dos modelos atômicos de Thomson e Bohr: uma análise crítica do que os alunos pensam a partir delas. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 11, n. 1, p. 7-28, mar. 2006.
- [72] STEFANI, C.; TSARPALIS, G. Students' levels of explanation, models, and misconceptions in basic quantum chemistry: a phenomenographic study. **Journal of Research in Science Teaching**, New York, v. 46, n. 5, p. 520-536, May 2009.
- [73] TABER, K. Learning quanta: barriers to stimulating transitions in student understanding of orbital ideas. **Science Education**, Hoboken, v. 89, n. 1, p. 94-116, Jan. 2005.
- [74] TREAGUST, D. In search of explanatory frameworks: an analysis of Richard Feynman's lecture 'atoms in motion'. **International Journal of Science Education**, London, v. 22, n. 11, p. 1157-1170, Nov. 2000.

- [75] TSARPALIS, G.; PAPAPHOTIS, G. High-school students' conceptual difficulties and attempts at a conceptual change. **International Journal of Science Education**, London, v. 31, n. 7, p. 895-930, May 2009.
- [76] VELENTZAS, A.; HALKIA, K.; SKORDOULIS, C. Thought experiments in the theory of relativity and in quantum mechanics: their presence in textbooks and in popular science books. **Science & Education**, Dordrecht, v. 16, n. 3/5, p. 353-370, Mar. 2007.
- [77] VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: RESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 127-174.
- [78] . A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do GEMPA*, Porto Alegre, n. 4, p. 9-19, jul. 1996a.
- [79] . Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Perspectivas*, París, v. 26, n. 1, p. 195-207, mar. 1996b.
- [80] . The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T.; BRYANT, P. (Eds.). *Learning and teaching mathematics: an international perspective*. Hove: Psychology Press, 1997. p. 1-28.
- [81] . A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, Dordrecht, v. 17, n. 2, p. 167-181, June 1998.
- [82] VERGNAUD, G.; BOOKER, G.; CONFREY, J.; LERMAN, S.; LOCHHEAD, J.; SFARD, A.; SIERPINSKA, A.; WHEELER, D. Epistemology and psychology of mathematics education. In: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (Eds.). **Mathematics and cognition: a research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. p. 14-30.
- [83] WUTTPROM, S.; SHARMA, M. D.; JOHNSTON, I. D.; CHITAREE, R.; SOANKWAN, C. Development and use of a conceptual survey in introductory quantum physics. **International Journal of Science Education**, London, v. 31, n. 5, p. 631-654, May 2009.
- [84] ZOLLMAN, D. A.; REBELLO, N. S.; HOGG, K. Quantum mechanics for everyone: hands-on activities integrated with technology. **American Journal of Physics**, Melville, v. 70, n. 3, p. 252-259, Mar. 2002.

# Apêndice A – Texto de apoio

Apresentamos neste apêndice uma versão preliminar do texto de apoio intitulado "Evolução temporal em MQ: conceitos fundamentais para seu estudo". O texto foi usado como material de apoio na intervenção didática planejada com base nas idéias apresentadas ao longo do mesmo.

## Introdução

Este material é preferencialmente voltado para o professor do Ensino Médio (EM) e para o estudante do curso de licenciatura interessados no estudo da MQ (MQ). Desta forma buscamos uma apresentação em um quadro teórico-epistemológico compatível com uma formação mais adequada do professor, além de tentar contribuir para amenizar o problema da falta de materiais didáticos para o professor de EM que queira se aprofundar em MQ.

O texto busca o embasamento na teoria de Aprendizagem Significativa de David Ausubel (2002), que eleva ao status de maior importância o conhecimento prévio do aprendiz, assim como o significado no processo de evolução conceitual. Para este psicólogo cognitivo, cada pessoa possui uma estrutura cognitiva (cognição é sinônimo de conhecimento) e por isso aprende de uma dada forma, visto que cada uma dessas estruturas é singular.

Ausubel distingue entre aprendizagem mecânica (literal e arbitrária) e aprendizagem significativa (não-literal, não-arbitrária, substantiva) e as coloca como opostos de um contínuo no qual a aprendizagem significativa é o processo por excelência de alcance de estruturas duradouras de conhecimento e de aprendizagem cognitiva de forma mais geral.

Para Ausubel, os conhecimentos (conceitos, proposições, modelos, entre outros) de maior generalidade e abstração são mais facilmente retidos na estrutura cognitiva de um dado sujeito. Desta forma, uma estrutura cognitiva organizada é hierarquizada e os conhecimentos se "encaixam" de forma que os mais específicos se "ancoram" dos mais gerais. Esta "ancoragem" ou interação entre os conhecimentos, para que ocorra aprendizagem significativa, precisa ser feita de forma não-literal e não-arbitrária, o que possibilita a atribuição do significado.

Por outro lado, o texto se apóia também no referencial teórico dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. O autor discute a importância das situações-problema no domínio de uma estrutura de conhecimento que ele denomina Campo Conceitual (Vergnaud, 1990). As situações dão sentido aos conceitos (através da geração de certas formas de conduta pelo indivíduo). Um campo conceitual é um conjunto heterogêneo de situações, conceitos e invariantes operatórios (o conhecimento implícito na ação) que estão interligados.

Com base nas premissas destes dois reconhecidos nomes da Psicologia Educacional, procuramos organizar o material de modo que possa ser potencialmente significativo, ou seja, possível de ser aprendido significativamente. Ausubel assinalava, no entanto, que aprendizagem significativa não depende apenas aprendizagem de material potencialmente significativo, pois uma das condições para ocorrência de aprendizagem significativa é um esforço cognitivo deliberado, por parte do aprendiz, para relacionar o conteúdo do material instrucional de maneira não-arbitrária e não-literal em sua estrutura cognitiva.

No processo de aprendizagem significativa, devido ao esforço do aprendiz em relacionar o conteúdo do material instrucional de forma substantiva e não-arbitrária, há a transformação de significado lógico (do material) para significado psicológico (na estrutura cognitiva). O processo de aprendizagem significativa pode, entretanto, ser facilitado se o material de ensino for preparado de forma lógica e coerente, ou seja, se for potencialmente significativo.

Por outro lado, o encadeamento do presente material segue uma tendência de dicotomizar a Teoria Clássica da Teoria Quântica. Isto é fundamentado, em parte, em uma epistemologia devida a Thomas Kuhn que considerava a FC e a FQ como versões distintas (incomensuráveis) de enxergar o mundo, ou seja, como diferentes paradigmas. Não somos kuhnianos, apenas tomamos emprestada esta visão em particular que é coerente com o tópico em questão. Além disto, pesquisas na área do Ensino de Física como as feitas por Hadzidaki (2000), por exemplo, indicam que tal abordagem tem sido frutífera na solução de problemas relativos à FQ.

Outro argumento para justificar a estrutura deste material, segue a afirmação de Ausubel de que no domínio de um conhecimento novo, o processo de construção cognitiva deve passar por três níveis: a etapa pré-operacional, a etapa operacional concreta e a etapa operacional formal (abstrata). Esses níveis correspondem, de certa forma, aos estágios piagetianos de desenvolvimento cognitivo. No entanto, alguns pesquisadores do Ensino de Física e da Psicologia Educacional especulam, ainda, a existência de uma etapa operacional pós-formal, hoje em dia, na qual estariam o "raciocínio quântico" e a "lógica quântica". cremos que a MQ está logicamente estruturada, como outros ramos da Física, porém suas premissas são diferentes das clássicas e aí jaz o cerne da questão.

Levando em conta as três etapas citadas acima, não é aconselhável introduzir o leitor em um nível de formalização matemática sem que antes tenha noção dos conceitos (e, portanto, da nova linguagem) pertinentes à MQ. Neste ponto se encaixam várias situações-problema, dando sentido aos conceitos necessários para o progresso no campo conceitual da disciplina. Após a etapa conceitual da proposta pretende-se formalizar a teoria e em continuidade discutimos os aspectos matemáticos que dão corpo à estrutura formal da MQ. O processo adotado aqui segue a ordem inversa de um mecanismo frequente de ensino da MQ, o de "dar a ferramenta" e depois aplicá-la, o que em geral deixa pouco tempo para a discussão conceitual, essencialmente importante para a temática.

Nosso objetivo é o de discutir algumas das premissas da MQ no intuito de que, a partir da lógica convencional, um professor de EM consiga obter conclusões acerca da MQ, propiciando uma visão adequada da mesma e possibilitando a discussão de temas relativos à MQ com seus alunos. Outro objetivo, compatível com esse, é o de facilitar a aprendizagem significativa da MQ ao tratar primeiramente dos conceitos e depois diferenciar os mesmos através de um tratamento mais formal.

Em resumo, não pretendemos analisar fenômenos isolados ou estruturas matemáticas complexas, mas antes, introduzir a linguagem necessária para o entendimento de fenômenos quânticos em geral, bem como discutir como alguns conceitos emprestados da FC se adaptam (de forma diferente, com outros significados) a esta área da Física, a FQ.

Em particular, serão analisados os conceitos de Sistema Físico, Variáveis Dinâmicas, Estado de um Sistema Físico e Evolução Temporal. Tais conceitos são entendidos por nós como estruturadores de uma linguagem conceitual fundamental para o estudo da Física

# O que significa Sistema Físico?

## Na Física Clássica

Como você caracterizaria os objetos de estudo da Física?

Imagine o par Terra e Sol. É conhecido o fato de que a Terra possui uma órbita, isto é, um caminho seguido ao redor do Sol. Este par de objetos (ignorando outros) interage segundo a lei de atração proposta por Isaac Newton. Além disto, tais objetos são dotados de uma característica denominada massa, ligada, classicamente, à quantidade de matéria presente nos corpos, e podem ser estudados em múltiplos aspectos através de um construto teórico imposto pela MC.



Figura 7.1: Terra e Sol "vistos" de um referencial que está sobre a Lua.

Imagine, a seguir, o interior do Sol, onde o elemento químico Hélio está em constante explosão. Durante este processo partículas carregadas emitem ondas eletromagnéticas, tal como uma antena. Tais partículas possuem um atributo denominado carga elétrica e interagem umas com as outras, gerando campos elétricos e magnéticos que se propagam ao longo do espaço e se modificam ao longo do tempo, implicando a propagação de ondas eletromagnéticas, na visão da Eletrodinâmica Clássica. Registre-se que tal fenômeno pode também ser analisado com um enfoque quântico.

Imagine, agora, um sólido formado por um conjunto de várias partículas idênticas que interagem umas com as outras como se fossem molas. Este sólido apresenta características como densidade, volume, massa, temperatura e pressão.

Estas situações são estudadas pela Física e, embora distintas, possuem vários atributos em comum. Tais atributos revelam conceitos físicos importantes e as situações são propostas para que os conceitos sejam mais facilmente entendidos.

O primeiro conceito que consideramos necessário para descrever o estudo destas situações é o de Sistema Físico. Formulamos, a seguir, uma apresentação deste conceito.

*Sistema físico é um conjunto de objetos que, em geral, interagem uns com os outros, podem ser dotados ou não de estrutura interna e possuem atributos que o caracterizam como objeto (características externas).*

No caso do par Terra-Sol, o sistema (simplificado) em questão envolve dois objetos que interagem de acordo com a lei de Gravitação Universal. Ignoraremos

aqui suas estruturas internas, mas cada objeto pode ser considerado, no contexto do estudo (a MC, no caso), esquematicamente como partícula ou como esfera, por exemplo. Ainda, no exemplo adotado, o atributo característico é a massa de cada um dos objetos.

No caso da propagação de ondas eletromagnéticas, os objetos do sistema são as partículas carregadas que interagem umas com as outras através de forças eletromagnéticas, o que altera a configuração de carga elétrica, atributo apresentado como característica do sistema.

No exemplo do sólido, os objetos constituintes do sistema são as partículas que interagem como osciladores, e os atributos que as caracterizam são a massa e a entropia (de onde derivam pressão e temperatura).

Percebe-se então que o conceito de sistema físico, que está essencialmente relacionado com o de interações e o de características externas, permeia toda a Física, sendo fundamental para a *descrição* das situações a analisar.

Fazemos agora uma pergunta sobre a qual se deve refletir antes que se passe à próxima seção: como descrever o contexto de estudo de um átomo, por exemplo?

### **Em Mecânica Quântica em particular**

Os átomos são sistemas quânticos, isto é, conjuntos de objetos que obedecem as “leis” da MQ. Eles são compostos de elétrons, prótons e nêutrons, admitindo configuração estável. Tais partículas possuem carga elétrica e massa definidas (além de spin, que ignoraremos neste momento). Os elétrons interagem uns com os outros e com os prótons através da interação eletromagnética, enquanto os prótons interagem uns com os outros através das interações forte e eletromagnética e com os nêutrons, e estes entre si, via interação forte, o que mantém o núcleo coeso.

Cabe aqui a seguinte pergunta: como é feita a descrição de um átomo de hidrogênio?

O átomo de hidrogênio, o mais simples de todos, possui um próton e um elétron, que assumem o papel de objetos quânticos do sistema físico em questão. A interação significativa que ocorre neste sistema é de origem eletromagnética. As características externas que podem, de modo simplificado, ser citadas são a massa e a carga elétrica dos constituintes. O átomo de hidrogênio apresenta configuração estável, o que não pode ser explicado pela FC.

O conceito de sistema físico está inserido em toda a Física e nos é útil para conseguir uma linguagem que *represente* a realidade em termos de entidades abstratas. Um sistema físico na MC pode *comprender* um conjunto de bolas de gude ou mesmo um possante carro de Fórmula 1. Pode também ser um sistema de cargas e correntes elétricas que gere ondas eletromagnéticas como, por exemplo, ocorre em uma cavidade ressonante, no eletromagnetismo. Pode ser um conjunto de partículas idênticas que interagem sob a ação de um campo magnético, e que podem *caracterizar* um material ferromagnético.

Estes objetos seguem, em maior ou menor grau, “leis” propostas por cientistas (uma comunidade deles). Tais “leis” são testadas e podem ser modificadas ou substituídas por outras mais adequadas ao longo do tempo. Frequentemente algumas delas são substituídas por “leis rivais”. Na MQ, várias denominações adotadas na FC são mantidas, mas mudam as “leis”. Algumas destas leis serão estudadas mais à frente.

Saliente-se que mesmo sistemas elementares isolados clássicos e quânticos, p. ex. uma bola de gude numa visão simplificada e um elétron, apresentam mecânicas diferentes.

A partir daqui serão inseridos no texto alguns questionamos ao leitor, estimulando sua participação.

## EXERCÍCIOS I

1. Apresente dois exemplos de sistemas físicos, indicando os atributos do(s) constituintes(s). Comente a relevância do estudo destes sistemas físicos para o estudo da Física.
2. O que você entende por um sistema elementar? Devemos utilizar este conceito apenas quando absoluto, ou podemos adotá-lo de forma aproximada?
3. Dê um exemplo de sistema elementar em um dado contexto.

Além dos atributos, podemos destacar outro aspecto que distingue os sistemas físicos, a saber, como eles interagem: qual a diferença essencial nas interações entre os pares Terra-Sol, elétron-próton, ou próton-nêutron no núcleo, ou ainda as que ocorrem em decaimentos nucleares.

Tais interações diferem nas suas origens e são comumente divididas em grupos, como segue:

- Interação gravitacional: ocorre entre todos os objetos massivos e é de caráter atrativo. Ex: Terra-Sol. Em geral é desprezível entre sistemas quânticos como partículas elementares e átomos.
- Interação eletromagnética: ocorre entre todos objetos dotados de carga elétrica, podendo ser atrativa se as cargas são de sinais contrários e repulsiva, se as cargas são de mesmo sinal. É relevante em todas as áreas da Física.
- Interação forte: ocorre entre os constituintes do próton e do nêutron (e de outras partículas), os chamados quarks. Nesse nível a interação forte aumenta se tentamos separar os quarks. A interação que ocorre entre prótons e nêutrons mantendo o núcleo coeso é uma interação forte residual atrativa, bastante curiosa, pois é de curto alcance, intensa até uma dada distância e que, ou decresce significativamente ou se anula de forma muito brusca para distâncias maiores do que o tamanho do núcleo. É relevante no contexto da MQ.
- Interação fraca: muito mais fraca, como o nome indica, que a interação forte, é responsável pelo decaimento beta no núcleo; havendo energia suficiente no núcleo um nêutron pode se transformar em um próton, emitindo um elétron e um neutrino. Tem relevância no contexto da MQ.

Vemos com as situações citadas que os conceitos de sistema físico, características externas e interações estão interligados e necessitam uns dos outros para o estudo da Física.

Já sabemos que o sistema Terra-Sol, as partículas constituintes dos gases do Sol, as partículas que interagem como molas em um sólido e o átomo de hidrogênio, formam objetos de estudo da Física.

Consideramos agora as perguntas abaixo sobre alguns destes sistemas

- Conhecendo a interação gravitacional entre a Terra e o Sol (e desprezando outros objetos), como podemos descrever o movimento da Terra ao redor do Sol?
- Conhecendo as interações eletromagnéticas que alteram a distribuição de cargas elétricas no interior do Sol, como podemos descrever a geração de ondas eletromagnéticas?
- Conhecendo as interações que ocorrem entre as partículas que formam "macroscopicamente"<sup>2</sup> a rede cristalina de um sólido, como podemos descrever a alteração de temperatura neste sólido?
- Conhecendo as interações eletromagnética e forte que ocorrem entre núcleons e elétrons, partículas de um átomo, como podemos descrever a emissão de fótons pelo átomo, que ocorre na transição de um estado de maior energia para um de menor energia?

Apesar do arsenal de conceitos sobre objetos, atributos e interações discutidos, ainda não sabemos responder a estas questões. Para respondê-las precisamos de outros conceitos.

## EXERCÍCIOS II

1. Dê um exemplo de um sistema físico de dois corpos considerados como objetos clássicos, apresentando seus atributos e as interações que supõe ocorrer entre eles.
2. Dê um exemplo de um sistema físico de dois ou mais objetos quânticos apresentando seus atributos e uma dada situação com as interações que considerar ocorrer entre eles.

---

<sup>2</sup>De modo que sigam as "leis" da Mecânica Estatística Clássica.

# O que significam variáveis dinâmicas?

## Na Física Clássica

Concluimos a seção passada fazendo perguntas acerca de sistemas descritos por diversos ramos da Física, a saber, a MC, o Eletromagnetismo Clássico, a Mecânica Estatística Clássica (relacionada com a Termodinâmica) e a MQ. As respostas a estas perguntas dependem de conceitos adicionais. Efetivamente, até agora nos preocupamos somente com aspectos *descritivos*, isto é, buscamos descrever um sistema identificando seus objetos, as interações entre eles e suas características externas. A partir de agora, contudo, buscamos entrar no terreno explicativo da Física ao introduzir o conceito de variáveis dinâmicas.

O sistema Terra-Sol, por exemplo, se movimenta em torno de um dado ponto denominado centro de massa do sistema. Este ponto fica no interior do Sol, pois sua posição é a média das posições dos centros de massa dos objetos (a Terra e o Sol) ponderada pela massa dos objetos do sistema. (A massa do Sol é muito maior que a da Terra.) O fato de os dois objetos girarem em torno deste ponto implica que as localizações dos elementos do sistema se modificam ao longo do tempo, bem como suas velocidades (proporcionais aos momenta lineares).

O sistema de cargas e correntes formado pelos gases em explosão no Sol tem sua distribuição alterada ao longo do tempo, o que implica em valores de campos elétricos e magnéticos em diferentes regiões do espaço, em distintos instantes de tempo.

No caso do sólido, nas situações de equilíbrio termodinâmico, este apresenta valores de temperatura, pressão e número de moles definido.

Nestas situações, percebemos que existem certos valores associados aos sistemas físicos (e aos seus constituintes) que caracterizam o modo pelo qual podemos *descrevê-los*. Dependendo da área de estudo, temos conjuntos diferentes destes valores. Tais valores podem (e devem) ser medidos e, por isso, têm um papel importante na Física, ciência na qual há uma relação dialética entre a teoria e a experimentação.

Estes valores, passíveis de serem medidos e que se vinculam à área de estudo à qual nos reportamos se referem a grandezas físicas denominadas variáveis dinâmicas. A terminologia *dinâmica* diz respeito ao fato de que, dependendo das interações e do sistema físico, estes valores podem se modificar ao longo do tempo. Nos exemplos acima, posição e velocidade são grandezas físicas destacadas no exemplo do sistema Terra-Sol, campos elétricos e magnéticos no do Sol, e temperatura e pressão no do Sólido.

Em MC estamos interessados em explicar os movimentos dos componentes de um sistema físico, dado que conhecemos as interações ocorrentes entre seus objetos. Assim, variáveis dinâmicas relevantes ao sistema são: posições dos constituintes do sistema, velocidades (proporcional aos momenta lineares) destes, e suas versões angulares, no caso de rotações. Na situação proposta interessa-nos conhecer as posições da Terra e do Sol, bem como suas velocidades (proporcionais aos momenta).

No Eletromagnetismo Clássico estamos interessados no comportamento dos campos elétrico e magnético, isto é, em configurações estáticas ou dinâmicas destes campos, supondo que temos um sistema de cargas e correntes, cujas interações são conhecidas. Assim, variáveis dinâmicas relevantes à descrição do sistema são os campos elétricos e magnéticos. Na situação citada, podemos inferir a produção de ondas eletromagnéticas através da variação dos valores dos campos no tempo.

Na Mecânica Estatística Clássica estamos interessados em descrever atributos termodinâmicos da matéria. As variáveis dinâmicas usualmente citadas são: pressão, temperatura e potencial químico (frequentemente tomado como constante na Física).

Outro ponto a ser destacado é o fato de que cada variável dinâmica possui um atributo que denominamos *dimensão*. As dimensões são características que distinguem uma grandeza física de outra. Intuitivamente percebemos o que este caráter de distinção significa. Basta tentarmos responder à pergunta abaixo.

- Se compararmos dois quilômetros com dois quilogramas, qual deles é o maior?

É óbvio que esta pergunta não faz sentido, pois estamos tratando de grandezas distintas (e, pois, com diferentes dimensões).

## EXERCÍCIOS I

1. Considerando posição e velocidade da Terra e do Sol no exemplo do par, que outras variáveis dinâmicas você determinaria?
2. Dê um exemplo de variáveis dinâmicas de diferentes dimensões.

## Em Mecânica Quântica em particular

Vimos que as variáveis dinâmicas são grandezas físicas, possuem dimensão, podem ser medidas e caracterizam o domínio de estudo bem como o sistema físico em análise.

Isto é válido em FC e também para a FQ, porém, como veremos adiante, há algumas diferenças importantes em vários aspectos das mesmas.

Uma primeira distinção diz respeito à determinação de valores de *conjuntos* de diferentes variáveis dinâmicas, para um dado sistema físico. Em MC, medir a posição de um objeto pertencente a um sistema, em princípio não altera o sistema para a medida do valor da velocidade (proporcional ao momentum) deste objeto. Isto significa que podemos formar um conjunto de variáveis dinâmicas, cujos valores podem ser simultaneamente apresentados, composto por posição e momentum (bem como momentum angular e energia, entre outros).

Em MQ isto não é mais verdadeiro. Podemos mencionar o exemplo do átomo de hidrogênio, para o qual não é possível apresentar simultaneamente os valores da posição e momentum do elétron, pois a medição de uma destas variáveis dinâmicas em geral altera o sistema e portanto a determinação de valores da outra, em relação aos que seriam obtidos numa medição sobre o sistema antes de ser alterado. A este caráter denominamos *incompatibilidade* entre variáveis dinâmicas<sup>3</sup>, e às variáveis dinâmicas que satisfazem este critério, denominamos variáveis dinâmicas incompatíveis. Às variáveis cujos valores podem ser apresentados "simultaneamente" sem conflitos, denominamos variáveis compatíveis.

---

<sup>3</sup>A medida dos valores de uma delas modifica o sistema de forma distinta da modificação que a medida dos valores da outra acarretaria.

Recorrendo a tal nomenclatura, enunciamos a assertiva abaixo.

*Em FC, todas as variáveis são compatíveis, enquanto em FQ nem todas o são.*

## Uma situação importante: o experimento de Stern-Gerlach

Vamos propor agora um problema. Imagine termos um forno que vaporiza uma amostra de prata de modo a gerar um feixe de átomos deste material. O feixe é então colimado por uma tela que possui uma fenda e incide em um detector (uma placa de vidro). O que você espera encontrar na placa de vidro? Tente responder antes de prosseguir.

Na pergunta proposta acima, esperamos obter na tela o próprio feixe.

Agora imagine que entre a tela colimadora e o detector seja inserido um eletroímã que gera um campo magnético não homogêneo na direção  $\hat{z}$  (vertical), de acordo com a Figura 7.2.

Este arranjo experimental foi concebido por Otto Stern e realizado em colaboração com Walter Gerlach, em Frankfurt, Alemanha em 1921. O experimento consiste na emissão de um feixe de átomos de prata que é colimado por uma tela e em seguida atravessa um eletroímã que produz um campo magnético não homogêneo que "aponta" em uma dada direção (ao longo de um eixo escolhido).

O átomo de prata tem 47 elétrons, além do núcleo. 46 destes elétrons formam uma configuração esfericamente simétrica, então, com momentum angular total nulo. O momentum angular total do átomo é devido apenas ao 47º elétron que tem momentum angular orbital nulo. Mas o átomo apresenta momentum angular, que é do 47º elétron. Este momentum angular é o spin do elétron, que interage com o campo magnético não homogêneo, gerando um momento magnético que está alinhado ao campo.

O feixe resultante, então, é dividido em dois, um que "incide" em uma região superior (ao centro) da placa coletora e um que incide em uma região inferior da placa (vide Figura 7.2).

Portanto, pode-se inferir que parte dos átomos detectados na placa estava com a componente do spin na direção do campo "apontando para cima" (positiva) e a outra parte "apontando para baixo" (negativa). Classicamente esperaríamos que o padrão de detecção fosse uma faixa contínua, visto que no domínio clássico, o momentum angular (orbital) varia continuamente, sendo expresso por

$$\vec{l}_c = \vec{r}_c \times \vec{p}_c$$

ou seja, pelo produto vetorial de duas grandezas com valores contínuos (posição e momentum). O feixe emergente no experimento de Stern-Gerlach, porém, é dividido em dois, o que indica que o spin, que é denominado momentum angular, é *quantizado*, isto é, suas projeções assumem apenas determinados valores, no caso, múltiplos de um valor fundamental, no caso dois. Tal fenômeno é denominado quantização espacial.

O experimento de Stern-Gerlach é um excelente exemplo não só para o estudo da quantização de momentum angular, mas também para discutir o processo de escolha

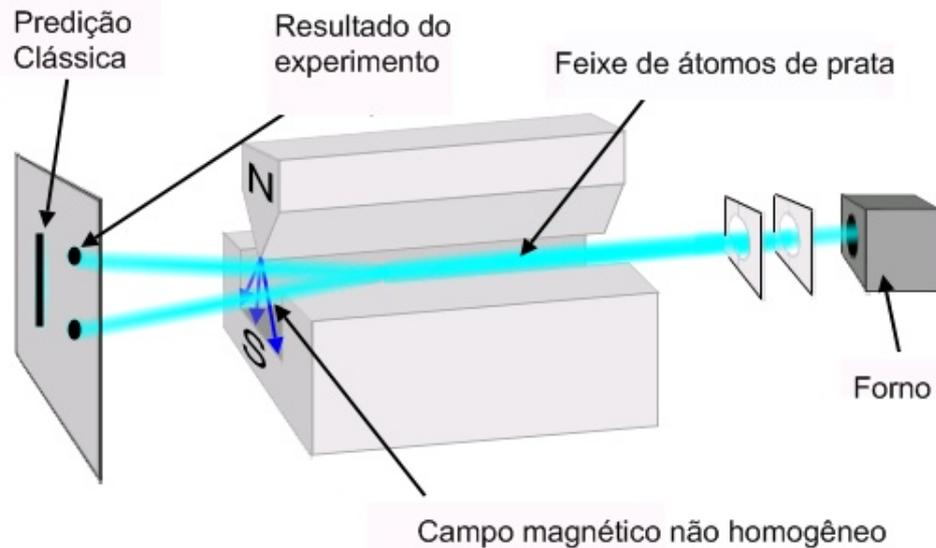


Figura 7.2: Desenho esquemático do experimento de Stern-Gerlach.

de variáveis dinâmicas associadas a um sistema quântico, assim como a existência de variáveis compatíveis e incompatíveis e a realização de processos de medição em MQ. Além disto, põe em evidência a existência do spin, com consequências inusitadas e explicando diversos fenômenos conhecidos "descritos" incompletamente pela FC.

No contexto das variáveis dinâmicas, vamos imaginar experimentos de Stern-Gerlach sequenciais.

Imaginemos primeiramente que, ao invés de um eletroímã cujo campo magnético não-homogêneo aponta na direção  $\hat{z}$ , coloquemos dois eletroímãs, em sequência, que geram, ambos, campos magnéticos não homogêneos direcionados ao longo do eixo  $\hat{z}$ .

No ato da detecção da projeção do spin na direção do campo gerado pelo primeiro eletroímã, observamos a divisão do feixe em dois (A e B). Em seguida, bloqueia-se um deles (digamos B), permitindo ao outro (A) a passagem pelo 2º eletroímã. Será detectado o mesmo feixe (A) depois da passagem pelo segundo eletroímã, ou seja, o feixe A, todo constituído por elétrons (entenda-se, os átomos cujo momentum angular total é igual ao spin do último elétron) com projeção de spin orientada na direção  $\hat{z}$  (positiva), não se alterou ao passar pelo segundo eletroímã. Parece natural, não é?

Um aspecto muito importante relativo ao resultado da medição de uma variável dinâmica (grandeza física) em MQ e que é revelado neste experimento é que logo após uma medida da variável, o sistema físico fica "caracterizado" por esta variável, ou seja, guarda a informação sobre tal grandeza física.

Mudemos agora, o arranjo experimental, posicionando o segundo eletroímã de modo que o campo não-homogêneo gerado por ele fique direcionado ao longo do eixo  $x$ .

Repetimos o processo de bloquear o feixe B, a componente (negativa) da projeção de spin após a passagem pelo 1º eletroímã, deixando passar (selecionando) somente o feixe A. Desta forma, os átomos de prata selecionados estarão preparados com com-

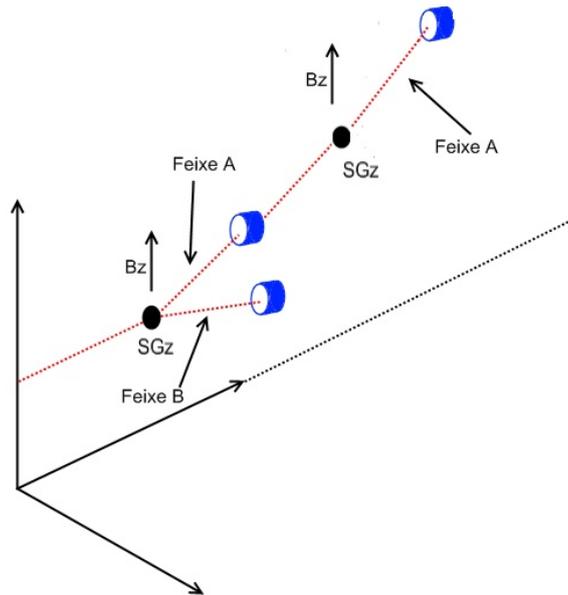


Figura 7.3: Experimento de Stern-Gerlach com dois eletroímãs cujo campo não homogêneo aponta na direção  $z$

ponente  $z$  do spin ( $s_z$ ) positiva. Ao passar pelo 2º eletroímã, cujo campo magnético não-homogêneo está orientado na direção  $\hat{x}$ , cada átomo do feixe A interage com este campo e o padrão que se forma na tela é relativo à outra variável dinâmica,  $s_x$ , a componente do spin na direção  $\hat{x}$ . O feixe se divide em dois, parte dos átomos estando com valores positivos de  $s_x$  ( $\frac{\hbar}{2}$ ) e parte com valores negativos ( $-\frac{\hbar}{2}$ ) (feixes C e D no exemplo). O feixe A, portanto, não fica inalterado pela passagem pelo 2º eletroímã (segundo a Figura 7.4)! Serão as variáveis dinâmicas  $s_z$  e  $s_x$  compatíveis ou incompatíveis?

Imagine finalmente que coloquemos neste último caso um terceiro eletroímã cujo campo está direcionado ao longo do eixo  $z$ . Bloqueando a passagem da componente  $\hat{z}$  negativa (feixe D) e permitindo a passagem do feixe C pelo 3º eletroímã, que padrão de detecção será encontrado em um anteparo?

Você diria que seria um feixe só com a componente do spin positiva? Errado! O feixe se divide em dois novamente! Intuitivamente, esperaríamos que a medição de  $s_x$  depois da medição de  $s_z$  não destruísse a informação inicial desta última variável dinâmica, mas o resultado indica que estas duas variáveis dinâmicas ( $s_z$  e  $s_x$ ) são incompatíveis e a medição de uma destrói a informação prévia relativa à outra. Isto significa que não existe a situação física de "determinação simultânea" destas duas variáveis (por exemplo,  $s_z = \frac{\hbar}{2}$  e  $s_x = \frac{\hbar}{2}$ ). Uma das duas variáveis dinâmicas pode caracterizar o feixe, mas não as duas em conjunto.

Como visto, não podemos selecionar valores de variáveis incompatíveis simultaneamente em um processo de medição. Escolher posição e momentum, por exemplo, não é possível, pois toda medição de momentum destruirá informação prévia acerca da posição do sistema. Deve-se levar em conta que as medições às quais nos referimos são medições sequenciais, isto é, a medição da segunda é imediatamente realizada depois da primeira, de forma que não haja tempo para o sistema alterar sua configuração decorrente da primeira medição.

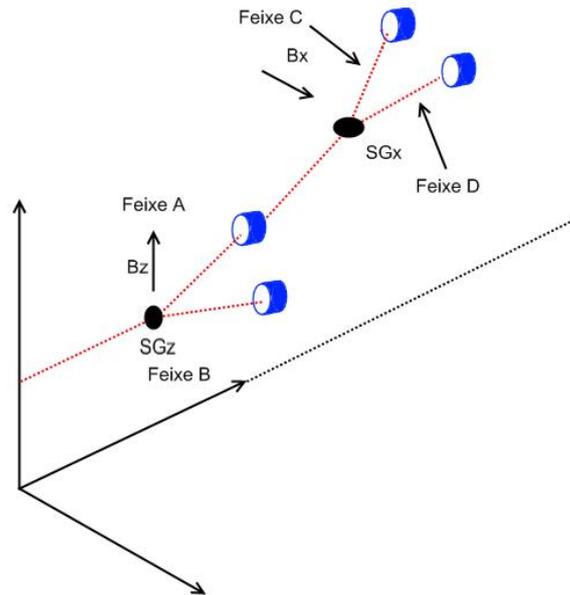


Figura 7.4: Experimento de Stern-Gerlach com dois eletroímãs cujo campo não homogêneo aponta na direção  $z$

As variáveis dinâmicas que estão sendo avaliadas no exemplo do experimento de Stern-Gerlach são a componente  $z$  do spin (quando o campo magnético não-homogêneo está na direção  $\hat{z}$ ) e a componente  $x$  do spin (quando o campo magnético não-homogêneo está na direção  $\hat{x}$ ). A determinação destas variáveis, então, não pode ser feita "de forma simultânea".

Outro aspecto importante a ser ressaltado na MQ é o de que a medida de uma variável dinâmica associada a um objeto quântico pode resultar em mais de um valor no processo de medição. Aí jaz uma diferença em relação à FC: em princípio, em FC, idealmente, se medirmos a posição de um objeto, estipuladas as condições iniciais (preparar o objeto de uma dada forma), preparando um número qualquer de objetos sob as mesmas condições iniciais, obteremos (dentro de limites aceitáveis de erro) sempre o mesmo resultado para as medições. Isto nos permite elaborar a assertiva abaixo

*Para sistemas que obedecem as leis da FC, se preparamos  $N$  sistemas físicos idênticos da mesma forma, obteremos os mesmos resultados no processo de medição de uma grandeza física selecionada.*

Em MQ isto se dá de outra forma. Se lembrarmos do experimento de Stern-Gerlach, o feixe de átomos de prata, quando submetido ao campo magnético não homogêneo na direção  $z$ , se divide em dois, em geral, como se vê esquematicamente na Figura 7.2.

Isto significa que, embora preparemos  $N$  átomos de prata (onde  $N$  é muito grande) da mesma maneira, podemos obter diferentes resultados no processo de medição. No caso da projeção do spin do elétron na direção  $\hat{z}$  em particular, os

resultados correspondem aos dois valores  $s_z = \frac{\hbar}{2}$  (spin para cima) e  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$  (spin para baixo). Parte dos átomos no processo de medida resultará em geral projeção de spin para cima e a outra parte na projeção de spin para baixo. Isto nos leva a inserir um conceito de probabilidade na MQ. Enunciamos outra assertiva:

*Em MQ, mesmo se preparamos sistemas físicos idênticos da mesma forma, obteremos, em geral, diferentes resultados no processo de medição. O número de possibilidades de resultados depende da variável dinâmica submetida à medição.*

Vale aqui ressaltar um ponto: este caráter probabilístico da MQ é próprio da Teoria (ou mesmo da Natureza) e não é devido a erros experimentais (falhas de instrumentos de medição ou experimentos inadequados). Estes erros existem na prática, porém, teoricamente podem ser considerados arbitrariamente pequenos.

## EXERCÍCIOS II

1. Cite dois exemplos de variáveis dinâmicas em FC e em FQ.
2. São  $s_x$  e  $s_y$ , variáveis incompatíveis? Podemos falar de um vetor de spin na MQ?
3. Já que o spin é um tipo de momentum angular (como é também o momentum angular orbital) você diria que existe uma variável dinâmica vetorial  $\vec{l}$ ?
4. Em MQ as três componentes da variável de posição são compatíveis. Pode-se falar na grandeza física  $\vec{r}$ ? E quanto ao momentum?
5. Imagine três experiências sequenciais de Stern-Gerlach, com campos não-homogêneos  $B_z, B_x$ . Um feixe de 100.000 átomos de prata passa pelo primeiro eletroímã e resulta em dois feixes, com 80.000 (+) e 20.000 (-) átomos respectivamente. a) O feixe menor passa pelo segundo eletroímã. Quantos átomos você espera encontrar após esta passagem, com projeção de spin (+) e quantos com projeção de spin (-)? b) Após a passagem, pelo terceiro eletroímã, do feixe com projeção de spin (-), você espera encontrá-lo todo com projeção de spin (-) na direção  $\hat{x}$ ?

# O que se entende por Estado de um Sistema Físico?

## Na Física Clássica

Outro conceito a introduzir é o de *estado* de um sistema físico. Vimos que os sistemas físicos compreendem em geral objetos que interagem uns com os outros<sup>4</sup>, possuem características externas e podem ou não possuir estrutura interna, além de ter a eles associado um conjunto de variáveis dinâmicas relevantes ao problema.

Pergunta: qual o conjunto de variáveis dinâmicas que nos permite explicar (descrever completamente) o comportamento de um sistema clássico? Disto se desdobram três questionamentos acerca de três sistemas físicos usados anteriormente como exemplos.

- Quais as variáveis dinâmicas que nos permitem explicar o movimento do sistema Terra-Sol?
- Quais as variáveis dinâmicas que nos permitem explicar o comportamento das ondas eletromagnéticas emitidas pelo Sol?
- Quais as variáveis dinâmicas que nos permitem explicar o comportamento de um sólido?

Percebe-se que a descrição (completa) do comportamento de um sistema é fundamental no estudo da Física. É importante, então, introduzir o conceito de estado do sistema. Diremos que

*Estado de um sistema físico é a configuração, num dado instante de tempo, de todas (uma ou mais) variáveis dinâmicas relevantes ao problema físico de interesse.*

A determinação do estado de um sistema físico (em um dado instante de tempo) é feita, pois, através do conhecimento dos valores do maior conjunto de variáveis dinâmicas independentes que interessam ao problema.

- No caso do sistema Terra-Sol da MC, um objetivo frequente é estudar o movimento do sistema, o que ocorre ao determinarmos a trajetória dos constituintes do sistema. Portanto, neste caso, o estado do sistema fica determinado se conhecemos as posições e momenta (velocidades) dos objetos pertencentes ao sistema.
- No caso do Eletromagnetismo Clássico, o objetivo principal é estudar a configuração de campos elétricos e magnéticos, que serão as variáveis dinâmicas a determinar, se forem supostas conhecidas as distribuições de cargas e correntes. Assim, o estado de um sistema eletromagnético (em um dado instante de tempo) é determinado pelo conhecimento dos valores de tais campos (neste instante).

---

<sup>4</sup>Desconsiderando possíveis interações com a vizinhança, isto é, a região exterior ao conjunto de objetos selecionados.

- No caso da Mecânica Estatística Clássica, o estado termodinâmico de um sistema é determinado através do conhecimento simultâneo das variáveis dinâmicas pressão, temperatura e potencial químico, que se relacionam através das equações de estado.

### Na Mecânica Quântica em particular

Recordemos o experimento de Stern-Gerlach. Sabemos que nem todas as variáveis dinâmicas caracterizam concomitantemente o estado do sistema, o que nos restringe a um conjunto de variáveis compatíveis entre si (por exemplo, a componente do momentum angular orbital ( $l_z$ ), a componente  $z$  do spin ( $s_z$ ) e a energia ( $E$ ) do sistema, se esta for uma variável dinâmica compatível com as outras duas). Vemos, ademais, que não temos um conjunto único de variáveis dinâmicas que possibilita descrever o estado de um sistema físico, na região de validade da MQ. Em geral escolhe-se um conjunto de variáveis dinâmicas compatíveis que permita extrair a máxima informação possível sobre o estado do sistema.

### EXERCÍCIOS I

1. Podemos escolher posição e projeção de spin na direção como variáveis compatíveis? O momentum e a projeção de spin na direção? Energia cinética e energia potencial?

No contexto específico do experimento de Stern-Gerlach, a componente do spin do elétron, como visto, pode ter valores  $s_z = \frac{\hbar}{2}$  e  $s_z = -\frac{\hbar}{2}$ . É por esta razão que o feixe de átomos de prata é dividido, na medição, em dois, cada um dos feixes sendo composto de átomos com um dos valores possíveis de projeção de spin. Se a única variável dinâmica do sistema fosse (além do spin total) uma das componentes do spin, então a informação a obter em um primeiro experimento seria a de qual parte das medições realizadas para esta variável dinâmica indicaria a projeção do spin na direção do campo negativa e qual indicaria projeção positiva (no dado instante de tempo). Esta informação pode decorrer de várias possibilidades, que esquematicamente, podemos *representar* pela notação

$$|\psi\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$$

onde  $|\psi\rangle$  é uma representação simbólica (notação de Dirac) do estado do sistema, denominada vetor de estado. Isto significa que o estado do sistema é determinado de tal forma que em um experimento, obteremos parte dos átomos de prata com componente do spin (do elétron da camada de valência) positiva e o restante deles com componente de spin negativa. O estado do sistema, de fato, informa acerca das amplitudes de probabilidade (das quais decorrem as probabilidades) de obtermos um dado valor de uma variável dinâmica, ou seja, de encontrar o estado do sistema, quando da medida, em um dos auto-estados da variável dinâmica. No caso do experimento de Stern-Gerlach,  $c_+$  representa a amplitude de probabilidade de encontrar a componente do spin na direção do campo com valor positivo e  $c_-$  representa a amplitude de probabilidade de encontrar a componente do spin na direção do campo

com valor negativo. Tais amplitudes, em geral, assumem valores complexos (como será visto adiante), enquanto as probabilidades são reais.

Então o estado do sistema quântico fica completamente descrito ao conhecermos os valores das variáveis dinâmicas<sup>5</sup> compatíveis (em um instante de tempo) e as amplitudes de probabilidade de obtermos, em uma medição, cada um destes valores.

É crucial entender que no processo de medição, podemos obter vários valores para uma variável dinâmica (mesmo na ausência de erro experimental). A representação simbólica

$$\hat{A}|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

onde  $\hat{A}$  é um ente matemático denominado operador, que representa a variável dinâmica que queremos medir,  $a'$  é um dos valores obtidos em um processo de medição de tal variável dinâmica representada por  $\hat{A}$  e  $|a'\rangle$  é o estado relativo a este valor, denominado auto-estado do operador  $\hat{A}$ , caracteriza a chamada equação de autovalores.

No caso da projeção do spin na direção tal equação pode ser escrita como (desdobrando)

$$\hat{s}_z|+\rangle = +\frac{\hbar}{2}|+\rangle$$

$$\hat{s}_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle$$

e significa que a projeção do spin assume valor  $+\frac{\hbar}{2}$  quando está "apontando para cima" e  $-\frac{\hbar}{2}$  quando está "apontando para baixo" na dada direção. Isto implica em dizer que uma variável dinâmica pode adotar vários valores. A este conjunto de valores possíveis da variável dinâmica denominamos espectro de autovalores. O espectro informa sobre o número de (e os valores possíveis das) variáveis dinâmicas.

No processo de medição, em geral  $|\psi\rangle$  não é um autoestado de  $\hat{A}$  e assim mesmo, os resultados são sempre os autovalores  $a'$ ! Esta propriedade é incorporada como "postulado da projeção". A razão deste nome é que antes da medida, em geral, o sistema quântico não se encontra em um auto-estado de  $\hat{A}$ , porém após a realização da medida, o estado do sistema se transforma em um dos auto-estados de  $\hat{A}$ .

## EXERCÍCIOS II

1. Um feixe de elétrons está no estado de spin  $|+\rangle_z$ . Medimos a projeção de spin nesta direção. O que obteremos?
2. Um feixe de elétrons está no estado de spin  $|+\rangle_z$ . Medimos a projeção de spin na direção  $\hat{x}$ . O que obteremos?
3. Um feixe de elétrons está no estado de spin  $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z$ . Medimos a projeção do spin na direção  $\hat{z}$  positiva, o que obteremos? Qual o significado físico deste valor?

---

<sup>5</sup>Um conjunto de variáveis dinâmicas todas compatíveis entre si.

4. Explique com suas próprias palavras o conceito de estado de um sistema físico tanto na FC como na FQ. Quais as diferenças existentes no conceito quando relacionado às duas instâncias mencionadas?
5. A experiência de Stern-Gerlach não é realizada com elétrons livres, mas sim usando outros objetos quânticos como átomos. Explique a razão.

### Uma variável dinâmica especial: a energia

Já mencionamos que os objetos de um sistema interagem uns com os outros e que tais interações podem variar inclusive em natureza. Vamos agora introduzir a variável dinâmica denominada energia, que está associada a uma função denominada hamiltoniana na MC e a um operador denominado hamiltoniano na MQ. Tal operador (bem como a função) torna explícitas as interações que ocorrem em um sistema físico. Denotamos a função hamiltoniana por  $H$  e o operador hamiltoniano por  $\hat{H}$ .

Vimos que a determinação do estado de um sistema físico pressupõe o conhecimento de valores de variáveis dinâmicas (compatíveis) associadas ao sistema (em um dado instante de tempo). Os estados do sistema dependem das interações que nele ocorrem.

Se reunirmos todas as interações que ocorrem entre os constituintes do sistema em um único arcabouço, poderemos conferir a este o importante status de responsável pela caracterização do estado do sistema (dos valores das variáveis dinâmicas associadas ao estado). As interações por si só não caracterizam, no entanto, o estado do sistema. Existe um ente matemático que não só as engloba, como abarca, também outros fatores responsáveis pela caracterização do estado (e como ele se modifica no tempo).

Na FC compete a uma função  $H$  este papel, enquanto na FQ esta tarefa recai sobre o operador  $\hat{H}$ . Nem  $\hat{H}$  (nem sempre a eles corresponde a variável dinâmica energia). Historicamente, coube a William Rowan Hamilton introduzir na FC o conceito desta função, por isto denominada função hamiltoniana ( $H$ ), enquanto o operador correspondente, na MQ é denominado operador hamiltoniano ( $\hat{H}$ ).

A dimensão de grandezas físicas eventualmente associadas à hamiltoniana ou ao operador hamiltoniano é a de energia.

Para um sistema clássico de massa  $m$ , sem estrutura interna, livre da influência de interações que dependem do tempo de forma explícita e cuja energia potencial independe da velocidade dos constituintes do sistema, a hamiltoniana é escrita como:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$$

onde  $\frac{p^2}{2m}$  representa a energia cinética, enquanto  $V(\vec{r})$  é uma energia potencial que depende apenas da posição do sistema. Esta situação em especial, configura a conservação da energia mecânica em MC.

Imaginemos, agora, o sistema massa-mola clássico. A interação que ocorre entre a massa e a mola é do tipo elástica, com energia potencial  $V(x)$  dada por



Figura 7.5: Menina em um balanço

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

onde  $k$  é uma constante que caracteriza a rigidez da mola, denominada constante elástica. Molas mais rígidas sofrem menores compressões ou distensões para um dado valor de força (em comparação com molas menos rígidas submetidas à mesma força), portanto, apresentam maior valor de  $k$ . Uma comparação extrema seria a comparação entre uma mola usada no sistema de amortecimento de um caminhão (altíssima rigidez, logo altíssimo valor de  $k$ ) e uma mola de espiral usada para encadernação (baixíssima rigidez, logo baixíssimo valor de  $k$ ). Repare também que a energia potencial depende diretamente deste parâmetro, logo na comparação das duas molas citadas, a energia transformada para a compressão ou distensão de uma mola rígida (como a de amortecimento) deve ser muito maior que a energia transformada para comprimir ou distender uma mola de espiral de caderno.

Um exemplo prático é o do comportamento de um balanço para pequenas amplitudes de oscilação.

Se considerarmos um balanço que seja movimentado (desconsiderando a resistência do ar) de forma a que o deslocamento angular máximo em relação à posição de equilíbrio seja de 10 graus, haverá movimento periódico, da mesma forma que ocorreria para um sistema massa-mola clássico. Vamos fazer uma estimativa de qual deve ser o comprimento horizontal máximo relativo à posição de equilíbrio do balanço, considerando um balanço de 1,70 m de comprimento. Desta forma,

$$x_{max} = l \operatorname{sen}(\theta_{max})$$

em que  $x$  é o deslocamento horizontal,  $l$  é o comprimento do balanço e  $\theta$  o ângulo que caracteriza o deslocamento angular do balanço em relação à posição de equilíbrio. Logo, usando os dados fornecidos

$$x_{max} = 1,70 \operatorname{sen}(10^\circ)$$

$$x_{max} \simeq 0,295m = 29,5cm$$

Se o deslocamento máximo em relação à posição de equilíbrio for de aproximadamente 29,5 cm (para um balanço de comprimento 1,70 m), a hamiltoniana para o sistema (balanço + pessoa) será igual (no formato) à hamiltoniana para o sistema massa-mola, pois teremos um termo de energia cinética  $K = \frac{p^2}{2m}$  em que  $m$  é a massa do sistema (pessoa e balanço) e um termo de energia potencial (que dará origem à força elástica) que depende do quadrado da distância relativa à posição de equilíbrio do sistema, ou seja,  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ . Então

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

em que  $m$  novamente representa a energia mecânica do sistema.

Para uma partícula carregada de massa  $m$  e carga  $q$  em um campo eletromagnético, temos interações eletromagnéticas que dependem tanto da posição onde se encontra a partícula quanto do instante de tempo em que o fenômeno é analisado. A hamiltoniana é escrita como

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi(\vec{r}, t)$$

onde  $\vec{p}$  é o momentum mecânico (proporcional à velocidade) associado à partícula,  $\phi(\vec{r}, t)$  é o potencial eletromagnético escalar e  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  o potencial eletromagnético vetorial. As funções  $\phi$  e  $\vec{A}$  geram os campos elétrico e magnético e expressam de forma indireta a "lei" de Faraday-Lenz e a lei de Ampère-Maxwell que atribuem a existência de um campo elétrico induzido à presença de um campo magnético variante no tempo (e vice-versa). O termo  $-q\vec{A}$  é o momentum gerado pelo campo eletromagnético. Neste caso, a hamiltoniana varia no tempo.

A equação de movimento que se origina desta hamiltoniana é a da força de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

que pode ser identificada com a soma das forças elétrica e magnética.  $\vec{E}$  é o campo elétrico sentido pela partícula carregada e  $\vec{B}$  o campo magnético, sendo  $\vec{v}$  a velocidade da partícula. As variáveis mencionadas são solução do conjunto de equações de Maxwell (lei de Gauss, lei de Gauss para o magnetismo, lei de Ampère, lei de Faraday),

Na MQ também ocorrem interações, mas é preciso descrevê-las com o auxílio de operadores (assim como as variáveis dinâmicas). Estes operadores apresentam em geral a característica especial de ação não comutativa, ou seja, muitas vezes pode ocorrer que para dois operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , quando aplicados em sucessão em uma ou em outra ordem, sobre o estado de um sistema

$$\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle \neq \hat{B}\hat{A}|\psi\rangle.$$

(Simbolicamente  $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ .)

Isto significa que a aplicação sucessiva primeiro de um operador e depois de um operador  $\hat{B}$ , sobre um estado  $|\psi\rangle$ , em geral não será igual se realizada na ordem inversa. O fato de as variáveis dinâmicas serem representadas por operadores que não comutam, reflete o fato de tais variáveis serem incompatíveis.

Consideremos o átomo de hidrogênio, cujo número atômico é 1 e em que o número de elétrons também é 1. O operador hamiltoniano para este sistema é dado, em um modelo simplificado, em que a massa do núcleo é considerada infinita<sup>6</sup> por

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} \right)$$

onde  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo.

Vê-se que o operador  $\hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$  é associado à energia cinética e  $\hat{V} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} \right)$ , o operador associado à energia potencial. A interação associada é eletrostática. Como  $\hat{p}^2 \left( \frac{1}{r} \right)$  resulta que

$$\hat{H}\hat{p} \neq \hat{p}\hat{H}$$

e

$$\hat{H}\hat{p} \neq \hat{r}\hat{H}$$

A argumentação para estes fatos é a de que a posição e o momentum são variáveis incompatíveis e não formam conjunto para a determinação do estado do sistema. Entretanto, podemos escolher como variáveis dinâmicas o momentum angular orbital total e a componente  $z$  do momentum angular orbital, que são variáveis compatíveis entre si e com a energia dada pela expressão do hamiltoniano (neste caso – sistema conservativo com análogo clássico).

$$\hat{L}^2 \hat{L}_z = \hat{L}_z \hat{L}^2$$

Como  $\hat{L}^2$ ,  $\hat{L}_z$  e  $\hat{H}$  comutam neste caso, as três variáveis correspondentes formam um conjunto de variáveis dinâmicas compatíveis. É importante observar que as componentes do operador momentum angular orbital ( $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  e  $\hat{L}_z$ ) não comutam.

O átomo de hidrogênio (no modelo aqui proposto) é um sistema conservativo (pois as interações que nele ocorrem independem do tempo e da velocidade) e os autovalores do operador hamiltoniano, então, são valores da energia total deste sistema. Um conjunto de variáveis dinâmicas compatíveis para este problema, como vimos, é formado pelas grandezas físicas correspondentes aos operadores  $\hat{H}$ ,  $\hat{L}^2$  e  $\hat{L}_z$ . Então este sistema possui auto-estados  $|E_n, l, m\rangle$ , satisfazem

$$\hat{H}|E_n, l, m\rangle = E_n|E_n, l, m\rangle,$$

$$\hat{L}^2|E_n, l, m\rangle = l(l+1)\hbar|E_n, l, m\rangle,$$

$$\hat{L}_z|E_n, l, m\rangle = m\hbar|E_n, l, m\rangle,$$

onde  $n$ ,  $l$  e  $m$  são denominados números quânticos principal, de momentum angular orbital e magnético respectivamente.

Em resumo, em MC a hamiltoniana e em MQ o operador hamiltoniano levam em conta as interações que ocorrem em um sistema físico. A diferença é que na FC, a

<sup>6</sup>Ignorando o spin do elétron e o do núcleo

energia de um sistema conservativo, representada diretamente pela hamiltoniana, é compatível com qualquer variável dinâmica, enquanto que na MQ, a energia de um sistema conservativo, auto-estado do operador hamiltoniano, só é compatível com algumas variáveis dinâmicas.

### EXERCÍCIOS III

1. Podemos ter em MC, para  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ , estados  $|E, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{l}\rangle$ ?
2. Podemos ter em MQ, para  $H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}})$ , estados  $|E, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{l}\rangle$ ?  $|E, \mathbf{l}\rangle$ ? Estados  $|E, \mathbf{p}\rangle$ ? Estados  $|E, \mathbf{r}\rangle$ ?
3. Se  $|E_1, l, m\rangle$  e  $|E_2, l, m\rangle$  formam estados possíveis para um dado  $H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}})$ , poderão existir estados  $|\varphi\rangle = c_1|E_1, l, m\rangle + c_2|E_2, l, m\rangle$ ? Se a resposta for afirmativa  $|\varphi\rangle$  será auto-estado de energia (auto-estado do operador hamiltoniano)?  $|\varphi\rangle$  será auto-estado de  $\hat{\mathbf{L}}^2$ ?  $|\varphi\rangle$  será auto-estado de  $\hat{L}_z$ ?

# O que significa Evolução Temporal do Estado de (das Variáveis Dinâmicas associadas a) um Sistema Físico?

## Na Física Clássica

Devemos ter em mente que as características de um sistema (seja este clássico ou quântico) em geral não permanecerão as mesmas ao longo do tempo. A esta modificação do estado ( e/ou das variáveis dinâmicas de) um sistema físico ao longo do tempo, denominamos evolução ou variação temporal.

Na construção de uma teoria se incluem de modo fundamental, as equações de movimento que ditam as regras da variação temporal. Isto implica em que, para se ter uma teoria física, é preciso saber como o sistema se modifica com o tempo.

Desta forma, a evolução temporal dos sistemas físicos deve ser regida por uma ou mais "leis" físicas.

Na situação do sistema Terra-Sol, verifica-se que os objetos pertencentes ao sistema circundam o centro de massa do mesmo. O fato de as posições e velocidades dos constituintes do sistema se modificarem ao longo do tempo, expressa a evolução do estado do sistema no tempo, através da alteração dos valores das variáveis dinâmicas relevantes ao problema. Estas alterações não são arbitrárias e dependem das interações que o sistema sofre.

- No caso da MC, a evolução temporal de um sistema de partículas é descrita pelas trajetórias seguidas pelas partículas.

Alternativamente podemos descrever a evolução temporal do centro de massa do sistema de partículas. O momentum linear total de tal sistema,  $\vec{P}$ , satisfaz

$$\vec{P} = M\vec{v} = \sum_k \vec{p}_k$$

em que  $M$  é a massa total do sistema,  $\vec{v}$  é a velocidade do centro de massa e  $\vec{p}_k$  é o momentum linear da partícula  $k$ . Para uma partícula (índice  $k$ ) as equações de movimento são muitas vezes apresentadas na forma newtoniana

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\vec{p}_k}{m_k},$$

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \sum \vec{F}^{(k)},$$

em que  $\sum \vec{F}^{(k)}$  é a soma das forças que agem sobre a partícula  $k$ .

Para um conjunto de partículas tem-se então, sendo  $M\vec{r}_{cm} = \sum_k m_k \vec{r}_k$  as equações de movimento

$$\frac{d\vec{p}_{cm}}{dt} = \frac{\vec{P}}{M},$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}.$$

Hamilton apresentou uma formulação alternativa para as equações de movimento da MC, trabalhando com uma função escalar que depende das posições e momenta dos constituintes e, eventualmente, do tempo.

Analisemos as equações de Hamilton no caso mais simples de um sistema conservativo, uma partícula de massa  $m$ , com energia cinética  $T = \frac{\vec{p}^2}{2m}$  e energia potencial  $V(x)$ .

A função hamiltoniana  $H(\vec{r}(t), \vec{p}(t))$  neste caso não depende explicitamente do tempo e é a energia total da partícula  $H = T + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ . Como a energia se conserva

$$\frac{dH}{dt} = 0 = \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{p^2}{2m} \right] + \frac{d}{dt} [V(x)] \right\},$$

portanto

$$0 = \frac{|p|}{m} \frac{d}{dt} [|p|] + \frac{d}{dx} [V(x)] \frac{dx}{dt}.$$

Lembrando a definição de momentum, resulta

$$0 = \frac{|p|}{m} \left\{ \frac{d}{dt} [|p|] + \frac{d}{dx} [V(x)] \right\}.$$

Logo

$$\frac{d}{dt} [|p|] = -\frac{d}{dx} [V(x)],$$

e

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

que é a segunda lei de Newton.

Considerando a função hamiltoniana Hamilton apresentou equações de movimento, que na situação unidimensional  $H(q(t), p(t))$  são

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

e

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Para a escolha  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$  que são as equações de Newton no caso unidimensional.

A formulação de Hamilton tem paralelo em equações a serem apresentadas na MQ, mas o contexto físico é diverso.

No caso das partículas carregadas que são fontes de campos elétricos e magnéticos, percebe-se a emissão de ondas eletromagnéticas (radiação solar, no exemplo citado anteriormente). O fato de o valor dos campos elétricos e magnéticos se alterarem no tempo expressa a propagação das ondas eletromagnéticas e caracteriza a evolução temporal deste sistema.

- No caso da Teoria Eletromagnética Clássica, as "leis" de evolução temporal são apresentadas como as equações de Maxwell que, na situação de uma distribuição de cargas e correntes no vácuo, são:

$$\oint \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} ds = 0,$$

$$\oint \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 i(t) + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left[ \oint \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} ds \right],$$

$$\oint \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} ds = \frac{q(t)}{\epsilon_0},$$

$$\oint \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \left[ \oint \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} ds \right],$$

onde  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  é a indução magnética,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  o campo elétrico,  $q(t)$  a carga elétrica,  $i(t)$  a corrente elétrica,  $\mu_0$  a permeabilidade magnética do vácuo,  $\epsilon_0$  a permissividade elétrica do vácuo e  $c$  a velocidade da luz no vácuo. As derivadas temporais indicam o aspecto de variação temporal dos campos elétrico e magnético. As equações acima são respectivamente a lei de Gauss para o magnetismo, a lei de Ampère-Maxwell, a lei de Gauss e a Lei de Faraday-Lenz em suas formas integrais.

A primeira das equações, vulgarmente chamada lei de Gauss para o magnetismo, afirma que o fluxo de campo magnético através de uma superfície fechada é nulo, ou seja, que não existem fontes de campo magnético. A segunda é a lei de Ampère-Maxwell. A terceira equação é a lei de Gauss que mostra o fato de que uma carga gera um fluxo de campo elétrico. A última é a lei de Faraday, cujo significado é o de que a variação temporal no fluxo de campo magnético gera um campo elétrico induzido, uma lei simétrica à de Ampère-Maxwell que estabelece que corrente e variação no fluxo de campo elétrico geram campo magnético induzido.

Então, como vemos, temos "leis" de evolução temporal que nos informam como variam no tempo, as variáveis dinâmicas relevantes a um problema, ou seja, como varia no tempo o estado do sistema físico clássico.

No caso da MQ também devemos ter uma ou mais "leis" que governem a evolução temporal do sistema quântico. Você tem alguma idéia a respeito?

## Em Mecânica Quântica em particular

O problema central da determinação da evolução temporal de um sistema quântico, adotando uma escolha especial, a descrição de Schrödinger, pode ser configurado como o de poder conhecer o estado do sistema em qualquer instante de tempo, desde que conheçamos as interações que atuam neste sistema. Como nos casos clássicos, supomos que em um dado instante arbitrariamente escolhido conhecemos o estado deste sistema. O objetivo é usar a causalidade, isto é, inferir como se comportará o estado do sistema em qualquer instante de tempo (efeito), tendo sido dada uma condição inicial e especificadas as interações ocorrentes no sistema (causa).

Suponha que o estado de um sistema quântico seja conhecido em um instante  $t = t_0$  (e representado por  $|\psi(t_0)\rangle$ ). Neste instante podemos conhecer as amplitudes

de probabilidade de encontrar o sistema com dados valores das variáveis dinâmicas relevantes ao problema. Voltemos ao caso do experimento de Stern-Gerlach. Suponha que vamos realizar o experimento e que o estado de spin do sistema esteja determinado em  $t = t_0$

$$|\psi(t_0)\rangle = c_+(t_0)|+\rangle + c_-(t_0)|-\rangle.$$

Buscamos conhecer o estado do sistema em outro qualquer instante de tempo, ou seja, queremos estabelecer a evolução temporal do sistema e determinar seu estado em função das amplitudes de probabilidade de encontrar o sistema em auto-estados da componente  $z$  do spin neste caso, no instante  $t$ , isto é,

$$|\psi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle.$$

Isto significa que no instante  $t$ , o estado do sistema será conhecido se as amplitudes de probabilidade  $c_+(t)$  e  $c_-(t)$  o forem.

Para um sistema clássico é possível antever o resultado de uma medição das variáveis dinâmicas, desde que tenham sido estipuladas as condições iniciais e as interações ocorrentes no sistema. Por exemplo:

- 
- Na MC: supondo que a Terra e o Sol estejam nas posições  $\vec{r}_T$  e  $\vec{r}_S$  respectivamente e com velocidades  $\vec{v}_T$  e  $\vec{v}_S$  em um instante de tempo  $t_0$  e que interagem segundo a lei de atração gravitacional, é possível determinar as posições e velocidades em instantes de tempo  $t$  posteriores, dos constituintes do sistema.
- Na Teoria Eletromagnética Clássica: supondo que as partículas carregadas do Sol emitem ondas eletromagnéticas (no vácuo), pode-se determinar a intensidade das ondas em qualquer instante de tempo, se conhecermos de antemão as condições iniciais  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e a interação eletromagnética que ocorre no sistema.

Analisemos, agora, o que ocorre com um sistema quântico.

- Na MQ (na descrição de Schrödinger): supondo que um conjunto de átomos de prata sofre a ação de um campo magnético não-homogêneo em uma dada direção e admitindo que conheçamos o estado de spin de um dado átomo no instante  $t_0$ , podemos determinar o estado, em qualquer outro instante de tempo e em particular as amplitudes de probabilidade de encontrar o átomo com componente de spin na direção do campo, assumindo valor positivo ou negativo. A lei que determina a variação temporal neste caso é conhecida como equação de Schrödinger dependente do tempo e será analisada adiante.

Indica-se com isto que a evolução dos estados dos sistemas clássicos e quânticos é causal. Este atributo de causalidade é derivado da própria evolução temporal dos sistemas.

Suponhamos, agora, que efetuemos a medida da posição e do momentum de uma partícula clássica em um instante  $t$ , posterior a  $t_0$ . Se nossos procedimentos estiverem corretos, obteremos dentro dos limites de erro, os valores preditos pela teoria. Dizemos que a teoria é determinística.

O determinismo da MC é compreensível. Supondo conhecidas todas as interações que ocorrem em um Sistema Clássico, é possível preparar  $N$  sistemas idênticos no mesmo estado (com mesmo valor de posição e momentum iniciais para os constituintes, por exemplo). A medição de uma variável dinâmica (posição, por exemplo) em um instante de tempo  $t$  retornará um único valor de medida para todos os  $N$  sistemas (supondo os erros experimentais suficientemente pequenos). Então conhecendo as condições iniciais e as interações em FC, é possível afirmar que, em um instante de tempo  $t$ , com certeza um calculado valor de variável dinâmica será medido.

Já na MQ, embora a evolução temporal seja causal, o conceito de estado está associado à idéia de amplitudes de probabilidade. A diferença entre a FQ e a FC é, então, devida ao fato de o estado de um sistema na primeira revelar-se, no ato de medida, de modo probabilístico, enquanto na segunda é essencialmente determinístico.

O probabilismo da FQ é menos compreensível, pois é contra-intuitivo. Supondo conhecidas todas as interações que ocorrem em um Sistema Quântico, é também possível preparar  $N$  sistemas idênticos no mesmo estado. Mas a medição de uma variável dinâmica (a energia, por exemplo) em um instante de tempo  $t$  retornará em muitos casos diferentes valores para os  $N$  sistemas que haviam sido preparados da mesma forma em um instante de tempo anterior (supondo os erros experimentais suficientemente pequenos). Então, conhecendo as condições iniciais (o estado do sistema em um instante de tempo que é suposto inicial) e as interações ocorrentes nesse sistema, podemos determinar, em um dado instante de tempo, as amplitudes de probabilidade de encontrar um dado valor de uma variável dinâmica que esteja sendo medida.

## O papel das interações na evolução temporal

Foi dito que o estado de um sistema pode ser determinado em qualquer instante de tempo (efeito) se conhecemos as condições iniciais e as interações que ocorrem neste sistema, com as últimas sendo incorporadas na FC através da função hamiltoniana e na MQ através do operador hamiltoniano. De forma mais explícita é lícito dizer que a hamiltoniana e o operador hamiltoniano são os próprios geradores da evolução temporal.

Suponha um sistema massa-mola e um corpo caindo sob a ação da gravidade. Estas situações são de caráter genérico. Para contextualizar admita que o sistema massa-mola seja o pêndulo de um relógio de parede e que o corpo que cai seja uma bola de futebol lançada no meio da "grande área". Vê-se que as interações são diferentes. A primeira é elástica e a segunda é do tipo gravitacional. Desprezemos a resistência do ar nos dois casos. Os sistemas, após a simplificação, são conservativos, apresentando as hamiltonianas

$$H_p = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2,$$

e

$$H_b = \frac{p^2}{2m} + mgy$$

onde  $x$  é a distância (na direção horizontal) da massa do pêndulo (suposto uma partícula) à posição de equilíbrio e  $y$  a altura da bola.

Estes são problemas de MC, nos quais estamos interessados nas trajetórias que determinam o estado dos sistemas mencionados. Percebe-se que são variadas tanto as interações como as condições iniciais. Tais variações influenciam, certamente, no estado futuro do sistema.

Consideremos a situação da bola, sob a ação da mesma interação em duas condições iniciais diferentes. Na primeira, vamos supor que a bola seja lançada a um ângulo de  $30^\circ$  em relação ao solo, a uma velocidade de 20 m/s e na segunda que seja lançada a um ângulo de  $90^\circ$  com velocidade de mesmo módulo. Existe alguma diferença nas trajetórias? Analise as duas situações.

Imagine, ainda, um jogo de bolas de gude. Uma criança atira uma bola de gude horizontalmente. É imposta uma velocidade inicial de 2,5 m/s (orientada na direção  $\hat{x}$ ) e a posição inicial é considerada a origem. Dado que a força resultante no eixo  $y$  é nula, a única interação que ocorre é o atrito, que fará a bola parar depois de certo tempo. Imagine agora um sistema massa-mola em uma superfície sem atrito posto a oscilar com velocidade inicial de 2,5 m/s na posição inicial  $x = 0$ . O que ocorrerá? Você nota alguma diferença entre as duas situações?

Como vemos, a evolução temporal depende tanto das interações que são incluídas na hamiltoniana na FC, como das condições iniciais, pois o estado do sistema em um instante de tempo posterior ao inicial será diferente para diferentes condições iniciais. A situação pode ser transposta a sistemas regidos pela teoria eletromagnética, onde um campo elétrico pode adotar diferentes valores para diferentes distribuições de carga, podendo ser inclusive gerado por um campo magnético que varie no tempo, por exemplo (lei de Faraday-Lenz).

A situação pode ser levada também para a MQ.

As interações na MQ são incluídas no operador hamiltoniano (ente matemático representativo).

Há várias possibilidades de análise da evolução temporal de sistemas quânticos em MQ, duas (extremas) sendo a de Schrödinger, em que a “lei” para a evolução temporal é imposta aos estados e a de Heisenberg, em que a lei é imposta aos operadores associados às variáveis dinâmicas.

Para ilustrar o caso da MQ consideraremos como sistema a molécula de amônia. Tal molécula é formada por três átomos de hidrogênio ligados a um de nitrogênio ( $NH_3$ ).

Para exemplificar um importante aspecto deste sistema, associado à evolução temporal, introduziremos o sistema do oscilador harmônico duplo. De forma resumida, o modelo do oscilador duplo é simulado por duas massas  $m_1$  e  $m_2$  que estão vinculadas ao movimento ao longo de uma linha reta e conectadas por uma “mola” de constante elástica  $k$ .

Classicamente, é possível separar o movimento deste sistema no movimento do centro de massa e em um movimento relativo de uma partícula equivalente de massa (reduzida)  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Considerando as coordenadas das partículas como  $x_1$  e  $x_2$ , a coordenada da partícula de massa reduzida será  $x = x_1 - x_2$ , isto é, a distância relativa entre as duas partículas. Esta coordenada é medida a partir de um centro fixo sob a ação da força elástica. Desta forma, o potencial resultante relativo a este movimento é

$$V(x) = \frac{k}{2}(|x| - a)^2,$$

onde o módulo leva em conta as compressões ( $x < 0$ ) e distensões ( $x > 0$ ) da mola.

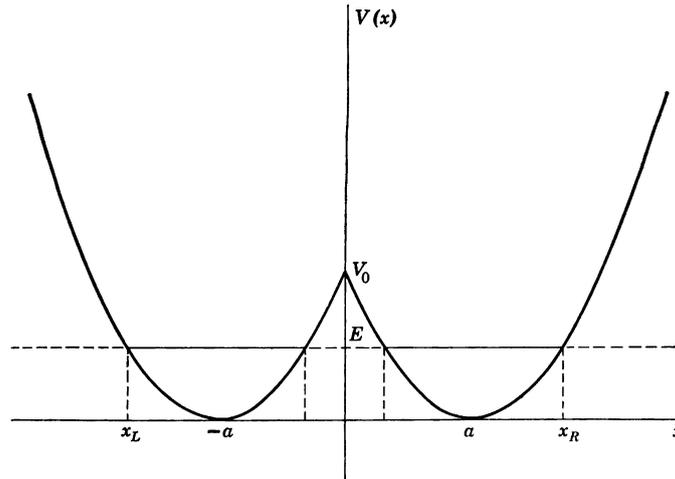


Figura 7.6: Gráfico de potencial do Oscilador Harmônico Duplo. Retirado de Merzbacher (1970, p.67)

Por que não precisamos deste módulo no problema do oscilador harmônico simples? Pense um pouco e responda!  $V(x)$  tem sua forma gráfica na Figura 7.6.

Nesse gráfico indicamos um valor de energia  $E$ , o que classicamente impõe que a partícula equivalente só pode oscilar em torno da posição de equilíbrio ou (dependendo da posição em que a partícula é posta), ou seja, não pode oscilar em torno das duas posições, pois há uma região, proibida classicamente, visto que são pontos de retorno (pontos em que a energia potencial é igual à energia total). Já na MQ o comportamento é diferente como se verá, ocorrendo tunelamento.

Um aspecto a ser salientado é o comportamento assintótico do potencial quando o parâmetro  $a$  (comprimento de repouso da mola) é alterado. Com  $a$  igual a zero, teremos

$$V(x) = \frac{k}{2}|x|^2,$$

que é o potencial do oscilador harmônico simples

Por outro lado, com  $a$  tendendo ao infinito, tem-se que os dois ramos do oscilador duplo estarão separados por uma distância muito grande e por uma barreira de potencial muito alta. Deste modo a partícula pode ocupar um estado de energia do ramo do oscilador harmônico da "direita" ou da "esquerda". Assim, os valores de energia possíveis são idênticos nas duas situações.

No caso do oscilador harmônico linear unidimensional em MQ, os valores possíveis de energia são dados por  $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$ , sendo  $n$  um número inteiro natural,  $\hbar$  a constante de Planck (divida por  $2\pi$ ), os dois primeiros estados tendo, então, energias  $E - 0 = \frac{\hbar\omega}{2}$  e  $E - 1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$  (para  $a = 0$ ) respectivamente. No caso em que  $a \rightarrow \infty$  no oscilador duplo os dois primeiros valores de energia são iguais, a saber,  $E = \frac{\hbar\omega}{2}$  (partícula no poço da esquerda ou no da direita). Entre estes dois casos, se é suficientemente grande há uma situação em que  $E_1$  difere muito pouco de  $E_0$  e é possível encontrarmos o sistema em uma superposição dos dois estados. Para o entorno da posição  $x = a$

$$|\psi_D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|E_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|E_1\rangle,$$

e no entorno da posição  $x = -a$

$$|\psi_E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|E_0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|E_1\rangle.$$

A função de onda  $\psi_0$ , associada ao estado  $|E_0\rangle$ , está representada na Figura 7.7 e a função de onda  $|\psi_1\rangle$ , associada ao estado  $|E_1\rangle$ , está representada na Figura 7.8<sup>7</sup>.

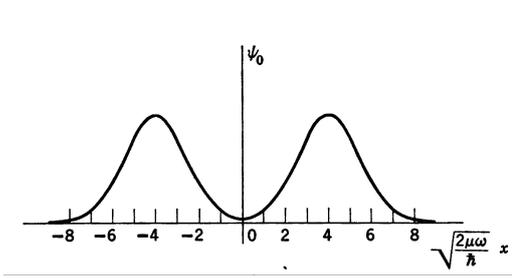


Figura 7.7:  $\psi_0(x)$

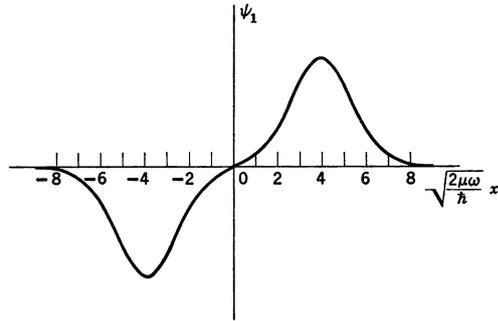


Figura 7.8:  $\psi_1(x)$

Deve-se ressaltar que o modelo usado para o hamiltoniano da molécula é simplificado, pois mesmo as moléculas diatômicas sofrem rotações no espaço. Desta forma modelos lineares fornecem somente aproximações para a análise, porém são conceitualmente valiosos, pois são relativamente simples e permitem estudar qualitativamente fenômenos essencialmente quânticos.

Como mencionado, a molécula de amônia é um sistema quântico composto por três átomos de hidrogênio e um de nitrogênio ( $NH_3$ ). O átomo de nitrogênio possui duas posições de equilíbrio que apresentam simetria com respeito ao plano formado pelos átomos de hidrogênio, segundo a Figura 7.

A molécula de amônia apresenta um espectro de energia em que ocorre um mínimo e que corresponde ao seu estado fundamental. Isto significa que se ela estiver no estado fundamental, qualquer medição de energia (dentro de um intervalo de tempo suficientemente curto) levaria ao valor de energia deste estado. Podemos simbolizar o estado do sistema no instante da preparação,  $t = t_0$  como

$$|\psi_0(t_0)\rangle = |E_0\rangle,$$

que significa que o sistema se encontra no estado de energia fundamental. A molécula poderia também ser preparada no primeiro estado excitado, ou seja

$$|\psi_1(t_0)\rangle = |E_1\rangle,$$

o que significa que no instante de tempo  $t = t_0$  ela tem energia  $E_1 = E_0 + \Delta E$ .

<sup>7</sup>Ambas retiradas de Merzbacher (1970, p.69)

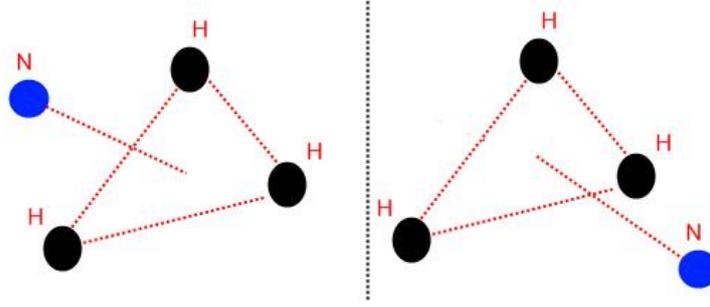


Figura 7.9: Configurações de equilíbrio da molécula de amônia – nitrogênio à esquerda do plano formado pelos átomos de hidrogênio e à direita deste plano

Em MQ, entretanto, ocorrem superposições de estado e portanto podemos ter o estado inicial de um sistema como a combinação linear de dois auto-estados de energia.

$$|\psi\rangle = c_0|E_0\rangle + c_1|E_1\rangle,$$

ou seja, a molécula pode ser preparada não mais com energia  $E_0$ , nem mais com energia  $E_1$ , mas no que denominamos de superposição de auto-estados de energia,  $E_0$  e  $E_1$ . A molécula não estará em um estado de energia definida, ou seja, em um auto-estado de energia.

A molécula de amônia é um dos sistemas quânticos que, na prática, pode ser posto em uma superposição de auto-estados de energia, pois os níveis de energia  $E_0$  (fundamental) e  $E_1$  (primeiro excitado) estão muito próximos um do outro de modo que os dois estados apresentam quase a mesma energia. Este fenômeno é denominado quase-degenerescência. Temos, então,

$$E_1 = E_0 + \Delta E,$$

com

$$\Delta E \ll E_0$$

Desta forma, analisando a variação no tempo para tal estado da molécula, em um instante de tempo  $t = 0$  o estado do sistema pode ser descrito, por exemplo, por

$$|\psi_D(t)\rangle = c_0(t)|E_0\rangle + c_1(t)|E_1\rangle,$$

ou, também, por

$$|\psi_D(t)\rangle = c_0(t)|E_0\rangle - c_1(t)|E_1\rangle,$$

entre outras combinações, onde identificamos  $c_0(t)$  e  $c_1(t)$  como, respectivamente, a amplitude de probabilidade de encontrar a molécula com energia  $E_0$  e  $E_1$ . A opção adotada foi a de expressar o estado como superposição de auto-estados de energia que não variam no tempo. Portanto, os coeficientes da superposição (as amplitudes de probabilidade de encontrar o sistema com um dado valor de energia) dependem do tempo.

O primeiro dos vetores de estado apresentado anteriormente corresponde à função de onda  $\psi_D(x, t)$ , enquanto o segundo corresponde a  $\psi_E(x, t)$ . Estas configurações correspondem às posições do átomo de nitrogênio como localizado à direita do plano formado pelos átomos de hidrogênio e ao átomo de nitrogênio localizado à esquerda do mesmo plano.

Estas superposições de estados originam funções de onda que informam sobre a densidade de probabilidade de encontrar o átomo de nitrogênio ora no "poço" da direita, ora no da "esquerda" e a probabilidade de encontrar o átomo em um ou em outro poço é oscilatória no tempo, de modo que o átomo "ultrapassa" a barreira (de energia) classicamente proibida, o que configura o fenômeno do tunelamento quântico.

## A formulação de Schrödinger e a formulação de Heisenberg

O ente físico que gera a evolução temporal é a função hamiltoniana<sup>8</sup> na FC e o operador hamiltoniano na FQ e os argumentos para isso já foram expostos. Vamos mencionar agora duas vias alternativas de tratar a evolução temporal: as formulações de Schrödinger e de Heisenberg. Tais formulações estão interligadas por uma transformação temporal.

A primeira das formulações, a de Schrödinger, a que nos temos referido até agora, impõe a evolução temporal ao estado do sistema, considerando as variáveis dinâmicas fixas ao longo do tempo (quando são dependentes explicitamente do tempo). O estado de um sistema em um instante de tempo qualquer, nesta formulação, muitas vezes é escrito como superposição de auto-estados de alguma variável dinâmica:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |a_n\rangle, \quad (7.1)$$

se a variável dinâmica representada pelo operador  $\hat{A}$ , possuir valores discretos (e não-degenerados). Se a variável dinâmica possuir valores contínuos, explicitando esta continuidade pela variável  $x$ , a superposição de estados se torna

$$|\psi(t)\rangle = \int c(x, t) |a(x)\rangle dx \quad (7.2)$$

Isto significa que uma forma conveniente, no formalismo de Schrödinger, para expressar o estado de um sistema quântico ao longo do tempo é uma superposição de auto-estados de algum operador que represente uma grandeza física. Na equação 7.1, os valores  $a_n$  da variável dinâmica  $A$ , representada pelo operador  $\hat{A}$ , são discretos. Na equação 7.2,  $a(x)$  são valores contínuos que dependem da variável  $x$ , que é contínua.

É conveniente escolher, quando cabível, superposições de auto-estados do operador hamiltoniano. O que as diferencia é o espectro da variável dinâmica, que na primeira das equações é discreto e satisfaz

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle,$$

enquanto na segunda é contínuo e é expresso como

---

<sup>8</sup>Há outras funções que possuem o mesmo papel, tal como a lagrangeana, mas não entraremos em detalhes. O leitor interessado pode procurar, por exemplo, em Goldstein et al., Thornton & Marion ou Landau & Lifshitz, para a situação clássica.

$$\hat{A}|a(x)\rangle = a(x)|a(x)\rangle,$$

onde  $n$  é um número inteiro (discreto) e  $x$  é um número real (contínuo).

Alternativamente, podemos dizer que, conhecendo o estado do sistema quântico em um instante de tempo  $t_0$ , existe um operador que promove a evolução temporal do sistema, de forma que é possível escrever

$$|\psi(t)\rangle = \hat{u}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (7.3)$$

o que significa que o estado do sistema em um instante  $t$  fica determinado (se não houver medições entre  $t$  e  $t_0$ ) se conhecemos o estado do sistema em  $t = t_0$  (condição inicial) bem como o operador que é responsável pela evolução temporal. Já mencionamos que o conhecimento do estado de um sistema físico depende do conhecimento das condições iniciais e das interações, sendo as últimas parte importante do operador hamiltoniano, no caso da MQ. Desta forma, o operador  $\hat{u}(t, t_0)$ , denominado operador de evolução temporal, deve depender das interações que ocorrem em um sistema físico, logo deve depender do operador hamiltoniano do sistema.

Percebe-se também nas equações 7.1 e 7.2 que, como o estado se modifica ao longo do tempo, a evolução temporal pode ficar associada às amplitudes de probabilidade de encontrarmos o sistema em auto-estados correspondentes aos valores assumidos pelas variáveis dinâmicas (os coeficientes  $c_n(t)$  ou  $c(x, t)$ ). Os operadores correspondentes às variáveis dinâmicas, entretanto, ou são explicitamente dependentes do tempo ou são consideradas constantes na descrição de Schrödinger.

Já vimos também que uma variável dinâmica pode adotar vários valores (discretos e contínuos). Cada um desses valores pode ser obtido no processo de medição desta variável dinâmica (o erro experimental é suposto nulo), logo, faz sentido pensar em probabilidades de encontrar o sistema com um dado valor de variável dinâmica. É conveniente, então, definir uma distribuição de probabilidades para uma variável dinâmica, bem como o valor médio da variável, dado por

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle},$$

Podemos expressar o estado que varia no tempo através da equação 7.3. Podemos também realizar a operação que nos dá

$$\langle \psi(t) | = \langle \psi(t_0) | \hat{u}^\dagger(t, t_0),$$

onde  $\hat{u}^\dagger(t, t_0)$  indica o operador que leva o estado do sistema de  $t$  a  $t_0$ . Logo a equação para o valor médio da variável dinâmica  $A$  ficará

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{u}^\dagger(t, t_0) \hat{A} \hat{u}(t, t_0) | \psi \rangle.$$

Podemos agora interpretar o valor médio como o de uma variável dinâmica que se altera no tempo, relativa a um estado invariante ao longo do tempo. Simbolicamente

$$\hat{A}_h = \hat{u}^\dagger(t, t_0) \hat{A} \hat{u}(t, t_0),$$

e

$$|\psi\rangle_h = |\psi(t_0)\rangle = \hat{u}(t, t_0)|\psi(t)\rangle$$

onde  $\hat{A}_h$  é o operador que representa uma variável dinâmica que se modifica no tempo e  $|\psi\rangle_h$  representa o estado do sistema quântico que permanece fixo ao longo do tempo, configurando a descrição de Heisenberg.

Um detalhe importante é que como as variáveis dinâmicas, para Heisenberg, se alteram no tempo, os auto-estados dos operadores correspondentes também devem variar, para que a equação de autovalores continue tendo sentido, isto é,

$$\hat{A}_h(t)|a_n(t)\rangle_h = a_n|a_n(t)\rangle_h,$$

para o espectro discreto e

$$\hat{A}_h(t)|a(x, t)\rangle = a(x)|a(x, t)\rangle_h,$$

para o contínuo.

Vamos, por último, apresentar as equações de Schrödinger e de Heisenberg.

- Equação de Schrödinger para o Estado de um Sistema quântico.

$$i\hbar \frac{d}{dt} [|\psi(t)\rangle] = \hat{H} [|\psi(t)\rangle].$$

Repare que esta é uma equação que determina o estado do sistema em um instante de tempo qualquer, se conhecemos as interações que ocorrem no sistema (através do operador hamiltoniano) e  $|\psi(t_0)\rangle$ . O fato de a derivada temporal ser de primeira ordem implica que a solução desta equação diferencial requer uma integração e disto resta uma constante que fica determinada a partir do conhecimento do estado do sistema em um instante de tempo inicial, sendo este o papel físico das condições iniciais.

Repare que esta é uma equação que determina o estado do sistema  $|\psi(t)\rangle$  em um instante de tempo qualquer, se conhecemos as interações que ocorrem no sistema (através do operador hamiltoniano) e  $|\psi(t_0)\rangle$ . O fato de a derivada temporal ser de primeira ordem implica que a solução desta equação diferencial requer uma integração e disto resta uma constante que fica determinada a partir do conhecimento do estado do sistema  $|\psi(t_0)\rangle$  em um instante de tempo inicial, sendo este o papel físico das condições iniciais.

- Equação de Heisenberg para um operador  $\hat{A}$ , que representa uma variável dinâmica  $A$ .

$$\frac{d}{dt} [\hat{A}_h(t)] = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_h(t), \hat{H}_h(t)] + \frac{\partial}{\partial t} [\hat{A}_h(t)].$$

Esta equação nos informa sobre o comportamento do operador  $\hat{A}_h(t)$  no tempo, conhecidas as interações ocorrentes no sistema e supondo a condição inicial de que no instante de tempo  $t = t_0$  o operador de Heisenberg é igual ao de Schrödinger. Esta condição inicial tem importância análoga à da formulação de Schrödinger.

O símbolo  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  é denominado comutador dos operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ .

As duas formulações são equivalentes e cada uma tem suas potencialidades. A de Schrödinger, por exemplo, resulta em maior facilidade para a realização de cálculos, sobretudo quando expressa na representação de coordenadas espaciais, tanto que é amplamente usada nos cursos iniciais de MQ. A de Heisenberg, por outro lado, apresenta uma ponte muito clara com a MC, ao apresentar equações de movimento para operadores, que são comparadas com as correspondentes equações para observáveis físicos clássicos.

## EXERCÍCIOS I

1. Qual a diferença, na MQ, entre os conceitos de probabilidade e de densidade de probabilidade?
2. Qual a diferença, na MQ, entre os conceitos de probabilidade e amplitude de probabilidade?

## Exemplos de determinação do Estado do Sistema

### A partícula livre na formulação Newtoniana

O caso mais simples de movimento na MC não-relativística é o movimento retilíneo uniforme (MRU), pois a trajetória de uma partícula (de massa  $m$ ) em MRU é retilínea, i.e, não-curva. Se o movimento é uniforme, a partícula apresenta aceleração nula, ou seja, sua velocidade não sofre variações. O problema é unidimensional, pois o movimento ocorre em uma linha reta. Este modelo será agora expresso com o auxílio da segunda lei de Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Nesta equação o lado esquerdo é a soma das forças que atuam no sistema físico e  $\vec{p} = m\vec{v}$ , sua quantidade de movimento linear ou momentum linear. Para os casos em que a massa do sistema permanece constante ao longo do tempo, as variações no momentum linear se resumem às variações das velocidades dos elementos do sistema. É por isso que muitas vezes se trabalha com o momentum e a velocidade de forma quase indistinta e é por esta razão que a segunda lei de Newton neste caso é escrita em uma forma particular

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}.$$

No caso da partícula livre a força resultante atuante é nula, pois a partícula não interage com outros objetos (quando o faz, tais interações são desprezíveis ou se anulam mutuamente), o que implica em aceleração nula

$$m\vec{a} = 0,$$

ou ainda

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0,$$

isto é, a aceleração, que corresponde à taxa com que a velocidade se modifica no tempo, é nula e, portanto, a velocidade permanece constante.

$$\vec{v}(t) = v_0 \hat{i}$$

e como  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{p}}{m}$ , concluímos que a posição varia linearmente com o tempo, ou seja,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + v_0 \hat{i} t.$$

É possível perceber que se a velocidade não se modifica no tempo, em qualquer instante ela terá o valor da velocidade inicial, por exemplo, uma bola de futebol deslizando em um piso infinitamente liso. Desta forma na equação acima,  $v_0$  é o valor da velocidade inicial da partícula,  $\vec{r}_0$  sua posição inicial e  $\hat{i}$  é o vetor unitário que aponta na direção do movimento.

Embora aparentemente irrelevante hoje em dia, parecendo meramente um exercício acadêmico, o problema da partícula livre esteve envolvido em um experimento de pensamento (do alemão "gedakenexperiment") que pode ser identificado como um dos primeiros enunciados da lei da inércia. Tal experimento de pensamento usa o problema da partícula livre implicitamente e é exposto na conversa de Simplicio (um aristotélico<sup>9</sup>) e Salviatti (um galileiano), no livro "Diálogos sobre os dois principais sistemas do mundo", de Galileu Galilei, abaixo transcrito<sup>10</sup>

*Salviatti: ...Diga-me agora: Suponhamos que se tenha uma superfície plana lisa como um espelho e feita de um material duro como o aço. Ela não está horizontal, mas inclinada, e sobre ela foi colocada uma bola perfeitamente esférica, de algum material duro e pesado, como o bronze. A seu ver, o que acontecerá quando a soltarmos?*

*Simplicio: Não acredito que permanecerá em repouso; pelo contrário, estou certo de que rolará espontaneamente para baixo.*

*Salviatti: ... E por quanto tempo a bola continuaria a rolar, e quão rapidamente? Lembre-se de que eu falei de uma bola perfeitamente redonda e de uma superfície altamente polida, a fim de remover todos os impedimentos externos e acidentais. Analogamente, não leve em consideração qualquer impedimento do ar causado por sua resistência à penetração, nem qualquer obstáculo acidental, se houver.*

*Simplicio: Compreendo perfeitamente, e em resposta a sua pergunta digo que a bola continuaria a mover-se indefinidamente, enquanto permanecesse sobre a superfície inclinada, e com um movimento continuamente acelerado.*

*Salviatti: Mas se quiséssemos que a bola se movesse para cima sobre a mesma superfície, acha que ela subiria?*

*Simplicio: Não espontaneamente; mas ela o faria se puxada ou lançada para cima.*

*Salviatti: E se fosse lançada com um certo impulso, qual seria seu movimento, e de que amplitude?*

*Simplicio: O movimento seria constantemente freiado e retardado, sendo contrário à tendência natural, e duraria mais ou menos tempo conforme o impulso e a inclinação do plano fossem maiores ou menores.*

<sup>9</sup>Aristóteles acreditava que os objetos se movimentavam somente sob a ação de uma força.

<sup>10</sup>Retirado de Nussenzveig (2002).

*Salviatti: Muito bem, até aqui você me explicou o movimento sobre dois planos diferentes. Num plano inclinado para baixo, o corpo móvel desce espontaneamente e continua acelerando, e é preciso empregar uma força para mantê-lo em repouso. Num plano inclinado para cima, é preciso uma força para lançar o corpo ou mesmo mantê-lo parado, e o movimento impresso no corpo diminui continuamente, até cessar de todo. Você diria ainda que, nos dois casos, surgem diferenças conforme a inclinação do plano seja maior ou menor, de forma que um declive mais acentuado implica maior velocidade, ao passo que, num aclave, um corpo lançado com uma dada força se move tanto mais longe quanto menor o aclave. Diga-me agora o que aconteceria ao mesmo corpo móvel colocado sobre uma superfície sem nenhum aclave nem declive.*

*Simplício: Aqui preciso pensar um instante sobre a resposta. Não havendo declive, não pode haver tendência natural ao movimento; e, não havendo aclave, não pode haver resistência ao movimento. Parece-me, portanto que o corpo deveria naturalmente permanecer em repouso. Mas eu me esqueci; faz pouco tempo que Sagredo me deu a entender que isto é o que aconteceria.*

*Salviatti: Acredito que aconteceria se colocássemos a bola firmemente num lugar. Mas que sucederia se lhe déssemos um impulso em alguma direção?*

*Simplício: Ela teria que se mover nessa direção.*

*Salviatti: Mas com que tipo de movimento? Seria continuamente acelerado, como no declive, ou continuamente retardado, como no aclave?*

*Simplício: Não posso ver nenhuma causa de aceleração, uma vez que não há aclave nem declive.*

*Salviatti: Exatamente. Mas se não há razão para que o movimento da bola se retarde, ainda menos há razão para que ele pare; por conseguinte, por quanto tempo você acha que a bola continuaria se movendo?*

*Simplício: Tão longe quanto a superfície se estendesse sem subir nem descer.*

*Salviatti: Então, se este espaço fosse ilimitado, o movimento sobre ele seria também ilimitado? Ou seja, perpétuo?*

*Simplício: Parece-me que sim, desde que o corpo móvel fosse feito de madeira durável*

## A partícula livre na formulação hamiltoniana clássica

O problema da partícula livre será abordado agora na formulação hamiltoniana clássica. Deve receber atenção o fato de que a resposta ao problema deve ser idêntica à obtida com a formulação newtoniana.

Primeiramente, relembramos as equações de Hamilton

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}$$

e

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}$$

onde  $p_n$  é a  $n$ -ésima coordenada do momentum conjugado à coordenada  $q_n$ , enquanto  $q_n$  é a coordenada  $n$ -ésima de um conjunto que localiza os constituintes do sistema físico. Vamos analisar, primeiramente, o caso tridimensional, no qual a localização de uma partícula pode ser feita por um vetor posição  $\vec{r} = (x, y, z)$  de três componentes. Assim:

$$x \rightarrow q_1$$

$$y \rightarrow q_2$$

$$z \rightarrow q_3$$

e os momenta conjugados às coordenadas  $q_n$ :

$$p_x \rightarrow p_1$$

$$p_y \rightarrow p_2$$

$$p_z \rightarrow p_3$$

Neste caso, a determinação do estado do sistema clássico é realizada através do conhecimento simultâneo dos valores de posição  $(x, y, z)$  e de momentum  $(p_x, p_y, p_z)$ .

## EXERCÍCIOS II

1. Porque conseguimos determinar o estado de um sistema clássico somente conhecendo a posição e o momentum dos constituintes do sistema?

Como no caso da partícula livre foi considerado o movimento unidimensional na seção passada, o mesmo será feito aqui no intuito de exemplificar a semelhança entre os formalismos newtoniano e hamiltoniano, a despeito de suas diferentes formas de abordar o problema. Deste modo, o estado da partícula livre será determinado através do conhecimento da posição em que ela se encontra e do seu momentum em um instante de tempo  $t$ , isto é, devem ser resolvidas as equações de Hamilton

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

e

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}.$$

Para a resolução do problema, é necessário construir a hamiltoniana. Na primeira vez em que se introduziu a função hamiltoniana, foi dito que ela poderia, no caso de um sistema conservativo, ser escrita como a soma das energias cinética e potencial, ou seja, no exemplo acima:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x).$$

A questão agora se resume na determinação da energia potencial  $V(x)$ . Neste caso, a partícula está livre de interações (é por esta razão que é denominada partícula

livre), logo sua energia potencial será arbitrariamente escolhida como  $V(x) = 0$ , visto que qualquer função da energia potencial constante leva à resultante nula. Assim adotando

$$H = \frac{p_x^2}{2m},$$

e, aplicando nas equações de Hamilton

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{p_x^2}{2m} \right] = 0$$

e

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial p_x} \left[ \frac{p_x^2}{2m} \right] = \frac{p_x}{m}.$$

teremos

$$\dot{p}_x = 0 \tag{7.4}$$

e

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \tag{7.5}$$

A equação 7.4 pode ser lida como: a taxa com que o momentum conjugado à coordenada  $x$  varia no tempo é nula, logo o momentum é constante. A equação 7.5 pode ser lida da seguinte maneira: o momentum conjugado à coordenada  $x$  é o produto da massa da partícula pela sua velocidade. Como a massa da partícula livre é suposta constante, a sua velocidade será constante em virtude de o momentum o ser.

Estas equações conduzem, pois, aos mesmos resultados da formulação de Newton.

### O problema da partícula livre na formulação (quântica) de Schrödinger

Para o estudo da partícula livre na MQ, vamos analisar a equação de Schrödinger para a apresentação do fenômeno.

$$i\hbar \frac{d}{dt} [|\psi(t)\rangle] = \hat{H} [|\psi(t)\rangle].$$

Para a resolução desta equação, é necessário construir o operador hamiltoniano. A hamiltoniana clássica conduzirá ao operador hamiltoniano quântico através de uma substituição das funções que representam as variáveis dinâmicas (momentum, posição, etc) por operadores que representam tais variáveis. A função hamiltoniana, neste caso, conduzirá<sup>11</sup> a um operador hamiltoniano. Assim

$$H_{cl} = \frac{p_x^2}{2m},$$

e

---

<sup>11</sup>Existem operadores que não possuem análogo clássico, portanto, nem sempre será possível construir um operador hamiltoniano a partir da hamiltoniana clássica.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m},$$

Onde o símbolo "^\wedge" denota que o símbolo em questão se trata de um operador. O primeiro passo é identificar os operadores que comutam com o hamiltoniano. Isto não é difícil neste caso, pois o operador hamiltoniano é somente função do momentum. Isto significa que

$$\hat{H}\hat{p}_x|\psi\rangle = \frac{\hat{p}_x^3}{2m}|\psi\rangle,$$

$$\hat{p}_x\hat{H}|\psi\rangle = \frac{\hat{p}_x^3}{2m}|\psi\rangle,$$

para qualquer estado  $|\psi\rangle$ , logo

$$\hat{H}\hat{p}_x = \hat{p}_x\hat{H} = 0 = [\hat{p}_x, \hat{H}].$$

Mas a energia é função do momentum apenas. Estados possíveis para o sistema podem ser auto-estados simultâneos de momentum (logo, de energia) com a seguinte dependência temporal,

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i\hat{p}_x^2 t}{2m\hbar}\right] |p'_x\rangle,$$

com  $E(p'_x) = \frac{p_x'^2}{2m}$  no caso particular em que a partícula foi preparada com momentum  $p'_x$  (de fato, com momentum no entorno  $dp'_x$ , pois o momentum é uma grandeza contínua), logo energia  $E(p'_x) = \frac{p_x'^2}{2m}$ , no instante de tempo  $t = 0$ . Por falar nisso, por que seria difícil preparar um objeto quântico com momentum  $p'_x$ ?

Este caso especial configura uma partícula com momentum definido (mas não posição), bem como energia. Tal solução pode ser lida da seguinte maneira.

*O sistema permanecerá com o mesmo valor de momentum inicial (logo, de energia) ao longo do tempo.*

Talvez o leitor se questione sobre o termo

$$\exp\left[-\frac{ip_x'^2 t}{2m\hbar}\right] = \exp\left[-\frac{iEt}{\hbar}\right],$$

no estado do sistema. Provavelmente se questionará sobre seu significado físico. Quando forem calculados os valores médios de variáveis dinâmicas, num dado instante de tempo, neste estado do sistema, tal fator será cancelado no módulo quadrático. Tal circunstância, entretanto, será diferente em outras situações como quando a "partícula" é preparada em uma superposição de auto-estados de momentum, isto é,

$$|\psi(t)\rangle = \int_{p'_x}^{p'_x + \delta p'_x} c(p''_x) \exp\left[-\frac{iE(p''_x)t}{\hbar}\right] |p''_x\rangle dp''_x.$$

Neste caso a partícula não foi preparada inicialmente com valor de momentum definido, mas sim em uma soma (superposição) de estados possíveis de momentum. A integral surge, pois ela indica uma soma sobre um índice que varia continuamente, já que o momentum é uma grandeza que varia de forma contínua. Assim  $c(p''_x)$  é uma densidade de amplitude de probabilidades por unidade de momentum de se encontrar a "partícula" com momentum na faixa entre  $p'_x$  e  $p'_x + \delta p'_x$ . O que ocorre quanticamente na repetição de vários experimentos iguais da medição do momentum de um objeto (sob as mesmas condições) é a obtenção de vários valores diferentes para esta variável, mesmo se usados instrumentos de medição infalíveis (que nos deixassem livres de erro experimental).

Percebe-se com isso a natureza probabilística dos resultados de medidas da Teoria Quântica, pois há uma densidade de probabilidade associada à medição de uma faixa de valores das variáveis dinâmicas.

É freqüente ouvir-se dizer que a função que representa uma partícula em MQ é uma função de onda. Tal denominação é estranha, pois ondas são sinais se propagando pelo meio material ou mesmo pelo vácuo. O estado da "partícula" apresenta, na verdade, características comuns às ondas, como a possibilidade de se "superporem", ou mesmo apresentar um comprimento de onda. Tais denominações são herdadas (pela intuição clássica) da FC.

## A partícula livre na formulação de Heisenberg

O caso da partícula livre na formulação de Heisenberg é resolvido supondo que os operadores carregam a informação relativa à evolução temporal. Escrevem-se as equações de Heisenberg como:

$$\frac{d}{dt}[\hat{p}_h(t)] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}_h(t), \hat{H}_h(t)].$$

e

$$\frac{d}{dt}[\hat{x}_h(t)] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{x}_h(t), \hat{H}_h(t)].$$

Como a ênfase aqui não é na resolução de equações, mas sim no entendimento dos resultados, eles serão exibidos como um "pulo do gato". Qualquer dúvida, o professor ficará extremamente satisfeito em discutir! Então, como  $\hat{p}_h(t)$  e  $\hat{H}_h(\hat{h}_h(t), \hat{p}_h(t))$  comutam<sup>12</sup>, obtém-se

$$\frac{d}{dt}[\hat{p}_h(t)] = 0,$$

$$\hat{p}_h(t) = \hat{p}_h(t_0) = \hat{p}_0,$$

<sup>12</sup>Existe uma distinção entre os operadores de Schrödinger e Heisenberg, porém ela não acarretará problemas aqui. Os operadores de Heisenberg variam no tempo e são denotados por  $\hat{A}_h(t)$  e os operadores de Schrödinger estão sendo denotados por  $\hat{A}$  somente, sendo estacionários, via de regra.

e

$$\frac{d}{dt}[\hat{x}_h(t)] = \frac{\hat{p}_h(t)}{m} = \frac{\hat{p}_0}{m},$$

que implica em

$$\hat{x}_h(t) = \frac{\hat{p}_0}{m}(t - t_0) + \hat{x} - h(t).$$

Tais resultados podem ser interpretados como a afirmação de que o operador momentum não varia no tempo e que é igual á massa vezes a taxa de variação do operador posição. Estas equações nos dão a impressão de que tal resultado é igual ao clássico e que a MQ na formulação de Heisenberg é igual à MC. Logo, a MQ de Schrödinger deve ir para o lixo? Se você pensou assim, ainda há tempo de rever seus conceitos. O que a equação informa é que o operador momentum para uma partícula livre, não varia com o tempo (mas apresenta uma distribuição de valores possíveis). A partícula poderá, contudo adotar vários valores de momentum no processo de medição, segundo já mencionado na formulação de Schrödinger, pois estes operadores podem ser vistos como matrizes<sup>13</sup> que "guardam" os valores possíveis de serem obtidos em um processo de medida de variável dinâmica. Além disto,  $[\hat{x}(t), \hat{x}(t_0)] \neq 0$ , um resultado "nada clássico".

A formulação de Heisenberg, é verdade, nos permite estabelecer mais facilmente a ligação com a MC, mas tanto ela como a de Schrödinger geram valores médios dos operadores (que são números), comparáveis aos que exibem os resultados clássicos.

## O oscilador harmônico simples na Mecânica Newtoniana

Outro sistema físico importante e relativamente simples de resolver em MC é o oscilador harmônico simples(Figura 7), que se refere a um objeto de massa  $m$  que sofre a ação de uma força proporcional ao deslocamento  $x$  do objeto em relação à posição de equilíbrio.

Um exemplo concreto deste sistema é um bloco fixo a uma mola, posto a oscilar em uma superfície lisa (totalmente lisa, ou com atrito no caso do oscilador amortecido). A interação entre a mola e o bloco resulta em uma força proporcional ao deslocamento do bloco em relação à posição de equilíbrio, ou seja;

$$\vec{F} = -kx\hat{i},$$

onde  $\vec{F}$  é a força,  $x$  é o deslocamento do bloco em relação à posição de equilíbrio (onde a força se torna nula) e  $k$  é uma constante que determina a rigidez da mola, denominada constante elástica. Tal força está orientada ao longo do eixo  $\hat{i}$ , e tende a trazer o bloco à posição de equilíbrio (significado do sinal negativo). O sistema é exibido na próxima figura

Usando a segunda lei de Newton

$$m \frac{d}{dt}[\vec{p}] = -kx\hat{i} = ma_x\hat{i},$$

como a componente  $x$  da *aceleração* é escrita como a taxa de variação da componente  $x$  da velocidade ( $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ ) e a última é a taxa de variação da posição ( $v_x = \frac{dx}{dt}$ ) ao longo do tempo temos

---

<sup>13</sup>No caso do operador momentum, que é contínuo, são matrizes cujos elementos variam de modo contínuo e não são representáveis de forma diagramática.

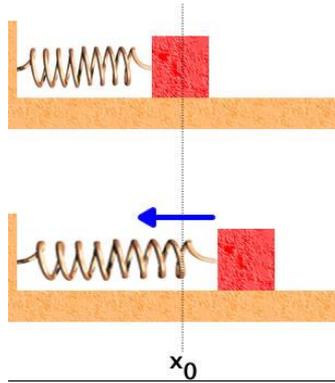


Figura 7.10: Sistema massa-mola

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

que admite soluções do tipo

$$x(t) = A \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi \right),$$

ou ainda

$$x(t) = A \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi' \right),$$

Ambas as soluções são oscilatórias e caracterizam a posição do bloco em função do tempo, medida a partir da posição de equilíbrio.  $A$  é a amplitude do movimento, ou seja, a elongação máxima da mola e  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  é a frequência angular do movimento, que é o inverso do tempo necessário para o sistema completar uma oscilação (período).

Vários sistemas em física podem ser aproximados por um oscilador harmônico simples (como o pêndulo simples), pois em torno de um mínimo de energia potencial, os valores correspondentes de energia potencial podem ser expressos por uma força do tipo elástica (restauradora).

### O oscilador harmônico na formulação hamiltoniana

É possível encontrar as equações de movimento para o oscilador harmônico simples pela construção da função hamiltoniana e pela utilização desta nas equações de Hamilton.

Para a construção da hamiltoniana, é necessário levar em conta as interações ocorrentes no sistema, que é composto de um bloco (massa) e uma mola suposta não massiva de constante elástica  $k$ . A energia potencial associada à interação ocorrente no sistema é proporcional a  $x^2$ . Basta lembrar do conceito de trabalho, que é a variação (negativa) da energia potencial (para um sistema conservativo). No caso unidimensional tem-se, se  $W$  representar o trabalho,

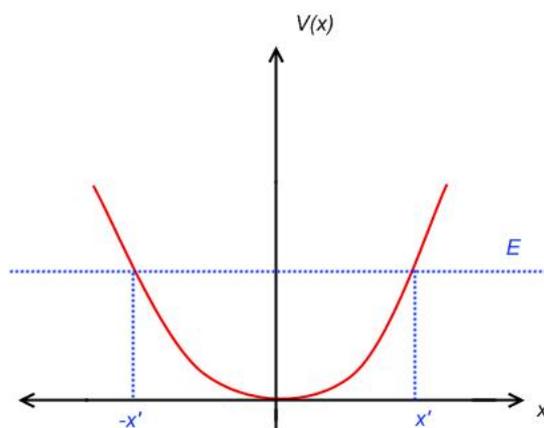


Figura 7.11: Energia potencial do sistema massa-mola

$$W = \int F_x(x') dx' = -\Delta V$$

que se torna

$$W = - \int kx' dx' = -\Delta V$$

ou ainda,

$$\frac{kx^2}{2} = V(x) - V_0.$$

$V_0$  é o ponto zero de energia potencial e pode ser escolhido convenientemente como 0, ou seja, pode-se adotar o ponto de equilíbrio como o ponto zero de energia potencial. Isto é expresso no gráfico abaixo (Figura 7).

Logo, a energia potencial associada aos objetos constituintes do sistema (massa e mola) é  $V(x) = \frac{kx^2}{2}$ . A hamiltoniana para um sistema massa-mola conservativo é então:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2.$$

Pode-se, agora, estabelecer as equações de Hamilton

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \right] = -kx,$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial p_x} \left[ \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \right] = \frac{p_x}{m}.$$

Ao derivar a segunda das equações e inserir na primeira, tem-se

$$m\ddot{x} = -kx,$$

ou seja,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

Como se vê, obtivemos a mesma equação de movimento para o sistema massa-mola, que pelo formalismo newtoniano, como esperado.

Isto significa que para fazer a análise de um problema em MC podemos utilizar qualquer uma das formulações apresentadas. Na formulação hamiltoniana obteve-se a solução oscilatória partindo da idéia de expressar as interações ocorrentes no sistema em termos de energia.

### O oscilador harmônico quântico na formulação de Schrödinger

Um oscilador harmônico simples quântico é um sistema que apresenta interações do tipo restauradoras, expressas em termos de operadores. Isto significa que devemos considerar operadores de posição e de momentum na construção do operador hamiltoniano. No presente exemplo

$$H = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega\hat{x}^2.$$

onde  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Note-se que  $\hat{H}$  não é função explícita do tempo. Ao analisar a equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}[\psi(t)] = \hat{H}[\psi(t)],$$

percebemos que como as interações não dependem do tempo (de forma explícita), além de outras condições, então o operador hamiltoniano possui como autovalores os possíveis valores de energia do sistema. Será considerado um átomo ligado à rede cristalina de um sólido como exemplo (registre-se que é um modelo simplificado). Quando nos referirmos, então, ao objeto quântico, falaremos do átomo e das variáveis dinâmicas relativas a este átomo que interage com a rede cristalina do sólido. Será considerado como estado inicial do sistema um dos auto-estados (de energia) de  $\hat{H}$ , o que nos permite escrever o estado do sistema em um instante de tempo  $t$  como

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{iE_j t}{\hbar}\right] |E_j\rangle,$$

que na equação de autovalores de  $\hat{H}$  implica em

$$\hat{H}|E_j\rangle = E_j|E_j\rangle, \tag{7.6}$$

com  $|E_j\rangle$  sendo uma configuração em que o sistema assume um valor de energia  $E_j$ , definido.

É necessário, neste caso, que sejam encontrados (conhecidos) os valores de energia do hamiltoniano deste sistema. Para isto, é preciso resolver a equação 7.6. Podemos

recorrer à introdução de dois operadores que denominamos operador criação ( $\hat{a}^\dagger$ ) e operador aniquilação ( $\hat{a}$ ). De fato, esta nomenclatura tem significado na Teoria Quântica de Campos e não na MQ, mas a estamos “tomando emprestada” aqui.

O operador criação é um operador que, para este problema, levará o átomo a um auto-estado de energia cujo autovalor difere do estado primitivo pela adição de um quantum de energia ( $\hbar\omega$ ), enquanto o operador destruição leva o sistema a um auto-estado de energia inferior que difere, do do estado atual pela subtração de um quantum de energia. O átomo pode ser levado, por exemplo, do estado fundamental ao primeiro estado excitado pela aplicação do operador criação, enquanto a operação inversa pode levar o átomo do primeiro estado excitado ao fundamental graças ao operador destruição.

O operador aniquilação é escrito aqui como

$$\hat{a} = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega} \right],$$

e o operador criação como:

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega} \right],$$

A mudança que ocorre na relação do operador criação com o de aniquilação (e vice-versa) está no sinal da unidade imaginária  $i$  (conjugação), visto que os operadores posição e momentum são iguais aos seus adjuntos (hermiteanos). Pode-se recorrer também ao operador

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2},$$

que, como vemos, comuta com o operador hamiltoniano, pois difere dele apenas por uma constante.

Suprimiu-se o desenvolvimento matemático da expressão acima, pois neste momento não tem tanta relevância quanto sua discussão conceitual. Pode-se manipular um pouco mais esta equação para obter

$$\hat{H} = \left[ \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right] \hbar\omega,$$

Em conseqüência, o operador  $\hat{N}$  comuta com o hamiltoniano e seus auto-estados são simultâneos aos auto-estados de energia definindo, assim, o estado de energia em que o átomo se encontra. Observe-se que os auto-estados de  $\hat{N}$  são números, sem dimensão. Dar-se-á, portanto a denominação de operador número a  $\hat{N}$ .

Como os auto-estados do operador número são coincidentes com os auto-estados de energia, os seus auto-valores serão diretamente incorporados aos auto-valores de energia, ou seja, o índice  $i$  será substituído pelo índice  $n$ .

$$\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle.$$

A aplicação do hamiltoniano aos auto-estados de energia leva a

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega.$$

A primeira observação relativa a este resultado é a de que os valores de energia não são contínuos como no caso clássico. A isto é dado o nome de quantização da energia. A diferença entre dois níveis de energia vizinhos é de  $\hbar\omega$ , neste caso.

Pode-se supor, em outro exemplo, ainda que o oscilador quântico tenha sido preparado em uma superposição de auto-estados de energia, por exemplo,  $E_0$  e  $E_1$ , ou seja, dois auto-estados de energia que diferem, por hipótese, de  $\hbar\omega$ . Considerando que na superposição os estados de energia sejam equiprováveis, ou seja, que em um processo de medida, metade dos resultados indica que o sistema foi encontrado em um nível e a outra metade indique que o sistema foi encontrado no outro nível de energia, considerando  $N$  sistemas idênticos. A superposição é escrita como:

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|E_0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|E_1\rangle.$$

(Também as combinações com sinal relativo  $-1$ , ou  $+i$ , ou  $-i$ , satisfazem esta superposição).

Em um instante de tempo  $t$ , então, o estado do sistema será

$$|\psi(t)\rangle = \frac{\exp\left[-\frac{i\omega t}{2}\right]}{\sqrt{2}}|E_0\rangle + \frac{\exp\left[-\frac{i\omega t}{2}\right]}{\sqrt{2}}|E_1\rangle.$$

Qual a densidade de probabilidade de encontrarmos o átomo em uma posição  $x'$  no instante  $t$ ? Esta densidade de probabilidade será

$$|\langle x'|\psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left[ |\langle x'|E_0\rangle|^2 + |\langle x'|E_1\rangle|^2 + 2\langle x'|E_0\rangle\langle x'|E_1\rangle\cos(\omega t + \phi) \right],$$

Qual o significado desta relação? Vê-se que  $|\langle x'|E_0\rangle|^2$  e  $|\langle x'|E_1\rangle|^2$  são as densidades de probabilidade de encontrar o sistema em uma posição  $x'$ , quando está em auto-estados de energia  $E_0$  e  $E_1$ , respectivamente. O último termo é de grande importância, pois mostra as interferências ao longo do tempo, produzidas pela superposição de estados. Estas interferências de estados fazem com que a probabilidade de encontrar o átomo na posição  $x'$  varie com uma certa frequência  $\omega$ , o que torna o sistema mais digno do nome oscilador harmônico.

### EXERCÍCIOS III

1. Apresente valores de  $t$  para os quais a densidade de probabilidade de encontrar o oscilador na posição  $x'$  assumam valores extremos (máximo ou mínimo). O que ocorre quando  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ?

### O oscilador harmônico simples na formulação (quântica) de Heisenberg

Usando o operador hamiltoniano apresentado na seção passada para um oscilador harmônico simples na formulação de Heisenberg chega-se ao seguinte resultado os operadores posição e momentum.

$$\hat{x}_h(t) = \hat{x}_0 \cos(\omega t) + \frac{\hat{p}_0}{m} \text{sen}(\omega t),$$

e

$$\hat{p}_h(t) = \hat{p}_0 \cos(\omega t) - \frac{\hat{x}_0}{m} \text{sen}(\omega t),$$

Suprimimos os cálculos, pois o objetivo deste trabalho é, sobretudo, conceitual. Vamos interpretar os resultados do problema e discuti-los.

Percebe-se a importância das condições iniciais no problema, que ficam evidentes nas soluções apresentadas. Os operadores de Heisenberg no instante de tempo inicial são escolhidos iguais aos de Schrödinger (estes últimos estacionários). Este fato corrobora o de que os operadores posição e momentum em função do tempo são representados por matrizes. É possível conhecer as matrizes que representam  $\hat{x}_0$  e  $\hat{p}_0$ .

Outro ponto a destacar é a igualdade dos resultados nas formulações de Schrödinger e Heisenberg quando se tomam os valores médios e, ainda, que os valores médios dos operadores posição e momentum conduzem às funções clássicas de posição e momentum.

Extremamente importante e refletindo uma grande diferença entre uma estrutura operatorial e uma estrutura de funções é o fato de que em geral (e neste caso também)

$$[\hat{A}_h(t), \hat{A}_h(t_0)] \neq 0,$$

ou seja, na maioria dos casos  $\hat{A}_h(t)$  e  $\hat{A}_h(t_0)$  não caracterizam grandezas compatíveis.

#### EXERCÍCIOS IV

1. Analise, para o Oscilador harmônico simples, o comportamento de  $[\hat{x}_h(t), \hat{x}_h(t_0)]$ ,  $[\hat{p}_h(t), \hat{p}_h(t_0)]$  e  $[\hat{x}_h(t), \hat{p}_h(t)]$ . Discuta os resultados obtidos.

## Referências

1. CARUSO, F. e OGURI, V. (2006). **Física Moderna**: origens clássicas e fundamentos quânticos. Rio de Janeiro: Elsevier.
2. EISBERG, R. e RESNICK, R. (1979). **Física Quântica**: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas. Rio de Janeiro: Elsevier.
3. GRIFFITHS, D. J. (2005). **Introduction to Quantum Mechanics**. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall.
4. KUHN, T. S. (2007). **A estrutura das revoluções científicas**. São Paulo: Perspectiva
5. MERZBACHER, E. (1970). **Quantum Mechanics** – second edition. New York: John Wiley & Sons.
6. MESSIAH, A. (1999). **Quantum Mechanics**. Mineola: Dover Publications.
7. PESSOA JR, O. (2003). **Conceitos de Física Quântica** – volume I. São Paulo: Editora Livraria da Física.
8. SAKURAI, J. J. (1994). **Modern Quantum Mechanics** – revised edition. USA: Addison Wesley Longmann.

# Apêndice B – Entrevistas

Apresentamos neste apêndice as transcrições de entrevistas realizadas com alguns dos estudantes da turma 1. É importante ressaltar que muitas das intervenções são feitas no sentido de realizar uma expressão de compreensão do pensamento do entrevistado e não de corrigi-lo.

## Entrevista realizada com Bartolomeu

Glauco: Bom, então, a primeira pergunta que eu tenho feito pro pessoal, isso aqui não é de cunho avaliativo, tá? É só pra eu ter, assim... pra eu conversar um pouco mais com vocês, pra saber mais ou menos o que vocês tão pensando. Se tu vê alguma diferença nos conceitos de medição e de determinação, se medir e determinar são coisas diferentes pra ti.

Bartolomeu: Se medir ou determinar são coisas diferentes? ... é uma boa pergunta cara, eu vou descobrir agora, porque num primeiro momento eu entendo que não, mas eu vou ter que encontrar uma justificativa pra dizer... ahn, medir é interagir com o objeto...ahn, você faz uma medida, você tá realmente agindo sobre um ente físico, então eu posso determinar alguma coisa matematicamente, é uma coisa... né, de semântica, agora, se a gente colocar em termos de física, eu posso determinar alguma coisa sem medir diretamente quem sabe, por meio de cálculo alguma coisa assim, agora medição sim, é uma interação com o ente físico. Eu acho que é por aí, né? Embora se a gente quiser seguir tratando, determinar e medir pode ser a mesma coisa. Depende do que o cara que tá fazendo isso aí tá pensando que é né...Agora se a gente for pensar em uma abrangência maior, pode ser que tenha diferença sim. Mas medição é certa pra mim, interação com um ente físico ... você tem como medir ...

Glauco: Uhum, é que no princípio da incerteza as pessoas geralmente falam assim que: ah, a gente não pode medir posição e momento, mas a gente pode medir, a gente não consegue é determinar. A gente não consegue determinar...afirmar valores simultâneos para posição e momento, né? Por exemplo, mas a gente consegue executar uma medição de posição e depois executar uma medição de momento, só que logo em seguida né? Mas, a gente não consegue simultaneamente determinar valor...executar um processo experimental, tá relacionado em alguma instância com o que tu estás falando.

Bom, a outra pergunta é... se tu consegues diferenciar os estados clássicos dos estados na MQ. Bartolomeu: Bom, na verdade se a gente for pensar, tudo mesmo é tudo uma coisa só né... A MQ vai abranger a clássica também, só que ... Então não é que o fenômeno deixe de existir, ele deixa de ser relevante. Mas diferenciar estados...

Glauco: O estado de um sistema quântico, do estado de um sistema clássico..

Bartolomeu: Sim, pois é, aí a gente pode pensar em... existem certos estados que são característicos de objetos quânticos, né? Eu não posso falar... bom eu vou falar em spin, eu não posso dizer que existe um spin correspondente a um objeto clássico, embora a gente pense que spin seja um giro, um rodopio, o que não é, eu poderia associar ao giro de um objeto clássico, mas não tem a ver, são coisas totalmente diferentes. Spin é só pra objetos quânticos... Tem diferença sim, tem

diferença.

Glauco: E assim, a determinação de por exemplo de, se o spin fosse uma variável dinâmica clássica, por exemplo, a gente conseguiria determinar as três componentes ao mesmo tempo né? Porque aí todas as variáveis dinâmicas seriam compatíveis.

Bartolomeu: Sim, na FC as variáveis dinâmicas são compatíveis. Na quântica que não, ...  
Glauco: Mas a partir disso a gente pode diferenciar, porque, por exemplo, no experimento de Stern-Gerlach, como a gente consegue caracterizar o estado de um feixe de átomos de prata, por exemplo?

Bartolomeu: Medindo ele?

Glauco: Medindo ele, ok. Mas, a gente consegue determinar, ao mesmo tempo, valores de  $s_y$ , de  $s_x, s_z$ .

Bartolomeu: Ahn, eu determino um, né? E daí, vai ter uma probabilidade associada que vai dividir o feixe e tudo mais. Aí quando for determinar o outro, já vai ser outra coisa, já vai mudar totalmente, porque tá medindo em outro referencial, em outro... o eixo tava em  $y$  e foi medido em  $x$ , é outra história, porque essa minha nova medição vai... eu não sei se eu posso dizer...que vai destruir o estado anterior que eu tinha... mas aí vai ser um novo começo ...

Glauco: Mas tá associado com a destruição da informação prévia que tu tinhas do estado do sistema, né? A medição né, ela alterou o estado do sistema?

Bartolomeu: E vai alterar sempre que for alterar a medida né? Ou a forma de medir...se eu passar por  $s_z$  e abrir feixes mais, feixes menos e passar por  $s_z$  de novo, no mais, ele vai continuar mais, ele vai abrir. ...

Glauco: Bom, a última pergunta é como tu entendes o conceito de evolução temporal em MQ? A gente pode determinar o estado do sistema no futuro conhecendo o estado agora, conhecendo as interações a gente pode determinar o estado do sistema no futuro?

Glauco: Bom, a última pergunta é como tu entendes o conceito de evolução temporal em MQ? A gente pode determinar o estado do sistema no futuro conhecendo o estado agora, conhecendo as interações a gente pode determinar o estado do sistema no futuro?

Bartolomeu: Conhecendo as interações? Olha, na clássica a gente pode fazer isso aí tranquilamente. Agora, na quântica acho que seria mais complicado. Talvez a gente não possa em alguma situação, talvez sim. Mas como a gente tá associando, isso tudo a uma probabilidade de ocorrer ou não, já fica complicado de saber isso aí, né? Fica complicado...

Glauco: A gente pode determinar, mas muitas vezes a gente não tem certeza do que a gente vai determinar...

Bartolomeu: Pois é, tem uma probabilidade associada

Glauco: Mas tipo, a gente conhecendo o estado no instante inicial, a gente pode conhecer ele no instante final né? Mesmo que sejam só probabilidades de encontrar ele com um dado valor de grandeza.

Bartolomeu: Na quântica?

Glauco: Isso

Bartolomeu: Sim, a gente pode conhecer o que vai acontecer... nesse sentido eu acho que sim, a gente pode prever o que vai acontecer, mas não exatamente quando ou como vai acontecer.

Glauco: Mas a gente consegue escrever o estado do sistema ao longo do tempo, por mais que a gente escreva em termos de probabilidade de encontrar ele com algum valor de variável dinâmica.

Bartolomeu: É, aí sim, aí eu acredito que sim, embora tenha essa probabilidade associada..  
YO CREO

Glauco: HÁ HÁ HÁ ok!

Bartolomeu: Mas tudo bem, eu concordo contigo...

Glauco: Bom, agora eu vou fechar aqui

## Entrevista realizada com Betânia

Glauco: Eu vou fazer umas três perguntas pra ti, né? Que eu fiz pra Adrielle, pro Felipe também. Eu queria saber se tu encontra alguma diferença nos conceitos de determinação e de medição. Se medir é diferente de determinar.

Betânia: Medida é relacionada, na minha mente, medida é relacionada com experimento

Glauco: com experimento...

Betânia: E determinação eu acho que tanto experimento como por... como é que se diz assim... vias teóricas

Glauco: Vias teóricas... então é basicamente essa a diferença que tu atribuis... entendi... bom... outra pergunta que eu queria fazer é como tu farias a diferenciação... por que a gente... a gente... eu apresentei pra vocês um conceito de... de estado, mas eu diferenciei o conceito de estado na FC e na FQ eu queria saber... assim... como tu interpretas assim... essa diferença.

Betânia: Na MC, quando eu tenho um sistema... tenho o estado do sistema em um instante tal. Eu posso montar uma equação pra isso, então eu consigo prever a evolução desse sistema no tempo futuro e também posso... como é que se diz... assim... refazer, reconstruir o passado...

Glauco: O passado... hum rum...

Betânia: Na MQ eu não tenho certeza desses valores, eu posso colocar probabilidades de que o sistema assuma tais valores

Glauco: Mas tem algum caso... assim... que... por exemplo... é... esse estado quântico pode ser um estado determinístico, por exemplo?

Betânia: Ah... quando eu tenho, por exemplo, um átomo de hidrogênio... o sistema só pode assumir aqueles autovalores de energia.

Glauco: E se eu coloco, por exemplo, o sistema com um valor de posição definido, o meu elétron no átomo de hidrogênio com valor de posição definido, o quê que eu posso afirmar da energia<sup>14</sup>.

Glauco: E que tipo de indeterminação?

Betânia: Se tu sabe um, tu não pode afirmar com certeza o outro, são variáveis incompatíveis.

Glauco: Ahn han...

Betânia: Se tu tem certeza sobre um, tu não tem certeza sobre o outro... isso é intrínseco da MQ...

Glauco: Ahn han...

Betânia: Não é limitação de medida...

Glauco: Ahn han... perfeito... então, assim, como tu falaste os estados quânticos são probabilísticos, mas... claro, tem algumas configurações, como tu falaste de energia, se a gente preparar o sistema num auto-estado de energia, um estado estacionário, no átomo de hidrogênio, a gente vai ter o estado sempre naquele valor de energia, entretanto, a gente vai "tar" numa superposição de estados de posição, por que são variáveis dinâmicas incompatíveis, realmente... eu to de acordo contigo (risos). Eu gostaria também de saber como tu entendes o conceito de evolução temporal, né que tu chegaste a mencionar que a gente pode reconstruir o passado, a gente pode fazer isso na MC, na MQ...

Betânia: Olha... aí eu tenho que pensar em termos do sexto postulado, na equação de Schrödinger...

Glauco: Ahn han...

---

<sup>14</sup>Alguma confusão pode surgir aqui, pois quando se falou de elétron no átomo de hidrogênio, acabou-se por supor implicitamente o núcleo com momentum nulo e levando em conta a superioridade da massa do próton em relação à do elétron (massa reduzida aproximadamente igual à do elétron).

Betânia: Aí... lá diz que se eu conheço o vetor em  $dt$ , eu consigo obter algum resultado em  $t$ , a evolução no tempo para aquele sistema, mas eu não consigo falar muito sobre isso

Glauco: Mas o que significa aquele vetor na equação de Schrödinger?

Betânia: Significa que o sistema sofre variações no tempo...

Glauco: Ok... está associado à evolução temporal... mas o que significa aquele vetorzinho?

Betânia: É... é... é um auto-vetor? Não...

Glauco: Um auto-vetor é um caso particular, um auto-estado é um caso particular

Betânia: É... a função do sistema?

Glauco: É o vetor de estado do sistema né?

Betânia: É o vetor de estado...

Glauco: É como a gente expressa o estado do sistema ao longo do tempo...

Betânia: Ele é a equação na MC...

Glauco: Seria o análogo das leis de Newton da MC... essa questão tá no tema 5... tu já sabes a resposta... (risos)

Betânia: (risos)

## Entrevista com Pedro e Adão

Glauco: Bom... são três perguntinhas simples assim... só pra gente conversar um pouquinho... eu gostaria de saber se vocês vêem alguma diferença entre os conceitos de medida e determinação... se medir e determinar são a mesma coisa ou não...

Pedro: Bah... eu vejo assim... a impressão que eu tenho é que determinar pode até ser, por exemplo, por um cálculo, você pega uma equação, resolve um problema é pra mim, determinar, enquanto que medir, pra mim, é interagir com o sistema, através de um instrumento de medida... de imediato

Adão: Pra mim é uma coisa semelhante... determinar dá a impressão de alguma coisa pura ou que não aconteceu, pode acontecer, enquanto que medir é algo que já aconteceu de fato ou que "tá" acontecendo, você tá ali analisando uma coisa momentânea que pode ter acontecido ou que aconteceu... determinar deve ser coisa de previsão ou que leva uma idéia de futuro.

Glauco: Mas tem alguma semelhança entre os conceitos que vocês poderiam atribuir? Determinação, por exemplo, é oriunda da medição ou vice-versa?

Pedro: É... realmente... elas são coisas que realmente parecem parecidas mesmo... até no dia-a-dia muitas vezes a gente sempre pega determinar, a gente até usa determinar e na verdade está fazendo um processo de medição... mas medir pra mim é mais um ato de interação... não diria assim... a mesma coisa, pois parece mais uma coisa de interação com o sistema físico... fica meio estranho dizer... a partir da medida, vou determinar tal coisa...(risos)

Adão: É... no nosso cotidiano, essas palavras são utilizadas como semelhantes... determine, meça... faz uma medida e fala acabei de determinar tal coisa, faz uma medida qualquer e diz que determinou, uma grandeza... pega uma régua, faz uma medição e diz: ah tah... determinei o comprimento, determinei... acho que nesse aspecto...

Pedro: É... acho que não consigo ir muito além disso não (risos)

Glauco: Não... não... isso é importante por que a galera tem colocado umas frases, em geral, associadas a medição e determinação e... claro, eu preciso saber como vocês entendem esses conceitos, né? Outra pergunta que eu queria fazer é... qual a diferença que vocês enxergam entre o estado de um sistema clássico e o estado de um sistema quântico? Diferenças fundamentais que vem na cabeça assim...

Adão: O estado de um sistema clássico ele é bem determinado... agora a gente voltou pro determinado (risos).

Glauco: (risos).

Adão: você pode conhecer... você tem muitas variáveis... não sei se é essa a palavra em um estado... no clássico você consegue determinar todas elas, a maioria, eu acho que todas, e no quântico você consegue determinar algumas... você não consegue determinar todas ao mesmo tempo, no mesmo instante...

Glauco: no mesmo momento...

Adão: Isso... então a diferença é essa... na Clássica você consegue determinar todas elas ao mesmo tempo e no quântico não, determina uma, mas não tem precisão da outra...

Pedro: No sistema clássico tu pode prever alguma coisa e dizer: não... realmente... o que eu estou prevendo vai acontecer... quando eu fizer uma medida daquilo que eu estou prevendo, eu vou medir aquilo realmente, enquanto que no sistema quântico não dá...

Glauco: Até dá, mas nem sempre...

Pedro: É...

Glauco: No experimento de Stern-Gerlach, por exemplo, se eu medir a componente  $z$  do spin, determino o valor de  $s_z = \frac{\hbar}{2}$ , se eu for executar uma medição seqüencial (dessa variável)....

Pedro: Tu sabe qual...

Glauco: Eu sei que eu vou obter aquele valor...

Adão: Nunca se ia saber nada se fosse tudo indeterminado...

Pedro: É...

Adão: Acho que é nesse aspecto mesmo... um conjunto de variáveis que pode ser determinado

Glauco: Essa indeterminação está ligada a alguma outra coisa, a algum conceito estudado...

Pedro: A indeterminação do sistema quântico?

Glauco: Por que o Adão falou que a gente determina algumas variáveis e outras ficam indeterminadas

Adão: Isso talvez tenha a ver com o princípio da incerteza... se tu conheces bem a respeito de uma variável tu perde informação acerca de outra variável... o que nós chamamos de variáveis incompatíveis, né? Mas no sistema clássico não... tu tens duas variáveis que no quântico não são compatíveis, no clássico são... momentum e posição, tu pode medir ao mesmo tempo... não tem o problema da incerteza que existe na quântica...

Glauco: Mas é uma incerteza devida a erros experimentais?

Pedro: Na Quântica?

Glauco: Isso...

Pedro: Não é uma incerteza que a princípio, pelo que eu entendi, é uma incerteza decorrente da própria natureza... a natureza é assim, tu não consegue, realmente, ter precisão sobre uma grandeza sem perder informação sobre a outra, por que pra tu ter informação sobre a grandeza tu interage com o sistema e nesse processo de interação tu mexe no sistema, então tu altera a, digamos assim, as características do sistema e tu perde informações sobre aquela outra variável que tu estavas medindo, fica sabendo informações sobre uma e perde informações sobre a outra pelo próprio ato de medida, isso é uma coisa intrínseca à natureza...

Adão: Ao modelo quântico... à natureza em si talvez, ao modelo quântico... isso é próprio do modelo...

Pedro: Tem coisa que vão ao mundo microscópico, interagem com quantidades de energia muito pequenas... o ato de medir sobre algo extremamente sensível... ao nível atômico, molecular, parece que não tem como não mexer no sistema quando tu vai medir alguma coisa... é uma coisa intrínseca da natureza, a não ser que se descubra uma forma de realizar isso ao nível atômico, que ainda não se conhece ainda hoje... mas a princípio é um problema da natureza... faz parte de quando a gente quer interagir com o mundo atômico, molecular...

Glauco: Outra pergunta que eu queria fazer pra vocês é a de como vocês entendem o conceito de evolução temporal em MQ

Pedro: Processo de evolução temporal... ou seja, eu conheço bem como é que tá um sistema e quero saber como ele evolui a partir dali? Alguma coisa desse tipo? Vamos supor que eu conheça bem sobre uma determinada grandeza, tenho precisão sobre a medida de uma dada variável e eu quero saber como é que ela vai estar daqui a algum tempo? É isso?

Glauco: Isso, posso determinar, por exemplo, o estado do meu sistema e digo que ele é um auto-estado de energia, um auto-estado de posição, auto-estado de momentum... e mais tarde eu quero saber em que estado ele vai estar, eu posso sem realizar uma medida no meio do processo... o que eu posso falar?

Pedro: Pelo que eu entendi, se essa medição for realizada logo depois que eu verifiquei que aquele sistema está bem caracterizado num auto-estado, eu tenho uma probabilidade, posso falar assim, de quase 100% de que eu vou obter o mesmo resultado novamente, mas isso num curto intervalo de tempo após a primeira medida, mas se eu deixar passar muito tempo, eu acho que pela própria interação que esse sistema tem com o resto do universo, ele perde aquela... de certa maneira ele interage com o resto do universo e essa interação faz com que ele saia daquele estado em que ele foi colocado, que eu determinei que ele estava e passa a se tornar uma superposição de estados, imprevisível de novo, ele passa então a ser novamente uma superposição de estados, de auto-estados. Quando eu fiz uma medida eu boto ele num auto-estado, mas no momento em que eu deixo passar muito tempo, o sistema evolui e ele vai perdendo aquela identidade, aquela característica de definição de um auto-estado e novamente fica uma coisa aleatória, passa a não poder mais fazer uma previsão, assim... ele tá... vou fazer uma medida agora e ele vai estar naquele auto-estado que eu media antes, passa a ter uma probabilidade de ele "tá" essa probabilidade pode ser 50%, decair pra 25%, 10% por que daí já entra a questão da superposição linear, a superposição de auto-estados, isso já não tem mais como afirmar que tu vai encontrar ele novamente naquele auto-estado. Pode ser que um outro auto-estado daquele sistema agora, depois de um certo tempo, esteja com 90% de chance de ser obtido num processo de medida e aquele que eu tinha medido tenha 10%, passado um instante de tempo.

Glauco: Mas sempre, assim... tipo... há uma situação em que eu prepare o meu sistema em um auto-estado e ele fique naquele estado indefinidamente?

Pedro: Pelo menos pelo que eu tenho carregado comigo até agora e eu não cheguei a pensar mesmo se existe. Eu pelo menos tinha carregado a idéia de que não... de que passado um tempo ele evolui e perde aquela função de auto-estado em que ele foi colocado, mas eu realmente não pensei nessas situações em que eu não posso mesmo... é verdade que eu to pensando em uma coisa que foi comentada em aula também, que é o tal do emaranhamento quântico, né? Por que eu preparo dois sistemas agora, onde um depende do outro, eu posso levar agora um deles pra onde eu quiser do universo e se eu faço uma medida agora de uma situação, de uma dessas variáveis que caracteriza o sistema, eu vou ter um resultado e eu sei que aquele outro lá vai ter um outro resultado mesmo que eu não esteja fazendo uma medida direta dele e isso, a princípio, acho que não depende do tempo...

Glauco: A questão do emaranhamento é... sistemas emaranhados evoluem no tempo... a questão do emaranhamento é um pouquinho diferente... o que tu falaste está correto, mas é bem tangencial à questão da evolução temporal... o que tu falaste é correto mas tá tangenciando a questão da evolução temporal...

Pedro: Não é diretamente ligado ao que tu estás perguntando...

Glauco: Isso

Pedro: Pelo que eu entendi, tu estavas me perguntando se existe uma situação em que eu fizesse uma determinação do estado de um sistema e eu pudesse afirmar que mesmo tendo passado

bastante tempo eu poderia ainda afirmar que ele estaria naquele estado.

Glauco: É...

Pedro: É... não sei...

Adão: Eu não sei o que me pegou quando ele falou e é uma frase interessante é a idéia de probabilidade, não sei se isso se encaixa nessas exceções... há uma probabilidade baixa ou  $x$  de manter aquele estado... isso não é uma coisa certa... acho que é nesse caminho... de probabilidade acho que a evolução temporal é nesse aspecto... em Clássica não...você sabe que você tem uma velocidade, uma direção um momentum... você sabe que daqui a um tempo, passado  $x$ , você sabe como é que vai estar o sistema e na Quântica, você, passado um tempo, você tem uma probabilidade  $x$ , de encontrar ele daquele jeito e não uma certeza absoluta que ele estará, mas acho que é nesse lado da probabilidade, você não pode ter uma certeza absoluta de como ele vai estar, mas uma probabilidade  $x, y, z$ , de encontrar ele daquela forma, não sei se é isso...

Glauco: Vocês já ouviram falar de um estado-estacionário?

Pedro: Sim

Glauco: Então é um estado que ele permanece sempre do mesmo jeito... um auto-estado de energia no átomo de hidrogênio

Pedro: Por exemplo a questão do estado fundamental, que normalmente o elétron tende a permanecer no estado fundamental?

Adão: Mas... agora é uma dúvida mesmo... se ele tá no estado fundamental, tem aquela nuvem de probabilidade de encontrar o elétron ou alguma coisa do tipo, você tem um valor, por exemplo, estado fundamental, -13,6 ev, esse valor seria um valor médio, um valor exato?

Glauco: Não... este valor seria um valor exato, o valor de energia do sistema exato... é um valor determinado... nesse caso tu tens um valor determinado de energia... a nuvem de probabilidade de posição ocorre por que isso aí na verdade é uma superposição de estado de posição... essa densidade de probabilidade de posição está associada à superposição de auto-estados de posição, só que o espectro de posição é contínuo, então o sistema pode assumir vários valores, então faz sentido definir uma região provável de o elétron ser encontrado só que o valor de 13,6 ev é um valor determinado, assim como quando a gente determina a posição, tu sabes onde ele "tá", a energia vai estar numa superposição de estados, então está muito associado com o que vocês falaram anteriormente... mas a questão do estado estacionário é que quando você coloca o sistema num auto-estado de energia (estacionário), a evolução temporal desse estado, ela não gera uma superposição de auto-estados de energia, ela só tem associado um fator de fase associado à evolução temporal e esse fator de fase some nas probabilidades, então a probabilidade de tu encontrares ele nesse auto-estado é sempre 1...

## Entrevista realizada com Moisés e Ana

Glauco: Bom, a primeira pergunta que eu queria fazer pra vocês é se vocês vêem alguma diferença entre medição e determinação.

Moisés: Num primeiro momento, pensando rápido, parece que medição tu vais fazer uma medida podendo encontrar alguns valores ou quaisquer valores... de repente tu tens até a intenção de encontrar algum valor e determinação me parece algo que tu vai medir procurando já encontrar já um valor exato... tu queres já encontrar exatamente aquele valor ou determinar exatamente aquele valor... num primeiro momento parece que é isso...

Ana: Eu relacionaria medição com a verificação experimental e a determinação como valor obtido através de outros verificados...

Glauco: De outros verificados...

Moisés: Na medição...

Glauco: Na medição... Bom não vou dar a resposta pra vocês agora (risos)

Ana: (risos)

Glauco: Eu tenho que parar e pensar um pouquinho... quando eu for analisar eu vou ter que parar e pensar um pouquinho... <sup>15</sup>

Moisés: Tu faz uma cara de... pô... não tá falando nada com nada...

Glauco: (risos) Não... tem algumas pessoas que falam algumas coisas e eu vou relacionando o que vocês falam com o que outras pessoas falaram... pra ver se tem alguma coisa a ver... mas eu acho que se não tiver falando nada com nada... é absolutamente normal, por que a pergunta é um pouquinho geral... bom vocês estabeleceram diferenças entre os conceitos... depois inclusive a gente pode conversar sobre o porquê que eu tô fazendo dessa forma... estabelecendo diferenças... Bom... como vocês diferenciam agora os estados clássicos dos estados na MQ... o estado de um sistema clássico e o estado de um sistema quântico... como é que vocês fazem pra diferenciar? Moisés: Bom... não sei se é isso realmente que tu tá perguntando, mas... num sistema clássico, tu não tens... o princípio da incerteza... tu não tens a... as variáveis... as variáveis são compatíveis em MC... enquanto na MQ tu tens algumas variáveis incompatíveis... tu não pode medir simultaneamente momentum e posição por exemplo de uma partícula, de um elétron, de um átomo, por exemplo...

Glauco: E isso tá associado... na quântica as variáveis dinâmicas são todas incompatíveis

Ana: Não todas...

Glauco: Eu falei todas?

Ana: Sim...

Moisés: Falou

Glauco: Desculpem, eu quis dizer que existem, em quântica, variáveis dinâmicas incompatíveis... isso então influencia na determinação do estado...é isso?

Moisés: Na determinação do estado...

Glauco: Isso, do estado.

Ana: Quanticamente sim...

Moisés: E quanticamente vale o princípio da superposição linear, né? Pode ter um estado nos bits quânticos lá o 0, 1 ou uma combinação, uma superposição linear desses dois estados...

Glauco: E qual a diferença básica dessa superposição de estados em Mecânica... essa possibilidade da superposição de estados em MQ pra MC pra determinação do estado clássico... então...

Ana: A diferença seria a possibilidade de superposição na quântica e não na clássica

Glauco: Mas assim, vocês associam isso ao conceito de variáveis dinâmicas de alguma forma, mais especificamente, ou seja, variáveis dinâmicas incompatíveis?

Moisés: Eu vejo uma ligação entre elas, não sei especificar agora, mas eu vejo uma coisa como consequência da outra, né? A superposição de estados como consequência das variáveis dinâmicas incompatíveis ou de repente o inverso, né?

Glauco: E tu, Ana?

Moisés: Variáveis dinâmicas incompatíveis e?

Glauco: A superposição linear de estados...

Moisés: É... eu vou direto pro experimento de Stern-Gerlach, né? Tu tens ali ah... por exemplo, as variáveis  $s_x$  e  $s_z$ , incompatíveis, tá? E tu tens por exemplo, um auto-estado de uma como superposição linear da outra, né? Então eu faço esse gancho, essa... né... quando tá determinado em  $s_x$ , lá...então o  $|s_x, +\rangle$  mais, o auto-estado, né? O  $s_x$  mais ele como combinação linear do  $s_z$ , né? Tá definido como mais  $\frac{\hbar}{2}$  e o outro como menos  $-\frac{\hbar}{2}$ , mas esse auto-estado como uma superposição linear daquele...

Glauco: É isso aí... Eu queria que a Ana falasse, mas tu já falaste tudo, Moisés.

Ana: (risos)

Glauco: Bom... como vocês entendem o conceito de evolução temporal em MQ? Primeira coisa... pra não ficar tão abstrato... eu tenho o estado inicial... “vamo” considerar que o estado evolui no tempo... eu tenho o estado inicial e no instante posterior eu tenho o estado final... existe uma causa pra essa evolução... o que que causa essa evolução... essa evolução temporal do estado é causada na MC e na MQ pela mesma coisa... o que causa essa evolução temporal?

Ana: É a ação de um operador?

Glauco: De um operador? Sim... tá associado... mas mais especificamente...

Ana: A determinação de uma variável no instante inicial altera a determinação de uma variável em um outro instante...

Glauco: É muita viagem mas... altera no mesmo instante...

---

<sup>15</sup>Neste momento o pesquisador explicou o porquê da reação às respostas dos alunos.

Moisés: Altera o sistema... medição vai alterando o estado do sistema  
 Glauco: Agora... suponha que eu tenha o meu sistema evoluindo livremente... só sob a ação das interações... tipo uma interação gravitacional...  
 Moisés: Sim...  
 Glauco: Vamos...  
 Moisés: Sim..  
 Glauco: Imaginar um sistema planetário... Terra e um outro planeta lá... ou... vamos imaginar o sistema Terra-Lua  
 Moisés: Sim...  
 Glauco: É mais fácil... eu tenho uma interação gravitacional que ao longo do tempo a posição e o momentum vão se alterando  
 Moisés: Sim...  
 Glauco: Então o estado do sistema evolui... tá... então o que causou a evolução temporal do estado do meu sistema? A interação né?  
 Ana: Hum rum  
 Moisés: Sim...  
 Glauco: E na MQ? Isso vale também?  
 Ana: Vale  
 Moisés: Vale sim... pensando lá no átomo de hidrogênio, por exemplo...  
 Glauco: E assim... quem é que expressa...  
 Moisés: Equação de Schrödinger  
 Glauco: Ok... mas quem é o ente que expressa essas interações?  
 Moisés: O hamiltoniano  
 Glauco: O hamiltoniano... perfeito... então... é... aquele operador que tu mencionaste que causa essa evolução temporal... ele deve estar associado ao hamiltoniano.  
 Moisés: Sim...  
 Glauco: Ok... então a gente chegou a uma conclusão de que o estado do sistema evolui no tempo e que essa evolução é causada pelas interações... perfeito... o que significa a gente determinar o estado do sistema em um instante de tempo posterior ao inicial? Por exemplo eu preparei o átomo de hidrogênio com valor de energia no estado fundamental? O quê que significa eu determinar o estado do sistema no instante de tempo posterior?  
 Ana: Significa determinar valores que sofreram alterações devido a essas interações  
 Glauco: De forma mais específica, seria determinar alguma probabilidade, alguma coisa assim?  
 Ana: Analisando aqueles sistemas de Mecânica Quântica... sim...  
 Glauco: Então a gente conhece o estado determinando...  
 Moisés: A amplitude de probabilidade, né? Determinando a probabilidade de encontrar o sistema naquele auto-estado, né? Glauco: Mas tem diferença o conceito de probabilidade e amplitude de probabilidade, né? ... O que tu falaste tá correto, mas tem diferença entre os conceitos né?  
 Moisés: Sim... uma região.  
 Ana: Uma caixa maior...  
 Moisés: No átomo de hidrogênio tem uma região maior de se encontrar a partícula naquele local...  
 Glauco: Ok... isso é probabilidade... e amplitude de probabilidade...  
 Moisés:...  
 Glauco: Não conseguem fazer a diferenciação, mas sabem que existe, né?  
 Moisés: Sim...  
 Ana: Sim...  
 Glauco: Ok... tudo bem...as perguntas eram essas...

## Entrevista com Adriele

Glauco: Começando... tá. Deixa só eu conectar o microfone aqui pra não ficar ruim a qualidade. Assim, a primeira pergunta que eu queria fazer pra ti é se tu vê alguma diferença entre os conceitos de medição e de determinação? Adriele: Medição e determinação? Sutil, mas eu acho que tem, né? Porque medir é tu fazer isso experimentalmente, assim. Vai lá, tem um aparelho, alguma coisa, aí tu mede. Determinação, eu acho que tu pode botar a matemática pra determinar alguma coisa,

pra determinar uma medida. Eu acho que depois que tu determinou, tu pode medir pra verificar, alguma coisa assim.

Glauco: Hum. Então basicamente a diferença seria essa, assim, de cunho teórico...uma seria mais teórica e a outra experimental?

Adrielle: É...deve ter algumas outras pequenas diferenças assim né...mas por fim, eu não acho que seja exatamente a mesma coisa.

Glauco: Tá ok. E assim ó, aí a outra pergunta né...porque eu acho que tá associada com essa é como tu diferenciarias os estados clássicos e os estados quânticos?

Adrielle: Bem, estados clássicos e quânticos...a primeira coisa que eu tentaria ver são as grandezas, né... já que a característica do estado clássico é que algumas são incompatíveis.

Glauco: No quântico, né?

Adrielle: É, desculpe. No quântico. Isso. No estado quântico algumas são incompatíveis. Eu acho que começaria por aí, né? Eu só teria que me aprofundar em algum (não entendi), alguma coisa, pra poder verificar se existem outras diferenças. Assim, grandes diferenças tem, até pelas dimensões né? Que os clássicos, hoje podem utilizar leis de Newton pra quase tudo né? Já não vai acontecer no estado quântico.

Glauco: Uhum. Sim, a gente basicamente descreve os sistemas a partir dos estados. Bom, em clássica tu falaste que eles são...as variáveis são todas compatíveis. Então, isso leva a um determinismo né? E quântica leva a um certo probabilismo...quando tu determinas uma...

Adrielle: É. Probabilidade. A quântica é probabilidade. A probabilidade de achar isso, isso, isso...

Glauco: Aham. E quando tu determinas umas, as outras têm uma probabilidade associada de serem encontradas né? Concorda com isso né?

Adrielle: Concordo. Probabilidade sim.

Glauco: E assim, outra pergunta também né.. é como tu entendes a evolução temporal em MQ, aqui mais especificamente falando dos estados assim, qual o papel das interações...

Adrielle: Evolução temporal, eu acho que é uma coisa assim, como o próprio nome diz...está evoluindo com o tempo né...está acontecendo conforme o passar do tempo. Na clássica isso é bem fácil de verificar, porque na clássica tu consegue determinar o que vai acontecer depois de um determinado tempo. Na quântica tu já não tem isso, então a evolução temporal eu acho que seria mais ou menos em que estado ele tá a partir de um determinado tempo e nunca vai ser o mesmo, dependendo da grandeza, claro. Nunca vai ser o mesmo. Aquilo é indeterminado, então na quântica eu imagino que a evolução temporal seja mais ou menos, ahn.. as probabilidades do estado estarem (não entendi) conforme o passar do tempo. Então, digamos assim, é o estado...

Glauco: Mas isso quer dizer que, assim, a gente não pode conhecer o estado no futuro..

Adrielle: É isso aí eu vou te dizer assim...eu considero que conhecer o estado no futuro né.. pra FQ é um pouquinho mais complicado, porque se tu vai medir determinado estado agora e vai medir daqui a pouco, não sei se vai continuar sendo exatamente a mesma coisa né?

Glauco: Isso, isso, perfeito, entendi. Se você efetuar uma medida no meio do tempo, claro que vai modificar o estado do sistema, mas assim, eu te pergunto...se assim, eu deixar meu sistema só sob a ação das interações, sem executar medição nenhuma, é .. eu posso determinar o estado do sistema no futuro?

Adrielle: É..se tu não medir nada, não fizer interação nenhuma, o estado vai continuar o mesmo né?

Glauco: É?

Adrielle: Eu acredito que sim né? Sem interação nenhuma, não vai ter a probabilidade...

Glauco: Essas probabilidades não variam com o tempo, alguma coisa assim?

Adrielle: Eu não consigo imaginar essas probabilidades variando com o tempo, sem interação nenhuma.

Glauco: Bom, tu lembra do exemplo da molécula de amônia? Que ela era posta numa superposição de estado, assim, inicialmente numa superposição de estado de energia né...por exemplo. E, bom, é..a gente poderia preparar ela<sup>16</sup> em um dos dois poços, por exemplo, né, de potencial. E tu lembra, assim, que antes de a gente realizar qualquer medição a gente sabia que a gente poderia encontrar ela em um dos dois poços através da probabilidade né..dada a função de onda

---

<sup>16</sup>Falava-se na verdade, do átomo de nitrogênio quando referíamos a preparar a molécula em um poço.

dela. Então, tu não achas, assim, que mesmo sem efetuar medição, quer dizer, que se a gente não efetuar medição a gente não pode conhecer o estado do sistema num instante posterior?

Adrielle: Tá, mas esse instante posterior vai ser qual instante posterior?

Glauco: Qualquer um.

Adrielle: Qualquer um?

Glauco: O que tu quiseres.

Adrielle: É que nessa molécula, ou ela tá aqui ou ela tá aqui... (é isso?). Eu fico imaginando assim.

Glauco: Hum, mas ela não pode tá numa posição, assim, não tem uma probabilidade de ela tá numa posição que não seja, hum..quer dizer, não tem uma probabilidade dela estar..hum...assim ó, uma probabilidade dela tá num poço, essa probabilidade aqui seja maior do que ela esteja nesse aqui? Porque em alguns momentos, ela vai ter probabilidade cem por cento de tá num poço, no poço da esquerda, que é o que tu falaste, aqui e aqui, aqui e aqui. Mas tem outros momentos em que ela vai estar no poço da direita. A probabilidade de ela tá nesse poço é cem por cento. Mas não tem algum momento em que a gente tenha uma probabilidade não nula de encontrar ela no poço da esquerda e também uma probabilidade complementar a ela de encontrar ela no poço da direita? Tipo, um por cento de encontrar ela no poço da esquerda e noventa e nove por cento no poço da direita?

Adrielle: Matematicamente eu acho até que teria, né? Matematicamente eu acho até que teria. É, mas assim, eu não tenho eu acho que muita base pra fazer...pra afirmar isso com cem por cento de probabilidade certa. Eu consigo enxergar tudo muito por equação, tá? Então eu vejo as coisas por equações. E matematicamente essa equação faz sentido. (não entendi). (não entendi)...da evolução temporal tem muito a ver, assim, como...a base que a gente tem de física é a clássica né? Evolução temporal é passagem do tempo. Como o estado no sistema vai modificando conforme a passagem do tempo. Essa é a definição temporal que eu sempre tive. Na MQ muita coisa cai por terra né?

Glauco: Bom, essa definição geral ainda vale na MQ, só que como que a gente analisa essa evolução temporal, assim, a gente pode analisar em termos das probabilidades de se encontrar esse sistema (não entendi)...valor de uma grandeza física (não entendi). Bom, essa noção vale, que é como o sistema se altera, né? Como o estado do sistema se altera ao longo do tempo né? Então ainda vale, como tu falaste. Perfeito. Agora, tipo, essas probabilidades de encontrar o sistema com um dado valor de grandeza física, elas podem variar.

Adrielle: Então, basicamente a diferença é essa da quântica pra clássica. Continua sendo como o sistema está evoluindo conforme a passagem do tempo. Só que na quântica tu não pode determinar. É tudo probabilidade de ter em cada estado, conforme a passagem do tempo.

Glauco: Bom, algumas vezes tu pode determinar.

Adrielle: É. Algumas.

Glauco: Se ele tiver num estado estacionário, por exemplo, de energia definida, né? Aí a gente vai encontrar sempre nesse mesmo estado de energia. E claro que também é probabilístico, mas a probabilidade é cem por cento. Probabilidade cem por cento é um caso particular, mas, bom, assim, a mensagem que eu queria passar pra vocês era basicamente de que os estados quânticos, eles são probabilísticos né? Então, isso não tem nada a ver com a evolução temporal, mas de fato, a evolução temporal é modificada porque os estados são diferentes né. Mas basicamente é isso que tu falaste. A evolução temporal é como o sistema se modifica ao longo do tempo. Aí bom, né? Agora depois da entrevista eu vou dar uma olhada em que que a gente pode aproveitar e conversar mais alguma coisa, mas as perguntas eram basicamente essas.

Adrielle: Então tá.