UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Leonardo Guerini de Souza

Ensino-aprendizagem de Matemática através da Construção de Materiais Didáticos

PORTO ALEGRE

2011

Leonardo Guerini de Souza

Ensino-aprendizagem de Matemática através da Construção de Materiais Didáticos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Porto Alegre

2011

Leonardo Guerini de Souza

Ensino-aprendizagem de Matemática através da Construção de Materiais Didáticos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Helena Dória Lucas de Oliveira

Faculdade de Educação – UFRGS

____

Prof. Me. Luiz Davi Mazzei

Colégio do Aplicação – UFRGS

Porto Alegre, 9 de dezembro de 2011

Listen, master, can you answer a question?
Is it the fingers or the brain that you're teaching the lesson?
Maybe I'll put my love on ice
And teach myself, maybe that would be nice

(The White Stripes – Black Math)

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, que me acordou nas manhãs seguintes às noites passadas em claro escrevendo a tempo de não chegar completamente atrasado aos meus compromissos, e à minha mãe, que “nunca me viu estudando tanto”.

Ao professor Marcus, pela orientação de alto nível e, principalmente, pela amizade e motivação diante de perspectivas difíceis.

Ao professor Luiz, pela boa-vontade fundamental, que lhe confere o título de padrinho deste trabalho, e pela gentileza de aceitar compor a banca examinadora.

À professora Helena, por plantar a semente que culminou neste texto e pela boa acolhida que o convite para membro da banca examinadora recebeu.

Aos meus colegas de curso, que estiveram ao meu lado neste percurso mesmo quando eu estava longe, em especial ao Fernando e ao Guilherme, que iniciaram este trabalho comigo.

RESUMO

Este trabalho visa examinar a relevância de utilizar a construção de materiais didáticos como estratégia para o ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Médio. É inicialmente falado sobre materiais manipulativos, com ênfase para o ensino de Geometria, e sobre materiais didáticos cuja construção é rica em possibilidades para o ensino-aprendizagem de Matemática. A seguir, é descrita uma série de oficinas baseadas nesse tema, realizadas com alunos do Ensino Fundamental em 2009. São então apresentados o planejamento, a descrição e a análise de três oficinas desta temática voltadas para o Ensino Médio, realizadas no Colégio de Aplicação da UFRGS. Durante as práticas, foi utilizada uma adaptação do método clínico piagetiano, aqui apresentado brevemente. A partir dos resultados obtidos, conclui-se com uma posição afirmativa sobre a validade desta proposta.

Palavras-chave: 1. Ensino de matemática. 2. Construção de materiais didáticos. 3. Materiais manipulativos.

ABSTRACT

This study aim to examine the relevance of the utilization of teaching materials' construction as strategy for the teaching and learning of Mathematics in High School. It is initially talked about manipulative materials, with emphasis on the teaching of Geometry, and about teaching materials whose construction is rich in possibilities for the learning of Mathematics. It is described a series of workshops based on this subject that happened in 2009 with Primary School students. Then, it is presented the planning, description and analysis of three workshops for students of High School, which took place at Colégio de Aplicação of UFRGS. During the practices, it was made use of an adaptation of the Piaget's clinic method, here briefly presented. Based on the results obtained, it is concluded with an affirmative position about the proposal.

Keywords: 1. Teaching of Mathematics. 2. Construction of teaching materials. 3. Manipulative materials.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Desde que comecei a refletir seriamente sobre o que significa ser educador e qual o papel de um professor, eu me convenci que independentemente do conteúdo que estamos desenvolvendo em sala de aula, Geometria Plana, Revolução Industrial ou frutos partenogênicos, nas entrelinhas um professor sempre estará lidando com valores. Ele sempre será visto, em maior ou menor grau, como um exemplo por seus alunos. Por isso, acredito na responsabilidade que um profissional da educação tem de buscar meios para executar seu trabalho em um contexto favorável ao amadurecimento de seus alunos também como pessoas.

Assim, quando na disciplina de Estágio em Educação Matemática I tivemos de planejar um projeto e nossa professora sugeriu como tema a confecção de materiais manipulativos, eu e meus dois colegas de grupo concordamos prontamente. A ideia de alunos produzindo material didático para outros alunos enquanto trabalham conceitos matemáticos pareceu-nos unir o útil ao agradável: na minha experiência enquanto licenciando, pude notar uma carência de alternativas didáticas nas aulas de matemática na maioria dos colégios que conheci, enquanto que uma das reclamações mais freqüentes dos alunos relacionadas a essa disciplina é que os conteúdos não têm aplicações no dia-a-dia. Numa proposta assim, os alunos estariam participando de uma atividade de caráter não-obrigatório na qual haveria uma produção concreta de materiais que não seriam necessariamente utilizados por eles, mas estariam à disposição na escola para uso comum. Ou seja, a princípio, os participantes não teriam garantido nenhum ganho direto com a oficina que não a experiência da participação e o aprendizado por ela proporcionado. Logo, permeando tal projeto, existe um contexto de trabalho voluntário, consoante com o que foi dito acima acerca da atitude desejável de um professor e, portanto, muito bem-vindo. Na prática, conforme será visto, não foi exatamente assim; os alunos participaram das atividades no espaço das suas aulas de Matemática enquanto o resto da sua turma ficava em aula regular e, em algumas práticas, eles foram presenteados com os materiais construídos, em vez de estes ficarem para o colégio. Porém, isso não subtrai da essência do projeto tais qualidades.

Pois bem, durante o primeiro semestre de 2009, eu e meus colegas organizamos e colocamos em prática esta ideia, tendo como público alvo alunos do ensino fundamental. Foi possível constatar que a produção de determinados materiais didáticos oportuniza a aplicação de diversos conceitos de Matemática e que, como conseqüência, torna essa atividade rica em possibilidades para o ensino e para a aprendizagem nessa disciplina. Motivados pelos resultados obtidos com a aplicação desse projeto, no presente trabalho temos como objetivo planejar, justificar, implementar e validar uma segunda realização, amadurecendo-o, ampliando-o e deslocando o foco para alunos e conteúdos do ensino médio. Assim, buscaremos responder se, através dessa proposta, obtêm-se resultados que apontem para a relevância de estendê-la para estudantes do Ensino Médio.

Após uma breve discussão sobre materiais manipulativos, serão apresentados os materiais a serem confeccionados pelos alunos e as três propostas de oficinas neles baseadas, motivadas pelo potencial que tais produções têm para o ensino-aprendizagem de matemática. As duas primeiras oficinas tratam da confecção de modelos de poliedros para a geometria espacial, sendo a primeira focada na construção de pirâmides e a segunda na construção de um prisma triangular e de sua decomposição em três pirâmides de mesmo volume. A terceira oficina tem como objetivo a confecção de um jogo denominado Triminó Logarítmico. Este é um quebra-cabeça em que cada peça tem a forma de um triângulo equilátero, no qual em pelo menos um dos lados há uma expressão. Deve-se procurar expressões equivalentes e identificar seus respectivos lados para proceder a montagem de um único triangulo equilátero formado por todas as peças. Os materiais serão detalhadamente descritos no capítulo 3. O capítulo 4 apresenta o planejamento, a descrição e a análise das práticas realizadas e o capítulo 5 os resultados obtidos. No capítulo 6 estão dispostas as considerações finais.

2. SOBRE MATERIAIS MANIPULATIVOS

Muito se tem discutido a respeito de estratégias e recursos que tornem a aprendizagem de matemática mais relevante e interessante para os alunos. Acredito que grande parte dos estudantes apresenta um preconceito em relação à matemática devido ao fato de que esta é considerada, muitas vezes, como uma disciplina baseada em técnicas repetitivas e que faz uso de uma simbologia desprovida de significação (PACHECO, GARCIA, 2004). Acrescenta-se a isso o fato de alguns conteúdos serem desenvolvidos de forma descontextualizada e sem objetivos definidos, tornando-se vagos e causando dúvidas quanto a sua relevância.

É perceptível que a maioria dos alunos que chegam aos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio não tem suas bases matemáticas solidificadas. Seus conhecimentos básicos são frágeis, o que comprova que não ocorreu uma aprendizagem no sentido trazido por Jean Piaget (1971), segundo o qual o conhecimento se constrói na interação do sujeito com o objeto, a partir das vivências e curiosidades do indivíduo. As estruturas de aprendizagem não estão pré-formadas dentro do aprendiz, nem sequer são formadas por estímulos externos; elas são construídas ao longo de um processo no qual o professor tem o papel de criar condições para que elas se estabeleçam. Nesse contexto, o uso de materiais manipulativos é muito bem-vindo em sala de aula.

O uso de materiais manipulativos no ensino foi destacado pela primeira vez por Comenius, no séc. XVII. Pestalozzi, no século XIX, defendia que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações. Apóio-me na definição dada por Alsina, Burgués e Fortuny (1991), segundo os quais a palavra “material” agrupa todos aqueles objetos, aparatos ou meios de comunicação que podem ajudar a descobrir, entender ou consolidar conceitos fundamentais em diversas fases da aprendizagem.

Chamo a atenção para o fato de jogos matemáticos, concretos ou virtuais, se encaixarem nessa definição, sendo assim também pertencentes à categoria dos materiais. Porém, não há uma correspondência biunívoca entre materiais e conceitos; pelo contrário, é mesmo recomendável que um conceito seja trabalhado com mais de um material, assim como um material pode ser utilizado para diversas atividades.

Existem diversas classificações dos materiais de interesse didático-matemático. Alguns dos critérios mais naturais promovem uma divisão entre materiais estáticos e materiais dinâmicos, materiais preparados e materiais realizados e materiais concretos e materiais virtuais. Podemos também pensar numa separação de acordo com as funções que os materiais desempenham, mesmo que estas possam ser diferentes e variadas. Uma possibilidade é a seguinte classificação não exclusiva: materiais dedicados à comunicação áudio-visual, materiais para desenhar, materiais para ler, materiais para fazer medidas, materiais que são modelos, materiais para o descobrimento de conceitos, materiais para mostrar aplicações, materiais para resolver problemas e materiais para demonstrações e comprovações (ALSINA; BURGUÉS; FORTUNY, 1991).

O aprendizado de matemática deve favorecer e estar em consonância com o amadurecimento do pensamento dos alunos. Este não se alcança de uma vez, sendo que, seguindo as teorias psicológicas de Piaget (1971), se produz por meio de uma progressão natural de etapas que nas quais são trabalhadas determinadas operações. Estas operações conduzem a ações que vão desde um período concreto com uso de material, até chegar a um nível formal ou abstrato, passando por um período de representação. Gaba (1975, *apud* FAGUNDES, 1977) propõe o seguinte esquema para utilização de material concreto nas aulas de matemática:

Manipulação de objetos concretos

↓

Ações realizadas com objetos

↓

Obtenção de relações

↓

Interiorizações dessas relações

↓

Aquisição e formulação do conceito

↓

Integração do conceito a conceitos anteriores

↓

Aplicação ou reconhecimento da estrutura em novas situações

Caso consiga ser colocada em prática com sucesso, a sequência proposta nesse esquema descarta a possibilidade do aluno não conseguir dissociar o seu raciocínio do material concreto, ou seja, que este representaria um retrocesso no seu aprendizado por apresentar um menor nível de abstração exigido. É verdade que essa menor exigência se dá inicialmente (de fato, é aí que consta a maior virtude de um material manipulativo), mas nenhum material didático é um fim em si, e sim apenas um “lubrificante” para a interação com idéias novas e futura internalização das ações efetuadas. Na matemática formal, quando temos por fim provar um resultado, uma abordagem inicial é basear-se em casos particulares, observá-los de perto, analisá-los em seus detalhes para aproximarmo-nos da sutileza do raciocínio envolvido e, por fim, generalizá-los e transcendê-los em direção a uma compreensão mais ampla do tópico estudado. Analogamente, o uso de materiais visa a evolução do pensamento do aluno até o estágio em que o próprio material ficará obsoleto, pois as ações realizadas com os objetos já terão sido internalizadas, os conceitos já estarão formados e a abstração do raciocínio terá tornado desnecessária a atividade de manipulação.

Um exemplo da contribuição que os materiais manipulativos podem proporcionar está relatado em “Na vida dez, na escola zero”, de Terezinha Carraher, David Carraher e Ana Lúcia Schliemann (1989). Nesse texto, são relatadas experiências didáticas realizadas com crianças que trabalham comercializando produtos nas ruas. Segundo os autores, essas crianças lidam muito bem com operações aritméticas em seu cotidiano, pois têm que calcular mental e rapidamente o troco, o preço da venda, quantas unidades venderão, etc. Porém, na escola, quando se deparam com a mesma conta, mas desvinculada de qualquer contexto, apresentam dificuldades seriíssimas. Neste caso o material concreto é o dinheiro, que confere sentido às operações que devem ser feitas naquela situação. Essas crianças ainda não desenvolveram seu pensamento ao ponto da abstração necessária para a compreensão dos cálculos desvinculados do contexto, mas sua experiência com dinheiro pode ser valiosa para que esse estágio seja atingido.

Há diferentes métodos pedagógicos que podem ser trabalhados em sala de aula: projetos interdisciplinares, resolução de problemas, Modelagem Matemática, etnomatemática, uso de jogos, de história da matemática, entre outros; todos estes podem ser permeados pela utilização de materiais manipulativos. É um método que está disponível para qualquer linha de ensino-aprendizagem que queira ser seguido pelo professor, que tem como pontos fortes o dinamismo e o incentivo à autonomia do aluno.

Consideramos que uma das mensagens mais importantes que podemos tirar do trabalho de Piaget (1971) é que as crianças, principalmente as mais novas, aprendem não exclusivamente, mas com certeza de maneira mais eficaz com a atividade concreta. Se compreender é inventar, então tudo o que estimula o aluno a refletir, observar e interagir trabalha rumo ao aprendizado. Em uma proposta de ensino-aprendizagem baseada nessa afirmação, o papel do professor seria substancialmente alterado de expositor a auxiliar, aquele que propicia e orienta a manipulação e a interação das crianças com os vários aspectos do meio que as cercam.

2.1. MATERIAIS MANIPULATIVOS NO ENSINO DE GEOMETRIA

Apesar de ser o conteúdo matemático que mais “salta aos olhos” quando nos propomos a observar o mundo físico à nossa volta e da origem grega de sua denominação significar “medida da terra”, o estudo da Geometria também pode apresentar aspectos puramente abstratos. Como dimensões gerais da educação geométrica, podemos distinguir as seguintes:

- Dimensão 1: a Geometria como estudo da realidade, do mundo físico.
- Dimensão 2: a Geometria como estudo da visualização, medidas e construção de figuras.
- Dimensão 3: a Geometria como meio de representação matemática de outros conceitos cuja origem não é visual nem físico.
- Dimensão 4: a Geometria como exemplo de sistema matemático.

A consciência desta concepção multidimensional do currículo da Geometria leva à necessidade de que o seu ensino se dê através de uma ampla variedade de experiências geométricas onde o uso de material é vital para que se alcancem os objetivos terminais propostos em cada ciclo educativo (ALSINA; BURGUÉS; FORTUNY, 1991).

As habilidades espaciais estão intrinsecamente relacionadas às habilidades geométricas, que podem ser entendidas como as habilidades de gerar, reter e manipular imagens espaciais abstratas. Os denominados produtos espaciais se referem aos aparatos que, de alguma maneira, são representações externas do espaço; os modelos manipulativos são um exemplo típico. Desta forma, o uso de material favorece direta ou indiretamente o desenvolvimento da imaginação espacial, propiciando assim o desenvolvimento das habilidades espaciais e das habilidades geométricas em geral.

3. MATERIAIS BIVALENTES

Não estamos com a discussão anterior afirmando que jogos e materiais manipulativos sejam imprescindíveis a uma aprendizagem efetiva da matemática. Outros autores já se preocuparam com essa questão, conforme transcrito a seguir.

> Pode parecer, à primeira vista, que todos concordem e respondam sim a pergunta. Mas isto não é verdade. Um exemplo de uma posição divergente é colocado por Carraher & Schilemann (1988), ao afirmarem, com base em suas pesquisas, que *"não precisamos de objetos na sala de aula, mas de objetivos na sala de aula, de situações em que a resolução de um problema implique a utilização dos princípios lógico-matemáticos a serem ensinados"* (p. 179). Isto porque o material *"apesar de ser formado por objetivos, pode ser considerado como um conjunto de objetos 'abstratos', porque esses objetos existem apenas na escola, para a finalidade de ensino, e não tem qualquer conexão com o mundo da criança"* (FIORENTINI; MIORIM, 1990).

Ou seja, para esses autores, o concreto não seria necessariamente materiais didáticos, mas sim situações relevantes para os alunos, onde ficaria clara a necessidade de estudar e conhecer os conteúdos a serem trabalhados. Assim, seria razoável trabalhar em sala de aula atividades de construção, por exemplo, que impliquem no estudo de princípios lógico-matemáticos. A proposta trazida no presente texto procura seguir esse caminho, motivando as atividades com o objetivo da construção de determinados materiais didáticos.

Este trabalho foi iniciado juntamente com dois colegas durante a disciplina de Estágio em Educação Matemática I, cursado no primeiro semestre de 2009. Um dos objetivos dessa disciplina era realizar uma atividade prática na escola, algo que tivesse contato direto com os alunos. Depois de decidirmos trabalhar através de oficinas, aceitamos a sugestão da nossa professora e passamos a pensar também em produção de material didático, em particular, de material manipulativo, convencidos do potencial que estes materiais possuem.

Mas por que não unir as duas coisas? Por que não trabalhar com os alunos em oficinas cujo objetivo seria a produção de recursos pedagógicos? A idéia certamente parecia boa, mas era também bastante desafiadora: para que seja possível a produção de materiais de qualidade é preciso planejamento e responsabilidade, mas queríamos também que o trabalho acrescentasse aos alunos envolvidos relevantes experiências de ensino-aprendizagem, o que requer ainda mais seriedade. A uma oficina assim, em que os personagens ativos são os alunos e que além de produzir bons materiais didáticos produz um ambiente de ensino-aprendizagem com grande potencial aos participantes, eu chamarei de *oficina superprodutiva.* O nome se deve ao fato da oficina ser rica tanto em termos de produção de materiais manipulativos de qualidade quanto em produção de oportunidades para o ensino-aprendizagem dos alunos envolvidos. Nossa meta então era organizar nossas próprias oficinas superprodutivas.

Seguindo nesse caminho, o próximo passo era decidir quais materiais seriam confeccionados. Surgiram naturalmente três perguntas norteadoras:

(1) Por que e com que finalidade um determinado material deveria ser produzido?

(2) Qual material confeccionar?

(3) O que os alunos que fabricariam esses materiais poderiam aprender com essa atividade?

Para responder à primeira questão, tivemos como prioridade atender às necessidades da escola, e decidiu-se doar os materiais produzidos a ela. Perguntamos à professora de Matemática responsável pelas turmas de 5ª a 8ª séries quais os conteúdos que os alunos apresentavam maior dificuldade e se algum destes possuía algum recurso didático para a sua abordagem. A partir das respostas obtidas, concluímos que os materiais a serem produzidos deveriam abordar os conteúdos operações básicas com números inteiros e tabuada. Além disso, decidimos incluir construções geométricas ao longo das atividades propostas, pois nossas experiências docentes com geometria no ensino médio demonstraram uma grande dificuldade por parte dos alunos com esse conteúdo, em parte por falta de contato com ela no ensino fundamental.

Respondida à primeira pergunta, já tínhamos as bases que nos norteariam a responder à segunda e à terceira. E essa é a questão principal das oficinas superprodutivas: encontrar um material didático que satisfaça às três perguntas harmoniosamente. Buscávamos um material que tenha um propósito justificado e que, além disso, pudesse proporcionar o desenvolvimento de habilidades e lidasse com conhecimentos relevantes àqueles que o produzirão. Um material que satisfaça essas condições é o que será denominado por *material bivalente*. Logo, fica evidente a relação entre oficinas superprodutivas e materiais bivalentes: são objetos indissociáveis, um não existe sem o outro.

Dessa forma, nossa proposta se baseava em apresentar a construção de um material bivalente como objetivo em sala de aula, conforme requerido por Carraher e Schilermann. Posteriormente, na seção 4.1, serão relatadas as oficinas realizadas então, mais tarde denominadas *Oficinas Geração Espontânea*. Ao longo da narrativa, serão dadas respostas às perguntas (2) e (3) e apresentados os materiais bivalentes então trabalhados.

A seguir, serão apresentados os dois materiais bivalentes centrais em torno dos quais esse trabalho foi construído, com uma pequena descrição dos mesmos, nas quais são justificadas as suas "bivalências". São eles os poliedros de canudinho e o Triminó Logarítmico.

3.1. POLIEDROS DE CANUDINHO

A utilização de modelos se faz útil no ensino de geometria espacial justamente por esta ser de difícil representação no quadro negro. A construção de poliedros utilizando canudinhos e fio de nylon é uma alternativa fácil e barata.

Para uma oficina baseada nesse material, podemos começar propondo a construção de um tetraedro regular, com as medidas determinadas pelos alunos. Com o tetraedro pronto, dada a fórmula do seu volume, $V_T = \frac{A_b \cdot h}{3}$, pede-se aos alunos que calculem o volume do sólido construído. A resolução passa por medir precisamente a altura do tetraedro. Com esta motivação, pedimos aos alunos que encontrem os dois triângulos retângulos que podemos utilizar para determinar a altura: o que é formado, além da altura do tetraedro, pelo apótema da base e pela altura do triângulo lateral e o que é formado pela altura do tetraedro, pela aresta lateral e pelo segmento que liga o baricentro ao vértice da base.

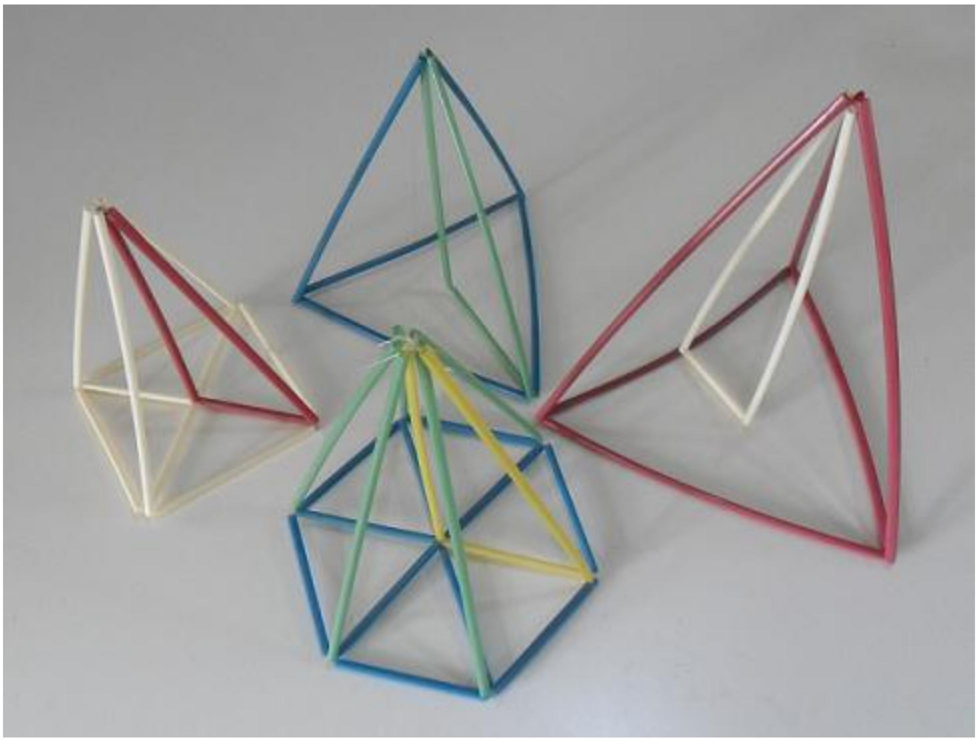


Figura 1 - Pirâmides de canudinho.

Feito isso, os alunos podem calcular, via Teorema de Pitágoras, a altura e o volume do seu tetraedro. Além disso, eles poderiam construir outras duas pirâmides, explicitando com cores diferentes cada um dos triângulos que pode ser utilizado para o cálculo da altura.

Após essa etapa, podemos pedir aos alunos que construam uma pirâmide cuja base seja um polígono regular com mais de três lados, mas cujo volume seja $1dm^3$. A princípio, a figura da base não ficará com os ângulos fixos, haverá certa folga. Essa pode ser uma boa oportunidade para discutir a rigidez do triângulo, que é o único caso em que determinando unicamente o tamanho dos lados, determinamos um único polígono. Assim, para que a base não fique "jogando", basta decompor o polígono regular em triângulos. Pode-se mostrar aos alunos a aplicação desse fato, que é visível em diversas construções e estruturas.

Para finalizar, podemos construir um prisma triangular e decompô-lo em três pirâmides de base triangular convenientes, de modo a confirmar a fórmula do volume da pirâmide, isto é, que o volume do prisma triangular é três vezes maior que o da pirâmide que possui a base congruente à sua e mesma altura.

Assim, tal construção envolve diversos conceitos de Geometria Plana, Geometria Espacial e Trigonometria, além da atividade prática de medição de segmentos. A construção de poliedros de canudinho e suas potencialidades serão melhor discutidas nas seções 4.3 e 4.4.

3.2. TRIMINÓ LOGARÍTMICO

Um Triminó Logarítmico é um quebra-cabeça em que cada peça possui a forma de um triângulo equilátero, no qual pelo menos um de seus lados possui uma expressão matemática. As peças devem ser encaixadas identificando os lados que possuam expressões equivalentes, formando, assim, um único triângulo equilátero. As expressões envolvem propriedades dos logaritmos, donde vem o título Triminó Logarítmico.

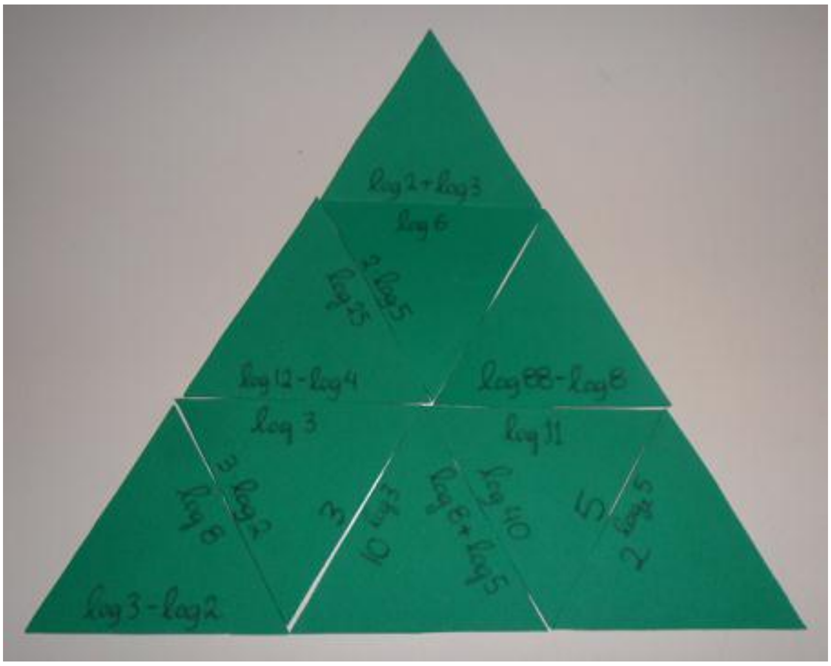


Figura 2 - Triminó Logarítmico de nove peças.

A construção do Triminó passa pela construção de triângulos equiláteros, logo pode ser trabalhado com os alunos métodos com diferentes instrumentos para tal construção: régua e compasso, régua graduada, régua e transferidor, etc. Para a construção de vários triângulos, podemos discutir qual a forma mais otimizada de desenhar triângulos equiláteros numa folha, de forma a obter-se a maior quantidade de triângulos em uma folha A4, por exemplo.

Uma das grandes potencialidades deste material é o exercício de generalização dadas as etapas iniciais de um processo. Por exemplo, podemos discutir com os alunos quantas peças um Triminó pode ter. É este um número arbitrário? Rapidamente conclui-se que não: é impossível formar um triângulo equilátero justapondo dois triângulos eqüiláteros menores. Mas então quais são os possíveis números de peças de um Triminó? Com algumas tentativas, nota-se que os primeiros cinco Triminós possíveis de se montar são formados por 1, 4, 9, 16 e 25. É possível conjecturar algo a partir dessas informações? Como poderíamos comprovar uma conjectura assim? Tais questões podem gerar ricas discussões e motivar a argumentação matemática dos alunos.

Para concluir a construção dos Triminós, é necessário também obter-se equações logarítmicas. O estudo do número necessário de equações também pode compor a parte de generalizações da atividade, enquanto que a criação das mesmas serve como revisão e exercícios das propriedades dos logaritmos.

O processo de construção do Triminó Logarítmico e sua potencialidades serão melhor discutidas na seção 4.5.

3.3. OUTRAS SUGESTÕES DE MATERIAIS BIVALENTES

Além dos materiais bivalentes utilizados nas oficinas realizadas em 2009 (a serem descritos na seção 4.1) e dos materiais referidos acima, sugerimos ainda outros.

Frac-soma 235

Este material busca trabalhar o conceito e as operações com frações. Consiste em barras de mesmo tamanho, 60×3 cm, que são divididas em x peças congruentes, sendo x um múltiplo inteiro de 2, 3 ou 5 (e possivelmente dos três). No jogo completo, temos as seguintes peças:

- 1 faixa branca com 60 cm, a unidade;
- 2 peças vermelhas com 30 cm;
- 3 peças amarelas com 20 cm;
- 4 peças vermelhas com 15 cm;
- 5 peças azuis com 12 cm;
- 6 peças laranjas com 10 cm;
- 8 peças vermelhas com 7,5 cm;
- 9 peças amarelas com aproximadamente 6,67 cm;
- 10 peças roxas com 6 cm;
- 12 peças laranjas com 5 cm;
- 15 peças verdes com 4 cm;
- 16 peças vermelhas com 3,75 cm;
- 18 peças laranjas com aproximadamente 3,33 cm;
- 20 peças roxas com 3 cm;
- 24 peças laranjas com 2,5 cm;
- 25 peças azuis com 2,4 cm;
- 27 peças amarelas com aproximadamente 2,22 cm;
- 30 peças pretas com 2 cm cada.

Figura 3 - Frac-soma 235 sendo montado.

Para começar a produção do material, deve-se cortar as 18 tiras de 60 x 3 cm de papel-cartão ou (preferencialmente) EVA, sendo 1 branca, 4 vermelhas, 3 amarelas, 2 azuis, 4 laranjas, 2 roxas, 1 verde e 1 preta. Cada tira deve então ser cortada no número especificado acima de peças. Neste instante, levanta-se a questão: é possível dividir as faixas em partes iguais sem a utilização de uma régua ou qualquer outro instrumento graduado? Para a primeira faixa vermelha, que deve ser dividida em dois pedaços iguais, é fácil: basta dobrá-la ao meio. Mas e para a primeira faixa amarela? Não é imediato de se conseguir dividir a faixa em três partes exatamente iguais apenas dobrando-a!

A questão é uma boa motivação para trabalhar o Teorema de Tales, através do qual se pode dividir um segmento em um número qualquer de segmentos congruentes segundo o procedimento exposto abaixo. O Teorema garante que quando duas retas transversais cortam um feixe de retas paralelas, as medidas dos segmentos delimitados pelas transversais são proporcionais.

Por exemplo, para dividir a primeira faixa amarela (representada na figura 4 pelo segmento AB) em três peças de mesmo comprimento, poderíamos traçar uma reta *r* qualquer passando por A e, sobre a reta, traçar três segmentos AD, DE e EF congruentes, com o auxílio de um compasso. Então, traçando a reta que passa pelos pontos F e B e outras paralelas a esta passando por E e D, definimos no segmento AB (nossa faixa amarela) os pontos G e H. Uma vez que os segmentos AD, DE e EF são congruentes e as retas passando por esses pontos são paralelas, o Teorema de Tales garante que os pontos determinados dividem AB em 3 segmentos também congruentes: AG, GH e HB.

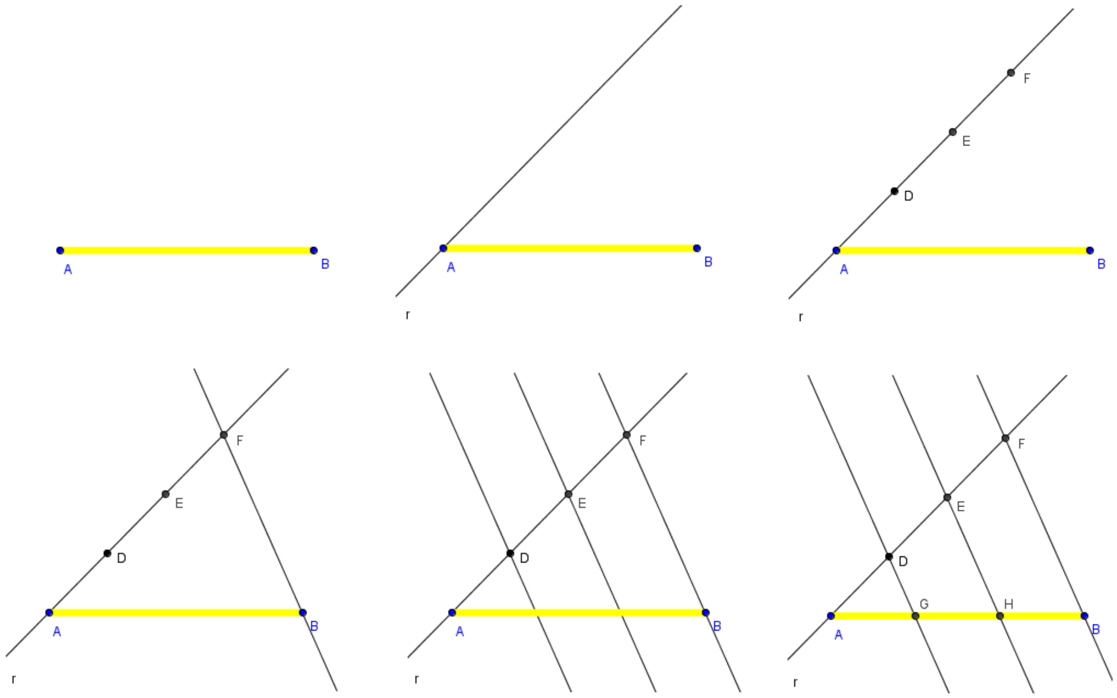


Figura 4 - Divisão passo a passo do segmento AB em três segmentos congruentes através da aplicação do Teorema de Tales.

Note que este é um processo trabalhoso, mas mesmo assim ilustra muito bem o Teorema e gera discussões interessantes acerca de razão e proporcionalidade, que são os conceitos por trás do resultado. O Teorema de Tales é antiguíssimo, um dos primeiros resultados de geometria conhecidos, e, desde que as faixas iniciais já estejam com o comprimento de 60 cm, permite a construção do Frac-Soma inteiro sem a utilização de régua graduada ou qualquer outro instrumento para medição direta, se assim for desejado. Aqui, porém, sugiro que o processo seja apresentado e aplicado pelos alunos, que podem testar a precisão garantida pelo Teorema com a ajuda de uma régua e de uma calculadora, mas que a partição das faixas seja feita em geral com a utilização de uma régua graduada, para facilitar e agilizar o processo. Uma experiência de construção do Frac-Soma 235 com alunos do Ensino Fundamental é descrita por Pereira (2009).

Quadrado das Equivalentes

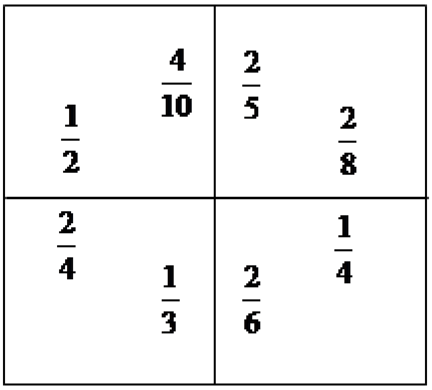


Figura 5 - Quadrado das Equivalentes 2x2 montado.

Trata-se de um conjunto de cartas quadradas, que possuem uma fração para cada lado. Quando cada fração é identificada com a sua equivalente, a figura montada é um quadrado. Na figura 5, temos uma representação de um Quadrado das Equivalentes 2×2, formado por quatro cartas, já montado.

Na construção desse jogo, os alunos têm liberdade total. Ou seja, os alunos podem escolher tanto a ordem do Quadrado que irão construir posteriormente (em papel cartão) quanto as frações equivalentes que irão utilizar.

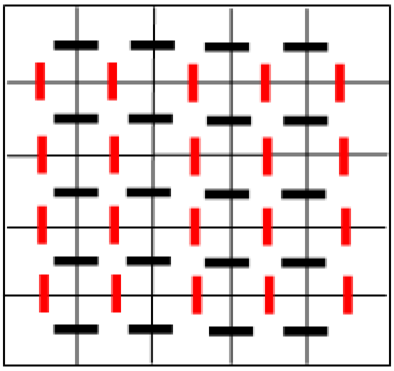


Figura 6 - Quadrado das Equivalentes 5x5, com suas "ligações" destacadas.

Assim como no Triminó Logarítmico, esse material oportuniza a abordagem de questões cuja resolução requer um processo de generalização a partir de suas etapas iniciais, que vêm aparecendo em vestibulares e edições recentes da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Conforme visto, se optarem por construir um Quadrado 2×2, serão necessários quatro pares de frações equivalentes: duas “ligações verticais” e duas “ligações horizontais”. E se optarem por um 3×3, quantas cartas serão necessárias? E um 4×4? Existe uma fórmula que gere o número de cartas necessárias para preencher todo o Quadrado?

A resolução da questão pode ser feita da seguinte maneira: veja acima, na figura 6, uma representação de um Quadrado das Equivalentes 5×5. Os traços representam as "ligações" entre as cartas, ou seja, as duas frações, uma em cada carta, que são equivalentes. Note que são necessárias quatro ligações horizontais em cada linha, totalizando 20 ligações horizontais. Devido à simetria do quadrado maior, formado após o encaixe das cartas, temos o mesmo número de ligações horizontais e verticais. Logo, serão necessárias 40 ligações ao todo, isto é, 40 pares de frações equivalentes. No caso geral, em um quadrado $n \times n$, teremos n linhas, cada uma com $(n-1)$ ligações horizontais, totalizando $n \cdot (n-1)$ ligações horizontais. E mais uma vez teremos tantas ligações verticais quanto horizontais, ou seja, $2n \cdot (n-1)$ ligações ao todo. Podemos ainda instituir algumas restrições quanto à escolha das frações utilizadas. Por exemplo, podemos pedir que algumas frações, escolhidas previamente, apareçam mais de uma vez, mas cada vez com um par diferente. Isso levaria o aluno a procurar – ou gerar – mais de uma fração equivalente para cada uma das escolhidas.

4. OFICINAS SUPERPRODUTIVAS

A seguir, são apresentadas as práticas realizadas, a começar pelas oficinas aplicadas no primeiro semestre de 2009. Devido à falta de registros e de uma sistemática para o acompanhamento e reflexão sobre os dados obtidos nessas oficinas, foram, recentemente, desenvolvidas outras práticas, que serão abordadas a seguir.

4.1. OFICINAS GERAÇÃO ESPONTÂNEA

As oficinas desenvolvidas no primeiro semestre de 2009 tiveram espaço em uma escola estadual de ensino fundamental de Porto Alegre. Apesar de ser uma atividade extraclasse aberta a todos os alunos de 6ª, 7ª e 8ª série, os estudantes que participaram eram todos alunos da 7ª série, provenientes de famílias de baixa renda. O público médio das oficinas era de cinco estudantes, sendo que em apenas um dos quatro encontros contou com a participação de meninas.

A produção de jogos matemáticos era uma alternativa interessante para as oficinas no sentido de oferecer aos alunos uma motivação a mais: depois de terminada a produção, eles mesmos poderiam verificar a eficiência e a qualidade de sua criação. Além do que, este é um tema que oferece uma ampla gama de possibilidades na educação matemática, com a qual nos deparamos ao longo do nosso caminho enquanto licenciandos.

Para contemplar operações básicas de números inteiros, adaptamos um jogo virtual que já conhecíamos para um jogo concreto, ao qual demos o nome de Jogo do Tsuru. Ele tem por finalidade trabalhar soma e subtração de números inteiros, visto que trata de dois peões (tsurus) que se movimentam numa pista que vai de $-x$ a $+x$ (sendo x um número inteiro positivo maior que 10) ora num sentido, ora noutro, de acordo com o resultado de dois dados.

Ao fabricar esse jogo, os alunos devem montar os dois dados a partir de planificações. Porém, no dado numerado deverá ser observada a seguinte regra: após montado, os números das faces opostas devem somar 7. Como os alunos deveriam escrever os números no dado ainda na planificação, teriam de *visualizar* o dado montado.

No momento de numerar a pista, eles deveriam perceber que a primeira casa é a que deve ser numerada com -*x*, e não com zero, trabalhando o conceito de ordenamento de números inteiros. Nesse momento, algumas perguntas foram feitas a fim de estimular o raciocínio e a capacidade de generalização dos alunos: Independente do número de casas, qual número sempre está na casa “central”? O número total de casas é sempre par ou ímpar? Se a pista vai de -13 a +13, quantas casas possui no total? E se for de -15 a +15? E se for de $-m$ a $+m$?

Devido a esses detalhes, o Jogo do Tsuru pode ser considerado um autêntico material bivalente.

Como não encontrássemos um material bivalente satisfatório que contemplasse a tabuada, inventamos um jogo denominado Triminó da Tabuada, que deu origem, posteriormente, ao Triminó Logarítmico. Este é um jogo parecido com o dominó, porém cada peça tem a forma de um triângulo equilátero, que possui em cada lado uma expressão ou um número. Ao jogar o Triminó, os alunos trabalham a tabuada, as diferentes representações de um número, a propriedade comutativa da multiplicação e o cálculo mental. Por exemplo, uma peça que possui “6x4” em um lado pode ser encaixada em outra que possui “24” ou “8x3” ou “4x6” em um de seus lados.

Como cada peça é na forma de um triângulo equilátero, a confecção do jogo passa pela construção de triângulos equiláteros. Assim, podem ser trabalhadas construções com régua e compasso, a saber: construção da mediatriz de um segmento, construção do ponto médio, transporte de medidas via compasso e intersecções de circunferências, entre outras. Para a “produção em série” de triângulos equiláteros (cada conjunto contava com 24 peças), foi utilizada a seguinte estratégia: o primeiro triângulo seria construído com régua e compasso; o segundo seria construído a partir de um ponto e um lado do primeiro, sendo, portanto, encaixado neste; o terceiro encaixado no segundo, e assim por diante, conforme a figura 7 abaixo. Assim, pode ser visto que vários triângulos equiláteros podem se encaixar de modo a montar um triângulo equilátero maior e, equivalentemente, que um triângulo equilátero pode ser decomposto em vários triângulos equiláteros menores.

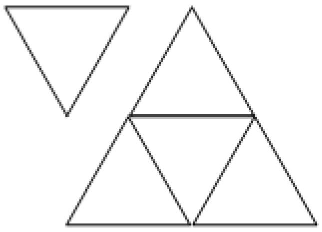


Figura 7 - Encaixe dos triângulos equiláteros para a "produção em série".

Quando posta em prática essa oficina, tivemos que mudar todo o nosso planejamento, pois contávamos que os alunos já haviam estudado noções básicas de triângulos. Porém, os alunos presentes na oficina nunca haviam trabalhado com ângulos e nunca tinham nem ouvido a palavra “equilátero”. Aproveitamos então para fazer uma abordagem inicial sobre triângulos, focando em triângulos equiláteros.

O terceiro encontro abordou o uso e a construção do tangram. Cada tangram é um quebra-cabeça formado com figuras geométricas (cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo) que pode ser encaixado formando um quadrado ou diversas outras figuras. Os alunos lidaram com propriedades básicas das figuras geométricas das peças e com conceitos básicos de construções geométricas (ponto médio, bissetriz, paralelismo, perpendicularismo) durante o desenho do tangram nos papéis-cartão utilizados.

Figura 8 - Tangram.

Nesse encontro poderiam ser feitos os seguintes questionamentos: Existe alguma relação entre as áreas das peças? Sabendo o lado do quadrado montado, é possível descobrir as medidas e a área de cada uma das peças? Como?

Foi realizada ainda uma quarta oficina, mas esta não se caracterizou como oficina superprodutiva, uma vez que teve como finalidade apenas organizar todos os materiais confeccionados e produzir caixas e envelopes para o seu armazenamento, além de se despedir dos alunos. Logo, aqui foi citada apenas para marcar o fim de um trabalho que atingiu seus objetivos. Neste encontro foi escolhido democraticamente o nome de Geração Espontânea para as oficinas, reconhecendo a espontaneidade e voluntarismo dos alunos e professores no intuito de fazerem o melhor trabalho possível.

4.2. O MÉTODO CLÍNICO PIAGETIANO

O método utilizado para conduzir as interações professor/aluno durante as novas práticas a serem realizadas dentro da proposta deste trabalho é baseado no método clínico piagetiano. Este é um procedimento para pesquisa desenvolvido por Jean Piaget ao longo de seus vários estudos psicométricos com crianças através de entrevistas e/ou variações de uma situação-problema. Ao longo das minhas atividades, foi utilizada uma adaptação do método clínico voltada para a prática pedagógica, visto que o objetivo não era apenas entender o raciocínio dos alunos, mas também ensinar determinados conceitos matemáticos. Assim, o professor assume o lugar de pesquisador, enquanto que os sujeitos de sua pesquisa são os alunos. Serão apresentados agora os principais pontos desse método.

Enquanto a metodologia tradicional no estudo da inteligência enfatiza controle pela padronização de situações externas (forma específica de perguntas e instruções, número de vezes que podem ser repetidas, tempo máximo dado ao sujeito para responder etc.), a metodologia piagetiana procura voltar-se para a situação psicológica do sujeito, reconhecendo que a padronização de condições externas não pode satisfazer o requisito de colocar todos os sujeitos na mesma condição psicológica. Exceto quando o que se visa estudar é a própria compreensão que o sujeito tem de certas formas verbais, é optado pelo controle do entendimento das perguntas e instruções, ao invés de interessar-se pela padronização das mesmas. Reconhecendo que tal controle é muito mais complexo e que podem ocorrer falhas, há simultaneamente uma consciência de que as falhas decorrentes da padronização das instruções serão certamente mais graves e mais frequentes.

A teoria piagetiana procura estudar aspectos universais e não características individuais, de modo que não partilha da noção de que cada indivíduo é dotado com diferentes níveis de habilidade. As diferenças dos resultados não são interpretadas como variações próprias de cada indivíduo, mas como indicadores de que estes estão em diferentes estágios de desenvolvimento. Assim, é esperado, pelo menos teoricamente, que tais diferenças venham a desaparecer quando os indivíduos estiverem todos plenamente desenvolvidos, no que toca ao tópico em questão. Essas diferenças são interpretadas como conseqüência das adaptações específicas que cada um realiza ao longo de seu próprio caminho.

No caso em que o meio escolhido para realizar a pesquisa é através de entrevistas, é importante que o pesquisador saiba previamente que tipos de pergunta devem ser utilizados, por serem adequadas à compreensão do aluno e não sugerirem uma dada resposta. O professor deve procurar acompanhar o raciocínio do aluno, estando atento ao que ele diz ou faz sem corrigir automaticamente as respostas dadas de acordo com o seu próprio raciocínio. Para isto, é importante que o pesquisador se discipline para que não concluir pelo aluno. Quanto este interrompe o seu raciocínio, é preciso que o professor leve o aluno a retomar o problema, para que ele mesmo apresente suas conclusões.

O interesse principal do estudo da inteligência baseado na teoria de Piaget reside no processo pelo qual o sujeito chega à sua resposta. Logo, o tratamento de erros e acertos casuais é totalmente diferente do tratamento que esses recebem na abordagem psicométrica tradicional. Como a resposta é tomada não em si, mas como um ponto de partida para a compreensão do processo do qual ela resultou, a casualidade do acerto ou erro deverá ser compreendida pelo exame desse processo. Assim sendo, é essencial a obtenção de justificativas para as respostas dadas.

É também importante verificar a segurança que o aluno apresenta ao dar uma resposta. Uma resposta respaldada por um sistema dedutivo pode ser dada seguramente, enquanto que uma resposta dada na ausência de tal sistema é frequentemente mudada diante de circunstâncias criadas pelo pesquisador (sugestão de uma resposta diferente, indicação de contradições aparentes, etc.).

Outro ponto é a importância de não deixarmos que ambigüidades permaneçam como tal. Frequentemente, o aluno responde de modo a poder ser interpretado de várias maneiras, de acordo com o significado que dermos às suas palavras. Não cabe ao examinador escolher qual dos possíveis significados foi o pretendido pelo sujeito.

Uma vez obtidas as respostas, estas devem ser analisadas com a intenção de encontrar uma explicação que englobe todas as respostas dadas pelo aluno, certas e erradas. Tal explicação é possível apenas se formos capazes de encontrar a perspectiva a partir da qual o aluno responde, na qual as respostas dadas se encaixem com naturalidade. "Devemos, ao final da avaliação, ser capazes de dizer algo como 'para que este sujeito respondesse dessa forma, ele só poderia pensar assim'" (CARRAHER, 1983, p.36). A análise dos resultados também será facilitada se for buscada a relação entre os elementos principais necessários à resolução do problema e o raciocínio do aluno.

Porém, é importante ressaltar que o aluno pode não ter consciência do seu raciocínio. Embora as explicações que o aluno nos dá para suas respostas sejam elementos importantes para descobrir a organização do seu pensamento, ele nem sempre é capaz de descrever essa organização, existindo, portanto, diferença entre a justificativa que o sujeito dá para suas respostas e a explicação.

4.3. PRIMEIRA OFICINA: PIRÂMIDES REGULARES DE CANUDINHO

Serão agora apresentados os planejamentos, descrições e análises das práticas realizadas este ano, no Colégio de Aplicação da UFRGS. Seguindo o método clínico piagetiano, durante as oficinas utilizou-se um gravador para registrar os diálogos e várias fotografias foram tiradas. A transcrição da oficina ocorreu no mesmo dia em que cada uma foi realizada, de maneira que o resultado final fosse o mais fiel possível aos acontecimentos.

A ideia inicial da proposta era fazer uma única oficina baseada em construções de poliedros de canudinhos. O planejamento original da oficina contava com três atividades, totalizando três horas de duração. As três atividades eram: construção de tetraedros com determinado volume, construção de pirâmides de base com mais de três lados e construção de um prisma triangular e sua decomposição em três pirâmides de mesmo volume.

Primeiramente, estava prevista a aplicação das oficinas na escola estadual onde eu atualmente estava estagiando, com alunos do 1º e 2º anos do Ensino Médio. A atividade seria extraclasse, não valeria nota e seria no turno inverso. Porém, a despeito dos convites feitos aos alunos, ninguém compareceu. Combinei, então, de aplicar as oficinas no Colégio de Aplicação da UFRGS, com alunos do 2º ano que seriam liberados de sua aula normal de matemática.

A primeira dificuldade imposta foi a grande diminuição do tempo disponível para a oficina. Inicialmente proposta para ocupar todo o turno inverso dos alunos, a programação da oficina era de 3 horas de duração. Agora, ela deveria ser feita durante os dois períodos de 45 minutos seguidos que a turma tinha de matemática por semana, ou seja, o tempo disponível seria metade do tempo previsto para a atividade. Isso de imediato implicou numa redução de atividades. Optei por desistir da primeira atividade, que tinha como maior objetivo promover a intimidade dos alunos para com este tipo de atividade construtiva, e focar na segunda, construção de pirâmides de base qualquer.

4.3.1. Planejamento original

- **Objetivos:** construir pirâmides de diversas bases diferentes onde estão evidenciados os triângulos retângulos utilizados no cálculo da altura da pirâmide.
- **Conhecimentos envolvidos:** geometria espacial, geometria plana, trigonometria, medição de segmentos.
- **Tempo previsto:** 2 períodos de 50min
- **Material necessário:** canudinhos, tesouras, réguas, fio de nylon, uma calculadora. Os alunos devem trazer material para fazer anotações.
- **Desenvolvimento:**

- Exemplificação de poliedros no quadro, começando por prismas e pirâmides. Definição de poliedro, de prisma e de pirâmide:

➢ Denominа-se <u>poliedro</u> o sólido delimitado por um número finito de polígonos planos, de modo que dois desses polígonos não estão em um mesmo plano e cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos.

➢ Denomina-se <u>prisma</u> o sólido formado pela reunião de segmentos que tem uma extremidade no polígono P, que está contido no plano α, e a outra no polígono P', congruente a P e contido num plano β paralelo a α.

➢ Denomina-se <u>pirâmide</u> o sólido formado pela reunião de todos os segmentos que tem uma extremidade no polígono P, que está contido no plano α, e outra extremidade no ponto V, fora de α. Se P for um polígono regular e o segmento que liga o centro de P a V for ortogonal a α, então a pirâmide é dita <u>regular</u>.

- Definição, por parte dos alunos, de qual polígono regular será a base da pirâmide que eles construirão e quanto medirá o seu lado, fazendo esboços no papel denotando as medidas definidas. Antes de dar prosseguimento ao planejamento, devem montar a base, utilizando canudinhos de uma única cor para todos os segmentos. Montada a base, chamar a atenção para o fato de que os ângulos não estão fixos, ou seja, existe uma "folga" com a qual a base consegue se deformar. Essa é uma boa oportunidade para discutir a rigidez do triângulo, que é o único caso em que, determinando o tamanho dos lados, determinamos um único polígono, visto que os ângulos também ficam unicamente determinados. Pode-se mostrar aos alunos a aplicação desse fato, que é visível em diversas construções e estruturas, como nas imagens abaixo. Conclui-se que, para que a base da pirâmide seja um polígono regular rígido, este deve ser decomposto em triângulos.

- Esboço da triangularização da base e cálculo da medida dos seus segmentos. É possível decompor um polígono em triângulos de várias formas diferentes; optaremos pela decomposição em triângulos cujos vértices serão dois vértices consecutivos do polígono e o centro do polígono regular (portanto, os triângulos serão isósceles). Calcular a medida dos lados congruentes de cada triângulo isósceles interno através da relação $x = \frac{L/2}{sen(360°/2n)}$, onde L é a medida do lado do polígono da base, n é o número de lados da base e x é a medida dos lados congruentes. Veja a figura 10.

Figura 9 - Exemplos de aplicação da rigidez do triângulo em estruturas de construções civis

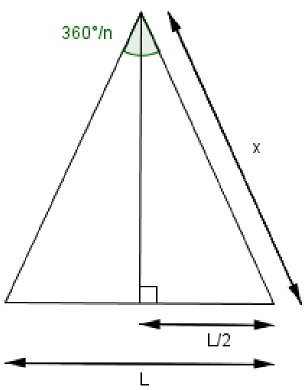


Figura 10 - Um dos triângulos internos do polígono regular de n lados, na decomposição sugerida.

- Construção dos triângulos internos da base com canudinhos de mesma cor das arestas da base, exceto por um dos segmentos, o qual deve ser feito de um canudinho de outra cor. Este fará parte do triângulo destacado.

- Definição da medida da altura da pirâmide e cálculo da medida da aresta lateral, observando essa condição: o volume da pirâmide deve ser 0,5, 1 ou 1,5 dm^3. Com isso, o primeiro passo que os alunos deverão fazer é calcular a área da sua base, através dos triângulos internos, e então encontrar um valor apropriado para a altura da pirâmide.

- Por fim, montagem das arestas laterais. Todas devem ser da mesma cor da base exceto a que pertence ao triângulo evidenciado, que deverá ser da mesma cor utilizada no lado do triângulo interno diferenciado, assim como a altura da pirâmide. Salientar que nem todos os canudinhos são arestas da pirâmide, como, por exemplo, os que são internos à base e o da altura da pirâmide.

4.3.2. Implementação e análise

A oficina contou com cinco alunos, que aqui serão denominados J, R, A, K e M, todos do 2º ano. O local do encontro foi o Laboratório de Física do colégio. Os alunos já estavam estudando geometria espacial em suas aulas regulares de Matemática, logo a oficina já se encontrava dentro do contexto dos estudos dos alunos. Comecei me apresentando, falando que esta seria uma oficina de construção de poliedros de canudinhos – mostrei alguns já construídos por mim – e que era parte do meu trabalho de conclusão de curso. Após as apresentações, perguntei a eles o que era um poliedro. Talvez por não se sentirem muito à vontade comigo, ou por serem tímidos, apenas M, que era mais voluntariosa, respondeu o seguinte, sendo ajudada em alguns pontos pelos colegas:

- Pode ter uma base quadrada, triangular, hexagonal ou circular;
- “Poli” quer dizer muitos (lados, bases, arestas);
- Tem mais de uma dimensão.

Pedi então alguns exemplos de poliedros, e foi-me dito: cubo, cilindro e pirâmide, que foram desenhados no quadro por mim. Apesar desta parte não constar no planejamento, pareceu-me razoável começar assim, com as idéias que eles tinham a respeito dos objetos com os quais iríamos trabalhar, visto que eles já estavam estudando o assunto. E mesmo que não estivessem, as idéias intuitivas dos alunos sobre o que será estudado é sempre uma informação importante para entendermos a forma como o aluno pensa, e analisar, posteriormente, as respostas obtidas ao longo das atividades e avaliações.

Então escrevi no quadro a definição de poliedro, conforme consta no planejamento:

Um poliedro é um sólido formado por um número finito de polígonos planos, onde não há dois polígonos no mesmo plano e cada lado de cada polígono pertence a exatamente dois polígonos.

Foi discutido então se os exemplos de poliedros dados anteriormente eram de fato poliedros, segundo a definição dada. Nenhum deles pareceu encontrar contradição alguma, então apontei para o cilindro, mas ainda assim todos se mantiveram em silêncio. Falei então que o cilindro não é um poliedro, pois sua base é um círculo, que não é um polígono. Todos aceitaram o fato sem contestação. A seguir, desenhei um exemplo de um sólido no quadro, como na Figura 11 abaixo, e perguntei se era um poliedro.

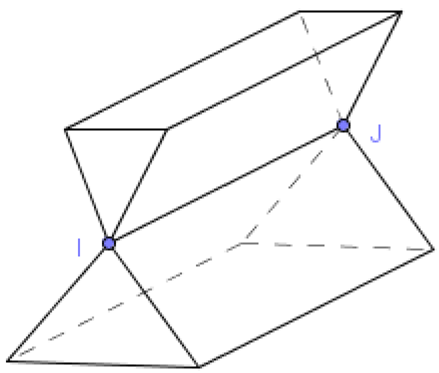


Figura 11 – Exemplo de um sólido que não é um poliedro segundo a definição acima, pois o segmento IJ pertence a 4 polígonos.

Após um momento de silêncio, J, olhando para a definição de poliedro no quadro, responde: “*Tem mais de um polígono em cada plano*”. Quando eu perguntei qual plano, ele desistiu de sua resposta e baixou seu olhar. A fácil desistência pode ter se dado por timidez ou falta de segurança na sua resposta, mas a sua maior atenção com a definição do que com o poliedro somada à sua postura aparentemente desinteressada me faz acreditar que ele apenas procurou uma propriedade que negaria a definição proposta e citou-a. Eu insisti na pergunta, mas ninguém respondeu. Então eu falei que, se o problema não era com o fato de haver dois polígonos no mesmo plano, então deveria ser com a outra propriedade que caracteriza os poliedros segundo essa definição, ou seja, havia um lado de algum polígono que pertencia a um ou mais de dois polígonos. Então K respondeu que de fato isso ocorria, pois a aresta em comum aos dois prismas triangulares pertencia a mais de duas faces.

A seguir, tratamos da definição de prisma e pirâmide. Devido ao tempo, não escrevi formalmente a definição, apenas fiz o desenho de dois planos paralelos, cada um contendo um dos polígonos congruentes P e P’, e falei que um prisma de base P era a reunião de todos os segmentos que começavam em um dos polígonos e terminavam no outro. Da mesma forma, desenhei um plano contendo um polígono P e um ponto V fora do plano, e falei que uma pirâmide de base P é a reunião de todos os segmentos que começavam em V, que é o vértice, e terminavam em algum ponto de P. Perguntei então o que seria uma pirâmide regular, e M me respondeu que teria que ser “reta”. Perguntei o que significa uma pirâmide ser reta, mas ela não falou mais nada. Desenhei então um segmento ligando o ponto que seria o centro do polígono P a V, e perguntei qual a propriedade que aquele segmento deveria ter para que a pirâmide fosse reta, mas não obtive resposta alguma. Demarquei então o ângulo reto entre o segmento em questão e o plano, e escrevi que uma pirâmide regular é aquela que possui como base um polígono regular e cujo segmento que une o centro da base ao vértice é ortogonal ao plano que contém a base.

Passei, então, à primeira atividade planejada, que é a construção de uma pirâmide regular de base qualquer, evidenciando o triângulo utilizado para o cálculo da altura. Propus a atividade: “*A gente vai agora começar de fato a construção de pirâmides, mas com estas condições: as pirâmides tem que serem regulares e o volume delas tem que ser 0,5, 1 ou 1,5dm³*” e escrevi no quadro a fórmula do volume da pirâmide, $V_{PIR} = \frac{A_b \cdot h}{3}$, para uso futuro. Os alunos perguntaram se todos iriam construir apenas uma pirâmide, e eu respondi que cada um construiria uma, o que foi recebido com animação. O primeiro passo era escolher a base da pirâmide e definir o tamanho do lado da base. Como eu ouvi J, R e M já anunciando que fariam uma base quadrada, eu falei que era proibido que todos escolhessem o mesmo polígono para a base. K já havia decidido fazer uma pirâmide de base triangular e A uma de base hexagonal. M disse que não sobrou nenhum polígono regular para ela, todos já estavam escolhidos. Eu então fui ao quadro e desenhei um pentágono e um octógono regulares, e falei que era possível construir polígonos regulares com um número qualquer de lados, desde que o os lados fossem congruentes e os ângulos internos iguais. Ela decidiu então construir uma pirâmide de base pentagonal, embora não parecesse muito satisfeita.

Durante a montagem das bases, J destacou-se pela rapidez com que fazia as atividades práticas. Quando amarrou os canudinhos e a figura formada não parecia um quadrado, e sim um losango, cortou o fio de nylon e fez de novo a amarração, pois R riu dele e ele disse que havia "feito errado". Na segunda vez, forçando um pouco a base montada, conseguiu que o quadrilátero formado ficasse momentaneamente mais parecido com um quadrado, embora não por muito tempo. M montou sua base pentagonal, que também não ficou com os ângulos internos congruentes; segundo ela, parecia mais uma "casinha". Ela perguntou como poderia calcular a área da sua base, aparentemente tendo em vista a fórmula do volume, e eu retornei a pergunta para ela. Ela então conjecturou que poderia dividir a base em um quadrado e um triângulo que se complementariam para resultar na área total da figura (naquele momento, a disposição dos ângulos do pentágono contribuía de certa forma para o surgimento dessa hipótese). Perguntei então se a base fosse de fato essa "casinha", se ela seria regular. Ela não soube responder, e K, ao seu lado, falou: "*Não, porque o formato não pode ser assim, tem que ser que nem lá*", e apontou para o pentágono regular desenhado no quadro. Eu disse então que era isso mesmo, se fosse como a M havia falado, os ângulos não seriam iguais e o pentágono não seria regular. M acenou a cabeça concordando, com uma cara desanimada.

Momentos depois, ela me chamou perguntando se a área seria igual a $8\sqrt{5}$. Perguntei por que, e a aluna me mostrou no seu caderno uma fórmula para calcular a área do triângulo eqüilátero, $A_{tri\ equi} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Disse então: "*Essa é a fórmula para o* *triângulo, então achei que pro pentágono seria assim,* $8\sqrt{5}$". Ou seja, ela conjecturou que como a fórmula para a área do triângulo regular era $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, havia uma fórmula análoga para o pentágono regular: como o pentágono possui cinco lados e não três, usou $\sqrt{5}$ no lugar de $\sqrt{3}$, e como o lado do seu pentágono media 8, seria então $8\sqrt{5}$. Acrescentou: "Mas eu não sei o que eu coloco embaixo", referindo-se ao possível denominador da expressão. Falei para que ela testasse o mesmo raciocínio para o quadrado, cuja área ela sabia que era dada por l^2. Ela, que mesmo quando sugeriu a fórmula acima não parecia muito confiante de sua resposta, falou: "*Ah então não deve ser, porque vai aparecer um* $\sqrt{2}$*...*" e, portanto, concluiu que sua "fórmula" era falsa. Eu falei então para que ela esperasse pela próxima etapa antes de procurar calcular a área do seu pentágono.

O triângulo, conforme esperado, não apresentou problemas nessa fase da construção, e o hexágono de A ficou visualmente aparentando ser regular. Foram, portanto, as bases quadradas de J e R e a base pentagonal de M que motivaram a discussão sobre a rigidez do triângulo. Usando a base quadrada montada por R como exemplo para mostrar que existiam infinitos losangos diferentes com os lados todos de mesmo comprimento. Mostrei as imagens de uma estrutura de um domo triangularizada e de uma ponte (figura 9, no planejamento dessa oficina), para ilustrar a utilização dessa propriedade em construções civis. A então falou: "*Ahhh então o que a gente tem que fazer é dividir em triângulos a base!*" Eu perguntei como se fazia isso e ela gesticulou com as mãos formando segmentos que iam dos vértices até o centro do seu hexágono. "*Só dessa forma?*" Fui então para o quadro e dei dois exemplos de como poderíamos dividir uma base pentagonal em triângulos, e estipulei que a segunda maneira era a que deveria ser seguida.

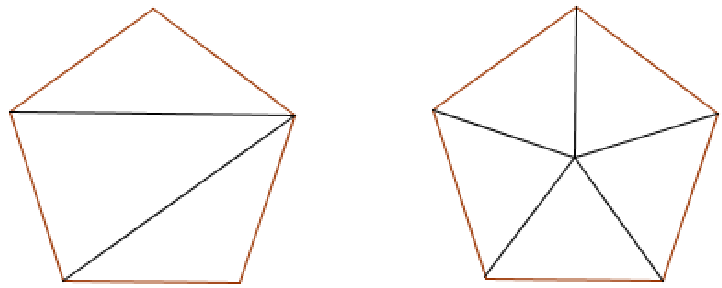


Figura 12 - Duas maneiras de triangularizar um pentágono regular.

Logo após isso ser falado, J colocou um canudinho sobre a diagonal da sua base quadrangular para ver quanto este deveria medir para encaixar satisfatoriamente. Chamei a atenção dos alunos para o problema de como calcular o comprimento dos segmentos que unem o vértice do polígono ao seu centro. Desenhei um octógono regular no quadro, e o triangularizei conforme combinado, denotando por x o segmento cujo tamanho queríamos encontrar. "*Se esta fosse a base que vocês tivessem escolhido, que informações a gente teria sobre ela?*" Os alunos ficaram em silêncio. Reformulei então a pergunta: "*O que vocês definiram na base que vocês escolheram?*" Eles responderam o lado, e então denotei por l o lado do octógono. "*E o que mais?*", perguntei. K falou: "*Os ângulos de baixo são iguais*", se referindo aos ângulos da base do triângulo isósceles formado por um dos lados da base e os segmentos que iam do extremo desse lado até o centro. "*Por quê?*". K: "*Porque o triângulo é isósceles.*" Eu: "*Por quê?*" "*Porque os lados são iguais, medem a mesma coisa*". Desenhei então os ângulos e marquei-os com um traço para indicar que eram iguais. "*A gente consegue descobrir o valor deles?*", perguntei. J: "*A soma deles tem que dar 180°!*" "*Então eles valem quanto?*" K: "*Tem que descobrir quanto vale o de cima.*" "*E como a gente descobre?*" Eles ficaram em silêncio. "*Vocês escolheram o que mais, além do lado?*" Silêncio. "*Quais as duas coisas que vocês definiram no polígono de vocês?*". "*Ah tá, o lado e qual figura*", respondeu A. "*Isso, o número de lados! Então, quando vocês decidiram isso, esse ângulo ficou determinado*", e apontei para o ângulo central do triângulo isósceles citado acima. K então falou: "*Ah, tem que fazer a bola no centro, né?*" Eu dei o giz a ela e a aluna desenhou no quadro um círculo em torno do centro do octógono, escreveu que o ângulo em questão valia $\frac{360°}{6}$, e completou oralmente: "*Então vale sessenta.*" Eu olhei para os outros e perguntei: "*Está certo?*" M e A concordaram, R ficou quieto e J não estava prestando atenção, ocupado com os canudos para fazer as diagonais do seu quadrado medidas "no olho". K: "*Eu acho que sim.*" A: "*Tá certo, porque divide em partes iguais.*" "*E o resultado é 60°?*" "*Sim.*" "*Mas por que aqui tu dividiu por seis?*" K: "*Porque tem seis triângulos.*" Essa resposta de K comprova a correção do seu raciocínio, embora a resposta estivesse errada. Quando K recontou-os, descobrindo que eram na verdade oito triângulos, ela mudou o denominador da expressão para oito. "*Ah, então aqui é oito, e o resultado fica... não sei.*" "*É isso mesmo, o resultado fica* $\frac{360°}{8}$*. Se o polígono de vocês tivesse 6 lados, vocês dividiriam aqui por 6, se tivesse 4 lados, dividiriam por 4. Depende do polígono que vocês tem,* *essa conta. Agora, para achar o valor de x, a gente divide esse triângulo ao meio, formando dois triângulos retângulos*", e desenhei no quadro um dos triângulos retângulos obtidos. "*A gente tem então o ângulo lá de cima dividido por dois, fica* $\left(\frac{360°}{8}\right) \cdot \frac{1}{2}$, *e a base fica quanto?*". M: "*Dá pra simplificar o 2 com o 360°!*" "*Dá, podemos simplificar, fica* $\frac{180°}{8}$. *Mas isso é porque aqui temos 8 lados, no polígono de vocês vai ser diferente. Se for um quadrado, vai ficar* $\frac{180°}{4}$, *e assim por diante. E quanto fica a base desse triângulo?*" "*Lado sobre dois*", respondeu K. "*E queremos descobrir a hipotenusa, que é o que chamamos de x. Como a gente faz?*". J: "*O quadrado da hipotenusa é o quadrado dos catetos? É isso? Faz anos que a gente não usa isso, é... Teorema de Pitágoras. É isso?*" "*Veja bem, para usarmos Pitágoras, teríamos que ter o valor dos dois catetos, no caso, o valor dessa altura aqui*", e indiquei no quadro. R, que parecia cultivar uma rixa amistosa com J, falou como se fosse a coisa mais óbvia do mundo: "*É, tem que ter o valor de dois dos três*", e J voltou à sua atividade com os canudos, dando os ombros e dizendo: "*Então não sei.*" Ninguém parecia estar disposto a arriscar mais nada, então falei: "*Eu tenho um ângulo e preciso de uma relação entre o ângulo oposto a ele e a hipotenusa do triângulo retângulo. Qual eu posso usar?*" Silêncio. "*É o seno, pessoal, seno de alfa é cateto oposto sobre hipotenusa. Então temos* $sen\frac{360°}{16} = \frac{l/2}{x}$, *colocando aqui quanto vale a metade do lado de vocês, vocês encontram valor de* x⍰."

J me chamou e disse: "*Olha, o meu já tá pronto*", e me mostrou sua base, que tinha um segmento inteiro formando uma diagonal do quadrado e a outra dividida em dois segmentos. Falei então que ele deveria ter dividido cada diagonal em dois segmentos, conforme combinado, para posteriormente montarmos o segmento que seria a altura da pirâmide. Ele ainda fica tentando cortar o canudinho em duas partes sem cortar o fio, para não precisar desfazer nada.

A me chamou, e perguntou: "*Tá, cheguei aqui. Que eu faço agora?*", e me mostrou a equação $sen\frac{180°}{6} = \frac{7,5}{x}$, onde 6 é o número de lados do seu polígono e 7,5 a metade da medida do lado. Respondi: "*Ah é verdade, eu não dei o valor dos senos para vocês. Mas fora isso, tu pode efetuar a divisão pra ver quanto o ângulo é*", e listei no quadro o valor dos senos de 45°, 30° e 36°. A perguntou: "*Mas como assim?*" "*O seno de um ângulo é uma constante, é um número determinado que tu pode ver numa tabela,* *ou na calculadora*". K: "*É verdade, em física a gente já teve que ver isso, lembra?*". A franze a sobrancelha, mas continua os cálculos. Em seguida, fala: "*Mas agora não sei como eu saio daqui*", e me mostrou a equação $sen 0{,}5 = \frac{7{,}5}{x}$. "*Não, 0,5 é o valor do seno, de tudo isso. Depois que tu substitui no lugar de* $sen\frac{180°}{6}$, *não tem mais esse seno aqui, fica só 0,5.*" Acredito que muitos alunos se confundam com o significado da expressão $sen\theta$. Uma atividade prática como essa, que trabalha medição de segmentos, ajuda a esclarecer a noção de que o seno de um ângulo é uma constante, ou seja, expressa um determinado número real.

M me pergunta exatamente a mesma coisa, citando que veio de outro colégio e por isso nunca viu seno antes, nem fazia ideia do que era. No caderno dela constava apenas a equação $sen\frac{360°}{16} = \frac{6}{x}$. Ajudei-a a resolver a conta, mas o fato de ela não ter feito nem pentágono nem triângulo nenhum no caderno e ter mantido o 16 no denominador do primeiro membro da igualdade mostra que ela apenas pegou a equação do quadro e substituído (corretamente) os valores que ela tinha. Neste e em outros momentos da oficina, o comportamento dos alunos indica que o seu método padrão para a resolução de exercícios é simplesmente procurar a fórmula que dá a informação necessitada e então substituir os valores dados.

Momentos depois, A me chama: "*Ai* sor, *não acredito. Deu 15!*", se referindo ao tamanho do segmento procurado, que havia resultado no mesmo comprimento do lado do seu hexágono. "*Era só eu ter pegado o mesmo valor do lado e pronto, não precisava desse monte de contas!*" "*É, mas agora tu sabes como encontrar esse valor pra qualquer polígono*". Ela continuou com cara de braba. Revendo esse momento, percebi que perdi uma boa oportunidade ao não questioná-la do porquê disso ter acontecido; suas contas demonstram que um hexágono regular se decompõe em seis triângulos eqüiláteros, o que origina uma fórmula razoavelmente simples para encontrarmos a área do hexágono regular.

K, durante esse tempo, estava só ajudando M, pois tinha escolhido o triângulo como base de sua pirâmide. Perguntou pra mim: "*E eu* sor, *o que eu faço?*". Vou até o quadro e esboço um triângulo equilátero inscrito numa circunferência, e após uma hesitação, apago a circunferência e digo: "*Tu concorda que, por causa da simetria, o centro do triângulo eqüilátero está sobre a altura do triângulo, certo? Mas a que* *distância? O centro fica $\frac{1}{3}$ da altura distante do lado e $\frac{2}{3}$ da altura distante do vértice. Então quero que tu faça esse segmento, que vai do centro até o vértice, que vai ter $\frac{2}{3}$ da altura de comprimento.*" "*Mas como eu encontro a altura do triângulo?*" Eu desenho então um triângulo equilátero, o divido ao meio traçando sua altura e indico o triângulo formado pela altura, lado e metade do lado. K então vai calcular.

Neste momento, J e M já concluíram a triangularização das suas bases. M me chama e diz: "*Ficou torto*", se referindo ao fato de que sua base não estava "plana". "*Tu sabe por que isso aconteceu? É que a gente calculou o comprimento que esses segmentos internos deveriam ter, mas quando a gente faz as contas, não leva em consideração a espessura do canudo. Se os canudos fossem mesmo segmentos, sem espessura nenhuma, ia ter ficado plano, mas por causa da espessura eles ficam assim, 'amontoados'.*" "*Que eu faço então?*" "*A gente vai ter que diminuir um pouco o comprimento deles, pra compensar.*" Mesmo J, que havia feito os segmentos internos através do seu método puramente empírico, tem sua base um tanto "não-plana".

O tempo da oficina chega ao final. Eu pergunto: "*Vocês gostaram da atividade?*" A: "*Sim* sor, *muito tri*". "*Gostariam de continuar com ela na quarta-feira?*". J: "*Sim, tá louco, deixar pra outros acabarem aqui o meu polígono*". R: "*Isso é bem melhor que aula.*" "*Tudo bem, vou falar com o professor de vocês pra ver se quarta a gente pode continuar aqui a atividade.*" Posteriormente, o professor confirmou a possibilidade de continuar a oficina na quarta-feira.

Este novo encontro se deu no Laboratório de Química. Após devolver a cada um seu poliedro inacabado, discuto com eles o problema que ocorreu com J e M, dos segmentos calculados serem grandes demais para que a base ficasse plana devido à espessura dos canudinhos. Sugeri a todos que cortassem mais ou menos meio centímetro dos canudinhos que seriam os segmentos internos e que antes de passar o fio e amarrar, testassem o posicionamento de todos os canudinhos juntos, para verificar se não haveria sobreposição.

Apesar de nenhum deles ter reclamado porque teve que efetuar o cálculo para definir o comprimento do segmento e isso no fim foi inútil para a construção do mesmo, este cálculo seria justificado posteriormente por ser utilizado no cálculo da área da base das pirâmides, através da área de cada um dos triângulos internos (pelo menos no caso do hexágono e do pentágono).

Chamei a atenção também para o fato de que um dos segmentos internos deveria ser de cor diferente, para salientar o triângulo retângulo formado por este segmento, a altura e a aresta lateral da pirâmide. Abandonei a ideia de fazer com que a pirâmide ficasse com um volume específico por causa do tempo, que estava curto. J e M, que haviam concluído sua base no encontro anterior, desamarraram-na para seguir essas especificações, e todos ficaram por um bom tempo ajustando o comprimento dos segmentos internos à base para que esta ficasse plana.

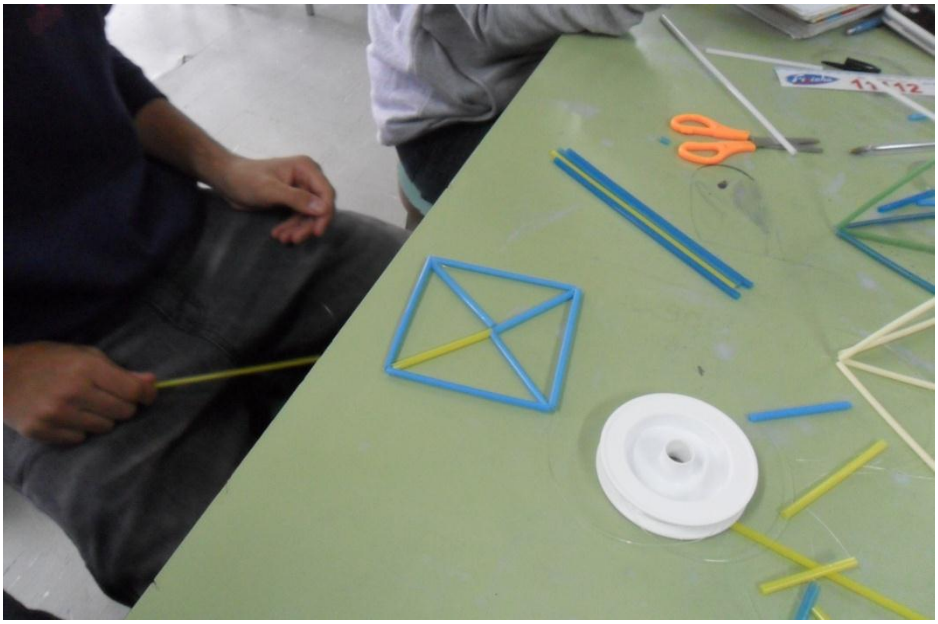


Figura 13 – R conclui sua base quadrada, com um segmento em destaque.

Após ajustar sua base, K me chama: "*Tá, e agora eu faço a altura?*" "*Isso.*" "*E... qual é a fórmula?*" "*Não tem fórmula.*" "*É só medir?*" "*Tu tem que definir quanto vale essa altura.*" "*E depois faço esses segmentos aqui* [indicou com a mão as arestas laterais]*? Mas daí eu não posso escolher a medida, né?*" "*Por que não?*" "*Porque se a altura for deste tamanho* [sinalizou um segmento na sua mão, no lugar da altura], *esse aqui não pode ser deste tamanho* [indicando com as mãos um segmento exageradamente grande, que não encaixaria no vértice da pirâmide caso a altura fosse a indicada anteriormente]." K mostra com esse comentário que entende que, embora a altura seja uma variável independente, uma vez que ela esteja definida, a aresta lateral também fica definida, ou seja, esta é uma variável dependente. Acredito que a autonomia que os alunos possuem em atividades deste gênero propicia um melhor entendimento das relações de dependência de variáveis.

J, enquanto fazia o cálculo para encontrar o comprimento da aresta lateral: “Sor, *qual a raiz de 338?*” “*Não sei, vê na calculadora.*” Alguns instantes depois ele responde: “*Não tem.*” “*Como assim, não tem?*” “*Não dá um número exato.*” Mais uma vez, a medição de segmentos exigida pela atividade faz com que os alunos reflitam sobre suas idéias em relação aos números reais que são usualmente denotados por expressões, como $\sqrt{338}$ e $sen36°$. Os alunos precisam medir esses comprimentos na régua, então precisam trabalhar com suas representações decimais e verificar sua posição aproximada na reta real.

A, que estava atrasada, só agora havia conseguido amarrar a base. Ela fala: “*Agora eu posso escolher o tamanho da altura? Vou usar o canudinho todo.*” Ciente do problema que isso iria causar, falo para ela que a aresta lateral teria de ser maior que a altura, então se a altura da pirâmide for um canudinho inteiro, ela não teria um comprimento grande o suficiente para montar a aresta lateral, a menos que emendasse dois canudinhos. Revendo a situação, vejo que teria sido mais didático tê-la deixado tentar montar a altura como queria e chegar sozinha à conclusão acima, visto que isso não geraria nenhum trabalho a mais para ela.

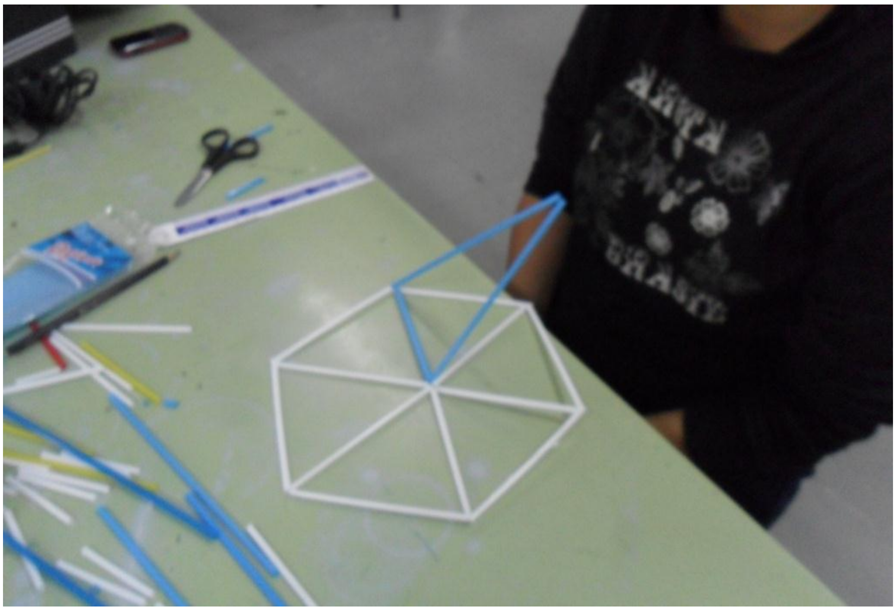


Figura 14 - Base hexagonal de A, com o triângulo formado por segmento interno da base, altura e aresta lateral destacado.

O período já ia chegando ao fim, e apenas J e M estavam concluindo suas pirâmides. Então quando vi que A e R estavam definindo suas alturas e se preparando para calcular o comprimento das arestas laterais, e como os outros, que já haviam calculado este comprimento, estavam tendo que diminuí-lo para que a montagem ficasse mais acertada (mais uma vez, devido à espessura dos canudinhos, a construção ficava abaulada se os comprimentos ideais fossem utilizados), disse a eles para desistirem dos cálculos e verificar na prática quanto deveria ser o comprimento procurado.

J termina sua pirâmide, e me mostra. Como eu havia desistido de pedir que a pirâmide tivesse um volume determinado, pedi para ele calcular o volume de sua pirâmide, seja ele qual fosse. Ele mediu novamente sua base e sua altura, e calculou o volume.

Para encerrar a atividade, falei: "*Por que eu pedi para vocês construírem esse triângulo de cor diferente?*" K: "*Para ficar fácil de calcular alguma coisa.*" "*É, mais ou menos isso. São comuns questões que pedem quanto vale o volume de determinada pirâmide, dadas a base e a aresta lateral. Com os valores da base e da aresta lateral, vocês podem, através desse triângulo destacado, calcular o valor da altura, que vocês precisam para calcular o volume da pirâmide.*"

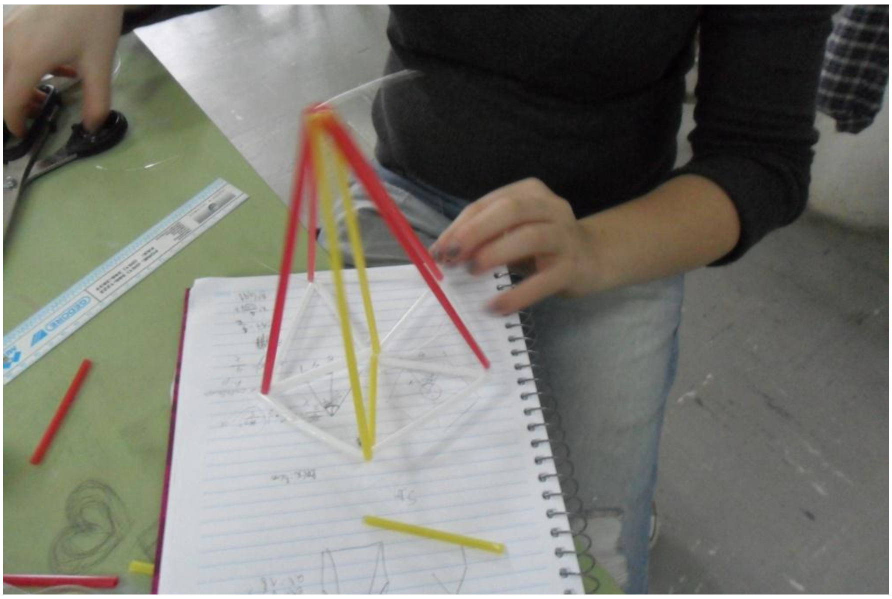


Figura 15 - M terminando de amarrar sua pirâmide de base pentagonal.

No fim da atividade, apenas J e M haviam acabado suas pirâmides. A: "*Não deu pra acabar,* sor, *e agora?*" *"Deixa aqui que eu vou acabá-las."* "*Tu vai acabar? E depois dar ela pra mim?*", perguntou animada. "*Vocês querem ficar com elas?*" "*Sim!*", responderam as meninas. "*A minha eu não quero*", falou J. "*Então tá, a tua fica de presente para o Colégio e as outras eu termino e depois entrego para vocês.*"

Os alunos saíram para o intervalo. Finalizei o poliedro de cada um deles e posteriormente entreguei-os a seus respectivos donos.

A primeira observação a se fazer acerca desta primeira oficina foi que o tempo planejado foi muito curto. Mesmo com a redução de atividades programadas – foi excluída a exigência de um volume específico nas pirâmides, por exemplo – nem todos os cálculos planejados foram de fato efetuados, e apenas dois alunos conseguiram concluir seus poliedros. As discussões a respeito dos resultados obtidos nos cálculos e na própria representação das pirâmides poderiam ter se prolongado mais e de forma mais lenta. Logo, para uma futura aplicação da oficina, um maior tempo deve ser planejado.

Outro fato que ficou claro ao longo dos encontros, tanto para mim quanto para os alunos, foi que a construção dos poliedros não exigia necessariamente um planejamento matemático. E mais: em algumas situações, seguir os cálculos do planejamento era mesmo prejudicial à montagem das pirâmides. No caso do comprimento dos segmentos internos da base, quando os alunos apoiaram-se nos cálculos e construíram os segmentos com as medidas calculadas, as bases não ficaram planas, pois a espessura dos canudinhos não havia sido levada em conta. O cálculo era feito numa situação ideal, pois segmentos não possuem espessura alguma, e, portanto, não era adequado àquela situação prática. O resultado era que, após seguir um raciocínio elaborado para encontrar o tamanho exato do segmento requerido, os alunos precisavam, empiricamente, verificar quanto deveria ser reduzido no comprimento calculado para proceder eficientemente a montagem.

Porém, não considero que a situação acima desvaloriza esta atividade prática. A questão não é que a construção dos poliedros de canudinhos deveria forçosamente obrigar os alunos a efetuarem cálculos e estudar geometrias plana e espacial e trigonometria; na verdade, não chega a ser uma surpresa a verificação de que é possível tal construção sem um planejamento prévio envolvendo esses conteúdos. O fato é que as situações vivenciadas na construção de poliedros de canudinho geram oportunidades ricas para o estudo desses tópicos, ainda que esses tópicos não precisem ser efetivamente aproveitados na construção. E, conforme visto, foi planejado que os alunos deveriam calcular a área da base das pirâmides que construiriam, o que, no caso de uma base com mais de quatro lados, constitui-se em calcular a área dos triângulos internos em que esta foi dividida. Logo, embora os cálculos efetuados fossem inapropriados para a construção dos segmentos internos da base, teriam serventia mais tarde, ainda que para fins não relacionados diretamente à construção realizada na atividade.

Esse episódio, porém, aponta para a necessidade de uma reorganização do planejamento. Se a motivação dos cálculos não é a construção dos poliedros em si, faz sentido separar uma atividade da outra. Tendo isso em mente, reformulei o planejamento da oficina separando-a em dois momentos: a construção do poliedro e o seu planejamento, através do preenchimento de um documento que detalhará as características do poliedro "idealizado", ou seja, quanto seriam suas medidas caso fosse factível a construção adotando os comprimentos provenientes dos cálculos. O planejamento final se encontra na seção 5.1.

4.4. SEGUNDA OFICINA: DECOMPOSIÇÃO DE UM PRISMA TRIANGULAR EM TRÊS PIRÂMIDES DE MESMO VOLUME

Para a segunda oficina, foi dado prosseguimento à construção de poliedros de canudinhos e aplicada a terceira atividade proposta no planejamento original da oficina, devido à animação dos alunos com as duas práticas anteriores e às interessantes análises possibilitadas.

4.4.1. Planejamento original

A motivação para esta atividade vem das fórmulas utilizadas para calcular o volume da pirâmide e do prisma, respectivamente, $V_{pirâmide} = \frac{A_b \cdot h}{3}$ e $V_{prisma} = A_b \cdot h$. Segundo as fórmulas, um prisma que possua a mesma base e a mesma altura que uma pirâmide terá um volume três vezes maior que o dela. Construir-se-á, então, um prisma e três pirâmides que possuam o mesmo volume, de forma que, quando encaixadas, compõem um prisma de mesmas medidas do primeiro.

- **Objetivos:** construir um conjunto de poliedros constituído por um prisma triangular e sua decomposição em três tetraedros que possuam, cada um, um terço do volume do prisma.

- **Conhecimentos envolvidos:** geometria espacial, geometria plana, trigonometria, medição de segmentos.

- **Tempo previsto:** 1h40min

- **Materiais necessários:** canudinhos, tesouras, réguas, fio de nylon, uma calculadora, quadro e giz. Os alunos devem trazer material para fazer anotações.

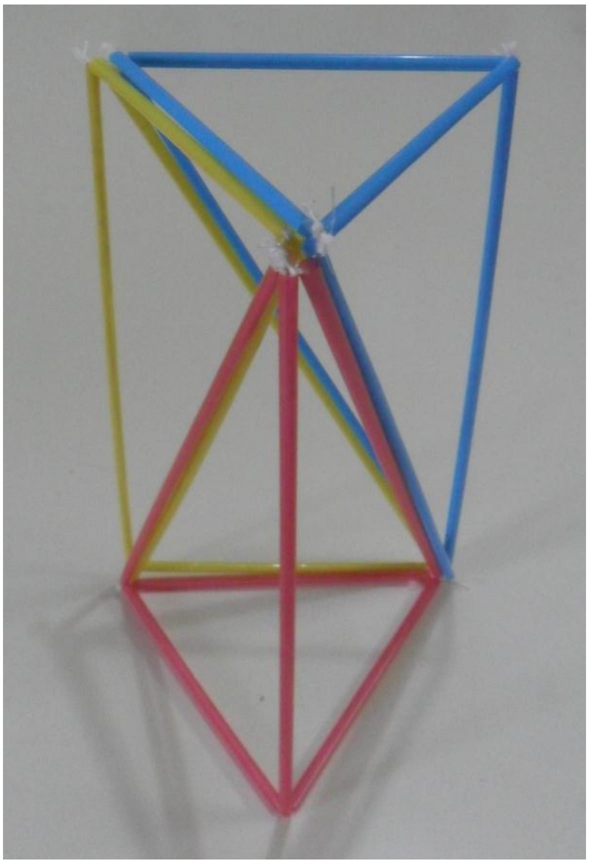


Figura 16 - Prisma triangular formado por três pirâmides de mesmo volume.

- **Desenvolvimento:**

- Colocar no quadro as fórmulas do volume do prisma e da pirâmide, $V_{prisma} = A_b \cdot h$ e $V_{pirâmide} = \frac{A_b \cdot h}{3}$, respectivamente. Chamar a atenção para o fato de que as fórmulas implicam que $V_{pirâmide} = \frac{V_{prisma}}{3}$, ou seja, $3 \cdot V_{pirâmide} = V_{prisma}$. Discutir com os alunos como poderíamos comprovar esse fato na prática para um prisma triangular, e apresentar a proposta da oficina.

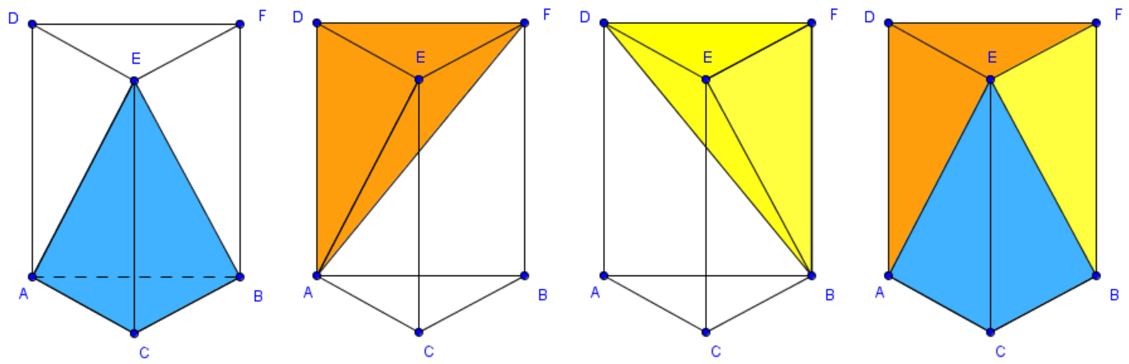


Figura 17 - Prisma triangular decomposto em três pirâmides de mesmo volume.

- Reproduzir a figura 17, acima, no quadro. Todos devem começar esboçando o prisma triangular que será formado pelos tetraedros, definindo e denotando as medidas que serão utilizadas. Três dos alunos serão responsáveis por construir um dos tetraedros mostrados na figura cada um. Os dois alunos restantes se encarregarão da construção de um prisma triangular, usando as mesmas cores de canudinhos das pirâmides quando encaixadas (vide figura 17). Nos segmentos que pertencerem a duas das pirâmides, deve-se dar prioridade às pirâmides azul, laranja e então amarelo da figura, na escolha das cores (vide figura 18).

- Discussão com os alunos do porquê da pirâmide amarela, na figura acima, possuir o mesmo volume das outras duas, embora não seja congruente a elas: visualizando-a como uma pirâmide de base ABF e vértice em E, ela possui volume igual ao da pirâmide de base ABF e vértice em C; esta última pode ser visualizada como uma pirâmide de base ABC e vértice em F, logo possui volume igual aos das outras duas. Na prática, todas as três pirâmides possuem uma face congruente, que representa metade da face lateral do prisma. Tomando essa face como base, pode-se verificar empiricamente que as três pirâmides possuem a mesma altura, e, portanto, o mesmo volume.

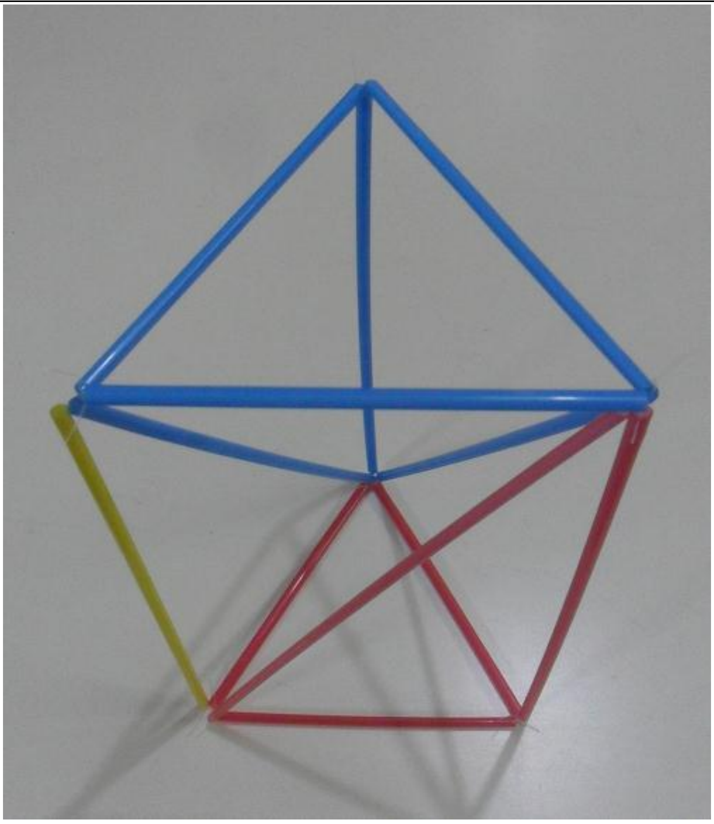


Figura 18 - Prisma montado utilizando-se as cores dos tetraedros, dando preferência à ordem azul, vermelho e amarelo.

- Comparação do prisma construído e das pirâmides encaixadas compondo o prisma, discutindo possíveis incongruências.

- Descrição pelos alunos do que foi feito na oficina e por que, a ser entregue escrita numa folha.

4.4.2. Implementação e análise

A oficina se realizou com os mesmo cinco alunos dos dois encontros anteriores, na sala do Departamento de Ciências Exatas do Colégio de Aplicação. Quando fui buscá-los na sala de aula, apenas J não parecia empolgado com a ideia de participar da atividade, embora ninguém soubesse exatamente o que seria feito.

Comecei escrevendo no quadro as fórmulas dos volumes do prisma e da pirâmide, e perguntei a eles se tinha como relacionar as duas fórmulas. M: "*A diferença* *de uma pra outra é que na pirâmide a gente divide por três.*" Discutindo isso, escrevi então as equações $V_{pirâmide} = \frac{V_{prisma}}{3}$ e $3 \cdot V_{pirâmide} = V_{prisma}$, e falei: "*Isso significa então que se pegarmos um prisma, ele vai ter três vezes mais volume que uma pirâmide, desde que eles tenham a mesma base e a mesma altura.* [Desenhei no quadro um prisma triangular e uma pirâmide de mesma base e altura.] *Vocês acham isso fácil de enxergar, que o volume da pirâmide vai ser um terço do volume do prisma?*" K: "*É o que tá na fórmula, né...*" "*Sim, mas o que a gente poderia fazer para comprovar essa fórmula?*" M: "*Construir um prisma?*" Eu: "Para quê?" K: "*Para medir o volume, e depois fazer uma pirâmide e calcular o volume e ver que é um terço.*" "*Bom, se a gente fizesse isso, estaríamos aplicando a fórmula, e o volume ia dar um terço por causa da fórmula. Mas como a gente pode se convencer que a fórmula tá mesmo certa, que ela faz sentido? M começou bem, a gente pode construir um prisma. E daí?*" M: "*A gente pode dividir ele em três, e tentar ver que dá o volume da pirâmide.*" "*E é mais ou menos isso que a gente vai fazer. A gente vai montar três pirâmides que, quando encaixadas umas nas outras, formam um prisma.*"

Para começar a desenhar a figura 17 no quadro, fiz o desenho de três prismas triangulares, todos na mesma posição, e desenhei a primeira pirâmide da figura dentro do prisma. "*Segundo as fórmulas, essa pirâmide tem um terço do volume do prisma. Teriam que caber mais duas do tamanho dela dentro do prisma. Onde cabe outra?*" K: "*Igual a essa, mas na base de cima.*" K apontou e descreveu corretamente o posicionamento da pirâmide laranja da figura. E continuou, depois de eu ter desenhado essa pirâmide no segundo prisma que havia no quadro: "*Mas vai dar mais uma ainda? Já usamos as duas bases.*" Falei: "*Pois é, será que o pedaço que falta é mesmo uma pirâmide? Vamos ver. O que falta para completar o prisma?*" Todos os cinco alunos pararam e olharam pro quadro, discutindo entre si como seria o sólido formado pelo prisma quando descontados os dois primeiros tetraedros analisados. K parece descrente de que haveria ainda mais uma pirâmide, repetindo que as duas bases do prisma já estavam preenchidas. R, que até agora se mantivera calado, enumera os vértices do prisma que já foram utilizados nas duas pirâmides anteriores. Por fim, A levanta e aponta, no terceiro prisma que havia no quadro, o triângulo EFB (veja na figura 17), que de fato não pertencia a nenhuma pirâmide. "*Ok, então se pensarmos que esse triângulo é a base da terceira pirâmide, onde fica o vértice dela?*" Nova discussão, envolvendo todos os alunos. Por fim, vou ao quadro e, com a participação deles, procuro os outros triângulos que não foram utilizados nas primeiras pirâmides, completando a terceira.

A: "*Entendi, então se a gente fizer isso, vai querer dizer que o volume do prisma é igual ao volume das três pirâmides juntas. Mas daí elas não tinham que ser iguais?*" Respondo: "*Não necessariamente iguais, mas com o mesmo volume.*" M: "*Mas a pirâmide do meio* [se referindo à segunda pirâmide] *não vai ter mais volume que as outras? A base dela é maior.*" K: "*Não é nada, é do tamanho da base do prisma, que nem a da pirâmide da esquerda.*" M: "*Ah tá certo, é igual.*" R: "*Aquela da direita que tá estranha.*" A: "*É, cadê a base dela?*" Respondo: "*A base é uma questão de referência, qualquer face da pirâmide pode ser a base, depende do nosso ponto de vista.*" A franze a sobrancelha e olha pro outro lado, como quem não entendeu. "*Vamos começar a construção, depois a gente discute melhor aquela pirâmide e vê se ela tem mesmo o meso volume das outras.*"

Os alunos separam as atividades de forma que K e M ficam responsáveis pela construção das duas primeiras pirâmides da figura 17, J fica responsável pela terceira e A e R pelo prisma. Eles debatem para definir as medidas da base e da altura do prisma, e começam a construção. Não foi chamada a atenção para isso, mas apesar deles quase inconscientemente – devido aos desenhos no quadro, que sugeriam isso, e aos encontros anteriores, nos quais foram construídas pirâmides regulares – construírem o prisma e as pirâmides com base regular, isso não era obrigatório. A construção e o encaixe dos tetraedros se dariam eficientemente com uma base triangular qualquer.

Nessa etapa, mostrei a eles os tetraedros que eu já havia feito anteriormente, como eles se encaixavam para formar o prisma. J imediatamente já pegou o que correspondia ao que ele iria construir, para se guiar. Porém, com o tetraedro dissociado do prisma, é um tanto confuso distinguir quais segmentos representam a altura e a base do prisma, que eram as duas informações que ele tinha, de modo que ele desistiu de tentar copiar o modelo pronto e se guiou pelo desenho no quadro, que facilitava a construção por situar o tetraedro já dentro do prisma. Mesmo assim, ele pedia a minha confirmação de que estava correto a cada etapa da construção, demonstrando dificuldades no entendimento da figura no quadro.

A e R se dividem para fazer a o prisma, mas há muita dificuldade para saber qual cor de canudinho eles deveriam utilizar. (Embora eu houvesse trazido os tetraedros que compunham em prisma, não havia feito o prisma em si, que poderia servir de modelo pra explicar a distribuição das cores.) A começa montando uma das pirâmides. Faz a base corretamente, mas prossegue cortando três canudinhos com o comprimento da altura do prisma e monta-os na base formando com eles as arestas laterais, de modo que acaba por construir uma pirâmide regular. Ela identifica que algo está errado, mas não entende o quê, já que havia medido "corretamente" o comprimento dos canudos. Só quando vê a pirâmide que K está montando, que é congruente à sua, que percebe que uma das arestas laterais deve ser perpendicular à base, e que as outras duas possuem um comprimento maior que a altura do prisma. Contrariada, desamarra sua pirâmide e vai corrigi-la.

J mais uma vez é o mais hábil nos trabalhos manuais, e termina sua pirâmide primeiro. Já foi mencionado que ele montou-a um tanto inseguro, pois se tratava da terceira pirâmide da figura, a de maior dificuldade de visualização. Com ela finalizada, ele segura-a com o braço erguido à sua frente, revirando-a nas mãos até encontrar a posição exata em que ela está representada no quadro, e fala: "*Bá só agora que eu me liguei nesse desenho do quadro!*" Com essa frase e suas dificuldades anteriores, concluo que ter o sólido em suas mãos para manipulá-lo e compará-lo com a sua representação plana que constava no quadro foi decisivo para que o aluno alcançasse uma melhor compreensão do conteúdo e desenvolvesse mais suas habilidades de visualização. Ao final da aula, quando os alunos foram convidados a descrever a atividade feita na oficina e justificarem os motivos pelos quais ela foi proposta, ele escreveu que "*foi uma trabalho muito produtivo, pois consegui observar as formas, coisa que antes não conseguia*".

M e K também concluem seus tetraedros. Pegam o terceiro, construído por J, e tentam por algum tempo montar o prisma, sem sucesso. A pouca diferença entre as medidas da aresta da base, da altura e da diagonal da face lateral do prisma dificultam as coisas, tornando menos visível os segmentos correspondentes para o encaixe. Depois de muitas tentativas, pegam o conjunto de tetraedros que eu levei, montam-no primeiro e só então conseguem finalmente montar o seu. O fato do agrupamento dos tetraedros não se manter coeso sem alguém o segurando é até benéfico, por exigir mais das habilidades geométricas das alunas. M, num dos fugazes momentos em que o prisma parou montado, exclamou: "*Ah tá ali o prisma, estou vendo!*".

Com certeza o poliedro que deu mais trabalho para ser construído foi o prisma. Além de não haver um modelo para servir de exemplo e de ser feito por dois alunos, o que gerou um desacerto em certo momento, pois cada um foi construindo por um lado que depois não se encaixavam, a montagem exigia uma escolha específica de cores de canudos para representar o lugar de cada pirâmide. Tive que apontar diversos erros na construção que haviam passado despercebidos aos alunos, principalmente por não terem claro em sua cabeça o desenho de cada um dos tetraedros. Logo, acredito se A e R tivessem manipulado os tetraedros, tentado e falhado diversas vezes em encaixá-los no formato do prisma como fizeram K e M, eles teriam mais informações e mais "intimidade" com as componentes do prisma, o que facilitaria a construção do mesmo. Essa observação me leva a propor uma alteração no planejamento da oficina. Pareceu-me que seria mais proveitoso e mais fácil se os grupos contassem com exatamente três componentes, onde cada um ficaria responsável pela montagem de um tetraedro; com os três finalizados, todos deveriam tentar o encaixe até formar o prisma, para só então construí-lo, observando as cores utilizadas para denotar corretamente a posição de cada tetraedro.

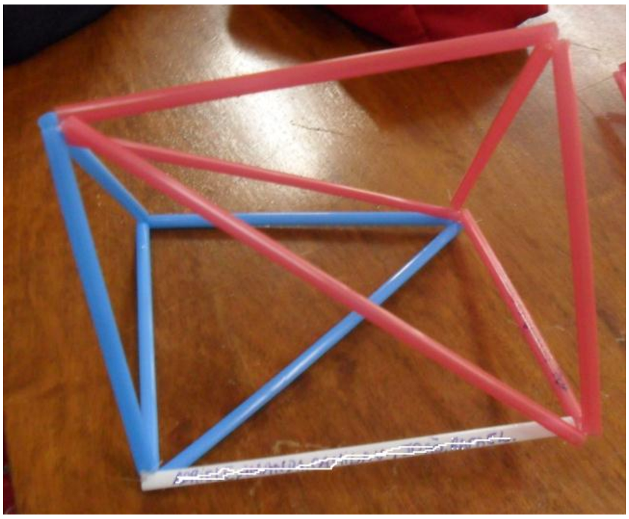


Figura 19 - Prisma montado por A e R, utilizando as mesmas cores utilizadas nos tetraedros.

Com todos os poliedros concluídos, reuni-os na mesa, com os tetraedros encaixados formando o prisma ao lado do prisma, e perguntei o que poderíamos concluir com essa montagem. K: "*Quer dizer que o volume do prisma é o volume dos três triângulos juntos.*" Durante todo o trabalho, foi muito comum os alunos falarem "triângulos" com a intenção de se referir a "pirâmides". "*Mas dá pra concluir que o volume de cada pirâmide é um terço do volume do prisma?*" A: "*Sim, porque a base é* *igual para os dois.*” “*Mas é igual só para essas duas pirâmides; e a essa terceira, que foi o J quem montou? Como a gente pode ver se ela tem o mesmo volume das outras duas?*” M: “*Mas tem que ter, a base é igual para as três.*” “*Qual é a base dessas pirâmides?*” M colocou as duas pirâmides congruentes apoiadas na face congruente à base do prisma. “E essa terceira pirâmide também tem essa base?” J revirou a pirâmide em suas mãos e respondeu: “*Não tem nenhum lado assim.*” M pareceu desistir: “*Então não tem o mesmo volume.*” “*Mas tem uma face que todas as três pirâmides têm. Olha só, todas possuem essa face em comum, que representa metade da face lateral do prisma.*” E coloquei as três pirâmides apoiadas na face citada, lado a lado na mesa (figura 20). “*A base de um tetraedro depende do ponto de vista que a gente tem. Se eu colocar ele apoiado nessa face, ela é a base e a altura é essa*”, e apontei o comprimento que correspondia ao que falei. “*Nessa posição, a gente vê que as bases das três pirâmides são iguais e conseguimos ver, mais ou menos 'no olho', que nessa posição elas têm a mesma altura também. Então o volume das três vai ser o mesmo, já que a base a altura são as mesmas.*” Os alunos concordaram, embora nenhum deles parecesse estar prestando muita atenção. “*Assim, a gente separou o prisma em três pirâmides que possuem o mesmo volume e que juntas, encaixadas, formam o prisma.*”

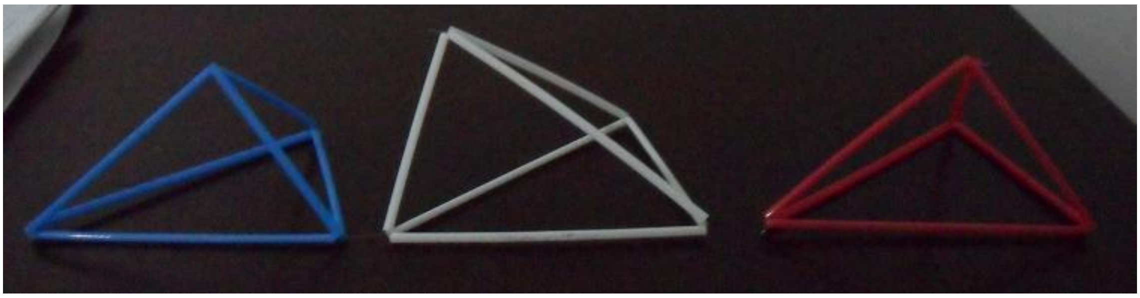


Figura 20 - Três tetraedros componentes do prisma. Nesta posição é facilitada a argumentação para mostrar a igualdade dos volumes: idealmente, todas as bases são congruentes e as alturas são iguais.

Para finalizar a oficina, pedi que cada um escrevesse numa folha o que o grupo todo havia feito nesta atividade e por que eles achavam que essa atividade havia sido proposta.

A respondeu que “(...) *Entendemos que dentro de um prisma cabem três pirâmides com volumes iguais, pois se a área da pirâmide é um terço da área do prisma, logo três vezes o volume da pirâmide é o volume do prisma.* (...)” Notei que, ao escrever sua resposta, ela olhava repetidamente para o que havia no quadro. Apesar da sua confusão, escrevendo “área” no lugar em que o correto seria “volume”, sua resposta foi praticamente uma cópia das relações que continuavam expostas no quadro, entre os volumes do prisma e da pirâmide. Apesar de destacar apenas a interpretação das fórmulas em suas respostas, entendo, através de sua participação e de suas dificuldades superadas ao longo da construção do prisma, que a aluna conseguiria articular uma justificativa para a fórmula baseada nos sólidos construídos, que era o objetivo pretendido com a atividade, mas preferiu se apoiar nas informações “seguras” que encontrou no quadro para dar sua resposta. Além disso, fez menção à igualdade dos volumes das pirâmides, hipótese essencial para a conclusão pretendida.

Em sua resposta, M escreveu que “(...) *A proposta de fazermos os triângulos foi para percebermos que o prisma é formado pelos três triângulos e ambos têm a mesma altura e base, logo, o mesmo volume.*” Apesar do seu engano, trocando triângulo por pirâmide, sua resposta pode ser considerada como um dos sucessos da oficina, pois é sinal de que a aluna refletiu sobre suas ações e concluiu a relação entre os dois volumes através das construções propostas. Finalizando sua escrita, ela generaliza: “*Fizemos isto para perceber que um prisma triangular, e demais prismas, são formados por triângulos.*” Mais uma vez, é escrito triângulo para denotar pirâmide. Essa segunda parte de sua resposta sugere uma generalização que é apressada: não é imediato de ver que o raciocínio utilizado nessa atividade pode ser adaptado para qualquer prisma. Não está claro nem mesmo para um prisma quadrado, que seria intuitivamente o próximo a ser considerado, que a decomposição em três pirâmides de base quadradas, análoga à utilizada aqui, é possível.

J, conforme já falado, não fez nenhuma alusão às relações entre os volumes dos sólidos, mas apenas quanto aos seus avanços no que toca a “observar as formas geométricas”, no sentido de compreensão das representações planas. R finalizou sua resposta dizendo que tinha achado muito difícil montar as pirâmides, fato confirmado pela sua dificuldade com os canudinhos ao longo das práticas.

A resposta mais bem estruturada foi a de K: “*Hoje fizemos três pirâmides e um prisma de base triangular, para depois juntarmos as três pirâmides de certo modo para que eles tenham o mesmo volume do prisma e cada triângulo tem o mesmo volume dos outros. Fizemos isso para ver que um prisma com base triangular tem o mesmo volume dos três triângulos juntos.*” Desconsiderando os erros semânticos e ortográficos, com essa resposta, K descreveu perfeitamente as atividades realizadas e o seu propósito, revelando-se consciente das implicações da prática realizada e conseguindo a extração do conceito teórico por trás da atividade.

Todos os registros escritos citados se encontram anexados no final deste texto.

4.5. TERCEIRA OFICINA: TRIMINÓ LOGARÍTMICO

4.5.1. Planejamento original

- **Objetivo:** produzir cinco Triminós Logarítmicos, desenvolver construções geométricas, exercitar raciocínios de generalização, revisar e aplicar propriedades do logaritmo.

- **Conhecimentos envolvidos:** construções com régua e compasso, construções com régua graduada, ponto médio, mediatriz, medição de segmentos, raciocínios de generalização, propriedades do logaritmo.

- **Número de participantes:** cinco grupos de um ou dois alunos.

- **Tempo previsto:** 3h10min.

- **Materiais necessários:** cinco folhas coloridas de EVA tamanho A3, tesouras, lápis, compassos, réguas, cinco rótulos do jogo (papéis descrevendo o jogo, conforme indicado abaixo), cinco embalagens plásticas para armazenamento dos jogos confeccionados. Os alunos devem trazer material para anotações e rascunhos.

- **Desenvolvimento:**

<u>1) Descrição do jogo e formação dos grupos</u> (10min)

- O primeiro passo para a construção de um jogo até então desconhecido é começar por apresentá-lo e explicar como jogá-lo. Mostrar para os alunos o Triminó já pronto e falar o que consta no seu rótulo: “Um Triminó Logarítmico é um quebra-cabeça, em que cada peça possui a forma de um triângulo equilátero, no qual pelo menos um de seus lados possui uma expressão matemática. As peças devem ser encaixadas identificando os lados que possuam expressões equivalentes, formando, assim, um único triângulo equilátero.” As expressões envolvem propriedades do logaritmo, donde vem o título Triminó Logarítmico.

- Separar os alunos em grupos de 3 ou 4 componentes; cada grupo será responsável pela confecção de um Triminó.

2) Construção de um triângulo equilátero usando meios quaisquer (15min)

- Nesta etapa, é proposta aos alunos a construção de um triângulo equilátero de maneira livre, ou seja, eles podem fazer uso de régua graduada, de compasso e do que mais estiver à sua disposição. O objetivo é verificar a familiaridade que os alunos têm com o compasso e deixar clara a dificuldade dessa construção sem este instrumento, além de chegar à conclusão intuitiva de que as medidas dos ângulos internos do triângulo também terão necessariamente de ser iguais entre si.

3) Construção de um triângulo equilátero com régua e compasso (30min)

- Discussão geral sobre construções com régua e compasso: explicitar que nesse contexto, a régua é apenas uma ferramenta para traçar segmentos de reta, ou seja, não será feito o uso de sua graduação, e que o uso principal do compasso é preservar e transportar medidas. Em particular, construir uma circunferência genérica de raio r e centro num ponto C e definir esta como sendo o conjunto dos pontos que distam r de C.

- Construção de um triângulo equilátero no quadro a partir dos seguintes passos: traçar um segmento de medida qualquer (que será a medida do lado do triângulo); traçar uma circunferência centrada em cada um dos extremos do segmento e que contenha o outro extremo; marcar um dos pontos de intersecção das circunferências; traçar os segmentos que ligam esse ponto a cada um dos extremos do segmento. Veja a figura abaixo. Argumentar porque o triângulo construído é equilátero, baseando-se nos raios das circunferências.

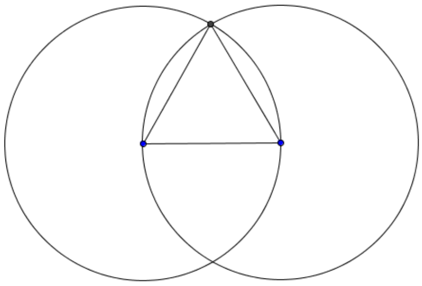


Figura 21 – Construção com régua e compasso de um triângulo equilátero.

- Construção de triângulos equiláteros por parte dos alunos; quando finalizado, cada aluno pode verificar a precisão de sua construção medindo os lados de seus triângulos com a régua graduada.

4) Número de peças de um Triminó e sua relação com o número de equações necessárias para sua confecção (40min)

- Discutir com os alunos: Um Triminó montado possui a forma de um triângulo equilátero formado por vários triângulos equiláteros menores, mas quantos? Esse pode

ser um número arbitrário?

- Desenhar no quadro triângulos equiláteros formados por 1, 4, 9 e 16 triângulos eqüiláteros menores, e pedir que eles conjecturem quantos triângulos menores formarão o próximo triângulo maior. Chamando a atenção para o fato que de a diferença do número de "peças" entre um triângulo grande e o próximo é sempre um número ímpar de "peças" adicionadas à sua base, aqui há a possibilidade de discutir a identidade $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

- Neste momento, os alunos devem decidir o tamanho do Triminó que irão confeccionar. O número mínimo de peças de cada Triminó é 25, mas os alunos são livres para fazerem um com 36 peças se assim quiserem, desde que o tamanho de cada peça, limitado pelo material disponível, não fique muito pequeno. (Lembre-lhes que ainda serão escritas expressões nos lados das peças!)

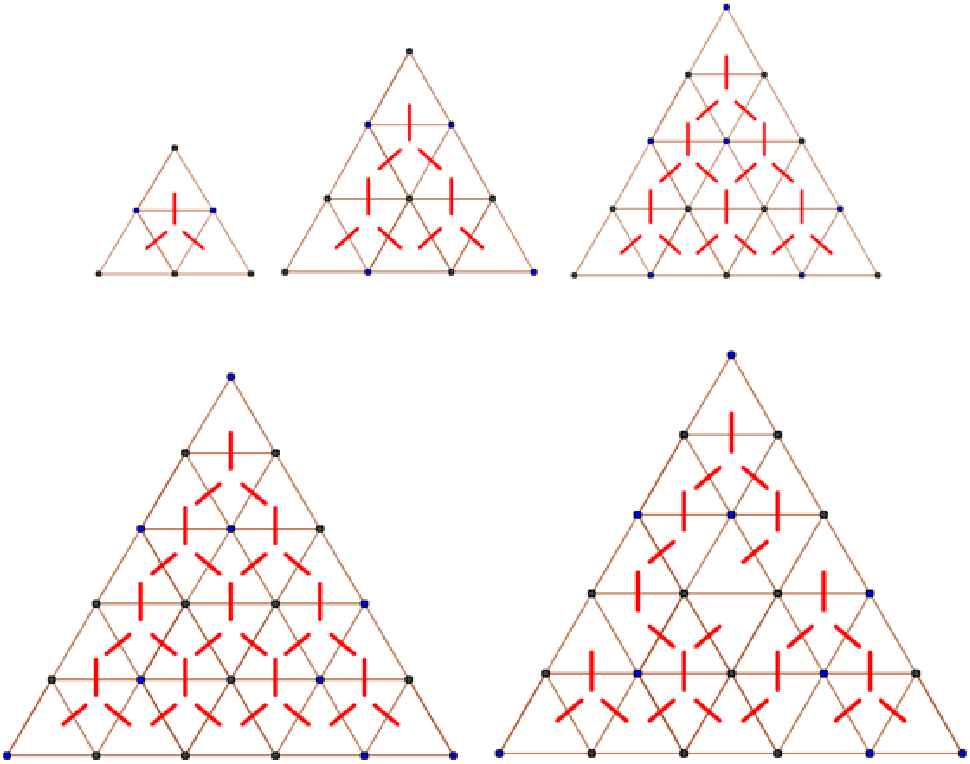


Figura 22 - Diagramas de Triminós e equações entre suas peças.

- Cada peça será unida a pelo menos uma outra através de expressões equivalentes, ou seja, cada peça possuirá um lado de uma equação logarítmica, como, por exemplo, $\log 12 = \log 3 + \log 4$. Veja os diagramas acima.

Nos diagramas, cada traço vermelho representa uma ligação entre duas peças, ou seja, uma equação logarítmica. Começar desenhando no quadro o diagrama do Triminó de 4 peças com todas as suas ligações, e ir progredindo até o de 25 peças. Perguntar: É possível prever quantas ligações serão utilizadas no Triminó de 36 peças? É possível generalizar o raciocínio para um Triminó de n^2 peças?

- Note que não é estritamente necessário para a montagem que cada peça do Triminó esteja ligada a cada uma das outras à sua volta; o último diagrama da figura acima mostra o Triminó de 25 peças com um número otimizado de ligações. Pergunta: Existe um menor número de ligações necessárias? Como encontrá-lo? Note que com menos ligações, a montagem do quebra-cabeça fica mais difícil, pois antes sabíamos que se uma peça tinha algum lado sem escrita, então ela era parte da borda externa do triângulo grande quando montado. Neste momento, os alunos devem decidir quantas ligações utilizarão e esboçar um diagrama do seu Triminó montado com as ligações indicadas.

5) Esboço do Triminó montado (20min)

- Decidido o tamanho, o número de ligações entre as peças e a sua disposição, os alunos deverão desenhar, na folha de EVA, o Triminó montado. Para isso, deverão construir pelo menos os primeiros com régua e compasso, mas uma régua graduada também pode ser utilizada. Deve-se chamar a atenção para que o tamanho de cada peça não exceda o limite imposto pelo tamanho da folha de EVA.

6) Planejamento das equações logarítmicas (40min)

- Fazer uma breve revisão das propriedades básicas do logaritmo: $\log a + \log b = \log ab$; $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$; $\log a^n = n \cdot \log a$; $b^{\log_b a} = a$. Os alunos devem então criar equações logarítmicas utilizando essas propriedades. Cada membro de cada grupo deve criar pelo menos uma equação envolvendo cada uma das cinco propriedades. Devido à limitação de espaço em cada peça, devem ser priorizadas equações curtas. Não pode haver equações repetidas, e o professor deve revisar cada lista de equações dos grupos, a fim de ver se todas estão corretas.

7) Escrita e recorte das peças (15min)

- Finalmente, falta apenas escrever nas peças um membro de cada equação, conforme planejado, e recortar as peças.

4.5.2. Primeira implementação e análise

Diferentemente das anteriores, esta prática foi proposta aos alunos de duas turmas de 2º ano do Colégio de Aplicação da UFRGS como uma atividade de recuperação, a ser realizada no turno inverso ao das aulas. Ambas as turmas estavam correntemente estudando geometria plana e espacial. Estavam sendo esperados em torno de 5 a 10 participantes, mas acabou por comparecer 21 alunos na atividade, o que foi uma das grandes dificuldades a ser superada. Um número de participantes maior do que o previsto resultou num número insuficiente de materiais disponíveis: não havia compassos, réguas nem folhas de EVA suficientes para que cada um dos alunos pudesse trabalhar individualmente. O revezamento de materiais deixava muitos alunos ociosos, que acabavam por conversar e se desligar da atividade. Além disso, um grande número de alunos dificulta a pesquisa baseada no método clínico, pois dificulta o acompanhamento individualizado aos alunos e atrapalha as discussões aprofundadas acerca das idéias e raciocínios elaborados por estes. O gravador ficou sobre uma mesa entre dois grupos, de modo que não conseguiu captar claramente os diálogos de nenhum dos grupos, atrapalhado pelo ruído ambiente das conversas concomitantes de cada grupo.

Conforme planejado, após a apresentação do que era um Triminó Logarítmico, a primeira atividade proposta aos alunos foi a construção de um triângulo equilátero utilizando meios quaisquer. O desenho, em particular, tem na geometria um duplo interesse: como linguagem para meditar, exemplificar ou representar conceitos e propriedades, e como finalidade de representação fiel e rigorosa. Segundo Alsina, Burgués e Fortuny (1991), "(...) *pode não se fazer um cubo ou não se conhecer um tangram, mas não desenhar em geometria seria simplesmente renunciar à linguagem mais genuína da disciplina*". No contexto da Matemática, desenhar não é tanto chegar à representação perfeita quanto colocar em jogo o rigor e a ordem com que proceder a realização de tais traçados, e isso foi enfatizado ao máximo durante essa parte de construções geométricas realizada na oficina.

Foram distribuídos os materiais para cada grupo, compostos por quatro ou cinco alunos, mas apenas dois ou três conseguiam efetuar algo de cada vez, devido à escassez de instrumentos. Dois alunos se lembravam de uma série de atividades com régua e compasso que tinham feito um ano antes; esses, então, logo trataram de pegar um compasso e fazer a construção clássica de um triângulo eqüilátero. Vários utilizaram outro método já esperado, utilizando a régua graduada e traçando, aproximadamente, a mediatriz do segmento, para então localizar o terceiro vértice do triângulo. Os restantes que efetivamente tentaram algo seguiram por tentativa e erro até conseguirem traçar um triângulo cujos lados tivessem aproximadamente a mesma medida.

Quando chamei a atenção dos alunos para discutir no quadro as idéias que surgiram, um dos alunos que utilizou a construção com régua e compasso se adiantou e veio expor tal construção no quadro. Ele argumentou a igualdade dos tamanhos dos lados do triângulo corretamente, mas a maioria da turma se encontrava dispersa e desinteressada. Eu então falei da construção com régua graduada utilizando a mediatriz, mas mesmo os poucos alunos que tinham utilizado esse método e estavam prestando atenção não sugeriram nenhuma justificativa para o fato do triângulo construído ser eqüilátero. Encerrei essa etapa apenas dizendo que as duas construções estavam corretas, apesar da segunda não ser tão precisa quanto a primeira, e que cada um deveria decidir qual delas usaria na construção dos vários triângulos eqüiláteros que deveria ser feita posteriormente.

O próximo passo era a discussão do número de peças e de equações necessárias para a confecção de um Triminó. Perguntei: "*Um Triminó é um quebra-cabeça, em que as 'peças' são triângulos equiláteros que formam, no final, um único triângulo equilátero grande.*" Desenhei no quadro um triângulo eqüilátero formado por quatro menores. "*Este aqui, por exemplo, é formado por quatro peças. Podemos montar um Triminó com um número qualquer de peças?*". Uma menina que sentava à frente respondeu com a cabeça que não. "*Então me diz um número que não dá.*" Ela respondeu: "*Sei lá. Três.*". "*Por que não dá pra construir um triângulo grande só com três pequenos?*" "*Porque se tu tirar um desses quatro, já não fica mais um triângulo, falta um pedaço*", falou a aluna. "*Então quantas peças a gente precisa pra montar o próximo Triminó?*" Poucos alunos estavam acompanhando o raciocínio, e nenhum destes respondeu. Não é uma pergunta fácil, entretanto; alguns poucos alunos olhavam intrigados para o quadro, mas a maioria parecia se limitar a esperar as conclusões para finalizar a atividade e ganhar sua nota extra, conforme combinado. Alguns alunos manifestaram entusiasmo com as conclusões que foram surgindo, como, por exemplo, o fato de que o número de peças de um Triminó é sempre um quadrado perfeito, mas não houve praticamente nenhuma participação dos alunos na dedução desses fatos, e muito poucas hipóteses foram levantadas.

Concluí falando que o Triminó que eles iriam montar seria um de 25 peças, logo cada grupo teria de fazer pelo menos 25 triângulos equiláteros. Alguns optaram pelo uso do compasso, mas foram poucos, até pelo fato de não haver compassos para todos que haviam folhas. Forçosamente, muitos ficavam desocupados devido à falta de material, que conferia uma desculpa também aos desinteressados. À medida que os grupos iam terminando, já lhes orientei para que fossem recortando seus triângulos. Quando alguns grupos já estavam com os triângulos recortados, mais uma vez tentei reunir a atenção da turma no quadro.

Ensaiei uma tentativa de raciocínio para determinar o número de equações necessárias, mas a grande dificuldade dos poucos alunos que estavam prestando atenção e a dispersão dos alunos restantes me desmotivaram. É sem dúvida um raciocínio não-habitual para um estudante de ensino médio o que eu estava requerendo; generalizações são, via de regra, uma dificuldade mesmo para estudantes universitários. No fim, foi apenas um exercício de contagem constatar que o número de equações para ligar cada peça às outras à sua volta era 30. Tentei ainda argumentar que poderíamos otimizar esse número, mas acredito que ficou confusa minha argumentação, e então desisti dela, e concluí falando que os alunos deveriam inventar 30 equações por grupo, envolvendo as propriedades do logaritmo. Escrevi no quadro as seguintes propriedades, já utilizando exclusivamente a base 10 exceto na última: $\log a + \log b = \log ab$; $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$; $\log a^n = n \cdot \log a$; $b^{\log_b a} = a$. Abaixo de cada propriedade, escrevi um exemplo da mesma.

Ao avistarem “log” escrito no quadro, a maioria dos alunos se desanimou. “*Eu não sei logaritmo, já não me lembro de mais nada*”, um aluno falou, e muitos que ouviram concordaram. Após insistir, explicar que bastava substituir as variáveis em seus devidos lugares para formar outros exemplos como os do quadro, alguns começaram a tentar por si só. Alguns dos grupos atrasados ainda estavam desenhando os triângulos no EVA. A maioria dos grupos havia trabalhado de forma desigual, ou seja, apenas alguns haviam desenhado e recortado os triângulos, de forma que agora era a vez dos outros se esforçarem, enquanto estes conversavam ou simplesmente iam embora. Dentre os que tentavam trabalhar nas equações, quase todos inventavam equações utilizando apenas a primeira propriedade, da soma de logaritmos de mesma base, de modo que a montagem do Triminó envolveria apenas essa propriedade.

Grande parte dos alunos “ativos” da sala inventava várias equações que davam o mesmo resultado, o que tornaria o Triminó muito mais difícil de ser montado: ao avistar uma peça com $\log 12$ em um dos seus lados, como saber se ela deveria ser encaixada na peça que continha $\log 3 + \log 4$ ou na que continha $\log 2 + \log 6$? Mesmo assim, resolvi não insistir nos critérios de que cada membro de cada igualdade deveria aparecer apenas uma vez e que todas as propriedades deveriam ser igualmente utilizadas, dada a dificuldade encontrada pelos alunos na criação das identidades. Considero essa dificuldade até natural, visto que é uma matéria já vista há algum tempo, que apareceu repentinamente, sem revisões ou algo parecido.

Tais dificuldades me levaram a rever a utilização dessa parte de logaritmo na programação dessa oficina. O surgimento abrupto de um conteúdo numa atividade, enquanto a turma está atualmente estudando outro, levanta naturalmente uma série de problemas que não são vantajosos, visto que os alunos nada têm a ganhar, exceto uma revisão despropositada. Concluí que essa última parte da oficina só faria sentido se a turma participante estivesse atualmente estudando logaritmo.

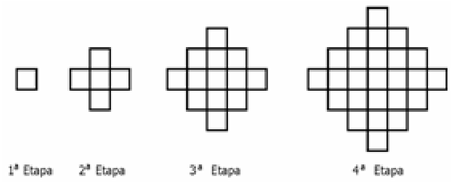
Apesar de todas as dificuldades, ao final da oficina, todos os grupos haviam montado o seu Triminó Logarítmico. Mas algumas conclusões estavam claras: para a pesquisa, o grande número de alunos foi bastante prejudicial, enquanto que para a atividade de construção de material didático, o conhecimento que a turma possuía acerca do conteúdo de logaritmos se apresentou como um grande obstáculo a ser superado. Analisando a oficina do ponto de vista fundamental deste trabalho, isto é, do ponto de vista da aprendizagem que os alunos tiveram ao longo das atividades desenvolvidas, nota-se que o ponto alto desta prática foi a parte de construções de triângulos equiláteros, e mesmo estas foram pouco frutíferas.

Os exercícios de generalização propostos encontraram grandes dificuldades, mas as interpreto como sendo parcialmente naturais. Porém, isso me leva a procurar alternativas para facilitar o desenvolvimento de tais exercícios, pois os considero uma das maiores virtudes dessa proposta. São raras as vezes que temos uma situação concreta motivadora para trabalhá-los, e são freqüentes as questões de vestibular e da

Olimpíada Brasileira de Matemática para Escolas Pública (OBMEP) que exigem raciocínios semelhantes, conforme ilustrado nas figuras 23 e 24.

Um dos fatos notados nessa implementação, foi que os três conteúdos mais fortemente trabalhados (geometria euclidiana plana, raciocínios de generalização e logaritmo) poderiam ter sido mais organizadamente separados. Caso fosse optado pela construção dos triângulos de EVA antes de se começar a pensar no planejamento específico de cada Triminó, os triângulos já prontos poderiam servir de material manipulativo a ser utilizado nas questões seguintes. A questão de quantas peças compõem o Triminó seguinte ao de quatro peças poderia ser trabalhada de modo mais concreto com as peças já em mãos. Acredito que isso contribuiria para uma maior aproximação dos alunos com a questão apresentada, e tornaria o Triminó Logarítmico um material “ainda mais bivalente”.

Considere o enunciado abaixo, que descreve etapas de uma construção.
Na primeira etapa, toma-se um quadrado de lado 1. Na segunda, justapõe-se um novo quadrado de lado 1 adjacente a cada lado do quadrado inicial. Em cada nova etapa, justapõem-se novos quadrados de lado 1 ao longo de todo o bordo da figura obtida na etapa anterior, como está representado abaixo.



Seguindo esse padrão de construção, pode-se afirmar que o número de quadrados de lado 1 na vigésima etapa é

(A) 758.

(B) 759.

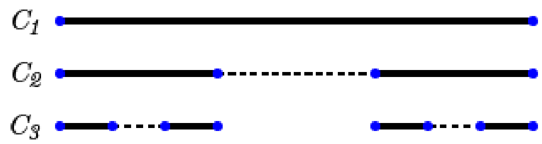
(C) 760.

(D) 761.

(E) 762.

Figura 23 - Exemplo de questão do vestibular da UFRGS cuja resolução requer raciocínios de generalização.

5. **Conjunto de Cantor** – Desenhe um segmento de reta de comprimento 1, e denote-o por C_1. Remova o terço central (sem remover os extremos). Denote por C_2 o que sobrou. Agora, remova o terço central (sem os extremos) de cada segmento de reta de C_2. Denote por C_3 o que sobrou. Podemos continuar esse processo, em cada estágio removendo o terço central de cada segmento em C_n para formar C_{n+1}.



(a) Desenhe C_1, C_2 e C_3, indicando os números nos extremos dos segmentos.

(b) Quais dos seguintes pontos pertencem ao conjunto de Cantor? $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{3}{81}, \frac{4}{81}$.

(c) Quais são os comprimentos de C_3, C_4 e C_5? Você pode achar uma expressão para o comprimento de C_n?

Figura 24 - Exemplo de questão da OBMEP cuja resolução requer raciocínios de generalização.

Devido às dificuldades de obtenção de dados e às condições não tão favoráveis, foi decidido que a oficina seria implementada ainda mais uma vez, com um grupo menor de alunos e já com as alterações citadas acima no seu planejamento.

4.5.3. Planejamento adaptado

- **Objetivo:** produzir cinco triminós logarítmicos, desenvolver construções geométricas, exercitar raciocínios de generalização, revisar e aplicar propriedades do logaritmo.

- **Conhecimentos envolvidos:** construções com régua e compasso, construções com régua graduada, ponto médio, mediatriz, medição de segmentos, raciocínios de generalização, propriedades do logaritmo.

- **Conhecimentos pré-requisitados:** propriedades dos logaritmos (preferencialmente, os alunos devem estar correntemente estudando propriedades dos logaritmos), conhecimentos sobre progressões aritméticas também são desejáveis, embora não estritamente necessários.

- **Tempo previsto:** 2h45min

- **Número de participantes:** dois grupos de três alunos.

- **Materiais necessários:** três folhas coloridas de EVA tamanho A4 por grupo, seis tesouras, seis compassos, seis réguas, dois rótulos do jogo (papéis descrevendo o jogo, conforme indicado abaixo), duas embalagens plásticas para armazenamento dos jogos confeccionados. Os alunos devem trazer material para anotações e rascunhos.

- **Desenvolvimento:**

<u>1) Construção e recorte de triângulos eqüiláteros</u> (45min)

- O primeiro passo para a construção de um jogo até então desconhecido é começar por apresentá-lo e explicar como jogá-lo. Mostrar para os alunos o Triminó já pronto e falar o que consta no seu rótulo: “Um Triminó Logarítmico é um quebra-cabeça, em que cada peça possui a forma de um triângulo equilátero, no qual pelo menos um de seus lados possui uma expressão matemática. As peças devem ser encaixadas identificando os lados que possuam expressões equivalentes, formando, assim, um único triângulo equilátero.” As expressões envolvem propriedades do logaritmo, donde vem o título Triminó Logarítmico.

- Separar os alunos em grupos de 3 ou 4 componentes; cada grupo será responsável pela confecção de um Triminó.

- Proposição aos alunos da construção de um triângulo equilátero de maneira livre, ou seja, eles podem fazer uso da régua graduada, do compasso e do que mais estiver à sua disposição, como esquadro e transferidor. O objetivo é verificar a familiaridade que os alunos têm com o compasso e deixar clara a dificuldade dessa construção sem este instrumento, além de chegar à conclusão intuitiva de que as medidas dos ângulos internos do triângulo também terão necessariamente de ser iguais entre si.

- Discussão com os alunos as construções que surgiram, argumentando por que os triângulos construídos são equiláteros (ou não). Em particular, pelo menos as duas construções abaixo devem ser discutidas e justificadas passo a passo.

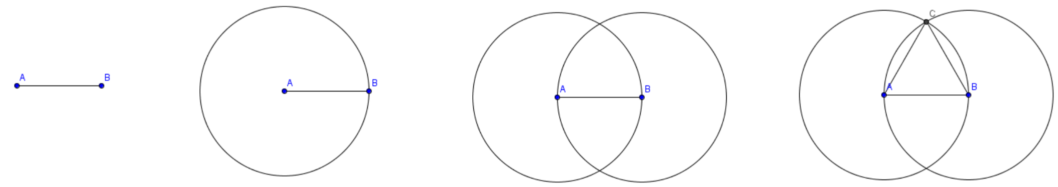


Figura 25 - Construção passo a passo de um triângulo equilátero com régua e compasso.

- Construção de um triângulo equilátero com régua e compasso: traçar um segmento de medida qualquer (que será a medida do lado do triângulo); traçar uma circunferência centrada em cada um dos extremos do segmento e que contenha o outro extremo; marcar um dos pontos de intersecção das circunferências; traçar os segmentos que ligam esse ponto a cada um dos extremos do segmento. Veja a figura acima.

Argumentar porque o triângulo construído é equilátero, baseando-se nos raios das circunferências.

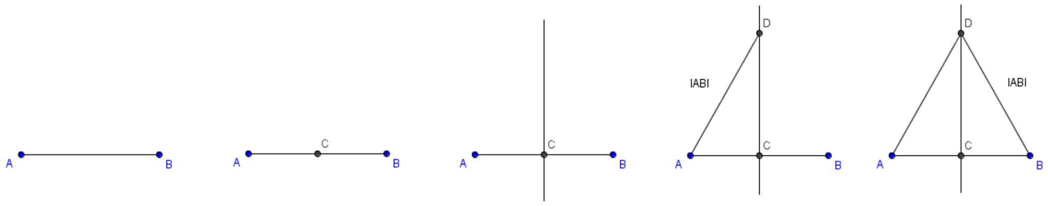


Figura 26 - Construção passo a passo de um triângulo equilátero com régua graduada.

- Construção de um triângulo equilátero com régua graduada: traçar um segmento de tamanho qualquer; medi-lo com a régua para encontrar seu ponto médio; utilizando a régua, traçar uma reta aproximadamente perpendicular ao segmento dado passando pelo ponto médio, que é denominada mediatriz do segmento; com a graduação da régua, determinar qual ponto da mediatriz dista das extremidades da cada um dos lados do segmento inicial o comprimento deste; traçar dois segmentos unindo esse ponto aos extremos do segmento inicial.

Note que a régua graduada não pode garantir a perpendicularidade entre duas retas, de modo que a reta construída durante esse processo é apenas uma aproximação da mediatriz.

- Preenchimento das folhas de EVA com triângulos equiláteros medindo 8cm de lado, utilizando algum dos métodos discutidos acima.

<u>2) Determinação do número de peças e equações de um Triminó</u> (60min)

- Discutir com os alunos: Um Triminó montado possui a forma de um triângulo equilátero formado por vários triângulos eqüiláteros menores, mas quantos? Esse pode

ser um número arbitrário? Os triângulos recém recortados podem ser utilmente manuseados na busca da resposta.

- Desenhar no quadro um triângulo equilátero formado por quatro triângulos eqüiláteros menores, e pedir que eles conjecturem quantos triângulos menores formarão o próximo triângulo maior. Encontrada a resposta (9), perguntar novamente quantos triângulos pequenos formarão o próximo. Chegar, com o auxílio dos alunos, à conjectura de que o número de peças de um triminó é sempre um quadrado perfeito.

- Passar ao estudo da variação do número de peças entre um triminó e o próximo, verificando que a diferença do número de peças entre eles é sempre um número ímpar, que pode ser interpretado como correspondente ao número de peças adicionadas à sua base. Mais uma vez, a manipulação dos triângulos de EVA recortados pode ser muito útil na formulação e verificação de hipóteses por parte dos alunos. Concluir discutindo a identidade $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, que pode ser deduzida através da fórmula da soma de uma PA finita, caso os alunos já tenham estudado esse conteúdo. Essa igualdade comprova a conjectura anterior acerca do número total de peças de um triminó.

- Em um triminó, cada peça é ligada a pelo menos uma outra através de expressões equivalentes, ou seja, cada peça possuirá pelo menos um lado de uma identidade logarítmica, como, por exemplo, $\log 12 = \log 3 + \log 4$. Veja os diagramas abaixo. Em cada diagrama, os traços vermelhos representam ligações entre duas peças, ou seja, uma identidade logarítmica. Começar desenhando no quadro o diagrama do triminó de 4 peças com todas as suas ligações, e ir progredindo até o de 25 peças. Perguntar aos alunos: É possível prever quantas ligações serão utilizadas no triminó de 36 peças? É possível generalizar o raciocínio para um triminó de n^2 peças? Com a ajuda dos alunos, formular hipóteses para responder as questões. Uma possível forma de argumentar é através da variação entre o número de ligações entre um triminó e seu sucessor. Dividir o número de ligações em grupos de três, como sugerem os diagramas, também pode ser útil.

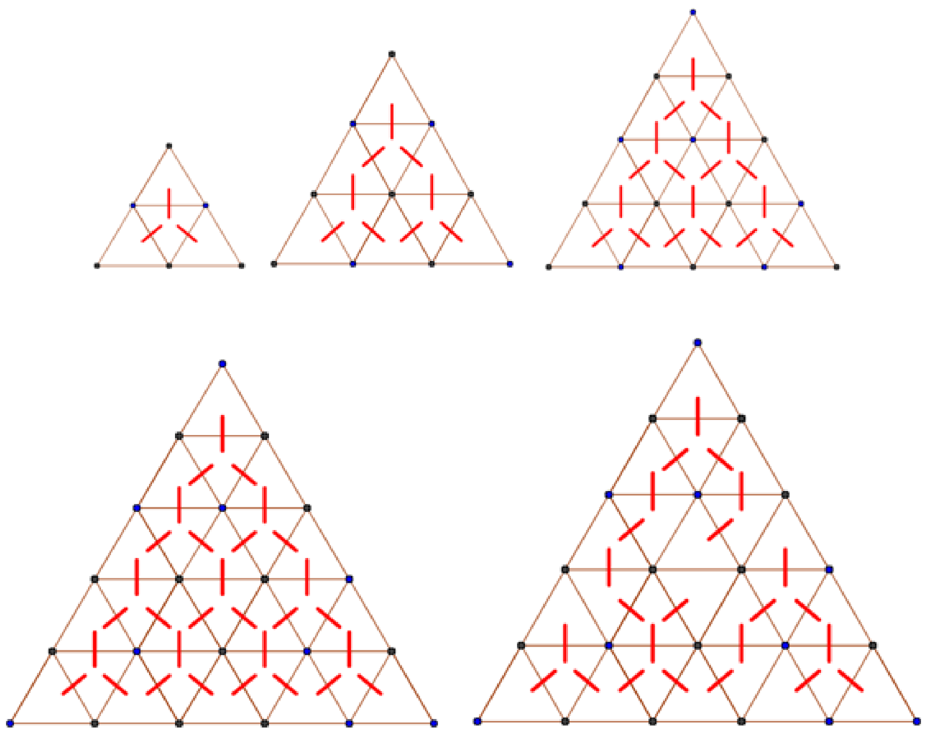


Figura 27 - Diagramas de triminós e ligações entre suas peças.

- Note que não é estritamente necessário para a montagem que cada peça do Triminó esteja ligada a cada uma das outras à sua volta; algumas ligações são desnecessárias desde que as peças que seriam unidas por elas tenham sua posição fixada por outras ligações. O último diagrama da figura acima mostra o Triminó de 25 peças com um número otimizado de ligações: no lugar das 30 ligações inicias, foram utilizadas apenas 24. Discutir com os alunos: Existe um menor número de ligações necessário? Como encontrá-lo? Note que, com menos ligações, a construção do triminó é menos trabalhosa, mas a montagem do quebra-cabeça fica mais difícil, pois antes sabíamos que se uma peça tinha algum lado sem escrita alguma, então ela era parte da borda externa do triângulo grande quando montado. Além disso, a correção da posição de uma peça poderia ser verificada através de mais de uma ligação, o que não é possível caso suas ligações se reduzam a uma só, por exemplo.

- Neste momento, os alunos devem decidir quantas ligações utilizarão e esboçar um diagrama do seu Triminó montado com as ligações indicadas.

- Decidido o tamanho, o número de ligações entre as peças e a sua disposição, os alunos deverão fazer um diagrama do triminó montado, como os da figura 27.

3) Planejamento e escrita das identidades logarítmicas (60min)

- Fazer uma breve revisão das propriedades básicas do logaritmo: $\log a + \log b = \log ab$; $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$; $\log a^n = n \cdot \log a$; $b^{\log_b a} = a$. Os alunos devem então criar identidades logarítmicas utilizando essas propriedades. Cada membro de cada grupo deve criar pelo menos uma identidade envolvendo cada uma das cinco propriedades. Devido à limitação de espaço em cada peça, devem ser priorizadas identidades curtas. Não pode haver membros de uma identidade repetidos, e o professor deve revisar cada lista de identidades dos grupos, a fim de ver se todas estão corretas.

- Finalmente, os alunos deverão escrever nas peças um membro de cada identidade. Antes de começar a escrita, as peças já deverão estar dispostas na forma de um triângulo equilátero grande, para facilitar a organização.

5.5.4. Segunda implementação e análise

A segunda prática da oficina foi efetuada com a participação de seis alunos do segundo ano do Colégio de Aplicação da UFRGS, sendo que nenhum dos quais havia participado da edição anterior da oficina. Os alunos aqui serão denotados por P, T, C, R, A e J. Com esse número de participantes, havia uma folha A4 de EVA, uma tesoura, uma régua e um compasso para cada um dos alunos. Após as apresentações dos integrantes, da oficina e do Triminó, os materiais foram distribuídos e os alunos foram convidados a construir um triângulo equilátero primeiro utilizando apenas a régua graduada e depois com régua e compasso.

R começou com a construção com régua graduada já esperada. Perguntei a ele: "*Este triângulo que tu construiu é equilátero? Por quê?*". R: "*É equilátero porque eu medi com a régua.*" "*Sim, com a régua tu confirmou depois que ele era equilátero, mas o que na tua construção garante que ele seja equilátero?*" "*Eu medi com a régua. Usei a régua e vi que as medidas dos lados eram iguais.*" As construções geométricas em geral são um ótimo instrumento para exercitar o raciocínio dedutivo e as relações entre proposições. Neste caso, o aluno confunde-se quanto às relações de causa e conseqüência: a igualdade das medidas só é possível devido à construção efetuada, ou seja, do ponto de vista da construção, o triângulo não é equilátero porque as medidas são iguais, mas sim, as medidas são iguais porque o triângulo é equilátero. A confirmação proporcionada pela régua vem apenas depois do triângulo estar pronto. Após discutirmos isso, o aluno analisou sua construção e falou: "*É que eu sei que eu tenho que chegar nessa reta porque ela divide o triângulo bem ao meio, e é lá que está o outro ponto*". Apesar de informal, a explicação de R demonstra uma evolução na organização de seu raciocínio, que já aparece como o primeiro ganho da oficina.

Momentos depois, observei que R manuseava o compasso. Posteriormente, vi, na sua folha de rascunho, que constavam dois triângulos construídos, e perguntei a ele como ele tinha feito o segundo. R: "*O primeiro eu fiz usando a medição de régua, nesse segundo eu usei só o compasso.*" E explicou que havia feito uma cópia do primeiro triângulo transferindo as medidas utilizando o compasso. Primeiro abriu o compasso na medida do segmento inicial e traçou um segmento que possuía aquela medida, depois abriu o compasso na medida do extremo do segmento até o ponto médio e assim demarcou o ponto médio do segmento recém construído, e assim por diante. No momento de localizar o terceiro vértice do triângulo sobre a mediatriz, ele apenas transportou a medida da altura do triângulo, isto é, a distância entre o terceiro vértice e o segmento inicial, para sua nova construção. Ou seja, ele utilizou o compasso específica e unicamente para a medição e transporte de medidas, substituindo, assim, a graduação da régua. A ideia da construção do segundo triângulo é idêntica à do primeiro, apenas mudam os instrumentos utilizados. Interpreto com esse comportamento que o aluno, uma vez que lhe foi imposta a diversificação de instrumentos nas construções, não buscou as novas alternativas abertas pelo uso do compasso, apenas adaptou-o à sua construção já conhecida. A substituição da graduação da régua pelo compasso foi feita com sucesso, o que qualifica mais a construção utilizada, visto que esta pode ser colocada em prática utilizando-se diferentes conjuntos de ferramentas. Porém, o potencial do compasso vai para além das funções utilizadas por R, e com esse instrumento é possível uma construção mais precisa, visto que não se faz necessária a aproximação da perpendicularidade entre o segmento inicial e a reta que visa ser a mediatriz.

T e P são os únicos além de R que estão tentando utilizar o compasso. T experimenta algumas construções, mas analisa-as e depois desiste delas, partindo para outras. Porém, o faz de modo inseguro. Finalmente, reproduz a construção clássica com régua e compasso (descrita no planejamento da oficina), e parece satisfeito. Aproximei-me dele e perguntei a ele o que garantia que o triângulo que ele construiu era equilátero. Ele se apressou a medi-lo com a régua, e respondeu: "*Os lados são iguais*." "*Mas por que tu construiu dessa forma? Tu não precisa nem medir com a régua pra saber que ele é equilátero.*" O aluno ficou pensando, mas não respondeu. Acredito que ele apenas se lembrava dessa construção devido à atividade com régua e compasso que alguns de seus colegas relataram ter ocorrido um ano atrás, na implementação anterior da oficina. Quando discutimos tal construção no quadro, perguntei a todos: "*O que garante que este lado* [e coloquei o polegar e o indicador nos extremos do segmento inicial] *tenha o mesmo comprimento que esse lado* [mantive o polegar fixo e movi o indicador sobre a circunferência desenhada previamente até coincidir com o terceiro vértice, que se localizava na interseção das circunferências]*?*" Com o movimento da minha mão, a resposta ficou clara para T, que disse: "*É o raio.*" "*Exatamente, como estes dois pontos estão sobre a mesma circunferência, a distância dos dois até o centro é a mesma medida, logo os dois lados do triângulo são raios do círculo e medem o mesmo comprimento.*"

P enveredou por um caminho um pouco mais inusitado. Ele começou traçando uma circunferência com o compasso, e passou algum tempo olhando-a. Após algumas tentativas frustradas, vi que ele se estava entretido com uma ideia e fui observá-lo, perguntando o que ele estava fazendo. Ele me falou: "*Eu sei que o apótema é metade do raio.*" Ele havia traçado um círculo e um raio; com a régua graduada encontrou o ponto médio do raio e traçou um segmento perpendicular a ele passando por esse ponto, formando uma corda da circunferência que seria um dos lados do triângulo. Prolongando o raio traçado inicialmente, encontra-se um diâmetro e o outro vértice do triângulo eqüilátero é construído. Veja a figura 28. É uma construção engenhosa, que sem dúvida foi elaborada por P de forma bastante natural quando este vasculhou sua mente procurando quais relações conhecia entre um triângulo equilátero e um círculo. Um dos reveses da construção, que não me ocorreu imediatamente e, portanto, não foi discutido, é que ela é iniciada determinando o tamanho do raio do círculo, e não o tamanho do lado do triângulo. As duas medidas estão relacionadas pela fórmula $r = \frac{l\sqrt{3}}{3}$, ou, equivalentemente, $l = r\sqrt{3}$. P deve ter se dando conta dessa dificuldade, pois adotou a construção com régua e compasso clássica na hora de desenhar os triângulos no EVA.

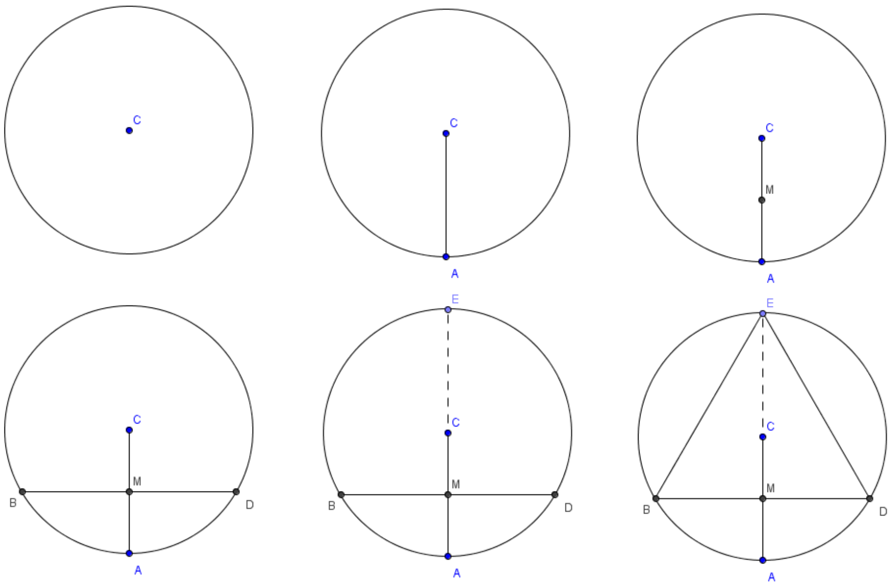


Figura 28 - Construção passo a passo de um triângulo equilátero circunscrito com compasso e régua graduada.

Na etapa de preenchimento da folha de EVA com triângulos, P chegou à figura 29. Perguntei a ele: "*Tu viu que aí já tens determinado o vértice de outro triângulo equilátero?*". Ele pensou um pouco e apontou para o ponto X, sobre uma das circunferências, que certamente estava próximo de um vértice de outro triângulo equilátero, de fato. Eu falei: "*Sim, a gente sabe que outro vértice está mais ou menos por ali, mas ainda não sabemos exatamente onde. A gente ia ter que fazer outra circunferência para ver.*" E sinalizei sobre a folha a circunferência que determinaria o ponto desejado. Continuei: "*Mas tem outro ponto, que já está determinado, que é vértice de um triângulo, falta só traçar os lados.*" O aluno observou a figura, e então apontou o ponto Y de interseção das duas circunferências já traçadas. "*E por que com esse ponto o triângulo vai ser mesmo equilátero?*" "*Porque ele tá sobre a bissetriz.*" Apesar de o aluno ter usado a palavra errada, ficou claro que seu raciocínio estava correto.

A justificativa, usando a mediatriz, remete à construção vista com régua graduada, mostrando a capacidade do aluno de buscar um argumento visto em uma construção e utilizá-lo em outra. P mostrou, segundo minha interpretação, ter se apropriado do conceito de mediatriz através do processo ativo de construção geométrica e questionamentos em cima dele.

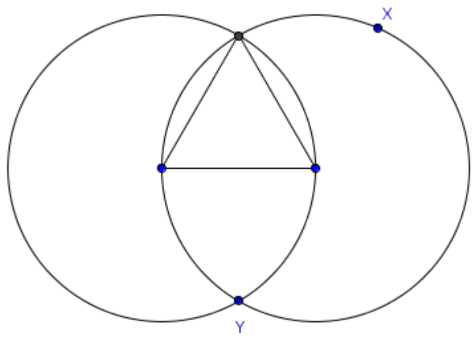


Figura 29 - Figura desenhada por P no EVA.

Finalizados o desenho e o recorte dos triângulos, passamos à parte de número de peças e de ligações necessárias. Perguntei aos alunos: "*Tá bem, um Triminó é um triângulo equilátero grande formado por vários triângulos equiláteros pequenos, como se cada triângulo pequeno fosse uma peça de um quebra-cabeça. Qual o menor número de peças necessário para montarmos um triângulo grande?*" T respondeu, sorrindo: "*Um.*" "*Tá certo, vou aceitar tua resposta.*" Fui ao quadro e desenhei um único triângulo equilátero. Prossegui: "*E o próximo triângulo grande, é formado por quantos?*" Incentivei os alunos a utilizarem os triângulos recortados para montarem triângulos maiores. R falou: "*O próximo pode ser formado por três.*" Vi a montagem que ele fez, com três triângulos agrupados no formato de um maior fazendo fronteira entre si apenas pelos vértices, sem a peça central. Falei então: "*Como aqui a gente quer montar um Triminó, a gente só decide se uma peça se encaixa na outra se nos lados delas tiverem expressões equivalentes. Então o triângulo grande tem que ser preenchido de peças; se as peças se tocassem somente pelos vértices, a gente não saberia dizer se o encaixe das peças está correto ou não.*" "*Tá bom, então quatro peças*", redarguiu R. Desenhei no quadro um Triminó formado por quatro peças. Analogamente, viu-se que os próximos Triminós teriam 9, 16, e 25 peças, e desenhei-os no quadro. Perguntei: "*Vocês conseguem ver algum padrão entre o número de peças dos Triminós?*" A falou: "*São todos pares?*" E logo se emendou: "*Não, claro que não.*" T falou: "*São todos números ao quadrado.*" "*Isso mesmo, são todos quadrados perfeitos. Seguindo essa lógica, o próximo Triminó vai ter quantas peças?*" "*36*", respondeu T. "*E depois?*" "*49. E 64.*" "*Isso mesmo. Agora vamos ver como varia o número de peças de um Triminó pro outro. Do primeiro para o segundo adicionamos* *quantas peças?*" Prosseguindo dessa forma, foi visto que a diferença entre dois Triminós consecutivos é sempre um número ímpar. Foi desenhada no quadro então a tabela 1.

Nº de triângulos na base	Nº total de peças	Nº de triângulos adicionados
0	0	
1	1	1
2	4	3
3	9	5
4	16	7
5	25	9
6	36	11
...	...	...
n	n^2	

Tabela 1 - Números de triângulos de um Triminó.

Ressalto que os alunos só montaram com os triângulos recortados os Triminós de 4, 9, 16 e 25 peças. As informações sobre o sexto Triminó foram todas deduzidas sem a sua montagem. O uso do material manipulativo foi bastante proveitoso, principalmente para o convencimento dos alunos de que a diferença entre os Triminós era um número ímpar. A e J perceberam que para montar o próximo Triminó, bastava adicionar uma "fileira" de triângulos logo após sua base. Perguntei a elas, no início dessa parte da atividade: "*Como vocês viram que o próximo Triminó vai ter 25 peças?*" A: "*A gente já tinha os 16 de antes, só colocamos mais uma fileira embaixo da base. Depois a viu que foi 9, então somamos 16 com 9 e deu 25.*"

T foi mais além. Quando perguntei aos alunos como a gente podia verificar essa variação ali nos triângulos, ele respondeu, utilizando os triângulos recortados para explicar, embora não tenha utilizado-os para formulá-lo: "*A gente sempre tem que adicionar embaixo o mesmo número de triângulos da base que a gente mais dois.*" Veja a figura 30. O polígono em vermelho claro é o Triminó de 9 peças. Para passarmos ao Triminó de 16 peças, acrescentamos as sete peças em vermelho escuro. Para passarmos ao Triminó de 26 peças, acrescentamos mais nove peças: as sete peças em azul, número idêntico ao de peças vermelho escuro acrescentados na etapa anterior, mais as duas peças em amarelo. Com esse raciocínio, T mostrou que devemos adicionar o mesmo número de triângulos adicionados anteriormente mais dois: "*Daí a gente sempre adiciona mais dois do que antes. Para o próximo, a gente tem que pegar o mesmo número da base de agora e mais dois.*"

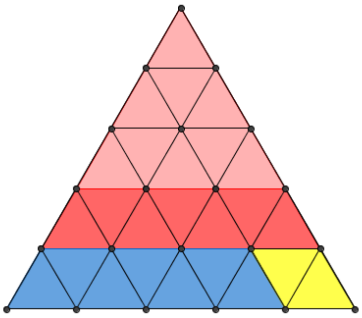


Figura 30 - Representação do Triminó de 25 peças.

Com isso, chamei a atenção para o fato que poderíamos observar cada Triminó considerando cada uma de suas "fileiras" separadamente. O raciocínio anterior mostrava que, como o "topo" do triângulo tinha um triângulo e o número de triângulos em cada fileira era o anterior mais dois, o número total de triângulos era a soma dos primeiro números ímpares. 36, por exemplo, poderíamos escrever como sendo 1+3+5+7+9+11, a soma dos seis primeiros números ímpares. Procedi analogamente com os outros triminós, escrevendo o número total de peças de cada um como uma soma de ímpares, e parti para tentar a generalização: "*No Triminó com n triângulos na base, a gente viu que vai haver* n^2 *peças no total. Dividindo esse Triminó e pegando cada uma das suas fileiras, a gente viu que a primeira fileira tem uma peça, a segunda tem três peças, depois cinco, depois sete, e por aí vai. A gente consegue fazer com esse triângulo o que a gente fez com os outros, escrevê-lo como uma soma de ímpares? Como fica?*" R arriscou: "*Fica 1+3+5+... até n.*" "*Todo mundo concorda?*" J falou: "*Acho que não. Ali no 36 a gente não soma o 36*", se referindo ao fato que 36 não era uma das parcelas na soma. Eu rebati: "*Sim, mas 36 é o número total aqui, lá o número total é* n^2*, e ele disse pra somar até n, e não até* n^2*.*" P: "*Então lá era pra gente ter somado até... seis? E a gente foi até onze. Eu já não sei mais nada!*" Vendo que a maioria estava confusa, recomecei: “*No triângulo de base 3, tem 9 peças no total e a gente somou quantos ímpares?*” “*3*”, eles responderam. “*E no de base 5* [apontei no quadro a igualdade 25=1+3+5+7+9]*, somamos quantos ímpares?*” “*Cinco.*” “*E se a gente tiver um triângulo de base n, vamos somar quantos?*” “n”, respondeu apenas T, mas os outros concordaram. “*Isso mesmo, eu vou até o n-ésimo ímpar, e não até o número n, como R falou. Então, eu consigo escrever essa igualdade aqui*”, e escrevi $n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$. “*Muito legal*”, falou R. “*Mas será que isso tudo tá certo mesmo? Tem algum jeito da gente comprovar nosso raciocínio? Alguém consegue pensar em como conseguir o resultado dessa soma de algum outro jeito?*” T: “*Parece uma PA...*” “*Isso mesmo. A variação entre cada parcela da soma é quanto? Sempre dois. Então essa aqui é a soma de uma PA, e a gente tem até uma fórmula para calculá-la*”, e escrevi no quadro

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \frac{1+(2n-1)}{2}n = \frac{2n}{2}n = n^2.$$

“*O que confirma o nosso raciocínio, a gente conseguiu generalizar o processo de número de peças e variação entre os triminós corretamente.*” Com isso a oficina se encerrou, pois já havia dado o sinal para o intervalo há alguns minutos.

Apesar de não termos conseguido chegar ao final de todas as atividades planejadas (já havia sido decidido não entrar na parte de logaritmos, mas esperava-se chegar à discussão do número de ligações de um Triminó), considero que a oficina foi muito produtiva. Analisando do ponto de vista da construção do Triminó, a atividade ficou incompleta, o produto final foi dois conjuntos de 36 triângulos equiláteros recortados de EVA, sem as expressões. Porém, acredito que as construções geométricas e as argumentações geradas foram férteis no sentido de criação matemática pelos alunos. Os processos de generalização também foram bem desenvolvidos, com destaque para o papel desempenhado pelo material concreto disponível aos alunos.

5. RESULTADOS

5.1. PROPOSTA DE CONSTRUÇÃO DE MATERIAIS DIDÁTICOS

Após as implementações das oficinas, foram observadas diversas melhorias que poderiam ser feitas em termos do planejamento de cada prática. A experiência da aplicação seguida da autocrítica oportuniza uma evolução, resultando numa proposta mais madura e mais bem fundamentada. O primeiro resultado obtido com este trabalho foi a própria proposta de construção de materiais didáticos gerada pela adaptação e melhoria das propostas iniciais utilizadas.

As observações oportunizadas pela implementação da primeira oficina deixaram claro, primeiramente, a necessidade de estender o tempo programado para a oficina. A discussão acerca dos conceitos de poliedro, pirâmide e prisma, que antes estavam programados para serem simplesmente dados aos alunos, também foi incorporada ao planejamento. Mas a principal mudança efetuada foi a divisão da oficina em duas partes distintas, uma de planejamento e outra de atividade prática.

5.1.1. Pirâmides regulares de canudinho: planejamento final

- **Objetivos:** construir pirâmides regulares de diversas bases diferentes onde estão evidenciados os triângulos retângulos utilizados no cálculo da altura da pirâmide.

- **Conhecimentos envolvidos:** geometria espacial, geometria plana, trigonometria, medição de segmentos.

- **Tempo previsto:** 150min

- **Material necessário:** canudinhos, tesouras, réguas, fio de nylon, uma calculadora. Os alunos devem trazer material para fazer anotações.

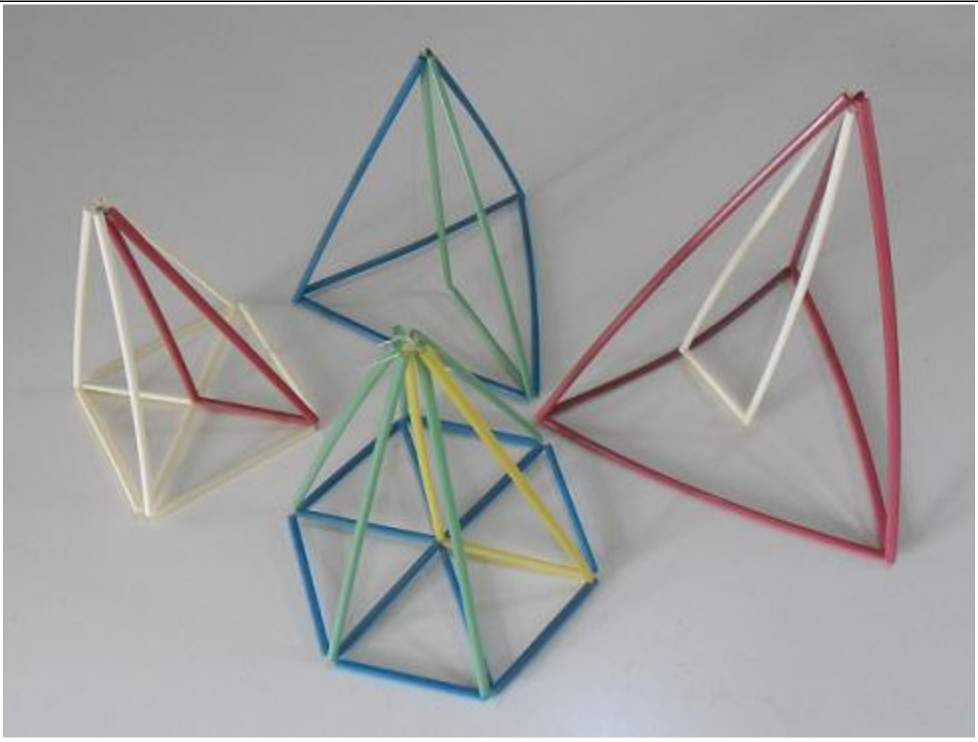


Figura 31 - Exemplos de pirâmides de canudinho.

- **Desenvolvimento:**

1) Planejamento (70min)

- Desenho no quadro de exemplos de poliedros, a começar por prismas e pirâmides. Discussão com os alunos de como eles definiriam poliedro, prisma e pirâmide. Após a discussão, escrever no quadro as definições acordadas, que devem ser variantes das seguintes:

➢ Denomina-se poliedro o sólido delimitado por um número finito de polígonos planos, de modo que dois desses polígonos não estão em um mesmo plano e cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos.

➢ Denomina-se prisma o sólido formado pela reunião de segmentos que tem uma extremidade no polígono P, que está contido no plano α, e a outra no polígono P', congruente a P e contido num plano β paralelo a α.

➢ Denomina-se pirâmide o sólido formado pela reunião de todos os segmentos que tem uma extremidade no polígono P, que está contido no plano α, e outra extremidade no ponto V, fora de α. Se P for um polígono regular e o segmento que liga o centro de P a V for ortogonal a α, então a pirâmide é dita regular.

- Entrega das fichas de descrição e planejamento do poliedro (vide página 81), que os alunos deverão preencher começando pela escolha do polígono regular que será a base da pirâmide que eles construirão e quanto medirá o seu lado, fazendo esboços na ficha denotando as medidas definidas. (É desejável que esse polígono não seja um triângulo nem um quadrado.)

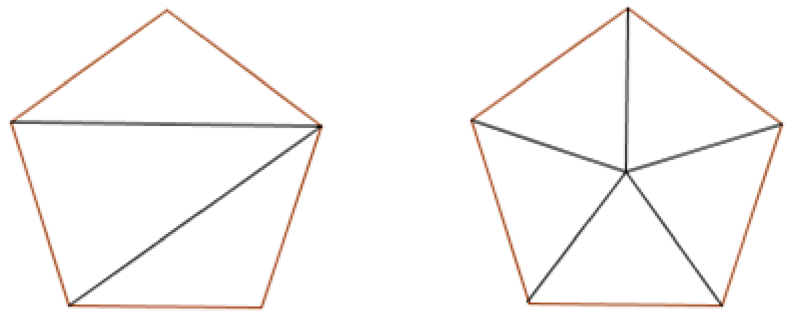


Figura 32 - Duas maneiras de triangularizar um pentágono regular.

- Triangularização da base, por motivos práticos que serão vistos na fase de montagem e também para que seja possível calcular sua área, no caso de polígonos com cinco ou mais lados. Inicialmente deve ser feito um esboço. É possível decompor um polígono em triângulos de várias formas diferentes; optaremos pela decomposição em triângulos cujos vértices serão dois vértices consecutivos do polígono e o centro do polígono regular, como representado na imagem da direita da figura 32.

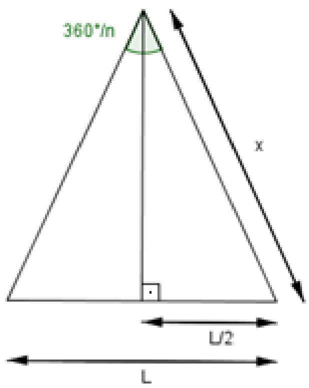


Figura 33 - Um dos triângulos internos do polígono na decomposição sugerida.

- Cálculo da medida dos lados congruentes de cada triângulo isósceles interno através da relação $x = \frac{l/2}{sen(360°/2n)}$, onde l é a medida do lado do polígono da base, n é o número de lados da base e x é a medida dos lados congruentes. Veja a figura 33.

- Cálculo da área dos triângulos internos da base e, através deles, da área da base.

- Cálculo do volume da pirâmide.

- Listagem dos canudinhos necessários à construção separando-os em grupos quanto a sua posição no poliedro (aresta da base, aresta lateral, lado do triângulo interno ou altura da pirâmide) e anotando o comprimento e a quantidade necessários para cada grupo de canudinhos.

2) Montagem (80min)

- Montagem da base, utilizando canudinhos de uma única cor para todos os segmentos. Montada a base, chamar a atenção para o fato de que os ângulos não estão fixos, ou seja, existe uma "folga" com a qual a base consegue se deformar. Discussão acerca da rigidez do triângulo, que é o único caso em que, determinando o tamanho dos lados, determinamos um único polígono, visto que os ângulos também ficam unicamente determinados. Pode-se mostrar aos alunos a aplicação desse fato, que é visível em diversas construções e estruturas, como nas imagens abaixo. Conclui-se que, para que a base da pirâmide seja um polígono regular rígido, esta deve ser decomposta em triângulos.

- Construção dos triângulos internos da base com canudinhos de mesma cor das arestas da base, exceto por um dos segmentos, no qual deve ser utilizado um canudinho de outra cor. Este fará parte do triângulo destacado. Apesar da medida do segmento interno ter sido calculada durante o planejamento, ela deve ser adaptada à base. Quando planejamos, estamos numa situação abstrata, pois os segmentos não possuem espessura alguma. Logo, quando passamos à prática, os canudos ficarão abaulados quando ocorrer a montagem, justamente por causa de sua espessura, que não é levada em conta no planejamento. Assim, deverá ser feita uma ajustagem na medida dos segmentos internos da base, diminuindo um pouco seu comprimento para que a montagem fique bem ajustada. Antes que a montagem proceda, todos os canudos que servirão de segmentos internos devem possuir a mesma medida, e seu "encaixe" na base deve ser testado antes do fio ser amarrado.

Figura 34 - Exemplos de aplicação da rigidez do triângulo em estruturas de construções civis.

- Montagem das arestas laterais. Todas as arestas laterais devem ser da mesma cor da base, exceto a que pertence ao triângulo evidenciado, que deverá ser da mesma cor utilizada no lado do triângulo interno diferenciado, assim como a altura da pirâmide. É recomendável salientar que nem todos os canudinhos são arestas da pirâmide, como, por exemplo, os que são internos à base e o da altura da pirâmide.

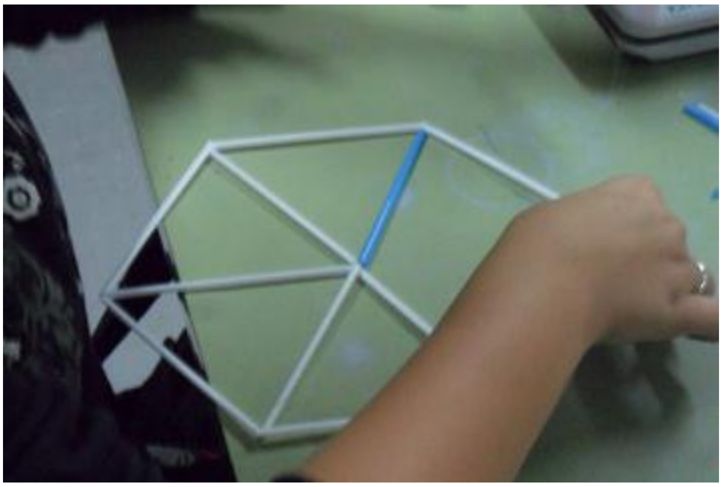


Figura 35 - Base hexagonal sendo triangularizada, com um segmento interno em destaque.

- Montagem da altura da pirâmide, utilizando a segunda cor. A medida do canudo utilizado na altura também deverá ser ajustada para que o canudo não fique abaulado.

Ficha de descrição da pirâmide

Esboço da pirâmide (com medidas da aresta da base e aresta lateral):

Esboço da base triangularizada:

Esboço do triângulo interior da base:

Cálculo da área e da medida dos lados do triângulo interior da base:

Cálculo da área da base:

Cálculo da altura da pirâmide:

Cálculo do volume da pirâmide:

Canudinhos necessários à construção:

Posição no poliedro	Comprimento	Quantidade

Na implementação da segunda oficina, as dificuldades que os alunos apresentaram na montagem do prisma me motivaram a reduzir o número de alunos para três por grupo, onde cada um ficaria responsável pela construção de um tetraedro; com os três finalizados, eles deveriam experimentar o encaixe dos três até conseguirem montar o prisma sem grandes dificuldades, para só então construí-lo. Logo, a oficina passaria a contar com três momentos: construção dos tetraedros, encaixe dos tetraedros compondo o prisma e montagem do prisma.

5.1.2. Decomposição de um prisma triangular em três pirâmides de mesmo volume: planejamento final

A motivação para esta atividade vem das fórmulas utilizadas para calcular o volume da pirâmide e do prisma, respectivamente, $V_{pirâmide} = \frac{A_b \cdot h}{3}$ e $V_{prisma} = A_b \cdot h$. Segundo as fórmulas, um prisma que possua a mesma base e a mesma altura que uma pirâmide terá um volume três vezes maior que o dela. Construir-se-á, então, um prisma

e três pirâmides que possuam o mesmo volume, de forma que quando encaixadas completam um prisma de mesmas medidas do primeiro.

- **Objetivos:** construir conjuntos de poliedros constituídos por um prisma triangular e sua decomposição em três tetraedros que possuam, cada um, um terço do volume do prisma.

- **Conhecimentos envolvidos:** geometria espacial, geometria plana, trigonometria, medição de segmentos.

- **Tempo previsto:** 1h40min.

- **Número de participantes:** grupos de três alunos.

- **Materiais necessários:** canudinhos, tesouras, réguas, fio de nylon, uma calculadora, quadro e giz. Os alunos devem trazer material para fazer anotações.

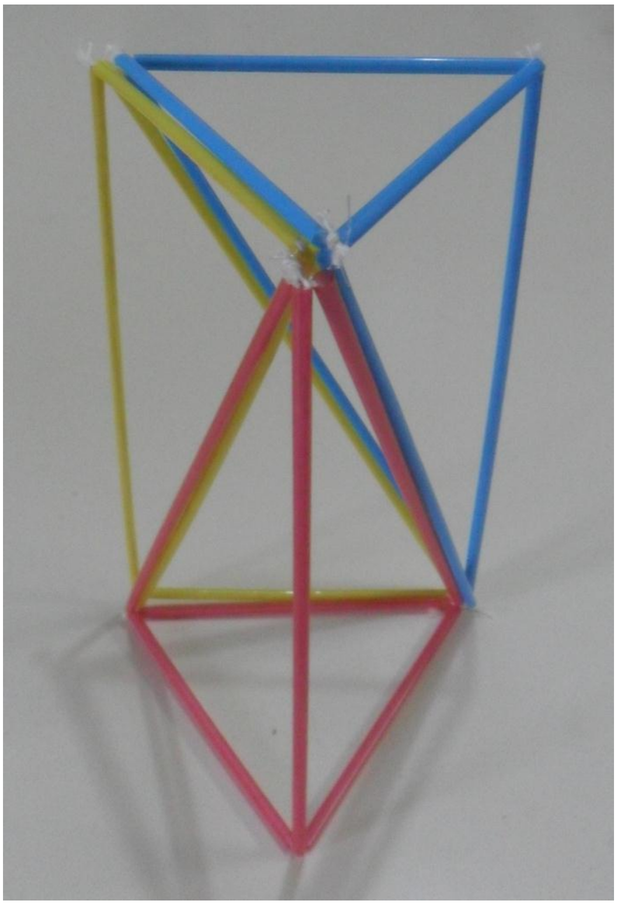


Figura 36 - Prisma triangular formado por três pirâmides de mesmo volume.

- **Desenvolvimento:**

<u>1) Construção dos tetraedros</u> (50min)

- Colocar no quadro as fórmulas do volume da pirâmide e do prisma, $V_{pirâmide} = \frac{A_b \cdot h}{3}$ e $V_{prisma} = A_b \cdot h$, respectivamente. Chamar a atenção para o fato de que as fórmulas implicam que $V_{pirâmide} = \frac{V_{prisma}}{3}$, ou seja, $3 \cdot V_{pirâmide} = V_{prisma}$. Discutir com os alunos como poderíamos comprovar esse fato na prática para um prisma triangular, e apresentar a proposta da oficina.

- Reprodução da figura 37, abaixo, no quadro. Todos devem começar esboçando o prisma triangular, definindo e denotando as medidas que serão utilizadas. Cada um dos alunos será responsável por construir um dos tetraedros mostrados na figura, utilizando uma única cor para cada um.

- Discussão com os alunos do porquê da pirâmide amarela, na figura 37, possuir o mesmo volume das outras duas, embora não seja congruente a elas: visualizando-a como uma pirâmide de base AFB e vértice em E, ela possui volume igual ao da pirâmide de base AFB e vértice em C; esta última pirâmide pode ser visualizada como tendo base em ABC e vértice em F, logo possui volume igual aos das outras duas. Na prática, todas as três pirâmides possuem uma face congruente, que representa metade da face lateral do prisma. Tomando essa face como base, pode-se verificar empiricamente que as três pirâmides possuem a mesma altura, e, portanto, o mesmo volume.

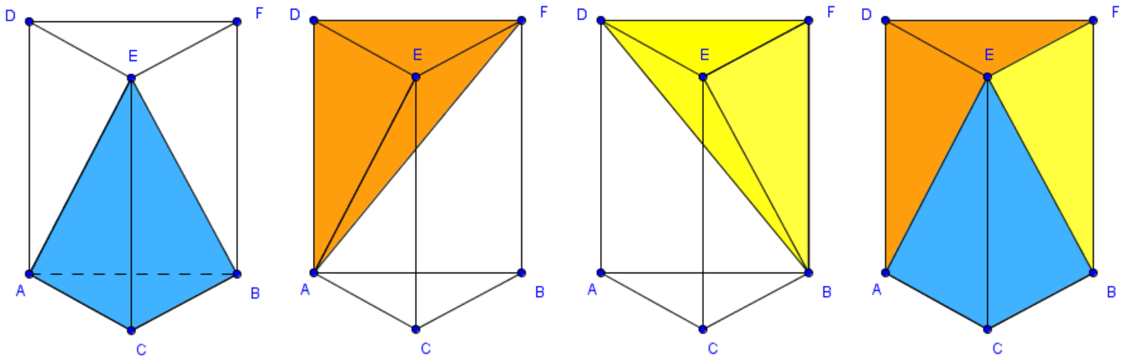


Figura 37 - Prisma triangular decomposto em três pirâmides de mesmo volume.

<u>2) Encaixe das pirâmides compondo o prisma</u> (15min)

- Com as pirâmides prontas, os alunos devem tentar encontrar a posição correta de cada uma para compor o prisma. Não é uma atividade tão fácil quanto parece. As melhores dicas é encontrar a face comum aos três tetraedros e identificá-las e observar o ângulo reto entre as faces, nas pirâmides.

<u>3) Construção do prisma triangular</u> (35min)

- Construção do prisma triangular, com as mesmas cores de canudinhos utilizadas na construção das pirâmides. Começar montando uma cópia da pirâmide azul da figura 37, e ir acrescentando os segmentos que faltam até completar o prisma, primeiro os da pirâmide amarela na figura.

- Comparação do prisma construído com a montagem dos três tetraedros, discutindo possíveis incongruências.

- Descrição pelos alunos do que foi feito na oficina e por que, a ser entregue escrita numa folha.

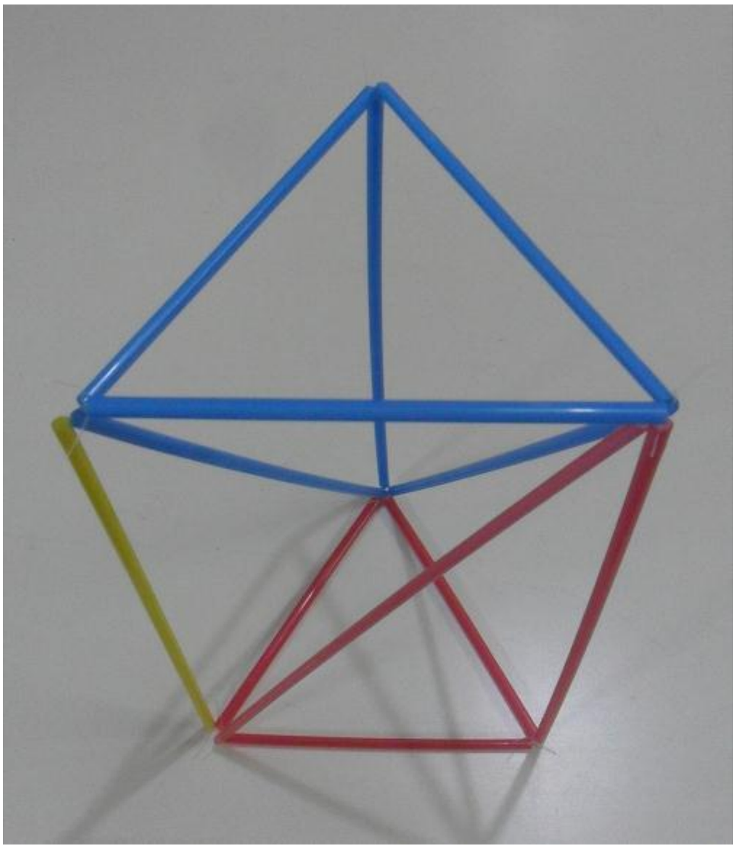


Figura 38 - Prisma montado utilizando-se as cores dos tetraedros, dando preferência à ordem azul, vermelho e amarelo.

No caso da terceira oficina, foram feitas duas implementações, cada uma delas apontando dificuldades no planejamento utilizado e desvendando possibilidades de aprimoramento das atividades. Nesse caso, o planejamento final aqui exposto será a terceira versão (ou revisão) do original. Entretanto, com certeza não se pode dizer que é a versão definitiva: se fossem feitas mais práticas, elas muito provavelmente apontariam outros melhoramentos e modificações possíveis, pois uma proposta, um planejamento, é sempre um objeto de natureza dinâmica.

Após a primeira prática, foi chamada a atenção para a necessidade de materiais (réguas, compassos, folhas de EVA) suficientes para todos os alunos, mas principalmente para a dificuldade de compor as identidades logarítmicas com a variedade de propriedades necessária. Nisto ficou claro que a última parte da atividade deveria ser feita preferencialmente com alunos que estivessem correntemente estudando esse conteúdo, não sendo muito adequada esta última atividade aos outros. A grande dificuldade com as generalizações incentivou a busca por alternativas, que foram encontradas no uso dos triângulos recortados de EVA, promovendo uma inversão na ordem das atividades e uma organização mais compacta das atividades por conteúdo matemático trabalhado. Tal divisão permite mesmo a segregação da oficina em duas, conforme feito na segunda implementação, nas quais os alunos participaram das duas primeiras partes, trabalhando construções geométricas e generalizações, mas não da terceira, que pode ser realizada com outra turma de alunos. Após a segunda implementação, foi percebido que o uso dos triângulos como material concreto poderia ser estendido ao uso de palitos, como forma de representação das identidades que ligam as peças entre si.

5.1.3. Triminó Logarítmico: planejamento final

- **Objetivo:** produzir cinco triminós logarítmicos, desenvolver construções geométricas, exercitar raciocínios de generalização, revisar e aplicar propriedades do logaritmo.
- **Conhecimentos envolvidos:** construções com régua e compasso, construções com régua graduada, ponto médio, mediatriz, medição de segmentos, raciocínios de generalização, propriedades do logaritmo.

- **Conhecimentos pré-requisitados:** propriedades dos logaritmos. (Preferencialmente, os alunos devem estar correntemente estudando propriedades dos logaritmos.) Conhecimentos sobre progressões aritméticas também são desejáveis, embora não estritamente necessários.
- **Tempo previsto:** 2h45min
- **Número de participantes:** dois grupos de três alunos.
- **Materiais necessários:** três folhas coloridas de EVA tamanho A4 por grupo, seis tesouras, seis compassos, seis réguas, dois rótulos do jogo (papéis descrevendo o jogo, conforme indicado abaixo), duas embalagens plásticas para armazenamento dos jogos confeccionados, uma caixa de fósforos ou de palitos de dentes. Os alunos devem trazer material para anotações e rascunhos.

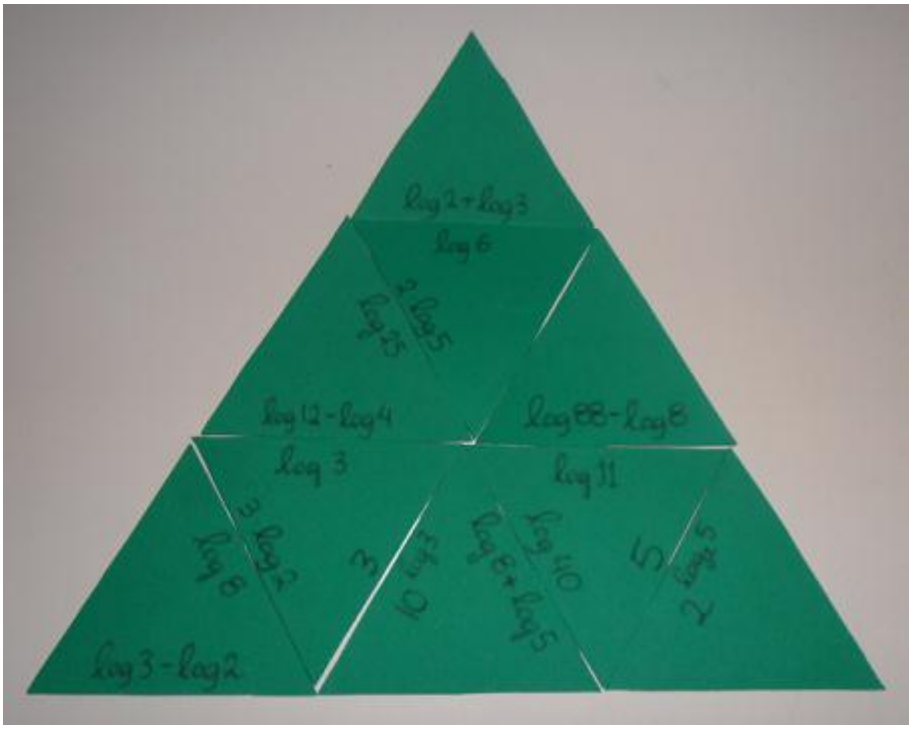


Figura 39 - Triminó Logarítmico de nove peças.

- **Desenvolvimento:**

<u>1) Construção e recorte de triângulos eqüiláteros</u> (45min)

- O primeiro passo para a construção de um jogo até então desconhecido é começar por apresentá-lo e explicar como jogá-lo. Mostrar para os alunos o Triminó já pronto e falar o que consta no seu rótulo: “Um Triminó Logarítmico é um quebra-cabeça, em que cada peça possui a forma de um triângulo equilátero, no qual pelo menos um de seus lados possui uma expressão matemática. As peças devem ser encaixadas identificando os

lados que possuam expressões equivalentes, formando, assim, um único triângulo equilátero.” As expressões envolvem propriedades do logaritmo, donde vem o título Triminó Logarítmico.

- Separar os alunos em grupos de 3 ou 4 componentes; cada grupo será responsável pela confecção de um Triminó.

- É proposta aos alunos a construção de um triângulo equilátero de maneira livre, ou seja, eles podem fazer uso da régua graduada, do compasso e do que mais estiver à sua disposição, como esquadro e transferidor. O objetivo é verificar a familiaridade que os alunos têm com o compasso e deixar clara a dificuldade dessa construção sem este instrumento, além de chegar à conclusão intuitiva de que as medidas dos ângulos internos do triângulo também terão necessariamente de ser iguais entre si.

- Discutir com os alunos as construções que surgiram, argumentando por que os triângulos construídos são equiláteros (ou não). Em particular, pelo menos as duas construções abaixo devem ser discutidas e justificadas passo a passo.

- Construção de um triângulo equilátero com régua e compasso: traçar um segmento de medida qualquer (que será a medida do lado do triângulo); traçar uma circunferência centrada em cada um dos extremos do segmento e que contenha o outro extremo; marcar um dos pontos de intersecção das circunferências; traçar os segmentos que ligam esse ponto a cada um dos extremos do segmento. Veja a figura abaixo. Argumentar porque o triângulo construído é equilátero, baseando-se nos raios das circunferências.

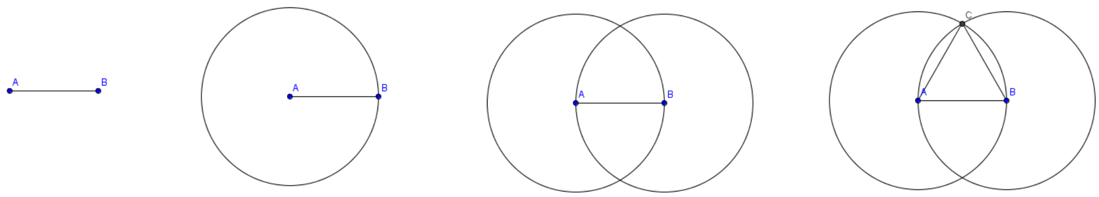


Figura 40 - Construção passo a passo de um triângulo equilátero com régua e compasso.

- Construção de um triângulo equilátero com régua graduada: traçar um segmento de tamanho qualquer; medi-lo com a régua para encontrar seu ponto médio; utilizando a régua, traçar uma reta aproximadamente perpendicular ao segmento dado passando pelo ponto médio, que é denominada mediatriz do segmento; com a graduação da régua, determinar qual ponto da mediatriz dista das extremidades da cada um dos lados do segmento inicial o comprimento deste; traçar dois segmentos unindo esse ponto aos extremos do segmento inicial.

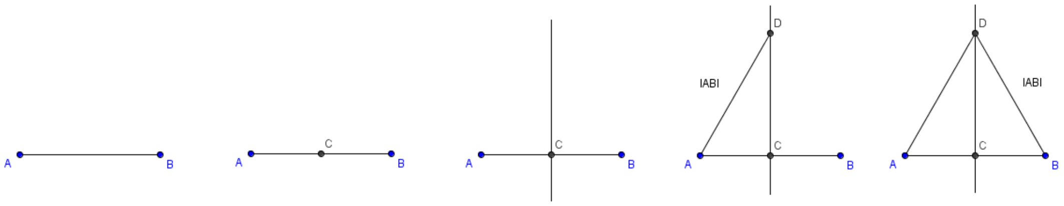


Figura 41 - Construção passo a passo de um triângulo equilátero com régua graduada.

Note que a régua graduada não pode garantir a perpendicularidade entre duas retas, de modo que a reta construída durante esse processo é apenas uma aproximação da mediatriz do segmento.

- Preenchimento das folhas de EVA com triângulos eqüiláteros medindo 8cm de lado, utilizando algum dos métodos discutidos acima.

<u>2) Determinação do número de peças e ligações de um Triminó</u> (60min)

- Discutir com os alunos: Um Triminó montado possui a forma de um triângulo equilátero formado por vários triângulos equiláteros menores, mas quantos? Esse pode ser um número arbitrário? Os triângulos recém recortados podem ser utilmente manuseados na busca da resposta.

- Desenhar no quadro um triângulo equilátero formado por quatro triângulos equiláteros menores, e pedir que eles conjecturem quantos triângulos menores formarão o próximo triângulo maior. Encontrada a resposta (9), perguntar novamente quantos triângulos pequenos formarão o próximo. Chegar, com o auxílio dos alunos, à conjectura de que o número de peças de um triminó é sempre um quadrado perfeito.

- Passar ao estudo da variação do número de peças entre um Triminó e o próximo, verificando que a diferença do número de peças entre eles é sempre um número ímpar, que pode ser interpretado como correspondente ao número de peças adicionadas à sua

base. Mais uma vez, a manipulação dos triângulos de EVA recortados pode ser muito útil na formulação e verificação de hipóteses por parte dos alunos. Concluir discutindo a identidade $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, que pode ser deduzida através da fórmula da soma de uma PA finita, caso os alunos já tenham estudado esse conteúdo. Essa igualdade comprova a conjectura anterior acerca do número total de peças de um Triminó.

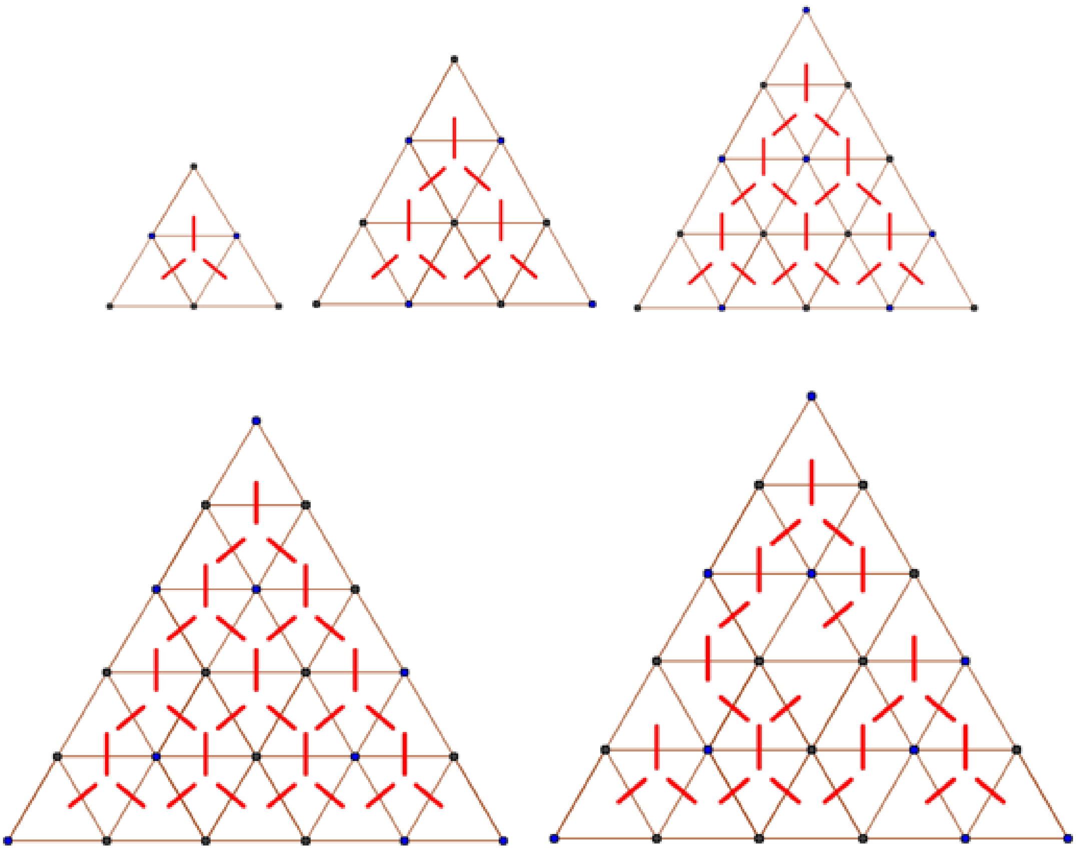


Figura 42 - Diagramas de triminós e ligações entre suas peças.

- Em um Triminó, cada peça é ligada a pelo menos uma outra através de expressões equivalentes, ou seja, cada peça possuirá pelo menos um lado de uma identidade logarítmica, como por exemplo $\log 12 = \log 3 + \log 4$. Veja os diagramas abaixo. Em cada diagrama, os traços vermelhos representam ligações entre duas peças, ou seja, uma identidade logarítmica. Começar desenhando no quadro o diagrama do triminó de 4 peças com todas as suas ligações, e ir progredindo até o de 25 peças. Perguntar aos alunos: É possível prever quantas ligações serão utilizadas no triminó de 36 peças? É possível

generalizar o raciocínio para um triminó de n^2 peças? Com a ajuda dos alunos e do material concreto – triângulos de EVA e palitos de fósforos ou de dentes, para representar as ligações entre os triângulos –, formular hipóteses para responder as questões. Uma possível forma de argumentar é através da variação entre o número de ligações entre um Triminó e seu sucessor. Dividir o número de ligações em grupos de três, como sugere os diagramas, também pode ser útil.

- Note que não é estritamente necessário para a montagem que cada peça do Triminó esteja ligada a cada uma das outras à sua volta; algumas ligações são desnecessárias desde que as peças que seriam unidas por elas tenham sua posição fixada por outras ligações. O último diagrama da figura acima mostra o Triminó de 25 peças com um número otimizado de ligações: no lugar das 30 ligações inicias, foram utilizadas apenas 24. Discutir com os alunos: Existe um menor número de ligações necessário? Como encontrá-lo? Aqui, mais uma vez a representação das ligações entre os triângulos de EVA pelos palitos é vantajosa, pois se pode retirar um palito e verificar a necessidade da ligação, podendo, se preciso, realocá-la novamente no seu lugar. Note que, com menos ligações, a construção do Triminó é menos trabalhosa, mas a montagem do quebra-cabeça fica mais difícil, pois antes sabíamos que se uma peça tinha algum lado sem escrita alguma, então ela era parte da borda externa do triângulo grande quando montado. Além disso, a correção da posição de uma peça poderia ser verificada através de mais de uma ligação, o que não é possível caso suas ligações se reduzam a uma só, por exemplo.

- Neste momento, os alunos devem decidir quantas ligações utilizarão e esboçar um diagrama do seu Triminó montado com as ligações indicadas.

- Decidido o tamanho, o número de ligações entre as peças e a sua disposição, os alunos deverão fazer um diagrama do Triminó montado, como os da figura 42.

<u>3) Planejamento e escrita das identidades logarítmicas</u> (60min)

- Fazer uma breve revisão das propriedades básicas do logaritmo: $\log a + \log b = \log ab$; $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$; $\log a^n = n \cdot \log a$; $b^{\log_b a} = a$. Os alunos devem então criar equações logarítmicas utilizando essas propriedades. Cada membro de cada grupo deve criar pelo menos uma equação envolvendo cada uma das cinco propriedades. Devido à limitação de espaço em cada peça, devem ser priorizadas equações curtas. Não pode haver membros de uma equação repetidos, e o professor deve revisar cada lista de equações dos grupos, a fim de ver se todas estão corretas.

- Finalmente, os alunos deverão escrever nas peças um membro de cada equação. Antes de começar a escrita, as peças já deverão estar dispostas na forma de um triângulo equilátero grande, para facilitar a identificação do diagrama planejado.

5.2. MATERIAIS CONSTRUÍDOS

Em oficinas cuja proposta é o ensino-aprendizagem através da construção de materiais didáticos, os resultados mais óbvios a serem esperados são os próprios materiais a serem construídos. Tal produção é o alicerce deste trabalho, uma vez que é a motivação para o estudo e aplicação dos conceitos e conteúdos que as práticas buscam trabalhar.

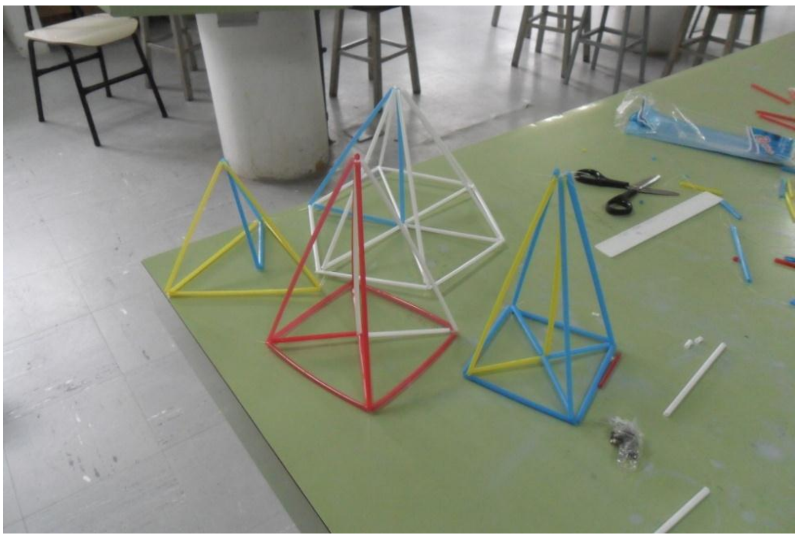


Figura 43 - Quatro das pirâmides construídas na primeira oficina.

Na primeira oficina, cada um dos cinco alunos construiu, pelo menos parcialmente, uma pirâmide. Foram duas pirâmides quadradas, uma triangular, uma hexagonal e uma pentagonal, cada uma das quais possui, em destaque, um dos triângulos retângulos que podem ser utilizados para calcular a altura da pirâmide. A apresentação de poliedros como esses em aula pode constituir em si mesma uma atividade interessante para ilustrar conceitos e aprofundarmo-nos em propriedades que muitas vezes uma representação em duas dimensões pode não deixar claras.

Seguindo a classificação dos materiais didáticos por função, apresentada no capítulo 2, as pirâmides de canudinho se enquadram claramente na classe dos materiais que são modelos. Já os sólidos construídos na segunda oficina – um prisma triangular e três tetraedros – se encontram na interseção desta classe com a classe dos materiais para demonstrações e comprovações. De fato, a segunda oficina apresentava uma característica diferenciada da primeira, pois a atividade de construção possuía uma veia comprovativa ausente na anterior. Os quatro poliedros construídos já são modelos eficientes em separado, mas como conjunto, representam uma verificação da fórmula do volume da pirâmide.

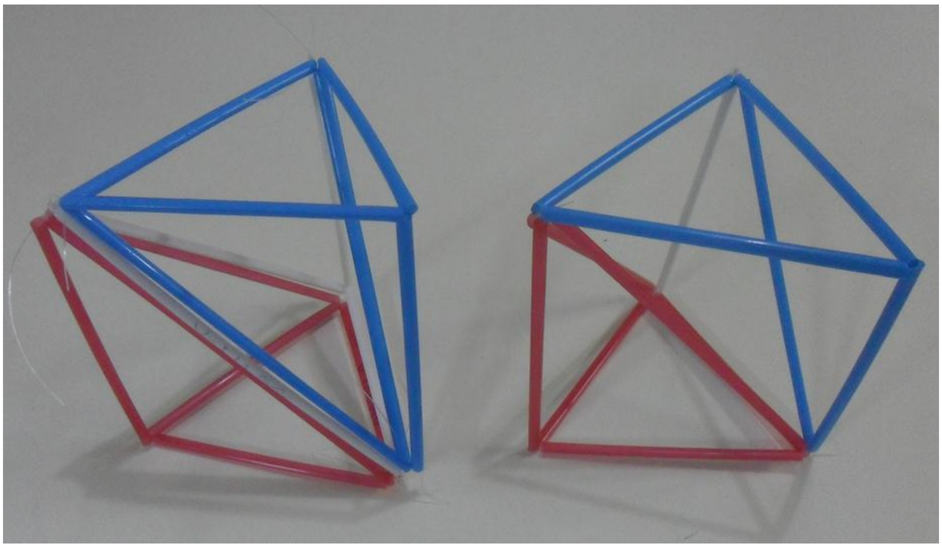


Figura 44 - Tetraedros e prisma montados na segunda oficina.

Ora, não é lá muito intuitiva essa relação entre um prisma e uma pirâmide de mesma base, como se pode observar na oficina: os alunos apresentaram dificuldades em se convencer de que a terceira pirâmide localizada dentro do prisma era de fato uma pirâmide e possuía o mesmo volume que as outras duas. Uma das grandes virtudes da matemática é que, mesmo que não seja recomendável apresentar a demonstração de vários dos resultados vistos no ensino médio, sempre podemos apresentar argumentos para convencer o aluno, ou melhor, apresentar oportunidades para que o aluno (re)invente argumentos que convençam a si mesmo. Embora não seja uma demonstração (até por se tratar de um caso particular de pirâmide, a triangular), um conjunto de poliedros como o construído pode ajudar o aluno a convencer-se da validade da fórmula.

O material que se visava construir na terceira oficina pode ser classificado como um material para resolver problemas. O Triminó Logarítmico é um jogo voltado para a revisão e aplicação das propriedades dos logaritmos. Na primeira prática dessa oficina, foram construídos cinco Triminós. Porém, as equações que constam em todos eles são resolvidas em sua grande maioria apenas com a aplicação da propriedade do logaritmo de um produto. Ou seja, as montagens requerem apenas essa propriedade, tornando-se uma revisão incompleta do conteúdo. Na segunda prática, a confecção do jogo não foi concluída, mas foram obtidos dois conjuntos de 36 triângulos eqüiláteros de EVA, que ainda podem compor dois Triminós futuramente.

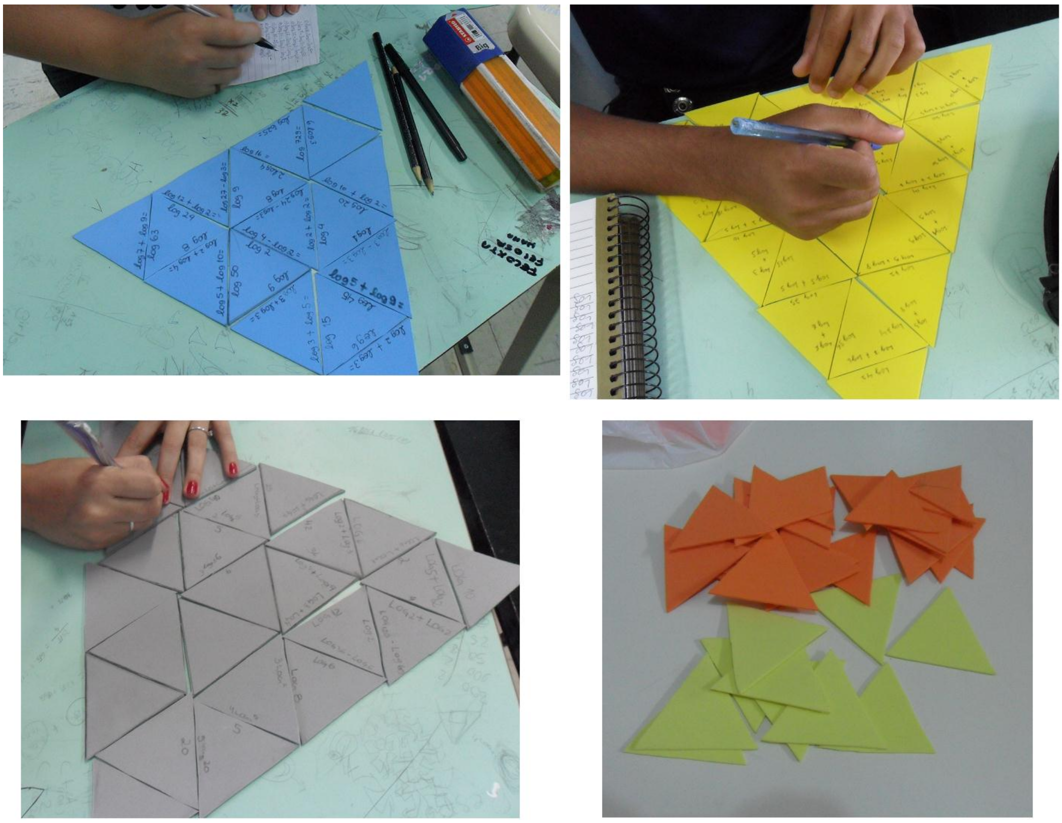


Figura 45 - Três dos triminós produzidos na primeira implementação da terceira oficina e os triângulos produzidos na segunda implementação.

5.3. ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA DOS ESTUDANTES

No texto “Para onde vai a educação?”, Jean Piaget (1971) enuncia aquilo que chama de Princípio Fundamental dos Métodos Ativos: compreender é inventar, ou reconstruir através da invenção. O autor ressalta que tais necessidades devem ser observadas se o que se pretende é a formação de indivíduos capazes de produzir ou de criar, e não apenas reproduzir. O terceiro resultado obtido com o presente trabalho foi a atitude ativa assumida pelos alunos durante as oficinas. Todas as atividades desenvolvidas estavam permeadas com o intuito de fazer com que cada aluno procurasse criar por si mesmo soluções adequadas aos problemas impostos pela proposta. E esse objetivo foi alcançado em diversas ocasiões, como, por exemplo, na construção de triângulos equiláteros utilizando diferentes instrumentos, na situação observada em que as bases das pirâmides não ficavam rígidas ou mesmo ao longo da construção de cada poliedro.

Uma coisa, porém, é inventar na ação e encontrar aplicações na prática para certos conhecimentos. Outra é ter a consciência do significado de suas ações e delas extrair um conhecimento reflexivo e teórico (PIAGET, 1971). Não foram em todos os momentos, nas práticas realizadas, que este segundo nível foi alcançado. Durante as oficinas de construção de poliedros, foi visível em vários momentos a busca dos alunos por fórmulas prontas para apenas substituir os valores dados e encontrar um resultado vazio de significado. Durante as construções geométricas, na terceira oficina, notou-se claramente que alguns alunos simplesmente buscavam reproduzir algumas construções que já tinham feito, mas sem conseguir argumentar a validade da sua construção, enquanto outros apenas copiavam o que viam seu colega fazer. Porém, em outros momentos, a atitude criativa dos alunos reconstruiu as soluções esperadas e até mesmo surpreendeu o professor trazendo abordagens que não estavam previstas, enriquecendo em muito a atividade. Mas o “mais principal” foi a comprovação e o exercício da capacidade dos alunos de produzirem coisas novas e serem os construtores legítimos do seu raciocínio. Foi o que aconteceu durante o trabalho de generalizações, na segunda prática da terceira oficina, onde o aluno T demonstrou que a variação do número de peças de um Triminó para o próximo aumentava em duas peças a cada etapa, e na parte de construções geométricas da mesma oficina, na qual o aluno P apresentou a construção de um triângulo equilátero através da sua inscrição num círculo.

O supracitado estágio de consciência sobre suas ações foi particularmente testado na segunda oficina. Esta, conforme já falado, apresentava uma característica demonstrativa, diferente das outras oficinas. A última atividade prevista no planejamento, descrição das atividades e justificativa da atividade, foi proposta justamente para verificar se os alunos compreendiam as implicações da construção efetuada. As respostas obtidas sugerem que a maior parte dos alunos não alcançou esse estágio. Porém, devem ser levadas em conta a dificuldade de transcrição dos pensamentos matemáticos, que acredito que alguns alunos apresentaram, e a falta de objetividade nas respostas. Contradizendo as respostas obtidas, o comportamento dos alunos ao longo da oficina, desde o início da atividade, quando lhes foi perguntado como poderíamos comprovar a fórmula do volume da pirâmide, até o encaixe dos tetraedros na composição do prisma, me fazem crer que a atividade teve êxito também no que toca à significação compreendida pelos alunos.

Outro ganho do trabalho desenvolvido foi o exercício efetuado pelo professor de se colocar na posição de propositor de atividades e como organizador de contra-exemplos que levam à reflexão e obriguem o aluno a repensar seus raciocínios, controlando as conclusões apressadas. Parte da escolha dessa posição assumida provém da escolha de utilizar a adaptação do método clínico piagetiano como atitude pedagógica. Exemplos dessa atitude são encontrados em todas as práticas. É um papel que difere da ideia tradicional de professor, naturalizada após os vários anos passados como aluno de professores que são basicamente conferencistas e transmissores de soluções já prontas, sendo, portanto, necessário treinar e disciplinar-se para não incorrer nas falhas comuns de concluir pelo aluno ou simplesmente desprezar seu raciocínio incorreto.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através dos resultados obtidos, é possível responder afirmativamente à nossa pergunta norteadora: a extensão da proposta de ensino-aprendizagem através da produção de materiais didáticos a alunos e conteúdos do ensino médio é relevante sim, e tem potencial para contribuir efetivamente na formação matemática dos alunos. A postura ativa assumida pelos alunos e as atividades investigativas proporcionadas, aliadas ao foco de construir materiais concretos, conferem aos estudantes o papel de responsáveis pela criação também do seu saber. Compreender é inventar, e inventando técnicas e raciocínios para a produção dos materiais desenvolvidos, os alunos os compreenderam melhor do que o fariam se apenas os manipulassem.

É importante ressaltar que outro professor, com outro grupo de alunos, realizando práticas baseadas em outros materiais, muito provavelmente obterá resultados diferentes dos aqui expostos. Ao longo do trabalho, foram apresentadas algumas sugestões de materiais bivalentes, e acredito que muitas mais surgirão para quem se der ao trabalho de procurá-las. O Triminó Logarítmico, por exemplo, pode ser adaptado para visar o estudo de qualquer conteúdo. O que este caso particular trazido aqui comprova é que a produção de materiais didáticos é uma estratégia válida para o ensino e para a aprendizagem em matemática, é mais uma ferramenta disponível para a prática educativa.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, Claudi; BURGUÉS, Carme; FORTUNY, Josep Maria. **Materiales para construir la Geometria.** Madri, Editora Sintesis, 1991.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David William; SCHIELIEMANN, Analucia. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo, Cortez Editora, 1989.

CARRAHER, Terezinha Nunes. **O método clínico: usando os exames de Piaget.** Petrópolis, Editora Vozes, 1983.

DELVAL, Juan. **Introdução à prática do método clínico: Descobrindo o pensamento das crianças.** Porto Alegre, Editora Artmed, 2001.

FAGUNDES, Léa da Cruz. **Materiais manipulativos no ensino de matemática a crianças de 7 a 14 anos – Período das operações concretas.** Palestra proferida no Seminário Nacional. 1977.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino de Matemática**. Faculdade de Educação da UNICAMP. Publicado no Boletim SBEM-SP, n. 7, julho-agosto de 1990. Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/sala/didaticos/recursos_didaticos.asp?aux=C> Acesso em 28 de novembro de 2011.

GUZMÁN, Miguel de. **Para pensar mejor: Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos**. Madri, Ediciones Pirámide, 1997.

NACARATO, Adair Mendes. **Eu trabalho primeiro no concreto.** Revista de Educação Matemática – Ano 9, nos. 9-10. 2004.

PEREIRA, Maria Carolina. **Construindo o Frac-soma 235, e conhecimento, no ensino básico. Trabalho de conclusão de curso.** UFRGS, 2009. Disponível em <http://hdl.handle.net/10183/18217>. Acesso em 21 de novembro de 2011.

PIAGET, Jean. **Para Onde Vai a Educação?** José Olympio Editora. Rio de Janeiro. 1984.

ANEXO I – Registros escritos dos alunos participantes da segunda oficina

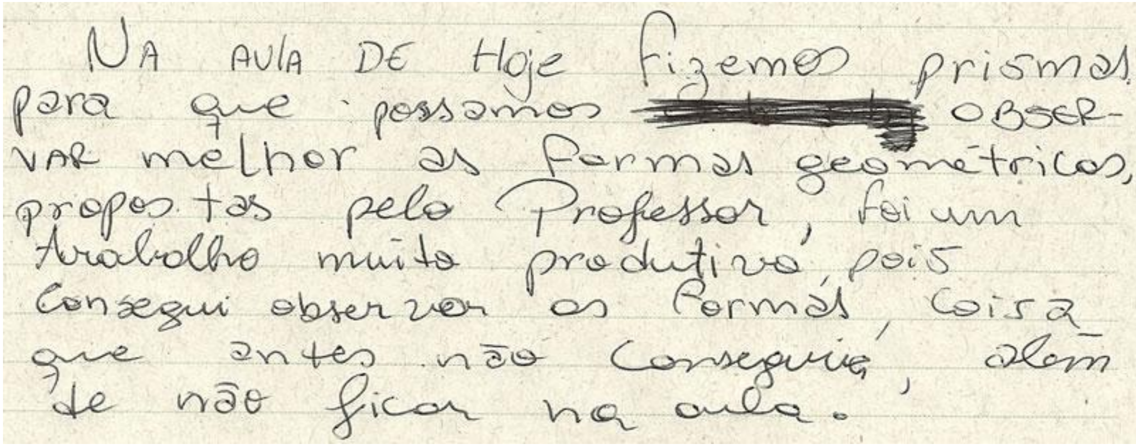

NA AULA DE Hoje fizemos prismas
para que possamos [redacted] OBSER-
VAR melhor as formas geométricas,
propostas pelo Professor, foi um
trabalho muito produtivo, pois
Consegui observar as formas, coisa
que antes não conseguia, além
de não ficar na aula.

Figura 46 - Registro escrito do aluno J.

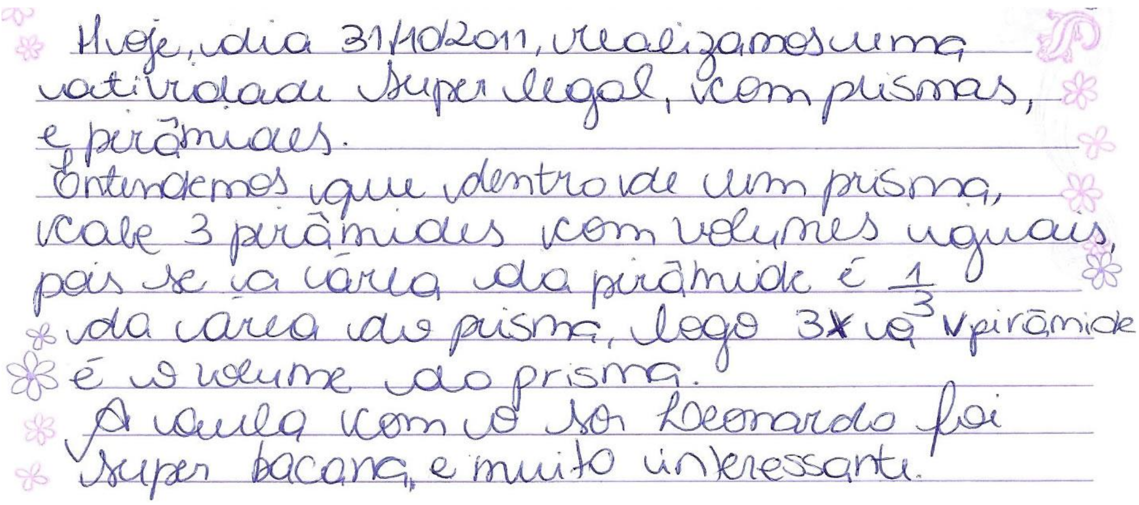

Hoje, dia 31/10/2011, realizamos uma
atividade super legal, com prismas,
e pirâmides.
Entendemos que dentro de um prisma,
cabe 3 pirâmides com volumes iguais,
pois se a área da pirâmide é 1/3
da área do prisma, logo 3 x a Vpirâmide
é o volume do prisma.
A aula com o Sor Leonardo foi
super bacana, e muito interessante.

Figura 47 - Registro escrito da aluna A.

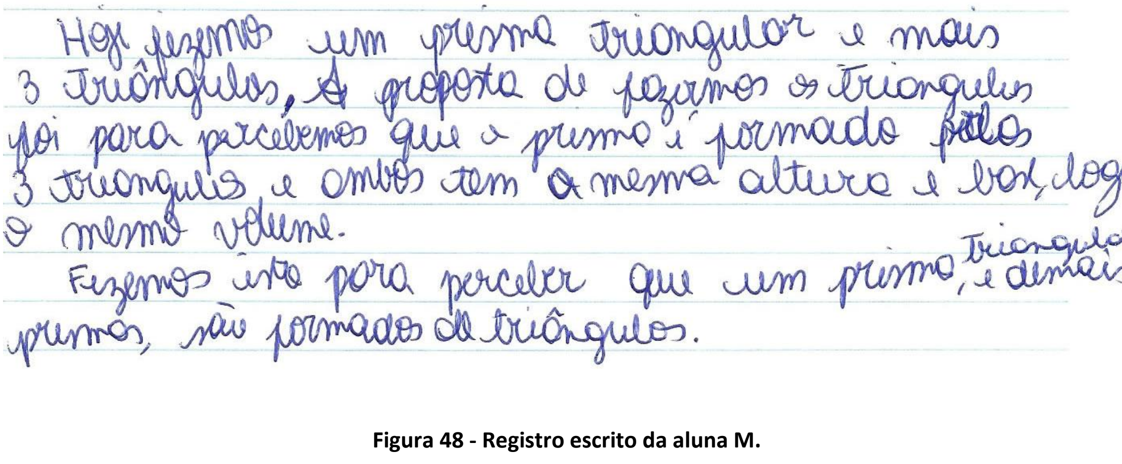

Hoje fizemos um prisma triangular e mais
3 triângulos, A proposta de fazermos os triângulos
foi para percebermos que o prisma é formado pelos
3 triangulos e ambos tem a mesma altura e base, logo
o mesmo volume.
Fizemos isto para perceber que um prisma triangular, e demais
prismas, são formados de triângulos.

Figura 48 - Registro escrito da aluna M.

No trabalho, nós fizemos 3 pirâmides com
a mesma altura, para que com essas piramides, pudes-
semos montar um prisma triangular. Achei divertido,
pois alguma aula de matemática tem que ser
descontraida, tambem achei muito "difícil" montar as
piramides, mas...

Figura 49 - Registro escrito do aluno R.

Hoje fizemos três pirâmides e um prisma de base
triângular, para depois juntarmos as três pirâmides de
certo modo para que eles tenham o mesmo volume do
prisma e cada triângulo tem o mesmo volume dos outros.
Fizemos isso para ver que um prisma com base triângu-
lar tem o mesmo volume dos três triângulos juntos.

Figura 50 - Registro escrito da aluna K.