

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Ondas e Instabilidades em Plasmas com Inomogeneidades Suaves na Densidade e no Campo Magnético de Equilíbrio*

Omar Junior Garcia Silveira

Tese realizada sob orientação do Dr. Luiz Fernando Ziebell, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento final dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Porto Alegre
Agosto - 2003

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Para meus pais, minha esposa e meus filhos.

Agradecimentos

- Primeiramente eu gostaria de agradecer a duas pessoas que foram fundamentais para a trajetória que levou a esse trabalho: a professora Ruth de Souza Schneider e o professor Luiz Fernando Ziebell. Ambos estiveram sempre prontos para sanar as minhas muitas dúvidas durante essa longa jornada de seis anos. Agradeço por terem me ajudado a entender um pouco desta área tão rica da física. Agradeço por terem confiado em mim.
- Agradeço ao Rudi Gaelzer pela valiosa contribuição teórica feita para essa tese, tão fundamental e decisiva. Agradeço ao Rafael Caldela pelos seus trabalhos, tão importantes para a presente tese. Agradeço ao Peter Yoon pelo incentivo dado para que este trabalho tivesse continuidade.
- Agradeço a todos os professores do ensino básico, da graduação e da pós graduação, pelos conhecimentos fundamentais que me proporcionaram.
- Agradeço aos meus amigos do grupo de física dos plasmas, Lucio e Clésio, por estarem presentes na maioria dos meus incontáveis seminários.
- Agradeço aos meus amigos da “antiga” sala M207, Gerson, Henrique, Luiz, Jesumar, Rafael, Rogério, Ronaldo E., Ronaldo N. e Vinícius, e da “nova” M207, Alberto, Antônio, Carolina, Heitor, Jules, Leandro e Saulo, por terem sempre me ajudado em dificuldades de diversas ordens, pelo incentivo e por torcerem por mim. Agradeço pelas inesquecíveis e longas discussões sobre futebol, passando por política, e chegando até nas coisas que nos aguardam ou não depois da derradeira hora.
- Agradeço aos meus amigos de graduação e de pós graduação, Adriano, Günther, Márcio, Máximo, Mesquita, Moisés, Job e Werner pelas amigáveis conversas e, alguns deles, por me ajudarem a “domar” o Linux e o Latex.

- Agradeço ao pessoal do LEC (Laboratório de Estudos Cognitivos), e principalmente à professora Léa, pelos ensinamentos sobre a área da cognição humana.
- Agradeço aos meus parentes que moram em Carlos Barbosa, Itaqui, Porto Alegre, Santa Maria, Santo Ângelo e São Borja. Agradeço à minha vó Cenira pelo zelo conferido a mim. Agradeço aos meus amigos, que há mais de duas décadas estão próximos a mim, Caco, Fernando, Frederico, Marcelo, Marcos e Rafael, aos seus pais e aos seus irmãos. Agradeço ao André, amigo desde o 2º grau, e ao Saulo, pelo companheirismo e troca de idéias. Agradeço ao seu Volney, tia Ana, Alcides, Ana e Sônia por confiarem em mim. Agradeço ao tio Ney e à Maria Helena pelas boas lembranças e realizações do passado e do presente. Agradeço à Neusa e ao Luis pelo apoio em momentos difíceis. Agradeço aos meus amigos de Dois Irmãos pela convivência irrepreensível, tão difícil nos dias de hoje. Agradeço à Catia pela sua importante colaboração nesses últimos meses. Todas essas pessoas, diretamente ou indiretamente, contribuíram positivamente para a minha maneira de pensar de hoje.
- Agradeço ao pessoal da biblioteca, em especial à Silvia, por ter resolvido todos os meus problemas relacionados a referências, ao Zé, por resolver os “rolos” na hora da renovação de livros, à Zuleika, por ser tão atenciosa para nos adaptar conforme dita a ABNT, e à Leticia, sempre incansável ao resolver problemas.
- Agradeço a todos os funcionários do Instituto de Física pela total colaboração desde os anos de graduação.
- Este último item deixei reservado para agradecer àqueles, sem os quais, nada do que está antes ou depois teria sido proporcionado: meus pais, Omar e Neiva, minha esposa Silvânia e meus filhos Neto e Igor. Agradeço aos meus pais por terem sempre me mostrado os verdadeiros valores da vida. Agradeço aos meus pais, minha esposa e meus filhos, pela compreensão, pela paciência, pela infra-estrutura e pelo carinho, por todo esse tempo de estudo.

Resumo

No presente trabalho, estudamos a absorção e amplificação de ondas eletromagnéticas que se propagam em plasmas com densidade e temperatura fracamente inomogêneas, imersos em um campo magnético também inomogêneo, tendo como base a teoria cinética, dentro do contexto da aproximação local. Esse estudo se dá efetivamente a partir da obtenção do tensor dielétrico do plasma, que deve ser empregado na relação de dispersão.

Iniciamos com uma revisão dos conceitos básicos sobre plasmas homogêneos e inomogêneos. Os fundamentos da teoria cinética também foram abordados.

Apresentamos uma revisão de trabalhos anteriores que enfocam o mesmo tema, embora descrevendo separadamente os dois tipos de inomogeneidades. A partir desses trabalhos, obtivemos um tensor dielétrico geral, que descreve de forma simultânea as inomogeneidades do campo magnético de equilíbrio e da função distribuição de equilíbrio. Tal tensor foi obtido a partir de um sólido desenvolvimento teórico, que garante a correta descrição da troca de energia entre as ondas e as partículas do plasma.

Abordamos os aspectos gerais das instabilidades de deriva, direcionando o estudo à faixa de frequência das ondas híbridas inferiores, e às instabilidades LHDI e MTSI (IWI). Utilizamos perfis lineares de inomogeneidades de campo magnético ambiente e densidade para modelar a região da magnetosfera conhecida como *neutral sheet*. Particularizamos o tensor dielétrico para o estudo específico das instabilidades LHDI e MTSI (IWI), para o tipo de perfil citado acima.

Apresentamos uma nova relação de dispersão para plasmas inomogêneos, que incorpora explicitamente as derivadas espaciais do tensor dielétrico do plasma. Usamos o tensor que unifica os tratamentos das inomogeneidades do campo e densidade nessa relação de dispersão, e obtivemos uma descrição unificada das instabilidades LHDI e MTSI (IWI).

Abstract

In the present work, we study the absorption and amplification of electromagnetic waves that propagate in a plasma with weakly inhomogeneous density and temperature profiles, immersed in a also weakly inhomogeneous magnetic field, using the kinetic theory in the context of the local approximation. The study starts with the derivation of the dielectric tensor of the plasma, which is used in the dispersion relation.

We begin with a review of basic concepts on homogeneous and inhomogeneous plasmas, and also present a review on fundamental features of the kinetic theory.

We present a review of previous works dealing with the same theme, although describing separately the two types of inhomogeneities. Starting from these works, we obtained a general form of the dielectric tensor, describing simultaneously the inhomogeneities in the equilibrium magnetic field and in the equilibrium distribution function. This tensor was based on a consistent theoretical development, aiming to guarantee the correct description of the energy exchange between waves and plasma particles.

We also discuss general features of the drift instabilities, aiming the study to the range of frequency of the lower hybrid waves, and to the instabilities LHDI and MTSI (IWI). We use linear profiles to describe the inhomogeneities of density and ambient magnetic field, in order to model the region of the magnetosphere well-known as the neutral sheet. We particularize the dielectric tensor for the specific study of the instabilities LHDI and MTSI (IWI), for the type of profiles mentioned above.

We present a new dispersion relation for inhomogeneous plasmas, taking into account explicitly the space derivatives of the dielectric tensor. We use the dielectric tensor which unifies the treatments of inhomogeneities of magnetic field and density into this dispersion relation, and obtain a unified description of the LHDI and MTSI (IWI) instabilities.

Conteúdo

1. Introdução	1
1.1 Estrutura da tese	5
1.2 A interação onda-partículas	8
1.3 Plasma homogêneo	9
1.3.1 Troca de energia onda-partículas	12
1.4 Plasma inhomogêneo	14
1.4.1 Aproximação WKB	15
1.4.2 Aproximações locais	17
1.5 O sistema de equações Vlasov-Maxwell	19
1.5.1 Linearização do sistema Vlasov-Maxwell	23
1.5.2 Determinação da forma geral do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$	26
2. O Tensor Dielétrico Efetivo	31
2.1 Introdução	31
2.2 A transformação BGI	31
2.3 O tensor dielétrico efetivo para plasmas inhomogêneos imersos em campo magnético homogêneo	36
2.3.1 A inclusão dos efeitos da inhomogeneidade na função distribuição de equilíbrio	37
2.3.2 As órbitas não perturbadas das partículas	41
2.3.3 Determinação do tensor dielétrico efetivo	42
2.4 O tensor dielétrico efetivo para plasmas homogêneos imersos em campo magnético inhomogêneo	52

2.4.1	As órbitas não perturbadas das partículas na presença de campo magnético inhomogêneo	54
2.4.2	Determinação do tensor dielétrico efetivo	59
2.5	Resumo das características da transformação BGI	64
3.	Plasmas Inhomogêneos Imersos em Campo Magnético Inhomogêneo	66
3.1	Introdução	66
3.2	A unificação do formalismo	67
3.2.1	Adaptação do tensor dielétrico efetivo obtido por Caldela	68
3.3	O tensor dielétrico efetivo para plasmas inhomogêneos, imersos em campo magnético inhomogêneo	79
3.4	A aplicação do formalismo para uma distribuição maxwelliana	82
3.4.1	Cálculo das integrais em velocidade e tempo que constam em $\vec{\chi}_B$	85
3.4.2	Cálculo das integrais em velocidade e tempo que constam em $\vec{\chi}_P$	89
3.4.3	A forma final do tensor dielétrico efetivo	103
4.	As Instabilidades de Deriva LHDI e MTSI (IWI)	107
4.1	Introdução	107
4.2	Velocidade de deriva	107
4.3	Instabilidades de deriva	111
4.4	Breve histórico da LHDI e MTSI	112
4.5	Tentativa de descrição unificada das instabilidades LHDI e MTSI (IWI)	130
4.6	A magnetosfera terrestre	136
5.	A Aplicação do Formalismo no Estudo da LHDI e MTSI (IWI)	143
5.1	Introdução	143
5.2	Modelo para a região de inhomogeneidade	144
5.3	O tensor dielétrico efetivo adaptado para ondas híbridas inferiores	149
5.3.1	O tensor suscetibilidade $\overset{\leftrightarrow}{\chi}^i$	150
5.3.2	O tensor suscetibilidade $\overset{\leftrightarrow}{\chi}^e$	152
5.4	A relação de dispersão para um plasma inhomogêneo	162

5.4.1	O limite para plasma homogêneo	167
5.5	A derivada do tensor suscetibilidade	168
5.6	Resultados numéricos	174
5.6.1	Resultados numéricos para o limite de temperatura eletrônica nula . .	183
6.	Sumário e Conclusões	195
Apêndice		206
A.	Algumas integrais úteis para o cálculo do tensor $\overleftrightarrow{\chi}_P$	207
A.1	Integrais envolvendo funções de Bessel	207
A.2	Integrais úteis	208
B.	A função $\mathcal{G}_{r,p,m,l}$ em termos da função de Fried & Conte	210
B.1	Função \mathcal{G} para o harmônico $n = 0$	211
B.2	Função \mathcal{G} para os harmônicos $n \neq 0$	214
Referências		217

Lista de Figuras

2.1	Geometria adotada no trabalho de Caldela [27].	36
2.2	Geometria adotada no trabalho de Gaelzer [25].	53
4.1	Deriva devida ao gradiente de \mathbf{B}_0	108
4.2	Deriva devida a inhomogeneidade da densidade.	110
4.3	Geometria adotada na referência [113].	131
4.4	Propagação perpendicular ($k_z = 0$); $\beta_e = 0$; $\beta_i = 1, 5, 10, 25, 50$. [113]	134
4.5	Propagação oblíqua; $\beta_e = 0$; $\beta_i = 5$; (a) parte real; (b) parte imaginária. [113]	135
4.6	Propagação perpendicular; partes real e imaginária da LHDI para $\beta_e = 0.02, 0.2, 0.5, 0.75, 1, 1.25$ com $\beta_i = 5$. [113]	136
4.7	Propagação oblíqua para diferentes temperaturas eletrônicas, com $\beta_i = 5$; $\beta_e =$ (a) 0.02; (b) 0.2; (c) 0.75; (d) 1.25. [113]	137
4.8	Interação das linhas de campo interplanetárias com o campo terrestre. [120]	138
4.9	Magnetosfera Terrestre. [116]	139
4.10	As fases da <i>substorm</i> : (a) fase de crescimento; (b) fase de expansão; (c) fase de recuperação. [119]	141
5.1	(a) Sistema de eixos adequado para o modelo da região de inhomogeneidade [116]; (b) Perfil de Harris para a densidade e campo magnético de equilíbrio.	145
5.2	Representação esquemática dos perfis lineares das inhomogeneidades de campo magnético e densidade de equilíbrio.	147
5.3	Taxa de crescimento adimensional $\bar{\omega}_i$ (parte imaginária da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/ \Omega_e = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, incluídos os efeitos completos da inhomogeneidade dos elétrons [18].	187

5.4	Parte real da frequência adimensional $\bar{\omega}_r$ (parte real da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/ \Omega_e = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, incluídos os efeitos completos da inomogeneidade dos elétrons [18].	188
5.5	Taxa de crescimento adimensional $\bar{\omega}_i$ (parte imaginária da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/ \Omega_e = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, fazendo $q_n = q_B = 0$, ou seja, desprezando completamente os efeitos da inomogeneidade dos elétrons [18].	189
5.6	Taxa de crescimento adimensional $\bar{\omega}_i$ (parte imaginária da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/ \Omega_e = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, usando valores de q_n e q_B que são 20% dos seus valores usados na figura 5.3 [18].	190
5.7	Taxa de crescimento adimensional $\bar{\omega}_i$ (parte imaginária da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/ \Omega_e = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, usando valores de q_n e q_B que são 50% dos seus valores usados na figura 5.3 [18].	191
5.8	Parte real da frequência adimensional $\bar{\omega}_r$ (parte real da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/ \Omega_e = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, fazendo $q_n = q_B = 0$, ou seja, desprezando completamente os efeitos da inomogeneidade dos elétrons.	192
5.9	IWI ($q_{\perp} = 0$) para os mesmos parâmetros utilizados na figura 5.3, incluindo os efeitos completos da inomogeneidade dos elétrons.	193
5.10	LHDI ($q_{\parallel} = 0$) para os mesmos parâmetros utilizados na figura 5.3, incluindo os efeitos completos da inomogeneidade dos elétrons.	194
5.11	Taxa de crescimento adimensional $\bar{\omega}_i$ (parte imaginária da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/ \Omega_e = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, impondo $\eta_{xj} = 0$ na relação de dispersão, ou seja, sem os efeitos da derivada espacial do tensor suscetibilidade.	194

Lista de Tabelas

4.1	Características básicas da LHDI e MTSI (IWI).	130
-----	---	-----

1. Introdução

O estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas é uma das áreas mais intensamente investigadas na física de plasmas, cobrindo uma grande gama de aplicabilidade em plasmas de laboratório e naturais.

Ondas de rádio frequência são utilizadas para aquecer e gerar correntes para sustentação de plasmas de laboratório. Ondas nessa faixa de frequências também estão envolvidas em técnicas para controle de pressão, de corrente, e de fluxos de partículas, para a otimização da performance do plasma em equipamentos de fusão. Medidas de importantes quantidades relacionadas com o equilíbrio, tais como densidade do plasma, temperatura dos elétrons e íons e campos magnéticos, podem ser indiretamente medidas a partir da utilização de ondas. Em linhas gerais, aplicações desse tipo envolvem a emissão de ondas no plasma, a propagação no interior de um plasma com uma complexa geometria magnética, propriedades da interação onda-partículas (absorção e amplificação de ondas) e efeitos não lineares que perturbam o plasma e alteram as características das ondas.

Na magnetosfera é observada uma enorme gama de tipos de ondas, geradas espontaneamente pela complexa dinâmica dessa região. Muitas delas permanecem aprisionadas enquanto outras, tal como as ondas *whistler*, viajam grandes distâncias até as camadas mais internas da ionosfera, podendo chegar até o solo terrestre nas regiões aurorais. Plasmas astrofísicos, como por exemplo os jatos de plasma produzidos por núcleos ativos de galáxias, plasmas em aglomerados de galáxias e a atmosfera do Sol, são fortes emissores de ondas eletromagnéticas, que possibilitam aos pesquisadores desta área estimar as características básicas destes distantes objetos celestes.

Os semicondutores, apesar de possuírem uma estrutura de sólido, podem ser tratados como um plasma na investigação da propagação de ondas em seu interior. São materiais bastante sensíveis à aplicação de potenciais elétricos e, dependendo das condições, o sinal

resultante não corresponde ao esperado. Tendo como característica uma grande quantidade de elétrons livres e lacunas, adotou-se a abordagem de plasma para estudar as ondas propagantes em seu interior e as suas interferências nos sinais obtidos experimentalmente.

Ao se propagarem no plasma, as ondas interagem com as partículas, podendo ser absorvidas pelo plasma (estabilidade), provocando uma elevação da sua temperatura, ou ser amplificadas (instabilidade), produzindo no plasma perturbações que podem evoluir no tempo. A amplificação da amplitude das ondas pode ocasionar em plasmas de fusão magnética um efeito destrutivo do mesmo. A situação de instabilidade também pode gerar turbulências e conseqüente difusão resistiva anômala (instabilidades resistivas), que pode ser útil para o aquecimento do plasma ou prejudicial para o seu confinamento.

Instabilidades em plasmas de equipamentos de fusão podem gerar processos que impedem o confinamento magnético. São instabilidades macroscópicas que movem a coluna de plasma de tal forma a conduzi-lo a situações irreversíveis de perda do confinamento. Instabilidades desse tipo são melhor descritas em uma abordagem de fluido único, que não distingue as contribuições dos elétrons e íons. A vantagem desta abordagem, além da descrição acurada de instabilidades macroscópicas, está na possibilidade de trabalhar com geometrias magnéticas complicadas, fundamentais para o confinamento de plasmas termonucleares em laboratórios. Este é o domínio da chamada *magnetohidrodinâmica* (MHD). As principais instabilidades MHD são do tipo *interchange* (movimento oscilatório da seção transversal da coluna de plasma), *pinch* (acarreta o “estrangulamento” do plasma) e *kink* (gera uma deformação na coluna de plasma em forma de joelho), para uma situação não dissipativa, e *resistive tearing* (perturbação alongada ao longo das linhas de campo) para uma configuração em que os efeitos resistivos são importantes [1–4].

Na magnetosfera terrestre ocorre uma grande variedade de instabilidades, geradas conforme as características dos plasmas das diferentes regiões que a compõem [5]. Os principais tipos são instabilidades de cíclotron (geradas pelo movimento de cíclotron dos elétrons e íons) [6, 7] e instabilidades de corrente (*streaming instabilities*). Estas últimas são geradas basicamente por quatro diferentes fontes relacionadas com o deslocamento de partículas: correntes de íons (*current driven instability*) [8], feixes de elétrons (*beam instability*) [9], feixes de elétrons em direções opostas (*two stream instability*) [8–10] e derivas decorrentes

de inomogeneidades em densidade e campo magnético (*drift wave instability*)¹ [8,10].

Em estrelas com campo magnético e gás interestelar de galáxias, a matéria é muitas vezes contida pelos gradientes de campo, enquanto em objetos celestes que estão se expandindo, como supernovas, os gases são acelerados por tais gradientes. Este cenário é propício para o surgimento de instabilidades MHD. Nas rádio-estrelas, correntes de matéria de altas velocidades são produzidas, e instabilidades do tipo *two stream* podem ocorrer. Na atmosfera solar, uma complexa topologia magnética gerada pelo movimento do fluido pode acarretar instabilidades resistivas. As partículas de raios cósmicos, presentes em galáxias e outras fontes de rádio, fazem surgir instabilidades associadas com a anisotropia das partículas relativísticas [11].

Apesar das instabilidades terem sido separadas por tipos de plasmas, apenas para salientar as mais importantes para cada caso, determinadas instabilidades podem existir em mais de um tipo de plasma. É comum, por exemplo, a presença de *streaming instabilities* em tokamaks e de instabilidades do tipo *kink* em determinadas regiões da magnetosfera.

As instabilidades citadas, a menos das instabilidades MHD, são decorrentes de processos que se dão em nível de alteração da distribuição estatística microscópica das partículas e, por isso, são chamadas de microinstabilidades. Este é o domínio da *teoria cinética* [12]. Nesta forma de abordagem, diferentemente do que ocorre na MHD, é difícil trabalhar com geometrias magnéticas complexas, que resultam em problemas matemáticos e computacionais de enorme magnitude. Assim sendo, estudos centrados na interação de plasmas com complicadas configurações de campo não são adequados ao uso da teoria cinética. Para evitar este tipo de problema, é muito comum utilizar este formalismo onde o plasma pode ser considerado infinito, não necessitando, assim, uma descrição de problemas de contorno. Embora pareça restritiva, essa forma de abordagem se justifica porque microinstabilidades podem surgir em microregiões específicas, por exemplo em regiões internas de equipamentos de fusão, onde os campos possuem uma forma aproximada tratável. Coisa semelhante também ocorre em certas regiões da magnetosfera terrestre, como por exemplo, na cauda

¹ As características gerais da *two stream instability* e da *drift wave instability* encontram-se no capítulo 4 da presente tese.

magnética² (*magnetotail*).

A interação onda-partículas acarreta mudanças na função distribuição das partículas, que vão desde pequenas alterações em regiões do espaço de velocidade cujas partículas mais interagem com as ondas (resultado da interação linear), até situações em que processos não lineares tornam-se importantes e a dependência temporal da função distribuição não pode ser desprezada (interação não linear em instabilidades). Mesmo que uma instabilidade conduza à situação em que os efeitos não lineares tornam-se importantes, é possível trabalhar sob o contexto da interação linear. Isso porque os processos lineares são os mais relevantes no início da instabilidade e, portanto, é possível prever a existência de modos instáveis sem a necessidade de incluir efeitos não lineares.

O enfoque principal desta tese é justamente o estudo da interação microscópica onda-partículas em um plasma, permitindo identificar as características e o perfil dos tipos de ondas que podem se propagar em um plasma com determinada configuração de parâmetros e constituição física, ou seja, identificar quais ondas são estáveis e quais são instáveis para um determinado plasma, com características conhecidas.

Os plasmas homogêneos foram os primeiros que tiveram um estudo sistematizado das suas propriedades na presença de ondas. Muitas variantes de configurações de parâmetros de plasma foram investigadas. Plasmas magnetizados e não magnetizados, plasmas frios e plasmas que incluem os efeitos térmicos das partículas, e diversas distribuições de velocidades foram exaustivamente estudados desde os primórdios da pesquisa em física dos plasmas. Uma enorme variedade de instabilidades, tanto eletrostáticas como eletromagnéticas, foi sendo descoberta com o avanço dos estudos (a referência [9] contém um estudo sistemático deste assunto).

As ondas ao se propagarem em plasmas com parâmetros inhomogêneos (densidade e temperatura) e/ou imersos em um campo magnético inhomogêneo, têm suas características alteradas, em comparação a uma situação totalmente homogênea. Modos instáveis independentes na situação homogênea podem ser acoplados, dando origem a novas instabilidades, ou ondas estáveis podem tornar-se instáveis e vice-versa; as taxas de crescimento das ondas também podem ser afetadas pela inhomogeneidade do meio. Há dois tratamentos básicos

² Mais detalhes sobre essa região podem ser encontrados na subseção 4.6 da presente tese.

para trabalhar teoricamente em plasmas inomogêneos: o local e o não local.

O tratamento não local leva em conta a variação espacial dos campos, resultando em uma equação diferencial que determina a variação da amplitude das ondas com a posição [13,14]. Normalmente este tratamento é elaborado com base na teoria de dois fluidos [15,16], devido às grandes complicações matemáticas e conseqüentes longos tempos de computação que a teoria cinética impõe neste tipo de abordagem.

O tratamento local considera o plasma como se fosse homogêneo ponto a ponto, mantendo inomogêneos os parâmetros e os campos. Em um tipo de enfoque (tratamento localmente inomogêneo) os efeitos da inomogeneidade são incluídos ponto a ponto. Enquanto em outro enfoque (tratamento localmente homogêneo) os parâmetros se alteram ponto a ponto, mas os efeitos da inomogeneidade não são levados em conta. Apesar de ter sido afirmado que os campos são trabalhados como inomogêneos, a situação não é trivial. Ao considerar-se a dependência espacial da amplitude da onda, a aproximação de onda plana, usada em plasma homogêneos, não pode ser mais utilizada. Um outro método de aproximação de onda única, conhecido como WKB, foi desenvolvido justamente para o estudo de meios não uniformes. A essência do tratamento local e da aproximação WKB será discutida ainda neste capítulo introdutório.

Em suma, esta tese é direcionada ao estudo da interação microscópica onda-partículas, em um tratamento linearizado, de plasmas infinitos completamente ionizados, fracamente inomogêneos em densidade, imersos em um campo magnético ambiente também fracamente inomogêneo, onde o tratamento localmente inomogêneo será empregado, sob a validade da aproximação WKB. Após a explanação sobre a estrutura da tese, o formalismo teórico que lhe dá suporte começará a ser desenvolvido.

Os principais resultados obtidos na presente tese podem ser encontrados, de maneira resumida, nas referências [17] e [18].

1.1 Estrutura da tese

Este capítulo introdutório serve para contextualizar, com relativo detalhe, todo o formalismo teórico que será empregado nesta tese. A interação onda-partículas é discutida

brevemente, com enfoque na relação entre as flutuações do campo oscilante com o conseqüente surgimento de correntes, como uma resposta do plasma à perturbação de seu estado de equilíbrio. Cada tipo de plasma responde conforme suas respectivas configurações (homogêneo, inhomogêneo, campo magnético externo) e parâmetros (densidade, temperatura), com propriedades que podem ser resumidas matematicamente no denominado tensor dielétrico. A troca de energia entre o plasma e a onda é garantida pela parte anti-hermiteana deste tensor.

Uma introdução ao estudo de plasmas homogêneos foi inserida, com o intuito de apresentar os mecanismos tradicionais para a obtenção dos modos normais de oscilação de um plasma. A metodologia de trabalhar não no espaço real de posição e tempo, mas sim no espaço de vetor de onda e frequência, através da transformada de Fourier, é apresentada. Como resultado, decorre a relação, chamada de relação de dispersão, que permite determinar os tipos de oscilações possíveis em um plasma e os seus coeficientes de absorção e amplificação.

O estudo de plasmas inhomogêneos é abordado, salientando-se as suas dificuldades intrínsecas em comparação aos plasmas homogêneos. Este tipo de plasma requer um tratamento diferenciado, necessitando de aproximações para que seja descrito analiticamente. As aproximações localmente homogênea, localmente inhomogênea e WKB são apresentadas.

A interação do plasma com os campos é completamente descrita pelo conjunto de equações, não lineares e fortemente acopladas, conhecido como Vlasov-Maxwell. Para que o tratamento se desenvolva analiticamente, é usual linearizá-lo. Este processo todo de linearização é descrito neste capítulo introdutório, culminando numa expressão geral para a transformada de Fourier do tensor dielétrico. No entanto, será visto que este tensor, para um plasma inhomogêneo, não possui as características adequadas. Apesar disso, este tensor é a base a partir da qual se determina o tensor que é a transformada de Fourier do tensor dielétrico, chamado de tensor dielétrico efetivo, que é fundamental para todo o desenvolvimento teórico desta tese.

No capítulo 2 são avaliadas as características do tensor dielétrico efetivo, e a maneira formal com que ele é obtido é exposta brevemente. Além disso, consta neste capítulo toda a problemática de tratar um plasma inhomogêneo em densidade e/ou temperatura, imerso

em um campo magnético homogêneo, desde o cálculo das órbitas das partículas até a forma final do tensor dielétrico efetivo. Outra configuração estudada é a de um plasma homogêneo imerso em um campo magnético inhomogêneo. Este tipo de configuração apresenta grandes dificuldades já no cálculo das órbitas. Por este mesmo motivo, a obtenção do tensor dielétrico efetivo é diferenciada com relação à configuração anterior. A maneira como estas dificuldades foram superadas consta na revisão deste assunto.

O terceiro capítulo é dedicado à unificação dos dois tipos de configurações apresentadas no capítulo 2. O plasma tratado é inhomogêneo em parâmetros e imerso em campo magnético também inhomogêneo. A unificação se dará, na prática, no tensor dielétrico efetivo, que deve ser capaz de descrever simultaneamente as duas inhomogeneidades.

O capítulo 4 contém uma revisão sobre instabilidades de deriva, incluindo os mecanismos físicos que geram as derivas em um plasma inhomogêneo. Um histórico é apresentado dos estudos já realizados especificamente sobre as instabilidades de deriva LHDI (*lower hybrid drift instability* - instabilidade de deriva híbrida inferior), MTSI (*modified two-stream instability* - instabilidade de duas correntes modificada) e IWI (*ion Weibel instability* - instabilidade de Weibel dos íons). A título de complemento de informação, uma descrição geral da magnetosfera terrestre é feita no final do capítulo.

No capítulo 5, todo o formalismo teórico apresentado nos capítulos anteriores é empregado para descrever as instabilidades LHDI e MTSI (IWI), com parâmetros de plasma encontrados na cauda magnética da Terra. A forma geral do tensor dielétrico efetivo é particularizada para regiões de frequências próximas à frequência híbrida inferior (frequência típica da LHDI e MTSI (IWI)), e restrita a propagações perpendiculares à direção dos gradientes. A aplicação do formalismo nesta região de frequência, tem como objetivo principal descrever as duas instabilidades de uma só maneira, ou seja, verificar se o formalismo desenvolvido nesta tese pode ser empregado para descrever simultaneamente as duas instabilidades, uma vez que até o momento não há uma formulação unificada.

O último capítulo é dedicado às conclusões gerais da tese e às possibilidades de trabalhos futuros.

1.2 A interação onda-partículas

A propagação de ondas eletromagnéticas em um plasma induz a formação de correntes elétricas em seu interior, alterando a sua situação de equilíbrio. A presença de um campo elétrico oscilante propagante $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, ao interagir com as partículas, gera uma densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, que depende das características da onda e das propriedades do plasma. A relação constitutiva entre estas grandezas é

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'), \quad (1.1)$$

e significa que a densidade de corrente gerada em um ponto \mathbf{r} no instante t depende da interação da onda com o plasma em todos os pontos \mathbf{r}' e em todos os tempos t' anteriores a t . Em outras palavras, o plasma responde, em um ponto \mathbf{r} e instante t , à perturbação ocorrida em um ponto \mathbf{r}' no instante t' . Todas as informações sobre as propriedades do meio, tais como a inhomogeneidade, a densidade e temperatura, são carregadas pelo tensor condutividade $\overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$. Teoricamente obtém-se este tensor a partir de um modelamento para o plasma, que inclui a função distribuição de equilíbrio e a forma das inhomogeneidades em densidade e campo magnético externo, além de parâmetros mais específicos tais como a ordem de grandeza da densidade, temperatura e intensidade do campo magnético externo.

A corrente induzida, por sua vez, gera campos que interagem com as ondas eletromagnéticas propagantes, formando um sistema auto-interativo. A evolução espaço-temporal deste sistema campo-plasma-corrente é governada pelas equações de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad (1.2d)$$

onde $\rho(\mathbf{r}, t)$ é a densidade de carga elétrica do plasma, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ são respectivamente o campo elétrico e o campo magnético. A equação (1.2a) é conhecida como *lei de Gauss* e

a equação (1.2d) como *lei de Ampère-Maxwell*, ou simplesmente como *lei de Ampère*.

Com uma pequena manipulação algébrica das equações de Maxwell, obtém-se a equação para os campos que podem se propagar em um plasma:

$$\nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (1.3)$$

As ondas que podem se propagar dependem das propriedades do plasma, cuja conexão se dá através da densidade de corrente, via equação (1.1). As ondas que satisfazem a equação da onda acima para um determinado plasma, cujas propriedades são dadas pelo tensor condutividade $\overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$, caracterizam os modos de propagação possíveis para uma determinada configuração de parâmetros de plasma. Embora sendo a equação da onda, tal como descrita em (1.3), de difícil resolução, mesmo com os avanços na área computacional, é possível determinar os modos de propagação de ondas sem resolvê-la diretamente (para um tratamento local), a partir da chamada *relação de dispersão*. A obtenção da relação de dispersão requer um tratamento diferenciado para plasmas homogêneos e inhomogêneos, conforme as diferenças na maneira de tratar os campos.

1.3 Plasma homogêneo

A forma geral do tensor condutividade pode ser bastante simplificada para um plasma homogêneo. Por ser homogêneo, a perturbação ocorrida em um ponto \mathbf{r} não depende da interação da onda ocorrida em um ponto \mathbf{r}' em especial, mas sim apenas da posição relativa entre estes pontos. Assim, a dependência em \mathbf{r}, \mathbf{r}' é na forma $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

É bastante usual e razoável supor os parâmetros do plasma, como densidade, temperatura e campo magnético externo, independentes do tempo. Esta é a hipótese de plasma estacionário. O tensor condutividade carrega consigo a informação do tempo t' em que ocorreu uma determinada perturbação e, como os parâmetros são constantes no tempo, não importa qual é o valor específico deste tempo, mas sim apenas quanto tempo transcorreu até a perturbação presente t . Portanto, a dependência em t, t' é na forma $t - t'$.

Para um plasma homogêneo e estacionário, a relação constitutiva entre o campo e a

densidade de corrente (1.1) será escrita como

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \vec{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \quad (1.4)$$

O tensor condutividade $\vec{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ possui as dependências adequadas para um plasma homogêneo e estacionário.

Para tornar a equação da onda (1.3) tratável, é conveniente escrever $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ e os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, representados por $\mathcal{A}(\mathbf{r}, t)$, em termos da suas respectivas transformadas de Fourier (decomposição em ondas planas)

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (1.5)$$

Substituindo a transformada de Fourier inversa

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k \mathcal{A}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.6)$$

na equação (1.3) e realizando as devidas operações diferenciais, a equação da onda fica em uma simples forma algébrica no espaço dos \mathbf{k} (vetor de onda) e ω (frequência):

$$k^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - [\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)] \mathbf{k} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = i4\pi \frac{\omega}{c^2} \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega), \quad (1.7)$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ e $\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega)$ são as transformadas de Fourier do campo elétrico e densidade de corrente, respectivamente.

Uma atenção especial deve ser dada para a transformada de Fourier da densidade de corrente. Ao ser aplicada a transformada de Fourier, designada por \mathcal{F} , em $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ expressa pela equação (1.4), obtém-se

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)\} = \mathcal{F}\left\{ \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \vec{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \right\}.$$

Numa análise de Fourier mais detalhada, nota-se que o lado direito de (1.4) representa a *convolução* das funções $\vec{\sigma}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ [19]. Convém ressaltar que só é possível afirmar isso por causa da particular dependência espacial e temporal de um plasma homogêneo

e estacionário. Pelo teorema da convolução, que mostra que a transformada de Fourier da convolução de duas funções é o produto das transformadas de Fourier destas funções, podemos escrever

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) . \quad (1.8)$$

Usando a igualdade (1.8) em (1.7), chegamos à seguinte equação no espaço dos \mathbf{k} e ω

$$\sum_i \sum_j \left[k_i k_j - k^2 \delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \right] E_j(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{e}_i = 0 , \quad (1.9)$$

onde \mathbf{e}_i ($i = x, y, z$) é o vetor unitário na direção i em coordenadas retangulares e $\overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)$ é a transformada de Fourier do *tensor dielétrico*

$$\overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega) = \overleftrightarrow{\mathbf{1}} + i \frac{4\pi}{\omega} \overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) . \quad (1.10)$$

Este tensor resume a resposta do plasma na presença de campos elétricos, e suas propriedades dependem basicamente da densidade e temperatura do plasma e intensidade e configuração dos campos de equilíbrio.

Costuma-se definir também o *tensor suscetibilidade elétrica*, relacionado com a polarização do plasma [20], cuja transformada de Fourier $\overleftrightarrow{\chi}(\mathbf{k}, \omega)$ se relaciona com o tensor dielétrico da seguinte forma:

$$\overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega) = \overleftrightarrow{\mathbf{1}} + \overleftrightarrow{\chi}(\mathbf{k}, \omega) . \quad (1.11)$$

A equação vetorial (1.9) resulta em um conjunto de três equações escalares, uma para cada i , formando um sistema linear e homogêneo nas variáveis $E_x(\mathbf{k}, \omega)$, $E_y(\mathbf{k}, \omega)$ e $E_z(\mathbf{k}, \omega)$. Este sistema só terá solução não trivial se o seu determinante principal for nulo. Isso determina a relação de dispersão para um plasma homogêneo e estacionário:

$$\det \left[k_i k_j - k^2 \delta_{ij} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \right] = 0 . \quad (1.12)$$

A relação de dispersão acima determina os modos normais de oscilação e os coeficientes

de absorção e amplificação das ondas para um plasma homogêneo. Ao ser resolvida, esta equação fornece os \mathbf{k} em função de ω , ou vice-versa, que são suportados pelo plasma. Ela substitui a resolução da equação da onda (1.3), para um tratamento local, quando o objetivo é investigar os modos estáveis e instáveis possíveis e seus coeficientes de absorção ou amplificação.

Como se observa explicitamente, o tensor dielétrico é fundamental para que os coeficientes de absorção ou amplificação sejam determinados corretamente. Muito se fez, e vem sendo feito, para determinar o tensor dielétrico correto para uma determinada configuração e parâmetros de plasma, focando-se a atenção em tipos de ondas eletromagnéticas específicas. Cada estudo, seja de novas configurações, parâmetros ou tipos de ondas, apresenta desafios renovados para a obtenção do correto tensor dielétrico, mesmo em se tratando de plasmas homogêneos. Tratando-se de plasmas inhomogêneos, a situação fica ainda mais complicada, pois muitas das facilidades de uma configuração homogênea não são aplicáveis em uma plasma inhomogêneo.

1.3.1 Troca de energia onda-partículas

A questão da absorção ou amplificação de ondas pode ser facilmente vista a partir da transformada de Fourier inversa (1.6). Supondo o vetor de onda real³, o que será sempre feito nesta tese, e a frequência possuindo uma parte imaginária ω_i , tal que $\omega = \omega_r + i\omega_i$, a transformada de Fourier inversa pode ser reescrita como segue:

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k \mathcal{A}(\mathbf{k}, \omega) e^{\omega_i t} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_r t)}. \quad (1.13)$$

Nota-se claramente que o sinal de ω_i é quem determina se a onda será absorvida ou amplificada. Se $\omega_i < 0$ nota-se, a partir da primeira exponencial de (1.13), que a amplitude da onda decai exponencialmente com o tempo. Neste caso, a onda transfere energia para as partículas, podendo ocorrer um aquecimento do plasma. É comumente dito que a onda é absorvida pelo plasma, e ondas com essa característica são chamadas de *ondas estáveis*.

³ Um estudo detalhado das consequências de \mathbf{k} real e ω complexo e \mathbf{k} complexo e ω real na absorção e amplificação de ondas encontra-se na referência [21].

Se $\omega_i > 0$ a amplitude da onda aumenta exponencialmente com o tempo. Ondas com essa característica são chamadas de *ondas instáveis* ou simplesmente de *instabilidades*. Nessa situação a onda ganha energia das partículas, e sua propagação pode acarretar conseqüências danosas para a manutenção da estabilidade do plasma, como pode ocorrer, por exemplo, em equipamentos de fusão termonuclear. Os valores de ω_i , denominados taxas de absorção e amplificação conforme o caso, são determinados com a resolução da relação de dispersão. Convém salientar que a abordagem linear não descreve a evolução temporal da amplitude, deixando isso a cargo da abordagem quase-linear ou também da abordagem não linear. No entanto, a determinação das taxas de absorção e amplificação já é suficiente para indicar a existência de ondas estáveis e instabilidades. Porém, a interação não linear pode ser decisiva, podendo causar a rápida supressão de instabilidades, ou ainda ser responsável pelo surgimento de novos tipos de instabilidades, não previstas pela teoria linear.

A importância direta do tensor dielétrico na absorção e amplificação de ondas, está fundamentada teoricamente a partir da relação de troca de energia entre onda e partículas. Este processo é descrito pelo teorema de Poynting [20], que regula a conservação de energia em um plasma na troca de energia entre correntes e campos:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} , \quad (1.14)$$

onde $\mathbf{S} = (c/4\pi)(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ é o vetor de Poynting.

Os campos acima são supostos terem a forma

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{A}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} , \quad (1.15)$$

o que leva, no desenvolvimento dos cálculos, ao desaparecimento das derivadas temporais das amplitudes $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \omega)$.

O tensor dielétrico é incluído na lei de conservação de energia com o uso da relação constitutiva (1.1). Após um complicado cálculo, que foi minuciosamente feito na referência [22], inclusive para amplitude variando lentamente no tempo, chega-se à lei de conservação de energia que relaciona as propriedades do meio, através do tensor dielétrico, com os campos

oscilantes:

$$\nabla \cdot \mathcal{S} = -\frac{\omega}{8\pi} \mathbf{E}^* \cdot \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}{}^{\text{aH}} \cdot \mathbf{E} , \quad (1.16)$$

onde

$$\mathcal{S} = \frac{c}{8\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) - \frac{\omega}{8\pi} \nabla_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{E}^* \cdot \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}{}^{\text{H}} \cdot \mathbf{E} \right) .$$

O símbolo * indica o complexo conjugado e os sobrescritos “H” e “aH” se referem às partes hermiteana e anti-hermiteana do tensor dielétrico, definidas como segue,

$$\epsilon_{ij}^{\text{H}} = \frac{1}{2} (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}^*) \quad (1.17a)$$

$$\epsilon_{ij}^{\text{aH}} = \frac{1}{2i} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}^*) , \quad (1.17b)$$

de modo que os componentes do tensor dielétrico podem ser escritos como $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{\text{H}} + i\epsilon_{ij}^{\text{aH}}$. É conveniente notar que na equação de conservação de energia, (1.16), não foi feita nenhuma restrição quanto à dependência espacial. Isso a torna válida tanto para plasmas homogêneos como para inomogêneos.

O lado direito de (1.16) faz o papel de fonte ou sumidouro de energia e, portanto, a troca de energia entre os campos e o plasma é descrita através da parte anti-hermiteana do tensor dielétrico. Logo, é esperado que a parte anti-hermiteana contenha apenas termos de interação onda-partículas, os quais se manifestam em forma de termos ressonantes. São as propriedades destes termos que regulam as taxas de absorção ou amplificação das ondas. A forma correta de $\epsilon_{ij}^{\text{aH}}$ é essencial para manter exatas as relações de troca de energia, dadas pelo teorema de Poynting.

1.4 Plasma inomogêneo

Em um plasma inomogêneo a primeira dificuldade que surge está relacionada com a dependência funcional em posição. Devido à inomogeneidade, a posição \mathbf{r}' em que ocorre a perturbação deve ser considerada e não apenas a sua posição relativa com relação a \mathbf{r} e,

portanto, a dependência $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, no tensor condutividade, não é mais válida. Isso implica numa séria conseqüência na transformada de Fourier da densidade de corrente, uma vez que o teorema da convolução não pode ser aplicado:

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)\} = \mathcal{F}\left\{\int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t')\right\} \neq \vec{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega).$$

Portanto, para um plasma inhomogêneo o tensor $\vec{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)$ **não é** a transformada de Fourier do tensor condutividade $\vec{\sigma}(\mathbf{r}, t)$. Nota-se que a hipótese de plasma estacionário foi mantida.

Muitos autores não levam em conta esta importante questão, e utilizam $\vec{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)$ correntemente como sendo a transformada de Fourier do tensor condutividade. Decorrem daí alguns resultados questionáveis, principalmente no que diz respeito à troca de energia entre as ondas e o plasma. Beskin, Gurevich e Istomin, trabalharam justamente no sentido de corrigir as inconsistências do uso de $\vec{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)$, e suas conseqüências na relação de troca de energia. Em 1987 esses autores publicaram um artigo [23] descrevendo uma possível solução para este problema: a denominada *transformação BGI*. Como resultado, a transformação BGI fornece a transformada de Fourier do tensor condutividade, de forma a manter válida a equação de conservação de energia (teorema de Poynting). Mais detalhes serão apresentados nas seções seguintes e principalmente na seção 2.2.

Um outro problema inerente à inhomogeneidade está na solução da equação da onda (1.3), uma vez que a solução do tipo onda plana (1.5) não é solução desta equação para um plasma inhomogêneo. Não será mais possível desconsiderar a variação espacial da amplitude das ondas e do vetor de onda \mathbf{k} . A aproximação WKB entra neste ponto justamente para incorporar consistentemente as variações espaciais em um tratamento local geral. Além da WKB mais duas aproximações serão brevemente revisadas: a localmente homogênea e a localmente inhomogênea.

1.4.1 Aproximação WKB

Para um plasma onde os parâmetros variam lentamente com a posição, dentro da escala típica de comprimento de onda, espera-se que localmente (num ponto específico), o plasma se comporte como sendo homogêneo. No entanto, os efeitos da variação da amplitude da

onda devem ser considerados localmente e, em razão disso, a decomposição em ondas planas deve ser substituída por uma solução mais geral. Esta é a idéia básica da aproximação WKB, desenvolvida por Wentzel, Kramers e Brillouin para resolução de problemas em mecânica quântica [6].

Ao ser feita a transformada de Fourier da equação (1.3), apenas na variável t , conforme (1.15), a equação da onda será reescrita em termos de \mathbf{r} e ω da seguinte forma:

$$\nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)] - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{4\pi i\omega}{c^2} \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega). \quad (1.18)$$

As transformadas nas variáveis espaciais não foram realizadas por causa das dificuldades que resultam deste procedimento, para um plasma inhomogêneo, conforme já foi comentado. Neste momento é conveniente introduzir a aproximação WKB⁴.

Fundamentalmente, esta aproximação usa como solução para as quantidades perturbadas (campos e função distribuição) uma forma *eikonal*⁵,

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{a}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\psi(\mathbf{r})}. \quad (1.19)$$

A quantidade $\psi(\mathbf{r})$ é conhecida como a *eikonal* da teoria WKB [7], e $\mathbf{a}(\mathbf{r}, \omega)$ é a amplitude da onda, que varia espacialmente muito lentamente em relação à variação da *eikonal*, seguindo a relação

$$\left| \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial x_i} \right| \gg \frac{1}{|\mathbf{a}(\mathbf{r}, \omega)|} \left| \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r}, \omega)}{\partial x_i} \right| \sim \frac{1}{L},$$

onde x_i é coordenada e L é a medida da variação espacial típica da amplitude da onda. Para um plasma homogêneo $\psi(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, que resulta num campo com a tradicional forma de onda plana.

Uma das condições de validade desta aproximação requer que os comprimentos de onda característicos λ sejam bem menores que a escala típica de comprimento da variação espacial

⁴ A referência [7] apresenta um estudo mais detalhado a respeito do emprego e restrições da WKB em física dos plasmas.

⁵ O termo *eikonal* provém da palavra grega $\epsilon\iota\kappa\tilde{\omega}\nu$ que significa *imagem*, e refere-se a uma quantidade fundamental na ótica geométrica [24].

da amplitude dos campos. Esta é a condição de plasma fracamente inomogêneo. A outra condição impõe que as taxas de amortecimento ou amplificação sejam bem menores que a contribuição oscilante. Isso implica que a parte anti-hermiteana do tensor dielétrico, responsável pelo amortecimento ou amplificação das ondas (troca de energia onda-plasma), seja bem menor que a parte hermiteana. Resumindo, as duas condições de validade da WKB são:

$$\lambda \ll L \quad (1.20a)$$

$$|\epsilon_{ij}^{\text{aH}}| \ll |\epsilon_{ij}^{\text{H}}|. \quad (1.20b)$$

1.4.2 Aproximações locais

Na subseção anterior vimos como as perturbações nos campos e na função distribuição podem ser tratadas para incluir os efeitos da inomogeneidade. Nesta subseção, veremos outras duas maneiras de abordar este problema para uma formulação geral de plasma inomogêneo.

A aproximação localmente homogênea⁶ consiste basicamente em considerar a dependência espacial dos parâmetros apenas de uma forma paramétrica. Os valores dos parâmetros se alteram espacialmente mas, ponto a ponto, os efeitos dos gradientes não são levados em conta. Isso é válido se o comprimento de onda λ é muito menor que o comprimento típico L da variação espacial dos parâmetros. Nesta abordagem, portanto, ponto a ponto o plasma pode ser considerado homogêneo. Tanto as ondas como a função distribuição perturbada (perturbação da função distribuição de equilíbrio) podem ser consideradas como ondas planas.

A aproximação localmente homogênea propicia que todo tratamento adotado para um plasma homogêneo possa ser empregado. O tensor dielétrico obtido possui características de plasma homogêneo e a dependência espacial dos parâmetros aparece implicitamente dentro do tensor. Em cada ponto a relação de dispersão de um plasma homogêneo pode ser usada.

A aproximação localmente inomogênea difere da localmente homogênea por incluir os efeitos dos gradientes dos parâmetros, sendo assim uma abordagem mais acurada.

⁶ Mais detalhes desta aproximação e suas referências básicas encontram-se na referência [25].

A primeira e a mais clássica maneira de abordar plasmas inhomogêneos com efeitos localmente inhomogêneos é aquela desenvolvida por Mikhailovskii na referência [26]. O método⁷ baseia-se essencialmente em considerar rigorosamente válida a desigualdade $\lambda \ll L$, a tal ponto de poder tratar os campos e a função distribuição perturbada como ondas planas (equação 1.6). Assumindo-se esta hipótese, todo o procedimento para um plasma homogêneo pode ser usado. O tensor dielétrico é obtido pelo procedimento tradicional, e escrito em termos da função distribuição de equilíbrio. A grande diferença do método ocorre com a incorporação dos efeitos dos gradientes, os quais aparecem explicitamente no tensor dielétrico. São termos de gradientes até primeira ordem oriundos de uma expansão da função distribuição de equilíbrio em torno da posição do seu centro guia⁸. Os modos de oscilação do plasma podem ser então obtidos a partir da relação de dispersão de plasma homogêneo (1.12), substituindo o tensor $\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega)$ por $\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$,

O principal problema desse tratamento surge quando é utilizada a igualdade (1.8) para tratar plasmas inhomogêneos. Para plasmas com essa característica, tal igualdade é uma aproximação, que tem conseqüências sobre as propriedades de simetria do tensor dielétrico (simetria de Onsager, 1931) e sobre as relações de troca de energia entre as ondas e o plasma. No entanto, usando-se a aproximação (1.8), mantém-se o procedimento de plasma homogêneo, que resulta na relação de dispersão (1.12). Assim, esse tratamento conduz ao uso da mesma relação de dispersão obtida para um plasma homogêneo, mesmo para uma configuração inhomogênea.

As principais características da abordagem localmente inhomogênea podem ser resumidas como segue:

- os campos e a função distribuição perturbada são tratados como ondas planas;
- a relação entre os campos e a corrente, (1.8), é mantida válida;
- a relação de dispersão para um plasma homogêneo, (1.12), pode ser utilizada;

⁷ Mais detalhes desse método estão apresentados no capítulo seguinte, na subseção 2.3.1. Uma análise bastante completa desse assunto encontra-se em [27].

⁸ Centro guia é a posição do centro da órbita circular que uma partícula carregada descreve na presença de campo magnético (ver capítulo 4).

- o tensor dielétrico (a) possui explicitamente os efeitos da inomogeneidade da função distribuição de equilíbrio; (b) apresenta termos não ressonantes na parte anti-hermiteana, (c) não satisfaz a simetria de Onsager.

Perante as conseqüências da utilização da relação (1.8) em um plasma inomogêneo, se faz necessário o uso de um outro método para tratar plasmas com esta característica. É fundamental que o problema da variação espacial das perturbações seja encarado consistentemente. A solução em ondas planas deve ser deixada de lado, e ser substituída por uma solução que leve em conta a variação espacial. Esta foi a idéia essencial que resultou na transformação BGI, desenvolvida tendo como base a aproximação WKB. No próximo capítulo esse assunto será retomado com mais detalhes.

1.5 O sistema de equações Vlasov-Maxwell

Para uma descrição geral, o plasma em estudo é completamente ionizado⁹ e composto por diferentes espécies de partículas, denotadas pelo subscrito α , com carga elétrica q_α e massa m_α . Cada espécie de partícula é descrita microscopicamente pela sua correspondente função distribuição $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. A diferencial $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)d\mathbf{r}d\mathbf{p}$ pode ser interpretada como a probabilidade de encontrar uma partícula da espécie α , no instante t , no volume $d\mathbf{r}$ ao redor de \mathbf{r} , com um momento entre \mathbf{p} e $\mathbf{p}+d\mathbf{p}$. A função distribuição fornece uma ampla descrição do sistema e, a partir dela, pode-se deduzir todas as quantidades do plasma com interesse físico (são os chamados *momentos da função distribuição*, relacionados com quantidades físicas de interesse [15, 16]).

A evolução espaço-temporal da $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ é governada pela equação de Boltzmann¹⁰

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + q_\alpha \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \left[\frac{\delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\delta t} \right]_{col}, \quad (1.21)$$

⁹ Um plasma é completamente ionizado quando não há partículas neutras e a carga elétrica total dos íons é igual à dos elétrons.

¹⁰ Detalhes da dedução da equação de Boltzmann e referências a respeito deste assunto, podem ser encontrados em [21]. Em [28] consta uma dedução totalmente estatística bastante detalhada.

onde $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\gamma m_\alpha$, com $\gamma = \sqrt{1 + p^2/m_\alpha^2 c^2}$, ficando implícito que γ depende da espécie de partícula, e $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ são as médias macroscópicas dos campos microscópicos aos quais estão submetidas as partículas do plasma. Somente interações eletromagnéticas foram consideradas (força de Lorentz). O termo do lado direito representa a variação temporal da função distribuição devido às colisões entre as partículas. Estatisticamente, é um termo que contém as correlações entre as partículas que constituem o plasma, a fim de contemplar a interação eletromagnética existente entre elas. É possível escrever este termo como uma função distribuição de duas partículas [12],

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) = f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f_\beta(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) + g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) ,$$

cuja diferencial $f_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{p} d\mathbf{p}'$ pode ser interpretada como a probabilidade de encontrar uma partícula da espécie α , no instante t , no volume $d\mathbf{r}$ ao redor de \mathbf{r} , com um momento entre \mathbf{p} e $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$, estando a partícula da espécie β , no instante t , no volume $d\mathbf{r}'$ ao redor de \mathbf{r}' , com um momento entre \mathbf{p}' e $\mathbf{p}' + d\mathbf{p}'$. A função $g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}', t)$ fornece a correlação estatística entre as partículas das espécies α e β , e também entre partículas da mesma espécie ($\beta = \alpha$). Esta função distribuição de duas partículas é também governada pela equação de Boltzmann, fazendo surgir do lado direito da mesma uma função distribuição de três partículas. Para esta, por sua vez, ocorre o mesmo, e à medida que se aprimora mais as correlações (ordens maiores), uma cadeia de N equações é formada, sendo N o número total de partículas constituintes do plasma. Na prática, é um problema insolúvel. É necessário, então, cortar esta cadeia de equações fazendo-se um modelo para o plasma.

As funções correlação entre partículas podem ser ordenadas em termos do parâmetro de plasma

$$g = \frac{1}{n_0 \lambda_D^3} ,$$

onde n_0 é a densidade de partículas e λ_D é o comprimento de Debye. A argumentação para tal ordenamento é a seguinte. Para que a interação entre as partículas resulte num comportamento coletivo, é necessário que haja muitas delas no interior da esfera de Debye

[15], implicando que $n_0\lambda_D^3 \gg 1 \Rightarrow g \ll 1$. Portanto, supõe-se que a correlação entre duas partículas seja da ordem de g , que a menos significativa interação entre três partículas seja da ordem de g^2 , e assim sucessivamente. À função distribuição de uma espécie de partícula é atribuída ordem 1. Os valores típicos do parâmetro g são da ordem de 10^{-7} para plasmas de equipamentos de fusão e 10^{-4} para plasmas espaciais [25]. Portanto, é possível desprezar o termo de correlação no termo colisional da equação de Boltzmann.

Um outro contexto em que a interação entre as partículas pode ser desprezada, diz respeito à frequência típica das ondas a qual se está interessado em estudar. À medida que uma onda se propaga no plasma, a função distribuição das partículas se altera, no entanto, a tendência do equilíbrio termodinâmico conduz a função distribuição novamente ao estado de equilíbrio (processo conhecido como relaxação), que pode ser diferente do original devido às interações onda-partícula. Este novo estado de equilíbrio é alcançado pelas colisões, que possuem uma frequência típica média ν , correspondendo a um tempo médio entre colisões designado por \bar{t}_{col} , que depende dos tipos de partículas e parâmetros do plasma. Se o estudo for realizado para ondas com frequências consideravelmente altas, tal que o período de oscilação T_{onda} (com $\omega = 2\pi/T_{onda}$) seja bem menor que o tempo mínimo médio entre colisões \bar{t}_{col}^{min} , significa que a onda provoca alterações no estado de equilíbrio significativamente durante um tempo em que as colisões não são importantes. Desta forma, portanto, os efeitos colisionais podem ser desprezados, se as ondas em consideração cumprirem

$$T_{onda} \ll \bar{t}_{col}^{min} \Rightarrow \omega \gg 2\pi\nu^{max},$$

onde ν^{max} é a frequência típica média máxima entre colisões. Esta condição é cumprida com folga para plasmas de fusão em laboratório, onde $\bar{t}_{col}^{min}/T_{onda} \sim 6 \times 10^6$, e espaciais, onde $\bar{t}_{col}^{min}/T_{onda} \sim 2 \times 10^4$ [25].

Ao serem desprezadas as correlações entre duas ou mais partículas, se está propondo um modelo para o plasma que possibilite a interrupção da cadeia infinita de equações. Este modelo propõe que a função distribuição de uma espécie de partícula não é afetada pela

correlação entre partículas; formalmente significa

$$\left[\frac{\delta f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\delta t} \right]_{col} \simeq 0 .$$

A equação de Boltzmann (1.21) se reduz à chamada *equação de Vlasov* para este modelamento, e será esta equação a usada para descrever a evolução espaço-temporal da função distribuição $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. É uma equação que acopla os campos com a função distribuição e, portanto, não pode ser usada sozinha para uma descrição completa do sistema. As equações de Maxwell também devem ser satisfeitas, e igualmente acoplam os campos com a função distribuição através da densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ e da densidade de carga $\rho(\mathbf{r}, t)$. Este conjunto de equações é chamado de sistema Vlasov-Maxwell, explicitamente escrito abaixo

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + q_\alpha \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0 \quad (1.22a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \sum_{\alpha} q_\alpha \int d^3p f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (1.22b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.22c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.22d)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_\alpha \int d^3p \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) . \quad (1.22e)$$

A densidade de corrente e a densidade de carga, expressas em termos da função distribuição, são dadas respectivamente por

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_\alpha \int d^3p f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (1.23a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_\alpha \int d^3p \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) , \quad (1.23b)$$

sendo o somatório em α realizado sobre todas as espécies de partículas que constituem o plasma.

O sistema Vlasov-Maxwell é fortemente acoplado e não linear, e todas as equações devem ser satisfeitas simultaneamente. Determinar a partir dele quais são as flutuações possíveis dos campos e da função distribuição, para um determinado plasma com características co-

nhecidas, é uma tarefa impossível dentro das atuais limitações algébricas e computacionais (exceto em algumas situações simplificadas). No entanto, é possível resolvê-lo se as flutuações forem consideradas pequenas perturbações em torno da situação de equilíbrio do plasma. Este processo é conhecido como linearização, e será empregado no sistema Vlasov-Maxwell.

1.5.1 Linearização do sistema Vlasov-Maxwell

Com a linearização do sistema Vlasov-Maxwell será possível expressar a função distribuição perturbada em termos dos campos perturbados e da função distribuição de equilíbrio. Isso permitirá encontrar uma expressão geral para o tensor dielétrico, que será escrito em termos das órbitas não perturbadas das partículas e da função distribuição de equilíbrio.

As flutuações do sistema que serão estudadas, são pequenas perturbações em torno da situação de equilíbrio, sendo, então, possível escrever

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (1.24a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) \quad (1.24b)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) . \quad (1.24c)$$

As quantidades com índice inferior “0” se referem ao equilíbrio (sem propagação de ondas) e as quantidades com índice inferior “1” indicam uma perturbação de pequena amplitude (presença de ondas) com relação à situação de equilíbrio, de tal forma que se cumpram as desigualdades $f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \ll f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ e $|\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)| \ll |\mathbf{B}_0(\mathbf{r})|$. O campo magnético externo é representado por $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$. O plasma é considerado neutro globalmente e localmente no seu estado de equilíbrio sendo, portanto, $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0$. Nota-se que as quantidades de equilíbrio são supostas estacionárias, ou seja, independentes do tempo.

Substituindo (1.24) em (1.22), o sistema Vlasov-Maxwell terá a seguinte forma em ordem

zero:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \frac{q_{\alpha}}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r})] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0 \quad (1.25a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3 p \mathbf{v} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (1.25b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = 0 . \quad (1.25c)$$

Este sistema resume as informações sobre o plasma na situação de equilíbrio. Ele estabelece a relação que deve ser satisfeita entre a microscopia do meio, através da função distribuição de equilíbrio inhomogênea, e o campo magnético de equilíbrio, também inhomogêneo.

Desprezando-se os termos não lineares, compostos por produtos de quantidades perturbadas, obtém-se o seguinte sistema Vlasov-Maxwell de ordem um:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \\ - q_{\alpha} \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (1.26a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.26b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3 p \mathbf{v} f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (1.26c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3 p f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (1.26d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) = 0 , \quad (1.26e)$$

sendo

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3 p f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (1.27)$$

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3 p \mathbf{v} f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (1.28)$$

a densidade de carga e a densidade de corrente perturbadas.

Uma vez obtido o sistema de ordem um, é necessário encontrar a solução para a $f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ em termos dos campos perturbados. Para isso, utilizar-se-á um método muito empregado

em física dos plasmas, conhecido como *método das características*¹¹ [29]. De uma maneira geral, o método consiste em resolver uma dada equação diferencial parcial sobre uma determinada curva, chamada de curva característica, que a torne uma equação diferencial total, que pode ser integrada. A seguir, o método será aplicado para a obtenção de $f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, sem um detalhamento algébrico.

A derivada total da $f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ é

$$\frac{df_{\alpha 1}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t')}{dt'} = \frac{\partial f_{\alpha 1}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t')}{\partial t'} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \cdot \nabla f_{\alpha 1}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t') + \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_{\alpha 1}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t') , \quad (1.29)$$

onde \mathbf{r}' , \mathbf{p}' e t' são as coordenadas de uma curva característica arbitrária. Se, no entanto, esta curva característica for exatamente a trajetória das partículas na situação de equilíbrio (órbitas não perturbadas) é possível integrar a equação (1.29).

As órbitas não perturbadas são as soluções das equações correntes para a trajetória de partículas carregadas na presença de campo magnético:

$$\frac{d\mathbf{r}'(t')}{dt'} = \mathbf{v}'(t') = \frac{\mathbf{p}'(t')}{\gamma' m_{\alpha}} \quad (1.30a)$$

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \frac{q_{\alpha}}{\gamma' m_{\alpha} c} [\mathbf{p}' \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}')] . \quad (1.30b)$$

Ao substituir as órbitas (1.30) na derivada total (1.29), pode-se comparar a equação resultante com a equação de Vlasov (1.26a). Facilmente encontra-se a equação para a derivada total de $f_{\alpha 1}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t')$

$$\frac{df_{\alpha 1}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t')}{dt'} = -q_{\alpha} \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{r}', t') + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}', t') \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') ,$$

que pode ser integrada, resultando

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t') \Big|_{t'=t} - f_{\alpha 1}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t') \Big|_{t'=-\infty} = -q_{\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{r}', t') + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}', t') \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') .$$

Se as condições de contorno forem tais que $f_{\alpha 1}(\mathbf{r}'(t' \rightarrow -\infty), \mathbf{p}'(t' \rightarrow -\infty), t' \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$,

¹¹ Um bom resumo deste método encontra-se em [22].

$\mathbf{r}'(t' = t) = \mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{p}'(t' = t) = \mathbf{p}(t)$, a forma final para a função distribuição perturbada será

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -q_{\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{r}', t') + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}', t') \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') , \quad (1.31)$$

com a integral calculada sobre as órbitas não perturbadas das partículas.

A $f_{\alpha 0}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ é uma função determinada a partir de um modelamento do equilíbrio do plasma. O método das características, aplicado à equação de Vlasov de ordem zero, fornece uma condição que deve ser cumprida na situação de equilíbrio. Ou seja, a função distribuição de equilíbrio, regida pela equação de Vlasov (1.25a), deve obedecer sobre as órbitas não perturbadas à seguinte equação diferencial,

$$\frac{df_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t')}{dt'} = 0 . \quad (1.32)$$

Isso significa que a $f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t')$ é constante sobre as órbitas não perturbadas (1.30), devendo ser, portanto, função das constantes de movimento¹² das mesmas. Como nota-se na equação (1.31), a $f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t')$ é fundamental para a determinação da função distribuição perturbada. Assim, é necessário a determinação das constantes de movimento, tarefa essa reservada para o próximo capítulo.

A equação para $f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, por si própria, não conduz a resultados práticos, pois os campos não são conhecidos. Mas, com uma simples análise da equação (1.28) e lembrando da relação constitutiva (1.1), é possível usar (1.31) para determinar o tensor condutividade e, conseqüentemente, o tensor dielétrico. A seção seguinte será dedicada a isso.

1.5.2 Determinação da forma geral do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$

Sendo $\mathbf{J}_1(\mathbf{k}, \omega)$ a transformada de Fourier espaço-temporal da densidade de corrente $\mathbf{J}_1(\mathbf{r}, t)$, a sua transformada inversa em ω (equação (1.6) sem a integral em ω) é

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \mathbf{J}_1(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} . \quad (1.33)$$

¹² Na seção 2.3 será retomado o assunto referente à dependência que a função distribuição de equilíbrio possui das constantes de movimento.

A transformada de Fourier temporal pode também ser escrita em termos da transformada de Fourier temporal da função distribuição perturbada, a partir de (1.28):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{J}_1(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} &= \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3 p \mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \\ \mathbf{J}_1(\mathbf{r}, \omega) &= \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3 p \mathbf{v} f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \omega) . \end{aligned} \quad (1.34)$$

A linearização da relação constitutiva (1.1) resulta em

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \overleftrightarrow{\sigma}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}', t') , \quad (1.35)$$

onde $\overleftrightarrow{\sigma}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ é o tensor condutividade do equilíbrio.

O procedimento que segue é crucial para as propriedades do tensor condutividade de equilíbrio. Para um plasma fracamente inhomogêneo, considera-se que o tensor condutividade varia suavemente em torno de cada ponto, de forma que a dependência $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ seja aproximadamente válida. Assim, o teorema da convolução pode ser aplicado, resultando em uma relação do tipo (1.8), que é aproximadamente válida para um plasma inhomogêneo. Nesse caso, o tensor condutividade possuirá uma dependência paramétrica da posição. Basicamente, o procedimento descrito é o mesmo que é usado em um plasma homogêneo, onde as flutuações são tratadas como ondas planas, (1.6), e o teorema da convolução é aplicado. Assim, a transformada de Fourier de $\mathbf{J}_1(\mathbf{r}, t)$ em termos do tensor condutividade resulta

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{k}, \omega) = \overleftrightarrow{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) . \quad (1.36)$$

O índice inferior “0” do tensor condutividade de equilíbrio foi omitido. No entanto, adotou-se o índice superior “0” para indicar que este tensor, acima mostrado, foi derivado com o uso da aproximação de onda plana e da aplicação do teorema da convolução, mesmo o plasma sendo inhomogêneo. Representa, portanto, uma aproximação se o plasma for inhomogêneo. Além disso, o referido tensor **não** corresponde à transformada de Fourier correta do tensor condutividade. A dependência em \mathbf{r} é mantida para caracterizar a inhomogeneidade do plasma.

Substituindo (1.36) em (1.33) encontra-se a transformada de Fourier temporal em termos do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$,

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.37)$$

Na expressão para $f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, dada pela equação (1.31), os campos serão escritos em termos de suas transformadas de Fourier¹³, tal como (1.6), resultando

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -q_\alpha \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3k \int_{-\infty}^t dt' \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega') + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}_1(\mathbf{k}, \omega') \right] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}' - \omega't')} \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}'), \quad (1.38)$$

lembrando que $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'(t')$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t')$ e $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'(t')$. Tomando apenas a transformada de Fourier temporal (equação (1.5) sem a integral em d^3r) da equação acima tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) e^{i\omega t} = -q_\alpha \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3k \int_{-\infty}^t dt' \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega') + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}_1(\mathbf{k}, \omega') \right] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}' - \omega't')} e^{i\omega t} \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}').$$

O lado esquerdo é a transformada de Fourier temporal da função distribuição perturbada. Multiplicando o lado direito por $\exp(-i\omega't) \exp(i\omega't) = 1$ e rearranjando as exponenciais, encontra-se

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \omega) = -q_\alpha \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} \int_{-\infty}^t dt' \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega') + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}_1(\mathbf{k}, \omega') \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}' - \omega'(t'-t)]}. \quad (1.39)$$

Fazendo a substituição de variáveis $\tau = t' - t \Rightarrow d\tau = dt'$, com $-\infty \leq \tau \leq 0$, as variáveis \mathbf{r}' , \mathbf{p}' e \mathbf{v}' passam a depender de τ . No limite superior de integração $\mathbf{r}'(\tau = 0) = \mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{p}'(\tau = 0) = \mathbf{p}(t)$. A integral em t' é substituída por uma integral em τ , respeitando-se os novos limites de integração, e a quantidade $\omega'(t' - t)$ torna-se $\omega'\tau$, o que permite calcular

¹³ Os detalhes deste procedimento foram extraídos da referência [25].

facilmente a integral em t

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} = 2\pi \delta(\omega - \omega') .$$

Sendo calculada a integral em t , a integral em ω' é realizável usando o resultado acima, o que leva a $\omega' \rightarrow \omega$, devido à delta de Dirac. Após o cálculo destas integrais, a equação (1.39) resulta

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \omega) = -q_{\alpha} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) + \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}_1(\mathbf{k}, \omega) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega\tau)} .$$

É possível ainda melhorar a forma da equação acima. Usando a transformada espaço-temporal da lei de Ampère, (1.26b), para escrever as amplitudes das flutuações magnéticas em termos das amplitudes do campo elétrico, obtém-se

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \omega) = -q_{\alpha} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k \int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' \right) \overleftrightarrow{\mathbf{1}} + \frac{1}{\omega} \mathbf{v}' \mathbf{k} \right] \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) \right\} \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega\tau)} .$$

Substituindo a equação acima em (1.34), e inserindo o produto $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 1$ a fim de comparar com (1.37), encontra-se

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d^3 p \mathbf{v} \int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' \right) \overleftrightarrow{\mathbf{1}} + \frac{1}{\omega} \mathbf{v}' \mathbf{k} \right] \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) \right\} \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \omega\tau]} . \quad (1.40)$$

O passo final é comparar a equação (1.40) com (1.37) e, assim, determinar a forma geral do tensor $\overleftrightarrow{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$:

$$\overleftrightarrow{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = -\sum_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int d^3 p \mathbf{v} \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\left(1 - \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' \right) \overleftrightarrow{\mathbf{1}} + \frac{1}{\omega} \mathbf{v}' \mathbf{k} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \omega\tau]} , \quad (1.41)$$

onde $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'(\tau)$ ($\mathbf{v}' = \mathbf{v}'(\tau)$) e $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\tau)$ são as órbitas não perturbadas das partículas, cumprindo-se as condições $\mathbf{v}'(\tau = 0) = \mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{r}'(\tau = 0) = \mathbf{r}(t)$. O tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}{}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ será definido a partir da relação (1.10):

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}{}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} + i \frac{4\pi}{\omega} \overset{\leftrightarrow}{\sigma}{}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega). \quad (1.42)$$

A forma geral do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}{}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ impõe que sejam determinadas as órbitas não perturbadas das partículas. Isso pode não ser uma tarefa simples. Se o campo magnético de equilíbrio é homogêneo, com razoável simplicidade se pode determiná-las. Todavia, se o campo externo apresenta gradientes, as integrais das órbitas em (1.30) podem ser bastante complicadas, dificultando em demasia a obtenção de uma forma analítica exata das órbitas das partículas. O capítulo seguinte apresentará essa discussão, embora sem maiores detalhes. Nota-se também a necessidade de modelar o equilíbrio termodinâmico do plasma, especificando-se a forma da função distribuição de equilíbrio $f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$.

Apesar do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}{}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ não ser a transformada de Fourier do tensor dielétrico, ele é fundamental. Através deste tensor é que se chegará no tensor dielétrico $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, que descreve corretamente as propriedades do plasma na presença de flutuações de campo. Este novo tensor, que é a transformada de Fourier do tensor dielétrico, é chamado de *tensor dielétrico efetivo*, e sua consecução é feita com a aplicação da transformação BGI em $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}{}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. No próximo capítulo este assunto será retomado.

2. O Tensor Dielétrico Efetivo

2.1 Introdução

O presente capítulo tem como finalidade principal revisar, não de uma forma detalhada, as principais questões relacionadas com o chamado tensor dielétrico efetivo, desde sua obtenção até a análise de suas propriedades. A segunda seção é destinada ao desenvolvimento dos principais procedimentos para se chegar na chamada transformação BGI, a qual é aplicada no tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. São apresentadas a sua forma matemática aproximada e a sua forma completa. A aplicação da transformação BGI resulta no denominado tensor dielétrico efetivo. Nas seções seguintes, estão presentes revisões dos trabalhos de Caldela [27] e Gaelzer [25]. O primeiro dedicou seu estudo à absorção e amplificação de ondas em um plasma com densidade e/ou temperatura inomogêneas, imerso em um campo magnético de equilíbrio homogêneo. Gaelzer estudou a absorção e amplificação de ondas em um plasma com densidade e temperatura homogêneas imerso em um campo inomogêneo. As características básicas de cada um destes estudos são brevemente apresentadas, dando ênfase na obtenção do tensor dielétrico efetivo, e suas principais características. A última seção deste capítulo foi reservada para um resumo das principais propriedades do tensor dielétrico efetivo.

2.2 A transformação BGI

Um dos pontos positivos da transformação BGI está no fato de que ela foi capaz de corrigir as características não adequadas do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, citadas no capítulo anterior. Fundamentalmente ela consiste em considerar uma forma mais geral para a solução da equação da onda, ao invés de uma onda plana. Esta forma mais geral é a chamada forma

eikonal, e foi apresentada no capítulo anterior na equação (1.19).

A transformada de Fourier temporal da densidade de corrente perturbada, supondo-se o plasma estacionário, pode ser obtida da relação constitutiva (1.35),

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}, \omega) = \int d^3r' \overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}', \omega). \quad (2.1)$$

Neste momento não é possível realizar a transformada de Fourier espacial da densidade de corrente, devido à dependência não homogênea do tensor condutividade de equilíbrio. Entretanto, supõe-se válida a seguinte igualdade

$$\overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \overleftrightarrow{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}, \quad (2.2)$$

onde o $\overleftrightarrow{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ foi definido em (1.36) e não corresponde à transformada de Fourier do tensor condutividade, para um plasma inhomogêneo. A hipótese de considerar válida uma relação do tipo (2.2), mesmo que o tensor $\overleftrightarrow{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ não seja a transformada de Fourier do tensor condutividade, é aceitável somente para um plasma fracamente inhomogêneo. Nesse caso, a dependência espacial do tensor condutividade é praticamente a mesma de um plasma homogêneo, embora dependa fracamente da posição, tal que se possa aproximar $\overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \approx \overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega)$.

Relembrando o que foi visto no capítulo anterior, a abordagem adotada por Mikhailovskii na referência [26] também supõe válida a igualdade (2.2), entretanto mantém toda sua abordagem considerando que $\overleftrightarrow{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ é a transformada de Fourier do tensor condutividade, de forma a manter inalterada a relação (1.36). Uma relação com a forma da igualdade (1.36) é necessária, para que os modos de oscilação possam ser determinados a partir da relação de dispersão. Mas, para que a troca de energia entre onda e partículas, (1.16), seja consistentemente satisfeita, é indispensável que o tensor $\overleftrightarrow{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ seja substituído pelo tensor $\overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, que é a transformada de Fourier do tensor condutividade. Beskin, Gurevich e Istomin [23] desenvolveram um método, chamado de transformação BGI, que permite determinar o $\overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ a partir de $\overleftrightarrow{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. Os principais pontos desta transformação serão expostos a seguir. O desenvolvimento completo, que aparece no clássico trabalho de Beskin, Gurevich e Istomin, pode ser também encontrado na referência [27].

Substituindo (2.2) em (2.1) obtém-se

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3r' \overset{\leftarrow}{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}', \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} . \quad (2.3)$$

Este é o momento em que não mais utilizar-se-á ondas planas como solução para os campos, mas sim a forma *eikonal*. O grande ganho deste procedimento é levar em conta a variação espacial das amplitudes das ondas. Assim, introduzindo a forma *eikonal* (1.19) do campo elétrico perturbado em (2.3), resulta

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3r' \overset{\leftarrow}{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r}', \omega) e^{i[\psi(\mathbf{r}') + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}, \quad (2.4)$$

(o “chapéu” indica a amplitude da solução *eikonal*).

Mantendo-se a hipótese de plasma fracamente inhomogêneo, é possível expandir em série de Taylor a *eikonal* $\psi(\mathbf{r}')$, em torno de \mathbf{r} . Em seguida, depois de substituída a expansão em (2.4), nota-se que a contribuição significativa para a integral ocorre para valores de \mathbf{k} próximos a $\nabla\psi(\mathbf{r})$. Define-se, então, a quantidade

$$\mathbf{k}_0(\mathbf{r}) \equiv \nabla\psi(\mathbf{r}) . \quad (2.5)$$

O desenvolvimento tem prosseguimento expandindo-se o tensor $\overset{\leftarrow}{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ em torno da quantidade $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$. A equação da onda (1.18) é escrita em termos dos seus componentes, escrevendo-se o campo elétrico perturbado na forma *eikonal*

$$E_{1i}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{E}_{1i}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\psi(\mathbf{r})} . \quad (2.6)$$

Como nesse tipo de solução a amplitude dos campos depende da posição, todas as derivadas da equação da onda devem ser realizadas.

Considerando que os valores típicos de comprimento de onda são da ordem de $1/k_0$, reescreve-se as condições de validade da WKB, dadas por (1.20), em termos dos parâmetros

$$\mu \equiv \frac{1}{k_0 L} \ll 1 \quad \text{e} \quad p \equiv \frac{|\epsilon_{ij}^{\text{aH}}|}{|\epsilon_{ij}^{\text{H}}|} \approx \frac{|\mathbf{k}_i|}{|\mathbf{k}_r|} \ll 1 .$$

Depois de efetuadas as derivadas de (2.6) contidas no lado esquerdo da equação da onda, os componentes do campo são expandidos em potências do parâmetro μ , como segue:

$$\hat{E}_{1i} = \mu^0 \bar{E}_{1i}^0 + \mu^1 \bar{E}_{1i}^1 + \mu^2 \bar{E}_{1i}^2 + \dots \quad .$$

O processo tem continuidade ordenando-se rigorosamente todos os termos do lado esquerdo da equação da onda, segundo a ordem de grandeza em μ .

O lado direito da equação da onda (1.18) é substituído por (2.3), e um tratamento semelhante ao do lado esquerdo é empregado. As diferenças ficam por conta do uso da condição de pequena absorção $p \ll 1$, e à necessidade de cálculo de várias integrais.

Depois que a equação da onda está completamente ordenada em potências de μ , verifica-se que em ordem zero, $\mu \rightarrow 0$ (plasma homogêneo), a equação que deve ser satisfeita para os componentes do campo é exatamente a relação de dispersão para um plasma homogêneo, dada por (1.12). Nota-se que neste caso a transformada de Fourier do tensor dielétrico é o próprio tensor definido em (1.42), para o caso homogêneo.

Levando em conta os termos até ordem μ , é possível mostrar que estes termos podem ser colocados na forma da lei de conservação de energia (1.16), que regula a troca de energia entre a onda e as partículas do plasma. Entretanto, e este é o diferencial do já citado trabalho de Beskin, Gurevich e Istomin, a parte anti-hermiteana do tensor $\overset{\leftarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ não aparece sozinha como em (1.16). Somada à parte anti-hermiteana tradicionalmente obtida surge uma correção, abaixo mostrada:

$$\nabla \cdot \mathcal{S} = -\frac{\omega}{8\pi} \mathbf{E}^* \cdot \left[\overset{\leftarrow}{\epsilon}^{\text{aH}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_l \frac{\partial^2}{\partial k_l \partial x_l} \overset{\leftarrow}{\epsilon}^{\text{0H}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)}_{\text{Correção}} \right] \cdot \mathbf{E} \quad (2.7)$$

onde k_l e x_l são os componentes do vetor de onda e do vetor posição, respectivamente. Evidentemente, para um plasma homogêneo a correção se anula, e (2.7) recai em (1.16). O que Beskin, Gurevich e Istomin concluíram foi que, para um plasma inhomogêneo, a parte anti-hermiteana que descreve a correta troca de energia entre onda e partículas não é a do

tensor $\overset{\leftarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, mas sim a do denominado *tensor dielétrico efetivo*, dado por

$$\overset{\leftarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \overset{\leftarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) + \frac{i}{2} \sum_l \frac{\partial^2}{\partial k_l \partial x_l} \overset{\leftarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega). \quad (2.8)$$

Portanto, para um plasma inhomogêneo, é o tensor dielétrico efetivo que deve ser utilizado na relação de dispersão (1.12), para que os modos de oscilação e suas respectivas taxas de absorção e amplificação sejam corretamente determinados. À medida que mais ordens de grandeza do parâmetro μ são consideradas, derivadas de mais alta ordem estarão presentes, sendo possível a descrição de inhomogeneidades mais acentuadas. A forma do tensor dielétrico efetivo apresentada acima é, na realidade, uma aproximação da sua forma completa¹,

$$\overset{\leftarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k' \int d^3 \eta \overset{\leftarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}/2, \mathbf{k}', \omega) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\eta}}, \quad (2.9)$$

que inclui internamente todas as derivadas em k_l e x_l existentes. Essa transformação é conhecida como *transformação BGI*, e fornece a transformada de Fourier espaço-temporal do tensor dielétrico.

Uma expansão de $\overset{\leftarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}/2, \mathbf{k}', \omega)$ em série de Taylor em torno do ponto \mathbf{r} , conduz à seguinte forma para o tensor dielétrico efetivo, explicitamente escrito em termos das derivadas

$$\overset{\leftarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \sum_l \frac{\partial^{2n}}{\partial^n k_l \partial^n x_l} \overset{\leftarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega). \quad (2.10)$$

Facilmente percebe-se que os dois primeiros termos da expansão (2.10) resultam no tensor obtido em (2.8).

Até o presente momento muito se tem falado da importância de obter um tensor que seja a transformada de Fourier do tensor dielétrico, e verificou-se que este tensor é o tensor dielétrico efetivo. No entanto, o tensor $\overset{\leftarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, definido em (1.42), não perde a sua importância. É a partir dele que se obtém o tensor dielétrico efetivo. Portanto, o cálculo tradicional de $\overset{\leftarrow}{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, que resultou na expressão (1.41), é indispensável. Nas duas

¹ A dedução da forma completa do tensor dielétrico efetivo e também da sua forma expandida em série de Taylor pode ser encontrada na referência [25].

seções seguintes será apresentado, em linhas gerais, o cálculo deste tensor e a subsequente aplicação da transformação BGI, para o caso de plasmas inhomogêneos imersos em campo magnético homogêneo e, depois, para plasmas homogêneos imersos em campo magnético inhomogêneo.

2.3 O tensor dielétrico efetivo para plasmas inhomogêneos imersos em campo magnético homogêneo

Esta seção é dedicada à revisão do trabalho sobre plasmas inhomogêneos imersos em campo magnético homogêneo, desenvolvido por Rafael Caldela, e apresentado em 1990 [27]. Outras referências correlacionadas com este trabalho são as referências [22, 30–32]. Os resultados numéricos não serão discutidos e a ênfase será dada exclusivamente para a obtenção do tensor dielétrico efetivo.

A geometria usada no referido trabalho pode ser vista na figura 2.1. Os gradientes da

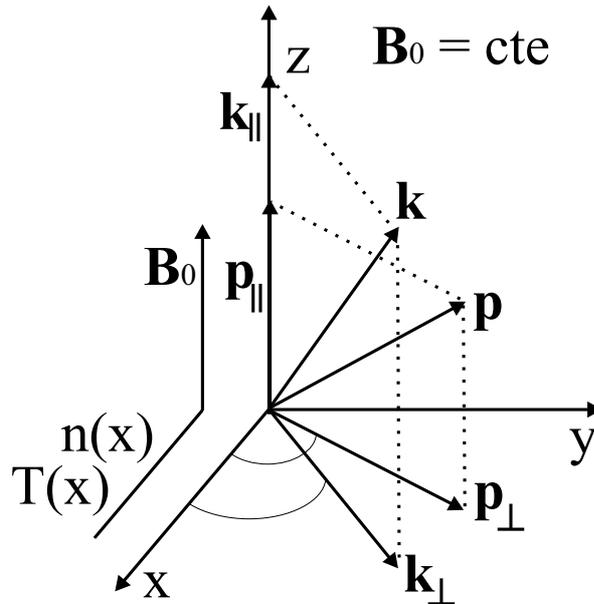


Fig. 2.1: Geometria adotada no trabalho de Caldela [27].

densidade $\nabla n(x)$ e da temperatura $\nabla T(x)$ estão na direção do eixo x . O vetor de onda \mathbf{k} e o momento das partículas \mathbf{p} são decompostos em componentes perpendiculares, \mathbf{k}_\perp e \mathbf{p}_\perp , e paralelas, \mathbf{k}_\parallel e \mathbf{p}_\parallel , sempre em relação ao campo magnético ambiente \mathbf{B}_0 . Para um plasma homogêneo, normalmente a geometria é construída de forma a colocar o vetor de onda \mathbf{k} no plano que contém o campo magnético \mathbf{B}_0 e um dos eixos perpendiculares. Não há perda de generalidade neste procedimento, uma vez que as direções perpendiculares ao campo magnético possuem as mesmas características. Entretanto, para um plasma inhomogêneo, em virtude da existência de gradientes, estas direções não apresentam as mesmas características. É necessário portanto, sob pena de perder a generalidade do tratamento, que \mathbf{k} esteja orientado arbitrariamente, como mostrado na figura. Na figura 2.1, ψ é o ângulo entre o vetor \mathbf{k}_\perp e os gradientes da densidade e de temperatura, e φ é o ângulo entre \mathbf{p}_\perp e esses gradientes.

Para chegar no tensor dielétrico efetivo é preciso primeiro obter o tensor $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, cuja expressão geral é dada por (1.41). A função distribuição de equilíbrio $f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$ conterá implicitamente as inhomogeneidades do plasma. Isso torna válido o tratamento para inhomogeneidades fracas que se apresentam na função distribuição de equilíbrio, tais como inhomogeneidade de densidade, temperatura e velocidade de deriva diamagnética². Tendo em mente que a função distribuição de equilíbrio é função das constantes de movimento das órbitas não perturbadas, conforme visto em (1.32), é conveniente primeiro determinar essas constantes. Outros ingredientes igualmente importantes para o cálculo de $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, são as órbitas não perturbadas \mathbf{r}' e \mathbf{p}' . É a partir delas que as constantes de movimento são determinadas.

2.3.1 A inclusão dos efeitos da inhomogeneidade na função distribuição de equilíbrio

Na subseção 1.4.2, foi comentada genericamente a inclusão dos efeitos da inhomogeneidade. Tratou-se ali da chamada aproximação localmente inhomogênea, dando ênfase ao trabalho [26] desenvolvido por Mikhailovskii. Mais especificamente, esta aproximação con-

² A velocidade de deriva diamagnética é descrita no capítulo 4.

siste em incluir os efeitos da inhomogeneidade na função distribuição de equilíbrio, a partir de uma expansão da mesma. Normalmente, e inclusive para plasmas homogêneos, determina-se a dependência funcional da $f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$, tal que satisfaça a condição (1.32), a qual impõe que a função distribuição de equilíbrio seja constante sobre as órbitas não perturbadas das partículas. Isso implica, como já foi comentado no capítulo anterior, que ela seja uma função das constantes de movimento das equações das órbitas (1.30). Para o caso de plasmas inhomogêneos, a dependência funcional será útil para escolher adequadamente o parâmetro de expansão da função distribuição de equilíbrio inhomogênea.

As órbitas são calculadas a partir das equações vetoriais, dadas por (1.30), que descrevem o movimento das partículas na situação de equilíbrio. As equações para cada um dos componentes do momento podem ser obtidas a partir da equação (1.30b), resultando em

$$\frac{dp'_x}{dt'} = \frac{\Omega_\alpha}{\gamma'} p'_y \quad (2.11a)$$

$$\frac{dp'_y}{dt'} = -\frac{\Omega_\alpha}{\gamma'} p'_x \quad (2.11b)$$

$$\frac{dp'_z}{dt'} = 0 . \quad (2.11c)$$

Nas equações acima foi usada a forma explícita do campo magnético ambiente, conforme a figura 2.1, ou seja, $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$. A quantidade Ω_α é conhecida como *frequência angular de ciclotron* e é definida como $\Omega_\alpha \equiv q_\alpha B_0 / m_\alpha c$. Esta é a frequência com que as partículas giram em torno do seu centro guia, descrevendo uma trajetória circular, cujo raio é conhecido como *raio de Larmor*, dado por $r_{L_\alpha} = p_\perp / m_\alpha |\Omega_\alpha|$.

Com uma pequena álgebra diferencial nos componentes da equação do momento (2.11), é possível mostrar que as quantidades p'_z e $p_x'^2 + p_y'^2$ são constantes de movimento. Portanto, olhando a figura 2.1, conclui-se que [22,27]

$$p'_z = p'_\parallel = p_\parallel = \text{cte} \quad \text{e} \quad p_x'^2 + p_y'^2 = p_\perp'^2 = p_\perp^2 = \text{cte} .$$

Isso torna possível afirmar que γ' também é uma quantidade constante e, assim, a igualdade $\gamma' = \gamma$ é válida. Trabalhando conjuntamente as equações (2.11a) e (2.11b), e usando as equações das coordenadas x' e y' , extraídas dos componentes da equação vetorial da posição

(1.30a), integradas no intervalo $0 \leq t' \leq t$, onde $x'(t' = t) = x$, $y'(t' = t) = y$, $p'_x(t' = t) = p_x$ e $p'_y(t' = t) = p_y$, é possível expressar as coordenadas das partículas em termos do momento, como segue

$$x = -\frac{p_y}{m_\alpha \Omega_\alpha} + \text{cte}$$

$$y = \frac{p_x}{m_\alpha \Omega_\alpha} + \text{cte} .$$

As duas constantes que aparecem nas equações acima são as outras constantes de movimento, e serão definidas da seguinte forma:

$$\mathcal{X}_\alpha = x + \frac{p_\perp \sin \varphi}{m_\alpha \Omega_\alpha} = \text{cte} \quad (2.12a)$$

$$\mathcal{Y}_\alpha = y - \frac{p_\perp \cos \varphi}{m_\alpha \Omega_\alpha} = \text{cte} , \quad (2.12b)$$

onde foi usada, de acordo com a figura 2.1, a definição do ângulo φ . As quantidades \mathcal{X}_α e \mathcal{Y}_α são na realidade as coordenadas do centro guia das partículas da espécie α , no plano perpendicular à \mathbf{B}_0 . O movimento que as partículas descrevem no plano $x - y$, segundo a figura 2.1, é descrito pela equação de uma circunferência³, dada abaixo

$$(x' - \mathcal{X}_\alpha)^2 + (y' - \mathcal{Y}_\alpha)^2 = r_{L_\alpha}^2 . \quad (2.13)$$

Portanto, as partículas descrevem uma trajetória circular no plano $x - y$ (perpendicular à \mathbf{B}_0), com raio r_{L_α} , e centrada no ponto $(\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{Y}_\alpha)$. Observa-se facilmente, pelas equações (2.12), que o movimento das partículas no plano $x - y$, na situação de equilíbrio, dista do movimento do centro guia por uma quantidade da ordem do raio de Larmor. Já o centro guia é fixo no plano $x - y$. Da equação (2.11c), conclui-se que o movimento descrito pelas partículas na direção \mathbf{e}_z , é retilíneo e uniforme. O movimento total resultante é em forma helicoidal, com raio constante r_{L_α} , e velocidade constante na direção do campo magnético ambiente.

Depois de determinadas as constantes de movimento, é possível explicitar a dependência

³ Na referência [22] consta em detalhe a dedução desta equação.

funcional da função distribuição de equilíbrio como segue:

$$f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') = F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_{\alpha}, \mathcal{Y}_{\alpha}) .$$

No entanto, se os gradientes estão apenas na direção \mathbf{e}_x , a equação de Vlasov para a função distribuição de equilíbrio, dada por (1.25a), pode ser escrita como segue

$$\frac{p'_x}{m_{\alpha} \gamma_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}')}{\partial x'} + \frac{\Omega_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}} \left[p'_y \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}')}{\partial p'_x} - p'_x \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}')}{\partial p'_y} \right] = 0 .$$

A equação acima mostra que a solução para $f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$ possui uma dependência espacial apenas da coordenada x' . Isso implica que a dependência funcional da função distribuição de equilíbrio seja, finalmente, a seguinte

$$f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') = F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_{\alpha}) . \quad (2.14)$$

O movimento das partículas não se restringe ao deslocamento exatamente sobre uma linha de campo magnético. Elas descrevem uma trajetória helicoidal em torno das linhas do campo magnético de equilíbrio. À medida que as partículas seguem essa trajetória helicoidal, elas passam por regiões cujos parâmetros de plasma são diferentes, devido à inhomogeneidade. A projeção da trajetória no plano perpendicular ao campo magnético é uma circunferência, descrita pela equação (2.13), cujo raio é o raio de Larmor ($r_{L_{\alpha}}$). A função distribuição em um dado ponto pode ser escrita como uma expansão em série de Taylor em torno da posição do centro da trajetória ($\mathcal{X}_{\alpha} = \text{constante}$), de modo que no caso de plasma fracamente inhomogêneo, tal que $L \gg r_{L_{\alpha}}$ (L : distância típica da inhomogeneidade), pode-se manter apenas os dois primeiros termos da série.

A expansão em série de Taylor da $F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_{\alpha})$ em torno de $\mathcal{X}_{\alpha} = x$, é como segue

$$F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_{\alpha}) = F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_{\alpha}) \Big|_{\mathcal{X}_{\alpha}=x} + (\mathcal{X}_{\alpha} - x) \frac{\partial}{\partial \mathcal{X}_{\alpha}} [F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_{\alpha})] \Big|_{\mathcal{X}_{\alpha}=x} + \dots .$$

Para um plasma fracamente inhomogêneo mantém-se apenas os dois primeiros termos, resul-

tando em

$$F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_{\alpha}) \simeq f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, x) + \frac{p_{\perp} \sin \varphi}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x} [f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, x)] . \quad (2.15)$$

A aproximação localmente homogênea é caracterizada pela retenção apenas do primeiro termo da expansão acima. O efeito crucial da abordagem da referência [26], na aproximação localmente inhomogênea, é manter até o segundo termo da expansão e, dessa forma, considerar ponto a ponto os efeitos da inhomogeneidade. Nota-se que o segundo termo é da ordem do raio de Larmor. Essa série é interrompida no segundo termo, por ser o plasma fracamente inhomogêneo. A medida que se desejar estudar inhomogeneidades mais intensas, os termos seguintes devem ser levados em conta. É interessante notar que inhomogeneidades presentes na função distribuição, tais como inhomogeneidades em densidade e/ou temperatura, causam uma deriva líquida em forma de corrente⁴ na direção simultaneamente perpendicular aos gradientes e ao campo magnético ambiente (direção y conforme a figura 2.1), mas não afetam as órbitas microscópicas das partículas, como é mostrado na subseção seguinte.

A expansão que consta em (2.15), é a forma com que as inhomogeneidades dos parâmetros foram consideradas no trabalho de Caldela [27]. Na presente tese o plasma também é suposto fracamente inhomogêneo, e as inhomogeneidades dos parâmetros da função distribuição de equilíbrio serão tratadas tal como no referido trabalho.

2.3.2 As órbitas não perturbadas das partículas

A forma geral de $\overleftrightarrow{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, dada em (1.41), deixa explícita a necessidade da obtenção de $\mathbf{r}'(\tau) - \mathbf{r}$ e $\mathbf{v}'(\tau) = \mathbf{p}'(\tau)/\gamma m_{\alpha}$. Portanto, é necessário que as órbitas não perturbadas $\mathbf{r}'(\tau)$ e $\mathbf{v}'(\tau)$ sejam determinadas.

Para expressar \mathbf{r}' e \mathbf{v}' em função de τ , as equações das órbitas (1.30) devem ser colocadas

⁴ A deriva resultante da inhomogeneidade em densidade e/ou temperatura, está melhor apresentada no capítulo 4 da presente tese.

em termos de $\tau = t' - t$, ficando na forma

$$\frac{d\mathbf{r}'(\tau)}{d\tau} = \mathbf{v}'(\tau) = \frac{\mathbf{p}'(\tau)}{\gamma m_\alpha} \Rightarrow \frac{dx'}{d\tau} = \frac{p'_x}{\gamma m_\alpha}; \quad \frac{dy'}{d\tau} = \frac{p'_y}{\gamma m_\alpha}; \quad \frac{dz'}{d\tau} = \frac{p'_z}{\gamma m_\alpha}; \quad (2.16a)$$

$$\frac{dp'_x}{d\tau} = \frac{\Omega_\alpha}{\gamma} p'_y; \quad \frac{dp'_y}{d\tau} = -\frac{\Omega_\alpha}{\gamma} p'_x; \quad \frac{dp'_z}{d\tau} = 0; \quad (2.16b)$$

com as condições iniciais $\mathbf{r}'(\tau = 0) = \mathbf{r}$ e $\mathbf{p}'(\tau = 0) = \mathbf{p}$. Resolvendo as equações diferenciais dos componentes do momento, (2.16b), resulta em

$$p'_x(\tau) = p_\perp \cos\left(\varphi - \frac{\Omega_\alpha}{\gamma} \tau\right) \quad (2.17a)$$

$$p'_y(\tau) = p_\perp \sin\left(\varphi - \frac{\Omega_\alpha}{\gamma} \tau\right) \quad (2.17b)$$

$$p'_z(\tau) = p_\parallel. \quad (2.17c)$$

Substituindo os componentes do momento, dados acima, nas equações das coordenadas das partículas, (2.16a), e depois integrando em τ , encontra-se as equações para a posição das partículas, que são

$$x' - x = -\frac{p_\perp}{m_\alpha \Omega_\alpha} \left[\sin\left(\varphi - \frac{\Omega_\alpha}{\gamma} \tau\right) - \sin\varphi \right] \quad (2.18a)$$

$$y' - y = \frac{p_\perp}{m_\alpha \Omega_\alpha} \left[\cos\left(\varphi - \frac{\Omega_\alpha}{\gamma} \tau\right) - \cos\varphi \right] \quad (2.18b)$$

$$z' - z = \frac{p_\parallel}{m_\alpha \Omega_\alpha} \tau, \quad (2.18c)$$

onde foi feito o uso explícito de $\mathbf{r}'(\tau = 0) = \mathbf{r}$. Nota-se claramente que as órbitas (2.17) e (2.18) satisfazem as condições iniciais. Além disso, fica evidente que elas não dependem da inhomogeneidade dos parâmetros do plasma.

2.3.3 Determinação do tensor dielétrico efetivo

Seguindo o procedimento adotado por Mikhailovskii para a obtenção do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$ ($\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega$), dado por (1.41), todos os ingredientes necessários para tal tarefa já estão disponíveis. O termo $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = k_x(x' - x) + k_y(y' - y) + k_z(z' - z)$ que consta na exponencial, pode ser agora escrito em termos da variável de integração τ , a partir das equações que descrevem a

posição das partículas na situação de equilíbrio, (2.18). Já os componentes de \mathbf{v}' são obtidos a partir dos componentes do momento (2.17).

O cálculo de $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ não é nada trivial. Para esse fim, um pesado cálculo é inevitavelmente necessário, que foi desenvolvido em detalhe por Caldela. Foge do objetivo da presente tese tal desenvolvimento, no entanto, alguns comentários gerais serão feitos.

Caldela escreveu o tensor $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, dado por (1.41), utilizando o momento ao invés da velocidade $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\gamma m_\alpha$, de maneira que

$$\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = - \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int d^3p \frac{\mathbf{p}}{\gamma} \int_{-\infty}^0 d\tau \left[\left(1 - \frac{1}{m_{\alpha}\gamma\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}' \right) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} + \frac{1}{m_{\alpha}\gamma\omega} \mathbf{p}' \mathbf{k} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \omega\tau]} . \quad (2.19)$$

Usando a forma acima, o tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, dado por (1.42), foi escrito tal como consta abaixo

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} - i\omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3p \frac{\mathbf{p}}{\gamma} \mathbf{A}_{\alpha} , \quad (2.20)$$

com

$$X_{\alpha} = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} ; \quad \omega_{p\alpha} = \left(\frac{4\pi n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \right)^{1/2} , \quad (2.21)$$

sendo $\omega_{p\alpha}$ a conhecida *frequência (angular) de plasma*, e

$$\mathbf{A}_{\alpha} \equiv \int_{-\infty}^0 d\tau \Theta_{\alpha} e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \omega\tau]} , \quad (2.22)$$

onde

$$\Theta_{\alpha} \equiv \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}'}{m_{\alpha}\gamma\omega} \right) \nabla_{\mathbf{p}'} F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_{\alpha}) + \left[\frac{1}{m_{\alpha}\gamma\omega} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{p}'} F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_{\alpha}) \right] \mathbf{p}' . \quad (2.23)$$

Da integral em d^3p da diádica $\mathbf{p}\mathbf{A}_{\alpha}$, que consta em (2.20), determina-se os nove componentes do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. É justamente a partir daí que o cálculo torna-se complicado. Normalmente, para o cálculo das integrais em momento, decompõe-se o momento

das órbitas não perturbadas \mathbf{p}' , em componentes perpendicular e paralela, de forma que $\mathbf{p}'(\tau) = \mathbf{p}'_{\perp}(\tau) + p_{\parallel}\mathbf{e}_z$. As integrais em d^3p também são reescritas dessa forma (coordenadas cilíndricas), como segue

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} p_{\perp} dp_{\perp} \int_0^{2\pi} d\varphi . \quad (2.24)$$

Com a utilização da regra da cadeia, é possível expressar o gradiente em \mathbf{p}' em termos das constantes de movimento, ou seja, em termos das variáveis \mathbf{p} , resultando

$$\nabla_{\mathbf{p}'} F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_{\alpha}) = \frac{\mathbf{p}'_{\perp}(\tau)}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_{\alpha}) + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_{\alpha}) . \quad (2.25)$$

No cálculo da integral em τ , que consta na definição de \mathbf{A}_{α} dada em (2.22), observa-se que na exponencial são necessárias as órbitas não perturbadas das partículas, dadas por (2.18). Essas órbitas dependem de senos e cossenos e, quando substituídas em \mathbf{A}_{α} , resultam em integrais complicadas que possuem senos e cossenos no argumento da exponencial. Além disso, a quantidade Θ_{α} , dada por (2.23), depende dos componentes do momento, dados por (2.17), seja diretamente ou indiretamente através do gradiente em \mathbf{p}' , (2.25). Os componentes de \mathbf{p}' (2.17), por sua vez, também possuem funções trigonométricas. Para que o cálculo analítico dessas integrais seja feito, as exponenciais que possuem funções trigonométricas no argumento são substituídas por identidades do tipo [33]

$$e^{\pm i a \text{sen}\theta} = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} J_n(a) e^{\pm i n \theta} \quad (2.26a)$$

$$\text{sen}\theta e^{\pm i a \text{sen}\theta} = \mp i \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} J'_n(a) e^{\pm i n \theta} \quad (2.26b)$$

$$\text{cos}\theta e^{\pm i a \text{sen}\theta} = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \frac{n}{a} J_n(a) e^{\pm i n \theta} , \quad (2.26c)$$

onde $J_n(a)$ é a função de Bessel e $J'_n(a)$ é a derivada da função de Bessel em relação ao argumento. Identidades semelhantes também existem para cosseno no argumento da exponencial.

Depois que essas identidades são substituídas em \mathbf{A}_{α} , a integral em τ fica bastante

simplificada. Seguindo o desenvolvimento de Caldela, é possível ver que em cada um dos componentes desse vetor aparece a seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\left(\frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}\gamma} - \omega + \frac{n\Omega_{\alpha}}{\gamma}\right)\tau}, \quad (2.27)$$

onde o vetor de onda foi escrito em termos de seus componentes paralelo e perpendicular: $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\perp} + k_{\parallel}\mathbf{e}_z$, sendo $\mathbf{k}_{\perp} = k_{\perp}\cos\psi\mathbf{e}_x + k_{\perp}\sin\psi\mathbf{e}_y$. A integral acima pode ser resolvida, resultando em

$$\int_{-\infty}^0 d\tau e^{-i\bar{D}_{n\alpha}\tau} = \frac{i}{\bar{D}_{n\alpha}}, \quad (2.28)$$

onde

$$\bar{D}_{n\alpha} = \omega - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha}\gamma} - \frac{n\Omega_{\alpha}}{\gamma}. \quad (2.29)$$

Assim, todos os componentes do vetor \mathbf{A}_{α} contém o fator $\bar{D}_{n\alpha}$ no denominador.

Depois de calculados, os componentes de \mathbf{A}_{α} são introduzidos em (2.20), onde nota-se que as integrais em d^3p ainda devem ser resolvidas. Entretanto, como o vetor \mathbf{A}_{α} depende da função distribuição de equilíbrio, através de Θ_{α} , as integrais em d^3p não poderão ser calculadas antes que a forma de $f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, x)$ seja especificada. Uma outra conclusão se pode ter a respeito das integrais do momento. Os cálculos das integrais em dp_{\parallel} e dp_{\perp} apresentam uma peculiaridade. Nota-se na definição de $\bar{D}_{n\alpha}$, que essa quantidade depende de p_{\parallel} e p_{\perp} (essa última através de γ). Como já foi dito, $\bar{D}_{n\alpha}$ apresenta-se no denominador, tornando as integrais em dp_{\parallel} e dp_{\perp} integrais com singularidades no caminho de integração (pólos) pois, para determinados valores de p_{\parallel} e p_{\perp} , o denominador $\bar{D}_{n\alpha}$ se anula.

Para uma situação tal que $\bar{D}_{n\alpha}$ se anule, a equação $\bar{D}_{n\alpha} = 0$ determina a condição que deve ser cumprida para que uma onda com determinados k_{\parallel} e ω , entre em ressonância com partículas que possuem momento p_{\parallel} e p_{\perp} . Essa equação é conhecida como *condição de ressonância*. Cada onda, com determinada frequência e direção de propagação, entra em ressonância com uma certa população de partículas, que possui momento tal que satisfaça a condição de ressonância. Nota-se que essa condição não depende da inhomogeneidade dos

parâmetros do plasma, uma vez que as órbitas microscópicas das partículas não são afetadas por esse tipo de inhomogeneidade. Portanto, a referida condição é a mesma que ocorre em um plasma homogêneo. Um estudo bastante minucioso desse assunto foi realizado por Gaelzer, na referência [21].

Até o presente momento, a expansão (2.15) não foi utilizada. O vetor \mathbf{A}_α , através de Θ_α , depende do gradiente do momento da função distribuição de equilíbrio, dado por (2.25). Quando a expansão (2.15) é substituída em (2.25), é possível separar o gradiente do momento em uma parte que contenha apenas os efeitos localmente homogêneos, representados por $f_{\alpha 0}(p_\perp^2, p_\parallel, x)$, e outra parte que contém os efeitos localmente inhomogêneos, caracterizada pela derivada espacial da função distribuição de equilíbrio, e representada pelo termo da expansão que contém explicitamente a derivada em x . Esse procedimento foi adotado por Caldela, que separou o vetor \mathbf{A}_α da seguinte forma: $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha^h + \mathbf{A}_\alpha^{nh}$, onde os símbolos “h” e “nh” indicam as partes localmente homogênea e localmente inhomogênea, respectivamente. Depois disso feito, nota-se que o tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, dado por (2.20), também será decomposto em integrais do momento dessas partes “h” e “nh”.

Nesse ponto, já foram adquiridos todos os ingredientes necessários para a obtenção da forma genérica do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. A integral em τ já foi calculada, a dependência da função distribuição inhomogênea foi explicitada, a contribuição dos efeitos da inhomogeneidade foi incorporada, e os efeitos localmente homogêneo e localmente inhomogêneo foram separados. Restam as integrais em momento, mas, como o interesse é a determinação de uma forma genérica do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, ou seja, uma forma tal que a função distribuição de equilíbrio não seja especificada, essas integrais não poderão ser calculadas. Depois de um trabalho bastante laborioso, Caldela obteve a forma genérica do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ (que não será reproduzido na presente tese), fundamental para a obtenção do tensor dielétrico efetivo.

O último passo é justamente a obtenção do tensor dielétrico efetivo. É interessante ter em mente que os efeitos da inhomogeneidade do plasma foram considerados apenas de uma forma perturbativa, caracterizada pela expansão da função distribuição de equilíbrio (2.15). Esse fato torna desnecessária a aplicação da transformação BGI completa, dada por (2.9), sendo suficiente a sua forma aproximada, dada por (2.8). Essa foi a forma utilizada

por Caldela. Assim, depois de aplicar a transformação BGI (2.8) (com $l = x$) no tensor $\overset{\leftarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, Caldela encontrou os seguintes componentes para o tensor dielétrico efetivo $\overset{\leftarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{\text{H}} + i\epsilon_{ij}^{\text{aH}}, \quad (2.30)$$

onde

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{\text{H}} = & \delta_{ij} - \delta_{iz}\delta_{jz} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d\mathbf{p} \frac{\mathcal{L}(f_{\alpha}) p_{\parallel}}{\gamma_{\alpha} p_{\perp}} \\ & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P \int d\mathbf{p} \frac{p_{\perp} \varphi_0(f_{\alpha})}{D_{n\alpha}} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} (R_{ij}^R + iR_{ij}^I) \\ & + (\delta_{iy}\delta_{jz} + \delta_{iz}\delta_{jy}) \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \int d\mathbf{p} \frac{p_{\parallel} f'_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}} \\ & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha}\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P \int d\mathbf{p} p_{\perp} \frac{f'_{\alpha} b_{\alpha} \sin \psi}{\gamma_{\alpha} D_{n\alpha}} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} (R_{ij}^R + iR_{ij}^I) \\ & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P \int d\mathbf{p} p_{\perp}^2 \frac{\varphi_0(f'_{\alpha})}{D_{n\alpha}} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} \\ & \times \frac{1}{2} [(S_{ij}^R + iS_{ij}^I) + (S_{ji}^R + iS_{ji}^I)^*] ; \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{\text{aH}} = & -\pi \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\mathbf{p} \delta(D_{n\alpha}) p_{\perp} \varphi_0(f_{\alpha}) \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} (R_{ij}^R + iR_{ij}^I) \\ & - \pi \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha}\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\mathbf{p} \delta(D_{n\alpha}) p_{\perp} \frac{f'_{\alpha} b_{\alpha} \sin \psi}{\gamma_{\alpha}} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} (R_{ij}^R + iR_{ij}^I) \\ & - \pi \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\mathbf{p} \delta(D_{n\alpha}) p_{\perp}^2 \varphi_0(f'_{\alpha}) \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} \\ & \times \frac{1}{2} [(S_{ij}^R + iS_{ij}^I) + (S_{ji}^R + iS_{ji}^I)^*] , \end{aligned} \quad (2.32)$$

com

$$\begin{aligned} f'_\alpha &\equiv \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} , \quad \mathcal{L}(f_\alpha) \equiv p_\parallel \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\perp} - p_\perp \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\parallel} , \\ \varphi_0(g) &\equiv \frac{\partial g}{\partial p_\perp} + \frac{k_\parallel}{m_\alpha \gamma_\alpha \omega} \left(p_\perp \frac{\partial g}{\partial p_\parallel} - p_\parallel \frac{\partial g}{\partial p_\perp} \right) , \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde g pode ser f_α ou f'_α , e, por conveniência, foi definida uma nova forma para a condição de ressonância,

$$D_{n\alpha} = \gamma - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_\alpha \omega} - \frac{n\Omega_\alpha}{\omega} , \quad (2.34)$$

de modo que

$$D_{n\alpha} = \frac{\gamma}{\omega} \bar{D}_{n\alpha} . \quad (2.35)$$

As integrais nas variáveis p_\parallel e p_\perp já comentadas anteriormente, não podem ser calculadas da maneira tradicional, por apresentarem pólos dentro da faixa de integração. É necessário, portanto, usar a fórmula de Plemelj [12], que é amplamente usada no tratamento cinético de plasmas

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{f(u)}{u - a + i\varepsilon} = P \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{f(u)}{u - a} - i\pi \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) \delta(u - a) , \quad (2.36)$$

onde

$$P \int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{a-i\varepsilon} + \int_{a+i\varepsilon}^{\infty} \right] .$$

O símbolo $P \int$ significa o valor principal de Cauchy da integral, e é calculado sobre todos os valores de u excluindo o pólo $u = a$. A contribuição do pólo para a integral está contida no termo que possui a delta de Dirac. Esse procedimento foi adotado por Caldela, e o resultado da aplicação da fórmula de Plemelj nota-se nas partes hermiteana e anti-hermiteana do tensor dielétrico efetivo.

As quantidades R_{ij} e S_{ij} dependem do tipo de partícula, mas a dependência em α será

omitida, por simplicidade:

$$\begin{aligned}
R_{xx}^R &= J_n'^2 + \cos^2 \psi \left(\frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 - J_n'^2 \right) \\
R_{xx}^I &= 0 \\
R_{xy}^R &= \left(\frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 - J_n'^2 \right) \sin \psi \cos \psi \\
R_{xy}^I &= \frac{n}{b_\alpha} J_n J_n' \\
R_{xz}^R &= \frac{n}{b_\alpha} J_n^2 \cos \psi \\
R_{xz}^I &= J_n J_n' \sin \psi \\
R_{yy}^R &= \frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 + \cos^2 \psi \left(J_n'^2 - \frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 \right) \\
R_{yy}^I &= 0 \\
R_{yz}^R &= \frac{n}{b_\alpha} J_n^2 \sin \psi \\
R_{yz}^I &= -J_n J_n' \cos \psi \\
R_{zz}^R &= J_n^2 \\
R_{zz}^I &= 0 \text{ ,}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

com $R_{ij}^R = R_{ji}^R$, e $R_{ij}^I = -R_{ji}^I$.

$$\begin{aligned}
S_{xx}^R &= \frac{n}{b_\alpha} \sin \psi \left[J_n' \left(J_n' - \frac{J_n}{b_\alpha} \right) - \xi \right] \\
S_{xx}^I &= \cos \psi \left[\left(-\frac{n^2}{b_\alpha^3} J_n^2 + \left(1 - \frac{n^2}{b_\alpha^2} \right) J_n J_n' + \frac{2}{b_\alpha} J_n'^2 \right) + \eta \right] \\
S_{xy}^R &= \frac{n}{b_\alpha} \cos \psi \left[\left(2\frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 - \frac{J_n J_n'}{b_\alpha} - J_n^2 - J_n'^2 \right) + \xi \right] \\
S_{xy}^I &= \sin \psi \left[\left(\frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n J_n' - \frac{n^2}{b_\alpha^3} J_n^2 \right) + \eta \right] \\
S_{xz}^R &= \sin \psi \cos \psi \left[2\frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 - J_n^2 - 2\frac{J_n J_n'}{b_\alpha} \right] \\
S_{xz}^I &= \left(\frac{n}{b_\alpha} J_n J_n' - \frac{n}{b_\alpha^2} J_n^2 \right) + \cos^2 \psi \left(2\frac{n}{b_\alpha^2} J_n^2 - 2\frac{n}{b_\alpha} J_n J_n' \right) \\
S_{yx}^R &= \frac{n}{b_\alpha} \cos \psi \left[\left(\frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 + \frac{J_n J_n'}{b_\alpha} - 2J_n'^2 \right) + \xi \right] \\
S_{yx}^I &= \sin \psi \left[\left(\frac{J_n'^2}{b_\alpha} - \frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n J_n' \right) + \eta \right] \\
S_{yy}^R &= \frac{n}{b_\alpha} \sin \psi \left[\left(\frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 - \frac{J_n J_n'}{b_\alpha} \right) + \xi \right] \\
S_{yy}^I &= \cos \psi \left[\left(2\frac{n^2}{b_\alpha^3} J_n^2 - \frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n J_n' - \frac{J_n'^2}{b_\alpha} \right) - \eta \right] \\
S_{yz}^R &= \left(\frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 - \frac{J_n J_n'}{b_\alpha} \right) + \cos^2 \psi \left(J_n^2 - 2\frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 + 2\frac{J_n J_n'}{b_\alpha} \right) \\
S_{yz}^I &= \sin \psi \cos \psi \left(2\frac{n}{b_\alpha^2} J_n^2 - 2\frac{n}{b_\alpha} J_n J_n' \right) \\
S_{zx}^R &= \sin \psi \cos \psi \left(\frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 - J_n'^2 \right) \\
S_{zx}^I &= -\frac{n}{b_\alpha} J_n J_n' \\
S_{zy}^R &= \frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 + \cos^2 \psi \left(J_n'^2 - \frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 \right) \\
S_{zy}^I &= 0 \\
S_{zz}^R &= \frac{n}{b_\alpha} J_n^2 \sin \psi \\
S_{zz}^I &= -J_n J_n' \cos \psi
\end{aligned} \tag{2.38}$$

onde

$$\begin{aligned}\eta &= \cos^2 \psi \left(2 \frac{n^2}{b_\alpha^3} J_n^2 - J_n J_n' - 2 \frac{J_n'^2}{b_\alpha} \right) \\ \xi &= -\cos^2 \psi \left(2 \frac{n^2}{b_\alpha^2} J_n^2 - J_n^2 - 2 J_n'^2 \right) .\end{aligned}$$

O argumento das funções de Bessel é o mesmo para todas as quantidades definidas acima, e é dado por

$$b_\alpha \equiv \frac{k_\perp p_\perp}{m_\alpha \Omega_\alpha} = k_\perp r_{L_\alpha} . \quad (2.39)$$

Para propagação perpendicular às inomogeneidades ($\psi = \pi/2$) é possível mostrar que o tensor dielétrico efetivo se reduz ao tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. Todavia, importantes conseqüências podem ser destacadas para o tensor dielétrico efetivo obtido por Caldela, para propagações em direções diferentes desta. A primeira se refere à simetria de Onsager [34, 35]. Onsager propôs que o decaimento de flutuações microscópicas lineares, em torno da situação de equilíbrio do sistema, deve obedecer às mesmas relações a que obedecem as perturbações macroscópicas, relacionadas a processos irreversíveis e dissipativos. Estas, por sua vez, decorrem da invariância das equações cinéticas microscópicas frente à operação de reversão temporal. Portanto, as flutuações lineares de pequena amplitude que ocorrem em um plasma devem ser tais que obedeam à invariância das equações cinéticas microscópicas frente à operação de reversão temporal, ou seja, os coeficientes que regulam essas flutuações devem possuir a simetria de Onsager. Na referência [25] Gaelzer fez um resumo bastante apropriado da simetria de Onsager, dando ênfase nas conseqüências dessa simetria geral quando particularizada para o tensor dielétrico. Para plasmas no equilíbrio termodinâmico e fora dele, a simetria de Onsager impõe ao tensor dielétrico a seguinte simetria:

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{B}_0, F_{\alpha 0}(p_\perp^2, p_\parallel, \mathcal{X}_\alpha)) = \epsilon_{ji}(-\mathbf{k}, \omega; -\mathbf{B}_0, F_{\alpha 0}(p_\perp^2, -p_\parallel, -\mathcal{X}_\alpha)) . \quad (2.40)$$

Caldela mostrou que o tensor dielétrico efetivo, dado por (2.30), cumpre perfeitamente essa simetria. É interessante notar que já o tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ não possui as características apropriadas para que a simetria de Onsager seja obedecida. Logo, fica evidenciado que o

tensor que possui as propriedades adequadas, segundo à idéia de Onsager, para descrever corretamente as flutuações lineares de um plasma, é o tensor dielétrico efetivo e não o tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$.

Outra característica importante do tensor dielétrico diz respeito à sua parte anti-hermiteana, dada por (2.32). Nota-se que essa parte é constituída apenas por termos ressonantes, caracterizados pela delta de Dirac. Como foi visto na subseção 1.3.1, a parte anti-hermiteana é a responsável pela interação de troca de energia entre a onda e as partículas do plasma (absorção e amplificação). Essa interação se dá essencialmente por partículas que entram em ressonância com a onda, satisfazendo a condição de ressonância $D_{n\alpha} = 0$. Desse modo, se espera que a parte anti-hermiteana contenha apenas termos ressonantes, o que é verdade para o tensor dielétrico efetivo obtido por Caldela. O tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ contém termos com integrais principais na sua parte anti-hermiteana, como mostrou Caldela. Isso acarreta sérias complicações para justificar fisicamente os processos de amplificação ou absorção das ondas. Outro ponto a comentar com relação a esse assunto, é que o tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ possui termos ressonantes na sua parte hermiteana, o que não acontece com a parte hermiteana do tensor dielétrico efetivo, dada por (2.31).

Somado a essas importantes e positivas propriedades do tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, está o fato que o referido tensor é a transformada de Fourier do tensor dielétrico (quando escrito na forma simetrizada), como mostraram Beskin, Gurevich e Istomin [23].

2.4 O tensor dielétrico efetivo para plasmas homogêneos imersos em campo magnético inhomogêneo

Outro trabalho de igual relevância para a presente tese foi desenvolvido por Rudi Garelzer, e apresentado em 1995 [25]. Também na linha deste trabalho encontram-se as referências [36, 37]. O seu estudo foi direcionado à investigação das propriedades de absorção e amplificação de ondas em um plasma homogêneo (densidade e temperatura) imerso em um campo magnético inhomogêneo. Mais uma vez, não há interesse para o presente trabalho em

fazer uma análise dos resultados numéricos. Nessa seção, o principal objetivo é a obtenção do tensor dielétrico efetivo encontrado por Gaelzer, no trabalho citado, sem a especificação da forma da função distribuição de equilíbrio.

A geometria adotada no referido trabalho pode ser vista na figura 2.2. O módulo do

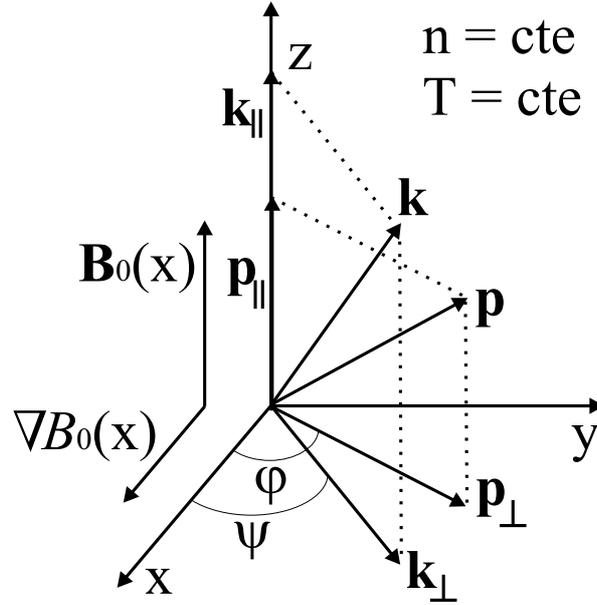


Fig. 2.2: Geometria adotada no trabalho de Gaelzer [25].

campo magnético ambiente depende da coordenada x , portanto $B_0 = B_0(x)$. O campo magnético ambiente $\mathbf{B}_0(x)$ tem direção e sentido constantes, e a mesma orientação que o vetor unitário \mathbf{e}_z . O gradiente do campo magnético aponta na direção e sentido de \mathbf{e}_x . As configurações do vetor de onda \mathbf{k} e do momento \mathbf{p} são idênticas às adotadas por Caldela, e suas descrições já foram comentadas na seção anterior.

Os procedimentos para a obtenção do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, em linhas gerais, são muito parecidos com os procedimentos adotados por Caldela. Em suma, a forma genérica do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, dado por (1.41), é a mesma; é necessário determinar as órbitas não perturbadas das partículas; a forma funcional da função distribuição de equilíbrio deve ser explicitada; a transformação BGI deve ser aplicada. Esses são os passos gerais. No entanto, a inhomogeneidade do campo magnético ambiente conduz a um desenvolvimento diferenciado, com relação ao trabalho de Caldela, no que diz respeito aos detalhes desses

passos gerais. Novas dificuldades apareceram no desenvolvimento do trabalho de Gaelzer. A primeira delas aparece já no cálculo das órbitas não perturbadas das partículas, como se pode ver na subseção seguinte. A aplicação da transformação BGI também requer uma atenção especial.

2.4.1 As órbitas não perturbadas das partículas na presença de campo magnético inhomogêneo

As órbitas não perturbadas das partículas são as soluções do sistema de equações de movimento (1.30). Com razoável facilidade pode-se obter essas soluções para uma situação de campo magnético homogêneo, como as soluções encontradas por Caldela, dadas por (2.17) e (2.18). Entretanto, o problema se complica enormemente com a existência de um campo magnético ambiente não uniforme. Para o caso estudado por Gaelzer, a inhomogeneidade ocorre apenas no módulo do campo magnético, e depende apenas da posição x .

Para que as equações de movimento (1.30) sejam integradas, é necessário que a dependência em x seja especificada. Supondo um campo magnético ambiente fracamente inhomogêneo, é possível expandir $\mathbf{B}_0(x)$ em série de potências em torno de um determinado ponto, que foi escolhido como $x = 0$, e manter apenas os dois primeiros termos da expansão, como segue:

$$\mathbf{B}_0(x) = B_0(0)(1 + \epsilon_B x)\mathbf{e}_z, \quad (2.41)$$

onde

$$\epsilon_B = \frac{1}{B_0(x)} \left. \frac{dB_0(x)}{dx} \right|_{x=0} \ll 1$$

é a medida da inhomogeneidade do campo.

Nas equações dos componentes do momento $\mathbf{p}'(t')$, (2.11), fica evidente que é necessário também expandir a frequência de ciclotron, que para o caso de campo magnético inhomogêneo

passa a depender de x' . A aproximação será feita em torno do ponto $x' = x$, como segue:

$$\Omega_\alpha(x') = \frac{q_\alpha B_0(x')}{m_\alpha c} \approx \frac{q_\alpha B_0(x)}{m_\alpha c} [1 + \epsilon_B(x' - x)] = \Omega_\alpha(x) [1 + \epsilon_B(x' - x)] . \quad (2.42)$$

Como se verifica no trabalho de Gaelzer, além das constantes de movimento $p'_\parallel = p_\parallel$ e $p'^2_\perp = p^2_\perp$, já determinadas por Caldela, surge uma outra, decorrente da inhomogeneidade do campo:

$$\mathcal{P}_{y\alpha} = p_y + \frac{q_\alpha}{c} \int^x d\hat{x} B_0(\hat{x}) \approx p_y + \frac{q_\alpha}{c} B_0(0)x + \epsilon_B \frac{q_\alpha}{c} B_0(0) \frac{x^2}{2}, \quad (2.43)$$

onde, para o cálculo da integral, foi usada a expansão de $B_0(x)$, dada em (2.41). Para o caso de campo homogêneo, nota-se que $\mathcal{P}_{y\alpha} = m_\alpha \Omega_\alpha \mathcal{X}_\alpha$, onde \mathcal{X}_α é uma das constantes de movimento determinadas por Caldela. Assim, a dependência funcional da função distribuição de equilíbrio pode ser explicitada:

$$f_{\alpha 0}(\mathbf{r}', \mathbf{p}') = F_{\alpha 0}(p'^2_\perp, p'_\parallel, \mathcal{P}_{y\alpha}) . \quad (2.44)$$

Seguindo o procedimento de Gaelzer, as equações dos componentes do momento p'_x e p'_y , dadas por (2.11a) e (2.11b) respectivamente, podem ser trabalhadas conjuntamente, resultando em uma equação exclusiva para p'_x (ou para p'_y , conforme a escolha). Esta equação é não linear e possui termos que dependem de $\Omega_\alpha(x')$ e de sua derivada. Por sua vez, esses termos podem ser aproximados até primeira ordem em ϵ_B , conforme (2.42). A equação resultante é

$$\frac{d^2 p'_x}{dt'^2} - \frac{\epsilon_B}{\gamma m_\alpha} p'_x \frac{dp'_x}{dt'} + \frac{\Omega_\alpha^2(x)}{\gamma^2} [1 + 2\epsilon_B(x' - x)] p'_x = 0 , \quad (2.45)$$

ainda mantendo seu caráter não linear.

Para um plasma fracamente inhomogêneo, é possível propor uma expansão perturbativa como sendo uma solução aproximada da equação diferencial acima. A expansão usada por Gaelzer teve como parâmetro a quantidade ϵ_B , como pode ser visto abaixo

$$a \cong a_0 + \epsilon_B a_1 + \epsilon_B^2 a_2 + \dots , \quad (2.46)$$

onde a pode ser $\mathbf{r}'(t')$, $\mathbf{p}'(t')$ ou $\Omega_\alpha(x)$. Assim, o componente p'_x , descrito pela equação (2.45), será escrito em termos de suas quantidades perturbadas até primeira ordem em ϵ_B da seguinte forma:

$$p'_x = p'_{x0} + \epsilon_B p'_{x1} . \quad (2.47)$$

Embora à primeira vista o procedimento de substituir a expansão (2.46) em (2.45) seja simples, um cuidado especial deve ser tomado. Esse tipo de solução aproximada perturbativa pode inserir termos seculares nos componentes p'_i , como por exemplo termos que dependem linearmente do tempo, que fazem $p'_i \rightarrow \infty$ com $t \rightarrow \infty$, o que não possui significado físico.

Substituindo as expansões de $\mathbf{r}'(t')$, $\mathbf{p}'(t')$ e $\Omega_\alpha(x)$ na equação diferencial para p'_x , e desprezando termo da ordem de ϵ_B^2 ou maiores, Gaelzer encontrou um sistema de duas equações diferenciais acopladas, uma para p'_{x0} (termo em ordem zero da expansão de p'_x) e outra para p'_{x1} (termo em ordem um da expansão de p'_x), que depende de p'_{x0} . É importante notar que a equação para p'_{x0} é semelhante à do caso de solução não perturbativa. Entretanto, a frequência de oscilação do sistema não é Ω_α mas sim $\Omega_{\alpha0}$, que é o termo de ordem zero da expansão de $\Omega_\alpha(x)$, dada por (2.46). Portanto, as partículas oscilam, para um caso de campo inhomogêneo, com uma frequência aproximadamente igual a $\Omega_{\alpha0}$, tal que

$$\Omega_{\alpha0}(x) \cong \Omega_\alpha(x) - \epsilon_B \Omega_{\alpha1}(x) , \quad (2.48)$$

onde $\Omega_\alpha(x)$ é a frequência de cíclotron inhomogênea, definida em (2.42).

Para resolver o sistema de equações diferenciais para p'_{x0} e p'_{x1} , foi necessário determinar as condições iniciais para as quantidades de ordem zero e ordem um da expansão perturbativa. Depois de resolvido o sistema, como já era previsto, apareceram termos seculares na solução para a quantidade perturbada p'_{x1} . Para que estes termos fossem anulados, Gaelzer determinou o valor de $\Omega_{\alpha1}$ adequado para tal objetivo:

$$\Omega_{\alpha1} = -\frac{p_\perp \text{sen}\varphi}{m_\alpha} . \quad (2.49)$$

Portanto, substituindo (2.49) em (2.48), determina-se a frequência de cíclotron inhomogênea

até primeira ordem da inomogeneidade do campo magnético ambiente,

$$\Omega_{\alpha 0}(x) \cong \Omega_{\alpha}(x) + \epsilon_B \frac{p_{\perp} \text{sen} \varphi}{m_{\alpha}} = \Omega_{\alpha}(0) + \Omega_{\alpha}(0) \epsilon_B x + \epsilon_B \frac{p_{\perp} \text{sen} \varphi}{m_{\alpha}}, \quad (2.50)$$

onde observa-se claramente a correção, em relação ao caso homogêneo, devida à inomogeneidade e à condição inicial do momento da partícula (termo com p_{\perp}) na direção do eixo y .

Depois de determinadas as expressões de p'_{x0} e p'_{x1} , e usando (2.47), a solução perturbativa para o componente p'_x é facilmente obtida. Procedimentos semelhantes foram usados para p'_y . Já o componente p'_z é trivialmente obtido de (2.11c). As coordenadas das partículas são obtidas da integração dos componentes do momento. Gaelzer obteve as seguintes expressões para as órbitas não perturbadas:

$$p'_x(\tau) = p_{\perp} \cos(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) + \frac{\epsilon_B p_{\perp}^2}{2m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} [2 \cos \varphi \text{sen}(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) - \text{sen}(2\varphi - 2\omega_{\alpha} \tau)] \quad (2.51a)$$

$$p'_y(\tau) = p_{\perp} \text{sen}(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) + \frac{\epsilon_B p_{\perp}^2}{2m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} [1 - 2 \cos \varphi \cos(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) + \cos(2\varphi - 2\omega_{\alpha} \tau)] \quad (2.51b)$$

$$p'_z(\tau) = p_{\parallel} \quad (2.51c)$$

$$x'(\tau) = x + \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha 0}} [\text{sen} \varphi - \text{sen}(\varphi - \omega_{\alpha} \tau)] + \frac{\epsilon_B p_{\perp}^2}{2m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}^2} \left[2 \cos \varphi \cos(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) - \frac{1}{2} \cos(2\varphi - 2\omega_{\alpha} \tau) - \frac{1}{2} \cos 2\varphi - 1 \right] \quad (2.51d)$$

$$y'(\tau) = y + \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha 0}} [\cos(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) - \cos \varphi] + \frac{\epsilon_B p_{\perp}^2}{2\gamma m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}} \tau + \frac{\epsilon_B p_{\perp}^2}{2m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}^2} \left[2 \cos \varphi \text{sen}(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) - \frac{1}{2} \text{sen} 2(\varphi - \omega_{\alpha} \tau) - \frac{1}{2} \text{sen} 2\varphi \right] \quad (2.51e)$$

$$z'(\tau) = z + \frac{p_{\parallel}}{\gamma m_{\alpha}} \tau, \quad (2.51f)$$

onde $\omega_{\alpha}(x) = \Omega_{\alpha 0}(x)/\gamma$ e $\tau = t' - t$. Quando comparamos as órbitas acima com as órbitas obtidas na situação de campo homogêneo, dadas por (2.17) e (2.18), fica evidente a complexidade introduzida pela inomogeneidade de campo. Nota-se também que para $\epsilon_B = 0$, as órbitas acima, obtidas para campo inomogêneo, recaem nas órbitas para o campo homogêneo. Convém ressaltar que o termo proporcional a τ , contido em y' , embora pareça um termo secular não o é. Este termo representa o deslocamento na direção do eixo y cau-

sado pela velocidade de deriva gerada pela inomogeneidade do campo magnético ambiente, denominada de *deriva de gradiente de B*⁵.

Um ponto interessante notado por Gaelzer, foi o fato que os termos de ordem zero (termos que não dependem explicitamente de ϵ_B) contém termos não lineares de todas as ordens (ordem ϵ_B^2 ou superior), devido a presença do termo $\omega_\alpha(x) = \Omega_{\alpha 0}(x)/\gamma$ no argumento do seno e do cosseno. Uma expansão destas duas funções trigonométricas já é suficiente para perceber isso. Entretanto, Gaelzer mostrou que se as funções seno e cosseno forem expandidas, no resultado constarão termos seculares em primeira ordem de ϵ_B , que devem ser evitados. Esses termos seculares são gerados justamente pela correção introduzida na frequência de cíclotron, devida à condição inicial do momento. Assim, mesmo que o campo magnético possa ser expandido até primeira ordem da inomogeneidade, as órbitas não poderão ser expandidas, devendo ser mantidas as suas formas completas, com as funções seno e cosseno “fechadas”.

Convém lembrar que as expressões (2.51) são aquelas que deverão ser substituídas em $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = k_x(x' - x) + k_y(y' - y) + k_z(z' - z)$, termo esse contido no argumento da exponencial do tensor condutividade $\overleftrightarrow{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, dado por (1.41). Os componentes de $\mathbf{p}'(\tau)$ são usados no integrando deste mesmo tensor. Nota-se, portanto, que a manutenção da forma completa das órbitas, mesmo que aproximadas por uma solução perturbativa, ainda é demasiada complexa para o cálculo de $\overleftrightarrow{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. Entretanto, numa análise mais detalhada dos termos de ordem zero e ordem um das expansões perturbativas de p'_x , p'_y , x' e y' , e que dão forma às soluções (2.51a)-(2.51d), conclui-se que a razão dos termos de ordem zero pelo correspondente de ordem um é da ordem de $p_\perp/\gamma m_\alpha \Omega_\alpha(0)$, que é o raio de Larmor r_{L_α} . Ou seja, $|a_0/a_1| \sim \mathcal{O}(r_{L_\alpha}) \Rightarrow a \sim a_0 + \epsilon_B \mathcal{O}(r_{L_\alpha}) a_0$. Com essa constatação, e para um campo fracamente inomogêneo, tal que $\epsilon_B r_{L_\alpha} \ll 1$, Gaelzer desprezou os termos

⁵ Uma descrição mais aprimorada da origem da deriva de gradiente de B pode ser encontrada no capítulo 4 da presente tese.

de ordem um nas órbitas (2.51), de forma que $a \cong a_0$, resultando

$$p'_x(\tau) = p_\perp \cos(\varphi - \omega_\alpha \tau) \quad (2.52a)$$

$$p'_y(\tau) = p_\perp \sin(\varphi - \omega_\alpha \tau) \quad (2.52b)$$

$$p'_z(\tau) = p_\parallel \quad (2.52c)$$

$$x'(\tau) = x + \frac{p_\perp}{m_\alpha \Omega_{\alpha 0}} [\sin \varphi - \sin(\varphi - \omega_\alpha \tau)] \quad (2.52d)$$

$$y'(\tau) = y + \frac{p_\perp}{m_\alpha \Omega_{\alpha 0}} [\cos(\varphi - \omega_\alpha \tau) - \cos \varphi] + \frac{\epsilon_B p_\perp^2}{2\gamma m_\alpha^2 \Omega_{\alpha 0}} \tau \quad (2.52e)$$

$$z'(\tau) = z + \frac{p_\parallel}{\gamma m_\alpha} \tau, \quad (2.52f)$$

O termo proporcional a τ que aparece em y' deve ser mantido, pois ele representa a deriva de gradiente de B . É bom que se reafirme nesse ponto que, mesmo que os termos de ordem um tenham sido desprezados, os termos de ordem zero possuem implicitamente todas as ordens da inomogeneidade.

Apesar do forte argumento acima para desprezar os termos de ordem um em relação aos termos de ordem zero, Gaelzer comparou numericamente três diferentes soluções para as órbitas não perturbadas, com a evolução de τ : a) solução (2.51), que é a mais completa; b) solução (2.52), onde os termos de ordem um são desprezados; c) solução (2.52), desprezando a correção da frequência de ciclotron, (2.50), devida à condição inicial do momento. Verificou-se que a solução c diverge rapidamente com o aumento de τ , quando comparada com a solução mais precisa a . Já a solução b se mantém bastante próxima à solução a , corroborando a aproximação que resultou nas órbitas (2.52). Estas, portanto, foram as órbitas não perturbadas escolhidas por Gaelzer para o desenvolvimento do cálculo do tensor $\overset{\leftarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$.

2.4.2 Determinação do tensor dielétrico efetivo

Estando as órbitas já determinadas, falta agora verificar como Gaelzer tratou a dependência funcional da função distribuição de equilíbrio, dada por (2.44).

Com o intuito de separar os efeitos da inomogeneidade do plasma, analisados por Caldela [27], dos efeitos da inomogeneidade do campo magnético ambiente, convém manter

a dependência funcional da função distribuição de equilíbrio apenas nas constantes de movimento p_{\parallel} e p_{\perp}^2 , como no caso de plasma homogêneo. Assim, a forma funcional da função distribuição de equilíbrio pode ser escrita como

$$F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{P}_{y\alpha}) = f_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}) , \quad (2.53)$$

que representa uma distribuição para um plasma homogêneo em seus parâmetros. No entanto, essa imposição requer um certo cuidado. Para a situação de equilíbrio que está sendo descrita, de campo magnético na direção do eixo z e gradiente apenas na direção x , da lei de Ampère de ordem zero, (1.25b), ainda mantendo-se a forma funcional mais completa da função distribuição de equilíbrio, obtém-se

$$-\frac{dB_0(x)}{dx} = \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p v_y F_{\alpha 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{P}_{y\alpha}) = \frac{4\pi}{c} J_y(x) .$$

Isso significa que o gradiente do campo magnético de equilíbrio requer uma corrente na direção do eixo y , que depende da posição x . A contribuição dos diferentes tipos de partículas, para essa corrente, está contemplada no somatório em α , que pode ser separado da seguinte maneira

$$-\frac{dB_0(x)}{dx} = \frac{4\pi}{c} q_e \int d^3p v_y F_{e0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{P}_{ye}) + \frac{4\pi}{c} \sum_{\beta \neq e} q_{\beta} \int d^3p v_y F_{\beta 0}(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{P}_{y\beta}) ,$$

onde $\alpha = e$ é a contribuição dos elétrons e o segundo termo é a contribuição das outras partículas do plasma, como por exemplo, os íons. Mas, se for suposta a forma funcional da função distribuição de equilíbrio conforme (2.53), os elétrons não contribuirão para a referida corrente, pois a dependência em p_y será par, resultando um integrando ímpar em p_y , cuja integral se anula.

A conclusão importante que se chega é que quem “carrega” a corrente, inerente a esse tipo de equilíbrio proposto, são os íons. Gaelzer estava interessado no estudo da absorção e amplificação de ondas de cíclotron eletrônica, que interagem significativamente com os elétrons, com os íons tendo apenas a participação para o equilíbrio de carga elétrica do plasma. Portanto, os íons não contribuem para o tensor dielétrico. Aparentemente isso viola

a situação de equilíbrio. Contudo, se o sistema de coordenadas for colocado em repouso, na direção do eixo y , em relação aos elétrons, o problema é contornado. Se assim for feito, os íons, cuja distribuição depende de \mathcal{P}_y , geram sozinhos a corrente $J_y(x)$, de forma a garantir que a situação de equilíbrio seja satisfeita. Conclui-se, então, que o tensor dielétrico efetivo obtido por Gaelzer não pode ser empregado simultaneamente para íons e elétrons, o que impede o estudo de ondas híbridas. Como consta no capítulo 5 da presente tese, para uma descrição das ondas híbridas é necessário uma outra abordagem para o tensor dielétrico para os íons, que inclua a corrente na direção do eixo y . Essa corrente entrará formalmente no desenvolvimento do modelo como sendo uma deriva dos íons na direção do eixo y .

O procedimento básico para a obtenção do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ é semelhante ao adotado por Caldela. As diferenças fundamentais são a função distribuição de equilíbrio, que na abordagem de Gaelzer é homogênea, e o argumento da exponencial do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, (1.41), que para o caso de campo magnético de equilíbrio conterà correções devido ao gradiente de campo ϵ_B , oriundas da frequência de ciclotron, (2.50), e da deriva de gradiente de B contida na coordenada $y'(\tau)$, (2.52e).

Quanto à distribuição homogênea, o resultado imediato será a não existência de termos que dependam da derivada da função distribuição, diferentemente do que ocorreu na abordagem de Caldela, onde apareceram os termos chamados “não homogêneos” (nh). No caso das correções acima citadas, o resultado é relevante. Depois que as órbitas são substituídas em $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, a integral em τ será semelhante à encontrada por Caldela, como representada em (2.27). Contudo, a condição de ressonância será afetada pela inhomogeneidade do campo ambiente, resultando

$$\mathcal{D}_{n\alpha} = \gamma\omega - \frac{k_{\parallel}p_{\parallel}}{m_{\alpha}} - n\Omega_{\alpha}(1 + \epsilon_B x) - n\frac{\epsilon_B p_{\perp}}{m_{\alpha}} \text{sen}\varphi - \frac{\epsilon_B k_{\perp} p_{\perp}^2}{2m_{\alpha}^2 \Omega_{\alpha}} \text{sen}\psi, \quad (2.54)$$

onde $\Omega_{\alpha} = \Omega_{\alpha}(0) = q_{\alpha}B_0(0)/m_{\alpha}c$. Nota-se que para $\epsilon_B = 0$, a condição de ressonância acima recai na condição de ressonância obtida por Caldela, dada por (2.29), segundo a relação $\mathcal{D}_{n\alpha}(\epsilon_B = 0) = \gamma\bar{D}_{n\alpha}$. Nota-se que a integral em d^3p , quando colocada em termos de coordenadas cilíndricas (como visto em (2.24)), possui uma integral em φ . Para que essa

integral seja calculada, convém separar a condição de ressonância como segue

$$\mathcal{D}_{n\alpha} = D_{n\alpha}(\epsilon_B) - n \frac{\epsilon_B p_{\perp}}{m_{\alpha}} \text{sen}\varphi . \quad (2.55)$$

Nota-se claramente que

$$D_{n\alpha}(\epsilon_B = 0) = \omega D_{n\alpha} , \quad (2.56)$$

onde $D_{n\alpha}$ é a condição de ressonância definida por Caldela, dada por (2.34). A relação entre estas duas condições de ressonância possui um papel importante no assunto tratado no próximo capítulo.

Gaelzer adotou um procedimento diferente para tratar a integral em τ , com relação a Caldela. Enquanto Caldela separou a integral em τ em partes principal e ressonante, Gaelzer a manteve fechada, até que a forma da função distribuição de equilíbrio fosse especificada. O grande ganho deste procedimento é o fato que os componentes do tensor dielétrico efetivo podem ser escritos em termos de funções cujas propriedades são conhecidas. Para o caso de plasmas não relativísticos, tal que $\gamma \approx 1$, a função que aparece é a conhecida função de Fried & Conte [38], $Z(z)$. Para plasmas fracamente relativísticos, tal que $\gamma \approx 1 + (1/2)(p_{\perp}^2/m_{\alpha}^2 c^2) + (1/2)(p_{\parallel}^2/m_{\alpha}^2 c^2)$, as funções que aparecem são as funções de Dnestrovskii, $F_q(z)$, e de Shkarofsky, $\mathcal{F}_{q,r}(x, a)$ ⁶. Para a presente tese, como consta no capítulo 5, o plasma estudado possui os parâmetros do plasma da cauda magnética terrestre, que pode ser considerado não relativístico. Assim sendo, a função relevante para esse estudo é a função de Fried & Conte, $Z(z)$.

Depois de um pesado desenvolvimento algébrico, que inclui simples definições, definições de operadores diferenciais, aplicação de identidades do tipo (2.26), e o uso de relações de

⁶ As propriedades fundamentais destas três funções podem ser encontradas resumidamente no apêndice B do trabalho de Gaelzer [25].

recorrência das funções de Bessel, Gaelzer obteve o seguinte tensor dielétrico efetivo:

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\epsilon} = \overleftrightarrow{1} - i \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3u u_{\perp} \mathcal{L}(f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel})) e^{iD_{n\alpha}(\epsilon_B)\tau} [F_{n\alpha}(\tau)]^{(|n|-1)} \frac{\mathbf{\Pi}_{n\alpha}^- \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^+}{(W_n^- W_n^+)^{|n|}} \\ - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \int d^3u \frac{u_{\parallel}}{\gamma} L(f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel})) \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^{\pm} = \pm \left[n J_{|n|}(W_n^{\pm}) G_{n\alpha}^{\pm}(\tau) + i \frac{J_{|n|+1}(W_n^{\pm})}{W_n^{\pm}} F_{n\alpha}^{1/2}(\tau) b_{\alpha} \text{sen} \psi \right] \mathbf{e}_x \\ + i \left[|n| J_{|n|}(W_n^{\pm}) G_{n\alpha}^{\pm}(\tau) \mp \frac{J_{|n|+1}(W_n^{\pm})}{W_n^{\pm}} F_{n\alpha}^{1/2}(\tau) (b_{\alpha} \text{cos} \psi \pm \mathcal{K}_n \tau) \right] \mathbf{e}_y \\ + \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} J_{|n|}(W_n^{\pm}) F_{n\alpha}^{1/2}(\tau) \mathbf{e}_z ; \\ W_{n\alpha}^{\pm}(t) = \sqrt{b_{\alpha}^2 \pm 2b_{\alpha} \text{cos} \psi \mathcal{K}_n \tau + \mathcal{K}_n^2 \tau^2} ; \\ G_{n\alpha}^{\pm}(t) = i \sqrt{\frac{\mathcal{K}_n \tau \mp b_{\alpha} \text{cos} \psi + i S_n b_{\alpha} \text{sen} \psi}{\mathcal{K}_n t \tau \pm b_{\alpha} \text{cos} \psi + i S_n b_{\alpha} \text{sen} \psi}} ; \begin{cases} G_{n\alpha}^+ G_{n\alpha}^- = -1 \\ F_{n\alpha}^{1/2} G_{n\alpha}^{\pm} = -(\mathcal{K}_n \tau \mp b_{\alpha} \text{cos} \psi + i S_n b_{\alpha} \text{sen} \psi) \end{cases} ; \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_{\alpha 0}) = \partial_{u_{\perp}} f_{\alpha 0} - \frac{N_{\parallel} u_{\perp}}{\gamma} L(f_{\alpha 0}) ; \quad L(f_{\alpha 0}) = \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \partial_{u_{\perp}} f_{\alpha 0} - \partial_{u_{\parallel}} f_{\alpha 0} ; \\ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{m_{\alpha} c} ; \quad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{k} c}{\omega} ; \quad b_{\alpha} = \frac{N_{\perp} u_{\perp}}{Y_{\alpha}} = \frac{k_{\perp} p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} = \frac{c k_{\perp} u_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} ; \\ S_n = \text{sgn}(n) ; \quad \mathcal{K}_n = \frac{n}{2} \epsilon_B c u_{\perp} ; \quad \gamma(u) = \sqrt{1 + u^2} . \end{aligned} \quad (2.59)$$

A condição de ressonância, na nova variável \mathbf{u} definida acima, é reescrita como segue:

$$D_{n\alpha}(\epsilon_B) = \gamma \omega - c k_{\parallel} u_{\parallel} - n \Omega_{\alpha} (1 + \epsilon_B x) - \epsilon_B \frac{k_{\perp} u_{\perp}^2 c^2}{2 \Omega_{\alpha}} \text{sen} \psi . \quad (2.60)$$

O tensor dielétrico efetivo mostrado acima não é exatamente o mesmo obtido por Gaelzer em [25]. Optou-se em adotar esta forma alternativa, que consta no trabalho de Gaelzer *et al* [36], por ser mais adequada para os propósitos da presente tese. As referidas formas do tensor dielétrico diferem apenas por uma ou outra definição usada.

O tensor dielétrico efetivo obtido por Gaelzer, não foi originado da forma aproximada da transformação BGI, (2.8), diferindo, portanto, do procedimento adotado por Caldela.

A razão disso reside no fato que as órbitas para campo inhomogêneo, (2.52), possuem implicitamente no seno e no cosseno, todas as ordens da inhomogeneidade ϵ_B . Assim sendo, para que o tensor dielétrico efetivo tenha as propriedades adequadas, foi necessário incluir **todas** as correções introduzidas pela transformação BGI, o que levou Gaelzer a utilizar a transformação BGI completa, dada por (2.9). Como complemento, Gaelzer mostrou que o uso da forma aproximada da BGI acarretaria um tensor dielétrico efetivo sem a simetria de Onsager.

2.5 Resumo das características da transformação BGI

Para finalizar o presente capítulo, destinado ao estudo do tensor dielétrico efetivo, convém fazer um resumo das características da transformação BGI, a título de comparação com a aproximação localmente inhomogênea, estudada na subseção 1.4.2.

As principais características da transformação BGI e suas conseqüências para o tensor dielétrico podem ser sumarizadas como segue:

- a transformação BGI é válida sob as mesmas condições de validade da aproximação WKB - a) inhomogeneidade fraca, b) pequeno amortecimento;
- os campos têm a forma *eikonal* e suas amplitudes variam com a posição;
- a relação entre os campos e a corrente, (1.8), pode ser usada;
- a relação de dispersão para um plasma homogêneo, (1.12), pode ser utilizada;
- o tensor dielétrico efetivo obtido
 - possui explicitamente os efeitos da inhomogeneidade da função distribuição de equilíbrio;
 - é a transformada de Fourier do tensor dielétrico;
 - a parte anti-hermiteana só apresenta termos ressonantes - descreve corretamente a troca de energia entre onda e partículas, (1.16);
 - satisfaz a simetria de Onsager.

As características evidentemente positivas apresentadas acima, dão crédito ao uso do tensor dielétrico efetivo, seja para plasmas com densidade e/ou temperatura inomogêneas e campo homogêneo (Caldela) ou para plasmas com densidade e temperatura uniformes e com campo inomogêneo (Gaelzer). Contudo, como foi visto no presente capítulo, os trabalhos de Caldela e Gaelzer são excludentes, no sentido que eles tratam, cada um, exclusivamente um tipo de inomogeneidade, impedindo que seja descrita uma situação em que estejam presentes simultaneamente as duas inomogeneidades. Mas, uma vez tendo em mãos os tensores para cada tipo de inomogeneidade, é possível unificar os dois tratamentos, obtendo um tensor dielétrico efetivo unificado, que contenha em si os efeitos de temperatura e/ou densidade inomogêneas e também efeitos de campo de equilíbrio inomogêneo. Essa unificação dos dois tratamentos resultou no trabalho elaborado por Gaelzer, Ziebell e Silveira, de 1999 [17]. Esta unificação do tensor dielétrico efetivo é apresentada no próximo capítulo.

3. Plasmas Inomogêneos Imersos em Campo Magnético Inomogêneo

3.1 Introdução

No capítulo presente, consta todo o desenvolvimento no sentido de unificar em uma só abordagem os dois tipos de inomogeneidades, cujas abordagens independentes foram apresentadas no capítulo 2. Os resultados desse trabalho, a serem utilizados na descrição de propriedades dielétricas em meios inomogêneos em densidade, temperatura e campo magnético, podem ser encontrados na referência [17].

O primeiro problema que deve ser resolvido, antes da pretendida unificação, diz respeito ao ajuste do formalismo. Para que os dois tipos de inomogeneidades sejam incorporados a um único tensor dielétrico efetivo, ambos devem ser descritos formalmente de uma maneira única. Assim sendo, optou-se por escrever o tensor encontrado por Caldela de uma forma semelhante ao tensor obtido por Gaelzer. O trabalho para chegar nesta forma desejada está apresentado no presente capítulo. Como consequência dessa adaptação do formalismo, pode-se escrever o tensor dielétrico efetivo que descreve simultaneamente e consistentemente as duas inomogeneidades. Um vez obtido esse tensor, será feito o uso específico de uma função distribuição de equilíbrio maxwelliana isotrópica, com perfil linear de inomogeneidade da densidade. Depois disso, todo o esforço é dado para se chegar no tensor unificado, para tal perfil de distribuição de velocidades.

3.2 A unificação do formalismo

No desenvolvimento do capítulo anterior, verificou-se que os formalismos adotados para a descrição dos dois tipos de inomogeneidades não estão em conformidade. Para plasmas inomogêneos em densidade e/ou temperatura, imersos em campo magnético de equilíbrio homogêneo, o tensor dielétrico efetivo é o obtido por Caldela em [27], e apresentado aqui na equação (2.30). Para plasmas com temperatura e densidade uniformes, imersos em um campo magnético de equilíbrio inomogêneo, o tensor dielétrico efetivo é o obtido por Gaelzer *et al* em [36], e apresentado aqui na equação (2.57).

Quando os dois tensores são comparados, verifica-se que em (2.30), Caldela separou o tensor em partes hermiteana e anti-hermiteana e resolveu a integral em τ , o que resultou no chamado denominador ressonante. Isso fez com que ele separasse as integrais em d^3p em partes principal e ressonante. Tal procedimento não foi adotado por Gaelzer. Na sua forma de abordar, o tensor não foi separado em partes hermiteana e anti-hermitena e a integral em τ não foi calculada, não sendo necessário, portanto, separar as integrais em d^3p em partes principal e ressonante. Estas são as principais diferenças entre os dois formalismos. Com menos importância, ocorrem também diferenças em certas definições de algumas quantidades.

Para que haja a desejada unificação do tratamento das duas inomogeneidades, é necessário que se opte por um dos dois formalismos, para que o escolhido seja a forma padrão com que o tensor dielétrico efetivo unificado seja escrito.

Numa análise mais acurada dos referidos tensores, percebe-se que o tensor obtido por Caldela carrega em si, de forma evidentemente separada, as contribuições homogênea (ou localmente homogênea), designada por “h”, e inomogênea (que contém a derivada da função distribuição de equilíbrio), designada por “nh”. No tensor obtido por Gaelzer essa distinção não é possível, devido à natureza da inomogeneidade. A inomogeneidade do campo de equilíbrio faz com que a forma do tensor seja tal que fica impraticável separar as contribuições homogênea e inomogênea. Como não é possível um tensor unificado que contenha duplamente a contribuição homogênea, apenas um dos dois tensores deverá fornecer as informações referentes a esta contribuição. Portanto, em face da dificuldade de separar as

contribuições homogênea e inomogênea no tensor obtido por Gaelzer, será ele que fornecerá a contribuição homogênea para o tensor unificado. Além disso, o formalismo adotado por Gaelzer foi elaborado de forma que o tensor dielétrico efetivo, quando aplicado à uma distribuição de equilíbrio maxwelliana, fica expresso em termos de funções conhecidas, como a função de Fried & Conte. O formalismo elaborado por Caldela não possui essa característica, embora, como será mostrado, o tensor dielétrico efetivo obtido por ele também possa ser escrito em termos da função de Fried & Conte. Por essas justificativas, o tensor que será adaptado será o tensor dielétrico efetivo, obtido por Caldela, dado por (2.30).

3.2.1 Adaptação do tensor dielétrico efetivo obtido por Caldela

Para a adaptação do tensor dielétrico efetivo obtido por Caldela, dado por (2.30), serão necessários quatro passos principais: a) juntar novamente as partes principal e ressonante das integrais em d^3p , em uma só integral; b) reescrever o tensor sem distinguir as contribuições hermiteana e anti-hermiteana; c) recuperar a integral em τ , cuja resolução deu origem à condição de ressonância $D_{n\alpha}$; d) escrever o tensor em termos de vetores auxiliares relacionados com aqueles utilizados no formalismo desenvolvido por Gaelzer. Paralelamente a esses importantes passos, se faz necessária a introdução de novas variáveis, também com o intuito de uniformizar o formalismo. Nota-se que, procedendo assim, o tensor dielétrico efetivo obtido por Caldela terá um formato semelhante àquele obtido por Gaelzer, (2.57), que é justamente o que se deseja.

Esta adaptação não é nada trivial, principalmente o procedimento para se obter uma forma que possibilite que o tensor seja escrito em termos de vetores auxiliares. Para chegar a essa forma, é conveniente retroceder a formas intermediárias do tensor dielétrico efetivo (2.30). É necessário voltar aos passos usados por Caldela para a obtenção do tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}^0$, o qual, depois de aplicada a transformação BGI, resulta no tensor dielétrico efetivo (2.30). Mais precisamente, o ponto de partida será a equação (III.70) da referência [27], reproduzida abaixo

$$\epsilon_{ij}^0 = \delta_{ij} - i\omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int dp_{\perp} dp_{\parallel} d\varphi \frac{1}{\gamma} p_{\perp} p_i A_{\alpha j} , \quad (3.1)$$

onde $A_{\alpha j}$ é o componente j do vetor \mathbf{A}_α , definido em (2.22). Para que se possa “enxergar” as quantidades adequadas a serem definidas, conduzindo aos vetores auxiliares, deve-se calcular todos os componentes de $\overset{\leftarrow}{\epsilon}^0$. Para ilustrar, apenas componentes ϵ_{ix}^0 serão calculados, para que, em um momento adequado, o componente ϵ_{yx}^0 , em particular, seja determinado. Usando a expressão acima, obtém-se

$$\epsilon_{ix}^0 = \delta_{ix} - i\omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\gamma} p_i A_{\alpha x} , \quad (3.2)$$

onde

$$A_{\alpha x} = \alpha_x I_x , \quad (3.3)$$

com

$$\alpha_x = \alpha_x^h + \alpha_x^{\text{nh}} , \quad (3.4)$$

sendo

$$\alpha_x^h = \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} \left\{ 1 - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \gamma \omega} \right\} + \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \gamma \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \equiv \alpha_x^h(f_{\alpha 0}) ,$$

$$\alpha_x^{\text{nh}} = \alpha_{1x}^{\text{nh}} + \alpha_{2x}^{\text{nh}} \text{sen} \varphi ,$$

onde

$$\alpha_{1x}^{\text{nh}} = \frac{k_{\perp} \text{sen} \psi}{m_{\alpha}^2 \gamma \omega \Omega_{\alpha}} f'_{\alpha 0} \quad \text{e} \quad \alpha_{2x}^{\text{nh}} = \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \alpha_x^h(f'_{\alpha 0}) .$$

A quantidade I_x é uma integral em τ , definida como segue:

$$I_x = \int_{-\infty}^0 d\tau p'_x e^{i[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - \omega \tau]} , \quad (3.5)$$

onde o p'_x é o componente x do momento não perturbado \mathbf{p}' , cujos componentes são dados por (2.17), e \mathbf{r}' é a posição não perturbada das partículas, cujos componentes são dados por (2.18), para uma situação de plasma imerso em campo magnético de equilíbrio homogêneo.

O resultado desta integral foi obtido por Caldela, e consta na equação (III.49) de [27], reproduzida aqui:

$$I_x = i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_{\perp} e^{i[b_{\alpha} \text{sen}(\varphi-\psi)-n(\varphi-\psi)]} \frac{1}{\bar{D}_{n\alpha}} \left[\cos\psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}) - i \text{sen}\psi J'_n(b_{\alpha}) \right]. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.4) e (3.6) em (3.3), e esta em (3.2), nota-se que as integrais em φ , contidas nos componentes ϵ_{ix}^0 , podem ser calculadas. Caldela reescreveu (3.2), deixando explícitas essas integrais, como segue

$$\epsilon_{ix}^0 = \delta_{ix} + \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\parallel} F_{\alpha n} \left[\alpha_x^{\text{h}} \text{Int}_{1i} + \alpha_{1x}^{\text{nh}} \text{Int}_{1i} + \alpha_{2x}^{\text{nh}} \text{Int}_{2i} \right], \quad (3.7)$$

onde

$$F_{\alpha n} \equiv \frac{1}{\gamma \bar{D}_{n\alpha}} \left[\cos\psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}) - i \text{sen}\psi J'_n(b_{\alpha}) \right] \quad (3.8a)$$

$$\text{Int}_{1i} = \int_0^{2\pi} p_i e^{i[b_{\alpha} \text{sen}(\varphi-\psi)-n(\varphi-\psi)]} d\varphi \quad (3.8b)$$

$$\text{Int}_{2i} = \int_0^{2\pi} p_i \text{sen}\varphi e^{i[b_{\alpha} \text{sen}(\varphi-\psi)-n(\varphi-\psi)]} d\varphi. \quad (3.8c)$$

Os resultados das integrais acima, para $i = x, y, z$, foram obtidos por Caldela, e são

$$\text{Int}_{1x} = 2\pi p_{\perp} \left[\cos\psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n + i \text{sen}\psi J'_n \right]; \quad (3.9a)$$

$$\text{Int}_{1y} = 2\pi p_{\perp} \left[-i \cos\psi J'_n + \text{sen}\psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n \right]; \quad (3.9b)$$

$$\text{Int}_{1z} = 2\pi p_{\parallel} J_n; \quad (3.9c)$$

$$\text{Int}_{2x} = 2\pi p_{\perp} \left[-i \cos(2\psi) \frac{n}{b_{\alpha}} \left(J'_n - \frac{J_n}{b_{\alpha}} \right) + \text{sen}(2\psi) \left(\frac{n^2 J_n}{b_{\alpha}^2} - \frac{J'_n}{b_{\alpha}} - \frac{J_n}{2} \right) \right]; \quad (3.9d)$$

$$\text{Int}_{2y} = 2\pi p_{\perp} \left\{ \frac{J_n}{2} + i \text{sen}(2\psi) \frac{n}{b_{\alpha}} \left(\frac{J_n}{b_{\alpha}} - J'_n \right) - \cos(2\psi) \left[\left(\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} - \frac{1}{2} \right) J_n - \frac{J'_n}{b_{\alpha}} \right] \right\}; \quad (3.9e)$$

$$\text{Int}_{2z} = 2\pi p_{\parallel} \left(-i \cos\psi J'_n + \text{sen}\psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n \right), \quad (3.9f)$$

deixando claro que os argumentos das funções de Bessel e suas derivadas são todos iguais

a b_α . A expressão de Int_{2y} difere levemente de (III.85) presente em [27], apenas pelo fato que na presente tese o $\cos^2 \psi$ foi substituído por uma identidade trigonométrica.

A partir de agora, o cálculo será particularizado para ϵ_{yx}^0 , e a expressão para este componente, obtida de (3.7), é a seguinte:

$$\epsilon_{yx}^0 = \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\parallel} F_{\alpha n} [\alpha_x^h Int_{1y} + \alpha_{1x}^{nh} Int_{1y} + \alpha_{2x}^{nh} Int_{2y}] , \quad (3.10)$$

Os termos entre colchetes podem ser agora escritos em termos dos resultados das integrais expressas em (3.9). Portanto

$$\begin{aligned} \alpha_x^h Int_{1y} &= 2\pi \left\{ \left[\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} \left\{ 1 - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_{\alpha} \gamma \omega} \right\} + \frac{p_{\perp} k_{\parallel}}{m_{\alpha} \gamma \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} \right] \left[-i \cos \psi J'_n + \operatorname{sen} \psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n \right] \right\} \\ &= 2\pi \left\{ \left[\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_{\parallel}}{m_{\alpha} \gamma \omega} \left(p_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\perp}} \right) \right] \left[-i \cos \psi J'_n + \operatorname{sen} \psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n \right] \right\} . \end{aligned}$$

Os resultados encontrados para os três termos são os que seguem

$$\alpha_x^h Int_{1y} = 2\pi \varphi_0(f_{\alpha 0}) \left[-i \cos \psi J'_n + \operatorname{sen} \psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n \right] ; \quad (3.11a)$$

$$\alpha_{1x}^{nh} Int_{1y} = 2\pi b_{\alpha} \frac{\operatorname{sen} \psi}{m_{\alpha} \gamma \omega} f'_{\alpha 0} \left[-i \cos \psi J'_n + \operatorname{sen} \psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n \right] ; \quad (3.11b)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{2x}^{nh} Int_{2y} &= 2\pi \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \varphi_0(f'_{\alpha 0}) \left\{ \frac{1}{2} J_n + i \operatorname{sen}(2\psi) \frac{n}{b_{\alpha}} \left(\frac{J_n}{b_{\alpha}} - J'_n \right) \right. \\ &\quad \left. - \cos(2\psi) \left[\left(\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} - \frac{1}{2} \right) J_n - \frac{J'_n}{b_{\alpha}} \right] \right\} , \end{aligned} \quad (3.11c)$$

onde o operador diferencial φ_0 já fora definido em (2.33).

Substituindo (3.11) e (3.8a) em (3.10), resulta em

$$\begin{aligned} \epsilon_{yx}^0 &= \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\parallel} \frac{1}{\gamma \bar{D}_{n\alpha}} \left[\cos \psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n - i \operatorname{sen} \psi J'_n \right] \\ &\quad \times \left\{ 2\pi \varphi_0(f_{\alpha 0}) \left[-i \cos \psi J'_n + \operatorname{sen} \psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n \right] + 2\pi b_{\alpha} \frac{\operatorname{sen} \psi}{m_{\alpha} \gamma \omega} f'_{\alpha 0} \left[-i \cos \psi J'_n + \operatorname{sen} \psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n \right] \right. \\ &\quad \left. + 2\pi \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \varphi_0(f'_{\alpha 0}) \left\{ \frac{1}{2} J_n + i \operatorname{sen}(2\psi) \frac{n}{b_{\alpha}} \left(\frac{J_n}{b_{\alpha}} - J'_n \right) - \cos(2\psi) \left[\left(\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} - \frac{1}{2} \right) J_n - \frac{J'_n}{b_{\alpha}} \right] \right\} \right\} , \end{aligned} \quad (3.12)$$

Depois que todos os componentes são escritos de forma semelhante ao componente ϵ_{yx}^0 , é possível, neste ponto do cálculo, notar que certas quantidades se repetem em diversos componentes. Essas quantidades serão sintetizadas em novas definições, o que possibilita compactar a notação. Por exemplo, o componente ϵ_{yx}^0 pode ser escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \epsilon_{yx}^0 &= \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} p_{\perp}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\parallel} \frac{1}{\gamma \bar{D}_{n\alpha}} [\pi_{n\alpha x}] \\ &\times \left\{ 2\pi \varphi_0(f_{\alpha 0}) [\pi_{n\alpha y}^*] + 2\pi b_{\alpha} \frac{\text{sen}\psi}{m_{\alpha} \gamma \omega} f'_{\alpha 0} [\pi_{n\alpha y}^*] \right. \\ &\left. + 2\pi \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \varphi_0(f'_{\alpha 0}) \left\{ \frac{1}{2} J_n + \Phi_{n\alpha y}^* \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde as quantidades

$$\begin{aligned} \pi_{n\alpha x} &= \cos \psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n - i \text{sen} \psi J'_n, \\ \pi_{n\alpha y}^* &= -i \cos \psi J'_n + \text{sen} \psi \frac{n}{b_{\alpha}} J_n, \\ \Phi_{n\alpha y}^* &= i \text{sen}(2\psi) \frac{n}{b_{\alpha}} \left(\frac{J_n}{b_{\alpha}} - J'_n \right) - \cos(2\psi) \left[\left(\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} - \frac{1}{2} \right) J_n - \frac{J'_n}{b_{\alpha}} \right], \end{aligned}$$

foram obtidas comparando-se linha a linha as equações (3.12) e (3.13).

As integrais do momento de (3.13) podem ser reagrupadas, e as contribuições de cada termo podem ser separadas como segue

$$\begin{aligned} \epsilon_{yx}^0 &= \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{1}{\gamma \bar{D}_{n\alpha}} [\pi_{n\alpha x}] \\ &\times \left\{ \varphi_0(f_{\alpha 0}) [\pi_{n\alpha y}^*] + b_{\alpha} \frac{\text{sen}\psi}{m_{\alpha} \gamma \omega} f'_{\alpha 0} [\pi_{n\alpha y}^*] \right. \\ &\left. + \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \varphi_0(f'_{\alpha 0}) \left\{ \frac{1}{2} J_n + \Phi_{n\alpha y}^* \right\} \right\}, \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{yx}^0 &= \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{1}{\gamma D_{n\alpha}} \varphi_0(f_{\alpha 0}) \pi_{n\alpha y}^* \pi_{n\alpha x} \\
 &+ \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{1}{\gamma D_{n\alpha}} b_{\alpha} \frac{\text{sen}\psi}{m_{\alpha} \gamma \omega} f'_{\alpha 0} \pi_{n\alpha y}^* \pi_{n\alpha x} \\
 &+ \omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{1}{\gamma D_{n\alpha}} \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \varphi_0(f'_{\alpha 0}) \left[\frac{1}{2} J_n + \Phi_{n\alpha y}^* \right] \pi_{n\alpha x} .
 \end{aligned}$$

Usando a definição de $D_{n\alpha}$, dada em (2.34), ainda é possível melhorar a forma da expressão acima, da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{yx}^0 &= \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{\varphi_0(f_{\alpha 0})}{D_{n\alpha}} \pi_{n\alpha y}^* \pi_{n\alpha x} \\
 &+ \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{f'_{\alpha 0} b_{\alpha} \text{sen}\psi}{\gamma D_{n\alpha}} \pi_{n\alpha y}^* \pi_{n\alpha x} \\
 &+ \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp}^2 \frac{\varphi_0(f'_{\alpha 0})}{D_{n\alpha}} \left[\frac{1}{2} J_n + \Phi_{n\alpha y}^* \right] \pi_{n\alpha x} .
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

É interessante agora, comparar (3.14) com ϵ_{yx}^0 obtido por Caldela, abaixo reproduzido:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{yx}^0 &= \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{\varphi_0(f_{\alpha 0})}{D_{n\alpha}} (R_{yx}^R + iR_{yx}^I) \\
 &+ \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{f'_{\alpha 0} b_{\alpha} \text{sen}\psi}{\gamma D_{n\alpha}} (R_{yx}^R + iR_{yx}^I) \\
 &+ \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp}^2 \frac{\varphi_0(f'_{\alpha 0})}{D_{n\alpha}} (S_{yx}^R + iS_{yx}^I) .
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Fica evidente que valem as seguintes igualdades

$$R_{yx}^R + iR_{yx}^I = \pi_{n\alpha y}^* \pi_{n\alpha x} \tag{3.16a}$$

$$S_{yx}^R + iS_{yx}^I = \left[\frac{1}{2} J_n + \Phi_{n\alpha y}^* \right] \pi_{n\alpha x} . \tag{3.16b}$$

Depois de adotado um procedimento semelhante para os demais componentes, pode-se

escrever uma forma generalizada para os componentes ϵ_{ij}^0 , tal como consta abaixo

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ij}^0 = & \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{\varphi_0(f_{\alpha 0})}{D_{n\alpha}} \pi_{n\alpha i}^* \pi_{n\alpha j} \\
 & - \delta_{iz} \delta_{jz} \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 p \frac{\mathcal{L}(f_{\alpha 0})}{\gamma} \begin{pmatrix} p_{\parallel} \\ p_{\perp} \end{pmatrix} \\
 & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{f'_{\alpha 0} b_{\alpha} \text{sen} \psi}{\gamma D_{n\alpha}} \pi_{n\alpha i}^* \pi_{n\alpha j} \\
 & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp}^2 \frac{\varphi_0(f'_{\alpha 0})}{D_{n\alpha}} \left[\frac{1}{2} J_n \delta_{iy} \pi_{n\alpha j} + \Phi_{n\alpha i}^* \pi_{n\alpha j} \right] \\
 & + (\delta_{iy} \delta_{jz} + \delta_{iz} \delta_{jy}) \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \int d^3 p \frac{p_{\parallel} f'_{\alpha 0}}{\gamma},
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde as definições dos operadores constam em (2.33), e a condição de ressonância é dada por (2.34). Foi sobre uma forma equivalente a esse tensor (equação (III.87) de [27]) que Caldela aplicou a transformação BGI. Entretanto, mais tarde ele separou as partes principal e ressonante, e dividiu o tensor em partes hermiteana e anti-hermiteana. Não é isso que se deseja na presente tese. A forma fechada, como consta acima, será mantida. Falta ainda escrever o tensor em termos de vetores auxiliares, e foi nesse sentido que foram definidas as quantidades $\pi_{n\alpha i}$ e $\Phi_{n\alpha i}$.

A expressão de ϵ_{ij}^0 , na forma apresentada em (3.17), está escrita de tal maneira que é possível “enxergar” a forma tensorial desse tensor, escrita em termos de diádicas. Essa

forma é a seguinte

$$\begin{aligned}
 \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} = & \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{\varphi_0(f_{\alpha 0})}{D_{n\alpha}} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \\
 & - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 p \frac{\mathcal{L}(f_{\alpha 0})}{\gamma} \begin{pmatrix} p_{\parallel} \\ p_{\perp} \end{pmatrix} \\
 & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \frac{f'_{\alpha 0} b_{\alpha} \sin \psi}{\gamma D_{n\alpha}} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \\
 & + \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp}^2 \frac{\varphi_0(f'_{\alpha 0})}{D_{n\alpha}} \left[\frac{1}{2} J_n \mathbf{e}_y \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} + \boldsymbol{\Phi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \right] \\
 & + (\mathbf{e}_y \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y) \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \int d^3 p \frac{p_{\parallel} f'_{\alpha 0}}{\gamma},
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde, os vetores auxiliares acima são definidos como segue

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} = & \left(\frac{n J_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \cos \psi - i J'_n(b_{\alpha}) \sin \psi \right) \mathbf{e}_x \\
 & + \left(\frac{n J_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \sin \psi + i J'_n(b_{\alpha}) \cos \psi \right) \mathbf{e}_y + \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} J_n(b_{\alpha}) \mathbf{e}_z,
 \end{aligned} \tag{3.19a}$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Phi}_{n\alpha} = & \left\{ \left[\left(\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} - \frac{1}{2} \right) J_n(b_{\alpha}) - \frac{J'_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \right] \sin(2\psi) - i \left[\frac{n}{b_{\alpha}^2} J_n(b_{\alpha}) - \frac{n J'_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \right] \cos(2\psi) \right\} \mathbf{e}_x \\
 & - \left\{ \left[\left(\frac{n^2}{b_{\alpha}^2} - \frac{1}{2} \right) J_n(b_{\alpha}) - \frac{J'_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \right] \cos(2\psi) + i \left[\frac{n}{b_{\alpha}^2} J_n(b_{\alpha}) - \frac{n J'_n(b_{\alpha})}{b_{\alpha}} \right] \sin(2\psi) \right\} \mathbf{e}_y \\
 & + \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \left[\frac{n}{b_{\alpha}} J_n(b_{\alpha}) \sin \psi + i J'_n(b_{\alpha}) \cos \psi \right] \mathbf{e}_z.
 \end{aligned} \tag{3.19b}$$

Fica claro que as quantidades $\pi_{n\alpha i}$ e $\Phi_{n\alpha i}$, usadas em (3.17), são, respectivamente, os componentes dos vetores $\boldsymbol{\pi}_{n\alpha}$ e $\boldsymbol{\Phi}_{n\alpha}$.

O último passo necessário para a uniformização do formalismo, antes da aplicação da transformação BGI, é a recuperação da integral em τ . A condição de ressonância $D_{n\alpha}$ aparece no denominador exatamente como resultado do cálculo dessa integral. Esse procedimento será invertido da seguinte maneira

$$\frac{1}{D_{n\alpha}} \rightarrow -i \int_0^{\infty} d\tau e^{i D_{n\alpha} \tau}.$$

Mas, usando (2.56), a igualdade acima resulta em

$$\frac{1}{D_{n\alpha}} \rightarrow \frac{\omega}{D_{n\alpha}(\epsilon_B = 0)} = -i\omega \int_0^\infty d\tau e^{iD_{n\alpha}(\epsilon_B=0)\tau}. \quad (3.20)$$

Portanto, a forma (3.18) do tensor será reescrita com a integral em τ , como segue

$$\begin{aligned} \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{1}} &- i\omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \int_0^\infty d\tau e^{iD_{n\alpha}(\epsilon_B=0)\tau} \varphi_0(f_{\alpha 0}) \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \\ &- \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int d^3 p \frac{\mathcal{L}(f_{\alpha 0})}{\gamma} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right) \\ &- i\omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha}\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \int_0^\infty d\tau e^{iD_{n\alpha}(\epsilon_B=0)\tau} \frac{f'_{\alpha 0} b_{\alpha} \text{sen} \psi}{\gamma} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \\ &- i\omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp}^2 \int_0^\infty d\tau e^{iD_{n\alpha}(\epsilon_B=0)\tau} \varphi_0(f'_{\alpha 0}) \left[\frac{1}{2} J_n \mathbf{e}_y \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} + \boldsymbol{\Phi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \right] \\ &+ (\mathbf{e}_y \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y) \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \frac{1}{m_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \int d^3 p \frac{p_{\parallel} f'_{\alpha 0}}{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A forma do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ apresentada em (3.21), será a forma utilizada para a aplicação da transformação BGI, seguindo os passos de Caldela.

O tensor dielétrico efetivo

A transformação BGI que será aplicada em $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$ será a forma aproximada (2.8), reproduzida abaixo em termos dos componentes, no caso de gradientes apenas na direção do eixo x :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial k_x \partial x} \epsilon_{ij}^0. \quad (3.22)$$

Ao ser aplicada a (3.22) em (3.21), nota-se que a derivada em x será aplicada em termos que possuem a $f_{\alpha 0}$ (os dois primeiros termos) e $f'_{\alpha 0}$ (os três últimos termos). A derivação destes últimos termos, em relação a x , resultará em derivadas segundas da $f_{\alpha 0}$. Entretanto, se mantemos a hipótese de fraca inomogeneidade, estes três últimos termos podem ser desprezados, quando derivados. Além do mais, se a dependência em x da $f_{\alpha 0}$ for linear, como é o caso usado na presente tese, como será visto logo a seguir, a derivada segunda é

rigorosamente nula. Já o segundo termo, nota-se que ele depende de x via $f_{\alpha 0}$, mas não depende de k_x , tornando-o nulo quando aplicada a derivada em k_x . O primeiro termo é o único que depende simultaneamente de x , via $f_{\alpha 0}$, e de k_x , via o produto $\pi_{n\alpha i}^* \pi_{n\alpha j}$. Portanto, o tensor dielétrico efetivo, após aplicada a transformação BGI, (3.22), em ϵ_{ij}^0 , (3.21), será determinado a partir do cálculo das derivadas em x e k_x , como consta abaixo

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 - i\omega \sum_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{n_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^3 p p_{\perp} \int_0^{\infty} d\tau e^{iD_{n\alpha}(\epsilon_B=0)\tau} \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial k_x \partial x} \varphi_0(f_{\alpha 0}) \pi_{n\alpha i}^* \pi_{n\alpha j} \quad (3.23)$$

A derivada em x atua somente em $\varphi_0(f_{\alpha 0})$, gerando $\varphi_0(f'_{\alpha 0})$. Como $k_x = k_{\perp} \cos \psi$, e como as quantidades $\pi_{n\alpha i}^*$ e $\pi_{n\alpha j}$ dependem de k_{\perp} e $\cos \psi$, é conveniente escrever a derivada em k_x , como segue

$$\frac{\partial}{\partial k_x} = \frac{\partial k_{\perp}}{\partial k_x} \frac{\partial}{\partial k_{\perp}} + \frac{\partial \psi}{\partial k_x} \frac{\partial}{\partial \psi} = \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \left[\cos \psi \frac{\partial}{\partial b_{\alpha}} - \frac{\sin \psi}{b_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \psi} \right]. \quad (3.24)$$

É necessário calcular $(i/2)(\partial/\partial k_x)(\pi_{n\alpha i}^* \pi_{n\alpha j})$ para cada $i, j = x, y, z$. O cálculo é simples, pois envolve apenas derivadas e relações de recorrência das funções de Bessel, mas bastante laborioso, por isso será omitido. Pode-se mostrar que

$$\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial k_x} \pi_{n\alpha i}^* \pi_{n\alpha j} = -i \frac{p_{\perp}}{m_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \left[\frac{1}{2} J_n \delta_{iy} \pi_{n\alpha j} + \Phi_{n\alpha i}^* \pi_{n\alpha j} \right]^{\text{aH}}, \quad (3.25)$$

onde “aH” indica a parte anti-hermiteana da soma entre colchetes, definida em (1.17b).

Ao introduzir (3.25) e os componentes de (3.21) em (3.23), percebe-se que o termo novo, introduzido pela transformação BGI, pode ser agrupado com o quarto termo de (3.21), produzindo um termo que contém a soma

$$\left[\frac{1}{2} J_n \delta_{iy} \pi_{n\alpha j} + \Phi_{n\alpha i}^* \pi_{n\alpha j} \right] - i \left[\frac{1}{2} J_n \delta_{iy} \pi_{n\alpha j} + \Phi_{n\alpha i}^* \pi_{n\alpha j} \right]^{\text{aH}}, \quad (3.26)$$

que resulta em

$$\left[\frac{1}{2} J_n \delta_{iy} \pi_{n\alpha j} + \Phi_{n\alpha i}^* \pi_{n\alpha j} \right]^{\text{H}}. \quad (3.27)$$

O “H” indica a parte hermiteana, definida em (1.17a). Este resultado, contendo a parte her-

miteana dos termos entre colchetes, era relativamente previsível, visto que Caldela mostrou que a soma $S_{ij}^R + iS_{ij}^I$, contida em ϵ_{ij}^0 , resulta em $(1/2)[(S_{ij}^R + iS_{ij}^I) + (S_{ji}^R + iS_{ji}^I)^*]$ ($= (S_{ij}^R + iS_{ij}^I)^H$), contido em ϵ_{ij} , dado em (2.30), após a transformação BGI.

Tendo em mente este resultado e usando as definições de X_α e $\mathbf{u} = \mathbf{p}/m_\alpha\Omega_\alpha$, finalmente o tensor dielétrico efetivo para plasmas inomogêneos imersos em campo magnético de equilíbrio homogêneo, obtido por Caldela, dado em (2.30), pode ser escrito de uma forma adequada para a unificação do formalismo, tendo como base o formalismo usado por Gaelzer, que resultou no tensor dielétrico efetivo encontrado em (2.57). Portanto, a forma final desse tensor será a seguinte:

$$\overleftrightarrow{\epsilon}_P = \overleftrightarrow{\mathbf{1}} + \overleftrightarrow{Q}_{lh} + \overleftrightarrow{Q}_P, \quad (3.28)$$

onde

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{Q}_{lh} \equiv & -\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \sum_\alpha \frac{4\pi q_\alpha^2}{m_\alpha\omega^2} \int d^3u \frac{u_\perp L(f_{\alpha 0})}{\gamma} \\ & - i \sum_\alpha \frac{4\pi q_\alpha^2}{m_\alpha\omega} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \int_0^\infty d\tau \int d^3u u_\perp \mathcal{L}(f_{\alpha 0}) e^{iD_{n\alpha}(0)\tau} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \end{aligned} \quad (3.29a)$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{Q}_P \equiv & -i \sum_\alpha \frac{4\pi q_\alpha^2 c}{m_\alpha\omega} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \int_0^\infty d\tau \int d^3u e^{iD_{n\alpha}(0)\tau} u_\perp \frac{f'_{\alpha 0} b_\alpha \sin \psi}{\gamma} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \\ & - i \sum_\alpha \frac{4\pi q_\alpha^2 c}{m_\alpha\omega \Omega_\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \int_0^\infty d\tau \int d^3u e^{iD_{n\alpha}(0)\tau} u_\perp^2 \mathcal{L}(f'_{\alpha 0}) \left[\frac{J_n}{2} \mathbf{e}_y \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} + \boldsymbol{\Phi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \right]^H \\ & + (\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_y) \sum_\alpha \frac{4\pi q_\alpha^2 c}{m_\alpha\omega^2 \Omega_\alpha} \int d^3u \frac{u_\parallel f'_{\alpha 0}}{\gamma}. \end{aligned} \quad (3.29b)$$

Os operadores \mathcal{L} e L já foram definidos em (2.59). O índice “P”, em $\overleftrightarrow{\epsilon}_P$, indica que o tensor dielétrico efetivo em questão foi determinado para um plasma inomogêneo nos parâmetros temperatura e densidade, imerso em um campo magnético de equilíbrio homogêneo (Caldela, [27]). O termo $\overleftrightarrow{Q}_{lh}$ é a parte deste tensor originada da contribuição localmente homogênea (ou homogênea, se a função distribuição de equilíbrio for homogênea); o termo \overleftrightarrow{Q}_P é a contribuição devida aos efeitos da inomogeneidade dos parâmetros, ou seja, devida aos efeitos da inomogeneidade da função distribuição (é um termo nulo para um

plasma homogêneo). Tal divisão do tensor dielétrico efetivo é conveniente para a desejada unificação das inomogeneidades, como será visto logo a seguir.

3.3 O tensor dielétrico efetivo para plasmas inomogêneos, imersos em campo magnético inomogêneo

Para o estudo de absorção e amplificação de ondas em plasmas com parâmetros inomogêneos, imersos em campo magnético de equilíbrio inomogêneo, é essencial que o tensor dielétrico efetivo contenha os efeitos destas duas inomogeneidades. Nesta seção o esforço será dado no sentido de unificar os tensores efetivos que descrevem separadamente a inomogeneidade dos parâmetros que aparecem na função distribuição, apresentado em (3.28), e a inomogeneidade no campo magnético de equilíbrio, dado por (2.57).

Como já foi dito anteriormente, o formalismo base que será usado no tensor dielétrico efetivo, que conterà os efeitos das duas inomogeneidades, é o formalismo adotado por Gaelzer em [25]. Na prática, isso se dará substituindo a forma funcional (2.53), pela expansão (2.15), no tratamento de Gaelzer, estudado na presente tese na seção 2.4. Não é difícil ver que este procedimento dará como resultado apenas termos a mais no tensor dado por (2.57), e justamente termos que contêm os efeitos do gradiente da função distribuição. Assim sendo, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\epsilon} = \overleftrightarrow{\mathbf{1}} - i \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3u u_{\perp} \mathcal{L}(f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}, x)) e^{iD_{n\alpha}(\epsilon_B)\tau} \\ \times [F_{n\alpha}(\tau)]^{(|n|-1)} \frac{\Pi_{n\alpha}^{-} \Pi_{n\alpha}^{+}}{(W_n^{-} W_n^{+})^{|n|}} - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \int d^3u \frac{u_{\parallel}}{\gamma} L(f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}, x)) \quad (3.30) \\ + \overleftrightarrow{Q} [\epsilon_B, f'_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}, x)] . \end{aligned}$$

O tensor unitário e os dois termos seguintes da expressão acima são justamente os termos que aparecem em (2.57), originados do tratamento de um plasma homogêneo (ou localmente homogêneo), imerso em um campo magnético inomogêneo e, portanto, depende da inomo-

geneidade do campo ϵ_B . O último termo é originado pelo gradiente da $f_{\alpha 0}$, que consta na expansão (2.15). É um termo que depende simultaneamente da inomogeneidade do campo, via ϵ_B , que aparece nas órbitas não perturbadas das partículas na presença de um campo magnético fracamente inomogêneo, conforme o trabalho de Gaelzer; e depende também da inomogeneidade da temperatura e/ou densidade, via $f'_{\alpha 0}$, conforme o trabalho de Caldela. Na hipótese de inomogeneidades fracas, pode-se fazer $\epsilon_B \rightarrow 0$ em $\overleftrightarrow{Q} [\epsilon_B, f'_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}, x)]$, mantendo assim os efeitos da inomogeneidade dos parâmetros da função distribuição de equilíbrio. O tensor unitário, juntamente com os dois termos seguintes de (3.30), são os termos que formam o tensor dielétrico efetivo obtido por Gaelzer, e, portanto, não possuem efeitos dos gradientes dos parâmetros, mas sim exclusivamente efeitos do gradiente do campo magnético de equilíbrio. São estes termos que restam em uma situação completamente homogênea.

Recordando o que foi visto na seção 2.3, Caldela já fez o trabalho de determinar a contribuição dos efeitos dos gradientes dos parâmetros, para uma situação de campo homogêneo, que é precisamente o presente caso, em que $\epsilon_B \rightarrow 0$ no último termo de (3.30). Os termos do tensor dielétrico efetivo obtido por Caldela, que fazem o “papel” de $\epsilon_B \rightarrow 0$ e $f'_{\alpha 0}$ não nula, são aqueles que aparecem em (2.31) e (2.32), que contêm $f'_{\alpha 0}$. Contudo, a forma adequada para estes termos foi sintetizada no tensor \overleftrightarrow{Q}_P , definido em (3.29b). Portanto, formalmente

$$\overleftrightarrow{Q} [\epsilon_B \rightarrow 0, f'_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}, x)] = \overleftrightarrow{Q}_P [f'_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}, x)] . \quad (3.31)$$

Finalmente, o tensor dielétrico efetivo para plasmas com inomogeneidades nos parâmetros da função distribuição, imersos em campo magnético de equilíbrio inomogêneo, será dado por (3.30), usando-se a igualdade acima [17]:

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \overleftrightarrow{\mathbf{1}} + \overleftrightarrow{Q}_B + \overleftrightarrow{Q}_P , \quad (3.32)$$

onde

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{Q}_B \equiv & -i \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3u u_{\perp} \mathcal{L}(f_{\alpha 0}) e^{iD_{n\alpha}(\epsilon_B)\tau} [F_{n\alpha}(\tau)]^{(|n|-1)} \frac{\Pi_{n\alpha}^{-} \Pi_{n\alpha}^{+}}{(W_n^{-} W_n^{+})^{|n|}} \\ & - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega} \int d^3u \frac{u_{\parallel}}{\gamma} L(f_{\alpha 0}) ; \end{aligned} \quad (3.33a)$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{Q}_P \equiv & -i \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2 c}{m_{\alpha}\omega} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3u e^{iD_{n\alpha}(0)\tau} u_{\perp} \frac{f'_{\alpha 0} b_{\alpha} \sin \psi}{\gamma} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \\ & - i \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2 c}{m_{\alpha}\omega \Omega_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3u e^{iD_{n\alpha}(0)\tau} u_{\perp}^2 \mathcal{L}(f'_{\alpha 0}) \left[\frac{J_n}{2} \mathbf{e}_y \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} + \boldsymbol{\Phi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \right]^H \\ & + (\mathbf{e}_y \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y) \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2 c}{m_{\alpha}\omega^2 \Omega_{\alpha}} \int d^3u \frac{u_{\parallel} f'_{\alpha 0}}{\gamma} . \end{aligned} \quad (3.33b)$$

Está implícito que $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(u_{\perp}^2, u_{\parallel}, x)$. Todas as quantidades que constam na expressão acima foram definidas anteriormente. Nota-se claramente neste tensor que as duas inomogeneidades estão separadas. O tensor \overleftrightarrow{Q}_B contém exclusivamente os efeitos do gradiente do campo ambiente, com a função distribuição entrando apenas com efeitos localmente homogêneos. No limite de campo homogêneo, esse tensor corresponde à bem conhecida expressão para o tensor suscetibilidade de um plasma homogêneo. O tensor \overleftrightarrow{Q}_P possui unicamente os efeitos do gradiente dos parâmetros da função distribuição, tais como a densidade e a temperatura. Para este tensor, convém chamar a atenção que $\Omega_{\alpha} = \Omega_{\alpha}(0) = \text{cte}$, de forma que a notação esteja unificada.

O tensor dielétrico efetivo, apresentado em (3.32), é formalmente geral, de modo que não se pode obter resultados numéricos, justamente pela não especificação da função distribuição de equilíbrio. Para o estudo da absorção e amplificação de ondas em um determinado plasma, é necessário que haja um modelamento das características destes plasma na situação de equilíbrio. Este modelamento ocorre na função distribuição de equilíbrio, que fornece as informações sobre a distribuição no espaço de velocidades das partículas, sobre a temperatura, a densidade e, se for o caso, sobre as velocidades de deriva. A seção seguinte tem a finalidade de empregar o formalismo geral desenvolvido até aqui, para o caso de uma função distribuição de equilíbrio específica.

3.4 A aplicação do formalismo para uma distribuição maxwelliana

A partir de agora, será assumido um modelo para a função distribuição de equilíbrio, que será uma maxwelliana no espaço de velocidades com um perfil de densidade linearmente variável com a posição x . Para um plasma fracamente inomogêneo, a função distribuição de equilíbrio pode ser escrita como segue

$$\begin{aligned} f_\alpha(u_\perp^2, u_\parallel, x) &= n(x) \frac{\mu_\alpha^{3/2}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\mu_\alpha u^2/2} = (1 - \epsilon_\alpha x) n_0 \frac{\mu_\alpha^{3/2}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\mu_\alpha u^2/2} \\ &\equiv (1 - \epsilon_\alpha x) n_0 g_\alpha(u_\perp^2, u_\parallel), \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde

$$\mu_\alpha = \frac{m_\alpha c^2}{T_\alpha}, \quad (3.35)$$

sendo T_α a temperatura das partículas da espécie α , e onde

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{n(x)} \left. \frac{dn(x)}{dx} \right|_{x=0} \ll 1 \quad (3.36)$$

é a medida da inomogeneidade da densidade. Por simplicidade a temperatura foi considerada uniforme e isotrópica. A aplicação dos operadores \mathcal{L} e L , definidos em (2.59), na $f_\alpha(u_\perp^2, u_\parallel, x)$, resulta em

$$\begin{aligned} L(f_\alpha) &= \frac{u_\parallel}{u_\perp} \partial_{u_\perp} f_\alpha - \partial_{u_\parallel} f_\alpha = -\mu_\alpha u_\perp \frac{u_\parallel}{u_\perp} f_\alpha + \mu_\alpha u_\parallel f_\alpha = 0, \\ \mathcal{L}(f_\alpha) &= \partial_{u_\perp} f_\alpha - \frac{N_\parallel u_\perp}{\gamma} L(f_\alpha) = -\mu_\alpha u_\perp f_\alpha = -(1 - \epsilon_\alpha x) \mu_\alpha n_0 u_\perp g_\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_\alpha &= -\epsilon_\alpha n_0 g_\alpha, \quad L(f'_\alpha) = 0, \\ \mathcal{L}(f'_\alpha) &= \partial_{u_\perp} f'_\alpha - \frac{N_\parallel u_\perp}{\gamma} L(f'_\alpha) = -\mu_\alpha u_\perp f'_\alpha = \mu_\alpha \epsilon_\alpha n_0 u_\perp g_\alpha. \end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima em (3.33a) e (3.33b), resulta em

$$\begin{aligned} \vec{Q}_B &= i \sum_{\alpha} (1 - \epsilon_{\alpha} x) X_{\alpha} \omega \mu_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3 u u_{\perp}^2 g_{\alpha} e^{i D_{n\alpha}(\epsilon_B) \tau} \\ &\quad \times [F_{n\alpha}(\tau)]^{(|n|-1)} \frac{\Pi_{n\alpha}^{-} \Pi_{n\alpha}^{+}}{(W_n^{-} W_n^{+})^{|n|}} ; \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \vec{Q}_P &= i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \frac{c}{\omega} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3 u e^{i D_{n\alpha}(0) \tau} u_{\perp} \frac{g_{\alpha} b_{\alpha} \sin \psi}{\gamma_{\alpha}} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^{*} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \\ &\quad - i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \omega \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3 u e^{i D_{n\alpha}(0) \tau} u_{\perp}^3 g_{\alpha} \left[\frac{J_n}{2} \mathbf{e}_y \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} + \boldsymbol{\Phi}_{n\alpha}^{*} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \right]^H \\ &\quad - (\mathbf{e}_y \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y) \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \int d^3 u \frac{u_{\parallel} g_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}} . \end{aligned} \quad (3.38)$$

O último termo de \vec{Q}_P é nulo, visto que o integrando é ímpar em u_{\parallel} , conforme pode-se concluir pela dependência em u_{\parallel} que apresenta a função distribuição maxwelliana g_{α} , (3.34).

Nota-se que \vec{Q}_B pode ser separado em duas parcelas, devido ao fator $(1 - \epsilon_{\alpha} x) = (\epsilon_{\alpha}^0 - \epsilon_{\alpha}^1 x)$, onde ϵ_{α}^0 e ϵ_{α}^1 são os termos de ordem zero e ordem um, respectivamente, da expansão da inomogeneidade da densidade. No entanto, como este tensor possui os efeitos do gradiente do campo magnético de equilíbrio ϵ_B , a parcela originada do termo $\epsilon_{\alpha}^1 x$ conterà termos quadráticos com efeitos simultâneos das inomogeneidades do campo magnético e da densidade. Para eliminar estes termos quadráticos, optou-se fazer $\epsilon_B = 0$ no termo que contém ϵ_{α}^1 , resultando

$$\begin{aligned} \vec{Q}_B &= i \sum_{\alpha} X_{\alpha} \omega \mu_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3 u u_{\perp}^2 g_{\alpha} e^{i D_{n\alpha}(\epsilon_B) \tau} [F_{n\alpha}(\tau)]^{(|n|-1)} \frac{\Pi_{n\alpha}^{-} \Pi_{n\alpha}^{+}}{(W_n^{-} W_n^{+})^{|n|}} \\ &\quad - i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} x X_{\alpha} \omega \mu_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3 u u_{\perp}^2 g_{\alpha} \left\{ e^{i D_{n\alpha}(\epsilon_B) \tau} [F_{n\alpha}(\tau)]^{(|n|-1)} \frac{\Pi_{n\alpha}^{-} \Pi_{n\alpha}^{+}}{(W_n^{-} W_n^{+})^{|n|}} \right\}_{\epsilon_B=0} . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Com uma álgebra simples, mas bastante trabalhosa, é possível mostrar que

$$F_{n\alpha} \Big|_{\epsilon_B=0} = b_{\alpha}^2 \quad , \quad W_n^{-} W_n^{+} \Big|_{\epsilon_B=0} = b_{\alpha}^2 \quad , \quad \Pi_{n\alpha}^{-} \Pi_{n\alpha}^{+} \Big|_{\epsilon_B=0} = b_{\alpha}^2 \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^{*} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \quad ,$$

resultando em

$$\left\{ e^{iD_{n\alpha}(\epsilon_B)\tau} [F_{n\alpha}(\tau)]^{(|n|-1)} \frac{\mathbf{\Pi}_{n\alpha}^- \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^+}{(W_n^- W_n^+)^{|n|}} \right\}_{\epsilon_B=0} = e^{iD_{n\alpha}(0)\tau} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} . \quad (3.40)$$

Substituindo (3.40) em (3.39), obtém-se a forma desejada de \overleftrightarrow{Q}_B , tal que não contenha termos onde estejam presentes simultaneamente as duas inomogeneidades:

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{Q}_B = & i \sum_{\alpha} X_{\alpha} \omega \mu_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3u u_{\perp}^2 g_{\alpha} e^{iD_{n\alpha}(\epsilon_B)\tau} [F_{n\alpha}(\tau)]^{(|n|-1)} \frac{\mathbf{\Pi}_{n\alpha}^- \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^+}{(W_n^- W_n^+)^{|n|}} \\ & - ix \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \mu_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3u u_{\perp}^2 g_{\alpha} e^{iD_{n\alpha}(0)\tau} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Usando os resultados obtidos em (3.41) e (3.38), na forma geral do tensor dielétrico efetivo, dada por (3.32), é possível unir todos os termos contendo o gradiente da densidade, ϵ_{α} , em um tensor definido por $\overleftrightarrow{\chi}_P$. A parte que contém os efeitos do gradiente do campo magnético de equilíbrio, ϵ_B , será definida pelo tensor $\overleftrightarrow{\chi}_B$. Assim sendo, o tensor dielétrico efetivo terá a seguinte forma [17]:

$$\overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \overleftrightarrow{1} + \overleftrightarrow{\chi}_B + \overleftrightarrow{\chi}_P, \quad (3.42)$$

onde

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\chi}_P = & i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3u e^{iD_{n\alpha}(0)\tau} u_{\perp} g_{\alpha} \left[\frac{c b_{\alpha} \sin \psi}{\omega \gamma_{\alpha}} - \mu_{\alpha} u_{\perp} x \right] \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \\ & - i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \omega \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3u e^{iD_{n\alpha}(0)\tau} u_{\perp}^3 g_{\alpha} \left[\frac{J_n}{2} \mathbf{e}_y \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} + \boldsymbol{\Phi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \right]^H, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\overleftrightarrow{\chi}_B = i \sum_{\alpha} X_{\alpha} \omega \mu_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\tau \int d^3u u_{\perp}^2 g_{\alpha} e^{iD_{n\alpha}(\epsilon_B)\tau} [F_{n\alpha}(\tau)]^{(|n|-1)} \frac{\mathbf{\Pi}_{n\alpha}^- \mathbf{\Pi}_{n\alpha}^+}{(W_n^- W_n^+)^{|n|}} . \quad (3.44)$$

A condição de ressonância $D_{n\alpha}(\epsilon_B)$ é extraída de (2.54) e (2.55), e, com o uso da quan-

tidade adimensional $\mathbf{u} = \mathbf{p}/(m_\alpha c)$, é dada por

$$D_{n\alpha}(\epsilon_B) = \gamma\omega - ck_{\parallel}u_{\parallel} - n\Omega_\alpha(1 + \epsilon_B x) - \frac{\epsilon_B k_{\perp} u_{\perp}^2 c^2}{2\Omega_\alpha} \sin\psi, \quad (3.45)$$

sendo

$$D_{n\alpha}(0) = \gamma\omega - ck_{\parallel}u_{\parallel} - n\Omega_\alpha. \quad (3.46)$$

A soma dos tensores $\overleftrightarrow{\chi}_P$ e $\overleftrightarrow{\chi}_B$ forma o tensor suscetibilidade elétrica $\overleftrightarrow{\chi}$, definido em (1.11).

Devido à dependência funcional da distribuição $g_\alpha = g_\alpha(u_\perp^2, u_\parallel)$, fica evidente que

$$\overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \overleftrightarrow{\mathbf{1}} + \overleftrightarrow{\chi}_B + \overleftrightarrow{\chi}_P = \overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega; \epsilon_B) + \overleftrightarrow{\chi}_P, \quad (3.47)$$

onde $\overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega; \epsilon_B)$ é o tensor obtido por Gaelzer *et al* em [25,36], o qual foi obtido com o uso de uma distribuição homogênea nos parâmetros e função de u_\perp^2 e u_\parallel .

A dependência funcional da distribuição maxwelliana g_α , dada em (3.34), permite que as integrais em velocidade (du_\parallel e du_\perp) sejam calculadas analiticamente. As duas sub-seções que seguem são destinadas ao cálculo destas integrais e também das integrais do tempo (τ), sendo os tensores $\overleftrightarrow{\chi}_P$ e $\overleftrightarrow{\chi}_B$ tratados independentemente.

3.4.1 Cálculo das integrais em velocidade e tempo que constam

em $\overleftrightarrow{\chi}_B$

O formalismo desenvolvido por Gaelzer *et al*, em [25,36], foi usado para uma distribuição de não equilíbrio termodinâmico, que também depende de u_\perp^2 e u_\parallel , modelada por Dory, Guest e Harris [39], que inclui diferentes temperaturas para as direções paralela e perpendicular. Convém comentar que a função de não equilíbrio citada, com parâmetros adequados, recai em uma função maxwelliana. Entretanto, na presente tese o estudo será realizado apenas para uma distribuição maxwelliana, como a função $g_\alpha(u_\perp^2, u_\parallel)$, já apresentada.

Nos trabalhos acima citados, Gaelzer *et al* também estudaram a absorção e amplificação de ondas para uma distribuição maxwelliana. Semelhantemente ao que ocorre na presente

tese, as integrais em velocidade e no tempo puderam ser calculadas analiticamente. Sendo assim, esse trabalho já fora realizado, de modo que é desnecessário repeti-lo.

O cálculo das integrais em velocidade que aparecem em $\vec{\chi}_B$ pode ser analiticamente realizado nos limites fracamente relativístico e não relativístico. Depois de calculadas essas integrais, os componentes de $\vec{\chi}_B$ podem ser escritos em termos da *função de dispersão de plasma inomogêneo*¹, $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$, como foi mostrado nas referências [25,36]. Esta função pode ser relacionada com outras funções de dispersão de plasma bem conhecidas, que aparecem no caso de plasma homogêneo, como por exemplo as funções de Fried & Conte $Z(z)$, para o limite não relativístico, e de Shkarofskii $\mathcal{F}_{q,r}(z, a)$ para o limite fracamente relativístico.

Para uma distribuição maxwelliana isotrópica, no limite fracamente relativístico, Gaelzer *et al* encontraram o seguinte tensor dielétrico efetivo

$$\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega; \epsilon_B) = \vec{\mathbf{1}} - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{T}}_{n\alpha}^{\leftrightarrow R}, \quad (3.48)$$

de modo que, segundo a igualdade (3.47), o tensor $\vec{\chi}_B$ é dado por

$$\vec{\chi}_B = - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{T}}_{n\alpha}^{\leftrightarrow R}, \quad (3.49)$$

onde os componentes do tensor $\vec{\mathcal{T}}_{n\alpha}^{\leftrightarrow R}$ são escritos em termos da função de dispersão de plasma inomogêneo para o limite fracamente relativístico, caracterizada pelo super-índice R .

A função de dispersão de plasma inomogêneo para uma distribuição maxwelliana isotrópica, e para o limite fracamente relativístico, é dada por

$$\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}(z, \beta, \sigma_{\alpha}, \nu_{\alpha}, \chi_{n\alpha}) \equiv -i \int_0^{\infty} dt \frac{(it)^r e^{izt} e^{-\beta t^2/(1-it)}}{(1-it)^q (1-i\sigma_{\alpha}t)^p} \times e^{-(\nu_{\alpha}^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)/(1-i\sigma_{\alpha}t)} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^m}{[S_{n\alpha}(t)]^l} I_l \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1-i\sigma_{\alpha}t} \right), \quad (3.50)$$

¹ As propriedades desta função são investigadas na referência [25]. Este estudo inclui as aproximações relativística e não relativística, o limite para plasma homogêneo, propagações paralela e perpendicular à inomogeneidade e ângulos arbitrários de propagação.

onde

$$H_{n\alpha}(t) = \nu_\alpha^2 - i2S_n\nu_\alpha \sin \psi \chi_{n\alpha} t - \chi_{n\alpha}^2 t^2 \quad (3.51a)$$

$$S_{n\alpha}(t) = \sqrt{\nu_\alpha^4 - 2\nu_\alpha^2 \cos 2\psi \chi_{n\alpha}^2 t^2 + \chi_{n\alpha}^4 t^4}, \quad (3.51b)$$

sendo introduzidas as seguintes definições:

$$t = \frac{\omega}{\mu_\alpha} \tau, \quad z = \mu_\alpha \delta_{n\alpha}, \quad \delta_{n\alpha} = 1 - nY_\alpha(1 + \epsilon_B x), \quad \beta = \frac{\mu_\alpha N_\parallel^2}{2}, \quad (3.52a)$$

$$\chi_{n\alpha} = \mu_\alpha^{1/2} \rho_n, \quad \sigma_\alpha = 1 - \frac{N_B N_\perp \sin \psi}{Y_\alpha}, \quad \eta_\alpha = \frac{N_B N_\perp \sin \psi}{Y_\alpha} = 1 - \sigma_\alpha \quad (3.52b)$$

$$Y_\alpha = \frac{\Omega_\alpha}{\omega}, \quad \nu_\alpha = \frac{N_\perp}{\mu_\alpha^{1/2} Y_\alpha} = \frac{k_\perp c}{\mu_\alpha^{1/2} \Omega_\alpha} = \frac{k_\perp v_\alpha}{\Omega_\alpha}, \quad \rho_n = \frac{n N_B}{2} \quad \text{e} \quad N_B = \frac{\epsilon_B c}{\omega}. \quad (3.52c)$$

$I_n(z)$ é a função de Bessel modificada de primeiro tipo de ordem n . Nota-se que a integral no tempo não é calculada, mas sim definida como sendo a função de dispersão de plasma inomogêneo $\mathcal{G}_{r,q,p,m,l}$. Essa integral, como está apresentada principalmente no capítulo 5 da presente tese, é fundamental para o surgimento de funções cujas propriedades são amplamente conhecidas na literatura.

Para o limite não relativístico ($\gamma \approx 1$), a função de dispersão de plasma inomogêneo pode ser obtida a partir de (3.50), fazendo $it \rightarrow 0$ e $i\sigma_\alpha \rightarrow -i\eta_\alpha$, resultando em

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,p,m,l}(z, \beta, \eta_\alpha, \nu_\alpha, \chi_{n\alpha}) \equiv & -i \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{izt} e^{-\beta t^2}}{(1 + i\eta_\alpha t)^p} \\ & \times e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)/(1 + i\eta_\alpha t)} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^m}{[S_{n\alpha}(t)]^l} I_l \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1 + i\eta_\alpha t} \right), \quad (3.53) \end{aligned}$$

sendo, portanto, desnecessário o índice q . Esta será a forma da função de dispersão de plasma inomogêneo que será efetivamente usada na presente tese, visto que aqui o estudo é restrito a uma distribuição maxwelliana isotrópica, para o limite não relativístico. Portanto, para esse limite, de acordo com (3.49), o tensor χ_B será dado por

$$\overleftrightarrow{\chi}_B = - \sum_\alpha \mu_\alpha X_\alpha \sum_{n \rightarrow -\infty}^\infty \overleftrightarrow{\mathcal{T}}_{n\alpha} \quad (3.54)$$

onde os componentes do tensor $\vec{\mathcal{T}}_{n\alpha}$ são

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{T}_{n\alpha})_{xx} &= n^2 \mathcal{G}_{0,1,|n|-1,|n|} + 2n\nu_\alpha \text{sen}\psi \chi_{n\alpha} (\mathcal{G}_{1,2,|n|-1,|n|} + \mathcal{G}_{1,2,|n|,|n|+1}) \\
 &\quad + 2\nu_\alpha^2 \text{sen}^2\psi (\mathcal{G}_{0,3,|n|,|n|} - |n| \mathcal{G}_{0,2,|n|-1,|n|} \\
 &\quad - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{0,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,3,|n|,|n|+1})
 \end{aligned} \tag{3.55a}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{T}_{n\alpha})_{yy} &= n^2 \mathcal{G}_{0,1,|n|-1,|n|} - 2n\nu_\alpha \text{sen}\psi \chi_{n\alpha} (\mathcal{G}_{1,2,|n|-1,|n|} - \mathcal{G}_{1,2,|n|,|n|+1}) \\
 &\quad + 2\nu_\alpha^2 \cos^2\psi (\mathcal{G}_{0,3,|n|,|n|} - |n| \mathcal{G}_{0,2,|n|-1,|n|} \\
 &\quad - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{0,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,3,|n|,|n|+1}) \\
 &\quad + 2\chi_{n\alpha}^2 (\mathcal{G}_{2,3,|n|,|n|} + |n| \mathcal{G}_{2,2,|n|-1,|n|} \\
 &\quad - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{2,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{4,3,|n|,|n|+1})
 \end{aligned} \tag{3.55b}$$

$$(\mathcal{T}_{n\alpha})_{zz} = \mathcal{G}_{0,1,|n|,|n|} + \mu_\alpha N_{\parallel}^2 \mathcal{G}_{2,1,|n|,|n|} \tag{3.55c}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{T}_{n\alpha})_{(xy)} &= \pm i 2\nu_\alpha \text{sen}\psi \chi_{n\alpha} (\mathcal{G}_{1,3,|n|,|n|} - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{1,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{3,3,|n|,|n|+1}) \\
 &\quad \pm in [|n| \mathcal{G}_{0,1,|n|-1,|n|} - \nu_\alpha^2 (\mathcal{G}_{0,2,|n|-1,|n|} - \mathcal{G}_{0,2,|n|,|n|+1}) \\
 &\quad + \chi_{n\alpha}^2 (\mathcal{G}_{2,2,|n|-1,|n|} + \mathcal{G}_{2,2,|n|,|n|+1})] - 2n\nu_\alpha \cos\psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{1,2,|n|-1,|n|} \\
 &\quad - \nu_\alpha^2 \text{sen}2\psi (\mathcal{G}_{0,3,|n|,|n|} - |n| \mathcal{G}_{0,2,|n|-1,|n|} \\
 &\quad - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{0,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,3,|n|,|n|+1})
 \end{aligned} \tag{3.55d}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{T}_{n\alpha})_{(xz)} &= \pm i N_{\parallel} \mu_\alpha^{1/2} [n (\chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{2,1,|n|-1,|n|} \pm i\nu_\alpha e^{\pm is_n\psi} \mathcal{G}_{1,1,|n|-1,|n|}) \\
 &\quad + \nu_\alpha \text{sen}\psi (\mathcal{G}_{1,2,|n|,|n|} - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{1,2,|n|,|n|+1} \\
 &\quad \pm i 2\nu_\alpha \cos\psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{2,2,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{3,2,|n|,|n|+1})]
 \end{aligned} \tag{3.55e}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{T}_{n\alpha})_{(yz)} &= N_{\parallel} \mu_\alpha^{1/2} [|n| (\chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{2,1,|n|-1,|n|} \pm i\nu_\alpha e^{\pm is_n\psi} \mathcal{G}_{1,1,|n|-1,|n|}) \\
 &\quad + \nu_\alpha^2 \cos 2\psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{2,2,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha} (\mathcal{G}_{2,2,|n|,|n|} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{4,2,|n|,|n|+1}) \\
 &\quad \mp i\nu_\alpha \cos\psi (\mathcal{G}_{1,2,|n|,|n|} - \nu_\alpha^2 \mathcal{G}_{1,2,|n|,|n|+1} - \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{3,2,|n|,|n|+1})] .
 \end{aligned} \tag{3.55f}$$

O tensor $\vec{\chi}_B$ para o limite não relativístico, dado por (3.54), foi diretamente extraído da referência [25]. Todavia, é possível chegar a este tensor a partir de um tensor obtido com o uso da função distribuição modelada por Dory, Guest e Harris, como fora acima citado. Essa distribuição mais geral, que pode ser encontrada no trabalho [36], recai em

uma maxwelliana isotrópica para $\ell_\alpha = 0$ e $\mu_{\perp\alpha} = \mu_{\parallel\alpha}$, sendo ℓ_α conhecido como índice de cone de perda. Portanto, com esta configuração de parâmetros, o tensor suscetibilidade elétrica $\overleftrightarrow{\chi}_B$ mais geral, obtido a partir da referência [36], para o limite não relativístico, recai no tensor $\overleftrightarrow{\chi}_B$, dado por (3.54). Com isso, convém notar que o formalismo descrito na presente tese, pelo menos para o caso da inomogeneidade de campo magnético de equilíbrio, também pode ser aplicado para uma distribuição mais geral que a maxwelliana, e não isotrópica.

Se o interesse for a análise de um plasma fracamente relativístico, os componentes do tensor $\overleftrightarrow{\mathcal{T}}_{n\alpha}^{\leftrightarrow R}$ serão idênticos aos componentes do tensor $\overleftrightarrow{\mathcal{T}}_{n\alpha}$, dados por (3.55a)-(3.55f), com a diferença que as funções de dispersão de plasma inomogêneo conterão o índice q a mais, segundo a função apresentada em (3.50).

A relação entre a função de dispersão de plasma inomogêneo e as funções de plasma para plasmas homogêneos, conhecidas na literatura, é particularmente útil para o cálculo computacional, visto que as propriedades analíticas destas funções foram bem estudadas, e muitas relações matemáticas úteis podem ser encontradas na literatura. A maneira com que a função $\mathcal{G}_{r,p,m,l}$ pode ser escrita em termos destas funções consta no capítulo 5 da presente tese.

3.4.2 Cálculo das integrais em velocidade e tempo que constam em $\overleftrightarrow{\chi}_P$

As integrais em velocidade do tensor $\overleftrightarrow{\chi}_P$ podem ser analiticamente resolvidas e, tal como ocorre para $\overleftrightarrow{\chi}_B$, as integrais no tempo ficam indicadas, podendo ser escritas em termos da função de Fried & Conte, para o limite não relativístico.

Para facilitar o desenvolvimento, é conveniente separar as integrais em velocidade contidas no tensor $\overleftrightarrow{\chi}_P$, (3.43), como segue:

$$\overleftrightarrow{\chi}_P = i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - n\Omega_{\alpha}(0))\tau} \left[\left(\frac{c}{\omega} \frac{ck_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \sin \psi - \mu_{\alpha} x \right) \overleftrightarrow{I}^{(1)}(\tau) - \mu_{\alpha} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \left(\overleftrightarrow{I}^{(2)}(\tau) + \overleftrightarrow{I}^{(3)}(\tau) \right) \right], \quad (3.56)$$

onde

$$\overset{\leftrightarrow}{I}^{(1)}(\tau) = \int d^3u e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} u_{\perp}^2 g_{\alpha} \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}, \quad (3.57a)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{I}^{(2)}(\tau) = \int d^3u e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} u_{\perp}^3 g_{\alpha} \left[\frac{J_n}{2} \mathbf{e}_2 \boldsymbol{\pi}_{n\alpha} \right]^H, \quad (3.57b)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{I}^{(3)}(\tau) = \int d^3u e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} u_{\perp}^3 g_{\alpha} [\boldsymbol{\Phi}_{n\alpha}^* \boldsymbol{\pi}_{n\alpha}]^H. \quad (3.57c)$$

Para chegar na forma apresentada em (3.56), foi usada a condição de ressonância dada em (3.46), para $\gamma = 1$. Como o interesse no momento é o cálculo das integrais em velocidade, o fator $\exp(-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau)$ foi inserido nas integrais $\overset{\leftrightarrow}{I}^{(1)}$, $\overset{\leftrightarrow}{I}^{(2)}$ e $\overset{\leftrightarrow}{I}^{(3)}$, ficando separadas as integrais em τ .

É possível ainda reescrever o tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_P$ de uma forma mais compacta, como segue:

$$\overset{\leftrightarrow}{\chi}_P = i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{c}{\omega} \frac{ck_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \sin \psi - \mu_{\alpha} x \right) \overset{\leftrightarrow}{J}^{(1)} - \mu_{\alpha} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \left(\overset{\leftrightarrow}{J}^{(2)} + \overset{\leftrightarrow}{J}^{(3)} \right) \right], \quad (3.58)$$

sendo

$$\overset{\leftrightarrow}{J}^{(1)} = \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - n\Omega_{\alpha}(0))\tau} \overset{\leftrightarrow}{I}^{(1)}(\tau), \quad (3.59a)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{J}^{(2)} = \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - n\Omega_{\alpha}(0))\tau} \overset{\leftrightarrow}{I}^{(2)}(\tau), \quad (3.59b)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{J}^{(3)} = \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\omega - n\Omega_{\alpha}(0))\tau} \overset{\leftrightarrow}{I}^{(3)}(\tau). \quad (3.59c)$$

Optou-se por este último modo para ser a forma definitiva a ser usada para o cálculo das integrais contidas no tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_P$. Esta é uma forma particularmente conveniente, pois as integrais em velocidade ficam evidenciadas na definição das integrais $\overset{\leftrightarrow}{I}^{(\ell)}$, e as integrais no tempo na definição das integrais $\overset{\leftrightarrow}{J}^{(\ell)}$, onde $\ell = 1, 2, 3$.

O cálculo das integrais será iniciado pelas integrais $\overset{\leftrightarrow}{I}^{(\ell)}$, por motivo óbvio. Cada conjunto de integrais $\overset{\leftrightarrow}{I}^{(\ell)}$ é composto por um total de 9 integrais, sendo caracterizadas por $I_{ij}^{(\ell)}$, com $\ell = 1, 2, 3$ e $i, j = x, y, z$, e cada uma contendo duas integrais, uma em du_{\parallel} e outra em u_{\perp} , uma vez que a integral em φ é trivialmente resolvida, resultando em 2π . Portanto, um total de 27 integrais duplas devem ser calculadas. Após os cálculos, os resultados

devem ser inseridos em (3.59), para que as integrais no tempo, $J_{ij}^{(\ell)}$, sejam calculadas. Ao todo são mais 27 integrais. Assim, são no total 54 integrais, que podem ser calculadas analiticamente. Apesar destas integrais não serem complicadas, envolvendo cálculo integral básico e integrais tabeladas, o caminho para obter o resultado é bastante laborioso, por serem muitas e, também, pelo próprio cálculo em si. Como exemplo, será mostrado unicamente o desenvolvimento para a obtenção do resultado das integrais $I_{xy}^{(1)}$ e $J_{xy}^{(1)}$, sendo apenas apresentados os resultados finais referentes às outras integrais.

A partir da definição de $\overleftrightarrow{I}^{(1)}(\tau)$, obtém-se

$$I_{xy}^{(1)} = \int d^3u e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} u_{\perp}^2 g_{\alpha} \pi_{n\alpha x}^* \pi_{n\alpha y},$$

onde, usando (3.19a), com uma pequena álgebra chega-se a

$$\pi_x^* \pi_y = \left(\frac{n^2 J_n^2}{b_{\alpha}^2} - J_n'^2 \right) \sin \psi \cos \psi + i \frac{n J_n}{b_{\alpha}} J_n'.$$

O argumento das funções de Bessel e suas derivadas é b_{α} . Por conveniência, será omitida a dependência funcional (τ) das integrais $\overleftrightarrow{I}^{(\ell)}(\tau)$, e também os índices $n\alpha$ do vetor $\boldsymbol{\pi}_{n\alpha}$.

A continuação do desenvolvimento conduz a

$$I_{xy}^{(1)} = \int d^3u e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} u_{\perp}^2 g_{\alpha} \left[\left(\frac{n^2 \Omega_{\alpha}^2}{c^2 k_{\perp}^2} \frac{J_n^2}{u_{\perp}^2} - J_n'^2 \right) \sin \psi \cos \psi + i \frac{n \Omega_{\alpha}}{c k_{\perp}} \frac{J_n J_n'}{u_{\perp}} \right],$$

onde usou-se $b_{\alpha} = ck_{\perp}u_{\perp}/\Omega_{\alpha}$.

Fazendo uso da forma explícita da função distribuição,

$$\begin{aligned} I_{xy}^{(1)} &= \frac{\mu_{\alpha}^{3/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3u e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} u_{\perp}^2 e^{-\mu_{\alpha}u^2/2} \left[\left(\frac{n^2 \Omega_{\alpha}^2}{c^2 k_{\perp}^2} \frac{J_n^2}{u_{\perp}^2} - J_n'^2 \right) \sin \psi \cos \psi + i \frac{n \Omega_{\alpha}}{c k_{\perp}} \frac{J_n J_n'}{u_{\perp}} \right] \\ &= \frac{\mu_{\alpha}^{3/2}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\frac{n^2 \Omega_{\alpha}^2}{c^2 k_{\perp}^2} \sin \psi \cos \psi \mathcal{I}_1 - \sin \psi \cos \psi \mathcal{I}_2 + i \frac{n \Omega_{\alpha}}{c k_{\perp}} \mathcal{I}_3 \right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \int d^3u e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} e^{-\mu_{\alpha}u^2/2} J_n^2, \\ \mathcal{I}_2 &= \int d^3u e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} e^{-\mu_{\alpha}u^2/2} u_{\perp}^2 J_n'^2, \\ \mathcal{I}_3 &= \int d^3u e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} e^{-\mu_{\alpha}u^2/2} u_{\perp} J_n J_n'.\end{aligned}$$

Apenas o cálculo da integral \mathcal{I}_1 será apresentado em detalhe².

Separando as integrais da integral tripla \mathcal{I}_1 , resulta em

$$\mathcal{I}_1 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} e^{-\mu_{\alpha}u_{\parallel}^2/2} \int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\perp} e^{-\mu_{\alpha}u_{\perp}^2/2} J_n^2[(ck_{\perp}/\Omega_{\alpha})u_{\perp}]. \quad (3.61)$$

Utilizando integrais tabeladas que envolvem funções de Bessel³ e suas derivadas, é possível encontrar o resultado da integração em du_{\perp} :

$$\int_0^{\infty} du_{\perp} u_{\perp} e^{-\mu_{\alpha}u_{\perp}^2/2} J_n^2[(ck_{\perp}/\Omega_{\alpha})u_{\perp}] = \frac{1}{\mu_{\alpha}} e^{-\nu_{\alpha}^2} I_n(\nu_{\alpha}^2), \quad (3.62)$$

onde $I_n(\nu_{\alpha}^2)$ é a função de Bessel modificada de ordem n , e ν_{α} é a quantidade definida em (3.52c)

$$\nu_{\alpha}^2 = \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\mu_{\alpha} \Omega_{\alpha}^2} = \frac{k_{\perp}^2 v_{\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2}, \quad (3.63)$$

lembrando que $v_{\alpha}^2 = T_{\alpha}/m_{\alpha}$ e $\mu_{\alpha} = m_{\alpha}c^2/T_{\alpha}$.

Substituindo (3.62) em (3.61), resulta em

$$\mathcal{I}_1 = \frac{2\pi}{\mu_{\alpha}} e^{-\nu_{\alpha}^2} I_n(\nu_{\alpha}^2) \int_{-\infty}^{\infty} du_{\parallel} e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} e^{-\mu_{\alpha}u_{\parallel}^2/2}.$$

A soma dos expoentes da integral acima pode ser reescrita como segue

$$-\mu_{\alpha}u_{\parallel}^2/2 - ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau = -\frac{\mu_{\alpha}}{2} \left(u_{\parallel} + i \frac{ck_{\parallel}\tau}{\mu_{\alpha}} \right)^2 - \frac{c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2}{2\mu_{\alpha}},$$

² Os resultados das integrais restantes, incluindo as integrais não explicitadas aqui, podem ser encontrados no apêndice A.

³ No apêndice A constam também algumas integrais tabeladas úteis envolvendo funções de Bessel.

resultando em

$$\mathcal{I}_1 = \frac{2\pi}{\mu_\alpha} e^{-\nu_\alpha^2} I_n(\nu_\alpha^2) e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel e^{-\frac{\mu_\alpha}{2} \left(u_\parallel + i \frac{ck_\parallel \tau}{\mu_\alpha} \right)^2} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_\alpha^{3/2}} e^{-\nu_\alpha^2} I_n(\nu_\alpha^2) e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)}.$$

Definindo agora uma função auxiliar

$$\mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) \equiv e^{-\nu_\alpha^2} I_n(\nu_\alpha^2), \quad (3.64)$$

o resultado final da integral \mathcal{I}_1 , juntamente com os resultados finais das integrais \mathcal{I}_2 e \mathcal{I}_3 , obtidos com passos semelhantes, fica dado por

$$\mathcal{I}_1 = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_\alpha^{3/2}} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)}, \quad (3.65a)$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_\alpha^{5/2}} \left[\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - 2\nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)}, \quad (3.65b)$$

$$\mathcal{I}_3 = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_\alpha^{5/2}} \frac{ck_\perp}{\Omega_\alpha} \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)}. \quad (3.65c)$$

A função $\mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2)$ indica a derivada de $\mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2)$ com relação ao seu argumento ν_α^2 .

Substituindo os resultados (3.65) em (3.60), obtém-se a forma final do resultado da integral $I_{xy}^{(1)}$, reproduzido abaixo

$$I_{xy}^{(1)} = \frac{1}{\mu_\alpha} [2\nu_\alpha^2 \sin \psi \cos \psi + in] \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)}. \quad (3.66)$$

Resultado das integrais $\overset{\leftarrow}{I}^{(\ell)}$

Com procedimentos semelhantes aos adotados para o cálculo da integral $I_{xy}^{(1)}$, chega-se aos resultados de todas as integrais $\overset{\leftarrow}{I}^{(\ell)}$, os quais foram abaixo reproduzidos:

$$I_{xx}^{(1)} = \frac{1}{\mu_\alpha} \left[\left[\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - 2\nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] (1 - \cos^2 \psi) + \cos^2 \psi \frac{n^2}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) \right] e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)},$$

$$I_{xy}^{(1)} = \frac{1}{\mu_\alpha} [2\nu_\alpha^2 \sin \psi \cos \psi + in] \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)},$$

$$\begin{aligned}
I_{xz}^{(1)} &= -\frac{ck_{\parallel}\tau}{\mu_{\alpha}} \left(i \frac{n\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \cos \psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \sin \psi \frac{ck_{\perp}}{\mu_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right) e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})}, \\
I_{yx}^{(1)} &= \frac{1}{\mu_{\alpha}} [2\nu_{\alpha}^2 \sin \psi \cos \psi - i n] \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})}, \\
I_{yy}^{(1)} &= \frac{1}{\mu_{\alpha}} \left[\left[\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - 2\nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] (1 - \sin^2 \psi) + \sin^2 \psi \frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \right] e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})},
\end{aligned} \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned}
I_{yz}^{(1)} &= -\frac{ck_{\parallel}\tau}{\mu_{\alpha}} \left(i \frac{n\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \sin \psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \cos \psi \frac{ck_{\perp}}{\mu_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right) e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})}, \\
I_{zx}^{(1)} &= -\frac{ck_{\parallel}\tau}{\mu_{\alpha}} \left(i \frac{n\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \cos \psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \sin \psi \frac{ck_{\perp}}{\mu_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right) e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})}, \\
I_{zy}^{(1)} &= -\frac{ck_{\parallel}\tau}{\mu_{\alpha}} \left(i \frac{n\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \sin \psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \cos \psi \frac{ck_{\perp}}{\mu_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right) e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})}, \\
I_{zz}^{(1)} &= \frac{1}{\mu_{\alpha}} \left(1 - \frac{c^2k_{\parallel}^2\tau^2}{\mu_{\alpha}} \right) \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})},
\end{aligned}$$

$$I_{xx}^{(2)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
I_{xy}^{(2)} &= \frac{1}{2\mu_{\alpha}} \left(\frac{n\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \cos \psi [\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2)] \right. \\
&\quad \left. + i \sin \psi \frac{ck_{\perp}}{\mu_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \left\{ (1 - 2\nu_{\alpha}^2) \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) + \left(\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \right\} \right) e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})},
\end{aligned}$$

$$I_{xz}^{(2)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
I_{yx}^{(2)} &= \frac{1}{2\mu_{\alpha}} \left(\frac{n\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \cos \psi [\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2)] \right. \\
&\quad \left. - i \sin \psi \frac{ck_{\perp}}{\mu_{\alpha}\Omega_{\alpha}} \left\{ (1 - 2\nu_{\alpha}^2) \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) + \left(\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \right\} \right) e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})}, \\
I_{yy}^{(2)} &= \frac{n\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \sin \psi \frac{1}{\mu_{\alpha}} [\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2)] e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})},
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$I_{yz}^{(2)} = -i \frac{1}{2\mu_{\alpha}} \frac{ck_{\parallel}\tau}{\mu_{\alpha}} [\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2)] e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})},$$

$$I_{zx}^{(2)} = 0,$$

$$I_{zy}^{(2)} = -i \frac{1}{2\mu_\alpha} \frac{ck_{\parallel}\tau}{\mu_\alpha} [\mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + \nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2)] e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)},$$

$$I_{zz}^{(2)} = 0,$$

$$I_{xx}^{(3)} = \sin \psi \frac{n}{\mu_\alpha} \frac{\Omega_\alpha}{ck_{\perp}} \left\{ \cos^2 \psi [-2\mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + 2\nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2)] \right. \\ \left. + \frac{n^2}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - (1 + 2\nu_\alpha^2) \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right\} e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)},$$

$$I_{xy}^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_\alpha}{ck_{\perp}} \frac{1}{\mu_\alpha} \left\{ n \cos \psi (4 \cos^2 \psi - 3) [\mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2)] \right.$$

$$\left. + i \sin \psi \left[\left(-2 \frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - n^2 + \nu_\alpha^2 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + (2n^2 + \nu_\alpha^2 + 2\nu_\alpha^4) \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right\} e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)},$$

$$I_{xz}^{(3)} = \frac{1}{2\mu_\alpha} \frac{ck_{\parallel}\tau}{\mu_\alpha} \left\{ n \left[2 \cos^2 \psi \left(\frac{1}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right) - \frac{1}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + 2\mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right. \\ \left. - i 2 \left[\left(\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \sin \psi \cos \psi \right\} e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)},$$

$$I_{yx}^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_\alpha}{ck_{\perp}} \frac{1}{\mu_\alpha} \left\{ n \cos \psi (4 \cos^2 \psi - 3) [\mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2)] \right.$$

$$\left. - i \sin \psi \left[\left(-2 \frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - n^2 + \nu_\alpha^2 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + (2n^2 + \nu_\alpha^2 + 2\nu_\alpha^4) \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right\} e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)},$$

$$I_{yy}^{(3)} = \sin \psi \frac{n}{\mu_\alpha} \frac{\Omega_\alpha}{ck_{\perp}} \left\{ \cos^2 \psi [2\mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - 2\nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2)] \right.$$

$$\left. + \left(\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - (\nu_\alpha^2 + 1) \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right\} e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)}, \quad (3.69)$$

$$I_{yz}^{(3)} = \frac{1}{2\mu_\alpha} \frac{ck_{\parallel}\tau}{\mu_\alpha} \left\{ \left[\frac{n}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - n \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] 2 \sin \psi \cos \psi \right.$$

$$\left. + i \left[\left(-2 \frac{n^2}{\nu_\alpha^2} + 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + (\nu_\alpha^2 + 1) \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & +2 \cos^2 \psi \left(\left[\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - 1 \right] \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right) \left. \right\} e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)}, \\
 I_{zx}^{(3)} &= \frac{1}{2\mu_\alpha} \frac{ck_\parallel \tau}{\mu_\alpha} \left\{ -n \left[2 \cos^2 \psi \left(\frac{1}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right) - \frac{1}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + 2\mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right. \\
 & \left. -i 2 \left[\left(\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \sin \psi \cos \psi \right\} e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)}, \\
 I_{zy}^{(3)} &= \frac{1}{2\mu_\alpha} \frac{ck_\parallel \tau}{\mu_\alpha} \left\{ - \left[\frac{n}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - n \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] 2 \sin \psi \cos \psi \right. \\
 & \left. +i \left[\left(-2 \frac{n^2}{\nu_\alpha^2} + 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + \nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) + \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right. \\
 & \left. +2 \cos^2 \psi \left(\left[\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - 1 \right] \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right) \right\} e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)}, \\
 I_{zz}^{(3)} &= \sin \psi n \frac{\Omega_\alpha}{ck_\perp} \frac{1}{\mu_\alpha} \left[1 - \frac{c^2 k_\parallel^2 \tau^2}{\mu_\alpha} \right] \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Para que o tensor $\overleftrightarrow{\chi}_P$ seja definitivamente determinado, os resultados das integrais no tempo $\overleftrightarrow{J}^{(\ell)}$, dadas por (3.59), devem ser encontrados. Apenas os detalhes da integral $J_{xy}^{(1)}$ são apresentados, enquanto os resultados das outras integrais aparecem apenas na sua forma final.

A partir de (3.59a), usando (3.66),

$$\begin{aligned}
 J_{xy}^{(1)} &= \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - n\Omega_\alpha(0))\tau} I_{xy}^{(1)} \\
 &= \frac{1}{\mu_\alpha} [2\nu_\alpha^2 \sin \psi \cos \psi + in] \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - n\Omega_\alpha(0))\tau} e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)}.
 \end{aligned}$$

É conveniente, neste ponto, definir as seguintes integrais

$$\mathcal{I}^{(\tau^0)} = \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - n\Omega_\alpha(0))\tau} e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)} \quad (3.70a)$$

$$\mathcal{I}^{(\tau^1)} = \int_0^\infty d\tau \tau e^{i(\omega - n\Omega_\alpha(0))\tau} e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)} \quad (3.70b)$$

$$\mathcal{I}^{(\tau^2)} = \int_0^\infty d\tau \tau^2 e^{i(\omega - n\Omega_\alpha(0))\tau} e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)}, \quad (3.70c)$$

onde, portanto,

$$J_{xy}^{(1)} = \frac{1}{\mu_\alpha} [2\nu_\alpha^2 \sin \psi \cos \psi + in] \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \mathcal{I}^{(\tau^0)}. \quad (3.71)$$

As integrais $\mathcal{I}^{(\tau^0)}$, $\mathcal{I}^{(\tau^1)}$ e $\mathcal{I}^{(\tau^2)}$ são as integrais no tempo que aparecem em $J_{ij}^{(\ell)}$. Apenas o cálculo de $\mathcal{I}^{(\tau^0)}$ será mostrado em detalhe.

Com uma simples mudança de variável, é possível escrever as integrais (3.70) em termos da função de Fried & Conte, $Z(z)$, e suas derivadas de ordem n , $Z^{(n)}(z)$, sendo

$$Z(z) = i \int_0^\infty dy e^{(izy - y^2/4)} \quad (3.72)$$

e

$$Z^{(n)}(z) = i \int_0^\infty dy (iy)^n e^{(izy - y^2/4)}. \quad (3.73)$$

Ao comparar as integrais $\mathcal{I}^{(\tau)}$ com $Z(z)$ e $Z^{(n)}(z)$, conclui-se que a substituição de variável adequada é

$$\frac{c^2 k_\parallel^2 \tau^2}{2\mu_\alpha} \equiv \frac{y^2}{4} \Rightarrow \tau = \left(\frac{\mu_\alpha}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{ck_\parallel} y \Rightarrow d\tau = \left(\frac{\mu_\alpha}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{ck_\parallel} dy.$$

Logo,

$$(\omega - n\Omega_\alpha(0))\tau = z_n y,$$

onde foi definida a quantidade

$$z_n \equiv \left(\frac{\mu_\alpha}{2}\right)^{1/2} \frac{(\omega - n\Omega_\alpha(0))}{ck_\parallel}. \quad (3.74)$$

Portanto,

$$\mathcal{I}^{(\tau^0)} = \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega - n\Omega_\alpha(0))\tau} e^{-c^2 k_\parallel^2 \tau^2 / (2\mu_\alpha)} = \left(\frac{\mu_\alpha}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{ck_\parallel} \int_0^\infty dy e^{(iz_n y - y^2/4)}.$$

Comparando a integral em y acima com a definição da função $Z(z)$, dada por (3.72),

chega-se ao resultado definitivo para a integral $\mathcal{I}^{(\tau^0)}$ e, com passos semelhantes, chega-se também aos resultados das integrais $\mathcal{I}^{(\tau^1)}$ e $\mathcal{I}^{(\tau^2)}$:

$$\mathcal{I}^{(\tau^0)} = -i \left(\frac{\mu_\alpha}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel}} Z(z_n) \quad (3.75a)$$

$$\mathcal{I}^{(\tau^1)} = -\frac{\mu_\alpha}{2} \frac{1}{c^2 k_{\parallel}^2} Z^{(1)}(z_n) \quad (3.75b)$$

$$\mathcal{I}^{(\tau^2)} = i \left(\frac{\mu_\alpha}{2} \right)^{3/2} \frac{1}{c^3 k_{\parallel}^3} Z^{(2)}(z_n), \quad (3.75c)$$

onde $Z^{(1)}(z_n)$ e $Z^{(2)}(z_n)$ são as derivadas primeira e segunda, respectivamente, da função $Z(z_n)$ com relação ao argumento z_n .

Substituindo (3.75a) em (3.71), obtém-se

$$J_{xy}^{(1)} = -i \left(\frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel}} [2\nu_\alpha^2 \sin \psi \cos \psi + in] \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) Z(z_n),$$

sendo esta a forma definitiva para o resultado da integral $J_{xy}^{(1)}$.

Resultado das integrais $J^{\leftarrow(\ell)}$

Utilizando os resultados (3.75), é possível obter o resultado de todas as integrais $J_{ij}^{(\ell)}$, expressas em (3.59):

$$\begin{aligned} J_{xx}^{(1)} &= -i \left(\frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel}} \left[\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - 2\nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \sin^2 \psi \right] Z(z_n), \\ J_{xy}^{(1)} &= -i \left(\frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel}} [2\nu_\alpha^2 \sin \psi \cos \psi + in] \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) Z(z_n), \\ J_{xz}^{(1)} &= \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{ck_{\parallel}} \frac{\Omega_\alpha}{ck_{\perp}} (in \cos \psi \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \nu_\alpha^2 \sin \psi \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2)) Z^{(1)}(z_n), \\ J_{yx}^{(1)} &= -i \left(\frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel}} [2\nu_\alpha^2 \sin \psi \cos \psi - in] \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) Z(z_n), \\ J_{yy}^{(1)} &= -i \left(\frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel}} \left[\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - 2\nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \cos^2 \psi \right] Z(z_n), \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$J_{yz}^{(1)} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{ck_{\parallel}} \frac{\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \left(i n \sin \psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \nu_{\alpha}^2 \cos \psi \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right) Z^{(1)}(z_n),$$

$$J_{zx}^{(1)} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{ck_{\parallel}} \frac{\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \left(i n \cos \psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \sin \psi \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right) Z^{(1)}(z_n),$$

$$J_{zy}^{(1)} = \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{ck_{\parallel}} \frac{\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \left(i n \sin \psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \cos \psi \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right) Z^{(1)}(z_n),$$

$$J_{zz}^{(1)} = -i \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}}\right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel}} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \left[Z(z_n) + \frac{1}{2} Z^{(2)}(z_n) \right],$$

$$J_{xx}^{(2)} = 0,$$

$$J_{xy}^{(2)} = -i \frac{1}{2} \frac{1}{ck_{\parallel}} \frac{\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}}\right)^{1/2} \left\{ n \cos \psi \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right. \\ \left. + i \sin \psi \nu_{\alpha}^2 \left[(1 - 2\nu_{\alpha}^2) \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) + \left(\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} - 1\right) \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right\} Z(z_n),$$

$$J_{xz}^{(2)} = 0,$$

$$J_{yx}^{(2)} = -i \frac{1}{2} \frac{1}{ck_{\parallel}} \frac{\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}}\right)^{1/2} \left\{ n \cos \psi \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right. \\ \left. - i \sin \psi \nu_{\alpha}^2 \left[(1 - 2\nu_{\alpha}^2) \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) + \left(\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} - 1\right) \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right\} Z(z_n),$$

$$J_{yy}^{(2)} = -i \frac{n\Omega_{\alpha}}{ck_{\perp}} \sin \psi \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}}\right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel}} \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] Z(z_n), \quad (3.77)$$

$$J_{yz}^{(2)} = i \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}}\right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel}} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}}\right)^{1/2} \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] Z^{(1)}(z_n),$$

$$J_{zx}^{(2)} = 0,$$

$$J_{zy}^{(2)} = i \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}}\right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel}} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}}\right)^{1/2} \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] Z^{(1)}(z_n),$$

$$J_{zz}^{(2)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
J_{xx}^{(3)} &= -i n \sin \psi \left(\frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel} ck_{\perp}} \frac{\Omega_\alpha}{ck_{\parallel} ck_{\perp}} \left\{ \cos^2 \psi \left[-2\mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + 2\nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{n^2}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - (1 + 2\nu_\alpha^2) \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right\} Z(z_n), \\
J_{xy}^{(3)} &= -i \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel} ck_{\perp}} \frac{\Omega_\alpha}{ck_{\parallel} ck_{\perp}} \left\{ n \cos \psi (4 \cos^2 \psi - 3) [\mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2)] \right. \\
&\quad \left. + i \sin \psi \left[\left(-2 \frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - n^2 + \nu_\alpha^2 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + (2n^2 + \nu_\alpha^2 + 2\nu_\alpha^4) \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right\} Z(z_n), \\
J_{xz}^{(3)} &= \frac{1}{4\mu_\alpha} \frac{1}{ck_{\parallel}} \left\{ -n \left[2 \cos^2 \psi \left(\frac{1}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right) - \frac{1}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + 2\mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + i 2 \left[\left(\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \sin \psi \cos \psi \right\} Z^{(1)}(z_n), \\
J_{yx}^{(3)} &= -i \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel} ck_{\perp}} \frac{\Omega_\alpha}{ck_{\parallel} ck_{\perp}} \left\{ n \cos \psi (4 \cos^2 \psi - 3) [\mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2)] \right. \\
&\quad \left. - i \sin \psi \left[\left(-2 \frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - n^2 + \nu_\alpha^2 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + (2n^2 + \nu_\alpha^2 + 2\nu_\alpha^4) \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right\} Z(z_n), \\
J_{yy}^{(3)} &= -i n \sin \psi \left(\frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel} ck_{\perp}} \frac{\Omega_\alpha}{ck_{\parallel} ck_{\perp}} \left\{ \cos^2 \psi \left[2\mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - 2\nu_\alpha^2 \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - (\nu_\alpha^2 + 1) \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right\} Z(z_n), \tag{3.78} \\
J_{yz}^{(3)} &= \frac{1}{4\mu_\alpha} \frac{1}{ck_{\parallel}} \left\{ - \left[\frac{n}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - n \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] 2 \sin \psi \cos \psi \right. \\
&\quad \left. - i \left[\left(-2 \frac{n^2}{\nu_\alpha^2} + 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + (\nu_\alpha^2 + 1) \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2 \cos^2 \psi \left(\left[\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - 1 \right] \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right) \right\} Z^{(1)}(z_n), \\
J_{zx}^{(3)} &= \frac{1}{4\mu_\alpha} \frac{1}{ck_{\parallel}} \left\{ n \left[2 \cos^2 \psi \left(\frac{1}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right) - \frac{1}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + 2\mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + i 2 \left[\left(\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \sin \psi \cos \psi \right\} Z^{(1)}(z_n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{zy}^{(3)} &= \frac{1}{4\mu_\alpha} \frac{1}{ck_{\parallel}} \left\{ \left[\frac{n}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - n \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] 2 \sin \psi \cos \psi \right. \\
 &\quad \left. - i \left[\left(-2 \frac{n^2}{\nu_\alpha^2} + 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + (\nu_\alpha^2 + 1) \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cos^2 \psi \left(\left[\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - 1 \right] \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right) \right\} Z^{(1)}(z_n), \\
 J_{zz}^{(3)} &= -i \sin \psi \left(\frac{1}{2\mu_\alpha} \right)^{1/2} \frac{1}{ck_{\parallel}} n \frac{\Omega_\alpha}{ck_{\perp}} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) \left[Z(z_n) + \frac{1}{2} Z^{(2)}(z_n) \right].
 \end{aligned}$$

Os componentes do tensor $\overleftrightarrow{\chi}_P$

Escrevendo o tensor $\overleftrightarrow{\chi}_P$, dado por (3.58), em termos de seus componentes, resulta em

$$\chi_{Pij} = i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{c}{\omega} \frac{ck_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \sin \psi - \mu_{\alpha} x \right) J_{ij}^{(1)} - \mu_{\alpha} \frac{c}{\Omega_{\alpha}} \left(J_{ij}^{(2)} + J_{ij}^{(3)} \right) \right]. \quad (3.79)$$

Substituindo os resultados das integrais $J_{ij}^{(\ell)}$, expressos em (3.76)-(3.78), nos componentes χ_{Pij} , e depois de uma álgebra nada difícil, mas bastante trabalhosa, chega-se a uma forma, ainda não definitiva, para os componentes do tensor $\overleftrightarrow{\chi}_P$:

$$\begin{aligned}
 \chi_{Pxx} &= \sin \psi \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{ck_{\perp}}{\omega} \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}} \right)^{1/2} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - 2\nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \sin^2 \psi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{n}{\nu_{\alpha}^2} \left\{ 2 \sin^2 \psi \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] + \frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) - 2\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \right\} \right] Z(z) \\
 &\quad - i x \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{xx}^{(1)}, \\
 \chi_{Pxy} &= \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{ck_{\perp}}{\omega} \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}} \right)^{1/2} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sin \psi \left[2\nu_{\alpha}^2 \sin \psi \cos \psi + in \right] \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{1}{\nu_{\alpha}^2} \left\{ n \cos \psi \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - 2 \sin^2 \psi \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right] \right\} \right] \\
 &\quad + i \sin \psi \left[- \frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + (n^2 + \nu_{\alpha}^2) \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \left. \right] Z(z) - i x \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{xy}^{(1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{P_{xz}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{k_{\parallel}} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sin \psi Y_{\alpha} \left[-n \cos \psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - i \nu_{\alpha}^2 \sin \psi \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + i n \left[\cos^2 \psi \left(\frac{1}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right) - \frac{1}{2\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \sin \psi \cos \psi \right\} Z^{(1)}(z) \\
&\quad - i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\mu_{\alpha} x) J_{xz}^{(1)}, \\
\chi_{P_{yx}} &= \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{ck_{\perp}}{\omega} \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}} \right)^{1/2} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sin \psi \left[2\nu_{\alpha}^2 \sin \psi \cos \psi - in \right] \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{1}{\nu_{\alpha}^2} \left\{ n \cos \psi \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - 2 \sin^2 \psi \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. - i \sin \psi \left[- \frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + (n^2 + \nu_{\alpha}^2) \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right\} Z(z) - ix \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{yx}^{(1)}, \\
\chi_{P_{yy}} &= \sin \psi \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{ck_{\perp}}{\omega} \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}} \right)^{1/2} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - 2\nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \cos^2 \psi \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{n}{\nu_{\alpha}^2} \left\{ 2 \cos^2 \psi \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] + \frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right\} \right] Z(z) \\
&\quad - ix \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{yy}^{(1)}, \tag{3.80} \\
\chi_{P_{yz}} &= \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{k_{\parallel}} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[Y_{\alpha} \sin \psi \left[-n \sin \psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + i \nu_{\alpha}^2 \cos \psi \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \frac{1}{2} \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) - \cos^2 \psi \left[\left(\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + i \left[\frac{1}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] n \sin \psi \cos \psi \right] Z^{(1)}(z) \\
&\quad - ix \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{yz}^{(1)}, \\
\chi_{P_{zx}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{k_{\parallel}} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sin \psi Y_{\alpha} \left[-n \cos \psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + i \nu_{\alpha}^2 \sin \psi \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i n \left[\cos^2 \psi \left(\frac{1}{\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right) - \frac{1}{2\nu_\alpha^2} \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) + \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \\
& + \left[\left(\frac{n^2}{\nu_\alpha^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_\alpha^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_\alpha^2) \right] \sin \psi \cos \psi \left. \right\} Z^{(1)}(z) \\
& - i \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\mu_{\alpha} x) J_{zx}^{(1)}, \\
\chi_{Pzy} = & \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{k_{\parallel}} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[Y_{\alpha} \sin \psi \left[-n \sin \psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - i \nu_{\alpha}^2 \cos \psi \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right. \\
& + \frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \frac{1}{2} \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) - \cos^2 \psi \left[\left(\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \\
& \left. - i \left[\frac{1}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] n \sin \psi \cos \psi \right] Z^{(1)}(z) \\
& - i x \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{zy}^{(1)}, \\
\chi_{Pzz} = & \sin \psi \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{ck_{\perp}}{\omega} \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}} \right)^{1/2} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{n}{\nu_{\alpha}^2} \right] \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \left[Z(z) + \frac{1}{2} Z^{(2)}(z) \right] \\
& - i x \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \epsilon_{\alpha} X_{\alpha} \omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{zz}^{(1)}.
\end{aligned}$$

3.4.3 A forma final do tensor dielétrico efetivo

Para facilitar cálculos futuros, e por estarem espalhados neste capítulos os resultados importantes, convém expressar de uma só vez a forma completa e definitiva do tensor dielétrico efetivo. Assim, o tensor dielétrico efetivo para plasmas fracamente inomogêneos em densidade, cujos equilíbrios são descritos por uma distribuição maxwelliana isotrópica, imersos em campo magnético de equilíbrio fracamente inomogêneo, no limite não relativístico, é dado por

$$\vec{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \vec{\mathbf{1}} + \vec{\chi}_B(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) + \vec{\chi}_P(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega), \quad (3.81)$$

onde os componentes χ_{Bij} , extraídos de (3.54) e (3.55), são

$$\begin{aligned} \chi_{Bxx} = & - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \left\{ n^2 \mathcal{G}_{0,1,|n|-1,|n|} + 2n\nu_{\alpha} \text{sen} \psi \chi_{n\alpha} (\mathcal{G}_{1,2,|n|-1,|n|} + \mathcal{G}_{1,2,|n|,|n|+1}) \right. \\ & \left. + 2\nu_{\alpha}^2 \text{sen}^2 \psi (\mathcal{G}_{0,3,|n|,|n|} - |n| \mathcal{G}_{0,2,|n|-1,|n|} - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{G}_{0,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,3,|n|,|n|+1}) \right\} \quad (3.82a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{Byy} = & - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \left\{ n^2 \mathcal{G}_{0,1,|n|-1,|n|} - 2n\nu_{\alpha} \text{sen} \psi \chi_{n\alpha} (\mathcal{G}_{1,2,|n|-1,|n|} - \mathcal{G}_{1,2,|n|,|n|+1}) \right. \\ & + 2\nu_{\alpha}^2 \cos^2 \psi (\mathcal{G}_{0,3,|n|,|n|} - |n| \mathcal{G}_{0,2,|n|-1,|n|} - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{G}_{0,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,3,|n|,|n|+1}) \\ & \left. + 2\chi_{n\alpha}^2 (\mathcal{G}_{2,3,|n|,|n|} + |n| \mathcal{G}_{2,2,|n|-1,|n|} - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{4,3,|n|,|n|+1}) \right\} \quad (3.82b) \end{aligned}$$

$$\chi_{Bzz} = - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \left\{ \mathcal{G}_{0,1,|n|,|n|} + \mu_{\alpha} N_{\parallel}^2 \mathcal{G}_{2,1,|n|,|n|} \right\} \quad (3.82c)$$

$$\begin{aligned} \chi_{B\begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix}} = & - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \left\{ \pm i 2\nu_{\alpha} \text{sen} \psi \chi_{n\alpha} (\mathcal{G}_{1,3,|n|,|n|} - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{G}_{1,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{3,3,|n|,|n|+1}) \right. \\ & \pm i n [|n| \mathcal{G}_{0,1,|n|-1,|n|} - \nu_{\alpha}^2 (\mathcal{G}_{0,2,|n|-1,|n|} - \mathcal{G}_{0,2,|n|,|n|+1}) \\ & + \chi_{n\alpha}^2 (\mathcal{G}_{2,2,|n|-1,|n|} + \mathcal{G}_{2,2,|n|,|n|+1})] - 2n\nu_{\alpha} \cos \psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{1,2,|n|-1,|n|} \\ & \left. - \nu_{\alpha}^2 \text{sen} 2\psi (\mathcal{G}_{0,3,|n|,|n|} - |n| \mathcal{G}_{0,2,|n|-1,|n|} - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{G}_{0,3,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{2,3,|n|,|n|+1}) \right\} \quad (3.82d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{B\begin{pmatrix} xz \\ zx \end{pmatrix}} = & - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \left\{ \pm i N_{\parallel} \mu_{\alpha}^{1/2} [n (\chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{2,1,|n|-1,|n|} \pm i \nu_{\alpha} e^{\pm i s_n \psi} \mathcal{G}_{1,1,|n|-1,|n|}) \right. \\ & + \nu_{\alpha} \text{sen} \psi (\mathcal{G}_{1,2,|n|,|n|} - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{G}_{1,2,|n|,|n|+1}) \\ & \left. \pm i 2\nu_{\alpha} \cos \psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{2,2,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{3,2,|n|,|n|+1}) \right\} \quad (3.82e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{B\begin{pmatrix} yz \\ zy \end{pmatrix}} = & - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} X_{\alpha} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} \left\{ N_{\parallel} \mu_{\alpha}^{1/2} [|n| (\chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{2,1,|n|-1,|n|} \pm i \nu_{\alpha} e^{\pm i s_n \psi} \mathcal{G}_{1,1,|n|-1,|n|}) \right. \\ & + \nu_{\alpha}^2 \cos 2\psi \chi_{n\alpha} \mathcal{G}_{2,2,|n|,|n|+1} + \chi_{n\alpha} (\mathcal{G}_{2,2,|n|,|n|} + \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{4,2,|n|,|n|+1}) \\ & \left. \mp i \nu_{\alpha} \cos \psi (\mathcal{G}_{1,2,|n|,|n|} - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{G}_{1,2,|n|,|n|+1} - \chi_{n\alpha}^2 \mathcal{G}_{3,2,|n|,|n|+1}) \right\} , \quad (3.82f) \end{aligned}$$

e os componentes χ_{Pij} , em uma forma mais compacta que os obtidos em (3.80), são

$$\begin{aligned} \chi_{Pxx} = \text{sen}\psi \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{ck_{\perp}}{\omega} \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}} \right)^{1/2} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \left[\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - 2\nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \text{sen}^2\psi \right. \\ \left. - \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{n}{\nu_{\alpha}^2} \left\{ 2 \text{sen}^2\psi \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) - 2\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \right\} \right] Z(z_n) \end{aligned} \quad (3.83a)$$

$$\begin{aligned} \chi_{Pyy} = \text{sen}\psi \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{ck_{\perp}}{\omega} \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}} \right)^{1/2} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \left[\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - 2\nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \cos^2\psi \right. \\ \left. - \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{n}{\nu_{\alpha}^2} \left\{ 2 \cos^2\psi \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] + \frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right\} \right] Z(z_n) \end{aligned} \quad (3.83b)$$

$$\chi_{Pzz} = \text{sen}\psi \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{ck_{\perp}}{\omega} \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}} \right)^{1/2} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{n}{\nu_{\alpha}^2} \right] \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \left[Z(z_n) + \frac{1}{2} Z^{(2)}(z_n) \right] \quad (3.83c)$$

$$\begin{aligned} \chi_{P(xy)} = \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{ck_{\perp}}{\omega} \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2\mu_{\alpha}} \right)^{1/2} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \left[\text{sen}\psi \left[2\nu_{\alpha}^2 \text{sen}\psi \cos\psi + in \right] \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right. \\ \left. - \frac{1}{Y_{\alpha}} \frac{1}{\nu_{\alpha}^2} \left\{ n \cos\psi \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - 2\text{sen}^2\psi \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right] \right. \right. \\ \left. \left. \pm i \text{sen}\psi \left[- \frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + (n^2 + \nu_{\alpha}^2) \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right\} \right] Z(z_n) \end{aligned} \quad (3.83d)$$

$$\begin{aligned} \chi_{P(xz)} = \frac{1}{2} \frac{1}{k_{\parallel}} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \left\{ \text{sen}\psi Y_{\alpha} \left[-n \cos\psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \mp i \nu_{\alpha}^2 \text{sen}\psi \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right. \\ \left. \pm in \left[\cos^2\psi \left(\frac{1}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right) - \frac{1}{2\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \text{sen}\psi \cos\psi \right\} Z^{(1)}(z_n) \end{aligned} \quad (3.83e)$$

$$\begin{aligned} \chi_{P(yz)} = \frac{1}{2} \frac{1}{k_{\parallel}} \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \frac{X_{\alpha}}{Y_{\alpha}} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \left[Y_{\alpha} \text{sen}\psi \left[-n \text{sen}\psi \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \pm i \nu_{\alpha}^2 \cos\psi \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right. \\ \left. + \frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \frac{1}{2} \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) - \cos^2\psi \left[\left(\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] \right. \\ \left. \pm i \left[\frac{1}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] n \text{sen}\psi \cos\psi \right] Z^{(1)}(z_n) \end{aligned} \quad (3.83f)$$

sendo $\mathcal{G}_{r,p,m,l}$ a função de dispersão de plasma inomogêneo, para o limite não relativístico, dada por (3.53), e z_n o argumento da função de Fried & Conte, dado por (3.74).

Convém destacar que os componentes do tensor $\vec{\chi}_P$ acima descritos foram obtidos a partir de (3.80), supondo $x = 0$. Não há perda de generalidade nesta hipótese, visto que os perfis das inomogeneidades são lineares. Além disso, ponto a ponto, os efeitos dos gradientes são considerados (abordagem localmente não homogênea) e, portanto, no ponto $x = 0$ esses efeitos são levados em conta.

A função de dispersão de plasma inomogêneo, apesar da sua forma complicada, pode ser escrita em termos da função de Fried & Conte, para propagação de onda perpendicular à inomogeneidade, ou seja, para $\psi = \pi/2$. Os passos principais para se chegar nesta forma desejada constam no capítulo 5 da presente tese.

A forma do tensor dielétrico efetivo apresentada em (3.81) é a forma escolhida como definitiva. É a partir dela que se consolidará a aplicação da abordagem proposta no presente capítulo, no estudo das instabilidades de deriva LHDI e MTSI (IWI). O capítulo que segue serve exatamente para dar um apanhado amplo das características dessas instabilidades, antes da aplicação efetiva dos resultados aqui apresentados. Esse direcionamento ao estudo das instabilidades citadas consta no capítulo 5.

4. As Instabilidades de Deriva LHDI e MTSI (IWI)

4.1 Introdução

Este capítulo será dedicado principalmente ao estudo das instabilidades de deriva LHDI (*lower hybrid drift instability*) e MTSI (*modified two-stream instability*). Será feita uma breve descrição dos principais mecanismos de origem de derivas em plasmas, tais como a inhomogeneidade em densidade, que gera a *deriva diamagnética*, e a inhomogeneidade do campo magnético externo, que gera a *deriva de gradiente de B*. As características fundamentais destas instabilidades serão delineadas em um resumo, sob um contexto histórico, realçando trabalhos mais relacionados com a presente tese. A tentativa de obtenção de um formalismo que unifique a descrição das duas instabilidades também estará presente neste capítulo. Sendo o ambiente da magnetosfera fundamental para a escolha dos parâmetros que serão usados na aplicação do formalismo descrito nos capítulos anteriores, e a título de complemento das informações, será efetuada uma sucinta explanação sobre a magnetosfera, enfocando a nomenclatura básica e algumas características, sem dar ênfase a modelos pormenorizados.

4.2 Velocidade de deriva

Em um plasma homogêneo imerso em campo magnético e elétrico também homogêneos, as partículas se movimentam obedecendo as equações de movimento regidas pela força de Lorentz [40].

Na ausência de campo elétrico os íons e os elétrons seguem trajetórias espiraladas em torno das linhas de campo magnético. Neste caso, o centro guia desloca-se com velocidade

constante paralelamente ao campo magnético. No plano perpendicular ao campo magnético as partículas descrevem um movimento circular uniforme, cuja frequência é a conhecida e já mencionada *frequência de cíclotron* $\Omega_\alpha = q_\alpha B_0 / m_\alpha c$. O raio da circunferência é o chamado *raio de Larmor* $r_{L\alpha} = v_\perp / |\Omega_\alpha|$, onde v_\perp é a velocidade da partícula no plano perpendicular ao campo magnético. O raio de Larmor dos íons é bem maior que o dos elétrons, devido a sua grande massa. O sentido de rotação depende da carga da partícula.

Ao considerarmos a presença de campo elétrico e magnético simultâneos, além do movimento descrito acima, aparece uma velocidade de deriva perpendicular a estes dois campos, $\mathbf{v}_E = \mathbf{E} \times \mathbf{B}_0 / B_0^2$. Portanto o centro guia não mais descreve uma trajetória paralela ao campo magnético, mas apresenta também um componente perpendicular.

Para um plasma inhomogêneo em densidade imerso em um campo magnético também inhomogêneo, superpondo-se aos movimentos já descritos, surgem velocidades de deriva ocasionadas exclusivamente pelas inhomogeneidades. Visando facilitar a análise das origens destas derivas, vamos considerar um campo magnético apenas na direção do eixo z , com gradiente apenas na direção do eixo x , ou seja, $\mathbf{B}_0(x) = B_0(x)\mathbf{e}_z$. A densidade inhomogênea terá gradiente apenas na direção e sentido de $-\mathbf{e}_x$, ou seja, $\nabla n(x) = -|dn(x)/dx|\mathbf{e}_x$. Tais configurações, para ambas inhomogeneidades, serão úteis para aplicação futura nessa tese.

Vamos analisar as duas inhomogeneidades separadamente. Com o auxílio da figura 4.1 podemos entender a origem da deriva para o caso de campo inhomogêneo.

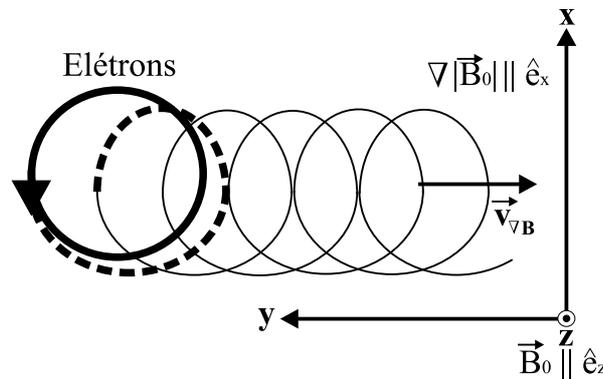


Fig. 4.1: Deriva devido ao gradiente de \mathbf{B}_0 .

A linha mais grossa representa a projeção do movimento de um elétron no plano per-

pendicular (plano $x - y$) à direção de um campo magnético homogêneo. Se o campo é inhomogêneo o raio de Larmor tende a aumentar na parte inferior da circunferência, por causa do decréscimo do valor de B_0 . Quando o elétron retorna à parte superior da circunferência, ocorre o contrário: o raio de Larmor tende a diminuir devido ao aumento de B_0 . Este movimento é representado pela linha tracejada. Depois de completada uma volta o movimento se repete, e está representado pela linha fina. Desta forma o centro guia do elétron passa a apresentar uma velocidade de deriva $\mathbf{v}_{\nabla B} = -v_{\nabla B} \mathbf{e}_y$, chamada de *deriva de gradiente de B*. Para os íons a deriva está no sentido contrário. Se a variação do campo com x é pequena, a linha tracejada diferirá levemente de uma circunferência e, como efeito, a deriva de gradiente de B será pequena. Para um caso mais geral, em que o gradiente esteja em direção arbitrária, a expressão para a deriva de gradiente de B é dada por [41]

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{1}{2B_0} \frac{v_{\perp}^2}{\Omega_{\alpha}} \left(\mathbf{B}_0 \times \frac{\nabla B_0}{B_0} \right), \quad (4.1)$$

onde a quantidade $|\nabla B_0|/B_0$ representa a ordem de grandeza da inhomogeneidade do campo magnético de equilíbrio, e seu inverso é interpretado como a escala característica da variação espacial de B_0 . O sinal que indica o sentido da deriva, para íons e elétrons, está contido na frequência de cíclotron.

Quando comparamos uma situação sem campo com uma situação com campo magnético homogêneo, o módulo da velocidade das partículas não é afetado, visto que a força magnética serve apenas para mudar a direção da velocidade. Com a inhomogeneidade de campo, em cada ponto do plano perpendicular ao campo magnético (plano $x-y$ da figura 4.1), a direção de \mathbf{v}_{\perp} se altera quando comparada com a situação de campo homogêneo, porém o seu módulo permanece constante. Como \mathbf{v}_{\parallel} também não se altera devido à força magnética, o módulo total da velocidade permanece constante.

A deriva decorrente da inhomogeneidade em densidade pode ser entendida a partir da figura 4.2. Cada circunferência representa o movimento perpendicular dos elétrons, imersos em campo magnético homogêneo. A parte da figura com mais elétrons corresponde a maior densidade.

Vemos que na parte inferior do retângulo (maior densidade) há muitos elétrons com

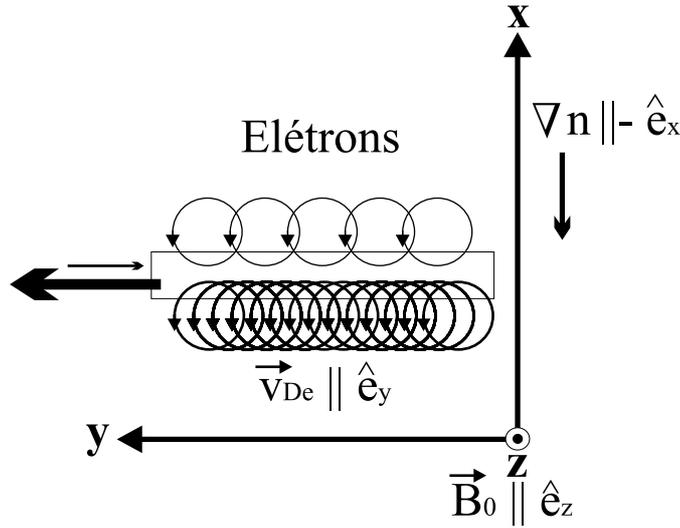


Fig. 4.2: Deriva devida a inhomogeneidade da densidade.

velocidade na direção \mathbf{e}_y , quando comparamos com a parte superior (menor densidade), onde os elétrons possuem velocidade na direção $-\mathbf{e}_y$. Esta diferença está representada pelas setas maior e menor, respectivamente. Desta forma podemos observar claramente que há uma velocidade líquida de deriva, \mathbf{v}_{De} , na direção \mathbf{e}_y . Para os íons o sentido é contrário. O que ocorre é que a velocidade média dos elétrons não é mais nula, como no caso de uma distribuição Maxwelliana com densidade uniforme, mas possui um movimento preferencial na direção \mathbf{e}_y . A função distribuição deve conter esta informação e também a dependência explícita da densidade com a posição. Para um caso mais geral a expressão para a deriva diamagnética é dada por

$$\mathbf{v}_{D\alpha} = -\frac{cT_\alpha \nabla n \times \mathbf{B}_0}{q_\alpha n B_0^2}, \quad (4.2)$$

válida tanto para elétrons como para íons¹. O sentido de deslocamento está embutido na carga q_α . A quantidade $|\nabla n|/n$ representa a ordem de grandeza da inhomogeneidade em densidade, e seu inverso é interpretado como a escala característica da variação espacial de n .

¹ Este tipo de deriva é conhecido como *deriva diamagnética* devido ao caráter diamagnético do plasma, decorrente do movimento de cíclotron das partículas, que gera um campo magnético de sentido oposto ao do campo aplicado.

Esta expressão é originada de uma mais geral encontrada em [40], $\mathbf{v}_{D\alpha} = -\nabla p_\alpha \times \mathbf{B}_0 / q_\alpha n B_0^2$, que incorpora os efeitos de temperatura inhomogênea. Convém ressaltar que ao transpor essa equação para a tese passou-se do sistema MKSA para o Gaussiano.

4.3 Instabilidades de deriva

Duas das características muito comuns dos plasmas, tanto de laboratório como espaciais, são a inhomogeneidade em densidade e a presença de campo magnético de equilíbrio também inhomogêneo. Isso dá uma importância especial para as derivas diamagnética e de gradiente de B . Situações onde devem ser consideradas a força gravitacional, a curvatura das linhas de campo, ou ainda a existência de campo elétrico externo, também necessitam de um tratamento que inclua as derivas correspondentes a cada uma destas características.

A existência de movimentos de deriva conduz a modificações das propriedades das ondas, quando comparadas com ondas que se propagam em um plasma homogêneo e sem derivas, surgindo novos modos de propagação, ocasionados exclusivamente pela existência de derivas. São os chamados *modos de deriva* [2], e incluem modos modificados das ondas de Alfvén, ondas íon-acústicas e de cíclotron de íons e também ondas híbridas inferiores (*lower hybrid waves*). Este último tipo de onda possui um papel relevante para essa tese, como veremos posteriormente.

Em certas condições pode ocorrer, tanto em plasmas homogêneos como inhomogêneos, que, com a variação de parâmetros do plasma, diferentes soluções da relação de dispersão se combinem entre si, fenômeno conhecido como *acoplamento de modos*. Se os modos possuem diferentes energias, pode haver transferência de energia do modo com mais energia para o que possui menos [42], além da troca de energia existente na interação entre as ondas e o plasma. Isso torna possível o surgimento de instabilidades, e modos que eram estáveis tornam-se instáveis em decorrência desta troca de energia com algum outro modo. Os plasmas inhomogêneos, pela presença de ondas de deriva, são um bom exemplo de meio onde ocorrem estes acoplamentos. Por exemplo, a existência de uma deriva diamagnética e, consistentemente, de uma deriva de gradiente de B , potencializa a existência de ondas de deriva que, em determinadas circunstâncias, podem ser acopladas com ondas do tipo híbrida

inferior, gerando um novo modo de propagação que pode ser instável. A esta instabilidade, resultante do acoplamento entre ondas híbridas inferiores com ondas de deriva, dá-se o nome de *instabilidade de deriva híbrida inferior*, LHDI (*Lower Hybrid Drift Instability*). Esta é uma instabilidade que ocorre na faixa de frequência da ordem de $\omega \approx \omega_{LH} = (\Omega_i |\Omega_e|)^{1/2}$, que é a frequência das ondas híbridas inferiores.

Num plasma homogêneo, a existência de uma velocidade de deriva relativa entre íons e elétrons, se deslocando perpendicularmente ao campo magnético de equilíbrio, possibilita o surgimento de ondas de deriva, que podem ser acopladas com ondas híbridas inferiores. Este acoplamento pode resultar em uma instabilidade chamada de *instabilidade de duas correntes modificada*, MTSI (*Modified Two-Stream Instability*). Todavia, em um plasma inhomogêneo coexistem as derivas diamagnéticas dos íons e elétrons. O módulo e o sentido diferem, conforme vemos na equação (4.2), resultando uma deriva diamagnética total não nula que, somada com a deriva de gradiente de B dos elétrons (normalmente os íons são considerados não magnetizados²), fornece subsídios suficientes para que o meio seja favorável à existência simultânea da LHDI e MTSI. Se fazemos o limite de plasma homogêneo e mantemos à força a deriva dos íons, restará apenas a MTSI.

Todo o formalismo apresentado nos capítulos anteriores será utilizado para o estudo destas duas instabilidades, e por isso dispensa-se a elas uma atenção especial. A próxima seção é destinada a realizar um breve histórico da LHDI e MTSI, dando ênfase à primeira.

4.4 Breve histórico da LHDI e MTSI

O estudo da LHDI pode ser iniciado com o análise do trabalho clássico de Krall e Liewer [43]. Este trabalho, assim como os trabalhos de Mikhailovskii, apresentados na seção 2.2 da referência [10], e o de Davidson e Gladd [44], faz parte de um conjunto pioneiro na descrição da LHDI. O tratamento adotado em [43] foi o tratamento cinético para um plasma magnetizado. Apenas ondas eletrostáticas foram consideradas (aproximação eletrostática), em um plasma com gradientes fracos em densidade, campo magnético e temperatura, na

² Os termos “íons magnetizados” e “elétrons magnetizados” significam aqui que o campo magnético afeta o movimento de tais partículas. O “não magnetizado” significa que o efeito do campo não é significativo.

presença de um campo elétrico externo perpendicular ao campo magnético ambiente. Os íons foram considerados com distribuição homogênea formando apenas o fundo de equilíbrio de cargas do plasma. A hipótese de gradientes fracos possibilita a utilização da aproximação local, procedimento muito usado no estudo de plasmas inomogêneos. Estas inomogeneidades geram velocidades de deriva no plasma que são fundamentais para o surgimento da LHDI, diferentemente da MTSI, que é gerada por uma deriva relativa entre íons e elétrons, que pode existir sem a necessidade de inomogeneidades. A deriva gerada pelo campo elétrico externo foi considerada relevante apenas para os elétrons, em virtude da escala de tempo típica da instabilidade ser pequena quando comparada com a resposta dos íons. Foi suposto também que o raio de Larmor dos íons é bem maior que o comprimento de onda típico da instabilidade ($kr_{Li} \gg 1$, com $r_{Li} = V_i/\Omega_i$), ou seja, durante o tempo de crescimento da instabilidade os íons praticamente descrevem uma linha reta, podendo, portanto, ser considerados não magnetizados. No entanto, os elétrons são considerados fortemente magnetizados, com o raio de Larmor da ordem do comprimento de onda típico ($kr_{Le} \approx 1$).

A geometria adotada é do tipo “lâmina”, onde o plasma é considerado infinito, uniforme no plano $y - z$, todos os gradientes estão na direção do eixo x e o campo magnético externo aponta na direção z . Esta é a geometria básica considerada em todos os trabalhos subseqüentes citados.

Krall e Liewer analisaram a LHDI para o caso de propagação estritamente perpendicular ($k_z = k_{\parallel} = 0$). Eles mostraram, na própria relação de dispersão, o acoplamento entre os gradientes e dois tipos de ondas estáveis: (a) ondas geradas pela deriva devida ao campo elétrico externo; (b) ondas na faixa de frequência de plasma dos íons ou na frequência das ondas híbridas inferiores, dependendo da densidade e do campo magnético. É justamente a presença dos gradientes, através do acoplamento, que pode tornar os modos instáveis.

Os resultados obtidos indicam que a LHDI persiste mesmo para temperatura dos íons bem maior que a dos elétrons ($T_e \ll T_i$), e que a gama de valores de número de onda k , sujeitos a instabilidade, diminui com o decréscimo da razão T_e/T_i . Um parâmetro importante para medir a taxa de crescimento da instabilidade é a razão v_d/V_i , onde v_d é a velocidade de deriva e V_i é a velocidade térmica dos íons. Krall e Liewer mostraram que o máximo da taxa de crescimento aumenta com o aumento da razão v_d/V_i e torna-se insignificante

para $v_d/V_i \lesssim 1$. Outro resultado importante deste trabalho foi a constatação de que com o aumento do beta dos elétrons (β_e), a taxa de crescimento máximo da instabilidade (máximo valor da parte imaginária da frequência) decresce.

A LHDI foi igualmente estudada detalhadamente por Davidson e Gladd [44], também para oscilação eletrostática e propagação estritamente perpendicular, na análise das propriedades de transporte anômalo associadas com esta instabilidade. O transporte anômalo está relacionado com o fenômeno de dissipação resistiva do modelo magnetohidrodinâmico (MHD) [1] do plasma. Ao considerar os efeitos de resistividade na abordagem MHD, além da necessária generalização da lei de Ohm, os efeitos colisionais da interação onda-partícula devem ser incluídos. Estes efeitos se dão em microturbulências no plasma e conduzem aos chamados *coeficientes de transporte anômalos*, calculados a partir da teoria cinética (incluindo os efeitos colisionais da equação de Boltzmann), e reutilizados na teoria MHD [2].

O resultado mais importante obtido por Davidson e Gladd demonstra que a LHDI pode resultar em uma considerável resistividade e aquecimento do plasma mesmo para o regime de baixa velocidade de deriva $v_d \lesssim V_i$. Em adição a este novo resultado eles mostraram que o aquecimento também é significativo para grandes velocidades de deriva, $v_d > V_i$, corroborando o que foi previamente discutido por Liewer e Krall [45].

Os primeiros a considerar os efeitos eletromagnéticos foram Gladd [46] e Davidson *et al* [47]. Gladd utilizou essencialmente o modelo usado por Krall e Liewer [43], incluindo os efeitos eletromagnéticos, embora desprezando o componente do campo elétrico perturbado na direção da inomogeneidade, sendo, portanto, um tratamento incompleto.

Em um primeiro momento apenas a MTSI foi analisada, ou seja, foram considerados nulos os gradientes de densidade e temperatura dos elétrons e o gradiente de campo magnético. Nota-se que o valor máximo da instabilidade ocorre para uma propagação oblíqua, ou seja, para um determinado valor de k_{\parallel}/k_{\perp} , que depende dos parâmetros do plasma. Os resultados mostram também que a MTSI é estável para $k_{\parallel} = 0$. Estas são características típicas da MTSI, conforme já mostrado por McBride *et al* [48]. Aos poucos Gladd incluiu as inomogeneidades uma a uma independentemente. Um pequeno gradiente de densidade já é suficiente para o surgimento da LHDI (instabilidade em $k_{\parallel} = 0$). Com o aumento do gradiente, o pico máximo da instabilidade vai deixando de ocorrer na região de propagação

oblíqua e se concentrando na região de $k_{\parallel} = 0$. Este mesmo resultado ocorre quando apenas o gradiente de campo é considerado. Para o gradiente de temperatura não ocorre o mesmo, o máximo da instabilidade se dá para um determinado valor de k_{\parallel}/k_{\perp} , embora estando a LHDI presente. Os resultados mais importantes mostram que com a inclusão dos gradientes e com o aumento de β_e a região mais instável acontece em $k_{\parallel} = 0$, ou seja, a LHDI é mais instável que a MTSI.

Davidson *et al* [47] investigaram os efeitos de beta finito na LHDI, considerando os efeitos eletromagnéticos, porém restringiram-se apenas à propagação estritamente na direção y ($k = k_y \rightarrow k_{\parallel} = 0$), simultaneamente perpendicular ao campo magnético externo (direção z) e à direção da inomogeneidade (direção x). De uma maneira geral, embora dependente dos parâmetros do plasma, o efeito de beta finito é reduzir a taxa de crescimento da instabilidade. Para um regime de elétrons frios ($T_e \ll T_i$) e baixa velocidade de deriva ($V_E < V_i$, onde V_E é a velocidade de deriva devida ao campo elétrico externo) o efeito eletromagnético de beta finito é desestabilizante para pequeno k e estabilizante para grande k . No entanto o gradiente do campo magnético externo tem um efeito estabilizante para pequeno k e desestabilizante para grande k . Todavia, o resultado líquido é a redução da taxa de crescimento máxima da instabilidade. Para um regime onde $T_e \approx T_i$ e $V_E \approx V_i$ o efeito eletromagnético de beta finito é desestabilizante para todo k , enquanto o efeito de gradiente do campo magnético é estabilizante. Da mesma forma o resultado final é a redução da taxa de crescimento máxima. Para o limite de temperatura eletrônica nula existe um valor crítico de beta para o qual a LHDI é completamente estabilizada.

O trabalho de Davidson *et al* [47] foi generalizado por Hsia [49] *et al*, que propuseram um formalismo para descrever simultaneamente a LHDI e a MTSI. Além dos efeitos eletromagnéticos dos elétrons, já estudados por Davidson *et al*, eles incluíram k_{\parallel} finito, possibilitando propagação oblíqua, velocidade de deriva relativa entre elétrons e íons (U), gradiente de densidade dos elétrons (ϵ_n) e gradiente de campo magnético externo (ϵ_B). Assim, para pequenos valores de k_{\parallel} e $U \rightarrow 0$ obtém-se a LHDI, e para $\epsilon_B = 0$, $\epsilon_n = 0$ e $U \gg V_i$ tem-se a MTSI. Eles sugeriram que as duas instabilidades são dois casos limites da chamada *instabilidade de deriva híbrida inferior generalizada* (generalized lower-hybrid-drift instability - GLHDI), que inclui ao mesmo tempo a deriva entre os elétrons

e íons e os gradientes, bem como a componente paralela do vetor de onda. Apesar da generalização, o modelo teórico usado por Hsia *et al* [49] não inclui a contribuição dos íons para o campo magnético perturbado, ou seja, os íons são tratados eletrostaticamente. Outro ponto importante refere-se ao tensor dielétrico utilizado: ele não possui a simetria de Onsager [34, 35], necessária para a descrição correta do decaimento das quantidades perturbadas (flutuações) do plasma, como já foi discutido em capítulos anteriores.

As características físicas das regiões de contato entre o campo magnético interplanetário e o terrestre, tornam o ambiente da *bow shock* (arco de choque) potencialmente propício para o surgimento da LHDI e MTSI. Zhou *et al* [50] estudaram o efeito do gradiente de temperatura eletrônica na GLHDI, para beta finito, para uma geometria e parâmetros típicos da *bow shock* terrestre, direcionando o estudo às ondas geradas pelo choque quase perpendicular (partículas provenientes do vento solar que penetram na *bow shock* com fluxo perpendicular ao campo magnético presente [6]). A análise também inclui o efeito dos íons refletidos na *bow shock* (íons de baixa velocidade, originados do vento solar, refletidos pela barreira de potencial presente na frente da *bow shock* [6]), que é um fenômeno importante e fonte de instabilidades como a MTSI. O tratamento teórico geral, a geometria e a notação são similares às usadas no trabalho de Hsia *et al* [49] e, portanto, os íons são tratados eletrostaticamente e o tensor dielétrico mantém os problemas de simetria. Zhou *et al* mostraram que na região da *bow shock* o gradiente de temperatura é crucial para o surgimento da LHDI. Para gradiente nulo, $\epsilon_T r_{Li} = 0$ (onde ϵ_T é a medida espacial da inomogeneidade em temperatura e $r_{Li} = V_i/\Omega_i$), a LHDI é estabilizada. Apenas para grandes gradientes de temperatura, $\epsilon_T r_{Li} > 1$, a instabilidade começa a aparecer e tende a aumentar com o aumento de $\epsilon_T r_{Li}$. O máximo da taxa de crescimento ocorre para temperatura dos elétrons aproximadamente igual à dos íons, $T_e/T_i \approx 1$, e decresce para $T_e/T_i > 1$.

Um interessante ponto salientado no trabalho de Zhou *et al* se refere ao argumento da função de dispersão de plasma de Fried & Conte $Z(z_\alpha)$, onde z_α se refere aos argumentos para os elétrons e íons. A análise mostra que para regiões de predominância da MTSI (propagação não paralela), temos $|z_e| \lesssim 1$ e $|z_i| \approx 1$, e para a LHDI (propagação quase paralela) temos $|z_i| > 1$ e $|z_e| \gg 1$. O argumento da função Z relaciona características da onda com as características do meio, através da condição de ressonância. Sendo $|z_e| = |\omega/k_{\parallel}V_e|$,

vemos que as ondas geradas pela deriva relativa entre elétrons e íons (MTSI) interagem de forma ressonante com partículas que possuem velocidade próxima à velocidade térmica dos elétrons. Isso provoca um forte aquecimento dos elétrons, podendo causar um aplanamento da função distribuição eletrônica na região de velocidades próximas à velocidade térmica dos elétrons.

As ondas originadas pelos gradientes (LHDI), principalmente o gradiente de temperatura para a região da *bow shock*, interagem com elétrons que estão na cauda da função distribuição. Essa interação ressonante se dará com partículas com alto valor de velocidade paralela (v_{\parallel}) ao campo magnético externo. Foi sugerido por Wu *et al* [51] que este tipo de onda pode ser um mecanismo para acelerar os elétrons paralelamente ao campo magnético ambiente, até altas energias. Elétrons de alta energia são frequentemente observados na região da *foreshock* (anterior ao choque), formando uma corrente ao longo das linhas de campo que se conecta com a porção perpendicular da *bow shock* [52,53].

Em um trabalho posterior ao de Zhou *et al*, Wu *et al* [54] confirmaram que para choques perpendiculares a LHDI é estabilizada para $k_{\parallel} = 0$, na ausência de gradientes de temperatura. Para propagação oblíqua ($k_{\parallel} \neq 0$) a LHDI existe para $\theta < 80^{\circ}$, onde θ é o ângulo entre o campo magnético externo e o vetor de onda. Com o aumento do gradiente de temperatura a taxa máxima da instabilidade também aumenta, atingindo um pico para $\theta \approx 85^{\circ}$, e instabilidade não nula para $\theta = 90^{\circ}$ ($k_{\parallel} = 0$). Nesta região da *bow shock* basicamente as fontes de energia da LHDI são as derivas relativas entre os elétrons e os íons refletidos e transmitidos, juntamente com os gradientes dos parâmetros dos elétrons e do campo magnético.

A *neutral sheet* (lâmina neutra) é tipicamente uma região da magnetosfera terrestre com baixa atividade de ondas, ao contrário da *bow shock*. Todavia, durante os períodos de distúrbios geomagnéticos, tais como os períodos das sub-tempestades magnetosféricas, são observadas atividades transientes de partículas aceleradas a energias de MeV e turbulências eletromagnéticas de grandes amplitudes [55]. Instabilidades geradas por correntes de deriva, tais como a MTSI e a LHDI, são candidatas a ser o mecanismo de “gatilho” para as correntes de ruptura (sub-tempestades magnéticas) observadas regularmente na cauda magnética terrestre. A LHDI foi investigada sob esta ótica no trabalho desenvolvido por

Yoon *et al* [113].

A abordagem teórica do referido trabalho inclui os efeitos eletromagnéticos completos dos íons, que é o principal diferencial com relação aos artigos precedentes, e dos elétrons, para uma propagação oblíqua, incluindo os limites $k_{\parallel} = 0$ e $k_{\perp} = 0$. Os gradientes de densidade eletrônica e de campo magnético externo, bem como deriva relativa entre elétrons e íons, foram simultaneamente considerados, com o objetivo principal de unificar, de forma consistente, a LHDI e MTSI. O tensor dielétrico encontrado por Yoon *et al* apresenta a simetria correta, todavia os resultados não demonstram a esperada unificação das duas instabilidades. A análise numérica mostra a influência estabilizante para altos valores de beta dos elétrons, concordando com o trabalho de Huba e Papadopoulos [56]. No entanto ela não é totalmente estabilizada quando são usados parâmetros de plasma da *neutral sheet*, imediatamente antes do início das sub-tempestades geomagnéticas, sugerindo que a LHDI pode ter um importante papel na dinâmica da cauda magnética da Terra. Este artigo possui características importantes no contexto desta tese, e por isso a seção 4.5 é dedicada exclusivamente ao seu detalhamento.

Além dos gradientes já mencionados, a curvatura das linhas de campo magnético externo também é um mecanismo que pode contribuir para o processo ressonante da LHDI. Porém, o cálculo analítico para a obtenção da solução, baseado na teoria cinética, é bastante complicado. Em virtude disso, a curvatura do campo foi estudada primeiramente substituindo a “força centrífuga” por uma força gravitacional virtual [57]. Desta forma a deriva ocasionada por esta força gravitacional simula a deriva causada pela curvatura de campo. No entanto, como apontaram Huba e Drake [58], esta “simulação” do efeito de curvatura não é equivalente ao efeito real. Eles mostraram que os elétrons ganham energia devido à curvatura e, assim, a taxa de crescimento da LHDI é reduzida. Como o trabalho de Huba e Drake foi direcionado à importância física da curvatura das linhas de campo, o gradiente da intensidade do campo magnético não foi incluído na sua análise.

Um método alternativo ao método das características³ foi desenvolvido por Nakamura [59], e pode ser aplicado em problemas cujo método tradicional não é viável ou é complicado de ser implementado. A grande vantagem deste novo método está no fato de que não é

³ O método das características foi discutido no capítulo introdutório.

necessário integrar o campo ao longo das órbitas precisas das partículas. Como exemplo deste método, Nakamura o aplicou para a relação de dispersão da LHDI. A dificuldade encontrada por este autor é repassada para as integrais de velocidade, que não podem ser expressas por funções analíticas conhecidas. Para resolver esta questão, Nakamura e Shinohara [60] aproximaram a função Gaussiana dos integrandos por funções racionais na forma de um polinômio. Assim, eles encontraram uma relação de dispersão para a LHDI que inclui a contribuição da curvatura das linhas de campo (não os gradientes), embora sem os efeitos eletromagnéticos.

A reconexão magnética é um importante processo que ocorre em plasmas, tanto de laboratório como espaciais, que possui um fundamental papel no aquecimento e aceleração de partículas, bem como na alteração da topologia magnética. Basicamente, a reconexão é um processo que ocorre em plasmas quando regiões de campos magnéticos de sentidos opostos aproximam-se, levando à formação de gradientes abruptos e ao aparecimento de fortes correntes, chamadas de *current sheets*. Estes gradientes ocorrem em escalas de tempo onde a dissipação resistiva torna-se importante [61]. O processo de reconexão se completa quando os campos se conectam, formando uma nova topologia. As intensas correntes e gradientes de densidades encontrados na *current sheet* podem gerar microinstabilidades que, por sua vez, podem proporcionar resistividade anômala e turbulências. Tais instabilidades devem fornecer subsídios suficientes para explicar como a difusão resistiva pode conduzir a tão rápida mudança de topologia do campo magnético, como observado em plasmas de laboratório e espaciais. Várias instabilidades foram estudadas sob este contexto, e dentre elas encontra-se a LHDI, como sugeriram Huba *et al* [62].

Carter *et al* [61, 63] apresentaram detalhadas medidas experimentais da flutuação do potencial na região da *current sheet* encontradas em experimentos de reconexão magnética (MRX - *magnetic reconnection experiment*). Foi a primeira constatação experimental da LHDI em *current sheet* de laboratório e a primeira oportunidade de fazer um estudo detalhado do papel desta instabilidade em reconexão magnética. As medidas das flutuações apresentam características que são consistentes com os modelos teóricos preditos para a LHDI. No entanto, as observações sugerem que a turbulência gerada pela LHDI não pode sozinha explicar a rápida reconexão observada em MRX.

Um dos mais recentes estudos teóricos realizados a respeito de aceleração de partículas na cauda magnética terrestre foi feito por Spicer *et al* [64]. Eles mostraram que a LHDI pode gerar relativamente grande amplitude de ondas híbridas inferiores na *current sheet* da cauda magnética. Estas ondas são capazes de acelerar elétrons e aquecer os íons na cauda magnética durante o processo de reconexão.

O caráter não local da LHDI foi avaliado por Hamasaki *et al* [65], no estudo da configuração de campo reverso (*field reversed configurations* - FRC: aparelho compacto de fusão termonuclear [66]). Neste trabalho é examinado o quanto os efeitos não locais lineares poderiam alterar o predito pela teoria local, no que diz respeito aos coeficientes de transporte anômalos. Foi concluído que os resultados obtidos pela teoria não local não alteram significativamente os já obtidos pela teoria local. O comentário dos autores, com relação a esta conclusão, é positivo quando se analisa sob a ótica dos sucessos alcançados pelos trabalhos anteriores que usaram a teoria local. No entanto, é negativo no sentido que se esperava que a teoria não local pudesse fornecer um melhor entendimento da teoria de transporte, aprofundando a compreensão física até o ponto de ser possível influenciar nas perdas de fluxos e de energia. Este resultado é semelhante ao obtido anteriormente por Batchelor e Davidson [67], na análise não local da LHDI em aparelhos de fusão do tipo *theta-pinch* [1]. Os autores compararam os resultados da teoria local calculados ponto a ponto radialmente com os resultados da teoria não local. Verificaram que o máximo da taxa de crescimento da LHDI, bem como sua correspondente posição radial, obtidos em ambas teorias, concordam perfeitamente.

Estudos feitos a partir de simulações numéricas, investigaram os efeitos não lineares da LHDI. Um artigo recentemente publicado nesta linha foi elaborado por Lapenta e Brackbill [68]. Eles usaram o equilíbrio de lâmina de corrente proposto por Harris [69], que basicamente consiste em uma distribuição maxwelliana inomogênea com deriva perpendicular à direção do campo magnético externo, para elétrons e íons. O campo magnético externo possui um perfil diretamente proporcional à tangente hiperbólica e a densidade um perfil inversamente proporcional ao quadrado do cosseno hiperbólico, ambos com gradientes na mesma direção, perpendicular ao campo magnético externo. As ondas estudadas propagam-se perpendicularmente ($k_{\parallel} = 0$). O foco principal deste trabalho é a interação não linear da

LHDI com os modos *kink* (instabilidade macroscópica tratada pela MHD [1]).

Já foi comentado anteriormente que a LHDI seria uma possível fonte de resistividade anômala. Todavia, resultados experimentais mostram que a turbulência gerada por esta instabilidade é insuficiente para explicar a resistividade anômala [61, 63, 70]. Os resultados apresentados por Lapenta e Brackbill demonstram que os efeitos das microinstabilidades geradas por ondas híbridas inferiores não estão diretamente relacionados com a resistividade anômala. A LHDI não influencia diretamente, mas cria condições para o surgimento de instabilidades macroscópicas do tipo KHI (*Kelvin-Helmholz instability* [2]) e modos *kink* (KM). A principal conclusão deste trabalho está especialmente relacionada com os modos *kink*. Resultados anteriores preditos pela teoria linear da LHDI, indicavam que os modos *kink* possuem uma irrelevante taxa de crescimento para valores realistas da razão das massas dos elétrons e íons. No entanto, e esse é o diferencial do trabalho de Lapenta e Brackbill, a evolução não linear do sistema, para razão realista entre massas, mostra que os modos *kink* estão bastante presentes, e são vinculados não linearmente com a LHDI. Como consequência desta conclusão, pode-se esperar que os modos *kink* estejam presentes na cauda magnética terrestre e que a LHDI cause importantes modificações nas *current sheets*, podendo afetar a evolução macroscópica do sistema.

Várias considerações foram feitas até o momento a respeito da LHDI, desde suas principais características, priorizando a teoria local e linear, até exemplos de trabalhos focando a não localidade da instabilidade, os seus efeitos não lineares e resultados experimentais. Um ponto em comum de todos os trabalhos da linha local e linear, que em geral passa despercebido frente ao complexo ferramental físico-matemático, diz respeito ao uso da lei de Gauss (também conhecida como *equação de Poisson*, no caso eletrostático, em que $\nabla \cdot \mathbf{E} \rightarrow -\nabla^2 \phi$, onde ϕ é o potencial elétrico). Todos os trabalhos que abordam o problema eletrostaticamente, por razão óbvia, utilizam esta equação para a obtenção dos modos de propagação. O curioso é que mesmo os trabalhos que levam em conta os efeitos eletromagnéticos usam a lei de Gauss para a obtenção da instabilidade, mesmo que, a princípio, a relação de dispersão não requeira o uso explícito da mesma. No próximo capítulo esta questão será retomada, e será visto que na realidade a lei de Gauss é crucial para a obtenção da LHDI. Cabe ressaltar que para a MTSI tal procedimento é irrelevante, como também veremos no

capítulo seguinte.

Para finalizar os comentários pertinentes à LHDI, a seguir será inserida uma tradução do excelente resumo feito por Gladd *et al* em [71]. A idéia deste resumo não é dar informações das características físicas da instabilidade, com está sendo feito na presente seção, mas sim expor, em linhas gerais, as referências básicas das tantas abordagens já empregadas para a sua compreensão, complementando as informações e a bibliografia a respeito da LHDI.

“Na área da teoria linear, estudos locais e não locais têm sido feitos. Variantes da geometria magnética tais como gradientes de campo [72], curvatura [57] e *shear* [73] foram considerados. Os efeitos eletromagnéticos foram tratados em [47]. Outras análises incluem os efeitos de gradientes de temperatura [74] e sua generalização [49]. Em adição a estes estudos, várias análises das propriedades da LHDI foram feitas em específicas configurações de plasma. Uma lista parcial destes estudos incluem *theta-pinch* [75], a cauda magnética terrestre [62], espelhos magnéticos [76], cúspide magnética [77], a ionosfera [78], a *magnetopause* [79], configurações de campo reverso [80] e *bumpy tori* [81].

Um considerável número de análises teóricas do comportamento não linear da LHDI também foram feitas. Os primeiros trabalhos foram centrados em estimativas de transporte anômalo no limite termodinâmico [44] (saturação da energia de flutuação do campo - método de Fowler [82]). Os mecanismos de saturação considerados incluem o alargamento da condição de ressonância dos elétrons devido a não linearidade [56], relaxação quase-linear [83,84], acoplamento de modos [85], modificação da órbita dos íons [86] e combinação de efeitos não locais e não lineares [87]. O aprisionamento de íons pelas ondas foi muito usado como mecanismo de saturação em simulações [89]. A importância dos efeitos não locais e efeitos bi-dimensionais nos modelos de saturação também foram estudados [85,87,89].

As simulações são importantes fontes de informações a respeito da LHDI. O equilíbrio quase estático foi simulado em um modelamento para o comportamento do tempo de retardo da configuração *theta-pinch* [89,90]. Outros métodos de simulação foram empregados, como por exemplo os das referências [88,91]. Trabalhos também focaram a simulação da atividade de ondas híbridas inferiores de deriva (LHD) em configurações de campo reverso, que é uma importante configuração tanto para a física dos aparelhos de confinamento magnético como para a astrofísica [91–93].

Muitas aplicações da teoria da LHDI e simulações para geometrias de plasma específicas envolvem o uso do assim chamado cálculo numérico de fluido. Estes códigos modelam o plasma como um fluido e, portanto, são capazes de conter muito mais tipos de geometrias que a teoria cinética. A teoria cinética entra nestes cálculos na forma de coeficientes de transportes heurísticos que controlam a evolução das quantidades de fluidos macroscópicas na presença da LHDI (ou outras instabilidades). Esta metodologia foi introduzida por Liewer e Krall [45] e foi bastante usada em uma variedade de aplicações. Algumas das aplicações do cálculo numérico de fluido que envolvem especificamente a LHDI podem ser encontrados nas referências [94–97].

As observações experimentais da LHDI incluem observações diretas da flutuação do plasma durante a implosão de experimentos *theta-pinch* [98,99], que podem ser associadas a esta instabilidade, e inferências sobre o papel dela no comportamento do tempo de retardo da configuração *theta-pinch* [100]. Finalmente, informações obtidas de satélites sugerem fortemente que turbulências associadas com a LHDI estão presentes em regiões distantes da cauda magnética terrestre.”

Com a finalização do resumo e dos comentários gerais a respeito da LHDI, o histórico terá prosseguimento enfocando outra instabilidade importante para esta tese, a MTSI (IWI). Os primeiros estudos relacionados com esta instabilidade foram feitos por Buneman [101,102]. Nos referidos trabalhos o plasma é não magnetizado, homogêneo e composto de íons e elétrons frios (aproximação hidrodinâmica), e apenas oscilação eletrostática é considerada. O tipo de instabilidade investigada é semelhante a *instabilidade de duas correntes* (*Two-Stream Instability*), para o caso em que há um feixe de elétrons com densidade bem menor que a distribuição eletrônica de fundo [9]. A diferença do trabalho de Buneman, é que o feixe é constituído pelos elétrons, que possuem uma corrente de deriva em relação à distribuição iônica de fundo, e a instabilidade recebe o nome de *instabilidade de Buneman* (*Buneman Instability*). O critério básico para desprezar os efeitos térmicos dos elétrons é que a velocidade de fase da onda seja muito maior que a velocidade térmica dos elétrons (V_e). O máximo de crescimento da instabilidade ocorre para $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_d \approx \omega_p$, que juntamente com o critério acima citado, implica na condição para que a instabilidade de Buneman ocorra: $v_d \gg V_e$, onde v_d é a velocidade de deriva dos elétrons [2].

Mais tarde, em [103], Buneman incluiu campo magnético de equilíbrio e concluiu que a instabilidade não é suprimida por isso, embora a taxa de crescimento seja reduzida. Também nota-se que a taxa de crescimento independe da velocidade de deriva quando ela é muito maior que a velocidade térmica dos elétrons.

À medida que considera-se o aumento do efeito térmico dos elétrons, ou seja, aumento de V_e , mais crítico fica para que a condição de existência da instabilidade se cumpra. Portanto, dependendo da temperatura dos elétrons, a instabilidade deixa de existir [2]. Verifica-se também que, quando os efeitos térmicos dos íons são incluídos, o máximo da instabilidade depende fortemente da razão entre as temperaturas dos íons e elétrons T_e/T_i [9]. Para plasmas com $T_i \approx T_e$ apenas instabilidade hidrodinâmica pode aparecer, recaindo na instabilidade de Buneman.

Uma extensão da instabilidade de duas correntes foi estudada por McBride *et al* em [48]. Efeitos cinéticos foram considerados na abordagem eletrostática, e o plasma foi tratado magnetizado. Elétrons e íons possuem uma velocidade de deriva relativa perpendicular ao campo magnético de equilíbrio. Este tipo de instabilidade enfocada por McBride *et al* recai na instabilidade de duas correntes encontrada por Buneman (instabilidade de Buneman) no limite hidrodinâmico e, em virtude disso, recebeu o nome de *Modified Two-Stream Instability* (MTSI). Uma das principais diferenças desta instabilidade em relação à instabilidade de Buneman ocorre no valor limite da velocidade de deriva, necessário para que a instabilidade se desenvolva. McBride *et al* mostraram que, devido à presença do campo magnético externo, a MTSI pode surgir com $v_d \gtrsim V_i$, em contraste com $v_d \gtrsim V_e$, como é o caso da instabilidade de Buneman. Uma importante característica da MTSI é a sua estabilização para propagação estritamente perpendicular ($k_{\parallel} = 0$).

Em [104], McBride e Ott consideraram os efeitos eletromagnéticos, porém trataram o plasma no modelo hidrodinâmico, para temperatura eletrônica finita. A principal conclusão deste trabalho foi que os efeitos eletromagnéticos possuem contribuição estabilizante com o aumento de β_e . Os efeitos eletromagnéticos causam a estabilização da MTSI se $v_d \gtrsim V_A(1 + \beta_e)^{1/2}$, onde $V_A = B_0/(4\pi nm_i)^{1/2}$ é a velocidade de Alfvén. Com o aumento da temperatura, mais restritiva se torna a condição de existência da instabilidade. Convém ressaltar que essa condição foi obtida para ângulos de propagação da onda quase paralelos a \mathbf{B}_0 , onde

essa instabilidade é mais acentuada. Duas conseqüências importantes deste resultado dizem respeito a experimentos relacionados com ondas de choque e aquecimento dos íons em aparelhos de fusão. É possível obter uma estimativa da velocidade de deriva relativa entre elétrons e íons na frente de onda da onda de choque. Eles apontaram a possibilidade de utilizar a MTSI para o aquecimento dos íons, a partir do mecanismo de aquecimento por turbulência, induzindo no plasma uma velocidade de deriva adequada ($v_d \gtrsim V_i$). Este processo é eficiente para aquecer os íons, principalmente na direção perpendicular a \mathbf{B}_0 , a temperaturas comparáveis às obtidas pelos elétrons paralelamente a \mathbf{B}_0 , em um tempo da ordem de ω_{LH}^{-1} .

As principais características da MTSI são: (1) a frequência típica e a taxa de crescimento são na ordem da frequência híbrida inferior; (2) diferentemente de muitas instabilidades que aquecem principalmente os elétrons, como o caso da instabilidade de duas correntes, a MTSI propicia um aquecimento comparável entre elétrons e íons; (3) é uma instabilidade que depende fracamente da razão T_e/T_i , possibilitando que ela opere em situações em que outras instabilidades não podem.

Um estudo mais completo do efeito eletromagnético na MTSI foi feito por Lemons e Gary [105]. Tanto essa instabilidade quanto a LHDI possuem tipicamente longos comprimentos de onda, necessitando assim a inclusão dos efeitos eletromagnéticos para uma descrição mais acurada de suas propriedades. Antes disso, outros trabalhos, que incluíam a descrição de plasma inhomogêneo, mantiveram apenas parte da contribuição eletromagnética ou propagação estritamente paralela à velocidade de deriva (propagação perpendicular ao campo magnético ambiente) [44, 46, 47].

Lemons e Gary derivaram uma relação de dispersão para ondas em um plasma homogêneo, com íons não magnetizados e elétrons magnetizados com uma deriva \mathbf{v}_d , perpendicular ao campo magnético de equilíbrio, originada pela presença de um campo elétrico de equilíbrio: $\mathbf{v}_d = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 / B_0^2$. Não foi considerada a inhomogeneidade de campo magnético e, portanto, o tratamento não é adequado para a LHDI. Este trabalho foi o primeiro a considerar os efeitos eletromagnéticos completos na relação de dispersão, tanto para elétrons como para íons, para um ângulo arbitrário de propagação de onda, com relação ao campo magnético de equilíbrio (propagação no plano formado por \mathbf{B}_0 e \mathbf{v}_d). No entanto a análise

ficou restrita a ângulos entre 75° e 90° ($k_{\parallel} = 0$). Lemons e Gary mostraram que para pequenos valores de beta de plasma dos elétrons ($\beta_e = 8\pi n_e T_e / B_0^2$), como por exemplo $\beta_e = 0,01$, os efeitos eletromagnéticos são insignificantes, resultando em uma curva para a instabilidade praticamente idêntica à obtida no tratamento eletrostático. Porém, para $\beta_e = 1$ o efeito é significativo, causando uma diminuição na taxa de crescimento máxima. Este é um caso particular do resultado geral obtido numericamente, indicando que o efeito eletromagnético é significativo apenas para altos valores de β_e . Também verificou-se que a MTSI é estável para propagação quase perpendicular ($k_{\parallel} \approx 0$), para ambos valores de β_e .

A generalização do trabalho de McBride e Ott [104] foi feita por Wu *et al* (1983) em [106], na investigação da chamada *kinetic cross-field streaming instability*. Eles derivaram uma relação de dispersão que, além de incluir os efeitos eletromagnéticos e térmicos, usando a teoria cinética, também considerava ângulos de propagação arbitrários. Na análise para alto valor de beta de plasma ($\beta_e = \beta_i = 1$), constatou-se que o tratamento eletromagnético conduz a resultados bastante discrepantes dos obtidos na aproximação eletrostática. Algumas conclusões podem ser obtidas: (1) os efeitos eletromagnéticos são estabilizantes para propagação quase-perpendicular, $\theta \simeq 90^\circ$, e desestabilizantes para $\theta \ll 90^\circ$, onde $\cos \theta = k_{\parallel}/k$; (2) a região de instabilidade abrange maior gama de valores de θ , se comparada com a aproximação eletrostática; (3) para uma dada razão v_d/V_A o máximo da taxa de crescimento é mais baixo quando são incluídos os efeitos eletromagnéticos, comparado com a aproximação eletrostática; (4) o máximo da taxa de crescimento aumenta com o aumento da razão v_d/V_A , e tende a se “mover” na direção do aumento de θ . Para este regime de beta, o efeito cinético é crucial, e a instabilidade é altamente cinética.

Wu *et al* (1983) [106] constataram também que para baixos valores de beta do plasma, $\beta_e = \beta_i = 0,01$, o aumento da razão v_d/V_A causa resultados bastante divergentes para o tratamento eletromagnético comparado com a aproximação eletrostática. Ao considerar apenas valores pequenos de v_d/V_A , os dois tratamentos conduzem praticamente ao mesmo resultado. Para este regime de beta os efeitos cinéticos não são importantes para propagação quase perpendicular ($\theta \simeq 90^\circ$) sendo, portanto, um resultado essencialmente hidrodinâmico, como o obtido por McBride e Ott, na MTSI usual [104].

Para ambos os regimes de beta, Wu *et al* (1983) [106] mostraram que a instabilidade

não é suprimida para grandes valores de v_d/V_A , como previam McBride e Ott [104]. É justamente para o limite de baixo beta e propagação quase perpendicular que, para $v_d > V_A$, a instabilidade pode ser suprimida pelos efeitos eletromagnéticos, resultado este obtido por McBride e Ott.

A MTSI, da mesma forma que a LHDI, também foi estudada no âmbito da magnetosfera terrestre. Wu et al (1984) [54] estudaram várias instabilidades na região da *bow shock*, entre elas a *kinetic cross-field streaming instability*, que é generalização da MTSI incluindo os efeitos cinéticos, e a LHDI. Os parâmetros da análise foram extraídos de medições feitas por satélites, durante a passagem pela *bow shock*. O estudo foi restrito a instabilidades associadas com choques quase perpendiculares. A corrente relativa entre íons refletidos na *bow shock* e os elétrons, ambos vindos do vento solar, é uma fonte em potencial da MTSI, para ondas se propagando desde a direção paralela à perpendicular ($0^\circ < \theta < 90^\circ$). Os íons transmitidos na *bow shock* formam uma corrente relativa aos elétrons presentes, e também proporcionam condição para o surgimento da MTSI, para propagação quase perpendicular.

O importante fenômeno conhecido como *substorm* (sub-tempestade), que ocorre na magnetosfera terrestre, possui várias propostas de mecanismos visando a explicar o que leva ao início de tal fenômeno. Dentre eles está a presença de instabilidades cinéticas na *magnetotail* (cauda magnética) [107], que potencialmente poderia desencadear um processo microscópico, como se fora um gatilho da *substorm*, resultando em um distúrbio macroscópico, que seria a *substorm* propriamente dita [108]. Evidências foram apresentadas por Huba et al [62] de que a LHDI é responsável por grande parte do ruído eletrostático detectado na fronteira da *plasma sheet* (lâmina de plasma). Porém verificou-se que esta instabilidade é estabilizada em regiões próximas à *neutral sheet* para altos valores de beta [56]. Todavia, a instabilidade do tipo *kinetic cross-field streaming instability* pode ser excitada no ambiente da *neutral sheet*, como verificaram Lui et al (1990) [109]. Uma característica desta região é que o conjunto de parâmetros torna relevantes os efeitos eletromagnéticos dos íons, que conduzem a um aumento na taxa de crescimento da instabilidade [111]. Levando em conta este fato e adicionando o efeito de amortecimento dos harmônicos da frequência de ciclotron dos elétrons, Lui et al (1991) [108] fizeram uma extensão do trabalho [109]. Uma estimativa, a partir de dados obtidos na *neutral sheet*, indica que a velocidade de deriva relativa

imediatamente antes do início da *substorm* é suficiente para gerar instabilidades do tipo *cross-field current instability*, tais como a MTSI, a LHDI e a IWI⁴ (*ion Weibel instability*). Lui *et al* (1991) concluíram que, embora as instabilidades possuam naturezas diferentes, as suas taxas de crescimento são da ordem de grandeza da escala de tempo do início da expansão da *substorm*, reforçando a idéia de “gatilho”.

Como fora comentado anteriormente, a MTSI é uma das instabilidades aceitas como possível desencadeadora das sub-tempestades magnéticas ocorridas na cauda magnética terrestre. O trabalho desenvolvido por Yoon *et al* [110] investiga a MTSI para parâmetros de plasma encontrados na *neutral sheet* imediatamente antes do início das sub-tempestades, e para um segundo ambiente com parâmetros encontrados na *bow shock*. A abordagem teórica usada consiste em um tratamento eletromagnético, tanto para elétrons como para íons (não magnetizados), no contexto das teorias linear e não linear.

Na teoria linear foram consideradas propagações oblíquas, incluindo os limites de propagação estritamente paralela e perpendicular, possibilitando a obtenção da instabilidade batizada por IWI.

Yoon *et al* verificaram que na região da *neutral sheet* a IWI é a instabilidade dominante frente à MTSI. A teoria não linear mostrou que a MTSI (IWI) pode levar, com o passar do tempo ($\Omega_i t \approx 10$), a um aquecimento significativo dos elétrons e íons na direção paralela ao campo magnético ambiente. Para a região da *bow shock* os elétrons são aquecidos significativamente na direção paralela, enquanto os íons são aquecidos perpendicularmente e esfriados na direção paralela.

A IWI é uma instabilidade relacionada com a MTSI, puramente crescente (não oscilatória, ou seja, $\omega_{\text{real}} = 0$), descrita por Chang *et al* em [111]. A primeira análise foi feita na abordagem hidrodinâmica, para íons e elétrons frios, efeitos eletromagnéticos considerados para ambas espécies de partículas, e apenas os elétrons magnetizados. Os íons possuem uma deriva em relação aos elétrons na direção perpendicular ao campo magnético ambiente, e a frequência se restringe entre $\Omega_i < \omega < |\Omega_e|$, da ordem de ω_{LH} , como a MTSI. A deriva dos íons causa uma temperatura perpendicular efetiva, levando à uma anisotropia térmica. Este tipo de instabilidade, causada por uma anisotropia na temperatura, foi primeiro estudada

⁴ Instabilidade relacionada com a MTSI, cuja descrição mais detalhada encontra-se no final desta seção.

por Weibel [112]. Ele estudou o efeito de temperatura anisotrópica na função distribuição eletrônica, em um plasma não magnetizado. A anisotropia é caracterizada pela existência de um eixo hipotético no plasma, com os elétrons possuindo temperatura nula na direção do eixo (elétrons frios), e uma distribuição térmica Maxwelliana na direção perpendicular ao eixo. A direção de propagação da onda considerada foi estritamente paralela ao eixo, e a instabilidade encontrada recebeu o nome de *Weibel instability*.

Chang *et al* mostraram que os efeitos eletromagnéticos dos íons são cruciais para o aparecimento dessa nova instabilidade, que pode ser excitada mesmo para propagação paralela ao campo magnético externo (o que não ocorre com a MTSI). Devido às semelhanças com a instabilidade de Weibel, esta nova instabilidade recebeu o nome de *ion Weibel instability* (IWI). A distinção básica entre a clássica instabilidade de Weibel e a IWI é que a primeira é gerada por um excesso de energia na direção perpendicular à propagação da onda, e a segunda é gerada pelo movimento de deriva dos íons na direção perpendicular ao campo magnético ambiente. Mesmo que não haja uma corrente líquida no modelo físico da instabilidade de Weibel, diferentemente da situação da IWI onde há uma corrente, as duas instabilidades possuem essencialmente a mesma origem, que é um excesso de energia na direção perpendicular à propagação da onda.

Ao considerar os efeitos térmicos, tanto dos íons como dos elétrons, Chang *et al* verificaram que a IWI é uma instabilidade fortemente resistente ao aumento de β_i , persistindo mesmo para $\beta_i = 20$.

Anteriormente ao trabalho de Chang *et al*, Lemons e Gary [105] haviam considerado os efeitos eletromagnéticos dos íons, porém falharam em encontrar a IWI por não focarem a atenção na propagação paralela.

Finalizando este histórico, podemos ver na tabela (4.1) uma descrição esquemática de algumas das características mais básicas das instabilidades LHDI e MTSI (IWI), onde convém ressaltar o forte caráter inhomogêneo da LHDI, a presença simultânea da LHDI e MTSI para propagação oblíqua e a existência de instabilidades nas propagações estritamente perpendicular (LHDI) e estritamente paralela (IWI).

Instabilidade	$\mathbf{k}_{\parallel} = 0$	$\mathbf{k}_{\perp} = 0$	Ângulo Oblíquo	β Grande	Plasma homogêneo com deriva	Plasma inogêneo
LHDI	Operante	Estabilizada	Operante	Estabilizada	Não Existe	Operante
MTSI	Estabilizada	↓	Operante	Estabilizada	Operante	Operante
IWI		Operante		Operante		

Tab. 4.1: Características básicas da LHDI e MTSI (IWI).

4.5 Tentativa de descrição unificada das instabilidades LHDI e MTSI (IWI)

Esta seção é dedicada exclusivamente ao trabalho desenvolvido por Yoon *et al*, referência [113], cujo desenvolvimento e resultados possuem um importante papel nesta tese, como será visto no próximo capítulo.

Motivados por estudos que indicavam que a LHDI seria um possível mecanismo para o início das correntes de ruptura na cauda magnética terrestre, Yoon *et al* desenvolveram um formalismo completo para a descrição da instabilidade, onde os efeitos eletromagnéticos tanto dos elétrons como dos íons foram considerados.

Ao considerar os efeitos eletromagnéticos dos íons, surge naturalmente a seguinte questão: teriam estes efeitos alguma importância na LHDI, semelhantemente ao que ocorre na MTSI, com o surgimento da IWI? Esta pergunta foi colocada por Yoon *et al* e, para que fosse respondida, foi necessário não somente uma descrição que generalizasse as teorias sobre a LHDI, mas também que corrigisse as inconsistências encontradas em pesquisas anteriores [49, 50].

Em linhas gerais, o modelo teórico linear e local compreende os efeitos eletromagnéticos completos, efeitos cinéticos, deriva relativa entre íons e elétrons (MTSI (IWI)), gradientes de densidade dos elétrons e de campo magnético externo (LHDI), propagação de ondas perpendiculares aos gradientes, com ângulo arbitrário com relação ao campo magnético externo.

A geometria adotada é do tipo “lâmina”, na qual a densidade e o campo magnético

variam no espaço de forma gradual na direção x (ver figura 4.3):

$$n(x) = n_0(1 - \epsilon_n x), \quad \epsilon_n = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$$

$$\mathbf{B}(x) = B_0(1 + \epsilon_B x)\mathbf{e}_z, \quad \epsilon_B = \frac{1}{B} \frac{dB}{dx},$$

onde ϵ_n e ϵ_B são as medidas espaciais das inhomogeneidades, e estão relacionadas através da equação $\epsilon_B = \frac{1}{2}(\beta_e + \beta_i)\epsilon_n$.

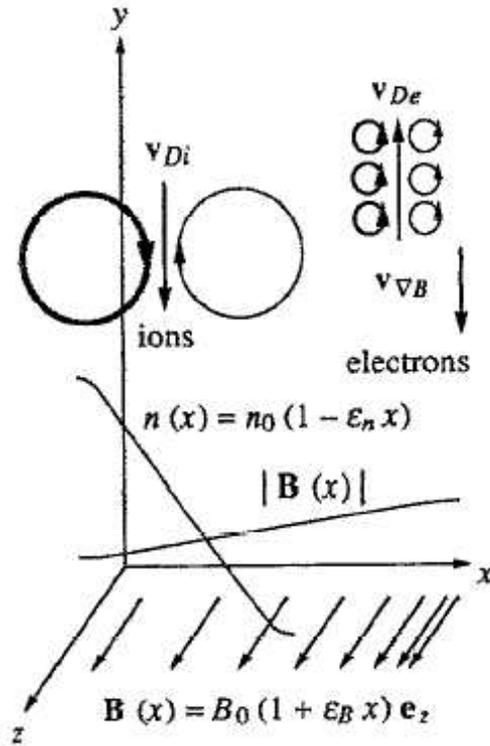


Fig. 4.3: Geometria adotada na referência [113].

Na figura 4.3 podemos ver um esquema das velocidades de deriva diamagnética dos íons (v_{Di}) e dos elétrons (v_{De}) e a velocidade de deriva de gradiente de B dos elétrons ($v_{\nabla B}$). O raio de Larmor dos íons (r_{Li}) é bem maior que o comprimento de onda típico da LHDI ($kr_{Li} \gg 1$), por isso os íons são tratados como não magnetizados e, portanto, não há deriva de gradiente de B dos íons. Convém salientar que Yoon *et al* relacionaram a deriva diamagnética dos íons com a inhomogeneidade do plasma, a partir da equação $v_{Di} = \epsilon_n v_i^2 / 2\Omega_i$, obtida da relação (4.2), onde v_i é a velocidade térmica do íons. Isso possibilita escrever as

derivas diamagnética e de gradiente de B dos elétrons em termos de v_{Di} . No entanto, a fim de estudar exclusivamente a MTSI, podemos desconsiderar os gradientes e, mesmo assim, manter uma deriva dos íons (deriva relativa entre íons e elétrons), necessária para a obtenção dessa instabilidade. As funções distribuição de equilíbrio apresentam explicitamente as derivas diamagnéticas:

$$F_e(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2}v_e^3} \left(1 + \frac{2v_{De}v_y}{v_e^2} \right) \exp\left(-\frac{v^2}{v_e^2}\right),$$

$$F_i(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^{3/2}v_i^3} \exp\left(-\frac{v_x^2 + (v_y + v_{Di})^2 + v_z^2}{v_i^2}\right),$$

onde observamos que a pequena deriva diamagnética dos elétrons, comparada com a velocidade térmica, tornou possível a expansão da exponencial da distribuição eletrônica, o que não pode ocorrer na distribuição iônica.

A relação de dispersão foi obtida da maneira tradicional, como foi apresentada em capítulos anteriores. O tensor suscetibilidade dos íons usado por Yoon *et al* foi o tensor logrado por Wong e Goldstein [114], no qual os efeitos eletromagnéticos são considerados. Para os elétrons, o tensor suscetibilidade foi derivado de uma forma híbrida, no próprio artigo em estudo. Os componentes χ_{ij} para $i \neq y$, foram obtidas da forma comumente usada, a partir da lei de Ampère:

$$\sum_j \chi_{ij}^{\text{el}}(\mathbf{k}, \omega) \delta E_j(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i}{\omega} \delta J_i(\mathbf{k}, \omega), \quad (4.3)$$

onde o símbolo δ indica grandeza perturbada. Os componentes χ_{yj} foram encontrados a partir do uso da lei de Gauss, resultando na seguinte relação:

$$\sum_j \chi_{yj}^{\text{el}}(\mathbf{k}, \omega) \delta E_j(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{k_z}{k_y} \sum_j \chi_{zj}^{\text{el}}(\mathbf{k}, \omega) \delta E_j(\mathbf{k}, \omega) - \frac{4\pi i}{k_y} \delta \rho(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.4)$$

Na prática, os autores substituíram a segunda linha do sistema linear homogêneo obtido a partir da lei de Ampère pela igualdade acima, onde a lei de Gauss foi usada. A justificativa de tal procedimento, conforme Yoon *et al*, seria evitar produtos do componente v_y da velocidade microscópica dos elétrons, uma vez que este componente contém aproximações devido à

alteração das órbitas decorrentes da inomogeneidade de campo magnético. O uso da lei de Ampère levaria necessariamente a estes produtos, no caso dos componentes χ_{yj} , e que são evitados com o uso da lei de Gauss, segundo a equação (4.4).

Em comparação com trabalhos anteriores, no limite de $k_z = 0$ os resultados obtidos por Yoon *et al* recaem nos resultados encontrados nas referências [47, 49, 50]. No entanto, os resultados para k_z finito (propagação oblíqua) diferem de [49, 50] (a referência [47] contém estudo exclusivamente com propagação perpendicular, $k_z = 0$). A principal diferença está no fato que Yoon *et al* encontraram a simetria esperada para o tensor suscetibilidade dos elétrons, não obtida em [49, 50].

Um importante ponto cabe ser ressaltado neste momento. Com a inclusão dos efeitos eletromagnéticos dos íons, é esperado que no limite apropriado a IWI seja encontrada. Todavia, o componente χ_{yy} diverge para $k_y = 0$, tornando o formalismo inadequado para a obtenção da IWI e, em decorrência, não descreve corretamente a MTSI. Como a LHDI é estabilizada para este limite de propagação, o formalismo pode ser usado para descrevê-la. Os autores salientam que, se fosse utilizado o procedimento usual para encontrar o tensor suscetibilidade dos elétrons, ou seja, se a equação (4.3) fosse usada para todos componentes do tensor, a divergência seria evitada. No entanto, resultados numéricos indicam que tal procedimento não apresenta a existência da LHDI, mas descreve plenamente a MTSI (IWI). Este é um exemplo típico de que somente com o uso da lei de Gauss a LHDI é encontrada. Yoon *et al* argumentam que a LHDI e a MTSI (IWI) são dois ramos distintos da relação de dispersão, e podem ser encontrados usando o correspondente formalismo acima citado. Assim, espera-se que um formalismo adequado seja desenvolvido para que as duas instabilidades sejam descritas de forma unificada.

Os primeiros resultados numéricos, reproduzidos aqui na figura 4.4, foram obtidos para beta de plasma dos elétrons nulo ($\beta_e = 0$ - temperatura eletrônica nula), e beta dos íons variando, $\beta_i = 1, 5, 10, 25, 50$. Os parâmetros usados em todos os gráficos subsequentes desta seção, a saber,

$$\frac{\Omega_e}{\omega_{pe}} = 0.1, \quad \frac{v_{Di}}{v_A} = \sqrt{\beta_i} \Rightarrow v_{Di} = v_i,$$

são condizentes com observações de satélites feitas na região da *neutral sheet*, imediatamente antes do começo das sub-tempestades [56]. A quantidade ω/ω_{LH} representa a parte real da frequência normalizada à frequência híbrida inferior, ω_{LH} , e γ/ω_{LH} é a parte imaginária normalizada. ck_y/ω_{pe} e ck_z/ω_{pe} são, respectivamente, os números de onda perpendicular e paralelo normalizados. A figura mostra os dados para propagação estritamente perpendicular e observa-se que com o aumento de β_i a LHDI tende a ser estabilizada. Nota-se que, no entanto, altos valores de β_i ainda mantêm a instabilidade.

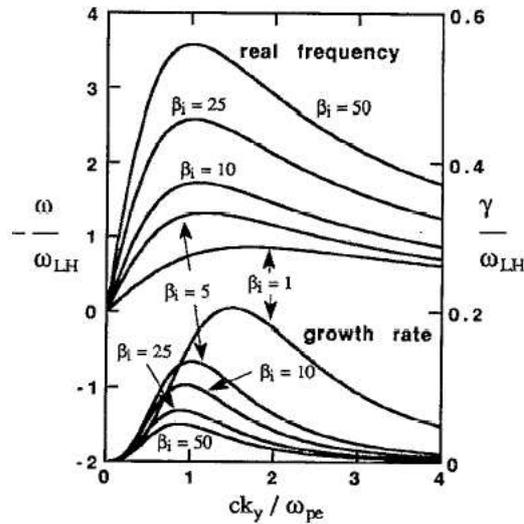


Fig. 4.4: Propagação perpendicular ($k_z = 0$); $\beta_e = 0$; $\beta_i = 1, 5, 10, 25, 50$. [113]

O gráfico 4.5 mostra resultados para a propagação oblíqua para o modo LHDI, tal como se referiu Yoon *et al.* Destaca-se aqui que o formalismo desenvolvido não conduz naturalmente à MTSI (IWI) se as inhomogeneidades forem suprimidas. Por isso, os autores consideram o modo presente nas propagações oblíquas, como vemos nas figuras 4.5 e 4.7, como sendo exclusivamente a LHDI. Vemos, no gráfico 4.5, que a taxa de crescimento da LHDI diminui bastante à medida que a curva se afasta da propagação exatamente perpendicular, adquirindo o valor máximo exatamente nessa direção.

Facilmente vemos que na propagação exatamente paralela não aparece a IWI, como deveríamos esperar, em virtude da inclusão dos efeitos eletromagnéticos dos íons. A conclusão a que chegaram os autores indica que estes efeitos não desempenham um papel importante na LHDI, como ocorreu para a MTSI.

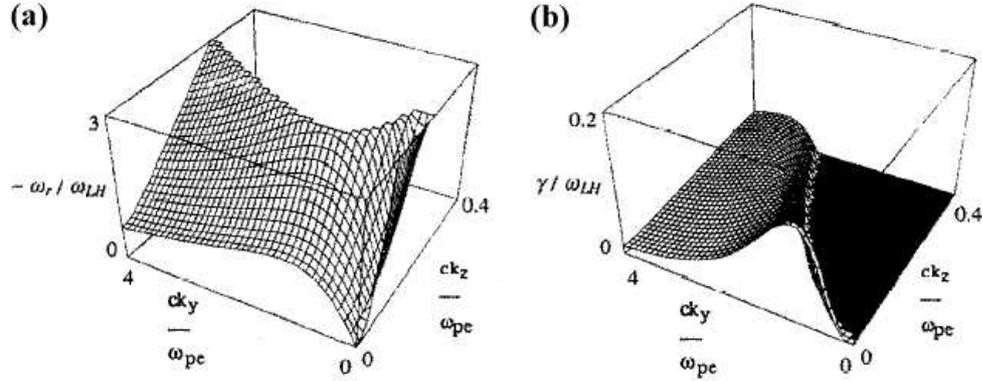


Fig. 4.5: Propagação oblíqua; $\beta_e = 0$; $\beta_i = 5$; (a) parte real; (b) parte imaginária. [113]

Os efeitos de temperatura foram considerados, e os resultados foram reproduzidos aqui na figura 4.6. Nota-se que para temperatura $\beta_e = 0.02$ a curva obtida não se diferencia muito da obtida para elétrons frios. À medida que β_e aumenta, verifica-se uma redução na taxa de crescimento da instabilidade e, simultaneamente, uma redução na gama de valores de números de onda instáveis. Este é um resultado bem conhecido na literatura. Todavia, é importante enfatizar que para $\beta_e = 1.25$, que é um valor realista observado na *neutral sheet*, a LHDI permanece excitada, mesmo que com uma taxa bem inferior quando comparada com $\beta_e = 0$.

Para uma compreensão melhor da estrutura da superfície da taxa de crescimento da LHDI, os autores traçaram o gráfico para propagação oblíqua, reproduzido na figura 4.7. Quatro diferentes temperaturas para os elétrons foram usadas, $\beta_e = 0.02, 0.2, 0.75, 1.25$, com $\beta_i = 5$. Nota-se que, com o aumento da temperatura eletrônica, a superfície da taxa de crescimento vai diminuindo e se concentrando na região de k_z e k_y pequenos, mantendo-se excitada mesmo para $\beta_e = 1.25$. Outro ponto interessante de ser comentado, é a não presença da IWI na propagação estritamente paralela, confirmando o resultado obtido para elétrons frios.

Como vimos, Yoon *et al* em [113] não descreveram as instabilidades LHDI e MTSI (IWI) a partir de um tratamento teórico unificado. No capítulo 3 da presente tese, foi apresentado o trabalho desenvolvido por Gaelzer, Ziebell e Silveira, de 1999 [17], onde foi

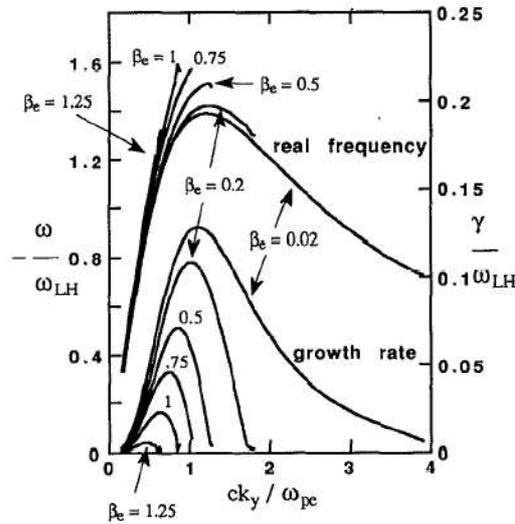


Fig. 4.6: Propagação perpendicular; partes real e imaginária da LHDI para $\beta_e = 0.02, 0.2, 0.5, 0.75, 1, 1.25$ com $\beta_i = 5$. [113]

obtido o tensor dielétrico efetivo que incorpora simultaneamente os efeitos dos gradientes da densidade e do campo magnético de equilíbrio, a partir de uma sólida argumentação teórica. As características positivas já enfatizadas desse tensor, torna o seu emprego adequado em uma tentativa de descrição unificada das referidas instabilidades. A particularização do tensor dielétrico efetivo obtido na referência [17] para o estudo dessas instabilidades, foi o foco principal do trabalho desenvolvido por Silveira, Ziebell, Gaelzer e Yoon, de 2002 [18]. Neste trabalho, no entanto, notamos que além do uso do tensor obtido em [17] foi necessário repensar a relação de dispersão para um plasma inhomogêneo. No próximo capítulo esse assunto será apresentado.

4.6 A magnetosfera terrestre

O campo magnético do Sol domina o espaço interplanetário do sistema solar⁵. Este campo é reforçado pelo campo gerado devido ao fluxo de partículas originadas das camadas mais externas do Sol, chamado de *vento solar*, que se deslocam pelo espaço interplanetário. O vento solar é composto essencialmente por prótons e elétrons, com aproximadamente mes-

⁵ As referências adotadas nesta seção incluem textos básicos [115–119] e aprofundados [21, 120, 121].

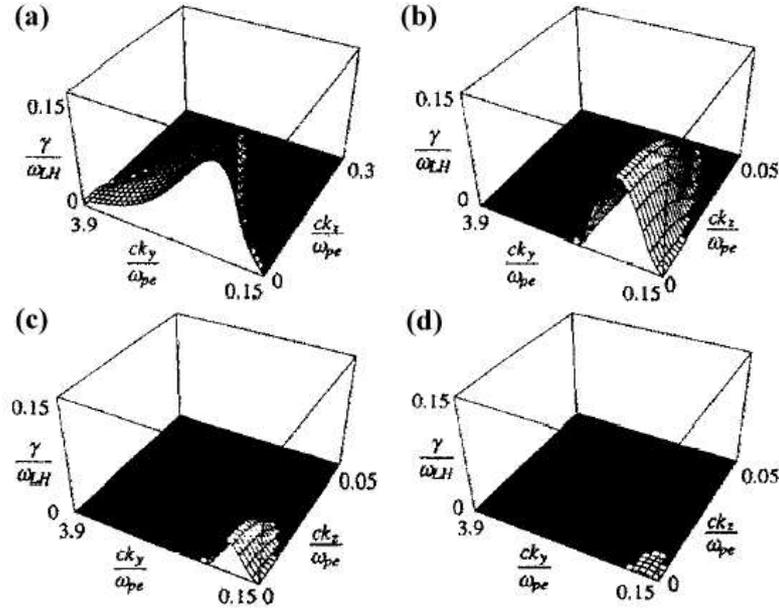


Fig. 4.7: Propagação oblíqua para diferentes temperaturas eletrônicas, com $\beta_i = 5$; $\beta_e =$ (a) 0.02; (b) 0.2; (c) 0.75; (d) 1.25. [113]

ma densidade. Os valores médios de parâmetros como velocidade, densidade e intensidade de campo magnético são da ordem de 468 km/s (velocidade supersônica), 8.7 prótons/cm³, e 6.6 nT, respectivamente.

O campo magnético interplanetário do Sol interage com o campo magnético terrestre, gerando uma complexa configuração de campo em torno da Terra, que se estende por vários raios terrestres. A figura 4.8, extraída da referência [120], mostra qualitativamente uma topologia regular desta complexa configuração, onde basicamente pode-se identificar quatro regiões distintas. A região I compreende as linhas de campo que emergem do Sol e retornam a ele em algum outro ponto. Na região II constam as linhas de campo que ligam o campo magnético solar com o terrestre. A região III mostra as linhas de campo originadas pela Terra e que a interceptam em dois pontos distintos. Na região IV as linhas de campo estão totalmente imersas no plasma; não estão em contato com o campo solar e nem com o campo terrestre. É uma região que possui característica transitória, podendo deixar momentaneamente de existir ou ocorrer a formação de duas ou mais regiões deste tipo.

Pode-se identificar outras três regiões (A, B e C), separadas convenientemente não pelas

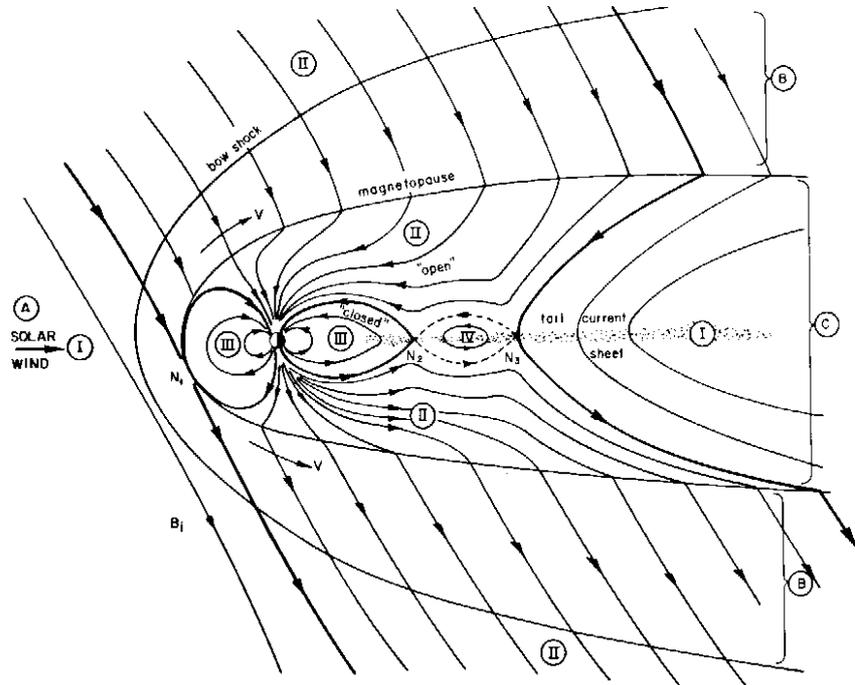


Fig. 4.8: Interação das linhas de campo interplanetárias com o campo terrestre. [120]

características de campo mas sim por características de plasma. A região A é o próprio plasma de vento solar não perturbado e supersônico. Por possuir baixa densidade e quase completa ionização, o plasma do vento solar tem características semelhantes às de um bom condutor. Uma delas, é a dificuldade que campos magnéticos externos encontram para penetrar em materiais deste tipo. Assim sendo, o vento solar ao se aproximar do campo magnético terrestre, tende a comprimi-lo na região diurna e estendê-lo na região noturna. A topologia magnética resultante é representada pela clássica figura da magnetosfera terrestre, apresentada aqui na figura 4.9, onde vemos a compressão das linhas de campo na região diurna e a formação da chamada cauda magnética (*magnetotail*) na região noturna.

O vento solar não entra livremente nos domínios do campo magnético terrestre. A interação do campo magnético do vento solar com o terrestre (lado diurno), devido à compressão, gera um efeito de freamento das partículas supersônicas levando-as a velocidades subsônicas, causando compressão e aquecimento do plasma do vento solar e intensa atividade de ondas. A região do espaço em que ocorre este evento é chamada de *bow shock* e encontra-se a uma distância média da Terra de 15 raios terrestres, variando de 12 a 20 raios

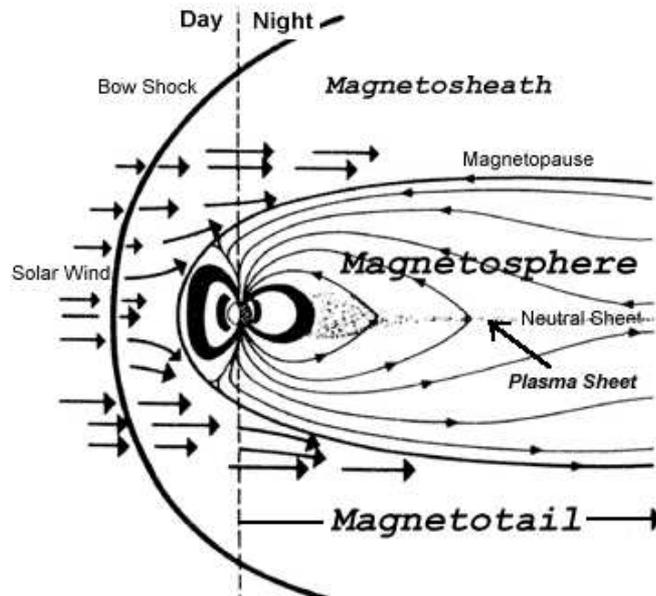


Fig. 4.9: Magnetosfera Terrestre. [116]

terrestres, conforme os parâmetros de plasma do vento solar. As figuras 4.8 e 4.9 mostram essa região.

A direção com que as partículas penetram na *bow shock* é dividida na literatura em dois tipos: choques quase perpendicular e quase paralelo. O choque quase perpendicular é caracterizado quando as partículas se “chocam” com a *bow shock* com uma direção de velocidade formando um ângulo maior que 45° com o campo magnético interplanetário; o choque quase paralelo ocorre quando o ângulo é menor que 45° . Muitas partículas são refletidas neste processo e outras são transmitidas para além da *bow shock*. As partículas refletidas povoam a região à frente da *bow shock*, conhecida com o nome de *foreshock*. As partículas transmitidas ocupam uma região chamada de *magnetosheath* (bainha magnética) (figura 4.9 e região B da figura 4.8) que, portanto, é composta inicialmente por um plasma subsônico, comprimido e algumas vezes turbulento, com valores típicos de energia de 1 keV para os íons e 100 eV para os elétrons, e densidade de 20 partículas/cm³. Subseqüentemente, esse plasma é acelerado e expandido, podendo romper o limite da *magnetosheath*, contribuindo para a formação do plasma que ocupa a chamada *neutral sheet*. O recém citado limite da *magnetosheath* é a região onde ocorre o contato do campo interplanetário com o campo

terrestre, e possui a denominação de *magnetopause* (pausa magnética) (figuras 4.9 e 4.8). Nas figuras fica claro que a *magnetosheath* é limitada pela *bow shock* e pela *magnetopause*.

A magnetosfera terrestre propriamente dita, é a região onde a influência do campo magnético terrestre possui uma contribuição relevante para os processos dinâmicos do plasma presente (região C da figura 4.8 e figura 4.9). No final da década de 50 e década de 60 do século passado, com o início da era espacial, começaram os estudos observacionais da magnetosfera da Terra. Sondas espaciais mostraram que a existência de regiões deste tipo não é exclusividade da Terra, e que os outros planetas, a menos de Vênus e Marte, também possuem magnetosfera, com suas respectivas características. Apesar disso, o termo “magnetosfera” será empregado aqui exclusivamente para designar a magnetosfera terrestre.

A magnetosfera contém várias regiões de larga escala, que variam em termos da composição, energia e densidade dos plasmas que as ocupam. Fundamentalmente, estes plasmas são originados do vento solar e da ionosfera terrestre. Em termos de dimensão espacial, a magnetosfera compreende uma distância em torno de 10 raios terrestres no lado diurno e centenas no lado noturno, que constitui a *magnetotail*.

A *magnetotail* tem a forma aproximadamente cilíndrica, com raio em torno de 25 raios terrestres. Na região central da *magnetotail*, em virtude das direções opostas das linhas de campo (ver figura 4.9), forma-se uma área em que o campo magnético é praticamente nulo, denominada de *neutral sheet*. Esta região é povoada por um plasma quente, de energias da ordem de keV, em que os íons possuem temperaturas em torno de sete vezes a temperatura eletrônica, cuja densidade varia lentamente com o tempo numa gama de 0.4 - 2 partículas/cm³. Esta região de plasma é conhecida como *plasma sheet*. Mais especificamente, a *neutral sheet* é uma camada isenta de campo magnético que separa equatorialmente a *plasma sheet* em duas partes, chamadas de lóbulo do norte e lóbulo do sul.

A *substorm* (sub-tempestade magnética) é um importante processo que ocorre na *magnetotail*, originado pela reconfiguração da topologia do campo magnético nesta região, decorrente das constantes mudanças de direção do campo magnético interplanetário. Este processo é mais eficiente quando o campo magnético interplanetário está orientado no sentido norte-sul da Terra, permitindo que ele se una ao campo magnético terrestre na *magnetopause* e, provavelmente via reconexão entre estes campos, promova a transferência de energia do

vento solar para a magnetosfera. O armazenamento desta energia ocorre na *magnetotail* e constitui a primeira fase da *substorm*, chamada de “fase de crescimento” (ver figura 4.10(a)). Durante a segunda fase, denominada de “fase de expansão da *substorm*” (figura 4.10(b)), as linhas de campo mais internas da *magnetotail* começam a relaxar de seu alongamento, ocasionado na primeira fase, retornando com o passar do tempo à forma tradicional bipolar. Este processo, conhecido como “bipolarização”, resulta na energização das partículas carregadas da *plasma sheet*, levando-as a serem intensamente injetadas nas camadas mais internas da magnetosfera, em direção às regiões aurorais da Terra. Embora haja permanentemente uma aurora fraca, é nos períodos das *substorm* que ocorrem os arcos aurorais mais intensos. O mecanismo que serve de “gatilho” para o início da *substorm* ainda é desconhecido, todavia acredita-se que instabilidades macroscópicas e/ou microscópicas, tal como a LHDI, poderiam desempenhar este papel. A terceira fase é a “fase de recuperação”, na qual a configuração de campo da magnetosfera retorna ao seu estado de calma (ver figura 4.10(c)). Cada *substorm* é um processo que se desenvolve num intervalo de 2 a 3 horas e, em média, ocorrem seis em um dia.

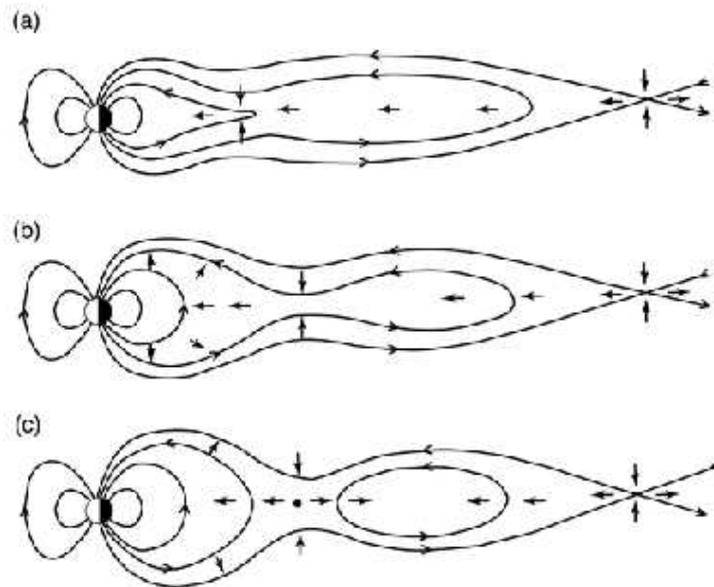


Fig. 4.10: As fases da *substorm*: (a) fase de crescimento; (b) fase de expansão; (c) fase de recuperação.

Em um contexto mais geral dos estudos da magnetosfera terrestre, identificou-se que ela é a fonte principal das radiações quilométricas aurorais e de partículas relativísticas; verificou-se que regiões de campos elétricos internas da magnetosfera possuem um papel fundamental na aceleração de partículas nas auroras; descobriu-se grandes fluxos de íons aprisionados de grandes energias. Alguns efeitos dos complexos fenômenos que ocorrem na magnetosfera afetam diretamente o homem, interferindo, por exemplo, no sistema de comunicações e potência de transmissão de sinais, nas órbitas de satélites e, até mesmo, no clima do planeta.

5. A Aplicação do Formalismo no Estudo da LHDI e MTSI (IWI)

5.1 Introdução

Todo o formalismo desenvolvido nos três primeiros capítulos será aplicado agora ao estudo das instabilidades de deriva LHDI e MTSI (IWI). Primeiramente, um modelo para a região de inhomogeneidade será elaborado tendo como base o equilíbrio de Harris, direcionado ao modelamento da região da *neutral sheet*. Um perfil linear para as inhomogeneidades da densidade e do campo magnético ambiente, baseado no equilíbrio de Harris, será usado. Os íons serão considerados não magnetizados, e com uma deriva diamagnética perpendicular aos gradientes. Os elétrons serão considerados fortemente magnetizados, apresentando derivas diamagnética e de gradiente de B , perpendiculares aos gradientes de inhomogeneidade. O tensor suscetibilidade obtido no capítulo 3, será particularizado para o caso de propagação de ondas perpendicularmente aos gradientes, e para frequências próximas à frequência das ondas híbridas inferiores ($\omega \simeq \sqrt{|\Omega_e|\Omega_i}$). Uma nova relação de dispersão, que inclui explicitamente a derivada espacial do tensor suscetibilidade, será desenvolvida. Como consequência, as derivadas dos componentes do tensor suscetibilidade serão calculadas. As soluções da nova relação de dispersão serão obtidas para o limite de temperatura eletrônica nula. Os resultados numéricos da parte imaginária (taxa de crescimento da instabilidade) e da parte real da frequência, em função de k_{\parallel} e k_{\perp} , serão apresentados em gráficos 3D e 2D. Os principais resultados apresentados nesse capítulo, bem como um sumário dos desenvolvimentos teóricos utilizados, podem ser encontrados na referência [18].

5.2 Modelo para a região de inomogeneidade

No capítulo precedente, foi visto que muitos trabalhos tiveram como foco principal o estudo da LHDI em regiões da magnetosfera terrestre. O formalismo geral apresentado nos três primeiros capítulos será agora aplicado especificamente ao estudo das instabilidades de deriva LHDI e MTSI (IWI), sendo dada ênfase à primeira, para parâmetros de plasma da região da *magnetotail*. Assim, é imprescindível que seja feito um modelo teórico para a região de inomogeneidade, que esteja em conformidade com o conhecimento prévio da configuração da *magnetotail*.

A figura 5.1(a), extraída da figura 4.9, é útil para compreender o modelo teórico que será empregado. Nela consta em destaque a região da *magnetotail* e a presença da *plasma sheet*. Nota-se que a região de plasma é bastante concentrada na região equatorial da magnetosfera, o que sugere que a densidade varia na direção x , considerando os eixos que aparecem na figura. Fora dessa região a densidade do plasma é praticamente nula, enquanto próximo à região central, que é a região da *plasma sheet* propriamente dita, a densidade aumenta rapidamente. Quanto ao campo magnético, a parte norte da magnetosfera, segundo a figura 5.1(a), nas proximidades da origem do sistema de coordenadas, possui um campo magnético praticamente paralelo ao eixo z e orientado no sentido noite-dia. Este campo tende a diminuir de intensidade na direção x , no sentido norte-sul, até se anular na região chamada de *neutral sheet*. Já na parte sul da magnetosfera, todavia, o campo magnético aumenta de intensidade gradualmente na direção x e sentido norte-sul, com sentido do campo oposto ao sentido do campo na parte norte. Um perfil bastante adequado a essa situação foi descrito por Harris, em 1962 [69]. De acordo com esse perfil, a densidade e o campo magnético são inomogêneos e variam respectivamente de acordo com

$$n(x') = \frac{n_0}{\cosh^2 x'} \quad , \quad B(x') = B_0 \tanh x' \quad ,$$

onde n_0 e B_0 são constantes e $x' = x/L$, sendo x a coordenada e L a distância típica da variação significativa das inomogeneidades do meio. O perfil descrito está representado graficamente na figura 5.1(b), que é essencialmente a figura 1 da referência [69]. Observa-se que na região central ocorre o máximo da densidade, e fora dessa região a densidade diminui

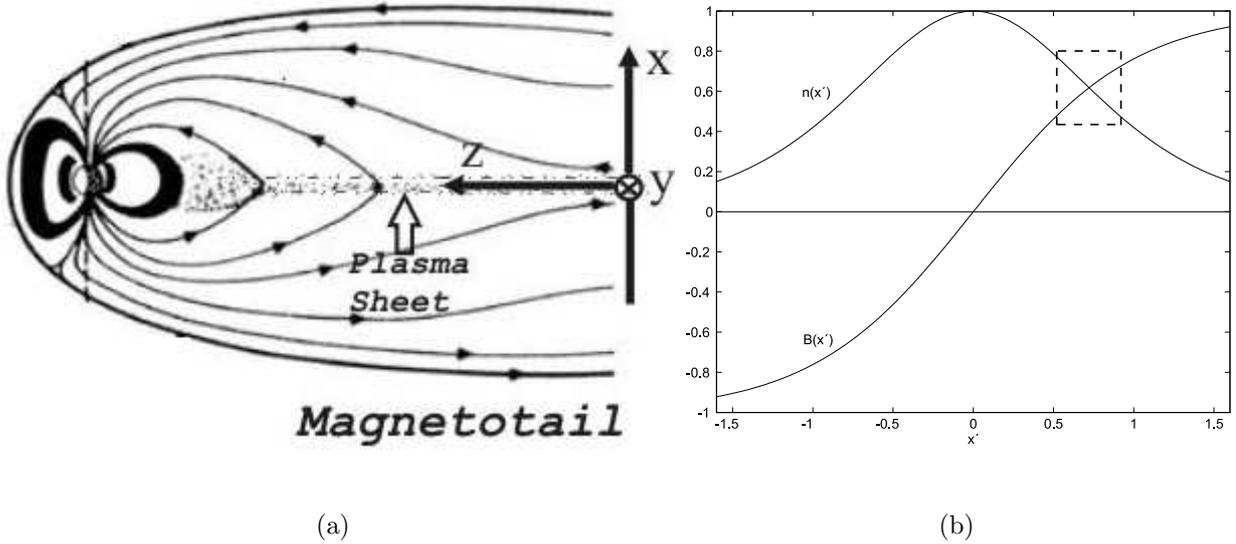


Fig. 5.1: (a) Sistema de eixos adequado para o modelo da região de inhomogeneidade [116]; (b) Perfil de Harris para a densidade e campo magnético de equilíbrio.

rapidamente e simetricamente. Este comportamento da densidade é bastante apropriado para descrever a situação observada na *magnetotail*, apresentada na figura 5.1(a). O campo magnético é assumido arbitrariamente como positivo para x' positivo, diminuindo próximo à origem e tornando-se negativo para x' negativo. É uma configuração de campo bastante conveniente para descrever a região da *magnetotail* que, segundo a figura 5.1(a), possui um campo que diminui de intensidade na região norte, tornando-se nulo na região equatorial, chamada *neutral sheet*, e tem sentido invertido na região sul.

Um ponto importante que deve ser colocado nesse momento, diz respeito aos tratamentos independentes usados para os íons e elétrons. O interesse, a partir de agora, é examinar as características das instabilidades de deriva LHDI e MTSI (IWI) no âmbito da *magnetotail*. Deste modo, a gama de frequências ω das ondas de interesse está na faixa de frequência das ondas híbridas inferiores $\sqrt{|\Omega_e|\Omega_i}$ e, assim sendo, $\Omega_i \ll \omega \ll |\Omega_e|$. Portanto, para a faixa de frequência de interesse, a frequência de cíclotron dos íons Ω_i pode ser desprezada, isto é, os efeitos do campo magnético ambiente são efetivamente irrelevantes para o movimento dos íons. Durante o tempo de um período de oscilação da onda, os íons descrevem uma trajetória praticamente linear, de forma que $r_{Li} \gg \lambda$, sendo λ o comprimento de onda da

oscilação. É como se a onda “enxergasse” os efeitos dos íons como se eles estivessem em uma região sem campo magnético ambiente. Já os elétrons são fortemente magnetizados, com $\omega \ll |\Omega_e|$ e $r_{Le} \ll \lambda$. Isso significa que para um período de oscilação da onda, os elétrons descrevem vários giros de cíclotron, enquanto os íons praticamente descrevem uma trajetória linear. O resultado formal dessa diferença entre os comportamentos dos elétrons e dos íons se reflete na condição de validade $\lambda \ll L_n$ da aproximação WKB, dada por (1.20a). Como $L_n \gg r_{Le}$, o que não pode ser afirmado para o raio de Larmor dos íons r_{Li} , os elétrons cumprem a condição de validade da aproximação WKB, no entanto os íons não. Como consequência dessa situação, a aproximação WKB não pode ser aplicada para os íons e, portanto, o tensor dielétrico efetivo, obtido em (3.81), será usado apenas para os elétrons. Para os íons, o tensor dielétrico usado será o tensor que foi obtido primeiramente por Wong e Goldstein em [114]. Mais detalhes deste tensor serão apresentados logo a seguir.

Embora os íons sejam tratados como não magnetizados, a sua deriva diamagnética \mathbf{v}_{Di} , (4.2), será mantida, em concordância com a situação de equilíbrio inomogêneo do plasma. No entanto, a sua deriva de gradiente de B será desprezada.

Esse tipo de abordagem para o tratamento dos íons e elétrons é o mesmo adotado no trabalho de Yoon *et al*, referência [113], discutido na seção 4.5. Assim, no presente capítulo, todo o formalismo apresentado nos capítulos anteriores será empregado para a obtenção de resultados numéricos, que poderão ser comparados com os resultados obtidos na referência citada.

O formalismo descrito nos três primeiros capítulos da presente tese admite perfis lineares de inomogeneidade da densidade de equilíbrio e da intensidade de campo magnético de equilíbrio, com gradientes na direção \mathbf{e}_x , e campo apontando na direção \mathbf{e}_z , tal que

$$n(x) = n_0 (1 - \epsilon_n x), \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{B}(x) = B_0 (1 + \epsilon_B x) \mathbf{e}_z, \quad (5.1b)$$

onde $n(x)$ é a densidade e $\mathbf{B}(x)$ é o campo magnético ambiente, ambos variáveis com a posição x , e $\epsilon_n = 1/L_n$ e $\epsilon_B = 1/L_B$ são o inverso das escalas de comprimento que caracterizam as inomogeneidades da densidade e do campo magnético, respectivamente. Tal perfil

é bastante apropriado para descrever aproximadamente a região indicada por um retângulo tracejado da figura 5.1(b), que pode representar um determinado segmento da *magnetotail*, como já fora anteriormente discutido. A figura 5.2 é uma representação dos perfis lineares das inomogeneidades do campo magnético e densidade, dados por (5.1), cujos gradientes são perpendiculares ao campo magnético ambiente. Também consta nessa figura a orientação das derivas diamagnéticas dos íons (\mathbf{v}_{Di}) e dos elétrons (\mathbf{v}_{De}), e a deriva de gradiente de B dos elétrons ($\mathbf{v}_{\nabla B}$).

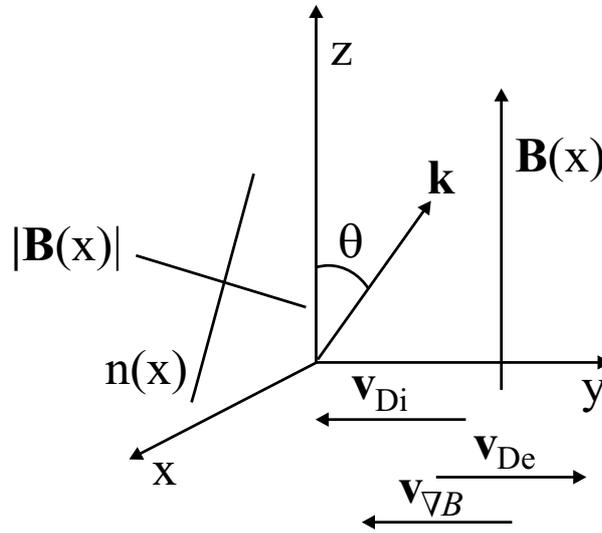


Fig. 5.2: Representação esquemática dos perfis lineares das inomogeneidades de campo magnético e densidade de equilíbrio.

As inomogeneidades, cujas magnitudes são aqui representadas por ϵ_n e ϵ_B , não são independentes entre si. É possível mostrar, a partir das equações da conservação da massa, da conservação do momento (equações de fluido) e da lei de Ampère que, para a situação de equilíbrio descrita no capítulo introdutório, com perfis de campo e densidade expressos em (5.1), as inomogeneidades são acopladas de acordo com a relação

$$\epsilon_B = \frac{4\pi n_0(T_i + T_e)}{B_0^2} \epsilon_n . \quad (5.2)$$

Nesta configuração de inomogeneidades, a função de distribuição eletrônica depende da velocidade microscópica \mathbf{v} dos elétrons e da posição x do centro guia da órbita de cíclotron

dos elétrons, expressa por $\chi_e = x - v_y/|\Omega_e|$. Essas quantidades são as constantes de movimento, já descritas com mais detalhes no capítulo 2 da presente tese. Supondo o meio fracamente inhomogêneo, tal que $L_n \gg r_{Le}$, onde quantidade $r_{Le} = v_e/|\Omega_e|$ aqui representa o raio de Larmor dos elétrons com velocidade térmica, sendo $v_e = \sqrt{T_e/m_e}$, a velocidade térmica dos elétrons e T_e a temperatura¹ dos elétrons, a aproximação (2.15) é válida e, assim

$$F_e(\mathbf{v}, \mathcal{X}_e) \simeq f_e(\mathbf{v}, x) - \frac{v_y}{|\Omega_e|} \frac{\partial f_e}{\partial x}(\mathbf{v}, x) .$$

Para uma distribuição de velocidades inhomogênea descrita por uma maxwelliana isotrópica,

$$f_e(\mathbf{v}, x) = \frac{n(x)}{(2\pi)^{2/3} v_e^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_e^2}\right) ,$$

resulta

$$F_e(\mathbf{v}, \mathcal{X}_e) \simeq \left(1 + \sqrt{2} \frac{v_{De} v_y}{v_e^2}\right) f_e(\mathbf{v}, x) , \quad (5.3)$$

onde

$$v_{De} = \frac{\epsilon_n v_e^2}{\sqrt{2} |\Omega_e|} , \quad \mathbf{v}_{De} = v_{De} \mathbf{e}_y , \quad (5.4)$$

é a velocidade de deriva diamagnética dos elétrons, obtida da equação mais geral (4.2).

Os íons, sendo não magnetizados, podem ser simplesmente descritos microscopicamente por uma função distribuição semelhante a uma maxwelliana, com o componente v_y acrescido de uma deriva diamagnética,

$$f_i = \frac{n(x)}{(2\pi)^{3/2} v_i^3} \exp\left(-\frac{v_x^2 + (v_y + v_{Di})^2 + v_z^2}{2v_i^2}\right) , \quad (5.5)$$

onde $v_i = \sqrt{T_i/m_i}$ é a velocidade térmica, T_i é a temperatura e

$$v_{Di} = \frac{\epsilon_n v_i^2}{\sqrt{2} \Omega_i} , \quad \mathbf{v}_{Di} = -v_{Di} \mathbf{e}_y , \quad (5.6)$$

¹ As temperaturas aqui citadas estão em unidades de energia, sendo, portanto $T = \kappa \mathcal{T}$, onde κ é a constante de Boltzmann e \mathcal{T} é a temperatura real em Kelvin.

é a velocidade de deriva diamagnética, sendo todas estas quantidades referentes aos íons. A função distribuição acima colocada, não descreve apenas uma situação de íons inhomogêneos. É possível utilizá-la para descrever uma simples situação de plasma com elétrons e íons ambos homogêneos ($\epsilon_n = 0 \Rightarrow n(x) = n_0$), mas com os íons possuindo uma velocidade de deriva $\mathbf{v}_{Di} = -v_{Di} \mathbf{e}_y$, perpendicular ao campo magnético ambiente, conforme a figura 5.2. Para essa situação, a velocidade de deriva dos íons não tem origem no gradiente de densidade, ao contrário do caso tratado presentemente. Este cenário, de plasma homogêneo e deriva dos íons, propicia o surgimento da instabilidade MTSI, cuja fonte é justamente a deriva mencionada.

Depois de descrito o modelo para a região de inhomogeneidade, é necessário particularizar o tensor dielétrico efetivo (3.81) para as características da onda de interesse. Portanto, o tensor dielétrico efetivo será adequado para uma faixa de frequências próximas à frequência das ondas híbridas inferiores. A direção de propagação das ondas (vetor \mathbf{k}) que será examinada, ficará restrita às ondas que se propagam perpendicularmente aos gradientes. A próxima seção é destinada a esse assunto.

5.3 O tensor dielétrico efetivo adaptado para ondas híbridas inferiores

A forma do tensor dielétrico efetivo encontrado na subseção 3.4.3 é demasiadamente geral para a obtenção de resultados numéricos. O estudo agora, será particularizado para ondas com frequências próximas à frequência das ondas híbridas inferiores $\omega \sim \sqrt{|\Omega_e| |\Omega_i|}$, e com propagação perpendicular aos gradientes, de maneira que $\psi = \pi/2 \Rightarrow \mathbf{k} = k_{\perp} \mathbf{e}_y + k_{\parallel} \mathbf{e}_z$. Portanto, de acordo com a figura 5.2, as ondas se propagam no plano $y-z$, com $k_{\perp} = k \sin \theta$ e $k_{\parallel} = k \cos \theta$, com θ definido como sendo o ângulo de propagação. Para uma propagação oblíqua, $\theta = \tan^{-1} k_{\perp}/k_{\parallel}$.

A base da teoria fundamentada nos capítulos anteriores supõe o plasma completamente ionizado e, em adição, supõe-se que ele é constituído por prótons (íons) e elétrons. Os valores dos parâmetros de plasma usados para a aquisição de resultados numéricos, foram

extraídos do trabalho de Yoon *et al* [113], que originalmente os retirou de dados registrados por satélites imediatamente antes do início de uma *substorm*, em região da *neutral sheet* próxima à Terra.

Deixando explícitas as contribuições dos íons e elétrons, o tensor (3.81) pode ser reescrito como segue

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \mathbf{1} + \overleftrightarrow{\chi}^e + \overleftrightarrow{\chi}^i, \quad (5.7)$$

onde $\overleftrightarrow{\chi}^e$ e $\overleftrightarrow{\chi}^i$ são os tensores suscetibilidade elétrica para os elétrons e íons, respectivamente. No caso dos elétrons, $\overleftrightarrow{\chi}^e = \overleftrightarrow{\chi}_B + \overleftrightarrow{\chi}_P$, com $\overleftrightarrow{\chi}_B$ dado por (3.82) e $\overleftrightarrow{\chi}_P$ dado por (3.83), com ambos os tensores calculados exclusivamente considerando $\alpha = e$.

5.3.1 O tensor suscetibilidade $\overleftrightarrow{\chi}^i$

O tensor suscetibilidade dos íons foi calculado pela primeira vez por Wong e Goldstein em 1988 [114]. O principal objetivo do referido artigo foi estudar a possibilidade da distribuição dos prótons, com deriva perpendicular ao campo magnético ambiente e temperatura anisotrópica, ser capaz de gerar propagação oblíqua de ondas do tipo *whistler*, na região da *foreshock*. Esse tipo de onda, assim como as ondas híbridas inferiores, possuem uma frequência bem maior que a frequência de ciclotron dos prótons. Por tal motivo, os autores consideraram os íons (prótons, neste caso) também não magnetizados. Mais tarde, em 1991, Lui *et al* [108], usaram o tensor obtido por Wong e Goldstein, mas adaptado para temperatura isotrópica, como sendo a contribuição dos íons para o tensor dielétrico, no estudo da MTSI e IWI, direcionado à região da *neutral sheet*. Yoon e Lui, em 1993 [110], deduziram novamente o tensor citado, utilizando-o na investigação da MTSI e IWI, para propagação oblíqua e com parâmetros físicos da região da *neutral sheet*. Finalmente, Yoon *et al* [113]², 1994, utilizaram uma forma muito semelhante à do tensor usado por Lui *et al* (apenas o sinal da deriva dos íons é diferente), para a contribuição dos íons ao tensor dielétrico completo. Todavia, nesse artigo, diferentemente dos outros citados, os autores consideraram um plasma inhomogêneo em densidade e campo magnético ambiente, tornando

² Apenas para relembrar, este artigo consta em destaque na seção 4.5 da presente tese.

possível o estudo da LHDI.

Em todos os trabalhos mencionados acima, os autores determinaram o tensor suscetibilidade para os íons usando o procedimento tradicional da física de plasma para a obtenção do tensor dielétrico, amplamente conhecido na literatura [12]. Cabe ressaltar aqui as características desse tensor: ele foi obtido para uma situação de equilíbrio sem campo magnético ambiente (íons não magnetizados); foram incorporados os efeitos eletromagnéticos completos dos íons (o que possibilita o estudo da IWI); a função distribuição usada, (5.5), possui uma deriva $\mathbf{v}_{Di} = -v_{Di} \mathbf{e}_y$; o tensor foi obtido usando-se a hipótese de plasma homogêneo, de maneira que $n(x) = n_0$, o que não impede de ser usado o perfil $n(x) = n_0 (1 - \epsilon_n x)$, se a hipótese que os íons são localmente homogêneos for assumida; e finalmente, a faixa de frequência usada é compatível com as ondas híbridas inferiores, ou seja, $\omega \gg \Omega_i$. Abaixo, foram reproduzidos os componentes de $\overset{\leftrightarrow}{\chi}$ extraídos de [113]:

$$\chi_{xx}^i = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} z_i Z(z_i), \quad (5.8a)$$

$$\chi_{yy}^i = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left[\frac{k_{\parallel}^2}{k^2} z_i Z(z_i) - \left(\frac{k_{\perp}}{k} z_i - \frac{v_{Di}}{v_i} \right)^2 Z'(z_i) \right], \quad (5.8b)$$

$$\chi_{zz}^i = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} z_i \left(\frac{k_{\perp}^2}{k^2} Z(z_i) - \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} z_i Z'(z_i) \right), \quad (5.8c)$$

$$\chi_{xy}^i = \chi_{yx}^i = 0, \quad \chi_{xz}^i = \chi_{zx}^i = 0, \quad (5.8d)$$

$$\chi_{yz}^i = \chi_{zy}^i = -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \frac{k_{\parallel}}{k} z_i \left[\frac{k_{\perp}}{k} Z(z_i) + \left(\frac{k_{\perp}}{k} z_i - \frac{v_{Di}}{v_i} \right) Z'(z_i) \right], \quad (5.8e)$$

onde

$$z_i = \frac{\omega + \sqrt{2} k_{\perp} v_{Di}}{\sqrt{2} k v_i} \quad (5.9)$$

é o argumento da função de Fried & Conte $Z(z_i)$.

5.3.2 O tensor suscetibilidade $\overset{\leftrightarrow}{\chi}$

Para os elétrons, o tensor suscetibilidade é obtido a partir de

$$\overset{\leftrightarrow}{\chi} = \overset{\leftrightarrow}{\chi}_B + \overset{\leftrightarrow}{\chi}_P, \quad (5.10)$$

onde as expressões dos componentes de $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_B$ constam em (3.82) e as do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_P$ constam em (3.83), com uso exclusivo de $\alpha = e$. Cada um destes tensores será desenvolvido separadamente, como segue.

Desenvolvimento do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_P$

As ondas que estão sendo consideradas se propagam no plano $y-z$ e, portanto, possuem vetores de onda \mathbf{k} perpendiculares aos gradientes ($\psi = \pi/2$). De momento, serão levados em conta os dois primeiros harmônicos da frequência de ciclotron dos elétrons, ou seja, $n = 0, \pm 1$. Como o interesse é o estudo das instabilidades LHDI e MTSI (IWI), as frequências das ondas serão restritas à faixa com $\omega \sim \omega_{LH} = \sqrt{|\Omega_e|\Omega_i} \Rightarrow \omega \ll |\Omega_e|$, onde ω_{LH} é a frequência típica das ondas híbridas inferiores. Considerando essas restrições, e após alguns passos algébricos, os componentes do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_P$ obtidos são:

$$\begin{aligned} \chi_{Pxx} &= -\frac{\sqrt{2}}{k_{\parallel}} \epsilon_e X_e \nu_e^3 \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z(z_n) \\ &+ \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{1}{\sqrt{2}} \nu_e \epsilon_e X_e \sum_{n=\pm 1} \left\{ \frac{n^2}{\nu_e^2} \mathcal{H}_n(\nu_e^2) - 2\nu_e^2 \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) \right. \\ &\left. - \frac{1}{Y_e} \frac{n}{\nu_e^2} \left[-2\nu_e^2 \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) + \frac{n^2}{\nu_e^2} \mathcal{H}_n(\nu_e^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) \right] \right\} Z(z_n) \\ \chi_{Pxy} &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_e \frac{X_e}{Y_e} \nu_e \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z(z_n) \\ &+ i \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{1}{\sqrt{2}} \nu_e \epsilon_e X_e \sum_{n=\pm 1} \left\{ n \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) - \frac{1}{Y_e} \frac{1}{\nu_e^2} \left[-\frac{n^2}{\nu_e^2} \mathcal{H}_n(\nu_e^2) + (n^2 + \nu_e^2) \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) \right] \right\} Z(z_n) \\ \chi_{Pxz} &= -\frac{i}{2} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_e X_e \nu_e^2 \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z^{(1)}(z_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i \frac{1}{2} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_e \frac{X_e}{Y_e} \sum_{n=\pm 1} \left\{ Y_e \left[-\nu_e^2 \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) \right] + n \left[-\frac{1}{2\nu_e^2} \mathcal{H}_n(\nu_e^2) + \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) \right] \right\} Z^{(1)}(z_n) \\
\chi_{P_{yx}} & = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_e \frac{X_e}{Y_e} \nu_e \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z(z_n) \\
& - i \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{1}{\sqrt{2}} \nu_e \epsilon_e X_e \sum_{n=\pm 1} \left\{ n \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) - \frac{1}{Y_e} \frac{1}{\nu_e^2} \left[-\frac{n^2}{\nu_e^2} \mathcal{H}_n(\nu_e^2) + (n^2 + \nu_e^2) \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) \right] \right\} Z(z_n) \\
\chi_{P_{yy}} & = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_{\parallel}} \nu_e \epsilon_e X_e \sum_{n=\pm 1} \left\{ \frac{n^2}{\nu_e^2} \mathcal{H}_n(\nu_e^2) - \frac{1}{Y_e} \frac{n}{\nu_e^2} \left[\frac{n^2}{\nu_e^2} \mathcal{H}_n(\nu_e^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) \right] \right\} Z(z_n) \quad (5.11) \\
\chi_{P_{yz}} & = -\frac{1}{4} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_e \frac{X_e}{Y_e} \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z^{(1)}(z_n) \\
& + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_e \frac{X_e}{Y_e} \sum_{n=\pm 1} \left\{ Y_e \left[-n \mathcal{H}_n(\nu_e^2) \right] + \frac{n^2}{\nu_e^2} \mathcal{H}_n(\nu_e^2) - \frac{1}{2} \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) \right\} Z^{(1)}(z_n) \\
\chi_{P_{zx}} & = \frac{i}{2} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_e X_e \nu_e^2 \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z^{(1)}(z_n) \\
& + i \frac{1}{2} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_e \frac{X_e}{Y_e} \sum_{n=\pm 1} \left\{ Y_e \nu_e^2 \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) - n \left[-\frac{1}{2\nu_e^2} \mathcal{H}_n(\nu_e^2) + \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) \right] \right\} Z^{(1)}(z_n) \\
\chi_{P_{zy}} & = -\frac{1}{4} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_e \frac{X_e}{Y_e} \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z^{(1)}(z_n) \\
& + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_e \frac{X_e}{Y_e} \sum_{n=\pm 1} \left\{ Y_e \left[-n \mathcal{H}_n(\nu_e^2) \right] + \frac{n^2}{\nu_e^2} \mathcal{H}_n(\nu_e^2) - \frac{1}{2} \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) \right\} Z^{(1)}(z_n) \\
\chi_{P_{zz}} & = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_e X_e \nu_e \mathcal{H}_0(\nu_e^2) \left[Z(z_n) + \frac{1}{2} Z^{(2)}(z_n) \right] \\
& + \frac{1}{k_{\parallel}} \frac{1}{\sqrt{2}} \nu_e \epsilon_e X_e \sum_{n=\pm 1} \left[1 - \frac{1}{Y_e} \frac{n}{\nu_e^2} \right] \mathcal{H}_n(\nu_e^2) \left[Z(z_n) + \frac{1}{2} Z^{(2)}(z_n) \right],
\end{aligned}$$

onde foi usada a transformação

$$\left(\frac{1}{2\mu_e}\right)^{1/2} \frac{ck_{\perp}}{\omega} \frac{1}{Y_e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \nu_e, \quad (5.12)$$

a partir das quantidades μ_{α} , Y_{α} e ν_{α} definidas no capítulo 3. Nota-se que o inverso da distância típica da inomogeneidade da densidade dos elétrons, ϵ_e , é, para o caso descrito nesse capítulo, o próprio ϵ_n apresentado em (5.1a). Portanto, a partir de agora será usado ϵ_n no lugar de ϵ_e . O argumento das funções $Z(z_n)$ é dado por (3.74) que, para os elétrons, é dado por

$$z_n = \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^{1/2} \frac{(\omega - n\Omega_e(0))}{ck_{\parallel}}. \quad (5.13)$$

É interessante nesse ponto discutir a função Z e seu argumento z_n , que pode ser reescrito como

$$z_n = \frac{(\omega - n\Omega_e(0))}{\sqrt{2}k_{\parallel}v_e}.$$

Para $n = \pm 1$, temos, escrevendo explicitamente o índice n ,

$$\begin{aligned} z_{n=+1} \equiv z_+ &= \frac{(\omega - \Omega_e(0))}{\sqrt{2}k_{\parallel}v_e} = \frac{(\omega + |\Omega_e(0)|)}{\sqrt{2}k_{\parallel}v_e} \\ z_{n=-1} \equiv z_- &= \frac{(\omega + \Omega_e(0))}{\sqrt{2}k_{\parallel}v_e} = \frac{(\omega - |\Omega_e(0)|)}{\sqrt{2}k_{\parallel}v_e}. \end{aligned}$$

Como $\omega \simeq \omega_{lh} \ll |\Omega_e|$, podemos escrever o módulo dos argumentos das funções de Fried & Conte da seguinte maneira

$$|z_{\pm}| = \left| \frac{\omega \mp \Omega_e}{\sqrt{2}k_{\parallel}v_e} \right| \simeq \left| \frac{\Omega_e}{\sqrt{2}k_{\parallel}v_e} \right| = \frac{\lambda_{\parallel}}{r_{Le}},$$

onde r_{Le} é o raio de Larmor dos elétrons com velocidade térmica. Para $n = 0$,

$$|z_0| = \left| \frac{\omega}{\sqrt{2}k_{\parallel}v_e} \right| = \left| \frac{\omega\Omega_e}{\sqrt{2}\Omega_e k_{\parallel}v_e} \right| = \left| \frac{\omega}{\Omega_e} \right| \frac{\lambda_{\parallel}}{r_{Le}} \ll \frac{\lambda_{\parallel}}{r_{Le}},$$

portanto $|z_{\pm}| \gg |z_0|$. No entanto, a teoria foi desenvolvida com a hipótese de pequeno raio de Larmor, de modo que $\lambda_{\parallel} \gg r_{Le}$, indicando que $|z_{\pm}| \gg 1$. Das expansões assintóticas da função de Fried & Conte [25], é sabido que para grande argumento a função Z pode ser escrita em termos de uma soma infinita como segue,

$$Z(z) \approx -\frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1/2)}{\pi^{1/2} z^{2j}} + i\pi^{1/2} \sigma e^{-z^2}; \quad \sigma = \begin{cases} 0, & \text{Im}(z) > 0 \\ 1, & \text{Im}(z) = 0 \\ 2, & \text{Im}(z) < 0, \end{cases} \quad (5.14)$$

onde $\Gamma(r)$ é a conhecida função gama. Chega-se às derivadas de ordem n de Z a partir das relações de recorrência

$$Z^{(1)}(z) = -2[1 + zZ(z)],$$

enquanto que a derivada de ordem n é

$$Z^{(n)}(z) = -2zZ^{(n-1)}(z) - 2(n-1)Z^{(n-2)}(z); \quad n \geq 2.$$

Já pensando em aplicações que virão nas seções seguintes, é conveniente escrever explicitamente, a partir do somatório (5.14), as somas que constituem Z , $Z^{(1)}$ e $Z^{(2)}$

$$Z(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^3} - \frac{3}{4} \frac{1}{z^5} - \frac{15}{8} \frac{1}{z^7} - \dots + i\pi^{1/2} \sigma e^{-z^2}, \quad (5.15a)$$

$$Z^{(1)}(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{z^4} + \frac{15}{4} \frac{1}{z^6} + \frac{105}{8} \frac{1}{z^8} - \dots + i\pi^{1/2} \sigma e^{-z^2}, \quad (5.15b)$$

$$Z^{(2)}(z) = -\frac{2}{z^3} - \frac{12}{2} \frac{1}{z^5} - \frac{90}{4} \frac{1}{z^7} - \frac{840}{8} \frac{1}{z^9} - \dots + i\pi^{1/2} \sigma e^{-z^2}. \quad (5.15c)$$

Fica claro com as expansões acima, que para $1 \ll |z_{\pm}| \gg |z_0|$, a contribuição do argumento z_{\pm} é bem menos significativa que a contribuição do argumento z_0 . Portanto, os termos dos componentes de χ_{Pij} que possuem os harmônicos $n = \pm 1$ podem ser desprezados frente aos termos originados pelo harmônico $n = 0$.

Para este estágio do desenvolvimento do trabalho, depois de desprezar as contribuições dos harmônicos $n = \pm 1$, é conveniente deixar os componentes do tensor $\vec{\chi}_P$, dados por

(5.11), na forma que segue:

$$\chi_{Pxx} = -\frac{\sqrt{2}}{k_{\parallel}} \epsilon_n X_e \nu_e^3 \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z(z_0) \quad (5.16a)$$

$$\chi_{Pyy} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_{\parallel}} \nu_e \epsilon_n X_e \sum_{n=\pm 1} \left\{ \frac{n^2}{\nu_e^2} \mathcal{H}_n(\nu_e^2) - \frac{1}{Y_e} \frac{n}{\nu_e^2} \left[\frac{n^2}{\nu_e^2} \mathcal{H}_n(\nu_e^2) - \mathcal{H}'_n(\nu_e^2) \right] \right\} Z(z_n) \quad (5.16b)$$

$$\chi_{Pzz} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_n X_e \nu_e \mathcal{H}_0(\nu_e^2) \left[Z(z_0) + \frac{1}{2} Z^{(2)}(z_0) \right] \quad (5.16c)$$

$$\chi_{P\begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix}} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_n \frac{X_e}{Y_e} \nu_e \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z(z_0) \quad (5.16d)$$

$$\chi_{P\begin{pmatrix} xz \\ zx \end{pmatrix}} = \mp \frac{i}{2} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_n X_e \nu_e^2 \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z^{(1)}(z_0) \quad (5.16e)$$

$$\chi_{P\begin{pmatrix} yz \\ zy \end{pmatrix}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{k_{\parallel}} \epsilon_n \frac{X_e}{Y_e} \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z^{(1)}(z_0), \quad (5.16f)$$

onde

$$z_n = \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{1/2} \frac{(\omega - n\Omega_e(0))}{ck_{\parallel}} = \frac{(\omega - n\Omega_e(0))}{\sqrt{2}k_{\parallel}v_e}.$$

Nota-se que no componente χ_{Pyy} foram mantidos os harmônicos $n = \pm 1$. A opção de manter essa ordem de harmônico, vem do fato que o termo que contém o harmônico $n = 0$ é nulo e, para que todo o componente não se anule, manteve-se o primeiro harmônico com contribuição significativa.

Desenvolvimento do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_B$

Agora a atenção será dada aos componentes do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_B$, que podem ser encontrados em (3.82), e o procedimento adotado será semelhante ao adotado para o $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_P$. Assim, fazendo $\psi = \pi/2$ e mantendo a contribuição do harmônico $n = 0$ para os componentes que não se anulam neste caso, e $n = \pm 1$ para os que se anulam para $n = 0$, os componentes extraídos

de (3.82) ficam da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\chi_{Bxx} &= -2\mu_e X_e \nu_e^2 (\mathcal{G}_{0,3,0,0} - \nu_e^2 \mathcal{G}_{0,3,0,1}) \\
\chi_{Byy} &= -\mu_e X_e \sum_{n=\pm 1} [\mathcal{G}_{0,1,0,1} - 2\nu_e \chi_{1e} (\mathcal{G}_{1,2,0,1} - \mathcal{G}_{1,2,1,2})] \\
\chi_{Bzz} &= -\mu_e X_e (\mathcal{G}_{0,1,0,0} + \mu_e N_{\parallel}^2 \mathcal{G}_{2,1,0,0}) \\
\chi_{B\begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix}} &= \mp i \mu_e X_e \sum_{n=\pm 1} n [2\nu_e \chi_{1e} (\mathcal{G}_{1,3,1,1} - \nu_e^2 \mathcal{G}_{1,3,1,2}) \\
&\quad + \mathcal{G}_{0,1,0,1} - \nu_e^2 (\mathcal{G}_{0,2,0,1} - \mathcal{G}_{0,2,1,2})] \\
\chi_{B\begin{pmatrix} xz \\ zx \end{pmatrix}} &= \pm i N_{\parallel} \mu_e^{3/2} X_e \nu_e (\mathcal{G}_{1,2,0,0} - \nu_e^2 \mathcal{G}_{1,2,0,1}) \\
\chi_{B\begin{pmatrix} yz \\ zy \end{pmatrix}} &= N_{\parallel} \mu_e^{3/2} X_e \sum_{n=\pm 1} [n \chi_{1e} \mathcal{G}_{2,1,0,1} \pm i \nu_e (\pm n i) \mathcal{G}_{1,1,0,1} + n \chi_{1e} (\mathcal{G}_{2,2,1,1} - \nu_e^2 \mathcal{G}_{2,2,1,2})] ,
\end{aligned}$$

que podem ser reescritos da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\chi_{Bxx} &= -2\mu_e X_e \nu_e^2 (\mathcal{G}_{0,3,0,0} - \nu_e^2 \mathcal{G}_{0,3,0,1}) \\
\chi_{Byy} &= -\mu_e X_e \sum_{n=\pm 1} [\mathcal{G}_{0,1,0,1} - 2\nu_e \chi_{1e} (\mathcal{G}_{1,2,0,1} - \mathcal{G}_{1,2,1,2})] \\
\chi_{Bzz} &= -\mu_e X_e (\mathcal{G}_{0,1,0,0} + \mu_e N_{\parallel}^2 \mathcal{G}_{2,1,0,0}) \tag{5.17} \\
\chi_{B\begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix}} &= \mp i \mu_e X_e \sum_{n=\pm 1} n [\mathcal{G}_{0,1,0,1} - \nu_e^2 (\mathcal{G}_{0,2,0,1} - \mathcal{G}_{0,2,1,2}) + 2\nu_e \chi_{1e} (\mathcal{G}_{1,3,1,1} - \nu_e^2 \mathcal{G}_{1,3,1,2})] \\
\chi_{B\begin{pmatrix} xz \\ zx \end{pmatrix}} &= \pm i N_{\parallel} \mu_e^{3/2} X_e \nu_e (\mathcal{G}_{1,2,0,0} - \nu_e^2 \mathcal{G}_{1,2,0,1}) \\
\chi_{B\begin{pmatrix} yz \\ zy \end{pmatrix}} &= N_{\parallel} \mu_e^{3/2} X_e \sum_{n=\pm 1} [-n \nu_e \mathcal{G}_{1,1,0,1} + n \chi_{1e} (\mathcal{G}_{2,1,0,1} + \mathcal{G}_{2,2,1,1} - \nu_e^2 \mathcal{G}_{2,2,1,2})] .
\end{aligned}$$

No apêndice B consta uma discussão sobre a função de dispersão de plasma inhomogêneo para $n = 0$ e $n \neq 0$, e para os casos em que $p = 1, 2, 3$.

Os componentes χ_{Bxx} , χ_{Bzz} e $\chi_{B\begin{pmatrix} xz \\ zx \end{pmatrix}}$ foram obtidos com $n = 0$, com a função de dispersão de plasma inhomogêneo dada pela equação (B.2), do apêndice B, reproduzida abaixo

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{n=0} = -i \nu_{\alpha}^{2(m-l)} \int_0^{\infty} dt \frac{(it)^r e^{i\dot{z}ot} e^{-\beta t^2}}{(1 + i\eta_{\alpha} t)^p} \mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_{\alpha}}{1 + i\eta_{\alpha} t} \right) .$$

Os demais componentes, χ_{Byy} , $\chi_{B\begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix}}$ e $\chi_{B\begin{pmatrix} yz \\ zy \end{pmatrix}}$, foram obtidos com $n = \pm 1$, levando em conta que a função de dispersão de plasma inhomogêneo, para $n \neq 0$, pode ser aproximada

pela equação (B.21)

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l} = \mathcal{G}_{r,p,m,l} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0} - \frac{2m}{\nu_\alpha} \sqrt{2\mu_\alpha} N_\parallel S_n \chi_n \mathcal{G}_{r+1,p,m,l} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0}, \quad (5.18)$$

onde a $\mathcal{G}_{r,p,m,l}$ para $\chi_{n\alpha} = 0$ é dada por (B.19),

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0} = -i\nu_\alpha^{2(m-l)} \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{i\hat{z}_n t} e^{-\beta t^2}}{(1+i\eta_\alpha t)^p} \mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_\alpha^2}{1+i\eta_\alpha t} \right),$$

com $\hat{z}_n = \mu_\alpha \delta_{n\alpha}$, sendo $\delta_{n\alpha} = 1 - nY_\alpha(1 + \epsilon_B x)$, calculado em $x = 0$, e onde $\chi_n \equiv (n/2^{3/2})(\epsilon_B/k_\parallel)$ é uma quantidade definida em (B.20).

Os componentes em que $n = 0$ podem ser escritos em termos da função de Fried & Conte, usando os resultados obtidos para $\mathcal{G}_{r,1,m,l}$, $\mathcal{G}_{r,2,m,l}$ e $\mathcal{G}_{r,3,m,l}$, dados, respectivamente, por (B.13), (B.11) e (B.12). Após uma simples mas trabalhosa álgebra, envolvendo basicamente relações de recorrência das funções de Bessel, chega-se ao seguinte resultado para os componentes em que $n = 0$, extraídos originalmente de (5.17)

$$\chi_{Bxx} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\mu_e} X_e}{N_\parallel} \int_0^\infty du u^3 e^{-u^2} Z \left(\frac{\mu_e \delta_{0e} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_\parallel} \right) J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) \quad (5.19a)$$

$$\chi_{Bzz} = -\frac{X_e}{N_\parallel^2} \left(\int_0^\infty du u (\mu_e \delta_{0e} - \eta_e u^2) e^{-u^2} Z^{(1)} \left(\frac{\mu_e \delta_{0e} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_\parallel} \right) J_0^2(\sqrt{2}\nu_e u) \right) \quad (5.19b)$$

$$\chi_{B^{(xz)}} = \mp i \frac{\sqrt{2}\sqrt{\mu_e} X_e}{N_\parallel} \int_0^\infty du u^2 e^{-u^2} Z^{(1)} \left(\frac{\mu_e \delta_{0e} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_\parallel} \right) J_0(\sqrt{2}\nu_e u) J_1(\sqrt{2}\nu_e u). \quad (5.19c)$$

Com o intuito de não carregar ainda mais a notação, foi usada como variável de integração a letra u ao invés de \hat{r} .

Para os componentes obtidos com $n = \pm 1$ a situação é um pouco mais complicada. É necessário usar primeiramente a aproximação (5.18), para após usar as expressões de $\mathcal{G}_{r,1,m,l}$, $\mathcal{G}_{r,2,m,l}$ e $\mathcal{G}_{r,3,m,l}$, fazendo $\delta_{0\alpha} \rightarrow \delta_{n\alpha}$. Por exemplo, o componente χ_{Byy} de (5.17), depois da

substituição da referida aproximação, fica na forma

$$\chi_{Byy} \simeq -\mu_e X_e \sum_{n=\pm 1} \left[\mathcal{G}_{0,1,0,1} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0} - 2\nu_e \chi_{1e} \left(\mathcal{G}_{1,2,0,1} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0} - \left\{ \mathcal{G}_{1,2,1,2} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0} - \frac{2}{\nu_e} \chi_1 \sqrt{2\mu_e} N_{\parallel} \mathcal{G}_{2,2,1,2} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0} \right\} \right) \right].$$

O termo envolvendo o produto $\chi_{1e}\chi_n$ é proporcional a ϵ_B^2 e pode ser desprezado, resultando

$$\chi_{Byy} \simeq -\mu_e X_e \sum_{n=\pm 1} \left[\mathcal{G}_{0,1,0,1} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0} - 2\nu_e \chi_{1e} \left(\mathcal{G}_{1,2,0,1} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0} - \mathcal{G}_{1,2,1,2} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0} \right) \right].$$

Substituindo $\mathcal{G}_{0,1,0,1} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0}$ por (B.13), e $\mathcal{G}_{1,2,0,1} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0}$ e $\mathcal{G}_{1,2,1,2} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0}$ por (B.11), em todos os casos fazendo $\delta_{0\alpha} \rightarrow \delta_{n\alpha}$, chega-se na forma desejada do componente χ_{Byy} :

$$\begin{aligned} \chi_{Byy} = & \frac{\sqrt{2}\sqrt{\mu_e}X_e}{N_{\parallel}\nu_e^2} \sum_{n=\pm 1} \left[\int_0^{\infty} du u e^{-u^2} Z \left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} \right) J_1^2(\sqrt{2\nu_e}u) \right. \\ & + \chi_1 \sqrt{2} \int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} Z^{(1)} \left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} \right) \left(2J_0(\sqrt{2\nu_e}u)J_1(\sqrt{2\nu_e}u) \right. \\ & \left. \left. - 4J_1(\sqrt{2\nu_e}u)J_2(\sqrt{2\nu_e}u) - \sqrt{2\nu_e}uJ_0^2(\sqrt{2\nu_e}u) + \sqrt{2\nu_e}uJ_2^2(\sqrt{2\nu_e}u) \right) \right]. \quad (5.20) \end{aligned}$$

De maneira semelhante os componentes $\chi_{B(xy)}$ e $\chi_{B(yz)}$ podem ser encontrados, sempre desprezando termos da ordem de ϵ_B^2 . Abaixo, constam os resultados obtidos para esses componentes

$$\begin{aligned} \chi_{B(xy)} = & \pm i \frac{2\sqrt{\mu_e}X_e}{N_{\parallel}\nu_e} \sum_{n=\pm 1} n \left[\int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} Z \left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} \right) J_1(\sqrt{2\nu_e}u)J_1'(\sqrt{2\nu_e}u) \right. \\ & \left. + \sqrt{2} \chi_1 \int_0^{\infty} du u^3 e^{-u^2} Z^{(1)} \left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} \right) J_2^2(\sqrt{2\nu_e}u) \right] \quad (5.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_B^{(yz)} = & \frac{\sqrt{\mu_e} X_e}{\nu_e^2 N_{\parallel}} \sum_{n=\pm 1} \left\{ n \nu_e \int_0^{\infty} du u e^{-u^2} Z^{(1)} \left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} \right) J_1^2(\sqrt{2\nu_e} u) \right. \\
& + 2n\chi_1 \int_0^{\infty} du u e^{-u^2} \left[\left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} \right) Z^{(1)} \left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} \right) \right. \\
& \left. \left. + Z \left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} \right) \right] \left[J_1^2(\sqrt{2\nu_e} u) + \sqrt{2\nu_e} u J_1(\sqrt{2\nu_e} u) J_2(\sqrt{2\nu_e} u) \right] \right\}. \quad (5.22)
\end{aligned}$$

Para ser mantida a coerência quanto à desconsideração de termos quadráticos da inhomogeneidade de campo, é possível ainda fazer algumas simplificações nos componentes originados de $n = \pm 1$. Observando as equações (5.20)-(5.22), nota-se que podem ser feitas aproximações nos seguintes produtos

$$\begin{aligned}
\chi_1 \left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} \right) & \approx \left(\frac{\mu_e \delta_{ne}}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} \right) = z_n, \\
\chi_1 Z^{(s)} \left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} \right) & \approx \chi_1 Z^{(s)} \left(\frac{\mu_e \delta_{ne}}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} \right) = \chi_1 Z^{(s)}(z_n),
\end{aligned}$$

para $s = 0, 1, 2$. É fácil ver que $\mu_e \delta_{ne} / \sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}$ é a quantidade z_n definida em (5.13). Tais aproximações facilitam o cálculo computacional, uma vez que nos termos que contém χ_1 as funções Z e suas derivadas não dependem mais da variável de integração.

Para simplificar a notação é conveniente definir a quantidade

$$\bar{z}_n \equiv \frac{\mu_e \delta_{ne} - \eta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e} N_{\parallel}} = \frac{\omega - n\Omega_e - k_{\perp} \epsilon_B v_e^2 u^2 / \Omega_e}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_e}. \quad (5.23)$$

Assim, depois das aproximações acima e da definição de \bar{z}_n , os componentes do tensor $\overleftrightarrow{\chi}_B$ encontrados em (5.19), juntamente com os componentes escritos em (5.20)-(5.22), foram reunidos abaixo

$$\chi_{Bxx} = \frac{2\sqrt{2} \sqrt{\mu_e} X_e}{N_{\parallel}} \int_0^{\infty} du u^3 e^{-u^2} Z(\bar{z}_0) J_1^2(\sqrt{2\nu_e} u) \quad (5.24a)$$

$$\chi_{B_{yy}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\mu_e}X_e}{N_{\parallel}\nu_e^2} \sum_{n=\pm 1} \left[\int_0^{\infty} du u e^{-u^2} Z(\bar{z}_n) J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) \right. \\ \left. - \chi_1 2\sqrt{2} Z^{(1)}(z_n) \int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} J_1(\sqrt{2}\nu_e u) J_2(\sqrt{2}\nu_e u) \right] \quad (5.24b)$$

$$\chi_{B_{zz}} = -\frac{X_e}{N_{\parallel}^2} \left(\int_0^{\infty} du u (\mu_e \delta_{0e} - \eta_e u^2) e^{-u^2} Z^{(1)}(\bar{z}_0) J_0^2(\sqrt{2}\nu_e u) \right) \quad (5.24c)$$

$$\chi_{B_{(xy)}} = \pm i \frac{2\sqrt{\mu_e}X_e}{N_{\parallel}\nu_e} \sum_{n=\pm 1} n \left[\int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} Z(\bar{z}_n) J_1(\sqrt{2}\nu_e u) J_1'(\sqrt{2}\nu_e u) \right. \\ \left. + \sqrt{2} \chi_1 Z^{(1)}(z_n) \int_0^{\infty} du u^3 e^{-u^2} J_2^2(\sqrt{2}\nu_e u) \right] \quad (5.24d)$$

$$\chi_{B_{(xz)}} = \mp i \frac{\sqrt{2}\sqrt{\mu_e}X_e}{N_{\parallel}} \int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} Z^{(1)}(\bar{z}_0) J_0(\sqrt{2}\nu_e u) J_1(\sqrt{2}\nu_e u). \quad (5.24e)$$

$$\chi_{B_{(yz)}} = \frac{\sqrt{\mu_e}X_e}{\nu_e^2 N_{\parallel}} \sum_{n=\pm 1} \left\{ n \nu_e \int_0^{\infty} du u e^{-u^2} Z^{(1)}(\bar{z}_n) J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) \right. \\ \left. + 2\chi_1 n [z_n Z^{(1)}(z_n) + Z(z_n)] \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} du u e^{-u^2} [J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) + \sqrt{2}\nu_e u J_1(\sqrt{2}\nu_e u) J_2(\sqrt{2}\nu_e u)] \right\}. \quad (5.24f)$$

Com a obtenção dos componentes do tensor $\overleftrightarrow{\chi}_B$, e os componentes já encontrados do tensor $\overleftrightarrow{\chi}_P$, o tensor suscetibilidade dos elétrons $\overleftrightarrow{\chi}^e = \overleftrightarrow{\chi}_B + \overleftrightarrow{\chi}_P$ fica completamente determinado. Contudo, as formas apresentadas em (5.24) e (5.16) não são adequadas para a efetivação dos cálculos numéricos, principalmente em razão dos dados observacionais dos satélites fornecerem valores reais de grandezas específicas. É conveniente, portanto, escrever os tensores $\overleftrightarrow{\chi}_B$ e $\overleftrightarrow{\chi}_P$ em termos de variáveis mais facilmente comparáveis com grandezas medidas por satélites. Este trabalho consta na seção 5.6 da presente tese.

Outro ponto importante a ser colocado diz respeito à relação de dispersão. No capítulo introdutório mostrou-se que os tipos de ondas que podem se propagar em um plasma, bem

como as características dessas ondas, são encontrados a partir da resolução da relação de dispersão. Para um plasma homogêneo, a relação de dispersão usada é a apresentada em (1.12) e, para gradientes apenas na direção do eixo x , basta fazer $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \rightarrow \epsilon_{ij}(x, \mathbf{k}, \omega)$. No entanto, o assunto sobre a relação de dispersão não está esgotado, é necessário repensá-lo para o caso de plasma inhomogêneo. A próxima seção é destinada a esse assunto.

5.4 A relação de dispersão para um plasma inhomogêneo

Nesta seção discutimos a obtenção da relação de dispersão, aproveitando para revisar e concentrar em um só local alguns aspectos básicos que se encontram espalhados ao longo do presente trabalho. O ponto de partida para a discussão da relação de dispersão para um plasma inhomogêneo é a equação (1.3), obtida com uma simples manipulação das equações de Maxwell, (1.2). A transformada de Fourier espaço-temporal dessa equação é

$$i\mathbf{k}[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)] + k^2\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi i \omega}{c^2}\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega). \quad (5.25)$$

A densidade de corrente é por definição obtida a partir do conhecimento da função distribuição de velocidades, de acordo com a equação (1.23b),

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3p \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (5.26)$$

Conforme vimos no capítulo 1, após linearização do sistema Vlasov-Maxwell e uso de transformadas de Fourier, obtém-se a relação entre as transformadas de Fourier da densidade de corrente e do campo elétrico,

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \quad (5.27)$$

onde o tensor $\overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)$ é a transformada de Fourier do tensor condutividade, que descreve

a resposta linear do sistema a um campo elétrico, no caso de um meio homogêneo,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \quad (5.28)$$

Usando-se a equação (5.27) na equação (5.25), chega-se à relação de dispersão para um plasma homogêneo, equação (1.12).

Introduzindo-se efeitos de gradiente na função de distribuição ou na obtenção das órbitas não perturbadas, obtém-se uma relação similar à equação (5.27),

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \overset{\leftrightarrow}{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega). \quad (5.29)$$

Porém, como vimos no capítulo 1, o tensor $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ não representa a transformada de Fourier do tensor condutividade. Vale recordar que no caso de meios inhomogêneos e estacionários a relação entre densidade de corrente e campo elétrico não é dada pela equação (5.28), e sim pela forma estacionária da equação (1.1), ou seja,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t'). \quad (5.30)$$

Se a relação (5.29) é empregada na equação (5.25), obtém-se uma relação de dispersão que incorpora efeitos devido à inhomogeneidade, e que constitui a largamente utilizada aproximação que caracterizamos como “aproximação localmente inhomogênea”. Entretanto, como vimos, há aspectos não satisfatórios em tal abordagem, particularmente o fato de que o tensor dielétrico obtido com o uso de (5.29) não satisfaz a simetria de Onsager e portanto apresenta contribuição não-ressonante para sua parte anti-Hermitiana, o que tem como consequência uma descrição não adequada da troca de energia entre ondas e partículas.

Conforme a argumentação que já apresentamos em capítulos anteriores, os problemas da aproximação localmente não homogênea estão relacionados com a inconsistência existente no fato de levar em conta a existência de gradientes na derivação do tensor dielétrico, e ao mesmo tempo utilizar a aproximação de onda plana, que despreza a variação espacial das amplitudes. A abordagem utilizada nesta tese procura justamente levar em conta a variação espacial das amplitudes, tendo como ponto de partida não a aproximação de onda plana, mas

sim a aproximação WKB. O efeito prático dessa aproximação resultou no tensor dielétrico efetivo a ser utilizado na relação de dispersão, obtido por meio da transformação BGI. Uma vez obtido o tensor efetivo, é ele que deve ser utilizado na equação (5.25), resultando na relação de dispersão adequada para uso em meios inomogêneos. Ou seja, na equação (5.25), o método BGI prescreve que seja usada a seguinte relação,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) = \overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{\omega}{4\pi} \left(\overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) - \hat{\mathbf{1}} \right) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \quad (5.31)$$

onde $\overleftrightarrow{\epsilon}$ é o tensor dielétrico efetivo.

Entretanto, como será visto logo a seguir, a discussão a respeito de plasmas inomogêneos não termina com a obtenção do tensor dielétrico efetivo. É necessário analisar mais de perto a relação de dispersão, quando se trata de um plasma inomogêneo.

Damos continuidade à análise enfocando a lei de Gauss, equação (1.2a). Tomando o divergente da lei de Ampère, eq. (1.2d), obtemos

$$-\frac{1}{c} \partial_t \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad (5.32)$$

cuja transformada de Fourier temporal é dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{4\pi}{i\omega} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega). \quad (5.33)$$

A equação (5.33) é a transformada de Fourier temporal da lei de Gauss, escrita em termos da densidade de corrente. A densidade de corrente, por sua vez, carrega consigo informações das propriedades do plasma, contidas no tensor condutividade, através da relação (5.31). As quantidades $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$ são respectivamente as transformadas inversas de Fourier espaciais do campo elétrico e da densidade de corrente, de maneira que a equação (5.33)

pode ser reescrita do seguinte modo

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] &= \frac{4\pi}{i\omega} \nabla \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \mathbf{J}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \\ &= \frac{4\pi}{i\omega} \nabla \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \\ &= \frac{4\pi}{i\omega} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ \nabla \cdot \left[\overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \right\} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) . \end{aligned}$$

Depois de aplicado os divergentes da equação acima resulta

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{i\omega} \left\{ \left[\nabla \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + i\mathbf{k} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \right\} . \quad (5.34)$$

Esta equação é a transformada de Fourier da lei de Gauss, escrita em termos do tensor condutividade. Fica evidente que a transformada de Fourier da lei de Gauss, escrita dessa forma, contém em si informações das características da inhomogeneidade do plasma, através do divergente do tensor condutividade. A presença desse termo que contém o divergente corrige parcialmente a aproximação de onda plana, inserindo na relação de dispersão (5.25) um termo que depende explicitamente das características das inhomogeneidades do plasma, como será visto logo a seguir. A manutenção da forma fechada de $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ na equação (5.25), tal como é feito tradicionalmente mesmo para um plasma inhomogêneo, suprime informações importantes para a descrição dos modos normais de propagação de ondas em plasmas inhomogêneos.

A proposta aqui apresentada, tem como idéia de fundo a utilização das informações completas que a lei de Gauss é capaz de fornecer, para uma descrição mais acurada dos fenômenos de propagação de ondas em plasmas inhomogêneos. Já para plasmas homogêneos, a própria quantidade $i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ fornece todas as informações contidas na lei de Gauss, visto que os campos são de fato uma superposição de ondas planas.

Dando continuidade ao desenvolvimento algébrico da relação de dispersão para plasmas inhomogêneos, a equação (5.34) e a relação (5.31) são substituídas na equação (5.25) que,

sendo escrita em termos de seus componentes, resulta em

$$\begin{aligned} \sum_i \left\{ k_i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{jk} [(\partial_j \sigma_{jk}) E_k + ik_j \sigma_{jk} E_k] + k^2 E_i - \frac{\omega^2}{c^2} E_i - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \left(\sum_k \sigma_{ik} E_k \right) \right\} \mathbf{e}_i &= 0, \\ \sum_i \left\{ k_i \frac{4\pi}{\omega} \sum_{jk} [(\partial_j \sigma_{jk}) E_k + ik_j \sigma_{jk} E_k] + k^2 \sum_k \delta_{ik} E_k \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega^2}{c^2} \sum_k \delta_{ik} E_k - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \left(\sum_k \sigma_{ik} E_k \right) \right\} \mathbf{e}_i = 0, \\ \sum_i \sum_k \left\{ k_i \frac{4\pi}{\omega} \sum_j [(\partial_j \sigma_{jk}) + ik_j \sigma_{jk}] + k^2 \delta_{ik} - \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{ik} - \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sigma_{ik} \right\} E_k \mathbf{e}_i &= 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Multiplicando a equação (5.35) por c^2/ω^2 e por $ii = -1$, e usando as definições do tensor suscetibilidade e do índice de refração, cujos componentes são respectivamente dados por

$$\chi_{ik} = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ik}, \quad N_i = \frac{ck_i}{\omega},$$

chega-se à

$$\sum_i \sum_k \left\{ iN_i \sum_j \left[\left(\frac{c}{\omega} \partial_j \chi_{jk} \right) + iN_j \chi_{jk} \right] - N^2 \delta_{ik} + \delta_{ik} + \chi_{ik} \right\} E_k \mathbf{e}_i = 0. \quad (5.36)$$

A equação (5.36) é uma equação vetorial, que forma um sistema linear e homogêneo nas incógnitas E_x , E_y e E_z . Este sistema só terá solução não trivial se o seu determinante principal for nulo. Esta condição resulta na chamada relação de dispersão, que para um plasma inhomogêneo é dada por

$$\det \left[iN_i \sum_j \left(\frac{c}{\omega} \partial_j \chi_{jk}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \right) - N_i \sum_j N_j \chi_{jk}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) - N^2 \delta_{ik} + \delta_{ik} + \chi_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \right] = 0. \quad (5.37)$$

A novidade desta nova relação de dispersão é a existência da derivada do tensor suscetibilidade elétrica, surgida do uso explícito da lei de Gauss. Através desse termo, a relação de dispersão contém em si informações a respeito da inhomogeneidade do plasma, que a relação

de dispersão tradicional não possui. O primeiro termo é da ordem dos parâmetros das inhomogeneidades e, assim sendo, comparável com termos da mesma ordem contidos no tensor suscetibilidade, não podendo, portanto, ser desprezado. O fato é que, tradicionalmente, tanto para plasmas homogêneos como para plasmas inhomogêneos, a relação de dispersão usada é a que foi apresentada no capítulo de introdução. A diferença no tratamento dos dois tipos de plasmas fica centrada na obtenção do tensor dielétrico. No entanto, a relação de dispersão (5.37) sugere que, para um plasma inhomogêneo, a derivada do tensor suscetibilidade deve ser considerada, e inserida conforme apresentado. Na análise dos resultados numéricos, apresentada na seção 5.6, será visto que tal derivada é crucial para a descrição da instabilidade LHDI.

Para um plasma com gradientes somente na direção do eixo x , como é o caso da situação discutida neste trabalho, a relação de dispersão (5.37) fica na forma

$$\det \left[iN_i \frac{c}{\omega} \partial_x \chi_{xk}(x, \mathbf{k}, \omega) - N_i \sum_j N_j \chi_{jk}(x, \mathbf{k}, \omega) - N^2 \delta_{ik} + \delta_{ik} + \chi_{ik}(x, \mathbf{k}, \omega) \right] = 0 . \quad (5.38)$$

5.4.1 O limite para plasma homogêneo

Para um plasma homogêneo, a relação de dispersão é dada pela equação (1.12). Usando a definição do índice de refração e a relação entre o tensor dielétrico e o tensor suscetibilidade (1.11), a relação de dispersão para um plasma homogêneo pode ser escrita como segue

$$\det [N_i N_k - N^2 \delta_{ik} + \delta_{ik} + \chi_{ik}(\mathbf{k}, \omega)] = 0 . \quad (5.39)$$

A equação vetorial (5.36) que deve ser satisfeita para um plasma inhomogêneo, e que gera a relação de dispersão (5.37), no limite homogêneo se reduz a

$$\sum_i \sum_k \left\{ -N_i \sum_j \chi_{jk} N_j - N^2 \delta_{ik} + \delta_{ik} + \chi_{ik} \right\} E_k \mathbf{e}_i = 0 ,$$

ou, mais convenientemente, à forma seguinte,

$$-\mathbf{N} (\mathbf{N} \cdot \overleftrightarrow{\chi} \cdot \mathbf{E}) + \sum_i \sum_k \left\{ -N^2 \delta_{ik} + \delta_{ik} + \chi_{ik} \right\} E_k \mathbf{e}_i = 0 , \quad (5.40)$$

A equação (5.34), que é a transformada de Fourier da lei de Gauss, em termos do tensor suscetibilidade e do índice de refração, fica na forma abaixo

$$i\mathbf{N} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = - \left\{ \frac{c}{\omega} \left[\nabla \cdot \overleftrightarrow{\chi}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \right] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + i\mathbf{N} \cdot \overleftrightarrow{\chi}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \right\} . \quad (5.41)$$

Para um plasma homogêneo, a transformada de Fourier (5.41) portanto torna-se simplesmente o seguinte

$$i\mathbf{N} \cdot \mathbf{E} = -i\mathbf{N} \cdot \overleftrightarrow{\chi} \cdot \mathbf{E} . \quad (5.42)$$

Assim, substituindo (5.42) em (5.40), obtém-se

$$\mathbf{N}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{E}) + \sum_i \sum_k \left\{ -N^2 \delta_{ik} + \delta_{ik} + \chi_{ik} \right\} E_k \mathbf{e}_i = 0 , \quad (5.43)$$

que dá origem à mesma relação de dispersão obtida para um plasma homogêneo (5.39).

Convém notar que, para um plasma homogêneo, usar $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) \rightarrow -\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})$ ou $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) \rightarrow -\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \overleftrightarrow{\chi} \cdot \mathbf{E})$ é totalmente equivalente. Isso significa que a lei de Gauss está totalmente inserida na relação de dispersão, ou seja, todos os efeitos oriundos dela, que se refletem nas características dos modos normais de propagação, estão considerados. No entanto, para um plasma inhomogêneo, a forma completa³ da transformada de Fourier da lei de Gauss é a apresentada em (5.41) e, portanto, é ela que deve usada para a obtenção da relação de dispersão. Assim, em um plasma inhomogêneo, para que os efeitos da lei de Gauss nos modos normais de propagação sejam contemplados na sua totalidade, é imprescindível a presença da derivada do tensor suscetibilidade.

5.5 A derivada do tensor suscetibilidade

Para calcular a derivada em x dos componentes do tensor suscetibilidade χ_{ij} , primeiramente deve-se considerar que, para a dedução desse tensor, a inhomogeneidade do campo

³ Refere-se aqui como “forma completa” a forma da transformada de Fourier da lei de Gauss obtida dentro dos limites de aproximação localmente inhomogênea. Para um tratamento não local, a derivada do campo elétrico não pode ser desconsiderada.

magnético ambiente foi levada em conta no cálculo das órbitas não perturbadas, e a função distribuição foi expandida até primeira ordem na inomogeneidade. Desta forma, os efeitos das inomogeneidades podem ser escritos como uma soma de um termo que incorpora os efeitos do gradiente de campo e depende da função distribuição, e outro termo que depende da derivada da função distribuição,

$$\overset{\leftrightarrow}{\chi} \simeq \overset{\leftrightarrow}{\chi}_1 [f_e(\epsilon_n = 0), \epsilon_B] + \overset{\leftrightarrow}{\chi}_2 [f'_e, \epsilon_B = 0] + \overset{\leftrightarrow}{\chi}^i [f_i], \quad (5.44)$$

onde o super-índice “0” indica o tensor suscetibilidade dos elétrons antes da transformação BGI. O primeiro termo de (5.44), que incorpora os efeitos da inomogeneidade do campo e desconsidera a inomogeneidade da densidade, foi obtido por Gaelzer *et al*, e pode ser encontrado na equação (III.22) da referência [25] ou, equivalentemente, na equação (19) da referência [37], estando a primeira reproduzida abaixo,

$$\overset{\leftrightarrow}{\chi}_B = -i \frac{4\pi}{\omega} \frac{e^2}{m_e} \sum_n \int d^3p \int d\tau p_{\perp} \mathcal{L}(f_{e0}) \mathbf{\Xi}_{ne}^* \mathbf{\Pi}_{ne} e^{-in\theta_{ne}(\tau)} e^{iD_{ne}\tau} - \hat{\mathbf{e}}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{4\pi}{\omega} \frac{e^2}{m_e} \int d^3p \frac{p_{\parallel}}{\gamma} L(f_{e0}), \quad (5.45)$$

onde a dependência espacial aparece através da quantidade

$$D_{ne}(\epsilon_B) = \gamma\omega - ck_{\parallel}u_{\parallel} - n\Omega_e(1 + \epsilon_B x) - \epsilon_B \frac{k_{\perp}u_{\perp}^2 c^2}{2\Omega_e} \sin\psi, \quad (5.46)$$

já definida em (2.60). As expressões explícitas das outras quantidades podem ser encontradas em [25]. Apenas para situar dentro do contexto, é ao tensor (5.45) que a transformação BGI é aplicada, dando origem ao tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_B$.

O segundo termo de (5.44) não é importante para a derivada em x , visto que ele é da ordem de ϵ_n , e termos quadráticos na inomogeneidade estão sendo desprezados. A expressão para este termo pode ser encontrada em [30], ou na equação (III.87) de [27], ou ainda na equação (3.18) da presente tese, sempre levando-se em conta apenas os termos que contém a derivada da função distribuição f'_e .

O terceiro termo, $\overset{\leftrightarrow}{\chi}^i [f_i]$, é a contribuição do íons para o tensor suscetibilidade do

plasma. No entanto, na presente tese o foco da atenção está direcionado aos efeitos dos gradientes sobre os elétrons e, portanto, o efeito deste terceiro termo para a derivada do tensor suscetibilidade não será considerado. Tal procedimento permite separar quantitativamente os efeitos dos íons homogêneos com elétrons inomogêneos, imersos em um campo ambiente inomogêneo, que é a fonte da instabilidade LHDI, dos efeitos originados por elétrons homogêneos com íons homogêneos apresentando uma deriva perpendicular ao campo ambiente, que é a fonte da instabilidade MTSI (IWI).

Para um plasma fracamente inomogêneo, apenas o primeiro termo (5.44) contribui significativamente para a derivada, de modo que

$$\frac{\partial \overset{\leftrightarrow}{\chi}}{\partial x} \simeq \frac{\partial}{\partial x} \overset{\leftrightarrow}{\chi}_1 [f_e(\epsilon_n = 0), \epsilon_B] = \frac{\partial \overset{\leftrightarrow}{\chi}_B}{\partial x} . \quad (5.47)$$

A derivada de (5.45) em relação a x se resume à derivada da exponencial, cujo argumento contém D_{ne} , resultando num fator $(-n\Omega_e\epsilon_B i\tau)$. Portanto,

$$\partial_x \overset{\leftrightarrow}{\chi} \simeq \partial_x \overset{\leftrightarrow}{\chi}_B = -i \frac{4\pi}{\omega} \frac{e^2}{m_e} \sum_n \int d^3p \int_0^\infty d\tau (-in\Omega_e\epsilon_B\tau) p_\perp \mathcal{L}(f_{e0}) \mathbf{\Xi}_{ne}^* \mathbf{\Pi}_{ne} e^{-in\theta_{ne}(\tau)} e^{iD_{ne}\tau} . \quad (5.48)$$

Aplicando a transformação BGI aos componentes da derivada logo acima, seguindo o procedimento adotado por Gaelzer em [25, 36] para a obtenção do tensor dielétrico efetivo $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_B$ geral, dado por (2.57), chega-se a

$$\partial_x \chi_{ij} = -i \frac{4\pi e^2}{m_e \omega} \sum_n \int d^3p \int_0^\infty d\tau p_\perp \mathcal{L}(f_{e0}) (\Pi_{ne}^-)_i (\Pi_{ne}^+)_j e^{-in\theta_{ne}(\tau)} e^{iD_{ne}\tau} [-n\Omega_e\epsilon_B(i\tau)], \quad (5.49)$$

onde todas as quantidades estão definidas nas expressões (2.58) e (2.59).

A derivada acima é exatamente o termo intermediário dos componentes do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_B$, dado por (2.57), para $\alpha = e$, multiplicado pelo fator $[-n\Omega_e\epsilon_B(i\tau)]$. Foi expresso em destaque o fator $(i\tau)$ por possuir uma relevante importância para os resultados futuros, em virtude da integral em τ . Os outros fatores, $[-n\Omega_e\epsilon_B]$, são meramente multiplicativos.

Seguindo o desenvolvimento feito por Gaelzer [25], o próximo passo é substituir a função

distribuição dos elétrons f_e , pela distribuição maxwelliana homogênea $g_e(u_\perp^2, u_\parallel)$, expressa em (3.34). Todos os cálculos que seguem depois disso são idênticos aos realizados por Gaelzer, sendo a única diferença a presença do fator $[-n\Omega_e\epsilon_B(it)]$. Depois de duas sucessivas mudanças de variáveis, $\tau = t/\omega$ e $t = \mu_\alpha t'$, e por último fazendo $t' \rightarrow t$, esse fator resulta em

$$-n\Omega_e\epsilon_B(it) \rightarrow \frac{-n\Omega_e\mu_e\epsilon_B}{\omega}(it) = -nY_e\mu_e\epsilon_B(it). \quad (5.50)$$

No capítulo (3) da presente tese, foi visto que a integral em dt não fora calculada no desenvolvimento do tensor $\vec{\chi}_B$, mas sim definida pela chamada função de dispersão de plasma inhomogêneo, dada por (3.53), para um plasma não relativístico. Para o cálculo da derivada, a mesma integral aparecerá, mas acrescida do fator (it) , resultando em

$$-i \int_0^\infty dt \frac{(it)^r (it) e^{izt} e^{-\beta t^2}}{(1+i\eta_\alpha t)^p} \times e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)/(1+i\eta_\alpha t)} \frac{[H_{n\alpha}(t)]^m}{[S_{n\alpha}(t)]^l} I_l \left(\frac{S_{n\alpha}(t)}{1+i\eta_\alpha t} \right) = \mathcal{G}_{r+1,p,m,l}. \quad (5.51)$$

Com os resultados (5.50) e (5.51), nota-se que a derivada do tensor suscetibilidade dos elétrons tem uma forma semelhante à forma do tensor $\vec{\chi}_B$, com a diferença que ela possui um fator $(-nY_e\mu_e\epsilon_B)$ a mais e as $\mathcal{G}_{r,p,m,l}$ são substituídas por $\mathcal{G}_{r+1,p,m,l}$.

O tensor $\vec{\chi}_B$ em termos da função $\mathcal{G}_{r,p,m,l}$, para um plasma não relativístico, e para ondas propagando-se perpendicularmente aos gradientes de campo e densidade, ou seja $\psi = \pi/2$, foi expresso em (5.17). Portanto, depois de inserido o fator $(-nY_e\mu_e\epsilon_B)$ e fazendo $\mathcal{G}_{r,p,m,l} \rightarrow \mathcal{G}_{r+1,p,m,l}$ em (5.17), as derivadas dos componentes do tensor suscetibilidade dos

elétrons são dadas por

$$\begin{aligned}
\partial_x \chi_{xx} &= 0 , \\
\partial_x \chi_{yy} &= \epsilon_B \mu_e^2 X_e Y_e \sum_{n=\pm 1} n [\mathcal{G}_{1,1,0,1} - 2\nu_e \chi_{1e} (\mathcal{G}_{2,2,0,1} - \mathcal{G}_{2,2,1,2})] , \\
\partial_x \chi_{zz} &= 0 , \\
\partial_x \chi_{(xy)} &= \pm \epsilon_B i \mu_e^2 X_e Y_e \sum_{n=\pm 1} n^2 [\mathcal{G}_{1,1,0,1} - \nu_e^2 (\mathcal{G}_{1,2,0,1} - \mathcal{G}_{1,2,1,2}) \\
&\quad + 2\nu_e \chi_{1e} (\mathcal{G}_{2,3,1,1} - \nu_e^2 \mathcal{G}_{2,3,1,2})] , \\
\partial_x \chi_{(xz)} &= 0 , \\
\partial_x \chi_{(yz)} &= -\epsilon_B N_{\parallel} \mu_e^{5/2} X_e Y_e \sum_{n=\pm 1} n^2 [-\nu_e \mathcal{G}_{2,1,0,1} + \chi_{1e} (\mathcal{G}_{3,1,0,1} + \mathcal{G}_{3,2,1,1} - \nu_e^2 \mathcal{G}_{3,2,1,2})] .
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Para as derivadas que se anularam foi mantido apenas o harmônico $n = 0$, tal como foi feito para os correspondentes componentes χ_{Bxx} , χ_{Bzz} e $\chi_{B(xz)}$. Para as demais derivadas foram mantidos os harmônicos $n = \pm 1$, semelhantemente ao que foi feito para os correspondentes componentes.

De maneira semelhante ao que foi feito para os componentes χ_{Bij} na subseção 5.3.2, as funções de dispersão de plasma inhomogêneo podem ser substituídas pela aproximação (B.21), válida para $n \neq 0$. O passo seguinte é a substituição das funções $\mathcal{G}_{r,1,m,l}$, $\mathcal{G}_{r,2,m,l}$ e $\mathcal{G}_{r,3,m,l}$, dadas respectivamente por (B.13), (B.11) e (B.12), fazendo $\delta_{0\alpha} \rightarrow \delta_{n\alpha}$. Assim feito, e depois de uma simples mas muito trabalhosa manipulação algébrica, onde termos da ordem de ϵ_B^2 foram desprezados, as derivadas dos componentes do tensor suscetibilidade dos elétrons puderam ser escritas em termos da função de Fried & Conte, como segue:

$$\partial_x \chi_{ij} = -\epsilon_B \eta_{ij} , \tag{5.53}$$

onde

$$\eta_{xx} = 0 , \quad (5.54a)$$

$$\eta_{yy} = \frac{\mu_e X_e Y_e}{N_{\parallel}^2 \nu_e^2} \sum_{n=\pm 1} n \int_0^{\infty} du u e^{-u^2} Z^{(1)} \left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \zeta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e N_{\parallel}}} \right) J_1^2(\sqrt{2\nu_e} u) , \quad (5.54b)$$

$$\eta_{zz} = 0 , \quad (5.54c)$$

$$\eta_{\begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix}} = \pm i \frac{\sqrt{2}\mu_e X_e Y_e}{N_{\parallel}^2 \nu_e} \sum_{n=\pm 1} n^2 \int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} Z^{(1)} \left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \zeta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e N_{\parallel}}} \right) J_1(\sqrt{2\nu_e} u) J_1'(\sqrt{2\nu_e} u) , \quad (5.54d)$$

$$\eta_{\begin{pmatrix} xz \\ zx \end{pmatrix}} = 0 , \quad (5.54e)$$

$$\eta_{\begin{pmatrix} yz \\ zy \end{pmatrix}} = \frac{\mu_e X_e Y_e}{\sqrt{2} N_{\parallel}^2 \nu_e} \sum_{n=\pm 1} n^2 \int_0^{\infty} du u e^{-u^2} Z^{(2)} \left(\frac{\mu_e \delta_{ne} - \zeta_e u^2}{\sqrt{2\mu_e N_{\parallel}}} \right) J_1^2(\sqrt{2\nu_e} u) . \quad (5.54f)$$

Usando explicitamente os componentes η_{ij} na relação de dispersão (5.38), esta pode ser re-escrita como consta abaixo

$$\det \left[(1 - N^2) \delta_{ij} + \chi_{ij} - \sum_l N_i N_l \chi_{lj} - i N_i N_B \eta_{xj} \right] = 0 , \quad (5.55)$$

sendo $i, j = x, y, z$. De uma maneira mais prática, a relação de dispersão acima pode ser re-escrita como segue

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{xx} & \Lambda_{xy} & \Lambda_{xz} \\ \Lambda_{yx} & \Lambda_{yy} & \Lambda_{yz} \\ \Lambda_{zx} & \Lambda_{zy} & \Lambda_{zz} \end{vmatrix} = 0 .$$

Portanto, os modos normais de propagação são obtidos a partir da solução da equação

$$\Lambda_{xx}(\Lambda_{yy}\Lambda_{zz} - \Lambda_{yz}\Lambda_{zy}) + \Lambda_{xy}(\Lambda_{zx}\Lambda_{yz} - \Lambda_{zz}\Lambda_{yx}) + \Lambda_{xz}(\Lambda_{yx}\Lambda_{zy} - \Lambda_{yy}\Lambda_{zx}) = 0 , \quad (5.56)$$

onde

$$\begin{aligned}
\Lambda_{xx} &= (1 - N^2) + \chi_{xx} , \\
\Lambda_{xy} &= \chi_{xy} , \\
\Lambda_{xz} &= \chi_{xz} , \\
\Lambda_{yx} &= \chi_{yx} - N_{\perp}^2 \chi_{yx} - N_{\perp} N_{\parallel} \chi_{zx} - i N_{\perp} N_B \eta_{xx} , \\
\Lambda_{yy} &= (1 - N^2) + \chi_{yy} - N_{\perp}^2 \chi_{yy} - N_{\perp} N_{\parallel} \chi_{zy} - i N_{\perp} N_B \eta_{xy} , \\
\Lambda_{yz} &= \chi_{yz} - N_{\perp}^2 \chi_{yz} - N_{\perp} N_{\parallel} \chi_{zz} - i N_{\perp} N_B \eta_{xz} , \\
\Lambda_{zx} &= \chi_{zx} - N_{\parallel} N_{\perp} \chi_{yx} - N_{\parallel}^2 \chi_{zx} - i N_{\parallel} N_B \eta_{xx} , \\
\Lambda_{zy} &= \chi_{zy} - N_{\parallel} N_{\perp} \chi_{yy} - N_{\parallel}^2 \chi_{zy} - i N_{\parallel} N_B \eta_{xy} , \\
\Lambda_{zz} &= (1 - N^2) + \chi_{zz} - N_{\parallel} N_{\perp} \chi_{yz} - N_{\parallel}^2 \chi_{zz} - i N_{\parallel} N_B \eta_{xz} .
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Com o cálculo da derivada do tensor suscetibilidade, todos os ingredientes da relação de dispersão para um plasma inhomogêneo estão disponíveis. Resta agora adequar a forma dos tensores $\overset{\leftrightarrow e}{\chi}$ e $\overset{\leftrightarrow i}{\chi}$, e a forma da derivada $\partial_x \overset{\leftrightarrow}{\chi}$, para a utilização dos dados experimentais obtidos por medidas realizadas por satélites. A seção seguinte é destinada a essa adequação e também aos resultados numéricos.

5.6 Resultados numéricos

Antes de dar prosseguimento ao curso da obtenção de resultados numéricos, é conveniente escrever os tensores $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_B$, $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_P$ e $\overset{\leftrightarrow i}{\chi}$, e a derivada $\partial_x \overset{\leftrightarrow}{\chi}$, em termos de quantidades adimensionais convenientes. Os dados observacionais que serão usados foram obtidos por satélites, em uma região da *neutral sheet* próxima à Terra, imediatamente antes do início de uma *substorm*. No trabalho [113], Yoon *et al* usaram estes dados para analisar a possibilidade da instabilidade LHDI ser um “gatilho” desencadeador da *substorm*. No entanto, a presente tese não chegará a tal ponto na análise, pois, por simplicidade, os valores experimentais não serão usados na sua totalidade, como será visto nas subseções seguintes.

A primeira quantidade a ser definida é

$$\beta_\alpha = \frac{8\pi n_{0\alpha} T_\alpha}{B_0^2}, \quad (5.58)$$

que em síntese é a razão da energia cinética das partículas do tipo α pela energia magnética. É uma quantidade amplamente usada em várias áreas de estudo da física dos plasmas, desde plasmas astrofísicos até plasmas de laboratório. A importância dessa quantidade reside no fato que os dados experimentais são expressos em termos dela. Também será definida a quantidade

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{LH}}, \quad (5.59)$$

onde $\omega_{LH} = \sqrt{\Omega_i |\Omega_e|}$ é a frequência das ondas híbridas inferiores. Outras quantidades adimensionais são definidas como segue

$$q_n = \frac{c \epsilon_n}{\omega_{pe}}, \quad q_B = \frac{c \epsilon_B}{\omega_{pe}}, \quad q_\perp = \frac{c k_\perp}{\omega_{pe}}, \quad q_\parallel = \frac{c k_\parallel}{\omega_{pe}}, \quad (5.60)$$

onde $q^2 = q_\parallel^2 + q_\perp^2$. Apenas para facilitar a compreensão das várias mudanças de variáveis que serão empregadas, convém aqui reproduzir as quantidades definidas em capítulos anteriores:

$$X_\alpha = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}, \quad Y_\alpha = \frac{\Omega_\alpha}{\omega}, \quad N_\parallel = \frac{c k_\parallel}{\omega}, \quad N_\perp = \frac{c k_\perp}{\omega}, \quad \nu_\alpha = \frac{N_\perp}{\mu_\alpha^{1/2} Y_\alpha} = \frac{k_\perp c}{\mu_\alpha^{1/2} \Omega_\alpha}, \quad (5.61a)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\epsilon_B}{k_\parallel}, \quad \mu_\alpha = \frac{m_\alpha c^2}{T_\alpha}, \quad \nu_\alpha = \sqrt{\frac{T_\alpha}{m_\alpha}}, \quad \omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi n_{0\alpha} q_\alpha^2}{m_\alpha}, \quad \Omega_\alpha = \frac{q_\alpha B_0}{m_\alpha c}, \quad (5.61b)$$

onde $\mathbf{N} = N_\parallel \mathbf{e}_z + N_\perp \mathbf{e}_y$ é o índice de refração, ν_α é a velocidade térmica, $\omega_{p\alpha}$ é a frequência de plasma e Ω_α é a frequência de cíclotron.

Usando todas as quantidades definidas em (5.58)-(5.61), mostra-se que

$$\mu_e = \frac{2}{\beta_e} \frac{\omega_{pe}^2}{|\Omega_e|^2}, \quad \nu_e = -\frac{q_\perp \beta_e^{1/2}}{\sqrt{2}}, \quad N_\parallel = \frac{q_\parallel}{\bar{\omega}} \frac{\omega_{pe}}{|\Omega_e|} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}, \quad N_\perp = \frac{q_\perp}{\bar{\omega}} \frac{\omega_{pe}}{|\Omega_e|} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}, \quad (5.62a)$$

$$X_e = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{\omega_{pe}^2}{|\Omega_e|^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right), \quad \chi_1 = \frac{q_B}{2^{3/2} q_{\parallel}}, \quad Y_e = -\frac{1}{\bar{\omega}} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (5.62b)$$

A região da *neutral sheet* em que foram obtidas as medidas experimentais é composta por um plasma formado por elétrons e prótons, de maneira que $m_i/m_e \simeq 1836$ e $|q_e| = q_i = e$ (os resultados acima foram obtidos supondo essa última igualdade).

Depois de estipuladas as quantidades adimensionais adequadas, expressas em (5.58)-(5.60), basta substituir as igualdades recorrentes, dadas por (5.62), em (5.16) e (5.24) e, assim, obter os componentes dos tensores $\overleftrightarrow{\chi}_P$ e $\overleftrightarrow{\chi}_B$ nesta nova notação. O resultado encontrado foi o que segue

$$\chi_{Pxx} = -\frac{\sqrt{2} q_n}{\bar{\omega}^2} \frac{q_n}{q_{\parallel}} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right) \nu_e^3 \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z(z_0) \quad (5.63a)$$

$$\chi_{Pyy} = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q_n}{q_{\parallel}} \frac{1}{\nu_e} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right) \sum_{n=\pm 1} \left\{ \mathcal{H}_1(\nu_e^2) + \frac{n\bar{\omega}}{(m_i/m_e)^{1/2}} [\mathcal{H}_1(\nu_e^2) - \mathcal{H}_2(\nu_e^2)] \right\} Z(z_n) \quad (5.63b)$$

$$\chi_{Pzz} = \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{1}{2} \frac{q_{\perp} q_n}{q_{\parallel}^2} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \right] \mathcal{H}_0(\nu_e^2) Z^{(1)}(z_0) \quad (5.63c)$$

$$\chi_{P(xy)} = \pm i \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q_n}{q_{\parallel}} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \nu_e \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z(z_0) \quad (5.63d)$$

$$\chi_{P(xz)} = \mp i \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{1}{2} \frac{q_n}{q_{\parallel}} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right) \nu_e^2 \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z^{(1)}(z_0) \quad (5.63e)$$

$$\chi_{P(yz)} = \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{1}{4} \frac{q_n}{q_{\parallel}} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z^{(1)}(z_0), \quad (5.63f)$$

onde

$$z_n = \frac{1}{q_{\parallel} \beta_e^{1/2}} \left[\frac{\bar{\omega}}{(m_i/m_e)^{1/2}} + n \right]; \quad (5.64)$$

$$\chi_{Bxx} = \frac{4}{\beta_e^{1/2}} \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\omega_{pe}^2}{|\Omega_e|^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{q_{\parallel}} \int_0^{\infty} du u^3 e^{-u^2} J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) Z(\bar{z}_0) \quad (5.65a)$$

$$\chi_{Byy} = \frac{2}{\beta_e^{1/2}} \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\omega_{pe}^2}{|\Omega_e|^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{q_{\parallel}} \frac{1}{\nu_e^2} \sum_{n=\pm 1} \left[\int_0^{\infty} du u e^{-u^2} Z(\bar{z}_n) J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) \right. \\ \left. - \frac{q_B}{q_{\parallel}} \int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} Z^{(1)}(\bar{z}_n) J_1(\sqrt{2}\nu_e u) J_2(\sqrt{2}\nu_e u) \right]$$

$$\chi_{Bzz} = -\frac{2}{\beta_e^{1/2}} \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\omega_{pe}^2}{|\Omega_e|^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{q_{\parallel}} \int_0^{\infty} du u(\bar{z}_0) e^{-u^2} J_0^2(\sqrt{2}\nu_e u) Z^{(1)}(\bar{z}_0) \quad (5.65b)$$

$$\chi_{B(xy)} = \pm i \frac{2\sqrt{2}}{\beta_e^{1/2}} \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\omega_{pe}^2}{|\Omega_e|^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{q_{\parallel}} \frac{1}{\nu_e} \sum_{n=\pm 1} n \left[\int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} \right. \\ \left. \times Z(\bar{z}_n) J_1(\sqrt{2}\nu_e u) J_1'(\sqrt{2}\nu_e u) + \frac{q_B}{2q_{\parallel}} Z^{(1)}(z_n) \int_0^{\infty} du u^3 e^{-u^2} J_2^2(\sqrt{2}\nu_e u) \right] \quad (5.65c)$$

$$\chi_{B(xz)} = \mp i \frac{2}{\beta_e^{1/2}} \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\omega_{pe}^2}{|\Omega_e|^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{q_{\parallel}} \int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} J_0(\sqrt{2}\nu_e u) J_1(\sqrt{2}\nu_e u) Z^{(1)}(\bar{z}_0) \quad (5.65d)$$

$$\chi_{B(yz)} = \frac{\sqrt{2}}{\beta_e^{1/2}} \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\omega_{pe}^2}{|\Omega_e|^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{q_{\parallel}} \frac{1}{\nu_e^2} \sum_{n=\pm 1} \left\{ n \nu_e \int_0^{\infty} du u e^{-u^2} Z^{(1)}(\bar{z}_n) J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) \right. \\ \left. + n \frac{q_B}{\sqrt{2}q_{\parallel}} [(z_n) Z^{(1)}(z_n) + Z(z_n)] \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} du u e^{-u^2} \left[J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) + \sqrt{2}\nu_e u J_1(\sqrt{2}\nu_e u) J_2(\sqrt{2}\nu_e u) \right] \right\}, \quad (5.65e)$$

onde

$$\bar{z}_n = \frac{1}{q_{\parallel} \beta_e^{1/2}} \left[\frac{\bar{\omega}}{(m_i/m_e)^{1/2}} + n + \frac{q_B q_{\perp} \beta_e}{2} u^2 \right]. \quad (5.66)$$

Para chegar no resultado do componente $\chi_{P_{yy}}$ foram usadas as seguintes igualdades

$$\mathcal{H}_{-1}(\nu_e^2) = \mathcal{H}_1(\nu_e^2) \quad , \quad \mathcal{H}'_{-1}(\nu_e^2) = \mathcal{H}'_1(\nu_e^2) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\nu_e^2} \mathcal{H}_1(\nu_e^2) - \mathcal{H}'_1(\nu_e^2) = \mathcal{H}_1(\nu_e^2) - \mathcal{H}_2(\nu_e^2) .$$

As derivadas dos componentes do tensor suscetibilidade, expressas em termos dos η_{ij} , dados em (5.54), ficam com a seguinte forma na nova notação

$$\eta_{xx} = 0 , \quad (5.67a)$$

$$\eta_{yy} = -\frac{1}{\bar{\omega}} \left(\frac{2}{\beta_e} \right)^2 \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{q_{\parallel}^2 q_{\perp}^2} \sum_{n=\pm 1} n \int_0^{\infty} du u e^{-u^2} Z^{(1)}(\bar{z}_n) J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) , \quad (5.67b)$$

$$\eta_{zz} = 0 , \quad (5.67c)$$

$$\eta_{(xy)}^{(yx)} = \pm i \frac{1}{\bar{\omega}} \left(\frac{2}{\beta_e} \right)^{3/2} \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{2}}{q_{\parallel}^2 q_{\perp}} \sum_{n=\pm 1} n^2 \times \int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} Z^{(1)}(\bar{z}_n) J_1(\sqrt{2}\nu_e u) J_1'(\sqrt{2}\nu_e u) , \quad (5.67d)$$

$$\eta_{(xz)}^{(zx)} = 0 , \quad (5.67e)$$

$$\eta_{(yz)}^{(zy)} = \frac{1}{\bar{\omega}} \left(\frac{2}{\beta_e} \right)^{3/2} \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2} q_{\parallel}^2 q_{\perp}} \sum_{n=\pm 1} n^2 \int_0^{\infty} du u e^{-u^2} Z^{(2)}(\bar{z}_n) J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) . \quad (5.67f)$$

O tensor suscetibilidade dos íons também deve ser expresso em termos da nova notação. Usando os seguintes resultados

$$\frac{\sqrt{\mu_e}}{\sqrt{\mu_i}} = \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2} , \quad \frac{\beta_e}{\beta_i} = \frac{T_e}{T_i} , \quad \frac{\sqrt{\mu_i}}{c} = \frac{1}{v_i} \quad \text{e} \quad X_i = X_e \frac{m_e}{m_i} = \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} \frac{1}{\bar{\omega}^2} , \quad (5.68)$$

válidos para $n_{oe} = n_{oi}$, os componentes do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}$, dados por (5.8), ficam com a seguinte forma

$$\chi_{xx}^i = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} z_i Z(z_i) \quad (5.69a)$$

$$\chi_{yy}^i = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} \left[\frac{q_{\parallel}^2}{q^2} z_i Z(z_i) - \left(\frac{q_{\perp}}{q} z_i - \frac{u_{Di}}{u_i} \right)^2 Z'(z_i) \right] \quad (5.69b)$$

$$\chi_{zz}^i = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} z_i \left[\frac{q_{\perp}^2}{q^2} Z(z_i) - \frac{q_{\parallel}^2}{q^2} z_i Z'(z_i) \right] \quad (5.69c)$$

$$\chi_{(xy)}^i = 0 \quad (5.69d)$$

$$\chi_{(xz)}^i = 0 \quad (5.69e)$$

$$\chi_{(zy)}^i = -\frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} \frac{q_{\parallel}}{q} z_i \left[\frac{q_{\perp}}{q} Z(z_i) + \left(\frac{q_{\perp}}{q} z_i - \frac{u_{Di}}{u_i} \right) Z'(z_i) \right], \quad (5.69f)$$

onde o argumento da função de Fried & Conte, (5.9), é dado por

$$z_i = \frac{\bar{\omega} + q_{\perp} \beta_i^{1/2} (v_{Di}/v_i)}{q \beta_i^{1/2}}. \quad (5.70)$$

O último passo antes de passar aos resultados numéricos, será a unificação dos tensores $\vec{\chi}_P$ e $\vec{\chi}_B$, deixando o tensor suscetibilidade dos elétrons expresso de uma forma única. Assim, após efetuada a soma

$$\vec{\chi}^e = \vec{\chi}_P + \vec{\chi}_B, \quad (5.71)$$

com $\vec{\chi}_P$ e $\vec{\chi}_B$ dados respectivamente por (5.63) e (5.65), obtém-se

$$\chi_{xx}^e = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \frac{m_i}{m_e} \left(-\sqrt{2} \frac{q_n}{q_{\parallel}} \nu_e^3 \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z(z_0) + 4 z_0 \int_0^{\infty} du u^3 e^{-u^2} J_1^2(\sqrt{2} \nu_e u) Z(\bar{z}_0) \right) \quad (5.72a)$$

$$\begin{aligned} \chi_{yy}^e = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \frac{m_i}{m_e} & \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{q_n}{q_{\parallel}} \frac{1}{\nu_e} \sum_{n=\pm 1} \left(\mathcal{H}_1(\nu_e^2) + \frac{n\bar{\omega}}{(m_i/m_e)^{1/2}} [\mathcal{H}_1(\nu_e^2) - \mathcal{H}_2(\nu_e^2)] \right) Z(z_n) \right. \\ & + \frac{2z_0}{\nu_e^2} \left(\int_0^{\infty} du u e^{-u^2} J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) \sum_{n=\pm 1} Z(\bar{z}_n) \right. \\ & \left. \left. - \frac{q_B}{q_{\parallel}} \sum_{n=\pm 1} Z'(z_n) \int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} J_1(\sqrt{2}\nu_e u) J_2(\sqrt{2}\nu_e u) \right) \right] \quad (5.72b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{zz}^e = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \frac{m_i}{m_e} & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{q_n}{q_{\parallel}} \nu_e z_0 \mathcal{H}_0(\nu_e^2) Z'(z_0) \right. \\ & \left. - 2z_0 \int_0^{\infty} du u e^{-u^2} J_0^2(\sqrt{2}\nu_e u) \bar{z}_0 Z'(\bar{z}_0) \right) \quad (5.72c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{xy}^e = -\chi_{yx}^e = \frac{i}{\bar{\omega}^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \frac{m_i}{m_e} & \left[-\frac{q_n}{q_{\perp}} \nu_e^2 z_0 \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z(z_0) \right. \\ & + \frac{2\sqrt{2}z_0}{\nu_e} \left(\int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} J_1(\sqrt{2}\nu_e u) J'_1(\sqrt{2}\nu_e u) \sum_{n=\pm 1} n Z(\bar{z}_n) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{q_B}{q_{\parallel}} \sum_{n=\pm 1} n Z'(z_n) \int_0^{\infty} du u^3 e^{-u^2} J_2^2(\sqrt{2}\nu_e u) \right) \right] \quad (5.72d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{xz}^e = -\chi_{zx}^e = -\frac{i}{\bar{\omega}^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \frac{m_i}{m_e} & \left(\frac{1}{2} \frac{q_n}{q_{\parallel}} \nu_e^2 \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z'(z_0) \right. \\ & \left. + 2z_0 \int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} J_0(\sqrt{2}\nu_e u) J_1(\sqrt{2}\nu_e u) Z'(\bar{z}_0) \right) \quad (5.72e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{yz}^e = \chi_{zy}^e = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \frac{m_i}{m_e} & \left[-\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{q_n}{q_{\perp}} \nu_e z_0 \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) Z'(z_0) \right. \\ & + \frac{\sqrt{2}z_0}{\nu_e} \left(\int_0^{\infty} du u e^{-u^2} J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) \sum_{n=\pm 1} n Z'(\bar{z}_n) \right. \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{q_B}{q_{\parallel}} \frac{1}{\nu_e} \sum_{n=\pm 1} n [z_n Z'(z_n) + Z(z_n)] \\ & \left. \left. \times \int_0^{\infty} du u e^{-u^2} [J_1^2(\sqrt{2}\nu_e u) + \sqrt{2}\nu_e u J_1(\sqrt{2}\nu_e u) J_2(\sqrt{2}\nu_e u)] \right) \right] . \quad (5.72f) \end{aligned}$$

Existe o risco de se perder de vista a real importância do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}^e$, diante de tantos

passos intermediários para que a forma (5.72) fosse alcançada; cabem portanto nesse ponto alguns comentários gerais a respeito do referido tensor, para que as suas características sejam ressaltadas.

O tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}^e$, em sua mais básica origem, foi obtido a partir da aproximação WKB, para um plasma fracamente inomogêneo. Como resultado prático da aproximação WKB, Beskin, Gurevich e Istomin [23], mostraram que para um plasma inomogêneo o tensor que satisfaz corretamente a troca de energia entre ondas e partículas, não é o tensor dielétrico tradicional mas sim o chamado tensor dielétrico efetivo. A obtenção deste tensor se dá através da transformação BGI, proposta pelos mesmos autores.

Cabe neste ponto uma breve revisão sobre a transformação BGI, feita com mais detalhes no capítulo 2 da presente tese. Como exposto em trabalhos anteriores [22,37], o procedimento empregado para a aplicação da transformação BGI, primeiro envolve o cálculo do tensor dielétrico local tradicional (identificado na presente tese por $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}^0$), tendo como base a relação entre a densidade de corrente e o campo elétrico, (1.8), mas incorporando os efeitos da inomogeneidade no tensor condutividade. Essa expressão tradicional não satisfaz a simetria de Onsager [25, 27]. É neste tensor dielétrico que é aplicada a transformação BGI [23], resultando no tensor dielétrico efetivo. É importante destacar que este procedimento não é *ad hoc*, mas sim baseado em uma sólida formulação teórica. Os detalhes específicos podem ser encontrados em [25,27,30,36]. Como complemento de informação, é interessante lembrar que para o tensor dielétrico efetivo, apenas as partículas ressonantes contribuem para a sua parte anti-hermiteana, descrevendo corretamente a troca de energia entre onda e partículas.

Uma outra importante consequência da correção introduzida pela transformação BGI, é que os componentes do tensor dielétrico efetivo obtido com os passos adotados na presente tese preserva a simetria de Onsager,

$$\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx}, \quad \epsilon_{xz} = -\epsilon_{zx}, \quad \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}.$$

A referência [113] chama a atenção para o não cumprimento dessa simetria (simetria de Onsager) na aproximação local tradicional para um plasma fracamente inomogêneo, em que o problema de microestabilidade seja tratado linearmente, e tenta corrigir essa falta de

simetria usando componentes ϵ_{yj} ($j = x, y, z$) calculadas com o uso de uma forma aproximada da lei de Gauss. A expressão resultante restaura a simetria requerida para os componentes do tensor dielétrico, no entanto o procedimento carece de uma justificativa baseada em princípios básicos. Os autores da referência [113] supuseram que o colapso da simetria de Onsager foi o resultado da aproximação do cálculo das órbitas dos elétrons. No entanto, acreditamos que o problema não está relacionado com as órbitas, e apontamos que este é um problema inerente à aproximação local, que em geral não satisfaz a propriedade de troca de energia entre as ondas e as partículas. A transformação BGI pode corrigir naturalmente essa deficiência, tendo a relação de simetria de Onsager como um corolário, como demonstram os componentes do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi}$, expressos em (5.72). Em suma, acreditamos que o resultado (5.72) representa uma forma mais sistemática e precisa para o tensor suscetibilidade dos elétrons, para a análise de estabilidade linear local de um plasma fracamente inomogêneo, dentro da faixa de frequência das ondas híbridas inferiores. Para um caso mais geral, em que estejam contemplados ângulos arbitrários de propagação das ondas com relação aos gradientes de densidade e campo (ψ), e frequências arbitrárias de onda (ω), acreditamos que o tensor dielétrico que se adequa às exigências de troca de energia entre onda e partículas é o tensor expresso em (3.81), cujas principais características já foram enfatizadas nos capítulos anteriores. Portanto, propomos na presente tese que o tensor suscetibilidade que deve ser usado na relação de dispersão para um plasma inomogêneo é o tensor $\overset{\leftrightarrow}{\chi} = \overset{\leftrightarrow}{\chi}_B + \overset{\leftrightarrow}{\chi}_P$, onde $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_B$ e $\overset{\leftrightarrow}{\chi}_P$ são dados por (3.82) e (3.83), respectivamente. Para um estudo restrito às ondas híbridas inferiores, sugerimos que o tensor suscetibilidade dos elétrons expresso em (5.72) é o tensor que deve ser empregado na relação de dispersão para um plasma inomogêneo, juntamente com o tensor suscetibilidade dos íons, dado por (5.69) [113]. Convém enfatizar que tanto o tensor suscetibilidade dos elétrons como o dos íons foram originados de um tratamento que inclui os efeitos eletromagnéticos completos, e ângulos arbitrários de propagação das ondas. Isso permite ter uma avaliação bastante ampla de instabilidades de deriva na faixa de frequência das ondas híbridas inferiores, comportando desde a instabilidade LHDI ($k_{\parallel} = 0$) até a instabilidade IWI (MTSI para $k_{\perp} = 0$), passando por ângulos intermediários.

5.6.1 Resultados numéricos para o limite de temperatura eletrônica nula

Agora serão apresentados exemplos da solução numérica da relação de dispersão dada por (5.55), onde $\chi_{ij} = \chi_{ij}^e + \chi_{ij}^i$, com os componentes χ_{ij}^i e χ_{ij}^e expressos respectivamente por (5.69) e (5.72). A relação de dispersão foi resolvida para a frequência complexa normalizada $\bar{\omega}$ como uma função de q_{\parallel} e q_{\perp} (direção de propagação da onda), tendo como parâmetros de entrada as outras quantidades, β_e , β_i , $\omega_{pe}/|\Omega_e|$ e v_{Di}/v_i .

No que segue, será considerado $\omega_{pe}/|\Omega_e| = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$, e o caso ideal para temperatura eletrônica nula ($T_e = 0$), ou seja, $\beta_e = 0$. Esses valores foram deliberadamente escolhidos, e são idênticos aos utilizados na referência [113], de maneira que pode ser feita uma comparação direta dos resultados. A inomogeneidade em densidade pode ser isolada a partir da igualdade (5.6) e, depois de adequada à nova notação, é expressa por

$$q_n = \frac{2(v_{Di}/v_i)}{(m_i/m_e)^{1/2}\sqrt{\beta_i}}, \quad (5.73)$$

lembrando que $m_i/m_e \simeq 1836$. A inomogeneidade do campo magnético ambiente está relacionada com a inomogeneidade da densidade através da relação (5.2), que na nova notação é dada por

$$q_B = \frac{(\beta_e + \beta_i)}{2} q_n. \quad (5.74)$$

Para uma adequada efetivação dos cálculos numéricos, é necessário que o limite $T_e \rightarrow 0$ seja calculado analiticamente para os componentes χ_{ij}^e e para as correspondentes derivadas. Os passos principais para a obtenção desse limite constam logo a seguir.

Os componentes χ_{ij}^e e suas derivadas para o limite $T_e \rightarrow 0$

A forma dos componentes χ_{Pij} usada para o cálculo desse limite foi a forma apresentada em (5.16). Nota-se que para todos os componentes, com exceção do componente χ_{Pyy} , o argumento da função Z é $z_0 = \omega/(\sqrt{2}k_{\parallel}v_e)$. Como $v_e = \sqrt{T_e/m_e} = c/\sqrt{\mu_e}$, implica que $v_e \rightarrow 0$ e $\mu_e \rightarrow \infty$ quando $T_e \rightarrow 0$. Portanto, para esse limite $z_0 = \omega/(\sqrt{2}k_{\parallel}v_e) =$

$\sqrt{\mu_e}/(\sqrt{2}N_{\parallel}) \rightarrow \infty$. Para um grande valor de argumento, a função Z e suas derivadas podem ser aproximadas conforme mostrado em (5.15). Para um argumento tendendo ao infinito, o termo da exponencial se anula, e apenas o primeiro termo das somas será levado em conta. Portanto,

$$Z(z_0) \simeq -\frac{1}{z_0} = -\frac{\sqrt{2}N_{\parallel}}{\sqrt{\mu_e}}, \quad Z^{(1)}(z_0) \simeq \frac{1}{z_0^2} = \frac{2N_{\parallel}^2}{\mu_e}. \quad (5.75)$$

Para o componente χ_{Pyy} o argumento da função Z é $z_n = (\omega - n\Omega_e)/(\sqrt{2}k_{\parallel}v_e) = \sqrt{\mu_e}(1 - nY_e)/(\sqrt{2}N_{\parallel}) \rightarrow \infty$, de modo que

$$Z(z_n) \simeq -\frac{1}{z_n} = -\frac{\sqrt{2}N_{\parallel}}{\sqrt{\mu_e}(1 - nY_e)}. \quad (5.76)$$

A função $\mathcal{H}_n(\nu_e^2) = e^{-\nu_e^2} I_n(\nu_e^2)$ e sua derivada $\mathcal{H}'_n(\nu_e^2) = e^{-\nu_e^2} [-I_n(\nu_e^2) + I'_n(\nu_e^2)]$, também devem ser aproximadas, visto que $\nu_e^2 = N_{\perp}^2/Y_e^2\mu_e \rightarrow 0$ para $T_e \rightarrow 0$. Pode-se mostrar que

$$\mathcal{H}_0(\nu_e^2) = 1, \quad \mathcal{H}'_0(\nu_e^2) = -1, \quad (5.77a)$$

$$\mathcal{H}_1(\nu_e^2) = \frac{\nu_e^2}{2}, \quad \mathcal{H}'_1(\nu_e^2) = \frac{1}{2} \quad (5.77b)$$

para $\nu_e^2 \rightarrow 0$.

Utilizando adequadamente as expansões (5.76) e (5.77b) em χ_{Pyy} , e lembrando que $\omega \ll |\Omega_e|$ e que $\mathcal{H}_1(\nu_e^2) = \mathcal{H}_{-1}(\nu_e^2)$, conclui-se que $\chi_{Pyy} = 0$. Os demais componentes, depois de usadas as expansões (5.75) e (5.77a), também se anulam. Portanto, para o limite $\beta_e \rightarrow 0$ (ou $\mu_e \rightarrow \infty$, $\nu_e \rightarrow 0$), todos os componentes do tensor $\overleftrightarrow{\chi}_P$ se anulam,

$$\chi_{Pij} = 0, \quad \text{para } i, j = x, y, z. \quad (5.78)$$

Os componentes do tensor $\overleftrightarrow{\chi}_B$ usados para o cálculo do limite $T_e \rightarrow 0$, foram os obtidos em (5.24). O argumento da função Z é dado por (5.23). Para $T_e \rightarrow 0$ ($\sqrt{\mu_e} \rightarrow \infty$) o argumento pode ser aproximado como segue

$$\bar{z}_n = \frac{1}{\sqrt{2}N_{\parallel}} \left[\sqrt{\mu_e}\delta_{ne} - \frac{\eta_e u^2}{\sqrt{\mu_e}} \right] \simeq \frac{\sqrt{\mu_e}\delta_{ne}}{\sqrt{2}N_{\parallel}} \rightarrow \infty, \quad (5.79)$$

onde $\delta_{ne} = 1 - nY_e$. Para esse limite, apenas o primeiro termo da expansão da função Z é necessário, bem como de sua derivada, de modo que

$$Z(\bar{z}_n) \simeq -\frac{1}{\bar{z}_n} = -\frac{\sqrt{2}N_{\parallel}}{\sqrt{\mu_e}\delta_{ne}}, \quad Z^{(1)}(\bar{z}_n) \simeq \frac{1}{\bar{z}_n^2} = \frac{2N_{\parallel}^2}{\mu_e\delta_{ne}^2}. \quad (5.80)$$

Para $n = 0$, isso implica que $\delta_{0e} = 1$ e, portanto,

$$Z(\bar{z}_0) \simeq -\frac{1}{\bar{z}_0} = -\frac{\sqrt{2}N_{\parallel}}{\sqrt{\mu_e}}, \quad Z^{(1)}(\bar{z}_0) \simeq \frac{1}{\bar{z}_0^2} = \frac{2N_{\parallel}^2}{\mu_e}. \quad (5.81)$$

Alguns componentes necessitam de $Z^{(1)}(z_n)$, que para $T_e \rightarrow 0$ pode ser aproximada como segue

$$Z^{(1)}(z_n) \simeq \frac{1}{z_n^2} = -\frac{2N_{\parallel}^2}{\mu_e(1 - nY_e)^2} = -\frac{2N_{\parallel}^2}{\mu_e\delta_{ne}^2}. \quad (5.82)$$

Nesse limite de temperatura, as funções de Bessel podem ser aproximadas da seguinte maneira

$$J_0(\sqrt{2}\nu_e u) \simeq 1, \quad J_1(\sqrt{2}\nu_e u) \simeq \frac{\sqrt{2}\nu_e u}{2}, \quad J_1'(\sqrt{2}\nu_e u) \simeq \frac{1}{2}, \quad J_2(\sqrt{2}\nu_e u) \simeq \frac{2\nu_e^2 u^2}{8}. \quad (5.83)$$

Usando as aproximações (5.80)-(5.83) em (5.24), e tomando o limite $T_e \rightarrow 0$, os componentes do tensor $\vec{\chi}_B$ obtidos são

$$\chi_{Bxx} = 0, \quad \chi_{Byy} = \frac{X_e}{Y_e^2}, \quad \chi_{Bzz} = -X_e, \quad \chi_{B(xy)} = \pm i \frac{X_e}{Y_e}, \quad \chi_{B(xz)} = 0, \quad \chi_{B(yz)} = 0. \quad (5.84)$$

Como $\chi_{Pij} = 0$ para o limite de temperatura eletrônica nula, o tensor suscetibilidade dos elétrons será o próprio $\vec{\chi}_B$, cujos componentes para esse limite são dados por (5.84). Usando X_e e Y_e convenientemente adaptados, expressos em (5.62b), os componentes do

tensor suscetibilidade dos elétrons, para $\beta_e = 0$, são

$$\begin{aligned} \chi_{xx}^e = 0, \quad \chi_{yy}^e = \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2}, \quad \chi_{zz}^e = -\frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{\omega_e^2 m_i}{\Omega_e^2 m_e}, \quad \chi_{(xy)}^e = \mp i \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}, \\ \chi_{(xz)}^e = 0, \quad \chi_{(zy)}^e = 0. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Finalmente, os componentes do tensor suscetibilidade do plasma que serão usados na relação de dispersão para um plasma inhomogêneo, (5.55), para o caso de temperatura eletrônica nula, são dados por $\chi_{ij} = \chi_{ij}^e + \chi_{ij}^i$, onde χ_{ij}^e e χ_{ij}^i são expressos em (5.85) e (5.69) respectivamente.

Para as derivadas dos componentes do tensor suscetibilidade, dadas por (5.53), a única novidade com relação às aproximações já apresentadas para $T_e \rightarrow 0$, é a derivada segunda da função de Fried & Conte. Para esse limite, fazendo uso do primeiro termo de (5.15c), obtém-se

$$Z(\bar{z}_n) \simeq -\frac{2}{\bar{z}_n^3} = -\frac{4\sqrt{2}N_{\parallel}^3}{\mu_e \sqrt{\mu_e} \delta_{ne}^3}. \quad (5.86)$$

Usando a aproximação acima, juntamente com as aproximações das funções de Bessel, e com X_e e Y_e já na nova notação, os η_{ij} , expressos em (5.54), para $T_e \rightarrow 0$, são dados por

$$\begin{aligned} \eta_{xx} = 0, \quad \eta_{yy} = 2 \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2}, \quad \eta_{zz} = 0, \quad \eta_{(xy)} = \mp i \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\omega_e^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}, \\ \eta_{(xz)} = 0, \quad \eta_{(zy)} = 0. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Gráficos

Os modos normais de propagação, para um plasma fracamente inhomogêneo, são as soluções da equação (5.56), para a frequência da onda em função da direção de propagação. Considerando a nova notação, a frequência da onda normalizada $\bar{\omega}$ será obtida em função de q_{\parallel} e q_{\perp} . Para o limite $\beta_e = 0$, os componentes $\chi_{ij} = \chi_{ij}^e + \chi_{ij}^i$ são obtidos com χ_{ij}^e e χ_{ij}^i dados respectivamente por (5.85) e (5.69). Os componentes η_{ij} são expressos por (5.87).

Os resultados numéricos representados na figura 5.3, mostram a existência de uma taxa

de crescimento de um modo instável (parte imaginária da frequência adimensional $\bar{\omega}$, designada por $\omega_i/\omega_{LH} = \bar{\omega}_i$, tal que $\bar{\omega}_i > 0$), com frequência na faixa híbrida inferior, em função das contribuições paralela (q_{\parallel}) e perpendicular (q_{\perp}) da direção de propagação da onda. A superfície 3D representa a propagação oblíqua com relação à direção do campo magnético ambiente.

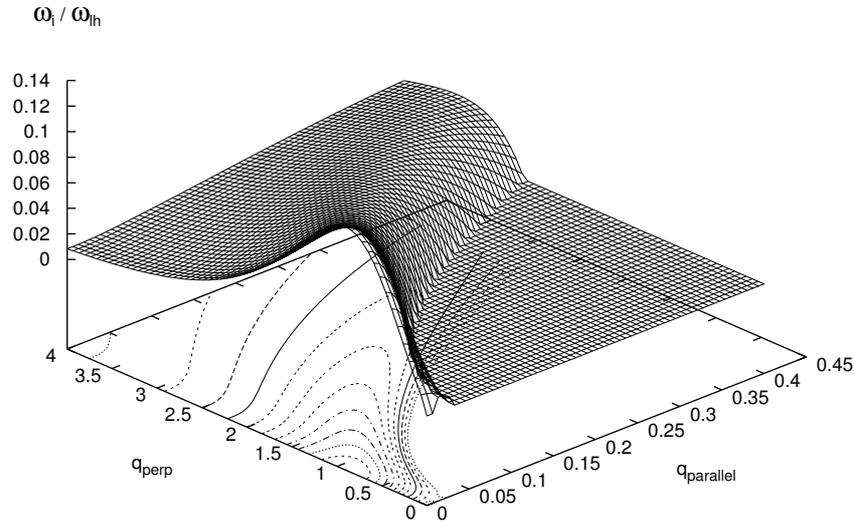


Fig. 5.3: Taxa de crescimento adimensional $\bar{\omega}_i$ (parte imaginária da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/|\Omega_e| = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, incluídos os efeitos completos da inhomogeneidade dos elétrons [18].

A figura 5.3 mostra muitas características similares às que aparecem na figura 3 da referência [113], apresentada na presente tese na figura 4.5(b). Salienta-se a ocorrência de uma acentuada instabilidade em $q_{\parallel} = 0$ (propagação estritamente perpendicular), acoplada a uma região extensa de instabilidade para grandes valores de q_{\parallel} e q_{\perp} (propagação oblíqua). Pode ser vista também a ocorrência de uma instabilidade para $q_{\perp} \rightarrow 0$ que perdura até o limite $q_{\perp} = 0$ (propagação estritamente paralela), que não foi obtida na referência [113], como pode ser visto na figura 4.5(b). Para exatamente $q_{\perp} = 0$ essa instabilidade é puramente crescente (não oscilatória), pois a sua correspondente parte real é nula, como pode ser visto

na figura 5.4, que apresenta a parte real da frequência adimensional $\bar{\omega}$ (designada por $\omega_r/\omega_{LH} = \bar{\omega}_r$) correspondendo à taxa de crescimento que aparece na figura 5.3.

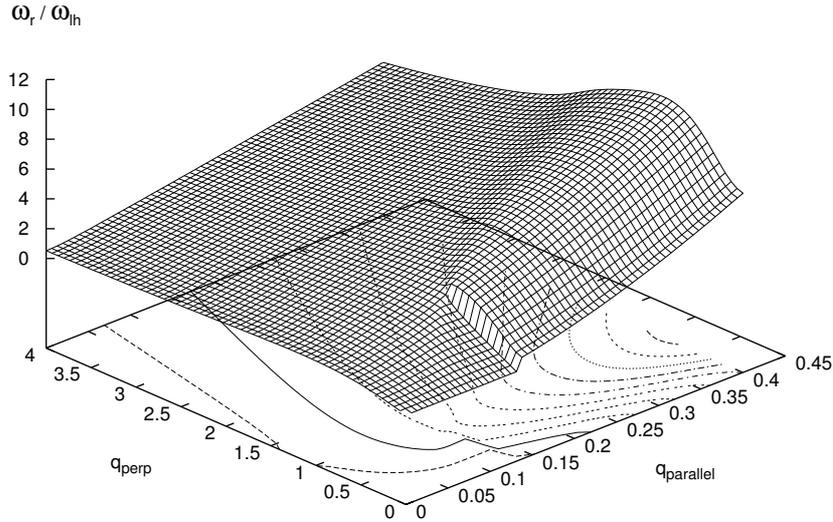


Fig. 5.4: Parte real da frequência adimensional $\bar{\omega}_r$ (parte real da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/|\Omega_e| = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, incluídos os efeitos completos da inomogeneidade dos elétrons [18].

Para analisar a natureza das instabilidades obtidas, a figura 5.5 apresenta as taxas de crescimento calculadas para uma situação no qual é mantida a deriva dos íons, $v_{Di}/v_i = 1$, mas desprezando completamente os efeitos da inomogeneidade dos elétrons, assumindo $q_n = q_B = 0$. No presente contexto, esta situação é um tanto artificial, mas poderia corresponder ao caso no qual a deriva dos íons é ocasionada por outros mecanismos, como por exemplo a deriva gerada pela presença de um campo elétrico ambiente, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. A figura 5.5 mostra um pico instável com máximo para q_{\parallel} e q_{\perp} finitos, e também mostra uma instabilidade para $q_{\perp} \rightarrow 0$ que perdura para $q_{\perp} = 0$, com a mesma magnitude que aparece na figura 5.3. Visto que a inomogeneidade dos elétrons foi desprezada, essa instabilidade é causada pela existência da deriva dos íons e, portanto, é identificada como sendo a MTSI, e seu limite $q_{\perp} = 0$ identificado como sendo a IWI.

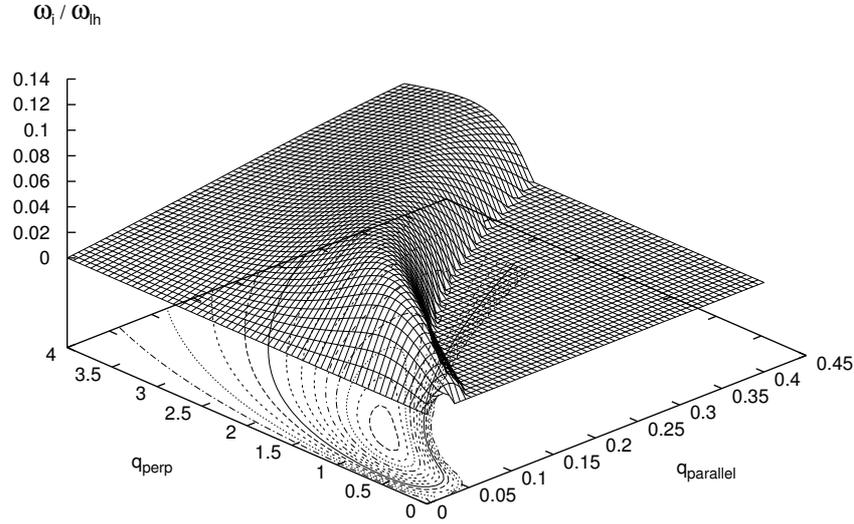


Fig. 5.5: Taxa de crescimento adimensional $\bar{\omega}_i$ (parte imaginária da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/|\Omega_e| = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, fazendo $q_n = q_B = 0$, ou seja, desprezando completamente os efeitos da inhomogeneidade dos elétrons [18].

As figuras 5.6 e 5.7 mostram dois casos em que os efeitos da inhomogeneidade dos elétrons são gradualmente levados em conta, mantendo o mesmo valor da deriva dos íons. A figura 5.6 mostra a taxa de crescimento obtida para o caso onde os valores de q_n e q_B são 20% dos seus valores utilizados no caso da figura 5.3. A figura 5.7 retrata o caso em que os valores de q_n e q_B são 50% dos seus valores utilizados para a obtenção da figura 5.3. A seqüência de figuras, figuras 5.5, 5.6, 5.7 e 5.3, mostra o incremento da taxa de crescimento da instabilidade para a região de $q_{\parallel} \rightarrow 0$, gerada pela gradativa inserção da inhomogeneidade dos elétrons. Para a região em que $q_{\parallel} = 0$, nota-se o surgimento acentuado de uma instabilidade, que pode ser identificada com a LHDI. Com relação à parte real para o caso das taxas de crescimento que aparecem nas figuras 5.6 e 5.7, praticamente não se observa diferença quando comparada ao resultado obtido na figura 5.4. Para a parte real correspondente às taxas de crescimento apresentadas na figura 5.5, o resultado difere

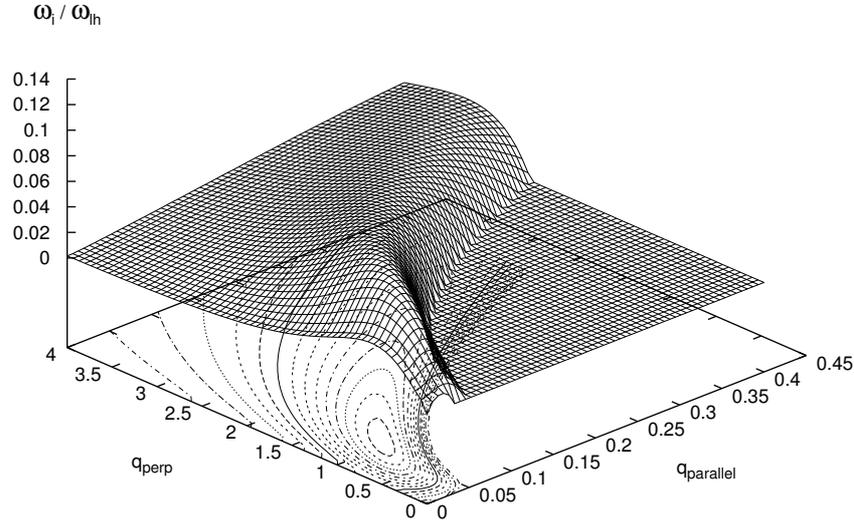


Fig. 5.6: Taxa de crescimento adimensional $\bar{\omega}_i$ (parte imaginária da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/|\Omega_e| = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, usando valores de q_n e q_B que são 20% dos seus valores usados na figura 5.3 [18].

levemente do apresentado na figura 5.4, com uma importante diferença em $q_{\parallel} = 0$, onde nota-se que a parte real da frequência é nula, como pode ser visto na figura 5.8, o que caracteriza a ausência total da LHDI.

Como complemento das informações presentes na figura 5.3, a IWI foi traçada em função de q_{\parallel} , no caso limite $q_{\perp} = 0$, estando o resultado apresentado na figura 5.9; a LHDI foi plotada em função de q_{\perp} , para $q_{\parallel} = 0$, com o resultado aparecendo na figura 5.10. Ambas instabilidades foram obtidas com os mesmos parâmetros utilizados na figura 5.3, incluindo os efeitos completos da inhomogeneidade dos elétrons. Nota-se na figura 5.9(b) que o pico máximo da taxa de crescimento da IWI ocorre para $\bar{\omega}_i \approx 0.012$ com $q_{\parallel} \approx 0.017$. A instabilidade se estende numa faixa de q_{\parallel} entre 0 e 0.033. Este resultado está em perfeita concordância com a figura 2 da referência [110], embora a comparação não seja direta em virtude da diferença de normalização. A parte real da IWI está representada na figura 5.9(a), onde nota-se que ela é nula, restando no gráfico apenas flutuações numéricas na

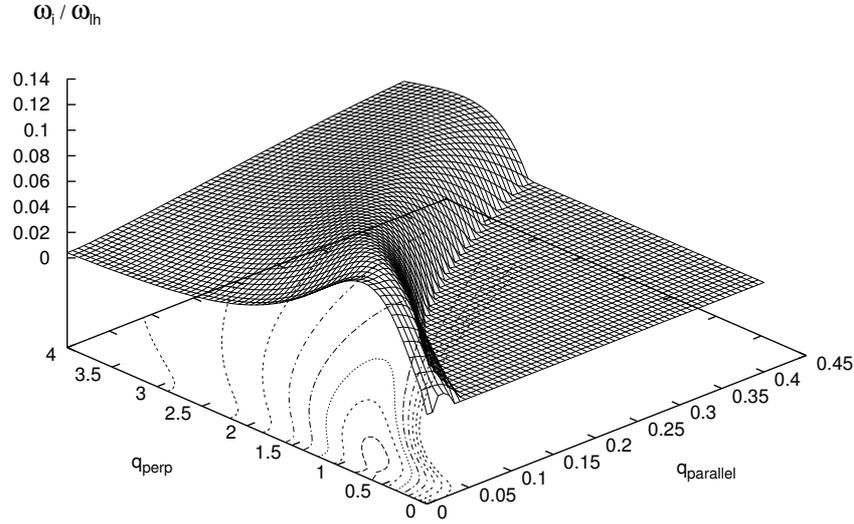


Fig. 5.7: Taxa de crescimento adimensional $\bar{\omega}_i$ (parte imaginária da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/|\Omega_e| = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, usando valores de q_n e q_B que são 50% dos seus valores usados na figura 5.3 [18].

ordem de 10^{-21} .

O resultado obtido para a taxa de crescimento da LHDI, representado na figura 5.10(b), mostra um pico em $\bar{\omega}_i \approx 0.12$ que ocorre para $q_{\perp} \approx 1$. Com o aumento de q_{\perp} , a taxa de crescimento tende a diminuir. Na figura 5.10(a) consta a parte real da LHDI, e nota-se um comportamento semelhante àquele da parte imaginária. O pico ocorre em $\bar{\omega}_r \approx 1$ para $q_{\perp} \approx 1.1$, e com o aumento de q_{\perp} a parte real decresce. O comportamento da LHDI encontrado aqui está perfeitamente de acordo com os resultados obtidos na figura 2 da referência [113], para $\beta_i = 5$, reproduzida na presente tese na figura 4.4.

É interessante notar que, se os termos que contém a derivada espacial dos componentes do tensor suscetibilidade χ_{ij} são desprezados na relação de dispersão (5.55), apenas a MTSI e a IWI são obtidas, mas a LHDI não é encontrada. Para analisar numericamente apenas os efeitos da não inclusão da derivada, basta fazer $\eta_{xj} \rightarrow 0$ na equação (5.56). O resultado para a taxa de crescimento da instabilidade para essa situação consta na figura 5.11, onde observa-

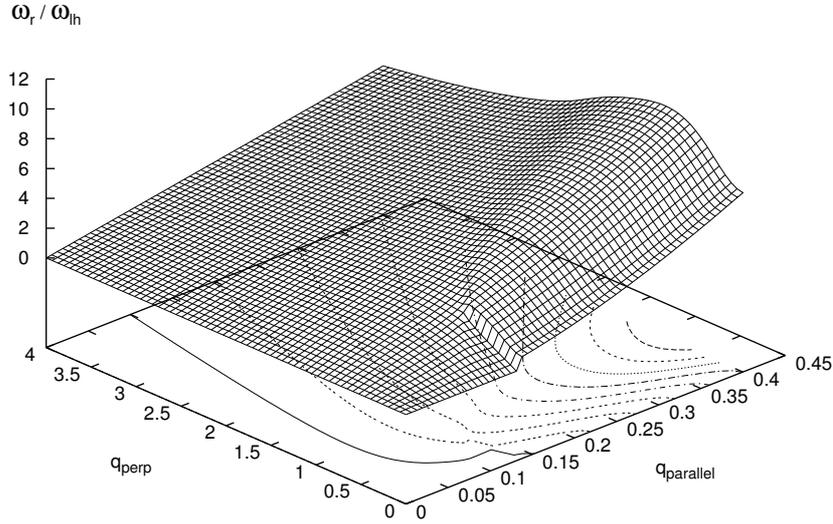


Fig. 5.8: Parte real da frequência adimensional $\bar{\omega}_r$ (parte real da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/|\Omega_e| = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, fazendo $q_n = q_B = 0$, ou seja, desprezando completamente os efeitos da inhomogeneidade dos elétrons.

se claramente que na prática o resultado é o mesmo que o obtido na figura 5.5, mostrando a ausência da LHDI se os efeitos da derivada forem desprezados. É interessante também observar que ao utilizar a relação de dispersão tradicional, expressa em (5.39), novamente apenas a MTSI e IWI são obtidas, com taxas de crescimento praticamente iguais às que aparecem nas figuras 5.5 ou 5.11, onde nota-se mais uma vez a ausência da LHDI. Assim, é visto que os termos com a derivada espacial de χ_{ij} na relação de dispersão (5.37) são essenciais para o surgimento da LHDI, e devem ser mantidos, visto que eles são da mesma ordem dos efeitos da inhomogeneidade levados em conta na derivação dos componentes do tensor dielétrico.

Em adição ao argumento sobre a importância dos termos com a derivada espacial de χ_{ij} , nós apontamos o que segue. É bem sabido que, embora a LHDI seja uma instabilidade inerentemente eletromagnética, ela tem, apesar disso, um forte componente eletrostático⁴.

⁴ Ver discussão no capítulo 4 da presente tese e na referência [113] e suas referências.

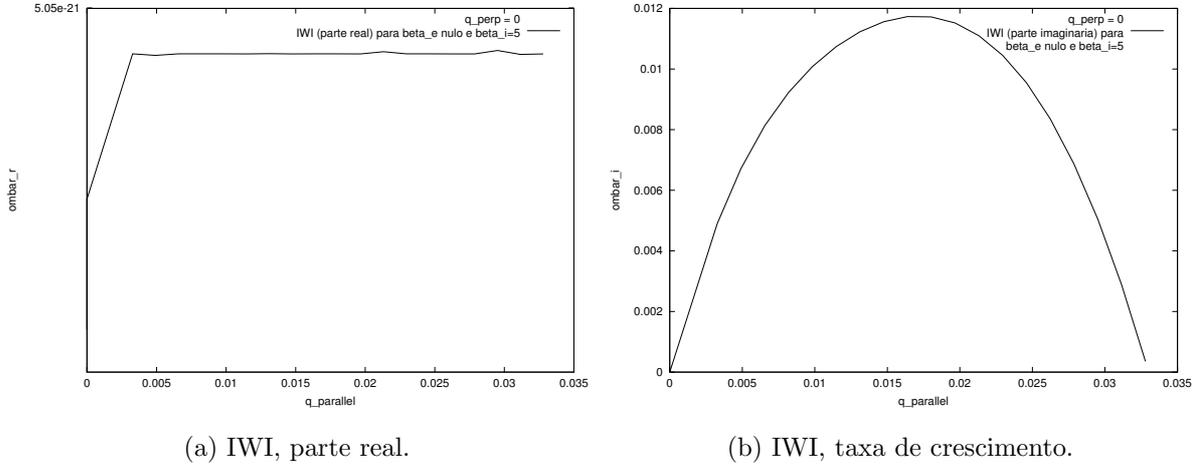


Fig. 5.9: IWI ($q_{\perp} = 0$) para os mesmos parâmetros utilizados na figura 5.3, incluindo os efeitos completos da inhomogeneidade dos elétrons.

É também bem conhecido que a inhomogeneidade dos elétrons joga um importante papel na geração da LHDI. Mas, se a LHDI for considerada puramente eletrostática, como primeira aproximação, e se a equação de Poisson for usada para a obtenção da relação de dispersão, a LHDI pode ser facilmente encontrada. Porém, a relação de dispersão obtida seria diferente do limite eletrostático da equação (5.39). Essa discrepância foi notada pelos autores da referência [113] que, seguindo os passos adotados previamente por outros autores, tentaram resolver este problema substituindo a segunda equação de (5.39), que foi baseada na lei de Ampère, pela lei de Gauss. Eles obtiveram a instabilidade LHDI, e notaram que sem adotar tal procedimento teriam obtido uma relação de dispersão (a tradicional obtida com o uso da lei de Ampère) que não descreve esta instabilidade, mas apenas a MTSI e a IWI. Outra dificuldade apresentada pelos autores da referência [113], foi que eles falharam em obter uma descrição local unificada para as instabilidades de deriva (*cross-field instabilities*) na faixa das onda híbridas inferiores, uma vez que eles obtiveram uma relação de dispersão para obter a LHDI e outra para a obtenção da MTSI e IWI. Tal dificuldade não ocorre na formulação desenvolvida na presente tese, a qual resultou na relação de dispersão dada por (5.55), desenvolvida com uma formulação consistente e unificada para instabilidades de deriva na faixa de frequência das onda híbridas inferiores.

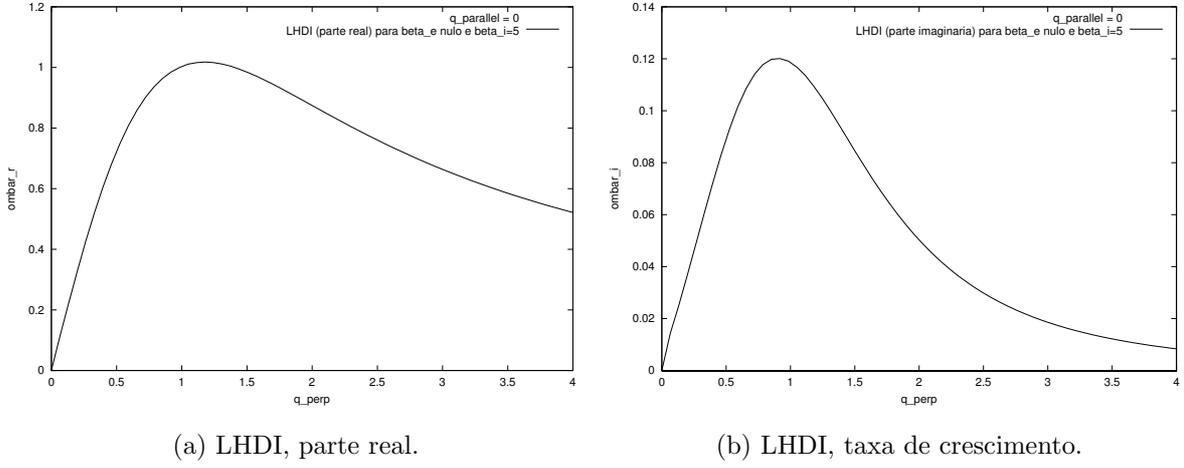


Fig. 5.10: LHDI ($q_{\parallel} = 0$) para os mesmos parâmetros utilizados na figura 5.3, incluindo os efeitos completos da inhomogeneidade dos elétrons.

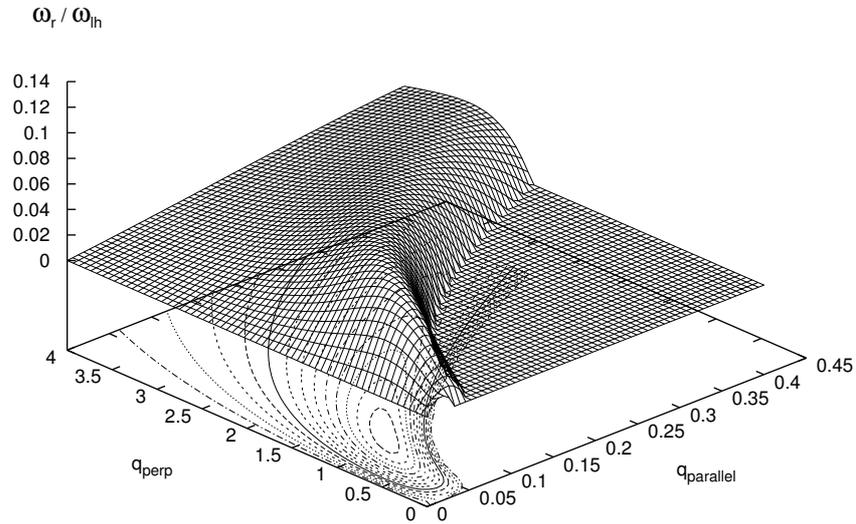


Fig. 5.11: Taxa de crescimento adimensional $\bar{\omega}_i$ (parte imaginária da frequência) em função das quantidades adimensionais q_{\parallel} e q_{\perp} para $\omega_{pe}/|\Omega_e| = 10$, $v_{Di}/v_i = 1$, $\beta_i = 5$ e $\beta_e = 0$, impondo $\eta_{xj} = 0$ na relação de dispersão, ou seja, sem os efeitos da derivada espacial do tensor suscetibilidade.

6. Sumário e Conclusões

Uma das áreas mais pesquisadas na física dos plasmas é a absorção e amplificação de ondas eletromagnéticas, seja em plasmas naturais ou plasmas de laboratório. Os primeiros estudos teóricos nesta área foram feitos em plasmas homogêneos, e não magnetizados. Logo os estudos foram estendidos à situação de equilíbrio com a presença de campo magnético ambiente também homogêneo. Muitos tipos de plasmas, com inúmeras configurações de parâmetros, foram pesquisados sob o contexto de diferentes abordagens, tais como a teoria de vários fluidos, a teoria da MHD e a teoria cinética. Nestes estudos, as características dos modos normais de propagação puderam ser avaliadas, prevendo, assim, os tipos de ondas que são estáveis ou instáveis, bem como suas taxas de absorção e amplificação, para um determinado tipo de plasma com determinada configuração. Em consequência, muitas instabilidades foram sendo descobertas e caracterizadas com o passar do tempo.

Em plasmas inhomogêneos em densidade e/ou temperatura (inhomogeneidades que afetam a função distribuição de equilíbrio das partículas) imersos em campo magnético ambiente também inhomogêneo, o estudo da absorção e amplificação de ondas se torna um tanto mais complexo quando comparado com uma situação de completa homogeneidade. Como consequência da existência de gradientes, podem ser alteradas características de algumas instabilidades já observadas em meios homogêneos, bem como surgem outras instabilidades, específicas de meios não homogêneos.

A presente tese teve como finalidade geral estudar a absorção e amplificação de ondas em plasmas com densidade fracamente inhomogênea imersos em um campo magnético ambiente apresentando também uma inhomogeneidade fraca, tendo como base teórica a teoria cinética sob o contexto da aproximação local.

Para uma melhor compreensão do conjunto total da tese, apresentamos no capítulo introdutório, de uma maneira sucinta, os aspectos da interação entre a onda e as partículas

do plasma, as diferenças entre os tratamentos de um plasma homogêneo e um plasma inhomogêneo, e os princípios fundamentais da teoria cinética.

Sabe-se que uma onda eletromagnética ao se propagar em um plasma interage com o mesmo gerando flutuações de corrente, que por sua vez interferem na onda propagante através de uma relação de troca de energia. Vimos que a inter-relação entre a corrente total no plasma $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ e os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ da onda propagante, é descrita teoricamente através das equações de Maxwell e da relação constitutiva entre a corrente e o campo elétrico. É a partir dessa relação constitutiva que as propriedades do meio são introduzidas no problema, com a definição do tensor condutividade $\vec{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$. Fazendo uso do teorema de Poynting, verificamos que é a parte anti-hermiteana do tensor dielétrico, definido a partir do tensor condutividade, a responsável pela efetiva troca de energia entre a onda e as partículas do plasma.

Verificamos ainda na introdução que a forma geral do tensor condutividade fica bastante simplificada para um plasma homogêneo e estacionário, em virtude da simplificação da sua dependência funcional espacial e temporal. Essa simplificação funcional implica que a transformada de Fourier espaço-temporal da equação da onda pode ser trivialmente realizada, uma vez que o teorema da convolução pode ser empregado na relação constitutiva existente entre a densidade de corrente e o campo elétrico. Mostramos que a transformada de Fourier da equação da onda pode ser trabalhada até chegar à chamada relação de dispersão. Tal relação é usada para a obtenção dos modos normais de propagação, incluindo as taxas de absorção e amplificação, que um plasma pode suportar, sem a necessidade da resolução da equação da onda na sua forma íntegro-diferencial. Para um plasma inhomogêneo, a dependência funcional espacial do tensor condutividade não pode ser simplificada e, em decorrência disso, o teorema da convolução não pode ser aplicado na relação constitutiva já citada. A consequência séria deste fato é que não é possível obter a transformada de Fourier da equação da onda e, em princípio, a relação de dispersão obtida para um plasma homogêneo não pode ser usada para um plasma inhomogêneo. No entanto, se o plasma for fracamente inhomogêneo, é possível supor, mesmo assim, uma dependência funcional semelhante à dependência funcional apresentada por um plasma homogêneo, tal como mostramos na presente tese. Mas, como vimos, essa simplificação na dependência funcional não conduz

a um tensor dielétrico que contenha as propriedades que acreditamos serem adequadas, requerendo uma correção introduzida pela hipótese das ondas terem um forma *eikonal*, e não mais uma forma de onda plana.

Três aproximações para tratar um plasma fracamente inomogêneo foram brevemente enfocadas: a aproximação WKB e as aproximações localmente homogênea e localmente inomogênea. A aproximação WKB não considera as ondas como sendo ondas planas, mas sim leva em conta a variação espacial das amplitudes das mesmas a partir de uma forma *eikonal* para os campos. A aproximação local considera o plasma como se fosse homogêneo ponto a ponto. A aproximação localmente homogênea não considera os efeitos dos gradientes, e a inomogeneidade é considerada apenas parametricamente. Já a localmente inomogênea introduz na relação de dispersão local efeitos de gradientes dos parâmetros do plasma ou do campo magnético, que comparecem através da relação constitutiva [26]. Em essência, essa aproximação faz uso da transformada de Fourier da relação constitutiva entre a corrente e o campo elétrico, tal como no caso homogêneo, mesmo que o teorema da convolução não possa ser empregado para um plasma inomogêneo. O tensor condutividade resultante deste procedimento não é, portanto, a transformada de Fourier do tensor condutividade do plasma. Como consequência direta dessa hipótese, a mesma relação de dispersão usada para um plasma homogêneo acaba também sendo empregada para um plasma inomogêneo, embora, como vimos, com um tensor dielétrico que não apresenta as propriedades de simetria de Onsager.

Finalizando o capítulo introdutório, inserimos os princípios básicos da teoria cinética. O sistema de equações Vlasov-Maxwell foi apresentado e as densidades de corrente e de carga foram expressas em termos da função distribuição do plasma. Supondo que as amplitudes dos campos e da função distribuição fora do equilíbrio são pequenas perturbações em torno de seus valores de equilíbrio, linearizamos o sistema Vlasov-Maxwell. O resultado foi o surgimento de dois sistemas de equações: um para a situação de equilíbrio e outro para os campos perturbados, que depende das características do equilíbrio do plasma. Vimos que a função distribuição perturbada pôde ser isolada, com o uso do método das características, e escrita em termos da função distribuição de equilíbrio. A partir dessa expressão para a distribuição perturbada, e com o uso da transformada de Fourier da relação constitutiva

entre a corrente e o campo elétrico, tal como é feito para plasmas homogêneos, mostramos que é possível obter a forma geral do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}{}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, que depende da função distribuição de equilíbrio e das órbitas não perturbadas das partículas. Como vimos, esse tensor, para um plasma inhomogêneo, não é a transformada de Fourier do tensor dielétrico do plasma e não apresenta as características requeridas para uma correta descrição da relação de troca de energia entre a onda e o plasma.

No segundo capítulo começamos apresentando a transformação BGI. Vimos que este é um método que tem como base a aproximação WKB e, portanto, considera a variação espacial das amplitudes dos campos. Beskin, Gurevich e Istomin [23], os autores desse método, mostraram que para um plasma inhomogêneo a parte anti-hermiteana que satisfaz corretamente a interação de troca de energia onda-partículas não é a do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}{}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, mas sim a parte anti-hermiteana do tensor dielétrico efetivo $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. No entanto, para chegar a esse último tensor é imprescindível a obtenção prévia do tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}{}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$. Os autores também mostraram que o tensor dielétrico efetivo apresenta a simetria de Onsager, além de ser a transformada de Fourier do tensor dielétrico do plasma. Vimos que o uso do método BGI permite que a mesma relação de dispersão obtida para um plasma homogêneo seja também empregada para um plasma inhomogêneo. No entanto, o tensor que deve ser usado nessa relação é o tensor dielétrico efetivo, em lugar do tensor dielétrico do meio homogêneo.

O segundo capítulo teve continuidade com uma revisão sobre a obtenção da forma geral do tensor dielétrico efetivo para plasmas fracamente inhomogêneos em densidade e/ou temperatura imersos em campo magnético ambiente homogêneo, com gradientes perpendiculares ao campo (Caldela *et al*, [27, 30, 31]). Vimos que para essa situação, e para um raio de Larmor das partículas bem menor que as distâncias típicas da inhomogeneidade, a função distribuição de equilíbrio pode ser aproximada levando-se em conta efeitos de até primeira ordem dos gradientes. Mostramos que as órbitas não perturbadas das partículas são razoavelmente simples de serem obtidas. Usando uma forma “fechada” para a função distribuição de equilíbrio, vimos que Caldela, depois de determinado o tensor $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}{}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$ e aplicada a transformação BGI no mesmo, obteve o tensor dielétrico efetivo. A discussão neste segundo capítulo prosseguiu com uma revisão sobre a situação em que o plasma é

homogêneo e imerso em um campo magnético ambiente fracamente inomogêneo, com gradiente de campo perpendicular à direção em que aponta o campo ambiente (Gaelzer *et al.*, [25, 36, 37]). Para esse caso, devido à não uniformidade do campo magnético ambiente, vimos que o cálculo das órbitas não perturbadas das partículas se complica enormemente. Vários passos intermediários foram necessários para que Gaelzer chegasse em uma forma aproximada definitiva para as órbitas. O tensor dielétrico efetivo encontrado por Gaelzer foi também escrito em termos da forma “fechada” da função distribuição de equilíbrio.

Finalizando o capítulo 2, as características fundamentais da transformação BGI foram ressaltadas:

- a variação espacial da amplitude dos campos foi levada em conta (via aproximação WKB);
- a relação de dispersão para um plasma homogêneo pode ser utilizada;
- a) o tensor dielétrico efetivo possui explicitamente os efeitos das inomogeneidades, b) é a transformada de Fourier do tensor dielétrico, c) satisfaz a simetria de Onsager, d) a parte anti-hermiteana apresenta somente termos ressonantes (descreve corretamente a troca de energia entre onda e partículas).

O terceiro capítulo foi destinado à unificação dos tratamentos para os dois tipos de inomogeneidades estudadas no capítulo 2. Tendo em vista esse fim, optamos por unificar o formalismo tendo como base a forma do tensor dielétrico efetivo obtida por Gaelzer. Assim sendo, o tensor dielétrico efetivo para um plasma inomogêneo imerso em um campo magnético ambiente homogêneo, obtido por Caldela, teve que ser adaptado a essa nova estrutura formal. Muitos passos intermediários realizados por Caldela foram retomados e encaminhados em outra direção, sempre tendo como referência a forma final do tensor obtido por Gaelzer. Vimos que o tensor $\overleftrightarrow{\epsilon}^0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \omega)$, para campo homogêneo, pôde ser reescrito em termos de vetores auxiliares, e a integral temporal foi recuperada. Após aplicada a transformação BGI nesse tensor, adquirimos a forma adequada para a unificação desejada. Mostramos que para inomogeneidades fracas, onde termos quadráticos da inomogeneidade possam ser desprezados, o tensor unificado possui dois termos que incluem em si, cada um independentemente, os efeitos da inomogeneidade da função distribuição (densidade e/ou temperatura) e da inomogeneidade de campo magnético ambiente.

A continuação do capítulo 3 foi no sentido de substituir no tensor dielétrico efetivo unificado a forma genérica da função distribuição por uma distribuição maxwelliana, isotrópica e com inhomogeneidade apenas em densidade. Definimos os tensores $\overleftrightarrow{\chi}_P$ e $\overleftrightarrow{\chi}_B$, que contém respectivamente os efeitos da inhomogeneidade da densidade e do campo ambiente. Vimos que todas as integrais em velocidade do tensor $\overleftrightarrow{\chi}_B$ já foram calculadas por Gaelzer, e a integral no tempo ficou indicada e definida como sendo a função de dispersão de plasma inhomogêneo. Já para o tensor $\overleftrightarrow{\chi}_P$ tivemos que calcular todas as integrais em velocidade, e as integrais temporais foram escritas em termos da função de Fried & Conte e suas derivadas. Para ambos tensores, em todas as integrais em velocidade foi usado o limite não relativístico. Depois de calculadas as integrais, apresentamos uma forma final para o tensor dielétrico efetivo unificado, que admite ângulos de propagação completamente arbitrários e inclui a contribuição de todos os harmônicos da frequência de cíclotron.

No capítulo 4 investigamos as características das instabilidades de deriva LHDI e MTSI (IWI). Iniciamos o capítulo mostrando que tanto o gradiente da densidade como o gradiente do campo magnético ambiente são situações físicas capazes de gerar velocidades de deriva. Tais derivas são chamadas respectivamente de deriva diamagnética e deriva de gradiente de B . Vimos que a existência de derivas pode gerar novos modos de propagação, chamados de modos de deriva. Estas ondas de deriva, para determinadas configurações de plasma, podem ser acopladas às ondas híbridas inferiores, gerando modos instáveis com frequências típicas das ondas híbridas inferiores, $\omega \simeq \sqrt{\Omega_i |\Omega_e|}$. Como exemplo desses novos modos estão as instabilidades LHDI e MTSI (IWI). As características gerais dessas instabilidades foram estudadas em um breve histórico. Vimos que a MTSI é gerada pela existência de uma velocidade de deriva relativa entre íons e elétrons, e pode existir mesmo para um plasma homogêneo. É uma instabilidade presente para propagação oblíqua e estabilizada para propagação estritamente perpendicular, e para grandes valores de β . A IWI é uma instabilidade correlacionada com a MTSI, cuja existência ocorre para propagação estritamente paralela ao campo magnético ambiente e somente quando os efeitos eletromagnéticos dos íons são considerados. É uma instabilidade não sensível a valores altos de β . A LHDI é uma instabilidade ocasionada pela inhomogeneidade dos elétrons e, portanto, não está presente em um plasma homogêneo. Vimos que a LHDI existe para propagação oblíqua e estritamente

perpendicular ao campo magnético ambiente, e que diversos estudos indicam que sua taxa de crescimento tende a ser estabilizada com o aumento de β .

Também nesse capítulo apresentamos o trabalho desenvolvido por Yoon *et al* [113], restringindo nossa análise apenas aos pontos relevantes para a presente tese. Notamos que em tal trabalho a contribuição eletrônica para o tensor suscetibilidade possui a simetria desejada (simetria de Onsager). Entretanto, os autores encontraram essa simetria usando a lei de Gauss para a obtenção dos componentes χ_{yj} e a lei de Ampère (procedimento tradicional) para os demais componentes, uma vez que a forma tradicional de obter todos os componentes χ_{ij} usando a lei de Ampère dava origem a um tensor sem a simetria correta. A relação de dispersão usada tinha a mesma forma que a relação válida para um plasma homogêneo. Os resultados encontrados no referido trabalho mostram a presença da LHDI e da MTSI. Entretanto, a IWI não foi encontrada. Portanto, o formalismo desenvolvido por Yoon *et al* não foi capaz de descrever a MTSI em sua forma completa, excluindo a possibilidade de descrição simultânea das instabilidades LHDI e MTSI (IWI).

Para finalizar o capítulo 4, colocamos uma seção exclusiva para esclarecer conceitos e termos referentes à magnetosfera terrestre.

O capítulo 5 foi destinado à aplicação do formalismo descrito nos três primeiros capítulos, para a descrição das instabilidades LHDI e MTSI (IWI). Começamos apresentando um modelo para a região de inomogeneidade, baseado teoricamente no equilíbrio de Harris aplicado a uma região da *neutral sheet*. Uma certa região desse equilíbrio foi aproximada por perfis lineares de inomogeneidades, tanto para a densidade quanto para o campo magnético ambiente. A distribuição de velocidades dos íons que foi usada é semelhante a uma Maxwelliana, com a diferença que existe uma deriva na direção do eixo y . Para os elétrons, a função distribuição utilizada foi uma Maxwelliana com densidade fracamente inomogênea. Restringimos o formalismo para ondas que se propagam em uma direção perpendicular aos gradientes da densidade e do campo, e com frequência próxima à frequência das ondas híbridas inferiores. Vimos que para essa ordem de frequência os íons podem ser tratados como se fossem não magnetizados. Para que os efeitos da inomogeneidade dos elétrons fossem separados dos efeitos da deriva dos íons, estes últimos foram considerados localmente homogêneos. Convém lembrar que a deriva dos íons aparece explicitamente na função dis-

tribuição de equilíbrio. Além disso, para essa situação em que o raio de Larmor dos íons é bem maior que as distâncias típicas das inomogeneidades, a aproximação WKB fica comprometida. Nesse caso, pode ser usado como tensor suscetibilidade para os íons o mesmo tensor utilizado por Yoon *et al* na referência [113]. Os elétrons, devido ao seu pequeno raio de Larmor, são fortemente magnetizados, e os efeitos dos gradientes de campo e de densidade foram considerados (aproximação localmente inomogênea). O tensor suscetibilidade usado para os elétrons foi o obtido no capítulo 3 da presente tese: $\overleftrightarrow{\chi}^e = \overleftrightarrow{\chi}_B + \overleftrightarrow{\chi}_P$.

Os tensores $\overleftrightarrow{\chi}_B$ e $\overleftrightarrow{\chi}_P$, depois de particularizados para se adequar à situação de interesse, foram escritos em termos da função de Fried & Conte e suas derivadas, cujas propriedades são amplamente conhecidas na literatura. Vimos que para um plasma inomogêneo é possível obter uma relação de dispersão que contém explicitamente os efeitos da variação espacial do tensor suscetibilidade. Foi necessário, portanto, calcular a derivada espacial do tensor suscetibilidade.

Os resultados numéricos que obtivemos foram restritos à temperatura eletrônica nula ($\beta_e = 0$), para os mesmos parâmetros usados na referência [113]. Calculamos analiticamente o limite $T_e \rightarrow 0$ para cada componente do tensor suscetibilidade dos elétrons e para as derivadas dos componentes do tensor suscetibilidade do plasma. Essas formas limites foram usadas na relação de dispersão que inclui a derivada dos componentes do tensor suscetibilidade. Obtivemos a solução da mesma exprimindo as partes real e imaginária da frequência normalizada $\bar{\omega}$ em função dos componentes paralelo (q_{\parallel}) e perpendicular (q_{\perp}) do vetor de onda normalizado (direção de propagação). Vários gráficos foram traçados, que permitiram analisar aspectos importantes do formalismo apresentado na presente tese. Mostramos as taxas de crescimento das instabilidades LHDI e MTSI (IWI), ressaltando as suas respectivas características.

As conclusões gerais obtidas da presente tese são as que seguem. Apresentamos um tensor dielétrico para ser utilizado na relação de dispersão para ondas eletromagnéticas se propagando em um plasma com parâmetros como densidade e temperatura fracamente inomogêneos, na presença de um campo magnético de equilíbrio também fracamente inomogêneo. Este novo desenvolvimento segue e unifica tratamentos previamente desenvolvidos para o caso de campo magnético inomogêneo com densidade e temperatura do plasma uniformes

[25, 36, 37], e para o caso no qual o campo magnético é homogêneo mas com densidade e/ou temperatura inomogêneas [22, 27, 30–32]. Seguindo os passos dos trabalhos citados, chegamos a um tensor dielétrico unificado, que foi apresentado na equação (3.81), chamado de tensor dielétrico efetivo, que possui características importantes: (a) satisfaz a simetria de Onsager, (b) é a transformada de Fourier do tensor dielétrico do plasma e (c) apresenta características adequadas para a correta descrição da interação de troca de energia entre a onda e as partículas. Todas essas características foram adquiridas naturalmente a partir de processos teóricos fortemente fundamentados. Por essas características, e principalmente pela forma sólida com que elas foram alcançadas, acreditamos que o tensor dielétrico efetivo desenvolvido na presente tese é bastante adequado para descrever os modos de propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas fracamente inomogêneos imersos em campo magnético ambiente também fracamente inomogêneo.

O tensor dielétrico efetivo obtido em (3.81) é exclusivo para uma situação onde os efeitos relativísticos sejam desprezíveis e o equilíbrio microscópico de velocidades seja descrito por distribuição maxwelliana. A partir dele é possível estudar vários tipos de ondas que se propagam em meios não uniformes com as características citadas acima. As características dessas ondas, bem como as suas taxas de crescimento e amplificação podem ser determinadas. Entretanto, o tensor dielétrico efetivo que obtivemos no capítulo 3, expresso em (3.32), é suficientemente geral para que possa ser empregado em situações mais complexas que a descrita acima. A forma genérica com que a função distribuição de equilíbrio é mostrada, permite o uso de distribuições de velocidades não necessariamente maxwellianas, que inclusive podem possuir temperaturas anisotrópicas. Para distribuições desse tipo e considerando efeitos relativísticos, os cálculos deverão ser refeitos de modo a incluir este novo cenário. Por exemplo, para uma função distribuição não relativística com temperatura anisotrópica, do tipo “cone de perda” [39], em que os efeitos fracamente relativísticos sejam considerados, o tensor \overleftrightarrow{Q}_B que deve ser empregado já foi obtido por Gaelzer *et al* em [25, 36]. No entanto, se quisermos incluir simultaneamente os efeitos de gradientes da função distribuição, devidos às inomogeneidades da densidade e/ou temperatura, que é o objetivo central da presente tese, o tensor \overleftrightarrow{Q}_P deve ser determinado usando-se a derivada da distribuição do tipo “cone de perda”. As integrais em velocidade devem ser calculadas e

a integral no tempo deve ser escrita, se possível, em termos de funções cujas propriedades são conhecidas.

O tensor suscetibilidade do elétrons usado para o estudo das instabilidades LHDI e MTSI (IWI), dado por (5.71), é a particularização do tensor (3.81) para ondas próximas à frequência das ondas híbridas inferiores. Portanto, nosso estudo destas instabilidades foi baseado em um tensor que possui a simetria desejada, e que possui a sua parte anti-hermiteana adequada para a correta descrição da troca de energia entre a onda e as partículas. Isso garante que a parte imaginária da frequência obtida como solução da relação de dispersão seja efetivamente gerada a partir de uma correta relação de troca de energia onda-partículas, e não originada de termos espúrios não ressonantes contidos na parte anti-hermiteana do tensor dielétrico.

O tratamento convencional para descrever a MTSI é normalmente realizado a partir de um plasma homogêneo, com uma deriva imposta na função distribuição de equilíbrio (por exemplo [48]). Na abordagem usual da teoria homogênea, a relação entre a densidade de corrente e o campo elétrico é utilizada na derivação do tensor dielétrico. Para a LHDI, para altos valores de β do plasma, por outro lado, é empregada uma formulação híbrida que utiliza a densidade de corrente e a densidade de carga perturbadas (por exemplo [44, 113]). Na formulação que apresentamos na presente tese, também utilizamos a relação entre as flutuações da densidade de corrente e densidade de carga, originada a partir da lei de Gauss, quando derivamos uma nova relação de dispersão. Essa nova relação de dispersão foi originada de uma manipulação consistente das equações de Maxwell, sem a imposição de nenhum procedimento *ad hoc*. Mostramos que o uso da lei de Gauss introduz termos com a derivada espacial do tensor suscetibilidade, que possuem a mesma ordem dos termos que contém os efeitos das inomogeneidades, originados na derivação do tensor dielétrico efetivo. Mostramos que esses novos termos, originados do uso da lei de Gauss, são essenciais para uma relação de dispersão mais aprimorada para um meio inomogêneo. Além disso, vimos que a LHDI não é encontrada como solução da relação de dispersão se tais termos são desconsiderados. Isso estaria em contraste com estudos de simulações na faixa das ondas híbridas inferiores, que têm apresentado instabilidades que são comumente identificadas como sendo a LHDI [92], e também estaria em contraste com análises não locais de um

equilíbrio inhomogêneo, onde soluções instáveis têm sido muitas vezes consideradas como sendo a LHDI [67, 75, 80].

A conclusão é que o presente formalismo, derivado de uma formulação consistente, é capaz de descrever acuradamente as instabilidades na faixa das ondas híbridas inferiores, incluindo a LHDI e a MTSI (IWI), para um plasma fracamente inhomogêneo tratado na aproximação local. Portanto, apresentamos uma formulação unificada para o tratamento de instabilidades na faixa das ondas híbridas inferiores, ainda não disponível na literatura.

Uma extensão direta do trabalho aqui apresentado, além das já citadas com relação a possíveis aplicações de outras funções distribuição, seria a obtenção de resultados numéricos para temperatura eletrônica finita, no estudo das instabilidades LHDI e MTSI (IWI). Isso requer uma elaboração de rotinas computacionais bem mais complexas do que as utilizadas no caso de temperatura eletrônica nula, devido à complexidade das expressões completas dos componentes do tensor suscetibilidade dos elétrons.

O estudo das instabilidades LHDI e MTSI (IWI) foi restrito para propagação de onda estritamente perpendicular aos gradientes de densidade e campo magnético ambiente. No entanto, o tensor dielétrico obtido no capítulo 3 e a própria relação de dispersão obtida no capítulo 5, foram desenvolvidos para propagação de onda completamente arbitrária, de modo que podemos fazer um estudo das instabilidades LHDI e MTSI (IWI), usando o formalismo da presente tese, para qualquer ângulo de propagação de onda com relação aos gradientes. Na prática, isso se daria fazendo $\psi \neq \pi/2$ e $\omega \simeq \sqrt{\Omega_i|\Omega_e|}$ no tensor dielétrico efetivo expresso na equação (3.81).

A nova relação de dispersão para propagação de ondas eletromagnéticas derivada aqui, pela sua própria construção, não restringe o tensor dielétrico que nela pode ser usado. Além disso, o tipo de onda e a direção de propagação é totalmente arbitrário. Isso sugere a investigação sobre o uso dessa relação de dispersão em outras situações envolvendo plasmas não uniformes, não restritos às ondas na faixa de frequência das ondas híbridas inferiores, e para direção arbitrária de propagação da onda.

Apêndice

A. Algumas integrais úteis para o cálculo do tensor $\overleftrightarrow{\chi}_P$

A.1 Integrais envolvendo funções de Bessel

Função de Bessel $J_n(x)$ (a ' indica derivada com relação ao argumento 'x')

$$\int_0^\infty dx x e^{-\mu^2 x^2} J_n(\alpha x) J_n(\beta x) = \frac{1}{2\mu^2} e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\mu^2}} I_n\left(\frac{\alpha\beta}{2\mu^2}\right)$$

$$\int_0^\infty dx x^3 e^{-\mu^2 x^2} J_n(\alpha x) J_n(\beta x) = \frac{1}{2\mu^4} e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\mu^2}} \left[\left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\mu^2}\right) I_n\left(\frac{\alpha\beta}{2\mu^2}\right) + \frac{\alpha\beta}{2\mu^2} I_n'\left(\frac{\alpha\beta}{2\mu^2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx x^5 e^{-\mu^2 x^2} J_n(2\alpha x) &= \frac{1}{\mu^6} e^{-\frac{2\alpha^2}{\mu^2}} \left[I_n\left(\frac{2\alpha^2}{\mu^2}\right) - \frac{4\alpha^2}{\mu^2} \left[I_n\left(\frac{2\alpha^2}{\mu^2}\right) - I_n'\left(\frac{2\alpha^2}{\mu^2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\alpha^4}{\mu^4} \left[I_n\left(\frac{2\alpha^2}{\mu^2}\right) - 2I_n'\left(\frac{2\alpha^2}{\mu^2}\right) + I_n''\left(\frac{2\alpha^2}{\mu^2}\right) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty dx x^2 e^{-\mu^2 x^2} J_n'(\alpha x) J_n(\beta x) = -\frac{1}{4\mu^4} e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\mu^2}} \left[\alpha I_n\left(\frac{\alpha\beta}{2\mu^2}\right) - \beta I_n'\left(\frac{\alpha\beta}{2\mu^2}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx x^3 e^{-\mu^2 x^2} J_n'(\alpha x) J_n'(\beta x) &= -\frac{1}{8\mu^6} e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\mu^2}} \left[-\alpha\beta \left[I_n\left(\frac{\alpha\beta}{2\mu^2}\right) + I_n''\left(\frac{\alpha\beta}{2\mu^2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2\mu^2 I_n'\left(\frac{\alpha\beta}{2\mu^2}\right) + (\alpha^2 + \beta^2) I_n'\left(\frac{\alpha\beta}{2\mu^2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx x^3 e^{-\mu^2 x^2} [J_n'(\alpha x)]^2 &= \frac{1}{4\mu^4} e^{-\frac{\alpha^2}{2\mu^2}} \left[n^2 \frac{2\mu^2}{\alpha^2} I_n\left(\frac{\alpha^2}{2\mu^2}\right) + \frac{\alpha^2}{\mu^2} \left[I_n\left(\frac{\alpha^2}{2\mu^2}\right) - I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2\mu^2}\right) \right] \right] \\ &= \frac{1}{4\mu^4} e^{-\frac{\alpha^2}{2\mu^2}} \left[I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2\mu^2}\right) + \frac{\alpha^2}{2\mu^2} \left[I_n\left(\frac{\alpha^2}{2\mu^2}\right) - 2I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2\mu^2}\right) + I_n''\left(\frac{\alpha^2}{2\mu^2}\right) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty dx x^4 e^{-\mu^2 x^2} J_n(\alpha x) J'_n(\alpha x) = \frac{\alpha}{2\mu^6} e^{-\frac{\alpha^2}{2\mu^2}} \left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{2\mu^2}\right) \left[I'_n\left(\frac{\alpha^2}{2\mu^2}\right) - I_n\left(\frac{\alpha^2}{2\mu^2}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{2\mu^2}{\alpha^2} n^2 I_n\left(\frac{\alpha^2}{2\mu^2}\right) - I'_n\left(\frac{\alpha^2}{2\mu^2}\right) \right] \right]$$

A.2 Integrais úteis

$$e^{-x} I_n(x) \equiv \mathcal{H}_n(x)$$

$$\mathcal{I}_1 = \int d^3 u e^{-ick_{\parallel} u_{\parallel} \tau} e^{-\mu_{\alpha} u^2/2} J_n^2 = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_{\alpha}^{3/2}} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_{\alpha})}$$

$$\mathcal{I}_2 = \int d^3 u e^{-ick_{\parallel} u_{\parallel} \tau} e^{-\mu_{\alpha} u^2/2} u_{\perp}^2 J_n^2 = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_{\alpha}^{5/2}} \left[\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - 2\nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_{\alpha})}$$

$$\mathcal{I}_3 = \int d^3 u e^{-ick_{\parallel} u_{\parallel} \tau} e^{-\mu_{\alpha} u^2/2} u_{\perp} J_n J'_n = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_{\alpha}^{5/2}} \frac{ck_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_{\alpha})}$$

$$\mathcal{I}_4 = \int d^3 u e^{-ick_{\parallel} u_{\parallel} \tau} e^{-\mu_{\alpha} u^2/2} u_{\parallel} J_n^2 = -i \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_{\alpha}^{3/2}} \frac{ck_{\parallel} \tau}{\mu_{\alpha}} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_{\alpha})}$$

$$\mathcal{I}_5 = \int d^3 u e^{-ick_{\parallel} u_{\parallel} \tau} e^{-\mu_{\alpha} u^2/2} u_{\parallel} u_{\perp} J_n J'_n = -i \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_{\alpha}^{5/2}} \frac{c^2 k_{\parallel} k_{\perp} \tau}{\mu_{\alpha} \Omega_{\alpha}} \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_{\alpha})}$$

$$\mathcal{I}_6 = \int d^3 u e^{-ick_{\parallel} u_{\parallel} \tau} e^{-\mu_{\alpha} u^2/2} u_{\parallel}^2 J_n^2 = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_{\alpha}^{3/2}} \frac{1}{\mu_{\alpha}} \left[1 - \frac{c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2}{\mu_{\alpha}} \right] \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_{\alpha})}$$

$$\mathcal{I}_7 = \int d^3 u e^{-ick_{\parallel} u_{\parallel} \tau} e^{-\mu_{\alpha} u^2/2} u_{\perp}^2 J_n^2 = 2 \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_{\alpha}^{5/2}} \left[\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_{\alpha})}$$

$$\mathcal{I}_8 = \int d^3 u e^{-ick_{\parallel} u_{\parallel} \tau} e^{-\mu_{\alpha} u^2/2} u_{\perp}^3 J_n J'_n =$$

$$2 \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_{\alpha}^{7/2}} \frac{ck_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \left\{ (1 - 2\nu_{\alpha}^2) \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) + \left(\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} - 1 \right) \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) \right\} e^{-c^2 k_{\parallel}^2 \tau^2 / (2\mu_{\alpha})}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_9 = \int d^3u e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} u_{\perp}^2 e^{-\mu_{\alpha}u^2/2} u_{\parallel} J_n^2 = \\ -i 2 \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_{\alpha}^{5/2}} \frac{ck_{\parallel}\tau}{\mu_{\alpha}} [\mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) + \nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2)] e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{10} = \int d^3u e^{-ick_{\parallel}u_{\parallel}\tau} u_{\parallel} u_{\perp}^2 J_n^2 e^{-\mu_{\alpha}u^2/2} = \\ -i \frac{(2\pi)^{3/2}}{\mu_{\alpha}^{5/2}} \frac{ck_{\parallel}\tau}{\mu_{\alpha}} \times \left[\frac{n^2}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_n(\nu_{\alpha}^2) - 2\nu_{\alpha}^2 \mathcal{H}'_n(\nu_{\alpha}^2) \right] e^{-c^2k_{\parallel}^2\tau^2/(2\mu_{\alpha})} \\ \int_0^{\infty} du u^{2n+1} e^{-u^2} = \frac{n!}{2} \end{aligned}$$

B. A função $\mathcal{G}_{r,p,m,l}$ em termos da função de Fried & Conte

A função de dispersão de plasma inhomogêneo, para uma distribuição maxwelliana isotrópica e não relativística, é dada pela equação (3.53). Essa função desempenha um papel muito importante na presente tese, de modo que é conveniente fazer uma revisão, mesmo que sucinta, a respeito de suas relações com outras funções bem conhecidas. Para tanto, faremos uso de relações originalmente obtidas por Rudi Gaelzer, conforme comunicação privada.

Para ondas se propagando perpendicularmente aos gradientes do campo magnético ambiente e da densidade ($\psi = \pi/2$), a equação (3.53) pode ser escrita do seguinte modo

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l} = -i \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{i\hat{z}_n t} e^{-\beta t^2}}{(1+i\eta_\alpha t)^p} e^{-(\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2)/(1+i\eta_\alpha t)} \times \frac{[\nu_\alpha^2 - i2S_n \nu_\alpha \chi_{n\alpha} t - \chi_{n\alpha}^2 t^2]^m}{[\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2]^l} I_l \left(\frac{\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2}{1+i\eta_\alpha t} \right), \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\begin{aligned} H_{n\alpha}(t) &= \nu_\alpha^2 - i2S_n \nu_\alpha \chi_{n\alpha} t - \chi_{n\alpha}^2 t^2, \quad S_{n\alpha}(t) = \sqrt{\nu_\alpha^4 + 2\nu_\alpha^2 \chi_{n\alpha}^2 t^2 + \chi_{n\alpha}^4 t^4} = \nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2, \\ \eta_\alpha &= N_B N_\perp / Y_\alpha, \quad \hat{z}_n \equiv z = \mu_\alpha \delta_{n\alpha}, \quad \delta_{n\alpha} = 1 - nY_\alpha(1 + \epsilon_B x), \\ \chi_{n\alpha} &= \mu_\alpha^{1/2} \rho_n, \quad \rho_n = \frac{nN_B}{2}, \end{aligned}$$

com as demais quantidades, que não dependem de ψ e nem de n , podendo ser encontradas em (3.52).

B.1 Função \mathcal{G} para o harmônico $n = 0$

Para $n = 0$, a quantidade $\chi_{n\alpha}$ se anula, o que permite que a equação (B.1) possa ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{n=0} = -i\nu_\alpha^{2(m-l)} \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{i\hat{z}_0 t} e^{-\beta t^2}}{(1+i\eta_\alpha t)^p} \mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_\alpha}{1+i\eta_\alpha t} \right), \quad (\text{B.2})$$

onde foi usada a definição $e^{-x} I_l(x) \equiv \mathcal{H}_l(x)$ e $z \rightarrow z_{n=0} \equiv \hat{z}_0 = \mu_\alpha \delta_{0\alpha}$. Nesse momento, é útil usar a equação (69) da referência [122], abaixo reproduzida,

$$e^{-\Lambda} I_s(\Lambda) = 2 \int_0^\infty du u e^{-u^2(1-it)} J_s^2 [(2\lambda)^{1/2} u] (1-it), \quad (\text{B.3})$$

onde $\Lambda = \lambda/(1-it)$ e $s > -1$. Com adequadas substituições de variáveis, é possível reescrever a função \mathcal{H}_l usando a igualdade (B.3) e, após, inserida em (B.2), resulta na expressão

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{n=0} = -2i\nu_\alpha^{2(m-l)} \int_0^\infty du u e^{-u^2} J_l^2(\sqrt{2}\nu_\alpha u) \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{i(\mu_\alpha - \eta_\alpha u^2)t}}{(1+i\eta_\alpha t)^{p-1}} e^{-\beta t^2}. \quad (\text{B.4})$$

Após a substituição de variável

$$\beta t^2 = \frac{1}{4}\tau^2, \quad \text{onde } \beta = \frac{\mu_\alpha N_\parallel^2}{2} \Rightarrow t = \frac{\tau}{\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel}},$$

e um pequeno algebrismo, a equação (B.4) pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l}^{n=0} = -\frac{2i\nu_\alpha^{2(m-l)}}{(\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel})^{(r+1)}} \int_0^\infty du u e^{-u^2} J_l^2(\sqrt{2}\nu_\alpha u) \int_0^\infty d\tau \frac{(i\tau)^r e^{i\left(\frac{\mu_\alpha \delta_{0\alpha} - \eta_\alpha u^2}{\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel}}\right)\tau} e^{-\frac{1}{4}\tau^2}}{\left(1 + \frac{i\eta_\alpha \tau}{\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel}}\right)^{p-1}}. \quad (\text{B.5})$$

Utilizando a identidade

$$\frac{1}{(1+i\zeta\tau)^n} = \frac{2}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dy y^{2n-1} e^{-(1+i\zeta\tau)y^2}, \quad \text{válida para } n \geq 1, \quad (\text{B.6})$$

é possível reescrever o denominador do integrando em τ de (B.5), com a restrição imposta

pela identidade acima, tal que $p \geq 2$. Assim,

$$\mathcal{G}_{r,p \geq 2,m,l}^{n=0} = -\frac{4i\nu_\alpha^{2(m-l)}}{(\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel})^{(r+1)}\Gamma(p-1)} \int_0^\infty dy \int_0^\infty du u y^{2p-3} e^{-(u^2+y^2)} J_l^2(\sqrt{2}\nu_\alpha u) \\ \times \int_0^\infty d\tau (i\tau)^r e^{i\left[\frac{\mu_\alpha \delta_{0\alpha} - \eta_\alpha (u^2+y^2)}{\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel}}\right]\tau} e^{-\frac{1}{4}\tau^2}. \quad (\text{B.7})$$

Pela restrição imposta pelo parâmetro p , o desenvolvimento que segue é válido apenas para $p \geq 2$. Para $p = 1$, nota-se da equação (B.5) que a integração fica bem menos complicada, devido ao denominador tornar-se 1.

Agora, mais uma substituição de variáveis será feita. É conveniente substituir as variáveis u e y por coordenadas polares, de maneira que

$$\begin{aligned} u &\equiv \hat{r} \cos \theta \\ y &\equiv \hat{r} \sin \theta \end{aligned} ; \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \hat{r} \leq \infty \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{array} \right. ; dudy = \hat{r} d\hat{r} d\theta.$$

Os limites de integração decorrem do fato que as variáveis u e y são sempre positivas. As integrais de (B.7) em termos de \hat{r} e θ , ficam

$$\int_0^\infty d\hat{r} \hat{r}^{2p-1} e^{-\hat{r}^2} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos \theta (\sin \theta)^{2p-3} J_l^2(\sqrt{2}\nu_\alpha \hat{r} \cos \theta) \int_0^\infty d\tau (i\tau)^r e^{i\left[\frac{\mu_\alpha \delta_{0\alpha} - \eta_\alpha \hat{r}^2}{\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel}}\right]\tau} e^{-\frac{1}{4}\tau^2}. \quad (\text{B.8})$$

Fazendo $\cos \theta \equiv v \Rightarrow d\theta = -dv/\sin \theta$, com $1 \geq v \geq 0$, e comparando com a função de Fried & Conte, expressa em (3.72), e suas derivadas, dadas por (3.73), chega-se na forma desejada da função \mathcal{G} , para $p \geq 2$:

$$\mathcal{G}_{r,p \geq 2,m,l}^{n=0} = -\frac{4\nu_\alpha^{2(m-l)}}{(\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel})^{(r+1)}\Gamma(p-1)} \int_0^\infty d\hat{r} \hat{r}^{2p-1} e^{-\hat{r}^2} Z^{(r)}\left(\frac{\mu_\alpha \delta_{0\alpha} - \eta_\alpha \hat{r}^2}{\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel}}\right) \\ \times \int_0^1 dv v (1-v^2)^{p-2} J_l^2(\sqrt{2}\nu_\alpha \hat{r} v). \quad (\text{B.9})$$

A equação acima fornece uma forma geral da função de dispersão de plasma inhomogêneo, para $p \geq 2$. No entanto, como pode ser visto no capítulo 5 da presente tese, os valores de p necessários são $p = 1, 2, 3$. Como exemplo, será desenvolvido abaixo o cálculo para a obtenção da função de dispersão de plasma inhomogêneo para $p = 2$. Para $p = 1$ e $p = 3$

serão mostrados apenas os resultados.

Desenvolvimento para $p = 2$

Para $p = 2$, o fator $(1 - v^2)$ do integrando da integral em v , de (B.9), torna-se 1. Isso facilita o cálculo desta integral, que pode ser resolvida com a ajuda da identidade

$$\int x J_l^2(\alpha x) dx = \frac{x^2}{2} [J_l^2(\alpha x) - J_{l-1}(\alpha x)J_{l+1}(\alpha x)] .$$

Aplicando os limites de integração $0 \leq v \leq 1$, e usando a igualdade

$$J_{l-1}(\alpha)J_{l+1}(\alpha) = \frac{n^2}{\alpha^2} J_l^2(\alpha) - J_l'^2(\alpha) ,$$

obtida a partir de relações de recorrências da função de Bessel, chega-se ao resultado da integral em v , escrito abaixo

$$\int_0^1 dv v J_l^2(\sqrt{2}\nu_\alpha \hat{r} v) = \frac{1}{4\nu_\alpha^2 \hat{r}^2} \left[(2\nu_\alpha^2 \hat{r}^2 - l^2) J_l^2(\sqrt{2}\nu_\alpha \hat{r}) + 2\nu_\alpha^2 \hat{r}^2 J_l'^2(\sqrt{2}\nu_\alpha \hat{r}) \right] . \quad (\text{B.10})$$

Substituindo (B.10) em (B.9), para $p = 2$, e lembrando que $\Gamma(1) = 1$, obtém-se a forma final para a função de dispersão de plasma inhomogêneo para $p = 2$:

$$\mathcal{G}_{r,2,m,l}^{n=0} = -\frac{\nu_\alpha^{2(m-l-1)}}{(\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel})^{(r+1)}} \int_0^\infty d\hat{r} \hat{r} e^{-\hat{r}^2} Z(r) \left(\frac{\mu_\alpha \delta_{0\alpha} - \eta_\alpha \hat{r}^2}{\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel}} \right) \times \left[(2\nu_\alpha^2 \hat{r}^2 - l^2) J_l^2(\sqrt{2}\nu_\alpha \hat{r}) + 2\nu_\alpha^2 \hat{r}^2 J_l'^2(\sqrt{2}\nu_\alpha \hat{r}) \right] . \quad (\text{B.11})$$

Para $p = 3$, a integral em v fica bastante mais complicada que a integral resultante no caso de $p = 2$. O fator $(1 - v^2)$ presente no integrando, conduzirá a duas integrais, uma a já apresentada em (B.10), e outra contendo um fator v^3 . Esta última é bastante trabalhosa de ser resolvida, no entanto, com aplicações de noções básicas de cálculo, várias relações de recorrência da função de Bessel, e muita álgebra, é possível resolvê-la. Depois dessa

laboriosa tarefa, chega-se ao seguinte resultado para $p = 3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,3,m,l}^{n=0} = & -\frac{\nu_\alpha^{2(m-l-2)}}{3(\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel})^{(r+1)}} \int_0^\infty d\hat{r} \hat{r} e^{-\hat{r}^2} Z^{(r)} \left(\frac{\mu_\alpha \delta_{0\alpha} - \eta_\alpha \hat{r}^2}{\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel}} \right) \\ & \times \left\{ (2\nu_\alpha^2 \hat{r}^2 - l^2) \left[(2\nu_\alpha^2 \hat{r}^2 - l^2) J_l^2(\sqrt{2\nu_\alpha} \hat{r}) + 2\nu_\alpha^2 \hat{r}^2 J_l'^2(\sqrt{2\nu_\alpha} \hat{r}) \right] \right. \\ & \left. \times 2\sqrt{2} \hat{r}^3 \nu_\alpha^3 J_l(\sqrt{2\nu_\alpha} \hat{r}) J_l'(\sqrt{2\nu_\alpha} \hat{r}) - l^2 J_l^2(\sqrt{2\nu_\alpha} \hat{r}) + 2\hat{r}^2 \nu_\alpha^2 J_l'^2(\sqrt{2\nu_\alpha} \hat{r}) \right\}. \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

Para $p = 1$, a forma da função de dispersão de plasma inhomogêneo é trivialmente obtida. Fazendo $p = 1$ na equação (B.5), o denominador do integrando da integral em τ torna-se 1, o que simplifica em muito o trabalho. Na realidade, para $p = 1$ a integral em τ pode ser facilmente identificada com a função de Fried & Conte, e a função de dispersão de plasma inhomogêneo fica na forma

$$\mathcal{G}_{r,1,m,l}^{n=0} = -\frac{2\nu_\alpha^{2(m-l)}}{(\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel})^{(r+1)}} \int_0^\infty d\hat{r} \hat{r} e^{-\hat{r}^2} J_l^2(\sqrt{2\nu_\alpha} \hat{r}) Z^{(r)} \left(\frac{\mu_\alpha \delta_{0\alpha} - \eta_\alpha \hat{r}^2}{\sqrt{2\mu_\alpha N_\parallel}} \right). \quad (\text{B.13})$$

B.2 Função \mathcal{G} para os harmônicos $n \neq 0$

Para $n \neq 0$ a equação (B.1) pode ser reescrita como segue

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,p,m,l} = & -i \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{i\hat{z}_n t} e^{-\beta t^2}}{(1 + i\eta_\alpha t)^p} [\nu_\alpha^2 - i2S_n \nu_\alpha \chi_{n\alpha} t - \chi_{n\alpha}^2 t^2]^m \\ & \times \frac{1}{[\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2]^l} \mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2}{1 + i\eta_\alpha t} \right), \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

com $z \rightarrow \hat{z}_n$. Para inhomogeneidade fraca, a quantidade $\chi_{n\alpha}^2 t^2$ é pequena, visto que a integral converge rapidamente com o incremento de t . Portanto, é possível expandir em série de Taylor o produto que consta na segunda linha de (B.14). O resultado dessa expansão em torno da quantidade $\chi_{n\alpha}^2 t^2 \approx 0$, mantida até a ordem $(\chi_{n\alpha}^2 t^2)^1$, é dada por

$$\frac{1}{[\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2]^l} \mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_\alpha^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2}{1 + i\eta_\alpha t} \right) \approx \frac{1}{\nu_\alpha^{2l}} \left[\mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_\alpha^2}{1 + i\eta_\alpha t} \right) + B_{\alpha l} \chi_{n\alpha}^2 t^2 \right], \quad (\text{B.15})$$

onde

$$B_{\alpha l} \equiv \frac{1}{1 + i\eta_{\alpha}t} \mathcal{H}_l' \left(\frac{\nu_{\alpha}^2}{1 + i\eta_{\alpha}t} \right) - \frac{l}{\nu_{\alpha}^2} \mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_{\alpha}^2}{1 + i\eta_{\alpha}t} \right) .$$

Agora desprezando os efeitos quadráticos da inomogeneidade, $\chi_{n\alpha}^2 \rightarrow 0$, a quantidade apresentada na equação (B.15) será definitivamente aproximada por

$$\frac{1}{[\nu_{\alpha}^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2]^l} \mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_{\alpha}^2 + \chi_{n\alpha}^2 t^2}{1 + i\eta_{\alpha}t} \right) \approx \frac{1}{\nu_{\alpha}^{2l}} \mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_{\alpha}^2}{1 + i\eta_{\alpha}t} \right) . \quad (\text{B.16})$$

Da mesma forma, o fator elevado à potência m do integrando de (B.14) pode ser escrito como segue:

$$[\nu_{\alpha}^2 - i2S_n \nu_{\alpha} \chi_{n\alpha} t - \chi_{n\alpha}^2 t^2]^m \approx [\nu_{\alpha}^2 - i2S_n \nu_{\alpha} \chi_{n\alpha} t]^m = \nu_{\alpha}^{2m} \left(1 - \frac{i2S_n \chi_{n\alpha} t}{\nu_{\alpha}} \right)^m .$$

Este fator pode ser expandido em uma série binomial e, desprezando-se termos da ordem de $\chi_{n\alpha}^2$ ou superiores, resulta

$$[\nu_{\alpha}^2 - i2S_n \nu_{\alpha} \chi_{n\alpha} t - \chi_{n\alpha}^2 t^2]^m \approx \nu_{\alpha}^{2m} \left(1 - \frac{i2S_n \nu_{\alpha} \chi_{n\alpha} t}{\nu_{\alpha}} \right)^m \approx \nu_{\alpha}^{2m} \left(1 - \frac{2imS_n \chi_{n\alpha} t}{\nu_{\alpha}} \right) . \quad (\text{B.17})$$

Substituindo (B.16) e (B.17) em (B.14), obtém-se

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l} = -i\nu_{\alpha}^{2(m-l)} \int_0^{\infty} dt \frac{(it)^r e^{i\hat{z}_n t} e^{-\beta t^2}}{(1 + i\eta_{\alpha}t)^p} \left(1 - \frac{2imS_n \chi_{n\alpha} t}{\nu_{\alpha}} \right) \mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_{\alpha}^2}{1 + i\eta_{\alpha}t} \right) ,$$

que equivale a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{r,p,m,l} = & -i\nu_{\alpha}^{2(m-l)} \int_0^{\infty} dt \frac{(it)^r e^{i\hat{z}_n t} e^{-\beta t^2}}{(1 + i\eta_{\alpha}t)^p} \mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_{\alpha}^2}{1 + i\eta_{\alpha}t} \right) \\ & - \frac{2mS_n \chi_{n\alpha}}{\nu_{\alpha}} [-i\nu_{\alpha}^{2(m-l)}] \int_0^{\infty} dt \frac{(it)^{r+1} e^{i\hat{z}_n t} e^{-\beta t^2}}{(1 + i\eta_{\alpha}t)^p} \mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_{\alpha}^2}{1 + i\eta_{\alpha}t} \right) . \quad (\text{B.18}) \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima, é obtido fazendo $\chi_{n\alpha} = 0$ na forma geral da função de dispersão de plasma inomogêneo, para $\psi = \pi/2$, dada por (B.1). Ou seja, é a mesma função obtida para $n = 0$, escrita em (B.2), fazendo $\hat{z}_0 \rightarrow \hat{z}_n$, ou

equivalentemente, fazendo $\delta_{0\alpha} \rightarrow \delta_{n\alpha}$. Para o segundo termo ocorre o mesmo, porém o índice r é acrescido de uma unidade. Assim, a função \mathcal{G} para $n \neq 0$, com o resultado obtido na equação (B.18), pode ser aproximada da seguinte forma

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l} = \mathcal{G}_{r,p,m,l} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0} - \frac{2m S_n \chi_{n\alpha}}{\nu_\alpha} \mathcal{G}_{r+1,p,m,l} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0},$$

onde

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0} = -i \nu_\alpha^{2(m-l)} \int_0^\infty dt \frac{(it)^r e^{iz_n t} e^{-\beta t^2}}{(1+i\eta_\alpha t)^p} \mathcal{H}_l \left(\frac{\nu_\alpha^2}{1+i\eta_\alpha t} \right). \quad (\text{B.19})$$

Fica evidente que para $n = 0$ a função \mathcal{G} acima recai na função (B.2). A grande vantagem dessa aproximação está no fato de que todos os resultados obtidos para $n = 0$, com $p = 1, 2, 3$, podem ser usados, fazendo $\delta_{0\alpha} \rightarrow \delta_{n\alpha}$.

Para facilitar cálculos que requerem as expressões para $p = 1, 2, 3$, é conveniente definir a quantidade χ_n de forma que

$$\chi_{n\alpha} = (\sqrt{2\mu_\alpha} N_\parallel) \chi_n \Rightarrow \chi_n = \frac{n}{2^{3/2}} \frac{N_B}{N_\parallel} = \frac{n}{2^{3/2}} \frac{\epsilon_B}{k_\parallel}. \quad (\text{B.20})$$

Com a definição acima, a forma adequada da aproximação da função de dispersão de plasma inhomôgeneo será

$$\mathcal{G}_{r,p,m,l} = \mathcal{G}_{r,p,m,l} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0} - \frac{2m}{\nu_\alpha} \sqrt{2\mu_\alpha} N_\parallel S_n \chi_n \mathcal{G}_{r+1,p,m,l} \Big|_{\chi_{n\alpha}=0}. \quad (\text{B.21})$$

Nota-se que para $n = \pm 1$, $S_n \chi_n = \chi_1$.

Referências

- [1] FREIDBERG, J. P. *Ideal magnetohydrodynamics*. New York: Plenum Press, 1987.
- [2] MELROSE, D. B. *Instabilities in space and laboratory plasmas*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [3] MYIAMOTO, K. *Plasma physics for nuclear fusion*. Cambridge: MIT Press, 1980.
- [4] MYIAMOTO, K. *Fundamentals of plasma physics and controlled fusion*. Tokyo: Iwanami Book Service Center, 1997.
- [5] SHAWHAN, S. D. Magnetospheric plasma waves. In: KENNEL, C. F. et al. (Eds.). *Solar system plasma physics*. Amsterdam: North-Holland, 1979. v. 3, p. 211-271.
- [6] CAIRNS, R. A. *Plasma physics*. London: Blackie, 1985.
- [7] SWANSON, D. G. *Plasma waves*. San Diego: Academic Press, 1989.
- [8] MIKHAILOVSKII, A. B. *Electromagnetic instabilities in an inhomogeneous plasma*. Bristol: IOP, 1992.
- [9] MIKHAILOVSKII, A. B. *Theory of plasma instabilities: instabilities of a homogeneous plasma*. New York: Consultants Bureau, 1974. v. 1.
- [10] MIKHAILOVSKII, A. B. *Theory of plasma instabilities: instabilities of an inhomogeneous plasma*. New York: Consultants Bureau, 1974. v. 2.
- [11] STURROCK, P. A.; WOLTJER, L. Plasma instabilities in astrophysics. *Nucl. Fusion*, Vienna, v. 9, n. 2, p. 165-167, June 1976.
- [12] KRALL, N. A.; TRIVELPIECE, A. W. *Principles of plasma physics*. New York: McGraw-Hill, 1973.
- [13] DAVIDSON, R. C. Vlasov equilibrium and nonlocal stability properties of an inhomogeneous plasma column. *Phys. Fluids*, New York, v. 19, n. 8, p. 1189-1202, Aug. 1976.

- [14] DAUGHTON, W. The unstable eigenmodes of a neutral sheet. *Phys. Plasmas*, Melville, v. 6, n. 4, p. 1329-1343, Apr. 1999.
- [15] BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of plasma physics*. 2. ed. São José dos Campos: J. A. B., 1995.
- [16] SILVEIRA, O. J. G. *Ondas eletromagnéticas em plasmas e-p com anisotropia de pressão*. 1999. 133 f. Dissertação (Mestrado em Física)- Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1999.
- [17] GAELZER, R.; ZIEBELL, L. F.; SILVEIRA, O. J. G. Dielectric tensor for inhomogeneous plasmas in inhomogeneous magnetic field. *Phys. Plasmas*, Melville, v. 6, n. 12, p. 4533-4541, Dec. 1999.
- [18] SILVEIRA, O. J. G.; ZIEBELL, L. F.; GAELZER, R.; YOON, P. Y. Unified formulation for inhomogeneity-driven instabilities in the lower-hybrid range. *Phys. Rev. E*, Melville, v. 65, n. 3, 036407 11p., Feb. 2002.
- [19] SPIEGEL, M. R. *Análise de Fourier*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1976.
- [20] JACKSON, J. D. *Eletrodinâmica clássica*. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.
- [21] GAELZER, R. *O maser de elétron-cíclotron como mecanismo gerador da radiação quilométrica da auroras*. 1991. 215 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1991.
- [22] CAVALCANTI, C. J. H. *Estudo da absorção de ondas eletromagnéticas de alta frequência em plasmas inhomogêneos com presença de corrente*. 1993. 119 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1993.
- [23] BESKIN, V. S.; GUREVICH, A. V.; ISTOMIN, Ya. I. Permittivity of a weakly inhomogeneous plasma. *Sov. Phys.-JETP*, Woodbury, v. 65, n. 4, p. 715-726, Apr. 1987.

- [24] BORN, M.; WOLF, E. *Principles of optics*. 7. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [25] GAELZER, R. *O tensor dielétrico efetivo para plasmas imersos em campos magnéticos com gradientes perpendiculares*. 1995. 151 f. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1995.
- [26] MIKHAILOVSKII, A. B. Oscillations of an inhomogeneous plasma. *Rev. Plasma Phys.*, New York, v. 3, p. 159-227, 1967.
- [27] CALDELA, R. A. *Efeitos da inomogeneidade no estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas magnetizados*. 1990. 116 f. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1990.
- [28] JULI, M. C. *Ondas em plasmas empoeirados magnetizados, com carga variável das partículas de poeira*. 2000. 183 f. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.
- [29] BLUMAN, G. W.; COLE, J. D. *Similarity methods for differential equations*. New York: Springer-Verlag, 1974. 341 p. (Applied mathematical sciences, v. 13).
- [30] CALDELA Fo., R. A.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. The dispersion relation and the dielectric tensor of inhomogeneous magnetized plasmas. *J. Plasma Phys.*, Cambridge, v. 42, n. 1, p. 165-175, Aug. 1989.
- [31] CALDELA Fo., R. A.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Inhomogeneity effects on the absorption of electromagnetic high-frequency waves by magnetized maxwellian plasmas. *J. Plasma Phys.*, Cambridge, v. 43, n. 3, p. 335-356, June 1990.
- [32] CAVALCANTI, C. J. H.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Electron-cyclotron absorption by inhomogeneous current-carrying plasmas. *J. Plasma Phys.*, Cambridge, v. 52, n. 2, p. 195-214, Oct. 1994.

- [33] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover, 1970.
- [34] ONSAGER, L. Reciprocal relations in irreversible processes. I. *Phys. Rev.*, New York, v. 37, n. 4, p. 405-426, Feb. 1931.
- [35] ONSAGER, L. Reciprocal relations in irreversible processes. II. *Phys. Rev.*, New York, v. 38, n. 12, p. 2265-2279, Dec. 1931.
- [36] GAELZER, R.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Dispersion function for plasmas with loss-cone distributions in an inhomogeneous magnetic field. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 55, n. 5, p. 5859-5873, May 1997.
- [37] GAELZER, R.; SCHNEIDER, R. S.; ZIEBELL, L. F. Dispersion relation and the dielectric tensor for magnetized plasmas with inhomogeneous magnetic field. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 51, n. 3, p. 2407-2424, Mar. 1995.
- [38] FRIED, B. D.; CONTE, S. D. *The plasma dispersion function*. New York: Academic Press, 1961.
- [39] DORY, R. A.; GUEST, G. E.; HARRIS, E. G. Unstable electrostatic plasma waves propagating perpendicular to a magnetic field. *Phys. Rev. Letters*, New York, v. 14, n. 5, p. 131-133, Feb. 1965.
- [40] CHEN, F. F. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. 2. ed. New York: Plenum Press, 1990. v. 1.
- [41] NICHOLSON, D. R. *Introduction to plasma theory*. New York: John Wiley, 1983.
- [42] ICHIMARU, S. *Basic principles of plasma physics*. Reading: W. A. Benjamin, 1973.
- [43] KRALL, N. A.; LIEWER, P. C. Low-frequency instabilities in magnetic pulses. *Phys. Rev. A*, New York, v. 4, n. 5, p. 2094-2103, Nov. 1971.
- [44] DAVIDSON, R. C.; GLADD, N. T. Anomalous transport properties associated with the lower-hybrid-drift instability. *Phys. Fluids*, New York, v. 18, n. 10, p. 1327-1335, Oct. 1975.

- [45] LIEWER, P. C.; KRALL, N. A. Selfconsistent approach to anomalous resistivity applied to theta pinch experiments. *Phys. Fluids*, New York, v. 16, n. 11, p. 1953-1963, Nov. 1973.
- [46] GLADD, N. T. The lower-hybrid-drift instability and the modified two-stream instability in high density theta pinch environments. *Plasma Phys.*, Oxford, v. 18, p. 27-40, 1976.
- [47] DAVIDSON, R. C.; GLADD, N. T.; Wu, C. S.; Huba J. D. Effects of finite plasma beta on lower-hybrid-drift instability. *Phys. Fluids*, New York, v. 20, n. 2, p. 301-310, Feb. 1977.
- [48] McBRIDE, J. B.; OTT, E.; BORIS, J. P.; ORENS, J. H. Theory and simulation of turbulent heating by the modified two-stream instability. *Phys. Fluids*, New York, v. 15, n. 12, p. 2367-2383, Dec. 1972.
- [49] HSIA, J. B.; CHIU, S. M.; HSIA, M. F.; CHOU, R. L.; WU, C. S. Generalized lower-hybrid-drift instability. *Phys. Fluids*, New York, v. 22, n. 9, p. 1737-1746, Sept. 1979.
- [50] ZHOU, Y. M.; WONG, H. K.; WU, C. S.; WINSKE, D. Lower hybrid drift instability with temperature gradient in a perpendicular shock-wave. *J. Geophys. Res. A*, Washington, v. 88, n. 4, p. 3026-3034, Apr. 1983.
- [51] WU, C. S.; GAFFEY Jr., J. D.; LIBERMAN, B. Statistical acceleration of electrons by lower-hybrid turbulence. *J. Plasma Phys.*, New York, v. 25, n. 3, p. 391-401, June 1981.
- [52] ANDERSON, K. A.; LIN, R. P.; MARTLE, F.; LIN, C. S.; PRKS, G. K.; REME, H. Thin sheets of energetic electrons upstream from the earth's bow shock. *Geophys. Res. Lett.*, Washington, v. 6, n. 5, p. 401-404, 1979.
- [53] PARKS, G. K.; GREENSTADT, E.; WU, C. S.; LIN, S. C.; MARK, A. St.; LIN, R. P.; ANDERSON, K. A.; GURGIOLO, C.; MAUK, B.; REME, H.; ANDERSON, R.;

- EASTMAN, T. Upstream particle spatial gradients and plasma waves. *J. Geophys. Res.*, Washington, v. 86, n. A6, p. 4343-4354, June 1981.
- [54] WU, C. S.; WINSKE, D.; ZHOU, Y. M.; TSAI, S. T.; RODRIGUEZ, P.; TANAKA, M.; PAPADOPOULOS, K.; LIN, C. S.; LEROY, M. M.; GOODRICH, C. C. Microinstabilities associated with a high Mach number, perpendicular bow shock. *Space Sci. Rev.*, Dordrecht, v. 37, p. 63-109, 1984.
- [55] LUI, A. T. Y.; LOPEZ, R. E.; ANDERSON, B. J.; TAKAHASHI, K.; ZANETTI, L. J.; McENTIRE, R. W.; POTEMRA, T. A.; KLUMPAR, D. M.; GREENE, E. M. and STRANGEWAY, R. Current disruptions in the near-Earth neutral sheet region. *J. Geophys. Res.*, Washington, v. 97, p. 1461-1480, 1992.
- [56] HUBA, J. D.; PAPADOPOULOS, K. Nonlinear stabilization of the lower-hybrid drift instability by electron resonance broadening. *Phys. Fluids*, New York, v. 21, n. 1, p. 121-123, 1978.
- [57] KRALL, N. A.; McBRIDE, J. B. Magnetic curvature and ion distribution function effects on lower hybrid drift instabilities *Phys. Fluids*, New York, v. 19, n. 12, p. 1970-1971, Dec. 1976.
- [58] HUBA, J. D.; DRAKE, J. F. Physical mechanism of wave-particle resonances in a curved magnetic field. *Phys. Fluids*, New York, v. 25, n. 7, p. 1207-1210, July 1982.
- [59] NAKAMURA, T. K. An alternative method for linearized plasma kinetics and its application to drift resonances *Phys. Plasmas*, Woodbury, v. 4, n. 11, p. 3765-3769, Nov. 1997.
- [60] NAKAMURA, T. K.; SHINOHARA, I. An analytical expression for electron drift resonances with lower hybrid waves in a curved magnetic field. *Adv. Space Res.*, Oxford, v. 24, n. 1, p. 59-62, 1999.
- [61] CARTER, T. A.; YAMADA, M.; JI, H.; KULSRUD, R. M.; TRINTCHOUK, F. Experimental study of lower-hybrid-drift turbulence in a reconnecting current sheet. *Phys. Plasmas*, Melville, v. 9, n. 8, p. 3272-3288, Aug. 2002.

- [62] HUBA, J. D.; GLADD, N. T.; PAPADOPOULOS, K. The lower-hybrid drift instability as a source of anomalous resistivity for magnetic field line reconnection. *Geophys. Res. Lett.*, Washington, v. 4, n. 3, p. 125-128, 1977.
- [63] CARTER, T. A.; JI, H.; TRINTCHOUK, F.; YAMADA, M.; KULSRUD, R. M. Measurement of lower-hybrid drift turbulence in a reconnecting current sheet *Phys. Rev. Letters*, Melville, v. 88, n. 1, 015001 4p., Jan. 2002.
- [64] SPICER, D.; BINGHAM, R.; HUBA, J.; SHAPIRO, V. D. Particle acceleration in tangential discontinuities by lower hybrid waves. *Nonlinear Processes in Geophysics*, Katlenburg-Lindau, v. 9, p. 121-124, 2002.
- [65] HAMASAKI, S.; GLADD, N. T.; KRALL, N. A. One-dimensional transport models with local and nonlocal lower-hybrid-drift waves in field-reversed configurations. *Phys. Fluids*, Woodbury, v. 29, n. 12, p. 4131-4137, Dec. 1986.
- [66] TUSZEWSKI, M. Field reversal configurations. *Nucl. Fusion*, Vienna, v. 28, n. 11, p. 2033-2092, Nov. 1988.
- [67] BATCHELOR, D. B.; DAVIDSON, R. C. Nonlocal analysis of the lower-hybrid-drift instability in theta-pinch plasmas. *Phys. Fluids*, New York, v. 19, n. 6, p. 882-888, Dec. 1976.
- [68] LAPENTA, G.; BRACKBILL, J. U. Nonlinear evolution of the lower drift instability: current sheet thinning and kinking. *Phys. Plasmas*, Melville, v. 9, n. 5, p. 1544-1554, May 2002.
- [69] HARRIS, E. G. On a plasma sheath separating regions of oppositely-directed magnetic field. *Nuovo Cimento*, Bologna, v. 23, n. 1, p. 115-121, genn. 1962.
- [70] CARTER, T. A. Measurement of lower-hybrid drift turbulence in a reconnection current sheet. *Bull. Am. Phys. Soc.*, Melville, v. 46, n. 8, p. 23, Oct. 2001.
- [71] GLADD, N. T.; SGRO, A. G.; HEWETT, D. W. Microstability properties of the sheath region of a field-reversed configuration. *Phys. Fluids*, Woodbury, v. 28, n. 7, p. 2222-2234, July 1985.

- [72] HUBA, J. D.; WU, C. S. Effects of a magnetic field gradient on the lower hybrid drift instability. *Phys. Fluids*, New York, v. 19, n. 7, p. 988-994, July 1976.
- [73] KRALL, N. A. Shear stabilization of lower hybrid drift instabilities. *Phys. Fluids*, New York, v. 20, n. 2, p. 311-312, Feb. 1977.
- [74] McBRIDE, J. C.; HAMASAKI, S. Temperature gradient and electron gyroradius effects on lower hybrid drift cyclotron instabilities. *Phys. Fluids*, New York, v. 21, n. 11, p. 1979-1982, Nov. 1978.
- [75] DAVIDSON, R. C.; GLADD, N. T.; WU, C. S.; HUBA, J. D. Influence of finite-beta effects on the lower-hybrid-drift instability in post-implosion theta pinches. *Phys. Rev. Letters*, New York, v. 37, n. 12, p. 750-753, Sept. 1976.
- [76] DAVIDSON, R. C.; GLADD, N. T. Influence of strong inhomogeneities on high-frequency mirror-drift-cone and convective-loss-cone instabilities. *Phys. Fluids*, New York, v. 20, n. 9, p. 1516-1524, Sept. 1977.
- [77] GLADD, N. T.; GOREN, Y.; LIU, C. S.; DAVIDSON, R. C. Influence of strong inhomogeneities and magnetic shear on microstability properties of the Tormac sheath. *Phys. Fluids*, New York, v. 20, n. 11, p. 1876-1879, Nov. 1977.
- [78] HUBA, J. D.; CHATURVEDI, P. K.; OSSAKOW, S. L.; TOWLE, D. M. High frequency drift waves with wavelengths below the ion gyroradius in equatorial spread-F. *Geophys. Res. Lett.*, Washington, v. 5, p. 695-698, 1978.
- [79] GARY, S. P.; EASTMAN, T. E. The lower hybrid drift instability at the magnetopause. *J. Geophys. Res. A*, Washington, v. 84, n. 12, p. 7378, 1979.
- [80] HUBA, J. D.; DRAKE, J. F.; GLADD, N. T. Lower-hybrid-drift instability in field reversed plasma. *Phys. Fluids*, New York, v. 23, n. 3, p. 552-561, Mar. 1980.
- [81] GLADD, N. T.; KRALL, N. A. Microstability properties of the EBT boundary layer. *Phys. Fluids*, New York, v. 25, n. 7, p. 1241-1252, July 1982.

- [82] FOWLER, T. K. Thermodynamics of unstable plasmas: In SIMON, A.; THOMPSON, W. B. (Eds.) *Advances in plasma physics*. New York: Interscience, 1968. v. 1, p. 201-225.
- [83] DAVIDSON, R. C. Quasi-linear stabilization of lower-hybrid-drift instability. *Phys. Fluids*, New York, v. 21, n. 8, p. 1375-1380, Aug. 1978.
- [84] ISHIHARA, O.; HIROSE, A. Nonlinear evolution of lower-hybrid drift instability. *Phys. Fluids*, New York, v. 25, n. 1, p. 171-178, Jan. 1982.
- [85] DRAKE, J. F.; GUZDAR, P. N.; HUBA, J. D. Saturation of the lower-hybrid-drift instability by mode coupling. *Phys. Fluids*, New York, v. 26, n. 3, p. 601-604, Mar. 1983.
- [86] CHEN, Y. J.; COHEN, B. I. Nonlinear frequency shift induced by the lower-hybrid drift instability. *Phys. Fluids*, New York, v. 24, n. 5, p. 887-892, Aug. 1981.
- [87] MYRA, J. R.; AAMODT, R. E. Nonlinear saturation of the lower-hybrid-drift instability: axis encircling model. *Phys. Fluids*, New York, v. 24, n. 10, p. 1836-1838, Oct. 1981.
- [88] CHEN, Y. J.; NEVINS, W. M.; BIRDSALL, C. K. Stabilization of the lower-hybrid drift instability by resonant electrons. *Phys. Fluids*, New York, v. 26, n. 9, p. 2501-2508, Sept. 1983.
- [89] WINSKE, D.; LIEWER, P. C. Particle simulation studies of the lower hybrid drift instability. *Phys. Fluids*, New York, v. 21, n. 6, p. 1017-1025, June 1978.
- [90] WINSKE, D.; HEWETT, D. W. Flute instabilities in two-dimensional simulations of strongly inhomogeneous theta-pinch plasmas. *Phys. Rev. Letters*, New York, v. 35, n. 14, p. 937-940, Oct. 1975.
- [91] CHEN, Y. J.; BIRDSALL, C. K. Lower-hybrid drift instability saturation mechanisms in one-dimensional simulations. *Phys. Fluids*, New York, v. 26, n. 1, p. 180-189, Jan. 1983.

- [92] TANAKA, M.; SATO, T. Simulations on lower hybrid drift instability and anomalous resistivity in the magnetic neutral sheet. *J. Geophys. Res. A*, Washington, v. 86, n. 7, p. 5541-5552, 1981.
- [93] BRACKBILL, J. U. New developments in modeling nonlinear, low frequency plasma phenomena. *Bull. Am. Phys. Soc.*, New York, v. 26, n. 7, p. 1046, Sept. 1981.
- [94] HUI, B. H.; HAMASAKI, S.; DAVIDSON, R. C. Fluid-numerical studies of high-density theta-pinch implosion including classical and anomalous transport processes. *Nucl. Fusion*, Vienna, v. 16, n. 1, p. 73-84, Feb. 1976.
- [95] LIEWER, P. C.; DAVIDSON, R. C. Sheath broadening by the lower-hybrid-drift instability in post-implosion theta pinches. *Nucl. Fusion*, Vienna, v. 17, n. 1, p. 85-100, Feb. 1977.
- [96] HAMASAKI, S.; KRALL, N. A. Numerical modeling of the implosion heating experiment. *Phys. Fluids*, New York, v. 20, n. 2, p. 229-233, Feb. 1977.
- [97] HAMASAKI, S.; BOOK, D. L. Numerical simulation of the anomalous transport process in radially compressed reversed-field configurations. *Nucl. Fusion*, Vienna, v. 20, n. 3, p. 289-304, Mar. 1980.
- [98] KEILHACKER, M.; KORNHERR, M.; NEIDERMEYER, H.; SOLDNER, F.; STEUR, K. H. Flute instabilities during fast magnetic compression of collisionless $\beta = 1$ plasmas. *Phys. Rev. Letters*, New York, v. 32, n. 19, p. 1044-1047, May 1974.
- [99] MCKENNA, K. F.; KRISTAL, R.; THOMAS, K. S. Measurements of plasma density distribution and current-sheath structure in the implosion phase of a theta-pinch discharge. *Phys. Rev. Letters*, New York, v. 32, n. 8, p. 409-412, Feb. 1974.
- [100] COMMISSO, R. J.; GRIEM, H. R. Experimental study of the post-implosion phase of a theta pinch. *Phys. Fluids*, New York, v. 20, n. 1, p. 44-50, Jan. 1977.
- [101] BUNEMAN, O. Instability, turbulence, and conductivity in current-carrying plasma. *Phys. Rev. Letters*, New York, v. 1, n. 1, p. 8-9, July 1958.

- [102] BUNEMAN, O. Dissipation of currents in ionized media. *Phys. Rev.*, New York, v. 115, n. 3, p. 503-517, Aug. 1959.
- [103] BUNEMAN, O. Instability of electrons drifting through ions across a magnetic field. *J. Nucl. Energy C*, London, v. 4, p. 111-117, 1962.
- [104] McBRIDE, J. B.; OTT, E. Electromagnetic and finite β_e effects on the modified two stream instability. *Phys. Letters A*, Amsterdam, v. 39, n. 5, p. 363-364, Apr. 1972.
- [105] LEMONS, D. S.; GARY, S. P. Electromagnetic effects on the modified two-stream instability. *J. Geophys. Res.*, Washington, v. 82, n. 16, p. 2337-2342, June 1977.
- [106] WU, C. S.; ZHOU, Y. M.; TSAI, S. T.; GUO, S. C. A kinetic cross-field streaming instability. *Phys. Fluids*, New York, v. 26, n. 5, p. 1259-1267, May 1983.
- [107] PAPADOPOULOS, K. The role of microturbulence on collisionless reconnection. In: AKASOFU, S.-I. (Ed.). *Dynamics of the magnetosphere*. Dordrecht: D. Reidel, 1980. p. 289-309.
- [108] LUI, A. T. Y.; CHANG, C. L.; MANKOFSKY, A.; WONG, H. K.; WINSKE, D. A cross-field current instability for substorm expansions. *J. Geophys. Res. A*, Washington, v. 96, n. 7, p. 11389-11401, July 1991.
- [109] LUI, A. T. Y.; MANKOFSKY, A.; CHANG, C. L.; PAPADOPOULOS, K.; WU, C. S. A current disruption mechanism in the neutral sheet: a possible trigger for substorm expansions. *Geophys. Res. Lett.*, Washington, v. 17, n. 6, p. 745-748, May 1990.
- [110] YOON, P. H.; LUI, A. T. Y. Nonlinear analysis of generalized cross-field current instability. *Phys. Fluids B*, Woodbury, v. 5, n. 3, p. 836-853, Mar. 1993.
- [111] CHANG, C. L.; WONG, H. K.; WU, C. S. Electromagnetic instabilities attributed to a cross-field ion drift. *Phys. Rev. Letters*, Woodbury, v. 65, n. 9, p. 1104-1107, Aug. 1990.

- [112] WEIBEL, E. S. Spontaneously growing transverse wave in a plasma due to an anisotropic velocity distribution. *Phys. Rev. Letters*, New York, v. 2, n. 2, p. 83-84, Feb. 1959.
- [113] YOON, P. H.; LUI, A. T. Y.; CHANG, C. L. Lower-hybrid-drift instability operative in the geomagnetic tail. *Phys. Plasmas*, Woodbury, v. 1, n. 9, p. 3033-3043, Sept. 1994.
- [114] WONG, H. K.; GOLDSTEIN, M. I. Proton beam generation of oblique whistler waves. *J. Geophys. Res. A*, Washington, v. 93, n. 5, p. 4110-4114, May. 1988.
- [115] Imager for magnetopause-to-aurora global exploration Disponível em: <<http://pluto.space.swri.edu/IMAGE/>>. Acesso em: 16 fev. 2003.
- [116] BRAVO, S. *Plasmas en todas partes* Disponível em: <<http://lectura.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/126/htm/plasmas>>. Acesso em: 16 fev. 2003.
- [117] Space plasma group: Queen Mary and Westfield College University of London Disponível em: <<http://www.space-plasma.qmul.ac.uk/SPGweb/>>. Acesso em: 16 fev. 2003.
- [118] University of Oulu: Space physics textbook. Disponível em: <<http://www oulu.fi/ spaceweb/textbook/>>. Acesso em: 16 fev. 2003.
- [119] Universidade Politecnica de Valencia. Disponível em: <<http://www.upv.es/satelite/trabajos/pracGrupo7/entorno.htm>>. Acesso em: 16 fev. 2003.
- [120] ROEDERER, J. G. Earth's magnetosphere. In: LANZEROTTI, L. J.; KENNEL, C. F.; PARKER, E. N. (Eds.). *Solar system plasma physics*. Amsterdam: North-Holland, 1979. v. 2, p. 1-56.
- [121] SONNERUP, B. U. Ö. Magnetic field reconnection. In: LANZEROTTI, L. J.; KENNEL, C. F.; PARKER, E. N. (Eds.). *Solar system plasma physics*. Amsterdam: North-Holland, 1979. v. 3, p. 45-108.

-
- [122] ROBINSON, P. A. Relativistic plasma dispersion functions. *J. Math. Phys.*, Woodbury, v. 27, n. 5, p. 1206-1214, May 1986.