UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ANDRÉA MARIA RITTER

A VISUALIZAÇÃO NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL: POSSIBILIDADES COM O SOFTWARE CALQUES 3D

PORTO ALEGRE
2011

ANDRÉA MARIA RITTER

A VISUALIZAÇÃO NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL: POSSIBILIDADES COM O SOFTWARE CALQUES 3D

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Profª. Drª. Maria Alice Gravina

PORTO ALEGRE
2011

ANDRÉA MARIA RITTER

A VISUALIZAÇÃO NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL: POSSIBILIDADES COM O SOFTWARE CALQUES 3D

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Profª. Drª. Maria Alice Gravina

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rogério Ricardo Steffenon – UNISINOS

Profª. Drª. Luisa Rodríguez Doering – PPGEMAT – IM – UFRGS

Profª. Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana – PPGEMAT – IM – UFGRS

PORTO ALEGRE, julho de 2011.

AGRADECIMENTOS

Ao concluir esta dissertação de Mestrado tenho muitos agradecimentos a fazer. Em especial, ao meu esposo Evandro Alberto Schuler pela sua paciência nos diversos momentos de ausência, tanto no decorrer das disciplinas, quanto na elaboração da dissertação. Também o agradeço pelas diversas sugestões dadas na redação desta dissertação.

À Profª. Dra. Maria Alice Gravina, orientadora desta dissertação, por todo empenho, sabedoria, compreensão, exigência e, acima de tudo, sugestões que fizeram com que concluísse este trabalho.

À todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, pela oportunidade de aprendizado, crescimento, realização profissional e pessoal e pela confiança em mim depositada.

Aos meus familiares que sempre demonstraram amor, compreensão e força, valorizando meus potenciais.

À todos os meus colegas de mestrado, amigos e amigas que estiveram presentes me aconselhando e incentivando com carinho e dedicação durante esta trajetória.

À escola em que trabalho e aos meus queridos alunos que muito colaboraram para a realização deste trabalho.

À todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução dessa Dissertação de Mestrado.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta para o ensino de Geometria Espacial com a utilização do software de Geometria dinâmica Calques 3D. A proposta tem como foco o desenvolvimento de habilidades para visualizar objetos 3D a partir de suas representações no plano. Faz parte da proposta uma sequência didática com atividades em crescente exigência quanto a visualização: no Calques 3D, inicialmente, os alunos construíram sólidos a partir de informações dadas através de desenhos em perspectiva, depois através de planificações e por último usando apenas a descrição dos sólidos. Como metodologia de pesquisa foi utilizada a Engenharia Didática e através das análises a posteriori foi possível observar o progresso dos alunos quanto ao desenvolvimento de habilidades para visualização espacial.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Espacial - representação - visualização – estratégias – resolução de problemas

ABSTRACT

This work presents a proposal for the teaching of spatial geometry with the use of dynamic geometry software Calques 3D. The objective of this proposal is to develop the visualization of spatial objects and the understanding of their bidimensional representations. It was designed a sequence of activities that called for the construction of various geometric solids in the software Calques 3D using the designs of perspective representation, the designs of planification and the written description of the characteristics of the solids. The research methodology was the Didactical Engineering and the posteriori analysis showed the students´s progress related to visualization abilities.

KEYWORDS: spatial geometry - representation - visualization - strategies - problem solving

LISTA DE FIGURAS, QUADROS e FOTOGRAFIAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino de Geometria Espacial, voltada para aspectos relativos à visualização espacial. Foi desenvolvida numa turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola privada de Novo Hamburgo, RS, no ano de 2010, e utilizou-se do software de Geometria dinâmica Calques 3D como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades necessárias à visualização espacial.

A escolha do tema baseia-se no meu interesse pelo ensino de Geometria e pela observação das dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo Geometria Espacial. Leciono há 20 anos e vejo que as dificuldades no ensino de Geometria Espacial iniciam com conceitos de Geometria Plana e se complicam na visualização dos objetos tridimensionais dados através de representações no plano, e isto restringe o sucesso dos alunos na resolução dos clássicos problemas de Geometria Espacial que envolvem, especialmente, cálculo de áreas, volumes e relações entre os elementos (faces, arestas, vértices, altura, apótema) dos sólidos estudados no Ensino Médio.

Mas é fato que o interesse do homem por problemas envolvendo Geometria mostra-se presente desde a antiguidade, como a medição das pirâmides por Tales ou a fascinação de Kepler pela harmonia das esferas. Esse interesse do homem pelos assuntos que envolvem contagens, figuras, medidas, ajudaram a construir o conhecimento matemático dos dias atuais. Em 1988, o ensino de Geometria, foi apontado pela associação americana *The Nacional Council of Supervisors of Mathematics*— NCSM, como uma das doze áreas de competência necessárias para o desenvolvimento dos aluno do século XXI, para que se tornem *"adultos responsáveis"* (LORENZATO e VILA, 1993, p. 42). Alguns pesquisadores na área de Educação e Ensino de Matemática tais como Pavanello (1989, 1993), Pirola (2005), Viana (2000, 2005), abordam em seus trabalhos de pesquisa o abandono do ensino de Geometria na escola, o que vem comprometendo o desenvolvimento dos alunos quanto as habilidades para raciocinar no contexto da Geometria.

Atualmente, busca-se o resgate do ensino da Geometria no ensino básico, apoiado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática. Diversos estudos realizados no país, tais como os Buratto (2006), Almouloud & Mello (2000), Silva & Menezes (2007) e Mandarino, et al.(2008) apontam as escolhas da didática e prática pedagógica dos professores como motivo do fraco desempenho de alunos em Geometria.

A Geometria trabalhada na escola pode ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e real. Pode ser tomada como um instrumento auxiliar na compreensão, descrição e interação com o mundo em que vivemos. Mas no ensino de Geometria, desde a educação infantil, muitos dos conceitos ainda são apresentados descontextualizados, sem exemplos práticos que ilustrem a sua importância. Para uma melhor compreensão dos conceitos da Geometria é interessante que haja uma maior integração entre a aprendizagem escolar e as aplicações em situações do dia a dia, dos conhecimentos então adquiridos.

Também é importante que os alunos se tornem sujeitos ativos da construção de seu conhecimento e para isto a utilização de diferentes metodologias de trabalho se faz necessária. Em especial, temos a disposição diversos softwares de Geometria dinâmica, bem como objetos de aprendizagem. Uma metodologia que faz uso destas ferramentas pode ajudar na superação das dificuldades de aprendizagem, pois, com elas, os alunos poderão fazer muitas experiências com as figuras dinâmicas e, assim, observar melhor suas características e desenvolver raciocínios lógicos através de construções geométricas planas e espaciais. Como exemplos de softwares de Geometria dinâmica mencionamos Cabri Géomètre[1], Geogebra[2], Régua e Compasso[3], Calques 3D[4], Archimedes Geo3D[5].

O trabalho que aqui apresento vem ao Encontro de minhas angústias frente às dificuldades apresentadas pelos alunos. Nele apresento uma sequência didática que exige o uso do software Calques 3D, com as atividades tendo crescente exigência quanto à visualização: inicialmente trata-se da construção de sólidos a partir de informação dada através de desenhos em perspectiva, depois através de planificações e, por último,usando a descrição escrita dos sólidos. Vale mencionar que o Calques 3D é software de licença livre, o que significa que pode ser usado nos laboratórios das escolas, e assim os professores interessados no produto didático, que faz parte da dissertação, poderão facilmente adaptá-lo e usá-lo com seus alunos.

---

[1] Cabri Géometrè é uma ferramenta para o estudo de Geometria, nas versões 2D e 3D, que permite criar e explorar figuras geométricas de forma interativa através da construção de pontos, retas, triângulos, polígonos, círculos, cones esferas, poliedros e outros objetos.

[2] Geogebra é um software de Matemática dinâmica gratuito e multi-plataforma para todos os níveis de ensino, que combina Geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema.

[3] Régua e Compasso é um software de Geometria dinâmica plana gratuito, escrito na linguagem Java, com código aberto e que roda em qualquer plataforma (Microsoft Windows©, Linux, Macintosh©, etc).

[4] Calques 3D é um software de Geometria dinâmica espacial gratuito, que roda na plataforma Microsoft Windows©.

[5] Archimedes Geo3D é um software de Geometria dinâmica espacial, que roda na plataforma Microsoft Windows©, Linux e Macintosh©.

A dissertação é composta de cinco capítulos, incluindo a introdução. O capítulo 2 está organizado em três seções: a primeira que sintetiza as leituras realizadas em relação à história do desenvolvimento da Geometria como disciplina escolar no Brasil; a segunda trata do processo de construção do pensamento geométrico; e a terceira discute o potencial da tecnologia no ensino de Geometria Espacial e apresenta o software Calques 3D.

No capítulo 3 é apresentado o processo de construção da proposta, no qual se utilizou a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Nele tem-se o detalhamento da sequência didática que foi usada na experiência, acompanhada de análise a priori. Neste capítulo também apresento as características dos alunos da turma que participou do experimento didático.

O capítulo 4 aborda o relato da experiência e uma análise a posteriori baseada na produção e nas atitudes dos alunos. Neste capítulo também faço reflexões sobre a produção dos alunos, a luz das considerações teóricas feitas anteriormente.

No capítulo 5 apresento as minhas reflexões finais sobre a experiência realizada e também faço algumas considerações sobre minha trajetória de professora.

2 CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Durante os anos de prática no ensino de Geometria Espacial, tenho constatado a dificuldade dos alunos com os conceitos de Geometria. Conforme mencionado na Introdução, um dos aspectos que pode explicar esta dificuldade é o abandono do ensino dos conceitos básicos de Geometria Plana, especialmente no ensino fundamental. Alguns autores tais como Pavanello (1989, 1993), Pirola (2005), Viana (2000, 2005), indicam que este abandono está refletido nas dificuldades dos alunos com Geometria, especialmente na dificuldade quanto ao reconhecimento e caracterização das figuras geométricas tanto planas quanto espaciais.

Buscando entender o quadro de dificuldades, minhas leituras se direcionaram, inicialmente, para a história do ensino de Geometria no Brasil, dos jesuítas até a época atual, através dos trabalhos de pesquisa de autores tais como Pavanello (1989, 1993), Valente (1999, 2004), Roxo (2004), Alvarez (2004), Meneses (2007), entre outros. Estas leituras tiveram como objetivo tentar compreender o abandono do ensino de Geometria no país, e é disto que trato na seção 1 deste capitulo.

Existem dificuldades que são naturais no processo de aprendizagem da Geometria Espacial. Assim tratei de estudar teorias que discutem os processos cognitivos que se apresentam durante a aprendizagem. Concentrei-me nos trabalhos desenvolvidos por Duval (1995, 1998), Gutiérrez (1992, 2004) e Van Hiele (1986). Quanto às dificuldades relativas à representação bidimensional de sólidos, encontrei sugestões de propostas de ensino tais como o ensino de técnicas de perspectiva (Gutiérrez, 1998); ou a utilização de maquetes tridimensionais juntamente com as técnicas de perspectiva (Parsysz, 1989); ou ainda, a utilização de softwares para a construção de representações (Jahn, 2006; Kodama, 2006). Estas diferentes questões são tratadas na seção 2 deste capítulo.

Na seção 3 me concentro no potencial da tecnologia no ensino da Matemática, em especial na Geometria Espacial, como uma ferramenta para produção de conhecimento matemático. Com o objetivo de estudar teorias que discutem o papel da tecnologia como alternativa inovadora de desenvolver o pensamento matemático dediquei-me aos trabalhos de Kaput (1992, 1999, 2007), Moreno-Armella et al (2008), Gravina (1998,2001); Borba e Villarreal (2005) e Shaffer e Clinton (2006). Nesta seção também apresento o software Calques 3D e algumas de suas possibilidades de utilização.

2.1 Aspectos históricos do ensino de Geometria no Brasil

A Geometria é uma das partes integrantes do saber matemático que exige linguagem e procedimentos apropriados para que conceitos e propriedades sejam compreendidos. A maneira pela qual ela é aprendida traz reflexos no raciocínio lógico e também na capacidade de abstração e generalização. Por estes motivos a Geometria passou a ocupar lugar no sistema escolar do Brasil e do mundo no século XIX.

O ensino no Brasil foi dominado pelos jesuítas por um período de aproximadamente duzentos anos. Porém, a Matemática não recebia lugar de destaque entre os ensinamentos proporcionados pelos jesuítas, primeiramente por não possuírem professores capacitados para lecionar a disciplina e também por não reconhecerem a Matemática como conteúdo importante na formação do homem. Segundo Valente (1999), a primeira forma de prática pedagógica para o ensino de Geometria registrada no Brasil está atrelada às necessidades de guerra. Para melhorar as defesas e o desenvolvimento militar foram criadas as aulas de Artilharia e Fortificação, em que a Geometria Espacial era utilizada na fabricação de bombas, lançamento de projéteis, cursos de engenharia, bombeiros. Apesar das aulas de Fortificação serem criadas em 1699, somente em 1738 tornaram-se obrigatórias a todo militar que desejasse ser um oficial. Nesta época, o profissional do exército responsável pelos ataques, defesas e fortificação de praças passa a ser denominado de engenheiro, tendo a Geometria como um dos seus objetos de conhecimento. A Geometria prática ensinada nessa época estava baseada nos livros de Alpoim, *O exame dos Artilheiros* e *O exame dos Bombeiros.*

Valente (1999) relata que para fortalecer o exército brasileiro, em 1782 foi criado o curso da Academia Real dos Guardas Marinha, tendo Bézout[6]como autor dos livros adotados. Já em 1810, o futuro rei D. João VI, cria na Academia Real Militar um curso de Matemática que não se destina apenas a oficiais de engenharia e artilharia. Destina-se também a topógrafos e geógrafos que posteriormente trabalhariam em minas, estradas, portos, canais, pontes, fontes e calçadas. O autor das obras utilizadas neste curso é Legendre[7]. Em ambos os cursos, a Geometria tem lugar de destaque.

---

[6]Bézout: Matemático francês da escola de Mézières nascido em Nemours, Seine-et-Marne, consagrado pela publicação da coleção *Cours de mathématique*, em seis volumes. Estes volumes se dedicavam desde a Matemática elementar até a Matemática de alto nível conhecida na época, com ênfase na mecânica e na navegação (1764-1769), sendo reeditados diversas vezes, com versões em outras línguas.

[7]Legendre: Matemático francês cujas investigações envolveram estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática. Em 1794 publicou *Eléments géométrie* onde reorganizou e simplificou muitas das proposições de Euclides (Elementos) na tentativa de criar um manual mais eficaz para esta obra, em grande parte da Europa e também nos Estados Unidos, tornando-se, mais tarde, num protótipo de textos de geometria.

Quanto à Geometria ensinada nos cursos da Academia Real dos Guardas Marinha, Meneses (2007) relata:

> A Geometria de Bézout utilizada nos cursos em questão buscava explorar a intuição dos alunos e regeu o ensino brasileiro durante um longo tempo. Porém a ascensão de Vilela Barbosa, tanto em Portugal como no Brasil, gradativamente a obra de Geometria de Bézout, foi sendo substituída pela Geometria do brasileiro Vilela Barbosa. (MENESES, 2007, p. 38)

Com a gradativa substituição dos manuais de Bézout pelos livros Vilela Barbosa, a Geometria deixa de possuir um caráter prático e passa a ser uma Geometria teórica e formal, organizada através de axiomas e teoremas que se encadeiam. Os livros utilizados na Academia Real Militar primeiramente são os de Legendre e posteriormente de Lacroix[8]. Os livros de Legendre baseavam-se principalmente na obra de Euclides, acompanhando o movimento na Inglaterra de retomada à Geometria euclidiana e o movimento francês de substituição da obra de Bézout. Sobre os livros de Lacroix, que vieram a substituir a obra de Legendre, Valente (1999) relata:

> Lacroix, diferentemente de Legendre, não escreve uma Geometria inovadora no seio da ciência matemática. Lacroix retoma, de certo modo, a tradição da Geometria francesa e escreve seu livro fazendo um sutil equilíbrio e a aceitação de verdades "evidentes". (LAMANDE apud VALENTE, 1999, p. 102)

Esses dois cursos, o da Academia Real dos Guardas Marinha, de nível secundário, e o da Academia Real Militar, de nível superior, serviram de modelo para o início do sistema de ensino no Brasil, tanto nos programas a serem seguidos quanto na estrutura dos conteúdos a serem ensinados.

Em 1827 quando se criam as escolas primárias, inicia-se a discussão de quais conteúdos deveriam fazer parte da formação geral. A Geometria aparece como uma sugestão de conteúdo, principalmente através da resolução prática de problemas de medição, mas segundo Valente (1999):

> As tentativas de incluir na escolarização fundamental, noções de Geometria como outro conteúdo das Matemáticas, além das quatro operações fundamentais, foram infrutíferas do ponto de vista do que ocorreu de fato no ensino primário do Império. Apesar do texto de lei, o ensino de noções de Geometria não se tornou matemática

---

[8]Lacroix: Matemático francês, membro da Academia Francesa de Ciências, que realizou especialmente estudos sobre cálculo diferencial e integral. Estabeleceu uma definição rigorosa das integrais definidas e indefinidas. Em seu trabalho destacam-se o *Tratado Elementar da aritmética, Elementos de Álgebra* e o *Tratado de cálculo diferencial e cálculo integral*, reeditados várias vezes até 1881.

> escolar nas primeiras letras. De início por não haver professores primários habilitados e depois, em razão de não ser um conhecimento escolar solicitado para ingresso em nenhuma instituição de ensino secundário. (VALENTE, 1999, p. 113)

Assim, o debate da implantação da Geometria na escola primária, foi deixado de lado neste momento, pelos motivos apresentados acima. A Geometria volta a aparecer nos debates sobre os conteúdos a serem exigidos, agora na formação dos ingressantes do ensino superior. Os primeiros cursos a solicitar a Geometria como conteúdo obrigatório de formação foram os Cursos Jurídicos das Academias de São Paulo e Olinda (1827). Valente (1999) cita Lino Coelho que ressalta:

> O estudo da Geometria, por que tanto clamo, é unicamente para exercitar a razão ainda inexperta do rapaz, sem o que ele não poderá avançar nos estudos, da mesma maneira que o homem não poderá caminhar sem ter bem exercitados os seus membros. (VALENTE, 1999, p. 116)

Estas discussões levaram a Geometria a ser instituída nos conhecimentos mínimos a serem exigidos dos estudantes que almejassem primeiramente vagas para os Cursos Jurídicos, já mencionados, e a partir de 1832, para as Academias Médicas Cirúrgicas do Rio de Janeiro e da Bahia.

A valorização da Matemática, especialmente da Geometria para o ingresso aos cursos superiores deu impulso a essa disciplina no ensino secundário dando-lhe um caráter de cultura geral escolar para a formação humana. Para o ensino secundário, surgem primeiramente alguns liceus provinciais tais como o Ateneu do Rio Grande do Norte (1825), os Liceus da Bahia e da Paraíba (1836) e logo após a primeira escola de ensino secundário do país, o Imperial Colégio de D. Pedro II (1837) na Corte (Rio de Janeiro), cujo objetivo era a preparação para o ingresso ao ensino superior. O programa de ensino do Colégio será tomado como referência da Matemática escolar secundária.

Durante a segunda metade do século XIX, os livros adotados para o ensino de Geometria são de Cristiano Benedito Ottoni, tanto na Academia Militar quanto no Colégio D. Pedro II e outras escolas preparatórias. Essa obra é mais voltada para a Geometria formal, preocupada mais com o rigor e menos com as aplicações. A obra foi largamente utilizada na época e foi tomada como referência para os programas escolares e exames de ingresso para os cursos superiores.

Novos autores passaram a surgir no final do século XIX e seus livros apresentaram uma novidade – os exercícios. Isto mudou a metodologia de ensino, pois os alunos não apenas copiavam os conteúdos, mas também deviam mostrar seus conhecimentos resolvendo exercícios, e esta atitude estreitou as relações entre professor e alunos.

Durante este período, no final do século XIX e início do século XX a Matemática era composta por três disciplinas separadas - a Aritmética, a Álgebra e a Geometria. Existiam, neste período, os tradicionais exames finais nos quais a aprovação do aluno dependia, sobretudo, de sua capacidade de memorizar e não tanto da sua compreensão, pois as provas, especialmente de Geometria, analisadas por Santos (2002) em sua dissertação de mestrado, baseavam-se na reprodução de conteúdos abordados em aula. Esses conteúdos dependiam dos pontos (assuntos) publicados no Diário Oficial e que posteriormente seriam exigidos nas provas. Sobre eles Valente (2004) comenta:

> A matemática escolar do tempo dos preparatórios, como se viu, pautava-se pelos pontos. Com a lista deles, o candidato preparava-se para as provas escritas e orais. A preparação lançava mão das apostilas elaboradas a partir dos pontos. Saber cada um deles de cor era o modo de ser bem sucedido no ingresso ao ensino superior. (VALENTE, 2004, p.28)

No final do século XIX e início do século XX, em vários países, ocorreram diversas discussões sobre as dificuldades do ensino de Matemática. Estas discussões resultaram em nova proposta curricular e diferentes abordagens de conteúdos. As discussões tratavam de novas maneiras de ensinar Matemática, privilegiando a intuição e as aplicações da Matemática, nisso considerando as dificuldades apresentadas pelas crianças e adolescentes quanto ao desenvolvimento do raciocínio lógico. Roxo (2004) destaca:

> Tal mudança, decorrente do crescimento monstruoso da indústria e do comércio, não é, porém, uma simples adaptação de caráter utilitarista, mas visa antes – o que é, a nosso ver, fundamental – trazer para o ensino as modernas tendências e concepções do pensamento matemático, o qual deixou de ser exclusivamente sintetista para adquirir uma feição intuicionista. (ROXO, 2004, p. 153)

A reforma Francisco Campos, a partir de 1931, visava à uniformização do ensino no país. Quanto ao ensino de Matemática, a reforma encabeçada por Euclides Roxo propunha que o desenvolvimento dos conteúdos deveria observar a maturidade dos alunos e também estar inter-relacionado com outras disciplinas, buscando-se aplicações práticas e preparando o aluno para a vida. Porém, a análise feita por Alvarez (2004) em cadernos de um aluno de 1935 a 1938 mostra que esta mudança, na prática, não estava ocorrendo:

> Contrariando a proposta da Reforma, que orientava o estudo da Geometria a ser realizado por discussões intuitivas e experimentações, no Ginásio do Estado, o professor Alves Cruz ensinava as noções através do desenvolvimento dedutivo das demonstrações de propriedades e teoremas. (ALVAREZ, 2004, p. 131)

O objetivo das reformas propostas era fundir os diferentes ramos da Matemática – a Aritmética, a Álgebra e a Geometria – chamando-a apenas de Matemática. A Geometria perde o formato de disciplina e torna-se uma fonte de aplicação dentro dessa nova proposta denominada Matemática. A noção de função tornou-se muito importante nesta nova disciplina, por interligar vários assuntos da escola secundária. Porém a sugestão de utilizar a noção de função como conteúdo não é verificada por Alvarez (2004) nos cadernos em análise:

> Porém somente a partir da terceira série é que este conteúdo foi introduzido. Desta maneira, parece-nos que função é um tema a ser abordado em um determinado momento do curso. É um ponto do conteúdo matemático a ser estudado e sua abordagem temporal não o caracteriza como o eixo integrador do ensino de Matemática, conforme previam os ideais da Reforma (ALVAREZ, 2004, p. 132).

A ideia de unificar os três ramos da Matemática, presente na obra de Euclides Roxo, não se mostra presente em obras de outros autores. Em sua análise das obras da época Meneses (2007) expõe:

> Os livros analisados mostram que a ideia de integrar os ramos da Matemática - Álgebra, Aritmética e Geometria -, não se efetivou conforme a proposta de reforma Campos. Os autores procuraram atender algumas exigências da reforma para poder se enquadrar, no entanto os ramos que deviam integrar-se continuavam sendo trabalhados de forma separada. Além disso, o caráter experimental e intuitivo e também a aplicação do método heurístico não condiziam com a proposta do manual de Roxo. (MENESES, 2007, p. 132)

Em consequência da não efetivação das reformas propostas, o movimento de modernização da Matemática proposto por Roxo não se difundiu da forma esperada. Porém a vontade de modificar o ensino de Matemática continuou presente. A partir dos Congressos Nacionais de Ensino de Matemática no Curso Secundário de 1955, 1957 e 1959 o movimento de modernização da Matemática mostrava-se cada vez mais articulado. Em São Paulo, várias iniciativas tais como Encontros entre professores, cursos de férias e cursos promovidos pelas editoras provocavam discussões e trocas de informações sobre o currículo e propostas para renovação. A partir da criação do Grupo de Estudos de Ensino de Matemática (GEEM), em 1961, o professor Osvaldo Sangiorgi, iniciou a divulgação da proposta de reformulação que estava sendo desenvolvida nos Estados Unidos. Para difundir a proposta, foram realizados vários cursos para professores, tendo o apoio da Secretaria de Educação de São Paulo, que liberava professores das atividades escolares que até recebiam “bolsa de sustentação”. O GEEM foi se tornando um agente na transformação do ensino, através da divulgação de ideias de modificação do ensino de Matemática e da publicação de livros e reportagens em jornais, inicialmente em São Paulo e depois se proliferando para os outros estados.

Benedito Castrucci, um dos autores de livros desta época, pode ser considerado como um dos responsáveis pela difusão do ensino de Geometria. Em seus livros de Geometria, Silva (2008) observa a inclusão de Noções de Lógica e de Elementos da Teoria dos Conjuntos, assuntos característicos do momento. As ideias do Movimento da Matemática Moderna tinham como propostas a unificação dos três ramos da Matemática através dos elementos da teoria dos conjuntos, das estruturas algébricas e relações para a construção da lógica Matemática. Conforme Silva (2008) essas ideias estavam centradas “no rigor, na abstração e no formalismo”. Para Castrucci a incorporação da Geometria ao modelo das estruturas algébricas apresentava duas possibilidades, uma vetorial e a outra pelas transformações (rotações, reflexões e translações). Nos cursos ministrados por ele, os professores envolvidos não obtiveram boas notas, demonstrando despreparo para abordar a Geometria segundo as duas possibilidades por ele apontadas. Esse despreparo ocasionou, por parte dos professores, o abandono dos conteúdos geométricos, e ênfase nos conteúdos de álgebra, aritmética e teoria dos conjuntos.

Diversos trabalhos, desde a década de 1980, tais como o de Pavanello (1989), buscam uma justificativa para o abandono do ensino de Geometria. Em sua dissertação de mestrado desenvolvido segundo a metodologia da pesquisa bibliográfica, Pavanello (1989) apresenta a situação de abandono do ensino de Geometria na época, segundo suas análises. Ela parte de sua experiência como docente, pois constata que o conhecimento de seus alunos em Geometria é cada vez menor, tanto em relação a conceitos elementares quanto às aplicações da Geometria em problemas. Durante sua pesquisa, verifica a exclusão total ou descaso com os conteúdos de Geometria dentre os temas abordados em aula sendo que os motivos elencados para tal fato vão desde a falta de tempo até o “despreparo confesso dos professores” (PAVANELLO, 1989, p.8) para o tema. Buscando explicações para esse descaso, às causas de tal situação e os possíveis prejuízos de aprendizagem decorrentes deste abandono, ela relata e discute as explicações de matemáticos sobre suas objeções em relação à Geometria e seu ensino. Considerando que as explicações possam ser discutíveis, ela recorre a eventos históricos, políticos, sociais e pedagógicos que ocorreram em diversas partes do mundo, como na Inglaterra, na França, nos Estados Unidos e também no Brasil para entender a evolução do conhecimento do homem desde os seus primórdios bem como seu ensino nos últimos dois séculos, verificando sempre a influência da Geometria nestes fatos.

Pavanello (1989) conclui que, com a análise feita através dos fatos relatados, o problema com o ensino de Geometria surge e cresce com o aumento do número de escolas de nível médio e consequente aumento do número de alunos vindos de classes menos favorecidas. Por outro lado, em suas análises, ela destaca que o estudo da Geometria passa a se desenvolver de uma forma mais formal, a partir da Matemática Moderna.

Atualmente, a tese de Pavanello (1989) é questionada por trabalhos mais recentes como o de Leme da Silva (2009) que, em seu trabalho, busca uma nova representação para o ensino de Geometria desenvolvido na cultura escolar no período do MMM (Movimento da Matemática Moderna) e faz as seguintes considerações:

> Talvez ainda seja cedo demais para a produção de novos fatos históricos sobre o ensino de Geometria e o MMM, mas certamente ele não pode estar somente atrelado à presença das transformações geométricas ao rol de conteúdos de uma proposta curricular. Tudo indica que o conceito transformações geométricas foi tratado em experiências isoladas, mas não penetrou nas aulas de Matemática, a menos em contextos muito particulares,como é o caso da Bahia. Criticar o ensino de Geometria ao tempo do MMM considerando como ponto central a proposta das transformações geométricas é uma crítica ao ideário do MMM, mas não propriamente às práticas pedagógicas que o ensino de Geometria incorporou. (LEME DA SILVA, 2009, p. 23)

Apesar da grande proliferação das ideias da Matemática Moderna, o movimento começou a perder a sua força nos anos de 1970, como comenta Pinto (2005):

> Para além de toda a expectativa que se alastrou no Brasil, em torno da modernização do ensino de Matemática, com a criação em vários estados de Grupos de Estudos voltados para o estudo e difusão da Matemática Moderna, a nova abordagem passou a ser fortemente criticada no Brasil na década de 70, momento em que ocorria o esvaziamento do movimento em outros países. Uma das mais acirradas críticas que também influenciou os educadores brasileiros encontra-se em Morris Kline, obra amplamente divulgada no Brasil e que apresenta argumentos incisivos contra as imperfeições de um ensino onde “os alunos absorvem uma porção de idéias complicadas, porém não aprendem a somar”. (PINTO, 2005, p.12).

Mesmo esvaziando-se, este movimento deixou efeitos que aparecem até hoje nos currículos atuais como os citados por Búrigo (2010):

> [...] o ensino das funções desde o ensino fundamental e, especialmente, desde o início do ensino médio; a organização do estudo dos números segundo os conjuntos dos naturais, as frações, os números inteiros, racionais, e reais; a preservação de

> razões e proporções" como um tópico à parte, mas "vizinho" ao dos números racionais. (BÚRIGO, 2010, p.16)

A partir de 1980, a busca de uma melhor aprendizagem na Matemática abriu novas possibilidades para as discussões curriculares através da compreensão de aspectos sociais, linguísticos e cognitivos dos alunos. Surgem as práticas pedagógicas direcionadas à resolução de problemas que ganham espaço no mundo inteiro. Porém, os alunos apresentam ainda muita dificuldade em Geometria, indicando um trabalho intenso para resgatar o espaço da Geometria na escola bem como uma melhoria nas condições de trabalho do professor.

O interesse e os questionamentos sobre o ensino de Geometria continuam presentes até os dias atuais, pois se percebe que tanto a exclusão quanto a forma inadequada do trabalho com Geometria, faz com que os alunos tenham pouca capacidade de percepção espacial, importante na compreensão e aplicação em diversas atividades profissionais. Existe a necessidade de cultivar tanto o pensamento visual quanto o sequencial nos alunos, e a prioridade dada à álgebra "acabou por desenvolver somente um tipo de pensamento. É necessário, portanto restabelecer o equilíbrio" (PAVANELLO, 1989, p.182).

2.2 A construção do pensamento geométrico espacial

Para compreender as dificuldades apresentadas pelos alunos, no processo de aprendizagem da Geometria, consultei os trabalhos Duval (1996, 2003), Gutiérrez (1992, 1998, 2004) e Van Hiele (1986), e neles percebe-se que a visualização é uma questão que está constantemente presente.

Uma das etapas necessárias para compreender as dificuldades apresentadas pelos alunos é entender como os processos cognitivos se apresentam durante a aprendizagem Matemática, em especial a Geometria Espacial. Para tal, apresento alguns apontamentos de trabalho realizados por Raymond Duval[9].

Em seu trabalho, Duval (2003) propõe uma abordagem cognitiva[10] para compreender as dificuldades dos alunos na compreensão da Matemática e a natureza dessas dificuldades. Para analisar as condições e os problemas de aprendizagem em Matemática, segundo Duval, precisamos compreender os sistemas cognitivos necessários para aceder aos objetos

---

[9] Raymond Duval: é filósofo e psicólogo de formação. Seus estudos relativos à psicologia cognitiva, desenvolvidos no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo (França), têm contribuído fortemente para as pesquisas em Educação Matemática.

[10] Abordagem cognitiva: processo que busca descrever o funcionamento cognitivo que possibilita a um aluno compreender, efetuar e controlar a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos.

matemáticos e efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos. As atividades cognitivas requeridas pela Matemática, diferente de outras áreas, necessitam considerar a importância primordial de suas representações semióticas[11], bem como a sua grande variedade. Para compreender este aspecto, podemos considerar como exemplo as diversas formas de representar um cubo: representação em perspectiva (cônica, cavaleira, isométrica) e também representação de sua planificação. Em minha experiência de sala de aula verifiquei que os alunos apresentam dificuldades tanto na compreensão destas representações quanto nas suas diversas transformações.

Em seus trabalhos, Duval (2003) destaca que o objeto matemático não deve ser confundido com sua representação semiótica[12] e nos chama a atenção que, no entanto, as atividades sobre o objeto dela dependem. Por este motivo, Duval (1996) discute a importância, bem como a variedade das representações semióticas utilizadas em Matemática.

Durante a aprendizagem em Matemática é muito comum existir confusão entre um objeto matemático e a sua representação, porém para sua compreensão é muito importante que esta distinção seja estabelecida. Segundo Duval (1993), três atividades cognitivas fundamentais são ligadas às representações semióticas:

- ✓ A formação de uma representação identificável: trata-se de um enunciado compreensível em uma determinada língua natural, composição de um texto, desenhos de uma figura geométrica, a escrita de uma fórmula, de um gráfico, etc.
- ✓ O tratamento de uma representação*:* é a transformação de uma representação em outra representação dentro de um mesmo registro[13]. Por exemplo: Representação da forma planificada de cubo e sua representação em perspectiva.
- ✓ A conversão de uma representação: trata-se da transformação de um registro para outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em

---

[11] Semiótica: ciência com origem na União Soviética, Europa Ocidental e EUA. Teoria lógica, filosófica e científica da linguagem. É uma ciência que investiga as linguagens existentes, examinando os fenômenos em seu significado e sentido, ou seja, tenta desvendar sua existência enquanto linguagem, sua ação de signo.

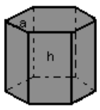
[12] Representação semiótica: A capacidade que o sujeito tem de gerar imagens mentais de objetos ou ações e por meio dela chegar à representação (da ação ou do objeto) é conhecida como função semiótica. A função semiótica começa pela manipulação imitativa do objeto prosseguindo para uma imitação interior ou diferida, na ausência do objeto.

[13] Registros de representação:

- Multifuncionais: são aqueles que não conseguimos representar através de um algoritmo sendo sua representação discursiva através da língua natural e sua representação não discursiva através de figuras geométricas planas ou em perspectiva.

- Monofuncionais: são aqueles que conseguimos representar em forma de algoritmo sendo sua representação discursiva através dos sistemas de escritas numéricas, algébricas e simbólicas e sua representação não discursiva através de gráficos cartesianos.

questão. Por exemplo: Seja dado um prisma hexagonal regular de aresta da base *a* e aresta lateral ***h*.** (Registro através de representação textual na língua natural)



(Registro através da representação em perspectiva)

Ainda segundo Duval só é possível aprender Matemática através da utilização das representações semióticas do objeto matemático. Para ele, as representações semióticas cumprem várias funções, tais como:

- ✓ a *comunicação*: responsável por tornar as representações mentais visíveis e acessíveis;
- ✓ o *desenvolvimento das representações mentais*: dependem da interiorização das representações semióticas;
- ✓ a *produção de conhecimento*, pois existe grande variedade de representações semióticas, de um mesmo objeto matemático.

Na resolução de um dado problema, o sujeito precisa saber operar com diferentes sistemas de representação. Isto porque a escolha da representação pode significar não só maior clareza, mas também uma economia cognitiva[14] no processo de resolução.

Duval (2003, p. 14) coloca que *"a originalidade[15] da atividade Matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação".* Cada registro possui limitação representativa específica surgindo à necessidade de se utilizar outros sistemas de expressão e de representação, além da linguagem natural e das imagens (sistemas de escrita para os números, notações simbólicas para os objetos, escrita algébrica, escrita lógica, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas). Desta forma, Duval destaca que as noções de tratamento[16] e conversão[17] são operações cognitivas diretamente envolvidas na construção dos conceitos (apreensão do conhecimento matemático).

---

[14] Economia cognitiva: É o processo pelo qual uma pessoa repete um procedimento com tanta frequência que este último deixa de ser altamente consciente e trabalhoso para ser automático e fácil.
[15] A originalidade se refere as diferentes formas de representação para um mesmo objeto de estudo na Matemática.
[16] Tratamento: transformação da representação utilizando-se apenas um só tipo de registro de representação.
[17] Conversão: transformação de uma dada representação em outra, em outro sistema semiótico, de modo que haja conservação da totalidade ou parte da representação inicial, sendo necessária a coordenação pelo sujeito que a efetua.

Duval (1996) destaca que o processo cognitivo é constituído por três fases: a *visualização* (presente na representação espacial), a *construção* (quando se utiliza ferramentas) e o *raciocínio* (comprovação e demonstração). Essas três fases estão interligadas e são necessárias ao processo cognitivo para a aprendizagem da Geometria. Para resolvermos problemas em Geometria Espacial, há necessidade de fazer interpretações da situação. Para essas interpretações, Duval descreve e distingue alguns tipos de apreensão do conhecimento. Por exemplo, quando realizamos tarefas de construção de descrição em que o objetivo é a reprodução de uma figura estamos exercitando a *apreensão sequencial*; quando realizamos interpretação das formas das figuras em uma situação geométrica exploramos a *apreensão perceptiva* e quando interpretamos os elementos de uma figura geométrica, com articulação dos enunciados e compreensão das propriedades do objeto estamos exercendo a *apreensão discursiva* e finalmente quando nossas ações estão centradas nas modificações possíveis de uma figura inicial e na percepção da reorganização sugerida por estas modificações temos a *apreensão operatória*.

Na resolução de problemas de Geometria, que apresentam originalidade em relação a outras tarefas de Matemática, cada situação exige um tipo de raciocínio, que depende da conscientização e da distinção das formas de apreensão de uma determinada figura. Na apreensão operatória dependemos das modificações que a figura possa sofrer. As modificações possíveis são classificadas por Duval (1996) da seguinte maneira:

- ✓ Mereológico: a figura pode separar-se em partes, que podem fracionar-se e reagrupar-se, temos assim uma relação da parte e do todo;
- ✓ Ótica: a figura transforma-se em outra chamada de sua imagem;
- ✓ Posicional: é o deslocamento da figura em relação a um referencial inicial.

Essas modificações podem realizar-se psiquicamente, graficamente e mentalmente. Duval (1996) classifica os problemas de Geometria em três níveis:

- ✓ Nível 1: há congruência operatória da figura e um tratamento matemático, neste caso uma apreensão discursiva explicita não é necessária.
- ✓ Nível 2: a apreensão discursiva é necessária, porque não há mais congruência da figura ou porque é explicitamente pedido como justificativa.
- ✓ Nível 3: exigem mais que uma apreensão discursiva, o recurso aos esquemas formais lógicos específicos tais como o raciocínio disjuntivo, o raciocínio por contraposição.

Para Duval (1996), a prática sistemática dos problemas de nível 1, a distinção entre apreensão perceptiva e discursiva, a representação de uma rede de propriedades formando uma rede semântica de todos os conhecimentos solicitados na demonstração e a compreensão da diferença entre uma argumentação no quadro da prática natural do discurso e articulação dedutiva são algumas das condições auxiliares para a aprendizagem em Geometria.

Com a frase *"A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.",* Duval (1993, p. 57) nos faz perceber a dependência da Matemática das representações que utilizamos para compreendê-la, proporcionando assim um ponto de partida para o trabalho pedagógico do professor na busca de estratégias específicas para o trabalho com essa disciplina.

Outros dois autores preocupados com o ensino Geometria são os holandeses Dina van Hiele Geldof e Pierre van Hiele. O objetivo inicial do trabalho proposto por Dina e Pierre Van Hiele era ajudar os estudantes a desenvolver *insight*[18] em Geometria.

Eles publicaram seus primeiros trabalhos em 1959; com a morte de Dina, logo após a publicação dos primeiros resultados, foi Pierre que deu continuidade ao trabalho, reformulando-o e desenvolvendo a teoria. A divulgação da sua teoria aumentou quando Hans Freudenthal (Holanda), no seu livro *"Mathematics as an Educational Task" (*1973) chamou atenção para o modelo de pensamento geométrico por ele discutido.

Durante seu trabalho, Van Hiele percebeu uma grande falta de harmonia entre o ensino e o aprendizado em Matemática, pois as tarefas e problemas apresentados aos alunos necessitam de vocabulário, conceitos e conhecimento de propriedades bem além dos seus níveis de pensamento. Assim, construiu um modelo de desenvolvimento de pensamento que serve como guia para ensino e para avaliação das habilidades desenvolvidas pelos alunos no processo de aprendizagem da Geometria. Para Van Hiele, o crescimento cronológico das idades não produz, automaticamente, um crescimento nos níveis de pensamento. Visando descrever as características do processo de amadurecimento do pensamento, o modelo descreve cinco níveis de compreensão:

- ✓ Nível 0 - *Visualização ou Reconhecimento:* Os alunos identificam, comparam e nomeiam figuras geométricas baseados em sua aparência global. O raciocínio dos alunos se dá por meio de considerações visuais. Ele é capaz de aprender o vocabulário geométrico, identificar formas específicas e reproduzir figuras dadas.
- ✓ Nível 1- *Análise:* O raciocínio dos alunos se dá através da análise informal dos

[18] Insight: uma pessoa mostra insight quando é capaz de desempenhar uma situação não usual, desenvolve corretamente e adequadamente as ações que a situação requer, resolvendo a situação através de um método consciente e preciso.

componentes de uma figura geométrica, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades. Porém, ainda não conseguem explicitar inter-relações entre figuras ou propriedades.

- ✓ Nível 2 - *Dedução Informal ou Ordenação:* Neste nível, os alunos conseguem formar definições abstratas, conseguindo estabelecer inter-relações das propriedades das figuras e entre figuras. Percebem a necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra. Possuem argumentação lógica informal e reconhecem a ordenação de classes de figuras geométricas. Conseguem acompanhar provas formais, mas não conseguem construir uma prova, partindo de premissas diferentes.
- ✓ Nível 3 - *Dedução Formal:* O aluno é capaz de construir demonstrações e não só memorizá-las. Ele enxerga a possibilidade de desenvolver uma demonstração de diferentes formas, reconhecendo as condições necessárias e suficientes para a prova.
- ✓ Nível 4 - *Rigor*: O estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e a comparação dos mesmos caracteriza o aluno neste nível. É neste nível que as Geometrias não-euclidianas são compreendidas.

As diferenças nas formas de compreensão dos alunos, durante a minha experiência com Geometria, são muito evidentes. Os diferentes níveis apontados por Van Hiele apresentam-se dentro de uma mesma sala de aula, dificultando o trabalho, pois todas as dificuldades necessitam ser exploradas e minimizadas. Existe diferença no nível de pensamento dos alunos entre si e entre professor e alunos. Para Freudenthal (1973), quando o ensinamento ocorre num nível acima ao do aluno, os conceitos desenvolvidos não são bem assimilados e não ficam retidos na memória por muito tempo. Com as informações e concepções erradas, quando aprendidas, acontece o inverso, ou seja, persistem na memória. Para que os ensinamentos sejam assimilados adequadamente necessita-se, em primeiro lugar, conhecer o pensamento do aluno, sendo que o trabalho de Van Hiele nos fornece subsídios para dar início a tal reconhecimento.

No que segue considero alguns dos trabalhos de Gutiérrez[19] (1992, 1998, 2004) e Parzysz[20] (1988, 1989 e 1991) os quais apontam condições necessárias e possibilidades para o ensino de Geometria, em especial a Geometria Espacial.

---

[19] Ángel Gutiérrez, é professor e pesquisador do departamento de Didática da Matemática, na Universidade de Valência, Espanha.

[20] Bernard Parzysz é professor e pesquisador na Universidade de Orléans e na Universidade de Paris Diderot, França.

Segundo Gutiérrez (1992), para prepararmos o aluno para uma educação visual, primeiramente, precisamos entender como ela se processa. Ele descreve como *"o elemento do núcleo central, em todas as concepções da percepção visual, são imagens mentais, ou seja, representações mentais que as pessoas podem fazer de objetos físicos, relações, conceitos, etc."* (GUTIÉRREZ, 1992, p.44).

Sobre a aprendizagem da Geometria Espacial, Gutiérrez (1992) destaca que alguns processos e habilidades visuais têm uma relação mais estreita com o contexto de aprendizagem da Geometria Espacial, tais como as imagens pictóricas[21], cinéticas[22] e dinâmicas[23], os processos VP[24] e IFI[25] e as habilidades de identificação visual[26], o reconhecimento de posições[27] ou relações espaciais[28] e discriminação visual[29].

Gutierrez tem diversos artigos relacionados ao ensino e aprendizagem de Geometria, disponibilizados em sua página pessoal, que relatam as dificuldades dos alunos verificadas em trabalhos com Geometria Espacial. Dois deles serão aqui descritos.

No primeiro trabalho[30], Gutiérrez (1998) apresenta algumas reflexões importantes sobre a utilização de representações planas de objetos tridimensionais adequadas à idade dos alunos. Ele traz uma análise das formas mais usuais de representação plana dos objetos tridimensionais e com base nos resultados de diversos trabalhos anteriores descreve as dificuldades dos alunos para representar objetos tridimensionais ou interpretar suas representações, e também procura trazer recomendações para o professor quanto às condições que podem favorecer a aprendizagem da Geometria Espacial. Nas investigações comentadas neste trabalho, os sólidos utilizados são os habituais da Geometria Espacial escolar (cubo,

---

[21] Imagens pictóricas: imagens figurativas de objetos físicos.

[22] Imagens cinéticas: trata-se de imagens em parte físicas e em parte mentais, nas quais, por exemplo, o movimento das mãos, cabeça, entre outros, têm papel importante.

[23] Imagens dinâmicas: são imagens mentais em que os objetos ou alguns dos seus elementos apresentam deslocamento.

[24] Processamento visual (VP). Este é o processo de conversão de informações abstratas ou não-figurativas em imagens visuais e o processo de transformação de imagens visuais já formadas em outras.

[25] Interpretação figurativa de informações (IFI): Este é o processo de compreensão e interpretação das representações visuais para extrair as informações que eles contêm. Portanto, esse processo pode ser visto como o inverso do acima.

[26] Identificação visual: é a habilidade de reconhecer uma figura isolando-a de seu contexto. É utilizada em situações em que uma figura é formada por várias partes ou quando existem várias figuras sobrepostas.

[27] Reconhecimento de posições: é a capacidade de relacionar a posição de um objeto com o mesmo (o observador) ou com outro objeto, que atua como um ponto de referência.

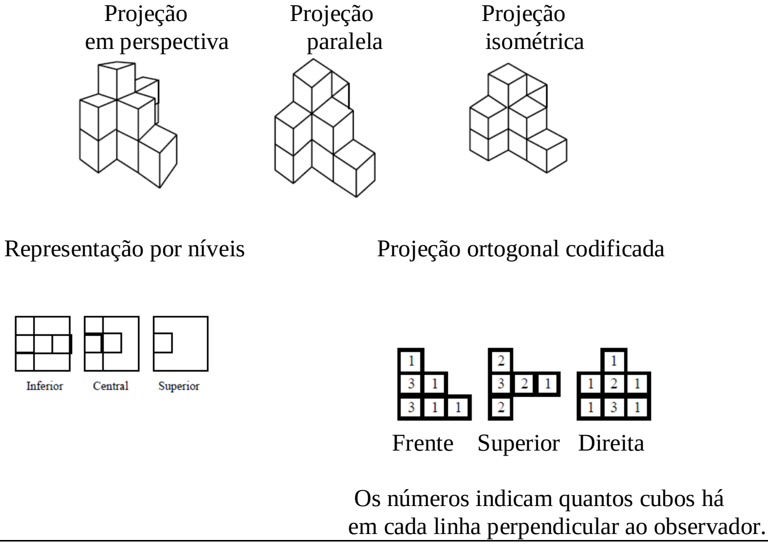
[28] Reconhecimento de relações espaciais: é a habilidade que permite identificar corretamente as características das relações entre diversos objetos situados no espaço. Podemos tomar como exemplo os objetos que são girados apresentando-os em diversas posições, ou são perpendiculares, simétricos, etc.

[29] Identificação visual: é a habilidade de que permite comparar vários objetos identificando suas semelhanças e diferenças visuais.

[30] *Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría*

prisma, pirâmide, cilindro, etc.) e os *módulos multicubos*[31]. E quanto às representações planas dos objetos tridimensionais ele se utiliza de algumas técnicas de representação tais como as representações por níveis[32] e as projeções em perspectiva[33], paralela[34] (cavaleira), isométrica[35] ortogonal[36] e ortogonal codificada[37]. A Figura 1 nos mostra estes tipos de representação plana para um módulo multicubo (a representação ortogonal é igual à codificada, porém sem os números).

Figura 1 – Representações planas de um módulo multicubo



Fonte: GUTIÉRREZ, 1998, p. 196

Sobre o início do trabalho com as representações planas de objetos tridimensionais, Gutiérrez (1998) comenta:

> Como em muitas outras áreas da Matemática antes de iniciar a aprendizagem formal das representações planas, os alunos têm de adquirir uma experiência extracurricular que os professores não devem ignorar. Esta experiência é, em geral, o desenvolvimento da capacidade de desenho livre, que na sua fase final de perfeição, torna-se a projeção em perspectiva. No entanto, os estudos que observaram o comportamento espontâneo (antes de todas as instruções) dos alunos com as tarefas de representação de sólidos têm encontrado vários tipos de

[31] Módulos multicubos são sólidos formados por vários cubos iguais sobrepostos face a face.
[32] A representação por níveis consiste em fazer vários cortes paralelos aos sólidos, por pontos importantes, sendo neste caso, cada plano de cubos.
[33] A projeção em perspectiva representa nossa visão real dos cubos, na qual as arestas mais distantes são menores e as linhas paralelas, a medida que se distanciam, convergem.
[34] A projeção paralela é análoga a perspectiva, porém as linhas paralelas representadas conservam-se paralelas, independente de sua direção, distorcendo a imagem real dos sólidos.
[35] A projeção isométrica é um caso particular de paralela, na qual os cubos se situam de forma que as três arestas que saem de um determinado vértice são desenhadas com o mesmo comprimento e formam ângulos de 120º.
[36] A projeção ortogonal (ou vista) consiste nas projeções dos sólidos em três planos ortogonais.
[37] A projeção ortogonal codificada é uma projeção ortogonal na qual é adicionado um código que fornece informações adicionais , sendo neste caso, a quantidade de cubos de cada fila.

> representação, que geralmente têm uma estreita relação com o contexto descrito na atividade. (GUTIÉRREZ, 1998, p. 199).

Num dos experimentos relatados neste trabalho, no qual os alunos não tinham nenhuma experiência escolar anterior (tanto do primário quanto do secundário), Gutiérrez investiga as diferentes formas para instruir os alunos nos diferentes métodos de representação dos objetos tridimensionais. O experimento se utiliza de módulos multicubos e antes de iniciar a instrução propriamente dita são propostas três atividades de descrição dos módulos. Em cada uma destas atividades, um aluno passava instruções para a construção dos módulos a seus colegas sendo que apenas ele estava vendo estes módulos. Na primeira atividade um aluno fazia a descrição e dava as instruções verbalmente a seus colegas enquanto assistia através de um monitor de TV o que seus colegas faziam. Os alunos podiam conversar entre si durante a atividade. A segunda atividade se diferenciava da primeira por não haver monitor de TV. Na terceira, os alunos deviam traduzir as instruções para construir um módulo numa folha de papel.

A produção dos alunos mostrou uma grande variedade de formas de representações de sólidos que, mesmo independentes de correção e validade, passam de totalmente gráficas até as completamente verbais, sendo também considerável o grupo de representações mistas com desenhos e textos. A característica principal apresentada nestas descrições é que elas se basearam nas relações de posição entre os cubos que formavam o módulo.

Ao analisar diversos trabalhos[38] com representações planas de objetos tridimensionais, o autor identificou algumas dificuldades dos alunos classificando-as em *conceituais*, que dizem respeito às características (regras) da representação, e *técnicas*, que dizem respeito a estratégias de desenhar ou construir um objeto geométrico. Para as dificuldades conceituais podemos considerar como exemplo a representação em perspectiva isométrica. Durante a representação, Gutiérrez cita a necessidade dos alunos de manipular o sólido para vê-lo em uma posição parecida com a da representação. Para as dificuldades técnicas Gutiérrez conclui, após as análises dos trabalhos citados anteriormente, que as representações por níveis são as mais fáceis tanto para desenhar quanto para construir e que construir a partir de representações ortogonais é mais difícil do que a partir de representações isométricas. Por outro lado, desenhar representações isométricas é mais difícil do que desenhar representações ortogonais. Num dos trabalhos analisados, no qual os alunos deveriam representar um módulo

[38] Alguns trabalhos comentados por Gutiérrez: Mitchelmore (1976 1980); Gaulin (1985); Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989); Woodrow (1991); y Guillén et al. (1992); Clements y Battista (1992) y Hershkowitz (1990); Cooper y Sweller (1989), Gutiérrez (1996a), Izard (1990), Winter et al. (1986) y Young (1982).

multicubo sobre grades pontuais (malha pontilhada parecendo a representação de um geoplano), sem nenhuma instrução técnica inicial, ele conclui que alguns segmentos podem atuar como distratores (no sentido de confundir) de outros e que algumas direções são mais fáceis de representar do que outras (vertical e horizontal).

Outro aspecto considerado neste trabalho por Guitiérrez é a influência de fatores culturais nas habilidades do desenho em perspectiva, que não são privilégio da Geometria Espacial, pois podem acontecer também em outros ramos da Geometria. Ao analisar trabalhos[39] de diferentes regiões, essas influências podem ocorrer devido as origens e tradições sobre a forma de interpretar determinados símbolos ou desenhos. Ter conhecimento desses fatores culturais pode ser importante para a compreensão das representações planas dos objetos tridimensionais.

No final do trabalho o autor destaca a necessidade dos alunos aprenderem a desenhar e ler as representações planas mais usuais dos objetos tridimensionais. Para ele, os professores devem considerar que quando os alunos apresentam dificuldade para desenhar representações planas, um caminho pertinente pode ser evitar as exigências de desenhos para que não haja acúmulo de dificuldades quanto aos raciocínios que são exigidos na Geometria Espacial. Ele também destaca a necessidade dos professores aumentarem as atividades que tratem da melhoria na capacidade de visualização espacial.

Gutiérrez (2004), em outro trabalho[40] de pesquisa, com alunos da escola secundária[41], no qual solicita, através de dois problemas, que eles comprovem certas características dos prismas, se utiliza de três elementos teóricos (explorados também em trabalhos anteriores):

1. O conceito de prisma, utilizado nos problemas a serem resolvidos pelos alunos.
2. O modelo de Van Hiele, utilizado para identificar os raciocínios apresentados pelos alunos na resolução dos problemas.
3. Algumas categorias de provas matemáticas para classificar os tipos de provas produzidas pelos alunos.

Quanto à resolução dos problemas com prismas, Gutiérrez destaca os principais conceitos e propriedades que considera necessários, a saber, que:

- ✓ um prisma é um poliedro com duas faces congruentes paralelas ligadas por faces laterais formadas por paralelogramos. Os prismas podem ser retos e oblíquos.

[39] Alguns trabalhos analisados por Gutiérrez: Mitchelmore (1976, 1983) y Hershkowitz (1990) relativo a países da África, Ásia e América; Mukhopadhyay (1987) relativo a Índia

[40] *Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry(2004)*

[41] Alunos de três escolas secundárias de uma localidade rural na cidade de New South Wales (Austrália), com idades de 12 a 17 anos.

- ✓ em qualquer prisma, em todas as faces, os lados paralelos são congruentes. Em um prisma reto, todas as faces são retangulares e perpendiculares às bases. Em um prisma oblíquo nenhuma das faces é perpendicular às bases.
- ✓ uma diagonal é um segmento que une dois vértices não consecutivos de um poliedro, podendo ser diagonais de face ou diagonais espaciais (estão no interior do prisma).
- ✓ um prisma de base com n-lados tem n + 2 faces, 2.n vértices, 3.n arestas, 2n **.** (n-2) diagonais, sendo n **.** (n-1) diagonais nas faces e n **.** (n-3) diagonais espaciais.

Gutiérrez também descreve as principais características dos níveis de Van Hiele, referente ao estudo de prismas e diagonais, importantes para analisar as respostas dos alunos e para identificar os níveis de raciocínio. São elas:

- ✓ Nível 1: Os estudantes são capazes de descrever <u>algumas</u> diagonais e não são capazes de estabelecer relações gerais entre as diagonais.
- ✓ Nível 2: Após desenhar e contar as diagonais de alguns (poucos) prismas, os alunos conseguem encontrar a fórmula que calcula o número de suas diagonais. Eles justificam a fórmula pela síntese dos dados coletados. Eles conseguem usar a fórmula obtida para calcular o número de diagonais ou faces de outros prismas. Também são capazes de concluir se uma conjectura é verdadeira ou falsa e, através de desenhos, comprovarem este valor lógico. Suas justificativas são apenas descrições do que desenharam.
- ✓ Nível 3: Os alunos, de forma indutiva, determinam a fórmula para o número de diagonais de um prisma com base de n-lados, assim como os alunos que estão no nível 2, mas já conseguem utilizar argumentos dedutivos informais que explicam a fórmula, mas muitas das vezes ainda baseando-se em um prisma particular.
- ✓ Nível 4: Os alunos de forma indutiva apresentam a fórmula para o número de diagonais de um prisma com base de n-lados, desenhando primeiramente alguns exemplos específicos e então apresentam uma explicação geral, que não depende de um prisma particular. Neste nível as provas apresentam argumentos dedutivos abstratos formais que relacionam os dados com a conjectura.

As duas categorias de provas[42] utilizadas por Gutiérrez, neste trabalho são:

[42] As categorias adotadas neste trabalho integram e expandem as definidas por Balacheff (1988) e Harel, Sowder (1998) no trabalho intitulado *Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment* publicado na revista *Educational Studies in Mathematics no ano de 2000.*

- ✓ Provas empíricas: os exemplos são o argumento de certeza (convicção), e dependendo do modo como os alunos selecionam os exemplos, podem ser agrupadas em três sub-categorias:

> [...] o <u>empirismo ingênuo</u> (a conjectura é provada mostrando-se que ela é verdadeira em um ou mais exemplos selecionados aleatoriamente), <u>experimento decisivo (crucial)</u> (a conjectura é provada mostrando-se que é verdade num exemplo cuidadosamente selecionado) e <u>exemplo genérico</u> (a prova é baseada em um exemplo específico, visto como um representante de sua classe, e isso uma justificativa abstrata explícita.(GUTIÉRREZ, 2004, p. 513)

- ✓ Provas dedutivas: consistem em usar argumentos dedutivos abstratos. São duas as sub-categorias de provas dedutivas, dependendo do uso ou não de um exemplo:

> *"[...] no <u>experimento mental</u> um Exemplo específico é usado para ajudar a organizar a prova. Uma <u>prova formal</u> é baseada em operações mentais construídas sem a ajuda de um exemplo"* (GUTIÉRREZ, 2004, p. 513).

Para obter informações sobre os níveis de raciocínio e das habilidades de prova dos alunos do ensino secundário foi projetada uma experiência que se utilizava de um teste com papel e lápis que tinha o objetivo de avaliar o comportamento e o conhecimento dos alunos em conteúdos das diversas áreas da Geometria Espacial. Este teste envolvia sete itens que são: identificação, descrição e caracterização de sólidos e suas partes (faces, arestas,vértices, diagonais); classificação dos sólidos; seções transversais de sólidos, redes de sólidos; conjecturar e provar propriedades de sólidos.

Neste trabalho, Gutiérrez analisa especialmente a resposta dos alunos a dois itens nos quais pede para obter e provar conjecturas sobre prismas:

- ✓ Item A: questiona os alunos sobre o número de diagonais de um prisma solicitando a justificativa ou prova. Para responder a questão, inicialmente é dado o conceito de diagonal, inclusive com desenhos explicativos. Para levar a conclusão do número de diagonais de um prisma qualquer, as perguntas sugerem prismas de bases poligonais com número de lados cada vez maior, cujo desenho também é apresentado.
- ✓ Item B: solicita que os alunos respondam se uma afirmação é verdadeira ou falsa, justificando a resposta. A questão a ser respondida e justificada é: "Se todas as arestas laterais de um prisma são perpendiculares à base, então todas as suas faces laterais são retângulos."

Neste trabalho Gutiérrez verifica uma quantidade considerável de respostas nos níveis de Van Hiele 1 a 3 e apenas algumas respostas no nível 4, que seriam esperadas para alunos de nível secundário, confirmando que muitos alunos não apresentam o nível de amadurecimento em Geometria, adequado às questões que serão abordadas no secundário.

Na linha de pesquisa que trata de representação plana de objetos 3D tem-se o trabalho de Parzysz (1988), que leva em consideração as dificuldades dos alunos no reconhecimento e na caracterização dos objetos representados. Parzysz chama a atenção de que a representação bidimensional de um objeto tridimensional, diferentemente da representação de objetos bidimensionais, sempre perde informação e tal fato é responsável por algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos.

Ele investigou as representações sob diversas formas, tais como a perspectiva paralela e perspectiva central, bem como a interpretação (leitura) dessas representações planas de objetos tridimensionais. Na perspectiva paralela o observador está de frente para o objeto, como o ponto de visão a sua frente, na linha do horizonte. Um dos lados do objeto está paralelo a esta linha. Existe um só ponto de fuga. Já na perspectiva central há uma representação realística do espaço físico, na qual linhas verticais e horizontais frontais são combinadas com linhas convergentes a um único ponto, criando um centro focal. Parzysz (1988), em seu trabalho, toma como princípios que:

1. Existe uma dialética entre a aquisição (ou reforço) de conhecimento em Geometria do espaço e o domínio das representações planas de objetos 3D.
2. Antes do trabalho com representação plana é preciso passar por uma fase de utilização de uma representação em 3D (modelo tipo maquete), mesmo com alunos de ensino médio, para que as imagens mentais melhor se consolidem.
3. É preciso explicitar as regras de desenho de representações, isto porque este tipo de representação não decorre de convenções mais ou menos obscuras, mas de propriedades geométricas projetivas.

Parzysz emprega na sua investigação as expressões *"visto"* (aquilo que se vê) e *"sabido"* (aquilo que se sabe do objeto). Com tais expressões interpreta os desenhos realizados pelos alunos do ensino médio e observa que as escolhas feitas pelos alunos privilegiam o "saber" ou o "ver". Em seus experimentos o autor analisa a influência do *"visto"* sobre o *"sabido"* e a influência do *"sabido"* sobre o *"visto",* concluindo que o ensino de Geometria Espacial e os seus efeitos estão relacionados com os diferentes tipos de perspectivas e às propriedades preservadas e perdidas.

A representação plana do objeto espacial não consegue conservar todas as suas características (físicas ou geométricas e aspecto apresentado à visualização). Parzysz diferencia dois níveis de representações: próximas e distantes.

- ✓ Nível 01 (representações próximas): nessas representações há semelhança às figuras geométricas, ou ainda, é a própria figura na forma concreta. Em geral podem ser bidimensionais (2D), sendo representada por um desenho quando a figura está inserida na Geometria Plana; tridimensionais (3D) sendo representadas por maquetes quando a figura pertence à Geometria Espacial.
- ✓ Nível 02 (representações distantes): nessas representações a dimensão da representação é inferior à dimensão da figura a ser estudada.

No Quadro 1 apresentado a seguir, o autor considera o nível 00 como sendo uma representação imaginária para todos os tipos de objetos geométricos (no plano ou no espaço).

Por considerar que nenhuma forma de representação é perfeita pelas perdas de informações na passagem do nível de representação imaginária (00) para os demais níveis, o autor expõe dois problemas presentes numa comunicação gráfica: a codificação e a decodificação de objetos geométricos, causados pela impossibilidade de resultar uma representação próxima e a consequente perda de informações adicionais do objeto geométrico.

Quadro 1 – Relações entre figuras e suas representações

		GEOMETRIA	
		2D (Plano)	3D (Espaço)
	Nível 00	Figuras	
Representações Próximas	Nível 01	Desenhos	Maquetes
Representações Distantes	Nível 02	____________	Desenhos

Fonte: PARZYSZ, 1988, p.80.

Parzysz (1988) apresenta algumas recomendações para que os processos de codificação e decodificação de objetos geométricos não tenham prejuízo na interpretação de dados das representações fornecidas aos alunos durante as atividades propostas. Estas recomendações foram elaboradas a partir do seu trabalho de observação dos alunos. Na codificação, recomenda que os seguintes aspectos devem ser evidenciados: o tipo de representação (se é uma representação em perspectiva ou uma representação da Geometria descritiva); a escolha dos elementos de projeções (se a opção é pela perspectiva paralela a escolha deve ser entre cavaleira ou isométrica); a escolha dos parâmetros dessas representações (o coeficiente de redução na perspectiva paralela isométrica ou o ponto de fuga na perspectiva central) e a perda de informações na passagem para duas dimensões através das projeções. Na decodificação dos objetos geométricos o autor apresenta três etapas para se desenvolver com os alunos: primeiramente eles necessitam aperceber-se diante de um objeto geométrico, em seguida reconhecer as possibilidades de codificação e, por último, fazer uso adequado da decodificação correspondente.

Os estudos realizados por Duval, Gutiérrez e Parzysz, são um forte auxílio na busca de caminhos para a melhoria da aprendizagem em Geometria Espacial. As recomendações de Duval nos auxiliam na compreensão dos processos cognitivos necessários à aprendizagem na Geometria Espacial; o trabalho de Van Hiele nos fornece subsídios para reconhecer o nível de compreensão dos alunos e os trabalhos de Gutiérrez e Parzysz, nos auxiliam a entender as dificuldades enfrentadas pelos alunos na interpretação das representações planas de objetos tridimensionais, nos fornecendo recomendações para o trabalho com estas representações.

2.3 A tecnologia e a Geometria Espacial

Atualmente, vivemos numa época de mudanças de costumes, tecnologia, entre outras, e com ritmo cada vez mais acelerado. Inovações tecnológicas invadem a nossa vida, possibilitando agilidade na realização de tarefas antes cansativas e demoradas. Isto acontece da mesma forma, na educação. Os computadores, os softwares e animações cada vez mais elaborados, a Internet, os sites de ensino a distância estão, todos, cada vez mais ao alcance daqueles que se interessam e se dispõem a utilizá-los. Nos diz Gonçalves (2004) que:

> Na dimensão educacional, a tecnologia não consiste apenas em mais um recurso para os professores motivarem as suas aulas, mas também um recurso que também propicia a inclusão social e leva o aluno a cidadania. Os professores que trabalham em sala de aula devem refletir sobre o cenário tecnológico atual, sugerindo e pesquisando novas maneiras do uso do computador para as aulas de Matemática, propiciando ao aluno a adequação ao mercado de trabalho da atualidade. (GONÇALVES, 2004, p.2)

Apesar do grande número de estudos quanto à utilização bem sucedida de novas tecnologias na aprendizagem da Matemática, ainda podemos observar resistência dos professores para utilizar estas ferramentas em suas aulas. Tomamos consciência desta realidade através de leituras que dizem que a evolução das tecnologias não está causando as esperadas mudanças na prática docente.

As resistências e alegações dos professores aparecem em diversos trabalhos de pesquisa realizados no Brasil tais como o de Kawasaki (2008) que busca motivos para esta resistência e propõe mudanças na formação de professores. Estas resistências vêm de algum tempo, pois em 1999, numa pesquisa realizada por Gonçalves (2004), no estado de São Paulo, na disciplina de Metodologia do Ensino Fundamental, já se evidenciava que os professores achavam não existir outros instrumentos tão eficazes quanto giz e lousa. Dullius e Quartieri (2005) em trabalho de pesquisa na Região do Vale do Taquari constataram que os professores utilizam o computador para digitar textos, correio eletrônico e fazer suas pesquisas. As escolas em que lecionam, em sua maioria, possuem laboratório de informática, no entanto eles não utilizam os recursos por acomodação e/ou falta de conhecimento, tanto dos softwares, quanto das estratégias de ensino que poderiam ser utilizadas em ambientes informatizados.

Há alguns anos, diferentes autores vêm discutindo sobre o uso da tecnologia na melhoria do ensino de Matemática (Kaput (1992, 1999, 2007), Gravina (1998, 2001), Borba e Villarreal (2005), Shaffer e Clinton (2006), Moreno-Armella et al (2008), Roschelle et al., (2000)). Estes autores, de uma forma geral, consideram que o conhecimento se dá a partir das percepções e ações do sujeito, as quais são mediadas por estruturas mentais já existentes ou em construção ou que ainda serão construídas ao longo do processo de aprendizagem. E para que isto aconteça são necessárias ações coordenadas, que podem ser de caráter concreto ou abstrato, e nisso, os autores mencionados, mostram que os ambientes informatizados se apresentam como interessante suporte. Em Gravina (2001, p.19) tem-se um determinado posicionamento quanto ao uso da tecnologia : *"Os recursos informáticos hoje disponíveis estimulam a busca de estratégias favoráveis à construção do conhecimento em Geometria, para além do que vem fazendo a escola"*. Durante seu trabalho de pesquisa, Gravina (2001) exige um funcionamento cognitivo ativo dos alunos, pois coloca sob sua responsabilidade as ações, formulações e validações das atividades, levando-os a se concentrar na busca de explicações para suas constatações empíricas. Em consequência disto, conseguiram apresentar autonomia na produção das demonstrações solicitadas. Este posicionamento ativo dos alunos na busca de soluções se diferencia da atitude exigida na escola tradicional, na qual ele é um receptor de conhecimento.

Pensando nos problemas de aprendizagem relacionados ao sistema de ensino tradicional, no qual os alunos são meros receptores, Kaput (1992), um dos grandes pesquisadores da influência tecnológica na aprendizagem, já vislumbrava novas alternativas para o currículo escolar, especialmente da Matemática. Kaput preconiza que a tecnologia não seria simplesmente utilizada para dar apoio ao ensino da Matemática tradicional, mas também para desenvolver maneiras completamente inovadoras de pensar em Matemática. Moreno-Armella et al (2008, p. 103), pesquisadores que prosseguiram com as ideias de Kaput (falecido em 2005) registram que *"a natureza dos símbolos matemáticos têm evoluído nos últimos anos de estáticos, de inscrições inertes para objetos dinâmicos, ou diagramas que são construídos, manipulados e interativos".* A aprendizagem em Matemática depende de ações que levam ao experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar e abstrair. Com a utilização da tecnologia, como por exemplo, programas de Geometria dinâmica, podemos através de uma única construção, efetuar um grande número de observações e testes com esta construção, o que seria praticamente impossível através das construções tradicionais com régua e compasso. A utilização da tecnologia amplia a capacidade investigativa, dando condições para que os alunos verifiquem particularidades que, da forma tradicional, talvez não conseguissem observá-las.

Borba e Villarreal (2005), em seu livro[43], propõem a teoria dos *seres-humanos-com-mídias* defendendo que o conhecimento é produzido por uma coletividade que se constitui de seres humanos que trazem consigo as tecnologias que estão a nossa disposição, dentre elas as mídias digitais. Com esta perspectiva teórica, os autores acreditam que as mídias que veiculam de forma dinâmica som, escrita e imagem, reorganizam o pensamento humano, pois quando se busca resolver um problema matemático elas enriquecem as ações do usuário. Os autores alertam para que não se considere a tecnologia como um mero acessório, mas sim como um componente que se agrega a nossa forma de pensar. É o que eles chama de *moldagem recíproca* - por um lado a mídia influencia a forma de desenvolver determinadas ações, mas por outro lado é o usuário que toma as decisões de uso da mídia.

Shaffer e Clinton (2006) também introduzem um novo conceito – as "*ferramentasparaopensamento"* com a qual procuram abarcar a *"relação recíproca entre ferramentas e pensamentos, entre pessoas e objetos"* (Shaffer e Clinton, 2006, p. 291). Esta forte inter-relação entre pessoas e objetos caracteriza uma "*teoria da mente distribuída*", que busca entender os efeitos criados e reforçados na interação social proporcionada pelas "*ferramentasparaopensamento".* Shaffer e Clinton (2006) enfatizam que :

---

[43] Humans-with-media and reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization (2005).

> Nesta perspectiva, a razão para a introdução de novas tecnologias em sala de aula não é recriar atividades existentes, mas sim para permitir possibilidades mais interessantes que novas *ferramentasparaopensamento* fornecem. Como não existem pensamentos independentes de instrumentos (ou ferramentas desprovida de pensamento), a inteligência é sempre a colaboração de *ferramentasparaopensamento*. (SHAFFER e CLINTON, 2006, p. 294)

Quanto a aprendizagem da Geometria, existem muitos recursos tecnológicos. Alguns softwares disponíveis são o Cabri Géomètre, Wingeometric, Shapari, Régua e Compasso, Dr. Geo, Geogebra, Calques 3D, entre outros. Diversos vídeos, que fazem parte do TV Escola, tratando deste assunto, também estão disponíveis no site de domínio público do MEC, e alguns títulos são "Mão na forma", "Forma que se transforma" e "Arte e Matemática". Outros sites disponibilizam acesso a bibliotecas digitais, nos quais existem muitos trabalhos com Matemática, em particular com Geometria. Neste universo, cabe aos professores uma busca minuciosa, bem como o estudo e análise dos recursos para que haja um bom aproveitamento em sala de aula.

No âmbito da aprendizagem da Geometria Espacial , o software Calques 3D pode ser uma interessante "*ferramentaparaopensamento".* Ele pode propiciar a ampliação da capacidade de visualização dos sólidos geométricos. Na próxima seção apresentamos uma breve análise dos recursos deste software.

2.3.1 O Calques 3D

O Calques 3D é um software de Geometria dinâmica que pode auxiliar na aprendizagem da Geometria Espacial. Ele foi desenvolvido por Nicolas Van Labeke[44] e está disponível para download em http://www.calques3d.org/download.html. É software que roda na plataforma Windows e tem a grande vantagem de ser gratuito.

O software foi concebido para realizar construções no espaço tridimensional. Nele, o usuário consegue modificar o sistema de referência espacial, escolher a perspectiva e modificar o ponto de vista, e assim pode observar e explorar formas geométricas espaciais. As construções são dinâmicas[45] o que significa que podem ser alteradas no tamanho e posição

---

[44] O software faz parte de sua tese de doutorado intitulada *Prise en compte de l'usager enseignant dans la conception des EIAO. Illustration dans Calques 3D*, realizada na Universidade Henri Poincaré, Nantes I no ano de 1999.

[45] O termo Geometria dinâmica foi utilizado inicialmente por Nick Jakiw e Steve Rasmussen da *Key Curriculum Press, Inc.* para diferenciar os tipos de softwares destinados ao trabalho com Geometria. Os softwares envolvidos com na Geometria Dinâmica permitem a criação e manipulação de figuras geométricas que tomam como ponto de partida suas propriedades.

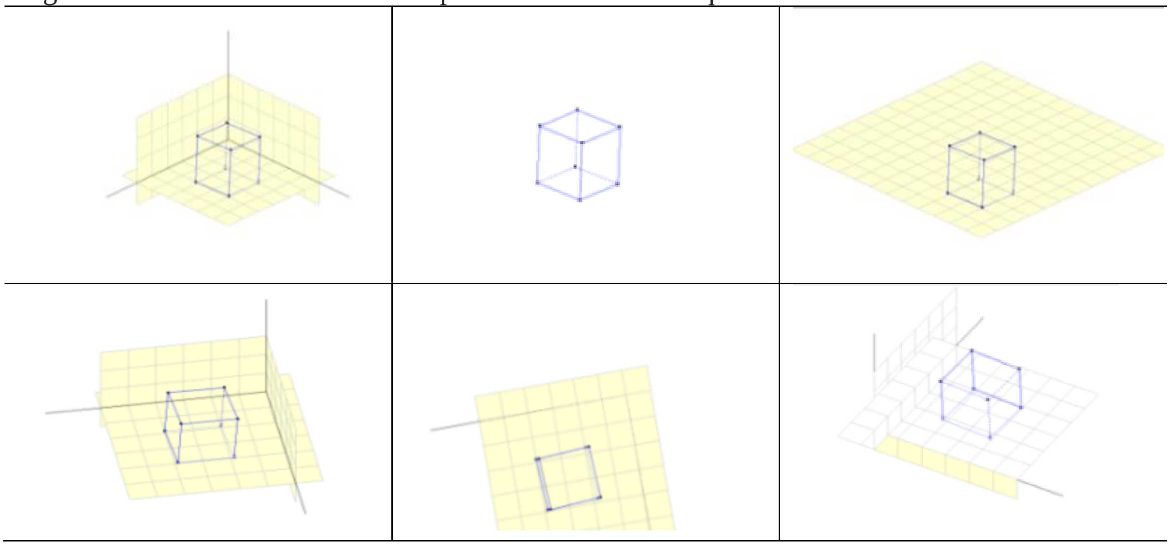
espacial através do "arrastar" pontos (movimentar a construção sem modificar suas características) , criando-se as condições para descobrir propriedades que estão no sólido construído. Van Labeke (1998) descreve três objetivos que nortearam a concepção do Calques 3D:

- ✓ Observação: permite que se possa ver e entender a terceira dimensão através de modificações no sistema de referência espacial (construções com os eixos cartesianos, construções apenas sobre um plano, etc) ou na escolha do tipo de perspectiva (cavaleira ou oblíqua); permite também alterar o ponto de vista do observador e o modo de exibição visual (open GL 3D), bem como escrever comentários sobre os objetos em estudo.
- ✓ Construção: permite uma construção dinâmica de sólidos usando elementos geométricos básicos (pontos, linhas, planos, interseção, paralelas, perpendiculares, etc.)
- ✓ Exploração: permite que se possa explorar e descobrir as propriedades geométricas dos sólidos (arrastando pontos-base, mudando o ponto de vista do observador, etc.)

No que segue apresento algumas das ferramentas disponíveis no software. As construções fazem uso de conceitos geométricos básicos. A interface do software é simples e oferece um conjunto de ferramentas para a construção de objetos tridimensionais tais como pontos, retas, planos, círculos, polígonos, cubos, cilindros e esferas.

O seu conjunto de ferramentas também apresenta a possibilidade de marcar (construir) a interseção entre dos objetos citados e realizar e construções que envolvam perpendicularidade e paralelismo. Ao construir uma figura podemos mudar o ângulo de visualização e também configurar o sistema de referência (Figura 2), ferramentas que proporcionam uma melhor percepção tridimensional do objeto.

Figura 2 – Diferentes referenciais e pontos de vista no Calques 3D



Fonte: Elaborada pela autora

Para acompanhar os passos de construção existem duas maneiras: uma janela que descreve o *histórico* da construção e uma janela que esboça um *Diagrama de árvore* que estabelece uma relação de dependência entre os objetos. Com estas janelas pode-se também posteriormente analisar os passos realizados em cada construção. Outro recurso disponível e interessante é a janela Mathpad, na qual é possível exibir as coordenadas e equações cartesianas dos objetos. Também são oferecidas ferramentas para animação, macros e rastros de objetos. Para aprender a usá-las, além de tutoriais disponíveis na internet existem vídeos de demonstrações de algumas ferramentas e construções realizadas no software em páginas do *you tube*[46].

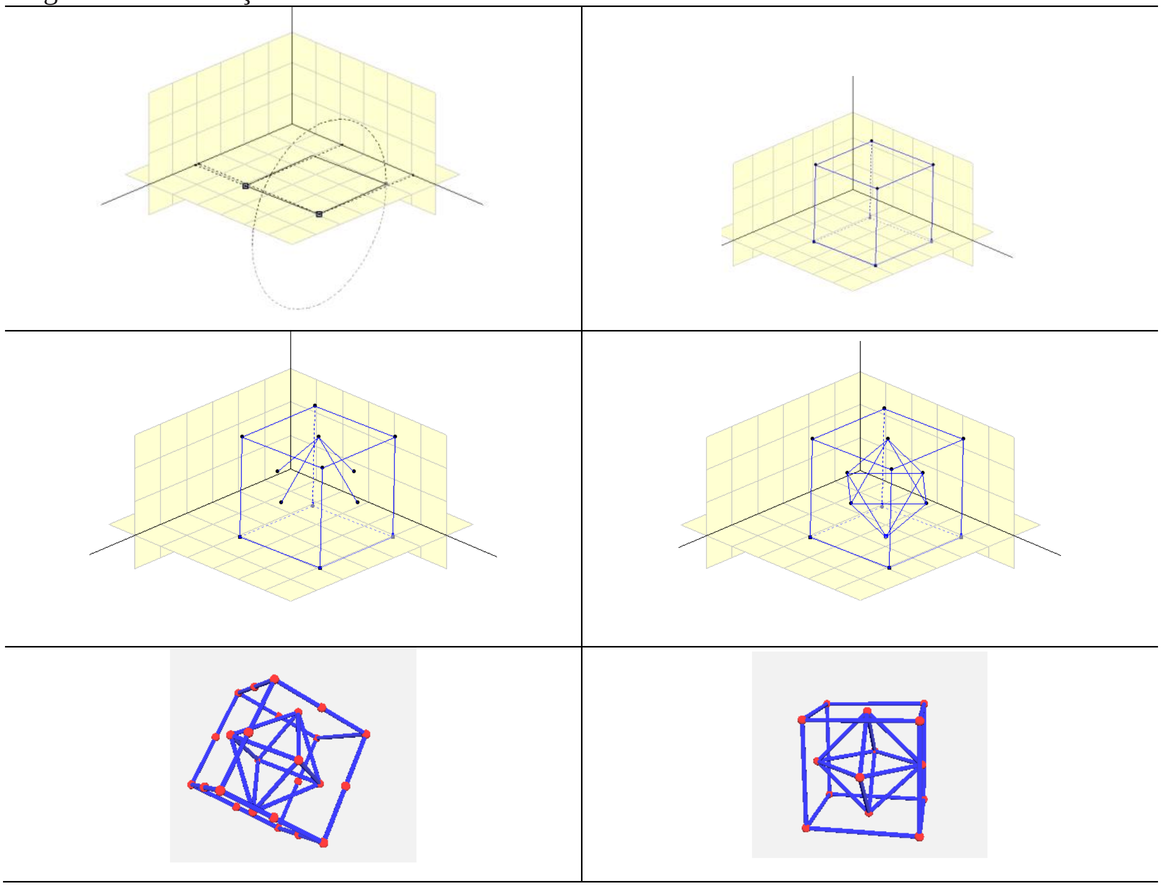
As ferramentas disponibilizadas no Calques 3D estabelecem um elo intermediário entre uma representação bidimensional, que é apresentada nos livros didáticos e o objeto (ou modelo) real. Ao realizar uma construção no Calques 3D o aluno tem condições de modificar seu ponto de vista auxiliando-o na sua compreensão e resolução de dúvidas.

Podemos tomar como exemplo a construção de um octaedro inscrito em um cubo. Para esta construção, o aluno inicia pelo cubo. Para construí-lo no software basta marcar dois pontos e em seguida, utilizar a ferramenta cubo. Ao construir o octaedro o aluno deve imaginar o cubo (tridimensional) e a posição na qual deverá construir o octaedro. Este

[46] Alguns tutoriais sobre o Calques 3D:
http://mais.uol.com.br/view/i54gm6ahdxbb/calques-3d--ponto-livre-dar-nome-e-suprimir 0402356CD0913326?types=A&
http://mais.uol.com.br/view/i54gm6ahdxbb/calques-3d--paralelas-e-perpendiculares-0402316AD4913326?types=A&
http://mais.uol.com.br/view/i54gm6ahdxbb/calques-3d--polgonos-circunferncias-e-arcos-0402306CD4913326?types=A&
http://www.youtube.com/watch?v=2ZCAeHPvjnk
http://mais.uol.com.br/view/i54gm6ahdxbb/calques-3d--paralelas-e-perpendiculares-0402316AD4913326?types=A

raciocínio é difícil para o aluno, pois este tipo de construção dificilmente é realizado com material concreto. O software nos permite realizar experiências na construção, encontrando a melhor posição para construir o octaedro. Na Figura 3, temos os passos para a construção, que se inicia pelo cubo, em seguida a construção dos pontos centrais de cada face (através do ponto médio da diagonal de cada face) e após a construção das arestas do octaedro.

Figura 3 – Construção de um octaedro inscrito num cubo.



Fonte: Elaborada pela autora

Os professores que já conhecem softwares de Geometria dinâmica bidimensionais como *Régua e Compasso* ou *Geogebra*, vão sentir, de imediato, que no Calques 3D não temos a disposição a ferramenta *compasso* – aquela que constrói um círculo dado seu centro e raio. Isto dificulta, por exemplo, a construção de polígonos regulares com os métodos de construção com régua e compasso. Mas a principal finalidade do software Calques 3D é a realização de construções, observação e exploração figuras geométricas espaciais, e isto se consegue realizar com relativa facilidade através dos principais conceitos de Geometria.

No próximo capítulo trato da construção de uma proposta didática que inclui o uso do software Calques 3D como uma *ferramentaparaopensamento.* Busca-se através da interação entre alunos e software desenvolver a capacidade de visualização e observação e, assim desenvolver habilidades para reconhecer as propriedades e relações que se apresentam nos objetos espaciais, mesmo quando representados de forma estática no papel e portanto exigindo o uso da imaginação visual.

3 A CONSTRUÇÃO DE UMA PROPOSTA DIDÁTICA

A escolha do tema desta proposta de trabalho baseia-se, principalmente, na minha experiência no ensino de Geometria Espacial, nos últimos dez anos, que mesmo buscando a aplicação de novas metodologias, identifica dificuldades dos alunos no momento da resolução de exercícios que exigem a aplicação de conceitos já apresentados em sala de aula.

Durante estes anos de experiência constatei a importância de desenvolver os conceitos de Geometria Espacial de forma significativa e atrativa, através de conexões do conteúdo com a realidade, visando suas aplicações nas mais diversas situações-problema apresentadas em exercícios de aula e livros, concursos diversos e vestibulares ou ainda em situações cotidianas.

Ao longo dos meus anos de prática, diversas tentativas de metodologias foram testadas, dentre elas as técnicas de perspectiva e o uso de maquetes tridimensionais. Porém, quando apresentadas situações-problema envolvendo sólidos geométricos mais elaborados, os alunos apresentam dificuldade.

As tentativas já realizadas durante estes anos de prática e os novos conhecimentos desenvolvidos durante o Mestrado em Ensino de Matemática me remetem a algumas questões motivadoras para este trabalho de pesquisa:

- ✓ Como auxiliar os alunos na melhoria de sua capacidade de visualização?
- ✓ Seria o trabalho com software de Geometria dinâmica uma experiência válida?

O trabalho usa os pressupostos da Engenharia Didática. A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que se constitui na formulação, realização, observação e análise de uma sequência de ensino projetada por um professor-engenheiro (Douady, 1995). O professor realiza uma *análise a priori* desta sequência de ensino e durante sua aplicação vai adaptando-a a sua realidade (ao seu grupo de alunos). Através da Engenharia Didática o professor passa a refletir e avaliar sua ação pedagógica, buscando redirecionar sua prática, pois durante sua reflexão ele busca entender as dificuldades encontradas pelos alunos, o que influenciará sua ação pedagógica. Cabe ao professor criar condições para que os alunos se apropriem do conhecimento proposto em cada uma de suas atividades. A Engenharia didática prevê quatro fases e que neste trabalho assim se constituem: análises prévias e é disto que trata o capítulo 2; a concepção de uma sequência didática acompanhada de uma *análise a priori*, detalhamento a ser feito neste capítulo 3; a experimentação e *análise a posteriori*, aspectos que serão abordados no capítulo 4.

Como parte inicial da pesquisa, além das fases das análise prévias e da concepção da sequência didática acompanhada de *análise a priori*, tem-se:

- ✓ uma avaliação inicial dos alunos da turma que participa da pesquisa, tanto em relação à sua linguagem geométrica quanto ao conhecimento de propriedades geométricas, e isto será feito através de um pré-teste que envolve algumas questões do próprio teste de Van Hiele e outras que exploram a visualização de sólidos geométricos;
- ✓ uma retomada, pelo professor, de alguns conteúdos de Geometria Plana (antes de iniciar-se a sequência didática projetada) nos quais os alunos serão avaliados.

Após a fase de implementação da sequência didática acompanhada de *análise a posteriori* , tem-se também como parte final da pesquisa:

- ✓ em sala de aula serão desenvolvidos os conteúdos tradicionais relativos aos sólidos geométricos prismas e cilindros, e serão resolvidos correspondentes exercícios;
- ✓ os alunos serão avaliados quanto aos conteúdos desenvolvidos na sequência didática com o Calques 3D e em sala de aula.

No que segue, na seção 3.1 passo a detalhar a parte inicial da pesquisa, que trata do perfil da turma que participa da pesquisa. Na seção 3.2 apresento a concepção da sequência didática acompanhada de análise a priori (segunda fase da Engenharia Didática).

3.1 Conhecendo os alunos

Este trabalho de pesquisa é realizado com uma das quatro turmas de 3º ano do Ensino Médio de uma escola privada de Novo Hamburgo – RS, no ano de 2010. Esta turma será sempre referida como "Turma Especial".

Esta Turma Especial tem 32 alunos, com idades variando de 16 a 18 anos. A maioria da turma, 21 alunos, estuda na escola desde o Ensino Fundamental; os outros 11 alunos ingressaram na escola apenas no Ensino Médio. Destes 11 alunos, apenas uma aluna, iniciou seus estudos na escola no 2º ano do Ensino Médio e os demais ingressaram no 1º ano.

Como fui professora da turma também no 2º ano do Ensino Médio conheço algumas particularidades da turma. A turma é bastante agitada, porém bastante questionadora e participativa. Dois alunos desta turma são considerados de inclusão neurológica (cognitiva) através de laudos médicos e são avaliados através de parecer descritivo. Outra particularidade da turma é que eles antes do 2º ano eles não estavam acostumados a utilizar softwares na aula de Matemática. Eu, como professora deles utilizei o software Geogebra e alguns objetos de aprendizagem sobre trigonometria quando estavam no 2º ano.

Para avaliar o conhecimento prévio da turma, em Geometria, realizei um pré-teste (APÊNDICE A) contendo questões do Teste de Van Hiele relativas a conceitos iniciais da Geometria Plana tais como as posições entre retas (paralelas e perpendiculares) e sobre polígonos (triângulos, quadrados e retângulos). As outras questões envolvem raciocínio espacial, como por exemplo, fornecer a planificação de um sólido e identificá-lo "montado", imaginar a composição de um sólido oriundo de outros.

Analisando as respostas dos alunos, os seguintes resultados foram obtidos:

Quadro 2 – Análise das respostas dos alunos ao pré-teste.

	Todas alternativas corretas	Falta de alguma das alternativas corretas (sem erros)	Uma alternativa errada (as outras corretas)	Todas erradas (mesmo sendo apenas uma marcada)
Questão 1	25	7	-	-
Questão 2	30	-	2	-
Questão 3	24	3	5	-
Questão 4	12	1	9	10
Questão 5	17	4	9	2
Questão 6	15	17	-	-
Questão 7	27	-	-	5
Questão 8	6	12	12	2
Questão 9	15	-	17	-
Questão 10	20	-	1	11
Questão 11	19	-	-	13
Questão 12	25	-	-	7

Fonte: Elaborado pela própria autora

Ao analisar o pré-teste percebe-se que os alunos ainda apresentam dificuldades com os conceitos e propriedades iniciais da Geometria Plana. Os percentuais de erros mostram isto:

1. No reconhecimento das figuras planas: triângulos (22%), quadrados (6%), retângulos e paralelogramos(25%).

2. No conceito de retas paralelas e, como consequência, de retas perpendiculares e concorrentes (47%).
3. Características dos retângulos (53%).

Nas questões envolvendo Geometria Espacial, percebe-se que os alunos apresentam as seguintes dificuldades:

1. Visualização de um sólido, conhecendo a sua planificação: questão 7 (16%), questão 10 (38 %), questão 11 (41%).
2. Visualização das semelhanças e/ou diferenças entre os sólidos: questão 9 (53%).
3. Visualização da sobreposição de dois sólidos para formação de um novo sólido: questão 8 (81%).
4. Visualização das características da representação plana de um sólido geométrico: questão 12 (22%).

Esta avaliação mostrou que os conteúdos de Geometria Plana precisavam ser retomados pelo professor, antes de dar início ao estudo da Geometria Espacial. Analisando as respostas apresentadas no pré-teste pode-se considerar que os alunos se encontram distribuídos, no máximo, até o nível 3, dos níveis de Van Hiele. Como no pré-teste não foi solicitada nenhuma demonstração, porém 4 alunos acertaram todas as questões, considero possível que estejam habilitados até o nível 3 da classificação de Van Hiele.

Assim, os seguintes conteúdos de Geometria Plana foram retomados com os alunos: Teorema de Tales; semelhança de figuras planas (especialmente os triângulos); escalas; Teorema de Pitágoras; áreas das figuras planas. A retomada destes conteúdos, durante três semanas (9h/a), foi através de aulas expositivas e utilização do livro-texto[47] adotado pela escola. Após a retomada de cada assunto, os alunos realizaram os exercícios do livro e outros devidamente reproduzidos em folhas de exercícios.

Após estas aulas, uma avaliação inicial (APÊNDICE B) sobre os conteúdos listados acima foi realizada com a Turma Especial e também com as demais turmas do 3º ano do Ensino Médio e as notas médias, por turma, foram:

- ✓ Turma Especial: 5,88
- ✓ Turma A: 5,64
- ✓ Turma B: 7,74
- ✓ Turma C: 5,64

[47] Livro-texto: *Matemática – construção e significado. Autor: José L. P. Mello. Editora Moderna.*

O Quadro 3 permite comparar os resultados obtidos pelas turmas de 3º ano da escola, e mostra que a Turma Especial não é a que apresenta o melhor rendimento.

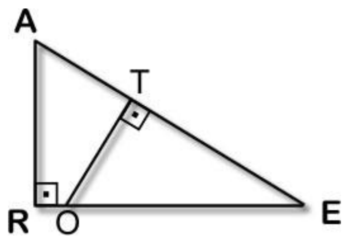
Quadro 3 – Notas obtidas na avaliação de Geometria Plana

	Notas inferiores a 5,0	Notas entre 5,0 e 7,0 $5 \leq x \leq 7$	Notas superiores a 7,0
Turma Especial	12 (37,5%)	8 (25%)	12 (37,5%)
Turma A	13 (45%)	3 (10%)	13 (45%)
Turma B	6 (21%)	2 (7%)	20 (72%)
Turma C	10 (37%)	8 (30%)	9 (33%)

Fonte: Elaborado pela própria autora

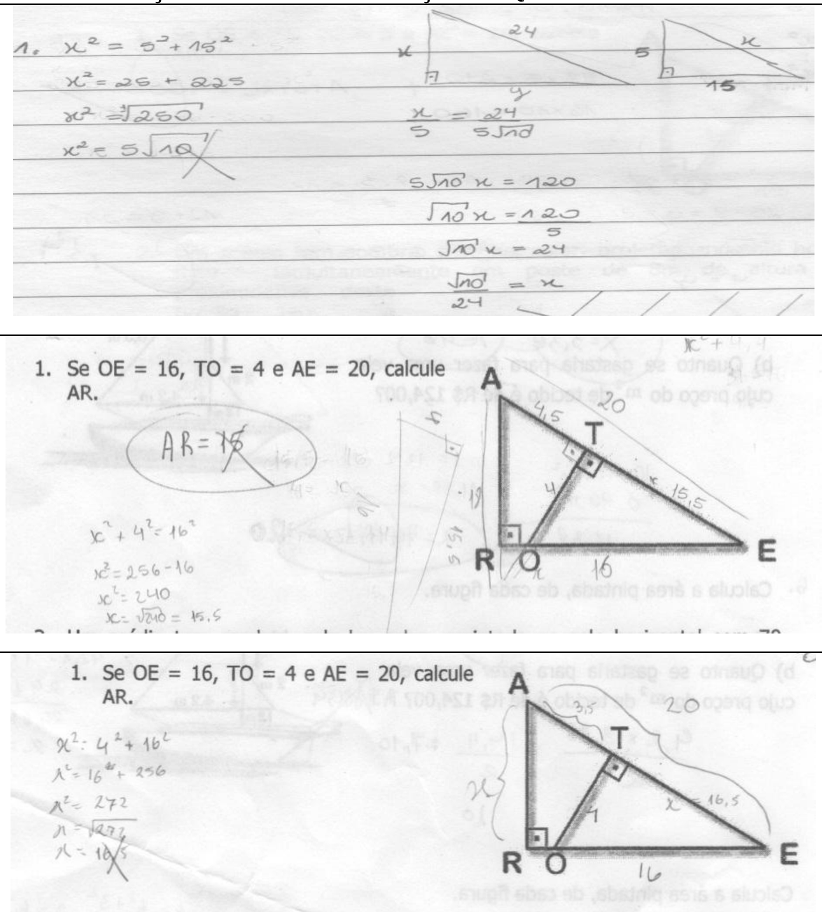
Ao analisar a resolução das questões, duas delas chamam a atenção pela sua forma: a questão 1 e a questão 6b.

1. Se OE = 16, TO = 4 e AE = 20, calcule AR.



Na resolução da questão 1, a utilização de semelhança de triângulos se faz necessária, porém, por se tratar de triângulos retângulos os alunos buscam a solução através do Teorema de Pitágoras, cometendo erros, ilustrados nas diferentes resoluções dadas na Figura 4.

Figura 4 – Recortes da avaliação dos alunos. Resolução da Questão 1.

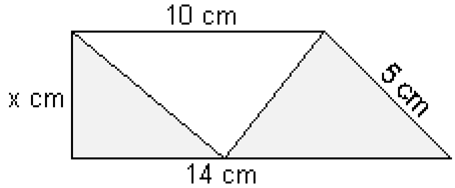


Fonte: Material dos alunos

Um número considerável de alunos (15) tentou a solução através do Teorema de Pitágoras. Os alunos demonstraram conhecimento do teorema porém ele não é necessário para a resolução da questão. Eles associaram, de forma automática, o triângulo retângulo ao Teorema de Pitágoras, sem avaliar outras propriedades - nesta questão há necessidade de visualizar triângulos semelhantes. A questão foi debatida após a devolução das avaliações, com destaque para este fato.

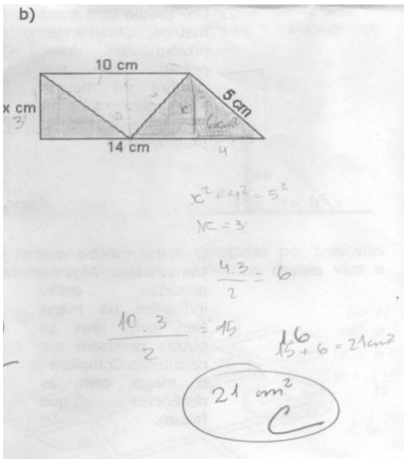
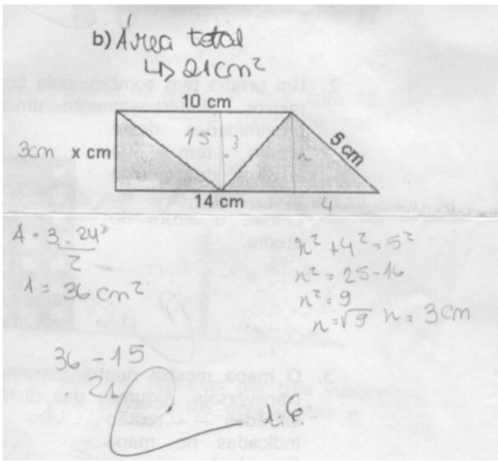
6. Calcule a área pintada, de cada figura.

b)



Na questão 6b**,** uma das resoluções que considero mais simples é: calcular a área do trapézio e diminuir o triângulo de cor branca. Porém, poucos alunos (4) utilizaram esta estratégia, buscando outras estratégias conforme a Figura 5.

Figura 5 – Recortes da avaliação dos alunos. Resoluções da Questão 6b – 1ª parte

A	B
	

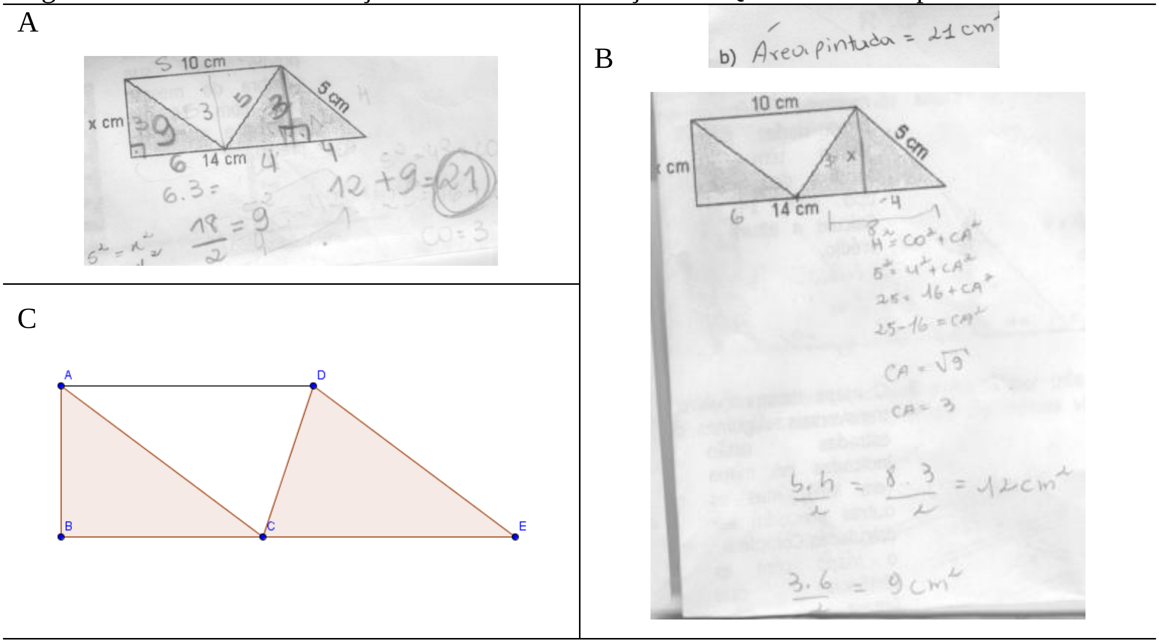
Fonte: Material dos alunos

Na resolução apresentada na Figura 5A, o aluno separou a figura num retângulo e um triângulo. O aluno considerou o triângulo branco como metade do retângulo, calculando a área de cada um somando-as em seguida. Na resolução da figura 5B, o aluno realizou a resolução sugerida anteriormente.

Após a devolução das provas foram realizados questionamentos sobre essa questão tentando minimizar as dúvidas.

Nas duas soluções, apresentadas na Figura 6 (A e B) os alunos consideraram o triângulo do lado direito, como isósceles e sua altura dividindo-o ao meio. Porém esta informação não foi fornecida, mas a figura induz a esta conclusão. Por esta informação não ser fornecida de forma clara, este triângulo poderia ser escaleno, mas com uma diferença pouco visível, podendo levar os alunos ao erro. Esta questão indica um cuidado a ser considerado na elaboração de questões deste tipo, pois deve estar destacado na figura, ou no texto, quando o triângulo considerado é do tipo escaleno como mostra, por exemplo, a Figura 6C.

Figura 6 – Recortes da avaliação dos alunos. Resoluções da Questão 6b – 2ª parte



Fonte: Material dos alunos

A utilização do Teorema de Pitágoras na resolução da questão 6b, mesmo nem sempre correta ou necessária, mostra novamente que este conteúdo está muito presente para os alunos. Porém, muitos dos alunos não conseguiram avaliar adequadamente quando a sua utilização se fazia necessária.

Após a aplicação do pré-teste, a revisão de conteúdos e avaliação individual verificou-se as principais dificuldades dos alunos, que vão desde o reconhecimento das figuras, aplicação de conceitos e dificuldades de cálculo. Os conteúdos revisados foram importantes para a continuidade da proposta de trabalho, pois os alunos necessitam especialmente reconhecer as figuras planas que formam as faces dos objetos tridimensionais que serão estudados, bem como a relação de seus elementos, que se utilizam do Teorema de Pitágoras e proporcionalidade.

3.2 A proposta didática

Na construção desta proposta, a metodologia de pesquisa utilizada é a Engenharia Didática, conforme descrição na página 41. Para dar início ao relato da proposta, cabe aqui frisar que nenhum trabalho relativo às nomenclaturas específicas de Geometria Espacial foi realizado com os alunos da turma de aplicação. Antes de dar início às atividades da sequência e, portanto não fazendo parte da sequência didática, apenas os principais conceitos da

Geometria de posição foram desenvolvidos por serem necessários para a utilização do software Calques 3D nas construções propostas. Considerando estas observações expostas, passo a tratar da proposta de sequência didática a ser testada na turma de 3º ano escolhida.

A sequência didática consiste em um conjunto de atividades distribuídas em cinco Encontros, num total de 8 horas/aula e trata da construção de sólidos geométricos no software Calques 3D (o software foi apresentado no capítulo 2).

As atividades propostas serão fornecidas aos alunos em folhas que contêm as figuras (em perspectiva ou planificadas) ou a sua descrição. Cada conjunto de atividades, tem objetivos diferentes, como indica o Quadro 4.

Quadro 4 – Planejamento para aplicação da sequência didática

		Objetivos
Encontro 1 (1 h/a)	1ª atividade	Realizar as construções, no Calques 3D, a partir da representação em perspectiva. Verificar e aplicar os conceitos da Geometria de posição desenvolvidos.
	2ª atividade	
Encontro 2 (2 h/a)	1ª atividade	Realizar a construção dos sólidos a partir da sua representação em perspectiva.
	2ª atividade	Realizar a construção dos sólidos a partir de sua planificação.
	3ª atividade	Descrever as características dos sólidos construídos.
Encontro 3 (1 h/a)	1ª atividade	Realizar a construção dos sólidos presentes em questões do livro, observando as características fornecidas em cada questão.
	2ª atividade	Descrever as características dos sólidos construídos.
Encontro 4 (2 h/a)		Construir o sólido proposto e suas subdivisões
Encontro 5 (2 h/a)		Realizar as construções dos sólidos observando as descrições textuais fornecidas.

Fonte: Elaborado pela própria autora

Em cada Encontro os alunos recebem a folha contendo as atividades do dia para realizar em duplas no laboratório de informática da escola. As folhas de atividades encontram-se, na íntegra, no Apêndice E.

Para a organização dos trabalhos no laboratório de informática os seguintes procedimentos, para os alunos, estão previstos:

- ✓ Salvar os arquivos contendo as construções realizadas, mesmo que incompletas, na pasta específica da turma.

- ✓ Enviar os arquivos contendo as atividades para o e-mail da professora , ao final de cada Encontro, mesmo que com atividade incompleta.
- ✓ Iniciar uma nova atividade apenas após o término das atividades anteriores.

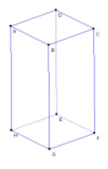
A seguir apresento a *análise a priori* da sequência didática. Estas análises, conforme os princípios da Engenharia Didática registram minhas expectativas quanto a aprendizagem dos alunos. A análise vai se concentrar nas atividades que mais refletem o propósito de cada Encontro, o qual está sempre relacionado com o desenvolvimento de habilidades para visualização espacial. As construções a serem feitas ao longo dos diferentes Encontros apresentam diferentes graus de dificuldade, dependendo do tipo de informação que é dada ao aluno: se representação espacial em perspectiva ou se planificação ou se apenas uma descrição textual. A sequência didática, na íntegra, está no Apêndice E.

3.2.1 Encontro 1

As construções a serem feitas, com representação em perspectiva de cada sólido, têm como objetivo a aplicação dos conceitos da Geometria de posição tais como: posições relativas entre planos, dadas nas faces de um sólido; posições relativas entre retas, dadas nas arestas do sólido.

Na construção proposta na Atividade 1 - um paralelepípedo[48] com representação em perspectiva - é exigida esta visualização espacial de posições.

1. Construa um paralelepípedo, nomeie seus vértices por A, B, C, D, E, F, G e H, conforme figura abaixo:



Considerando esse paralelepípedo e os planos determinados pelas faces, resolva as questões:

a) Marque de verde todos os planos que contém a reta $\overleftrightarrow{DE}$ e são perpendiculares ao plano EFGH.
b) Marque de azul o plano diagonal ACFH. Ele é perpendicular ao plano EFGH? Por quê?
c) A reta $\overleftrightarrow{CF}$ é perpendicular ao plano EFGH. Qual é a posição dos planos CDEF, ACFH, BCFG ao plano EFGH?
d) Marque de vermelho uma reta e um plano que são perpendiculares ao plano ABGH, de tal forma que a reta considerada esteja contida no plano marcado.

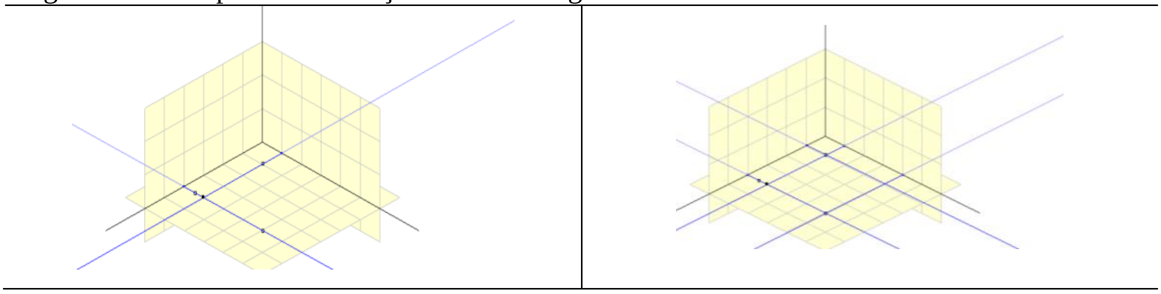
48 O paralelepípedo aqui considerado é o paralelepípedo reto-retângulo, já conhecido pelos alunos de anos anteriores.

e) Marque de amarelo, se houver a intersecção dos planos ADEH E EFGH.

f) Qual é o plano perpendicular ao plano ABCD e que contém a reta $\overleftrightarrow{GH}$? Marque-o de marrom.

Para a realizar a construção, os alunos devem usar os conceitos de paralelismo e perpendicularismo, tanto entre retas, como entre retas e planos ou ainda entre planos. Para que sua construção fique bem feita, estas relações devem ser constantemente observadas. Por exemplo, na construção da face (base) inferior do paralelepípedo – um retângulo - os conceitos de retas paralelas, perpendiculares e intersecção entre retas se fazem necessários, conforme mostra Figura 7.

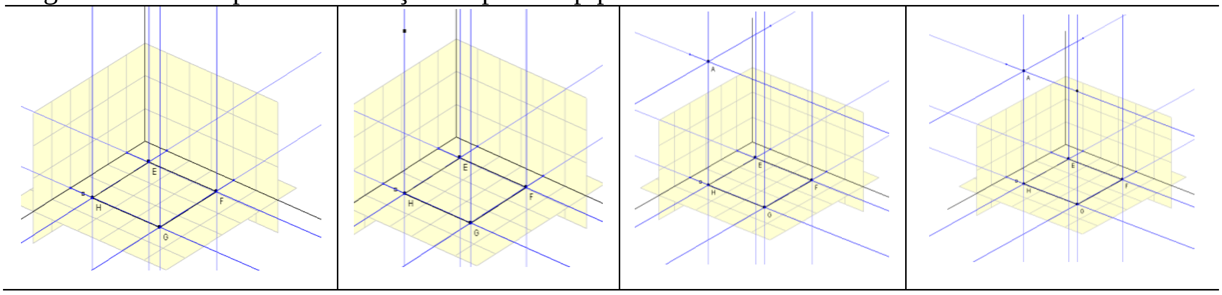
Figura 7 – Exemplo da construção de um retângulo.



Fonte: Elaborada pela autora

Já na construção das faces laterais é usado o conceito de reta perpendicular a um plano. A Figura 8 dá uma ideia do procedimento de construção a ser feito e procura ilustrar o grau de exigência de visualização espacial. O sólido em questão é bastante simples, pois envolve posições relativas com perpendicularidade e paralelismo .

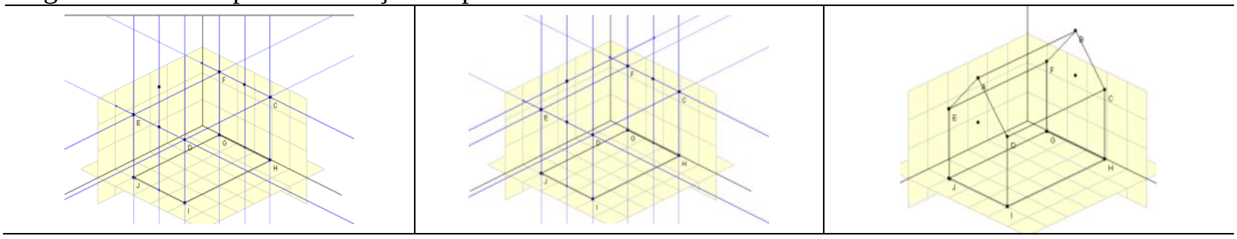
Figura 8 – Passos para a construção do paralelepípedo da Atividade 1 – Encontro 1



Fonte: Elaborada pela autora

Na segunda atividade, os alunos seguem trabalhando com as posições relativas entre retas e planos. Uma ideia do procedimento de construção está na Figura 9. A partir do paralelepípedo construído para a parte inferior, primeiramente pode-se encontrar o ponto médio de suas arestas superiores (anterior e posterior) para estabelecer a posição em que será colocada a aresta superior deste sólido (cumeeira). Em seguida constrói-se duas retas normais passando por estes pontos médios. Numa destas retas normais, marca-se um ponto sobre ela, que servirá para construir a aresta superior (cumeeira). Para concluir a construção utiliza-se, por exemplo, uma reta perpendicular passando por este ponto e intersecção entre a reta normal (posterior) e esta perpendicular, podendo agora concluir a construção. Para a parte superior da construção, os alunos devem sentir dificuldades, pois a construção do prisma triangular exige estratégias que eles não estão acostumados.

Figura 9 – Passos para construção do prisma da Atividade 2 – Encontro 1



Fonte: Elaborada pela autora

Outra observação importante é sobre a construção dos polígonos que representam as faces. Estes polígonos somente podem ser construídos se os vértices, de cada face, estão no mesmo plano, ou seja eles não podem ser construídos com pontos quaisquer. Para construí-los necessita-se utilizar retas normais que passam pelos vértices da base (para as arestas) e colocá-los sobre elas.

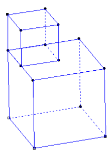
3.2.2 Encontro 2

Neste Encontro são propostas construções de sólidos a partir de representações em perspectiva (Atividade 1) ou de planificação (Atividade 2).

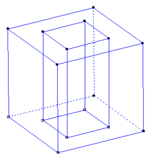
Nesta Atividade 1, os sólidos são mais complexos do que aqueles explorados no primeiro Encontro. Eles são compostos por cubos e paralelepípedos:

1. Construa as peças representadas abaixo, constituídas por cubos e paralelepípedos retos:

a)



b)



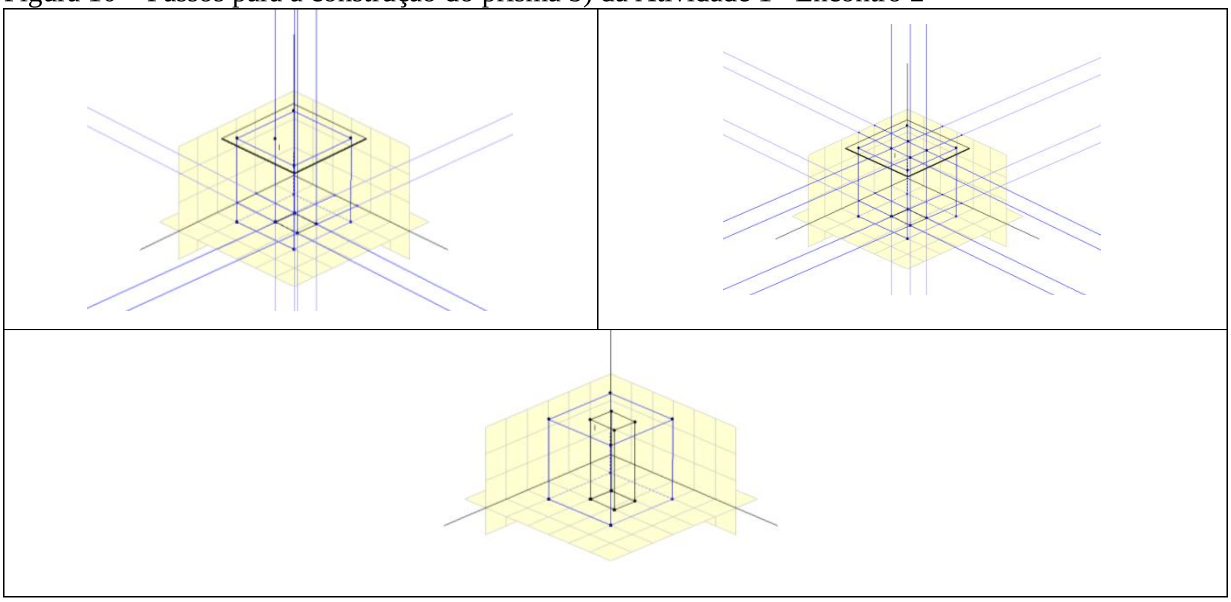
Na primeira figura, há uma sobreposição de cubos. Como existe, no Calques 3D, uma ferramenta para construção de cubos, a construção deve ser facilmente executada pelos alunos. Eles devem ter apenas cuidado na sobreposição do cubo menor, para que ele se posicione sobre a face superior.

Na segunda figura, deve ser construído um cubo e posteriormente um paralelepípedo interno, e aqui critérios de construção para os vértices deste paralelepípedo precisam ser estabelecidos. Acredito que após as construções anteriores, do Encontro 1, os alunos vão ter cuidados para construir o polígono da base do sólido observando o paralelismo e perpendicularismo e para construir as retas normais que vão originar as faces.

Com as construções da Atividade 1, espera-se que os alunos observem a sobreposição de faces e que também entendam sobre o aparecimento de novas faces quando se retira sólidos do interior de outro sólido. Quando este tipo de situação surge em exercícios de áreas e volumes, os alunos apresentam dificuldade na determinação das faces que devem ser consideradas no cálculo de áreas (a sobreposição resulta em exclusão de faces e os "furos" resultam em aumento de faces) e no cálculo de volume os alunos apresentam dificuldades de compreender que esta peça será retirada e também de definir os elementos necessários para o cálculo do volume desta peça.

Provavelmente os alunos vão apresentar maiores dificuldade na construção do segundo sólido. A construção está esquematizada na Figura 10.

Figura 10 – Passos para a construção do prisma b) da Atividade 1– Encontro 2

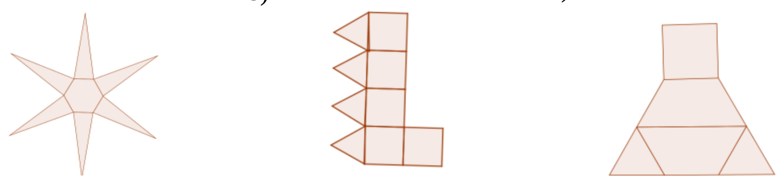


Fonte: Elaborada pela autora

Na Atividade 2 do Encontro 2 são dadas as planificações de alguns sólidos. As construções devem se aproximar, o máximo possível do sólido gerado pela planificação. Geralmente os alunos apresentam dificuldade em exercícios que exigem cálculos de volume a partir da planificação de um sólido. Nesta atividade eles necessitam visualizar o objeto tridimensional, para passar para sua representação no software. Na realização desta atividade, é permitida a utilização de papel, lápis, régua, tesoura e cola para a construção efetiva dos sólidos. Isto pode ser necessário, para que bem visualizem o sólido e então implementem a construção no Calques 3D.

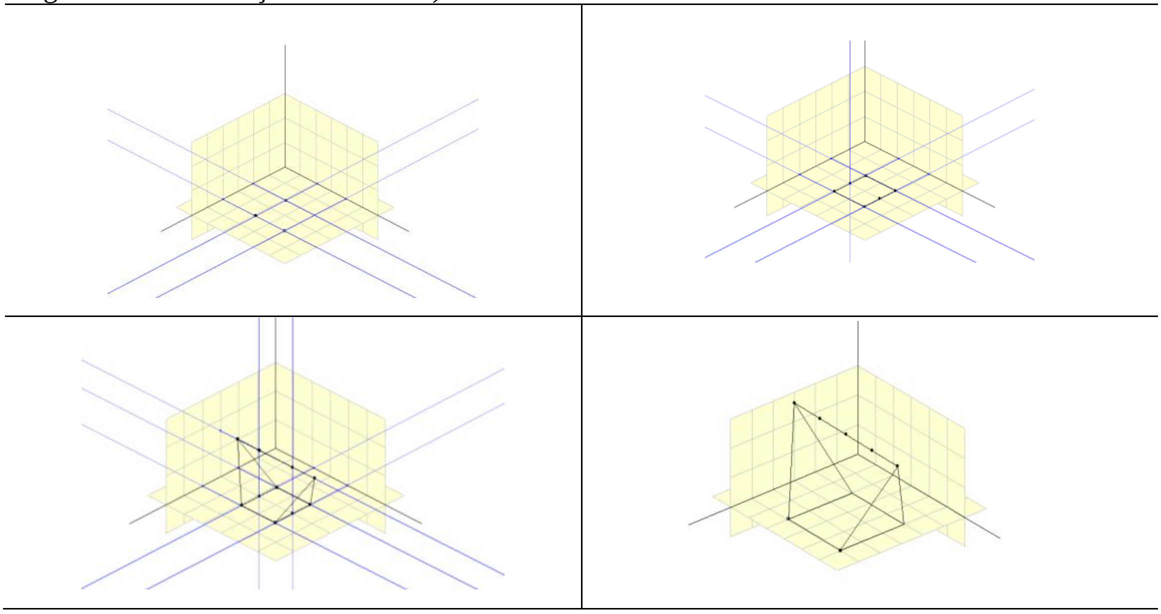
2. Construa os sólidos resultantes das planificações abaixo:

a) b) c)



Acredito que o sólido com maior grau de dificuldade, tanto de visualização quanto de construção é o dado pela planificação c). A necessidade de construção de uma maquete tridimensional deve ser apresentada, pelo menos, nesta figura. Uma maneira de construir o sólido, no Calques 3D, está representada na Figura 12, porém outras estratégias podem ser apresentadas pelos alunos. A construção deste sólido, pode ser iniciada pela escolha do quadrado como base. Para a construção dos trapézios laterais, primeiramente constrói-se o ponto médio de dois lados do quadrado, conforme mostra a Figura 11. Em seguida, constrói-se retas normais passando por eles. Sobre uma dessas retas normais, coloca-se um ponto (que servirá de altura do trapézio). Por esse ponto, constrói-se uma reta paralela a base, na qual serão marcados os vértices do trapézio (podem ser marcados com o ícone ponto simétrico para que fiquem a mesma distância das retas normais). Após a construção de todos os vértices, a figura pode ser construída, conforme a Figura 11.

Figura 11 – Construção do sólido c) da Atividade 2 – Encontro 2



Fonte: Elaborada pela autora

Ainda no Encontro 2, após a realização das construções os alunos devem fazer, na Atividade 3, breves descrições das características dos sólidos construídos. Com esta atividade posso observar e analisar os conceitos e relações que os alunos já possuem sobre os sólidos em questão.

3.2.3 Encontro 3

Neste Encontro os alunos se familiarizam com sólidos geométricos envolvidos nas questões do livro texto adotado na escola, para isto realizando suas construções. Estes sólidos possuem características semelhantes aos sólidos dos Encontros anteriores. Para construí-los adequadamente, os alunos devem observar as características fornecidas pelas questões do livro, tanto nas figuras quanto nas descrições. Se necessário, podem fazer uso recortes e dobraduras para a visualização dos sólidos propostos.

Agora, usando representações de sólidos que são apresentadas nos livros didáticos, busca-se observar a desenvoltura dos alunos quanto a visualização espacial de tais sólidos, isto através das construções a serem feitas no Calques 3D. Também se quer observar as possíveis evoluções dos alunos em relação às construções feitas nas aulas anteriores.

Acredito que os alunos vão apresentar maior dificuldade na construção dos itens a) e d) da Atividade 1 proposta neste Encontro. No item a), pela dificuldade em visualizar sólido que está no interior do cubo, sua centralização e construção; no item d) por serem planificações de sólidos irregulares e portanto de difícil visualização.

1. Construa os sólidos representados nas seguintes questões do livro *Matemática-construção e significado*:

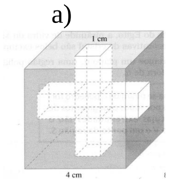
a) 34 da página 465;

b) 89 da página 476,

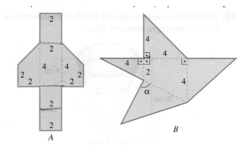
c) 11 da página 682;

d) 13 da página 683.

a)

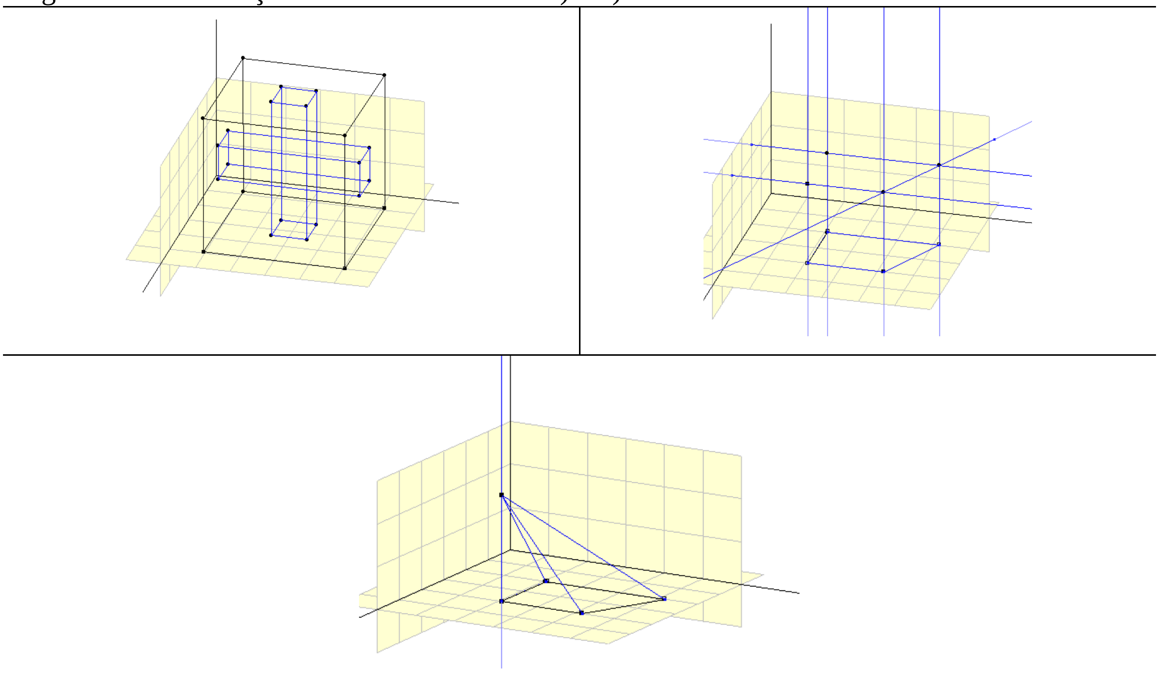


d)



Na Figura 12, estão indicados alguns passos para a construção dos sólidos correspondentes aos itens a) e d).

Figura 12 – Construções dos sólidos os itens a) e d) – Encontro 3



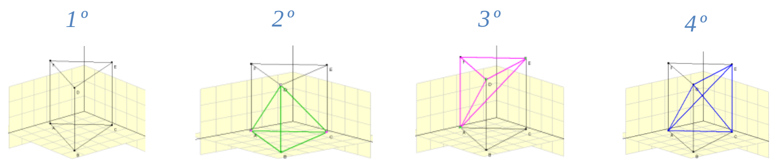
Fonte: Elaborada pela autora

Após a realização das construções novamente os alunos devem fazer, na Atividade 2 deste terceiro Encontro, breves descrições das características dos sólidos construídos, nas quais devem ter dificuldade de expressão. Estas descrições servem inclusive para análise e comparação com a atividade do Encontro anterior.

3.2.4 Encontro 4

Neste Encontro os alunos entram em contato com a decomposição de um sólido geométrico em outros e também precisam visualizar esta decomposição. Inicialmente eles constroem, no Calques 3D, um prisma triangular reto. Após, dentro dele, devem construir três pirâmides, conforme as figuras dadas na folha das atividades. Esta construção será utilizada, posteriormente, para demonstrar a fórmula do volume de uma pirâmide.

Construa um prisma triangular reto. Após, dentro deste prisma, construa a sequência de pirâmides indicadas nas figuras abaixo.



Para construir a primeira pirâmide basta que ligue os vértices da base inferior (ABC) ao vértice D; para a segunda o procedimento é similar ligando-se os vértices da base superior (DEF) ao vértice A; quanto a terceira liga-se o vértice A aos vértices C, D e E, e finalmente o vértice C aos vértices D e E. Para o cálculo volume, a visualização de que a terceira pirâmide possui o mesmo volume das anteriores é problemático, pois deverá ser comprovada a equivalência dos triângulos ABC e ACD, que será feita posteriormente. Nesta atividade o objetivo é realizar a construção que auxiliará na comprovação de que estas três pirâmides (que compõem o prisma triangular) possuem volumes iguais.

Quanto à construção propriamente, acredito que nesta atividade os alunos não enfrentem dificuldade, pois já realizaram diversas construções com maior grau de dificuldade nas atividades anteriores. Nas atividades deste Encontro, quer-se observar a interpretação que os alunos fazem das questões, as suas dificuldades e dúvidas. Tais aspectos vão estar refletidos nos seus processos de construção dos sólidos no Calques 3D.

3.2.5 Encontro 5

Neste Encontro os alunos não têm mais figuras para orientar suas construções no Calques 3D. Na folha de atividades é apresentada apenas uma descrição dos sólidos, a qual serve de orientação para a construção. Nas atividades deste Encontro se quer observar a interpretação que os alunos fazem das questões, as suas dificuldades e dúvidas. Tais aspectos vão estar refletidos nos seus processos de construção dos sólidos no Calques 3D.

1. Construa um cubo C_1 :

   a) Construa um segundo cubo C_2 cuja aresta é metade da aresta de anterior C_1.
   b) Construa um terceiro cubo C_3, cuja aresta é o dobro de C_1.

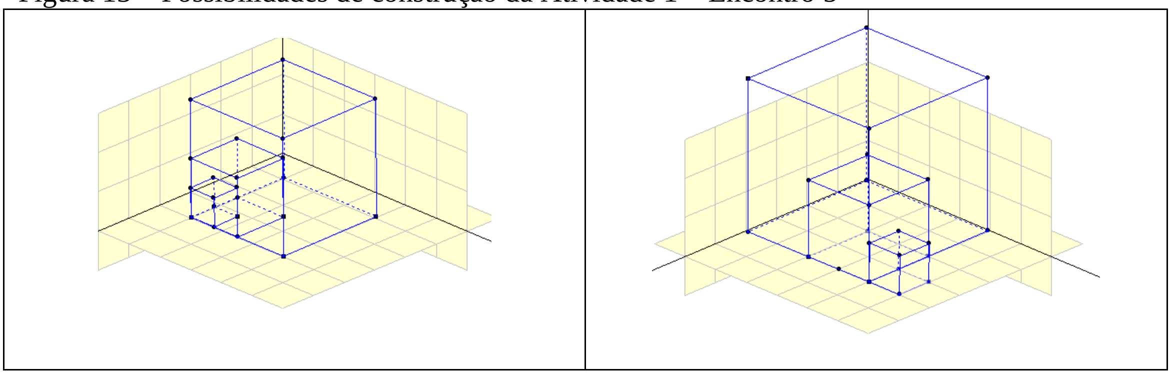
2. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH. Trace a diagonal da base inferior e da base superior em direções diferentes. Ligue as extremidades da diagonal superior às extremidades da diagonal inferior. Descreva o sólido formado no interior do cubo.

3. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH.

   a) Marque os pontos médios das três arestas que se originam no vértice A. Nomeie-os de M, N e P. Construa o sólido P_1 de vértices A, M, N e P. Que sólido você obteve?
   b) Faça o mesmo procedimento nos outros vértices do cubo.
   c) Pinte de vermelho o sólido obtido quando retiramos do cubo os sólidos obtidos nos itens a e b. Descreva o sólido que você está vendo.

Como as questões apresentam apenas um texto descritivo, os alunos são levados a formar uma ideia do sólido antes de construí-lo no Calques 3D. Dificuldades e comentários dos alunos ao longo dos procedimentos de construção estarão sob atenção. Na Atividade 1, provavelmente os alunos vão hesitar para estabelecer a ordem de construção dos cubos. Por exemplo, se os alunos iniciarem a construção pelo cubo maior, basta utilizar a ferramenta ponto médio para construir os cubos menores. Se iniciarem pela construção do cubo C_1, eles terão necessidade de utilizar a ferramenta ponto simétrico. Algumas possibilidades de construção estão representadas na Figura 13 a seguir.

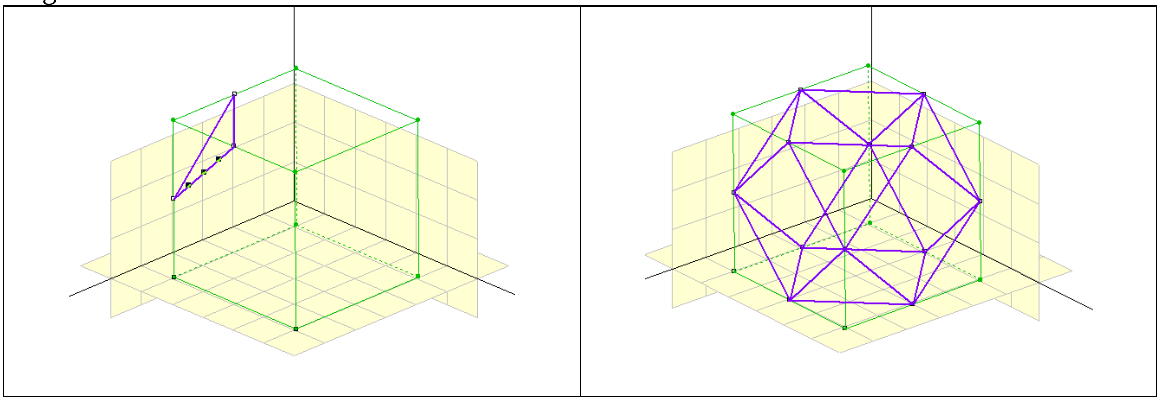
Figura 13 – Possibilidades de construção da Atividade 1 – Encontro 5



Fonte: Elaborada pela autora

Nas outras duas atividades acredito que os alunos sintam dificuldades especialmente na interpretação da descrição textual apresentada, pois as construções em si não são difíceis de realizar. Na segunda atividade os alunos são instruídos para fazer a construção de um tetraedro dentro de um cubo e na terceira são orientados para fazer o truncamento do cubo, conforme ilustra a Figura 14.

Figura 14 – Truncamento do cubo



Fonte: Elaborada pela autora

Após esta *análise a priori* da sequência didática proposta, espero ter ilustrado que as atividades apresentadas, estão de fato elaboradas de forma a estabelecer um gradativo crescimento no seu grau de exigência de visualização, conforme havia anunciado anteriormente. As exigências colocadas visam a superação das dificuldades que sempre vi nos meus alunos, durante os muitos anos de prática com o ensino de Geometria Espacial, principalmente durante a resolução dos exercícios que são propostos nos livros didáticos. Assim é que as atividades foram pensadas, sobretudo, para auxiliar os alunos numa melhoria na capacidade de visualização de sólidos e, conseqüentemente, de interpretação e resolução de situações-problema.

O próximo capítulo traz a implementação da sequência didática que foi aqui concebida e analisada, com as *análises a posteriori* que registram as atitudes e desenvolvimento dos alunos.

4 A IMPLEMENTAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

Este capítulo relata a aplicação da sequência didática e apresenta a análise a posteriori da produção dos alunos. Também apresenta observações sobre as atitudes dos alunos ao longo do experimento, levando em consideração as reflexões teóricas que foram feitas na seção 2.2 do Capítulo 2.

Após a realização do pré-teste, relatada no capítulo anterior, identificamos as dificuldades dos alunos, nos conteúdos de Geometria Plana e também no raciocínio espacial. É ciente destas dificuldades que se inicia o trabalho com conteúdos de Geometria Espacial, que são parte do currículo da minha escola. O trabalho usa a sequência didática analisada no capítulo 3.

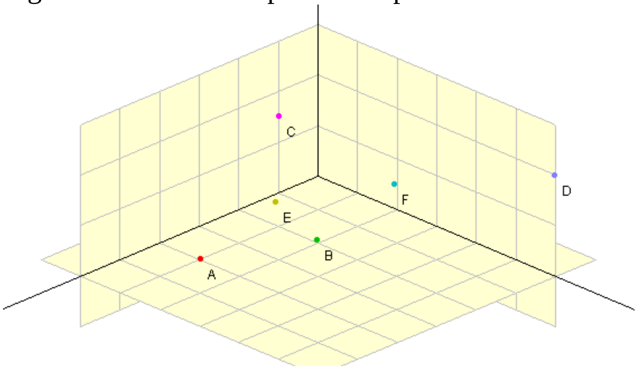
A sequência exige dos alunos a construção de sólidos com o software Calques 3D, sendo crescente o grau de complexidade das atividades. O objetivo das atividades é ampliar as habilidades para visualizar os sólidos e então construí-los virtualmente, usando raciocínios geométricos; para realizar as construções os alunos precisam visualizar mentalmente os objetos 3D.

4.1 Momentos de sensibilização

Antes de dar início à implementação da sequência didática, foi desenvolvido um trabalho de sensibilização com os alunos quanto ao entendimento de representações planas de objetos 3D. Assim, ao observar a imagem da Figura 15, projetada no quadro, os alunos foram desafiados a responder a seguinte questão:

- ✓ Todos os pontos indicados na figura abaixo se encontram num mesmo plano? Caso identifique pontos que pertencem ao mesmo plano, justifique a sua resposta.

Figura 15 – Pontos dispostos em planos diversos



Fonte: Elaborada pela autora

O objetivo desta questão é a conscientização dos alunos para as dificuldades (naturais) que encontramos na visualização de objetos geométricos 3D, quando representados em duas dimensões (plano). Por exemplo, na Figura 15, pode-se pensar que o ponto C está no plano XOZ[49] (coordenada y=0); no entanto ele pode ser um ponto que está fora deste plano e para determinar isto precisamos de mais informações (coordenadas do ponto, novo ponto de vista do observador).

Após esta conversa inicial, foram apresentadas as noções básicas relativas à Geometria de posição, tanto plana quanto espacial, para então se dar início à proposta de trabalho com a sequência didática. Foram trabalhadas as noções de posição relativa de ponto e reta, duas retas, reta e plano e dois planos.

No Laboratório de Informática os alunos se familiarizaram com o software Calques 3D, realizando atividades exploratórias. Para a realização das tarefas, os alunos se dividiram em quatorze duplas, um trio e também um aluno que trabalhou individualmente, por sua própria escolha, por não gostar de trabalhar com os colegas. Para esta exploração das ferramentas do software foram necessárias três horas-aula, distribuídas em dois dias.

No primeiro dia, o objetivo foi conhecer, explorar o software e as ferramentas necessárias ao desenvolvimento da proposta: os alunos exploraram a construção de pontos e como dar nomes a eles; construíram retas, segmentos de retas, polígonos, pontos sobre retas, intersecção de retas, retas paralelas e perpendiculares, planos e retas perpendiculares a planos; também construíram um cubo utilizando a ferramenta que o constrói automaticamente.

Após a exploração inicial do software os alunos foram desafiados a construir um sólido qualquer, tipo uma caixa. Ao final da atividade as duplas enviaram a produção para o email da professora.

Somente no segundo dia de familiarização com o software que os alunos conseguem concluir o desafio e também exploraram outras ferramentas tais como a intersecção entre reta e plano, entre dois planos, ponto médio e ponto simétrico.

Na próxima seção apresento o desenrolar da sequência didática, organizada em cinco Encontros, e as *análises a posteriori*.

---

[49] No Calques 3D não estão nomeados os eixos, somente foi utilizado o plano XOZ para localização do leitor.

4.2 O desenrolar dos cinco Encontros e as *análises a posteriori*

Nos Encontros no Laboratório de Informática, a turma manteve a organização de quatorze duplas, um trio e um aluno que vamos referir como sendo o aluno A.

Sobre a rotina de trabalho esclareço que:

- ✓ no início de cada Encontro foi entregue a “Folha de Atividades”[50] com orientações, na forma de texto e figuras, sobre as construções a serem feitas no Calques 3D;
- ✓ foi acertado com os alunos que deveriam sempre salvar os arquivos contendo as construções realizadas, mesmo que incompletas, na pasta específica da turma; e também que ao final de cada Encontro deveriam enviar os arquivos das construções para o e-mail da professora[51] , mesmo que com atividade incompleta;
- ✓ os alunos entregaram atividades escritas nos diferentes Encontros;
- ✓ foi recomendado aos alunos que iniciassem uma nova atividade apenas após o término da atividade anterior;
- ✓ foram realizadas filmagens e fotos da experiência, previamente autorizadas pelos pais, conforme modelo no Anexo A, para registrar as atitudes, procedimentos e comentários apresentados pelos alunos ao longo das construções;

A professora/pesquisadora auxiliava os alunos nas dúvidas relativas aos procedimentos e ferramentas do software 3D, dando também sugestões para a realização das construções solicitadas, quando necessário.

Os arquivos com as produções dos alunos, bem como as atividades escritas, constituem parte do material utilizado na *análise a posteriori*. As filmagens foram utilizadas para relembrar os momentos que foram considerados como importantes na *análise a posteriori*. No término da experiência foi aplicado um questionário final no qual os alunos se manifestaram, individualmente, sobre as dificuldades encontradas ao longo da experiência e parte destas “falas” estão transcritas na *análise a posteriori*. Para facilitar a leitura, no que segue, inserimos no texto (novamente) as atividades que estão sendo analisadas e que já haviam sido apresentadas no capítulo 3.

---

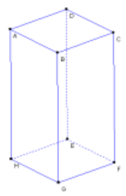
[50] As “ Folhas de Atividades” que compõem a sequência didática estão , na íntegra , no APÊNDICE E

[51] Mesmo tendo salvo os arquivos na pasta da turma, a solicitação do envio do material por e-mail visou garantir a produção dos alunos, sem modificações, para avaliar com a maior fidelidade possível a evolução nas aprendizagens.

4.2.1 Análise a posteriori do Encontro 1

Na primeira “Folha de Atividades” os alunos tiveram como primeira atividade a construção de um paralelepípedo e como segunda atividade a construção composta por dois sólidos, sendo-lhes fornecidas as suas representações em perspectiva.

1. Construa um paralelepípedo reto, nomeie seus vértices por A, B, C, D, E, F, G e H, conforme figura abaixo.

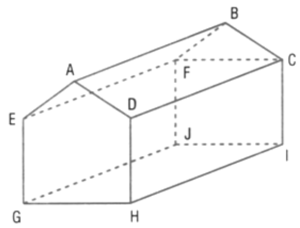


Considerando esse paralelepípedo e os planos determinados pelas faces, resolva as questões:

a) Marque de verde todos os planos que contém a reta $\overleftrightarrow{DE}$ e são perpendiculares ao plano EFGH.

b) Marque de azul o plano diagonal ACFH. Ele é perpendicular ao plano EFGH? Por quê?

2. Construa a figura abaixo. Observando-a indique:



a) de rosa, duas retas concorrentes.
b) de amarelo, duas retas paralelas.

Os alunos ainda não estavam completamente ambientados com o software e apresentaram dificuldades na realização das construções. Ao realizar as construções, os alunos apresentaram, em primeiro lugar, dificuldades de memorização não lembrando algumas das ferramentas do Calques 3D, trabalhadas nas aulas de exploração do software, tais como reta normal[52], ponto sobre reta, polígono.

Sobre estas dificuldades iniciais, os alunos se manifestaram claramente no questionário final da experiência:

> *No início, lembrar onde era cada função no programa foi uma das maiores dificuldades, mas depois de algumas aulas praticando, acabamos pegando o jeito de montar cada figura, às vezes com certas dúvidas, às vezes não.* (aluna da dupla 8)

---

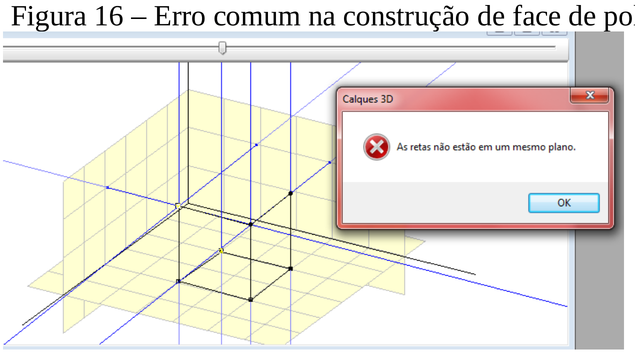
[52]Reta normal é um reta perpendicular a um plano.

> *Minha maior dificuldade no início foi a memorização das ferramentas que deveria usar, mas com a prática eu memorizei.* (aluna da dupla 2)
>
> *Tivemos dificuldades com o software em si, demoramos muito para aprender as funções do programa.* (aluno da dupla 6)

Algumas dificuldades observadas na construção do paralelepípedo da Atividade 1 foram: a primeira é quanto a enxergar e construir o retângulo da base. Num primeiro momento, algumas duplas (6) pensaram que a base é um paralelogramo qualquer, especialmente por não lembrarem do conceito de paralelepípedo trabalhado nos anos anteriores, o paralelepípedo reto-retângulo. A construção do retângulo exige que se tracem retas paralelas e perpendiculares, marcando seus pontos de intersecção para obter os vértices necessários ao polígono da base inferior (retângulo). Uma dupla e o aluno A, não conseguiram sair desta fase.

A segunda dificuldade foi lembrar-se de usar reta normal para construir as arestas laterais, retas paralelas para construir a base superior e marcar os pontos de intersecção para fechá-la posteriormente. Quando concluída esta parte, eles obtiveram os oito vértices do paralelepípedo. Após os alunos necessitaram construir polígonos para completar as faces. Se na construção eles não tomaram os cuidados necessários com paralelismo e perpendicularismo entre as arestas, a construção das faces não foi possível, pois os vértices ou as retas podiam estar em planos diferentes. Estes erros são indicados pelo Calques 3D como registra a Figura 16, o que foi muito importante para a compreensão das características de um prisma reto.

Figura 16 – Erro comum na construção de face de polígono.



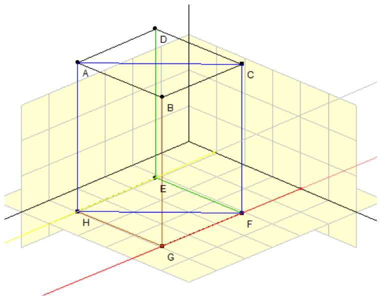
Fonte: Elaborada pela autora

Uma aluna, de dupla que não concluiu a Atividade 1, fez o seguinte comentário no questionário final:

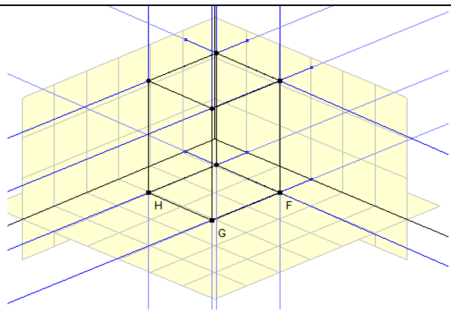
Uma das principais dificuldades encontradas na realização da atividade foi fazer as figuras, pois na hora de fechá-las, o programa mostrava aquela janela de erro que dizia que os pontos não estavam no mesmo plano.

Com as dificuldades apresentadas no primeiro Encontro, somente duas duplas finalizaram a Atividade 1, respondendo os diversos itens relativos a construção feita; cinco duplas e o trio concluíram somente a construção do paralelepípedo e as demais duplas (7), bem como o aluno A, não conseguiram finalizar a construção solicitada. Com isto, a Atividade 2 prevista na “Folha de Atividades” foi realizada no Encontro 2. Na Figura 17 estão algumas das construções feitas pelos alunos no Encontro 1.

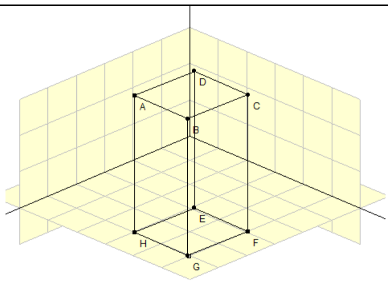
Figura 17 – Construções realizadas no Encontro 1



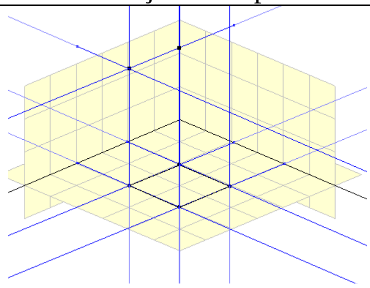
Construção da dupla 1



Construção da dupla 15



Construção da dupla 7



Construção da dupla 16

Fonte: Material dos alunos

Pode-se verificar na *análise a posteriori*, que as dificuldades expostas na *análise a priori* do Encontro 1, quanto aos problemas de visualização e construções se apresentaram para um número significativo de alunos. Aliadas a estas dificuldades também se apresentaram problemas (naturais) de adaptação ao software.

Nesta atividade os alunos exercitaram as características principais de um prisma reto, bem como suas figuras e elementos, necessárias a *apreensão sequencial* e *perceptiva*, citadas por Duval (1996).

Resumindo: Os grupos de trabalho não concluíram as atividades previstas para o Encontro 1. Apenas duas duplas finalizaram integralmente a Atividade 1. Nesta atividade os alunos exploraram os conceitos da Geometria de posição, necessários a construção de sólidos geométricos. As principais dúvidas manifestadas pelos alunos foram: quanto às ferramentas do software; quanto às propriedades geométricas do sólido a ser construído.

4.2.2 Análise a posteriori do Encontro 2

Neste Encontro, antes de iniciar o trabalho da segunda "Folha de Atividades", os alunos retomaram as construções incompletas do Encontro anterior.

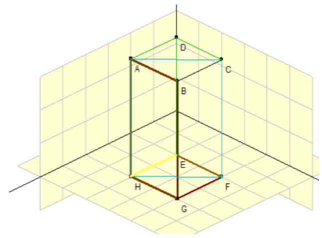
É interessante observar que boa parte das duplas que apresentaram atraso na conclusão das tarefas do primeiro dia, no início deste Encontro, relataram que já haviam instalado o Calques 3D nos computadores de suas casas, para trabalhar nas atividades atrasadas. Uma dupla, que finalizou as atividades, também fez o mesmo e avançou na exploração do software.

Para construir o "telhado" do sólido da Atividade 2 do Encontro 1, os alunos solicitaram ajuda para centralizar a aresta superior. Para resolver este problema, por exemplo, lembramos da necessidade de marcar o ponto médio tanto da parte da "frente" da casinha quanto dos "fundos". Por estes pontos devemos levantar retas normais, marcar um ponto numa delas (que servirá de altura da cumeeira), nele construir uma reta perpendicular a normal e para finalizar, encontrar a intersecção entre esta reta perpendicular e a outra reta normal.

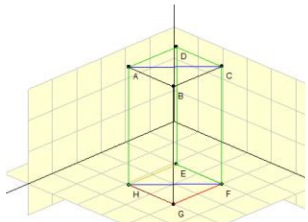
Quanto aos itens que solicitam a marcação das posições relativas, os alunos também pediram ajuda. Na Atividade 1, eles apresentaram dificuldade para marcar o plano diagonal e verificar seu perpendicularismo com o plano EFGH. Na Atividade 2, a dúvida surgiu no item que solicita marcar retas reversas. Para marcar o solicitado, os alunos mudaram de posição os sólidos construídos, diversas vezes, na tentativa de visualizar as posições das retas reversas. O recurso do Calques 3D que muda o sólido de posição possibilita aos alunos adequar a perspectiva de visão para melhor identificar o elemento geométrico solicitado.

Na Figura 18, estão representadas as construções de algumas duplas referentes as atividade que estavam previstas para Encontro 1.

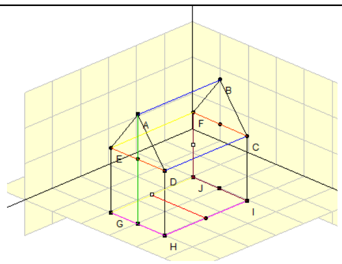
Figura 18 – Algumas construções da 1ª e 2ª atividades – Encontro 1



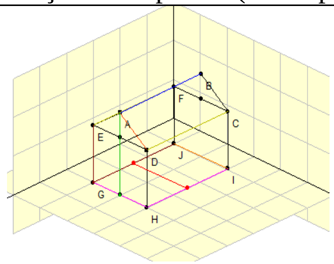
Construção da dupla 2



Construção da dupla 10 (incompleta)



Construção da dupla 8

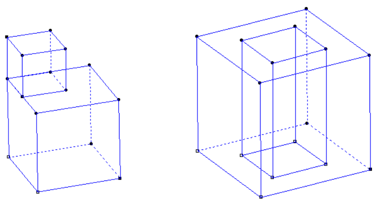


Construção da dupla 5

Fonte: Material dos alunos

Na “Folha de Atividades” do Encontro 2, na primeira atividade, as seguintes construções foram propostas: a) dois cubos (um maior e outro menor) sobrepostos e b) um cubo com um paralelepípedo interno. Para ambas construções foram fornecidas as suas representações em perspectiva.

1. Construa as peças representadas abaixo,constituídas por cubos e paralelepípedos retos:

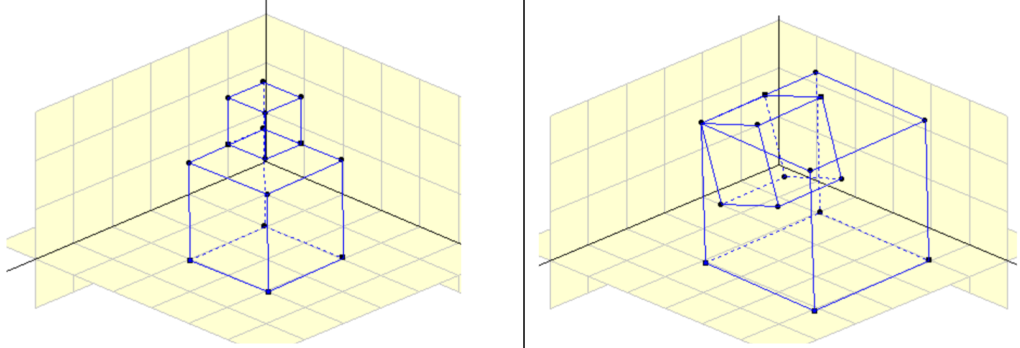


Os alunos não apresentaram maior dificuldade na construção do item a), pois utilizaram a ferramenta cubo. Para fazer o cubo menor, os alunos necessitaram colocar um ponto sobre a aresta do cubo maior. Para isto, solicitaram uma pequena ajuda. A sugestão foi de que utilizassem ponto médio da aresta ou simplesmente um ponto sobre a aresta. Outra dificuldade que surgiu foi quanto a acertar o posicionamento do cubo menor, pois isto depende de usar com entendimento e controle a ferramenta cubo[53].

[53] A construção de um cubo no Calques 3D é assim feita: dois pontos iniciais determinam a sua primeira aresta e um terceiro ponto determina a sua primeira face; construída esta face no espaço, o cubo é automaticamente construído.

A produção dos alunos registrada na Figura 19, apresenta situações de controle no uso da ferramenta bem como situações em que o cubo menor não se apóia na face do cubo maior.

Figura 19 – Construções do item a) da Atividade 1 – Encontro 2

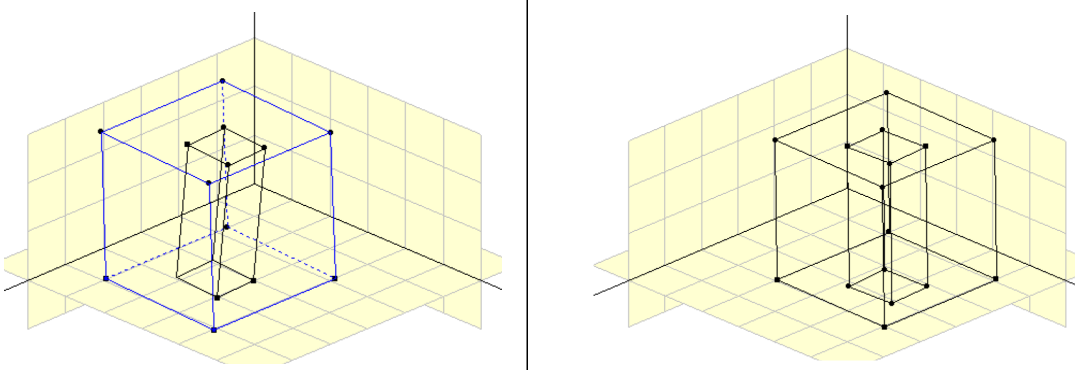


Construção da dupla 2 | Construção da dupla 8

Fonte: Material dos alunos

Na construção do item b), inicialmente surgiu a dificuldade de centralizar o paralelepípedo interno e a construção da face superior deste paralelepípedo, pois os alunos não lembraram da necessidade de realizar uma intersecção entre reta e plano para determinar os vértices superiores do paralelepípedo interior. Na Figura 20 tem-se duas construções relativas ao item b). Na primeira construção, vê-se que a dupla não centraliza o paralelepípedo interno e também não considera a perpendicularidade das arestas laterais. Já a segunda construção atende o solicitado na atividade, a construção de um paralelepípedo reto no interior de um cubo.

Figura 20 – Construções realizadas no item b) da Atividade 1 – Encontro 2



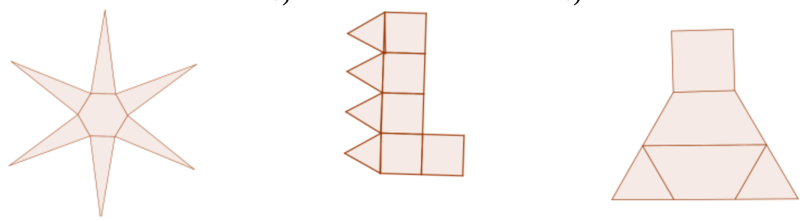
Construção da dupla 8 | Construção da dupla 10

Fonte: Material dos alunos

Na Atividade 2 os alunos receberam a planificação dos sólidos e conforme possível dificuldade apontada na *análise a priori*, verificada neste Encontro, eles necessitaram da confecção de maquetes, pois para a construção dos sólidos mais complicados não lhes basta imaginá-los "montados". Neste momento sugeri aos grupos que apresentaram dificuldade, recortar a planificação e montar o sólido. Para a construção da pirâmide do item a) e da "casa" do item b) somente duas duplas fizeram as maquetes, já para a construção do item c) a grande maioria dos alunos precisou do apoio da maquete. Apenas uma dupla finalizou a construção dos sólidos sem a necessidade das maquetes.

2. Construa os sólidos resultantes das planificações abaixo:

a) b) c)



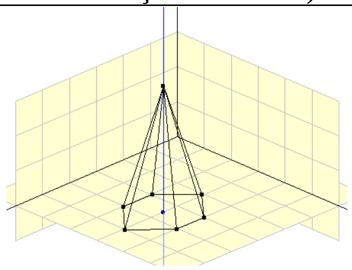
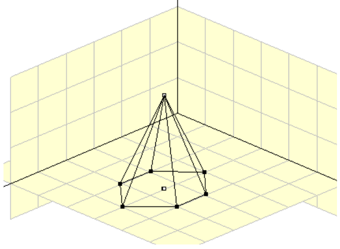
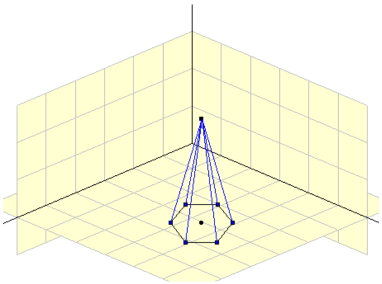
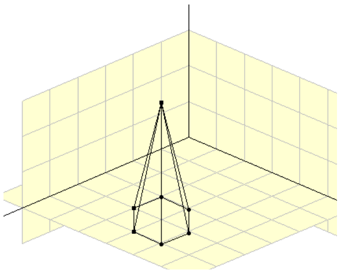
No questionário final, os alunos comentaram sobre a necessidade de construir os sólidos a partir das planificações dadas na "Folha de Atividades":

> *"Sim, foram necessárias as montagens dos sólidos. Os que eu recortei e montei foram 2a, 2b, 2c da segunda folha..."* (dupla 8)
>
> *"Sim, foram necessárias algumas montagens como: na 2ª folha, o exercício 2,a,b,c tivemos que montar todos para sabermos como ficaria ..."* (dupla 11)
>
> *"Sim, segunda folha, sólido c e terceira, folha, sólidos d." (dupla 3)*

As dificuldades na realização das construções desta Atividade 2 não se resumem a sua visualização. Elas também são decorrentes das ferramentas disponíveis no Calques 3D e é isto que aconteceu nas construções do item a) e do item c). No item a), a dificuldade foi construir o hexágono regular, porque o Calques 3D não tem a ferramenta *compasso.* Como o objetivo da atividade não era descobrir estratégias para construir figuras planas regulares, sugeri a construção de um hexágono qualquer e que então fosse colocado na forma muito próxima de um regular, usando para isso o movimento nos vértices.

Outro problema vivenciado, pelos alunos, foi a construção do vértice da pirâmide. A sugestão dada foi: encontrar o centro da base, e passando por ele construir uma reta normal a base e depois construir nesta reta o vértice, na altura desejada. Na Figura 21, temos algumas das construções das pirâmides feitas.

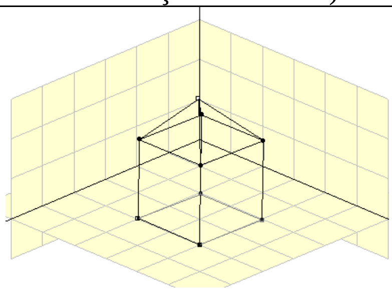
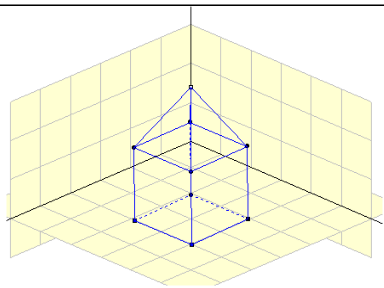
Figura 21 – Construções do item a) da Atividade 2 – Encontro 2

 Construção da dupla 5	 Construção da dupla 2
 Construção da dupla 11	 Construção da dupla 14

Fonte: Material dos alunos

Na Atividade 2, item b) a maioria dos alunos não apresentaram dificuldade pois identificaram imediatamente o sólido planificado e já haviam realizado construções semelhantes anteriormente. Algumas das construções feitas estão na Figura 22.

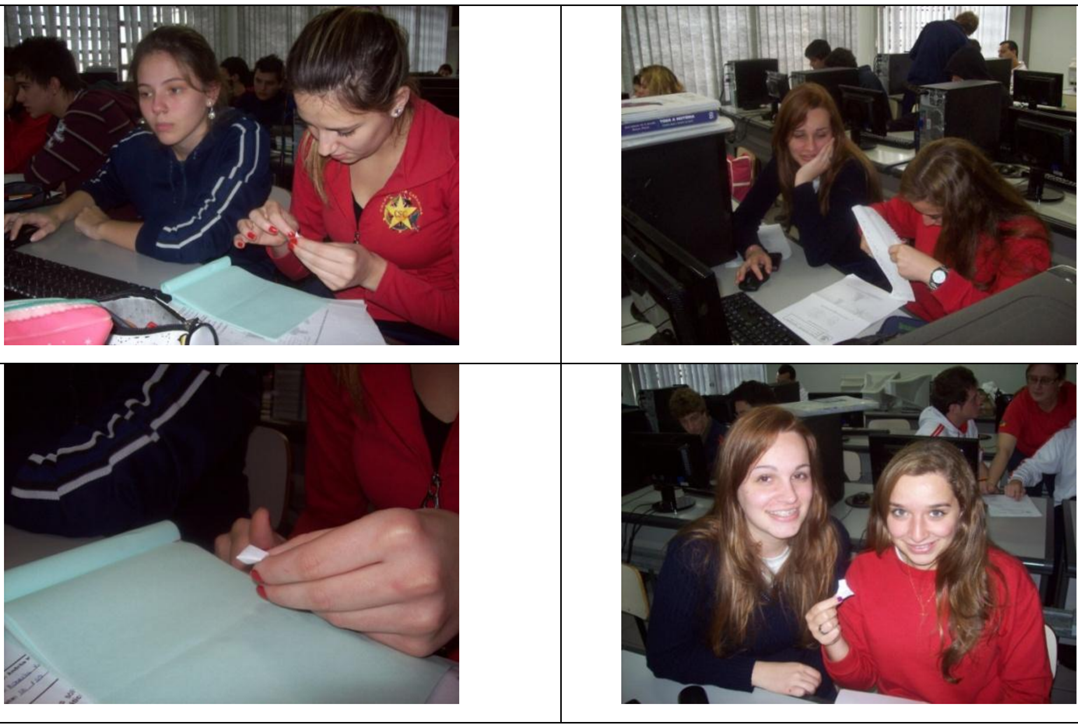
Figura 22 – Construções do item b) da Atividade 2 – Encontro 2

 Construção da dupla 3	 Construção da dupla 7

Fonte: Material dos alunos

A construção do item c) da Atividade 2, apresentou maiores dificuldades. As fotos abaixo registram o momento de montagem da maquete.

Fotografia 1 – Diferentes duplas em momento de montagem das maquetes.

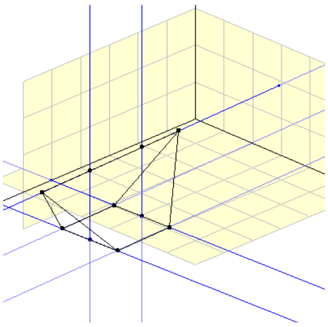


Fonte: Elaborada pela autora

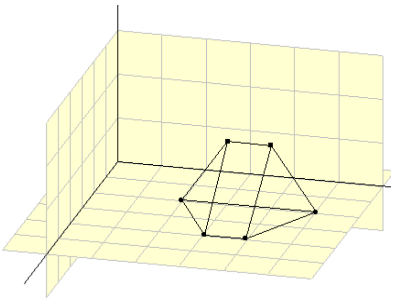
Após a montagem em papel do sólido, eles escolheram a melhor posição para realizar a construção, ou seja, decidiram a “melhor base”. A maioria optou pelo quadrado como base, mas alguns escolheram o trapézio.

Na Figura 23, temos algumas das produções das duplas. A dupla 5 escolhe como “base” o quadrado e a dupla 13 escolhe um trapézio.

Figura 23 – Construções do item c) da Atividade 2 – Encontro 2



Construção da dupla 5



Construção da dupla 13

Fonte: Material dos alunos

Nas construções cujo quadrado foi escolhido como base, para centralizar a aresta superior, algumas duplas tiveram o seguinte procedimento: marcaram o ponto médio de dois lados paralelos do quadrado; construíram retas normais nestes pontos; marcaram um ponto sobre uma *delas* e passando por ele construíram uma reta perpendicular; marcaram a intersecção desta reta com a outra reta normal. Em seguida construíram um dos vértices superiores do trapézio sobre a reta perpendicular. Para que o trapézio fosse isósceles os alunos tomaram o cuidado de utilizar a ferramenta *ponto simétrico* para construir o outro vértice. Após fecharam a figura, verificando a existência dos triângulos. Na construção da dupla 13, na qual foi escolhido o trapézio como base, os alunos usaram pontos quaisquer para construir tanto a base quanto as outras faces. Por este motivo, a face que deveria ser um quadrado, aparece como retângulo.

A Atividade 3 solicita a descrição das características dos sólidos construídos. Nestas descrições observa-se uma confusão entre a nomenclatura de figuras planas e espaciais, que em princípio eles já conhecem de anos anteriores. Por exemplo, escreveram "*Um quadrado com retângulo dentro"(dupla 14)* e "*Um cubo dentro de outro cubo*" (dupla 5) para se referir a um paralelepípedo dentro de um cubo. Percebe-se também a confusão com os conceitos de lados e faces de um sólido quando escreveram *Cubo grande: 4 lados iguais. Cubo pequeno: 4 lados iguais, está em cima do cubo maior.* (trio 9), para descrever as faces iguais dos cubos do item a); *Cubo com 4 lados iguais e dentro tem um retângulo com o mesmo comprimento do cubo de fora.* (dupla 3), para descrever o cubo de faces iguais e o paralelepípedo interno do item b).

Quanto a descrição das pirâmides construídas na Atividade 2, em que são fornecidas as suas planificações, os alunos apresentaram uma linguagem distante da linguagem da Geometria:

> *A base é um hexágono onde, acima de cada um de seus lados, estão triângulos.* (Item a) da 2ª atividade da dupla 8).
>
> *Sua base é um polígono regular de 6 lados. As laterais do cone são 6. Elas são triângulos isósceles, que se encontram em um determinado ponto.* (Item a) da 2ª atividade do trio 9).

Neste Encontro 2 observei um forte entrosamento e espírito de colaboração nas duplas e entre as duplas. Seis duplas e o aluno A, não conseguiram concluir as construções previstas para o Encontro e os demais concluíram satisfatoriamente as atividades.

As dificuldades apontadas na *análise a priori* quanto às dificuldades de construir o sólido do item b) da Atividade 1 e da dificuldade de visualização do item c) da Atividade 2, bem como sua construção foram todas evidenciadas em diferentes duplas.

Nestas atividades além de demonstrar a necessidade de construção de maquetes para visualização dos sólidos, conforme se refere Parzysz (1988) e a verificação de todos os tipos de apreensão do conhecimento, citadas por Duval (1996).

Resumindo: Nas atividades realizadas, os alunos indicaram crescimento nas habilidades para usar o Calques 3D, pois não apresentaram tantas dúvidas durante as construções. Os alunos mostraram necessidade de construir as maquetes dos sólidos propostos na Atividade 2, evidenciando dificuldades de visualização de sólidos que ainda não lhes são familiares. Esta dificuldade pode ser considerada natural e o Calques 3D é um recurso que pode ajudar muito no desenvolvimento de habilidades para visualizar objetos 3D. As descrições apresentadas na Atividade 3 comprovam o desconhecimento (ou esquecimento) dos alunos quanto a nomenclatura envolvida no estudo de sólidos geométricos.

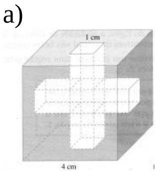
4.2.3 Análise a posteriori dos Encontros 3 e 4

Em virtude das atividades propostas para o Encontro 3 não serem concluídas durante o mesmo, avançando no Encontro 4, a análise a posteriori desta sessão trata dos dois Encontros.

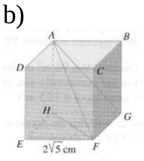
No Encontro 3, a "Folha de Atividades" propôs a construção de sólidos que estão representados em exercícios do livro-texto adotado na escola. Nos três primeiros itens foram apresentadas as representações em perspectiva dos sólidos compostos por cubos com outros sólidos em seu interior. Para o item d) foram fornecidas as planificações de dois sólidos irregulares: um prisma e um pirâmide.

1. Construa os sólidos representados nas questões do livro Matemática-construção e significado: a) 34 da página 465; b) 89 da página 476; c) 11 da página 682; d) 13da página 683.

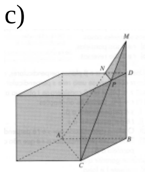
a)



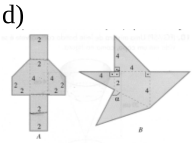
b)



c)



d)



2. Descreva as características de cada sólido construído.

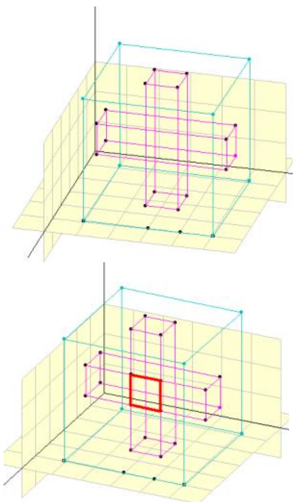
Apesar da “Folha de Atividades” apresentar as representações dos sólidos, alguns alunos também consultaram o livro para esclarecer dúvidas em relação às construções. Em certas duplas, as construções foram iniciadas no Calques3D sem maiores preocupações com os detalhes fornecidos pelo livro.

Como neste dia tínhamos apenas um período de aula, nenhum dos grupos concluiu as atividades, e também porque se dedicaram a finalizar as atividades da aula anterior. Apenas uma dupla, conseguiu avançar até o item c) da Atividade.

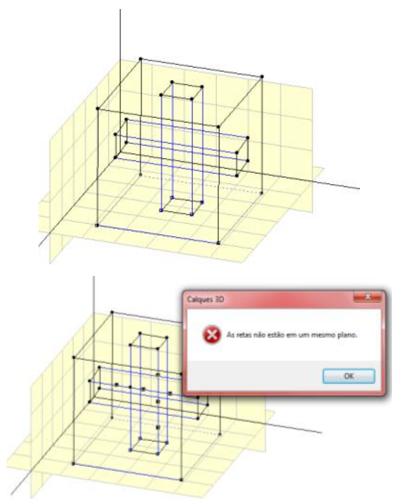
A construção do item a) exige cuidados, pois ao observar somente a figura que consta na “Folha de Atividades” algumas dúvidas em relação à forma e ao posicionamento dos sólidos no interior do cubo são evidenciadas.

Na Figura 24, estão representadas as construções realizadas pelas duas duplas mais adiantadas. Para construir o item a) percebi, através do histórico da construção, que eles iniciaram pelo cubo (externo). Considerando este procedimento, após eles centralizaram o poliedro interno. Para centralizar este poliedro uma alternativa sugerida durante os questionamentos destas duplas foi de utilizar sucessivamente a ferramenta *ponto médio* (de duas arestas perpendiculares da base do cubo). Depois, através da construção de retas paralelas (ou perpendiculares) relativas às arestas do cubo, eles passaram a construir o quadrado central. Para construir o prisma quadrangular vertical, eles deveriam adotar os mesmos procedimentos dos paralelepípedos construídos anteriormente. Para a construção do prisma quadrangular horizontal (centralizado), deveriam adotar o mesmo procedimento da construção do vertical, porém usando as faces laterais para dar início a sua construção.

Figura 24 – Construções do item a) da Atividade 1– Encontro 3



Construção da dupla 2



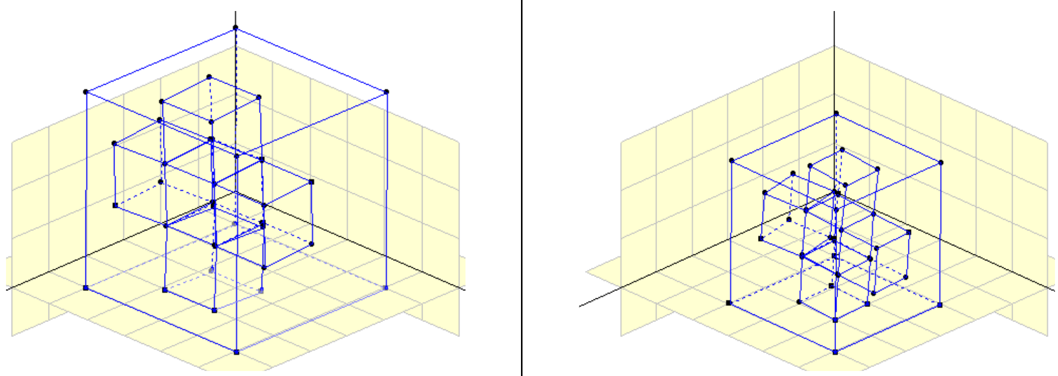
Construção da dupla 10

Fonte: Material dos alunos

Percebe-se na construção da dupla 2 o cuidado de centralizar o poliedro interno, conforme registra a Figura 24 (a) , pois ao verificar a atividade realizada consegui construir a face frontal do cubo ao centro da figura, destacada de vermelho. Já na construção da dupla 10, percebe-se a falta deste cuidado, pois ao tentar construir esta mesma face do cubo ao centro da figura, o programa acusa que *as retas não estão em um mesmo plano* indicando que a construção desta face é impossível. Solicitei a reconstrução da figura com os devidos cuidados necessários.

Durante o Encontro 4, outras duplas (4) também realizaram a construção do item a) de forma equivocada tendo que refazê-la (principalmente as duplas que estão sem livro), conforme a Figura 25. Para refazer as figuras, eles consultaram o livro, sendo que duas duplas usaram o livro emprestado. Quando solicitada, auxiliei na utilização das ferramentas do software e com sugestões para a construção.

Figura 25 – Construções erradas do item a) – Encontro 3



Construção da dupla 11 | Construção da dupla 8

Fonte: Material dos alunos

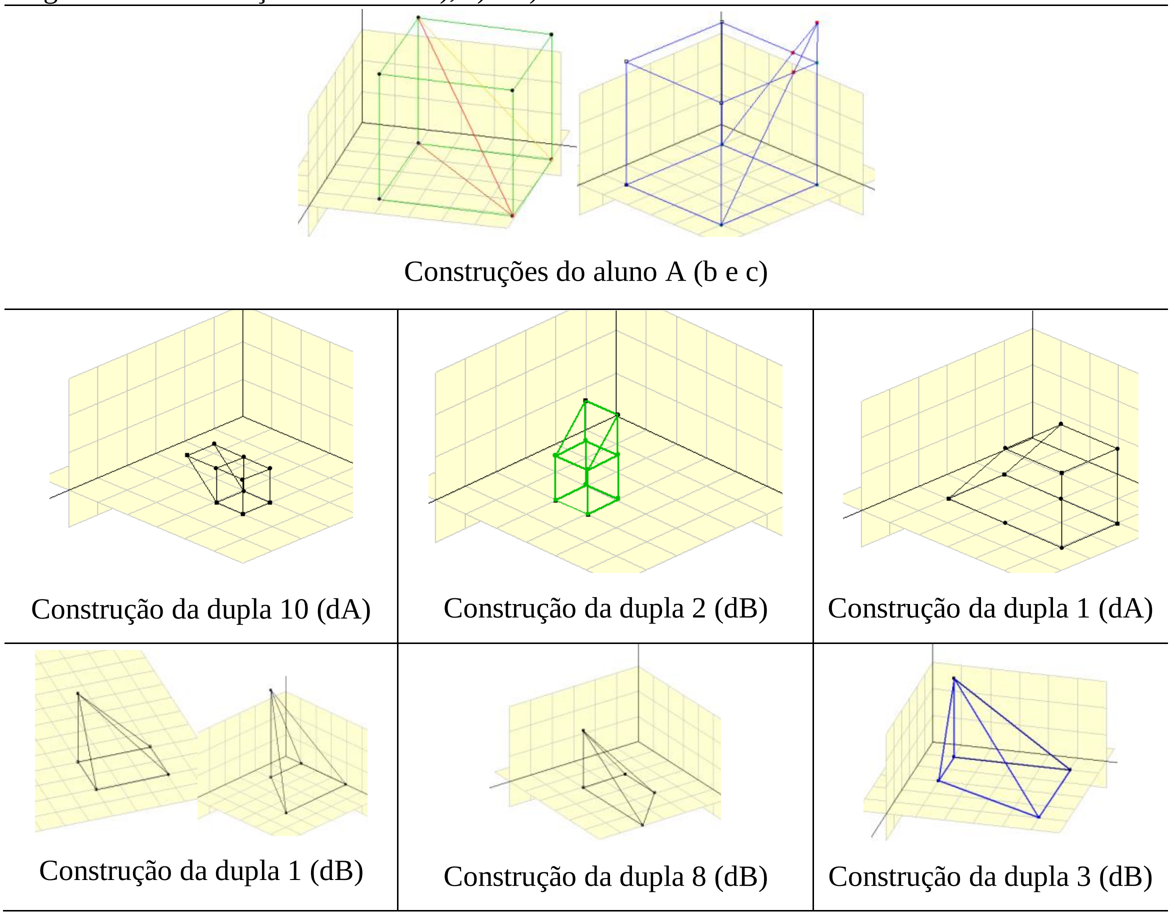
Observa-se na Figura 25 que a dupla 11 considerou apenas cubos, não centralizou o poliedro interno e não observou a proporcionalidade em relação à figura fornecida. A dupla 8 procurou centralizar o poliedro, porém não observou a proporcionalidade em relação à figura fornecida utilizando apenas cubos para a sua construção.

A cada nova construção, os alunos mostravam-se mais seguros. As dúvidas iniciais, em relação ao software foram desaparecendo e, gradativamente, modificações na aparência das construções eram realizadas, mesmo sem solicitação.

Ao identificar erros nas construções, eu solicitava a sua reconstrução. Algumas duplas (3) refizeram as construções em casa, para que não se atrasassem mais.

Na Figura 26, estão reproduzidas algumas construções dos outros itens da Atividade. Para a construção dos itens b) e c), primeiramente construíram o cubo e depois os outros elementos exigidos.

Figura 26 – Construções dos itens b), c) e d) da Atividade 1 – Encontro 3



Construções do aluno A (b e c)

Construção da dupla 10 (dA) | Construção da dupla 2 (dB) | Construção da dupla 1 (dA)

Construção da dupla 1 (dB) | Construção da dupla 8 (dB) | Construção da dupla 3 (dB)

Fonte: Material dos alunos

Na “Folha de Atividades” do Encontro 3, os sólidos que exigem maiores cuidados são as do exercício d), pois estão planificados e são irregulares, exigindo maiores habilidades para entendê-los. Para visualizar os sólidos, somente duas duplas não necessitaram realizar a construção de maquetes. Na Fotografia 2 são apresentadas algumas maquetes realizadas pelos alunos para a visualização dos sólidos.

Fotografia 2 – Maquetes realizadas para o item d) do Encontro 3

Fonte: Elaborada pela autora

Quanto a parte b) da atividade , solicitando a descrição dos sólidos, os alunos apresentaram progressos em relação as suas produções no Encontro 2. Eles utilizaram corretamente as nomenclaturas de cubo e pirâmide e descreveram os polígonos que formam as faces, conforme as seguintes descrições:

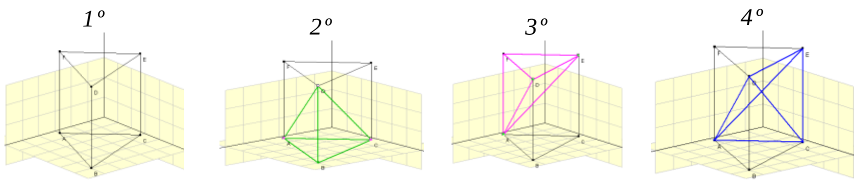
> *Um cubo com pirâmide dentro.* (Item b) da Atividade 1 – dupla 1)
>
> *Um cubo formando uma pirâmide em que a ponta da pirâmide fica p/fora.* (Item c) da Atividade 1 – dupla 3)
>
> *Um cubo com uma pirâmide irregular em cima.* (Item c) da Atividade 1 – dupla 5)

A base é um retângulo. Nas duas laterais se faz um quadrado e um triângulo formando um trapézio. Atrás é um quadrado, na frente é um retângulo inclinado e o teto é um quadrado. (Item dA) da Atividade 1 – dupla 1)

Espécie de pirâmide, com a base, triângulos (lados)que se encontram num ponto só. O chão seria um trapézio e as paredes seriam triângulos(4) sendo dois bem parecidos. O ponto que se encontram é um dos cantos da base maior do trapézio. (Item dB**)** da Atividade 1 – dupla 8)

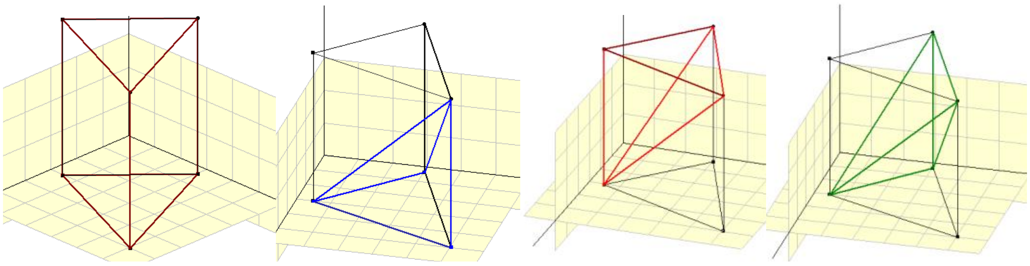
Após a realização das construções previstas para o Encontro 3, os alunos iniciaram a atividade do Encontro 4. No Encontro 4, a “Folha de Atividades” exige construções mais simples do que as anteriores. Trata-se da construção de um prisma triangular e de sua decomposição em três pirâmides.

1. Construa um prisma triangular. Após, dentro deste prisma, construa a sequência de pirâmides indicadas nas figuras abaixo.

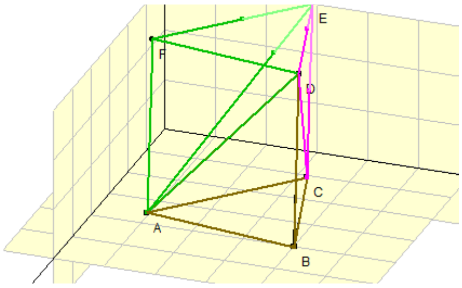


Esta construção foi utilizada posteriormente, no estudo do volume de pirâmides. Os alunos não apresentaram dificuldade na realização desta tarefa, conforme previsão apontada na *análise a priori* do Encontro 4. Sete duplas e o trio conseguiram concluir a atividade no mesmo dia, sendo algumas delas representadas na Figura 27. Somente uma das duplas realizou a construção das três pirâmides dentro do mesmo prisma. As outras duplas se orientaram através das representações que estavam na “Folha de Atividades”.

Figura 27 – Construções da Atividade do Encontro 4



Construção da dupla 3



Construção da dupla 2: três pirâmides dentro do mesmo prisma.

Fonte: Material dos alunos

Neste dia, sete duplas e o aluno A não concluíram as tarefas do dia, apesar da grande colaboração existente entre os grupos no auxílio da execução das tarefas.

Resumindo: Na atividade de construção de sólidos representados nos exercícios do livro-didático solicitada na "Folha de Atividades" do Encontro 3, os alunos mostraram as dificuldades que haviam sido apontadas na *análise a priori*, relativas a visualização, construções e centralização do poliedro interno do item a) e também quanto a visualização dos sólidos planificados do item d), sendo necessária a construção de maquetes. As descrições realizadas na Atividade 2 da "Folha de Atividades" do Encontro 3 apresentam crescimento quanto a nomenclatura das figuras e sólidos envolvidos nas construções.

As construções propostas na "Folha de Atividades" do Encontro 4, foram realizadas com facilidade pelos alunos, que continuaram completamente envolvidos nas atividades, mesmo realizando apenas construções e sem resolver os habituais cálculos presentes nas aulas de Matemática.

4.2.4 Análise a posteriori do Encontro 5

Neste Encontro, com duas horas-aula, a “Folha de Atividades” apresentou uma nova informação: contém apenas a descrição textual dos sólidos que serão construídos. Os alunos além de imaginar a situação descrita, irão executá-la no software Calques3D .

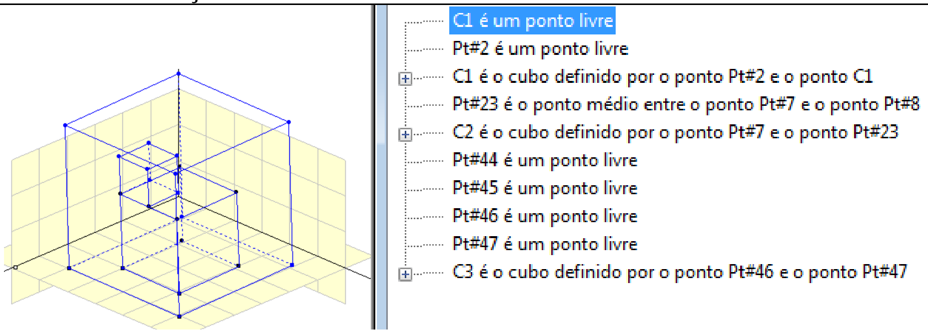
1. Construa um cubo C_1 .
a. Construa um segundo cubo C_2 cuja aresta é metade da aresta de anterior C_1 .
b. Construa um terceiro cubo C_3 , cuja aresta é o dobro de C_1 .

2. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH. Trace a diagonal da base inferior e da base superior em direções diferentes. Ligue as extremidades da diagonal superior às extremidades da diagonal inferior. Descreva o sólido formado no interior do cubo?

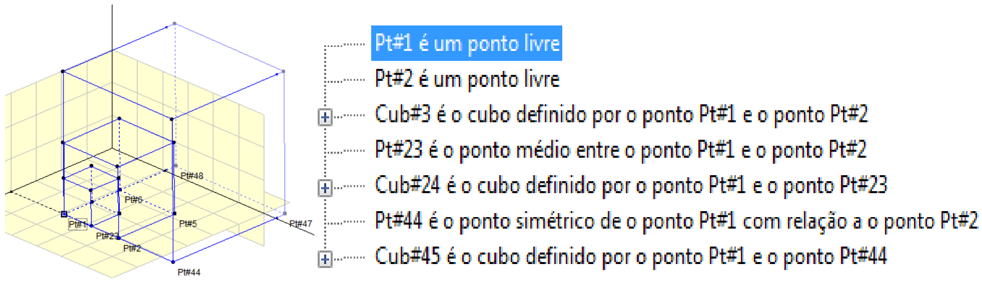
3. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH.
a. Marque os pontos médios das três arestas que se originam no vértice A. Nomeie-os de M, N e P. Construa o sólido P1 de vértices A, M, N e P. Que sólido você obteve?
b. Faça o mesmo procedimento nos outros vértices do cubo.
c. Pinte de vermelho o sólido obtido quando retiramos do cubo os sólidos obtidos nos itens a e b. Descreva o sólido que você está vendo.

Na Atividade 1, os alunos usaram diferentes estratégias na construção dos cubos solicitados. Algumas duplas, ao ler o problema, começaram a construção pelo cubo maior e usaram a ferramenta “*ponto médio*” para construir a aresta dos cubos menores. Outras duplas usaram a ferramenta *“ponto simétrico”* para dobrar as arestas e outras ainda utilizaram a rede quadriculada da interface do software, conforme mostra a Figura 28.

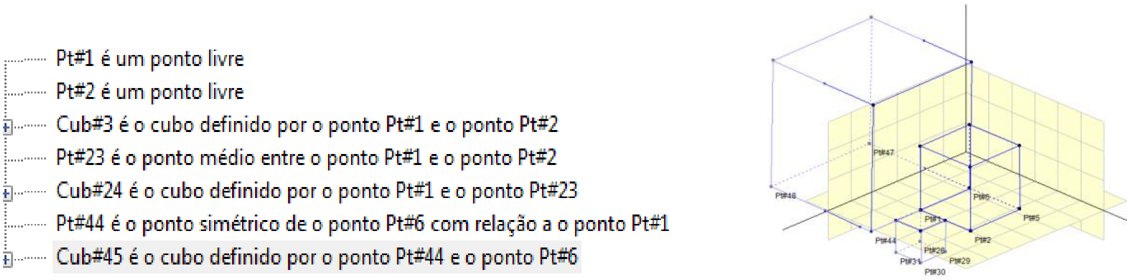
Figura 28 – Construções da Atividade 1– Encontro 5



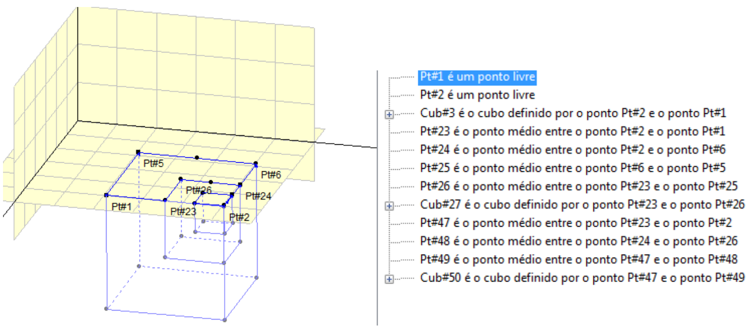
Construção da dupla 8



Construção da dupla 7



Construção da dupla 14



Construção da dupla 6

Fonte: Material dos alunos

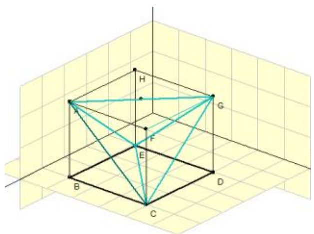
A dupla 8 usou ponto médio para construir o cubo menor. Para a construção do cubo maior utilizou-se dos quadrinhos (do software) para duplicar a aresta, pois os pontos que determinam seus vértices inferiores são pontos livres, conforme se verifica no histórico da construção. As duplas 7 e 14 utilizaram ponto médio e ponto simétrico para realizar a construção, e a dupla 6 apenas ponto médio.

Para verificar o caminho tomado por cada dupla para realizar a sua construção, podemos utilizar o recurso *histórico* do software. Este recurso nos permite verificar todas as construções realizadas em cada arquivo salvo. Através dele consegue-se verificar as principais diferenças de cada construção.

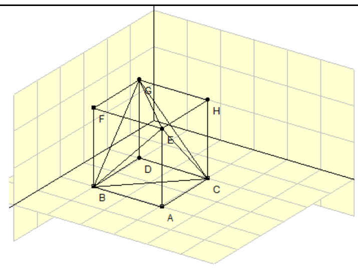
Na Atividade 2 os alunos apresentaram dificuldade na interpretação das frases: *Trace a diagonal da base inferior e da base superior em direções diferentes. Ligue as extremidades da diagonal superior às extremidades da diagonal inferior*. Para auxiliá-los, questionei sobre o significado de direção e sobre as diferentes posições das diagonais (inferiores e superiores), o que se mostrou suficiente para que compreendessem o que deveriam fazer.

Percebe-se, na Figura 29, que as duplas 5 e 1 não se utilizaram da ferramenta *cubo* para a realizar a construção e as duplas 14 e 8, assim como as demais duplas, realizaram a construção iniciando com esta ferramenta.

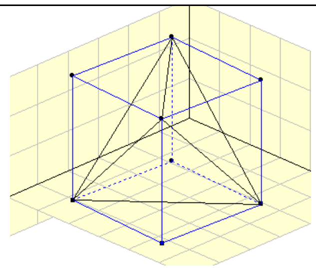
Figura 29 – Construções da Atividade 2 – Encontro 5



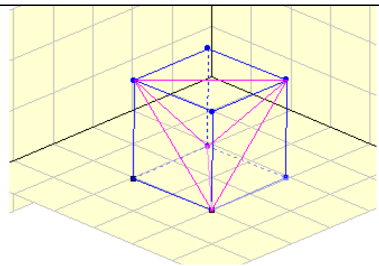
Construção da dupla 5



Construção da dupla 1



Construção da dupla 14

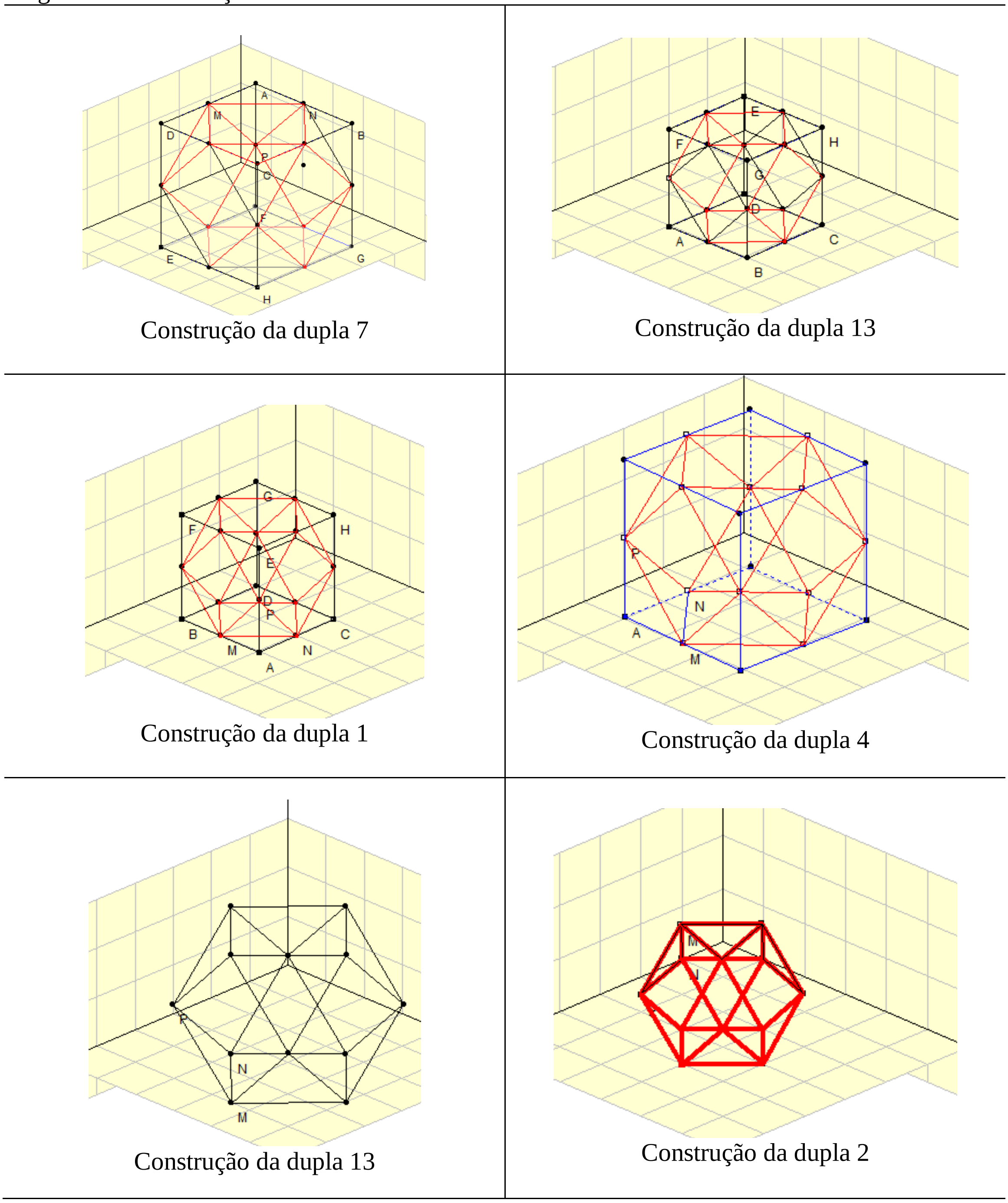


Construção da dupla 8

Fonte: Material dos alunos

Na Atividade 3, os alunos apresentaram dificuldade no item c) que solicita pintar de vermelho a construção realizada, pois, ao destacar o sólido criado, eles acabaram se confundindo com os vários segmentos construídos, conforme indica a Figura 30.

Figura 30 – Construções da Atividade 3 – Encontro 5



Construção da dupla 7

Construção da dupla 13

Construção da dupla 1

Construção da dupla 4

Construção da dupla 13

Construção da dupla 2

Fonte: Material dos alunos

As descrições solicitadas na Atividade 2 apresentaram algumas características interessantes. Enquanto alguns grupos, como a dupla 5, mostraram avanço nas nomenclaturas pois descreveram que “*Trata-se de um tetraedro”,* outros grupos, como o trio 9, apresentaram dificuldades. Este trio, assim descreveu o sólido: “*Uma figura com quatro lados iguais, formada a partir das diagonais.”,* quando deveriam descrever como sendo um sólido com quatro faces iguais.

Nas descrições da Atividade 3 pode-se perceber a dificuldade de alguns grupos para expressar o sólido construído em confronto com o avanço de outros:

> *Um triângulo.* (Item a) *É um cubo com um quadrado em cada face, onde seus vértices são um ponto médio nas arestas do cubo. E todos os quadrados se encontram.* (Item c)(Dupla 1)
>
> Uma pirâmide. (Item a) *Um poliedro com 6 faces de quadrados e 8 faces triangulares distribuídas uniformemente.* (Item c)(Dupla 14)

Para minha surpresa, os grupos não apresentaram dificuldade de estabelecer estratégias para as construções desta “Folha de Atividades”, apontada na *análise a priori,* pois conseguiram realizar as instruções dadas no texto escrito. Eles apresentaram apenas alguns problemas de redação ao fazerem a descrição dos sólidos.

Como diferentes estratégias para a construção da Atividade 1 foram adotadas, na conclusão das atividades elas foram discutidas posteriormente, e cada dupla expôs suas idéias adotadas na construção.

Nos exercícios de construção propostos nas atividades do Encontro 5, todos os tipos de apreensão do conhecimento descritos por Duval (1996) são exercitados, bem como todas as modificações possíveis de uma figura propostas por ele e apresentadas na página 22.

Resumindo: Neste Encontro 5, além do desafio de construção, os alunos precisavam imaginar os sólidos propostos, pois na Folha de Atividades não havia figuras ilustrativas. Neste momento, os alunos já estavam acostumados à nomenclatura dos sólidos e às ferramentas para construção disponíveis no Calques 3D. Para minha surpresa, as duplas expressaram pouquíssimas dificuldades durante as construções, sendo que a maior dificuldade foi na descrição dos sólidos construídos. Apenas uma dupla e o aluno A não conseguiram concluir as atividades.

Com o Encontro 5 concluiu-se a sequência didática proposta para ser realizada com o suporte do software Calques3D. Esta sequência didática foi projetada, analisada a priori e a posteriori, no que diz respeito ao uso do software Calques 3D como auxiliar no desenvolvimento de habilidades para visualização de figuras tridimensionais.

A continuidade do trabalho de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial aconteceu na sala de aula, e é isto que trata a próxima seção do capítulo.

4.2.5 Continuidade em sala de aula

Esta seção tem por objetivo:

- ✓ relatar parte do prosseguimento do trabalho em sala de aula;
- ✓ apresentar os resultados da avaliação feita na turma de alunos que participou da experimentação da proposta didática – que vamos referir no que segue como sendo a "Turma Especial". A avaliação foi sobre conteúdos que foram trabalhados, na fase de continuidade em sala de aula, e os resultados da Turma Especial são comparados com os obtidos pelas outras três turmas de 3º ano da escola.

Vale aqui relembrar que a proposta didática, apresentada no Capítulo 3 e analisada neste Capítulo, foi aplicada em apenas uma das quatro turmas de 3º ano da escola. Nas outras turmas, todas sob a minha responsabilidade, o estudo da Geometria Espacial se realizou de forma tradicional: apresentação dos sólidos, através de imagens projetadas e também em material concreto acrílico; construção de esqueletos com varetas (maquetes tridimensionais); descrição de suas características e realização de exercícios com diferentes graus de dificuldade.

Para todas as turmas foram propostos os mesmos exercícios do livro texto e outros apresentados em folhas de xerox. Na Turma Especial, depois das cinco aulas realizadas no laboratório de informática (8 horas-aula), foram retomados os exercícios que já haviam sido resolvidos pelas demais turmas. Nos exercícios iniciais, os alunos avançaram rapidamente, pois eram exercícios que tratavam da Geometria de posição e as construções realizadas no Calques 3D ajudaram na visualização e na resolução. Para realizar estes exercícios os alunos se organizaram em grupos e em todos estes grupos surgiram comentários do tipo: *"Nestes exercícios não forma nenhum plano, como na situação da construção do Calques 3D onde não conseguíamos fechar a face"*.

A Turma Especial apresentou grande disposição e relativa facilidade na resolução dos exercícios propostos sobre prismas e cilindro. Durante a resolução dos exercícios, os alunos da Turma Especial mostraram segurança na interpretação dos enunciados, apresentando dificuldade quando as questões exigiam equacionamento da situação problema[54], sendo que

[54] Exemplos de situação problema que exige equacionamento:

venho constatando com frequência, nestes anos de trabalho com Geometria Espacial, falta desta habilidade. Mas observei que na Turma Especial, os alunos apresentaram também um avanço nas questões com equacionamento durante a realização dos exercícios propostos. O trabalho com a visualização de figuras tridimensionais, no qual visualizaram as figuras planas componentes das mesmas e a relação entre seus elementos componentes, foram exploradas durante as atividades propostas na sequência didática, facilitando a compreensão dos mais diversos enunciados.

Considerando que a utilização do Calques 3D deve ajudar os alunos a desenvolverem habilidades para visualizar objetos tridimensionais quando representados em duas dimensões, nos parece coerente que a Turma Especial não tenha apresentado dificuldades na interpretação e visualização dos problemas propostos.

A avaliação final (APÊNDICE C) foi aplicada quando as quatro turmas já se encontravam, todas, trabalhando o mesmo conteúdo relativo a prismas e cilindros e já tendo elas resolvido diversos exercícios sobre o assunto.

O Quadro 5 indica a distribuição de notas dos alunos, por turma, na avaliação final que envolveu exercícios sobre prismas e cilindros.

Quadro 5 – Desempenho das turmas na avaliação final de prismas e cilindros.

Turma	Desempenho	Notas inferiores a 5,0	Notas entre 5,0 e 7,0 ($5 \leq x \leq 7$)	Notas superiores a 7,0	Notas de 5,0 a 10,0
Turma Especial		8 (25%)	13 (41%)	11 (34%)	75%
Turma A		19 (66%)	5 (17%)	5 (17%)	34%
Turma B		15 (54%)	4 (14%)	9 (32%)	46%
Turma C		12 (44%)	10 (37%)	5 (19%)	56%

Fonte: Elaborado pela autora

O quadro indica um melhor percentual de desempenho na Turma Especial, principalmente quanto ao percentual de alunos com nota maior ou igual a 5,0. Desta forma, parece que as observações feitas nos momentos de resolução dos exercícios (apresentadas acima), que antecederam o momento de avaliação, se refletem nos percentuais que estão no quadro.

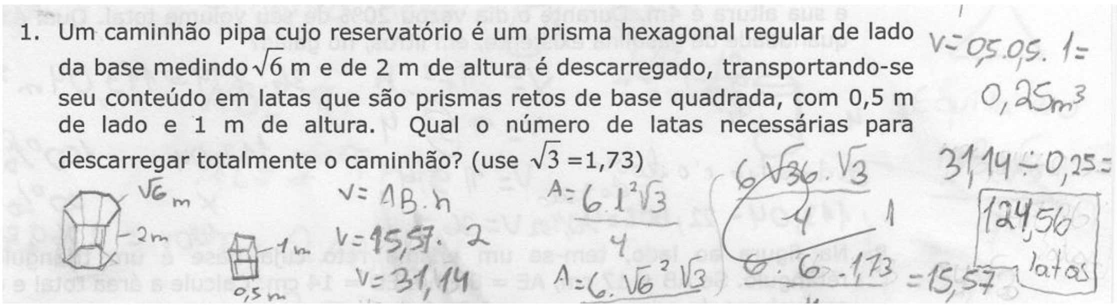
- ✓ Num paralelepípedo retângulo, a área total é de 582 cm². As dimensões desse paralelepípedo estão em PA de razão 3. Determine as dimensões do paralelepípedo.
- ✓ A área lateral de um prisma regular de base triangular é de 36 cm². A altura do prisma é o triplo da aresta da base. Calcule o volume do prisma.

Nas provas dos alunos da Turma Especial observei que:

- ✓ Para resolver as questões com descrição apenas textual, eles representaram através de desenho o sólido presente no enunciado. Da turma com 32 alunos apenas 4 alunos não fizeram nenhuma representação.

  As Figuras 31 e 32 ilustram o observado:

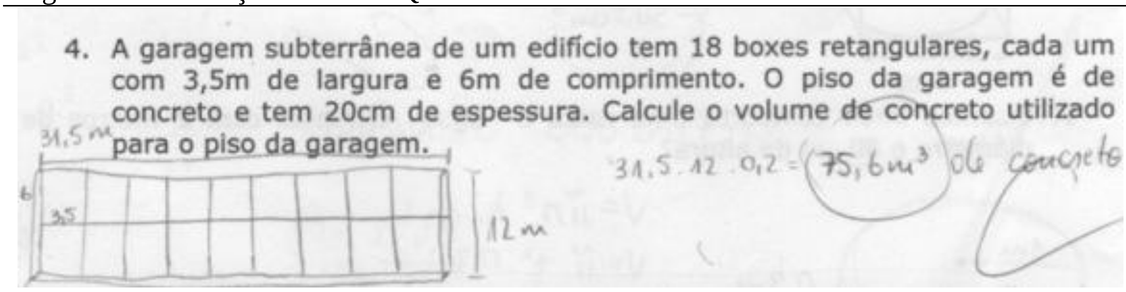
Figura 31 – Resolução de aluno: Questão 1



1. Um caminhão pipa cujo reservatório é um prisma hexagonal regular de lado da base medindo $\sqrt{6}$ m e de 2 m de altura é descarregado, transportando-se seu conteúdo em latas que são prismas retos de base quadrada, com 0,5 m de lado e 1 m de altura. Qual o número de latas necessárias para descarregar totalmente o caminhão? (use $\sqrt{3}$ =1,73)

Fonte: Material dos alunos

Figura 32– Resolução de aluno: Questão 4



4. A garagem subterrânea de um edifício tem 18 boxes retangulares, cada um com 3,5m de largura e 6m de comprimento. O piso da garagem é de concreto e tem 20cm de espessura. Calcule o volume de concreto utilizado para o piso da garagem.

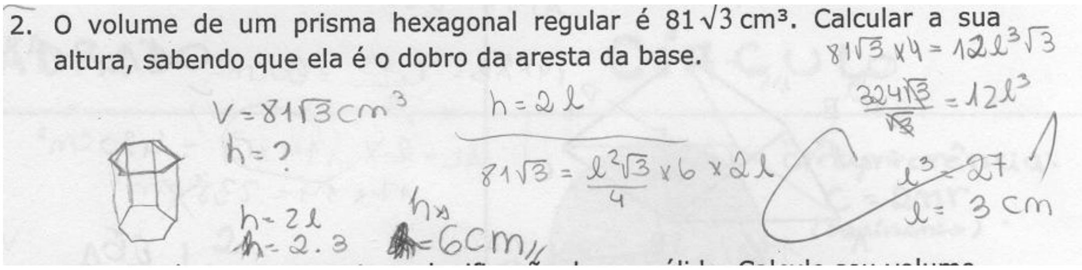
Fonte: Material dos alunos

- ✓ As questões que apresentaram maior número de erros são as que exigem equacionamento para encontrar dados necessários: 9 alunos acertam a questão 2; 6 alunos acertam a questão 5; 23 alunos acertam a questão 6.

  As questões 2 e 5 envolvem situações problema com prismas e a questão 6 com cilindros. Na questão 6 os alunos apresentaram maior número de acertos do que nas questões 2 e 5. Geralmente, os alunos apresentam maior dificuldade nas questões que envolvem equacionamento com prismas em comparação com aquelas que envolvem cilindros. Nos prismas, as possibilidades de polígonos que podem formar suas bases causam maiores dificuldades quanto aos cálculos de área. Já no cilindro, a base é um círculo, o que facilita o cálculo da área.

  As Figuras 33, 34 e 35 ilustram o observado:

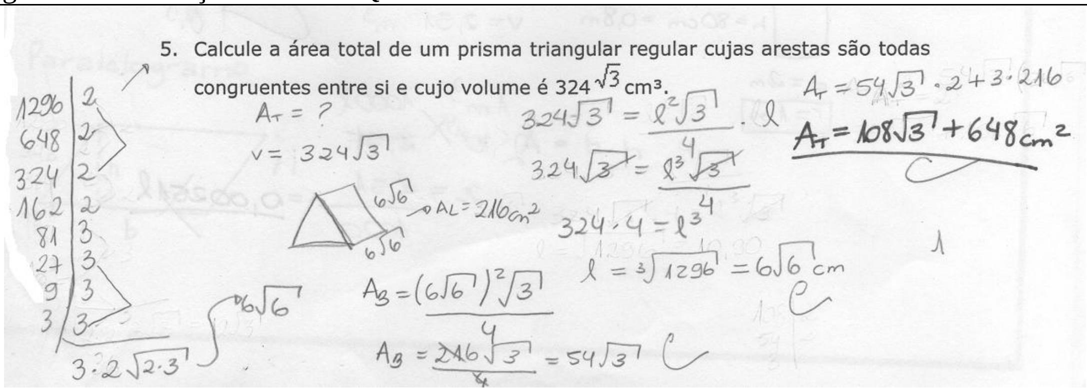
Figura 33– Resolução de aluno: Questão 2



2. O volume de um prisma hexagonal regular é $81\sqrt{3}\,cm^3$. Calcular a sua altura, sabendo que ela é o dobro da aresta da base.

Fonte: Material dos alunos

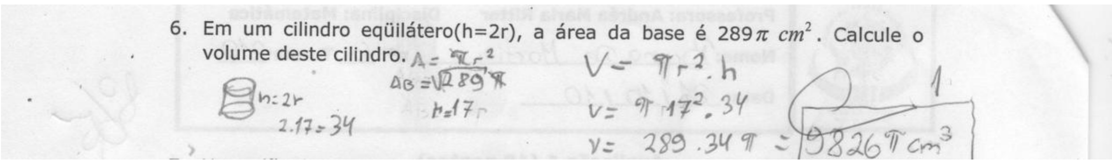
Figura 34– Resolução de aluno: Questão 5



5. Calcule a área total de um prisma triangular regular cujas arestas são todas congruentes entre si e cujo volume é $324\sqrt{3}\,cm^3$.

Fonte: Material dos alunos

Figura 35– Resolução de aluno: Questão 6



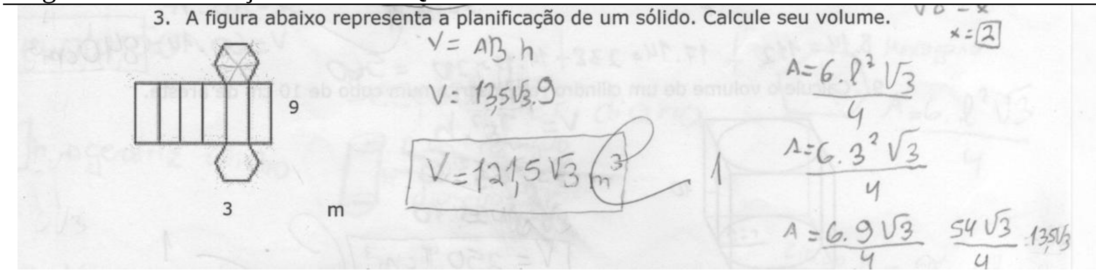
6. Em um cilindro eqüilátero(h=2r), a área da base é $289\pi\ cm^2$. Calcule o volume deste cilindro.

Fonte: Material dos alunos

- ✓ As questões que apresentaram maior acerto foram as questões 3 e 10, nas quais apenas 3 alunos (em cada uma) resolvem errado. A questão 3 apresenta a planificação de um prisma hexagonal regular e a questão 10 apenas a descrição de um cilindro, sendo fornecido o diâmetro e a altura em unidades de medida diferentes.

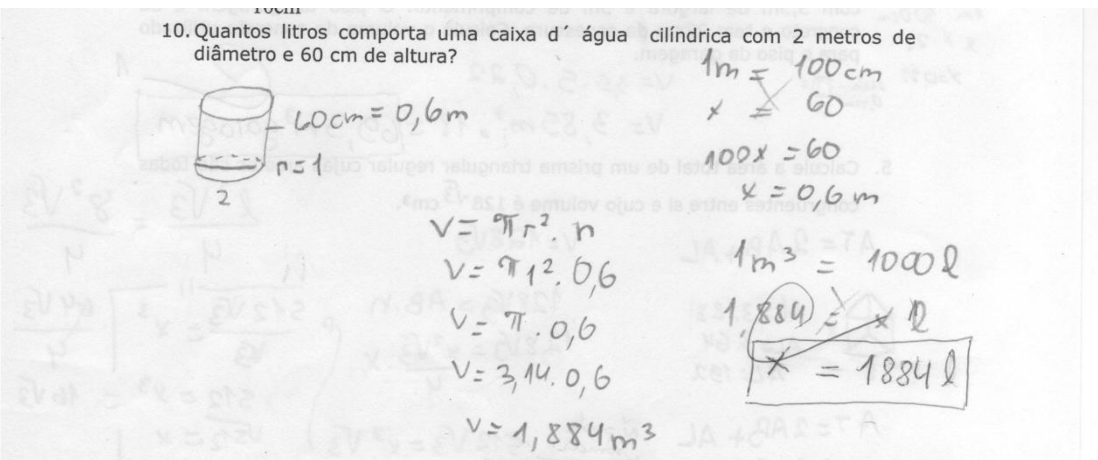
  As Figuras 36 e 37 ilustram resoluções destas duas questões.

Figura 36 – Resolução de aluno: Questão 3



Fonte: Material dos alunos

Figura 37 – Resolução de aluno: Questão 10

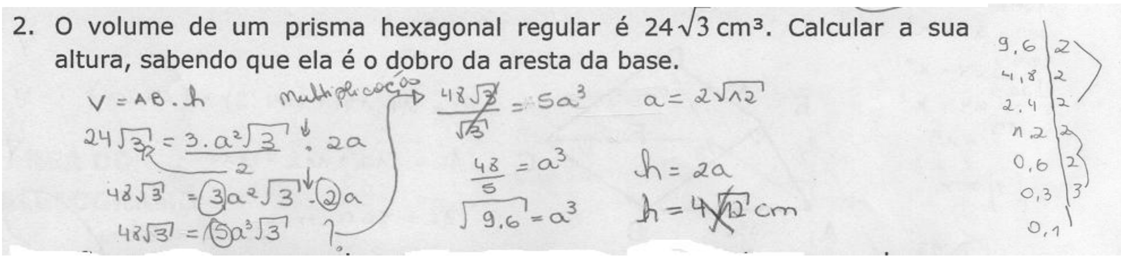


Fonte: Material dos alunos

✓ Erros que evidenciam falta de atenção ao resolver as questões. Alguns alunos mostraram conhecimento para resolver o exercício, mas cometeram erros nas multiplicações, fatorações, ou utilização dos dados fornecidos.

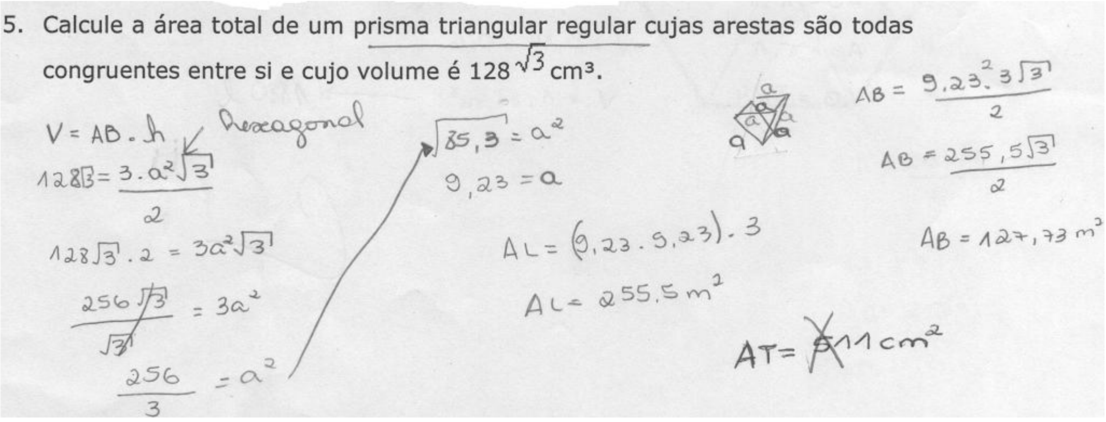
Nas Figuras 38, 39, 40 e 41 estão registrados alguns erros básicos cometidos na resolução de algumas das questões.

Figura 38 – Resolução de aluno: Questão 2 que apresenta erros de multiplicação, fatoração e divisão



Fonte: Material dos alunos

Figura 39 – Resolução de aluno: Questão 5 que apresenta erro na figura adotada como base



5. Calcule a área total de um prisma triangular regular cujas arestas são todas congruentes entre si e cujo volume é $128\sqrt{3}$ cm³.

$V = AB \cdot h$ hexagonal

$128\sqrt{3} = \frac{3 \cdot a^2\sqrt{3}}{2}$

$128\sqrt{3} \cdot 2 = 3a^2\sqrt{3}$

$\frac{256\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3a^2$

$\frac{256}{3} = a^2$

$\sqrt{85,3} = a^2$

$9,23 = a$

$AL = (9,23 \cdot 9,23) \cdot 3$

$AL = 255,5\,m^2$

$AT = \cancel{3}11\,cm^2$

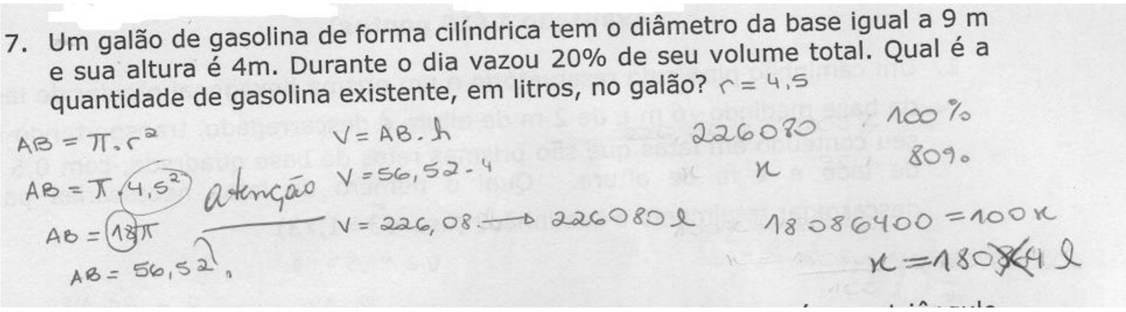
$AB = \frac{9,23^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$

$AB = \frac{255,5\sqrt{3}}{2}$

$AB = 127,73\,m^2$

Fonte: Material dos alunos

Figura 40 – Resolução de aluno: Questão 7 que apresenta erro de potenciação.



7. Um galão de gasolina de forma cilíndrica tem o diâmetro da base igual a 9 m e sua altura é 4m. Durante o dia vazou 20% de seu volume total. Qual é a quantidade de gasolina existente, em litros, no galão? $r = 4,5$

$AB = \pi \cdot r^2$

$AB = \pi \cdot 4,5^2$

$AB = 18\pi$

$AB = 56,52$

atenção

$V = AB \cdot h$

$V = 56,52 \cdot 4$

$V = 226,08 \rightarrow 226080\,l$

$226080 - 100\%$

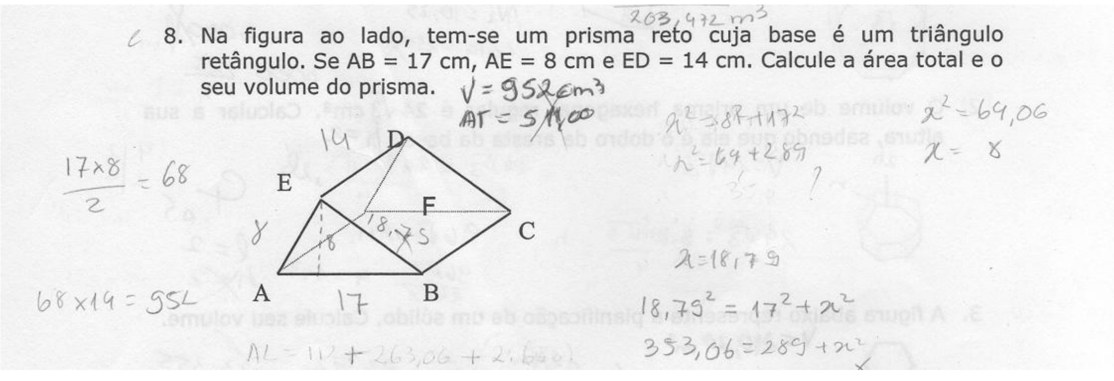
$x - 80\%$

$18\,086400 = 100x$

$x = 180\cancel{8}4\,l$

Fonte: Material dos alunos

Figura 41 – Resolução de aluno: Questão 8 que apresenta erro de dados no Teorema de Pitágoras



8. Na figura ao lado, tem-se um prisma reto cuja base é um triângulo retângulo. Se AB = 17 cm, AE = 8 cm e ED = 14 cm. Calcule a área total e o seu volume do prisma.

$263,472\,m^3$

$V = 952\,cm^3$

$AT = 5\cancel{1}00$

$\frac{17 \times 8}{2} = 68$

$68 \times 14 = 952$

$x^2 = 64 + 289$

$x^2 = 64,06$

$x = 8$

$x = 18,79$

$18,79^2 = 17^2 + x^2$

$353,06 = 289 + x^2$

$AL = 112 + 263,06 + 2 \cdot (\ldots)$

Fonte: Material dos alunos

Também observei que na continuidade do trabalho com sólidos, em sala de aula, na Turma Especial os alunos se mostraram mais receptivos. Eles realizaram todas as atividades com empenho e dedicação, apresentando dúvidas apenas nos exercícios mais difíceis. Sempre aproveitaram a aula para esclarecer suas dúvidas.

4.2.6 Reflexões sobre a teoria e prática: a validação da proposta didática

Nesta seção passo a apresentar uma análise dos resultados obtidos durante o processo de aplicação da proposta didática, que engloba os procedimentos adotados pela professora e pelos alunos, antes, durante e depois da aplicação. A partir dessa análise apresento sugestões de modificações na proposta para viabilizá-la em outros contextos de sala de aula.

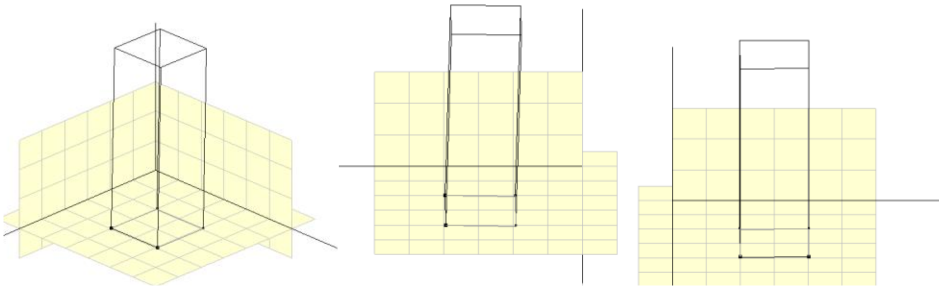
Analisando o desempenho dos alunos na sala de aula convencional e no laboratório de informática, percebe-se que desde o início dos trabalhos houve um progresso na aprendizagem. O pré-teste envolvendo questões do teste de Van Hiele e as questões envolvendo raciocínio espacial mostraram dificuldades dos alunos em relação aos conteúdos de Geometria Plana e também quanto ao raciocínio espacial. O pré-teste mostrou que os níveis de desenvolvimento, conforme Van Hiele, estão distribuídos até no máximo 3, sendo este raro para os alunos (4 no total).

Após o pré-teste, realizou-se uma revisão de conteúdos de Geometria Plana, assuntos trabalhados no Ensino Fundamental. Após esta revisão, utilizando-se aulas expositivas e o livro-texto, os alunos fizeram uma avaliação individual e a média da turma ficou em 5,88, sendo que 12 alunos ficaram com nota inferior a 5,0 e 8 alunos ficaram com notas entre 5,0 e 7,0. Como a escola exige nota 7,0 para aprovação, foi realizada uma prova de recuperação e então apenas dois alunos ficaram com notas inferiores a média 7,0.

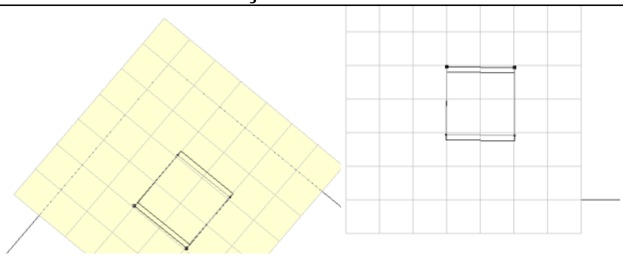
Antes de dar início a experimentação da proposta didática com o Calques 3D, os principais conceitos da Geometria de posição foram discutidos. Após iniciaram-se os trabalhos no laboratório de informática. Nas atividades do primeiro dia, em que as construções 3D deveriam ser feitas a partir de representação em perspectiva dos sólidos, foi possível perceber a dificuldade dos alunos na identificação dos diferentes elementos.

Neste momento, minha intervenção sobre a representação de sólidos se mostrou necessária. Como diz Parzysz (1988), é preciso esclarecer que certas regras são obrigatórias e devem ser explicitadas, pois dizem respeito a propriedades geométricas projetivas. Para que os alunos compreendessem essas regras de representação em perspectiva, utilizei um exemplo no Calques 3D e fiz movimentos que ilustrassem a representação sob diferentes pontos de vista, conforme ilustra a Figura 42. Este exemplo também foi utilizado para mostrar o paralelismo e perpendicularismo das arestas do paralelepípedo.

Figura 42 – Modificações das vistas de um paralelepípedo



Modificação da vista frontal

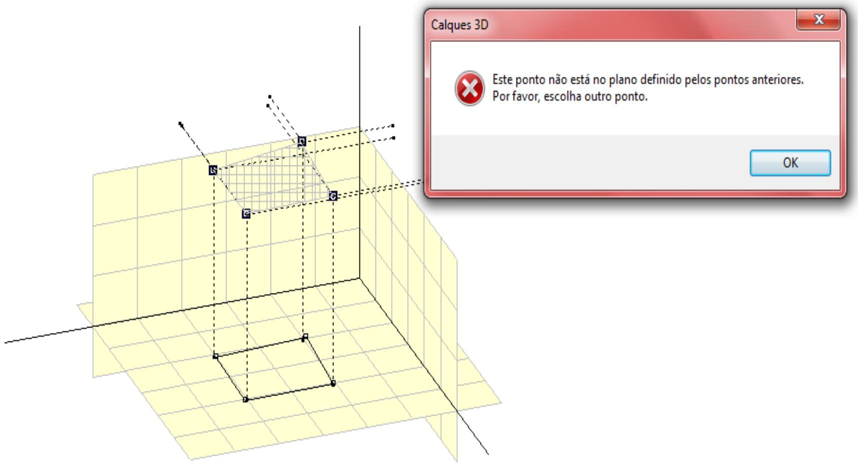


Modificação da vista superior e inferior

Fonte: Elaborada pela autora

Ao construir as primeiras figuras no software, os alunos não tomaram cuidados quanto às condições de perpendicularidade e paralelismo entre arestas e faces e então não conseguiram “encaixar” as faces de modo a “fechar” o sólido. Este cuidado pode passar desapercebido nos desenhos em perspectiva feito com lápis e papel e também nas maquetes tridimensionais. O trabalho no Calques 3D exige que os alunos identifiquem estas relações de perpendicularidade e paralelismo, principalmente nas construções de prismas, pois para construir os polígonos “faces” os seus pontos vértices devem estar todos no mesmo plano e isto deve ser considerado no procedimento de construção. Esta exigência de cuidados na construção é uma vantagem da utilização do software, em relação à utilização de representações em desenho no papel ou maquetes tridimensionais, pois além de realizarem as construções, os alunos estão aplicando conceitos que são essenciais para produzir o sólido. A Figura 43 apresenta uma construção em que os necessários cuidados de construção não foram atendidos e o próprio Calques 3D informa da incoerência do procedimento que quer-se implementar, a saber, a construção de um polígono usando como vértices pontos que não são coplanares.

Figura 43 – Tentativa de construção de polígono usando pontos que não coplanares.



Fonte: Elaborada pela autora

Os cuidados a serem tomados na construção caracterizam a apreensão que envolve o conhecimento sequencial, descrito por Duval (1996). Segundo este autor, este é um conhecimento que se faz presente nas tarefas de construção que tem como objetivo reproduzir uma figura, neste caso , usando o software Calques 3D.

No decorrer da aplicação da proposta didática e também ao longo das atividades posteriores, verificou-se a apreensão do conhecimento dos tipos perceptiva, discursiva e operatória, descritas pelo mesmo Duval (1996). Durante as atividades, os alunos interpretaram as figuras dadas e os elementos de cada figura, e articularam este entendimento com os enunciados. A apreensão operatória, manifesta-se nas construções do quinto encontro, em que os problemas proposto tem apenas uma descrição textual. Podemos tomar como exemplo a Atividade 1, na qual, a partir de um cubo inicial, diferentes foram as estratégias escolhidas: alguns alunos construíram o segundo cubo com aresta igual a metade da aresta do cubo inicial; outros alunos trabalharam com cubo tendo aresta igual ao dobro da aresta do cubo inicial.

Percebe-se também durante o trabalho, as modificações de tratamento que são das as figuras para que , conforme Duval (1996), se estabeleça a apreensão operatória: é a modificação mereológica que relaciona o parte/todo); a modificação ótica que transforma uma figura em outra com as mesma propriedades mas com desenho diferente; a modificação posicional que desloca a figura em relação ao referencial inicial. Durante as construções realizadas, estas modificações se manifestaram na identificação dos diferentes componentes de um sólido ou nas transformações de planificações ou descrições textuais em representações em perspectiva no Calques 3D.

Ao resolver exercícios em sala de aula, após as construções feitas no laboratório de informática, envolvendo problemas de geometria dos três níveis (Nível 1, 2 e 3) classificados por Duval (1996), os alunos conseguiram mostrar o quanto a comunicação de idéias em Matemática depende das representações utilizadas. Na Turma Especial se manifestou, de forma mais intensa, o uso de representações em desenho para uma melhor compreensão do problema. Estas representações feitas pelos alunos refletem as representações mentais que eles fizeram das situações apresentadas e indicam que "*o elemento do núcleo central em todas as concepções da percepção visual são as imagens mentais"*(Gutiérrez, 1992, p. 44).

Também merece destaque, no experimento realizado, a iniciativa voluntária dos alunos de construção de maquetes tridimensionais para visualizar os sólidos que haviam sido apresentados através de planificação. Parzysz (1988, p.79) identifica esta necessidade de *"passar por uma fase de utilização de uma representação em 3D (modelo), mesmo em nível do ensino médio".* Isto foi bem evidenciado no experimento realizado, o que comprova que não se pode descartar esta etapa de trabalho com os objetos tridimensionais.

Assim como expõe Duval (1993), o trabalho com a Matemática nos mostra que as representações semióticas dos objetos, sejam elas utilizadas para compreensão ou análise, nos dão um ponto de partida para o trabalho pedagógico que busca estratégias que auxiliem os alunos nas suas dificuldades. Através das representações Compreendendo a forma de pensar dos alunos o professor conseguirá elaborar estratégias para o real crescimento cognitivo dos mesmos.

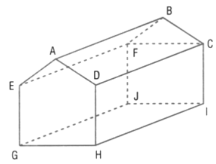
A partir da sequência didática tratando da visualização de objetos tridimensionais e do desempenho dos alunos no prosseguimento do trabalho em sala de aula, consigo dizer que, quanto os níveis propostos por Van Hiele, os alunos avançaram em relação aqueles em que se encontravam no pré-teste realizado antes da aplicação da sequência didática. No pré-teste avaliei que quatro alunos poderiam se apresentar no nível 3 de Van Hiele e agora, após a aplicação da proposta e dos exercícios realizados em sala de aula avalio que outros sete também se encontram neste nível. Quanto aos demais alunos, diria que se encontram pelo menos no nível 2, pois identifiquei neles atitudes que são características deste nível. As características relativas ao nível 4, não foram objeto de investigação na experiência realizada.

Quanto a proposta didática implementada, alguns pontos merecem ser reavaliados:

- ✓ Mesmo tendo sido produtiva a realização das duas atividades do Encontro 1, momento em que os alunos realizaram as construções de sólidos indicados através de representações em perspectiva, a quantidade de construções solicitadas merece ser reconsiderada. Para uma futura aplicação da proposta se propõe a realização de apenas uma das atividades do primeiro Encontro, incluindo-se nele reformulações. Uma possibilidade seria:

Construa o sólido representado na figura ao lado. Indique na construção:

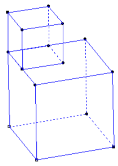
a. de rosa, duas retas concorrentes.
b. de amarelo, duas retas paralelas.
c. de marrom, duas retas perpendiculares.
d. de laranja, duas retas reversas.
e. de azul, um segmento que determine a distância da parede da frente à parede dos fundos da casa.
f. de vermelho, a distância entre as paredes laterais.
g. de verde , a distância da cumeeira ao piso (ponto **A** ao plano GHIJ).
h. de roxo todos os planos que contém a reta $\overleftrightarrow{DH}$ e são perpendiculares ao plano GHIJ.
i. a reta $\overleftrightarrow{IJ}$ é perpendicular ao plano EFJG. Qual é a posição dos planos CFJI, GHIJ, DEGH ao plano EFJG?



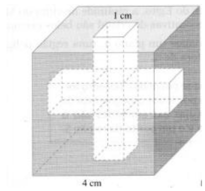
- ✓ É importante que os alunos explorem bem as atividades iniciais para que se ambientem com o software e bem apliquem os conceitos da Geometria de posição, pois eles auxiliam na compreensão de futuras situações problema.
- ✓ As atividades do segundo e terceiro Encontros podem ser reduzidas, mesclando-se as questões elaboradas com as questões do livro texto de forma a ter-se um Encontro de trabalho. Uma possibilidade seria:

1. Construa as peças representadas abaixo:

a)

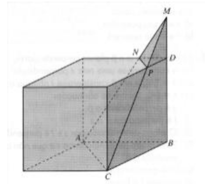


b)



(Consultar exercício 34 da página 465)

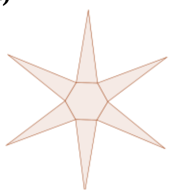
c)



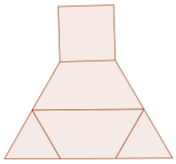
(Consultar exercício 11 da página 682)

2. Construa os sólidos resultantes das planificações abaixo:

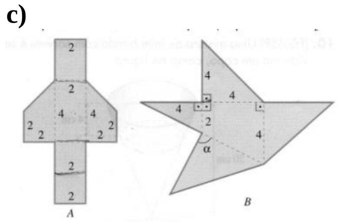
a)



b)



c)



(Consultar exercício 13 da página 683)

- ✓ Dependendo da quantidade de aulas que se pode dispor no laboratório de informática, do calendário escolar e do laboratório, as construções realizadas no quarto Encontro podem ser feitas no momento de estudo do volume de uma pirâmide.
- ✓ Para realizar as atividades do quinto Encontro, os alunos já deveriam estar ambientados com o software, para bem realizarem as atividades sem perda de tempo na aprendizagem das ferramentas do software.
- ✓ Inúmeras outras situações de construções podem ser propostas. O importante é selecionar atividades que explorem diferentes situações de aprendizagem. As atividades propostas neste trabalho exploraram as construções dos sólidos, a partir de representação em perspectiva, de planificação e de descrição textual.

Ao iniciar o trabalho, os alunos apresentaram muitas dificuldades para se adaptar ao software Calques 3D, pois eles entendiam que as construções poderiam ser realizadas de qualquer maneira. Ao verificar a impossibilidade de "fechar" os sólidos, se frustravam por ter que reiniciar a construção. Neste momento passaram a compreender que para realizar construções de objetos geométricos, cuidados precisam ser tomados.

Após a realização do experimento através resultados obtidos pela Turma Especial, tanto durante o momento de resolução dos exercícios propostos, quanto no momento de avaliação final, posso afirmar que as construções realizadas no Calques 3D muito auxiliaram no crescimento das habilidades para a visualização de objetos tridimensionais, e também na compreensão e elaboração de estratégias para solucionar problemas que envolvem estes objetos. Esta sequência didática foi aplicada em apenas uma das turmas de 3º ano da escola, e apesar do grande crescimento da Turma Especial, não posso garantir que o mesmo ocorreria com as demais, pois cada turma tem suas características próprias e comportamentos singulares diante das propostas apresentadas pelo professor.

O trabalho também foi socializado com colegas da área da Matemática na escola.

Considerando as análises e considerações apresentadas, relativas ao desempenho da Turma Especial, considero que a proposta didática pode ser validada. E julgo que ficaram respondidas as duas perguntas colocadas no Capítulo 3.

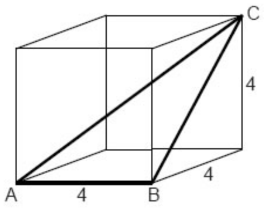
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao pensar sobre a escolha de um tema para esta dissertação, já sabia da minha vontade de desenvolver uma proposta para o ensino de Geometria. Nas minhas primeiras ideias pensei em desenvolver um trabalho com Geometria Plana no Ensino Fundamental, nisso também fazendo uso de algum software.

Por que o meu interesse em Geometria? Desde que iniciei meu trabalho como professora, observo a resistência dos alunos frente aos conteúdos de Geometria, principalmente nas séries finais do Ensino Médio. Já tendo desenvolvido trabalho de Geometria em diversas séries, explorando diversas formas de construir o caminho da prática até a formalização de teoremas, não encontrei nas séries do Ensino Fundamental maiores resistências e nem dificuldades significativas. O mesmo também me ocorreu ministrando aulas de desenho geométrico no Ensino Médio, a não ser quanto algumas manifestações de pouco interesse por parte dos alunos, sob a alegação de não terem o gosto de desenhar. Porém, ao lecionar Geometria Espacial no Ensino Médio, me deparei com muitas dificuldades por parte dos alunos, especialmente quanto ao estabelecer relações entre as figuras de representações em perspectiva ou de planificações dos sólidos com os enunciados dos problemas que são clássicos nos livros escolares. Na Figura 44 temos alguns exemplos de problemas.

Figura 44 – Exemplos de problemas encontrados na internet e livros

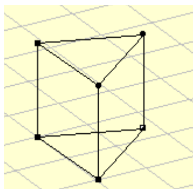
No cubo representado na figura



a área do triângulo ABC é

A) $4\sqrt{2}$
B) $8\sqrt{2}$
C) $4\sqrt{3}$
D) $8\sqrt{3}$
E) 8

Determine a área total de um prisma triangular regular cujas arestas são todas congruentes entre si e cujo volume é $54\sqrt{3}$ cm³.



Fonte: Vestibular PUC – RS – 2008; Questão adaptada do Vestibular Mackenzie – SP.

Como nos últimos cinco anos tenho tido dedicação exclusiva ao Ensino Médio, resolvi aceitar o desafio de conceber e implementar uma sequência didática com foco no ensino de

Geometria Espacial para esse ciclo educacional. Durante os anos de trabalho com esse conteúdo, utilizei diversos métodos para auxiliar os alunos. Por exemplo, técnicas de representação em perspectiva e montagens de maquetes tridimensionais. Verifiquei que alguns alunos conseguiram melhorar seu desempenho ao fazer uso destas técnicas e mesmo atingindo níveis considerados satisfatórios, era evidente para mim que esses níveis podiam ser melhorados.

Influenciada por esta insatisfação e motivada pelos desafios propostos pelo Mestrado em Ensino de Matemática, somadas às possibilidades do uso de tecnologia informática em sala de aula, busquei um software para auxiliar, em primeiro lugar, aquilo que sempre me angustiou em relação às dificuldades dos alunos: a visualização e interpretação dos sólidos envolvidos nas diversas situações-problema apresentadas em livros, vestibulares, concursos, etc. Realizar as leituras necessárias para compreender o processo da construção de conhecimento em Geometria abordado por Van Hiele e Duval, bem como alguns trabalhos realizados com as técnicas de perspectivas utilizadas por Gutiérrez e Parzysz, e as maquetes tridimensionais destacadas por Parzysz, dos quais já fazia uso em minhas aulas, foram muito importantes para conseguir analisar as dificuldades encontradas pelos alunos durante a resolução dos problemas e também na concepção da sequência didática.

Para esse trabalho, escolhi a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa principalmente pela sua forma de organizar a pesquisa a partir da uma análise preliminar do problema a ser investigado, passando a criação de uma sequência de aulas planejadas para obter informações sobre o fenômeno investigado. Na concepção da sequência didática apoiada no uso de um software de Geometria dinâmica – o Calques3D, criei expectativas em relação ao desempenho dos alunos. Previ dificuldades, pois as construções exigiam visualização e conhecimento dos conceitos da Geometria de posição, bem como desenvoltura no uso das ferramentas do Calques 3D. Minhas expectativas quanto às dificuldades foram realidade até o segundo Encontro.

A partir do terceiro Encontro, conhecendo e sabendo utilizar as ferramentas disponíveis, os alunos deixaram de mostrar maiores dificuldades quanto aos procedimentos que tinham que usar, apresentando agilidade e rapidez. Uma dupla (4) se autodenominou "pais do Calques", como forma de expressar seus sentimentos em níveis de compreensão e rapidez na execução das tarefas. Esta rapidez se deve ao fato de eles terem instalado o software em seus computadores pessoais e assim avançaram nas suas explorações do software, por iniciativa própria. O interessante é que estes alunos não podem ser considerados “fãs” de Matemática, pois nas aulas convencionais nem sempre realizavam as atividades propostas, além de serem sempre muito inquietos. No laboratório de informática eles se interessaram pela proposta de trabalho e demonstraram um grande entusiasmo.

Vale destacar que o espírito de colaboração foi construído por iniciativa da turma e de forma espontânea o que provocou movimentações e conversas constantes entre eles. Essa situação pode causar estranhamento numa perspectiva mais tradicional do ensino de Matemática que pressupõe a centralização no saber do professor e no silêncio dos alunos. Outro fato relevante é de que o auxílio prestado por alguns alunos foram caracterizados por indicativos de caminhos para chegar à solução de suas dificuldades gerando diferentes possibilidades de resolução, que foram discutidas posteriormente em sala de aula.

A turma apresentou satisfação em relação aos trabalhos na sala de informática e o mesmo espírito de desafio continuou presente na sala de aula tradicional, nos momentos de realizar os exercícios usuais da Geometria Espacial. Isto ficou evidente a partir das constantes relações estabelecidas entre os exercícios convencionais e as construções realizadas com o Calques 3D. Os alunos aprenderam a fazer uso dessa nova ferramenta e a ela recorreram muitas vezes durante os estudos dos sólidos geométricos, nos momentos de dúvidas. Sendo assim considero que o Calques 3D foi uma *ferramentaparaopensamento*, para esta turma de 3º ano do Ensino Médio, no sentido que dado por Shaffer e Clinton (2006).

Sinto-me muito satisfeita com os resultados obtidos quanto a aprendizagem dos meus alunos. Observei uma melhora significativa na visualização dos sólidos envolvidos nos exercícios que foram resolvidos após a sequência didática realizada na sala de informática e, como consequência, nas avaliações posteriores os erros dos alunos tiveram origem, sobretudo, na falta de atenção, nos cálculos básicos e principalmente no equacionamento dos problemas.

Acredito que o aumento nas habilidades de visualização se deve ao fato de ter sido utilizado o software Calques 3D. Mas novas ferramentas e propostas não excluem a utilização de outros procedimentos didáticos relacionados ao ensino de Geometria. Em outras palavras, os recursos tradicionais, tais como construção de maquetes, e os recursos inovadores são complementares na elaboração das estratégias que ajudam a aprendizagem dos alunos.

Outro dado importante a ser considerado pelo professor é a constante observação das dificuldades apresentadas pelos alunos e também a necessidade de permanente estudo de trabalhos relacionados a estas dificuldades. E hoje em dia, com a internet, podemos entrar em contato com propostas realizadas nas mais variadas culturas e instituições educacionais.

Como produto final dessa experiência didática apresento no APÊNDICE D, um pequeno tutorial para utilização do Calques 3D e no APÊNDICE E, além da sequência didática original, a sequência reelaborada a partir das análises realizadas durante e após a aplicação da proposta de trabalho.

Por fim faz-se necessário destacar, mais uma vez, que o trabalho do professor está diretamente ligado ao sucesso da aprendizagem dos alunos. Enquanto educadores é imperativo a manutenção do nosso espírito de pesquisador em busca de novas ferramentas e referências teóricas para elaboração de soluções de dificuldades de aprendizagem que os alunos apresentam, em diferentes momentos.

Os trabalhos realizados nas instituições de ensino espalhadas pelo Brasil, como esse aqui apresentado, precisam chegar ao alcance dos professores que estão em sala de aula para que aconteça realmente melhoria na qualidade da aprendizagem dos alunos. Para que isso ocorra faz-se necessária a participação efetiva das comunidades, instituições governamentais na elaboração de projetos pedagógicos e de políticas públicas que possibilitem a ampliação do acesso à educação irrestrita e a construção dos saberes.

REFERÊNCIAS:

ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. G. S. de. Iniciação à demonstração: apreendendo conceitos geométricos. In: 23ª REUNIÃO ANUAL DA ANPED, Caxambu, MG, 2000. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1930t.PDF> Acesso em 15 jul. 2010.

ALVAREZ, Tana Giannasi. *A Matemática da Reforma Francisco Campos em ação no cotidiano escolar*. 2004. 270 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2004. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/tana_giannasi_alvarez.pdf>Acesso em 30 jun. 2010.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. V. *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*: information and communication technologies, modeling experimentation and visualization. v. 39. New York: Springer, 2005.

BURATTO, I. C. F. *Representação Semiótica no Ensino da Geometria:uma alternativa metodológica na formação de professores*. Florianópolis. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Programa de Pós-Graduação em Educação Cientifica e Tecnológica. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

BÚRIGO, Elisabete Z. *Movimento da Matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60*. 1989. 286 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação. UFRGS, Porto Alegre, RS, 1989.
Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/5237/> Acesso em 30 jun. 2010.

______. Tradições modernas: reconfigurações da Matemática escolar nos anos 60. v. 23, n. 35b. *Bolema*, Rio Claro, p. 277-300. abr. 2010.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

DOUADY, Régine. La ingeniearía didáctica e la evolución de su relación no conocimiento. In: ARTIGUE, M. DOUADY, R. MORENO, L. GÓMEZ, P. *Ingeniería didáctica in educación Matemática*, Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1ª ed., p. 61-97, 1995.Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigue1995Ingenieria.pdf> Acesso em: 15 set. 2010.

DULLIUS, Maria M.; QUARTIERI, Marli T. *Recursos Computacionais nas aulas de Matemática*. In: III SEMINÁRIO INTERNACIONALDE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2006. Águas de Lindóia. São Paulo. *Anais eletrônicos.* G06 - Educação Matemática: novas tecnologias e educação à distância. Disponível em: <http://tecmat-ufpr.pbworks.com/f/R0168-1.pdf> Acesso em 30 jun. 2010.

DUVAL, R. Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*. IREM – ULP, Strasbourg, v. 5, p. 37-65, 1993.

______. Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *RDM,* Grenoble, v. 16, n. 3, p. 349-382, 1996.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. *Aprendizagem em Matemática*: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus,p. 11-33, 2003

GRAVINA, M. A. *Os ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-Dedutivo.*2001. 262 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação). UFRGS. Porto Alegre, 2001.

______, SANTAROSA, L.M.A Aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. 1998, Brasília. In: IV CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO,1998, Brasília. *Anais eletrônicos...:* IV Congresso RIBIE, Brasília, Centro de Convenções Ulysses Guimarães, 1998. Disponível em: <http://www.niee.ufrgs.br/eventos/RIBIE/1998/pdf/com_pos_dem/117.pdf> Acesso em 20 dez. 2010.

GONÇALVES, J. P. Reflexões sobre os processos de ensino/aprendizagem de Matemática baseados no software educativo FORMEL. *Revista Brasileira de Informática na Educação,* v.12, n. 2, 2004. Disponível em: <http://bibliotecadigital.sbc.org.br/download.php?paper=603>Acesso em: 10 abr. 2010.

GUTIÉRREZ, A. Procesos y habilidades en visualización espacial, *Memorias Del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría.* Valencia, p. 44-59, 1992. Disponível em: <http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut92b.pdf> Acesso em 20 jun. 2010.

______. Exploring the links between Van Hiele Levels and 3-dimensional geometry. *Structural Topology* 18. Montreal, p. 31-48. 1992. Disponível em: <http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut92a.pdf> Acesso em: 20 jun 2010.

______. Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA* 3.3, Colômbia, p. 193-220, 1998. Disponível em: <http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut98a.pdf> Acesso em: 20 jun. 2010.

______, Pegg, J., Lawrie, C. Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry, *Proceedings of the 28th P.M.E. Conference* 2, , p. 511-518, 2004. Disponível em: <http://www.uv.es/gutierre/marcotex.html> Acesso em 31 out 2010.

JAHN, Ana P., BONGIOVANNI, Vicenzo. *Explorações em Geometria Espacial com o Software Cabri 3D.* Disponível em:<http://www.limc.ufrj.br/htem4/papers/30.pdf> Acesso em 13 set. 2010.

______, Ana P., SALAZAR, Jesus V. F. Exploring Three-Dimensional Objects Through Dynamic Representations Using Cabri 3d: An Experience With Brazilian School Students. In: 11th INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 2008, Monterrey. *Anais eletrônicos…:* ICME 11 - International Committee, Monterrey, 2008. Disponível em: <tsg.icme11.org/document/get/234> Acesso em 13 set. 2010.

KAPUT, J. Technology and mathematics education. In: *D.A. Grouws(Ed).* A handbook of research on mathematics teaching and learning. New York, p. 515-556, 1992.

______. Technology becoming infrastructural in mathematics education. Models *& Modeling as Foundations for the Future in Mathematics Education.* Mahwah, NJ. 2007.
Disponível em: <http://www.icme-organisers.dk/tsg15/ICME_Plenary_Kaput.pdf> Acesso em: 18 jul. 2010.

KAWASAKI, Teresinha Fumi. *Tecnologia na sala de aula de Matemática: resistência e mudança na formação continuada de professores.* 2008. 212 f. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação Conhecimento e Inclusão Social da Faculdade de Educação. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 2008. Disponível em: <http://opus.grude.ufmg.br/opus/opusanexos.nsf/4d078acf4b397b3f83256e86004d9d55/e7fdfeaab74f505e83257713004761fb/$FILE/TeresinhaKawasakiTese.pdf> Acesso em: 12 abr. 2011.

KODAMA, Yumi. O *estudo da perspectiva cavaleira: uma experiência no ensino médio.* São Paulo. 2006. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2006.Disponível em:
<http://www4.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/yumi_kodama.pdf>Acesso em 13 set. 2010.

LEME DA SILVA, M. C. A Geometria escolar e o Movimento da Matemática Moderna: em busca de uma nova representação. In: VII SEMINÁRIO TEMÁTICO: A MATEMÁTICA MODERNA NAS ESCOLAS DO BRASIL E DE PORTUGAL, 2009,Florianópolis.*Anais eletrônicos...*Florianópolis: UFSC, 2009. Disponível em:
<http://www.smmmfloripa.ufsc.br/LemedaSilva_art.pdf> Acesso em: 12 set. 2010.

LORENZATO, S., VILA, M. Século XXI: qual Matemática é recomendável? *Zetetiké*. São Paulo, Ano 1, n. 1, p. 42, 1993.

MANDARINO. M., OLIVEIRA, A. T., BELFORT, E., CABANAS, M. I., PINHEIRO, L., COELHO, F. R. & MARTINS, R. Soluções inesperadas na resolução de problemas matemáticos: erro ou acerto? In: IICONGRESSO INTERNACIONAL COTIDIANO - Diálogos sobre Diálogos, 2008, Niterói. *Anais...* Niterói: UFF,2008. Disponível em:
<http://limc.ufrj.br/limc/images/7/7c/Solucoes.pdf> Acesso em: 15 jul. 2010.

MELLO, José L. P. *Matemática: construção e significado.* 1 ed. São Paulo: Moderna, 2005.

MENESES, Ricardo S. *A História da Geometria Escolar no Brasil:* de disciplina a conteúdo escolar. São Paulo, 2007, 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2007. Disponível em:
<http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/ricardo_soares_meneses.pdf> Acesso em 30 jun. 2010.

MIRANDA, Samuel S.*O papel da Geometria Descritiva nos problemas da Geometria Espacial: um estudo das secções de um cubo*. São Paulo, 2006, 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2006. Disponível em: <http://www4.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/samuel_miranda.pdf> Acesso em 13 set. 2010

MORENO-ARMELLA, L., HEGEDUS, S., KAPUT, J. From static to dynamic Mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, Nova York, v. 68, n.2, p. 99-111, 2008.

PARZYSZ, B. *Representations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au Lycée.* Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.1989. 490 f. Tese (Doutorado em Didática de Matemática), Universidade de Paris VII, Paris,1989.

______. Representation of space and students`conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, Nova York, v. 22, nº 6, p. 575-593, 1991.

______. "Knowing" vs "seeing", problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, Nova York, v. 19, n. 1, p. 79-92, 1988.

PAVANELLO, Regina Maria.*O Abandono do ensino de Geometria: Uma visão histórica*. Campinas, 1989, 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas,1989.
Disponível em: <http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000045423>. Acesso em: 13 set. 2010.

______. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, Campinas, v. 1, n. 1, p. 7-18, mar.1993.

PINTO, Neuza B. Marcas históricas da Matemática moderna no Brasil. *Diálogo Educacional*, Curitiba, v. 5, n. 16, set/dez, 2005.

PIROLA, N. A. QUINTILIANO, L. C. PRONÇA, M. C. Estudo sobre o desempenho de alunos no ensino médio em tarefas envolvendo conceitos de polígonos e poliedros. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2003.Santos. *Anais*. II SIPEM Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, São Paulo, v. 1, 2003.

______, N. A., MORACO, A. S. C. T. Uma análise da linguagem geométrica no ensino de Matemática. In: V ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 2005, Bauru, SP. *Caderno de Resumos*. V Encontro nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, p. 263, 2005.

ROSCHELLE, J. PEA, R. HOADLEY, C., GORDIN, D. & MEANS, B. Changing how and what children learn in school with computer-based technologies. *The Future of Children*, Los Altos, California, v. 10, n. 2, p. 76-101, 2000. Disponível em: <http://ctl.sri.com/publications/downloads/PackardChangingLearning.pdf> Acesso em: 20 dez. 2010.

______, TATAR, D. SHECHTMAN, N.HEGEDUS, S., HOPKINS, B. KNUDSEN, J. STROTER, A. Can a Technology-enhanced. Curriculum Improve Student Learning of Important Mathematics*?* *SimCalc*. Menlo Park, Califórnia, Mai. 2007. Disponível em: <http://math.sri.com/publications/SimCalc_TechReport_01.pdf> Acesso em 20 dez. 2010.

ROXO, Euclides. A Matemática e o curso secundário. In: VALENTE, W.R, org. *Euclides Roxo e a modernização do ensino da Matemática no Brasil.* Brasília: UnB, p. 152–179, 2004.

SANTOS, V. C. M. *A Matemática escolar nos anos 1920: Uma análise de suas disciplinas através das provas dos alunos do ginásio da capital do estado de São Paulo.* São Paulo, 2003, 183 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2003.

SHAFFER, D.W., KAPUT, J. J. Mathematics And Virtual Culture: An Evolutionary perspective On Technology and Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, Nova York,* v. 37, n. 2, p. 97–119, 1999.

______, CLINTON K. A. Toolforthoughts: Reexamining Thinking in the Digital Age. *Mind, Culture, And Activity,* v.*13,* n. 4, p. 283–300, 2006. Disponível em: <http://language.la.psu.edu/~thorne/ShafferClinton2007_MCA.pdf> Acesso em 12 jan. 2011.

VALENTE, W. R. *Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730 – 1930).* São Paulo: Annablume/FAPESP, 1999.

______. *O Nascimento da Matemática do Ginásio.* São Paulo: Annablume/FAPESP, 2004.

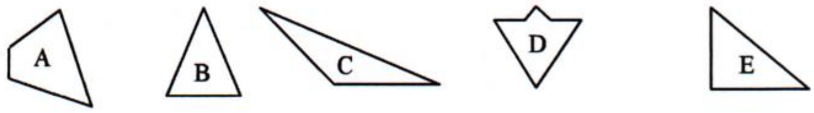
VAN HIELE. *Structure and Insight. A theory of mathematics Education.* London: Academic Press Inc. 1986.

VIANA, O. A. *O conhecimento geométrico de alunos do Cefam sobre figuras espaciais:* um estudo das habilidades e dos níveis de conceito. 229 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, Campinas, 2000.

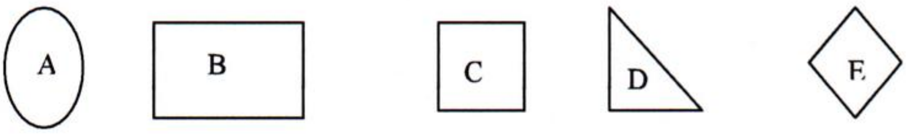
_____, O. A. & BRITO, M. R. F. Os conceitos espontâneos e científicos*:* uma análise da linguagem utilizada por futuros professores para descrever figuras espaciais. *SBEM* – Paulista, 2005. Disponível em: <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_Orais/co0034.doc> Acesso em: 02 set. 2010.

APÊNDICE A - PRÉ-TESTE

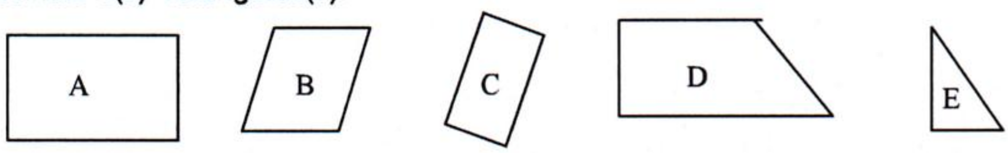
1- Assinale o(s) triângulo(s):



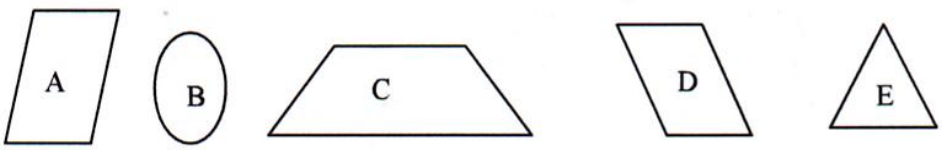
2- Assinale o(s) quadrado(s):



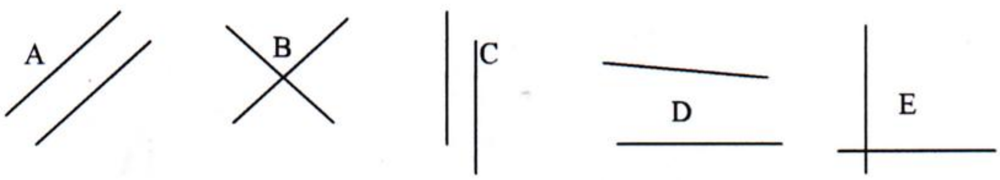
3- Assinale o(s) retângulos(s):



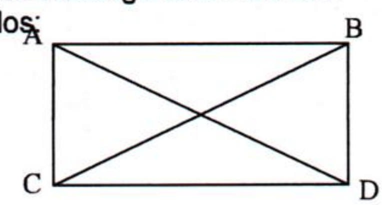
4- Assinale o(s) paralelogramo(s):



5- Assinale os pares de retas paralelas:

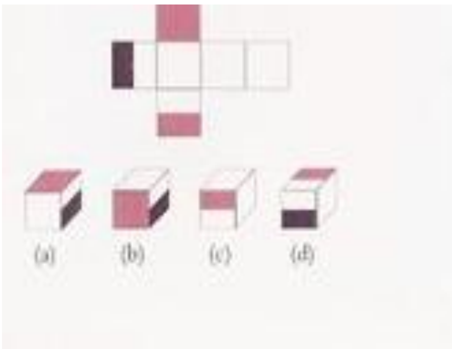


6- No retângulo ABCD, as linhas AD e BC são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativas(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

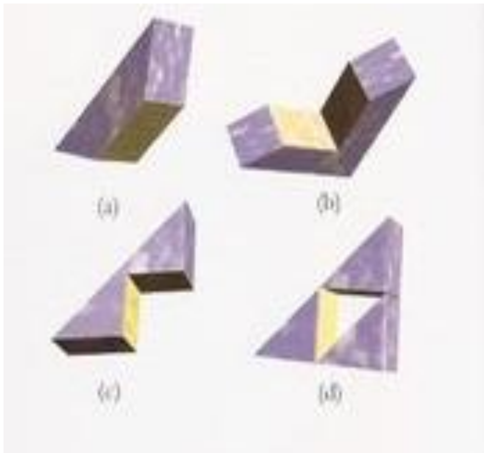


a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos paralelos.
c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
d) Têm os 4 ângulos iguais.
e) todas são verdadeiras

7. Qual dos sólidos abaixo pode ser feito a partir dessa forma plana?

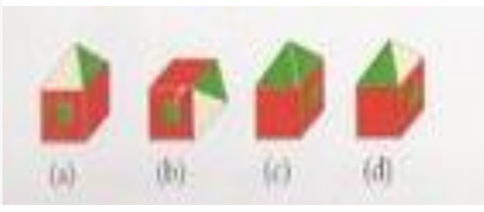


8. Uma grande forma positiva e uma pequena forma negativa interagem deixando uma terceira forma. Escolha entre estas as que forem possíveis.

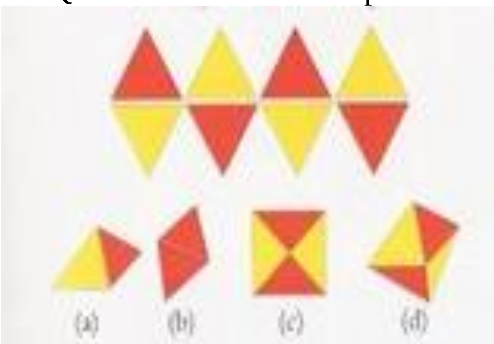


9. Descubra a figura que nada tenha a ver com as outras.

10. Qual dos sólidos abaixo pode ser feito a partir dessa forma plana?

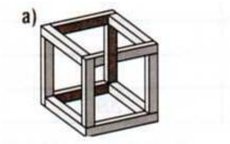


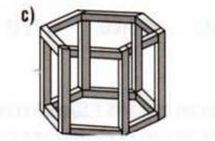
11. Qual dos sólidos abaixo pode ser feito a partir dessa forma plana sem sobreposição?



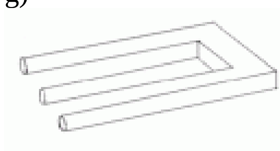
12. Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia Belvedere, reproduzida ao lado.

Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

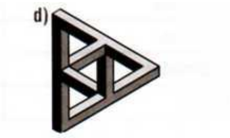
a)


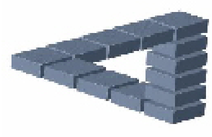
c)


e)


g)


b)

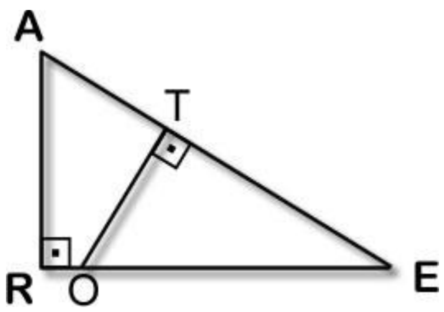

d)


f)


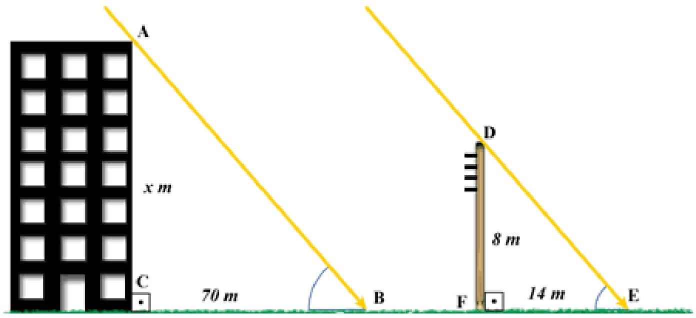
Gabarito:
1. b, c, e 2. c 3. a, c 4. a, d 5. a, c 6. e 7. b, c 8. a, b, d 9. c 10. b, d 11. c, d 12. e

APÊNDICE B – EXEMPLO DE AVALIAÇÃO INICIAL (Geometria Plana)

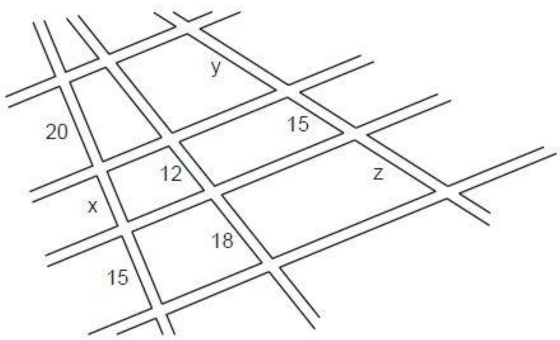
1. Se OE = 16, TO = 4 e AE = 20, calcule AR. **R: 5**



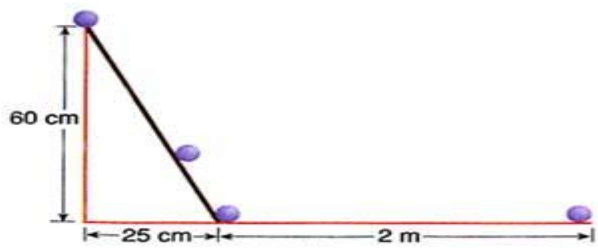
2. Um prédio tem sombra, pela luz solar, projetada no solo horizontal com 70 metros. Simultaneamente um poste de 8m de altura localizado nas proximidades deste prédio tem sua sombra do mesmo tipo com 14 m. Calcule a altura do prédio. **R: 40 m**



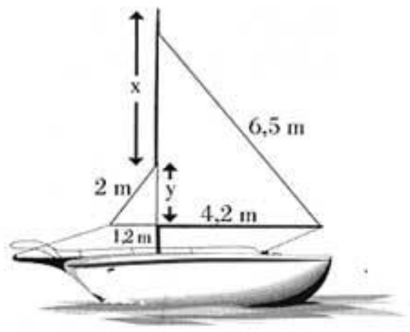
3. O mapa mostra quatro estradas paralelas que são cortadas por três vias transversais. Algumas das distâncias entre os cruzamentos dessas vias e estradas estão indicadas no mapa (em km), mas as outras precisam ser calculadas.Complete o mapa com as distâncias que faltam.
R: x=10; y=30; z= 22,5



4. Qual é a distância percorrida pela bolinha? **R: 2,65 m**



5. A figura representa um barco à vela.

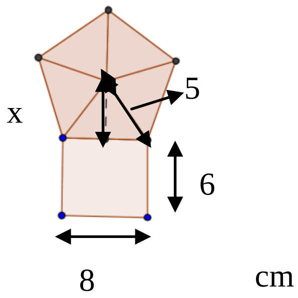


a) Determina, de acordo com os dados da figura, os valores de x e y. **R: x=3,36m; y=1,6m**

b) Quanto se gastaria para fazer uma vela cujo preço do m^2 de tecido é de R$ 124,00? **R: R$ 1410,62**

6. Calcule a área pintada, de cada figura.

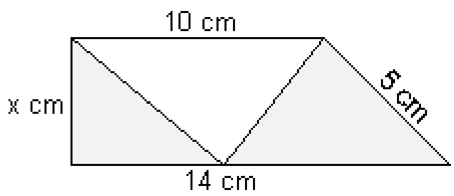
a)



O pentágono é regular.

R: 108 cm²

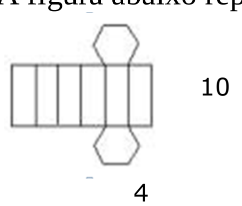
b)



R: 21 cm²

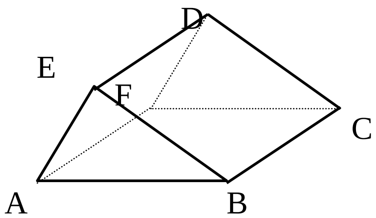
APÊNDICE C – EXEMPLO DE AVALIAÇÃO FINAL (prismas e cilindros)

1. Um caminhão pipa cujo reservatório é um prisma hexagonal regular de lado da base medindo $\sqrt{3}$ m e de 2 m de altura é descarregado, transportando-se seu conteúdo em latas que são prismas retos de base quadrada, com 0,5 m de lado e 1 m de altura. Qual o número de latas necessárias para descarregar totalmente o caminhão? (use $\sqrt{3}$ =1,73) **R: 63 latas**
2. O volume de um prisma hexagonal regular é 81 $\sqrt{3}$ cm³. Calcular a sua altura, sabendo que ela é o dobro da aresta da base. **R: 6 cm**
3. A figura abaixo representa a planificação de um sólido. Calcule seu volume.



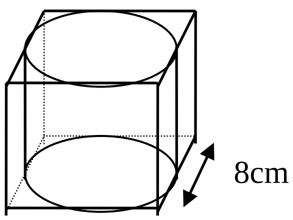
R: 240 $\sqrt{3}$

4. A garagem subterrânea de um edifício tem 18 boxes retangulares, cada um com 3,5m de largura e 5m de comprimento. O piso da garagem é de concreto e tem 20 cm de espessura. Calcule o volume de concreto utilizado para o piso da garagem. **R: 63 m³**
5. Calcule a área total de um prisma triangular regular cujas arestas são todas congruentes entre si e cujo volume é 54 $\sqrt{3}$ cm³. **R: 18($\sqrt{3}$ + 6) cm³**
6. Em um cilindro equilátero (h=2r), a área da base é $900\pi\ cm^2$. Calcule o volume deste cilindro. **R: 54000 π cm³**
7. Um galão de gasolina de forma cilíndrica tem o diâmetro da base igual a 7 m e sua altura é 4m. Durante o dia vazou 20% de seu volume total. Qual é a quantidade de gasolina existente, em litros, no galão? **R: 123088 L**
8. Na figura ao lado, tem-se um prisma reto cuja base é um triângulo retângulo. Se AB = 17 cm, AE = 8 cm e ED = 14 cm. Calcule a área total e o seu volume do prisma.



R: 680 cm² e 840cm³

9. Calcule o volume de um cilindro reto inscrito num cubo de 8 cm de aresta.

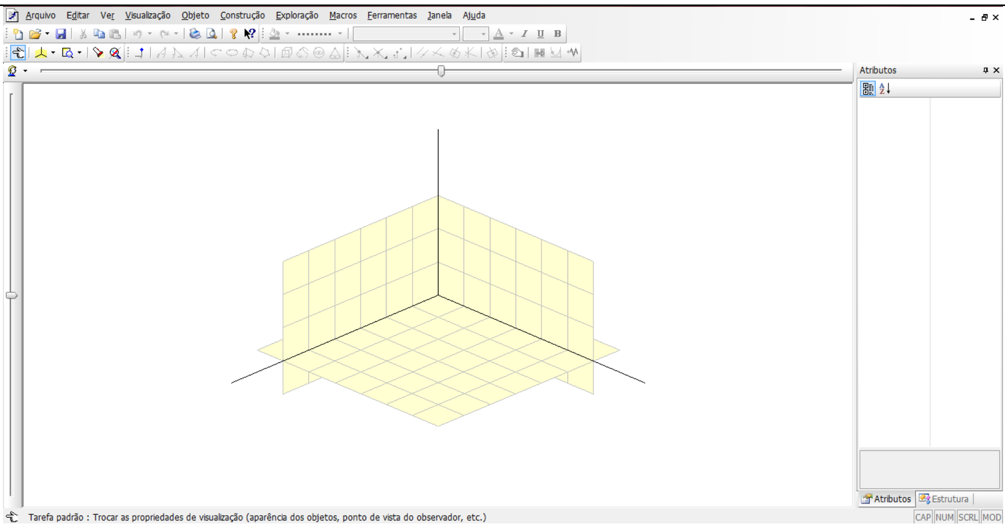


R: 128 π cm³

10. Quantos litros comportam uma caixa d'água cilíndrica com 2 metros de diâmetro e 70 cm de altura? **R: 2198 L**

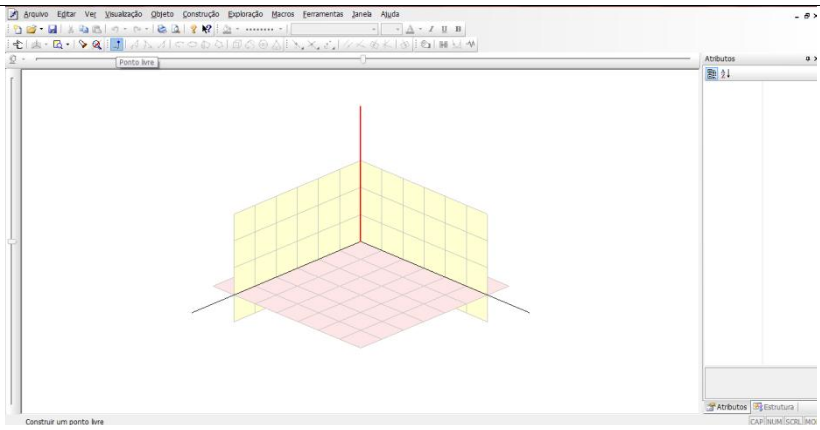
APÊNDICE D – INSTRUÇÕES INICIAIS PARA O CALQUES 3D

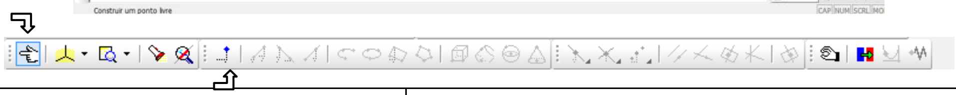
A seguir serão apresentadas algumas ferramentas e construções possíveis com o Calques 3D, que serão utilizadas nesta proposta de trabalho. Estas ferramentas serão especialmente utilizadas na introdução de conceitos necessários a Geometria Espacial que serão construídos durante a realização das tarefas propostas.



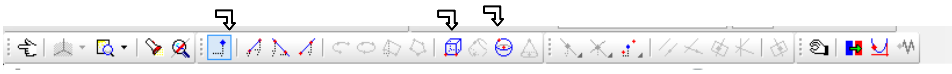
Interface inicial

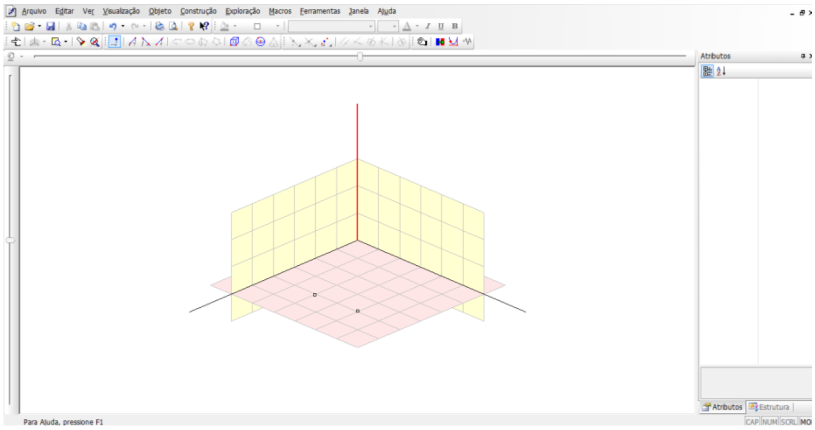
Ao abrir o software, nem todas as ferramentas estão disponíveis. Elas somente poderão ser utilizadas quando existirem as condições necessárias impostas pelo programa. Desde o início pode-se optar pelo sistema de coordenadas entre as opções: nenhum, eixos, solo ou paredes (como se apresenta ao abrir o programa).



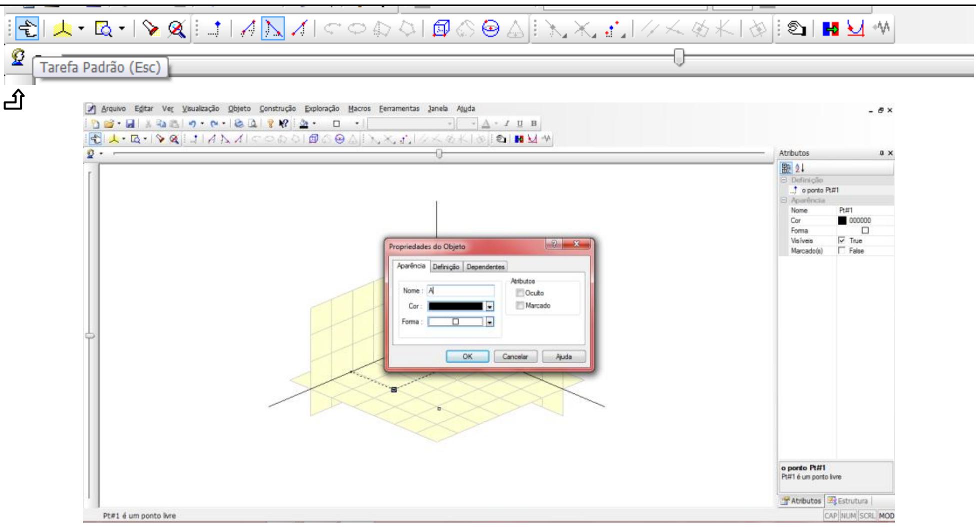


Ao abrir a interface inicial, o primeiro ícone disponível para dar início à construção é o *ponto livre*.	Depois de construir o primeiro ponto livre, para dar continuidade à construção, outro ponto deve ser construído para que se abram outros ícones.



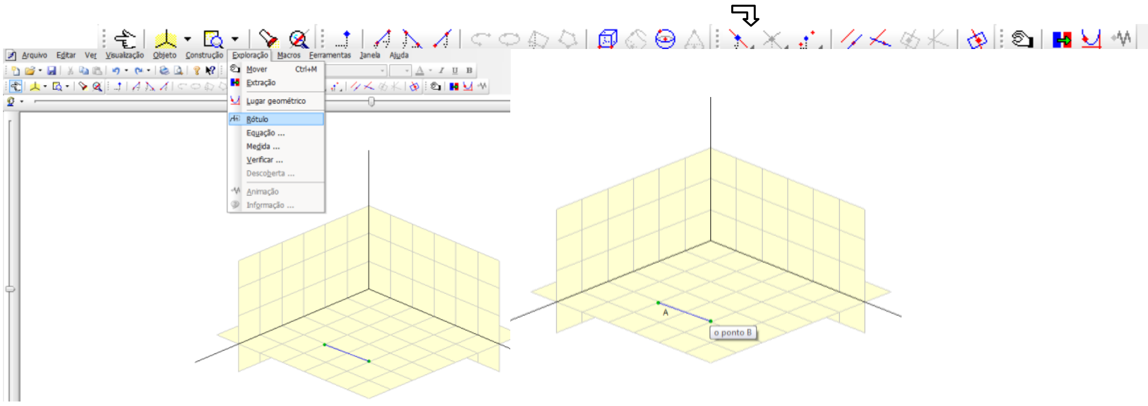


Ao construir o segundo ponto abrem-se os ícones: *segmento*, *reta*, *semi-reta*, *cubo*, *esfera* e *ponto médio.*	Estes ícones aparecem em destaque, na cor azul.

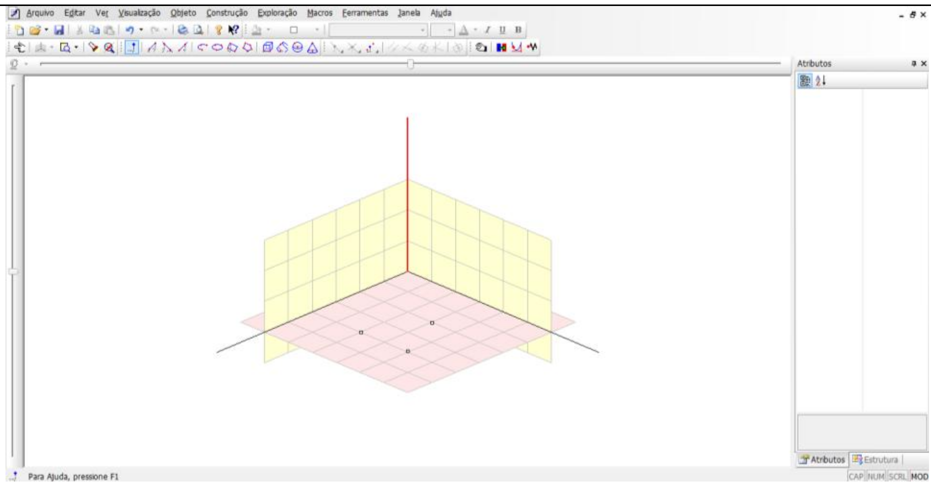


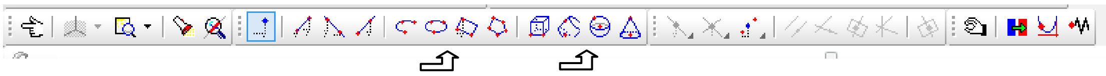
É possível nomear cada construção como, por exemplo, ponto, segmento, cubo... Para nomear, primeiramente seleciona-se o ícone tarefa padrão na barra de tarefas. Após “clica-se” duas vezes sobre o objeto que será nomeado. Em seguida, aparecerá uma janela de propriedades do objeto na qual ele será nomeado.

Nesta mesma janela pode-se modificar a cor e a forma do objeto escolhido. Para que o nome do objeto torne-se visível, necessita-se selecionar na barra de tarefas o ícone exploração e em seguida rótulo. Após realizar esta tarefa, deve-se dar um “clique” no objeto cujo nome deve aparecer.



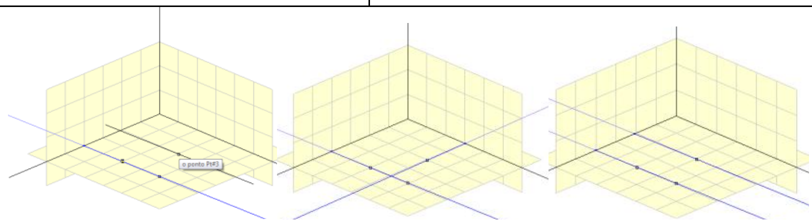
Ao construir um segmento (ou reta), abrem-se os ícones: *ponto sobre reta, reta paralela, reta perpendicular* e *plano perpendicular*.





Ao construir três pontos, abrem-se os ícones: *arco de circunferência*, *circunferência*, *plano*, *polígono convexo*, *cilindro* e *cone*.

O ícone *polígono convexo* será muito utilizado na construção das faces dos sólidos.

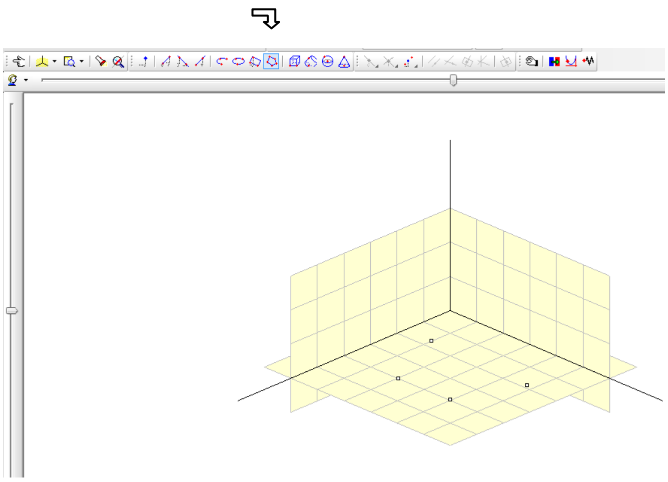


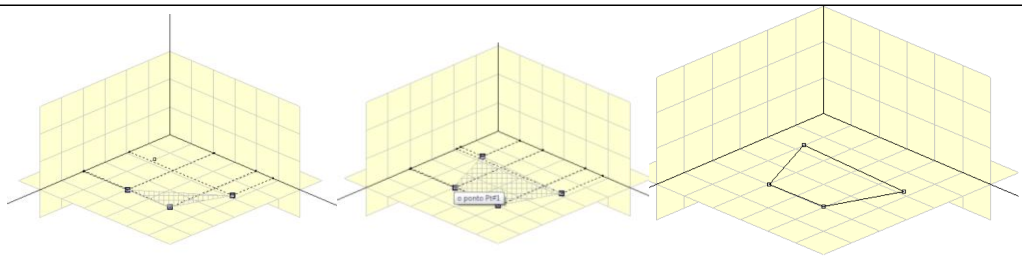
Outros ícones utilizados com frequência são retas paralelas e perpendiculares. Para sua construção são necessários primeiramente uma reta (construída com dois pontos) e um ponto fora desta reta.

Primeiramente clica-se sobre a reta (ou segmento) e após larga-se a reta no ponto (fora da reta) sobre a qual ela deverá ficar.

As construções não apresentam as coordenadas dos pontos construídos, ou seja, não é visível a posição dos pontos (em relação ao sistema de eixos) como em outros softwares de Geometria dinâmica. Para conhecê-las precisamos utilizar uma ferramenta do software chamada Mathpad. Através desta ferramenta podem ser calculadas distâncias, áreas, volumes, conhecer equações de lugares geométricos entre outros recursos. Porém neste trabalho, estes itens não foram utilizados, pois o interesse no software está centrado nas construções de objetos tridimensionais.

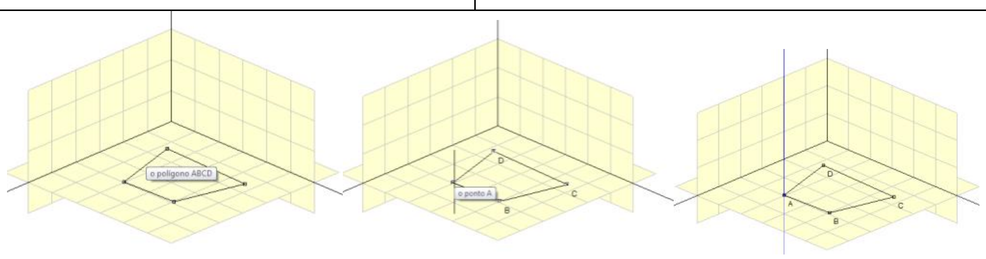
Para a construção de um polígono, primeiramente deverá ser construído o número de pontos correspondente ao número de vértices do polígono e selecionar o ícone *polígono convexo*. Em seguida, “clica-se” num ponto e nos pontos seguintes até voltar ao ponto inicial, fechando o polígono.



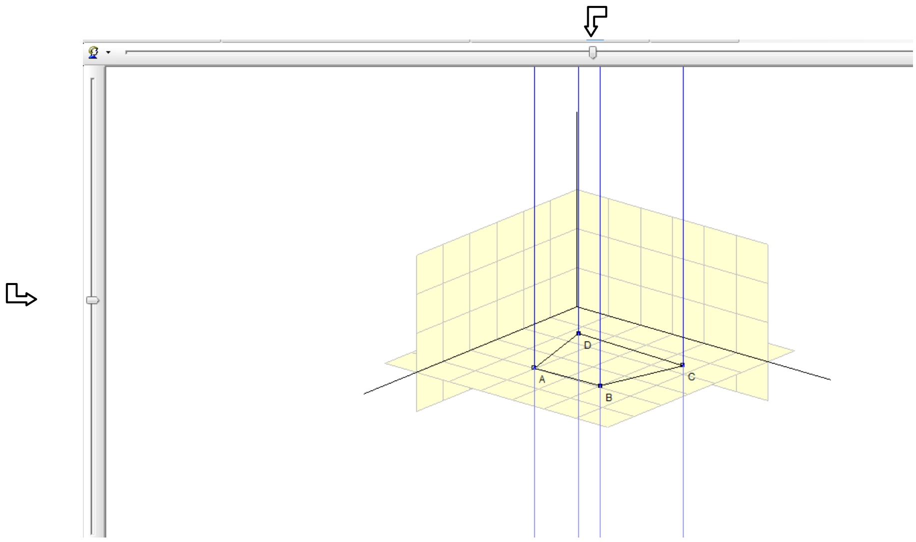


Após a construção de um polígono abre o ícone *reto normal*, que será muito utilizado para a construção das arestas laterais de prismas.

Para construir uma *reta normal*, “clica-se” no polígono e após larga-se a reta num dos vértices. Após, o mesmo procedimento é realizado nos outros vértices.

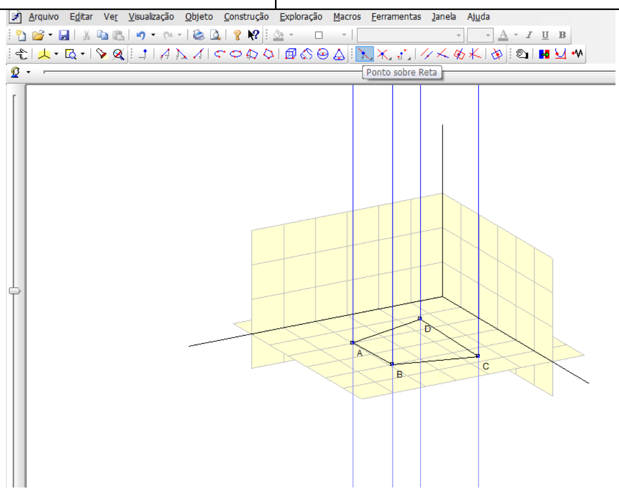


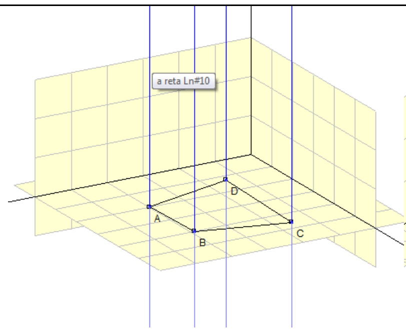
O software também permite mudar a posição do sólido arrastando-se a barra de rolagem superior ou lateral, para buscar uma melhor visualização da construção.

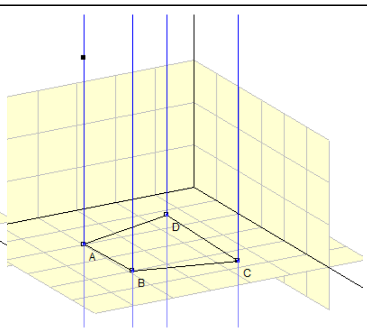


Para construir a face superior, deve-se construir um *ponto sobre reta* numa das arestas laterais. Para esta construção primeiramente "clica-se" no ícone *ponto sobre reta*.

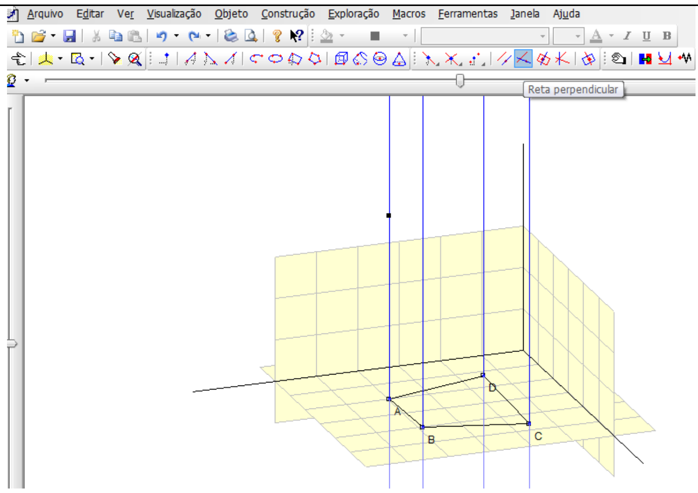
Em seguida, seleciona-se a reta onde o ponto será construído, largando-o sobre ela, na altura desejada.

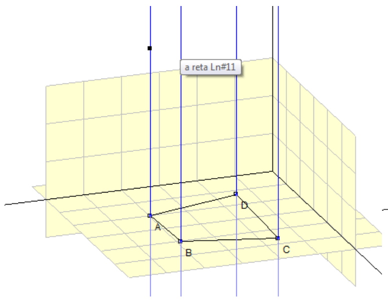


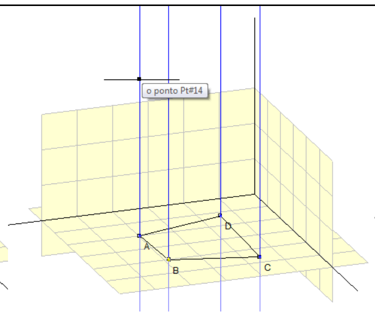


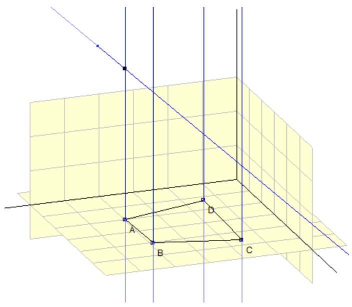


Para que se construa a face superior paralela a base, deverá ser construída primeiramente uma reta perpendicular a uma aresta lateral (não pode ser a que contém o ponto) e após largá-la no ponto construído sobre a aresta lateral.

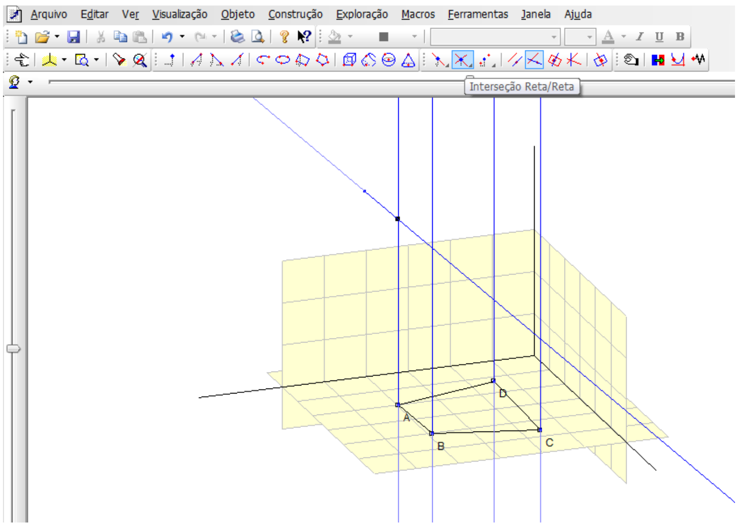


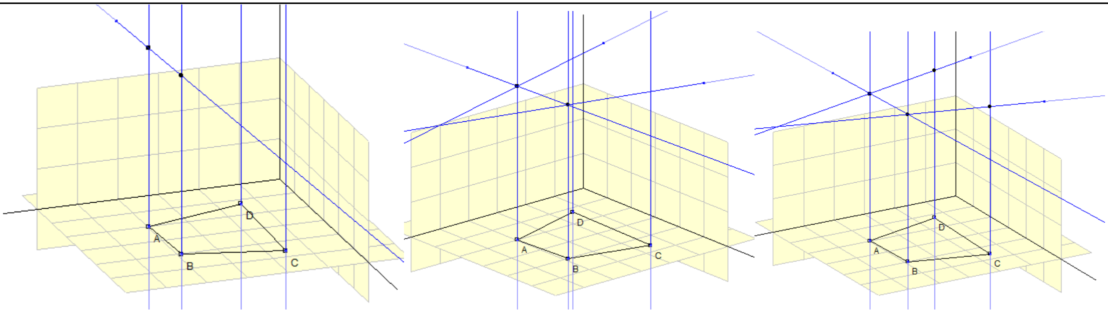




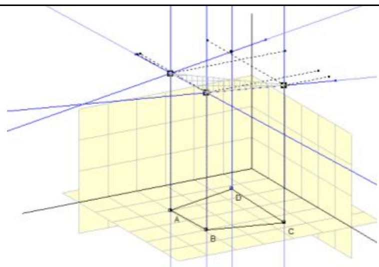


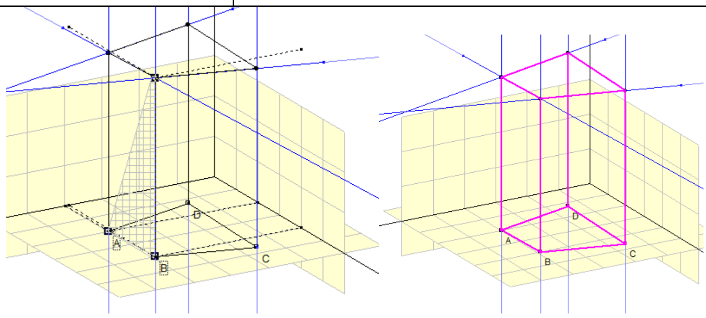
Para a construção dos outros pontos (vértices superiores do prisma) eles deverão ser construídos através do ícone *intersecção Reta/Reta,* para que todos os pontos fiquem na mesma altura do primeiro vértice superior. Para construir as demais arestas e vértices superiores o mesmo procedimento deverá ser adotado.



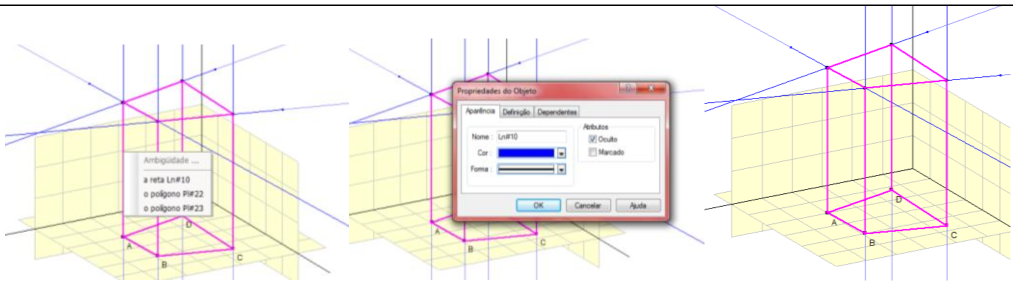


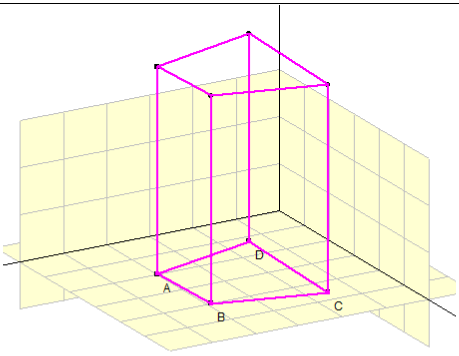
Com os pontos (vértices) superiores construídos, agora podemos construir os polígonos necessários para cada face lateral e superior.



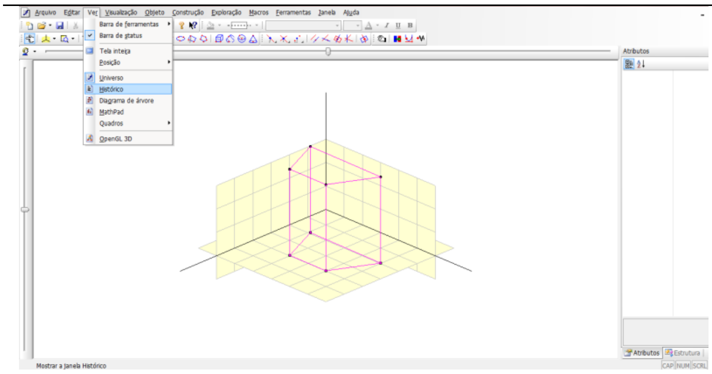


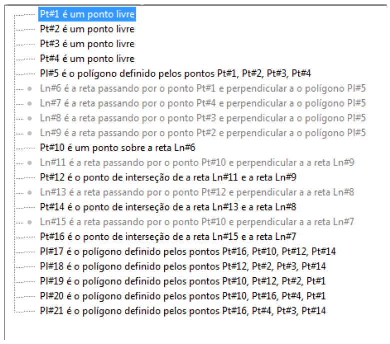
Para concluir a construção, pode-se ocultar cada reta que agora não é mais necessária, destacando apenas o prisma construído. Para isso “clica-se” no ícone *tarefa padrão* e após “clica-se” em uma reta qualquer, preferencialmente numa posição exterior ao sólido. Se o “clique” for sobre algum dos polígonos, aparecerá uma janela de ambiguidade, e então deverá ser selecionada a reta. A seguir, ao “clicar-se” duas vezes sobre a reta, aparece a janela *propriedades do objeto*, onde deverá ser marcado o ícone oculto. Ao “clicar” em OK, a reta não estará mais visível. Este procedimento deverá ser adotado em todas as retas que se quiser ocultar.



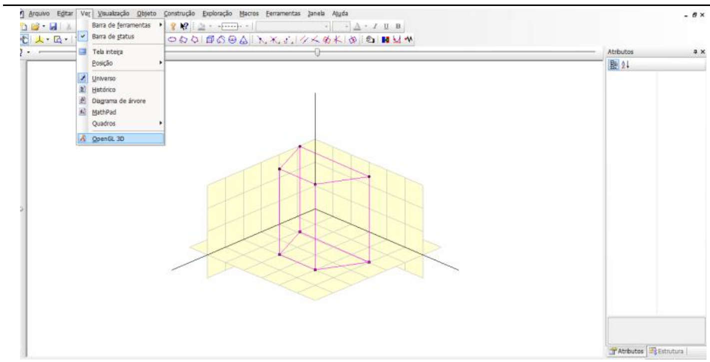


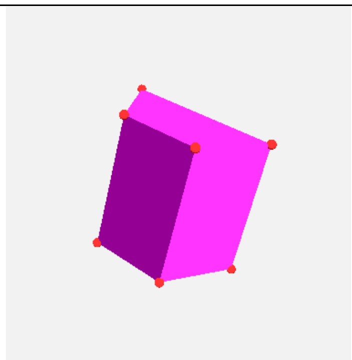
O software também permite visualizar o histórico da construção e a figura tridimensional construída, mas com suas faces "fechadas". Estas ferramentas nos permite verificar se as construções foram realizadas adequadamente.





Para visualizar o histórico da construção "clica-se" no ícone Ver e em seguida Histórico, aparecendo a janela contendo os passos da construção.





Para visualizar o sólido construído e suas faces, clica-se no ícone Ver e em seguida Open GL 3D. Nesta janela pode-se mexer na posição do sólido, adequando-o para uma melhor visiualização.

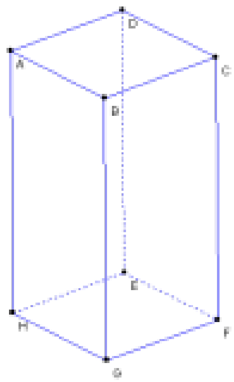
Estes são os principais ícones que serão utilizados durante a proposta de trabalho, cujo enfoque é a construção de objetos tridimensionais. O software permite muitas outras opções de construções e inclusive de animação, que podem facilmente ser utilizadas. Para aprender a usá-las, existem vídeos de demonstrações do software no *you tub*e.

APÊNCICE E – O PRODUTO DIDÁTICO

Sequência didática original

Encontro 1

1. Construa um paralelepípedo reto, nomeie seus vértices por A, B, C, D, E, F, G e H, conforme figura abaixo:



Considerando esse paralelepípedo e os planos determinados pelas faces, resolva as questões:

a. Marque de verde todos os planos que contém a reta $\overleftrightarrow{DE}$ e são perpendiculares ao plano EFGH.

b. Marque de azul o plano diagonal ACFH. Ele é perpendicular ao plano EFGH? Por quê?

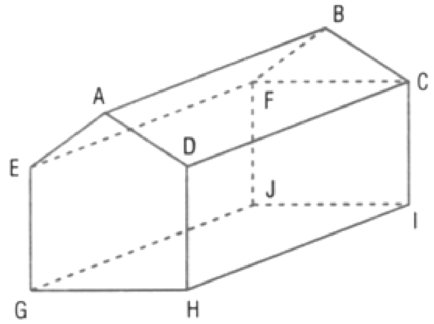
c. A reta $\overleftrightarrow{CF}$ é perpendicular ao plano EFGH. Qual é a posição dos planos CDEF, ACFH, BCFG ao plano EFGH?

d. Marque de vermelho uma reta e um plano que são perpendiculares ao plano ABGH, de tal forma que a reta considerada esteja contida no plano marcado.

e. Marque de amarelo, se houver a intersecção dos planos ADEH E EFGH.

f. Qual é o plano perpendicular ao plano ABCD e que contém a reta $\overleftrightarrow{GH}$? Marque-o de marrom.

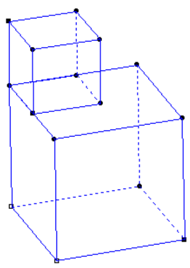
2. Construa a figura abaixo. Observando-a indique:

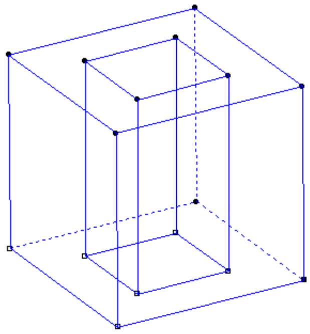


a) de rosa, duas retas concorrentes.
b) de amarelo, duas retas paralelas.
c) de marrom, duas retas perpendiculares.
d) de laranja, duas retas reversas.
e) de azul, um segmento que determine a distância da parede da frente à parede dos fundos da casa.
f) de vermelho, a distância entre as paredes laterais.
g) de verde , a distância da cumeeira ao piso (ponto **A** ao plano GHIJ).

Encontro 2

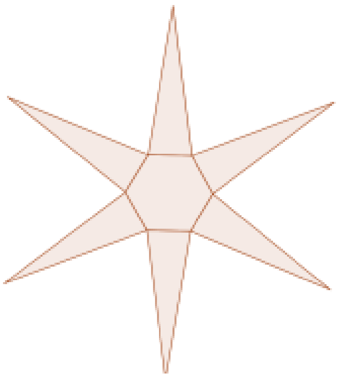
1. Construa as peças representadas abaixo constituídas por cubos e paralelepípedos retos:

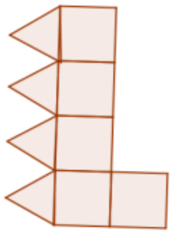




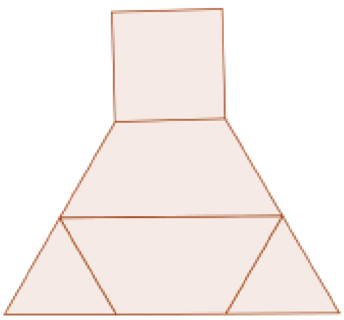
2. Construa os sólidos resultantes das planificações abaixo:

a) b)





c)



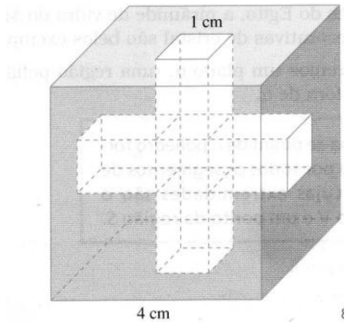
3. Após a construção dos sólidos indicados nas atividades 1 e 2, descreva as características de cada um.

Encontro 3

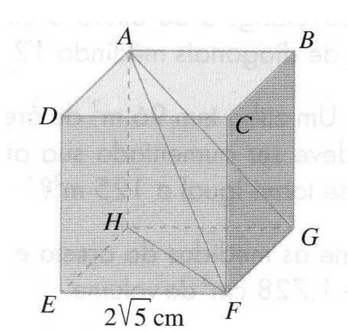
1. Construa os sólidos representados nas seguintes questões do livro ***Matemática- construção e significado***:

4. 34 da página 465;
5. 89 da página 476;
6. 11 da página 682;
7. 13 da página 683.

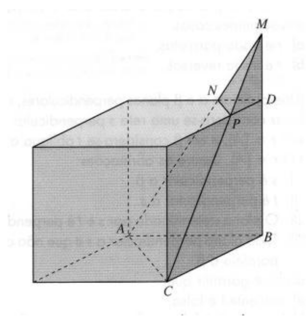
a)



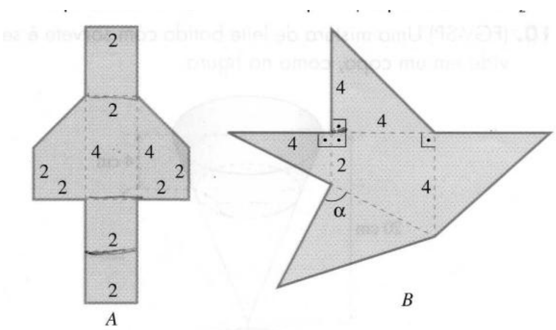
b)



c)



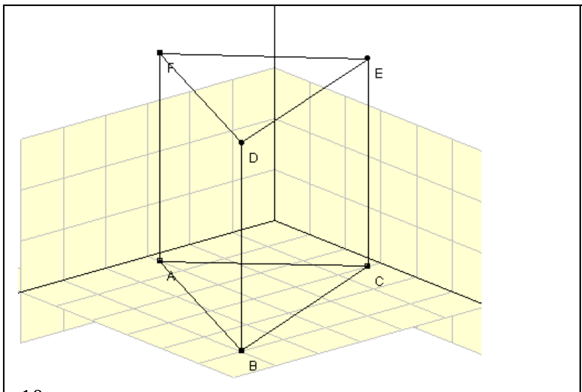
d)



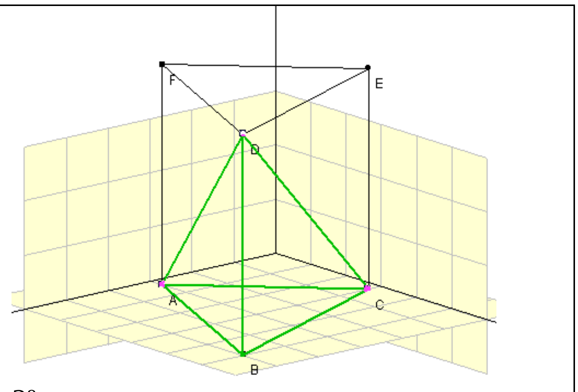
2. Descreva as características de cada sólido construído.

Encontro 4

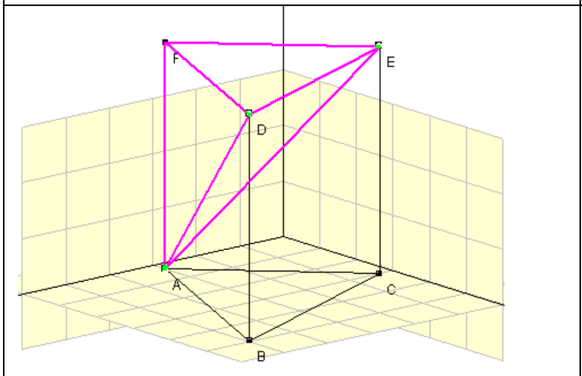
Construa um prisma triangular. Após, dentro deste prisma, construa a sequência de pirâmides indicadas nas figuras abaixo.



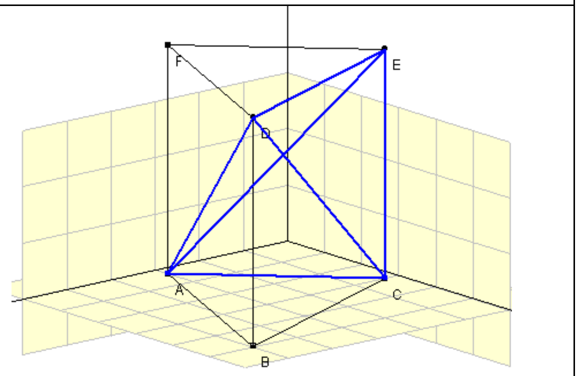
1º



2º



3º



4º

Encontro 5

1. Construa um cubo C_1.

   a. Construa um segundo cubo C_2 cuja aresta é metade da aresta de anterior C_1.

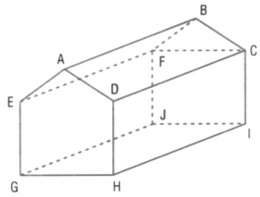
   b. Construa um terceiro cubo C_3, cuja aresta é o dobro de C_1.

2. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH. Trace a diagonal da base inferior e da base superior em direções diferentes. Ligue as extremidades da diagonal superior às extremidades da diagonal inferior. Descreva o sólido formado no interior do cubo?

3. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH.
   a. Marque os pontos médios das três arestas que se originam no vértice A. Nomeie-os de M, N e P. Construa o sólido P1 de vértices A, M, N e P. Que sólido você obteve?
   b. Faça o mesmo procedimento nos outros vértices do cubo.
   c. Pinte de vermelho o sólido obtido quando retiramos do cubo os sólidos obtidos nos itens a e b. Descreva o sólido que você está vendo.

Sequência didática reformulada

Encontro 1:



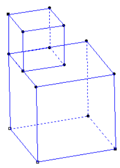
Construa a figura abaixo. Observando-a indique:

a. de rosa, duas retas concorrentes.
b. de amarelo, duas retas paralelas.
c. de marrom, duas retas perpendiculares.
d. de laranja, duas retas reversas.
e. de azul, um segmento que determine a distância da parede da frente à parede dos fundos da casa.
f. de vermelho, a distância entre as paredes laterais.
g. de verde , a distância da cumeeira ao piso (ponto **A** ao plano GHIJ).
h. de roxo todos os planos que contém a reta $\overleftrightarrow{DH}$ e são perpendiculares ao plano GHIJ.
i. a reta $\overleftrightarrow{IJ}$ é perpendicular ao plano EFJG. Qual é a posição dos planos CFJI, GHIJ, DEGH ao plano EFJG?

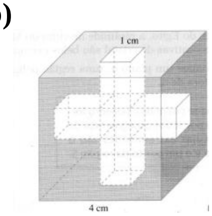
Encontro 2:

1. Construa as peças representadas abaixo:

a)

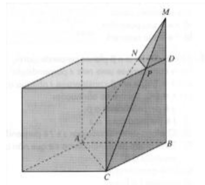


b)



(Consultar exercício 34 da página 465)

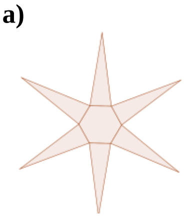
c)



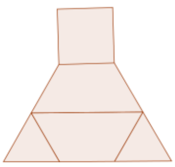
(Consultar exercício 11 da página 682)

2. Construa os sólidos resultantes das planificações abaixo:

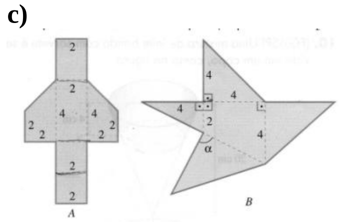
a)



b)



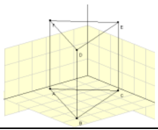
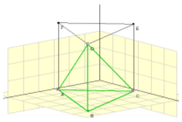
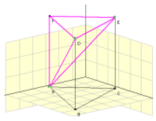
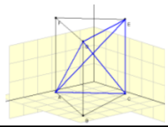
c)



(Consultar exercício 13 da página 683)

Encontro 3:

1. Construa um prisma triangular. Após, dentro deste prisma, construa a sequência de pirâmides indicadas nas figuras abaixo.

1º	*2º*	*3º*	*4º*
			

2. **Construa um cubo C_1.**
    a. Construa um segundo cubo C_2 cuja aresta é metade da aresta de anterior C_1.
    b. Construa um terceiro cubo C_3, cuja aresta é o dobro de C_1.

3. **Construa um cubo de vértices ABCDEFGH. Trace a diagonal da base inferior e da base superior em direções diferentes. Ligue as extremidades da diagonal superior às extremidades da diagonal inferior. Descreva o sólido formado no interior do cubo?**

4. **Construa um cubo de vértices ABCDEFGH.**
    a. Marque os pontos médios das três arestas que se originam no vértice A. Nomeie-os de M, N e P. Construa o sólido P1 de vértices A, M, N e P. Que sólido você obteve?
    b. Faça o mesmo procedimento nos outros vértices do cubo.
    c. Pinte de vermelho o sólido obtido quando retiramos do cubo os sólidos obtidos nos itens a e b. Descreva o sólido que você está vendo.

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. _______________, responsável pelo(a) aluno(a) _____________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe do trabalho de pesquisa intitulado **A visualização no ensino de Geometria Espacial: possibilidades como uso do software Calques 3D**, desenvolvido pela pesquisadora Andréa Maria Ritter, a que poderei contatar a qualquer momento através do telefone (051)9292-8466.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são desenvolver estratégias de ensino que buscam minimizar as dificuldades de visualização de sólidos geométricos, através do software Calques 3D, tendo como finalidade a resolução de problemas de Geometria Espacial.

Fui também esclarecido(a) de que o(s) uso(s) das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc., bem como da participação em oficina/aula/Encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc., sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Novo Hamburgo, __________ de ____________ de 2010.

Assinatura do Responsável: ____

Assinatura do(a) pesquisador(a): ____

Assinatura do Orientador da pesquisa: ____

ANEXO B – TRABALHOS ESCRITOS PELA DUPLA 1

1. Construa os sólidos representados nas seguintes questões do livro ***Matemática-construção e significado***:

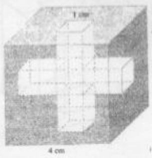
a) 34 da página 465;

b) 89 da página 476,

c) 11 da página 682;

d) 13 da página 683.

a)

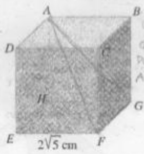


CUBO COM TODOS OS LADOS IGUAIS, COM MAIS CINCO CUBOS MENORES DENTRO FORMANDO UMA CRUZ.

b) CUBO, COM PIRAMIDE DENTRO

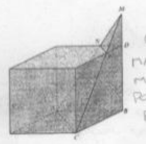
AHG

AGF AHF HFG



UM CUBO COM QUATRO TRIÂNGULOS DENTRO, SÃO ELES AGF, AHF, HFG, E AHG.

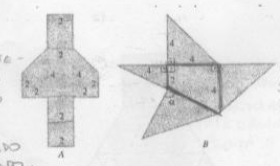
c)



UM CUBO FORMANDO UMA PIRÂMIDE. EM QUE A PONTA DA PIRAMIDE FICA PARA FORA

d)

A BASE É UM RETÂNGULO. NAS DUAS LATERAIS SE FAZ UM QUADRADO UM TRIÂNGULO FORMANDO TRAPESIO. ATRAS É UM QUADRADO, NA FRENTE É RETANGULO INCLINADO O TETO É UM QUADRADO.



A BASE É UM RETÂNGULO, ONDE EM UM CANTO DELE TEM UM PONTO, QUE SE LIGAM TODAS AS RETAS DOS TRIÂNGULOS.

2. Descreva as características de cada sólido construído.

---

1. Construa um cubo C_1.
   a) Construa um segundo cubo C_2 cuja aresta é metade da aresta de anterior C_1.
   b) Construa um terceiro cubo C_3, cuja aresta é o dobro de C_1.

2. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH. Trace a diagonal da base inferior e da base superior em direções diferentes. Ligue as extremidades da diagonal superior às extremidades da diagonal inferior. Descreva o sólido formado no interior do cubo? UM CUBO, 2 TRIÂNGULOS EM QUE A BASE É O SEGMENTO EG SENDO O VERTECE DE UM O PONTO B E DO OUTRO PONTO C, E MAIS 2 TRIÂNGULOS EM QUE A BASE É O SEGMENTO BC E O VERTECE DE UM É O PONTO G E DO OUTRO E SE ENCONTRANDO C/ OS OUTROS.

3. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH.
   a) Marque os pontos médios das três arestas que se originam no vértice A. Nomeie-os de M, N e P. Construa o sólido P1 de vértices A, M, N e P. Que sólido você obteve? UM TRIÂNGULO
   b) Faça o mesmo procedimento nos outros vértices do cubo.
   c) Pinte de vermelho o sólido obtido quando retiramos do cubo os sólidos obtidos nos itens a e b. Descreva o sólido que você está vendo.

É UM CUBO COM UM QUADRADO EM CADA FACI ONDE SEUS VÉRTICES SÃO NO PONTO MÉDIO NAS ARESTAS DO CUBO. E TODOS OS QUADRADOS SE ENCONTRAM.

ANEXO C – TRABALHOS ESCRITOS PELA DUPLA 2

RESPOSTAS!

1) Quais as principais dificuldades encontradas na realização das atividades propostas no Calques 3D?

Minha maior dificuldade no início foi a memorização das ferramentas que deveria usar, mas com a prática eu memorizei.

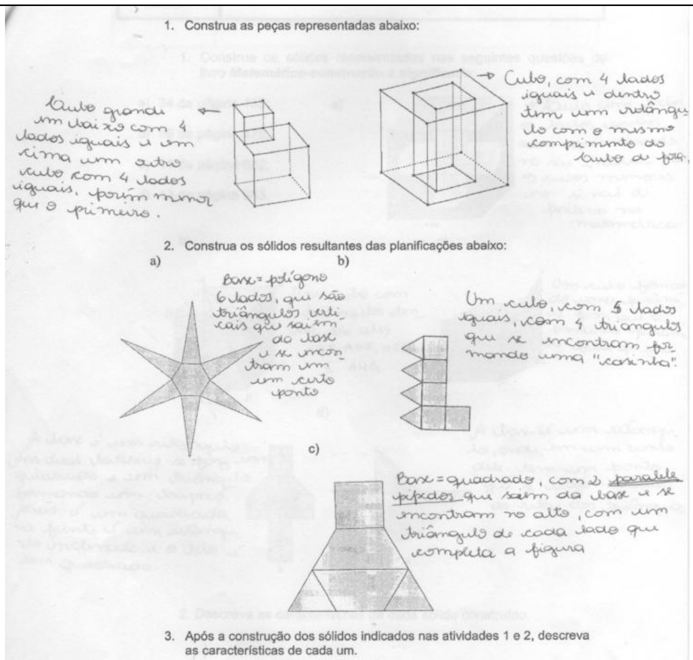
2) Foram necessárias montagens de papel dos sólidos propostos? Qual (is)?

As duas figuras da letra D da folha que fala para olhar as páginas do livro.

3) A professora teve que prestar ajuda em alguma construção?

Em construção não, mas para lembrar que ferramentas usar, pelo menos nas primeiras aulas.

ANEXO D – TRABALHOS ESCRITOS PELA DUPLA 3



1. Construa as peças representadas abaixo:

Cubo grande em baixo com 4 lados iguais e em cima um outro cubo com 4 lados iguais, porém menor que o primeiro.

Cubo, com 4 lados iguais e dentro tem um retângulo com o mesmo comprimento do cubo de fora.

2. Construa os sólidos resultantes das planificações abaixo:

a)

Base = polígono 6 lados, que são triângulos verticais que saem da base e se encontram em um certo ponto

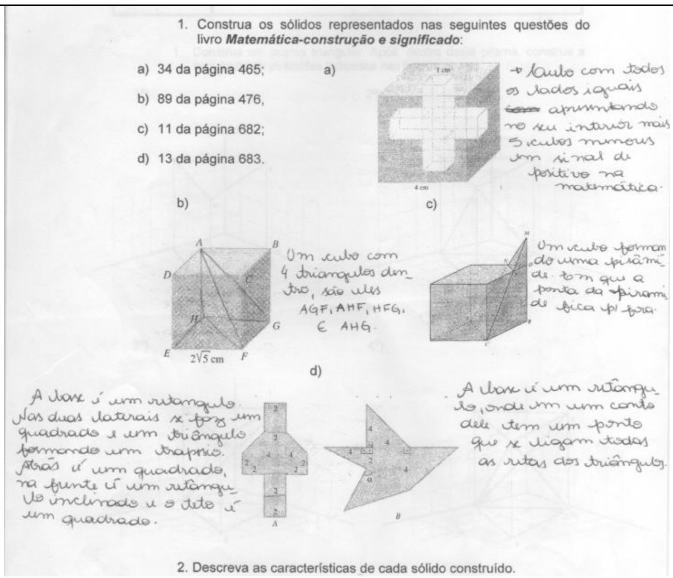
b)

Um cubo, com 5 lados iguais, com 4 triangulos que se encontram formando uma "casinha".

c)

Base = quadrado, com 2 paralelepípedos que saem da base e se encontram no alto, com um triângulo de cada lado que completa a figura

3. Após a construção dos sólidos indicados nas atividades 1 e 2, descreva as características de cada um.



1. Construa os sólidos representados nas seguintes questões do livro ***Matemática-construção e significado***:

a) 34 da página 465;

b) 89 da página 476,

c) 11 da página 682;

d) 13 da página 683.

a)

Cubo com todos os lados iguais ~~com~~ apresentando no seu interior mais 5 cubos menores em sinal de positivo na matemática.

b)

Um cubo com 4 triangulos dentro, são eles AGF, AHF, HFG, E AHG.

c)

Um cubo formando uma pirâmide tom que a ponta da pirâmide fica p/ fora.

d)

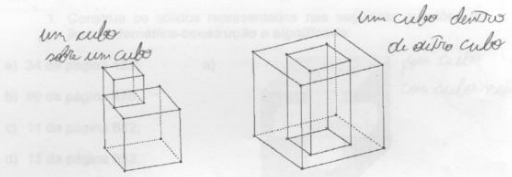
A base é um retangulo. Nas duas laterais se forz um quadrado e um triângulo formando um trapézio. Atrás é um quadrado, na frente é um retângulo inclinado e o teto é um quadrado.

A base é um retângulo, onde em um canto dele tem um ponto que se ligam todas as retas dos triângulos.

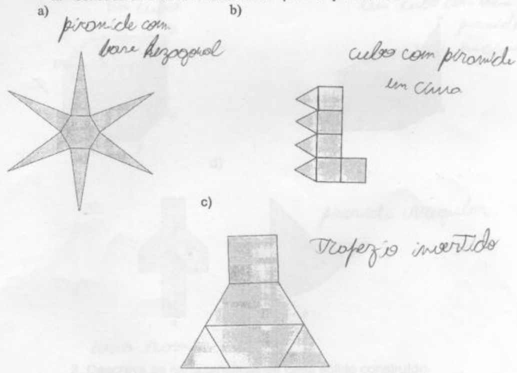
2. Descreva as características de cada sólido construído.

ANEXO E – TRABALHOS ESCRITOS PELA DUPLA 5

1. Construa as peças representadas abaixo:



2. Construa os sólidos resultantes das planificações abaixo:



3. Após a construção dos sólidos indicados nas atividades 1 e 2, descreva as características de cada um.

---

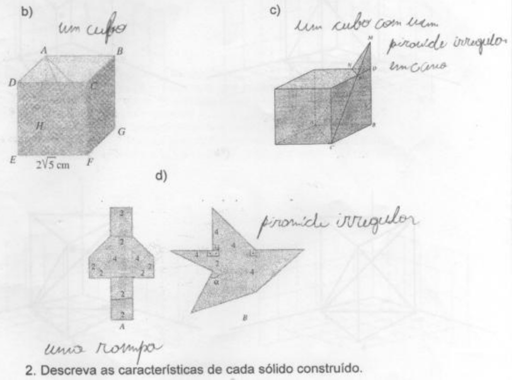
1. Construa os sólidos representados nas seguintes questões do livro ***Matemática-construção e significado***:

a) 34 da página 465;

b) 89 da página 476,

c) 11 da página 682;

d) 13 da página 683.



2. Descreva as características de cada sólido construído.

---

1. Construa um cubo C_1.
   a) Construa um segundo cubo C_2 cuja aresta é metade da aresta de anterior C_1.
   b) Construa um terceiro cubo C_3, cuja aresta é o dobro de C_1.

2. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH. Trace a diagonal da base inferior e da base superior em direções diferentes. Ligue as extremidades da diagonal superior às extremidades da diagonal inferior. Descreva o sólido formado no interior do cubo? Trata-se de um tetraedro.

3. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH.
   a) Marque os pontos médios das três arestas que se originam no vértice A. Nomeie-os de M, N e P. Construa o sólido P1 de vértices A, M, N e P. Que sólido você obteve?
   b) Faça o mesmo procedimento nos outros vértices do cubo.
   c) Pinte de vermelho o sólido obtido quando retiramos do cubo os sólidos obtidos nos itens a e b. Descreva o sólido que você está vendo.

ANEXO F – TRABALHOS ESCRITOS PELA DUPLA 6

Perguntas referentes ao trabalho na informática

(1) tivemos dificuldade com o software em si, demoramos muito para aprender as funções do programa.

(2) Não, mas não precisamos realizar a montagem

(3) Sim, diversas vezes, não nos recordamos exatamente em quais, mas algumas vezes isso ocorreu devido a dificuldade de utilizar o software.

2ª Folha

a) Uma base em forma de polígono onde de cada lado sai um triângulo e eles dolam se encontrando em um mesmo ponto.

b) forma algo com todos os paredes iguais. Com quatro triângulos iguais que se encontram formando o telhado

c) Uma figura com a base quadrada, os laterais em forma de trapésio e a parte superior em forma de triangulo

3ª Folha

a) Um cubo grande com cinco cubos dentro, formando uma cruz.

b) Um cubo com uma piramide dentro.

c) Um cubo com uma piramide dentro e a ponta para fora do cubo.

figura 2ª

d) Uma figura em uma base de poligono, com 9 triangulos ligados a um certo ponto.

1ª figura:

ANEXO G – TRABALHOS ESCRITOS PELA DUPLA 8

1. As principais dificuldades encontradas na realização das atividades propostas foram: fazer as figuras, mas na hora de fechá-las, o programa mostrava aquela janela de erro que dizia que os pontos não estavam no mesmo plano. Outra dificuldade foi que eu não sabia qual botão fazia o quê, qual que construía determinada figura.

2. Sim, foram necessária as montagens dos sólidos. Os que eu recortei e montei foram: 2a, 2b, 2c da segunda folha, 1d (duas figuras) da terceira folha.

3. Sim, a professora teve de ajudar em vários exercícios. Principalmente nos primeiros (como eu não estava presente no primeiro dia, recebi a primeira folha um tempo depois) por não saber nem por onde começar. Teve uma quinta com dois períodos que rendeu bastante, que pegamos mais o jeito e fizemos mais sozinhas, só chamávamos a professora para conferir se tínhamos feito certo. Não lembro direito quais que chamamos para nos ajudar, mas acho que foram: 1 e 2 (primeira folha), 2a (segunda folha), 1d (terceira folha) e 2 (folha cinco). Algumas das que sobraram só a chamamos para ver se no final, de construídos estavam certas.

1) No início, lembrar onde era cada função no programa foi uma das maiores dificuldades, mas depois de algumas aulas praticando, acabamos pegando o jeito de montar cada figura, às vezes com certas dúvidas, às vezes não.

2) Todos os sólidos, que precisavam ser montados para descobrir suas formas, foram montados. Ficando mais claro qual o primeiro procedimento a ser feito para montar o sólido no Calques 3D.

3) Em várias, principalmente no início, mas conforme íamos descobrindo as funções no programa (como foi comentado na 1ª resposta), apenas chamávamos a professora para ter certeza se estava correto ou tirar qualquer dúvida que fosse necessária, mas não foram tantas como no início.

FOLHA 2

1. a) Um (cubo) sólido de seis lados, com a linha da base paralela a linha de cima. Em cima dele, há um cubo menor, sua "parede" forma 90º com a face superior do cubo grande.

b) Cubo grande, de seis faces, com a reta da parte superior paralela a de baixo (linhas). No centro dele há sólido retangular, com quatro lados iguais e suas partes, superior e inferior, quadradas.

2. a) A base é um hexágono onde, acima de cada um de seus lados, estão triângulos . Se passando em um cone, reto em uma extremidade e pontiagudo em outra.

b) Sólido semelhante a uma casa. É um cubo, sem uma das (partes) faces. Em seu lugar uma pirâmide foi colocada, criando o efeito de "telhado", se olhado de um determinado ângulo.

c) Sólido que, se observado de um determinado ponto de vista, assemelha-se a uma goleira de futebol. É composto por um quadrado, dois trapézios adjacentes (por suas bases maiores) e dois triângulos equiláteros, um de cada um dos trapézios.

Descrição FOLHA 3

1. a) Cubo, de seis faces. No seu centro há três cubinhos empilhados. Há dois cubinhos (um de cada lado daquele do meio (da pilha, antes mencionado). Formando uma cruz no centro.

b) Cubo com seis lados iguais. Sua base é formada pelas letras E, F, G, H. Os pontos A (superior) H e G se ligam, assim como H, F e A.

c) Cubo formado por seis lados, sendo que em um dos quatro cantos há uma forma. Onde duas paredes se encontram (canto) há dois triângulos, o MPD e o MND. Para fechar foram ligados MNP. Da base, saem linhas (invisíveis) internas, que se unidas à forma antes descrita, formam um grande triângulo.

d₁) Se recortado e montado fica com um quadrado no chão. Em um de seus lados sobe um retângulo, em outros dois um trapézio e no que resta um quadro. Na linha oposta desse quadrado ocorre o fechamento da figura, que é uma forma que fica inclinada.

d₂) Espécie de pirâmide, com a base, triângulos (lados) que se encontram num ponto só. O chão seria um trapézio e as paredes seriam triângulos (4) sendo dois bem parecidos. O ponto que se encontram é um dos cantos da base maior do trapézio.

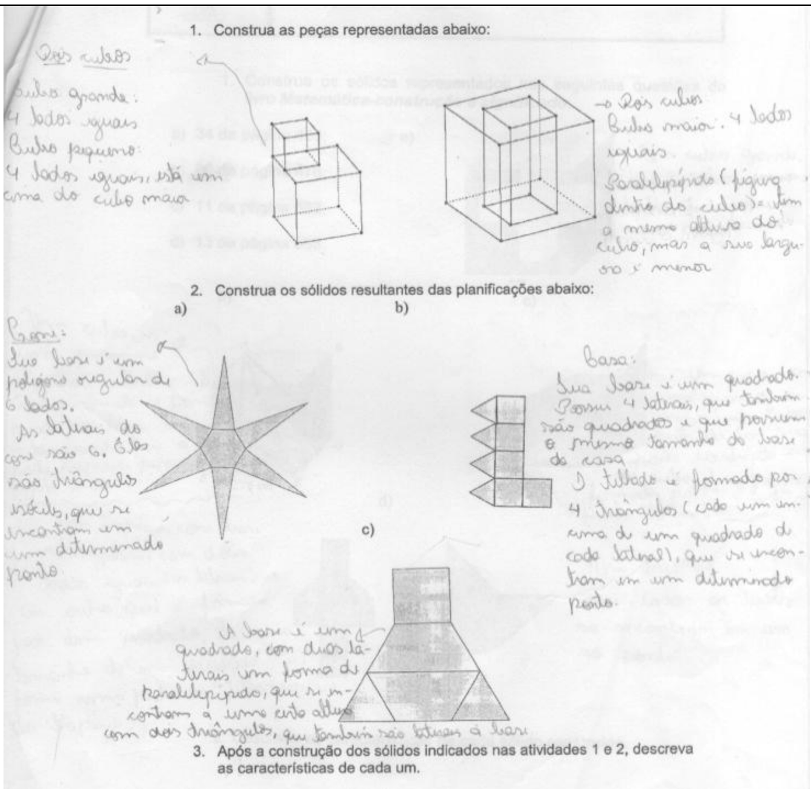
FOLHA 5

2. Espécie de pirâmide, seus pontos são formados, ligando-se as arestas do cubo. As paredes da pirâmide são as diagonais do cubo. Quatro pontos ligados com quatro triângulos (paredes).

3. a) Obtivemos uma pirâmide seu "ponto do telhado" é o canto do cubo. Sua base seria a ligação de todas as paredes (mas seria um triângulo também!) A forma, na realidade são quatro triângulos.

c) O sólido que estamos vendo é um quadrado na diagonal do cubo (no lado interno).

ANEXO H – TRABALHOS ESCRITOS PELO TRIO 9



1. Construa as peças representadas abaixo:

Dois cubos

Cubo grande: 4 lados iguais

Cubo pequeno: 4 lados iguais, está em cima do cubo maior

→ Dois cubos

Cubo maior: 4 lados iguais.

Paralelepípedo (figura dentro do cubo) = tem a mesma altura do cubo, mas a sua largura é menor

2. Construa os sólidos resultantes das planificações abaixo:

a)

Base: Sua base é um polígono regular de 6 lados.

As laterais dos com são 6. Eles são triângulos isósceles, que se encontram em um determinado ponto

b)

Base: Sua base é um quadrado. Possui 4 laterais, que também são quadrados e que possuem o mesmo tamanho da base da casa

O telhado é formado por 4 triângulos (cada um em cima de um quadrado de cada lateral), que se encontram em um determinado ponto.

c)

A base é um quadrado, com duas laterais em forma de paralelepípedo, que se encontram a uma certa altura com dois triângulos, que também são laterais à base

3. Após a construção dos sólidos indicados nas atividades 1 e 2, descreva as características de cada um.

---

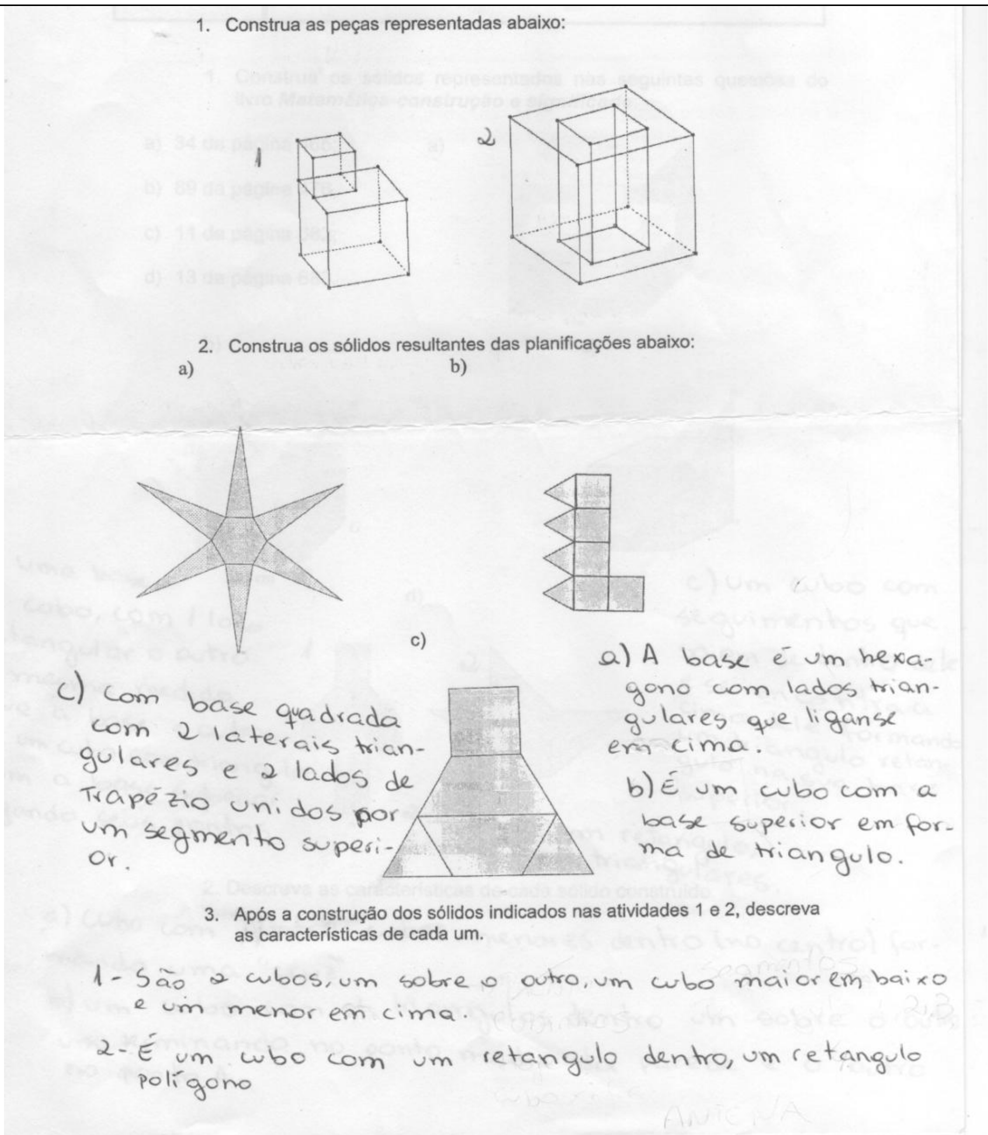
1. Construa um cubo C_1.
   a) Construa um segundo cubo C_2 cuja aresta é metade da aresta de anterior C_1.
   b) Construa um terceiro cubo C_3, cuja aresta é o dobro de C_1.

2. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH. Trace a diagonal da base inferior e da base superior em direções diferentes. Ligue as extremidades da diagonal superior às extremidades da diagonal inferior. Descreva o sólido formado no interior do cubo? Uma figura com quatro lados iguais, formada a partir de duas diagonais.

3. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH.
   a) Marque os pontos médios das três arestas que se originam no vértice A. Nomeie-os de M, N e P. Construa o sólido P1 de vértices A, M, N e P. Que sólido você obteve? Uma pirâmide
   b) Faça o mesmo procedimento nos outros vértices do cubo.
   c) Pinte de vermelho o sólido obtido quando retiramos do cubo os sólidos obtidos nos itens a e b. Descreva o sólido que você está vendo.

Tirando os sólidos obtidos nos itens a e b, sobram 6 quadrados que, juntos, formam um cubo.

ANEXO I – TRABALHOS ESCRITOS PELA DUPLA 10



1. Construa as peças representadas abaixo:

1 2

2. Construa os sólidos resultantes das planificações abaixo:

a) b) c)

c) Com base quadrada com 2 laterais triangulares e 2 lados de Trapézio unidos por um segmento superior.

a) A base é um hexagono com lados triangulares que liganse em cima.

b) É um cubo com a base superior em forma de triangulo.

3. Após a construção dos sólidos indicados nas atividades 1 e 2, descreva as características de cada um.

1- São 2 cubos, um sobre o outro, um cubo maior em baixo e um menor em cima.

2- É um cubo com um retangulo dentro, um retangulo polígono

ANEXO J – TRABALHOS ESCRITOS PELA DUPLA 11

1) As principais dificuldades foram encontradas na hora de montar/fechar o plano, pois se não estavam com as linhas nos lugares corretos não fechava e também ao montar novas linhas tinha que fechar novamente e sempre era esquecido.

Dificuldades também na 3º folha onde pedia cubos, e após outros cubos dentro e sobre do outro já construído.

2) Sim, foram necessárias algumas montagens como: Na 2º folha, o exercício 2, a, b, c tivemos que montar todos para sabermos como ficaria, e também na 3º folha d e E precisamos montar.

3) Sim, a professora precisou nos auxiliar em algumas construções, foram as mesmas relatadas na questão anterior, as dificuldades encontradas foi principalmente em montar o plano, os pontos nos cubos;

---

1) Quais as principais dificuldades encontradas na realização das atividades propostas no Calque 3D?

2) Foram necessárias montagens de papel dos sólidos propostos? Qual(is)?

3) A professora teve que prestar ajuda em alguma construção? Qual(is)? Relate a dificuldade.

1) Encontrei dificuldade na construção de algumas formas da 2ª e 3ª folha, pois tínhamos que visualizar ele de outro modo. As ferramentas do programa também me deixavam confusa, pois às vezes não sabia o que usar primeiro.

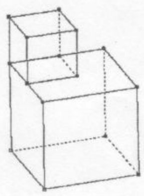
2) Sim; a folha 2, exercício letra c. Recortamos e montamos para visualizar melhor.

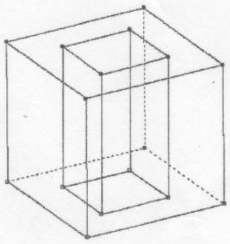
3) Sim, em quase todos os exercícios das folhas 1, 2 e 3. A dificuldade foi em como continuar, e com qual ferramenta continuar depois de ter a base pronta em todos os casos.

ANEXO K – TRABALHOS ESCRITOS PELA DUPLA 12

1. Construa as peças representadas abaixo:

Um cubo grande sob outro cubo menor



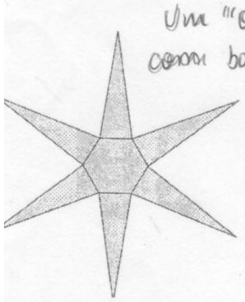


Retângulo dentro de um cubo

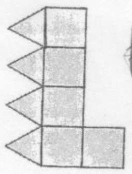
2. Construa os sólidos resultantes das planificações abaixo:

a)

Um "obelisco" com base hexagonal

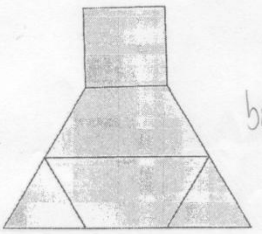


b)



Cubo com um "telhado" formado por triângulos

c)



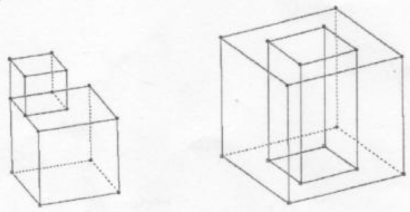
Forma com (forma), digo, base trapezoidal e corpo formado por um quadrado, um trapézio e dois triângulos

3. Após a construção dos sólidos indicados nas atividades 1 e 2, descreva as características de cada um.

ANEXO L – TRABALHOS ESCRITOS PELA DUPLA 14

1. Construa as peças representadas abaixo:

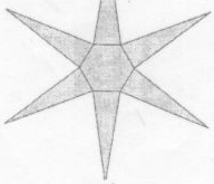
Os dois quadrados tem os lados iguais, um quadrado com retangulo dentro.



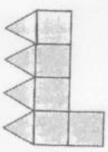
2. Construa os sólidos resultantes das planificações abaixo:

a)

Um polígono de 6 lados como base com 6 Triângulos em cada Lado do poligno.

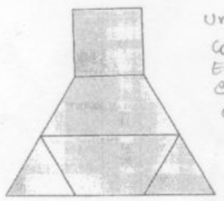


b)



Um quadrado com um triângulo em cima

c)



uma base quadrada com dois triângulos Equiláteros em cada lado e 2 trapézios em cada lado restante

3. Após a construção dos sólidos indicados nas atividades 1 e 2, descreva as características de cada um.

---

1. Construa um cubo C_1.
   a) Construa um segundo cubo C_2 cuja aresta é metade da aresta de anterior C_1.
   b) Construa um terceiro cubo C_3, cuja aresta é o dobro de C_1.

2. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH. Trace a diagonal da base inferior e da base superior em direções diferentes. Ligue as extremidades da diagonal superior às extremidades da diagonal inferior. Descreva o sólido formado no interior do cubo? Um triangulo Equilátero 3D

3. Construa um cubo de vértices ABCDEFGH.
   a) Marque os pontos médios das três arestas que se originam no vértice A. Nomeie-os de M, N e P. Construa o sólido P1 de vértices A, M, N e P. Que sólido você obteve? Um triangulo
   b) Faça o mesmo procedimento nos outros vértices do cubo.
   c) Pinte de vermelho o sólido obtido quando retiramos do cubo os sólidos obtidos nos itens a e b. Descreva o sólido que você está vendo. ~~um poligono de~~

Um Políedro com 6 faces de quadrados e 8 triangulares Distribuidas uniformemente