

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

**Análise da dinâmica eletrônica em uma configuração de campos
eletromagnéticos pertinentes a propulsores Hall**

Samuel Marini

Dissertação apresentada à Universidade Federal do
Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Renato Pakter

Porto Alegre, RS
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física

**Análise da dinâmica eletrônica em uma configuração de campos
eletromagnéticos pertinentes a propulsores Hall**

Samuel Marini

Dissertação apresentada à Universidade Federal do
Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Física.
Aprovação em 11/08/2011

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato - UFRGS
Prof. Dr. José Leonardo Ferreira - UnB
Prof. Dr. Leonardo Gregory Brunet - UFRGS
Prof. Dr. Renato Pakter - UFRGS

Porto Alegre, RS
2011

*Para todos aqueles que buscam
uma forma de liberdade
através do conhecimento.*

Agradecimentos

A minha família.

A todos meus amigos.

A todos os meus Professores.

A todas as pessoas que colaboraram de alguma forma para a realização dessa dissertação.

Ao meu orientador professor Dr. Renato Pakter pelos ensinamentos, pelo incentivo constante durante a realização deste trabalho e pelo inestimável apoio e dedicação.

Resumo

Um propulsor do tipo Hall é um mecanismo que utiliza predominantemente uma configuração de campos eletromagnéticos Hall, um campo elétrico perpendicular a um campo magnético, para confinar elétrons e acelerar íons. Os elétrons são confinados dentro de um canal de aceleração onde os campos eletromagnéticos estão presentes. Um gás neutro é lançado dentro desse canal de aceleração de forma que os elétrons confinados podem colidir com os átomos do gás e os ionizar. Os íons gerados dessas colisões, elétrons-gás, são fortemente repelidos para fora do canal de aceleração pelo campo elétrico. A expulsão desses íons é o fator responsável pela propulsão. Nesses propulsores é importante que os elétrons estejam confinados dentro do canal de aceleração e que sejam capazes de produzir o maior número possível de íons. Visando determinar quais são os parâmetros de controle–intensidade dos campos eletromagnéticos– que propiciam uma dinâmica eletrônica com essas características, derivamos, via formalismo Hamiltoniano, as equações de movimento de um elétron e as analisamos. Dessas equações de movimento encontramos funções analíticas que indicam os limites geométricos atingidos pelo elétron dentro do sistema propulsor para cada conjunto de parâmetros de controle. Essas funções constituem o critério de confinamento eletrônico utilizado nesse trabalho. Além disso, a partir das equações de movimento, mostramos quais as configurações de campos eletromagnéticos que teoricamente incrementam o desempenho dos propulsores Hall. Verificamos que nas configurações de maior desempenho a dinâmica eletrônica é caótica. Neste trabalho, o caos é determinado com o auxílio dos mapas de Poincaré e dos expoentes de Lyapunov.

Palavras-chave: Propulsor do tipo Hall, análise linear e análise não-linear, seção de choque de ionização, mapas de Poincaré e expoentes de Lyapunov.

Abstract

A Hall thruster is a system that utilizes an electromagnetic fields configuration predominantly like Hall, an electric field which lies perpendicular to a magnetic field, to confine electrons and to accelerate ions. The electrons are confined within an acceleration chamber where the electromagnetic fields are present. A neutral gas is released within this acceleration chamber so that the confined electrons can collide with the gas and ionize it. The ions generated from these collisions, the electron-gas, are strongly repelled by the electric field system. The expulsion of these ions generate the propulsion. In these thrusters it is very important that the electrons are confined within the acceleration chamber and are able to produce the largest possible number of ions. In order to determine the control parameters, that is, the electromagnetic fields intensity which provides an electronic dynamic with these characteristics; we derived, via Hamiltonian formalism, the motion equations for an electron and we analyzed them. From these motion equations, we found functions that indicate the electron geometric boundaries within these thrusters, for each set of control parameters. In this work, these functions indicate the electronic confinement. Moreover, from the motion equations, we showed the electromagnetic fields settings which theoretically improve the Hall thruster's performance. We found that, in these higher performance settings, the electron dynamics is chaotic. In this work, the chaos is determined by Poincaré maps and by Lyapunov exponents.

Keywords: Hall thrusters, linear and non-linear analysis, ionization cross section, Poincaré maps and Lyapunov exponents.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Sistemas propulsores	1
1.1.1	Equação do foguete	1
1.1.2	Tecnologias para propulsores	4
1.2	Evolução dos foguetes elétricos	5
1.3	Propulsores elétricos por efeito Hall	8
1.4	Organização	8
2	O Modelo	10
2.1	Princípio de funcionamento	10
2.2	Descrição matemática do modelo	13
2.3	Formalismo Hamiltoniano	14
2.4	Condição de confinamento para um elétron	15
2.5	Normalização	22
3	Análise da Dinâmica Eletrônica	26
3.1	Análise linear	26
3.1.1	Pontos de equilíbrio	26
3.1.2	Estabilidade do sistema	29
3.2	Análise não-linear	32
3.2.1	Mapas de Poincaré	32
3.2.2	Condições iniciais para a construção dos mapas de Poincaré	33
3.2.3	Curvas limite para o par canônico radial	34
3.2.4	Curvas limite para o par canônico axial	35
3.2.5	Curvas limite para as coordenadas espaciais radial e axial	37
3.2.6	Expoentes de Lyapunov	38

4	Seção de Choque de ionização e Caos	44
4.1	Seção de choque de ionização	44
4.2	Parâmetros de controle	47
4.3	Resultados	49
5	Conclusões	55
	Referências bibliográficas	59

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo são apresentados elementos introdutórios que visam motivar e contextualizar a pesquisa realizada a respeito dos propulsores do tipo Hall. Inicia-se o capítulo definindo sistemas propulsores e apresenta-se então, por linhas gerais, a história da propulsão elétrica. Esse capítulo introdutório é finalizado com uma motivação ao estudo dos propulsores do tipo Hall e uma posterior apresentação dos tópicos gerais que serão discutidos nos capítulos seguintes.

1.1 Sistemas propulsores

Propulsores são sistemas capazes de transmitir movimento a mecanismos desejados. Satélites, sondas e veículos espaciais necessitam desses dispositivos para movimentarem-se através do espaço sideral. Utilizando como base de operação, especialmente, energia química ou elétrica, esses sistemas são capazes de fornecer momentum a um dado mecanismo.

1.1.1 Equação do foguete

Nesta seção, nós iremos apresentar um desenvolvimento matemático geral para descrever o incremento de velocidade obtido a partir de um propulsor e para definir alguns parâmetros físicos relevantes, tais como: propulsão e impulso específico.

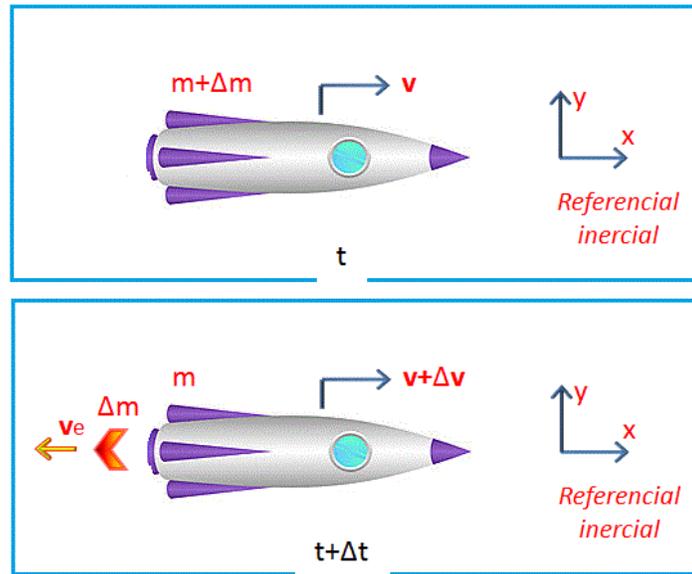


Fig. 1.1: Representação esquemática de um sistema propulsor em dois tempos distintos.

Considerando o sistema inicial como sendo composto por um foguete com o seu propelente, utilizando um referencial inercial e supondo não haver forças externas atuando sobre esse sistema, de acordo com a figura 1.1, podemos aplicar a segunda lei de Newton, obtendo, dessa forma:

$$\sum_n \mathbf{F}_n = 0. \quad (1.1)$$

A partir da equação 1.1, podemos escrever:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i}{\Delta t} = 0, \quad (1.2)$$

onde, \mathbf{p}_f e \mathbf{p}_i representam o momento inicial e o momento final do sistema. Observando a figura 1.1, podemos escrever a equação 1.2 da seguinte forma:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\{m(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + \Delta m \mathbf{v}_e\} - \{(m + \Delta m)\mathbf{v}\}}{\Delta t} = 0, \quad (1.3)$$

onde $m + \Delta m$ e \mathbf{v} são a massa e a velocidade do foguete no instante de tempo t , m e $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ são a massa e a velocidade do foguete no instante de tempo $t + \Delta t$ e \mathbf{v}_e é a velocidade do propelente exaurido do foguete em um intervalo de tempo Δt . Implicitamente, estamos supondo que as velocidades aqui utilizadas são muito menores que a velocidade da luz no vácuo.

Podemos escrever \mathbf{v}_e como:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} + \mathbf{u}_e, \quad (1.4)$$

onde \mathbf{u}_e é a velocidade do propelente exaurido em relação ao referencial do foguete.

Utilizando 1.3 e 1.4 podemos escrever:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m\Delta \mathbf{v} + \Delta m(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} + \mathbf{u}_e) - \Delta m\mathbf{v}}{\Delta t} = 0. \quad (1.5)$$

Observando que o termo $\Delta m\Delta \mathbf{v}$ é muito menor do que os outros termos contidos na equação 1.5, obtemos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m\Delta \mathbf{v} + \Delta m\mathbf{u}_e}{\Delta t} = 0. \quad (1.6)$$

Resolvendo o limite da equação 1.6, podemos escrever:

$$-m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_e \frac{dm}{dt}. \quad (1.7)$$

O módulo do termo da direita da equação 1.7 é definido como sendo a propulsão do sistema [1], explicitamente temos:

$$T = u_e \frac{dm}{dt}. \quad (1.8)$$

A integral da propulsão (T) sobre o tempo na qual ela é aplicada resulta no impulso, ou seja, a variação da quantidade de movimento; dessa forma, temos:

$$I = \int_{t_i}^{t_f} T dt, \quad (1.9)$$

onde t_i e t_f representam os instantes de tempo inicial e final da propulsão, respectivamente. A razão entre a propulsão (T) e a taxa de expulsão do propelente, medido em unidades de peso expelido por segundo, é definida como impulso específico; na sua forma escalar, ela pode ser escrita como:

$$I_{sp} = \frac{\dot{m}u_e}{\dot{m}g_0} = \frac{u_e}{g_0}, \quad (1.10)$$

onde g_0 é o módulo da aceleração da gravidade medida ao nível do mar.

Assumindo que a velocidade de exaustão do gás propelente é constante durante o intervalo de tempo de propulsão, podemos escrever 1.7 como:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{u}_e \ln \frac{m_i}{m_f}. \quad (1.11)$$

Na equação 1.11, $\Delta \mathbf{v}$ é o incremento de velocidade do foguete, \mathbf{u}_e é a velocidade de exaustão do propelente em relação ao foguete, m_i é a massa do foguete no instante de tempo inicial da propulsão e m_f é a massa do foguete no instante de tempo final da propulsão.

1.1.2 Tecnologias para propulsores

Observando as equações 1.7, 1.8 e 1.9 notamos que, em manobras no espaço sideral, um método de propulsão que produza pequenas acelerações, mas que se perpetue por um longo período de tempo, consegue produzir um impulso de mesma ordem de grandeza que um método de propulsão que produza grandes acelerações num curto período de tempo. Sendo assim, os objetivos de cada missão justificam a escolha da tecnologia. Por exemplo, quando se deseja lançar, com propulsão, um objeto para fora da Terra, o sistema impulsor escolhido deverá ser suficientemente potente de forma a superar o arrasto gravitacional e proporcionar ao objeto uma aceleração líquida positiva. No entanto, em órbita no espaço sideral, qualquer sistema impulsor escolhido, por mais tênue que seja sua impulsão, pode propiciar grandes alterações no percurso orbital e na velocidade desse objeto [1]. Na figura 1.2 estão assinaladas as regiões de abrangência do impulso específico em função da propulsão para

diferentes tecnologias de impulsores.

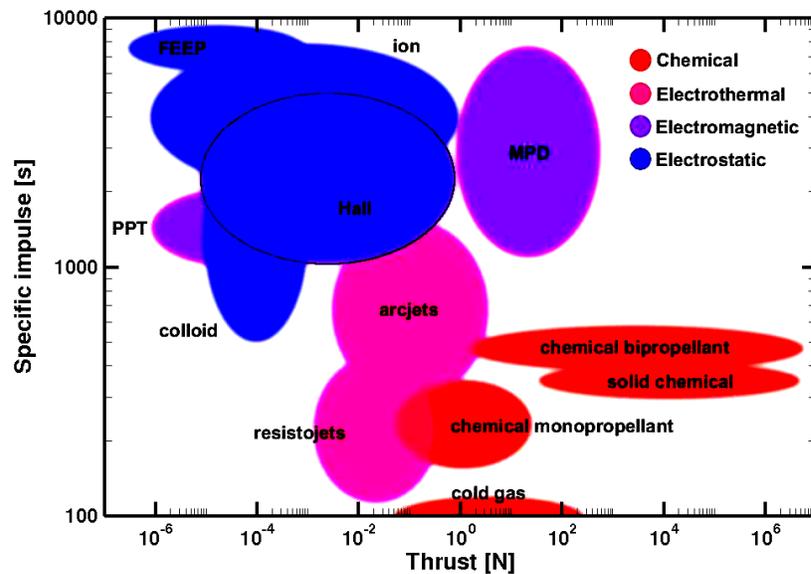


Fig. 1.2: A figura acima mostra um gráfico do impulso específico em função da propulsão do sistema para diferentes tecnologias. As regiões pintadas de vermelho, rosa, lilás e azul representam o uso da tecnologia de propulsão química, eletrotermica, eletromagnética e eletrostática, respectivamente. A região de abrangência dos propulsores Hall aparece destacada. Essa figura foi reproduzida da referência [16]

Uma característica relevante dos propulsores elétricos que os diferencia fortemente dos propulsores químicos é a sua ótima eficiência na utilização de propelente. Essa grande eficiência permite a redução da quantidade de combustível necessária para o objeto de interesse (satélite, sonda ou veículo espacial) possibilitando a inclusão de uma maior carga útil e viabilizando missões tidas como impraticáveis.

1.2 Evolução dos foguetes elétricos

Os benefícios da propulsão elétrica para uma ampla variedade de aplicações no transporte espacial foi reconhecida pela primeira vez pelo precursor da astronáutica, R. H. Goddard, no início do

século XX. Em 1911, K. Tsiolkovskiy propôs ideias análogas e sugeriu a viabilidade delas acelerando partículas carregadas através de campos elétricos para gerar empuxo nos foguetes. Além disso, conceitos similares sobre propulsão elétrica foram propostos por H. Oberth em seu livro, publicado no ano 1929, intitulado *Ways to Spaceflight* [2, 3].

Os grandes avanços conceituais em propulsão elétrica ocorreram na década de 40 quando se vislumbrou a possibilidade da construção de geradores de energia elétrica de pouco peso baseados em fissão nuclear e em painéis solares. Entretanto, os propulsores elétricos começam a ser intensamente estudados somente após o trabalho de E. Stuhlinger, em 1954. Nomeado, *Possibilities of electrical space ship propulsion* [4], o trabalho apresentava formas de melhorar o desempenho dos motores iônicos bem como a necessidade de tornar viável o uso de propulsão elétrica [2].

No ano 1957, os primeiros experimentos reais de propulsores de pequeno porte foram feitos em laboratórios governamentais e em algumas companhias independentes, principalmente nos Estados Unidos da América– EUA e na União Soviética– URSS. Na época, verificou-se que a propulsão elétrica não se limitava a propulsores eletrostáticos ou iônicos conforme o pensamento corrente até então, mas que podia ser estendida a sistemas eletromagnéticos e eletrotérmicos. Em 1959 A. T. Forrester confirma a viabilidade da propulsão elétrica apresentando um propulsor termiônico a base de íons de césio. Um Protótipo simplificado de propulsor elétrico torna-se real, em 1961, nos Estados Unidos da América, devido à contribuição de H.R. Kaufmann. Os aceleradores desenvolvidos por H.R. Kaufmann utilizavam elétrons emitidos por um filamento catódico para gerar íons. Na década de 60, os estadunidenses colocam em operação no espaço os primeiros propulsores elétricos do tipo Kaufmann nos satélites SERT-I e SERT-II; (SERT– *Satellite for electric test*) [5, 6, 7].

Paralelamente, na década de 60, pesquisadores soviéticos buscaram a viabilidade tecnológica dos propulsores elétricos através do uso do efeito Hall. Os propulsores do tipo Hall começaram a ser compreendidos com os primeiros artigos publicados em 1962-1963 por G. Seikel e E. Roshtko [8]; E. C. Lary, R. G. Meyerand e F. Salz [9]; G. S. Janes, J. Dotson e T. Wilson [10] e foram aprimorados por A. I. Morozov e grupo [11, 12]. A primeira missão espacial soviética com propulsores Hall ocorreu em 1972 através do satélite Meteor, desde então, mais de 200 propulsores Hall foram utilizados com

êxito [5, 7, 13].

Em 2003, a agência espacial europeia– ESA (*European Space Agency*)– lançou a sonda espacial SMART-1 (*Small Missions for Advanced Research in Technology-1*) para fotografar a superfície lunar. No espaço sideral, a sonda utilizou propulsores do tipo Hall como sistema de propulsão primária, a fim de verificar o nível do domínio tecnológico sobre esses sistemas impulsores [14].

Outras missões relevantes foram realizadas com o auxílio de sistemas propulsores elétricos, entre essas, destaca-se: o lançamento da sonda espacial Deep Space 1, em 1999, destinada a testar novas tecnologias e encontrar o cometa Borrelly; o lançamento da sonda Hayabusa, em 2003, para coletar material do asteroide Itokawa; o lançamento da sonda Dawn, em 2007, para estudar os asteroides Vesta e Ceres e o lançamento do satélite GOCE– *Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*, em 2009, destinado a mapear o campo gravitacional terrestre com grande precisão [5, 7, 14].

Apesar da concretização de muitos ideais que demonstram, de certa forma, o domínio tecnológico sobre os sistemas propulsores elétricos, problemas permanecem em aberto e formas de incrementar o desempenho desses sistemas são intensamente estudadas. Entre os inúmeros trabalhos realizados, destacam-se alguns que serviram como base para a elaboração dessa dissertação como: *Fully kinetic numerical modeling of a plasma* [15] que apresenta, através de um modelo numérico, uma forma de incrementar a performance de propulsores Hall; *Computational modeling of Hall thruster channel wall erosion* [16] que visa prever, através de métodos numéricos, o tempo de vida de um impulsor do tipo Hall; *Numerical studies of Hall thruster based on fluid equations for plasma* [13] que objetiva caracterizar o plasma dentro de um propulsor Hall e o trabalho "Estudo da dinâmica de partículas em um propulsor a plasma do tipo Hall com ímãs permanentes"[17] que caracteriza a geração e a dinâmica dos íons e elétrons em um impulsor Hall cujos campos magnéticos são gerados por ímãs permanentes.

1.3 Propulsores elétricos por efeito Hall

Os propulsores elétricos por efeito Hall são mecanismos que utilizam uma configuração de campos eletromagnéticos predominante do tipo Hall para confinar elétrons, gerar e acelerar íons. Esses íons acelerados são os responsáveis pela propulsão. Uma geometria simples, uma grande eficiência no consumo de combustível e uma baixa demanda por potência elétrica, quando comparados com outros sistemas de propulsão elétrica, qualificam esses propulsores como ideais para manobras como: ajuste e mudança de órbita, compensação do arrasto atmosférico e longas viagens espaciais [17, 18, 19].

Para gerar íons e conseqüentemente propulsão, os aceleradores Hall necessitam confinar elétrons em um canal de aceleração. O confinamento desses elétrons só é possível com uma combinação de campos eletromagnéticos com intensidades adequadas [13, 17]. Neste trabalho, nós iremos desenvolver um modelo idealizado para descrever a dinâmica de um elétron nesses propulsores. O intuito dessa descrição é desvendar o modo que uma dada configuração de campos eletromagnéticos interfere na dinâmica do elétron e prever teoricamente os parâmetros de controle—entenda-se, intensidade dos campos eletromagnéticos—que confinam o elétron no canal de aceleração e que maximizam a ionização do gás propelente; logo, os parâmetros que podem incrementar o rendimento desses sistemas.

1.4 Organização

O trabalho contextualizado nesse capítulo é apresentado com a seguinte formatação:

No **capítulo 2** apresentaremos o princípio de funcionamento dos propulsores do tipo Hall e, além disso, exibiremos o modelo proposto para o estudo da dinâmica eletrônica. Partindo do modelo proposto obteremos as equações de movimento para o elétron, via formalismo Hamiltoniano. Obteremos, também, as curvas limite que descrevem os limites geométricos atingidos pelo elétron para dadas intensidades dos campos eletromagnéticos. Ademais, veremos que essas curvas limite descrevem o confinamento eletrônico.

No **capítulo 3** faremos uma análise da dinâmica eletrônica. Primeiramente através de uma análise

linear das equações de movimento do elétron e posteriormente através de uma análise não-linear via mapas de Poincaré e expoentes de Lyapunov.

No **capítulo 4** buscaremos os parâmetros de controle que teoricamente incrementam a eficiência dos propulsores Hall. Faremos isso com base no cálculo da seção de choque de ionização do gás propelente. Verificaremos que os parâmetros de controle que impõem uma dinâmica caótica ao elétron são os que teoricamente incrementam a eficiência na ionização do gás propelente.

O trabalho é então concluído no **capítulo 5**, onde enfatizamos os principais resultados obtidos nesse trabalho.

Capítulo 2

O Modelo

Nos propulsores Hall, os elétrons devem ser confinados em um canal de aceleração para que eles formem íons a partir da sua colisão com os átomos de um gás propelente lançado no mesmo canal. A configuração de campos eletromagnéticos, que confina os elétrons, ejeta com grande velocidade esse íons formados. Neste capítulo detalharemos esse mecanismo exposto, pois ele constitui o princípio de funcionamento dos propulsores do tipo Hall e, além disso, apresentaremos o modelo proposto para o estudo da dinâmica eletrônica. Posteriormente, partindo do modelo proposto, obteremos as curvas limite– funções que inferem os limites geométricos atingidos pelo elétron para dadas intensidades dos campos eletromagnéticos. Com essas curvas limite, descrevemos o confinamento eletrônico. Ademais, as informações contidas nas curvas limite fornecem a base para uma descrição mais sucinta das equações de movimento.

2.1 Princípio de funcionamento

Uma representação do sistema propulsor Hall é apresentada na figura 2.1. Nela estão expostas duas componentes de campos eletromagnéticos essenciais para a geração de uma corrente eletrônica Hall: a componente de campo elétrico na direção axial e a componente de campo magnético na direção radial. Além do mais, na representação, as bobinas magnéticas são responsáveis pela geração

do campo magnético e a diferença de potencial entre o ânodo e o cátodo externo é responsável pela geração do campo elétrico. O espaço vazio entre os dois cilindros concêntricos é o chamado canal de aceleração. Utilizaremos coordenadas cilíndricas para descrever o modelo do propulsor Hall, pois essa escolha do sistema de coordenadas é a natural. Sendo assim, de acordo com a figura 2.1, r designa a coordenada radial, θ a coordenada azimutal e z a coordenada axial. O eixo da coordenada axial é escolhido de forma a coincidir com o eixo de simetria do propulsor.

O cátodo é aquecido e emite elétrons que são atraídos pelo campo elétrico \mathbf{E} para dentro do canal de aceleração (direção axial e sentido negativo) formando uma densidade de corrente elétrica \mathbf{J}_E , definida como positiva no sentido de deriva dos elétrons. A densidade de corrente elétrica \mathbf{J}_E possui uma componente ortogonal ao campo magnético radial de tal forma que os elétrons terão suas trajetórias defletidas, devido a força de Lorenz, para a direção azimutal com sentido positivo; formando, por conseguinte, a densidade de corrente elétrica Hall \mathbf{J}_H , também definida como positiva no sentido de deriva dos elétrons.

O movimento dos elétrons através da direção azimutal é perpendicular a componente radial do campo magnético; dessa forma, os elétrons terão a direção da sua trajetória alterada, devido a força de Lorenz, para a direção axial com sentido positivo. Essa força de Lorenz, que surge devido à densidade de corrente elétrica Hall e a componente do campo magnético radial, é a força que tende a confinar os elétrons na direção axial, pois ela é oposta a força gerada pela componente axial do campo elétrico. Portanto, nota-se que, com o arranjo de duas componentes de campos eletromagnéticos (elétrico-axial e magnético-radial) é possível a criação da corrente Hall. No entanto, somente tais componentes não são suficientes para o confinamento dos elétrons no canal de aceleração, haja vista a ausência de uma força centrípeta para confinar os elétrons na direção radial [17, 20, 21].

Simultaneamente ao estabelecimento da densidade de corrente elétrica Hall— \mathbf{J}_H — lança-se no canal de aceleração o gás propelente, por exemplo, o gás argônio. O gás propelente é ionizado através de colisões com os elétrons. Os íons gerados com cargas positivas sentem uma força elétrica na direção do campo elétrico axial e são expelidos do sistema propulsor com grande velocidade. Em analogia ao caso apresentado na seção 1.1.2, o sistema move-se no sentido oposto ao do lançamento

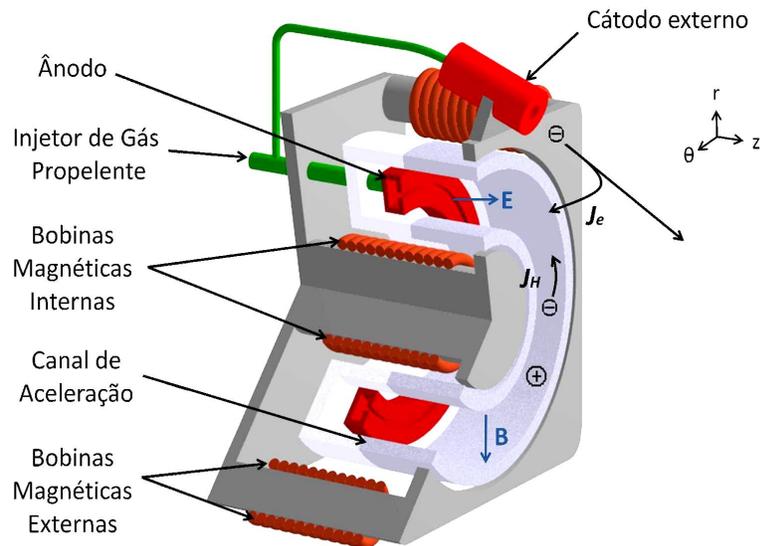


Fig. 2.1: Modelo de um Propulsor do tipo Hall SPT 100 ML. Adaptado de ref. [13]

dos íons devido a conservação do momento linear. Portanto, a expulsão dos íons produzidos no canal de aceleração é o fator responsável pela propulsão. Os íons teriam uma dinâmica semelhante a dos elétrons através do canal de aceleração, entretanto, isso não ocorre, pois eles perdem contato com os campos eletromagnéticos antes de serem confinados.

Ao final do canal de aceleração, elétrons oriundos da fonte catódica são absorvidos pelo gás ionizado; dessa forma, o gás assume a neutralidade. Tal fator é importante em missões espaciais para que não haja acúmulo de cargas no veículo espacial, o que poderia comprometer o mecanismo de funcionamento do propulsor e causar danos nos equipamentos eletrônicos a bordo [17, 21].

Dessa descrição do funcionamento de um propulsor Hall, observa-se a importância em saber quais as componentes dos campos eletromagnéticos são necessárias para que haja confinamento dos elétrons dentro do canal de aceleração e quais são os módulos dessas componentes para que os elétrons estejam mais aptos para ionizar o gás propelente. Saber descrever o confinamento eletrônico é importante para a construção dos propulsores, pois pode-se evitar, utilizando tal informação, a colisão de elétrons com a estrutura física do propulsor. Ademais, saber escolher os parâmetros de controle

que tornam os elétrons mais aptos à ionização do gás propelente significa saber como, teoricamente, incrementar a eficiência na utilização de combustível nesses sistemas.

2.2 Descrição matemática do modelo

Com base no princípio de funcionamento dos impulsores Hall, utilizaremos, além das componentes dos campos eletromagnéticos expostos na seção anterior, outras componentes de campos eletromagnéticos que serão necessárias para confinar os elétrons dentro do canal de aceleração e que poderão alterar a dinâmica. Explicitamente, utilizaremos, para o campo magnético, três componentes espaciais: um campo magnético radial com decaimento linear em função do crescimento do raio e as componentes de campo magnético axial e azimutal uniformes. Matematicamente, escrevemos o campo magnético como:

$$\mathbf{B} = \frac{\varphi_r}{r} \hat{r} + b_\theta \hat{\theta} + b_z \hat{z}, \quad (2.1)$$

onde \hat{r} , $\hat{\theta}$ e \hat{z} são, respectivamente, os versores das direções radial, azimutal e axial. As constantes b_θ e b_z possuem dimensão de campo magnético (no SI [T]) enquanto a constante φ_r possui dimensão de campo magnético multiplicado por distância (no SI [T.m]) e, por isso, foi representada com uma letra distinta.

Para o campo elétrico utilizamos apenas uma componente espacial: a componente axial. Ela é a única necessária, serve para o confinamento eletrônico e para a expulsão dos íons produzidos no canal de aceleração. Iremos supô-la uniforme espacialmente. Essa aproximação é válida quando a distância da partícula carregada até a placa (ânodo) é muito menor que o raio da placa— aproximação de placa infinita— ou seja:

$$\mathbf{E} = e_z \hat{z}, \quad (2.2)$$

onde e_z é a componente axial do campo elétrico, ela possui dimensão de força por unidade de carga

(no SI [N/C]) [20].

Através do formalismo Hamiltoniano, nós iremos obter as equações da dinâmica de um elétron imerso na configuração de campos eletromagnéticos– 2.1 e 2.2– apresentada. Analisando essas equações, nós iremos descrever o confinamento eletrônico e prever os parâmetros que teoricamente maximizam a eficiência desses sistemas. Observando que nos sistemas propulsores Hall reais a densidade de elétrons é pequena ($10^{-15}m^{-3}$), os efeitos coletivos serão desprezados nas nossas análises.

2.3 Formalismo Hamiltoniano

O Hamiltoniano para uma partícula não relativística, carregada eletricamente e imersa em um conjunto de campos eletromagnéticos, no sistema internacional, é dado por [22]:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 + q\phi, \quad (2.3)$$

onde m é a massa da partícula, q é sua carga elétrica, \mathbf{P} é o momento canônico linear nas coordenadas generalizadas, ϕ é o potencial elétrico e \mathbf{A} é o potencial vetor que deve satisfazer as seguintes relações:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.5)$$

Tendo em vista as relações 2.1 e 2.5, podemos escrever o potencial vetor \mathbf{A} como:

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{z}{r}\varphi_r + \frac{r}{2}b_z \right) \hat{\theta} + (-rb_\theta) \hat{z}. \quad (2.6)$$

Analogamente, das relações 2.2, 2.4 e 2.6, podemos escrever o potencial elétrico como:

$$\phi = -ze_z, \quad (2.7)$$

onde definimos $\phi(z = 0) = 0$; sendo que: $z = 0$ é a posição axial do cátodo.

Por conseguinte, observa-se que, o Hamiltoniano para uma partícula não relativística, carregada eletricamente e imersa na configuração de campos eletromagnéticos utilizada nesse trabalho para descrever um propulsor Hall, é dado por:

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left(\frac{P_\theta}{r} + \frac{z}{r} q \varphi_r - r \frac{q b_z}{2} \right)^2 + \frac{1}{2m} (P_z + r q b_\theta)^2 - z q e_z. \quad (2.8)$$

Para um elétron $m = m_e$ e $q = -q_e$; dessa forma, o Hamiltoniano dado por 2.8 pode ser escrito como:

$$H = \frac{P_r^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e} \left(\frac{P_\theta}{r} - \frac{z}{r} q_e \varphi_r + r \frac{q_e b_z}{2} \right)^2 + \frac{1}{2m_e} (P_z - r q_e b_\theta)^2 + z q_e e_z. \quad (2.9)$$

Esse é o Hamiltoniano para um elétron com energia não relativística sujeito aos campos eletromagnéticos expressos em 2.1 e 2.2. Note que, devido ao fato do sistema possuir uma simetria axial, o Hamiltoniano dado por 2.9 é independente da coordenada azimutal e, dessa forma, P_θ é uma constante de movimento. Além disso, o Hamiltoniano é independente do tempo, e, sendo assim, também é uma constante [20, 22].

2.4 Condição de confinamento para um elétron

Nós iremos considerar um elétron que é emitido pelo cátodo aquecido num instante de tempo $t = 0$ com uma energia cinética igual a zero e com uma energia potencial igual a zero na origem, em $z = 0$ – posição axial do cátodo. Como veremos nos passos seguintes, estudo dessa condição inicial irá permitir obtermos um critério para o confinamento eletrônico através de curvas limite. Esse elétron é citado ao longo do texto como sendo a partícula física.

Dado que energia cinética e energia potencial do elétron são iguais a zero, temos que a energia total dele também é nula, ou seja, temos $H = 0$. Observa-se que, para satisfazer essa condição definida, a condição inicial do elétron pode ser escrita como:

$$r = r_0, \quad (2.10)$$

$$P_r = 0, \quad (2.11)$$

$$z = 0, \quad (2.12)$$

e

$$P_z = r_0 q_e b_\theta; \quad (2.13)$$

onde r_0 é o raio do cátodo— ele corresponde ao raio inicial do elétron. Ademais, note que a constante de movimento P_θ fica dada por:

$$P_\theta = -r_0^2 \frac{b_z q_e}{2}. \quad (2.14)$$

Devido ao fato de que esse sistema que estamos tratando é conservativo, essa energia, previamente definida, será a mesma para qualquer instante de tempo. Logo, podemos escrever o Hamiltoniano 2.9, para um instante de tempo qualquer, como:

$$0 = \frac{P_r^2}{2m_e} + \frac{1}{2m_e} \left(\frac{P_\theta}{r} - \frac{z}{r} q_e \varphi_r + r \frac{q_e b_z}{2} \right)^2 + \frac{1}{2m_e} (P_z - r q_e b_\theta)^2 + z q_e e_z. \quad (2.15)$$

A equação 2.15 expressa um vínculo entre as coordenadas. Podemos escrever, a partir dela, $z = z(r, P_r, P_z)$. Assim:

$$z_{\pm} = \frac{-2e_z m_e r^2 + \varphi_r b_z q_e (r^2 - r_0^2) \pm 2r \sqrt{e_z^2 m_e^2 r^2 - \varphi_r^2 (P_r^2 + (P_z - b_\theta q_e r)^2) - \varphi_r b_z q_e e_z m_e (r^2 - r_0^2)}}{2\varphi_r^2 q_e}, \quad (2.16)$$

onde z_{\pm} indicam as duas possíveis soluções de z para a equação 2.15. Nos passos seguintes, nós iremos obter as curvas limite no espaço de coordenadas z e r , ou seja, nós iremos encontrar as funções $z = z(r)$ que descrevem os limites geométricos atingidos pela partícula física no espaço z e r . Para isso, inicialmente fazemos $\frac{\partial z_{\pm}}{\partial P_r} = 0$ e encontramos os valores de P_r que satisfazem essa igualdade, ou seja [23]:

$$\frac{\partial z_{\pm}}{\partial P_r} = \mp \frac{P_r r}{q_e \sqrt{e_z^2 m_e^2 r^2 - \varphi_r^2 (P_r^2 + (P_z - b_{\theta} q_e r)^2) - \varphi_r b_z q_e e_z m_e (r^2 - r_0^2)}} = 0. \quad (2.17)$$

As equações 2.17 são satisfeitas para $P_r = 0$. Substituindo esse resultado em 2.16 podemos escrever $z = z(r, P_z)$.

$$z_{\pm} = \frac{-2e_z m_e r^2 + \varphi_r b_z q_e (r^2 - r_0^2) \pm 2r \sqrt{e_z^2 m_e^2 r^2 - \varphi_r^2 (P_z - b_{\theta} q_e r)^2 - \varphi_r b_z q_e e_z m_e (r^2 - r_0^2)}}{2\varphi_r^2 q_e}. \quad (2.18)$$

Procedemos, de forma análoga ao passo anterior, fazendo $\frac{\partial z_{\pm}}{\partial P_z} = 0$ e buscando as condições necessárias para P_z satisfazer essa igualdade. Assim, temos que:

$$\frac{\partial z_{\pm}}{\partial P_z} = \mp \frac{(P_z - b_{\theta} q_e r) r}{q_e \sqrt{e_z^2 m_e^2 r^2 - \varphi_r^2 (P_z - b_{\theta} q_e r)^2 - \varphi_r b_z q_e e_z m_e (r^2 - r_0^2)}} = 0. \quad (2.19)$$

Para satisfazer as equações 2.19, $P_z = b_{\theta} q_e r$. Substituindo essa relação para P_z em 2.18, nós podemos escrever $z = z(r)$. Portanto;

$$z_{\pm}(r) = \frac{-2e_z m_e r^2 + \varphi_r b_z q_e (r^2 - r_0^2) \pm 2r \sqrt{e_z^2 m_e^2 r^2 - \varphi_r b_z q_e e_z m_e (r^2 - r_0^2)}}{2\varphi_r^2 q_e}. \quad (2.20)$$

As curvas descritas em 2.20 estão apresentadas na figura 2.2a. A partir da função $z_+(r)$ – 2.20,

desenhada na cor azul na figura 2.2a, observamos a existência de um ponto máximo que pode ser atingido pelo elétron na coordenada axial, também podemos observar, a partir da função $z_-(r)$ – 2.20, desenhada na cor vermelha na figura 2.2a, a existência de um ponto mínimo que pode ser atingido pelo elétron na coordenada axial. Dessa forma, observe que, as curvas descritas em 2.20 trazem consigo informações sobre os limites geométricos que podem ser atingidos pelo elétron e por isso são chamadas de curvas limite. Nesse trabalho, as curvas limite constituem o critério de confinamento eletrônico.

Note que, a componente azimutal do campo magnético b_θ não altera a configuração das curvas limite expressas em 2.20 e, portanto, não tem papel fundamental no confinamento eletrônico; no entanto, ela pode modificar a dinâmica eletrônica, como veremos posteriormente.

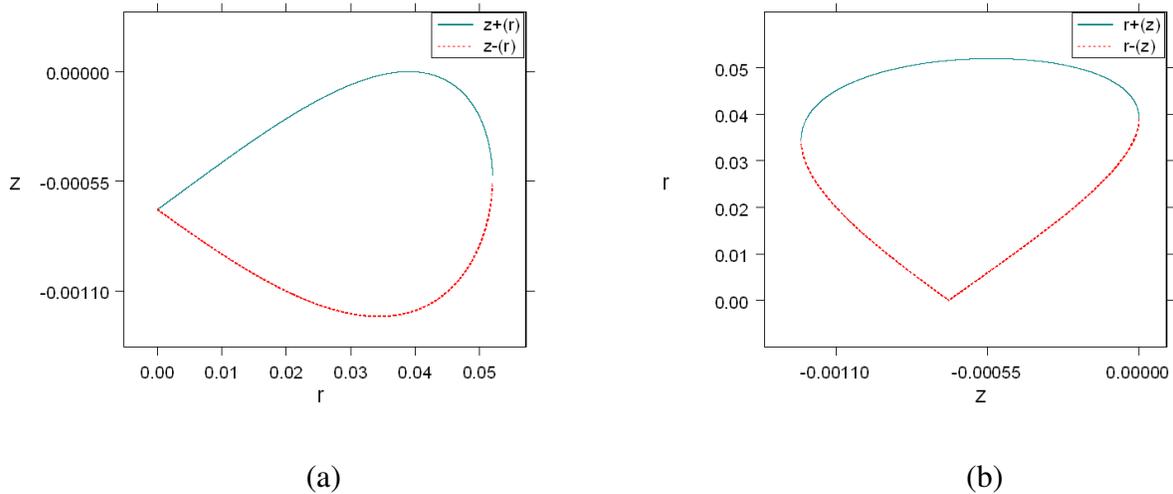


Fig. 2.2: (a) curvas limite para $z(r)$ descritas pelas funções 2.20. (b) curvas limite para $r(z)$ descritas pelas funções 2.30. Nessas figuras: $r_0 = 3.9 \times 10^{-2} \text{m}$, $\varphi_r = 4.4 \times 10^{-5} \text{T.m}$, $e_z = 135.36 \text{ N/C}$ e $b_z = 4.0 \times 10^{-5} \text{T}$.

Das funções 2.20, podemos encontrar analiticamente quais são os valores máximos e mínimos que o elétron pode atingir na coordenada espacial z dada a condição inicial e as intensidade das componentes dos campos eletromagnéticos. Inicialmente, obteremos analiticamente o valor máximo que pode ser atingido pelo elétron na coordenada axial. Para fazer isso, realizamos $\frac{\partial z_+}{\partial r} = 0$ e encontramos

as condições para r que satisfazem a igualdade, são elas:

$$r_1 = r_0 \quad (2.21)$$

e

$$r_2 = -r_0 \sqrt{\frac{e_z m_e}{\varphi_r b_z q_e - e_z m_e}}. \quad (2.22)$$

Devido ao fato de r ser a coordenada radial e, portanto, assumir somente valores positivos, $r_1 = r_0$ é a condição fisicamente possível. Substituindo essa condição na função z_+ descrita em 2.20, obtemos:

$$z_+(r_1) = 0. \quad (2.23)$$

Esse é o valor máximo que pode ser atingido pelo elétron na coordenada axial, dessa forma:

$$z_{max} = 0. \quad (2.24)$$

Perceba de 2.21 e 2.24 que esse limite corresponde à condição inicial do elétron. Podemos obter, analiticamente, o valor mínimo que pode ser atingido pelo elétron na coordenada axial. Para isso, fazemos $\frac{\partial z_-}{\partial r} = 0$ e encontramos as condições em r que satisfazem essa igualdade, são elas:

$$r_3 = -r_0 \quad (2.25)$$

e

$$r_4 = r_0 \sqrt{\frac{e_z m_e}{\varphi_r b_z q_e - e_z m_e}}. \quad (2.26)$$

Novamente, devido ao fato de r representar a coordenada radial e, portanto, assumir um valor positivo, $r_1 = r_0 \sqrt{\frac{e_z m_e}{\varphi_r b_z q_e - e_z m_e}}$ é a condição fisicamente possível. Substituindo essa condição na

função z_- descrita em 2.20, obtemos:

$$z_-(r_4) = -r_0^2 \frac{b_z^2 q_e}{2(\varphi_r b_z q_e - e_z m_e)}. \quad (2.27)$$

Esse é o valor mínimo que pode ser atingido pelo elétron na coordenada axial; assim, podemos escrever:

$$z_{min} = -r_0^2 \frac{b_z^2 q_e}{2(\varphi_r b_z q_e - e_z m_e)}. \quad (2.28)$$

Além disso, observa-se de 2.26 que

$$\varphi_r b_z q_e - e_z m_e > 0 \quad (2.29)$$

para que haja uma condição fisicamente aceitável que localize o extremo da função z_- e, portanto, z_{min} .

Em conseqüência disso, nota-se de 2.29 que, além das componentes dos campos e_z e φ_r intrínsecas da configuração Hall, necessitamos imprescindivelmente da componente axial do campo magnético b_z para que seja possível o confinamento eletrônico. Além disso, $b_z > \frac{m_e e_z}{q_e \varphi_r}$.

Dada a função $z = z(r)$, descrita em 2.20, podemos invertê-la para escrever $r = r(z)$, tentando, com esse procedimento, obter analiticamente os valores extremos que podem ser atingidos pelo elétron na direção radial, logo, podemos escrever:

$$r_{\pm}(z) = \sqrt{-4e_z m_e z + b_z q_e (b_z r_0^2 + 2\varphi_r z) \pm 2\sqrt{2e_z m_e z (2e_z m_e z - b_z q_e (b_z r_0^2 + 2\varphi_r z))}}. \quad (2.30)$$

As curvas descritas por 2.30 estão representadas na figura 2.2b. A partir da função $r_+(z)$ – 2.30, desenhada na cor azul na figura 2.2b, observamos a existência de um ponto máximo atingido pelo elétron na coordenada radial, também podemos notar, a partir da função $r_-(z)$ – 2.30, desenhada na cor vermelha na figura 2.2b, a existência de um ponto mínimo atingido pelo elétron na coordenada

radial.

Para encontrarmos o valor máximo que o elétron pode atingir na coordenada radial, utilizamos a função r_+ descrita em 2.30, realizamos $\frac{\partial r_+}{\partial z} = 0$ e resolvemos para z ; assim, encontramos a seguinte relação:

$$z_1 = -r_0^2 \frac{b_z e_z m_e}{2\varphi_r (\varphi_r b_z q_e - e_z m_e)}. \quad (2.31)$$

Substituindo a relação 2.31 em 2.30 encontramos o valor extremo para r_+ , dado por:

$$r_+(z_1) = r_0 \sqrt{\frac{\varphi_r b_z q_e}{(\varphi_r b_z q_e - e_z m_e)}}. \quad (2.32)$$

Esse é o valor máximo que pode ser atingido pelo elétron na coordenada radial, dessa forma, podemos escrever:

$$r_{max} = r_0 \sqrt{\frac{\varphi_r b_z q_e}{(\varphi_r b_z q_e - e_z m_e)}}. \quad (2.33)$$

Note que em 2.33 a condição 2.29 é necessária para a existência de um valor r_{max} real e, portanto, necessária para que haja confinamento eletrônico.

Para encontrarmos o valor mínimo que o elétron pode atingir na coordenada radial, fazemos $\frac{\partial r_-}{\partial z} = 0$ e resolvemos para z , encontrando a relação:

$$z_2 = -r_0^2 \frac{b_z}{2\varphi_r}. \quad (2.34)$$

Substituindo a relação 2.34 em 2.30 encontramos o valor extremo para r_- , descrito como segue:

$$r_-(z_2) = 0. \quad (2.35)$$

Esse é o valor mínimo que pode ser atingido pelo elétron na coordenada radial, assim:

$$r_{min} = 0. \quad (2.36)$$

2.5 Normalização

Iremos prosseguir o trabalho adimensionalizando as quantidades da equação 2.9. Essa adimensionalização irá reduzir o número de parâmetros do sistema. Trocaremos as quatro constantes eletromagnéticas φ_r , b_θ , b_z e e_z por três novos parâmetros; isso facilitará a análise dos resultados.

O Hamiltoniano do sistema possui dimensão de energia; logo, uma escolha natural para torná-lo adimensional é dividi-lo pela energia de repouso de um elétron, $E = m_e c^2$. Definimos, então, o novo Hamiltoniano como:

$$\bar{H} \equiv \frac{H}{m_e c^2}. \quad (2.37)$$

Além disso, convém definirmos o momento canônico radial adimensional como:

$$\bar{P}_r \equiv \frac{P_r}{m_e c} \quad (2.38)$$

e o momento canônico axial adimensional como:

$$\bar{P}_z \equiv \frac{P_z}{m_e c}. \quad (2.39)$$

De posse das definições 2.37, 2.38 e 2.39, podemos escrever a equação 2.9 no seguinte formato:

$$\bar{H} = \frac{\bar{P}_r^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{P_\theta}{r m_e c} - \frac{z q_e \varphi_r}{r m_e c} + r \frac{q_e b_z}{2 m_e c} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\bar{P}_z - r \frac{q_e b_\theta}{m_e c} \right)^2 + z \frac{q_e e_z}{m_e c^2}. \quad (2.40)$$

Por conseguinte, definirmos a frequência de giro axial como:

$$w_z \equiv \frac{q_e b_z}{m_e} \quad (2.41)$$

e a frequência de giro azimutal como:

$$w_\theta \equiv \frac{q_e b_\theta}{m_e}. \quad (2.42)$$

Além disso, definimos a coordenada radial adimensional da seguinte forma:

$$\bar{r} \equiv \frac{w_z}{c} r \quad (2.43)$$

e a coordenada axial adimensional, como segue:

$$\bar{z} \equiv \frac{w_z}{c} z. \quad (2.44)$$

Finalmente, definimos o momento azimutal adimensional como:

$$\bar{P}_\theta \equiv \frac{w_z}{m_e c^2} P_\theta. \quad (2.45)$$

Podemos escrever, a partir da equação 2.40 e das definições 2.41-2.45, o Hamiltoniano adimensional:

$$H = \frac{P_r^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{P_\theta}{r} - \frac{z}{r} \eta_b + \frac{r}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (P_z - r \eta_p)^2 + z \eta_e. \quad (2.46)$$

Na equação 2.46, o sobrescrito barra foi suprimido e foram introduzidos os parâmetros adimensionais de controle η_b , η_e e η_p , definidos como: parâmetro de controle magnético radial

$$\eta_b \equiv \frac{q_e \varphi_r}{m_e c}, \quad (2.47)$$

relacionado com a componente radial do campo magnético; parâmetro de controle elétrico axial

$$\eta_e \equiv \frac{1}{w_z} \frac{q_e e_z}{m_e c}, \quad (2.48)$$

relacionado com a razão da componente de campo elétrico axial com a componente de campo mag-

nético axial; e parâmetro de controle magnético azimutal

$$\eta_p \equiv \frac{w_\theta}{w_z}, \quad (2.49)$$

relacionado com a razão da componente de campo magnético azimutal com a componente de campo magnético axial.

Do Hamiltoniano do sistema, dado pela equação 2.46, temos que as equações de movimento assumem a seguinte forma [24]:

direção radial;

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = P_r, \quad (2.50)$$

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\left(\frac{P_\theta}{r} - \frac{z}{r}\eta_b + \frac{r}{2}\right)\left(-\frac{P_\theta}{r^2} + \frac{z}{r^2}\eta_b + \frac{1}{2}\right) + (P_z - r\eta_p)\eta_p. \quad (2.51)$$

Direção azimutal;

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{P_\theta}{r} - \frac{z}{r}\eta_b + \frac{r}{2}\right), \quad (2.52)$$

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0. \quad (2.53)$$

Direção axial:

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial P_z} = P_z - r\eta_p, \quad (2.54)$$

$$\dot{P}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\eta_b}{r}\left(\frac{P_\theta}{r} - \frac{z}{r}\eta_b + \frac{r}{2}\right) - \eta_e. \quad (2.55)$$

Observa-se, da equação 2.53, que a taxa de variação do momento angular é zero; como constatamos anteriormente, trata-se de uma constante de movimento, devido a simetria axial do problema. A frequência azimutal 2.52 pode ser escrita em função de r , P_r , z e P_z e, portanto, necessitamos integrar somente o conjunto de equações diferenciais dado pelas equações 2.50, 2.51, 2.54 e 2.55,

com condições iniciais, para determinarmos univocamente a dinâmica eletrônica.

Dessa forma, o sistema a ser tratado possui dois graus de liberdade acoplados. Possuímos, para resolvê-lo, apenas uma constante, a energia. Sendo assim, o sistema pode ser não integrável. Por conseguinte, resolvemos o conjunto de equações diferenciais 2.50, 2.51, 2.54 e 2.55, através de métodos numéricos. Utilizamos o integrador do pacote *imsl* desenvolvido pela "Compaq Computer Corporation", para linguagem Fortran. Esse integrador resolve as equações diferenciais pelo método de Runge-Kutta de sexta ordem. Ele utiliza passos temporais adaptativos de forma a garantir uma precisão definida previamente. Para os cálculos envolvidos nesse trabalho, utilizamos uma precisão de 10^{-12} [25, 26].

Note, especialmente, de 2.41, 2.43, 2.44 e 2.45 que a forma da normalização realizada nesse capítulo só foi possível devido ao fato do campo axial b_z dever ser não nulo, como constatado a partir da condição 2.29.

Capítulo 3

Análise da Dinâmica Eletrônica

Neste capítulo faremos uma análise da dinâmica de um elétron sujeito aos campos eletromagnéticos dados por 2.1 e 2.2. A dinâmica de um elétron sujeita a tais campos é descrita pelas equações 2.50, 2.51, 2.54 e 2.55. Primeiramente realizaremos uma análise linear dessas equações e posteriormente, devido à inconclusividade desta análise linear, faremos uma análise não-linear utilizando os mapas de Poincaré e os expoentes de Lyapunov. Através da análise não-linear, verificaremos a existência de dinâmicas regulares e caóticas, para o elétron.

3.1 Análise linear

3.1.1 Pontos de equilíbrio

Em geral, um ponto de equilíbrio ou ponto fixo consiste em um local onde a partícula posta em repouso inicialmente permanece imóvel em instantes de tempo posteriores. Para que exista um ponto de equilíbrio, a velocidade e a força resultante sobre a partícula devem ser identicamente nulas, nesse ponto. Para saber se o ponto fixo é estável ou não, analisa-se o que ocorre com a partícula nos pontos próximos ao ponto de equilíbrio depois de perturbá-la de sua posição inicial. Verifica-se, então, se a partícula retorna ao ponto fixo, se ela permanece na vizinhança do ponto fixo ou se ela diverge do ponto fixo. As características da dinâmica da partícula nos pontos próximos ao ponto de equilíbrio

são obtidas estudando-se a matriz Jacobiana. Os valores próprios dessa matriz indicam o tipo de equilíbrio que o ponto possui [27, 28].

Definindo-se um sistema dinâmico como:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

verifica-se que, haverá pontos fixos quando:

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

onde \mathbf{x}_0 é um ponto de equilíbrio.

Observa-se de 3.2 que, para que haja um ponto fixo, as equações 2.50, 2.51, 2.54 e 2.55 devem ser igualadas a zero, pois, dessa forma, garante-se que a velocidade e a força resultante sobre o elétron são nulas para as coordenadas radial e axial, logo:

$$\dot{r} = P_r = 0, \quad (3.3)$$

$$\dot{P}_r = - \left(\frac{P_\theta}{r} - \frac{z}{r} \eta_b + \frac{r}{2} \right) \left(-\frac{P_\theta}{r^2} + \frac{z}{r^2} \eta_b + \frac{1}{2} \right) + (P_z - r\eta_p) \eta_p = 0, \quad (3.4)$$

$$\dot{z} = P_z - r\eta_p = 0 \quad (3.5)$$

e

$$\dot{P}_z = \frac{\eta_b}{r} \left(\frac{P_\theta}{r} - \frac{z}{r} \eta_b + \frac{r}{2} \right) - \eta_e = 0. \quad (3.6)$$

Desejamos, por conseguinte, obter as condições para r , P_r , z e P_z que satisfazem as equações 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6, necessárias para a existência de um ponto fixo no nosso sistema. A equação 3.3 indica trivialmente que o momento canônico radial deve ser nulo, ou seja:

$$P_r = 0. \quad (3.7)$$

Isolando o momento canônico axial– P_z – na equação 3.5, encontra-se que:

$$P_z = r\eta_p. \quad (3.8)$$

Da equação 3.6, tem-se:

$$\left(\frac{P_\theta}{r} - \frac{z}{r}\eta_b + \frac{r}{2} \right) = r \frac{\eta_e}{\eta_b}. \quad (3.9)$$

Substituindo o momento canônico axial, dado por 3.8, e a equação 3.9 na equação 3.4, encontra-se que:

$$-r \frac{\eta_e}{\eta_b} \left(-\frac{P_\theta}{r^2} + \frac{z}{r^2}\eta_b + \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (3.10)$$

Da equação 3.10, observa-se que:

$$\left(-\frac{P_\theta}{r^2} + \frac{z}{r^2}\eta_b + \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (3.11)$$

Dividindo a equação 3.9 por r , obtém-se:

$$\left(\frac{P_\theta}{r^2} - \frac{z}{r^2}\eta_b + \frac{1}{2} \right) = \frac{\eta_e}{\eta_b}. \quad (3.12)$$

Somando as equações 3.11 e 3.12, encontra-se a condição necessária entre os parâmetros de controle para a existência de pontos de equilíbrio.

$$\eta_e = \eta_b. \quad (3.13)$$

Inserindo a condição dada por 3.13 na equação 3.12 obtém-se:

$$z = \frac{2P_\theta - r^2}{2\eta_b}. \quad (3.14)$$

Dessa forma, utilizando a condição 3.13 e reunindo os resultados dados por: 3.7, 3.8 e 3.14; verifica-se a existência de um conjunto de pontos de equilíbrio dados por:

$$\mathbf{x}_0 = \{r, P_r, z, P_z\} = \left\{r, 0, \frac{2P_\theta - r^2}{2\eta_b}, r\eta_p\right\}. \quad (3.15)$$

Em 3.15, observa-se que, para cada valor de r existe um ponto fixo. No entanto, esses pontos fixos somente existem quando a condição 3.13 é satisfeita.

3.1.2 Estabilidade do sistema

Em geral, a estabilidade de uma partícula em torno dos seus pontos fixos pode ser estudada analisando a evolução de um vetor infinitesimal \mathbf{s} dado por:

$$\mathbf{s} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_0. \quad (3.16)$$

O módulo desse vetor \mathbf{s} indica a distância de um ponto fixo \mathbf{x}_0 até um ponto \mathbf{x} definido como próximo ao ponto de equilíbrio.

Isolando \mathbf{x} em 3.16 e substituindo esse resultado em 3.1 encontramos:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{s}). \quad (3.17)$$

Expandindo o lado direito da equação 3.17 em série de Taylor, chega-se a seguinte equação:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = f(\mathbf{x}_0) + \frac{d\mathbf{x}_0}{d\mathbf{x}}\mathbf{s}, \quad (3.18)$$

onde $\frac{d\mathbf{x}_0}{d\mathbf{x}} = J(\mathbf{x}_0)$ é a matriz Jacobiana do sistema calculada no ponto de equilíbrio. Como $f(\mathbf{x}_0) = 0$, a equação 3.18 fica dada por:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = J(\mathbf{x}_0)\mathbf{s} \quad (3.19)$$

Para resolver a equação diferencial 3.19, supõe-se uma solução do tipo:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 e^{\Lambda t}. \quad (3.20)$$

Inserido a relação 3.20 na equação 3.19, obtém-se:

$$[J(\mathbf{x}_0) - \Lambda I]\mathbf{s}_0 = 0. \quad (3.21)$$

A solução de 3.21 é dada pela equação característica:

$$\text{Det}[J(\mathbf{x}_0) - \Lambda I] = 0. \quad (3.22)$$

Em 3.20, 3.21 e 3.22, I é a matriz identidade e Λ são os autovalores da matriz Jacobiana.

Utilizando as equações 2.50, 2.51, 2.54 e 2.55 podemos calcular a matriz Jacobiana no ponto \mathbf{x}_0 dado por 3.15. O resultado é o que segue:

$$J(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 - \eta_p^2 & 0 & -\frac{\eta_b}{r} & \eta_p \\ -\eta_p & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\eta_b}{r} & 0 & -\frac{\eta_b^2}{r^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Os autovalores Λ , obtidos a partir da equação 3.22, indicam a forma da evolução temporal do vetor infinitesimal \mathbf{s} , dado pela relação 3.20. Explicitamente, os autovalores de 3.22 são:

$$\Lambda_{1,2} = 0 \quad (3.24)$$

e

$$\Lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{\eta_b^2}{r^2} + (1 + \eta_p^2)}. \quad (3.25)$$

Os autovetores correspondentes aos autovalores dados por 3.24 e 3.25 são dados por:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{r}{\eta_b} \\ \eta_p \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\eta_b}{(1+\eta_p^2)r} \\ -\frac{\eta_b^2 \eta_p}{(1+\eta_p^2)r^2} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\eta_b^2}{r^2} + (1 + \eta_p^2)} \\ \frac{\eta_p}{(1+\eta_p^2)} \sqrt{\frac{\eta_b^2}{r^2} + (1 + \eta_p^2)} \\ \frac{\eta_b}{(1+\eta_p^2)r} \sqrt{\frac{\eta_b^2}{r^2} + (1 + \eta_p^2)} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

e

$$\mathbf{s}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\eta_b}{(1+\eta_p^2)r} \\ -\frac{\eta_b^2 \eta_p}{(1+\eta_p^2)r^2} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{\eta_b^2}{r^2} + (1 + \eta_p^2)} \\ \frac{\eta_p}{(1+\eta_p^2)} \sqrt{\frac{\eta_b^2}{r^2} + (1 + \eta_p^2)} \\ \frac{\eta_b}{(1+\eta_p^2)r} \sqrt{\frac{\eta_b^2}{r^2} + (1 + \eta_p^2)} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Os autovalores $\Lambda_{1,2} = 0$ indicam que o crescimento obtido da análise linear de \mathbf{s} – eq. 3.20– é nulo, isso significa que se colocarmos o sistema no ponto fixo e perturbarmos ele na direção associada aos respectivos autovetores, o sistema permanecerá em torno do ponto e será neutramente estável. No entanto, os resultados das simulações numéricas indicam que após uma perturbação infinitesimal na

direção dos autovetores $s_{1,2}$ o sistema diverge do ponto inicial isso devido ao fato de haver termos não-lineares relevantes para a dinâmica eletrônica. Numericamente, verifica-se a mesma inconclusividade utilizando a análise linear, para os autovalores $\Lambda_{3,4}$.

Além disso, das definições 2.47 e 2.48, observa-se que a condição 3.13 pode ser escrita como:

$$\frac{e_z}{b_z c} = \frac{q_e b_r}{m_e c}. \quad (3.30)$$

Dessa forma, quando a condição para a existência de um ponto fixo é satisfeita— 3.13— não existe confinamento, pois essa condição dada por 3.30 está contida na restrição descrita na desigualdade 2.29. Uma vez que o ponto fixo tenha um comportamento instável, o elétron não vai permanecer na vizinhança desse ponto e tão pouco confinado em uma região finita do espaço.

3.2 Análise não-linear

3.2.1 Mapas de Poincaré

Um mapa de Poincaré consiste em um conjunto de pontos definidos pela interceptação de um fluxo com uma seção transversal a esse, chamada seção de Poincaré. Como característica principal a seção de Poincaré reduz o estudo do fluxo num espaço de fases de n dimensões para o estudo do fluxo em um espaço de fases com $n - 1$ dimensões [27, 29].

O sistema Hamiltoniano que estamos estudando, dado por 2.46, é conservativo e representa a energia do elétron. Dessa forma, o sistema de equações diferenciais, obtido a partir desse Hamiltoniano para a descrição da dinâmica eletrônica— 2.50, 2.51, 2.54 e 2.55— que, inicialmente, deveria ser representado em um espaço de fases de dimensão 4, pode ser estudado em um espaço de dimensão 3, pois a energia— $H(r, P_r, z, P_z) = E$ — é um vínculo. Além disso, utilizando-se as seções de Poincaré, pode-se reduzir a análise do fluxo tridimensional, definido pela energia constante, para a análise de um mapa bidimensional.

Através da análise de um mapa de Poincaré, pode-se determinar pontos fixos e características

da dinâmica do sistema: regular ou caótica. Para um sistema Hamiltoniano integrável tem-se que o fluxo intercepta a seção de Poincaré formando sobre ela uma curva que tende a ser fechada chamada de curva KAM ou toro irracional. Para um sistema Hamiltoniano não integrável o fluxo intercepta a seção de Poincaré de forma que aparenta ser aleatória tendendo a preencher uma área sobre a seção de Poincaré [30, 27, 29].

Visando gerar um mapa de Poincaré completo, definem-se várias condições iniciais de mesma energia, a fim de observar as estruturas geradas pela interceptação do fluxo tridimensional com a seção de Poincaré.

3.2.2 Condições iniciais para a construção dos mapas de Poincaré

Para a elaboração dos mapas contidos nesse trabalho, utilizou-se o valor zero para a energia, pois essa é a energia da partícula física descrita na seção 2.4, assim:

$$\frac{P_r^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{P_\theta}{r} - \frac{z}{r} \eta_b + \frac{r}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (P_z - r \eta_p)^2 + z \eta_e = 0. \quad (3.31)$$

Além da condição inicial da partícula física, outras condições iniciais com mesma energia foram utilizadas para a construção dos mapas de Poincaré. Um conjunto de condições iniciais que resulta em uma energia nula para o Hamiltoniano 2.46 é o que segue:

$$r = \gamma r_0, \quad (3.32)$$

$$P_r = 0, \quad (3.33)$$

$$z = \frac{r_0^2 \left(\eta_b (\gamma^2 - 1) + 2\gamma \left(-\eta_e \gamma + \sqrt{\eta_e (\eta_b + (\eta_e - \eta_b) \gamma^2)} \right) \right)}{2\eta_b^2} \quad (3.34)$$

e

$$P_z = \gamma r_0 \eta_p, \quad (3.35)$$

onde utilizamos:

$$P_\theta = -\frac{r_0^2}{2}. \quad (3.36)$$

γ é uma constante real e positiva e r_0 é o raio inicial da órbita do elétron, também real e positivo. Quando $\gamma = 1$, observa-se que, a energia cinética e a energia potencial do elétron são nulas simultaneamente representando a partícula física e que; além disso, quando variamos o valor γ , variamos a condição inicial do elétron.

3.2.3 Curvas limite para o par canônico radial

A análise da dinâmica eletrônica utilizando a seção de Poincaré definida como: $P_z = 0$ e $\frac{dP_z}{dt} > 0$; evidencia que o fluxo intercepta o plano P_r, x, r em uma região geometricamente definida. Pode-se obter a curva $P_r(r)$ que descreve a fronteira dessa região através do procedimento que segue. Primeiramente escreve-se $P_r(r, z, P_z)$ a partir da equação 3.31, obtendo-se assim:

$$P_{r\pm}(r, z, P_z) = \pm \frac{\sqrt{-4P_z^2 r^2 + 8\eta_p P_z r^3 - (1 + 4\eta_p^2) r^4 - (r_0^2 + 2\eta_b z)^2 + 2r^2 (r_0^2 + 2\eta_b z - 4\eta_e z)}}{2r}. \quad (3.37)$$

Aplicando em 3.37 a condição utilizada para a construção do mapa de Poincaré– $P_z = 0$; chega-se as seguintes funções:

$$P_{r\pm}(r, z) = \pm \frac{\sqrt{-(1 + 4\eta_p^2) r^4 - (r_0^2 + 2\eta_b z)^2 + 2r^2 (r_0^2 + 2\eta_b z - 4\eta_e z)}}{2r}. \quad (3.38)$$

Posteriormente, fazemos $\frac{\partial P_r}{\partial z} = 0$. Explicitamente, podemos escrever:

$$\frac{\partial P_{r\pm}}{\partial z} = \pm \frac{\eta_b (r^2 - r_0^2) - 2(\eta_e r^2 + \eta_b^2 z)}{r \sqrt{-r^4 - (r_0^2 + 2\eta_b z)^2 + 2r^2 (r_0^2 + 2z(\eta_b - 2\eta_e))}} = 0. \quad (3.39)$$

Encontramos de 3.39 a relação a ser satisfeita por z , dada por:

$$z = \frac{(\eta_b - 2\eta_e) r^2 - \eta_b r_0^2}{2\eta_b^2}. \quad (3.40)$$

Substituindo a relação 3.40 em 3.38, obtemos:

$$P_{r\pm}(r) = \pm \frac{\sqrt{\eta_e (-\eta_b + \eta_e) r^2 + \eta_e \eta_b r_0^2}}{\eta_b}. \quad (3.41)$$

As funções descritas em 3.41 indicam a forma das curvas limite sobre um mapa de Poincaré para o par canônico radial.

Na figura 3.1 estão representados quatro mapas de Poincaré para o par canônico radial junto das suas curvas limite descritas pelas funções 3.41. A seção de Poincaré utilizada para a elaboração desses mapas foi definida como: $P_z = 0$ e $\frac{dP_z}{dt} > 0$. Os pontos vermelhos, na figura 3.1, indicam a localização donde a trajetória da partícula física intercepta a seção de Poincaré e o quadrado azul indica a posição da condição inicial da partícula física. Observamos, a partir dessas figuras, a existência de regiões caóticas e regulares para as várias condições iniciais utilizadas e, especialmente, para a condição inicial da partícula física.

3.2.4 Curvas limite para o par canônico axial

A Análise da dinâmica eletrônica utilizando a seção de Poincaré definida como: $P_r = 0$ e $\frac{dP_r}{dt} > 0$; evidencia, também, que o fluxo intercepta o plano $P_z x z$ em uma região geometricamente definida. Pode-se obter a curva $P_z(z)$ que descreve a fronteira dessa região através de um procedimento análogo ao da seção 3.2.3. Primeiramente, escreve-se $P_z(r, z)$ a partir da equação 3.31 e do vínculo da seção de Poincaré, a saber: $P_r = 0$. Assim:

$$P_{z\pm}(r, z) = \pm \sqrt{-2\eta_e z - \left(\frac{P_\theta}{r} + \frac{r}{2} - \frac{\eta_b z}{r} \right)^2}, \quad (3.42)$$

onde utilizamos $\eta_p = 0$, para chegarmos a uma solução analítica simples. Nesse trabalho, as curvas limite para o par canônico axial com η_p diferente de zero foram obtidas numericamente.

Posteriormente, fazemos $\frac{\partial P_z}{\partial r} = 0$, ou seja:

$$\frac{\partial P_{z\pm}}{\partial r} = \pm \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{P_\theta}{r^2} + \frac{\eta_b z}{r^2} \right) \left(\frac{P_\theta}{r} + \frac{r}{2} - \frac{\eta_b z}{r} \right)}{2\sqrt{-2\eta_e z - \left(\frac{P_\theta}{r} + \frac{r}{2} - \frac{\eta_b z}{r} \right)^2}}. \quad (3.43)$$

Substituindo a condição $P_\theta = -r_0^2/2$ e isolando r na equação 3.43, encontramos quatro raízes; são elas:

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-r_0^2 - 2\eta_b z} \quad (3.44)$$

e

$$r_{3,4} = \pm \sqrt{r_0^2 + 2\eta_b z}. \quad (3.45)$$

Substituindo a raiz $r_3 = \sqrt{r_0^2 + 2\eta_b z}$ na função P_{z+} , descrita em 3.42, encontramos as curvas limite a direita:

$$P_z(z) = \pm \sqrt{-2\eta_e z}. \quad (3.46)$$

Substituindo a raiz $r_1 = \sqrt{-r_0^2 - 2\eta_b z}$ na função P_{z-} , descrita em 3.42, encontramos as curvas limite a esquerda:

$$P_z(z) = \pm \sqrt{r_0^2 + 2z(\eta_b - \eta_e)}. \quad (3.47)$$

Na figura 3.2 apresentamos quatro mapas de Poincaré para o par canônico axial junto das suas curvas limite descritas pelas funções 3.46 e 3.47. A seção de Poincaré utilizada para a elaboração

desses mapas foi definida como: $P_r = 0$ e $\frac{dP_r}{dt} > 0$. Os pontos vermelhos nas figuras 3.2 indicam a localização donde a trajetória da partícula física intercepta a seção de Poincaré e o quadrado azul indica a posição da condição inicial da partícula física. Observamos, a partir dessas figuras, a existência de regiões caóticas e regulares para as várias condições iniciais utilizadas e, especialmente, para a condição inicial da partícula física.

Devido a riqueza dinâmica para a partícula física, observada a partir das figuras 3.1 e 3.2, nós iremos investigar, na seção 3.2.6, o comportamento dinâmico dela, utilizando os expoentes de Lyapunov. O estudo dos expoentes de Lyapunov constitui mais uma ferramenta para o entendimento da dinâmica eletrônica.

3.2.5 Curvas limite para as coordenadas espaciais radial e axial

Nós podemos escrever, a partir do Hamiltoniano descrito por 3.31, as curvas limite para as coordenadas espaciais radial e axial; ou seja, escrever $z = z(r)$. O procedimento para a obtenção dessas curvas é análogo ao realizado na seção 2.4. No entanto, utiliza-se o Hamiltoniano normalizado dado por 2.46 ao invés do Hamiltoniano dado por 2.10. As curvas $z = z(r)$ podem ser escritas como:

$$z_{\pm}(r) = \frac{\eta_b (r^2 - r_0^2) \pm 2 \left(\eta_e r + 2r \sqrt{\eta_e (\eta_e r^2 - \eta_b (r^2 - r_0^2))} \right)}{2\eta_b^2}. \quad (3.48)$$

É importante notar que, as curvas limite descritas por 3.48 não dependem do parâmetro de controle η_p , como esperávamos, pois esse parâmetro de controle está relacionado com a componente de campo magnético azimutal b_θ . Uma vez que as curvas limite 2.20 para o Hamiltoniano 2.9 não dependiam de b_θ , as curvas limite 3.48 para o Hamiltoniano 2.46 também não dependeriam.

A curva dada pelo sinal positivo em 3.48— z_+ — fornece o valor extremo máximo para a coordenada z , a saber:

$$z_{max} = 0. \quad (3.49)$$

A curva dada pelo sinal negativo 3.48– z_- – fornece o valor extremo mínimo para a coordenada z ; esse valor é:

$$z_{min} = -\frac{r_0^2}{2(\eta_b - \eta_e)}. \quad (3.50)$$

Podemos escrever, a partir de 3.48, $r = r(z)$, tal que;

$$r_{\pm}(z) = \sqrt{r_0^2 + 2(\eta_b - 2\eta_e)z \pm 2\sqrt{-2\eta_e z (r_0^2 + 2(-\eta_b + \eta_e)z)}} \quad (3.51)$$

Em um procedimento análogo ao adotado na seção 2.4, observamos que a curva descrita em 3.51 com o sinal positivo fornece o valor máximo para a coordenada radial, dado por:

$$r_{max} = r_0 \sqrt{\frac{\eta_b}{\eta_b - \eta_e}}, \quad (3.52)$$

e, complementando, a curva com sinal negativo descrito em 3.51 fornece o valor mínimo para a coordenada radial, dado por:

$$r_{min} = 0. \quad (3.53)$$

As curvas limite derivadas nessa seção serão expostas no capítulo 4 juntamente com a trajetórias dos elétrons para diferentes parâmetros de controle. Observar-se-á a boa descrição dessas curvas na predição da região no espaço r e z ocupada pelo elétron e a não dependência dessas curvas com o parâmetro η_p – figuras 4.3a, 4.4a, 4.6a e 4.7a.

3.2.6 Expoentes de Lyapunov

Nessa seção, nós iremos analisar a dinâmica eletrônica utilizando os expoentes de Lyapunov. Em geral, sistemas com dinâmica caótica apresentam sensibilidade às condições iniciais de forma que duas trajetórias inicialmente próximas divergem exponencialmente à medida que o tempo transcorre. Para quantificar essa divergência, podem-se utilizar os expoentes de Lyapunov. Segue uma descrição

do significado dos expoentes de Lyapunov dada pela referência [28].

Seja um sistema de n equações diferenciais ordinárias. Considera-se uma hiper-esfera de raio inicial $d(t_0)$ com condições iniciais centradas em um ponto $\mathbf{x}(t_0)$ e verifica-se que após um intervalo de tempo o volume da hiper-esfera estará deformado. Assumindo que ao longo da j -ésima dimensão- ($j = 1, \dots, n$), o raio inicial $d_j(t_0)$ tenha variado exponencialmente no tempo, de maneira que a relação entre $d_j(t_0)$ e o valor correspondente no instante t , dado por $d_j(t)$, valha:

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (3.54)$$

Por conseguinte, da equação 3.54, temos:

$$\lambda_j = \frac{\ln[d_j(t)/d_j(t_0)]}{t - t_0}, \quad (3.55)$$

com $j = 1, \dots, n$.

Os números λ_j são chamados de expoentes de Lyapunov, eles indicam a taxa média de divergência de trajetórias inicialmente próximas. Em um instante $t > t_0$ o volume $v(t)$ da hiperesfera deverá ser proporcional ao produto das distancias $d_j(t)$ que o caracterizam, isto é:

$$v(t) = \prod_{j=1}^n d_j(t) = v(t_0) e^{(t-t_0)\sum_{j=1}^n \lambda_j}, \quad (3.56)$$

sendo $v(t_0) = \prod_{j=1}^n d_j(t_0)$ o volume no instante inicial t_0 . Se o sistema for conservativo, o teorema de Liouville garante que $v(t) = v(t_0)$ para $t > t_0$. Logo, a soma dos expoentes de Lyapunov deve ser nula para um sistema conservativo, tal qual o estudado nesse trabalho.

Para calcular numericamente os expoentes de Lyapunov procede-se da seguinte maneira [31, 32]: define-se uma trajetória de referência ou fiducial dada pela solução das equações não lineares de movimento com uma condição inicial $\mathbf{x}(t_0)$ e define-se uma hiper-esfera centrada na trajetória de referência descrita por um sistema linearizado de equações diferenciais.

Integra-se numericamente as equações de movimento com uma condição inicial $\mathbf{x}(t_0)$ e simulta-

neamente integram-se as equações linearizadas para n diferentes condições iniciais que definem uma base ortonormal de vetores h_1, \dots, h_n . Após um passo de integração tem-se um novo ponto na trajetória de referência e novos vetores obtidos das equações linearizadas.

Escolhe-se a direção de maior crescimento h_1 e ortonormaliza-se a base de vetores através do processo de Gram-Schmidt com a finalidade de seguir a divergência das condições iniciais ortogonais. A direção do primeiro vetor nunca é alterada com o processo de ortonormalização.

A ortonormalização de Gram-Schmidt gera uma nova base ortonormal h_1, \dots, h_n , onde h_1 é o maior vetor.

Os expoentes de Lyapunov serão dados pela soma do logaritmo de todos os vetores de uma dada direção sobre o tempo, tal que:

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^N \frac{\log_2 [h_i(t)]}{t - t_0}, \quad (3.57)$$

onde N indica o número de ortonormalizações realizadas.

Utilizamos o algoritmo descrito acima para encontrar os expoentes de Lyapunov das equações da dinâmica eletrônica (equações 2.50, 2.51, 2.54 e 2.55) com a condição inicial $\mathbf{x}(t_0)$ da partícula física e parâmetros de controle escolhidos. Para a condição inicial $\mathbf{x}(t_0)$ e conjunto de parâmetros de controle são obtidos quatro expoentes de Lyapunov relativos às quatro componentes do espaço de fases r, P_r, z e P_z . Haja vista que os expoentes de Lyapunov possuem um comportamento assintótico, eles apenas são estimados, via métodos numéricos.

Em geral, sistemas Hamiltonianos conservativos com dois graus de liberdade possuem um padrão tal que o primeiro expoente de Lyapunov é nulo ou positivo, o segundo e o terceiro expoente de Lyapunov são sempre nulos e o quarto expoente de Lyapunov possui módulo igual ao primeiro expoente, mas com sinal oposto— devido ao fato do sistema ser conservativo a soma de todos os expoentes é nula. Nota-se que se o primeiro expoente de Lyapunov for nulo o sistema é regular já se o primeiro expoente for não nulo o sistema é caótico. Por conseguinte, a partir do Hamiltoniano 2.46, observamos que a dinâmica eletrônica pode ser descrita pelo maior expoente de Lyapunov [30].

Podemos verificar o valor do maior expoente de Lyapunov para os parâmetros de controle usados para a construção das figuras 3.1 e 3.2, a saber: (a) $\eta_e = 0.0120$, $\eta_b = 0.0245$, $r_0 = 0.035$ e $\eta_p = 0.0$; (b) $\eta_e = 0.0120$, $\eta_b = 0.0245$, $r_0 = 0.035$ e $\eta_p = 0.04$; (c) $\eta_e = 0.0120$, $\eta_b = 0.0245$, $r_0 = 0.035$ e $\eta_p = 0.1106$ e (d) $\eta_e = 0.0120$, $\eta_b = 0.0245$, $r_0 = 0.035$ e $\eta_p = 0.1163$. Para os conjuntos (a) e (b) temos que o valor do maior expoente de Lyapunov é assintoticamente nulo e para os conjuntos (c) e (d) os valores do maior expoente de Lyapunov são respectivamente: $\lambda = 0.1109$ e $\lambda = 0.1327$. Verificamos, dessa forma, a possibilidade de analisarmos a dinâmica utilizando o maior expoente de Lyapunov. No capítulo seguinte iremos investigar, utilizando os expoentes de Lyapunov e o conceito de seção de choque de ionização, se o caos pode incrementar a eficiência dos propulsores.

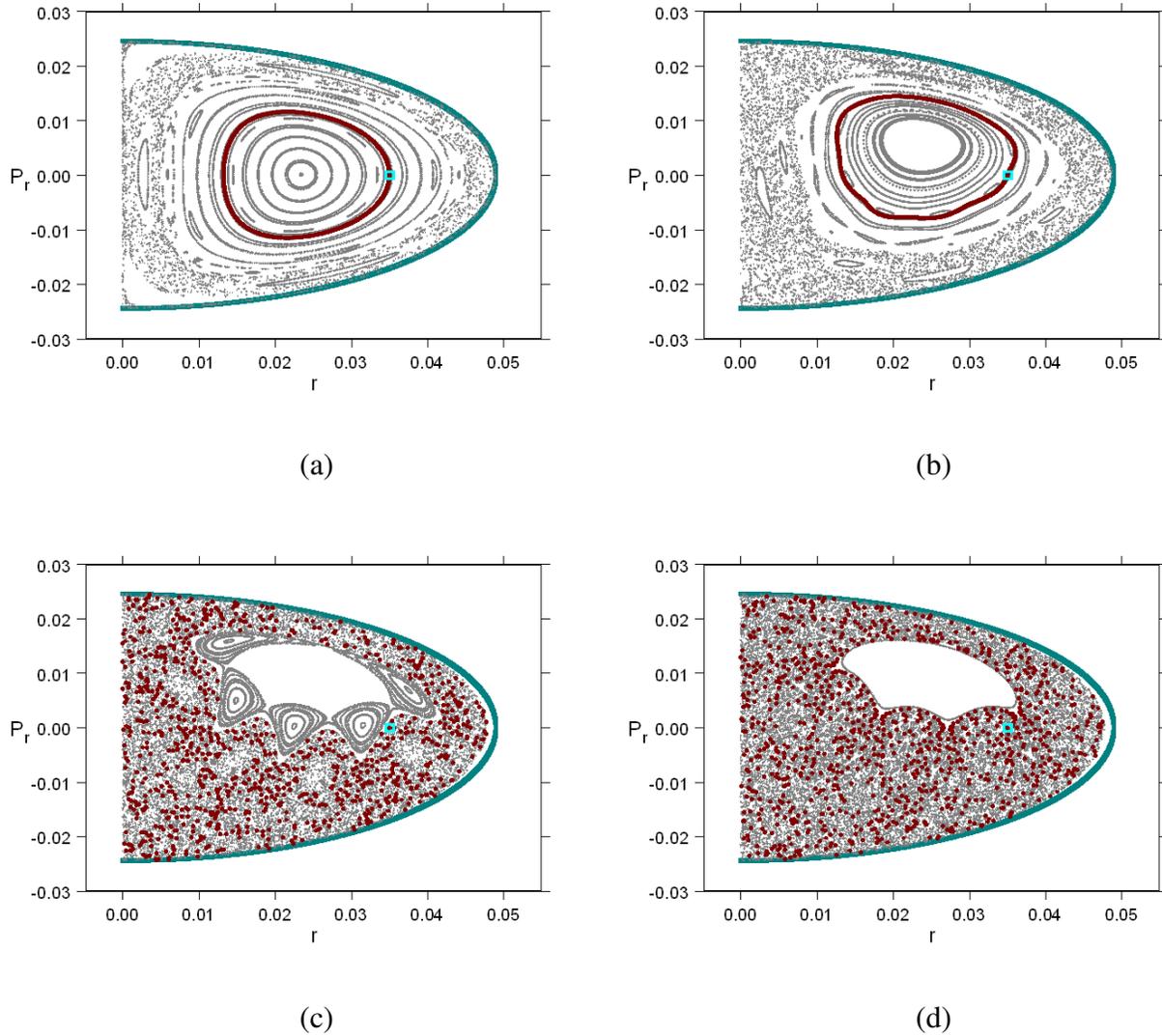


Fig. 3.1: Mapas de Poincaré para a seção de Poincaré definida como: $P_z = 0$ e $\frac{dP_z}{dt} > 0$, para diferentes parâmetros de controle junto de suas respectivas curvas limite $P_r(r)$ descritas pelas funções 3.41. Os pontos vermelhos indicam a localização onde a trajetória da partícula física, cuja a condição inicial está indicada pelo quadrado azul, intercepta a seção de Poincaré. Os parâmetros de controle são: $\eta_e = 0.0120$, $\eta_b = 0.0245$ e $r_0 = 0.035$ para todas as curvas. Complementando o conjunto de parâmetros temos para a figura (a) $\eta_p = 0.0$, para a figura (b) $\eta_p = 0.04$, para a figura (c) $\eta_p = 0.1106$ e para a figura (d) $\eta_p = 0.1163$. Note que no mapa (a) há uma predominância de curvas KAM indicando estabilidade em praticamente todo o espaço de fases. Nos mapas (b) e (c), quando comparados com o mapa (a), nota-se que, há um aumento no número de ressonâncias. No mapa (d), observa-se a presença de caos em aproximadamente todo espaço de fases. Note também que, para a condição inicial da partícula física, os parâmetros das figuras (a) e (b) propiciam uma dinâmica regular e os parâmetros das figuras (c) e (d) propiciam uma dinâmica caótica.

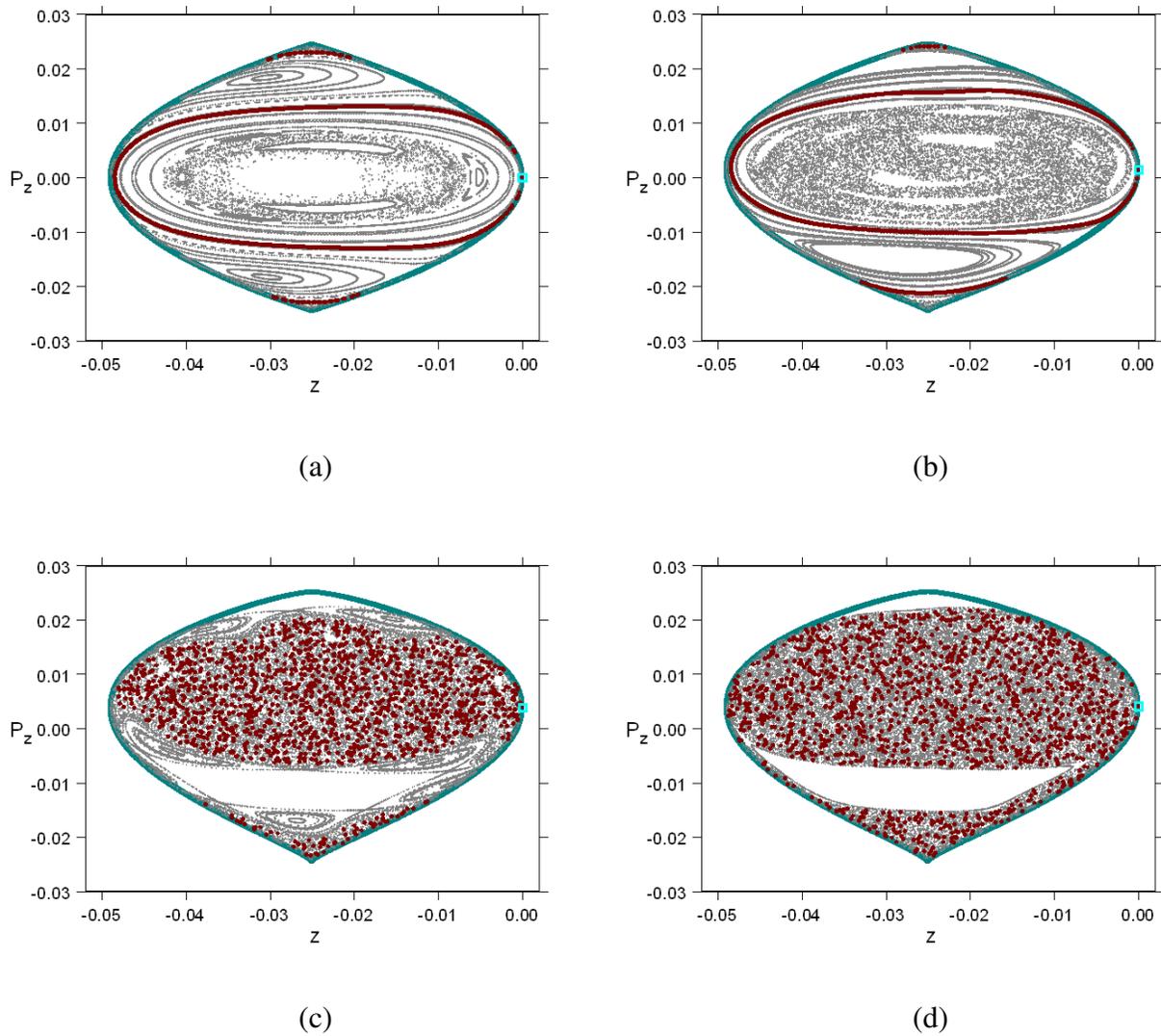


Fig. 3.2: Mapas de Poincaré para a seção de Poincaré definida como: $P_r = 0$ e $\frac{dP_r}{dt} > 0$, para diferentes parâmetros de controle junto de suas respectivas curvas limite $P_z(z)$ descritas pelas funções 3.46 e 3.47. Os pontos vermelhos indicam a localização donde a trajetória da partícula física, cuja a condição inicial está indicada pelo quadrado azul, intercepta a seção de Poincaré. Os parâmetros de controle são: $\eta_e = 0.0120$, $\eta_b = 0.0245$ e $r_0 = 0.035$ para todas as curvas. Complementando o conjunto de parâmetros temos para a figura (a) $\eta_p = 0.0$, para a figura (b) $\eta_p = 0.04$, para a figura (c) $\eta_p = 0.1106$ e para a figura (d) $\eta_p = 0.1163$. Note que no mapa (a) há uma predominância de curvas KAM indicando estabilidade em praticamente todo o espaço de fases. Nos mapas (b) e (c), quando comparados com o mapa (a), nota-se que, há um aumento no número de ressonâncias. No mapa (d), observa-se a presença de caos em aproximadamente todo espaço de fases. Note também que, para a condição inicial da partícula física, os parâmetros das figuras (a) e (b) propiciam uma dinâmica regular e os parâmetros das figuras (c) e (d) propiciam uma dinâmica caótica.

Capítulo 4

Seção de Choque de ionização e Caos

No presente capítulo, nós buscaremos os parâmetros de controle que incrementam a taxa de ionização do gás propelente no canal de aceleração; ou seja, os parâmetros de controle que incrementam a eficiência do propulsor. Faremos isso com base no conceito de seção de choque de ionização. Verificaremos que os parâmetros de controle que teoricamente propiciam essa maior eficiência ao propulsor são os parâmetros de controle que impõem dinâmicas caóticas para o elétron. A análise da dinâmica eletrônica, nesse capítulo, será feita utilizando os expoentes de Lyapunov.

4.1 Seção de choque de ionização

O gás propelente é lançado dentro do canal de aceleração do propulsor através de uma diferença de pressão entre o tubo de gás comprimido onde ele se encontra inicialmente e o vácuo existente no canal. O gás entra no canal de aceleração se espalhado rapidamente em todas as direções e, posteriormente, o gás tende a perder contato com o sistema. Nesse contexto, nota-se que é importante que haja elétrons no canal de aceleração com chances de ionizar o gás propelente da forma mais eficiente possível, com o intuito de evitar que o gás perca contato com o sistema sem ser ionizado.

Para avaliar quais os parâmetros de controle que teoricamente incrementam a taxa de ionização do gás propelente e, portanto, os parâmetros de controle que teoricamente incrementam a eficiência

do propulsor, nós utilizaremos o conceito de seção de choque de ionização. Através dele, contabilizaremos o volume interceptado pelo elétron em um intervalo de tempo fixo e analisaremos, em grau comparativo, esse valor para diferentes parâmetros de controle. Pra fazer isso, inicialmente definimos o gás propelente utilizado como sendo o gás argônio. Um gráfico elaborado por ref. [33] a partir de dados experimentais para a seção de choque de ionização em função da energia cinética do elétron para o gás argônio é mostrado na figura 4.1a. Em comparação, a figura 4.1b representa a curva construída nesse trabalho para descrever a seção de choque total de ionização em função da energia cinética do elétron para o gás argônio. A curva 4.1b foi construída a partir da curva 4.1a utilizando polinômios. Um procedimento análogo ao realizado nesse trabalho para construção da curva 4.1b pode ser encontrado na referência [15].

Da integração numérica temos a trajetória real do elétron e , por isso, sabemos qual é a sua energia cinética e qual o módulo do seu deslocamento no espaço a cada intervalo temporal. Convertemos a energia cinética do elétron, através do polinômio utilizado para a construção da figura 4.1b, para a seção de choque de ionização— uma área— e a integramos sobre o módulo da trajetória percorrida pelo elétron. Dessa forma, podemos calcular o volume efetivo interceptado pelo elétron dado um intervalo de tempo— chamaremos esse volume efetivo de V — e, por conseguinte, somos aptos a analisar comparativamente os resultados para conjuntos de parâmetros de controle.

Detalhadamente, para calcular V , nós definimos um elemento infinitesimal de volume efetivo interceptado como sendo dado pela multiplicação da seção de choque de ionização pelo módulo de um deslocamento infinitesimal do elétron, através do espaço. Matematicamente temos;

$$dV = \sigma(\varepsilon)dl, \quad (4.1)$$

onde ε é energia cinética do elétron e dl é o módulo do deslocamento infinitesimal do elétron no espaço, que pode ser escrito como:

$$dl = vdt, \quad (4.2)$$

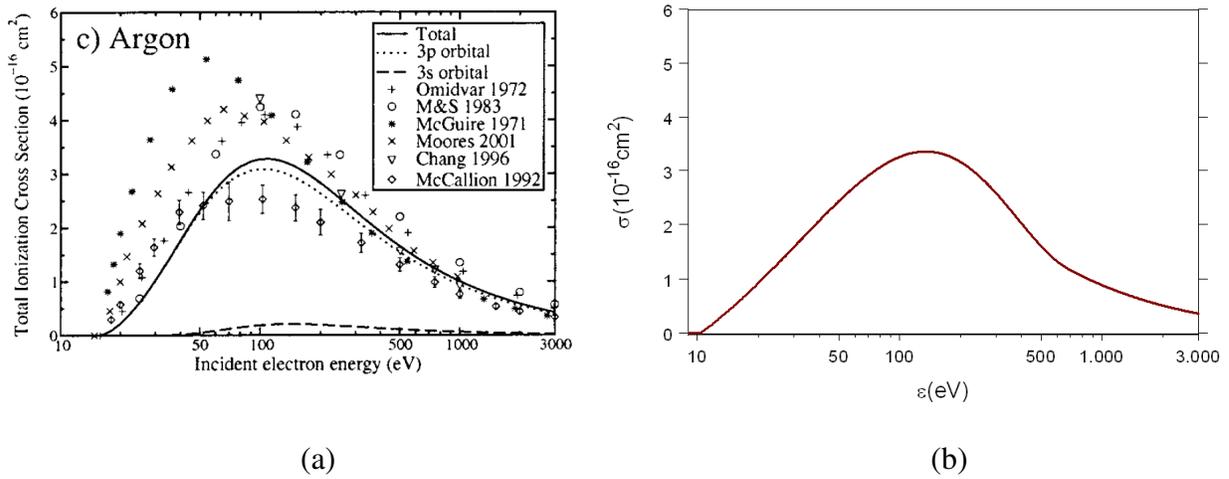


Fig. 4.1: (a) Curva da seção de choque total de ionização em função da energia cinética do elétron incidente para o gás argônio— extraída da referência [33]. (b) Curva utilizada nesse trabalho para descrever a seção de choque total de ionização em função da energia. A curva (b) foi construída, utilizando polinômios, para reproduzir os dados experimentais da curva (a). A curva tracejada em (a) refere-se a seção de choque para uma dupla ionização do argônio e não foi utilizada nesse trabalho.

tal que, v é o módulo da velocidade do elétron e dt é um intervalo infinitesimal de tempo. Utilizando 4.2 e 4.1, podemos escrever:

$$\frac{dV}{dt} = \sigma(\varepsilon)v. \quad (4.3)$$

Utilizando Hamiltoniano 2.46 com $H = 0$, obtemos a seguinte relação entre a velocidade e a posição do elétron:

$$v = \sqrt{-2\eta_e z}. \quad (4.4)$$

Sabendo que a energia cinética do elétron— ε — depende somente velocidade do elétron e utilizando a relação 4.4, podemos escrever 4.3 da seguinte forma:

$$\frac{dV}{dt} = \sigma(z)\sqrt{-2\eta_e z}. \quad (4.5)$$

A integração da equação diferencial 4.5 fornece a informação sobre o volume efetivo interceptado pelo elétron, para um dado intervalo de tempo, em função da coordenada axial. A equação 4.5 é integrada ao longo da trajetória do elétron e, portanto, juntamente com as equações 2.50, 2.51, 2.54 e 2.55. Teoricamente, quanto maior for V , maior será a chance de ionização do gás propelente e conseqüentemente, maior será a eficiência do propulsor. Desejamos analisar qual é a dependência desse volume V com a dinâmica do elétron: regular ou caótica. Para isso, faremos uma análise nos parâmetros de controle do sistema.

4.2 Parâmetros de controle

Haja vista a qualidade do parâmetro η_p de não alterar as curvas limite no espaço de coordenadas- r e z , vamos torná-lo o parâmetro livre para proceder com análise da relação entre o volume efetivo interceptado pelo elétron em um intervalo de tempo fixo e o maior expoente de Lyapunov. Inicialmente, definimos a razão entre o raio máximo atingido pelo elétron- dado pela equação 3.52- e o valor mínimo atingido pelo elétron para a coordenada axial- dado pela equação 3.50. A razão é definida como sendo uma constante K . Assim:

$$\frac{r_{max}}{z_{min}} = -K. \quad (4.6)$$

Substituindo as relações dadas por 3.52 e 3.50- r_{max} e z_{min} - em 4.6 e resolvendo para r_0 ficamos com:

$$r_0 = \frac{\sqrt{4\eta_b(\eta_b - \eta_e)}}{K}. \quad (4.7)$$

Substituindo 4.7 em r_{max} e z_{min} ficamos com:

$$z_{min} = -\frac{2\eta_b}{K^2} \quad (4.8)$$

e

$$r_{max} = \frac{2\eta_b}{K} \quad (4.9)$$

Além disso, podemos comparar a energia potencial máxima do Hamiltoniano 2.46 com a energia fornecida ao sistema propulsor. Assim,

$$\eta_e z_{min} = \frac{\varepsilon_s}{m_e c^2}. \quad (4.10)$$

onde, ε_s representa a energia fornecida ao sistema propulsor.

Substituindo a relação dada por 4.8 em 4.10, podemos escrever a forma do parâmetro η_e para que a razão entre a energia do sistema e a energia de repouso do elétron seja mantida. É importante que essa razão seja mantida, pois a energia fornecida pelo sistema pode ser controlada e imposta a ser pequena quando comparada a energia de repouso do elétron, e por isso, pode ser condicionada a respeitar a condição para que se possa utilizar, para descrever o movimento do elétron, o formalismo Hamiltoniano não relativístico. Então, o parâmetro η_e fica dado por:

$$\eta_e = \frac{-K^2}{2\eta_b} \frac{\varepsilon_s}{m_e c^2}. \quad (4.11)$$

Note que ε_s é negativo e por isso o parâmetro η_e é positivo.

Dessa forma, dando como parâmetro de entrada o valor da razão K , o valor do parâmetro η_b e o valor da energia fornecida pelo sistema ao elétron ε_s , podemos calcular o parâmetro η_e e o raio inicial do elétron r_0 de forma a garantir uma dinâmica não relativística ao elétron. Além disso, ficamos com o parâmetro η_p livre.

4.3 Resultados

A análise comparativa do volume efetivo interceptado pelo elétron em um intervalo de tempo fixo, V , com o maior expoente de Lyapunov, λ , revela um vínculo entre ambos, de tal forma que, para dinâmicas caóticas, V assume os maiores valores. Os gráficos 4.2 e 4.5 explicitam essa relação. Eles foram obtidos fixando os valores dos parâmetros η_b , K e ε_s e mantendo livre o parâmetro de controle η_p . A condição inicial utilizada foi a condição inicial da partícula física descrita na seção 2.4. Para cada um desses gráficos, o volume interceptado pelo elétron em um intervalo de tempo fixo foi normalizado linearmente de tal forma ao maior V no gráfico assumir o valor um e o menor V o valor zero. Além disso, nessas figuras os pontos indicados por $P1$ e $P2$ marcam a localização sobre a curva V dos conjuntos de parâmetros que são estudados detalhadamente.

Nas figuras 4.3a e 4.4a estão desenhadas, para os conjuntos de parâmetros $P1$ e $P2$ indicados na figura 4.2, as trajetórias do elétron junto as curvas limite descritas pelas funções 3.48. Nas figuras 4.3b e 4.4b estão desenhados os histogramas do número de passagens do elétron através de regiões da coordenada axial junto as curvas para seção de choque de ionização do gás argônio em função da energia cinética, para os conjuntos de parâmetros $P1$ e $P2$ indicados na figura 4.2.

Observamos de 4.3a e 4.4a a validade das curvas limite descritas em 3.48. Podemos observar também que, a dinâmica eletrônica para o conjunto de parâmetros de controle da figura 4.3a é regular, pois o valor do maior expoente de Lyapunov é assintoticamente nulo e, além disso, nota-se que, V assume o menor valor possível. Na figura 4.4a, observamos que, a dinâmica é caótica, pois o valor do maior expoente de Lyapunov é: $\lambda = 0.125$. Para esses parâmetros, $V = 0.99$. Dessa forma, confirma-se a dependência de λ com V . Para um melhor entendimento desses valores de V é que os histogramas 4.3b e 4.4b foram construídos e analisados juntos com a curva da seção de choque de ionização do gás argônio.

Para construir os histogramas, dividimos o intervalo entre o valor máximo e o valor mínimo para a coordenada axial em trinta partes iguais; contamos, posteriormente, o número de vezes que o elétron passa por dado intervalo. De posse do resultado, analisamos o comportamento do elétron com a

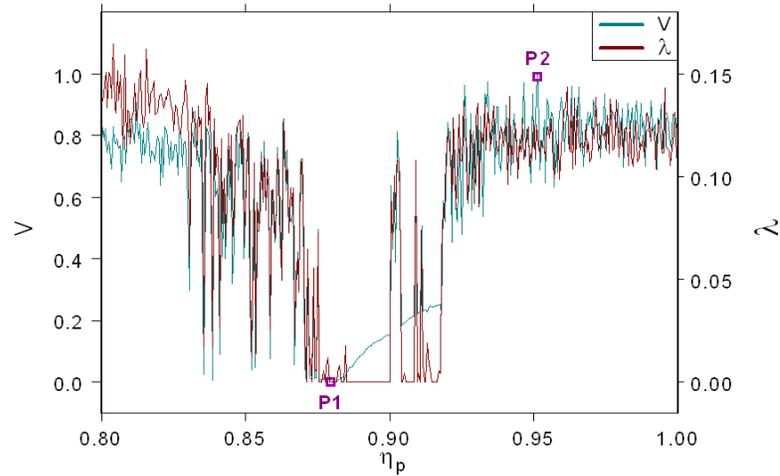


Fig. 4.2: Demonstração da relação entre o volume normalizado interceptado pelo elétron em intervalo de tempo fixo– V – com o maior expoente de Lyapunov– λ . Nesse gráfico, os valores $\eta_b = 0.026$, $K = 1$ e $\varepsilon_s = -300\text{eV}$ são mantidos fixos enquanto varia-se o parâmetro η_p . A escala da esquerda refere-se ao volume normalizado V e a escala da direita refere-se maior expoente de Lyapunov.

curva de seção de choque de ionização. Observamos que: quando a dinâmica é regular, o elétron passa muito mais tempo nos intervalos extremos; no entanto, quando a dinâmica é caótica, o elétron tende a percorrer igualmente todos os possíveis pontos no espaço de coordenadas r e z . Note que, o ideal para V ser grande é que o elétron permaneça o maior tempo possível na região onde a área da seção de choque de ionização é máxima. Isso ocorre em torno dos valores 100eV e 150 eV. Por conseguinte, observa-se que, o valor V é maior para os parâmetros da figura 4.4b do que o valor V para os parâmetros para a figura 4.3b, pois o elétron representado na figura 4.4b visita muito mais as regiões onde a seção de choque de ionização do gás argônio é máxima.

O gráfico apresentado na figura 4.5 foi construído de forma análoga ao gráfico da figura 4.2 para se verificar que a relação entre V e λ é preservada para outros parâmetros de controle.

Nas figuras 4.6a e 4.7a estão desenhadas, para os conjuntos de parâmetros $P1$ e $P2$ indicados na figura 4.5, as trajetórias do elétron junto às curvas limite descritas pelas funções 3.48. Nas figuras 4.6b e 4.7b estão desenhados os histogramas do número de passagens do elétron através de regiões da coordenada axial junto as curvas para seção de choque de ionização do gás argônio em função da

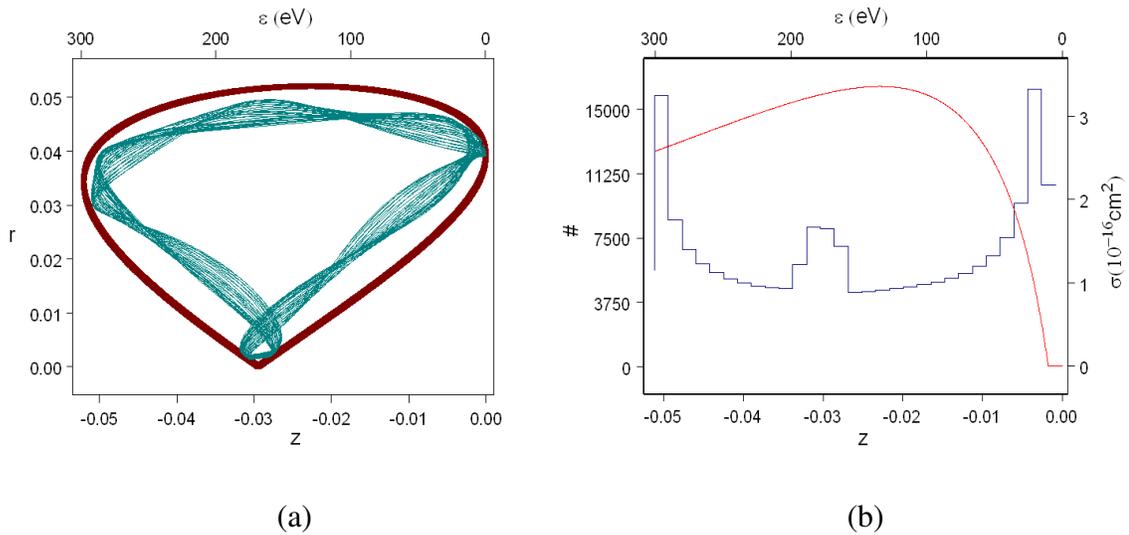


Fig. 4.3: Nessas figuras estão apresentados detalhes da dinâmica eletrônica referentes ao ponto $P1-\eta_p = 0.8795$ – indicado na figura 4.2. Em (a) está desenhada a trajetória do elétron no espaço de coordenadas r e z junto das suas curvas limite, descritas pelas funções 3.48. Em (b) está desenhada curva da seção de choque total de ionização do argônio em função da energia junto a um histograma que indica o número de passagens do elétron em dada região ao longo do eixo z . O valor do maior expoente de Lyapunov para esse conjunto de parâmetros é assintoticamente zero, indicando que a órbita do elétron é periódica. O valor V – normalizado a figura 4.2– é: 0.0.

energia cinética, para os conjuntos de parâmetros $P1$ e $P2$ indicados na figura 4.5.

Novamente observamos, a partir de 4.6a e 4.7a, a validade das curvas limite descritas em 3.48. Podemos observar também que, a dinâmica eletrônica para o conjunto de parâmetros de controle da figura 4.6a é regular, pois o valor do maior expoente de Lyapunov é assintoticamente nulo. Para esses parâmetros, $V = 0.071$. Na figura 4.7a, notamos que, a dinâmica é caótica, pois o valor do maior expoente de Lyapunov é: $\lambda = 0.11$. Para esses parâmetros, $V = 0.799$. Novamente, pode-se justificar que, para os parâmetros da figura 4.7b, o valor V é relativamente maior do que o valor V para os parâmetros da figura 4.6b, porque o elétron representado na figura 4.7b visita muito mais as regiões onde a seção de choque de ionização do gás argônio é máxima.

Dessa forma, dos gráficos 4.2 e 4.5, podemos concluir que: os parâmetros que impõem órbitas caóticas ao elétron são os mesmos que fazem o elétron interceptar o maior volume efetivo em um intervalo de tempo fixo e, portanto, são os parâmetros que teoricamente incrementam o rendimento

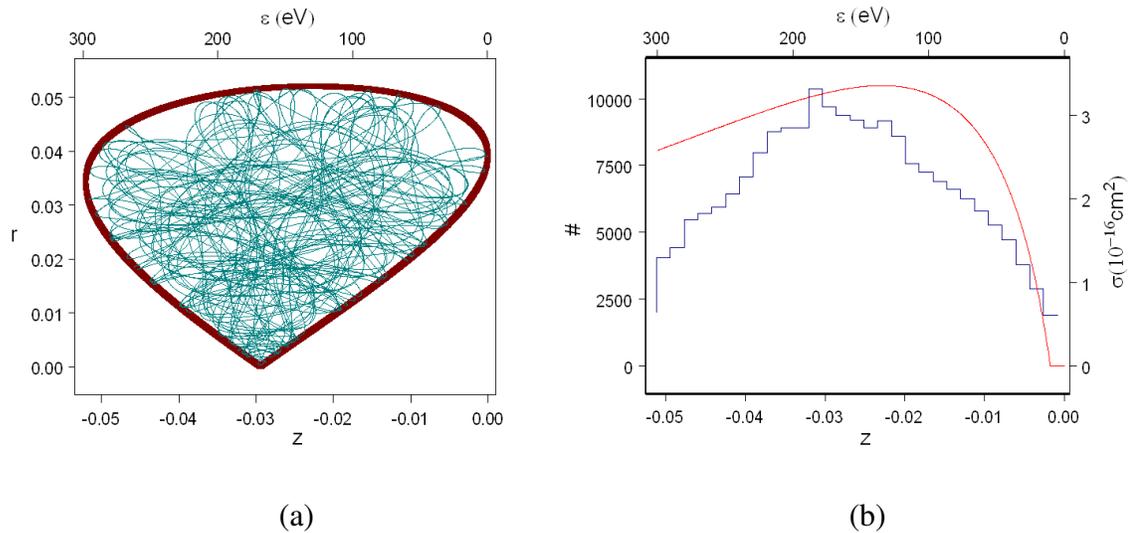


Fig. 4.4: Nessas figuras estão apresentados detalhes da dinâmica eletrônica referentes ao ponto $P2-\eta_p = 0.951$ – indicado na figura 4.2. Em (a) está assinalada a dinâmica do elétron no espaço de coordenadas r e z junto das suas curvas limite, descritas pelas funções 3.48. Em (b) está desenhada curva da seção de choque total de ionização do argônio em função da energia junto a um histograma que indica o número de passagens do elétron em dada região ao longo do eixo z . O valor do maior expoente de Lyapunov para esse conjunto de parâmetros é dado por: $\lambda = 0.125$. O valor V – normalizado a figura 4.2– é dado por: $V = 0.99$.

dos propulsores do tipo Hall, pois quanto maior for o volume efetivo interceptado pelo elétron, maior será a chance dele colidir com um átomo do gás propelente e ionizá-lo.

De uma forma mais geral, variando-se dois parâmetros de controle, pode-se construir um mapa que diferencie regiões dos parâmetros que forneçam dinâmicas caóticas e regulares ao elétron. Como vimos, o elétron em uma órbita caótica possui uma probabilidade maior de ionizar o gás propelente. Então, construir um mapa que forneça essa distinção de comportamentos dinâmicos pode ser relevante para identificação dos parâmetros bons ao incremento da eficiência dos propulsores Hall. A figura 4.8 foi construída mantendo-se constante os parâmetros K e ε_s e variando-se os parâmetros remanescentes, a saber: η_b e η_p . A condição inicial utilizada foi a condição inicial da partícula física descrita na 2.4. Através dessa figura, observamos a existência de estruturas geradas pelos parâmetros ao qualificarem o comportamento dinâmico do elétron.

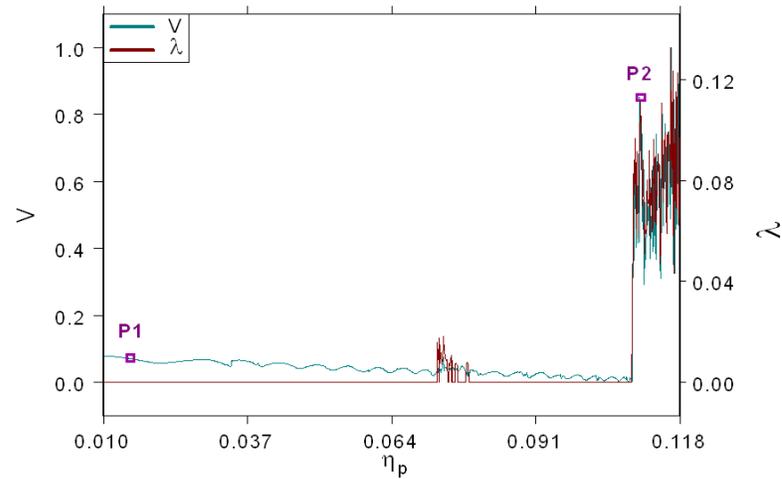


Fig. 4.5: Demonstração da relação entre o volume normalizado interceptado pelo elétron em intervalo de tempo fixo– V – com o maior expoente de Lyapunov– λ . Nesse gráfico, os valores $\eta_b = 0.0245$, $K = 1$ e $\varepsilon_s = -300\text{eV}$ são mantidos fixos enquanto varia-se o parâmetro η_p . A escala da esquerda refere-se ao volume normalizado V e a escala da direita refere-se maior expoente de Lyapunov.

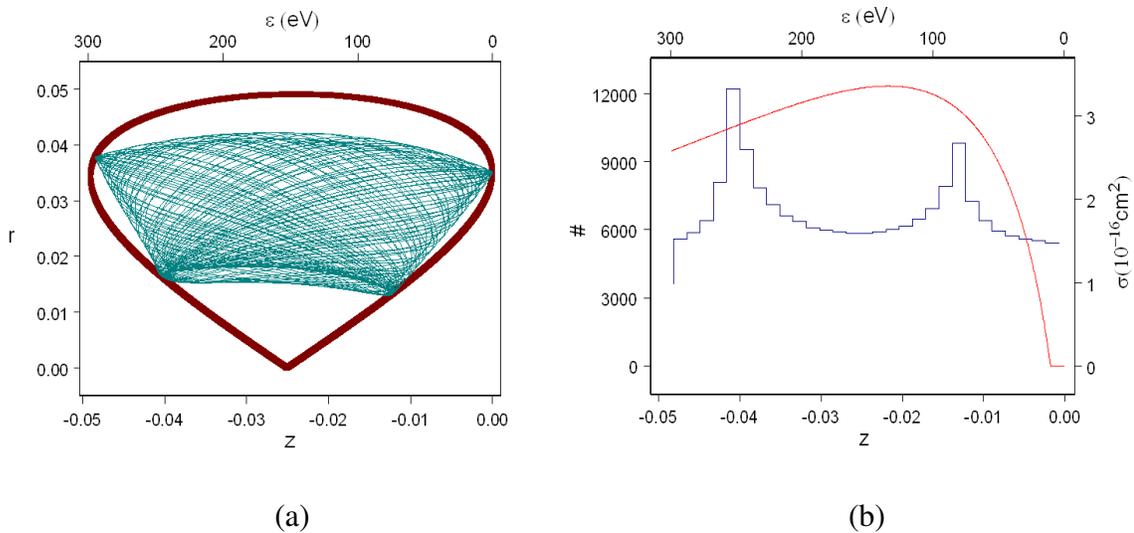


Fig. 4.6: Nessas figuras estão apresentados detalhes da dinâmica eletrônica referentes ao ponto $P1$ – $\eta_p = 0.015$ – indicado na figura 4.2. Em (a) está assinalada a dinâmica do elétron no espaço de coordenadas r e z junto das suas curvas limite, descritas pelas funções 3.48. Em (b) está desenhada curva da seção de choque total de ionização do gás argônio em função da energia junto a um histograma que indica o número de passagens do elétron em dada região ao longo do eixo z . O valor do maior expoente de Lyapunov para esse conjunto de parâmetros é assintoticamente zero, indicando que a órbita do elétron é periódica. O valor V – normalizado a figura 4.2– é: 0.071.

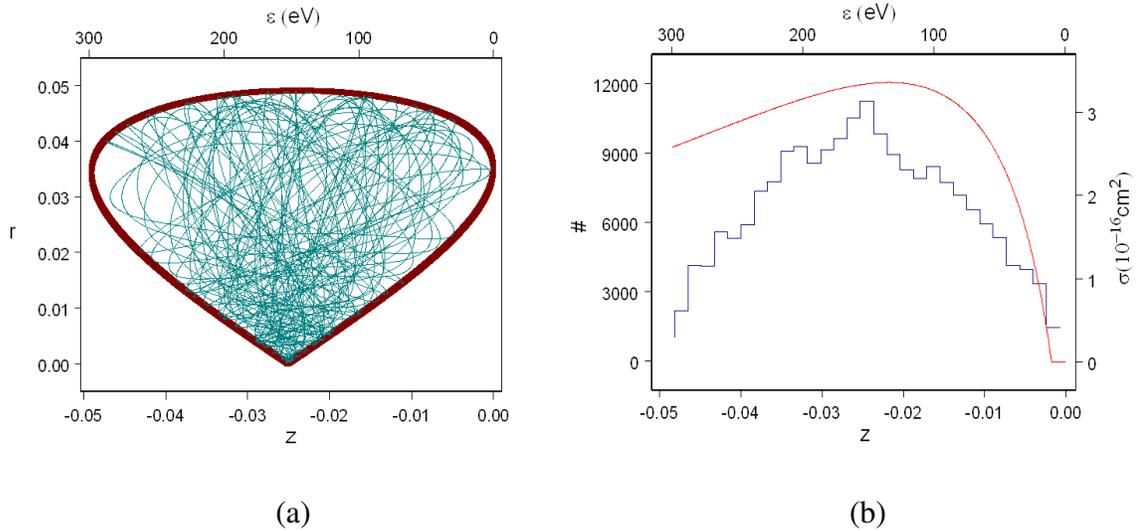


Fig. 4.7: Nessas figuras estão apresentados detalhes da dinâmica eletrônica referentes ao ponto $P2$ – $\eta_p = 0.1106$ – indicado na figura 4.2. Em (a) está assinalada a dinâmica do elétron no espaço de coordenadas r e z junto das suas curvas limite, descritas pelas funções 3.48. Em (b) está desenhada curva da seção de choque total de ionização do argônio em função da energia junto a um histograma que indica o número de passagens do elétron em dada região ao longo do eixo z . O valor do maior expoente de Lyapunov para esse conjunto de parâmetros é dado por: $\lambda = 0.11$. O valor V – normalizado a figura 4.2– é dado por: $V = 0.799$.

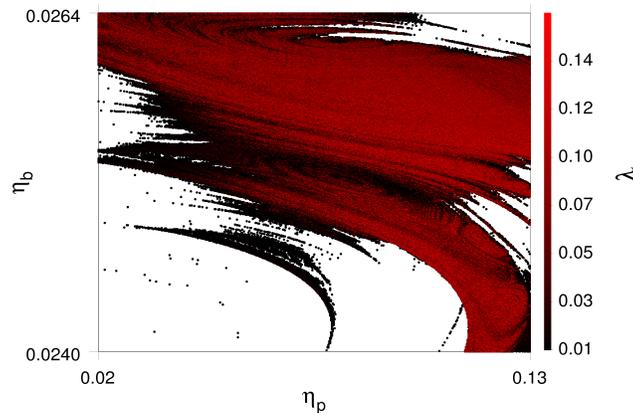


Fig. 4.8: Mapa de parâmetros para $\eta_p \times \eta_b$ mantendo-se os parâmetros, $K = 1$ e $\varepsilon_s = -300eV$ fixos. As regiões brancas indicam um comportamento dinâmico do elétron regular enquanto o gradiente de cores entre o preto e o vermelho indica um comportamento dinâmico caótico. As cores são dadas de acordo com a magnitude do maior expoente de Lyapunov, sendo que para a cor preta tem-se o menor valor para a cor vermelha tem-se o maior valor.

Capítulo 5

Conclusões

Através do modelo proposto nesse trabalho para descrever a dinâmica eletrônica em propulsores do tipo Hall, fomos capazes de: descrever o confinamento eletrônico em termos das componentes eletromagnéticas utilizadas, caracterizar o comportamento dinâmico do elétron e prever as intensidades das componentes de campo eletromagnético ideais para o incremento do desempenho desses sistemas.

O confinamento eletrônico foi caracterizado com o auxílio das curvas limite. Verificamos a boa descrição fornecida por essas curvas em definir a região ocupada pelo elétron no espaço de coordenadas r e z ; validando, dessa forma, a nossa análise. O comportamento dinâmico do elétron foi estudado através de uma análise linear que se demonstrou inconclusiva devido à necessidade de um vínculo entre os parâmetros para a existência de pontos fixos. Haja vista a inconclusividade da análise linear, o estudo da dinâmica eletrônica foi complementado através de uma análise não-linear realizada utilizando os mapas de Poincaré e os expoentes de Lyapunov. Dessa análise não-linear, verificamos a existência de um comportamento dinâmico do elétron composto por regularidade e caos.

A partir da seção de choque de ionização do argônio, fomos capazes de identificar os parâmetros que teoricamente incrementam o desempenho desses propulsores— eles estavam vinculados ao comportamento dinâmico do elétron. Sendo que, os parâmetros que teoricamente propiciam uma maior eficiência no propulsor estão relacionados com os parâmetros que impõem dinâmicas caóticas aos

elétrons. A constatação desse vínculo foi o fator responsável para a elaboração do mapa de parâmetros apresentado no capítulo 4. Dele, conseguimos identificar visualmente os parâmetros para um melhor desempenho desses sistemas. Em suma, através do nosso modelo idealizado, fomos capazes de identificar as componentes e as intensidades dos campos eletromagnéticos teoricamente relevantes aos propulsores do tipo Hall.

Referências Bibliográficas

- [1] R. G. Jahn. *Physics of electric propulsion*. McGraw- Hill, 1968.
- [2] E. Y. Choueiri. *A critical history of electric propulsion: the first 50 years 1906-1956*, volume 20. Journal of Propulsion and Power, 2004.
- [3] H. Oberth. *Ways to spaceflight*. National Aeronautics and Space Administration, 1929.
- [4] E. Stuhlinger. *Possibilities of electrical space ship propulsion*. 5th International Astronautical Congress, 1954.
- [5] E. Y. Choueiri. *Aurora dos foguetes elétricos*, volume 82. Scientific American Brasil, 2009.
- [6] R. Mourão. *Astronáutica: do sonho à realidade*. Bertrand Brasil, 1999.
- [7] National Aeronautics and Space Administration-NASA. <http://www.nasa.org>. Maio 2011.
- [8] G. Seikel; E. Reshotko. *Hall current ion accelerator*. Bulletin of the American Physical Society, Sot II 414, 1962.
- [9] E. C. Lary; R. G. Meyerand; F. Salz. *Ion acceleration in a gyro dominated neutral plasma theory and experiment*. Bulletin of the American Physical Society, Sot II 441, 1962.
- [10] G. S. Janes; J. Dotson; T. Wilson. *Electrostatic acceleration of neutral plasma momentum transfer through magnetic fields*. Proceeding of the 3rd Symposium on Advanced Propulsion Concepts- New York, 1963.

- [11] A. I. Morozov; A. Y. Kislov; I. P. Zubkov. *Experimental & theoretical description of Soviet SPT*. JETP Lett., 1968.
- [12] A. I. Morozov; Yu. V. Esipchuk; A. M. Kapulkin; V. A. Nevrovskii; V. A. Smimov. *Effect of the magnetic field on a closed-electron drift accelerator*, volume 17. Soviet Physics- Technical Physics, 1972.
- [13] S. Barral. *Numerical studies of Hall thrusters based on fluid equations for plasma*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polska Akademia Nauk, Phd thesis, 2003.
- [14] European Space Agency-ESA. <http://www.esa.org>. Maio 2011.
- [15] J. J. Szabo. *Fully kinetic numerical modeling of a plasma*. Massachusetts Institute of Technology, Phd thesis, 2001.
- [16] J. T. Yim. *Computational modeling of Hall thruster channel wall erosion*. University of Michigan, Phd thesis, 2008.
- [17] J. H. C. de Souza. *Estudo da dinâmica de partículas em um propulsor a plasma do tipo Hall com ímãs permanentes*. Universidade de Brasília, Dissertação de Mestrado, 2006.
- [18] I.S. Ferreira e J.L. Ferreira. *Primeiros resultados do desenvolvimento de um propulsor a plasma por efeito Hall*, volume 22. Revista Brasileira de Aplicações de Vácuo, 2003.
- [19] J. L. Ferreira; J. H. C. de Souza; I. da Silveira Rego; I. S. Ferreira. *Plasma diagnostic performance of a permanent magnet Hall thruster*. Proceeding of the 12th International Congress on a Plasma Physics- Nice, 2004.
- [20] R. K. Wangsness. *Electromagnetic fields*. Hamilton Printing Company, 2nd edition, 1986.
- [21] D. Halliday; R. Resnick; J. Walker. *Fundamentals of physics*. Wiley, 6th edition, 2000.
- [22] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 3rd edition, 1998.

- [23] H. Anton. *A new horizon*, volume 2. John Wiley & Sons, Inc., 6th edition, 1999.
- [24] J. B. Marion; S. T. Thornton. *Classical dynamics of particles and systems*. Saunders College Publishing, 4th edition, 1995.
- [25] W. H. Press; S. A. Teukolsky; W. T. Vetterling; B. P. Flannery. *Numerical recipes, the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [26] H. Goldstein; C. Poole; J. Safko. *Classical mechanics*. Addison Wesley, 3rd edition, 2001.
- [27] N. F. Ferrara; C. P. Cintra do Prado. *Caos uma introdução*. Editora Edgard Blücher LTDA, 1st edition, 1994.
- [28] L. H. A. Monteiro. *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2nd edition, 2006.
- [29] M. A. M. de Aguiar. *Caos em sistemas clássicos conservativos*, volume 16. Revista Brasileira de Ensino de Física, 1994.
- [30] A. J. Lichtenberg; M. A. Lieberman. *Regular and chaotic dynamics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1992.
- [31] A. Wolf; J. B. Swift; H. L. Swinney; J. A. Vastano. *Determining Lyapunov exponents from a time series*. Physica 16D, 1985.
- [32] G. Benettin; L. Galgani; A. Giorgilli; J.M. Strelcyn. *Lyapunov characteristic exponents from smooth dynamical systems and Hamiltonian systems: A method for computing all of them*, volume 15. Meccanica, 1980.
- [33] P. L. Barlett; A. T. Stelbovics. *Calculation of electron impact total ionization cross section*. Physical Review A 66, 2002.