Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

O Laplaciano da Aplicação de Gauss de uma Hipersuperfície Imersa em uma Variedade Homogênea

Dissertação de Mestrado

Álvaro Krüger Ramos

Porto Alegre, 19 de agosto de 2011

Dissertação submetida por Álvaro Krüger Ramos[1], como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca examinadora:
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPG-MAT - UFRGS, ORIENTADOR)
Prof. Dr. Artur Oscar Lopes (PPG-MAT - UFRGS)
Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino (PPG-MAT - UFRGS)
Dr[a] Cíntia Rodrigues de Araujo Peixoto (PPG-MAT - UFRGS)
Prof. Dr. Arì João Aiolfi (UFSM)

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

“It is only with one’s heart that one can see clearly. What is essential is invisible to the eye.”

- Antoine de Saint-Exupéry

Para a Ariane

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao Prof. Jaime Rippol (lê-se Jãime, não Jáime), a pessoa que tenho orgulho de dizer "é o meu orientador!" Sem ele nada disso teria sido possível. Há alguns anos atrás (na época em que eu ainda discutia as diferenças entre demonstração contrapositiva e por absurdo) nos encontramos na iniciação científica e ele se tornou meu orientador. No início quis me mandar para ramos desconhecidos e não tão divertidos, mas em 2008, com a perspectiva de participar do IRES em Fortaleza, ele me apresentou a Geometria Riemanniana. E foi amor a primeira aula. Jaime, obrigado por toda a orientação que tu me destes.

Cintia (Rodrigues Araújo Peixoto, e por favor, usem o nome todo para evitar confusões). Por pouco tempo te conheço, embora sempre tenha ouvido falar. Muito obrigado por ter aceitado essa bronca que foi me orientar logo no último semestre do mestrado, enquanto o Jaime estava fora. Tua ajuda foi indescritível e sem o teu apoio a qualidade do trabalho estaria inferior em muitos sentidos. Novamente muito obrigado. Mesmo.

Aos demais mestres (certo... Doutores...) que me auxiliaram na minha jornada, agradeço ao Prof. Eduardo Brietzke, meu padrinho de formatura... Obrigado por todas as disciplinas que aceitaste ensinar quando eu te pedias. Saiba que eu só pedia tantas porque adoro as tuas aulas. Obrigado por sempre resolver minhas dúvidas, fossem elas sobre o que fossem... Agradeço também a Profª Elizabeth Quintana, que me "resgatou" do direito e me jogou sem pára-quedas no meio de demonstrações, e $2+2=0$ e indução matemática, ainda na iniciação científica Jr. do CNPq relativa às Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Ao Prof. Leonardo Bonorino agradeço pela paciência de ensinar alguém tão agitado quanto eu, agradeço pela disponibilidade dedicada durante toda a graduação e mestrado. Ao Prof. Artur Lopes agradeço por me mostrar o lado "dá uma bangornada, daí depois de muito pimba pimba pimba vai voltar ali pertinho" das equações diferenciais que me deram uma intuição muito boa sobre os problemas que enfrento.

Também quero agradecer também a uma pessoa muito mais que especial: A nossa querida Rosane, sem a qual o PPGMAT não funcionaria. Rosa, durante esses anos que freqüento a tua sala nunca me senti mal enquanto lá eu estava tomando um chimarrão bem pegado. Obrigado por todo o apoio que tu me deu e obrigado por cuidar tão bem de todos nós, alunos e professores da matemática.

Agora, quero agradecer aos colegas. Mais que colegas. Aos amigos que fiz na matemática, em especial ao Gustavo, ao Thomas e à Pati. Nós éramos o *quarteto perigoso*, que se reunia para encher a paciência do Instituto de Matemática... E como incomodávamos com nossas quebras de pré-requisito, nossas trocas de horário e nossa impaciência em fazer tão poucos créditos por semestre. Sem vocês três não teria acontecido a graduação. Ela teria apenas passado.

Saindo “um pouco”do meio acadêmico, quero agradecer à minha família. Primeiro à minha mãe (Oscarlinda) e ao meu pai (Marcus), que sempre me incentivaram a seguir com os estudos e sempre me apoiaram nas minhas decisões. Aos meus tios e tias quero agradecer por todo o apoio que me deram sempre que foi necessário.

Aos meus colegas do Anne Frank, do Instituto de Educação e amigos em geral: Vocês me ensinaram o que é o companheirismo, me mostraram que existe a amizade verdadeira. Vocês sabem que por mais longe possamos estar, por quanto tempo passarmos sem nos ver, quando nos reencontrarmos tudo será como antes.

Por último mas longe de menos importante, quero agradecer à Ariane, a pessoa mais importante da minha vida, aquela que esteve ao meu lado durante os momentos mais difíceis, me dando forças e me apoiando, aquela que me ajudou a ver a vida com outros olhos, me ajudou a amadurecer minhas idéias e minhas atitudes. Me incentivou a correr atrás dos meus sonhos, perdoou todas as minhas faltas e me ajudou a corrigir minhas falhas. Tu és a minha melhor amiga, a minha companheira insubstituível de todas as horas e quero passar o resto do meu tempo ao teu lado. A ti eu dedico essa dissertação. Te amo.

I’ll see you on the dark side of the moon

Resumo

Um resultado bem conhecido para variedades diferenciáveis imersas no $\mathbb{R}^{n+1}$ é que elas têm curvatura média constante se, e somente se, a aplicação de Gauss é harmônica (Teorema de Ruh-Vilms). Tal resultado é uma conseqüência direta da fórmula:

$$\Delta N = -n.\text{grad } H - \|B\|^2 N. \tag{1}$$

O objetivo desse trabalho é estender tal fórmula para um contexto mais geral, a saber uma hipersuperfície M imersa em um quociente de um grupo de Lie $\mathbb{G}$ por um subgrupo $\mathbb{H}$ compacto, de tal forma que o resultado obtido por Ruh-Vilms ainda seja válido. Assumiremos como hipótese que $\mathbb{G}$ terá uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante e que exista um campo de vetores η normal à M satisfazendo $\langle \eta, \eta \rangle = 1$ em M.

Os resultados obtidos nesta dissertação são baseados em dois trabalhos: *Constant mean curvature hypersurfaces in a Lie group with a bi-invariant metric* e *Gauss Map Harmonicity and Mean Curvature of a Hypersurface in a Homogeneous Manifold*, aqui denotados por [1] e [2]. Nosso resultado principal (Teorema 2) vem a generalizar o Teorema 4.3 de [2], substituindo a hipótese da métrica Riemanniana por uma métrica pseudo-Riemanniana.

Abstract

A well known result for immersed manifolds in $\mathbb{R}^{n+1}$ is the Ruh-Vilms Theorem, which states that a manifold has constant mean curvature if and only if its Gauss map is harmonic. This result is an immediate consequence of the formula:

$$\Delta N = -n.\text{grad } H - \|B\|^2 N.$$

This work intends to extend this formula for the more general case of an immersed hypersurface M in a quotient of a Lie Group $\mathbb{G}$ by a compact Lie subgroup $\mathbb{H}$, in order to generalize Ruh-Vilms Theorem for such ambient space. We will assume that $\mathbb{G}$ has a semi-Riemannian bi-invariant metric, and that there exists a vector field η normal to M which satisfies $\langle \eta, \eta \rangle = 1$ in M.

The results obtained on this work are based in two papers: *Constant mean curvature hypersurfaces in a Lie group with a bi-invariant metric* and *Gauss Map Harmonicity and Mean Curvature of a Hypersurface in a Homogeneous Manifold*, cited in this work as [1] and [2]. Our main result (Theorem 2) generalizes Theorem 4.3 of [2], replacing the Riemannian metric in the hypothesis with a semi-Riemannian metric.

Conteúdo

Introdução **2**

1 Preliminares **5**
1.1 Variedades Pseudo-Riemannianas 5
1.1.1 Métrica Pseudo-Riemanniana 5
1.1.2 Campos de Vetores e Curvatura 8
1.1.3 Hipersuperfícies Pseudo-Riemannianas 13
1.2 Grupos de Lie 15
1.3 Variedades Homogêneas 19
1.3.1 Definições e Primeiras Propriedades 19
1.3.2 A Aplicação de Gauss de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ 23

2 O Laplaciano da Aplicação de Gauss em $\mathbb{G}$ **25**
2.1 Teorema 1 25
2.2 Demonstração das Afirmações 29

3 O Laplaciano da aplicação de Gauss em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ **40**
3.1 Lemas Auxiliares 40
3.2 Teorema 2 47

Apêndice **50**

Bibliografia **53**

Introdução

Seja M^n uma variedade Riemanniana imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, ou seja, uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$. Suponha que M seja orientável e seja η um campo de vetores unitário normal à M. Definimos a *aplicação de Gauss* de M como:

$$\begin{array}{rcl} N : M & \to & \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \\ x & \mapsto & \eta(x). \end{array}$$

Ou seja, a aplicação de Gauss translada os vetores normais a M até a origem do $\mathbb{R}^{n+1}$ e, como η é um campo unitário, obtemos $N(x) \in \mathbb{S}^n$. Em 1970, foi obtido por Ruh-Vilms [3] que M terá curvatura média H constante se, e somente se, sua aplicação de Gauss for harmônica. Tal resultado decorre diretamente da seguinte expressão:

$$\Delta N = -n.\text{grad } H - \|B\|^2 N.$$

É natural questionarmo-nos sobre em quais contextos mais gerais podemos obter resultados análogos ao caso do espaço Euclideano. No trabalho [1], *Constant Mean Curvature Hypersurfaces in a Lie Group With a bi-Invariant Metric* de 2003, N. do Espírito-Santo, S. Fornari, K. Frensel e J. Ripoll obtiveram a seguinte expressão para o Laplaciano da aplicação de Gauss no caso de M ser uma hipersuperfície de um Grupo de Lie $\mathbb{G}$ munido de uma métrica Riemanniana bi-invariante:

$$\Delta N(x) = -nd(L_{x^{-1}})_x(grad\, H(x)) - \left(\|B\|^2 + n\text{Ric}(\eta(x))\right) N(x), \qquad (2)$$

onde H denota a curvatura média de M, $\|B\|$ representa a norma da segunda forma fundamental e $\text{Ric}(\eta(x))$ é a curvatura de Ricci na direção normal à M. Em seguida, em 2006, no trabalho [2], *Gauss Map Harmonicity and Mean Curvature of a Hypersurface in a Homogeneous Manifold*, F. Bittencourt e J. Ripoll obtiveram uma generalização da expressão acima para o caso de uma hipersuperfície M^n imersa em um quociente de um grupo de Lie $\mathbb{G}^{n+k+1}$ munido de uma métrica Riemanniana bi-invariante por um subgrupo de Lie compacto $\mathbb{H}^k$. Foi obtida a seguinte expressão:

$$\Delta N(z) = -n\Gamma_z(\text{grad}H(z)) - \left(\|B\|^2 + \|B_z^*\|^2 + (n+k)\text{Ric}(\ell_x^{-1}(\eta(z)))\right)N(z). \quad (3)$$

Os termos da expressão acima serão cuidadosamente descritos na sessão 1.3.1 deste trabalho. Tal expressão nos dá uma generalização do Teorema de Ruh-Vilms para o caso do espaço ambiente ser uma variedade homogênea.

Cabe observar que as aplicações harmônicas entre variedades vêm sendo investigadas há muito tempo e é uma área com muitas aplicações em Geometria Diferencial. Veja, por exemplo, *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, [6]. Em particular, usando essa teoria e o resultado anterior decorre que se a aplicação de Gauss de uma superfície compacta imersa em $\mathbb{S}^3 = SO(4)/SO(3)$ está contida em um certo hemisfério de $\mathbb{S}^5 \subseteq so(4)$, onde $so(4)$ é a álgebra de Lie de $SO(4)$, então essa superfície é um toro de Clifford, ou seja, o produto Riemanniano de dois círculos (corolário 4.14 de [2]). Uma conjectura muito estudada atualmente devida a Blaine-Lawson afirma que os toros de Clifford são os únicos toros topológicos mergulhados de curvatura média constante em $\mathbb{S}^3$.

Este trabalho tem como objetivo redemonstrar as fórmulas 2 e 3, substituindo a hipótese de uma métrica Riemanniana por uma métrica pseudo-Riemanniana no grupo de Lie $\mathbb{G}$.

Substituindo uma métrica Riemanniana por uma pseudo-Riemanniana em $\mathbb{G}$, estaremos abrindo a possibilidade de incluir nos resultados anteriores uma classe mais ampla de variedades homogêneas, tais como $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, espaços muito estudados atualmente. Observamos que ao quocientar um grupo de Lie com métrica pseudo-Riemanniana por um subgrupo compacto cujo espaço tangente contém a parte não Riemanniana da métrica, obteremos uma variedade Riemanniana homogênea. Analisamos tal afirmação na Observação 18 da sessão 3.1.

Dividimos o texto em três capítulos: No primeiro, fixaremos a notação utilizada na seqüência do trabalho. Começamos definindo variedades pseudo-Riemannianas na sessão 1.1, onde apresentaremos as definições do tensor de curvatura, curvatura de Ricci e curvatura média, entre outras definições para o caso de uma variedade pseudo-Riemanniana. Explicitaremos algumas diferenças básicas entre variedades Riemannianas e pseudo-Riemannianas, como, por exemplo, a expressão em coordenadas de campos de vetores como o gradiente de uma função.

Na sessão 1.2, definiremos os conceitos de grupo de Lie, de métrica invariante e de invariância de campos de vetores. Ainda apresentaremos as aplicações L_x, R_x e alguns lemas que serão utilizados nas demonstrações dos resultados principais. Terminamos a sessão definindo a aplicação de Gauss para uma hipersuperfície $M^n \subseteq \mathbb{G}^{n+1}$ orientável e orientada segundo um campo de vetores η satisfazendo $\langle \eta, \eta \rangle = 1$ em M.

Em seguida, nos deteremos no caso de $M^n \subseteq (\mathbb{G}/\mathbb{H})^{n+1}$ ser uma hipersuperfície em um quociente de um grupo de Lie $\mathbb{G}$ por um subgrupo de Lie compacto $\mathbb{H}$, na sessão 1.3. A partir de uma métrica pseudo-Riemanniana em $\mathbb{G}$ definimos uma métrica pseudo-Riemanniana em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ de forma que a projeção

$$
\begin{array}{rcl}
\pi : \mathbb{G} & \rightarrow & \mathbb{G}/\mathbb{H} \\
x & \mapsto & \mathbb{H}x
\end{array}
$$

seja uma submersão pseudo-Riemanniana. Além disso, introduzimos duas aplicações,

$$\ell_x = d\pi_x|_{T_x(\mathbb{H}x)^\perp} \text{ e } \Gamma_z = d\left(L_{x^{-1}}\right)_x \circ \ell_x,$$

definiremos os conceitos de campos de vetores horizontais e verticais e apresentaremos uma proposição (Proposição 4) que nos dá uma caracterização da conexão de Levi-Civita de campos de vetores de $\mathbb{G}$ relacionados com campos de vetores de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ pela aplicação ℓ_x. Terminamos o capítulo definindo a aplicação de Gauss nesse contexto.

Os capítulos seguintes são destinados às demonstrações dos teoremas principais aqui abordados (Teorema 1 e Teorema 2). No capítulo 2 apresentamos a demonstração do Teorema 1, que trata da aplicação de Gauss no caso do espaço ambiente ser um grupo de Lie com uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante. O capítulo 3 começa apresentando lemas auxiliares que são utilizados na sessão 3.2, que nos dá a demonstração do Teorema 2, relacionando o Laplaciano da aplicação de Gauss de M com a curvatura média de M no caso do espaço ambiente ser $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

No apêndice do trabalho apresentamos uma demonstração da Proposição 4 (enunciada na sessão 1.3.1), que contribui para um melhor entendimento da estrutura de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ e da relação entre campos de vetores horizontais de $\mathbb{G}$ com campos de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo inicial abordamos aspectos notacionais e algumas propriedades básicas de variedades pseudo-Riemannianas, grupos de Lie e variedades homogêneas. Além disso apresentaremos as principais diferenças entre métricas Riemannianas e pseudo-Riemannianas.

1.1 Variedades Pseudo-Riemannianas

A fim de maiores detalhes e definições sobre variedades diferenciáveis, métricas Riemannianas, campos de vetores e curvatura, sugerimos como referência Manfredo do Carmo [5]. Neste trabalho, assumimos como pré-requisitos tais conceitos. Ao que segue no trabalho, estaremos falando em variedades pseudo-Riemannianas, i.e. uma variedade diferenciável munida de uma métrica pseudo-Riemanniana. Como referência básica para variedades pseudo-Riemannianas, utilizamos O'Neill [4].

1.1.1 Métrica Pseudo-Riemanniana

Essa primeira parte do texto servirá como um guia para o leitor que não está familiarizado com a teoria de variedades pseudo-Riemannianas. Começaremos definindo uma forma bilinear em um espaço vetorial e em seguida daremos a definição formal de uma variedade pseudo-Riemanniana. Estaremos tratando sempre de espaços vetoriais de dimensão finita.

Definição 1 (Formas bilineares)**.** *Seja V um espaço vetorial real de dimensão n. Seja ainda $\langle\, , \,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ uma função bilinear. Dizemos que $\langle\, , \,\rangle$ é:*

i. Positiva definida *se $\langle v, v\rangle > 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$;*

ii. Negativa definida *se $\langle v, v\rangle < 0$ para todo $v \in V \setminus \{0\}$;*

iii. Simétrica *se* $\langle u,\, v\rangle = \langle v,\, u\rangle$*, para todos* $u,\, v \in V$*;*

iv. Não degenerada *se para todo* $v \in V$*,* $v \neq 0$*, existe* $u \in V$ *tal que* $\langle u,\, v\rangle \neq 0$*.*

Observação 1. *O exemplo mais simples de forma bilinear é o produto interno canônico do* $\mathbb{R}^n$*. Nesse caso,* $\langle\, ,\, \rangle$ *é uma forma bilinear* simétrica não degenerada, positiva definida*. Se uma forma bilinear não for nem positiva definida nem negativa definida, dizemos que ela é* indefinida*. No que segue deste trabalho,* $\langle\, ,\, \rangle$ *sempre indicará uma forma bilinear simétrica não degenerada.*

Seja V um espaço vetorial real de dimensão n e seja $\langle\, ,\, \rangle$ uma forma bilinear simétrica não degenerada. Dado $v \in V$, definimos a *norma* do vetor v como o número real $\|v\| = \sqrt{|\langle v,\, v\rangle|}$. Note que a aplicação $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ é, a princípio, uma *semi-norma*, sendo uma norma se, e somente se, a forma $\langle\, ,\, \rangle$ não for indefinida.

Dizemos que um vetor $v \in V$ é *unitário* se $|\langle v, v\rangle| = 1$ e dados $u, v \in V$ dizemos que *u é ortogonal a v* se $\langle u, v\rangle = 0$. Dessa forma definimos que um conjunto $\{e_1,\, e_2,\, \ldots, e_n\} \subseteq V$ é *ortonormal* se $\langle e_i, e_j\rangle = \xi_i\delta_{ij}$, onde $\xi_i = \langle e_i, e_i\rangle$ satisfaz $|\xi_i| = 1$ e δ_{ij} é o delta de Krönecker. Definimos uma *base* de V da maneira usual, como um subconjunto ortonormal maximal de V.

Seja $B = \{e_1,\, e_2,\, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de V. Então dado $v \in V$, podemos escrever a *expansão de v na base B* como

$$v = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle v, e_i\rangle e_i,$$

onde $\xi_i = \langle e_i,\, e_i\rangle$.

Seja V um espaço vetorial e seja $\langle\, ,\, \rangle$ uma forma bilinear simétrica não degenerada. Dividimos os vetores de V em três categorias. Dado $v \in V$, dizemos que:

i. v é um vetor *do tipo espaço* se $\langle v, v\rangle > 0$ ou se $v = 0$;

ii. v é um vetor *do tipo tempo* se $\langle v, v\rangle < 0$;

iii. v é um vetor *do tipo luz* se $\langle v, v\rangle = 0$ com $v \neq 0$.

Da álgebra linear, obtemos que o par $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ cumpre a seguinte propriedade:

Lema 1. *Sejam* $B_1 = \{u_1,\, u_2,\, \ldots, u_n\}$ *e* $B_2 = \{v_1,\, v_2,\, \ldots, v_n\}$ *duas bases ortonormais de* V*. Então o número de vetores do tipo tempo em* B_1 *é igual ao número de vetores do tipo tempo em* B_2*.*

Com tal propriedade, definimos o *índice* de um espaço vetorial V em relação a forma $\langle\, ,\, \rangle$ como o número de vetores do tipo tempo em alguma base ortonormal de V.

Definição 2 (Métrica pseudo-Riemanniana)**.** *Uma métrica pseudo-Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ uma forma bilinear simétrica não degenerada $\langle\, ,\, \rangle_p$ no T_pM, a qual satisfaz a seguinte condição: se $\boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é uma parametrização local em p, com $\boldsymbol{x}(x_1, \ldots, x_n) = q \in \boldsymbol{x}(U)$, temos que*

$$\langle d\boldsymbol{x}_q(e_i), d\boldsymbol{x}_q(e_j)\rangle_q = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$$

é uma função diferenciável em U, onde $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ é um vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Observação 2. *De maneira análoga se define uma métrica Riemanniana, porém, nesse caso, exige-se que o índice de T_pM em relação forma quadrática $\langle\, ,\, \rangle_p$ seja nulo.*

Finalmente, podemos definir:

Definição 3 (Variedade pseudo-Riemanniana)**.** *Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que o par $(M, \langle\, ,\, \rangle)$ é uma* variedade pseudo-Riemanniana *se $\langle\, ,\, \rangle$ for uma métrica pseudo-Riemanniana em M. Nesse caso, dizemos que o* índice de M *é o índice da forma $\langle\, ,\, \rangle$.*

Exemplo 1 (Espaços de Lorentz)**.** *Sejam $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ com $n > 0$ e $k \leq n$. Definimos o espaço $\mathbb{L}^n_k$, o* espaço de Lorentz de índice k e dimensão n *como o conjunto dos pontos do $\mathbb{R}^n$ munido da seguinte forma bilinear:*

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n-k} v_i w_i - \sum_{i=n-k+1}^{n} v_i w_i,$$

onde $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$. No caso de $k = 0$ voltamos ao $\mathbb{R}^n$ e no caso $k = 1$ denotamos $\mathbb{L}^n_1$ simplesmente por $\mathbb{L}^n$, denominado o espaço de Lorentz n-dimensional.

Observação 3. *Lembre que em uma variedade Riemanniana M de dimensão n, em cada ponto $x \in M$, existe um isomorfismo entre T_xM e $\mathbb{R}^n$. No nosso caso, dada uma variedade pseudo-Riemanniana N de índice k, em cada ponto $y \in N$ podemos identificar $T_yN \simeq \mathbb{L}^n_k$.*

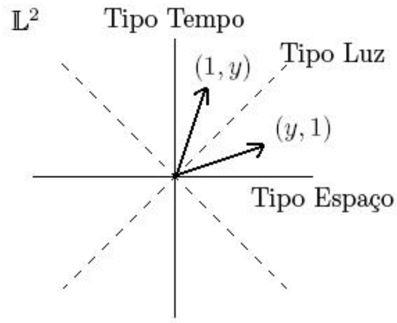

Figura 1.1: O Espaço $\mathbb{L}^2$: Os vetores ortogonais são obtidos através da reflexão em torno de uma diagonal.

Definição 4 (Submersão pseudo-Riemanniana)**.** *Sejam M_1, M_2 variedades pseudo-Riemannianas e seja $\pi : M_1 \to M_2$ uma submersão. Dizemos que π é uma* submersão pseudo-Riemanniana *se valerem as seguintes condições:*

i. Dado $z \in M_2$ a fibra $\pi^{-1}(z)$ é uma subvariedade de M_1;

ii. $d\pi$ preserva o produto escalar de vetores normais às fibras, i.e. dado $x \in M_1$, seja $z = \pi(x) \in M_2$. Então dados u, $v \in T_x(\pi^{-1}(z))^\perp$, vale que

$$\langle u,\, v\rangle_x = \langle d\pi_x(u),\, d\pi_x(v)\rangle_{\pi(x)}.$$

1.1.2 Campos de Vetores e Curvatura

Seja M uma variedade diferenciável. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores em M. Definiremos o *colchete de campos* da variedade M como a operação $[\ ,\ ] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por $[X, Y] = XY - YX$. Não é difícil ver que o colchete satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 1. *Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ são campos de vetores diferenciáveis em M, a, b números reais e $f, g : M \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então:*

i. $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anti-comutatividade),*

ii. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ *(linearidade),*

iii. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(Identidade de Jacobi),*

iv. $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$.

Definição 5. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

denotada por $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$ *que satisfaz as seguintes propriedades:*

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\,\nabla_X Z + g\,\nabla_Y Z$

ii. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii. $\nabla_X(fY) = f\,\nabla_X Y + X(f)Y,$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* f, g *funções diferenciáveis.*

Sempre garantimos a existência de uma conexão afim em uma variedade pseudo-Riemanniana, porém a unicidade não é garantida (assim como no caso Riemanniano). Contudo, o Teorema de Levi-Civita garante que existe uma única conexão afim satisfazendo as hipóteses abaixo, para X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$

iv. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],$ (simetria);

v. $X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$ (compatibilidade com a métrica),

fornecendo a seguinte expressão:

$$2\langle Z, \nabla_Y X\rangle = X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle. \tag{1.1}$$

Chamamos a esta conexão afim de conexão de Levi-Civita. No que resta deste trabalho só usaremos conexões de Levi-Civita.

A seguir, passaremos a definição da *Curvatura* de uma superfície. Começaremos introduzindo o tensor de curvatura.

Definição 6 (Tensor de Curvatura)**.** *Seja* M *uma variedade pseudo-Riemanniana e seja* ∇ *a sua conexão de Levi-Civita. Definimos o* Tensor de Curvatura de M *como a aplicação trilinear* $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *dada por:*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Vamos enunciar um lema que resume as propriedades de R. O capítulo 3 de [4] apresenta a demonstração de tais identidades.

Lema 2. *Como definido acima, R satisfaz:*

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,T\rangle &= \langle R(Z,T)X,Y\rangle.\\ \langle R(X,Y)Z,T\rangle &= -\langle R(Y,X)Z,T\rangle\\ \langle R(X,Y)Z,T\rangle &= -\langle R(X,Y)T,Z\rangle\end{aligned}$$

e ainda vale a Primeira Identidade de Bianchi*:*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Observação 4. *A partir das identidades acima podemos demonstrar que R de fato é um tensor, i.e. se temos X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 $\in \mathfrak{X}(M)$ tais que, para algum $x \in M$ vale $X_1(x) = X_2(x)$, $Y_1(x) = Y_2(x)$ e $Z_1(x) = Z_2(x)$, temos que*

$$R(X_1,Y_1)Z_1(x) = R(X_2,Y_2)Z_2(x).$$

A partir do tensor de curvatura de uma variedade define-se a *Curvatura de Ricci*. Como na literatura tal definição pode variar por uma constante multiplicativa, escreveremos aqui a definição utilizada neste trabalho.

Definição 7 (Tensor de Ricci e Curvatura de Ricci)**.** *Seja M uma variedade pseudo-Riemanniana de dimensão n e seja R seu tensor de curvatura. Definimos o* Tensor de Ricci *de M como a aplicação $Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$Ric(X,Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle R(X,E_i)Y,E_i\rangle, \tag{1.2}$$

onde $\{E_1,\, E_2,\, \ldots,\, E_n\}$ é um referencial ortonormal de M e $\xi_i = \langle E_i,\, E_i\rangle$.

Mais ainda, dado $x \in M$ e $v \in T_xM$, definimos a Curvatura de Ricci de M na direção de v *como $Ric_x(v) = Ric(v,v)$.*

Seja M uma variedade pseudo-Riemanniana e seja $x \in M$. Vamos considerar $\{e_i,\, e_2,\ldots,e_n\}$ uma base ortonormal de T_xM. Sempre podemos, em uma vizinhança U de x, encontrar campos de vetores $E_1,\, E_2,\ldots,E_n$ tais que $E_i(x) = e_i$ e o conjunto $\{E_1(y),\, E_2(y),\ldots,E_n(y)\}$ é ortonormal para todo $y \in U$. Tal conjunto é denominado um *referencial ortonormal de U*.

Definição 8 (Referencial geodésico)**.** *Fixado $x \in M$, um referencial ortonormal que satisfaz $\nabla_{E_i}E_j(x) = 0$ para todos i,j é denominado um* referencial geodésico *em x.*

Observação 5. *Dados $x \in M$ e $\{e_1,\, e_2,\ldots,e_n\}$ como acima, sempre é possível encontrar um referencial geodésico em x que estenda a base $\{e_i\}_{i=1,\,2,\ldots,\,n}$.*

Em seguida, daremos uma breve definição de alguns operadores diferenciais e de suas expressões em coordenadas. Para mais detalhes, vide [4] ou [7], o último apresentando os operadores diferenciais no caso de variedades Riemannianas.

Definição 9 (Gradiente)**.** *Seja M uma variedade pseudo-Riemanniana e seja ainda $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o gradiente de f como o campo de vetores $grad\, f$ em M satisfazendo, para $x \in M$, $v \in T_xM$*

$$\langle grad\, f(x), v\rangle = df_x(v).$$

Observação 6. *Seja f uma função diferenciável e seja $\{E_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de $x \in M$. Então podemos escrever*

$$grad\, f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i E_i(f)(x) E_i(x),$$

onde novamente denotamos $\langle E_i, E_i\rangle = \xi_i$.

Observação 7 (Traço de aplicações lineares)**.** *Seja V um espaço vetorial real de dimensão n munido de uma forma bilinear simétrica não degenerada $\langle\ ,\ \rangle$. Dada $L : V \to V$ uma aplicação linear, definimos o* traço de L *como o número real*

$$tr\ L = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle L(e_i),\, e_i\rangle,$$

onde $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ forma uma base ortogonal de V e $\xi_i = \langle e_i,\, e_i\rangle$.

Definição 10 (Divergência de campos)**.** *Seja M uma variedade pseudo-Riemanniana e seja X um campo de vetores em M. Definimos a divergência do campo X como o traço da aplicação $Y \mapsto \nabla_Y X$. Em coordenadas, escrevemos*

$$div\ X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \nabla_{E_i} X,\, E_i\rangle, \tag{1.3}$$

onde $\{E_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ é um referencial ortonormal e $\xi_i = \langle E_i,\, E_i\rangle$.

Definição 11 (Laplaciano)**.** *Seja M uma variedade pseudo-Riemanniana. Definimos o Laplaciano como o operador no espaço das funções diferenciáveis tal que*

$$\Delta f = div\, grad\, f.$$

Propriedade 1. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma vizinhança de $x \in M$. Então, se $\{E_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ for um referencial ortonormal, geodésico em x, podemos escrever*

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i E_i(E_i(f))(x).$$

Demonstração. A idéia que utilizamos para demonstrar tal propriedade é análoga ao caso Riemanniano, apenas levando em consideração a diferença na forma de expressar um vetor em coordenadas em uma variedade pseudo-Riemanniana. Da definição de divergência, segue que

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \nabla_{E_i} \mathrm{grad} f, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \xi_j \langle \nabla_{E_i} \big(E_j(f) E_j \big), E_i \rangle \\
&= \sum_{i,j} \xi_i \xi_j \langle E_j(f) \nabla_{E_i} E_j + E_i(E_j(f)) E_j, E_i \rangle.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando que o conjunto $\{E_i\}$ é um referencial geodésico em x, segue que $\nabla_{E_i} E_j(x) = 0$ e portanto

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \sum_{i,j} \xi_i \xi_j E_i(E_j(f)) \langle E_j, E_i \rangle \\
&= \sum_{i,j} \xi_i \xi_j E_i(E_j(f)) \delta_{ij} \xi_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i E_i(E_i(f)).
\end{aligned}$$

□

Definição 12 (Campos de vetores f-relacionados)**.** *Sejam M_1, M_2 variedades diferenciáveis e seja $f : M_1 \to M_2$ uma função diferenciável. Seja X_1 um campo de vetores de M_1 e seja X_2 um campo de vetores de M_2, dizemos que X_1 e X_2 são* f-relacionados *se valer, para todo $x \in M_1$, a seguinte relação:*

$$X_2(f(x)) = df_x X_1(x). \tag{1.4}$$

Neste caso, utilizaremos a seguinte notação: $X_1 \sim_f X_2$.

Lema 3. *Sejam M_1, M_2 variedades diferenciáveis e seja $f : M_1 \to M_2$ diferenciável. Então, dados $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ e $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$, se $X_1 \sim_f X_2$ e $Y_1 \sim_f Y_2$, então vale que $[X_1, Y_1]_{M_1} \sim_f [X_2, Y_2]_{M_2}$.*

Para a demonstração de tal lema, pode-se consultar a página 14 de [4].

Lema 4. *Sejam M_1 e M_2 variedades pseudo-Riemannianas e seja $f : M_1 \to M_2$ diferenciável tal que $df_x : T_xM_1 \to T_{f(x)}M_2$ é uma isometria para todo $x \in M_1$. Então, dados $\overline{U}$, $\overline{X}$, $\overline{Y} \in \mathfrak{X}(M_1)$ e U, X, $Y \in \mathfrak{X}(M_2)$ tais que*

$$\overline{U} \sim_f U, \overline{X} \sim_f X \text{ e } \overline{Y} \sim_f Y,$$

vale que, para todo $x \in M_1$,

$$\overline{U}\langle \overline{X}(x), \overline{Y}(x)\rangle = U\langle X(f(x)), Y(f(x))\rangle. \tag{1.5}$$

Demonstração. Defina $\overline{g} : M_1 \to \mathbb{R}$ e $g : M_2 \to \mathbb{R}$, respectivamente por:

$$\begin{aligned} \overline{g}(x) &= \langle \overline{X}(x), \overline{Y}(x)\rangle \\ g(z) &= \langle X(z), Y(z)\rangle. \end{aligned}$$

Como df_x é uma isometria e $X \sim_f \overline{X}$, $Y \sim_f \overline{Y}$, segue que $\overline{g}(x) = g(f(x))$. Então

$$\begin{aligned} \overline{U}\langle \overline{X}(x), \overline{Y}(x)\rangle &= \overline{U}(g \circ f)(x) \\ &= d(g \circ f)_p \overline{U}(x) \\ &= dg_{f(x)} U(f(x)) \\ &= U(g)(f(x)) \\ &= U\langle X(f(x)), Y(f(x))\rangle. \end{aligned}$$

□

1.1.3 Hipersuperfícies Pseudo-Riemannianas

Seja N^{n+1} uma variedade pseudo-Riemanniana e seja $M^n \subseteq N$ uma hipersuperfície de N. Definiremos:

Definição 13 (Segunda forma fundamental)**.** *Definimos a* Segunda Forma Fundamental de M *como a aplicação bilinear $B : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ dada por*

$$B(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} - \nabla_X Y,$$

onde $\widetilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de N, ∇ é a conexão de Levi-Civita de M e X, Y são respectivamente as projeções de $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ em M.

No caso de $M \subseteq N$ estar orientada segundo um campo de vetores normal η, dado $x \in M$, definimos $A_\eta : T_xM \to T_xM$ a *segunda forma fundamental na direção de η* por

$$A_\eta(v) = -\left(\widetilde{\nabla}_v \eta\right)^T, \tag{1.6}$$

onde $\widetilde{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de N.

Pode-se provar que as duas aplicações estão relacionadas segundo a seguinte expressão:

$$\langle A_\eta(X), Y\rangle = \langle B(X,Y), \eta\rangle. \tag{1.7}$$

Em seguida, definiremos a *curvatura média* de uma superfície.

Definição 14 (Vetor Curvatura Média)**.** *À média da aplicação B definida acima, definimos $\vec{H}$ o* Vetor Curvatura Média *de M:*

$$\vec{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i B(E_i, E_i), \tag{1.8}$$

onde $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ forma um referencial ortonormal de M.

Seja agora $M^n \subseteq N^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável com η campo normal satisfazendo $\langle \eta, \eta\rangle = 1$. Dado $x \in M$, definimos a *Curvatura média de M em x* como o número

$$H = \langle \vec{H}, \eta\rangle.$$

Observação 8. *Note que dado $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal de M, podemos escrever*

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle B(E_i, E_i), \eta\rangle \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \widetilde{\nabla}_{E_i} E_i - \nabla_{E_i} E_i, \eta\rangle \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \widetilde{\nabla}_{E_i} E_i, \eta\rangle, \end{aligned}$$

onde, novamente, $\widetilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de N.

Mais ainda, a equação (1.7) nos dá uma outra forma de escrevermos H, a saber:

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle A_\eta(E_i), E_i\rangle.$$

1.2 Grupos de Lie

Para aspectos Riemannianos de grupos de Lie o leitor poderá consultar Alexandrino e Bettiol [8]. Neste capítulo fixaremos a notação e demonstraremos algumas propriedades sobre grupos de Lie munidos de uma métrica pseudo-Riemanniana. Neste caso, pode-se consultar o capítulo 11 de O'Neill [4].

Definição 15 (Grupo de Lie)**.** *Um grupo de Lie é um grupo* $\mathbb{G}$ *com uma estrutura diferenciável tal que a aplicação* $\mathbb{G}\times\mathbb{G} \to \mathbb{G}$ *dada por* $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ *é diferenciável.*

Observação 9. *Fixado* $x \in \mathbb{G}$*, defina as translações a esquerda* L_x *e a direita* R_x *dadas respectivamente por:* $L_x(y) = xy$; $R_x(y) = yx$. *Segue diretamente da definição de grupo de Lie que tais aplicações são difeomorfismos.*

Dizemos que uma métrica em um grupo de Lie $\mathbb{G}$ é invariante à esquerda se $\langle u, v\rangle_y = \langle d(L_x)_y u, d(L_x)_y v\rangle_{L_x(y)}$, para todo $x, y \in \mathbb{G}$, $u, v \in T_y\mathbb{G}$, isto é, se L_x é uma isometria. Analogamente definimos uma métrica invariante à direita. Uma métrica invariante à esquerda e à direita é chamada bi-invariante.

Agora seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{G})$ um campo de vetores. Dizemos que X é invariante à esquerda se, para todos x, $y \in \mathbb{G}$, vale a seguinte igualdade:

$$X(x) = d\big(L_{y^{-1}}\big)_{L_y(x)} X\big(L_y(x)\big). \tag{1.9}$$

Observação 10. *Tal definição é equivalente a* $X(x) = d\big(L_x\big)_e X(e)$, $\forall\, x \in \mathbb{G}$.

Observação 11. *A identidade* (1.9) *nos dá uma noção que um campo de vetores invariante a esquerda fica unicamente determinado por seu valor em algum ponto. Em particular, dado um ponto* $x \in \mathbb{G}$ *e um vetor* $v \in T_x\mathbb{G}$ *podemos estender o vetor* v *a um campo de vetores* V *invariante a esquerda.*

Podemos notar que se $\mathbb{G}$ é um grupo de Lie munido de uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante e X, Y são campos de vetores invariantes à esquerda, vale que, $\forall x \in \mathbb{G}$,

$$\begin{aligned}\langle X(x), Y(x)\rangle &= \langle d(L_x)_e(X(e)), d(L_x)_e Y(e)\rangle \\ &= \langle X(e), Y(e)\rangle.\end{aligned}$$

Ou seja, temos que a função $x \in \mathbb{G} \mapsto \langle X(x), Y(x)\rangle_x$ é constante quando X e Y são campos invariantes à esquerda.

Introduziremos uma estrutura algébrica no espaço tangente ao elemento neutro de $\mathbb{G}$, $T_e\mathbb{G}$.

A cada vetor $X_e \in T_e\mathbb{G}$ associamos o campo de vetores (invariante à esquerda) X definido por $X(y) = dL_y X_e$, onde $y \in \mathbb{G}$. Assim, dados X_e, $Y_e \in T_e\mathbb{G}$, definiremos $[X_e, Y_e] = [X, Y](e) \in T_e\mathbb{G}$. Temos que, pelo lema 3, o colchete de dois campos invariantes à esquerda continua invariante a esquerda. Assim, se definirmos por $\mathcal{G}$ o conjunto dos campos de vetores invariantes à esquerda de $\mathbb{G}$, temos um isomorfismo entre $T_e\mathbb{G}$ e $\mathcal{G}$, e podemos pensar em elementos de $\mathcal{G}$ indiferentemente como vetores de $T_e\mathbb{G}$ ou campos de vetores invariantes à esquerda. Como definida acima, $\mathcal{G}$ é chamada a *álgebra de Lie de* $\mathbb{G}$.

Lema 5. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie munido de uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante $\langle\ ,\ \rangle$ e seja $\mathcal{G}$ sua álgebra de Lie. Sejam $U, V, X \in \mathcal{G}$. Então U, V e X satisfazem a seguinte relação:*

$$\langle [U, X], V\rangle = \langle U, [X, V]\rangle.$$

A demonstração de tal lema para uma métrica Riemanniana pode ser encontrada no capítulo 1 de [5], e para uma métrica pseudo-Riemanniana no capítulo 11 de [4].

Agora, apresentaremos um lema que nos ajudará a encontrar uma expressão conveniente para a conexão de Levi-Civita de dois campos de vetores invariantes a esquerda.

Lema 6. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie munido de uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante $\langle\ ,\ \rangle$ e seja $\mathcal{G}$ sua álgebra de Lie. Então, para todo $X \in \mathcal{G}$ e para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos a identidade $\langle X, \nabla_X Y\rangle = 0$.*

Demonstração. Considere $X \in \mathcal{G}$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Da equação (1.1) segue que

$$2\langle X, \nabla_X Y\rangle = Y\langle X, X\rangle + 2\langle X, [X, Y]\rangle. \tag{1.10}$$

Como X é invariante à esquerda, temos que $\langle X, X\rangle$ é constante, e portanto $Y\langle X, X\rangle = 0$. Com isso, obtemos

$$\langle X, \nabla_X Y\rangle = \langle X, [X, Y]\rangle = \langle [X, X], Y\rangle = 0, \tag{1.11}$$

onde a segunda igualdade decorre do Lema 5. □

Assim podemos enunciar e demonstrar a Proposição 2, que caracteriza a conexão de Levi-Civita de dois campos invariantes à esquerda de $\mathbb{G}$.

Proposição 2. *Seja $(\mathbb{G}, \langle\ ,\ \rangle)$ um grupo de Lie munido de uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante, seja ∇ a sua conexão de Levi-Civita e seja $\mathcal{G}$ sua álgebra de Lie. Então, para todo $X, Y \in \mathcal{G}$, vale*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

Demonstração. Primeiramente fixe $X \in \mathcal{G}$. Mostremos que $\nabla_X X = 0$. Fixemos um ponto $x \in \mathbb{G}$. Para mostrar que $\nabla_X X(x) = 0$, basta mostrar que para todo $v \in T_x\mathbb{G}$ temos $\langle \nabla_X X, v\rangle = 0$. Seja, portanto, $v \in T_x\mathbb{G}$. Estenda v a um campo de vetores V invariante a esquerda. Temos que:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X X(x), v\rangle = \langle \nabla_X X, V\rangle(x) &= X\langle X, V\rangle - \langle X, \nabla_X V\rangle \\ &= X\langle X, V\rangle = 0, \end{aligned}$$

pois $\langle X, \nabla_X V\rangle = 0$, pelo Lema 6. Assim mostramos que $\nabla_X X = 0$, $\forall X \in \mathcal{G}$.

Finalmente vamos passar a demonstração da proposição. Sejam $X, Y \in \mathcal{G}$. Então temos que $X + Y \in \mathcal{G}$ e, como demonstrado anteriormente, vale que

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_{X+Y}(X+Y) &= \nabla_X X + \nabla_X Y + \nabla_Y X + \nabla_Y Y \\ &= \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= \nabla_X Y + \nabla_X Y - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= 2\nabla_X Y + [Y, X], \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. □

Proposição 3. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie com uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante $\langle\ ,\ \rangle$. Então, para $X, Y, Z \in \mathcal{G}$, o tensor de curvatura de $\mathbb{G}$ se escreve como*

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z],$$

Demonstração. Por definição, temos

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Note que, como o colchete de campos invariantes a esquerda ainda é invariante a esquerda, segue diretamente da Proposição 2 que a conexão de Levi-Civita de dois campos invariantes à esquerda também é invariante à esquerda. Podemos, portanto, utilizar a Proposição 2 na igualdade acima e obter:

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{2}[Y, \frac{1}{2}[X,Z]] - \frac{1}{2}[X, \frac{1}{2}[Y,Z]] + \frac{1}{2}[[X,Y],Z].$$

Pela identidade de Jacobi, temos que $[[X,Z],Y] + [[Z,Y],X] = [[X,Y],Z]$, e portanto $[Y,[X,Z]] - [X,[Y,Z]] = [Z,[X,Y]]$. Assim, ficamos com

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{1}{4}\left([Y,[X,Z]] - [X,[Y,Z]]\right) + \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= \frac{1}{4}[Z,[X,Y]] + \frac{1}{2}[[X,Y],Z] \\ &= \frac{1}{4}[[X,Y],Z]. \end{aligned}$$

□

Agora, vale a pena dar mais um pequeno passo e observar como fica a expressão da curvatura seccional K de um grupo de Lie sob as condições do trabalho. Se $E_i,\, E_j \in \mathcal{G}$ formam uma base ortonormal de um plano $\sigma \subseteq T_x\mathbb{G}$, temos, por definição,

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(E_i, E_j)E_i, E_j\rangle}{\langle E_i,\, E_i\rangle\langle E_j,\, E_j\rangle - \langle E_i,\, E_j\rangle} = \frac{1}{4}\frac{\langle [[E_i, E_j], E_i], E_j\rangle}{\xi_i\xi_j}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{\langle [E_i, E_j], [E_i, E_j]\rangle}{\xi_i\xi_j}, \tag{1.12}$$

onde a última igualdade se deve novamente ao Lema 5.

Observação 12. *No caso da métrica ser Riemanniana, a expressão da curvatura seccional também é dada pela equação* (1.12)*. Mas observe que nesse caso teremos $\xi_i = \xi_j = 1$ e ainda $\langle [E_i, E_j], [E_i, E_j]\rangle \geq 0$, pois a métrica é positiva definida. Ou seja, um grupo de Lie com uma métrica Riemanniana bi-invariante necessariamente terá curvatura seccional não negativa. Como nosso trabalho utiliza métricas pseudo-Riemannianas, abrange Grupos de Lie com curvatura seccional qualquer.*

Lembremos agora da aplicação de Gauss do $\mathbb{R}^{n+1}$: Seja $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ uma variedade orientável de $\mathbb{R}^{n+1}$ com η campo de vetores normal unitário. Definimos $N : M \to \mathbb{S}^n$ por $N(x) = \eta(x)$, visto como um vetor de $\mathbb{S}^n$. Como podemos considerar $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, podemos ver a aplicação de Gauss como a translação de vetores normais até a origem. Tal interpretação nos permite generalizar a aplicação da seguinte maneira:

Definição 16 (Aplicação de Gauss)**.** *Seja $\mathbb{G}^{n+1}$ um grupo de Lie munido de uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante de índice $j \geq 0$ e seja M^n uma hipersuperfície orientável de $\mathbb{G}$ orientada segundo η, um campo de vetores de $\mathbb{G}$ normal a M com $\langle \eta, \eta\rangle = 1$.*

Definimos $N : M \to \mathbb{S}^n_j \subset T_e\mathbb{G}$, a aplicação de Gauss de M, por

$$N(x) = d(L_{x^{-1}})_x(\eta(x)). \tag{1.13}$$

Observação 13. *Aqui, estamos usando a seguinte definição:*

$$\mathbb{S}^n_j = \{v \in T_e\mathbb{G}; \langle v,\, v\rangle = 1\}.$$

Note que, para definirmos a aplicação de Gauss de maneira coerente, não basta exigirmos que η seja um campo normal unitário, pois não necessariamente $N(x)$ seria um vetor de $\mathbb{S}^n_j$. De fato, poderia acontecer de $\langle \eta, \eta\rangle = -1$, e assim, definindo

$$\mathbb{H}^n_j = \{v \in T_e\mathbb{G}; \langle v,\, v\rangle = -1\},$$

teríamos $N(x) \in \mathbb{H}^n_j$, visto que $L_{x^{-1}}$ é uma isometria.

1.3 Variedades Homogêneas

Nessa sessão, estudaremos algumas aplicações que serão utilizadas na demonstração do Teorema 2 e definiremos a aplicação de Gauss de uma hipersuperfície imersa em um quociente de um grupo de Lie por um subgrupo de Lie compacto.

1.3.1 Definições e Primeiras Propriedades

Definição 17 (Variedade homogênea)**.** *Seja N uma variedade pseudo-Riemanniana. Dizemos que N é uma* variedade homogênea *se dados dois pontos $x, y \in N$ existe uma isometria $\varphi : N \to N$ tal que $\varphi(x) = y$.*

Observação 14 (Relação com grupos de Lie)**.** *Seja N uma variedade homogênea. Defina $\mathbb{G} = ISO(N)$ o grupo de isometrias de N. Fixado $o \in N$, defina $\mathbb{H} = \{\varphi \in \mathbb{G}; \varphi(o) = o\}$ o subgrupo de isotropia de o. Então podemos introduzir uma métrica em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ de forma que N seja isométrica a $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.*

Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie de dimensão $n+k+1$ munido de uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante $\langle\, ,\, \rangle$. Agora seja $\mathbb{H}$ um subgrupo de Lie compacto de dimensão k e seja $\mathbb{G}/\mathbb{H} = \{\mathbb{H}x | x \in \mathbb{G}\}$ o conjunto das classes residuais a direita de $\mathbb{H}$ em $\mathbb{G}$. Em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, considere a projeção canônica

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{G} & \to & \mathbb{G}/\mathbb{H} \\ x & \mapsto & \mathbb{H}x. \end{array}$$

Chamamos atenção ao fato que dado $h \in \mathbb{H}$, temos que $\pi \circ L_h = \pi$, pois dado $x \in \mathbb{G}$,

$$\begin{array}{rcl} (\pi \circ L_h)(x) & = & \pi(hx) \\ & = & \mathbb{H}hx \\ & = & \mathbb{H}x \\ & = & \pi(x). \end{array}$$

Dado $x \in \mathbb{G}$, seja $z = \pi(x)$. Definiremos uma métrica em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ de forma que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \ell_x : (T_x(\mathbb{H}x))^{\perp} & \to & T_z(\mathbb{G}/\mathbb{H}) \\ v & \mapsto & d\pi_x(v). \end{array}$$

seja uma isometria, o que torna π uma submersão pseudo-Riemanniana. Para tanto, vamos observar algumas propriedades da projeção e da aplicação ℓ_x. Primeiramente, note que ℓ_x é a restrição da derivada da projeção; conseqüentemente, é uma aplicação linear.

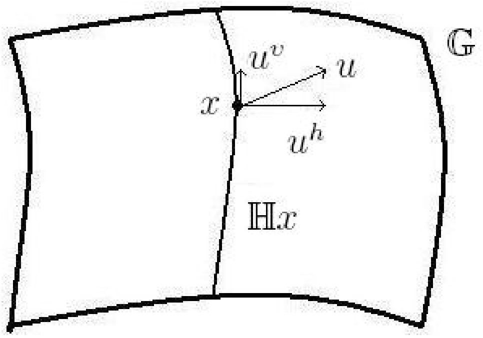

Figura 1.2: Decomposição $u = u^h + u^v$.

Propriedade 2. *Fixado $x \in \mathbb{G}$, ℓ_x é uma bijeção.*

Demonstração. Note que $dim(T_x(\mathbb{H}x))^\perp = dim(T_x\mathbb{G}) - dim(T_x(\mathbb{H}x))$. Portanto a dimensão do domínio de ℓ_x é igual a $n+1$. Como $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ tem a mesma dimensão, para mostrar que ℓ_x é uma bijeção basta demonstrar a sua sobrejetividade. Como $d\pi_x$ é uma aplicação sobrejetiva, para mostrar que ℓ_x é sobrejetiva, podemos provar apenas que $d\pi_x \big|_{T_x(\mathbb{H}x)} = 0$.
Considere, portanto, $u \in T_x(\mathbb{H}x)$ e seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{H}x$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = u$. Então podemos escrever $d\pi_x(u)$ como

$$d\pi_x(u) = (\pi \circ \alpha)'(0).$$

Como $\alpha(t) \in \mathbb{H}x$ para todo t, temos que a curva $\pi \circ \alpha$ é constante, e portanto $d\pi_x(u) = 0$. □

Agora, seja $x \in \mathbb{G}$ e seja $u \in T_x\mathbb{G}$. Considerando a fibra $\mathbb{H}x \ni x$, definimos $u^v \in T_x(\mathbb{H}x)$ como a projeção ortogonal de u em $T_x(\mathbb{H}x)$. Definimos ainda $u^h = u - u^v \in T_x(\mathbb{H}x)^\perp$. Observamos que u^v é chamada de *componente vertical* de u e u^h é denominada *componente horizontal* de u (vide figura 1.2). Um campo de vetores U de $\mathbb{G}$ é denominado *vertical* (*horizontal*) se valer $U(x) = (U(x))^v$ ($U(x) = (U(x))^h$).

Antes de definirmos uma métrica em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, vamos observar algumas propriedades de campos de vetores de $\mathbb{G}$:

Propriedade 3. *Seja $\widetilde{U}$ um campo de vetores de $\mathbb{G}$ invariante a esquerda. Então, se $\mathbb{H}x = \mathbb{H}y$ para x, $y \in \mathbb{G}$, vale*

$$d\pi_x(\widetilde{U}(x)) = d\pi_y(\widetilde{U}(y)).$$

Observação 15. *Apesar de ter uma demonstração simples, essa propriedade tem uma interessante interpretação geométrica. De fato, ela afirma que os campos invariantes a esquerda de $\mathbb{G}$ se projetam em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ de maneira constante ao longo de cada fibra de $\mathbb{G}$.*

Demonstração. Como $\mathbb{H}x = \mathbb{H}y$, podemos escrever $x = L_h(y)$ com $h \in \mathbb{H}$. Então

$$\begin{aligned} d\pi_x(\widetilde{U}(x)) &= d\pi_x(d(L_h)_y\widetilde{U}(y)) \\ &= d(\pi \circ L_h)_y\widetilde{U}(y) \\ &= d\pi_y\widetilde{U}(y). \end{aligned}$$

□

Conseqüência 1. *Seja $\widetilde{U} \in \mathcal{G}$ um campo de vetores de $\mathbb{G}$ invariante a esquerda. Então se em algum ponto $x \in \mathbb{G}$ temos que $\widetilde{U}(x)$ é vertical, para todo $y \in \mathbb{H}x$ temos $\widetilde{U}(y)$ vertical.*

Demonstração. De fato, se $\widetilde{U}(x) \in T_x(\mathbb{H}x)$, temos que $d\pi_x\widetilde{U}(x) = 0$. Pela propriedade anterior, dado $y \in \mathbb{H}x$ segue que $d\pi_y\widetilde{U}(y) = 0$, e portanto $\widetilde{U}(y) \in T_y(\mathbb{H}y)$. □

Conseqüência 2. *Seja $\widetilde{V} \in \mathcal{G}$ um campo de vetores de $\mathbb{G}$ invariante a esquerda. Então se em algum ponto $x \in \mathbb{G}$ temos que $\widetilde{V}(x)$ é horizontal, para todo $y \in \mathbb{H}x$ temos $\widetilde{V}(y)$ horizontal.*

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{H}x$ e seja $\widetilde{u} \in T_y(\mathbb{H}y)$ um vetor vertical. Estenda $\widetilde{u}$ a $\widetilde{U}$ um campo de vetores invariante a esquerda. Então temos que $\widetilde{U}(x) \in T_x(\mathbb{H}x)$, e portanto $0 = \langle \widetilde{U}(x), \widetilde{V}(x) \rangle = \langle \widetilde{U}(y), \widetilde{V}(y) \rangle$, mostrando que $\widetilde{V}(y)$ é horizontal. □

Vamos definir a métrica de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ da seguinte forma: dado $z \in \mathbb{G}/\mathbb{H}$ e dados $u, v \in T_z(\mathbb{G}/\mathbb{H})$, defina

$$\langle u, v \rangle_z = \langle (\ell_x)^{-1}(u), (\ell_x)^{-1}(v) \rangle_x, \tag{1.14}$$

onde $x \in \mathbb{G}$ é tal que $\pi(x) = z$ e $\langle \, , \, \rangle_x$ é a métrica de $\mathbb{G}$. Antes de provarmos que tal definição está bem posta, provaremos mais uma propriedade de campos de vetores de $\mathbb{G}$:

Propriedade 4. *Seja $W \in \mathfrak{X}(\mathbb{G}/\mathbb{H})$ um campo de vetores. Defina $\widetilde{W} \in \mathfrak{X}(\mathbb{G})$ por $\widetilde{W}(x) = \ell_x^{-1}(W(\pi(x)))$. Então $\widetilde{W}$* é invariante por dL_h em cada fibra $\mathbb{H}x$, *i.e. dados $x, y \in \mathbb{G}$ tais que $\mathbb{H}x = \mathbb{H}y$, vale a seguinte relação:*

$$\widetilde{W}(x) = d(L_h)_y\widetilde{W}(y), \tag{1.15}$$

onde $h = xy^{-1} \in \mathbb{H}$.

Demonstração. Para provar a equação (1.15), basta provarmos que:

i. $d(L_h)_y\widetilde{W}(y)$ é horizontal,

ii. $\ell_x(\widetilde{W}(x)) = \ell_x(d(L_h)_y\widetilde{W}(y))$.

Primeiro, seja $\widetilde{u} \in T_x\mathbb{H}x$. Estenda $\widetilde{u}$ a $\widetilde{U}$ um campo de vetores invariante a esquerda. Então, como $\widetilde{U}(x)$ é vertical, segue que $\widetilde{U}(y)$ também o é. Com isso, como $\widetilde{W}$ é um campo horizontal e a métrica de $\mathbb{G}$ é bi-invariante, segue que

$$0 = \langle \widetilde{W}(y), \widetilde{U}(y)\rangle = \langle d(L_h)_y\widetilde{W}(y), \widetilde{U}(x)\rangle,$$

o que mostra que $d(L_h)_y\widetilde{W}(y) \in T_x(\mathbb{H}x)^\perp$. Com isso, torna-se direta a prova de ii.:

$$\begin{aligned} \ell_x(d(L_h)_y\widetilde{W}(y)) &= d\pi_x d(L_h)_y\widetilde{W}(y) \\ &= d(\pi \circ L_h)_y\widetilde{W}(y) \\ &= d\pi_y\widetilde{W}(y) \\ &= W(\pi(x)) \\ &= \ell_x(\widetilde{W}(x)). \end{aligned}$$

□

Conseqüência 3. *A métrica de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, definida pela equação* (1.14)*, está bem definida.*

Demonstração. Vamos mostrar que se $\pi(x) = \pi(y) = z$, então $\forall\, u, v \in T_z(\mathbb{G}/\mathbb{H})$ vale

$$\langle(\ell_x)^{-1}(u), (\ell_x)^{-1}(v)\rangle_x = \langle(\ell_y)^{-1}(u), (\ell_y)^{-1}(v)\rangle_y. \tag{1.16}$$

Fixemos, portanto, u, $v \in T_z(\mathbb{G}/\mathbb{H})$. Defina $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ campos de vetores de $\mathbb{H}x$ por $\widetilde{U}(x) = \ell_x^{-1}(u)$ e $\widetilde{V}(x) = \ell_x^{-1}(v)$. Como $\pi(x) = \pi(y)$, a propriedade 4 nos dá que

$$\widetilde{U}(x) = d(L_h)_y\widetilde{U}(y) \quad \text{e}$$
$$\widetilde{V}(x) = d(L_h)_y\widetilde{V}(y).$$

Da invariância da métrica de $\mathbb{G}$, segue que

$$\begin{aligned} \langle \ell_x^{-1}(u), \ell_x^{-1}(v)\rangle &= \langle \widetilde{U}(x), \widetilde{V}(x)\rangle \\ &= \langle d(L_h)_y\widetilde{U}(y), d(L_h)_y\widetilde{V}(y)\rangle \\ &= \langle \widetilde{U}(y), \widetilde{V}(y)\rangle \\ &= \langle \ell_y^{-1}(u), \ell_y^{-1}(v))\rangle, \end{aligned}$$

mostrando que a métrica em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ está bem definida. □

Conseqüência 4. *A projeção $\pi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}/\mathbb{H}$ é uma submersão pseudo-Riemanniana.*

Demonstração. De fato, para $z \in \mathbb{G}/\mathbb{H}$ as fibras $\pi^{-1}(z)$ são translações de $\mathbb{H}$, e portanto subvariedades pseudo-Riemannianas de $\mathbb{G}$. Pela definição da métrica de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ obtemos que $d\pi$ preserva o produto escalar de vetores normais às fibras, o que demonstra a afirmação. $\square$

Proposição 4. *Com a notação anterior, sejam X, Y campos de vetores de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Defina $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ campos de vetores de $\mathbb{G}$ por*

$$\begin{aligned} \widetilde{X}(x) &= \ell_x^{-1}(X(\pi(x))), \\ \widetilde{Y}(x) &= \ell_x^{-1}(Y(\pi(x))). \end{aligned}$$

Então vale a seguinte relação, para $x \in \mathbb{G}$:

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}(x) = \ell_x^{-1}\left(\nabla_X Y(\pi(x))\right) + \frac{1}{2}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v(\pi(x)), \tag{1.17}$$

onde $\widetilde{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita em $\mathbb{G}$ e ∇ é a conexão de Levi-Civita em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

A demonstração da Proposição 4, por ser extensa, encontra-se no apêndice deste trabalho.

1.3.2 A Aplicação de Gauss de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$

Nesse ponto começaremos a pensar em como definir uma aplicação de Gauss para uma hipersuperfície $M \hookrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{H}$, ou seja, precisamos de uma isometria linear entre um vetor normal a M em um certo ponto z e um vetor de $\mathbb{S}_j^{n+k} \subseteq \mathcal{G} = T_e\mathbb{G}$, que venha a generalizar a translação do $\mathbb{R}^n$. Já temos que ℓ_x e $d(L_x)$ são isometrias, assim, dado $z \in \mathbb{G}/\mathbb{H}$, seja $x \in \pi^{-1}(z)$. Defina a aplicação Γ_z por:

$$\begin{aligned} \Gamma_z : \ T_z(\mathbb{G}/\mathbb{H}) &\to \mathcal{G} \\ u &\mapsto d\left(L_{x^{-1}}\right)_x \left(\ell_x^{-1}(u)\right). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Precisamos mostrar que tal aplicação independe da escolha de $x \in \pi^{-1}(z)$. Fixemos $x, y \in \pi^{-1}(z)$. Mostremos que vale, para todo $u \in T_z(\mathbb{G}/\mathbb{H})$, a seguinte relação:

$$d\left(L_{x^{-1}}\right)_x \left(\ell_x^{-1}(u)\right) = d\left(L_{y^{-1}}\right)_y \left(\ell_y^{-1}(u)\right). \tag{1.19}$$

Como $\mathbb{H}x = \mathbb{H}y$, escreva $x = L_h(y)$, com $h \in \mathbb{H}$. A propriedade 4 nos dá que $\ell_x^{-1}(u) = d(L_h)_y \ell_y^{-1}(u)$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} d(L_{x^{-1}})_x(\ell_x^{-1}(u)) &= d(L_{x^{-1}})_x(d(L_h)_y\ell_y^{-1}(u)) \\ &= d(L_{x^{-1}} \circ L_h)_y(\ell_y^{-1}(u)) \\ &= d(L_{y^{-1}})_y\ell_y^{-1}(u), \end{aligned}$$

mostrando que a aplicação Γ_z está bem definida. Com isso, definimos:

Definição 18 (Aplicação de Gauss)**.** *Sejam $\mathbb{G}^{n+k+1}$ um grupo de Lie de índice j, $\mathbb{H}^k \subset \mathbb{G}$ um subgrupo de Lie compacto e $M^n \subset (\mathbb{G}/\mathbb{H})^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável do quociente $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ com η um campo normal unitário fixado, satisfazendo $\langle \eta, \eta \rangle = 1$. Definimos a aplicação de Gauss de M por:*

$$\begin{aligned} N: \ M &\to \mathbb{S}_j^{n+k} \subset \mathcal{G} \\ z &\mapsto N(z) = \Gamma_z(\eta(z)). \end{aligned}$$

Observação 16. *Note que no caso de $\mathbb{G} = \mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{H} = \{0\}$, temos que ℓ_x é a identidade e portanto a aplicação Γ_z volta a ser a translação de vetores de $\mathbb{R}^{n+1}$. Portanto nesse caso quando compusermos Γ_z com um campo de vetores normal, re-obteremos a aplicação de Gauss do $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Capítulo 2

O Laplaciano da Aplicação de Gauss em $\mathbb{G}$

Neste capítulo enunciamos e demonstramos uma generalização da expressão (1) para o caso do espaço ambiente ser um grupo de Lie munido de uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante. Como conseqüência, obtemos uma generalização do Teorema de Ruh-Vilms.

2.1 Teorema 1

Seja $(\mathbb{G}^{n+1}, \langle\,,\,\rangle)$ um grupo de Lie munido de uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante e seja $M^n \subseteq \mathbb{G}$ uma hipersuperfície de $\mathbb{G}$ orientável orientada segundo η, um campo de vetores de $\mathbb{G}$ unitário normal a M, que satisfaça $\langle \eta, \eta \rangle = 1$. Nessa sessão calcularemos o Laplaciano da aplicação de Gauss e o relacionaremos com a Curvatura Média de M. Será demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 1. *Sejam $\mathbb{G}$, M e η como acima e seja N a aplicação de Gauss de M, definida por* (1.13). *Então, denotando por $\|B\|$ a norma da segunda forma fundamental de M e por H a curvatura média de M, temos que vale, para todo $x \in M$,*

$$\Delta N(x) = -nd(L_{x^{-1}})_x(grad\, H(x)) - \left(\|B\|^2 + nRic(\eta(x))\right) N(x), \tag{2.1}$$

onde $Ric(\eta(x))$ denota a curvatura de Ricci na direção de η.

Demonstração. Vamos começar escrevendo N em coordenadas a fim de calcularmos seu Laplaciano. Fixemos $x_0 \in M$. Seja $A_\eta : T_{x_0}M \to T_{x_0}M$ a segunda forma fundamental de M em x_0 em relação a normal η. Seja $\{E_1(x_0), E_2(x_0), ..., E_n(x_0)\}$ uma base ortonormal de autovetores de A_η. Estenda cada campo $E_i(x_0)$ a um campo de vetores E_i de forma que $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ forme um referencial ortonormal de M geodésico em x_0.

Seja ainda Z_i o campo de vetores invariante a esquerda tal que $Z_i(x_0) = E_i(x_0)$, se $i \in \{1, 2, ..., n\}$ e $Z_{n+1}(x_0) = \eta(x_0)$. Então, em uma vizinhança de x_0 podemos escrever

$$\eta(x) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j(x) Z_j(x).$$

Observe que no ponto x_0 temos $\eta(x_0) = Z_{n+1}(x_0)$. Portanto vale que $a_j(x_0) = 0$ se $j \leq n$ e $a_{n+1}(x_0) = 1$. Agora, considere N a aplicação de Gauss de M. Temos, por definição, que:

$$\begin{aligned} N(x) &= d(L_{x^{-1}})_x(\eta(x)) \\ &= d(L_{x^{-1}})_x \left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j(x) Z_j(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} a_j(x) d(L_{x^{-1}})_x \left(Z_j(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} a_j(x) Z_j(e), \end{aligned}$$

pois os campos Z_j são invariantes a esquerda. Ou seja, escrevemos $N = \sum a_j Z_j(e)$. Assim, escrevemos o Laplaciano de N como

$$\Delta N = \sum_{j=1}^{n+1} (\Delta a_j) Z_j(e). \tag{2.2}$$

Fixada a notação, para obtermos uma expressão para o Laplaciano da aplicação de Gauss, basta calcularmos $\Delta a_j(x_0)$.

Dividiremos a prova do Teorema 1 em duas afirmações, que serão demonstradas em seguida. (As demonstrações de tais afirmações estão apresentadas em separado por se tratarem de resultados técnicos, que pouco contribuem para o entendimento do Teorema.) Na demonstração de tais afirmações será utilizado o fato de que os vetores $E_i(x_0)$ são autovetores de A_η.

Afirmação 1. *Para $j \leq n$ vale que:*

$$\Delta a_j(x_0) = -\xi_j E_j(nH). \tag{2.3}$$

Afirmação 2. *E para $j = n+1$, temos*

$$\Delta a_{n+1}(x_0) = -\|B\|^2 - nRic(\eta(x_0)). \tag{2.4}$$

Suponha, portanto, válidas as equações (2.3) e (2.4). Substituindo tais expressões na equação (2.2), obtemos

$$\Delta N(x_0) = \sum_{j=1}^{n} -\xi_j E_j(nH) Z_j(e) - \left(\|B\|^2 + n\mathrm{Ric}(\eta(x_0))\right) Z_{n+1}(e). \tag{2.5}$$

Observando que Z_j é um campo de vetores invariante a esquerda, segue que

$$\begin{aligned} Z_j(e) &= d\left(L_{x_0^{-1}}\right)_{x_0} Z_j(x_0) \\ &= d\left(L_{x_0^{-1}}\right)_{x_0} E_j(x_0), \end{aligned}$$

e com isso, ficamos com

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j E_j(H) Z_j(e) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j E_j(H) d(L_{x_0^{-1}})_{x_0} E_j(x_0) = d(L_{x_0^{-1}})_{x_0} \mathrm{grad}(H)(x_0), \tag{2.6}$$

e, conseqüentemente, a equação (2.5) torna-se

$$\Delta N(x_0) = -nd(L_{x_0^{-1}})_{x_0} \mathrm{grad}(H)(x_0) - (\|B\|^2 + n\mathrm{Ric}(\eta(x_0)))Z_{n+1}(e).$$

Finalmente, utilizando o fato que $a_i(x_0) = 0$ se $i \leq n$ e $a_{n+1}(x_0) = 1$, segue que $N(x_0) = Z_{n+1}(e)$ e fica provado que vale a equação (2.1). $\square$

Como conseqüência do Teorema 1, obtemos uma extensão do Corolário 2 de [1], que generaliza o Teorema de Ruh-Vilms:

Corolário 1. *Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie munido de uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante de índice $j \geq 0$ e seja M uma hipersuperfície orientável orientada com campo normal η satisfazendo $\langle \eta, \eta \rangle = 1$. Seja ainda N a aplicação de Gauss de M. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i *M tem curvatura média constante;*

ii *O Laplaciano da aplicação de Gauss de M tem apenas componente normal a $\mathbb{S}^n_j$;*

iii *N satisfaz a equação*

$$\Delta N(x) = -\big(\|B\|^2 + nRic(\eta(x))\big)N(x). \tag{2.7}$$

Demonstração. Do Teorema 1 segue que, para $x \in M$,

$$\Delta N(x) = -nd(L_{x^{-1}})_x \text{grad}(H)(x) - (\|B\|^2 + n\text{Ric}(\eta(x)))N(x).$$

A equivalência entre **i** e **iii** segue de que M tem curvatura média constante se, e somente se, $\operatorname{grad} H = 0$.

Vamos mostrar agora a equivalência entre **ii** e **iii**. Para tanto, utilizamos a identificação $T_e\mathbb{G} \simeq \mathbb{L}_j^{n+1}$. Defina $f : T_e\mathbb{G} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{j} x_i^2 - \sum_{i=j+1}^{n+1} x_i^2.$$

Segue que $\mathbb{S}_j^n = f^{-1}(\{1\})$. Fixe $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) \in \mathbb{S}_j^n$. Então, podemos escrever o gradiente Euclidiano de f como

$$\text{grad}f(u) = 2(u_1, u_2, \ldots, u_j, -u_{j+1}, -u_{j+2}, \ldots, -u_{n+1}),$$

e com isso segue que um vetor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in T_u(T_e\mathbb{G})$ será tangente a $\mathbb{S}_j^n$ se, e somente se, satisfazer a seguinte relação:

$$v_1u_1 + v_2u_2 + \ldots + v_ju_j - v_{j+1}u_{j+1} - v_{j+2}u_{j+2} - \ldots - v_{n+1}u_{n+1} = 0.$$

Identificando o ponto u com o vetor $u \in T_u(T_e\mathbb{G})$, temos que para qualquer $v \in T_u\mathbb{S}_j^n$, vale $\langle v, u\rangle = 0$, onde $\langle , \rangle$ indica a forma bilinear simétrica não degenerada induzida em $T_e\mathbb{G}$ pela métrica de $\mathbb{G}$. Tal relação mostra que, assim como no caso Riemanniano, a direção normal a $\mathbb{S}_j^n$ é a direção de u. Com isso, segue que, para $x \in M$, o vetor $\Delta N(x)$ será normal a $\mathbb{S}_j^n$ se, e somente se, tiver apenas componente na direção de $N(x)$. Da equação (2.7) segue a equivalência entre **ii** e **iii**.

□

Observação 17 (Relação com aplicações harmônicas)**.** Seja M uma variedade Riemanniana e seja $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma aplicação diferenciável. Defina o *funcional energia de M* por

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_M |Df|^2 dx.$$

Dizemos que uma função é *harmônica* se minimizar o funcional E. É um teorema bem conhecido que uma função f satisfazendo $\|f(x)\| = 1$ (i.e. f toma valores na esfera unitária $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$) é harmônica se, e somente se, o seu Laplaciano tiver apenas componente normal a $\mathbb{S}^n$. Portanto, no caso de $\mathbb{G}$ ser um grupo de Lie munido de uma métrica Riemanniana bi-invariante, se o Laplaciano da aplicação de Gauss de M só tiver componente normal será uma aplicação harmônica, generalizando o Teorema de Ruh-Vilms. Para maiores detalhes sobre harmonicidade de aplicações entre variedades, vide [6].

2.2 Demonstração das Afirmações

Para finalizar a demonstração do Teorema 1, vamos demonstrar as afirmações 1 e 2. Começaremos definindo novamente as funções a_j e os campos E_i, Z_j. Temos η um campo de vetores normal a $M^n \subseteq \mathbb{G}^{n+1}$ satisfazendo $\langle \eta, \eta \rangle = 1$, A_η a segunda forma fundamental de M em x_0, $\{E_i\}_{i \in \{1, 2, \ldots, n\}}$ um referencial ortonormal de M geodésico em x_0 tal que $\{E_i(x_0)\}$ forma uma base de autovetores de A_η. Definimos ainda Z_j, $j = 1, 2, \ldots, n+1$ como o campo de vetores invariante a esquerda tal que $Z_j(x_0) = E_j(x_0)$, se $j \leq n$ e $Z_{n+1}(x_0) = \eta(x_0)$. As funções a_j ficaram definidas quando escrevemos o campo η nas coordenadas Z_j,

$$\eta(x) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j(x) Z_j(x).$$

Passemos, portanto, a demonstração da afirmação 1, a lembrar,

$$\Delta a_j(x_0) = -\xi_j E_j(nH),$$

onde $j \leq n$ e H denota a curvatura média de M.

Demonstração. Primeiro, temos que

$$\nabla_{E_i} \eta = \sum_{j=1}^{n+1} \nabla_{E_i}(a_j Z_j) = \sum_{j=1}^{n+1} \big(E_i(a_j) Z_j + a_j \nabla_{E_i} Z_j \big), \tag{2.8}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} \eta &= \sum_{j=1}^{n+1} \big(\nabla_{E_i}(E_i(a_j) Z_j) + \nabla_{E_i}(a_j \nabla_{E_i} Z_j) \big) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \big(E_i(E_i(a_j)) Z_j + E_i(a_j) \nabla_{E_i} Z_j \\
&+ E_i(a_j) \nabla_{E_i} Z_j + a_j \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} Z_j \big) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \big(E_i(E_i(a_j)) Z_j + 2E_i(a_j) \nabla_{E_i} Z_j + a_j \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} Z_j \big).
\end{aligned}$$

Lembrando que em x_0 temos $a_j(x_0) = 0$ para $j \leq n$ e $a_{n+1}(x_0) = 1$, ficamos com

$$\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta(x_0) = \sum_{j=1}^{n+1}\Bigg(E_i(E_i(a_j))Z_j + 2E_i(a_j)\nabla_{E_i}Z_j\Bigg) + \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1}. \qquad (2.9)$$

Fazendo o produto interno com Z_k na equação (2.9), obtemos, em x_0,

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, Z_k\rangle &= \xi_k E_i(E_i(a_k)) + 2\sum_{j=1}^{n+1} E_i(a_j)\langle\nabla_{E_i}Z_j, Z_k\rangle \\ &+ \langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1}, Z_k\rangle.\end{aligned}$$

Escrevendo $\Delta a_k = \sum \xi_i E_i(E_i(a_k))$, segue que

$$\begin{aligned}\xi_k\Delta a_k &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, Z_k\rangle - 2\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i E_i(a_j)\langle\nabla_{E_i}Z_j, Z_k\rangle \\ &- \sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1}, Z_k\rangle. \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Vamos encontrar uma expressão mais adequada para cada um dos termos da equação (2.10). Denotando por H a curvatura média de M, mostraremos que vale a seguinte relação, para $k \leq n$:

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, Z_k\rangle = n\mathrm{Ric}(Z_k, Z_{n+1}) - E_k(nH). \qquad (2.11)$$

Observe que, por definição,

$$n.H = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\eta, \nabla_{E_i}E_i\rangle,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}E_k(nH) &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i E_k\big(\langle\nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\nabla_{E_k}\nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle + \sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\nabla_{E_i}E_i, \nabla_{E_k}\eta\rangle. \qquad (2.12)\end{aligned}$$

Como $\{E_i\}$ é um referencial de M geodésico em x_0, temos $(\nabla_{E_i}E_i(x_0))^T = 0$. Assim, obtemos $\nabla_{E_i}E_i = (\nabla_{E_i}E_i)^{\perp}$. Como $\langle \eta, \eta\rangle = 1$, escrevemos $\nabla_{E_i}E_i = \langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle\eta$, e conseqüentemente temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i}E_i, \nabla_{E_k}\eta\rangle &= \langle \langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle\eta, \nabla_{E_k}\eta\rangle \\
&= \langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle\langle \eta, \nabla_{E_k}\eta\rangle \\
&= \langle \nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle E_k\left(\frac{\langle \eta, \eta\rangle}{2}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Utilizando (2.13) em (2.12), obtemos

$$E_k(nH) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \nabla_{E_k}\nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle. \tag{2.14}$$

Vamos relacionar a expressão (2.14) com o tensor de curvatura de $\mathbb{G}$. Observe que em x_0 vale $[E_k, E_i] = \big([E_k, E_i]\big)^T = \big(\nabla_{E_k}E_i - \nabla_{E_i}E_k\big)^T = 0$, de onde decorre

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_k}\nabla_{E_i}E_i, \eta\rangle &= \langle \nabla_{E_k}\nabla_{E_i}E_i - \nabla_{E_i}\nabla_{E_k}E_i + \nabla_{[E_i,E_k]}E_i, \eta\rangle + \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_k}E_i, \eta\rangle \\
&= \langle -R(E_k, E_i)E_i, \eta\rangle + \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_k}E_i, \eta\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever a equação (2.14) como

$$E_k(nH) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \big(\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_k}E_i, \eta\rangle - \langle R(E_k, E_i)E_i, \eta\rangle\big). \tag{2.15}$$

Agora, como R é um tensor e, em x_0 temos $E_i(x_0) = Z_i(x_0)$, $\eta(x_0) = Z_{n+1}(x_0)$, segue que

$$\begin{aligned}
E_k(nH) &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \big(\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_k}E_i, \eta\rangle - \langle R(Z_k, Z_i)Z_i, Z_{n+1}\rangle\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_k}E_i, \eta\rangle + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle R(Z_k, Z_i)Z_{n+1}, Z_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_k}E_i, \eta\rangle + n\mathrm{Ric}(Z_k, Z_{n+1}).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Vamos mostrar agora que, em x_0, vale que

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}E_k, \eta\rangle = \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_k}E_i, \eta\rangle. \tag{2.17}$$

Primeiramente, escrevemos $\nabla_{E_i} E_k = \nabla_{E_k} E_i + [E_i, E_k]$. Com isso, temos $\nabla_{E_i}\nabla_{E_i} E_k = \nabla_{E_i}\nabla_{E_k} E_i + \nabla_{E_i}[E_i, E_k]$. Agora, observe que

$$\langle \nabla_{E_i}[E_i, E_k], \eta\rangle = E_i\langle [E_i, E_k], \eta\rangle - \langle [E_i, E_k], \nabla_{E_i}\eta\rangle,$$

mas em x_0 vale que $[E_i, E_k] = 0$, como observado anteriormente, e ainda mais, em M temos que $[E_i, E_k]$ é um campo de vetores tangente, portanto $\langle [E_i, E_k], \eta\rangle = 0$. Com isso, temos que, em x_0

$$\langle \nabla_{E_i}[E_i, E_k], \eta\rangle = 0,$$

demonstrando a equação (2.17). Substituindo tal igualdade em (2.16), obtemos

$$E_k(nH) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} E_k, \eta\rangle + n\mathrm{Ric}(Z_k, Z_{n+1}). \tag{2.18}$$

Podemos utilizar o mesmo método da equação (2.13) para demonstrar que vale a identidade $\langle \nabla_{E_i} E_k, \nabla_{E_i}\eta\rangle = 0$, e portanto

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} E_k, \eta\rangle &= \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} E_k, \eta\rangle + \langle \nabla_{E_i} E_k, \nabla_{E_i}\eta\rangle \\
&= E_i\langle \nabla_{E_i} E_k, \eta\rangle \\
&= E_i(E_i\langle E_k, \eta\rangle - \langle E_k, \nabla_{E_i}\eta\rangle) \\
&= -E_i\langle E_k, \nabla_{E_i}\eta\rangle.
\end{aligned}$$

Aqui utilizamos que, como $k \leq n$, $\langle E_k,\, \eta\rangle = 0$. Com isso, podemos seguir adiante e obter

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i} E_k, \eta\rangle &= -E_i\langle \nabla_{E_i}\eta, E_k\rangle. \\
&= -\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, E_k\rangle - \langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i} E_k\rangle \\
&= -\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, E_k\rangle. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Utilizando a expressão acima na equação (2.18), obtemos a seguinte expressão:

$$E_k(nH) = -\sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, E_k\rangle + n\mathrm{Ric}(Z_k, Z_{n+1}),$$

e conseqüentemente temos

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, E_k\rangle = n\mathrm{Ric}(Z_k, Z_{n+1}) - E_k(nH),$$

provando a relação (2.11).

Vamos encontrar uma expressão mais adequada para a parcela

$$\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i E_i(a_j)\langle \nabla_{E_i} Z_j, Z_k\rangle$$

da equação (2.10).

De (2.8), tiramos que

$$\nabla_{E_i}\eta = \sum_{j=1}^{n+1}\big(E_i(a_j)Z_j + a_j\nabla_{E_i}Z_j\big).$$

Assim, utilizando que $a_j(x_0) = 0$ se $j \leq n$ e $a_{n+1}(x_0) = 1$, segue que

$$\nabla_{E_i}\eta(x_0) = \sum_{j=1}^{n+1} E_i(a_j)Z_j + \nabla_{E_i}Z_{n+1},$$

de onde obtemos

$$\langle \nabla_{E_i}\eta(x_0), Z_j(x_0)\rangle = \xi_j E_i(a_j) + \langle \nabla_{E_i}Z_{n+1}, Z_j\rangle.$$

E portanto vale

$$\xi_j E_i(a_j) = \langle \nabla_{E_i}\eta(x_0), Z_j(x_0)\rangle - \langle \nabla_{E_i}Z_{n+1}(x_0), Z_j(x_0)\rangle. \tag{2.20}$$

Lembre que os vetores $E_i(x_0)$ eram autovetores da segunda forma fundamental, portanto existem $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tais que $A_\eta(E_i(x_0)) = \lambda_i E_i(x_0)$, assim

$$\left(\nabla_{E_i}\eta(x_0)\right)^T = -\lambda_i E_i(x_0). \tag{2.21}$$

Para $j \leq n$, temos:

$$\langle \nabla_{E_i}\eta(x_0), Z_j(x_0)\rangle = \langle \left(\nabla_{E_i}\eta\right)^T, Z_j(x_0)\rangle \;=\; -\lambda_i\langle E_i(x_0), Z_j(x_0)\rangle = -\lambda_i\delta_{ij}\xi_i.$$

Agora, se $j = n+1$, temos que

$$\langle \nabla_{E_i}\eta(x_0), Z_{n+1}(x_0)\rangle = \langle \nabla_{E_i}\eta(x_0), \eta(x_0)\rangle = 0,$$

e assim mostramos que $E_i(a_{n+1})(x_0) = -\langle \nabla_{E_i}Z_{n+1}, Z_{n+1}\rangle = 0$, o que nos leva a seguinte equação:

$$\xi_j E_i(a_j)(x_0) = \begin{cases} -\lambda_i\delta_{ij}\xi_i - \langle \nabla_{E_i}Z_{n+1}, Z_j\rangle, & \text{se } j \leq n; \\ 0, & \text{se } j = n+1. \end{cases} \tag{2.22}$$

Assim, podemos escrever, em x_0,

$$\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i E_i(a_j)\langle\nabla_{E_i}Z_j, Z_k\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i E_i(a_j)\langle\nabla_{E_i}Z_j, Z_k\rangle.$$

Lembrando que $\mathbb{G}$ é um grupo de Lie com uma métrica bi-invariante e que os campos Z_i são invariantes a esquerda, temos que vale $\nabla_{E_i}Z_i(x_0) = \nabla_{Z_i}Z_i(x_0) = 0$. Daí, decorre a seguinte identidade:

$$\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i E_i(a_j)\langle\nabla_{E_i}Z_j, Z_k\rangle = \sum_{i\neq j}^{n}\xi_i E_i(a_j)\langle\nabla_{E_i}Z_j, Z_k\rangle.$$

Usando (2.22), chegamos a conclusão que, em x_0,

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i E_i(a_j)\langle\nabla_{E_i}Z_j, Z_k\rangle &= \sum_{i\neq j}^{n}\xi_i\big(\lambda_i\delta_{ij}\xi_i\xi_j + \xi_j\langle\nabla_{E_i}Z_{n+1}, Z_j\rangle\big)\langle\nabla_{E_i}Z_j, Z_k\rangle \\
&= \sum_{i\neq j}^{n}\xi_i\xi_j\langle\nabla_{E_i}Z_{n+1}, Z_j\rangle\langle\nabla_{E_i}Z_j, Z_k\rangle \\
&= \sum_{i\neq j}^{n}\xi_i\xi_j\langle\nabla_{Z_i}Z_{n+1}, Z_j\rangle\langle\nabla_{Z_i}Z_j, Z_k\rangle \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i\neq j}^{n}\xi_i\xi_j\langle[Z_i, Z_{n+1}], Z_j\rangle\langle[Z_i, Z_j], Z_k\rangle, \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

onde a última igualdade se deve a invariância a esquerda dos Z_i. Agora, segue do Lema 5 que

$$\langle[Z_i, Z_{n+1}], Z_j\rangle = \langle Z_i, [Z_{n+1}, Z_j]\rangle \text{ e } \langle[Z_i, Z_j], Z_k\rangle = \langle Z_i, [Z_j, Z_k]\rangle.$$

Mais ainda, como $\{Z_i(x_0)\}_{i=1,2,\ldots,n+1}$ é uma base ortonormal de $T_{x_0}\mathbb{G}$, vale que

$$\begin{aligned}
[Z_{n+1}, Z_j] &= \sum_{i=1}^{n+1}\xi_i\langle[Z_{n+1}, Z_j], Z_i\rangle Z_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle[Z_{n+1}, Z_j], Z_i\rangle Z_i,
\end{aligned}$$

pois $\langle[Z_{n+1}, Z_j], Z_{n+1}\rangle = 0$.

Com tais equações, reescrevemos (2.23) como

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i E_i(a_j)\langle\nabla_{E_i}Z_j,Z_k\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xi_j\langle Z_i,[Z_{n+1},Z_j]\rangle\langle Z_i,[Z_j,Z_k]\rangle\\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xi_j\Big\langle[Z_j,Z_k],\langle[Z_{n+1},Z_j],Z_i\rangle Z_i\Big\rangle\\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\left\langle[Z_j,Z_k],\sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle[Z_{n+1},Z_j],Z_i\rangle Z_i\right\rangle\\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\langle[Z_j,Z_k],[Z_{n+1},Z_j]\rangle\\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n+1}\xi_j\langle[Z_j,Z_k],[Z_{n+1},Z_j]\rangle. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Note que, dos Lemas 2 e 6 e da Proposição 3,

$$\begin{aligned}
\langle[Z_j,Z_k],[Z_{n+1},Z_j]\rangle &= \langle[Z_k,Z_j],[Z_j,Z_{n+1}]\rangle\\
&= \langle Z_k,[Z_j,[Z_j,Z_{n+1}]]\rangle\\
&= \langle[[Z_{n+1},Z_j],Z_j],Z_k\rangle\\
&= \langle 4R(Z_{n+1},Z_j)Z_j,Z_k\rangle\\
&= -\langle 4R(Z_{n+1},Z_j)Z_k,Z_j\rangle. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Assim, utilizando tal expressão na equação (2.24), segue que

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i E_i(a_j)\langle\nabla_{E_i}Z_j,Z_k\rangle &= -\sum_{j=1}^{n+1}\xi_j\langle R(Z_{n+1},Z_j)Z_k,Z_j\rangle\\
&= -n\mathrm{Ric}(Z_k,Z_{n+1}),
\end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i E_i(a_j)\langle\nabla_{E_i}Z_j,Z_k\rangle = n\mathrm{Ric}(Z_k,Z_{n+1}),\ \text{ para } k\in\{1,2,...,n+1\}. \qquad (2.26)$$

Agora precisamos encontrar uma expressão conveniente para o último termo da equação (2.10). Vamos mostrar que vale

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1},Z_k\rangle = -n\mathrm{Ric}(Z_{n+1},Z_k). \qquad (2.27)$$

Escreva $E_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} Z_j$. Primeiro, pela definição dos campos Z_j, temos que $b_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$. Então, pela Proposição 2,

$$\nabla_{E_i} Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} \nabla_{Z_j} Z_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} [Z_j, Z_{n+1}] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} [Z_j, Z_{n+1}],$$

e portanto

$$\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} Z_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \big(E_i(b_{ij})[Z_j, Z_{n+1}] + b_{ij} \nabla_{E_i} [Z_j, Z_{n+1}] \big).$$

Assim, em x_0, temos que

$$\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} Z_{n+1}(x_0) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} E_i(b_{ij})[Z_j, Z_{n+1}] + \frac{1}{2} \nabla_{E_i} [Z_i, Z_{n+1}]. \tag{2.28}$$

Agora, vamos mostrar que vale $E_i(b_{ij}) = 0$ se $j \leq n$. De fato, temos, por um lado, que $(\nabla_{E_i} E_i(x_0))^T = 0$, já que o conjunto $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ é um referencial de M geodésico em x_0. Por outro, temos que

$$\begin{aligned} \nabla_{E_i} E_i(x_0) &= \sum_{j=1}^{n+1} E_i(b_{ij}) Z_j(x_0) + \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij} \nabla_{E_i} Z_j(x_0) \\ &= \sum_{j=1}^{n} E_i(b_{ij}) Z_j(x_0) + E_i(b_{i,n+1}) Z_{n+1}(x_0) + \nabla_{E_i} Z_i(x_0) \\ &= \sum_{j=1}^{n} E_i(b_{ij}) Z_j(x_0) + E_i(b_{i,n+1}) \eta(x_0) + \nabla_{Z_i} Z_i(x_0) \\ &= \sum_{j=1}^{n} E_i(b_{ij}) Z_j(x_0) + E_i(b_{i,n+1}) \eta(x_0). \end{aligned}$$

Portanto $0 = \sum_{j=1}^{n} E_i(b_{ij}) Z_j(x_0)$, de onde segue que $E_i(b_{ij})(x_0) = 0$ para $j \leq n$. Com isso, a equação (2.28) se torna

$$\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} Z_{n+1}(x_0) = \frac{1}{2} \nabla_{E_i} [Z_i, Z_{n+1}](x_0).$$

Mas note que temos, em x_0,

$$\nabla_{E_i} [Z_i, Z_{n+1}] = \nabla_{Z_i} [Z_i, Z_{n+1}] = \frac{1}{2} [Z_i, [Z_i, Z_{n+1}]] = 2R(Z_{n+1}, Z_i) Z_i,$$

e portanto

$$\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1}(x_0) = R(Z_{n+1}, Z_i)Z_i.$$

Finalmente, escrevemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1}, Z_k\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle R(Z_{n+1}, Z_i)Z_i, Z_k\rangle \\ &= -n\mathrm{Ric}(Z_{n+1}, Z_k),\end{aligned}$$

provando válida a equação (2.27).

Substituindo as expressões (2.11), (2.26) e (2.27) na equação (2.10), obtemos

$$\xi_k\Delta a_k = n\mathrm{Ric}(Z_k, Z_{n+1}) - E_k(nH) - 2n\mathrm{Ric}(Z_k, Z_{n+1}) + n\mathrm{Ric}(Z_k, Z_{n+1})$$

de onde decorre que, para $k \leq n$,

$$\Delta a_k = -\xi_k E_k(nH),$$

provando a validade da equação (2.3). □

Agora, mostremos que vale a Afirmação 2, que dizia que, para $j = n+1$, tínhamos a seguinte expressão:

$$\Delta a_{n+1}(x_0) = -\|B\|^2 - n\mathrm{Ric}(\eta(x_0)), \tag{2.29}$$

onde $\|B\|$ denota a norma da segunda forma fundamental de M e $\mathrm{Ric}(\eta(x_0))$ denota a curvatura de Ricci na direção normal a M.

Demonstração. Da hipótese $\langle\eta, \eta\rangle = 1$, segue que $a_{n+1} = \langle\eta, Z_{n+1}\rangle$, e portanto

$$\begin{aligned}E_i(E_i(a_{n+1})) &= E_i\big(\langle\nabla_{E_i}\eta, Z_{n+1}\rangle + \langle\eta, \nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle\big) \\ &= \langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, Z_{n+1}\rangle + 2\langle\nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle + \langle\eta, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle.\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\xi_i E_i(E_i(a_{n+1})) &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, Z_{n+1}\rangle + 2\sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\eta, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle. \end{aligned}\tag{2.30}$$

Agora, observe que temos $\langle \nabla_{E_i}\eta, \eta\rangle = 0$, portanto $\nabla_{E_i}\eta = \left(\nabla_{E_i}\eta\right)^T$ e assim

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, \eta\rangle &= E_i\langle \nabla_{E_i}\eta, \eta\rangle - \langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}\eta\rangle \\
&= -\langle (\nabla_{E_i}\eta)^T, (\nabla_{E_i}\eta)^T\rangle \\
&= -\langle -\lambda_i E_i, -\lambda_i E_i\rangle = -(\lambda_i)^2\xi_i.
\end{aligned}$$

Tiramos daí que vale

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\eta, \eta\rangle(x_0) = -\|B\|^2. \tag{2.31}$$

Ainda temos que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle &= \langle \nabla_{E_i}\sum_{j=1}^{n+1} a_j Z_j, \nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} a_j\langle \nabla_{E_i}Z_j, \nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle + \sum_{j=1}^{n+1} E_i(a_j)\langle Z_j, \nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} a_j\langle \nabla_{E_i}Z_j, \nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle - \sum_{j=1}^{n+1} E_i(a_j)\langle \nabla_{E_i}Z_j, Z_{n+1}\rangle.
\end{aligned}$$

Pela equação (2.26), temos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1} \xi_i E_i(a_j)\langle \nabla_{E_i}Z_j, Z_{n+1}\rangle = n\mathrm{Ric}(Z_{n+1})$, logo, em x_0,

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i\langle \nabla_{E_i}\eta, \nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\langle \nabla_{E_i}Z_{n+1}, \nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle - n\mathrm{Ric}(Z_{n+1}). \tag{2.32}$$

Mas temos que $E_i(x_0) = Z_i(x_0)$, portanto $\nabla_{E_i}Z_{n+1} = \nabla_{Z_i}Z_{n+1} = \frac{1}{2}[Z_i, Z_{n+1}]$. Assim, ficamos com

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \xi_i\langle \nabla_{E_i}Z_{n+1}, \nabla_{E_i}Z_{n+1}\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4}\xi_i\langle [Z_i, Z_{n+1}], [Z_i, Z_{n+1}]\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4}\xi_i\langle [[Z_{n+1}, Z_i], Z_{n+1}], Z_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \xi_i\langle R(Z_{n+1}, Z_i)Z_{n+1}, Z_i\rangle \\
&= n\mathrm{Ric}(Z_{n+1}).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Juntando as equações (2.32) e (2.33), chegamos a conclusão que

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \nabla_{E_i} \eta, \nabla_{E_i} Z_{n+1} \rangle = 0. \tag{2.34}$$

Com as equações (2.30), (2.31) e (2.34), obtemos

$$\Delta a_{n+1}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i E_i(E_i(a_{n+1})) = -\|B\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \eta, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} Z_{n+1} \rangle.$$

Mas a equação (2.27) nos dá que

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \eta, \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} Z_{n+1} \rangle = -n\mathrm{Ric}(\eta(x_0)),$$

demonstrando a Afirmação 2. $\square$

Capítulo 3

O Laplaciano da aplicação de Gauss em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$

Neste capítulo, generalizaremos a fórmula obtida no Teorema 1 para uma hipersuperfície imersa em um quociente de um grupo de Lie por um subgrupo compacto. Começaremos demonstrando alguns lemas que relacionam termos de curvatura de $\mathbb{G}$ com de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, e apresentando propriedades de funções e campos de vetores relacionados pela projeção π.

3.1 Lemas Auxiliares

Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie de dimensão $n+k+1$ munido de uma métrica bi-invariante pseudo-Riemanniana. Seja ainda $\mathbb{H}^k \subseteq \mathbb{G}$ um subgrupo de Lie compacto e seja $M^n \subset \mathbb{G}/\mathbb{H}$ uma hipersuperfície orientável orientada segundo η um campo de vetores unitário normal a M, novamente satisfazendo $\langle \eta, \eta \rangle = 1$.

O propósito do trabalho é calcular o Laplaciano da Aplicação de Gauss de M. Como o Teorema 1 resolve este problema para o caso do espaço ambiente ser um grupo de Lie, é natural a idéia de *transportar o problema* de volta para o grupo $\mathbb{G}$, por meio da projeção π.

Defina $\widetilde{M} := \pi^{-1}(M) \subseteq \mathbb{G}$. Temos que, como π é uma submersão pseudo-Riemanniana, $\widetilde{M}$ será uma hipersuperfície de $\mathbb{G}$. O Teorema 1 nos dá, portanto, uma expressão para o Laplaciano da aplicação de Gauss de $\widetilde{M}$. Na seqüência deste capítulo relacionaremos os termos de curvatura de $\widetilde{M}$ com os de M, a fim de obter uma expressão para o Laplaciano da aplicação de Gauss de M.

Primeiramente, vamos fixar um referencial ortonormal de $\mathbb{G}$ a partir de um referencial ortonormal de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Seja $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal de M e seja η como acima. Defina os campos

$$\widetilde{E}_i(x) = \ell_x^{-1}(E_i(\pi(x))), \text{ para } i \leq n.$$

Vamos mostrar que de fato tais campos são tangentes a $\widetilde{M}$. Defina o campo $\widetilde{\eta}(x) = \ell_x^{-1}(\eta(\pi(x)))$. Como η é normal a M, segue da definição de $\widetilde{M}$ e de ℓ_x que $\widetilde{\eta}$ é normal a $\widetilde{M}$. Assim, vale que

$$\langle \widetilde{E}_i(x), \widetilde{\eta}(x) \rangle = \langle E_i(\pi(x)), \eta(\pi(x)) \rangle = 0,$$

mostrando que o campo $\widetilde{E}_i$ é de fato tangente a $\widetilde{M}$.

Agora, observe que, como foram definidos, os campos $\widetilde{E}_i$ são todos campos horizontais, e portanto não formam ainda um referencial de $\mathbb{G}$. Fixemos, para $i = n+1,\, n+2,\, ...,\, n+k$, $\{e_i\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H} = T_e\mathbb{H}$. Defina $\widetilde{E}_i$ como o campo de vetores invariante a esquerda tal que $\widetilde{E}_i(e) = e_i$. Como já mostrado anteriormente segue que os campos $\widetilde{E}_i$ são verticais para $n + 1 \leq i \leq n + k$. Com isso o conjunto $\{\widetilde{E}_i\}_{i \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n+k\}}$ se torna um referencial ortonormal de $\widetilde{M}$ e juntamente com o campo $\widetilde{\eta}$ forma um referencial ortonormal de $\mathbb{G}$.

Denotaremos no que segue $\widetilde{\xi}_i = \langle \widetilde{E}_i,\, \widetilde{E}_i \rangle$ e novamente $\xi_i = \langle E_i,\, E_i \rangle$. Para $i \leq n$ temos a identidade $\widetilde{\xi}_i = \xi_i$.

Observação 18. *A conclusão acima nos leva a observar que mesmo que o grupo de Lie $\mathbb{G}$ seja uma variedade pseudo-Riemanniana, podemos vir a ter que a métrica em $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ seja Riemanniana, para tanto bastando que a componente não Riemanniana da métrica de $\mathbb{G}$ esteja no espaço tangente ao subgrupo $\mathbb{H}$.*

Fixada a notação que será utilizada até o final do trabalho, podemos passar aos enunciados dos lemas que utilizaremos para demonstrar o teorema principal deste trabalho.

Lema 7. *Sejam $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$, M e $\widetilde{M}$ definidos como anteriormente. Seja ainda $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definindo $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ por $\widetilde{f}(x) = f(\pi(x))$, vale a seguinte relação: $\Delta_{\widetilde{M}}\widetilde{f} = (\Delta_M f) \circ \pi$.*

Demonstração. Fixemos $x_0 \in M$. Seja $\{E_1,\, E_2,\, \ldots,\, E_n\}$ um referencial ortonormal de M, geodésico em x_0. Defina os campos $\widetilde{E}_i$ como acima. Como o conjunto $\{\widetilde{E}_1,\, \widetilde{E}_2,\, \ldots,\, \widetilde{E}_{n+k}\}$ é um referencial de $\widetilde{M}$, podemos escrever

$$\Delta_{\widetilde{M}}\widetilde{f}(x_0) = \sum_{i=1}^{n+k} \widetilde{\xi}_i \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i} \mathrm{grad}\widetilde{f}, \widetilde{E}_i \rangle. \tag{3.1}$$

Vamos calcular $\operatorname{grad}\widetilde{f}$. Note que

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_i(\widetilde{f})(x) &= \widetilde{E}_i(f\circ\pi)(x) = d(f\circ\pi)_x\widetilde{E}_i(x)\\ &= df_{\pi(x)}d\pi_x(\widetilde{E}_i(x)).\end{aligned}$$

Então, se $i \leq n$, temos $\widetilde{E}_i(x) = \ell_x^{-1}E_i(\pi(x))$, logo $d\pi_x(\widetilde{E}_i(x)) = E_i(\pi(x))$. Ainda, se $i > n$, temos $\widetilde{E}_i(x) \in T_x(\mathbb{H}x)$, portanto $d\pi_x(\widetilde{E}_i(x)) = 0$, como já observado anteriormente. Portanto, segue que

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\widetilde{f}(x) &= \sum_{i=1}^{n+k}\widetilde{\xi}_i\widetilde{E}_i(\widetilde{f})(x)\widetilde{E}_i(x)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\widetilde{\xi}_i df_{\pi(x)}E_i(\pi(x))\widetilde{E}_i(x)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\xi_iE_i(f)(\pi(x))\ell_x^{-1}(E_i(x)).\end{aligned}$$

Como ℓ_x é linear, segue que $\operatorname{grad}\widetilde{f}(x) = \ell_x^{-1}(\operatorname{grad}f(\pi(x))) \in (T_x(\mathbb{H}x))^{\perp}$.

Agora, para $i > n$, temos que os campos $\widetilde{E}_i$ são invariantes a esquerda, e em conseqüência da Proposição 2 $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i}\widetilde{E}_i = 0$, onde $\widetilde{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{G}$. Mais ainda, $\widetilde{E}_i \in T_x(\mathbb{H}x)$, portanto $\langle\operatorname{grad}\widetilde{f}, \widetilde{E}_i\rangle = 0$. Assim, para $i > n$ vale

$$\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i}\operatorname{grad}\widetilde{f}, \widetilde{E}_i\rangle = \widetilde{E}_i\langle\operatorname{grad}\widetilde{f}, \widetilde{E}_i\rangle - \langle\operatorname{grad}\widetilde{f}, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i}\widetilde{E}_i\rangle = 0,$$

e portanto a equação (3.1) se torna

$$\Delta_{\widetilde{M}}\widetilde{f}(x_0) = \sum_{i=1}^{n}\widetilde{\xi}_i\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i}\operatorname{grad}\widetilde{f}, \widetilde{E}_i\rangle. \tag{3.2}$$

Ora, para $i \leq n$, temos que $\widetilde{E}_i = \ell_x^{-1}E_i$. Ainda mais, provamos que vale $\operatorname{grad}\widetilde{f} = \ell_x^{-1}(\operatorname{grad}f)$. Com tais condições, podemos utilizar a proposição 4 e obter

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i}\operatorname{grad}\widetilde{f} = \ell_x^{-1}\big(\nabla_{E_i}\operatorname{grad}f(\pi(x))\big) + \frac{1}{2}\left[\widetilde{E}_i, \operatorname{grad}\widetilde{f}\right]^v(\pi(x)),$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Substituindo a expressão acima em (3.2), decorre a identidade desejada:

$$\begin{aligned}\Delta_{\widetilde{M}}\widetilde{f}(x_0) &= \sum_{i=1}^{n}\widetilde{\xi}_i\langle\ell_{x_0}^{-1}\big(\nabla_{E_i}\operatorname{grad}f(\pi(x_0))\big), \widetilde{E}_i(x_0)\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\nabla_{E_i}\operatorname{grad}f(\pi(x_0)), E_i(\pi(x_0))\rangle\\ &= \Delta_M f(\pi(x_0)).\end{aligned}$$

□

Em seguida demonstraremos um lema que relaciona a curvatura média de M com a curvatura média de $\widetilde{M}$, a saber:

Lema 8. *Seja $M \subset \mathbb{G}/\mathbb{H}$ uma hipersuperfície orientável e seja η um campo de vetores normal a M com $\langle \eta, \eta \rangle = 1$. Defina $\widetilde{M} = \pi^{-1}(M)$ e $\widetilde{\eta} = \ell_x^{-1}(\eta)$. Denotando por H ($\widetilde{H}$) a curvatura média de M ($\widetilde{M}$) com respeito a η ($\widetilde{\eta}$), temos:*

i. $\widetilde{H}(x) = \frac{n}{n+k} H(z)$, $\forall z \in M$, $\forall x \in \pi^{-1}(z)$;

ii. $grad\, \widetilde{H}(x) = \frac{n}{n+k} \ell_x^{-1}(grad\, H(z))$.

Demonstração. Seja $z \in M$, $x \in \pi^{-1}(z)$. Sejam $E_i, \widetilde{E}_i$ como no lema anterior. Primeiramente, por definição temos que

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \nabla_{E_i} E_i(z), \eta(z) \rangle \\ &\text{e} \\ \widetilde{H}(x) &= \frac{1}{n+k}\sum_{i=1}^{n+k} \widetilde{\xi}_i \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i} \widetilde{E}_i(x), \widetilde{\eta}(x) \rangle. \end{aligned}$$

Vamos, portanto, analisar as parcelas que estão sendo somadas no cálculo de $\widetilde{H}$. Primeiro, se $i > n$, temos que $\widetilde{E}_i$ é invariante a esquerda, e portanto $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i} \widetilde{E}_i = 0$. Ficamos com

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(x) &= \frac{1}{n+k}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\xi}_i \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i} \widetilde{E}_i(x), \widetilde{\eta}(x) \rangle \\ &= \frac{1}{n+k}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\xi}_i \langle \ell_x^{-1}(\nabla_{E_i} E_i(z)) + \frac{1}{2}\big([\widetilde{E}_i, \widetilde{E}_i]\big)^v, \widetilde{\eta} \rangle \\ &= \frac{1}{n+k}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \ell_x^{-1}(\nabla_{E_i} E_i(z)), \ell_x^{-1}(\eta(z)) \rangle \\ &= \frac{1}{n+k}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle \nabla_{E_i} E_i(z), \eta(z) \rangle \\ &= \frac{n}{n+k} H(z), \text{ o que prova } \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Agora, precisamos encontrar uma expressão para $\operatorname{grad} \widetilde{H}$ que a relacione com $\operatorname{grad} H$. A idéia é provar que $\forall x \in \widetilde{M}$, $\forall\, \widetilde{u} \in T_x\widetilde{M}$ temos

$$d\widetilde{H}_x(\widetilde{u}) = \frac{n}{n+k} \langle \ell_x^{-1}(\operatorname{grad} H(z)), \widetilde{u} \rangle,$$

pois o resultado segue pela unicidade do campo grad $\widetilde{H}$.

Fixemos, portanto $x \in \widetilde{M}$ e $\widetilde{u} \in T_x\widetilde{M}$. Escreva $\widetilde{u} = \widetilde{u}^h + \widetilde{u}^v$. Como $\widetilde{u}^v \in T_x(\mathbb{H}x)$, temos que $d\pi_x(\widetilde{u}^v) = 0$, e portanto $d\pi_x(\widetilde{u}) = \ell_x(\widetilde{u}^h)$. Defina $u = d\pi_x(\widetilde{u})$ e $w = \widetilde{u}^v$. Assim, temos que $\widetilde{u}^h = \ell_x^{-1}(u)$, e podemos escrever

$$\widetilde{u} = \ell_x^{-1}(u) + w, \text{ com } w \in T_x(\mathbb{H}x),\ u \in T_zM,$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
\langle \ell_x^{-1}(\mathrm{grad}H(z)), \widetilde{u}\rangle &= \langle \ell_x^{-1}(\mathrm{grad}H(z)), \ell_x^{-1}(u)\rangle \\
&= \langle \mathrm{grad}H(z), u\rangle \\
&= dH_z(u) \\
&= dH_{\pi(x)}d\pi_x(\widetilde{u}) \\
&= d(H\circ\pi)_x(\widetilde{u}) \\
&= \frac{n+k}{n} d(\widetilde{H})_x(\widetilde{u}),
\end{aligned}$$

mostrando o resultado desejado. □

A seguir vamos analisar a expressão encontrada para o Laplaciano da aplicação de Gauss de $\widetilde{M}$, definida como $\widetilde{N}$. O Teorema 1 nos diz que:

$$\Delta\widetilde{N}(x) = -(n+k)d(L_{x^{-1}})_x(grad\,\widetilde{H}(x)) - \Big(\|\widetilde{B}\|^2 + (n+k)\mathrm{Ric}(\widetilde{\eta}(x))\Big)\widetilde{N}(x). \quad (3.3)$$

Note que dos termos a direita da equação falta apenas relacionarmos a norma da segunda forma fundamental de $\widetilde{M}$ com a de M. Para tanto, introduziremos uma nova aplicação, denotada aqui por B^*. Tal aplicação foi definida com a nomenclatura de B^i em [1]. Dado $z \in M$, definimos:

$$\begin{aligned}
B_z^* : T_zM &\to T_e\mathbb{H} \subseteq T_e\mathbb{G} \\
u &\mapsto B_z^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} d\big(L_{x^{-1}}\big)_x \left([\ell_x^{-1}(u), \ell_x^{-1}(\eta)]^v\right),
\end{aligned}$$

onde $x \in \mathbb{G}$ é tal que $\pi(x) = z$.

Observação 19. *A aplicação B_z^* será utilizada no Lema 9, como uma ferramenta para relacionar a norma da segunda forma fundamental de $\widetilde{M}$ com a norma da segunda forma fundamental de M. Ela transporta informações de M diretamente para o espaço tangente a $\mathbb{H}$ no elemento neutro e, dependendo apenas da estrutura de variedade homogênea de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.*

Propriedade 5. *B_z^* está bem definida.*

Demonstração. Primeiramente, note que, pela Conseqüência 1 da Propriedade 3, temos que dado $\widetilde{w} \in T_x\widetilde{M}$, vale que $d\left(L_{x^{-1}}\right)_x(\widetilde{w}^v) = (d(L_{x^{-1}})_x(\widetilde{w}))^v$. Assim, temos que de fato $B_z^*(u) \in T_e\mathbb{H}$, para todo $u \in T_zM$.

Mostremos agora que a aplicação B_z^* independe da escolha de $x \in \pi^{-1}(z)$. Seja, portanto, $u \in T_zM$ e sejam $x, y \in \pi^{-1}(z)$. Então existe $h \in \mathbb{H}$ tal que $y = L_h(x)$. Mostremos que, dado $v \in T_e\mathbb{H}$ vale:

$$\langle d(L_{x^{-1}})_x[\ell_x^{-1}(u), \ell_x^{-1}(\eta)], v\rangle = \langle d(L_{y^{-1}})_y[\ell_y^{-1}(u), \ell_y^{-1}(\eta)], v\rangle.$$

Primeiramente, note que pelas propriedades demonstradas na sessão 1.3.1, vale que $\ell_y^{-1}(u) = d(L_h)_x(\ell_x^{-1}(u))$. Agora, estenda v a V um campo de vetores invariante a esquerda. Temos que

$$\begin{aligned}\langle d(L_{x^{-1}})_x[\ell_x^{-1}(u), \ell_x^{-1}(\eta)], v\rangle &= \langle d(L_{x^{-1}})_x[\ell_x^{-1}(u), \widetilde{\eta}(x)], V(e)\rangle \\ &= \langle [\ell_x^{-1}(u), \widetilde{\eta}(x)], V(x)\rangle \\ &= \langle d(L_h)_x[\ell_x^{-1}(u), \widetilde{\eta}(x)], V(y)\rangle.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Mas do Lema 3 segue que $d(L_h)_x[\ell_x^{-1}(u), \widetilde{\eta}(x)] = [d(L_h)_x(\ell_x^{-1}(u)), d(L_h)_x(\widetilde{\eta}(x))]$, e portanto temos

$$\begin{aligned}\langle d(L_{x^{-1}})_x[\ell_x^{-1}(u), \ell_x^{-1}(\eta)], v\rangle &= \langle [d(L_h)_x(\ell_x^{-1}(u)), \widetilde{\eta}(y)], V(y)\rangle \\ &= \langle [\ell_y^{-1}(u), \widetilde{\eta}(y)], V(y)\rangle \\ &= \langle d(L_{y^{-1}})_y[\ell_y^{-1}(u), \widetilde{\eta}(y)], V(e)\rangle \\ &= \langle d(L_{y^{-1}})_y[\ell_y^{-1}(u), \ell_y^{-1}(\eta)], v\rangle,\end{aligned}$$

mostrando que a aplicação B_z^* está bem definida. □

Agora, lembremos que $\{E_1(x), E_2(x), ..., E_n(x)\}$ é uma base ortogonal de T_zM e que $\left\{\widetilde{E}_{n+1}(e), \widetilde{E}_{n+2}(e), ..., \widetilde{E}_{n+k}(e)\right\}$ é uma base ortogonal de $T_e\mathbb{H}$. Assim, escrevemos a norma de B_z^* como

$$\begin{aligned}\|B_z^*\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+k}\langle B_z^*(E_i), \widetilde{E}_j\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+k}\langle \frac{1}{\sqrt{2}} d\big(L_{x^{-1}}\big)_x\left([\ell_x^{-1}(E_i), \ell_x^{-1}(\eta)]^v\right), \widetilde{E}_j\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+k}\frac{1}{2}\langle [\widetilde{E}_i, \widetilde{\eta}]^v, \widetilde{E}_j\rangle^2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Assim, obtemos uma expressão para a norma de B_z^*, que será utilizada na demonstração do próximo lema:

Lema 9. *Sejam* $\mathbb{G}$, $\mathbb{H}$, M *e* $\widetilde{M}$ *como anteriormente. Denotando por* $\|B\|$ $(\|\widetilde{B}\|)$ *a norma da segunda forma fundamental de* M $(\widetilde{M})$, *defina* B_z^* *como acima. Vale que*

$$\|\widetilde{B}\|^2 = \|B\|^2 + \|B_z^*\|^2. \tag{3.6}$$

Demonstração. Primeiramente vamos escrever

$$\begin{aligned} \|\widetilde{B}\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n+k} \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i} \widetilde{\eta}, \widetilde{E}_j \rangle^2 \qquad (3.7) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{n+k} + \sum_{i=n+1}^{n+k} \sum_{j=1}^{n} + \sum_{i=n+1}^{n+k} \sum_{j=n+1}^{n+k} \right) \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i} \widetilde{\eta}, \widetilde{E}_j \rangle^2. \end{aligned}$$

A idéia será computar cada uma das quatro somas acima. Para começar, vamos observar que, se $i, j \leq n$, temos $\widetilde{E}_i = \ell_x^{-1}(E_i)$, $\widetilde{E}_j = \ell_x^{-1}(E_j)$, logo ficamos com

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i} \widetilde{\eta}, \widetilde{E}_j \rangle^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \ell_x^{-1}(\nabla_{E_i} \eta) + \frac{1}{2} [\widetilde{\eta}, \widetilde{E}_i]^v, \ell_x^{-1}(E_j) \rangle^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \ell_x^{-1}(\nabla_{E_i} \eta), \ell_x^{-1}(E_j) \rangle^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \eta, E_j \rangle^2 = \|B\|^2. \qquad (3.8) \end{aligned}$$

Note que na primeira identidade utilizamos a proposição 4, na segunda utilizamos que $[\widetilde{\eta}, \widetilde{E}_i]^v \in T_x(\mathbb{H}x)$ e que $\ell_x^{-1}(E_j) \in T_x(\mathbb{H}x)^\perp$, e por último utilizamos o fato de ℓ_x ser uma isometria.

Observemos a seguir que, se $i, j > n$, temos que $\widetilde{E}_i$ e $\widetilde{E}_j$ são campos invariantes a esquerda, com $\widetilde{E}_i(x), \widetilde{E}_j(x) \in T_x(\mathbb{H}x)$, $\forall x \in \mathbb{G}$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i} \widetilde{\eta}, \widetilde{E}_j \rangle &= \widetilde{E}_i \langle \widetilde{\eta}, \widetilde{E}_j \rangle - \langle \widetilde{\eta}, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i} \widetilde{E}_j \rangle \\ &= \langle \widetilde{\eta}, \frac{1}{2} [\widetilde{E}_i, \widetilde{E}_j] \rangle = 0, \qquad (3.9) \end{aligned}$$

pois $[\widetilde{E}_i, \widetilde{E}_j] \in T_x(\mathbb{H}x)$ e $\widetilde{\eta} \in T_x\widetilde{M}^\perp \supset T_x(\mathbb{H}x)^\perp$. Finalmente, vamos analisar as parcelas mistas da soma anterior. Se temos $i \leq n$, $j > n$, vamos ficar com:

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_i} \widetilde{\eta}, \widetilde{E}_j \rangle &= \langle \ell_x^{-1}(\nabla_{E_i} \eta) + \frac{1}{2} [\widetilde{E}_i, \widetilde{\eta}]^v, \widetilde{E}_j \rangle \\ &= \langle \frac{1}{2} [\widetilde{E}_i, \widetilde{\eta}]^v, \widetilde{E}_j \rangle. \end{aligned}$$

E, dessa forma, obtemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+k}\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}}\widetilde{\eta},\widetilde{E}_j\rangle^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+k}\langle\frac{1}{2}[\widetilde{E}_i,\widetilde{\eta}]^v,\widetilde{E}_j\rangle^2=\frac{1}{2}\|B^*\|^2. \tag{3.10}$$

Finalmente, se for $i>n$, $j\leq n$, vamos ter que

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}}\widetilde{\eta},\widetilde{E}_j\rangle &= \widetilde{E}_i\langle\widetilde{\eta},\widetilde{E}_j\rangle-\langle\widetilde{\eta},\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}}\widetilde{E}_j\rangle\\ &= -\langle\widetilde{\eta},\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_j}\widetilde{E}_i-[\widetilde{E}_i,\widetilde{E}_j]\rangle\\ &= -\langle\widetilde{\eta},\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_j}\widetilde{E}_i\rangle\\ &= \langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_j}\widetilde{\eta},\widetilde{E}_i\rangle.\end{aligned}$$

Assim, podemos calcular a última parcela restante na soma utilizando o obtido na equação (3.10):

$$\begin{aligned}\sum_{i=n+1}^{n+k}\sum_{j=1}^{n}\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}}\widetilde{\eta},\widetilde{E}_j\rangle^2 &= \sum_{i=n+1}^{n+k}\sum_{j=1}^{n}\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E}_j}\widetilde{\eta},\widetilde{E}_i\rangle^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j+n+1}^{n+k}\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{E_i}}\widetilde{\eta},\widetilde{E}_j\rangle^2=\frac{1}{2}\|B^*\|^2. \qquad (3.11)\end{aligned}$$

Substituindo as expressões (3.8), (3.9), (3.10) e (3.11) na expressão (3.7), obtemos o resultado esperado. □

3.2 Teorema 2

Finalmente, temos todas as ferramentas necessárias para enunciar e demonstrar uma generalização do Teorema 1, no caso de M ser uma hipersuperfície imersa em um quociente de um grupo de Lie por um subgrupo compacto.

Teorema 2. *Sejam $\mathbb{G}$ um grupo de Lie com uma métrica pseudo-Riemanniana bi-invariante e seja $\mathbb{H}$ um subgrupo compacto. Considere M^n uma hipersuperfície orientável de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, seja η um campo de vetores normal a M satisfazendo $\langle\eta,\,\eta\rangle=1$ e seja $N:M\to\mathbb{S}_j^{n+k}$ a aplicação de Gauss de M. Então vale, para todo $z\in M$ e para todo $x\in\pi^{-1}(z)$, que:*

$$\Delta N(z)=-n\Gamma_z(gradH(z))-\big(\|B\|^2+\|B_z^*\|^2+(n+k)Ric(\ell_x^{-1}(\eta(z)))\big)N(z). \tag{3.12}$$

Demonstração. Defina novamente $\widetilde{M} = \pi^{-1}(M)$ e $\widetilde{\eta} = \ell_x^{-1}(\eta)$. Seja $\widetilde{N}$ a aplicação de Gauss de $\widetilde{M}$, definida por

$$\begin{array}{rl} \widetilde{N}: \ \widetilde{M} \to & \mathbb{S}_j^{n+k} \subseteq \mathcal{G} \\ x \mapsto & \widetilde{N}(x) = d(L_{x^{-1}})_x(\widetilde{\eta}(x)). \end{array}$$

Primeiramente, note que se $z = \pi(x)$, pelas definições 16 e 18, temos que

$$N(z) = \Gamma_z(\eta(z)) = d(L_{x^{-1}})_x(\ell_x^{-1}(\eta(z))) = d(L_{x^{-1}})_x(\widetilde{\eta}(x)) = \widetilde{N}(x),$$

ou seja, temos que $\widetilde{N} = N \circ \pi$.

Vamos agora escrever as aplicações em coordenadas. Seja $\{J_i\}_{i\in\{1,2,\ldots,n+k+1\}}$ uma base ortonormal de $\mathcal{G}$. Escreva

$$\begin{aligned} N(z) &= \sum_{i=1}^{n+k+1} N_i(z) J_i \text{ e} \\ \widetilde{N}(x) &= \sum_{i=1}^{n+k+1} \widetilde{N}_i(x) J_i. \end{aligned}$$

Então vale que

$$\widetilde{N}_i = N_i \circ \pi, \tag{3.13}$$

portanto pelo lema (7), temos $\Delta_{\widetilde{M}} \widetilde{N}_i = \Delta_M N_i \circ \pi$, e, conseqüentemente,

$$\Delta_M N(z) = \Delta_{\widetilde{M}} \widetilde{N}(x), \tag{3.14}$$

onde $x \in \pi^{-1}(z)$. Agora, segue do Teorema 1 que

$$\Delta_{\widetilde{M}} \widetilde{N}(x) = -(n+k) d(L_{x^{-1}})_x(grad\, \widetilde{H}(x)) - \left(\|\widetilde{B}\|^2 + (n+k)\mathrm{Ric}(\widetilde{\eta}(x))\right) \widetilde{N}(x). \tag{3.15}$$

Assim, substituindo na expressão acima as expressões obtidas nos lemas 8 e 9, assim como as equações (3.13) e (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta N(z) &= -(n+k) d(L_{x^{-1}})_x \left(\frac{n}{n+k} \ell_x^{-1}(\mathrm{grad} H(z)) \right) \\ &\quad - \left(\|B\|^2 + \|B_z^*\|^2 + (n+k)\mathrm{Ric}(\ell_x^{-1}(\eta(z)))\right) N(z) \\ &= -n\Gamma_z(\mathrm{grad} H(z)) - \left(\|B\|^2 + \|B_z^*\|^2 + (n+k)\mathrm{Ric}(\ell_x^{-1}(\eta(z)))\right) N(z). \end{aligned}$$

□

Provado o Teorema 2, torna-se direta a demonstração do seguinte corolário, obtido em [2]:

Corolário 2. *Seja M uma hipersuperfície orientável de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ orientada segundo η um campo de vetores normal satisfazendo $\langle \eta, \eta \rangle = 1$. Seja $N : M \to \mathbb{S}_j^{n+k}$ a aplicação de Gauss de M. Então as seguintes alternativas são equivalentes:*

i *M tem curvatura média constante;*

ii *O Laplaciano da aplicação de Gauss tem apenas componente normal a $\mathbb{S}_j^{n+k}$;*

iii *N satisfaz a equação*

$$\Delta N(z) = -\big(\|B\|^2 + \|B_z^*\|^2 + (n+k)Ric(\ell_x^{-1}(\eta(z)))\big)N(z).$$

A demonstração de tal corolário é análoga a demonstração apresentada para o Corolário 1.

Apêndice

Utilizaremos esta sessão para dar uma demonstração da proposição 4. Com a notação da sessão 1.3, enunciamos novamente o resultado desejado:

Proposição 4. *Sejam X, Y campos de vetores de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$. Defina $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ campos de vetores de $\mathbb{G}$ por*

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(x) &= \ell_x^{-1}(X(\pi(x))),\\ \widetilde{Y}(x) &= \ell_x^{-1}(Y(\pi(x))).\end{aligned}$$

Então vale a seguinte relação, para $x \in \mathbb{G}$:

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}(x) = \ell_x^{-1}\left(\nabla_X Y(\pi(x))\right) + \frac{1}{2}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v(\pi(x)), \tag{3.16}$$

onde ∇ denota a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$.

Demonstração. Fixemos $x \in \mathbb{G}$. Para provar a validade da expressão, basta provar que para todo $\widetilde{u} \in T_x\mathbb{G}$ temos

$$\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{u}\rangle = \langle \ell_x^{-1}\left(\nabla_X Y\right), \widetilde{u}\rangle + \frac{1}{2}\langle [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v, \widetilde{u}\rangle. \tag{3.17}$$

Primeiro, vamos supor que $\widetilde{u}$ seja um vetor vertical. Estenda $\widetilde{u}$ a $\widetilde{U}$ um campo de vetores invariante a esquerda. A equação de Levi Civita nos dá

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{U}\rangle &= \frac{1}{2}\big(\widetilde{Y}\langle \widetilde{X}, \widetilde{U}\rangle + \widetilde{X}\langle \widetilde{U}, \widetilde{Y}\rangle - \widetilde{U}\langle \widetilde{Y}, \widetilde{X}\rangle\\ &\quad -\langle [\widetilde{Y}, \widetilde{X}], \widetilde{U}\rangle - \langle [\widetilde{X}, \widetilde{U}], \widetilde{Y}\rangle - \langle [\widetilde{Y}, \widetilde{U}], \widetilde{X}\rangle\big).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Agora, como $\widetilde{U}$ é vertical e $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ são horizontais, segue que $\langle \widetilde{U}, \widetilde{Y}\rangle = \langle \widetilde{U}, \widetilde{X}\rangle = 0$. Mais ainda, temos que $\widetilde{U}\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\rangle = 0$. De fato, defina $f : \mathbb{G}/\mathbb{H} \to \mathbb{R}$ por $f(z) = \langle X, Y\rangle$ e defina ainda $\widetilde{f} : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ por $\widetilde{f}(x) = \langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\rangle$. Então temos que $\widetilde{f}(x) = (f \circ \pi)(x)$, e portanto

$$\begin{aligned}\widetilde{U}\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\rangle &= \widetilde{U}\widetilde{f}(x)\\ &= d\widetilde{f}_x(\widetilde{U})\\ &= d(f \circ \pi)_x(\widetilde{U})\\ &= df_{\pi(x)} d\pi_x(\widetilde{U})\\ &= 0,\end{aligned} \tag{3.19}$$

pois, como $\widetilde{U}$ é vertical, $d\pi_x\widetilde{U} = 0$.

Assim, a equação (3.18) fica:

$$\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{U}\rangle = -\frac{1}{2}(\langle[\widetilde{Y}, \widetilde{X}], \widetilde{U}\rangle + \langle[\widetilde{X}, \widetilde{U}], \widetilde{Y}\rangle + \langle[\widetilde{Y}, \widetilde{U}], \widetilde{X}\rangle). \tag{3.20}$$

Mas observe que

$$\begin{aligned}
\langle[\widetilde{X}, \widetilde{U}], \widetilde{Y}\rangle &= \langle\langle[\widetilde{X}, \widetilde{U}]^h, \widetilde{Y}\rangle \\
&= \langle \ell_x([\widetilde{X}, \widetilde{U}]^h), Y\rangle \\
&= \langle d\pi_x([\widetilde{X}, \widetilde{U}]), Y\rangle \\
&= \langle [d\pi_x\widetilde{X}, d\pi_x\widetilde{U}], Y\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A quarta igualdade decorre do Lema 3 e a última do fato que $d\pi_x(\widetilde{U}) = 0$. Analogamente $\langle[\widetilde{Y}, \widetilde{U}], \widetilde{X}\rangle = 0$, e assim obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{U}\rangle &= \frac{1}{2}\langle[\widetilde{X}, \widetilde{Y}], \widetilde{U}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^v, \widetilde{U}\rangle. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Antes de utilizarmos tal expressão, vamos ver o que acontece com (3.17) no caso de $\widetilde{u}$ ser um vetor horizontal. Defina, portanto, $\widetilde{W}$ como a extensão de $\widetilde{u}$ invariante a esquerda. A identidade de Levi-Civita nos dá, novamente, que

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{W}\rangle &= \frac{1}{2}\big(\widetilde{Y}\langle\widetilde{X}, \widetilde{W}\rangle + \widetilde{X}\langle\widetilde{W}, \widetilde{Y}\rangle - \widetilde{W}\langle\widetilde{Y}, \widetilde{X}\rangle \\
&\quad -\langle[\widetilde{Y}, \widetilde{X}], \widetilde{W}\rangle - \langle[\widetilde{X}, \widetilde{W}], \widetilde{Y}\rangle - \langle[\widetilde{Y}, \widetilde{W}], \widetilde{X}\rangle\big). \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Defina W como o campo de vetores de $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ dado por $W(z) = \ell_x(\widetilde{W}(x))$, onde $x \in \pi^{-1}(z)$. A propriedade 3 nos dá que tal campo está bem definido, pois $\widetilde{W}$ é invariante a esquerda. Assim, chegamos que $\widetilde{X} \sim_\pi X$, $\widetilde{Y} \sim_\pi Y$ e $\widetilde{W} \sim_\pi W$. Pelo lema 3, temos que

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \sim_\pi [X, Y],\ [\widetilde{X}, \widetilde{W}] \sim_\pi [X, W],\ [\widetilde{Y}, \widetilde{W}] \sim_\pi [Y, W].$$

Utilizando raciocínio análogo ao da demonstração do lema 4, chegamos a conclusão das seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}\langle\widetilde{X}(x), \widetilde{Y}(x)\rangle &= W\langle X(\pi(x)), Y(\pi(x))\rangle, \\
\widetilde{X}\langle\widetilde{Y}(x), \widetilde{W}(x)\rangle &= X\langle Y(\pi(x)), W(\pi(x))\rangle, \\
\widetilde{Y}\langle\widetilde{X}(x), \widetilde{W}(x)\rangle &= Y\langle X(\pi(x)), W(\pi(x))\rangle,
\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{array}{rcl}\langle[\widetilde{X}(x),\widetilde{Y}(x)],\widetilde{W}(x)\rangle & = & \langle[X(\pi(x)),Y(\pi(x))],W(\pi(x))\rangle \\ \langle[\widetilde{X}(x),\widetilde{W}(x)],\widetilde{Y}(x)\rangle & = & \langle[X(\pi(x)),W(\pi(x))],Y(\pi(x))\rangle \\ \langle[\widetilde{Y}(x),\widetilde{W}(x)],\widetilde{X}(x)\rangle & = & \langle[Y(\pi(x)),W(\pi(x))],X(\pi(x))\rangle.\end{array}$$

Assim, chegamos a conclusão que

$$\begin{array}{l}\widetilde{Y}\langle\widetilde{X},\widetilde{W}\rangle+\widetilde{X}\langle\widetilde{W},\widetilde{Y}\rangle-\widetilde{W}\langle\widetilde{Y},\widetilde{X}\rangle-\langle[\widetilde{Y},\widetilde{X}],\widetilde{W}\rangle-\langle[\widetilde{X},\widetilde{W}],\widetilde{Y}\rangle-\langle[\widetilde{Y},\widetilde{W}],\widetilde{X}\rangle \\ =Y\langle X,W\rangle+X\langle W,Y\rangle-W\langle Y,X\rangle-\langle[Y,X],W\rangle-\langle[X,W],Y\rangle-\langle[Y,W],X\rangle.\end{array}$$

Com isso, podemos utilizar o Teorema de Levi-Civita e obter que, para $\widetilde{W}$ horizontal vale

$$\begin{array}{rcl}\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{W}\rangle & = & \langle\nabla_X Y,W\rangle \\ & = & \langle\ell_x^{-1}(\nabla_X Y),\ell_x^{-1}(W)\rangle \\ & = & \langle\ell_x^{-1}(\nabla_X Y),\widetilde{W}\rangle.\end{array}\tag{3.23}$$

Agora vamos juntar as expressões obtidas para provar a proposição. Seja $\widetilde{u}\in T_x\mathbb{G}$. Escreva $\widetilde{u}=\widetilde{u}^h+\widetilde{u}^v$. A equação (3.21) nos dá que

$$\begin{array}{rcl}\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{u}^v\rangle & = & \frac{1}{2}\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^v,\widetilde{u}^v\rangle \\ & = & \frac{1}{2}\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^v,\widetilde{u}\rangle\end{array}\tag{3.24}$$

e, da equação (3.23) segue que

$$\begin{array}{rcl}\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{u}^h\rangle & = & \langle\ell_x^{-1}(\nabla_X Y),\widetilde{u}^h\rangle \\ & = & \langle\ell_x^{-1}(\nabla_X Y),\widetilde{u}\rangle.\end{array}\tag{3.25}$$

Somando as equações (3.24) e (3.25), obtemos

$$\langle\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{u}\rangle=\langle\ell_x^{-1}(\nabla_X Y),\widetilde{u}\rangle+\frac{1}{2}\langle[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^h,\widetilde{u}\rangle.\tag{3.26}$$

Como a equação (3.26) é válida para qualquer $\widetilde{u}\in T_x\mathbb{G}$, segue o resultado esperado:

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}=\ell_x^{-1}(\nabla_X Y)+\frac{1}{2}[\widetilde{X},\widetilde{Y}]^v.\tag{3.27}$$

□

Observação 20. *A proposição aqui apresentada é um caso particular de um teorema mais geral. Vale a seguinte identidade:*

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}(x) = \overline{\nabla_X Y}(f(x)) + \frac{1}{2}\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^v (f(x)),$$

onde $f : M \to N$ *é uma submersão pseudo-Riemanniana,* M *e* N *são variedades pseudo-Riemannianas,* $\overline{\nabla}$ *é a conexão de Levi-Civita de* M *e* ∇ *é a conexão de Levi-Civita de* N*. Os campos* $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{\nabla_X Y}$ *são, respectivamente, as levantadas de* X*,* Y *e* $\nabla_X Y$ *por* f*. Aqui apresentamos a demonstração no caso em que* $M = \mathbb{G}$*,* $N = \mathbb{G}/\mathbb{H}$ *e* $f = \pi$*. A demonstração deste caso mais geral pode ser encontrada em* [9].

Bibliografia

[1] N. do Espírito-Santo, S. Fornari, K. Frensel e J. Ripoll *Constant mean curvature hypersurfaces in a Lie group with a bi-invariant metric*. Manuscripta Math. **111**:4, 459–470, (2003).

[2] F. Bittencourt e J. Ripoll *Gauss Map Harmonicity and Mean Curvature of a Hypersurface in a Homogeneous Manifold*. Pacific Journal of Mathematics **224**,45–63, (2006).

[3] E.A. Ruh e J. Vilms *The Tension Field of the Gauss map*, Trans. A.M.S. 149 (1970)

[4] B. O'Neill *Semi Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, (1983).

[5] M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, (2005).

[6] J. Eells, Jr. and J. H. Sampson *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*. American Journal of Mathematics **86**, 109–160, (1964).

[7] R. Schoen e S. Yau, *Lectures on Differential Geometry*. Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, (1994).

[8] M. Alexandrino, R. Bettiol *Introduction to Lie groups, isometric and adjoint actions and some generalizations*. Preprint 2010, arXiv:0901.2374v3 [math.DG])

[9] J. Cheeger e D. G. Ebin *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, (1975).