

Instituto de Física

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

CORRELAÇÃO ANGULAR GAMA-GAMA

COM

PERFURAÇÃO ALEATORIA

Claudio Scherer

Tese apresentada ao Instituto de Física  
da Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul para obtenção de título de Doutor  
em Ciências.

Porto Alegre  
1971

A nous pais

A Elza

## PREFÁCIO

Em abril ou maio de 1967, quando eu havia recentemente concluído o curso de Bacharelado em Física, os Professores Theodor Maria e Leroy Billemburg propuseram-me um pequeno problema relacionado com meus trabalhos teóricos em correlação angular. Este seria um exercício inicial que me faria tomar contacto com a teoria de correlações angulares e não se cogitava, na ocasião, de transformá-lo numa publicação e muito menos numa tese de Doutorado. Trabalhando sob orientação desses professores, obtive uma solução bem diferente da que esperávamos, e isto motivou-me a continuar trabalhando no mesmo assunto. O referido problema constitui o eixo em torno do qual se desenvolve a presente tese e encontra-se discutido no parágrafo I-5.

Foi graças à constante orientação que recebi do Prof. Maria, a quem devo grande parte do que aprendi sobre Física desde a conclusão do curso de graduação, que esta tese pôde ser escrita. A ele quero extender aqui o meu agradecimento especial. Extendo também meu agradecimento ao Prof. Billemburg pelas frutíferas discussões que mantivemos durante o desenrolar dos trabalhos que resultaram nesta tese.

Ao Prof. John Rogers agradeço as longas horas que gastou comigo, discutindo o modelo gasoso e sua aplicabilidade a situações físicas reais.

Proveitosas discussões foram mantidas com os Profs. Gerhard Jacob, Pedro da Rocha Andrade e Manfred Forker e com Vitor Hugo dos Santos. A eles meu agradecimento.

Ao Prof. David Mesquita da Cunha, Diretor do Instituto de Física, agradeço o apoio recebido.

A Alinka Szly Lépine, Wayne Seale e Oscar Sala, do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, agradeço a comunicação de resultados experimentais e teóricos.

A todos os meus colegas do Instituto de Física agradeço o apoio recebido e o ambiente de amizade que encontrei.

A Maria Terezinha Urb, pelo paciente trabalho de preparação do texto, meu muito obrigado.

O presente trabalho foi parcialmente financiado por: Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico, Conselho Nacional de Pesquisas, Conselho de Pesquisas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, United States Army Research Office e Organização dos Estados Americanos.

Porto Alegre, maio de 1971.

Claudio Scherer

## RESUMO

Estuda-se, usando o formalismo de matriz densidade, a correlação angular entre duas radiações gama sucessivamente emitidas por núcleos cujas interações com o resto da fonte são isotrópicas em média. Mostra-se que, escolhendo o eixo de quantização na direção da primeira radiação, a matriz densidade do ensemble de núcleos permanece diagonal nos números quânticos magnéticos  $M$  durante o tempo de vida do estado intermediário, mesmo quando o tempo de correlação  $\xi_c$  das interações é da mesma ordem de grandeza que o intervalo de tempo entre as duas radiações. Em particular, para tempos  $t \gg \xi_c$ , mostra-se que os fatores de atenuação  $G_M(t)$  da correlação angular são exponenciais únicas. Este resultado é obtido como consequência, essencialmente, da homogeneidade e isotropia das interações e não é restrito aos casos em que a teoria de perturbação é aplicável. Apresenta-se um método (método da vizinhança pequena) que pode servir como guia na construção de modelos para uma variedade de situações físicas para as quais se quer conhecer a distribuição de probabilidade  $P_M(t)$  de encontrar o núcleo no sub-estado  $M$  no instante  $t$ . A aplicabilidade deste método não se restringe aos casos em que  $\xi_c$  é pequeno comparado ao tempo de vida do estado intermediário. A correlação angular  $W(\theta, t)$  está relacionada com  $P_M(t)$  por uma expressão simples. Como exemplo, o método é aplicado a um gás monoatômico e obtêm-se resultados numéricos.

## ABSTRACT

The angular correlation of two successively emitted gamma radiations of nuclei embedded in a source, where the interactions between the environment and the nuclei are isotropic on the average, is studied with the density matrix formalism. It is shown that, choosing the quantization axis along the direction of the first radiation, the density matrix of the nuclear ensemble remains diagonal in the magnetic quantum numbers  $M$  during the lifetime of the intermediate state, even if the correlation time  $\xi_c$  of the interactions is of the same order of magnitude as the lifetime. For times  $t \gg \xi_c$  the attenuation factors  $G_c(t)$  of the angular correlation are shown to be given by single exponentials. This result follows essentially from the homogeneity and isotropy of the interactions and is not restricted to those cases where perturbation theory is applicable. A method (small neighbourhood method) is presented, which can be used as a guide in constructing models for a variety of physical situations for which one wants to know the probability distribution  $P_m(t)$  for finding the nucleus in the sub-state  $m$  at time  $t$ . The use of this method is not restricted to the cases where  $\xi_c$  is small compared to the lifetime. The angular correlation  $W(\theta, t)$  is related to  $P_m(t)$  by a simple expression. As an example, the method is applied to a monoatomic gas and numerical results are obtained.

## INDICE

INTRODUÇÃO .....	1
I- PERTURBAÇÃO ALEATORIA COM PEQUENO TEMPO DE CORRELAÇÃO .....	5
I-1. Teoria estatística de Dilleburg e Mazis .....	5
I-2. Probabilidade condicional e a equação Master .....	12
I-3. Interação perturbativa .....	15
I-4. Interação tipo potencial .....	22
I-5. Um modelo para gases .....	24
II- PERTURBAÇÃO ALEATORIA COM QUALQUER TEMPO DE CORRELAÇÃO .....	31
II-1. Fontes homogêneas e isotrópicas .....	31
II-2. Matriz densidade e probabilidade condicional .....	32
II-3. Método da vizinhança pequena .....	42
III- APLICAÇÕES .....	49
III-1. O papel de $g_{jk}(t)$ em correlação angular .....	49
III-2. Limite $\epsilon_2 \ll t$ .....	52
III-2-1 Usando a equação Master .....	52
III-2-2 Método direto .....	53
III-3. Modelo gasoso para qualquer tempo de correlação .....	55
III-3-1 Distribuição estatística das colisões .....	55
III-3-2 Dependência temporal da correlação angular .....	58
III-3-3 Resultados numéricos e discussão .....	61
III-4. Correlação integral: modelo gasoso simplificado .....	69
APÊNDICE .....	74
REFERÊNCIAS .....	80

## INTRODUÇÃO

Quando um núcleo atômico emite duas radiações gama em cascata  $\hat{0}$  ele passa por um estado intermediário, cujo spin chamaremos de  $\hat{I}$  (fig.1). Como ambas as radiações estão, de alguma maneira, correlacionadas com a direção de  $\hat{I}$ , estão também correlacionadas entre si. A distribuição de probabilidade  $W(\theta)$  para que a segunda radiação seja emitida a um ângulo  $\theta$  com a direção da primeira se chama correlação angular. Quando algum campo presente na região do núcleo radioativo provoca uma apreciável mudança na direção de  $\hat{I}$

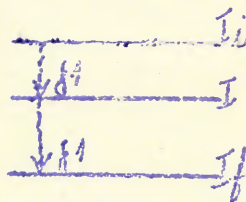


Fig.1

durante o intervalo de tempo  $\hat{t}$  entre as duas emissões, nós falamos de correlação angular perturbada. Experimentalmente é possível separar as radiações em grupos, correspondentes a diferentes intervalos de tempo  $\hat{t}$ , obtendo assim o que se chama de "forma diferencial da correlação angular", simbolizada por  $W(\theta, \hat{t})$ . Quando, ao contrário, esta separação não é feita, ou seja, quando um único "contador de coincidências" registra todos os eventos, temos a "forma integral de correlação angular", que nada mais é do que a integral em  $\hat{t}$ , de zero a infinito, de forma diferencial (veja eq.(153)).

Por outro lado, a correlação angular perturbada também se classifica de acordo com o tipo de perturbação. Quando a interação relevante sofrida pelo núcleo intermediário for com um campo fixo (Hamiltoniano de interação independente do tempo), aplicado ou interno (no caso de fontes cristalinas), fala-se de perturbação estática. Dois tipos de perturbação estática devem ser distinguidos: aquele em que todos os núcleos interagem com o mesmo campo (mesma direção e mesma magnitude), como nos casos de campo aplicado externamente, ou num macro-cristal, para núcleos radicativos igualmente situados na rede cristalina, e aquêle em que a direção do campo, embora estático, varia aleatoriamente como no caso de pó cristalino. No primeiro tipo a correlação angular oscila periodicamente, devido à precessão do spin nuclear ao redor da direção do campo, enquanto no segundo tipo, além da oscilação periódica, há um decréscimo temporal da Anisotropia <sup>1)</sup>.



Por outro lado, quando não há campo externo aplicado e, devido a algum tipo de movimento molecular da fonte (por exemplo, movimento Browniano, no caso de fontes líquidas) o campo interno na região do núcleo radioativo variar apreciavelmente, e aleatoriamente, durante o intervalo de tempo entre as duas radiações, fala-se de correlação angular aleatoriamente perturbada. O tempo característico  $\xi_c$  para a ocorrência de tal variação aleatória do campo interno costuma ser chamado de tempo de correlação<sup>2)</sup>.

Vamos escolher um sistema de referência com origem no núcleo radioativo e eixo  $z$  na direção da primeira radiação. Suporemos também que não se medem as polarizações dos gamas. Então, numa expansão de  $W(\theta, t)$  em polinômio de Legendre  $P_k(\cos\theta)$  apenas os termos pares em  $k$  contribuem, pois a conservação de paridade na interação eletromagnética exige simetria da correlação angular frente à transformação  $z \rightarrow -z$ . Escreve-se<sup>2)</sup>

$$W(\theta, t) = \sum_{k=\text{par}} A_k(1) A_k(2) G_k(t) P_k(\cos\theta) \quad (1)$$

onde  $A_k(1)$  e  $A_k(2)$  são parâmetros que dependem das características (spins dos estados nucleares e multipolaridade da radiação) da primeira e segunda emissão, respectivamente. Eles podem ser facilmente calculados e são encontrados na literatura sobre correlação angular não perturbada<sup>3)</sup>. Os "coeficientes de atenuação"  $G_k(t)$  dependem da interação no estado intermediário. Na presente tese procuraremos ver como podem ser calculados os "coeficientes de atenuação" para correlação angular aleatoriamente perturbada.

Quem primeiro calculou  $G_k(t)$  para o caso de perturbação aleatória foram Abragan e Pound, em 1953, num trabalho, hoje famoso, sobre correlação angular perturbada<sup>4)</sup>. Duas restrições limitam a aplicabilidade dos seus resultados, quais sejam, o uso de teoria de perturbação em primeira ordem e a condição  $t \gg \xi_c$ . Fisicamente, estas duas restrições podem ser entendidas em conjunto: o spin nuclear sofre um número grande de pequenas rotações sucessivas, aleatórias em direção, até que a segunda radiação seja emitida. Estão excluídos

os casos em que a interação é muito forte ou o tempo de correlação é muito grande (da ordem do tempo de vida do estado intermediário). O resultado obtido por eles tem a forma simples

$$G_k(t) = e^{-\lambda_k t} \quad (2)$$

onde  $\lambda_k$  contém as características da interação.

Em 1962, Dillenburg e Maris <sup>5,6)</sup>, usando um método estatístico, sem teoria de perturbação, mas mantendo a restrição  $t \gg \tau_c$  obtiveram

$$G_k(t) = \sum_i C_{ki} e^{-\lambda_i t} \quad (3)$$

onde  $\lambda_i$  e  $C_{ki}$ , dependem das características da interação. No limite de interações muito fracas o somatório (3) contém apenas um termo, reproduzindo o resultado de Abragam e Pound. Como não foram encontrados resultados experimentais convincentes da não aplicabilidade da equação (2), uma vez assegurada a restrição  $t \gg \tau_c$ , começou-se a acreditar que os resultados de Abragam e Pound deveriam ter uma validade mais geral <sup>7)</sup>, ou seja, que alguma restrição menos forte do que a aplicabilidade de teoria de perturbação poderia restringir o somatório (3) a um único termo. Em 1965, Dillenburg e Maris <sup>8)</sup> mostraram que isto acontece toda vez que a interação possa ser considerada como uma seqüência de potenciais, dependentes do tempo, aplicados no núcleo, independentemente da intensidade dos mesmos. O seu tratamento não é mais restrito por teoria de perturbação, mas não pode ser aplicado em casos em que uma reorientação de spin nuclear tenha um efeito importante sobre o movimento das partículas vizinhas ao núcleo, em interação com o mesmo (efeito de realimentação).

Na presente tese estudaremos o comportamento temporal da matriz densidade de um ensemble de núcleos sujeitos a perturbações aleatórias, isotrópicas em média. O cálculo de  $G_k(t)$  é uma aplicação trivial dos nossos resultados. Veremos, em particular, que a validade da eq. (2) no limite  $t \gg \tau_c$  decor-

re, essencialmente, das condições de homogeneidade e isotropia da fonte. Casos mais gerais, em que não se faz nenhuma restrição quanto ao tempo de correlação, também podem ser tratados pelo método apresentado aqui, sendo um exemplo o modelo gasoso, do capítulo III. Na literatura existe muito pouca coisa sobre o problema de perturbação aleatória com qualquer tempo de correlação, e certamente muitos trabalhos mais devem ser feitos, tanto teóricos como experimentais, para que este assunto possa ser considerado satisfatoriamente conhecido. Experimentalmente, o problema pode ser tratado não somente por correlação angular, mas também por efeito Mössbauer e ressonância. Blume <sup>9, 10)</sup> estuda as formas de linha do efeito Mössbauer e a correlação angular para um modelo solúvel de perturbação aleatória, que consiste de campos clássicos aplicados sobre o núcleo, com intensidade constante e direção aleatoriamente variável. Gabriel <sup>11, 12)</sup> fez um trabalho mais geral porque não se restringe a um modelo explícito, mas a sua generalidade só se mantém enquanto ele calcula forma de linha em efeito "Mössbauer" <sup>11)</sup>, porque quando ele aplica seu método em correlação angular <sup>12)</sup>, impõem a condição  $t \gg \tau_c$ .

Nesta tese nós também não nos fizemos a um dado modelo. Um método é desenvolvido para auxiliar a construção de modelos, os quais devem ser construídos de acordo com a particular situação física que se quer estudar. Em particular, o modelo gasoso mencionado acima é introduzido como exemplo.

Iniciaremos a presente tese ~~revisando~~ **revisando** assuntos já conhecidos como a teoria estatística de Dillenburg e Harris e o tratamento perturbativo de Abragam e Pound. Com isto nós introduzimos não somente a notação mas também as idéias básicas do problema que queremos estudar. No capítulo II se estuda o comportamento temporal da matriz densidade do ensemble de núcleos sujeitos a interações aleatórias e isotrópicas em média, mostrando-se que estas condições são suficientes para que a matriz densidade, uma vez diagonal, permaneça diagonal. Os coeficientes de atenuação  $G_2(t)$  estão contidos na expressão obtida para os elementos diagonais da matriz densidade, como se mostra no capítulo III, onde apresentaremos algumas aplicações dos resultados obtidos no capítulo II.

## CAPÍTULO I

### PERTURBAÇÃO ALEATORIA COM PEQUENO TEMPO DE CORRELAÇÃO

No presente capítulo apresentamos, resumidamente, a teoria estatística de Dillenburg e Maris, nos parágrafos I-1 e I-4 e o tratamento perturbativo de Abragam e Found, no parágrafo I-3. Ainda na intenção de introduzir as idéias básicas e a notação para o problema que queremos estudar, escrevemos dois parágrafos mais neste primeiro capítulo: o parágrafo I-2 define uma grandeza fundamental para este trabalho, a probabilidade condicional de transição entre sub-estados  $m$  do núcleo intermediário, e o parágrafo I-5 introduz um modelo gasoso, o qual, acreditamos, irá facilitar ao leitor o entendimento do tratamento mais geral que se faz a seguir.

#### I-1 Teoria Estatística de Dillenburg e Maris

A intenção deste parágrafo não é reproduzir a teoria de Dillenburg e Maris, como se encontra nas referências <sup>5)</sup> e <sup>6)</sup>, mas apenas apresentar seus tópicos principais os quais serão de utilidade no desenvolvimento dos demais parágrafos deste capítulo.

É bem sabido que no caso de fonte isotrópica, escolhendo o eixo  $z$  (eixo de quantização) na direção da primeira radiação, a matriz densidade do ensemble de núcleos intermediários é diagonal em  $m$  (autovalor de  $\frac{1}{2}$ ) no instante imediatamente após a primeira radiação. Isto pode ser visto por um argumento muito simples: Antes da radiação, como a fonte é isotrópica, a matriz densidade do ensemble de núcleos é diagonal em  $m$  para qualquer direção do eixo  $z$ . Ora, os fótons emitidos tem spin alinhado na direção de propagação, escolhida como eixo  $z$  (condição de transversalidade) e o momento angular orbital dos mesmos não tem componente na direção  $z$ , e portanto a matriz densidade do ensemble de fótons emitidos é também diagonal no número quântico correspondente (helicidade). Então o que sobra após a radiação, em

semble de núcleos no estado intermediário, também deve ter matriz densidade diagonal em  $m$ .

Por outro lado, não é de esperar que a interação do núcleo com o envoltório estabeleça alguma relação de fase significativa entre os diferentes sub-estados  $m$ , uma vez que a sequência de interações sofridas pelo núcleo é isotrópica em média e aleatória no tempo, variando muito rapidamente ( $\tau \ll t$ , sendo  $t$  da mesma ordem de grandeza que o tempo característico para reorientação aleatória do spin nuclear). Em outras palavras, a matriz densidade continua diagonal durante o tempo de vida do estado intermediário.

Vamos resumir as hipóteses estatísticas, postulando que:

1) Em  $t = 0$  (instante imediatamente após a 1ª radiação) o ensemble de núcleos pode ser completamente descrito por uma distribuição de probabilidade  $P_m(0)$  de que um dado núcleo esteja no sub-estado  $m$ .

2) A interação dos núcleos com o envoltório é tal que, em qualquer tempo  $t$  após a primeira radiação, o ensemble de núcleos pode ainda ser descrito por uma distribuição de probabilidade  $P_m(t)$ .

Nas hipóteses acima usamos a linguagem de "distribuição de probabilidade  $P_m$ " em vez de "matriz densidade  $P_{mm}$ " apenas para manter a notação da referência <sup>5)</sup>, mas convém notar que  $P_m = P_{mm}$  quando a matriz densidade é diagonal.

Vamos definir as funções  $F_m(\theta)$  como sendo a probabilidade de que estando o núcleo no sub-estado  $m$  no momento em que ocorre a segunda radiação, esta seja emitida formando um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$ . Então é claro que a correlação angular entre as duas radiações, no instante  $t$ , é dada por

$$W(\theta, t) = \sum_m F_m(\theta) P_m(t) \equiv F(\theta) \cdot P(t) \quad (A)$$

O "vetor"  $F(\theta)$  de  $(2I + 1)$  componentes pode ser calculado a partir das características da segunda radiação (multipolaridade e spins do núcleo), como se faz no caso de correlação angular não perturbada, (veja, por exemplo, referência <sup>13)</sup> ou apêndice da referência <sup>6)</sup> e o "vetor"  $P(0)$  está semelhantemente relacionado com a primeira radiação. Tanto  $P(0)$  como  $F(\theta)$  são grandezas conhecidas e nós as tomaremos como tal. O que temos que fazer então é estudar a dinâmica do sistema físico para ver como  $P(t)$  está relacionado com  $P(0)$ . Isto é feito através da equação "master" (veja, por exemplo, referência <sup>14)</sup>.

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = \sum_{m'} W_{mm'} (P_{m'}(t) - P_m(t)) \tag{5}$$

Aqui  $W_{mm'}$  são constantes que dependem das características da interação. Elas representam a probabilidade de transição, por unidade de tempo, entre os estados  $m$  e  $m'$ . Convém notar que as hipóteses (1) e (2) acima, assim como a condição  $t \gg \tau_c$  são fundamentais para a aplicabilidade da equação "master". Em particular, como a interação é dependente do tempo, a probabilidade de transição entre os diversos estados também o será, mas a condição  $t \gg \tau_c$  nos permite fazer uma média temporal da referida probabilidade, num intervalo de tempo  $\Delta t$ , tal que  $\tau_c \ll \Delta t \ll t$  e obter assim a quantidade  $W_{mm'}$  independente do tempo.

Uma forma mais compacta para a eq. (5) se obtém definindo as quantidades

$$\Lambda_{mm'} = W_{mm'} \quad , \quad m \neq m' \tag{6.a}$$

$$\Lambda_{mm} = -\sum_{m' \neq m} W_{mm'} = -\sum_{m' \neq m} \Lambda_{m'm} \tag{6.b}$$

dai segue

$$\begin{aligned} \frac{dP_m(t)}{dt} &= \sum_{m' \neq m} \Lambda_{mm'} (P_{m'}(t) - P_m(t)) \\ &= \sum_{m' \neq m} \Lambda_{mm'} P_{m'}(t) - \sum_{m' \neq m} \Lambda_{mm'} P_m(t) \\ &= \sum_{m'} \Lambda_{mm'} P_{m'}(t) \end{aligned}$$

(7)

Esta equação pode ser escrita em forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \underline{P}(t) = \underline{A} \underline{P}(t)$$

(8)

onde  $\underline{A}$  é a matriz quadrada de elementos  $\Lambda_{mm'}$ .

Algumas propriedades da matriz  $\underline{A}$  são:

- a)  $\sum_{m'} \Lambda_{mm'} = 0$  ; como se vê na sua definição, eq. (6)
- b)  $\Lambda_{mm'} = \Lambda_{-m, -m'}$  ; Por conservação de paridade da interação entre o mícleo e o resto da fonte, a matriz deve ser invariante frente a inversão do eixo  $Z$ .
- c)  $\Lambda_{mm'} = \Lambda_{m'/m}$  ; Esta propriedade é consequência da invariança da interação frente a inversão temporal.

Portanto  $\underline{A}$  é uma matriz hermitiana, pois é real e simétrica.

Chamamos atenção para o fato de que a eq. (8) não é invariante frente a rotações, pois se o eixo de quantização não for mais paralelo à direção da primeira radiação, a matriz densidade não é mais diagonal e as hipóteses (1) e (2) não são mais válidas.

Para resolver esta equação introduz-se um conjunto completo, or

ortogonal, de autovetores  $\underline{V}^{(i)}$  do operador hermitiano  $\Lambda$

$$\Lambda \underline{V}^{(i)} = \lambda_i \underline{V}^{(i)} \quad (9)$$

O "vetor"  $\underline{P}(t)$  pode ser escrito como uma combinação linear de  $\underline{V}^{(i)}$

$$\underline{P}(t) = \sum_i C_i \underline{V}^{(i)} e^{-\lambda_i t} \quad (10)$$

como se pode verificar, substituindo a eq. (10) na eq. (8). Os coeficientes podem ser determinados em função de  $\underline{P}(0)$ , multiplicando ambos os membros da eq. (10) escalarmente por  $\underline{V}^{(j)}$ , para  $t=0$ :

$$C_j = \frac{\underline{P}(0) \cdot \underline{V}^{(j)}}{\underline{V}^{(j)} \cdot \underline{V}^{(j)}} \quad (11)$$

Das eqs. (10) e (4) obtém-se uma expressão para  $W(\theta, t)$ .

$$\begin{aligned} W(\theta, t) &= \sum_i C_i \underline{F}(\theta) \cdot \underline{V}^{(i)} e^{-\lambda_i t} \\ &\equiv \sum_i C_i f_i(\theta) e^{-\lambda_i t} \end{aligned} \quad (12)$$

onde definimos

$$f_i(\theta) = \underline{F}(\theta) \cdot \underline{V}^{(i)} \quad (13)$$



Expandindo  $f_i(\theta)$  em polinômios de Legendre,

$$f_i(\theta) = \sum_k A_{ik} P_k(\cos \theta) \quad (14)$$

a eq. (12) adquire a forma

$$W(\theta, t) = \sum_k A_k(1) A_k(2) P_k(\cos \theta) \sum_l C_{lk} e^{\lambda_l t} \quad (15)$$

onde

$$C_{lk} \equiv \frac{C_l A_{lk}}{A_k(1) A_k(2)}$$

Equacionando a eq. (15) com a eq. (1) segue

$$G_k(t) = \sum_l C_{lk} e^{\lambda_l t} \quad (16)$$

que é a eq. (3), já antecipada na introdução.

Por conveniência, vamos definir os "vetores"  $P^{(k)}$  de  $(2I+1)$  componentes

$$P_{Mk}^{(k)} = B_k \left( \frac{2k+1}{2I+1} \right)^{1/2} \langle I M k 0 | I M \rangle \quad (17)$$

onde  $\langle I M k 0 | I M \rangle$  são coeficientes de Clebsch-Gordan e  $B_k$  são fatores de normalização, independentes de  $M$ , tais que

$$E(\theta) \cdot P^{(k)} = P_k(\cos \theta) \quad (18)$$

onde os  $F(\theta)$  são os "vetores" definidos acima e  $P_k(\cos \theta)$  são os polinômios de Legendre. A demonstração da eq. (18) pode ser encontrada no apêndice da referência <sup>6)</sup>. Os valores de  $B_k$  são dados por

$$B_k^{-1} = (-1)^{L-k} \frac{(2L+1)(2I+1)}{L(L+1)} \left[ \frac{2L(L+1) - k(k+1)}{2} W(I, I, k, L, L, I) \langle L, 0, L, 0 | k, 0 \rangle \right]$$

onde  $L$  é a multipolaridade da primeira radiação e  $W(I, I, k, L, L, I)$  são coeficientes de Racah.

Quando os  $\tilde{P}_k^{(k)}$  são soluções da eq. (9), i.e.:

$$A \tilde{P}_k^{(k)} = -\lambda_k \tilde{P}_k^{(k)} \quad (19)$$

teremos, conforme eqs. (12) e (18),

$$\begin{aligned} W(\theta, t) &= \sum_k C_k F(\theta) \cdot \tilde{P}_k^{(k)} e^{-\lambda_k t} \\ &= \sum_k C_k e^{-\lambda_k t} P_k(\cos \theta) \end{aligned} \quad (20)$$

que é o resultado de Abragam e Pound (conforme eqs. (1) e (2)). Portanto para mostrar que o somatório na eq. (16) se reduz a um único termo, basta mostrar que os  $\tilde{P}_k^{(k)}$  são autovetores de  $A$ .

1-2 Probabilidade Condicional e a Equação Master

Quando a matriz densidade do ensemble de núcleos intermediários  $P^N(t)$  é diagonal, ou seja

$$P_{mm'}^N(t) = \delta_{mm'} P_m(t) \quad (21)$$

o elemento  $P_m(t)$  representa a probabilidade de encontrar um dado núcleo do ensemble no sub-estado  $m$ , no instante  $t$ . A principal intenção desta tese é a de encontrar as probabilidades  $P_m(t)$  para uma série de situações físicas e aplicá-las no cálculo da correlação angular, de acordo com a eq. (4).

Veremos no capítulo II que quando a fonte é isotrópica e a matriz  $P^N(t)$  é diagonal num certo instante  $t_0$ , ela será também diagonal em qualquer tempo  $t$ , ou seja, existirá uma distribuição de probabilidade  $P_m(t)$ , independentemente do tempo de correlação  $\tau_c$ . A nossa pesquisa de  $P_m(t)$  nos levará, invariavelmente, a equações do tipo

$$P_m(t) = \sum_{m'} P_{mm'}(t, t_0) P_{m'}(t_0) \quad (22)$$

A quantidade  $P_{mm'}(t, t_0)$  pode ser interpretada como a probabilidade condicional de encontrar o núcleo no sub-estado  $m$  no instante  $t$  se no instante  $t_0$  ele estêve no sub-estado  $m'$ .

Algumas propriedades de  $P_{mm'}(t, t_0)$  são:

A)  $\sum_m P_{mm'}(t, t_0) = 1$ , pois no instante  $t$  o núcleo estará certamente nal algum sub-estado  $m$ , uma vez que existe a distribuição de probabilidade  $P_m(t)$ .

B)  $P_{-m-m'}(t, t_0) = P_{mm'}(t, t_0)$  decorre da invariança da interação frente à inversão

de eixo  $j$  (conservação de paridade).

c)  $P_{mm'}(t, t_0) = P_{m'm}(t, t_0)$ , decorre da invariância frente à inversão temporal.

Às vezes é conveniente explicitar a diferença entre os dois argumentos de  $P_{mm'}$ , ou seja, escrever  $P_{mm'}(t_0 + t', t_0)$ , e examinar a dependência desta quantidade em  $t'$  e  $t_0$ . Para  $t' = 0$  teremos

d)  $P_{mm'}(t_0, t_0) = \delta_{mm'}$

Por outro lado, quando  $t' \rightarrow \infty$  e  $t_0$  é finito teremos

e)  $P_{mm'}(t_0 + t', t_0) \xrightarrow[t' \rightarrow \infty]{} \frac{1}{2I+1}$ , pois a sequência de interações aleatórias entre o núcleo e o envoltório é tão grande que todos os sub-estados se tornam equiprováveis.

A fim de relacionar a probabilidade condicional com a matriz  $A$  da equação master (eq. 8) vamos calcular a derivada da eq. (22) no ponto  $t = t_0$ :

$$\left. \frac{d P_m(t)}{d t} \right]_{t_0} = \sum_{m'} \left. \frac{d P_{mm'}(t_0 + t', t_0)}{d t'} \right]_0 P_{m'}(t_0) \quad (23)$$

Esta equação pode ser escrita na forma

$$\frac{d P_m(t)}{d t} = \sum_{m'} A_{mm'}(t) P_{m'}(t) \quad (7')$$

com

$$A_{mm'}(t) = \left. \frac{d P_{mm'}(t+t', t)}{d t'} \right]_0 \quad (24)$$

A eq. (7') não é exatamente igual à eq. (7) porque  $A_{mm'}(t)$  depende do tempo  $t$ , e sua solução não é simples como a da eq. (7). Evitamos esta dificuldade, quan

de nos restringimos a tempos  $t \gg \tau_c$ , pelo seguinte argumento: Seja  $\Delta t$  um intervalo de tempo tal que  $\tau_c \ll \Delta t \ll t$ . Estamos interessados apenas nos casos em que  $\Delta t$  pode ser definido tão pequeno (embora  $\gg \tau_c$ ) que

$$|P_m(\Delta t) - P_m(0)| \ll 1 \quad (25)$$

pois, quando isto não acontece, no tempo  $t \gg \Delta t$  a distribuição de probabilidade  $P_m(t)$  será igual para todos os valores de  $m$  (condição de isotropia) e a correlação angular será nula, ou seja  $G_{12}(t) = \delta_{k0}$ . É fácil ver que a eq. (25) só será válida se

$$|P_{mm'}(\Delta t, 0) - P_{mm'}(0, 0)| \ll 1 \quad (26)$$

Por outro lado, devido à condição de estacionariedade da fonte e a condição  $\Delta t \gg \tau_c$ :

$$P_{mm'}(t + \Delta t, t) = P_{mm'}(\Delta t, 0) \quad (27)$$

As equações (26) e (27) e a propriedade (D) permitem escrever a eq. (24) na forma

$$\begin{aligned} \Lambda_{mm'}(t) &= \frac{P_{mm'}(t + \Delta t, t) - P_{mm'}(t, t)}{\Delta t} \\ &= \frac{P_{mm'}(\Delta t, 0) - \delta_{mm'}}{\Delta t} = \Lambda_{mm'} \end{aligned} \quad (28)$$

dando, portanto,  $A_{mm'}$  independente de  $t$ . É esta expressão que usaremos nos parágrafos seguintes para a matriz  $A$ .

Observamos a tempo que a eq. (23) é coerente com a definição de  $A_{mm'}$ , dada pela eq. (6), segundo a qual  $A_{mm'}$ , para  $M' \neq M$ , representa a probabilidade de transição, por unidade de tempo, entre os estados  $M$  e  $M'$ . Também as propriedades (a) e (b) e (c) de  $A_{mm'}$  podem ser facilmente verificadas usando as propriedades (A), (B) e (C) de  $P_{mm'}$  e a eq. (25).

### I-3. Interação Perturbativa (Abragam e Pound)

Quando a interação dependente do tempo entre o núcleo radioativo e o envoltório é suficientemente fraca, o núcleo pode ser considerado como um sistema quântico, cujo hamiltoniano é escrito na forma

$$H(t) = H_0 + \mathcal{S}(t)$$

e pode-se usar teoria de perturbação em primeira ordem. Suponhamos também que sejam válidas as hipóteses estatísticas formuladas no parágrafo I-1. Para proceder de acordo com o método estabelecido então, teremos, em primeiro lugar, que obter os elementos de matriz  $A_{mm'}$ , relacionados pela eq. (28) com as probabilidades condicionais  $P_{mm'}(\Delta t, 0)$ . Usaremos teoria de perturbação em primeira ordem para calcular estas últimas.

Sejam  $|m\rangle, |m'\rangle, \dots$ , os estados não perturbados do núcleo intermediário e seja  $U(t, t_0)$  o operador de evolução dos estados nucleares. Então

$$P_{mm'}(t_0 + \Delta t, t_0) = |\langle m | U(t_0 + \Delta t, t_0) | m' \rangle|^2 \quad (29)$$

O operador  $U(t, t_0)$  obedece a equação

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = H(t)U \quad (30)$$

ou, equivalentemente, a equação integral

$$U(t, t_0) = 1 - i\hbar^{-1} \int_{t_0}^t H(t')U(t', t_0) dt' \quad (31)$$

A eq. (31) pode ser resolvida formalmente:

$$U(t, t_0) = U^{(0)}(t, t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0) \quad (32)$$

onde

$$U^{(0)}(t, t_0) = e^{-i/\hbar H_0 (t-t_0)}$$

e

$$U^{(1)}(t, t_0) = -i\hbar^{-1} \int_{t_0}^t dt' e^{-i/\hbar H_0 (t-t')} \mathcal{B}(t') e^{-i/\hbar H_0 (t'-t_0)}$$

etc.

Teoria de perturbação em primeira ordem corresponde a pôr

$$U(t, t_0) = U^{(0)}(t, t_0) + U^{(1)}(t, t_0)$$

A eq. (29) fica sendo

$$P_{mm'}(t_0 + \Delta t, t_0) = \left| \langle m | e^{-i/\hbar H_0 \Delta t} | m' \rangle - i\hbar^{-1} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt \langle m | e^{-i/\hbar H_0 (t_0 + \Delta t, t)} \cdot \mathcal{B}(t) e^{-i/\hbar H_0 (t-t_0)} | m' \rangle \right|^2$$

$$= \left| \delta_{mm'} e^{-i/\hbar E \Delta t} - i\hbar^{-1} e^{-i/\hbar E \Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \mathcal{B}_{mm'}(t) dt \right|^2$$

onde  $E = \langle m | H_0 | m \rangle = \langle m' | H_0 | m' \rangle$

$$S_{mm'}(t) = \langle m | S(t) | m' \rangle$$

Vamos esquecer por ora os elementos diagonais e escrever

$$P_{mm'}(t_0 + \Delta t, t_0) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt S_{mm'}(t) \right|^2$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt' S_{mm'}(t) S_{mm'}^*(t')$$

$m \neq m'$  (33)

Neste ponto é conveniente introduzir a função de correlação de uma variável aleatória  $G(\tau)$  em um ensemble macrocanônico, definida

por

$$G(\tau) = \langle g(t) g^*(t + \tau) \rangle$$

(34)

onde os "brackets" representam média sobre ensemble.

Se o ensemble é estacionário,  $G(\tau)$  é independente de  $t$ . Vamos identificar  $g(t)$  com  $S_{mm'}(t)$  e denotar por  $G_{mm'}(\tau)$  a correspondente função de correlação. É usual supor uma relaxação exponencial para a função de correlação, isto é,

$$G_{mm'}(\tau) = G_{mm'}(0) e^{-\frac{|\tau|}{\tau_c}}$$

(35)

Fazendo a média sobre ensemble em ambos os membros da eq. (33), e pondo  $t - t' = \tau$ , segue



$$\begin{aligned}
 \langle P_{mm'}(t_0 + \Delta t, t_0) \rangle &= \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt \int_{t-t_0-\Delta t}^{t-t_0} d\tau G_{mm'}(\tau) \\
 &= \frac{G_{mm'}(0)}{\hbar^2} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt \left[ \int_{t-t_0-\Delta t}^0 d\tau e^{i\tau/\hbar} + \int_0^{t-t_0} d\tau e^{-i\tau/\hbar} \right] \\
 &= \frac{2\tau_c G_{mm'}(0)}{\hbar^2} \left[ \Delta t - \tau_c + \tau_c e^{-\Delta t/\tau_c} \right] \quad (36)
 \end{aligned}$$

Portanto para  $\Delta t \gg \tau_c$

$$\langle P_{mm'}(t_0 + \Delta t, t_0) \rangle = \frac{2\tau_c G_{mm'}(0)}{\hbar^2} \Delta t, \quad m \neq m' \quad (37)$$

Usando a eq. (28) segue

$$A_{mm'} = \frac{2\tau_c G_{mm'}(0)}{\hbar^2}, \quad m \neq m' \quad (38)$$

Neste ponto Abragam e Pound limitam seu tratamento a interação de quadrupolo elétrico e dão o resultado para dipolo magnético. Nós faremos aqui um tratamento mais geral, não impondo nenhuma restrição mais do que as que já foram feitas acima.

A propriedade de isotropia em média das interações se reflete em  $A_{mm'}$  através de

$$G_{mm'}(0) \equiv \langle |S_{mm'}|^2 \rangle \equiv \langle | \langle m | S | m' \rangle |^2 \rangle \quad (39)$$

Se caracterizarmos  $\mathcal{B}$ , num dado instante, para um dado núcleo do ensemble, pelos ângulos de Euler  $(\alpha, \beta, \gamma)$  a média indicada acima deve conter, entre outras coisas, uma integral sobre  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Deixamos a média sobre outras variáveis, como intensidade e multipolaridade que ocorrem em  $\mathcal{B}$  indicadas por uma barra horizontal, e escrevemos

$$G_{mm'}(0) = \frac{1}{8\pi^2} \int d\Omega \overline{|\langle m | \mathcal{B}(\alpha, \beta, \gamma) | m' \rangle|^2} =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \int d\Omega \overline{|\langle m | R^\dagger(\alpha, \beta, \gamma) \mathcal{B}(000) R(\alpha, \beta, \gamma) | m' \rangle|^2} \quad (40)$$

onde

$$d\Omega = \sin\beta \, d\beta \, d\alpha \, d\gamma$$

e onde  $R(\alpha, \beta, \gamma)$  é o operador de rotação. É bem sabido que quando  $R$  é aplicado num estado  $|I m\rangle$ , transforma-o numa combinação linear de outros estados, ou seja,

$$R(\alpha, \beta, \gamma) |I m\rangle = \sum_{\mu} D_{\mu m}^I(\alpha, \beta, \gamma) |I \mu\rangle$$

$$\langle I m | R^\dagger(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{\nu} D_{\nu m}^{I*} \langle I \nu | \quad (41)$$

Dai segue que

$$|\langle I m | R^\dagger \mathcal{B}(000) R | I m' \rangle|^2 =$$

$$= \sum_{\mu \mu'} \sum_{\nu \nu'} D_{\mu m}^I D_{\mu' m'}^I D_{\nu m}^{I*} D_{\nu' m'}^{I*} \langle I \nu | \mathcal{B}(000) | I \mu' \rangle \cdot \langle I \nu' | \mathcal{B}(000) | I \mu \rangle \quad (42)$$

Das

$$D_{\nu m}^{I*} D_{\nu' m'}^{I*} = \sum_j (2j+1) \begin{pmatrix} I & I \\ \nu & \nu' & -(\nu+\nu') \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & I \\ m & m' & -(m+m') \end{pmatrix} D_{-\nu-\nu', -(m+m')} \quad (43)$$

$$\int d\Omega D_{-\nu-\nu', -(m+m')}^{j} D_{\mu m}^{I} D_{\mu' m'}^{I} = 8\pi^2 \begin{pmatrix} I & I \\ \mu & \mu' & -(\mu+\mu') \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & I \\ m & m' & -(m+m') \end{pmatrix} \quad (44)$$

onde os símbolos entre parênteses são coeficientes 3-j.

Portanto a eq. (40) pode ser escrita na forma

$$G_{mm'}^{(0)} = \sum_j \Lambda_j \begin{pmatrix} I & I \\ m & m' & -(m+m') \end{pmatrix}^2 \quad (45)$$

onde

$$\Lambda_j = (2j+1) \sum_{\mu, \mu'} \sum_{\nu, \nu'} \begin{pmatrix} I & I \\ \nu & \nu' & -(\nu+\nu') \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & I \\ \mu & \mu' & -(\mu+\mu') \end{pmatrix} \langle I \nu | \mathcal{B} | 000 \rangle \langle I \mu' | \mathcal{B} | I \mu \rangle$$

Das eqs. (37) e (42) segue

$$\Lambda_{mm'} = \frac{2\mathcal{B}_0}{k^2} \sum_j \Lambda_j \begin{pmatrix} I & I \\ m & m' & -(m+m') \end{pmatrix}^2, \quad (m \neq m') \quad (46)$$

Os elementos diagonais  $\Lambda_{mm}$  podem ser calculados a partir da eq. (46) e da propriedade (a) da matriz  $\Lambda$  (parágrafo I-1), ou seja

$$\Lambda_{mm} = -\sum_{m' \neq m} \Lambda_{mm'} \quad (47)$$

como

$$-\sum_{m' \neq m} \left( \frac{I}{m} \frac{I}{m'} - \frac{1}{(m+m')} \right)^2 = \left( \frac{I}{m} \frac{I}{m} - \frac{1}{2m} \right)^2 - \frac{1}{2j+1}$$

segue

$$\Lambda_{mm} = \frac{2\epsilon_c}{\hbar^2} \sum_j \Lambda_j \left[ \left( \frac{I}{m} \frac{I}{m} - \frac{1}{2m} \right)^2 - \frac{1}{2j+1} \right] \quad (48)$$

As eqs. (46) e (48) podem ser escritas numa única expressão, qual seja

$$\Lambda_{mm'} = \frac{2\epsilon_c}{\hbar^2} \sum_j \Lambda_j \left[ \left( \frac{I}{m} \frac{I}{m'} - \frac{1}{(m+m')} \right)^2 - \frac{1}{2j+1} \right] \quad (49)$$

Pode-se verificar facilmente que os "vetores"  $\tilde{P}^{(k)}$ , definidos pela eq. (17) são autovetores de  $\Lambda$ . Com efeito

$$\begin{aligned} (\Lambda \tilde{P}^{(k)})_m &= \sum_{m'} \Lambda_{mm'} \tilde{P}_{m'}^{(k)} = \\ &= \frac{2\epsilon_c}{\hbar^2} B_k (2k+1)^{\frac{1}{2}} \sum_j \Lambda_j \sum_{m'} (-1)^{I-k+m'} \left[ \left( \frac{I}{m} \frac{I}{m'} - \frac{1}{(m+m')} \right)^2 - \frac{1}{2j+1} \right] \begin{pmatrix} I & k & I \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} \\ &= \frac{2\epsilon_c}{\hbar^2} \sum_j \Lambda_j \left[ W(III; jk) - \frac{1}{2j+1} \right] \tilde{P}_m^{(k)} = -\lambda_j \tilde{P}_m^{(k)} \quad (50) \end{aligned}$$

onde

$$\lambda_h = \frac{-2\gamma_h}{\hbar^2} \sum_j \Lambda_j [W(IIIII; j, k) - \frac{1}{2j+1}]$$

e  $W(IIIII; j, k)$  são coeficientes de Racah. Em notação matricial,

$$A \underline{P}^{(k)} = -\lambda_h \underline{P}^{(k)} \quad (51)$$

que é a eq. (19) do parágrafo I-1, e portanto, como mostramos naquêlo parágrafo,

$$G_h(t) = e^{-\lambda_h t}$$

Q.E.D.

#### I-4. Interação Tipo Potencial (Dillenburg e Maris)

Agora não será feita nenhuma suposição a respeito da intensidade das interações. Entretanto, suporemos que "a influência do envoltório pode ser simulada pela aplicação, em cada núcleo individualmente, de uma seqüência de potenciais externos dependentes do tempo, que tenham duração da ordem do tempo de correlação"<sup>8)</sup>. São ainda mantidas as hipóteses estatísticas (1) e (2) do parágrafo I-1 e tôdas as direções são equiparáveis para os potenciais aleatórios definidos acima. Dillenburg e Maris chamam de "evento" o efeito de cada um desses potenciais individualmente. Assim a dinâmica do núcleo intermediário corresponde a uma seqüência de eventos, cada um dos quais podendo ser representado pela aplicação de uma matriz unitária (operador de evolução)  $U^\sigma(t_{i+1}, t_i)$  operando sobre o estado nuclear, desde o instante  $t_i$  (início do  $i^{\text{mo}}$  evento) até o tempo  $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ . O índice  $\sigma$  de  $U^\sigma$  caracteriza o evento, de acôrdo com a direção do campo, intensidade, etc.

A probabilidade condicional será então dada por

$$P_{mm'}^{\sigma}(t_i, t_i + \Delta t_i) = \left| \langle m | U^{\sigma}(t_i + \Delta t_i, t_i) | m' \rangle \right|^2 \quad (52)$$

Devido à independência que supomos haver entre os diversos eventos, a eq. (52) é independente de  $t_i$ , ou seja

$$P_{mm'}^{\sigma}(t_i + \Delta t_i, t_i) = P_{mm'}^{\sigma}(\Delta t_i, 0) \quad (53)$$

A eq. (28) supõe  $\Delta t \gg \xi$  porque queremos  $P_{mm'}^{\sigma}(t + \Delta t, t)$  independente de  $t$  (conforme eq. (2)). Ora, no presente caso, com eventos sucessivos independentes, vimos que esta condição é satisfeita para os diversos  $P_{mm'}^{\sigma}(t_i + \Delta t_i, t_i)$  com  $\Delta t_i \approx \xi$ . Portanto não precisamos de  $\Delta t \gg \xi$  e podemos escrever

$$\Lambda_{mm'} = \left\langle \frac{P_{mm'}^{\sigma}(\Delta t_i, 0) - \delta_{mm'}}{\Delta t_i} \right\rangle \quad (54)$$

onde a média é sobre todos os eventos.

A fim de evitar a repetição de um cálculo formalmente idêntico àquele que nos levou da eq. (38) para a eq. (51), vamos observar os termos não diagonais de  $\Lambda_{mm'}$ . Usando as eqs. (52), (53) e (54) obtém-se

$$\Lambda_{mm'} = \left\langle \frac{\left| \langle m | U^{\sigma}(\Delta t_i, 0) | m' \rangle \right|^2}{\Delta t_i} \right\rangle \quad m \neq m' \quad (55)$$

Como a dependência em  $M$  e  $M'$  da eq. (55) tem a mesma forma que a dependência em  $M$  e  $M'$  da eq. (38), é claro que um cálculo formalmente igual ao desenvolvido a partir da eq. (38), quando desenvolvido a partir da eq. (55) dará um resultado formalmente igual ao que obtivemos então. Portanto, no presente caso tem-se também a exponencial única para  $G_R(t)$ .

### I-5. Um modelo para gases

Veremos agora um exemplo que não pode em geral ser tratado por teoria de perturbação nem por interação "tipo potencial" (veja parágrafo anterior), e contudo dá a exponencial única para  $G_R(t)$  no limite  $\xi \ll t$ .

Vamos considerar um gás monoatômico com as seguintes características:

(I) As únicas interações relevantes entre os átomos são as colisões, i.e., não existem correlações interatômicas, como interações magnéticas, por exemplo. Portanto o momentum angular total  $F$  de um átomo que contém o núcleo no estado intermediário é uma quantidade conservada durante o intervalo de tempo entre duas colisões consecutivas.

(II) Cada colisão é um evento de duração muito curta comparado com o intervalo de tempo entre duas colisões consecutivas, de tal maneira que pode ser desprezada na equação de movimento, exceto pelo efeito que tem sobre o momentum angular  $J$  da coroa eletrônica. Este efeito é postulado como sendo o de tornar a direção de  $J$  completamente aleatória. Em outras palavras chamando de  $M$  a projeção de  $J$  sobre o eixo  $z$ , os  $2J+1$  valores de  $M$  são equiprováveis no instante imediatamente após uma colisão. Portanto, o intervalo de tempo médio entre duas colisões consecutivas faz o papel de tempo de correlação  $\xi$ . Supomos também que no instante imediatamente após a primeira radiação ( $t=0$ ) todos os  $M$  são equiprováveis. Isto é fácil de justifi-

car, pois a radiação nuclear não tem nada a ver com a direção do spin eletrônico.

A hipótese estatística 1) do parágrafo I-1 será também mantida aqui, mas a 2) não será considerada válida a priori, porque nós inicialmente não nos restringiremos a tempos de correlação  $\tau_c \ll t$ . A razão de procedermos assim é que usaremos, no capítulo III, este mesmo modelo gasoso para o caso de tempo de correlação qualquer. Entretanto, mostraremos que a hipótese 2), dentro das características (I) e (II), segue como decorrência da 1). Em outras palavras, mostraremos que a matriz densidade do ensemble de núcleos intermediários, uma vez diagonal em  $M$ , continua diagonal para qualquer tempo.

Consideremos inicialmente o ensemble de átomos livres, no intervalo de tempo entre a primeira radiação e a primeira colisão. Usaremos duas representações para descrever a dinâmica do "sistema atômico" (núcleo + coroa eletrônica): a representação não acoplada, dos "vetores"  $|I_m j M\rangle \equiv |I_m\rangle |j M\rangle$ , e a representação acoplada, dos "vetores"  $|FM\rangle \equiv |I j FM\rangle$ . Estes últimos são autoestados do Hamiltoniano total  $H$  do átomo. A equação dinâmica da matriz densidade  $P$  do nosso ensemble é

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -i\hbar^{-1} [H, P]$$

cuja solução é

$$P(t) = e^{-i\hbar^{-1} H t} P(0) e^{i\hbar^{-1} H t} \quad (56)$$

Como  $|FM\rangle$  é autoestado de  $H$ , com autovalor  $E_F$ , os elementos de matriz de  $P(t)$  na representação acoplada são

$$\begin{aligned} P_{FM, F'M'}(t) &\equiv \langle FM | P(t) | F'M' \rangle = \\ &= P_{FM, F'M'}(0) e^{-i\omega_{FF'} t} \end{aligned} \quad (57)$$



onde  $W_{FF} = \hbar^{-1} (E_F - E_{F'})$

Ainda não conhecemos  $P_{FM, F'M'}(0)$ , mas as hipóteses que fizemos acima nos dizem que, na representação não acoplada,

$$\begin{aligned} P_{m_1 m_1, m_2 m_2}(0) &\equiv \langle I m_1 j m_1 | P(0) | I m_2 j m_2 \rangle = \\ &= \delta_{m_1 m_2} \delta_{m_1 m_2} \frac{P_m(0)}{2j+1} \end{aligned} \quad (58)$$

Dai podemos escrever uma representação espectral para o operador  $P(0)$ :

$$P(0) = \sum_{m_1 m_2} | I m_1 j m_1 \rangle \frac{P_m(0)}{2j+1} \langle I m_2 j m_2 |$$

e obter

$$\begin{aligned} P_{FM, F'M'}(0) &= \sum_{m_1 m_2} \langle FM | I m_1 j m_1 \rangle \langle I m_2 j m_2 | F'M' \rangle \frac{P_m(0)}{2j+1} \\ &= \delta_{MM'} \sum_{m_1 m_2} \langle I m_1 j m_1 | FM \rangle \langle I m_2 j m_2 | F'M' \rangle \frac{P_m(0)}{2j+1} \end{aligned} \quad (59)$$

Uma representação espectral para  $P(t)$  pode ser escrita em termos dos vetores  $|FM\rangle$ .

$$P(t) = \sum_{FM} \sum_{F'M'} |FM\rangle P_{FM, F'M'}(t) \langle F'M'|$$

e então os elementos de matriz

$$P_{m_1 m_1, m_2 m_2}(t) \equiv \langle I m_1 j m_1 | P(t) | I m_2 j m_2 \rangle$$

são obtidos usando as eqs. (57) e (59)

$$\begin{aligned} P_{m_1 m_1, m_2 m_2}(t) &= \sum_{FF'} \sum_{MM'M} \langle I m_1 j m_1 | FM \rangle \langle I m_2 j m_2 | F'M' \rangle \\ &\cdot \langle I m_1 j m_1 | FM \rangle \langle I m_2 j m_2 | F'M' \rangle \frac{P_m(0)}{2j+1} e^{-iW_{FF}t} \end{aligned} \quad (60)$$

os intervalos de tempo entre duas colisões consecutivas. A generalização da eq. (64) para um intervalo qualquer  $\Delta t$ , desde o instante de uma colisão até a colisão seguinte é trivial:

$$P_{mm'}^{(0)}(t_i + \Delta t_i, t_i) = \sum_{FFI} C(m, m') e^{-iW_{FF} \Delta t_i} \quad (65)$$

onde  $\Delta t_i$  é o intervalo de tempo entre a  $i^{ma}$  colisão e a seguinte, e mantemos o índice superior "0" porque não houve colisão durante o intervalo de tempo  $\Delta t_i$ .

#### Pequeno tempo de correlação

Para  $t_c \ll t$  teremos muitas colisões até que a segunda radiação seja emitida. Terá então sentido considerar uma probabilidade de transição média por unidade de tempo, que será dada por

$$W_{mm'} = \left\langle \frac{P_{mm'}^{(0)}(t_i + \Delta t_i, t_i)}{\Delta t_i} \right\rangle \quad m \neq m'$$

onde a média é feita sobre todos os valores possíveis de  $\Delta t_i$ . A matriz  $\Lambda_{mm'}$  será dada então por

$$\begin{aligned} \Lambda_{mm'} &= \left\langle \frac{P_{mm'}^{(0)}(\Delta t_i, 0) - \delta_{mm'}}{\Delta t_i} \right\rangle \\ &= \int_0^\infty \frac{f(\Delta t)}{\Delta t} (P_{mm'}^{(0)}(\Delta t, 0) - \delta_{mm'}) d(\Delta t) \end{aligned} \quad (66)$$

onde  $f(\Delta t)$  é a distribuição de probabilidade para o intervalo de tempo  $\Delta t$  entre duas colisões consecutivas.

Vamos mostrar que a eq. (19) é satisfeita quando  $\Lambda$  é dada pelas eqs. (66), (65) e (62):

$$\begin{aligned} \sum_{m'} \Lambda_{mm'} P_{m'}^{(k)} &= \int_0^{\infty} \frac{f(\Delta t)}{\Delta t} \sum_{m'} (P_{mm'}^0(\Delta t, 0) - \delta_{mm'}) P_{m'}^{(k)} d(\Delta t) \\ &= \sum_{FF'} \sum_{m'} C(m, m') P_m^{(k)} \int_0^{\infty} \frac{f(\Delta t)}{\Delta t} e^{-i\omega_{FF'} \Delta t} d(\Delta t) + \\ &\quad - P_m^{(k)} \int_0^{\infty} \frac{f(\Delta t)}{\Delta t} d(\Delta t) \end{aligned} \quad (67)$$

Usando as definições de  $C(m, m')$  e  $P_m^{(k)}$  (eqs. (62) e (17) respectivamente) e efetuando a soma sobre os números magnéticos obtém-se:

$$\sum_{m'} C(m, m') P_{m'}^{(k)} = C_{FF'}^{(k)} P_m^{(k)} \quad (68)$$

onde

$$C_{FF'}^{(k)} = \frac{(2F+1)(2F'+1)}{2j+1} \begin{Bmatrix} I & I & k \\ F & F' & j \end{Bmatrix}^2 \quad (69)$$

A eq. (67) adquire a forma

$$\sum_{m'} \Lambda_{mm'} P_{m'}^{(k)} = -\lambda_k P_m^{(k)} \quad (70)$$

onde

$$\lambda_k = \int_0^{\infty} \frac{f(\Delta t)}{\Delta t} d(\Delta t) \left( 1 - \sum_{FF'} C_{FF'}^{(k)} e^{-i\omega_{FF'} \Delta t} \right) \quad (71)$$

Conforme vimos no parágrafo I-1, a eq. (70) implica em

$$G_p(t) = e^{-\lambda t}$$

Portanto, também neste modelo a função  $G_p(t)$  tem comportamento exponencial - quando  $t \gg \xi_c$ , resultado este que já foi obtido nos dois casos estudados nos parágrafos anteriores. Isto nos sugere que a forma exponencial de  $G_p(t)$  não é propriedade de modelos particulares, mas sim consequência de certas simetrias mais gerais, como já comentamos na introdução e como veremos nos capítulos seguintes.

## CAPITULO II

### PERTURBAÇÃO ALEATORIA COM QUALQUER TEMPO DE CORRELAÇÃO

No presente capítulo estabeleceremos uma expressão geral para a probabilidade condicional  $P_{mm}(t, t_0)$ , exigindo apenas que a fonte seja homogênea e isotrópica. Inicialmente, vamos descrever o que entendemos por estas duas condições, no parágrafo II-2 apresentaremos a dedução da dita expressão e no parágrafo II-3 apresentaremos um método aproximado que pode servir como guia para a construção de modelos para o cálculo da mesma.

#### II-1. Fontes Homogêneas e Isotrópicas

a) Homogeneidade: Todos os núcleos intermediários são tratados em igualdade de condições, i.e., o tempo de correlação, a intensidade, e todas as demais características da interação do núcleo com o envoltório são iguais para todos os núcleos. Fica excluído, por exemplo, o caso em que núcleos intermediários idênticos estão contidos em dois ou mais compostos diferentes (a extensão para estes casos é trivial: basta calcular a expressão correspondente a cada um dos compostos e fazer uma média ponderada das mesmas). Exigiremos também a homogeneidade no tempo, i.e., a fonte se encontra num estado termodinâmico estacionário. Homogeneidade no tempo não implica que a interação do núcleo com o envoltório seja constante, mas apenas que a probabilidade de que ocorra uma dada interação seja igual para qualquer tempo durante a vida do estado intermediário.

b) Isotropia: Não existe direção privilegiada na fonte. O nos se tratamento não se aplica, por exemplo, a macro cristais, mas pode ser apli

cado a pós cristalinos, sólidos amorfos, gases e líquidos não cristalinos. É também excluída a aplicação de campos externos. Naturalmente, exigiremos apenas isotropia em média, pois se exigissemos que os envoltórios dos núcleos intermediários fossem isotrópicos a cada instante, então não haveria campo para interagir com os mesmos e as probabilidades de transição seriam nulas. Para ser mais precisos, vamos colocar a condição de isotropia da seguinte maneira: no instante imediatamente após a primeira radiação existe uma distribuição de probabilidade  $P_m(0)$  para as projeções  $I_z = m$  do spin do núcleo intermediário e todos os outros momentos angulares da fonte estão distribuídos aleatoriamente em direção.

No que segue nós chamaremos de "sistema" o conjunto "núcleo + envoltório", entendendo-se por envoltório tudo o que direta ou indiretamente, está em interação com o núcleo.

A condição (a) nos permite tratar os núcleos intermediários -- como se cada um estivesse embebido em seu próprio envoltório, e construir, portanto, um ensemble de infinitos sistemas independentes. A homogeneidade de -- corrente do contorno finito da fonte será desprezada e consideraremos o sistema como se ele estivesse isolado. Isto é certamente uma boa aproximação para fontes macroscópicas.

## II-2. Matriz Densidade e Probabilidade Condicional

Denotaremos por  $I$ ,  $J$  e  $F$  os momentos angulares do núcleo intermediário, do envoltório e do sistema, respectivamente, i.e.,  $F = I + J$ . Denotaremos por  $m$ ,  $n$  e  $M$  as projeções  $I_z$ ,  $J_z$  e  $F_z$ , respectivamente, i.e.,  $M = m + n$ . Denotaremos por  $P(t)$  a matriz densidade do ensemble de sistemas no instante  $t$ , sendo  $t=0$  o instante imediatamente após a primeira radiação.

A condição (b) nos permite dizer que a matriz densidade  $P(0)$  é diagonal em  $M$  e  $M'$ . Denotando por  $P^N(t)$  a matriz densidade do ensemble, de núcleos, ou seja

$$P^N(t) = \text{Tr} P(t) \quad (72)$$

onde o traço é tomado sôbre tôdas as variáveis do envoltório, é claro que  $P^N(0)$  é diagonal em  $M$ , ou seja

$$P_{mm'}^N(0) = \delta_{m'm} P_m(0) \quad (73)$$

Mostraremos, inicialmente, que  $P^N(t)$  é diagonal em  $M$ , a qualquer tempo  $t$  do estado intermediário.

Seja  $|aIm_jm\rangle$  um conjunto completo de vetôres de estado (representação não acoplada) do sistema, onde  $a$  representa o conjunto de todos os números quânticos do sistema não incluídos no conjunto  $I_m j m$  (ou, equivalentemente, no conjunto  $I_j F M$ ). Outro conjunto igualmente completo de vetôres de estados é dado por  $|aI_j F M\rangle$  (representação acoplada), mas os vetôres dêste último conjunto são autovetôres do Hamiltoniano  $H$  do sistema, enquanto que os do primeiro não o são. Necessitaremos de ambas as representações porque  $P^N(t)$  sômente tem algum sentido quando escrita na representação não acoplada, enquanto que a representação acoplada é a mais conveniente para descrever a evolução temporal de  $P(t)$ .

Para  $t=0$  podemos escrever, usando a representação não acoplada,

$$\begin{aligned} P_{aIm_jm, a'I'm'_j'm'}(0) &\equiv \langle aI_j m | P(0) | a'I'm'_j'm' \rangle = \\ &= \delta_{mm'} \delta_{mm'} P_m(0) \delta_{aj, a'j'}(0) \end{aligned} \quad (74)$$

onde  $f_{a_j, a'_j}(0)$  depende das características da fonte mas não depende do número quântico magnético  $M$ , devido a condição de isotropia do envoltório para  $t=0$ .

Usando a eq. (74) podemos escrever a seguinte representação espectral para  $P(0)$ :

$$P(0) = \sum_{aa'} \sum_{jj'} \sum_{mm} |a I m j m\rangle P_m(0) f_{a_j, a'_j}(0) \langle a' I m j' m| \quad (75)$$

Seus elementos de matriz na representação acoplada são

$$\begin{aligned} P_{a_1 I_1 F_1 M_1, a_2 I_2 F_2 M_2}(0) &\equiv \langle a_1 I_1 F_1 M_1 | P(0) | a_2 I_2 F_2 M_2 \rangle = \\ &= \sum_{aa'} \sum_{jj'} \sum_{mm} \langle a_1 I_1 F_1 M_1 | a I m j m \rangle \cdot \\ &\cdot \langle a' I m j' m | a_2 I_2 F_2 M_2 \rangle P_m(0) f_{a_j, a'_j}(0) \end{aligned} \quad (76)$$

Os coeficientes  $\langle a I m j m | a' I' j' F M \rangle$  somente não são nulos quando  $a'=a$  e  $j'=j$ , devido à ortogonalidade das representações e eles são independentes de  $a$ . Para  $a'=a$  e  $j'=j$  eles são os coeficientes de Clebsch-Gordan  $\langle I m j m | F M \rangle$ .

$$\begin{aligned} P_{a_1 I_1 F_1 M_1, a_2 I_2 F_2 M_2}(0) &= \\ &= \sum_{mm} \langle F_1 M_1 | I m j_1 m \rangle \langle I m j_2 m | F_2 M_2 \rangle P_m(0) f_{a_j, a'_j}(0) \quad (77) \end{aligned}$$

A evolução temporal de  $P(t)$  é dada por

$$P(t) = U(t, 0) P(0) U^\dagger(t, 0) \quad (78)$$



onde  $U(t,0)$  é o operador de evolução do sistema. Como estamos considerando um sistema isolado,  $H$  é constante e, portanto,

$$U(t,0) = e^{-i\hbar H t} \quad (79)$$

e como  $H$  é diagonal na representação acoplada, segue

$$e^{-i\hbar H t} |a I j F M\rangle = e^{-i\hbar E_{ajF} t} |a I j F M\rangle \quad (80)$$

onde  $E_{ajF}$  é o autovalor de  $H$  correspondente ao estado  $|a I j F M\rangle$ . É claro que os autovalores de  $H$  não dependem de  $M$ , pois o sistema é isolado. Também não explicitamos o índice  $I$  em  $E_{ajF}$  porque  $I$  é constante e igual para todos os estados que estamos considerando. Os elementos de matriz de  $U(t,0)$  e  $U^\dagger(t,0)$  são

$$\langle a I j F M | U(t,0) | a_1 I_1 j_1 F_1 M_1 \rangle = e^{-i\hbar E_{ajF} t} \delta_{aa_1} \delta_{jj_1} \delta_{FF_1} \delta_{MM_1} \quad (81-a)$$

$$\langle a_2 I_2 j_2 F_2 M_2 | U^\dagger(t,0) | a' I' j' F' M' \rangle = e^{i\hbar E_{a'j'F'} t} \delta_{a_2 a'} \delta_{j_2 j'} \delta_{F_2 F'} \delta_{M_2 M'} \quad (81-b)$$

Os elementos de matriz de  $P(t)$ , usando as eqs. (78), (81) e (77), são

$$P_{a I j F M, a' I' j' F' M'}(t) = \delta_{MM'} e^{-i\omega_{ajF, a'j'F'} t} P_{a j, a' j'}(0)$$

$$\sum_{m n} P_m(0) \langle F M | I m j m \rangle \langle I m j' m | F' M \rangle \quad (82)$$

onde

$$\omega_{a_j F, a'_j F'} = \frac{1}{\hbar} (E_{a_j F} - E_{a'_j F'}) \quad (83)$$

Escrevemos agora uma representação espectral para  $P(t)$  :

$$P(t) = \sum |a_j F M\rangle P_{a_j F M, a'_j F' M'}(t) \langle a'_j F' M'| \quad (84)$$

Seus elementos de matriz na representação não acoplada são

$$P_{a_1 I m_1 j_1 m_1, a_2 I m_2 j_2 m_2}(t) = \sum_{F F'} \sum_M \sum_{m_1 m_2} P_M(0) f_{a_1 j_1 m_1, a_2 j_2 m_2}(0) e^{-i \omega_{a_1 j_1 F, a_2 j_2 F'} t}$$

$$\langle I m_1 j_1 m_1 | F M \rangle \langle F M | I m_2 j_2 m_2 \rangle \langle I m_2 j_2 m_2 | F' M' \rangle \langle F' M' | I m_1 j_1 m_1 \rangle \quad (85)$$

Para tomar o traço sobre os números quânticos do envoltório de acordo com a eq. (72) vamos por

$$a_1 = a_2 = a, \quad j_1 = j_2 = j, \quad m_1 = m_2 = m'$$

Obtemos

$$P_{m_1 m_2}^N(t) = \sum P_M(0) f_{a j a j}(0) e^{-i \omega_{a j F, a j F'} t}$$

$$\langle I m_1 j m' | F M \rangle \langle F M | I m_2 j m' \rangle \langle I m_2 j m' | F' M' \rangle \langle F' M' | I m_1 j m' \rangle \quad (86)$$

onde a soma é sobre todos os números quânticos, exceto  $M_1$ ,  $M_2$  e  $I$ .

A eq. (86) nos mostra que

$$P_{M_1, M_2}^N(t) = \delta_{M_1, M_2} P_{M_1}(t) \quad (87)$$

i.e.,  $P^N(t)$  é diagonal em  $M$  a qualquer tempo  $t$  durante a vida do estado intermediário, como se queria demonstrar.

A probabilidade  $P_{M_1}(t)$  de encontrar o núcleo intermediário no estado  $M_1$  no instante  $t$  pode ser escrita usando as eqs. (86) e (87), na forma

$$P_{M_1}(t) = \sum_M P_{M_1, M}(t, 0) P_M(0) \quad (88)$$

onde

$$P_{M_1, M}(t, 0) = \sum_{f, g, g'} f_{g, g'}(0) e^{-i \omega_{g, g'} t} \langle I_{M_1, g, M'} | F | M \rangle$$

$$\cdot \langle F | I_{M, g, M} \rangle \langle I_{M, g, M} | F' | M' \rangle \langle F' | I_{M_1, g, M'} \rangle \quad (89)$$

representa a probabilidade condicional, introduzida no parágrafo I-2, de que o núcleo esteja no sub-estado  $M_1$  no instante  $t$  se em  $t=0$  ele estava no sub-estado  $M$ .

A soma sobre  $M$ ,  $M'$  e  $M''$ , na eq. (39) pode ser efetuada, dando (conforme eqs. A-2 até A-9)\*

$$P_{m'm}(\underline{x}, 0) = \sum_{a_f} \sum_{FF'} \sum_k f_{a_f a_f}^{(0)} e^{i \omega_{a_f F, a_f F'} \underline{x}} (2k+1)(2F+1) (2F'+1) \begin{pmatrix} I & I & k \\ F & F' & f \end{pmatrix}^2 (-1)^{m-m'} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m'-m' & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} \quad (90)$$

Esta é a expressão que procurávamos para as probabilidades condicionais. É claro que, como ela contém, em princípio, todas as variáveis da fonte, torna-se impraticável calculá-la explicitamente. Entretanto, como veremos no parágrafo seguinte, é possível a construção de modelos que reduzem a um pequeno número as variáveis relevantes. Além disso, esta expressão contém a dependência das probabilidades condicionais em  $m$  e  $m'$  numa forma bastante simples, de tal maneira que podem ser obtidas importantes propriedades sem calculá-la explicitamente.

Podemos ver imediatamente que as propriedades (B) e (C) de  $P_{m'm}(\underline{x}, 0)$  (parágrafo II-2) estão satisfeitas pela eq. (90). Veremos a seguir que as propriedades (A), (D) e (E) também estão satisfeitas. Para ver que a propriedade (A) está satisfeita, efetuamos a soma sobre  $M'$ . Obtém-se (conforme eq. A-15)

$$\sum_{m'} P_{m'm}(\underline{x}, 0) = \sum_{a_f} (2f+1) f_{a_f a_f}^{(0)} \quad (91)$$

\* Quando o número de uma equação é precedido pela letra A, esta equação é do Apêndice .

Como

$$\sum_{a_j} \sum_{m,m'} P_m(0) f_{a_j a_j}(0) \equiv \text{Tr} P(0) = 1 \quad (92)$$

e

$$\sum_m P_m(0) = 1$$

segue

$$\sum_{a_j} (2j+1) f_{a_j a_j}(0) = \sum_{a_j m} f_{a_j a_j}(0) = 1 \quad (93)$$

Das eqs. (91) e (93) segue

$$\sum_{m'} P_{m'm}(t,0) = 1$$

que é propriedade (A).

Para mostrar que a condição inicial, propriedade (D) também está satisfeita, ponos  $t=0$  na eq. (90) e somamos sobre  $F, F'$  e  $k$ . Ob-  
tém-se

$$\begin{aligned} P_{m'm}(0,0) &= \sum_{a_j} f_{a_j a_j}(0) (2j+1) (-1)^{m-m'} \sum_k \begin{pmatrix} I & I & k \\ m'-m' & 0 & m-m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{a_j} (2j+1) f_{a_j a_j}(0) \delta_{m'm} = \delta_{m'm} \end{aligned}$$

onde usamos a eq. (93).

Antes de mostrarmos que a propriedade (B) também está satisfeita,

Feita vamos definir as funções  $g_k(t)$  por:

$$g_k(t) = \sum_{a_j} \sum_{FF'} k_{a_j a_j}(0) e^{i(a_j F - a_j F') t} \cdot (2F+1)(2F'+1) \begin{Bmatrix} I & I & k \\ F & F' & j \end{Bmatrix}^2 \quad (94)$$

Em particular, para  $k=0$  temos (conforme eq. A-14)

$$g_0(t) = \sum_{a_j} \sum_{FF'} k_{a_j a_j}(0) \delta_{FF'} \frac{2F+1}{2I+1} = 1 \quad (95)$$

Como  $\exp(-i\omega t)$ , na eq. (94) pode ser substituída por  $\cos(\omega t)$ , devido à simetria dos coeficientes frente a troca de  $F$  por  $F'$  e vice-versa, vemos que  $g_k(t)$  é real. Lembrando ainda que  $|\omega(\omega t)| \leq 1$  e que

$$\sum_{FF'} (2F+1)(2F'+1) \begin{Bmatrix} I & I & k \\ F & F' & j \end{Bmatrix}^2 = 2j+1 \quad (96)$$

podemos escrever

$$g_k(t) \leq \sum_{a_j} (2j+1) k_{a_j a_j}(0) = 1 \quad (97)$$

\* Usamos a letra  $g$  manuscrita para as funções definidas aqui a fim de não identificá-las a priori com os coeficientes de atenuação da correlação angular,  $G_k(t)$ , definidos pela eq. (1). No capítulo III mostraremos que  $g_k(t) = G_k(t)$ .

É fácil ver que, a menos que todos os  $\omega t$  sejam múltiplos inteiros de  $2\pi$ , o que só pode ocorrer no caso de perturbação estatística ou para  $t=0$ , a igualdade na eq. (97) só se estabelece para  $k=0$ . Portanto, para perturbação estatística teremos

$$g_0(t) = 1 \quad (98-a)$$

$$g_k(t) < 1 \quad k \neq 0, t \neq 0 \quad (98-b)$$

Desde  $t=0$  na eq. (94) obtém-se, para qualquer  $k$ ,

$$g_k(0) = 1 \quad (98-c)$$

Com a definição de  $g_k(t)$ , a eq. (90) adquire uma forma mais compacta:

$$P_{m'm}^{(t,0)} = \sum_k g_k(t) (2k+1) (-1)^{m-m'} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m & m' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} \quad (99)$$

Para obtermos o limite  $t \rightarrow \infty$ , vamos considerar um intervalo de tempo  $\Delta t \gg \epsilon_c$ . De acordo com o comentário feito no parágrafo I-2, neste caso a eq. (27) é válida. Usando também a eq. (22), segue

$$\begin{aligned} P_{m'm}^{(2\Delta t,0)} &= \sum_{m_1} P_{m'm_1}^{(2\Delta t,\Delta t)} P_{m_1 m}^{(\Delta t,0)} \\ &= \sum_{m_1} P_{m'm_1}^{(\Delta t,0)} P_{m_1 m}^{(\Delta t,0)} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k, k'} g_k(\Delta t) g_{k'}(\Delta t) (2k+1) (2k'+1) (-)^{m-m'}$$

$$\sum_{m_1} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m_1 - m_1 & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m_1 - m_1 & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k' \\ m_1 - m_1 & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k' \\ m_1 - m_1 & 0 & \end{pmatrix}$$

A soma sobre  $m_1$  e  $k'$  pode ser efetuada, dando

$$P_{m'm}(\Delta t, 0) = \sum_k |g_k(\Delta t)|^2 (2k+1) (-)^{m-m'} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m' - m' & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m - m & 0 & \end{pmatrix}$$

Da mesma maneira se obtém

$$P_{m'm}(\delta \Delta t, 0) = \sum_k |g_k(\delta t)|^{\delta} (2k+1) (-)^{m-m'} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m' - m' & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m - m & 0 & \end{pmatrix} \quad (100)$$

onde  $\delta$  é um número natural.

Tomar o limite  $t \rightarrow \infty$  é a mesma coisa que tomar o limite  $\delta \rightarrow \infty$ .

Usando as eqs. (98) obtém-se

$$P_{m'm}(\delta \Delta t, 0) \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} (-)^{m-m'} \begin{pmatrix} I & I & 0 \\ m' - m' & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & 0 \\ m - m & 0 & \end{pmatrix} = \frac{1}{2I+1}$$

que é a propriedade (E) que queríamos encontrar.

### II-3. Método da Vizinhança Pequena

As probabilidades condicionais  $P_{m'm}(t, t_0)$ , assim como são dadas pela eq. (90), não podem, em geral, ser calculadas exatamente numa fonte macroscópica porque o número de variáveis é extremamente grande. Entretanto, modelos podem ser construídos, como o modelo gasoso, estudado no parágrafo I-5,



que facilitam o referido cálculo. No caso do modelo gasoso, foi tomado como sistema quântico apenas o átomo que contém o núcleo radioativo, considerado livre no intervalo de tempo entre duas colisões consecutivas, e o efeito destas foi considerado como sendo o de reorientar, aleatoriamente, o spin  $\uparrow$  da coroa eletrônica. No presente capítulo apresentaremos um método um pouco diferente daquele apresentado no parágrafo anterior para obter as probabilidades condicionais, o qual poderá ser útil na construção de modelos.

O método consiste em selecionar uma pequena porção de matéria (o átomo, a molécula, ou algumas moléculas) situada num entorno próximo do núcleo radioativo e considerar esta pequena porção de matéria, a "vizinhança" juntamente com o núcleo como o "sistema" quântico, e considerar o efeito de resto da fonte sobre o "sistema" como potencial aleatoriamente variável. Com isto estaremos desprezando os efeitos de "realimentação" (feed-back effects) sobre o núcleo das consequências da reorientação do spin nuclear e da vizinhança sobre partículas da fonte não situadas muito próximas do núcleo. A vizinhança deve ser escolhida suficientemente grande para que o erro cometido seja pequeno, mas suficientemente pequena para que possamos levar em conta todos os seus números quânticos. No caso de líquidos moleculares, talvez a molécula seja uma boa vizinhança, assim como no modelo de gás monoatômico visto anteriormente, consideramos o átomo livre como sistema quântico. No caso de alguns tipos de pó cristalino toda a interação sofrida pelo núcleo pode ser descrita por meio de um potencial (aproximação adiabática) e portanto o "sistema" é constituído apenas pelo núcleo.

Tudo o que se disse e se calculou no parágrafo anterior para o sistema livre, até a eq. (78) inclusive, pode ser usado aqui para o sistema composto de "núcleo + vizinhança", imerso num potencial aleatório, pois apenas a partir da eq. (79) é que levamos em conta o fato de que o sistema era livre. Os números quânticos  $a$ ,  $j$  e  $M$ , que lá correspondiam ao  $\psi$  voltório, aqui correspondem à vizinhança.

Usando a eq. (77) na eq. (78) obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{a_1 I f_1 M_1, a' I f_1' M_1'}(t) &= \sum \langle a I f_1 M_1 | U(t, 0) | a_1 I f_1 M_1 \rangle \cdot \\ &\cdot \sum_{m_1 m_2} \langle f_1 M_1 | I m_1 f_1 m_1 \rangle \langle I m_1 f_2 m_1 | f_2 M_2 \rangle P_m(0) | a_1 f_1 a_2 f_2 \rangle \\ &\cdot \langle a_2 I f_2 M_2 | U^\dagger(t, 0) | a' I f_1' M_1' \rangle \end{aligned} \quad (101)$$

onde o primeiro somatório é sobre  $a_1 a_2 f_1 f_2 M_1 M_2$ .

Vamos dividir o ensemble de sistemas em sub-ensembles tais que os potenciais aleatórios que agem sobre os sistemas de um mesmo sub-ensemble diferem apenas em direção. Seja  $U^\sigma(\alpha \beta \delta; t, 0)$  o operador de evolução de um sistema pertencente ao sub-ensemble  $\sigma$  e cuja interação com o resto da fonte (potencial aleatório) se caracteriza, num dado instante, pelos ângulos de Euler  $\alpha \beta \delta$ .

Efetuada uma rotação conveniente no potencial, podemos identificar  $U^\sigma(\alpha \beta \delta; t, 0)$  com  $U^\sigma(000; t, 0)$ , i.e.e.,

$$U^\sigma(\alpha \beta \delta; t, 0) = R^\dagger(\alpha \beta \delta) U^\sigma(000; t, 0) R(\alpha \beta \delta) \quad (102)$$

Assim, os elementos de matriz de  $U^\sigma$  serão

$$\begin{aligned} \langle a I f_1 M_1 | U^\sigma(\alpha \beta \delta; t, 0) | a_1 I f_1 M_1 \rangle &= \\ &= \langle a I f_1 M_1 | R^\dagger(\alpha \beta \delta) U^\sigma(000; t, 0) R(\alpha \beta \delta) | a_1 I f_1 M_1 \rangle \end{aligned} \quad (103)$$

A matriz densidade do sub-ensemble  $\sigma$  pode ser obtida das eqs. (101) e (103), fazendo a média sobre direção. A isotropia da fonte nos garante que todos os ângulos de Euler ( $\alpha \beta \delta$ ) são igualmente populados. Por

tanto esta média é simplesmente a integral sobre ângulos,

$$P_{a_1 I_{j_1} F_{j_1} M_1, a_2 I_{j_2} F_{j_2} M_2}^\sigma(t) = \sum P_m(0) \frac{1}{\sqrt{a_1 j_1 a_2 j_2}} \langle F_1 M_1 | I_{j_1} M_1 \rangle \cdot \langle I_{j_2} M_2 | F_2 M_2 \rangle \cdot I^\sigma \quad (104)$$

onde

$$I^\sigma = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\delta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin\beta d\beta \langle a_1 I_{j_1} F_{j_1} M_1 | R^\dagger(\alpha\beta\delta) U^\sigma R(\alpha\beta\delta) | a_2 I_{j_2} F_{j_2} M_2 \rangle \langle a_2 I_{j_2} F_{j_2} M_2 | R^\dagger(\alpha\beta\delta) U^{\sigma\dagger} R(\alpha\beta\delta) | a_1 I_{j_1} F_{j_1} M_1 \rangle \quad (105)$$

$$U^\sigma \equiv U^\sigma(000; t, 0)$$

Usando as eqs. (41) segue

$$I^\sigma = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\delta \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin\beta d\beta \sum_{\mu\mu'} \sum_{\mu_1\mu_2} \left\{ D_{\mu M}^* (\alpha\beta\delta) \cdot D_{\mu_1 M_1}^{F_1} (\alpha\beta\delta) D_{\mu_2 M_2}^{F_2*} (\alpha\beta\delta) D_{\mu' M'}^{F'} (\alpha\beta\delta) \langle a_1 I_{j_1} F_{j_1} M_1 | U^\sigma | a_2 I_{j_2} F_{j_2} M_2 \rangle \cdot \langle a_2 I_{j_2} F_{j_2} M_2 | U^{\sigma\dagger} | a_1 I_{j_1} F_{j_1} M_1 \rangle \right\} = \sum_{\bar{F}\bar{M}} (2\bar{F}+1) \begin{pmatrix} F & F_2 & \bar{F} \\ M & M_2 & \bar{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 & F' & \bar{F} \\ M_1 & M' & \bar{M} \end{pmatrix} S^\sigma(t, 0) \quad (106)$$

onde

$$S^\sigma(t, 0) = \sum_{\mu_1\mu_2} \sum_{\mu\mu'} \sum_{\bar{\mu}} \langle a_1 I_{j_1} F_{j_1} \mu | U^\sigma | a_2 I_{j_2} F_{j_2} \bar{\mu} \rangle \cdot \langle a_2 I_{j_2} F_{j_2} \bar{\mu} | U^{\sigma\dagger} | a_1 I_{j_1} F_{j_1} \mu' \rangle \begin{pmatrix} F_1 & F' & \bar{F} \\ \mu_1 & \mu' & \bar{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & F_2 & \bar{F} \\ \mu & \mu_2 & \bar{\mu} \end{pmatrix} \quad (107)$$

Dos eqs. (104) e (106) se obtém

$$\rho_{a_1 j_1 F_1 M_1, a_2 j_2 F_2 M_2}^{\sigma}(t) = \sum P_m(0) \rho_{a_1 j_1 a_2 j_2}^{\sigma}(0) S^{\sigma}(t, 0) \cdot (-1)^{2I - j_1 - j_2 + 2M_1} (2F_1 + 1)^{1/2} (2F_2 + 1)^{1/2} (2F + 1)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} I & j_1 & F_1 \\ M & m & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & j_2 & F_2 \\ m & m & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & F_2 & F \\ M & M_1 & \bar{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 & F_1 & F \\ M_1 & M & \bar{M} \end{pmatrix} \delta_{MM_1} \quad (108)$$

onde a soma é sobre todos os números quânticos que não figuram no primeiro membro.

Passando a eq. (108) para a representação não acoplada, pelo método usual, obtém-se

$$\rho_{a_1 m_1 j_1 m_1, a_2 m_2 j_2 m_2}^{\sigma}(t) = \sum P_m(0) \rho_{a_1 j_1 a_2 j_2}^{\sigma}(0) S^{\sigma}(t, 0) \cdot (-1)^{j_1 + j_2 + j_1 + j_2} (2F + 1)^{1/2} (2F_1 + 1)^{1/2} (2F + 1)^{1/2} (2F_1 + 1)^{1/2}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} I & j & F \\ m_1 & m_1 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & j' & F' \\ m_2 & m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & j_1 & F_1 \\ m_1 & m & -M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & j_2 & F_2 \\ m_1 & m & -M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & F_2 & F \\ M & M_1 & \bar{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 & F_1 & F \\ M_1 & M & \bar{M} \end{pmatrix} \quad (109)$$

Como fizemos anteriormente, a matriz densidade do sub-ensamble de núcleos  $\rho^{\sigma N}$  é obtida da eq. (109) tomando-se o traço sobre as variáveis da vizinhança, ou seja, pondo  $j' = j$ ,  $a' = a$  e  $M_2 = M_1$ , e somando sobre  $a$ ,  $j$  e  $M_1$ . Obtém-se

$$\rho_{m_1 m_2}^{\sigma N}(t) = \delta_{m_1 m_2} \rho_{m_1}^{\sigma}(t) \quad (110)$$

onde

$$\rho_{m_1}^{\sigma}(t) = \sum_m \rho_{m_1 m}^{\sigma}(t, 0) P_m(0) \quad (111)$$

$$P_{m_1, m_2}^{\sigma}(t, 0) = \sum_{f_1, f_2} \langle 0 | S^{\sigma}(t, 0) | - \rangle^{2f_1 + f_2} (2F+1)^{1/2} \cdot (2F'+1)^{1/2} (2F_1+1)^{1/2} (2F_2+1)^{1/2} (2\bar{F}+1) \begin{pmatrix} I & f & F \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix}_0$$

$$\begin{pmatrix} I & f & F \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & f_1 & F_1 \\ m & m & -M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & f_2 & F_2 \\ m & m & -M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & F & \bar{F} \\ M & M & \bar{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \bar{F} \\ M_1 & M_2 & \bar{M} \end{pmatrix} \quad (112)$$

A soma na eq. (112) é sobre todos os números quânticos, exceto  $I, m$  e  $m_1$ . As probabilidades condicionais  $P_{m_1, m_2}^{\sigma}(t, 0)$  serão dadas, evidentemente, pela média sobre  $\sigma$  da eq. (112), i.e.:

$$P_{m_1, m_2}^{\sigma}(t, 0) = \langle P_{m_1, m_2}^{\sigma}(t, 0) \rangle_{\sigma} \quad (113)$$

Uma importante simplificação se obtém se supomos que em  $t=0$  existe uma distribuição de probabilidade para os momentos angulares  $f$  da vizinhança, ou seja

$$\langle a_{f_1, f_2} a_{f_1, f_2} \rangle = \delta_{f_1, f_2} \langle a_{f_1, f_1} a_{f_1, f_1} \rangle \quad (114)$$

Neste caso a soma sobre números magnéticos na eq. (112) pode ser efetuada. Obtém-se (conforme eq. A-17)

$$P_{m_1, m_2}^{\sigma}(t, 0) = \sum_k G_k^{\sigma}(t) (2k+1) (-1)^{m-m'} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m'-m' & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} \quad (115)$$

onde

$$Q_k^\sigma(t, 0) = \sum_{a_1, a_2} a_{a_1 a_2} |0\rangle S^\sigma(t, 0)$$

$$a_{a_1 a_2} = (-1)^{2I + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + F + F_1} (2F+1)^{1/2} (2F'+1)^{1/2} (2F_1+1)^{1/2} (2F_2+1)^{1/2} (2\bar{F}+1)$$

$$\begin{Bmatrix} F & F' & k \\ F_1 & F_2 & \bar{F} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I & I & k \\ F & F_1 & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I & I & k \\ F_1 & F_2 & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad (116)$$

$S^\sigma(t, 0)$  é dado pela eq. (107) com  $a' = a$ ,  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

Podemos ver que a forma das eqs. (115) e (116) é muito semelhante a das suas correspondentes para o caso de sistema livre, eqs. (99) e (94). Em particular, para o caso em que os potenciais aleatórios são reais, elas devem ser iguais. Com efeito, neste caso teremos

$$S^\sigma(t, 0) = \delta_{a_1 a} \delta_{\mu_1 \mu} \delta_{F_1 F} \delta_{F_2 F_1} \sum_{\mu, \mu'} \sum_{\mu} \langle a | I_{jF, \mu} | U^\sigma | a | I_{jF, \mu} \rangle$$

$$\cdot \langle a | I_{jF', \mu'} | U^{\sigma'} | a | I_{jF', \mu'} \rangle \left( \frac{F F' \bar{F}}{\mu \mu' \bar{\mu}} \right)^2$$

$$= \delta_{a_1 a} \delta_{\mu_1 \mu} \delta_{F_1 F} \delta_{F_2 F_1} e^{i\omega_{a_j F, a_j F_1} t} \quad (117)$$

onde

$$\omega_{a_j F, a_j F_1} = \frac{1}{\hbar} (E_{a_j F} - E_{a_j F_1})$$

sendo as energias  $E_{a_j F}$  e  $E_{a_j F_1}$  independentes de  $\mu$  e  $\mu'$  porque o sistema é livre. A soma sobre  $\bar{F}$  na eq. (116) pode ser efetuada reproduzindo exatamente a eq. (94).

CAPÍTULO III

APLICAÇÕES

No presente capítulo são apresentadas algumas aplicações em correlação angular dos resultados obtidos no capítulo anterior. No parágrafo III-1 mostraremos que as funções  $g_{jk}(t)$ , definidas pela eq. (94), são os próprios coeficientes de atenuação  $c_{jk}(t)$ , definidos pela eq. (1). No parágrafo III-2 mostraremos que no limite  $t \gg \bar{t}_c$  as funções  $c_{jk}(t)$  são exponenciais únicas. No parágrafo III-3 calcularemos  $c_{jk}(t)$  para o modelo gasoso do parágrafo 1-5, sob a restrição  $t \gg \bar{t}_c$ , e no parágrafo III-4 obteremos uma expressão simplificada para a correlação angular integral do mesmo modelo gasoso.

III-1. O Papel de  $Q_{jk}(t)$  em Correlação Angular

A correlação angular  $W(\theta, t)$  pode ser escrita em termos de  $F_m(\theta)$ ,  $P_m(0)$  e  $P_{mm'}(t, 0)$  de acordo com as eqs. (4) e (22), na forma

$$W(\theta, t) = \sum_{mm'} F_m(\theta) P_{mm'}(t, 0) P_{m'c}(0) \quad (118)$$

As quantidades  $F_m(\theta)$  são dadas por <sup>6)</sup>

$$F_m(\theta) = \sum_{k_2} \lambda_{k_2} (-1)^m \begin{pmatrix} 1 & 1 & k_2 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} P_{k_2}(0) \quad (119)$$

onde  $A_{k\ell}$  são quantidades que dependem dos spins nucleares e da multipolaridade da segunda radiação, mas são independentes de  $M$  e  $\theta$ .

As probabilidades  $P_M(0)$  podem ser obtidas do elemento de matriz

$$|\langle I M | H_1 | I_i m_i \rangle|^2$$

onde  $I_i$  e  $m_i$  são os números quânticos do núcleo no instante imediatamente antes de ser emitida a primeira radiação e  $H_1$  é o hamiltoniano de interação da radiação com o núcleo. Usando o teorema de Wigner-Eckart e a condição de normalização

$$\sum_M P_M(0) = 1 \quad (120)$$

obtem-se

$$P_M(0) = \frac{1}{2} \left\{ \left( \langle I M L 1 | I_i m_i + 1 \rangle \right)^2 + \left( \langle I M L -1 | I_i m_i - 1 \rangle \right)^2 \right\}$$

onde  $L$  é a multipolaridade da primeira radiação, e os dois coeficientes de Clebsch-Gordan correspondem às polarizações destrógira e sinistrogira, respectivamente. Se não se fez medida de polarização eles dão contribuições iguais para termos pares em  $k$  e se cancelam para termos ímpares, por conservação de paridade. Neste caso poderemos escrever simplesmente

$$P_M(0) = \left( \langle I M L 1 | I_i m_i + 1 \rangle \right)^2 = (2I_i + 1) \left( \frac{I L I_i}{M 1 - M - 1} \right)^2 \quad (121)$$

Substituindo as eqs. (99), (119) e (121) na eq. (118) obtém

-cc

$$W(0, t) = \sum_{M M'} \sum_{k k'} A_{k\ell} (-1)^{M'} (2I_i + 1) (2L + 1) g_{k\ell}^{M'}(t)$$



$$\begin{aligned} & \cdot \begin{pmatrix} I & I & k' \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k' \\ m' & -m' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} \\ & \cdot \begin{pmatrix} I & L & I_i \\ m' & 1 & -(m'+1) \end{pmatrix}^2 P_k(\cos \theta) \end{aligned}$$

Efetuando, por ordem, as somas sobre  $m$ ,  $k'$  e  $m'$  obtém-se

-28

$$\begin{aligned} W(\theta, t) &= \sum_k A_k(t) (-)^{2I+I_i+1} (2I_i+1) \begin{Bmatrix} L & L & k \\ I & I & I_i \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} L & L & k \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \cdot G_k(t) P_k(\cos \theta) \end{aligned} \quad (122)$$

Comparando a eq. (122) com a eq. (1) para  $t=0$  e lembrando

que

$$G_k(0) = G_k(0) = 1$$

obtem-se

$$A_k(1) A_k(2) = A_k(t) (-)^{2I+I_i+1} (2I_i+1) \begin{Bmatrix} L & L & k \\ I & I & I_i \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} L & L & k \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de modo que a eq. (122) pode ser escrita na forma

$$W(\theta, t) = \sum_k A_k(1) A_k(2) G_k(t) P_k(\cos \theta) \quad (11')$$

e que prova a relação

$$G_k(t) = G_k(t) \quad (123)$$

como se queria demonstrar.

III-2. Limite  $\epsilon \ll t$

No presente parágrafo mostraremos que, no limite  $\epsilon \ll t$  a forma (99) da probabilidade condicional  $P_{m'm}(t, 0)$ , obtida como consequência essencialmente da isotropia e homogeneidade da fonte, implica na forma exponencial de  $G_k(t)$ . Mostrá-lo-emos por dois métodos diferentes.

III-2-1. Usando a Equação Master

Para proceder de acôrdo com o método estabelecido no parágrafo I-2, vamos definir um intervalo de tempo  $\Delta t \gg \epsilon$ , mas  $\Delta t \ll t$ , de tal maneira que

$$W_{mm'} = \frac{P_{mm'}(\Delta t, 0)}{\Delta t} \quad m \neq m'$$

representa a probabilidade de transição média, por unidade de tempo, entre os estados  $m$  e  $m'$ . Neste caso os elementos da matriz  $\Lambda$  são dados por (conforme eqs. (28), (99) e (123))

$$\begin{aligned} \Lambda_{mm'} &= \frac{P_{mm'}(\Delta t, 0) - \delta_{mm'}}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \sum_k G_k(\Delta t) (2k+1) (-)^{m-m'} \binom{I \ I \ k}{m \ m \ 0} \binom{I \ I \ k}{m'-m' \ 0} - \delta_{mm'} \right\} \end{aligned} \quad (124)$$

Multiplicando ambos os membros da eq. (124) por  $P_m^{(k)}$ , definida pela eq. (17), e somando sobre  $m'$  segue

$$\sum_{m'} \Lambda_{mm'} P_{m'}^{(k)} = \sum_{k'} \left\{ \frac{B_k \sqrt{2k+1} G_{k'}(\Delta t)}{\Delta t} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m'} (-1)^{I-m} (2k'+1) \begin{pmatrix} I & I & k' \\ m-m & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k' \\ m'-m' & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m'-m' & 0 & \end{pmatrix} \left\} - \frac{1}{\Delta t} P_m^{(k)} \right. \\
& = \frac{g_k(\Delta t)}{\Delta t} B_k \sqrt{2k+1} (-1)^{I-m} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m-m & 0 & \end{pmatrix} - \frac{1}{\Delta t} P_m^{(k)} \\
& = -\lambda_k P_m^{(k)}
\end{aligned}$$

(125)

onde

$$\lambda_k = \frac{1 - g_k(\Delta t)}{\Delta t} \quad (126)$$

Portanto

$$\Delta \tilde{P}_m^{(k)} = -\lambda_k \tilde{P}_m^{(k)}$$

que é a eq. (19) e que implica em

$$g_k(t) = e^{-\lambda_k t} \quad (127)$$

conforme mostramos no parágrafo I-1.

### III-2-2. Método Direto

Veremos agora que o mesmo resultado pode ser obtido sem usar a equação Master. Comparando as eqs. (99) e (100) e usando a eq., (123) vê-se que

$$g_k(s \Delta t) = g_k(\Delta t)^s \quad (128)$$

para  $\Delta t \gg \tau_c$ . Fazendo  $t = s \Delta t$ ,  $s = t/\Delta t$ , segue

$$G_k(t) = (G_k(\Delta t))^{t/\Delta t} \quad (129)$$

Para  $t \gg \Delta t$  é necessário termos

$$\varepsilon_k \equiv 1 - G_k(\Delta t) \ll 1 \quad (130)$$

para que  $G_k(t)$  não seja nula.

Definindo

$$\lambda_k = -\frac{1}{\Delta t} \ln G_k(\Delta t) \quad (131)$$

segue, da eq. (130)

$$\lambda_k = -\frac{1}{\Delta t} \ln(1 - \varepsilon_k) \approx \frac{\varepsilon_k}{\Delta t} = \frac{1 - G_k(\Delta t)}{\Delta t}$$

que é igual à eq. (126).

Das eqs. (129) e (131) segue

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_k t} &= \exp\left[\frac{t}{\Delta t} \ln G_k(\Delta t)\right] \\ &= [G_k(\Delta t)]^{t/\Delta t} = G_k(t) \end{aligned}$$

que é igual à eq. (127).

III-3. Modelo Gasoso para qualquer Tempo de Correlação

Consideremos o mesmo modelo gasoso introduzido no parágrafo I-5, mas agora sem impôr a condição  $\tau_c \ll t$ . Como esta condição só é usada após a eq. (65), poderíamos proceder como na referência <sup>(16)</sup>, usando os resultados obtidos naquêle parágrafo até a eq. (65). Entretanto, a nossa intenção aqui é fazer uma aplicação do método introduzido no parágrafo II-3 (no v.p.). Por isso partiremos da eq. (115). A "porção de matéria" que escolheremos como "vizinhança" é a cerca eletrônica do núcleo radioativo em questão, ou seja, o "sistema quantinecânico" é o átomo, considerado livre nos intervalos de tempo entre duas colisões consecutivas. Como fizemos no parágrafo I-5 vamos considerar apenas o caso bem simples em que só existe um momento angular  $j$  para o átomo, sendo equiprováveis os  $2j+1$  valores de  $M$  nos instantes imediatamente após uma colisão ou seja

$$P_{a_j a_j}(0) = \frac{1}{2j+1} \quad (132)$$

III-3-1. Distribuição Estatística das Colisões

Como as únicas interações do átomo com resto da fonte são as colisões, o índice  $\sigma$  de  $S^\sigma(t,0)$  é o conjunto de tempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  em que estas colisões ocorrem.

Admitiremos uma distribuição do tipo

$$\frac{1}{\tau_c} e^{-t/\tau_c}$$

para o tempo  $t_1$  em que ocorre a primeira colisão,

$$1/\tau_c e^{-(t_2-t_1)/\tau_c}$$

para o tempo  $t_2$  em que ocorre a segunda colisão se a primeira ocorreu em  $t_1$

$$1/\tau_c e^{-(t_j-t_{j-1})/\tau_c}$$

(133)

para a colisão de número  $j$  se a de número  $j-1$  ocorreu em  $t_{j-1}$ .

Vamos dividir o ensemble de átomos em grupos, caracterizados pelo número  $\lambda$  de colisões que ocorrem durante o tempo de vida do estado intermediário de seus núcleos radioativos. Denotando a probabilidade condicional  $P_{m'm}^\lambda(t,0)$  correspondente a um dado átomo por  $P_{m'm}^\lambda(t,0; t_1, t_2, \dots, t_j)$ , sua média sobre ensemble para átomos de grupo  $\lambda$  será

$$P_{m'm}^\lambda(t,0) = \int_0^t dt_1 T_0(t_1) \int_{t_1}^t dt_2 T_1(t_2) \dots \int_{t_{j-1}}^t dt_j T_{j-1}(t_j) P_{m'm}^\lambda(t,0; t_1, t_2, \dots, t_j) \quad (134)$$

onde  $T_{j-1}(t_j)$  é a distribuição (133), normalizada entre  $t_{j-1}$  e  $t$ , ou seja

$$T_{j-1}(t_j) = \frac{e^{-(t_j-t_{j-1})/\tau_c}}{\int_{t_{j-1}}^t dt_j e^{-(t_j-t_{j-1})/\tau_c}} = \frac{e^{-(t-t_j)/\tau_c}}{\tau_c (e^{-(t-t_{j-1})/\tau_c} - 1)} \quad (135)$$

De acordo com a eq. (22) e com as hipóteses estabelecidas no nosso modelo, podemos escrever

$$P_{m'm}^\lambda(t,0; t_1, t_2, \dots, t_j) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_j} P_{m'm_1}^0(t, t_1) P_{m_1 m_2}^0(t_1, t_2) \dots$$

$$\dots P_{m_2 m_1}^0(t_2, t_1) P_{m_1 m}^0(t_1, 0) =$$

$$= \sum_{m_1 \dots m_2} P_{m' m_1}^0(t-t_1, 0) P_{m_2 m_1-1}^0(t_1-t_{1-1}, 0) \dots P_{m_1 m}^0(t_1, 0) \quad (136)$$

Usando as eqs. (115), (116), (117) e (132) obtemos

$$P_{m' m}^0(\Delta t, 0) = \sum \frac{1}{2f+1} (-)^{m-m'} (2F+1) (2F'+1) (2k+1) (2\bar{F}+1)$$

$$\begin{Bmatrix} FF' k \\ FF' \bar{f} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I I k \\ FF' f \end{Bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} I I k \\ m'-m' 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I I k \\ m-m 0 \end{Bmatrix} e^{-i\omega_{FF'} \Delta t} \quad (137)$$

A soma sobre  $\bar{F}$  pode ser efetuada veja eq (A-20)) dando

$$P_{m' m}^0(\Delta t, 0) = \sum_k \sum_{FF'} C_{FF'}^k (2k+1) (-)^{m-m'}$$

$$\begin{Bmatrix} I I k \\ m'-m' 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I I k \\ m-m 0 \end{Bmatrix} e^{-i\omega_{FF'} \Delta t} \quad (138)$$

onde

$$C_{FF'}^k = \frac{(2F+1) (2F'+1)}{2f+1} \begin{Bmatrix} I I k \\ FF' f \end{Bmatrix}^2 \quad (139)$$

Admitiremos uma distribuição de Poisson

$$P_s(t/t_c) = \frac{1}{s!} \left(\frac{t}{t_c}\right)^s e^{-t/t_c} \quad (140)$$

para o número  $s$  de colisões que ocorrem entre 0 e  $t$ , de tal ma-

neira que se pode escrever

$$P_{m'm}^{\Delta}(t,0) = \langle P_{m'm}^{\Delta}(t,0) \rangle_{\Delta} = \sum_{\Delta} P_{\Delta}(t/\tau_c) P_{m'm}^{\Delta}(t,0) \quad (141)$$

III-3-2. Dependência Temporal da Correlação Angular

A correlação angular  $W(\theta, t)$ , dada pela eq. (118), adquire a forma

$$\begin{aligned} W(\theta, t) &= \sum_{\Delta=0}^{\infty} P_{\Delta}(t/\tau_c) \sum_{m m'} F_{m m'}(\theta) P_{m m'}^{\Delta}(t,0) P_{m m'}(0) = \\ &= \sum_{\Delta=0}^{\infty} P_{\Delta}(t/\tau_c) W^{\Delta}(\theta, t) \end{aligned} \quad (142)$$

onde

$$W^{\Delta}(\theta, t) = \sum_{m m'} F_{m m'}(\theta) P_{m m'}^{\Delta}(t,0) P_{m m'}(0)$$

representa a correlação angular para o grupo de átomos que sofreram exatamente  $\Delta$  colisões antes que a segunda radiação tenha sido emitida. Em particular, para  $\Delta=0$ , usando as eqs. (119), (121) e (138), segue

$$\begin{aligned} W^0(\theta, t) &= \sum_{m m'} F_{m m'}(\theta) P_{m m'}^0(t,0) P_{m m'}(0) \\ &= \sum_k \sum_{k'} \sum_{FF'} C_{FF'}^k \Lambda_k (-)^{m'} (2I_i + 1) (2k + 1) \begin{pmatrix} I & L & I_i \\ m' & 1 & -(m'+1) \end{pmatrix}^2 \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} I & I & k \\ m-m & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k' \\ m-m & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k' \\ m'-m' & 0 & 0 \end{pmatrix} P_k(\cos \theta) e^{-i\omega_{FF'} t} = \\ &= \sum_k \sum_{FF'} C_{FF'}^k \Lambda_k (2I_i + 1) (-)^{2I+I_i+1} \begin{pmatrix} L & L & k \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L & L & k \\ I & I & I_i \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



$$P_k(\cos \theta) e^{-i\omega_{FF'} t} \quad (143)$$

Comparando as eqs. (1) e (143) para  $t=0$ , e lembrando que

$$\sum_{FF'} C_{FF'}^k = 1$$

segue

$$A_k^{(1)} A_k^{(2)} = A_k (2I_k + 1) (-1)^{2I_k + I_k + 1} \begin{pmatrix} L & L & k \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L & L & k \\ I & I & I_k \end{Bmatrix} \quad (144)$$

Portanto

$$W^0(\theta, t) = \sum_k A_k^{(1)} A_k^{(2)} G_k^0(t) P_k(\cos \theta) \quad (145)$$

onde

$$G_k^0(t) = \sum_{FF'} C_{FF'}^k e^{-i\omega_{FF'} t} \quad (146)$$

Para  $A=1$  teremos

$$\begin{aligned} W^0(\theta, t) &= \sum_{m, m'} F_m(\theta) P_{m, m'}^1(t, 0) P_{m'}^1(0) = \\ &= \sum_{m, m'} \int_0^t dt_1 T_0(t_1) F_m(\theta) P_{m, m'}^1(t_1, 0; t_1) P_{m'}^1(0) \\ &= \int_0^t dt_1 T_0(t_1) \sum_{m, m', m''} F_m(\theta) P_{m, m'}^0(t-t_1, 0) P_{m', m''}^1(t_1, 0) P_{m''}^1(0) \end{aligned} \quad (147)$$

onde usamos as eqs. (134) e (136). Substituindo as funções que se encontram dentro do somatório da eq. (147) pelos seus valores, dados pelas eqs.

(119), (121) e (138) e efetuando as somas sobre  $M$ ,  $M'$  e  $M_1$  obtém-se

$$W'(\theta, t) = \sum_k A_k(1) A_k(2) P_k(\cos \theta) \int_0^t dt_1 T_0(t_1) G_k^0(t-t_1) G_k^0(t_1)$$

Portanto

$$G_k^1(t) = \int_0^t dt_1 T_0(t_1) G_k^0(t-t_1) G_k^0(t_1) \quad (148)$$

Semelhantemente se obtém

$$G_k^s(t) = \int_0^t dt_1 T_0(t_1) \int_{t_1}^t dt_2 T_1(t_2) \dots \int_{t_{s-1}}^t dt_s T_{s-1}(t_s) \cdot G_k^0(t-t_s) G_k^0(t_s-t_{s-1}) \dots G_k^0(t_1) \quad (149)$$

e que dá, finalmente, em virtude da eq. (142),

$$G_k(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} P_{\lambda}(t/\tau_c) \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \dots \int_{t_{s-1}}^t dt_s \cdot T_0(t_1) T_1(t_2) \dots T_{s-1}(t_s) G_k^0(t-t_s) \dots G_k^0(t_s-t_{s-1}) G_k^0(t-t_1) \quad (150)$$

As integrais na eq. (150) são em geral muito complicadas para serem resolvidas analiticamente, e o cálculo numérico se faz necessário.

Entretanto, alguns casos limites podem ser considerados

1) Para  $W_{FFI} = 0$ , teremos  $G_k^0(t_j - t_{j-1}) = 1$ . Ora as integrais das distribuições  $T_{j-1}(t_j)$  dão também 1, por construção e

Portanto  $G_k(t) = 1$ , como deve ser neste limite.

2) Para  $\bar{\epsilon}_c \rightarrow \infty$  somente o termo  $\lambda=0$  contribui. Obtemos o resultado conhecido para o caso de átomo livre <sup>1)</sup>, ou seja,  $\sigma_k(t) = \sigma_k^0(t)$

3) Para  $\bar{\epsilon}_c \ll t$  é difícil obter um limite exato. Entretanto se invés de usar as distribuições de probabilidade  $T_{j-1}(t_j)$  e  $P_j(t/\bar{\epsilon}_c)$  se supõe que as colisões ocorrem exatamente em  $t_n = n\bar{\epsilon}_c$ ,  $n=1, 2, \dots, \lambda$ , com  $\lambda \gg 1$ , a eq. (150) dá

$$\sigma_k(t_n) = e^{-\lambda_k t_n}$$

com

$$\lambda_k = \frac{-1}{\bar{\epsilon}_c} \ln \sigma_k(\bar{\epsilon}_c)$$

Outra maneira de obter este limite é extrapolando as integrações numéricas, das quais veremos alguns exemplos a seguir.

### III-3-3. Resultados numéricos e discussão

Para calcular numericamente a eq. (150), substituímos  $P_j(t/\bar{\epsilon}_c)$  e  $T_{j-1}(t_j)$  por seus valores, como são dados pelas eqs. (140) e (135), calculamos  $C_{FF}^k$  e atribuímos valores para  $W_{FF}$  para obter as funções  $\sigma_k^0(t)$  a partir da eq. (146). Para obter as curvas traçadas nas figuras 1 a 6 nós interrompemos a soma sobre  $\lambda$  da eq. (150) num valor  $\lambda = \lambda_0$  tal que

$$P_{\lambda_0}(t/\bar{\epsilon}_c) < \frac{1}{100} \sum_{\lambda=0}^{\lambda_0} P_{\lambda}(t, \bar{\epsilon}_c)$$

A fig. 1 mostra  $\sigma_2(t)$  para  $I=2$ ,  $f=1/2$  e para valores de  $\omega \bar{\epsilon}_c = \omega \frac{3}{2} \frac{5}{2} \bar{\epsilon}_c = 1, 2, 4, 8, \text{ e } 30$ . Cada uma das sucessivas integrais foi calculada para um número de pontos dados por  $N(t) = 4\omega t$ , i.e., aproximadamente 25 pontos para cada ciclo completo de  $\omega t$ . A integral para  $\lambda=2$  foi calculada a partir dos valores obtidos para a integral com  $\lambda=1$ , e assim sucessivamente até  $\lambda = \lambda_0$ . No caso  $I=2$

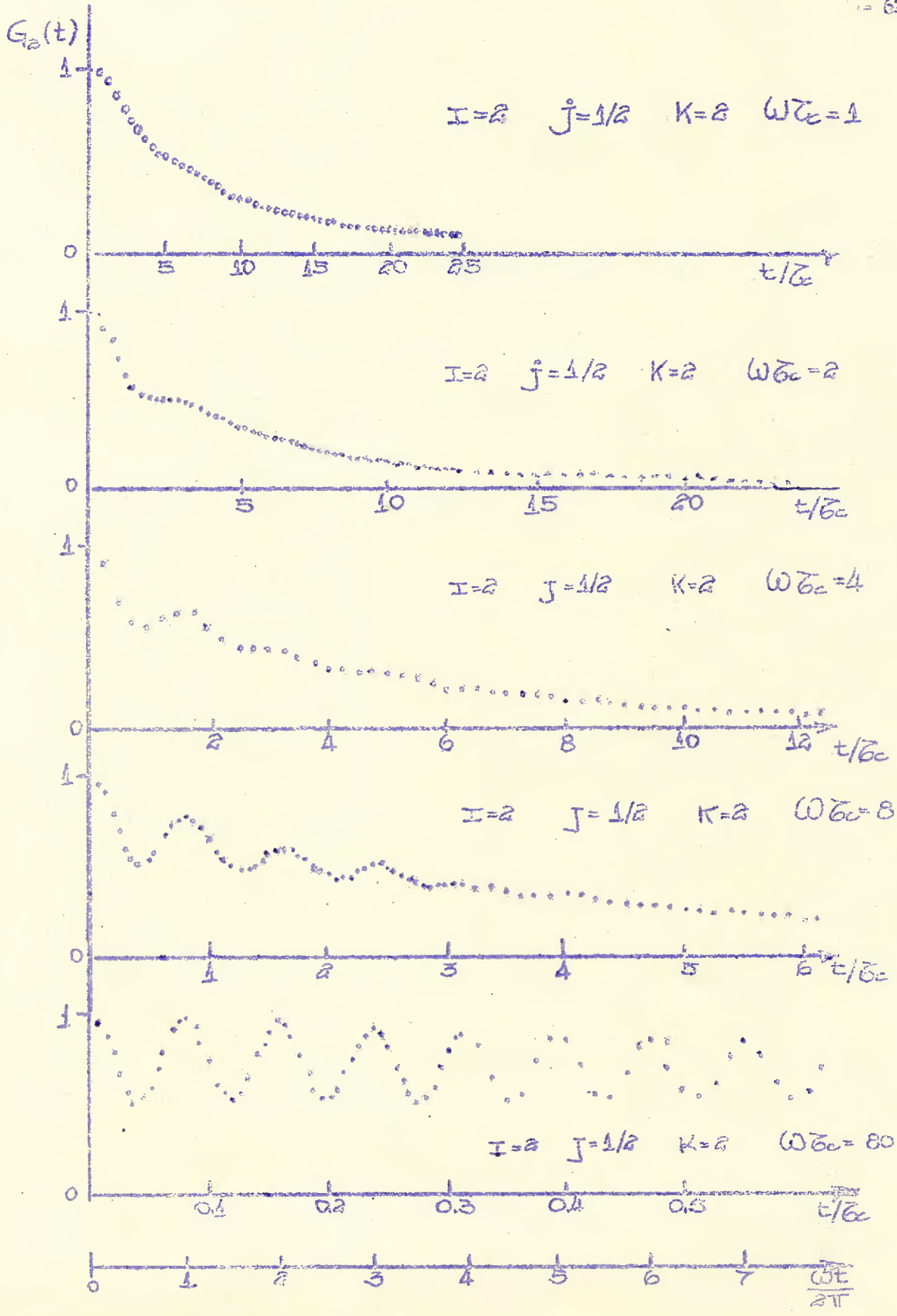


Figura 1

e  $f = 5/2$  (figs. 4 e 5) há sete freqüências  $\omega_{FF'}$  com coeficientes  $C_{FF'}^k$  não nulos. A relação entre eles foi calculada para um hamiltoniano de interação da forma

$$H = 2 \frac{\hbar}{2} \omega_0 \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} \quad (151)$$

e portanto

$$\omega_{FF'} = \frac{1}{\hbar} (E_F - E_{F'}) = \omega_0 [F(F+1) - F'(F'+1)] \quad (152)$$

A constante  $\omega_0$  foi escolhida arbitrariamente para cada curva. O processo de integração foi o mesmo que o usado para  $f = 1/2$ , com o número de pontos  $N(t)$  dado por  $N(t) = 4\omega_m t$ , onde  $\omega_m$  é a maior das freqüências  $\omega_{FF'}$ .

Na fig. 1, uma escala temporal em unidades de  $\omega t / 2\pi$ , comum a todas as curvas, mostra que cada uma delas oscila com a freqüência  $\omega$ . Para cada curva nós traçamos uma abscissa particular, em unidades de  $t/\tau_c$ . Os números nessas abscissas também representam o número médio de colisões até a emissão da segunda radiação. A curva superior ( $\omega\tau_c = 1$ ) mostra um comportamento exponencial quase a partir do início, correspondendo ao limite  $t \gg \tau_c$ . A curva inferior ( $\omega\tau_c = 80$ ) é quase oscilante pura porque a maioria dos átomos não sofre nenhuma colisão até que a segunda radiação é emitida. As outras curvas mostram um comportamento intermediário entre estes dois limites.

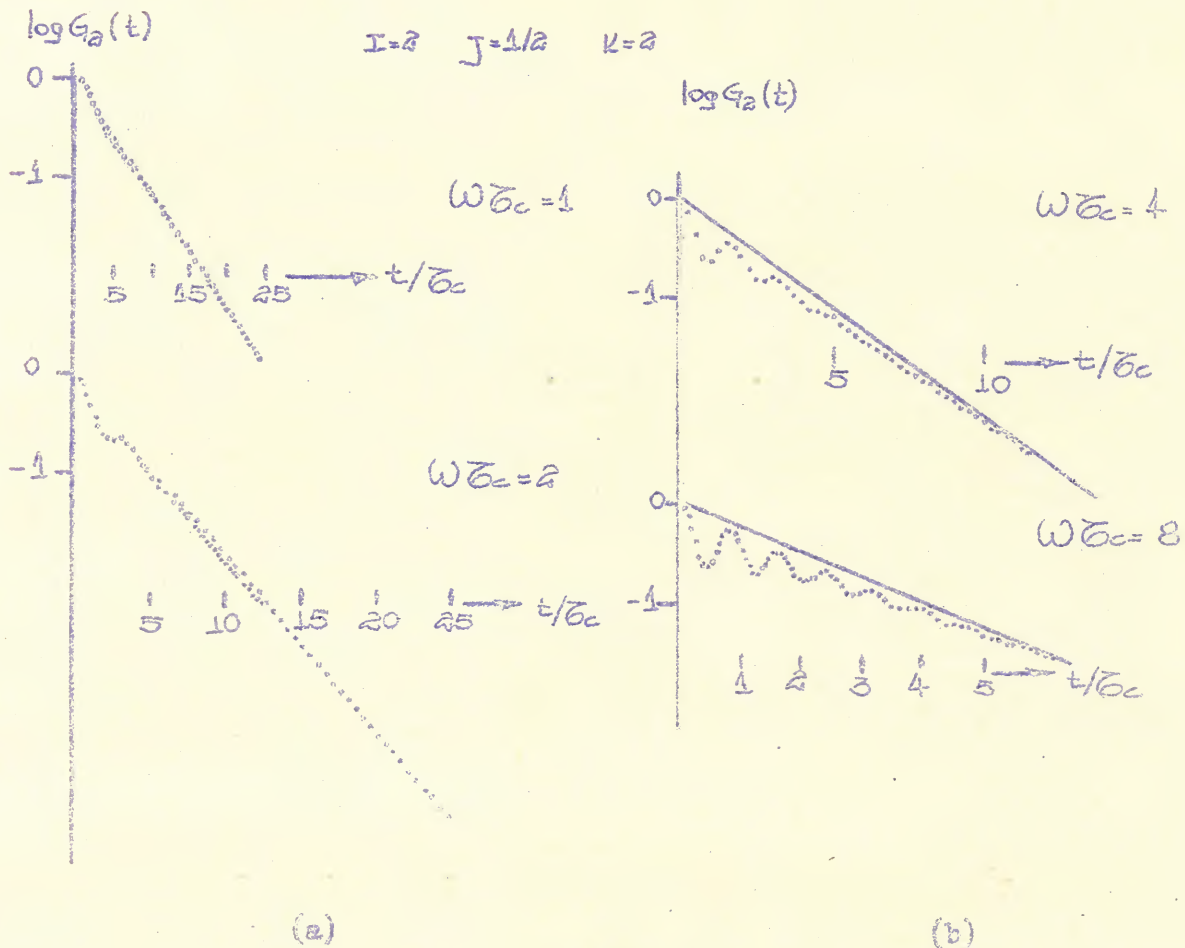


Figura 2

O comportamento assintótico, na região onde  $t \gg \tau_c$  pode ser melhor visto na fig. 2, que mostra as mesmas curvas da fig. 1 em escala logarítmica. Os dois conjuntos de pontos que se vêem na curva inferior ( $W\tau_c=2$ ) da fig. 2-a correspondem a duas aproximações diferentes na integração numérica; o conjunto superior foi obtido com  $N(t)=4Wt$  e o inferior com  $N(t)=-2Wt$ . A semelhança dos resultados sugere que a aproximação é bastante boa. As linhas cheias sobre as duas curvas da fig. 2-b foram traçadas como uma estimativa para o comportamento exponencial na região assintótica.

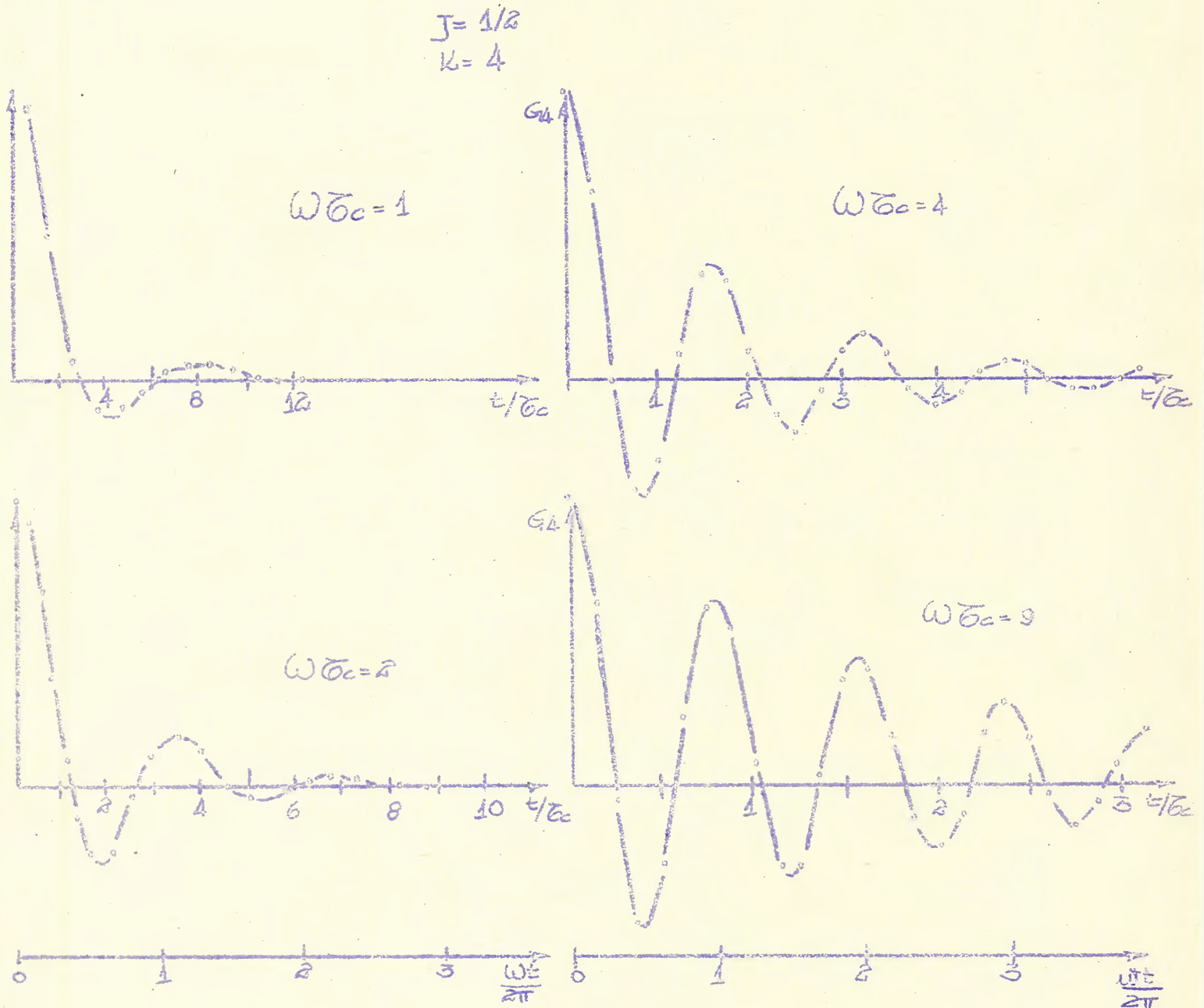


Figura 3

A fig. 3 mostra  $G_y(t)$  para  $I=2$ ,  $f=1/2$  e  $W\tau_c = 1, 2, 4, \text{ e } 9$ . As oscilações em  $G_y(t)$  tem uma amplitude muito menor do que aquelas em  $G_z(t)$ . De fato, o coeficiente de  $\cos \omega t$  em  $G_y(t)$  é 0,80 enquanto que em  $G_z(t)$  ele é apenas 0,24.

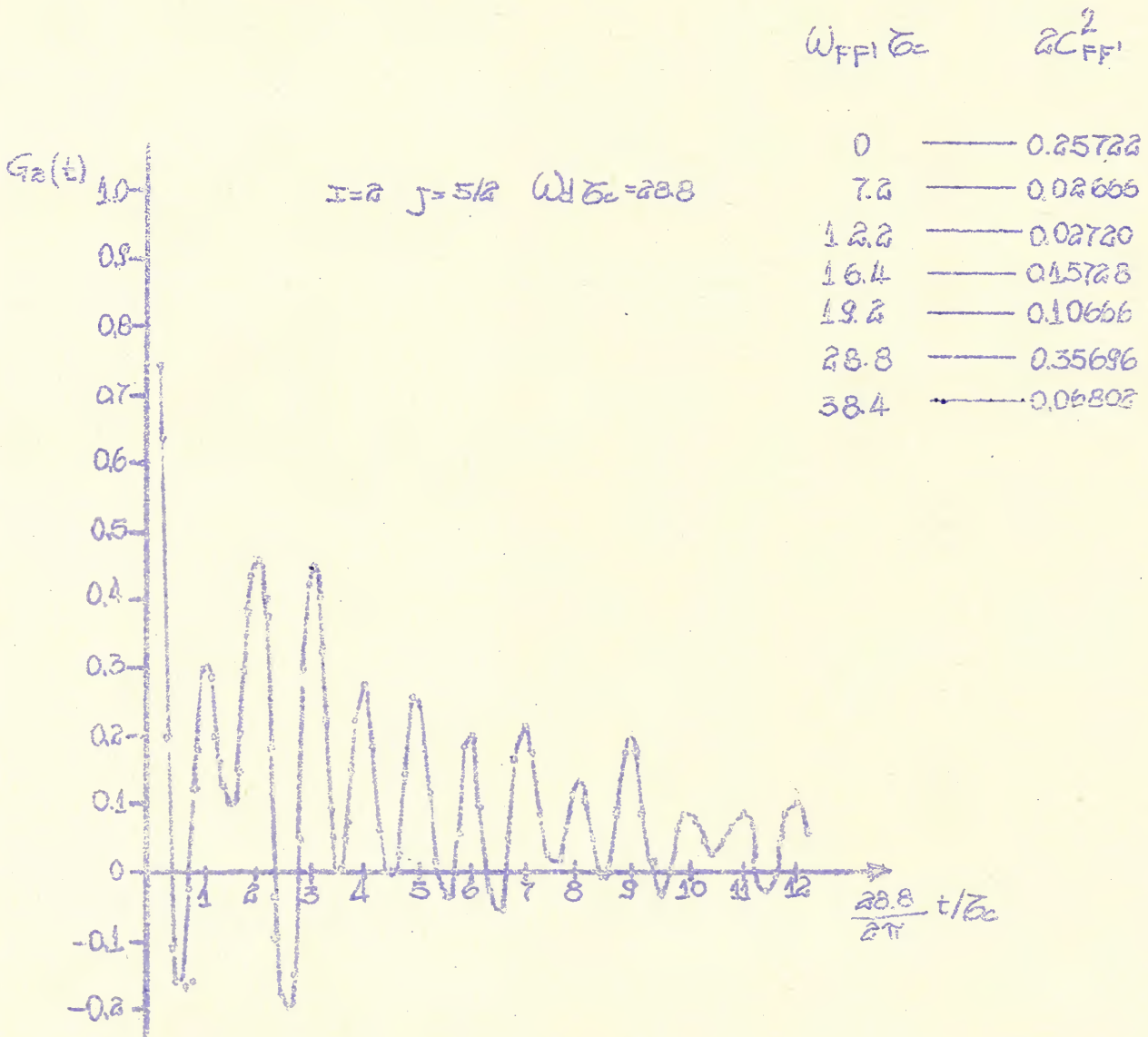


Figura 4

A fig. 4 mostra  $G_2(t)$  para  $I=2$ ,  $J=5/2$  e  $\omega_{FF1}$  calculados pela eq. (152), com  $\omega = 2,4 \tau_c^{-1}$ . As sete frequências estão escritas na figura. Vemos que existe uma frequência dominante  $\omega_d$ , com coeficiente  $2C_{FF1}^2 = 0,35$  e  $\omega_d \tau_c = 28,8$ . A abscissa em unidades de  $\omega_d t / 2\pi$  mostra que a curva oscila com esta frequência  $\omega_d$ , enquanto que a contribuição das demais frequências é somente para modular a amplitude.



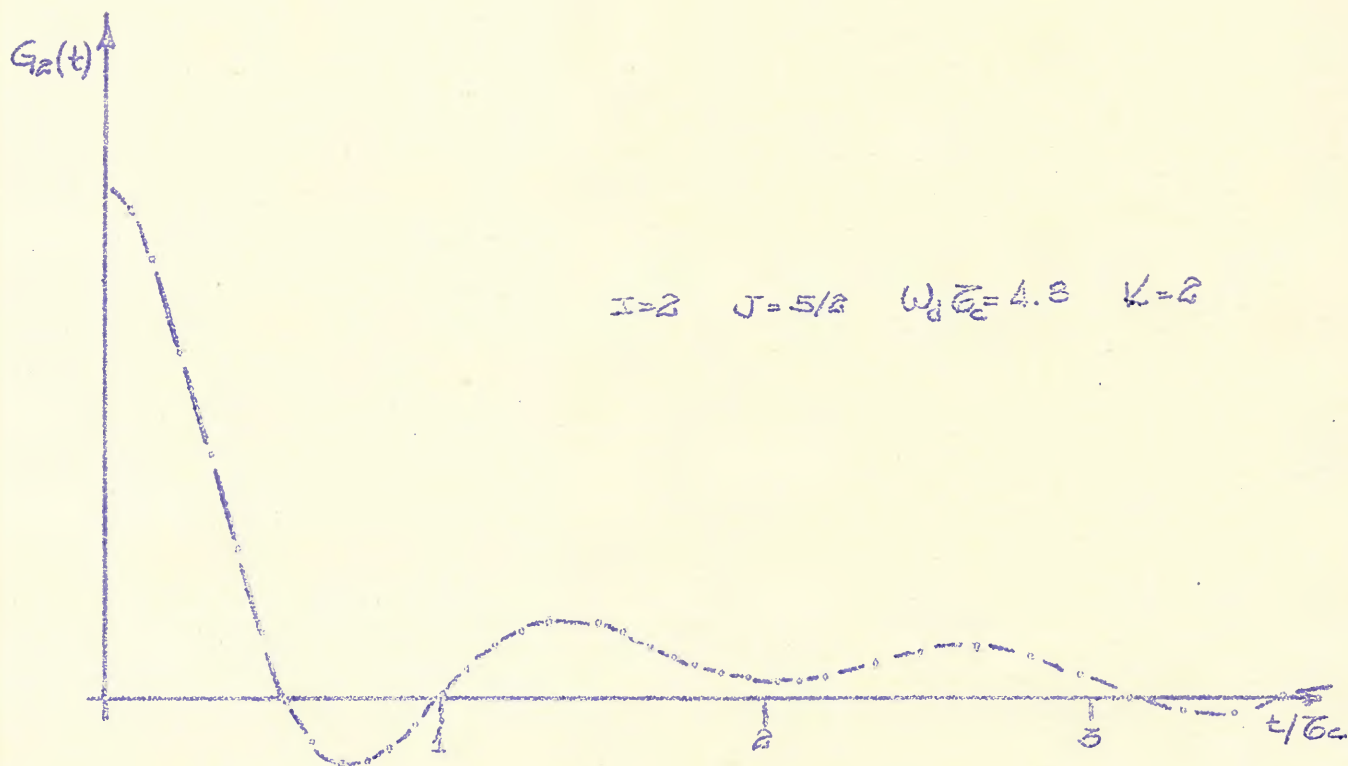


Figura 5

A fig. 5 é mesma que a fig. 4 mas com  $W_{FF'} \tau_c$  um fator 6 vezes me nor que seus correspondentes na fig. 4.

Nenhuma dessas curvas foi calculada suficientemente longe para mos-  
 trar um comportamento assintótico exponencial, mas, para valores pequenos de  
 $W_{FF'} \tau_c$  calculou-se  $G_2(t)$  para  $f=5/e$  para valores grandes de  $t/\tau_c$ .

$$I=2 \quad J=5/2 \quad K=2$$

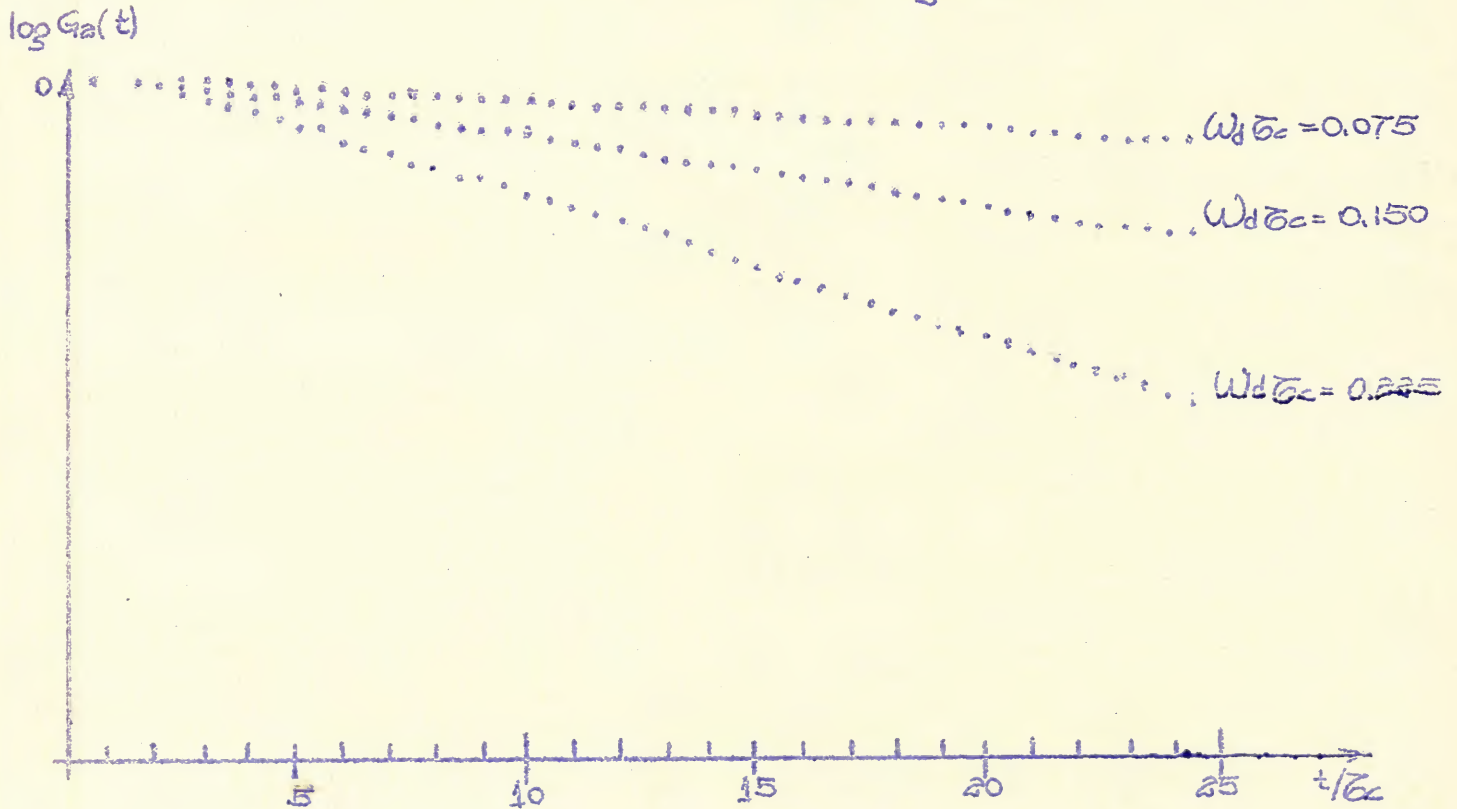


Figura 6

Os resultados estão traçados na fig. 6 em escala logarítmica. As três curvas correspondem a  $\omega_d \tau_c = 0,075$  ;  $0,150$  ;  $0,225$  respectivamente. Nestas curvas se vê um comportamento assintótico exponencial (linha reta). A reta correspondente a  $\omega_d \tau_c = 0,225$  não corta exatamente o ponto  $\log G_2(0) = 0$  mas isto se deve, provavelmente, à imprecisão nas integrações numéricas, que se torna pior à medida que  $t/\tau_c$  aumenta. Um cálculo pelo método Monte-Carlo poderia, talvez, dar resultados melhores.

III-4. Correlação Integral: Modelo Gasoso Simplificado

Do ponto de vista da física experimental, muitas vezes é mais interessante ter a expressão teórica da correlação angular integral

$$\overline{W(\theta, \infty)} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} dt e^{-t/\tau} W(\theta, t) \quad (153)$$

( $\tau$  = vida média do estado intermediário)

ou, equivalentemente,

$$\overline{G_k(\infty)} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} dt e^{-t/\tau} G_k(t) \quad (154)$$

do que a da correlação diferencial  $W(\theta, t)$  ou  $G_k(t)$ , uma vez que esta não pode ser obtida experimentalmente quando a vida média do estado intermediário, é menor ou da ordem do tempo de resolução dos aparelhos disponíveis. Além disso, é geralmente mais fácil medir a correlação integral que a diferencial.

No presente parágrafo consideraremos o limite  $\tau_c \ll \tau$  e usaremos o modelo sugerido ao final do parágrafo III-2-2 (item 3) para obter uma expressão bastante simples para  $\overline{G_k(\infty)}$ .

Quando a maioria das radiações são emitidas após ter havido um número muito grande de colisões atômicas, é justo esperar que não estaremos cometendo um erro apreciável em supor que a enésima colisão ocorre em  $t_n = n \tau_c$  invés de permitir uma distribuição do tipo da usada no parágrafo III-2-1. Cálculos numéricos efetuados com esta aproximação para a correlação angular diferencial dão resultados quase iguais aos obtidos com a eq. (150), quando  $t \geq 10 \tau_c$ .

Definindo  $t'$  por  $t = s \tau_c + t'$ , com  $0 \leq t' < \tau_c$ , a eq. (150) fica sendo, dentro desta aproximação,

$$G_k(t) = (G_k^0(\tau_c))^{\Delta} G_k^0(t') \quad (155)$$

e a eq. (154) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \overline{G_k(\infty)} &= \frac{1}{\tau_c} \int_0^{\tau_c} dt e^{-t/\tau_c} G_k^0(t) + \frac{1}{\tau_c} \int_{\tau_c}^{2\tau_c} dt e^{-t/\tau_c} G_k^0(\tau_c) G_k^0(t-\tau_c) \\ &+ \dots + \frac{1}{\tau_c} \int_{\Delta\tau_c}^{(\Delta+1)\tau_c} dt e^{-t/\tau_c} (G_k^0(\tau_c))^{\Delta} G_k^0(t-\Delta\tau_c) + \dots \\ &= \frac{1}{\tau_c} \sum_{\Delta=0}^{\infty} (G_k^0(\tau_c))^{\Delta} \int_0^{\tau_c} dt' e^{-t'/\tau_c} e^{-\Delta\tau_c/\tau_c} G_k^0(t') \\ &= \left\{ \frac{1}{\tau_c} \int_0^{\tau_c} dt' e^{-t'/\tau_c} G_k^0(t') \right\} \cdot \left\{ \sum_{\Delta=0}^{\infty} (e^{-\tau_c/\tau_c} G_k^0(\tau_c))^{\Delta} \right\} = I_k \cdot S_k \end{aligned} \quad (156)$$

onde  $I_k$  e  $S_k$  representam, respectivamente, a primeira e segunda expressão entre chaves. Vamos calculá-las separadamente:

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{\tau_c} \int_0^{\tau_c} dt e^{-t/\tau_c} \sum_{FF'} C_{FF'}^k \cos w_{FF'} t \\ &= \frac{1}{\tau_c} \sum_{FF'} C_{FF'}^k \int_0^{\tau_c} dt e^{-t/\tau_c} \cos w_{FF'} t \\ &= \sum_{FF'} C_{FF'}^k \frac{1 - e^{-\tau_c/\tau_c} (\cos w_{FF'} \tau_c - w_{FF'} \tau_c \text{sen } w_{FF'} \tau_c)}{1 + w_{FF'}^2 \tau_c^2} \\ S_k &= \sum_{\Delta=0}^{\infty} \left\{ \left( \sum_{FF'} C_{FF'}^k \cos w_{FF'} \tau_c \right) e^{-\tau_c/\tau_c} \right\}^{\Delta} \end{aligned}$$

Usando a fórmula

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad 0 < a < 1$$

segue

$$S_k = (1 - e^{-\xi_c/\tau}) \sum_{FF1} C_{FF1}^k (\cos W_{FF1} \xi_c)^{-1}$$

Finalmente

$$G_k(\infty) = I_k \cdot S_k = \frac{\sum_{FF1} C_{FF1}^k \frac{1 - e^{-\xi_c/\tau} (\cos W_{FF1} \xi_c - W_{FF1} \xi_c \sin W_{FF1} \xi_c)}{1 + W_{FF1}^2 \tau^2}}{1 - e^{-\xi_c/\tau} \sum_{FF1} C_{FF1}^k \cos W_{FF1} \xi_c}$$

Vamos expandir as exponenciais e funções trigonométricas acima em termos dos argumentos  $\xi_c/\tau$  e  $W_{FF1} \xi_c$ , considerando ambos muito menores que 1, até primeira ordem em  $\xi_c/\tau$  e até segunda ordem em  $W_{FF1} \xi_c$ . O resultado é

$$G_k(\infty) \approx \frac{1 - 1/2 \xi_c/\tau \sum_{FF1} C_{FF1}^k \left( \frac{W_{FF1}^2 \tau^2}{1 + W_{FF1}^2 \tau^2} \right)}{1 + 1/2 \xi_c/\tau \sum_{FF1} C_{FF1}^k W_{FF1}^2 \tau^2} \quad (157)$$

Como  $\xi_c/\tau \ll 1$   $\sum_{FF1} C_{FF1}^k \left( \frac{W_{FF1}^2 \tau^2}{1 + W_{FF1}^2 \tau^2} \right) \leq 1$  podemos pôr o numerador da eq. (157) igual a 1. Não podemos fazer o mesmo no denominador, pois  $\sum_{FF1} C_{FF1}^k W_{FF1}^2 \tau^2$  pode ser  $\gg 1$ . Fazendo

$$W_{FF1} = W_0 \alpha_{FF1} \quad (158)$$

obtemos

$$\overline{G_k(\infty)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} W^2 \delta \delta_c \sum_{F \neq F'} C_{FF'}^k \mathcal{L}_{FF'}^2} \quad (159)$$

Convém notar que  $\mathcal{L}_{FF'}^2 = \mathcal{L}_{F'F}^2$  e  $\mathcal{L}_{FF'} = 0$  se  $F = F'$ .

Portanto o somatório no denominador da eq. (159) pode ser substituído por

$$2 \sum_{F > F'} C_{FF'}^k \mathcal{L}_{FF'}^2 \equiv 2S(I, j, k) \quad (160)$$

e

$$\overline{G_k(\infty)} = \frac{1}{1 + W_0^2 \delta \delta_c S(I, j, k)} \quad (161)$$

Para o hamiltoniano dado pela eq. (151) teremos

$$\mathcal{L}_{FF'} = F(F+1) - F'(F'+1) \quad (162)$$

e os "fatores de estrutura"  $S(I, j, k)$  adquirem uma forma muito simples:

$$S(I, j, k) = \frac{2}{3} j(j+1)k(k+1) \quad 2I \geq k \quad (163)$$

Para provar isto, basta substituir as eqs. (162) e (139) na eq.

(160), o que dá

$$S(I, j, k) = \sum_{F > F'} \frac{(2F+1)(2F'+1)}{2j+1} \left\{ \begin{matrix} I & I & k \\ & F & F' \end{matrix} \right\}^2 \left\{ F(F+1) - F'(F'+1) \right\}^2 \quad (164)$$

e usar a eq. (A-19).

Obtemos assim a seguinte expressão para  $\overline{G_k(\infty)}$ , quando  $\xi \ll \xi_0$ ,  $\omega_{FF} \xi_c \ll 1$  e a interação é do tipo  $H = 2\hbar \omega_0 \frac{I}{L} \cdot J$ :

$$\overline{G_k(\infty)} = \left[ 1 + \frac{2}{3} \omega_0^2 \xi \xi_c f(f+1) k(k+1) \right]^{-1} \quad (165)$$

Pode parecer surpreendente que o resultado obtido é independente de  $I$  (ressalvada, naturalmente, a condição  $2I \geq k$ ). Convém notar, entretanto, que a eq. (165) para  $G_k^0(t)$  (expressão esta que também pode ser encontrada no artigo de Fienefeld e Steffen, referência (1)) já contém esta característica de ser independente de  $I$  na aproximação  $\omega_0 \omega_{FF} t^2 \approx 1 - \frac{1}{2} (\omega_{FF} t)^2$ . Cabe notar ainda que a eq. (165) apresenta a mesma dependência em  $k$  que os resultados obtidos anteriormente por Abragam e Pound <sup>4)</sup> para o caso de campo magnético clássico, aleatoriamente variável.

Uma característica importante da técnica descrita acima é a facilidade com que ela pode ser estendida para tratar casos em que a interação não é estacionária. Por exemplo, os efeitos de variação sistemática do tempo de correlação devido à diminuição de velocidade de um íon que recua em um gás, ou de variação sistemática das frequências de interação devido à transições entre estados eletrônicos, no caso de íons inicialmente excitados, podem ser facilmente tratados numericamente uma vez que se tenha um modelo adequado para a dependência temporal destes fenômenos. Lépine, Seale e Saly <sup>1)</sup> usaram a aproximação acima, adaptada a uma experiência de correlação angular  $p$ - $f$  com prótons de 1.29 Mev incidentes em alvo de Ar, provocando a reação  $Ar(p, \gamma) K$ . A curva calculada para a variação da correlação angular em função da pressão do alvo de Ar reproduz bastante bem o resultado experimental.

APÊNDICE

Neste apêndice são apresentados alguns cálculos cujos resultados são usados no texto e que não são totalmente triviais. De uma maneira geral transformamos os coeficientes de Clebsch-Gordan em símbolos 3-j, de acordo com a relação <sup>18)</sup>

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle &= \langle j_3 m_3 | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = \\ &= (-)^{j_1 - j_2 + m_3} (2j_3 + 1)^{1/2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (A-1)$$

Assim a eq. (89) contém o somatório

$$\begin{aligned} A &= \sum_{M M'} \langle I m_1 j m' | F M \rangle \langle F M | I m_2 j m \rangle \cdot \\ &\cdot \langle I m_2 j m | F' M' \rangle \langle F' M' | I m_1 j m' \rangle \end{aligned} \quad (A-2)$$

que, de acordo com a eq. (A-1) será escrita na forma

$$\begin{aligned} A &= \sum_M (2F+1) (2F'+1) \begin{pmatrix} I & j & F \\ m_1 & -(M+m_1) & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & j & F' \\ m_2 & -(M+m_2) & M \end{pmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} I & j & F \\ m_2 & -(M+m_2) & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & j & F' \\ m_1 & -(M+m_1) & M \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (A-3)$$

Nota: quando usarmos propriedades de simetria ou de ortogonalidade dos símbolos 3-j, como na obtenção da eq. (A-3), não as mencionaremos explicitamente.

A eq. (30) da referência <sup>19)</sup> pode ser escrita na forma

$$\sum_r (2r+1) \begin{pmatrix} m & k & r \\ j & k & -(j+k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I' & r \\ E & E' & -(j+k) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} m & k & r \\ s & l & I \\ s' & l' & I' \end{Bmatrix} =$$



$$= \sum_{\sigma} \begin{pmatrix} m & b & b' \\ f & \sigma & -(\sigma+f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & l & l' \\ k & -(\sigma+\epsilon) & \sigma+\epsilon-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & l & I \\ \sigma & -\sigma+\epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b' & l' & I' \\ -(\sigma+f) & (\sigma+f-\epsilon) & \epsilon' \end{pmatrix} \quad (A-4)$$

Comparando as eqs. (A-3) e (A-4) obtém-se

$$A = \sum_{\ell} (2\ell+1) (2F+1) (2F'+1) \begin{pmatrix} I & I & \ell \\ m_1 & m & -(m_1+m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & \ell \\ m & m_1 & -(m_1+m) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & I & \ell \\ F & f & I \\ f & F' & I \end{pmatrix} \quad (A-5)$$

Usando a relação<sup>20)</sup>

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \sum_k (2k+1) (-)^{2k} \begin{pmatrix} a & d & g \\ h & i & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & e & h \\ d & k & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & f & i \\ k & a & b \end{pmatrix} \quad (A-6)$$

obtem-se

$$A = \sum_{\ell k} (2k+1) (2\ell+1) (2F+1) (2F'+1) (-)^{2I+\ell} \begin{pmatrix} I & F & f \\ F' & I & k \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} I & f & F' \\ F & k & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & I & I \\ k & I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & \ell \\ m_1 & m & -(m_1+m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & \ell \\ -m & -m_1 & (m+m_1) \end{pmatrix} \quad (A-7)$$

Usando ainda a relação<sup>20)</sup>

$$\sum_{l_3 m_3} (-)^{l_3+l_3+m_1+m_1} (2l_3+1) \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & f_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ m_1 & m_2 & -(m_1+m_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & f_3 \\ m_1 & m_2 & (m_1+m_2) \end{pmatrix} \quad (A-8)$$

a soma sobre  $k$  pode ser efetuada, dando

$$A = \sum_k (2k+1)(2F+1)(2F'+1) (-)^{m-m_1} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m-m & 0 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & I & k \\ m_1-m_1 & 0 & \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} I & I & k \\ F & F' & f \end{matrix} \right\}^2 \quad (A-9)$$

que, inserido na eq. (89) dá a eq. (90).

Quando se efetua a soma sobre  $m'$  nos dois membros da eq. (90), o membro da direita contém a quantidade

$$B = \sum_{m'} (-)^{-m'} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m'-m' & 0 & \end{pmatrix} = \sum_{m'} (-)^{-m'} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m'-m' & 0 & \end{pmatrix} (-)^{-I+m'} \sqrt{2I+1} \begin{pmatrix} I & I & 0 \\ m'-m' & 0 & \end{pmatrix} \quad (A-10)$$

pois

$$\begin{pmatrix} I & I & 0 \\ m-m & 0 & \end{pmatrix} = (-)^{I-m} \frac{1}{\sqrt{2I+1}} \quad (A-11)$$

Segue

$$B = \sum_{m'} (-)^{-I} \sqrt{2I+1} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m'-m' & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & 0 \\ m'-m' & 0 & \end{pmatrix} = (-)^{-I} \sqrt{2I+1} \delta_{k0} \quad (A-12)$$

Portanto

$$\sum_{m'} P_{m'm}(\pm, 0) = (-)^{-I} \sqrt{2I+1} (-)^{m'} \sum (2F+1)(2F'+1) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} I & I & 0 \\ m-m & 0 & \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} I & I & 0 \\ F & F' & f \end{matrix} \right\}^2 \delta_{f,0} \delta_{f',0} e^{-i\omega_{\pm} f, a_{\pm} f' t} \quad (A-13)$$

Usando a eq. (A-11) e a relação

$$\begin{Bmatrix} I & I & 0 \\ F & F' & f \end{Bmatrix}^2 = \delta_{FF'} \left[ (2F+1)(2I+1) \right]^{-1} \quad (A-14)$$

na eq. (A-13) segue

$$\begin{aligned} \sum_{m'} P_{m'm} (t, 0) &= \sum \frac{2F+1}{a_{jF}} \frac{1}{2I+1} f_{aj} a_j (0) \\ &= \sum_{a_j} (2j+1) f_{aj} a_j (0) \end{aligned} \quad (A-15)$$

pois

$$\sum_{F=(I-j)}^{I+j} \frac{2F+1}{2I+1} = 2j+1 \quad (A-16)$$

Para obter a eq. (115) a partir da eq. (112) fazemos  $f_1 = f_2$  e escrevemos esta última na forma

$$P_{m_1 m}^{\sigma} (t, 0) = \sum C \cdot D \cdot E$$

onde

$$\begin{aligned} C &= f_{a_1} f_{a_2} a_{j_1} a_{j_2} (0) S^{\sigma}(t, 0) \left[ (2F+1)(2F'+1)(2F_1+1)(2F_2+1) \right]^{1/2} \cdot (2\bar{F}+1) \\ D &= \begin{pmatrix} I & j & F \\ m_1 & H-m_1 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & j & F' \\ m_2 & H-m_2 & -M \end{pmatrix} \\ E &= \sum_{M_1} \begin{pmatrix} I & j_1 & F_1 \\ m & M_1-m & -M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & j_2 & F_2 \\ m & M_1-m & -M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & F_2 & \bar{F} \\ M & M_1 & -(M+M_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 & F' & \bar{F} \\ M_1 & M & -(M+M_1) \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{I+j_1+F+F_2-F'} \sum_{\kappa} (2\kappa+1) \begin{pmatrix} I & F & \kappa \\ -m & M & M-M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F' & I & \kappa \\ M & -m & m-M \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} I & F & \kappa \\ F_1 & F' & F' \\ j_1 & F_2 & I \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Semelhantemente reunimos os dois símbolos 3-j contidos em E com os dois de D e efetuamos a soma sobre M. Obtém-se

$$P_{m_1, m_2}^\sigma(t, 0) = \sum C. (-)^{j+j_1+F+F_1+n'} (2n+1)(2n'+1)$$

$$\begin{pmatrix} I & I & n' \\ m_1 & m_2 & -(m+m_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & n' \\ m_1 & m_2 & -(m+m_1) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} F & I & n \\ F_2 & j_1 & I \\ \bar{F} & F_1 & F' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I & F & n \\ I & j & F' \\ n' & I & I \end{Bmatrix}$$

Usando a eq. (A-6) segue

$$P_{m_1, m_2}^\sigma = \sum C. (-)^{j+j_1+F+F_1+n'} \begin{pmatrix} I & I & n' \\ m_1 & m_2 & -(m+m_1) \end{pmatrix}^2$$

$$\cdot \sum_{k, k'} (2n+1)(2n'+1)(2k+1)(2k'+1)$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} F & F_2 & \bar{F} \\ F_1 & F' & k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I & j_1 & F_1 \\ F_2 & k & I \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n & I & F' \\ k & F & I \end{Bmatrix}$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} I & I & n' \\ I & I & k' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F & j & I \\ I & k' & F' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n & F' & I \\ k' & I & F \end{Bmatrix}$$

Efetutando, por ordem, a soma sobre n, k e n' e substituindo pelo seu valor obtém-se

$$P_{m_1, m_2}^\sigma(t, 0) = \sum (-)^{2I+j+j_1+F+F_1} a_{1j_1} a_{2j_2}(0)$$

$$S^\sigma(t, 0) (-)^{m-m_1} [(2F+1)(2F'+1)(2F_1+1)(2F_2+1)]^{1/2}$$

$$\cdot (2\bar{F}+1)(2k+1) \begin{pmatrix} I & I & k \\ m-m & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & k \\ m_1-m_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} F & F' & k \\ F_1 & F_2 & \bar{F} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I & I & k \\ F_1 & F_2 & j_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I & I & k \\ F & F' & j \end{Bmatrix}$$

(A-17)

que é a eq. (115)

Finalmente, vamos apresentar algumas identidades da álgebra de  $R_q$  que são usados no texto e que não são facilmente encontradas na literatura:

$$\sum_{FF'} \frac{(2F+1)(2F'+1)}{2j+1} \left\{ \begin{matrix} I & I & k \\ F & F' & j \end{matrix} \right\}^2 = \Delta(I, I, k) \quad (A-18)$$

onde  $\Delta(a, b, c) = 1$  se for possível construir um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e  $\Delta(a, b, c) = 0$  se isto não for possível.

$$\sum_{FF'} \frac{(2F+1)(2F'+1)[F(F+1)-F'(F'+1)]^2}{j(j+1)(2j+1)k(k+1)} \left\{ \begin{matrix} I & I & k \\ F & F' & j \end{matrix} \right\}^2 = \frac{4}{3} \Delta(I, I, k) \quad (A-19)$$

$$\sum_L (2L+1) \left\{ \begin{matrix} F & F' & L \\ F & F' & j \end{matrix} \right\} = \Delta(F, F', j) \quad (A-20)$$

As identidades (A-18) e (A-20) podem ser demonstradas com algumas linhas de cálculo. Já a eq. (A-19) é bastante difícil de ser demonstrada, e foi obtido por nós por uma maneira bastante curiosa: Na tentativa de construir uma tabela para os fatores de estrutura  $S(I, j, k)$  (eq. (164) do texto) calculou-se com o auxílio do computador os valores de  $S(I, j, k)$  para todas as combinações obtidas com  $I=1, 3/2, 2, \dots, 10$ ,  $j=1/2, 1, 3/2, 2, \dots, 10$  e  $k=2, 4$ . Os resultados obtidos apresentaram uma curiosa ordem, que nos levou a identificá-los com a eq. (A-19). Esta equação foi então aplicada para valores ímpares de  $k$  e os resultados numéricos confirmaram-na novamente.

REFERÊNCIAS

1. R.M.Steffen e H. Fraunfelder, in Perturbed Angular Correlation, editado por E.Karlsson, B.Mathias e K.Siegbahn, (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1964) p. 3.
2. C.P.Slichter, Principles of Magnetic Resonance, (Harper and Row, New York, 1963).
3. L.C.Biedenharn e H.E.Rose, Rev. Mod. Phys. 25 (1953) 729.
4. A.Abragam e R.V.Pound, Phys. Rev. 92 (1953) 943.
5. D.Dillenburg e Th.A.Maris, Nucl. Phys. 33 (1962) 208.
6. D.Dillenburg e Th.A.Maris, Nucl. Phys. 53 (1964) 159.
7. L.Wolfenstein e M.Daranger - Comunicação privada.
8. D.Dillenburg e Th.A.Maris, Phys. Lett. 17 (1965) 293.
9. H.Blume, em Hyperfine Structure and Nuclear Radiation, editado por E. Mathias e D.A. Shirley (North-Holland, Amsterdam, 1968) p. 911.
10. H.Blume, Phys. Rev. 174 (1968) 351.
11. H.Gabriel, J.Dosse e K.Rander, Phys. Stat. Sol. 27 (1968) 301.

12. H.Gabriel, Phys. Rev. 181 (1968) 506.
13. D.S.Ling Jr. e L.Falkoff, Phys. Rev. 76 (1949) 1639.
14. A.Abragam, The Principles of Nuclear Magnetism, Oxford University Press, Oxford, 1961).
15. U.Fano, Rev. Mod. Phys. 29 (1957) 74.
16. C.Scherer, Nucl. Phys. A157 (1970) 81.
17. A.S.Lépine, W.A.Seale e O. Sala, comunicação privada.
18. D.H.Brink e G.R.Satchler, Angular Momentum (Oxford University Press, 1962).
19. A.de-Shalit, Phys. Rev. 91 (1953) 1479.
20. M.Rosenberg, R.Bivins, N.Metropolis e J.K.Wooten Jr., The  $3-j$  and  $6-j$  Symbols (The Technology Press, Massachusetts, 1959).

A D E N D O

Quando esta tese já havia sido concluída apareceu publicado em Nuclear Physics <sup>21)</sup> um trabalho que comenta o nosso "modelo gasoso para qualquer tempo de correlação", parágrafo III-3 desta tese e publicado em Nuclear Physics A em novembro de 1970 (veja referência <sup>16)</sup>). O trabalho de H. Blume é uma interessante contribuição no sentido de facilitar a obtenção de valores numéricos para os coeficientes de atenuação  $G_h(t)$ , uma vez que ele, substituindo as distribuições de probabilidade  $P_j(t_{j+1})$ , usadas aqui, por uma distribuição mais simples consegue resolver as integrais da eq.(150) usando o método da transformação de Laplace. A referência <sup>21)</sup> diz que a distribuição usada por nós está errada, e que invalida essas expressões finais e conclusões. Quanto à afirmação de que a nossa distribuição está errada, parece-nos carecer de sentido uma vez que estamos tratando um modelo solúvel e não pretendemos afirmar que um gás real satisfaz as hipóteses do mesmo. Acreditamos, efetivamente que a distribuição sugerida na referência <sup>21)</sup> é mais realística do que a nossa. Por isso daremos abaixo uma derivação simples da mesma. Quanto à afirmação de que as nossas expressões finais e conclusões ficam invalidadas, pode-se ver facilmente que está errada. O modelo foi construído em bases de argumentos físicos simples e os resultados numéricos obtidos estão em consonância com nossa intuição física. Apresentamos, no final deste adendo, alguns gráficos comparativos entre os resultados numéricos obtidos neste trabalho e aqueles que se obtêm usando a distribuição sugerida na referência <sup>21)</sup>. A semelhança desses resultados comprova nossa suspeita de que as funções  $G_h(t)$  não são muito sensíveis à forma precisa da distribuição estatística das colisões, uma vez que se mantém inalterado seu número médio. Vê-se pelos gráficos que nossas conclusões ficam completamente mantidas, em oposição ao que afirma a referência <sup>21)</sup>. Uma derivação simples da distribuição sugerida pode ser feita como segue:

Supomos que

$$\frac{1}{\tau_c} e^{-(t_j - t_{j-1})/\tau_c} \Theta(t_j - t_{j-1})$$



representa a distribuição de probabilidade por unidade de tempo de que a colisão de número  $j$  ocorra em  $t_j$ , uma vez que a de número  $j-1$  tenha ocorrido em  $t_{j-1}$ . A probabilidade de que a primeira colisão ocorra no instante  $t_1$  em  $dt_1$ , a segunda no instante  $t_2$  em  $dt_2$ , . . . . ., a de número  $j$  no instante  $t_j$ , em  $dt_j$  e nenhuma colisão ocorra entre  $t_j$  e  $t$  será dada por

$$\frac{1}{\tau_c} e^{-t_1/\tau_c} \theta(t_1) \cdot \frac{1}{\tau_c} e^{-(t_2-t_1)/\tau_c} \theta(t_2-t_1) \dots \frac{1}{\tau_c} e^{-(t_j-t_{j-1})/\tau_c} \cdot \theta(t_j-t_{j-1}) \cdot e^{-(t-t_j)/\tau_c} dt_1 dt_2 \dots dt_j =$$

$$= \frac{1}{\tau_c^j} e^{-t/\tau_c} \theta(t_1) \theta(t_2-t_1) \dots \theta(t_j-t_{j-1}) dt_1 \dots dt_j$$

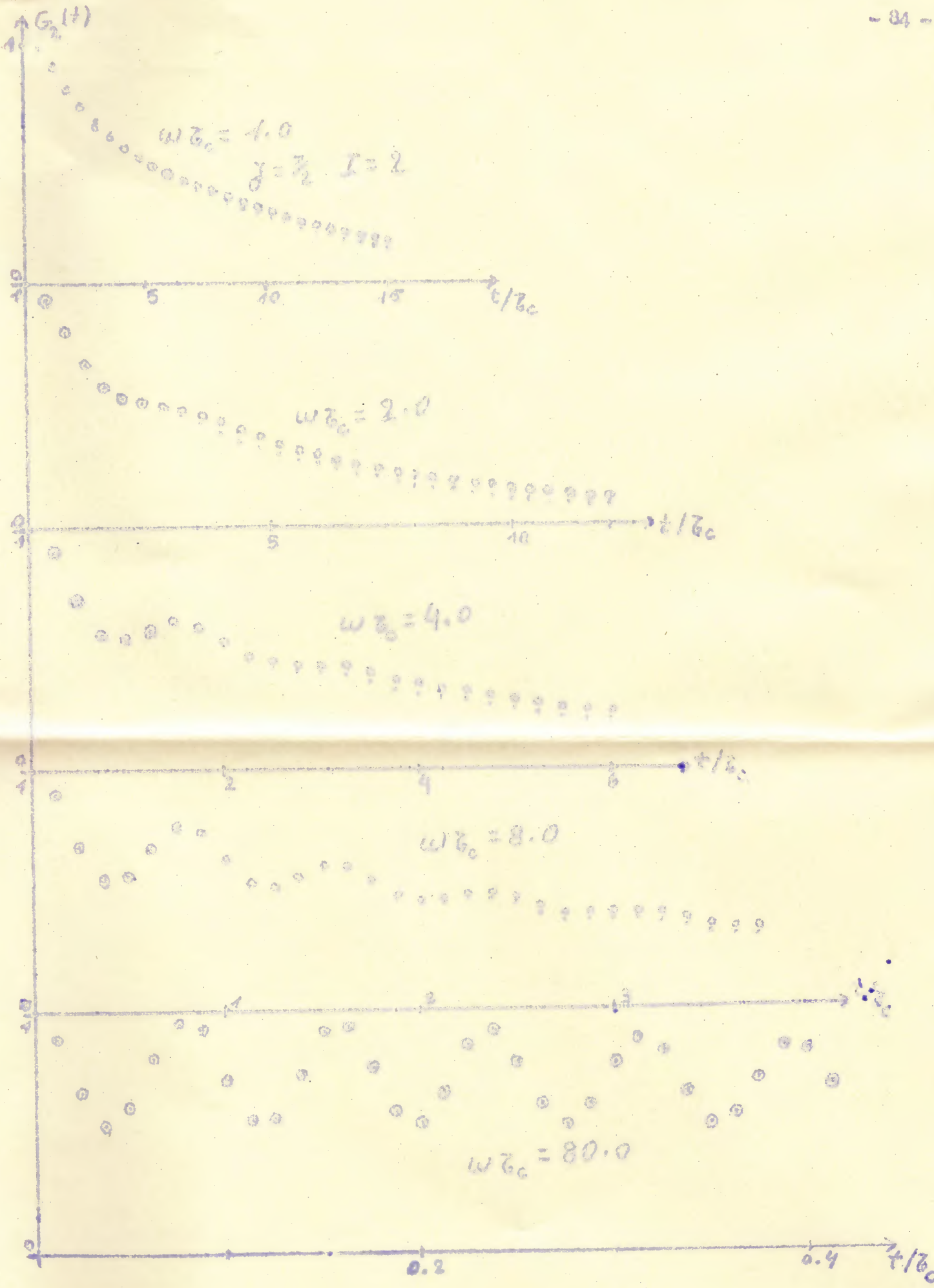
Se fizer a média de uma função  $F(t_1, t_2, \dots, t_j, t)$  sobre os instantes  $t_1, t_2, \dots, t_j$  e sobre o número  $j$  de colisões sucessivas, evidentemente,

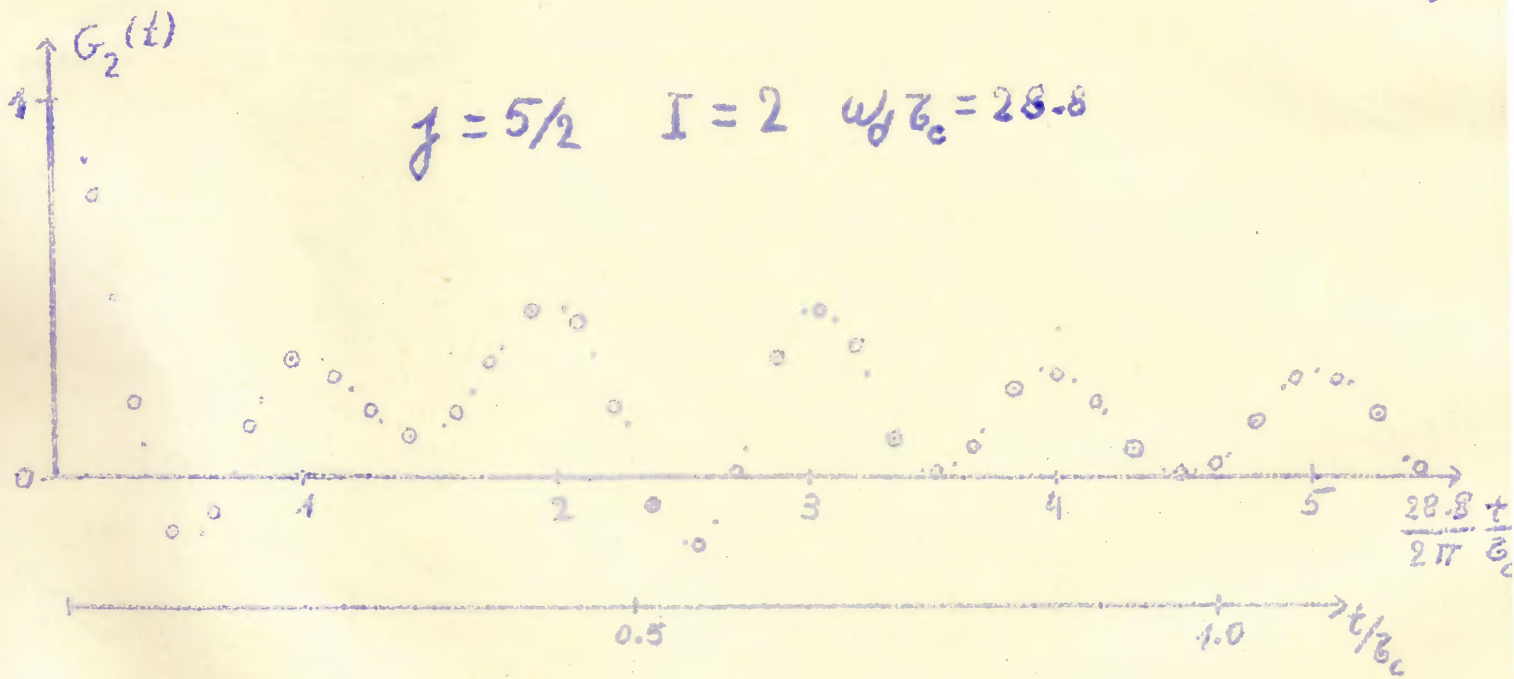
$$\langle F(t) \rangle_{\text{médio}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-t/\tau_c}}{\tau_c^j} \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \dots \int_{t_{j-1}}^t dt_j F(t_1, t_2, \dots, t_j, t)$$

A eq.(150) do texto ficará então substituída por

$$G_2(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-t/\tau_c}}{\tau_c^j} \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \dots \int_{t_{j-1}}^t dt_j \cdot G_2^0(t_1) G_2^0(t_2-t_1) \dots G_2^0(t_j-t_{j-1}) G_2^0(t-t_j)$$

que é igual à eq.(4) da referênci<sup>21)</sup>a menos de uma trivial transformação de variáveis de integração.





$G_2(t)$  PARA  $f = 5/2$ ,  $I = 2$ ,  $\omega_d \tau_c = 28.8$

Para pequenos valores de  $t/\tau_c$  há coincidência completa entre os valores de  $G_2(t)$  calculados pela distribuição usada no parágrafo III-3 (círculos) e os valores obtidos usando a distribuição dada na referência <sup>21)</sup> (pontos).

ERRATA

Página	Onde se lê	Leia-se
No título e em várias páginas	aleatóreo	aleatório
1, linha 16	de forma	da forma
2, linha -5 (5ª linha a contar da margem inferior)	limites	limitam
7, linha 4	referência <sup>6)</sup>	referência <sup>6)</sup>
7, linhas 8 e 9	referência <sup>14)</sup>	Referência <sup>14)</sup> ;
10, eq(15)	$A(2)$	$A(2)$
10, eqs(15) e (16)	$C_{ik}$	$C_{ki}$
12, linha -4	$= 1$	$= 1$
17, linha 7	de uma variável aleatória $G(z)$	$G(z)$ de uma variável aleatória $g(t)$
20, linha -2	(37) e (42)	(38) e (45)
22, linha -3	equiparáveis	equiprováveis
22, linha -4 e -2	$t_i + 1$	$t_{i+1}$
34, eq(77)	$\beta a_1 \gamma a_2 \gamma_2$	$\beta a_1 \gamma_1 a_2 \gamma_2$
38, eq(81)	(parágrafo II-2)	(parágrafo I-2)
44, linha -2	isotropia	isotropia
48, eq(117) (1ª linha)	$\delta_{F_2 F'}$	$\delta_{F_2 F'}$
51, linha -4	$P_h(\cos \theta)(1)$	$P_h(\cos \theta)$
52, linha -3	$P_m(h)$	$P_m(h)$
55, linha 12	o átomo	a partícula eletrônica
79, eq(A-19)	$\sum_{FF'} = \dots$	$\sum_{FF'} = \dots$