

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

EQUIVALÊNCIA ENTRE OS FORMALISMOS VARIACIONAL E DA MATRIZ S EM TEORIA

A amiga Ivone DE CAMPOS*
pele guarda dada, e pul
mãe foi pequena!

M. Epstein
março 1971

Mario Epstein

Dissertação realizada sob a orientação do Dr. Darcy Dillen-
burg, apresentada ao Institu-
to de Física da UFRGS para ob-
tenção do título de Mestre em
Ciências.

* Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes instituições: Ban-
co Nacional do Desenvolvimento Econômico, Conselho Nacional de Pes-
quisas, Conselho de Pesquisas da UFRGS, United States Army Re-
search Office e Organização dos Estados Americanos.

Porto Alegre

- 1971 -

A G R A D E C I M E N T O S

O presente trabalho foi realizado sob a orientação do Prof. Darcy Dillenburg a quem desejo agradecer pela maneira paciente com que me guiou durante a realização desta dissertação.

Ao Prof. Theodore A.J. Maris pela proposição do tema e pelas oportunas sugestões dadas no decorrer do mesmo.

Aos membros da Divisão de Física Teórica deste Instituto pelo constante apoio e incentivo que me têm dado.

Aos meus professores do curso de graduação e pós-graduação pelos conhecimentos com eles adquiridos.

Ao Prof. David Mesquita da Cunha, Diretor do Instituto de Física pelo apoio recebido.

Aos meus pais pela oportunidade que me foi dada de estudar.

À Ivânia pelo apoio e pela dedicação em todas as horas.

À Luiza Zafaneli e Maria Elizabeth Fiori pelo auxílio na elaboração final deste trabalho.

Aos meus colegas e a todos aqueles que de uma forma ou outra me ajudaram a levar este trabalho até o fim

Pôrto Alegre, outubro de 197.

Mario Epstein

R E S U M O

Usamos as técnicas de redução na representação de Dirac para provar que a formulação da teoria quântica de campos em termos da matriz S é equivalente à formulação da teoria em termos do princípio variacional.

Este método é empregado para mostrar que a matriz S pode sempre ser posta em termos do lagrangeano de interação mesmo no caso de acoplamentos derivativos, desde que todos os limites que aparecem na teoria sejam tomados após a solução da mesma.

Í N D Í C E

I - Introdução	4
II - Formulação variacional e equações de Euler-Lagrange	6
II-1. Introdução	6
II-2. Equações de Euler-Lagrange	9
II-3. Campos livres - Relações de comutação e funções de Green	13
III - Matriz S	18
III-1. Introdução	18
III-2. Formulação Hamiltoniana	19
III-3. Hamiltoniano de Interação	24
III-4. Formulação Lagrangeana	28
IV - Equivalência das formulações: Eletrodinâmica Quântica	32
V - Equivalência das formulações: Lagrangeanos de interação sem derivadas	39
VI - Equivalência da formulação lagrangeana da matriz S com as equações de Euler-Lagrange	44
VII - Equivalência da formulação hamiltoniana da matriz S com as equações de Euler-Lagrange	49
VIII - Conclusão	56
Apêndices	58
Referências	63

I - Introdução

É fato conhecido que a solução perturbativa de problemas em teoria quântica de campos, usando o princípio variacional, dá resultados iguais aos obtidos a partir do formalismo da matriz S . Esta equivalência, no entanto, só é demonstrada para termos de ordem finita nas expansões, e para casos particulares como, por exemplo, a eletrodinâmica quântica¹, e a interação meson-nucleon^{2,3}.

Além disto, existem diversos modos de encontrar a matriz S . Podemos partir de analogia com a equação de Schrödinger ou de princípios físicos bastante gerais, resultando em formas para S que envolvem respectivamente o hamiltoniano ou o lagrangeano de interação, além de prescrições diferentes de como tratar produtos ordenados de campos. No caso de interações com derivadas as duas formas para a matriz S são bastante diferentes e a prova de que elas são equivalentes também é restrita a casos particulares⁴ ou a ordens finitas de perturbação⁵.

Com isto surge o problema de que o uso da forma lagrangeana, mais fácil de tratar, não é justificável nos casos de interações mais complexas a não ser que possamos demonstrar que ela é equivalente a algum formalismo conhecido.

Nosso objetivo é mostrar que o formalismo variacional é equivalente em todas as ordens de perturbação ao formalismo da matriz S nas duas formas acima referidas.

Por outro lado, as condições que são impostas na formulação Lagrangeana de Bogoliubov para a matriz S , determinam na realidade apenas sua forma, mas não o funcional de campos que aparece no

expoente. Este é encontrado no caso da eletrodinâmica por analogia com o método quasi-clássico, sendo daí extrapolado para as demais interações. Usando as técnicas empregadas no presente trabalho para demonstrar a equivalência, podemos encontrar a relação entre este expoente e o lagrangeano de interação, simplesmente impondo que os formalismos sejam equivalentes.

Inicialmente, estudamos no capítulo II a formulação da teoria de campos através do princípio variacional, mostrando como podemos resolvê-la por métodos iterativos.

No capítulo III são resumidos os métodos para obter a matriz S . Damos ênfase à formulação lagrangeana de Bogoliubov e Nishijima, na qual temos particular interesse devido aos trabalhos de pesquisa em andamento neste Instituto³².

No capítulo IV é mostrada a equivalência entre os formalismos para o caso da eletrodinâmica, onde todas as formas obtidas para a matriz S coincidem.

A técnica de fórmulas de redução aí introduzida é generalizada no capítulo V para interação sem derivadas, e obtemos a equivalência para este caso.

No caso destas derivadas existirem, as duas formulações da matriz S nos dão formas diferentes, e os capítulos VI e VII mostram a equivalência das formas lagrangeana e hamiltoniana, respectivamente, com as equações de Euler-Lagrange.

As demonstrações apresentadas são para lagrangeanos de interação que envolvam a derivada primeira em forma linear.

No caso tratado no capítulo VI, esta demonstração pode

ser imediatamente estendida para derivadas lineares de qualquer ordem e tipo de campo. A demonstração do capítulo VII no entanto só pode ser generalizada facilmente para derivadas de ordem superior que não envolvam campos de fermions, em cujo caso a demonstração enfrenta alguns problemas.

II - Formulação Variacional e Equações de Euler-Lagrange

II-1. Introdução*

A teoria quântica de campos pode ser construída a partir de analogia com a teoria clássica de campos, ou com a mecânica quântica quando o sistema não possui análogo clássico.

Um exemplo de campo clássico é o eletromagnético, que obedece às equações de Maxwell, ao passo que no caso de férmions, para os quais não há equação clássica, o ponto de partida é a equação de Dirac da mecânica quântica.

* Usaremos as denominações lagrangeano e hamiltoniano para designar a "densidade de lagrangeano" e a "densidade de hamiltoniano" respectivamente. A relação entre o lagrangeano propriamente dito e sua densidade é dada por $L = \int \mathcal{L} d^3x$. Para o hamiltoniano temos $H = \int \mathcal{H} d^3x$.

Inicialmente, tomamos em teoria quântica de campos as funções $\phi(x)$, que descrevem os campos (clássicos ou quanto-mecânicos), como operadores dependentes de posição, da mesma forma que as variáveis dinâmicas \underline{x} e \underline{p} tornam-se operadores na mecânica quântica usual. O estado é descrito por um vetor no espaço de Hilbert, $|\Phi\rangle$. Supomos que o sistema possa ser descrito por um lagrangeano \mathcal{L} de onde podemos obter um hamiltoniano, sendo que com ajuda do primeiro estabelecemos relações de comutação entre os campos e seus momenta conjugados:

$$[\pi(x,t), \phi(x',t)]_{\pm} = i \delta^3(x-x') \quad (2.1)$$

$$[\pi(x,t), \pi(x',t)]_{\pm} = [\phi(x,t), \phi(x',t)]_{\pm} = 0$$

$$[A, B]_{\pm} \equiv AB \pm BA$$

Notação:

$$A_{\mu}{}^{\mu} \equiv \sum_{\mu} A_{\mu}{}^{\mu}$$

(Índice repetido=soma)

$$c = \hbar = 1$$

$$x = (x, it)$$

$$x_4 = ix_0 = it$$

$$d^4x = d^3x dt$$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_0 y_0$$

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) \quad \delta_4 = i\delta_0$$

$$\square(x) \equiv \sum_{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu}^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \partial_{\mu} \phi(x) \equiv \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_{\mu}} \quad \partial_{\mu}^{\nu} \phi(x) \equiv \frac{\partial^{\nu} \phi(x)}{\partial x_{\mu}^{\nu}}$$

$$\dot{\phi} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Os operadores $\phi(x)$ e $\pi(x)$ podem ser expandidos em séries de Fourier, sendo os coeficientes interpretados como operadores de absorção e criação de partículas, cujas relações de comutação são obtidas a partir da (2.1). Esta interpretação dá ao método possibilidade de descrever sistemas de muitas partículas, inclusive com o aparecimento e aniquilação de qualquer número delas, o que não era possível em mecânica quântica.

A evolução do sistema pode ser descrita por meio de uma equação de Schrödinger

$$H(\pi(x), \phi(x)) | \Phi \rangle = i \frac{\partial}{\partial t} | \Phi \rangle \quad (2.2)$$

onde os operadores contidos no hamiltoniano não possuem dependência no tempo, estando toda ela contida no vetor estado. Esta representação nos leva ao formalismo da matriz S, que é o assunto do próximo capítulo.

Uma alternativa é supor o vetor estado constante e os operadores dependentes do tempo. Estes seriam obtidos de maneira análoga à teoria clássica, isto é, supondo que a ação do sistema é um extremo,

$$\delta \int L(x) d^4x = 0 \quad (2.3)$$

de onde obteremos as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} = 0 \quad (2.4)$$

que, resolvidas, nos dão a dependência espaço-temporal dos operadores campo. Neste capítulo trataremos desta última formulação, chamada variacional. As equações de campo resultantes só podem atualmente ser resolvidas por iteração em termos de campos livres. Para isto, é necessário conhecer as regras de comutação e as funções de Green para as equações destes campos. Mostraremos como encontrá-las em geral pelo método de Peierls, apresentando alguns exemplos de interesse. No caso da eletrodinâmica e interação vetorial meson-nucleon mostramos também as equações a serem resolvidas para encontrarmos as formas dos campos interagentes.

II-2. Equações de Euler-Lagrange

A descrição de um sistema interagente de partículas é dada em termos de um Lagrangeano \mathcal{L} , que pode ser decomposto em uma parte correspondente aos campos livres e outra referente a interações:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_I(\phi) \quad (2.5)$$

O princípio da mínima ação nos leva às equações de Eu-

ter-Lagrange⁶

$$\frac{\partial L}{\partial \phi(x)} + \sum_{s=1}^n \left(-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)^s \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu^s \phi(x))} = 0 \quad (2.6)$$

onde L é função de ϕ e de suas derivadas até a ordem n . Devido à eq. (2.5) podemos escrever a (2.6) na forma

$$\frac{\partial L_0}{\partial \phi(x)} + \sum_{s=1}^n \left(-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)^s \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\mu^s \phi(x))} = \frac{\partial L_I}{\partial \phi(x)} + \sum_{p=1}^n \left(-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)^p \frac{\partial L_I}{\partial (\partial_\mu^p \phi(x))} \quad (2.7)$$

O primeiro membro desta última equação pode ser escrito em notação condensada

$$\frac{\partial L_0}{\partial \phi(x)} + \sum_{s=1}^n \left(-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)^s \frac{\partial L_0}{\partial (\partial_\mu^s \phi(x))} \equiv K(x) \phi(x) \quad (2.8)$$

Esta expressão quando igualada a zero nos dá a equação de campo livre. A inclusão de interações faz com que a equação de campo passe da

$$K(x) \phi(x) = 0 \quad (2.9)$$

para

$$K(x) \phi(x) = - \sum_{s=0}^n \left(-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)^s \frac{\partial L_I}{\partial (\partial_\mu^s \phi(x))} \quad (2.10)$$

Em geral, nos problemas físicos, esta equação não pode ser resolvida exatamente.

Por exemplo, na eletrodinâmica quântica (EDQ), o lagrangeano é dado por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\Psi, \bar{\Psi}, A) + \int d^4x A_\mu j^\mu \quad j^\mu = \frac{1}{2} ie [\bar{\Psi}, \gamma^\mu \Psi] \quad (2.11)$$

No caso de campos livres, $e=0$, as equações de campo são

$$\begin{aligned} -(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m) \Psi(x) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\Psi}(x)}{\partial x^\mu} \gamma^\mu - m \bar{\Psi}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\square(x) A_\mu(x) = 0$$

Quando incluímos a interação, obtemos

$$(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m) \Psi(x) = ie \gamma^\mu \Psi(x) A_\mu(x) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}(x)}{\partial x^\mu} \gamma^\mu - m \bar{\Psi}(x) = -ie \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x)$$

$$\square(x) A_\mu(x) = -j_\mu(x)$$

ou ainda, em notação análoga à da eq. (2.10)

$$D(x) \Psi(x) = ie \gamma^\mu \Psi(x) A_\mu(x)$$

$$\bar{D}(x) \bar{\Psi}(x) = -ie \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \quad (2.14)$$

$$\square(x) A_\mu(x) = -j_\mu(x)$$

Para solucionar qualquer problema em EDQ, bastaria resolver as equações (2.13). No entanto, não sabemos como fazê-lo exatamente. Estas equações diferenciais podem ser transformadas em equações integrais, bastando para isto saber apenas as funções de Green das equações (2.12), S^R , S^A , e D^R respectivamente⁷:

$$\psi(x) = \psi^{in}(x) - ie \int d^4x' S^R(x-x') g_\mu \psi(x') A_\mu(x')$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{in}(x) - ie \int d^4x' \bar{\psi}(x') g_\mu A_\mu(x') S^A(x-x') \quad (2.15)$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^{in}(x) + \int d^4x' D^R(x-x') j_\mu(x')$$

Os campos in são soluções das equações homogêneas (2.12) e portanto satisfazem a equações de campos livres. Usando o método de iteração, a (2.15) pode ser resolvida por sucessivas aproximações, resultando numa expansão infinita em potências da constante de acoplamento.

No caso geral de interações com derivadas a solução formal da equação (2.10) é dada por^{5,8}

$$\phi(x) = \phi^{in}(x) + \sum_{s=0}^{\infty} \int d^4x' \left\{ \left(-\frac{\partial}{\partial x'_\mu} \right)^s G(x-x') \right\} \frac{\partial \phi(x')}{\partial x'^s} \quad (2.16)$$

onde ϕ^{in} e G satisfazem às equações

$$K(x) \phi^{in}(x) = 0 \quad (2.17)$$

$$K(x) G(x-x') = -\delta^4(x-x') \quad (2.18)$$

Como exemplo, temos o caso da interação vetorial meson nucleon, onde o lagrangeano de interação é

$$\mathcal{L}_I = \int d^4x \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \quad (2.19)$$

A equação de campo para Φ

$$K(x) \Phi(x) = -\int d^4x' \quad (2.20)$$

tem como solução

$$\Phi(x) = \Phi^{in}(x) + \int d^4x' \quad \frac{\partial G(x-x')}{\partial x'_\mu} \quad \int d^4x'' \quad (2.21)$$

Resta apenas encontrar as funções de Green e as relações de comutação dos campos que obedecem a equação (2.17). Um método geral para isto é dado a seguir.

11-3. Campos livres: relações de comutação e funções de Green

Um método para encontrar os comutadores e funções de Green de campos livres é dado por Peierls⁹, que parte das funções conhecidas para campos escalares sem spin, e as obtém para qualquer ou

tro tipo de campo, mediante a única suposição de que qualquer componentes dêstes também satisfaz a equação de Klein-Gordon.

Vamos primeiro estudar as propriedades dos campos escalares e após usar o formalismo de Peierls.

Um campo escalar livre sem spin é descrito por um Lagrangeano

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \right)^2 + m^2 \phi^2 \right] \quad (2.22)$$

cuja equação de movimento é a de Klein-Gordon

$$(\square(x) - m^2) \phi(x) = 0 \quad (2.23)$$

Uma solução arbitrária de (2.23) pode ser expandida em termos de ondas planas

$$\phi(x) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2p_0V}} \left\{ e^{i p \cdot x} a(p) + e^{-i p \cdot x} a^\dagger(p) \right\} \quad (2.24)$$

onde a e a^\dagger são operadores absorção e criação.

Sabendo a solução em qualquer tempo, podemos escrever as relações de comutação para $t \neq t'$

$$[\phi(x), \phi(x')] =$$

$$= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4p [\theta(p_0) - \theta(-p_0)] \delta(p^2 - m^2) e^{i p \cdot (x - x')} \quad (2.25)$$

$$\equiv i \Delta(x - x') \quad \theta(x_0) = \begin{cases} 1 & x_0 > 0 \\ 0 & x_0 < 0 \end{cases}$$

Como para $x_0 = 0$

$$\Delta(x) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_0} = -\delta^3(x) \quad (2.26)$$

vemos que a (2.25) concorda com as relações de comutação obtidas por analogia com o formalismo clássico.

Definindo as funções

$$\Delta^R(x) \equiv -\theta(x_0) \Delta(x) \quad (2.27)$$

$$\Delta^A(x) \equiv \theta(-x_0) \Delta(x)$$

$$\Delta_F(x-x') \equiv \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(x') \} | 0 \rangle$$

podemos mostrar⁷ que

$$(\square(x) - m^2) \Delta^{R,A}(x) = -\delta^4(x) \quad (2.28)$$

$$(\square(x) - m^2) \Delta_F(x-x') = i\delta^4(x-x') \quad (2.29)$$

ou seja, Δ^R , Δ^A e Δ_F são funções de Green das equações de campos livres, cada qual com diferente condição de contorno.

No caso de campos complexos, o lagrangeano

$$\mathcal{L} = - \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x_\mu} + m^2 \phi \phi^\dagger \right] \quad (2.30)$$

também nos dá a equação de Klein-Gordon para cada componente. Neste caso as relações de comutação e o propagador Δ_F tem a forma

$$[\phi(x), \phi^+(x')] = i \Delta(x-x')$$

$$\Delta^R(x) \equiv -\theta(x_0) \Delta(x) \qquad \Delta^A(x) \equiv \theta(-x_0) \Delta(x) \qquad (2.31)$$

$$\Delta_F(x-x') \equiv \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi^+(x') \} | 0 \rangle$$

sendo válidas também neste caso as relações (2.28) e (2.29).

Partindo destes resultados, Peferis nos ensina as regras de como encontrar os comutadores e as funções de Green para campos livres de qualquer spin. Dada a equação de Euler-Lagrange, cada componente do campo satisfaz a uma equação do tipo

$$K_{\alpha\beta}(x) \phi_\beta(x) = 0 \qquad (2.32)$$

Dêste fato decorre que deve existir um operador $C_{\beta\alpha}$ tal que

$$K_{\alpha\beta} C_{\beta\alpha} = \int_{\alpha\beta} (\square - m^2) \qquad (2.33)$$

Fácilmente podemos ver que a solução para a equação

$$K_{\alpha\beta}(x) \Delta_{\beta\alpha}^{R,A}(x-x') = - \int_{\alpha\beta} \delta^4(x-x') \qquad (2.34)$$

é dada por

$$\Delta_{\beta\alpha}^{R,A}(x-x') = C_{\beta\alpha}(x) \Delta^{R,A}(x-x') \qquad (2.35)$$

ou seja, as funções $\Delta_{\alpha\beta}^{R,A}$, $\Delta_{\alpha\beta}$ e $\Delta_{F\alpha\beta}$ podem ser obtidas das equivalentes para campos escalares, mediante a aplicação sobre estas do operador $C_{\alpha\beta}$.

Exemplos:

Partículas de spin 1, $m \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_\alpha} \right) - m^2 \phi_\alpha \equiv K_{\alpha\beta} \phi = 0 \quad (2.36)$$

$$K_{\alpha\beta} \equiv \left\{ \delta_{\alpha\beta} (\square - m^2) - \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right\}$$

Da (2.33) temos que

$$C_{\alpha\beta} = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \quad (2.37)$$

com o que

$$(\Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\alpha\beta}^{R,A}, \Delta_{F\alpha\beta}) = \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) (\Delta, \Delta^{R,A}, \Delta_F) \quad (2.38)$$

Partículas de spin 1/2

$$K_{\alpha\beta}(x) \Psi_\beta(x) \equiv - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right)_{\alpha\beta} \Psi_\beta(x) = 0 \quad (2.39)$$

Logo

$$C_{\alpha\beta} = - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right)_{\alpha\beta} \quad (2.40)$$

$$(S_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}^{R,A}, S_{F\alpha\beta}) = - \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} - m \right)_{\alpha\beta} (\Delta, \Delta^{R,A}, \Delta_F) \quad (2.41)$$

Desta maneira, obtemos as funções de Green e as relações de comutação para a equação de campo livre real ou complexo, de spin arbitrário, o que nos permitem resolver por iteração os problemas em teoria quântica de campos. Todo formalismo parte então de um lagrangeano, de onde são obtidas as equações de campo cuja solução exata em geral não conhecemos. Partimos para uma solução por iteração, o que é possível pois as funções de Green e os comutadores já são conhecidos para o caso livre. Obtemos deste modo uma solução aproximada em termos de potências sucessivas da constante de acoplamento.

III - Matriz S

III-1. Introdução

Ao resolvermos qualquer problema em teoria quântica de campos, estamos mais interessados em discutir processos de espalhamento do que medidas de campos ϕ . Isto porque o que medimos na realidade são secções de choque obtidas após haver cessado a interação e não os campos interagintes.

Para este fim, usamos o formalismo da matriz S, a qual

conecta o estado inicial do sistema, no qual as partículas não interagem entre si, e o estado final, que corresponde às partículas espalhadas e novamente sem interações entre si.

Se $|i\rangle$ é o vetor estado que descreve o sistema no tempo $t = -\infty$ então $S|i\rangle$ nos dá o comportamento assintótico do sistema no tempo $t = +\infty$. Desta forma

$$\langle f | S | i \rangle \quad (3.1)$$

nos dá a amplitude de transição de um estado $|i\rangle$ em $t = -\infty$ para um estado $|f\rangle$ em $t = +\infty$.

III-2. Formulação hamiltoniana da matriz S

Como já mencionamos em II-1, a evolução temporal de um sistema pode ser descrita de várias maneiras.

Na representação de Schrödinger a evolução temporal está inteiramente contida no vetor estado que obedece à equação de Schrödinger

$$H^S | \Phi^S(t) \rangle = i \frac{\partial}{\partial t} | \Phi^S(t) \rangle \quad (3.2)$$

onde H^S é o operador hamiltoniano

$$H^S = H_0^S + H_I^S = \int d^3x \mathcal{H}$$

Podemos passar para nova representação, na qual o vetor estado é independente do tempo, por meio da transformação canônica¹⁰

$$|\Phi^S(t)\rangle = e^{-iH^S t} |\Phi^H\rangle \quad (3.4)$$

para o vetor estado e

$$F^S(x) = e^{-iH^S t} F^H(x) e^{iH^S t} \quad (3.4a)$$

para os operadores.

Da (3.4) é fácil notar que os operadores F^H nesta representação (Heisenberg) obedecem à equação

$$i \frac{\partial F^H}{\partial t} = [F^H, H^H] \quad (3.5)$$

ou seja, a formulação variacional corresponde a resolver a teoria na representação de Heisenberg⁷.

Uma terceira representação utilizada é a de interação, também chamada de Dirac, que é ligada à de Schrödinger por

$$|\Phi^D(t)\rangle = e^{iH_0 t} |\Phi^S(t)\rangle \quad F^D(t) = e^{iH_0 t} F^S e^{-iH_0 t} \quad (3.6)$$

Daí obtemos que a evolução temporal de um operador na representação de Dirac é da mesma forma que a de um campo livre. O estado $|\Phi^D(t)\rangle$ satisfaz a equação

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Phi^D(t)\rangle = H_I^D(t) |\Phi^D(t)\rangle \quad (3.7)$$

onde H_I^D é a parte de interação do hamiltoniano, escrito na representação de Dirac.

Bastante importante, em nosso trabalho, é a relação entre as representações de Heisenberg e de Dirac. A primeira é aquela na qual é desenvolvida a formulação variacional e a segunda é a da matriz S. Supondo que a evolução de $|\Phi^D(t)\rangle$ seja dada por

$$|\Phi^D(t)\rangle = U(t, t_0) |\Phi^D(t_0)\rangle \quad (3.8)$$

podemos provar a relação¹⁰

$$F^H(t) = U^{-1}(t, t_0) F^D(t) U(t, t_0) \quad (3.9)$$

Da equação (3.7) segue que a dinâmica do operador é dada por

$$i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H_I^D(t) U(t, t_0) \quad U(t_0, t_0) = 1 \quad (3.10)$$

Tomando $t_0 = -\infty$, o estado $|\Phi^D(t_0)\rangle$ corresponde ao estado $|i\rangle$ da (3.1) e é fácil notar que a matriz S é dada por

$$|f\rangle \equiv |\Phi^D(\infty)\rangle = S|i\rangle \equiv S|\Phi^D(-\infty)\rangle \quad (3.11)$$

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0)$$

A solução da equação (3.10) é dada por^{10, 11}

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T \{ H_I^D(t_1) \dots H_I^D(t_n) \} \quad (3.12)$$

ou ainda

$$S = U(\infty, -\infty) = T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} H_I(y) dy} \quad (3.13)$$

onde T é o operador ordenação temporal, que faz com que os campos atuem em ordem temporal crescente.

Sendo insatisfatória, no entanto, a maneira como foi encontrada a (3.13), já que a equação inicial (3.10) não é covariante, pois o tempo desempenha um papel diferente das demais variáveis e isto nos obriga a tomar um sistema de referência particular, é introduzido o conceito de superfície "space-like" \mathcal{C} , sendo a única condição sobre ela imposta a de que a normal η_μ em qualquer ponto satisfaça a $\eta_\mu \eta_\mu > 0$. Podemos visualizar isto dizendo que não há dois pontos sobre \mathcal{C} que possam ser ligados por um sinal de luz. Com o objetivo de encontrar uma versão covariante da equação de Schrödinger, Schwinger¹² procura um operador $U(\mathcal{C})$ tal que $F^D(x)$ satisfaça a equações de campos livres,

$$F^D(x) = U(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0) F^H(x) U^{-1}(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0) \quad (3.14)$$

Desta forma a evolução do estado é dada por

$$|\Phi^D(\mathcal{C})\rangle = U(\mathcal{C}, \mathcal{C}_0) |\Phi^D(\mathcal{C}_0)\rangle \quad (3.15)$$

A fim de que $F^D(x)$ dependa apenas do ponto x e não da particular superfície \mathcal{C} , a forma de $U(\mathcal{C})$ deve ser restringida, de modo que

$$\frac{\delta F^D(x)}{\delta G(x')} = \left[\frac{\delta U(\sigma)}{\delta G(x')} U^{-1}(\sigma), F^D(x) \right] = 0 \quad (3.16)$$

Isto será satisfeito se $\frac{\delta U(\sigma)}{\delta G(x')} U^{-1}(\sigma)$ for uma função invariante dos operadores no ponto x' . Além disto, o caráter unitário de U requer que

$$i \frac{\delta U(\sigma)}{\delta G(x')} U^{-1}(\sigma) \quad (3.17)$$

seja hermitiano.

Esta última condição pode ser escrita na forma

$$i \frac{\delta U(\sigma)}{\delta G(x)} = \mathcal{H}_I^D(x) U(\sigma) \quad (3.18)$$

que é a análoga covariante da equação de Schrödinger, e é chamada equação de Tomonaga-Schwinger^{13,12}. Ela nos dá para a matriz S a mesma forma anteriormente encontrada, desde que \mathcal{H}_I^D seja interpretado como a densidade de hamiltoniano de interação.

Partindo da equação de Schrödinger, Tomonaga¹⁴ faz uso do conceito de superfícies space-like e obtém de outra maneira a mesma equação (3.18). Para que esta tenha solução ele mostra que é preciso que seja satisfeita a condição de integrabilidade

$$\left[\mathcal{H}_I^D(x'), \mathcal{H}_I^D(x'') \right] - i \frac{\partial \mathcal{H}_I^D(x')}{\partial G(x'')} + i \frac{\partial \mathcal{H}_I^D(x'')}{\partial G(x')} = 0 \quad (3.18a)$$

$$[(x-x')^2 > 0]$$

que é uma maneira de expressar o princípio da causalidade.

III-3. Hamiltoniano de interação¹⁵

O requisito para calcularmos os elementos de matriz do operador S é conhecermos a forma exata de \mathcal{H}_I^D .

Históricamente a primeira maneira de encontrar \mathcal{H}_I^D foi baseada em considerações de correspondência com o hamiltoniano da equação de Schrödinger^{13,16}. Quando \mathcal{L}_I não contém derivadas de campos consiste simplesmente em substituir os campos na representação de Heisenberg por campos na representação de Dirac.

Surgem no entanto dificuldades¹⁷ quando o lagrangeano de interação contém derivadas de campos. Tomado da maneira acima, \mathcal{H}_I^D não satisfaz a condição de integrabilidade, que é a condição necessária para a existência de $U(t, t_0)$ ¹⁸.

Para resolver estes problemas usa-se o formalismo canônico^{19,20}. O lagrangeano é considerado como funcional de ϕ e de suas derivadas de ordem n no máximo. Devido às relações de comutação entre as variáveis canonicamente conjugadas, podemos dizer que estes pares conjugados, nas representações de Heisenberg e de Dirac, estão ligados por transformações unitárias

$$\frac{\partial^{\lambda} \phi^H(x)}{\partial x^{\lambda}} = U^{-1}(t, t_0) \frac{\partial^{\lambda} \phi^D(x)}{\partial x^{\lambda}} U(t, t_0)$$

$$\pi_{\lambda}^H(x) = U^{-1}(t, t_0) \pi_{\lambda}^D(x) U(t, t_0)$$

$\lambda = 0, 1, 2, \dots, n-1$
(3.19)

$$\pi_{\lambda}^H = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi^H)}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^{\lambda} \phi^H}{\partial x^{\lambda}} \right) \right)}$$

$$\pi_{\lambda}^D = \frac{\partial \mathcal{L}_0(\phi^D)}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^{\lambda} \phi^D}{\partial x^{\lambda}} \right) \right)}$$

O índice λ varia de 0 até $n-1$ devido ao fato de $\frac{\partial^n \phi^H}{\partial x^\lambda}$ não ter momentum conjugado ($\pi_\lambda^H = 0$). Desta forma, se \mathcal{L}_I contiver $\frac{\partial^n \phi^H}{\partial x^\lambda}$, pode-se mostrar que⁶

$$\frac{\partial^n \phi^H}{\partial x^\lambda} \neq U^{-1}(t, t_0) \frac{\partial^n \phi^D}{\partial x^\lambda} U(t, t_0) \quad (3.20)$$

e a mudança de representação poderá ser obtida substituindo $\frac{\partial^n \phi^H}{\partial x^\lambda}$ por $\frac{\partial^n \phi^D}{\partial x^\lambda}$ para $\lambda \leq n-1$, mas não para $\lambda = n$. Este último termo conterá um fator extra, que será responsável pela mudança de forma que ocorre na passagem de uma representação para outra.

Para maior clareza, vejamos como se comporta $H(\phi^H) = H_0(\phi^H) + H_I(\phi^H)$ frente a uma mudança de representação. Por $H(\phi^H), H_0(\phi^H)$ e $H_I(\phi^H)$ estamos indicando uma forma específica do funcional. Se escrevemos $H_0(\phi^D)$ entenderemos isto como um funcional de igual forma mas expresso em termos de campos ϕ^D .

O lagrangeano \mathcal{L}_0 dos campos livres contém o termo em $\frac{\partial^n \phi^H}{\partial x^\lambda}$. Frente a uma mudança de representação, este termo passa para $\frac{\partial^n \phi^D}{\partial x^\lambda} + A(\phi^D)$ onde A é um funcional de campos, ou seja, $\mathcal{L}_0(\frac{\partial^n \phi^H}{\partial x^\lambda}) \rightarrow \mathcal{L}_0(\frac{\partial^n \phi^D}{\partial x^\lambda} + A)$ que não é a parte de campos livres para os campos de Dirac. Então, da mesma forma, $H_0(\frac{\partial^n \phi^H}{\partial x^\lambda})$ passará para $H_0(\frac{\partial^n \phi^D}{\partial x^\lambda} + A)$. Como o expoente da matriz S é a parte de interação de todo hamiltoniano na nova representação, $H_0(\phi^H)$ contribuirá para H_I^D , e assim concluímos que não podemos encontrar H_I^D simplesmente substituindo $\phi^H \rightarrow \phi^D$ em H_I^H .

Vamos exemplificar o estabelecido acima para o caso de $\mathcal{L}(\phi^H)$ envolver no máximo derivadas primeiras de ϕ^H , um cam-

po escalar sem spin

$$\mathcal{L}(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) = \mathcal{L}_0(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) + \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) \quad (3.21)$$

O momentum conjugado a ϕ^H é dado por

$$\begin{aligned} \pi^H(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^H} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\phi}^H} + \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} = \\ &= \dot{\phi}^H + \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)}{\partial \dot{\phi}^H} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ao par canonicamente conjugado (ϕ^H, π^H) corresponderá o par (ϕ^D, π^D) . Então

$$\phi^H(x) = U^{-1}(t, t_0) \phi^D(x) U(t, t_0) \quad (3.23)$$

$$\pi^H(x) = U^{-1}(t, t_0) \pi^D(x) U(t, t_0)$$

onde

$$\pi^D(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_0(\phi^D, \partial_\mu \phi^D)}{\partial \dot{\phi}^D} = \dot{\phi}^D \quad (3.24)$$

Desta forma, obtemos usando a (3.22) e a (3.23)

$$\begin{aligned} U \dot{\phi}^H U^{-1} &= U \left(\pi^H - \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} \right) U^{-1} = \\ &= \dot{\phi}^D - U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^D} U^{-1} \equiv \dot{\phi}^D + A(\phi^D) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Nosso objetivo é encontrar o hamiltoniano de interação na representação de Dirac. Lembrando a definição da densidade de ha-

miltoniano, podemos mostrar que (ver Apêndice A)

$$\mathcal{H}_I^D = -\mathcal{L}_I(\phi^D, \partial_\mu \phi^D) + \frac{1}{2} \left(\int \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} \right)^2 \quad (3.26)$$

ou seja, o hamiltoniano de interação na representação de Dirac pode ser escrito como o lagrangeano de interação com os campos nesta nova representação, a menos de sinal, juntamente com outro termo proveniente da (3.25).

No caso da eletrodinâmica, o lagrangeano de interação não envolve derivadas. Com isto, o último termo da (3.26) é nulo. Temos então

$$\mathcal{H}_I^D = -\mathcal{L}_I(\phi^D) = -\int \mu^0 A_\mu^D \quad (3.27)$$

isto é, basta substituir os campos ϕ^H por campos ϕ^D .

Nas interações (pseudo) vetoriais entre mesons e nucleons o lagrangeano de interação envolve derivadas de campo (mais especificamente, envolve a derivada de maior ordem contida em \mathcal{L})⁶.

Neste caso, usando a (2.19) e a (3.26) obtemos

$$\mathcal{H}_I^D = -\int \mu^0 \frac{\partial \phi^D}{\partial \psi_\mu} + \frac{1}{2} \left(\int \mu^0 \delta_{4\mu} \right) \quad (3.28)$$

que, posto numa forma covariante, fica

$$\mathcal{H}_I^D = \int \mu^0 \frac{\partial \phi^D}{\partial \psi_\mu} + \frac{1}{2} \left(\int \mu^0 \eta_\mu \right) \quad (3.29)$$

Nesta última parte, η_μ é normal à superfície \mathcal{G} , correspondendo este termo a uma interação do tipo δ .

Mostramos assim que a formulação hamiltoniana da matriz S é obtida a partir da equação de Schrödinger (ou da de Tomonaga-Schwinger) através de uma troca conveniente de representação. Isto nos permite calcular os elementos de matriz que aparecem em termos dos novos campos, cuja evolução é a de campos livres, que já é conhecida. O expoente desta matriz S é dado pela parte de interação do hamiltoniano total (Heisenberg) transformado para a nova representação. Ele constará a menos de sinal do lagrangeano de interação escrito em termos de campos de Dirac, acrescido de um termo dependente da normal à superfície \mathcal{G} no caso de \mathcal{L}_I conter a derivada de mais alta ordem. Como isto não ocorre com a eletrodinâmica, temos

$$\mathcal{H}_I^D = -\mathcal{L}_I(\phi^D) \quad (3.30)$$

de onde a matriz S neste caso é dada por²⁰

$$S = T \exp \left(i \int d^4y \mathcal{H}_I^D(y) \right) \quad (3.31)$$

III-4. Formulação Lagrangeano da matriz S

Uma formulação diferente para a matriz S é dada por Bogoliubov²¹, que encontra uma forma para a mesma sem fazer referência ao formalismo hamiltoniano ou à equação de Schrödinger. Em seu lugar

Ele impõe que ela deve obedecer a certas condições físicas bastante gerais.

Inicialmente supõe que o lagrangeano de interação é dado por $L_I(x)g(x)$ onde $g(x)$ é a intensidade com a qual a interação está "ligada". Este parâmetro pode variar entre 0 e 1 , sendo zero o valor no passado e futuro remotos.

A matriz S é dada por

$$|\Phi(\infty)\rangle = |\Phi(g)\rangle = S(g)|\Phi(-\infty)\rangle \quad (3.32)$$

de onde segue que a primeira condição, a conservação da norma, nos leva a

$$\langle \Phi(g) | \Phi(g) \rangle = \langle \Phi(-\infty) | \Phi(-\infty) \rangle \quad (3.33)$$

ou seja,

$$S S^\dagger = 1 \quad (3.33a)$$

que expressa²² a conservação de probabilidade.

Outra condição que deve ser satisfeita pela matriz S é a da invariância relativística, segundo a qual, frente a uma transformação de Lorentz L ,

$$x \rightarrow x' = Lx \quad (3.34)$$

$$g(x) \rightarrow Lg(x) = g(L^{-1}x)$$

$$|\Phi(g)\rangle \rightarrow |\Phi'(Lg)\rangle = U_L |\Phi(g)\rangle$$

de onde segue que

$$S(Lg) = U_2 S(g) U_2^+ \quad (3.34a)$$

Queremos ainda que seja satisfeito o princípio da causalidade, de acordo com o qual, qualquer evento que ocorre no sistema deverá influenciá-lo somente no futuro. Posto em forma matemática temos

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left[\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} S^+(g) \right] = 0 \quad (x, y \in \sigma) \quad (3.35)$$

Usando estas condições, Bogoliubov encontra uma forma para a matriz S e, através de correspondência com a teoria quase-clássica, ele obtém

$$S = T e^{i \int L_I(\phi^p) d^4y} \quad (3.36)$$

ou seja, ela é posta em termos do lagrangeano de interação escrito com os campos na representação de Dirac.

No caso de L_I não conter derivadas de campos, esta forma coincide com a hamiltoniana. Porém, nos casos de L_I envolver derivadas de campos, aparentemente surge uma contradição, pois as duas formas nos darão diferentes elementos de matriz para um mesmo processo (ver fórmula (3.26)).

Matthews²³, ao estudar a matriz S para espalhamento meson-nucleon, observou que aparecem elementos de matriz do tipo

$$\langle 0 | T \left\{ \frac{\partial \phi^0}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi^0}{\partial y_\nu} \right\} | 0 \rangle = \frac{\partial^2 \Delta_F(x-y)}{\partial x_\mu \partial y_\nu} - i \gamma_\mu \gamma_\nu \delta^4(x-y) \quad (3.37)$$

e que o último termo da (3.37) cancela exatamente a contribuição do último termo da (3.29). Desta forma, podemos, na prática, tomar como expoente da matriz, $\mathcal{L}_I(\phi^0)$, e usar a prescrição²⁴

$$\langle 0 | T \left\{ \frac{\partial \phi^0}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi^0}{\partial y_\nu} \right\} | 0 \rangle \stackrel{\text{cf.}}{=} \frac{\partial^2 \Delta_F(x-y)}{\partial x_\mu \partial y_\nu} \quad (3.38)$$

dada por Bogoliubov.

Uma justificativa deste procedimento é dada por Nishijima⁴. Para tanto, ele define a matriz S como

$$S = T^* e^{i \int \mathcal{L}_I(\phi^0, \partial_\mu \phi^0) d^4 y} \quad (3.39)$$

onde o operador T^* prescreve que, se houver processos de limite na teoria estes devem ser tomados após a ordenação temporal. Desta forma, os elementos de matriz do tipo (3.37) ficam

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T^* \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y_\nu} \right\} | 0 \rangle = \\ & = \lim_{\substack{\epsilon_\mu \rightarrow 0 \\ \epsilon_\nu \rightarrow 0}} \langle 0 | T \left\{ \frac{\phi(x+\epsilon_\mu) - \phi(x-\epsilon_\mu)}{2\epsilon_\mu} \cdot \frac{\phi(y+\epsilon_\nu) - \phi(y-\epsilon_\nu)}{2\epsilon_\nu} \right\} | 0 \rangle \stackrel{(3.40)}{=} \\ & = \frac{\partial^2 \Delta_F(x-y)}{\partial x_\mu \partial y_\nu} \end{aligned}$$

que concorda com a (3.38).

Concluimos, então, que a matriz S pode sempre ser obtida em forma lagrangeana a partir de princípios gerais, desde que o operador de ordenação temporal seja definido cuidadosamente. Um problema interessante a ser analisado é o da possibilidade de obtenção de T^* da própria formulação da teoria, eliminando-se assim a necessidade de uma prescrição "ad hoc".

IV - Equivalência das formulações: Eletrodinâmica

A interação entre elétrons e fótons pode ser descrita por um lagrangeano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\Psi^H, \bar{\Psi}^H, A^H) + \mathcal{L}_I(\Psi^H, \bar{\Psi}^H, A^H) \quad (4.1)$$

$$\mathcal{L}_I(\Psi^H, \bar{\Psi}^H, A^H) = \int d^4x A_\mu^H = i e \bar{\Psi}^H \gamma_\mu \Psi^H A_\mu^H$$

do qual podemos obter as equações de movimento através do princípio variacional^{*}

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m) \Psi^H(x) &\equiv D(x) \Psi^H(x) = i e \gamma_\mu \Psi^H(x) A_\mu^H(x) \\ \bar{D}(x) \bar{\Psi}^H(x) &= - i e \bar{\Psi}^H(x) \gamma_\mu A_\mu^H(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\square(x) A_\mu^H(x) = - j_\mu^H(x)$$

^{*} Os campos com o símbolo H estão na representação de Heisenberg enquanto que os sem o sinal estão na de Dirac

A solução por iteração é possível dadas as relações de comutação de campos livres

$$[\Psi(x), \Psi(x')]_+ = [\bar{\Psi}(x), \bar{\Psi}(x')]_+ = 0$$

$$[A_\mu^{\text{in}}(x), A_\nu^{\text{in}}(x')] = \lim_{m \rightarrow 0} i \Delta(x-x') \delta_{\mu\nu} \quad (4.3)$$

$$[\Psi(x), \bar{\Psi}(x')]_+ = -i S_{\alpha\beta}(x-x') \quad [A_\mu^{\text{in}}(x), \frac{\partial A_\nu^{\text{in}}(x')}{\partial t'}]_{t=t'+\nu} = i \delta_{\mu\nu}^2(x-x')$$

Usando o formalismo da matriz S , é possível resolver os mesmos problemas no caso de desejarmos comportamentos assintóticos. A forma da matriz S é a mesma, quer seja formulada em termos de \mathcal{K} ou em termos de \mathcal{L} , pois o Lagrangeano de interação não contém derivadas. Neste caso ambas as definições de operadores "time-ordering" coincidem, $\bar{T} = T^*$ e a matriz é dada por

$$S = T \exp \left[i \int d^4y A_\mu(y) d^4y \right] \quad (4.4)$$

Convém salientar que o funcional de campos que aparece no expoente da (4.4) tem a mesma forma que $\mathcal{L}_I(\psi, \bar{\psi}, A)$ mas os campos estão em representação diferente.

É fácil verificar através de uma simples expansão em potências de \mathcal{L}_I que os elementos de matriz para um processo, tanto obtido da (4.4) quanto obtido da solução da (4.2) nos dão idênticos resultados. Desejamos, no entanto, provar que isto é verdadeiro em todas as ordens de perturbação, ou seja, que ambos os formalismos são

completamente equivalentes. Para isto, vamos mostrar que, partindo das expressões

$$T\{\psi(x)S\}, \quad T\{\bar{\psi}(x)S\} \quad \text{e} \quad T\{A_\mu(x)S\} \quad (4.5)$$

podemos obter, aplicando sobre elas os operadores $D(x)$, $\bar{D}(x)$ e $\square(x)$ definidos na (2.14), as equações corretas de movimento para os diversos campos, desde que S tenha a forma dada pela (4.4). Caso tal seja realmente possível, esta mostrada a equivalência entre os dois formalismos.

Inicialmente, vamos estudar a expressão $T\{\psi(x)S\}$. Usando o operador "time-ordering" e a relação 3.9, ela pode ser posta na forma

$$T\{\psi(x)S\} = \{U(\infty, x_0) \psi(x) U(x_0, -\infty)\} = \quad (4.6)$$

$$= U(\infty, x_0) [U(x_0, -\infty) U^{-1}(x_0, -\infty)] \psi(x) U(x_0, -\infty) = S \psi^H(x)$$

Aplicando o operador $D(x)$ ao último membro desta expressão, resulta

$$D(x) \{S \psi^H(x)\} = S D(x) \psi^H(x) \quad (4.7)$$

Para obter o resultado da aplicação de $D(x)$ ao primeiro membro da eq. (4.6), partimos inicialmente de um produto ordenado

$$T\{\psi(x) O(y)\} \quad O(y) \equiv O[\phi(y)] \quad (4.8)$$

onde $O(y)$ é um produto de operadores campo no ponto y , contendo um número par de campos de férmions e nenhuma derivada. A (4.8) pode ser escrita

$$T\{\psi(x) O(y)\} = \theta(x_0 - y_0) \psi(x) O(y) + \theta(y_0 - x_0) O(y) \psi(x) \quad (4.9)$$

ao fazermos atuar $D(x)$ sobre a (4.9) devemos lembrar que

$$D(x) \psi(x) = 0 \quad \theta(x_0 - y_0) = 1 - \theta(y_0 - x_0) \quad (4.10)$$

de onde segue

$$\begin{aligned} D(x) T\{\psi(x) O(y)\} &= \\ &= \int d^4x' \frac{\partial \theta(x_0 - y_0)}{\partial x'_0} \psi(x) O(y) + \int d^4x' \frac{\partial \theta(y_0 - x_0)}{\partial x'_0} O(y) \psi(x) \quad (4.11) \\ &= -i \int d^4x' \delta(x_0 - y_0) \psi(x) O(y) + i \int d^4x' \delta(x_0 - y_0) O(y) \psi(x) \\ &= -i \int d^4x' \delta(x_0 - y_0) [\psi(x), O(y)] \end{aligned}$$

Como o Lagrangiano de interação da EQQ satisfaz todas as condições impostas sobre $O(y)$, podemos tomar na fórmula (4.11) S como $O(y)$:

$$D(x) T\{\psi(x) S\} = -i \int d^4x' \delta(x_0 - y_0) [\psi(x), S] \quad (4.12)$$

Usando a matriz S dada na (3.12) e a forma explícita do Lagrangiano de interação obteremos no 2º membro de (4.12) uma soma de n parcelas do tipo

$$[\psi(x), \int_{\mu}(y) A_{\mu}(y)] \int_{\mu}(x_1) A_{\mu}(x_1) \dots \int_{\mu}(x_{m-1}) A_{\mu}(x_{m-1}) \quad (4.13)$$

ou seja²⁵

$$D(x) T\{\psi(x)S\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n-1)!} \int d^4y d^4x_1 \dots d^4x_{n-1} \times$$

$$\times T\left\{(-i) \delta_{\mu}^4 \delta(x_0 - y_0) [\psi(x), i \int_{\mu}(y) \delta_{\mu}^4 \psi(y) A_{\mu}(y)] \times \right. \quad (4.14)$$

$$\left. \times \int_{\mu}(x_1) A_{\mu}(x_1) \dots \int_{\mu}(x_{n-1}) A_{\mu}(x_{n-1}) \right\}$$

Devido a $\delta(x_0 - y_0)$ que aparece junto ao comutador, este só será diferente de zero para tempos iguais. Usando a (4.3) obtemos

$$\delta_{\mu}^4 \delta(x_0 - y_0) [\psi(x), \int_{\mu}(y) \delta_{\mu}^4 \psi(y) A_{\mu}(y)] = \quad (4.15)$$

$$= \int_{\mu} A_{\mu}(y) \bar{\psi}(y) \delta^4(x-y)$$

²⁵ Este mesmo resultado poderia ser obtido partindo da (4.8) diretamente com S e usando a (3.12) para esta. É no entanto uma maneira bastante mais longa. Nossa forma de obter a (4.14) é baseada em Nishijima (ref. 7, cap. VII) e Salam (ref. 25).

ou seja

$$\begin{aligned}
 D(x) T\{\psi(x)S\} &= \\
 &= T\left\{ie \gamma_\mu \psi(x) A_\mu(x) e^{i\int d\mu(y) A_\mu(y) dx}\right\} = (4.16) \\
 &= ie T\left\{\gamma_\mu \psi(x) A_\mu(x) S\right\}
 \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga a utilizada na equação (4.6), a eq. acima pode ser escrita

$$D(x) T\{\psi(x)S\} = ie S \gamma_\mu \psi^H(x) A_\mu^H(x) \quad (4.17)$$

Reunindo a (4.6), (4.7) e a (4.17) obtemos

$$D\psi^H(x) = ie \gamma_\mu \psi^H(x) A_\mu^H(x) \quad (4.18)$$

que é a equação do campo para $\psi^H(x)$. Desta forma provamos que, partindo da matriz S dada pela (4.4) obtemos a equação de movimento para o campo $\psi^H(x)$.

A técnica consiste então em mostrar que, partindo da relação

$$T\{\psi(x)S\} = S\psi^H(x)$$

e aplicando a ambos os membros o operador $D(x)$ obtemos do segundo membro a parte homogênea da equação para ψ^H e do primeiro membro, a parte não homogênea desta mesma equação.

Caso iniciemos a expressão $T\{\psi(x)S\}$, a única diferença será o operador a ser aplicado, $\bar{D}(x)$ e nas fórmulas correspondentes a (4.14) e (4.15), pois

$$\begin{aligned} \delta_4 \delta(x_0 - y_0) [\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y) \delta_\mu^\nu \psi(y) A_\mu(y)] &= \\ &= - \bar{\psi}(y) \delta_\mu^\nu A_\mu(y) \delta^4(x-y) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Esta troca de sinal faz com que as equações para ψ^H e $\bar{\psi}^H$ tenham partes de interação com sinais diferentes.

Para completar a prova da equivalência, precisamos mostrar que, com o auxílio da forma dada para a matriz S , é possível obter a equação de campo para $A_\mu^H(x)$.

O aparecimento agora de derivada de segunda ordem em relação ao tempo dá origem a expressões do tipo

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial x_0^2} T \{ A_\mu(x) O(y) \} = \\ & = - \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \delta(x_0 - y_0) A_\mu(x) O(y) + \theta(x_0 - y_0) \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_0} O(y) - \right. \\ & \quad \left. - \delta(x_0 - y_0) O(y) A_\mu(x) + \theta(y_0 - x_0) O(y) \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_0} \right\} = \\ & = - \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \delta(x_0 - y_0) [A_\mu(x), O(y)] + T \left\{ \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_0} O(y) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Devido ao fato de $O(y)$ não conter derivadas de A_μ , o comutador $[A_\mu, O]$ será nulo para tempos iguais, resultando, assim,

$$\square(x) T \{ A_\mu(x) O(y) \} = - \delta(x_0 - y_0) \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_0}, O(y) \right] \quad (4.21)$$

Novamente o Lagrangeano de interação da eletrodinâmica satisfaz as condições impostas a $O(y)$. Obtemos então

$$\begin{aligned} \square(x) T \{ A_\mu(x) S \} &\equiv S \square(x) A_\mu^H(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n-0)!} \int d^4y d^4x_1 \dots d^4x_{n-1} T \{ (-1) \delta(x_0 - y_0) \times \\ &\times \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_0}, j_\mu(y) A_\mu(y) \right] j_\mu(x_1) A_\mu(x_1) \dots j_\mu(x_{n-1}) A_\mu(x_{n-1}) \} \\ &= - S j_\mu^H(x) \end{aligned} \quad (4.22)$$

que é a equação do campo $A_\mu^H(x)$.

Desta forma, provamos que o formalismo da matriz S é equivalente às equações de Euler-Lagrange para a eletrodinâmica, desde que a matriz S tenha uma forma bem determinada. Podemos ver que se a matriz S fosse dada por outra expressão que não a (4.4), não obteríamos a (4.18) ou a (4.22) e os dois formalismos nos dariam resultados diferentes.

V - Equivalência das formulações: Lagrangeanos de interação sem derivadas

Como foi visto no capítulo III, no caso de o Lagrangeano de interação não conter derivadas de campos, o expoente da matriz S é escrito com a mesma forma que a parte de interação do Lagrangeano

do princípio variacional. A diferença entre ambos é a representação na qual estão os campos.

Neste capítulo vamos mostrar que os dois formalismos são equivalentes, através de uma generalização do que foi mostrado para a eletrodinâmica. Uma alternativa para obter as equações básicas usadas será dada, partindo do teorema de Wick.

Seja $\phi(x)$ um campo qualquer, cuja equação de movimento é dada por

$$K(x) \phi(x) = 0 \quad (5.1)$$

Suporemos que a equação de movimento de ϕ^H tenha sido reescrita de forma tal que o coeficiente da derivada temporal seja um. Se a matriz S é dada por

$$S = T e^{i \int L_I(\phi) d^4y} \quad (5.2)$$

então as fórmulas (4.14) e (4.22) podem ser generalizadas, resultando em

$$\begin{aligned} K(x) T \{ \phi(x) S \} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{(n-1)!} \int d^4y d^4x_1 \dots d^4x_{n-1} \times \\ &\times T \left\{ \delta(x_0 - y_0) \left[\frac{\partial^{n-1} \phi(x)}{\partial x_0^{n-1}}, L_I(y) \right] L_I(x_1) \dots L_I(x_{n-1}) \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde n é a ordem máxima da derivada temporal contida na equação de campo livre.

Basta agora mostrar que o segundo membro da (5.3) nos

leva à parte da equação para ϕ^N dependente da interação.

Como $L_I(y)$ não contém derivadas do campo ϕ , podemos escrever o comutador que aparece na (5.3) sob a forma

$$\begin{aligned} & \delta(x_0 - y_0) \left[\frac{\partial^{m-1} \phi(x)}{\partial x_0^{m-1}}, L_I(y) \right] = \\ & = \delta(x_0 - y_0) \left[\frac{\partial^{m-1} \phi(x)}{\partial x_0^{m-1}}, \phi(y) \right] \frac{\partial L_I(y)}{\partial \phi(y)} = \\ & = i \delta^4(x - y) \frac{\partial L_I(y)}{\partial \phi(y)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Nesta fórmula usamos o fato de que se a ordem da derivada temporal que aparece em $K(x)$ é m , então é válida a relação de comutação

$$\left[\frac{\partial^{m-1} \phi(x)}{\partial x_0^{m-1}}, \phi(y) \right]_{x_0=y_0} = i \delta^3(x - y) \quad (5.4a)$$

Colocando esta forma na (5.3)

$$\begin{aligned} K(x) T \{ \phi(x) S \} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} \int d^4 y_1 d^4 y_2 \dots d^4 y_{n-1} \times \\ & \times T \left\{ - \delta^4(x - y) \frac{\partial L_I(y)}{\partial \phi(y)} L_I(y_1) \dots L_I(y_{n-1}) \right\} = \\ & = - T \left\{ \frac{\partial L_I(x)}{\partial \phi(x)} e^{i \int L_I(\phi) d^4 y} \right\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Vamos agora usar o operador δ e ordenar os dois membros da (5.5)

$$\delta K(x) \phi^H(x) = - \delta U^{-1}(x_0, -\infty) \frac{\delta L_I(\phi)}{\delta \phi(x)} U(x_0, -\infty) = \quad (5.6)$$

$$= - \delta \frac{\delta L_I(U^{-1}\phi U)}{\delta U^{-1}\phi U} = - \delta \frac{\delta L_I(\phi^H(x))}{\delta \phi^H(x)}$$

que é a equação de movimento de ϕ^H obtida do princípio variacional.

Dois pontos devem ser agora ressaltados. O primeiro deles é que a passagem dos operadores U e U^{-1} para dentro da derivada na (5.6) só é possível nos casos em que todos os termos envolvidos nesta sejam campos independentes. No caso de L_I envolver a derivada de ϕ , por exemplo, isto não será mais possível, pois nos levaria a resultados errados. Exemplificando

$$\frac{\delta \phi^H}{\delta \phi^H} = 0 \quad U \frac{\delta \phi^H}{\delta \phi} U^{-1} = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\delta U \phi^H U^{-1}}{\delta U \phi^H U^{-1}} = \frac{\delta (\phi + A(\phi))}{\delta \phi} = \frac{\delta A(\phi)}{\delta \phi} \neq 0$$

O segundo ponto é quanto ao sinal da parte de interação da equação (5.6). No caso de termos ψ e $\bar{\psi}$, estes sinais são diferentes. Isto aparece devido à regra²⁶

$$\frac{\delta ABC \dots}{\delta B_1} = \frac{\delta A}{\delta B_1} BC \dots - A \frac{\delta B}{\delta B_1} C \dots + \dots \quad (5.8)$$

onde $B_1, A, B, C \dots$ são campos de fêrmions. Outra regra para os sinais levaria a contradições.

A fórmula básica (5.5) para mostrarmos a equivalência

pode ser obtida também a partir do teorema de Wick^{27,28}.

Dado um produto ordenado de campos

$$T \{ \phi(x) A(x_1) B(x_2) \dots \} \quad (5.9)$$

podemos expandi-lo como somas sobre todas as possíveis contrações dos operadores num produto normal. Ao aplicarmos $K(x)$ sobre a (5.9) o resultado será nulo, a menos que $\phi(x)$ esteja contraído com algum operador $\phi(x_i)$. Quando isto ocorrer, devido a

$$K(x) \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(x_i) | 0 \rangle = i \delta^4(x-x_i)$$

obteremos

$$K(x) T \{ \phi(x) A(x_1) B(x_2) \dots \} = i \delta^4(x-y) \frac{\partial T \{ AB \dots \}}{\partial \phi(y)} \quad (5.10)$$

que é chamada fórmula de redução na representação de Dirac²⁹. Ela pode ser escrita como

$$\begin{aligned} K(x) T \{ \phi(x) S \} &= \\ &= i T \left\{ \int d^4 z \frac{\partial \mathcal{L}_I(z)}{\partial \phi(z)} i \delta^4(x-z) S \right\} = \quad (5.11) \\ &= - T \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_I(x)}{\partial \phi(x)} S \right\} \end{aligned}$$

que reproduz a fórmula (5.5).

VI - Equivalência da formulação lagrangeana da matriz S com as equações de Euler-Lagrange

Mostramos no capítulo III que a matriz S pode ser escrita em termos de um funcional de campos com a mesma forma que o lagrangeano de interação. Esta formulação é devida a Bogoliubov e a Nishijima⁴. Se analisamos a maneira como eles a obtiveram, vemos que Bogoliubov identifica os termos através de analogia com a teoria quasi-clássica no caso da eletrodinâmica; no caso de interações com derivadas, a forma e as prescrições sobre como calcular valores esperados no vácuo são obtidas por analogia com os trabalhos de Matthews (ver fórmulas (3.37) e (3.38)), o qual trata apenas de interação meson-nucleon. Nishijima, por sua vez, define a matriz S na forma lagrangeana com o auxílio do operador T^* , e mostra em casos bastante específicos que ela é equivalente à hamiltoniana.

Neste capítulo, vamos provar que a matriz S dada por

$$S = T^* e^{i \int L_I(\partial_\mu \phi) d^4y} \quad (6.1)$$

é equivalente às equações de campo, qualquer que seja a ordem das derivadas que apareçam em L_I . A demonstração será válida para qualquer tipo de campo ϕ , cuja derivada está contida no lagrangeano de interação. A linha de demonstração é semelhante à usada no capítulo anterior, com exceção do uso de T^* . Para simplicidade nos restringiremos neste trabalho a lagrangeanos que contenham apenas derivadas primeiras em forma linear de qualquer dos campos.

Inicialmente, vamos encontrar a fórmula de redução para o caso de um produto de campos onde houver uma derivada de campo. Da do um produto

$$\alpha(y) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial y_\mu} P(y) \quad P(y) \equiv P[\phi(y)] \quad (6.2)$$

onde $P(y)$ não contém derivadas, nosso ponto de partida é a aplicação do operador $K(x)$ sobre $T^* \{ \phi(x) \alpha(y) \}$. A existência de T^* faz com que possamos separar esta expressão numa diferença de dois termos que não contém derivadas:

$$\begin{aligned} T^* \{ \phi(x) P(y) \} &\equiv T^* \left\{ \phi(x) \frac{\partial \phi}{\partial y_\mu} P(y) \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon_\mu \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon_\mu} \left[T \{ \phi(x) \phi(y + \epsilon_\mu) P(y) \} - \right. \\ &\quad \left. - T \{ \phi(x) \phi(y - \epsilon_\mu) P(y) \} \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

O próximo passo consiste em separar cada produto $T\{\phi\phi\}$ em soma de produtos ordenados envolvendo apenas dois fatores. Obtendo cada parcela na forma $T\{\phi\phi\}$ ou $T\{\phi P\}$, a aplicação do operador $K(x)$ nos dará resultados já conhecidos dos capítulos anteriores. Podemos provar (ver Apêndice 2) que a (6.3) pode ser transformada em

$$\begin{aligned} &T^* \{ \phi(x) \phi(y) \} = \\ &= \lim_{\epsilon_\mu \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon_\mu} \left[T \{ \phi(x) \phi(y + \epsilon_\mu) \} P(y) - P(y) T \{ \phi(x) \phi(y - \epsilon_\mu) \} + (6.4) \right. \\ &+ \phi(y + \epsilon_\mu) T \{ \phi(x) P(y) \} - T \{ \phi(x) P(y) \} \phi(y - \epsilon_\mu) + \\ &\quad \left. + P(y) \phi(x) \phi(y - \epsilon_\mu) - \phi(y + \epsilon_\mu) \phi(x) P(y) \right] \end{aligned}$$

Resta agora aplicar o operador $K(x)$ sôbre a (6.4), lembrando antes que aplicado nos dois últimos tēmos dá resultado nulo, e que aplicado em $T\{\phi(x)\phi(y\pm\epsilon_\mu)\}$ nos dá $i\delta^4(x-y\mp\epsilon_\mu)$

$$\begin{aligned}
 & K(x) T^* \{ \phi(x) \phi(y) \} = \\
 & = \lim_{\epsilon_\mu \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon_\mu} \left\{ i\delta^4(x-y-\epsilon_\mu) P(y) - i\delta^4(x-y+\epsilon_\mu) P(y) + \right. \\
 & \left. + \phi(y+\epsilon_\mu) i\delta^4(x-y) \frac{\partial P(y)}{\partial \phi(y)} - \phi(y-\epsilon_\mu) i\delta^4(x-y) \frac{\partial P(y)}{\partial \phi(y)} \right\} \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

Tomando agora os limites, pois já houve ordenação no tempo, obtemos

$$\begin{aligned}
 & K(x) T^* \{ \phi(x) \alpha(y) \} = \\
 & = i\delta^4(x-y) \frac{\partial \phi}{\partial y_\mu} \frac{\partial P(y)}{\partial \phi(y)} + i \frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial y_\mu} P(y). \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

Lembrando que $\frac{\partial \phi}{\partial y_\mu}$ e ϕ são variáveis independentes, podemos, no segundo membro da (6.6), colocar $\frac{\partial \phi}{\partial y_\mu}$ dentro da derivada. Por outro lado $P(y)$ pode ser escrito como a derivada de $\alpha(y)$ em relação a $\frac{\partial \phi}{\partial y_\mu}$. Colocando isto na (6.6), obtemos a fórmula de redução desejada, que pode ser estendida para qualquer tipo de derivadas, de ordem superior ou de diversos campos

$$\begin{aligned}
 & K(x) T^* \{ \phi(x) \alpha(y) \} = \\
 & = i\delta^4(x-y) \frac{\partial \alpha(y)}{\partial \phi(y)} + i \frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial y_\mu} \frac{\partial \alpha(y)}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial y_\mu}} \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

Para provar a equivalência desejada, basta colocar S da (6.1) no lugar de $O(y)$. Supomos que o lagrangeano de interação é linear nas derivadas, as quais aparecem em primeira ordem no máximo. Com isto obtemos

$$\begin{aligned}
 & K(x) T^* \{ \phi(x) S \} = \\
 & = i \delta^4(x-y) \frac{\partial S}{\partial \phi(y)} + i \frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial y_\mu} \frac{\partial S}{\partial \partial_\mu \phi(y)} = \\
 & = - T^* \left\{ \int \frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial y_\mu} \frac{\partial L_I(y)}{\partial \partial_\mu \phi(y)} e^{i \int L_I d^4z} d^4y \right\} - \quad (6.8) \\
 & - T^* \left\{ \int \frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial y_\mu} \frac{\partial L_I(y)}{\partial \partial_\mu \phi(y)} e^{i \int L_I d^4z} d^4y \right\} = \\
 & = - T^* \left\{ \frac{\partial L_I(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial \phi(x)} S \right\} + \frac{\partial}{\partial \phi_\mu} T^* \left\{ \frac{\partial L_I(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial \partial_\mu \phi(x)} S \right\}
 \end{aligned}$$

Este último termo deve ser tratado cuidadosamente na passagem de (6.7) para a (6.8). Primeiramente a derivada de função \int faz com que apareça através de uma integração por partes um termo de superfície, que é desprezado. Em segundo lugar, a derivada em relação a ϕ_μ deve ser colocada fora do produto ordenado T^* , o que pode ser visto se trabalharmos com a expansão da matriz S . Ela não atua sobre S :

Provar que a (6.8) é a equação de movimento para ϕ^H é fácil. Basta lembrar que

$$T^* \{ \mathcal{L}_I(\phi, \partial_\mu \phi) S \} = \lim_{\epsilon_\mu \rightarrow 0} \mathcal{L}_I [U(\infty, x_0) \phi(x) U(x_0, -\infty), \\ \frac{1}{2\epsilon_\mu} \{ U(\infty, x_0 + \epsilon_\mu) \phi(x + \epsilon_\mu) U(x_0 + \epsilon_\mu, -\infty) - \\ - U(\infty, x_0 - \epsilon_\mu) \phi(x - \epsilon_\mu) U(x_0 - \epsilon_\mu, -\infty) \}] =$$

$$= \lim_{\epsilon_\mu \rightarrow 0} S \mathcal{L}_I [\phi^H(x), \frac{1}{2\epsilon_\mu} \{ \phi^H(x + \epsilon_\mu) - \phi^H(x - \epsilon_\mu) \}] = S \mathcal{L}_I [\phi^H, \partial_\mu \phi^H]$$

ou seja, a mudança de representação que aparece na (6.8) e é essencial à nossa demonstração, não altera a forma dos funcionais em jogo. Isto é devido ao fato de termos T^* e não T o que faz válida também aqui o que foi afirmado entre as equações (5.6) e (5.7). Com isto obtemos

$$S K(x) \phi^H(x) = \\ = - S \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)}{\partial \phi^H(x)} + S \frac{\partial}{\partial \phi_\mu^H} \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)}{\partial \partial_\mu \phi^H(x)} \quad (6.10)$$

o que demonstra a equivalência desejada.

O mesmo problema pode ser analisado de outro ponto de vista. Supondo que a matriz S seja construída a "la Bogoliubov", isto é, partindo de princípios bastante gerais, nosso objetivo é saber qual a relação entre seu expoente e o lagrangeano de interação. Para isto, supomos que a forma de matriz S é dada por

$$S = T^* \mathcal{L} \int W(\phi, \partial_\mu \phi) d^4y \quad (6.11)^{14}$$

onde W é um funcional de campos. Impondo agora a condição de que a formulação através da matriz S seja equivalente à formulação variacional, chegaremos ao resultado que

$$-T^* \left\{ \frac{\partial W}{\partial \phi(x)} S \right\} + \frac{\partial}{\partial \phi_\mu} T^* \left\{ \frac{\partial W}{\partial \phi_\mu(x)} S \right\} \quad (6.12)$$

deve ser igual a

$$-S \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial \phi_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \phi_\mu(x)} \quad (6.13)$$

Para que isto seja satisfeito, é necessário que $\mathcal{L}_I(\phi^\mu, \phi_{,\mu})$ e W tenham a mesma forma. Em nossa opinião, esta é a maneira mais correta de identificar o expoente da matriz S de Bogobov. Resta apenas justificar o aparecimento de T^* , o que deveria acontecer no desenvolvimento da teoria. Este ponto será futuramente estudado por nós.

VII - Equivalência da formulação hamiltoniana

Para finalizar o trabalho, vamos mostrar que a formulação hamiltoniana da matriz S é também equivalente às equações de cam

po. Neste caso, vamos novamente supor a linearidade da derivada de um dos campos*, que não é de férmions. A extensão para casos mais gerais é possível, mas não tão imediata quanto nas outras formulações.

Dada a matriz S na forma

$$S = T \exp \left[-i \int \mathcal{H}_I^D(\phi, \partial_\mu \phi) d^4y \right] \quad (7.1)$$

com \mathcal{H}_I^D dado na (3.26), é possível mostrar que a fórmula de redução (6.7) é válida mesmo se iniciarmos com a expressão $T\{\phi(x) S\}$, ou seja, com o operador T e não com o T^* . Isto se deve ao facto de que é correto escrever

$$T\left\{ \phi(x) \frac{\partial \phi(y)}{\partial y_\mu} \right\} = \frac{\partial}{\partial y_\mu} T\{ \phi(x) \phi(y) \} \quad (7.2)$$

Isto não é válido no caso de ϕ ser um campo de férmions. (Outra forma de obter a mesma fórmula de redução seria usar o teorema de Wick).

A nova fórmula de redução tem então a forma

$$K(x) T\{ \phi(x) S \} = S K(x) \phi^H(x) = \quad (7.3)$$

$$= -T \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}_I^D}{\partial \phi(x)} S \right\} - \frac{\partial}{\partial \phi_\mu} T \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}_I^D}{\partial \partial_\mu \phi(x)} S \right\}$$

* No nosso caso, campo de meson de spin zero.

Vamos mostrar que a (7.3) nos leva à equação de movimento de Φ^* . Antes, porém, vamos encontrar a relação entre

$$U \frac{\partial \mathcal{L}_I(\Phi^*, \partial_\mu \Phi^*)}{\partial \Phi^*} U^{-1} \text{ e } \frac{\partial U \mathcal{L}_I(\Phi^H, \partial_\mu \Phi^H) U^{-1}}{\partial U \Phi^H U^{-1}} \quad (7.4)$$

Como foi visto na (3.25), $U \dot{\Phi}^H U^{-1} \neq \dot{\Phi}$, o que faz com que as duas expressões na (7.4) sejam diferentes. Visto de outra maneira, ao tomarmos $U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \Phi^*} U^{-1}$, estamos derivando em relação a Φ^* . A derivada de $\partial_\mu \Phi^*$ em relação a esta variável é nula, pois são independentes. Por outro lado, ao tomarmos $\frac{\partial U \mathcal{L}_I U^{-1}}{\partial U \Phi^H U^{-1}}$, estamos primeiro mudando de representação, e isto fará aparecer em \mathcal{L}_I , além da dependência direta em Φ , uma outra dependência através da (3.25)

$$U \dot{\Phi}^H U^{-1} = \dot{\Phi} - A(\Phi) \quad (7.5)$$

É lógico que as duas funções na (7.4) serão diferentes.

Provamos no Apêndice C que a relação entre as duas é da

de ser

$$\begin{aligned} & U \frac{\partial \mathcal{L}_I(\Phi^*, \partial_\mu \Phi^*)}{\partial \Phi^*} U^{-1} = \\ & = \frac{\partial U \mathcal{L}_I(\Phi^H, \partial_\mu \Phi^H) U^{-1}}{\partial U \Phi^H U^{-1}} - \\ & - U \frac{\partial \mathcal{L}_I(\Phi^H, \partial_\mu \Phi^H) U^{-1}}{\partial \partial_\mu \Phi^H} \times \frac{\partial (U \partial_\mu \Phi^H U^{-1})}{\partial U \Phi^H U^{-1}} \end{aligned} \quad (7.6)$$

É visto facilmente que o último termo subtrai a dependência extra que aparece em $U \mathcal{L}_I U^{-1}$. Esta fórmula é semelhante à que aparece no cálculo diferencial ao tratarmos de função de funções.

Existe alguma relação entre a (7.6) e algum termo que aparece na (7.3)? Para mostrar que sim fazemos uso da relação mostrada no Apêndice A

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I^0 &= -\mathcal{L}_I(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{1}{2} (U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} U^{-1})^2 \\ &= -U \left[\mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} \right)^2 \right] U^{-1} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial (U \partial_\mu \phi^H U^{-1})}{\partial \phi} &= \frac{\partial (\partial_\mu \phi - U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} U^{-1})}{\partial \phi} \\ &= - \frac{\partial (U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} U^{-1})}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (7.8)$$

vamos reunir a (7.7) e a (7.8) e obter

$$\begin{aligned} T \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}_I^0}{\partial \phi} S \right\} &= \\ &= - T \left\{ \frac{\partial (U \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) U^{-1})}{\partial \phi} - \right. \\ &\quad \left. - U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} U^{-1} \cdot \frac{\partial (U \partial_\mu \phi^H U^{-1})}{\partial \phi} S \right\} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Ordenando o segundo membro da (7.9) no tempo e comparando com a (7.6) obtemos

$$T \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}_I^0}{\partial \phi} S \right\} = -S \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)}{\partial \dot{\phi}^H} \quad (7.10)$$

Resumindo temos que, no segundo membro da (7.3), a deri

vada do lagrangeano em relação a ϕ passará para uma derivada em relação a ϕ^H de um funcional que consta de duas partes, uma da mesma forma que o lagrangeano e uma outra parte extra. Esta última, no entanto, é cancelada pela derivada do termo dependente da normal a ζ que aparece em H_I^D , e obtemos desta forma o resultado esperado, que é a (7.10).

Resta agora provar que o último fator da (7.3) nos leva também a uma parte das equações de movimento. Podemos, para isto, fazer uso da condição imposta sobre $L_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)$, qual seja, a linearidade da derivada primeira de ϕ^H . Com isto, a expressão

$$\frac{\partial L_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)}{\partial \partial_\mu \phi^H} \quad (7.11)$$

não depende de $\partial_\mu \phi^H$, mas somente de campos independentes. Assim sendo, é possível escrever

$$U^{-1} \frac{\partial L_I(\phi, \partial_\mu \phi) U}{\partial \partial_\mu \phi} = \frac{\partial L_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)}{\partial \partial_\mu \phi^H} \quad (7.12)$$

Outra consequência da suposição da linearidade é que o último termo da (7.7)

$$\frac{1}{2} U \left(\frac{\partial L_I}{\partial \phi^H} \right)^2 U^{-1} \quad (7.13)$$

não depende de $\partial_\mu \phi$, com o que

$$\frac{\partial U \left(\frac{\partial L_I}{\partial \phi^H} \right)^2 U^{-1}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0 \quad (7.14)$$

Desta forma, reunindo a (7.7), (7.12) e (7.14)

$$T \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}_I^P}{\partial \mathcal{Q}_\mu \phi} S \right\} = -S \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)}{\partial \mathcal{Q}_\mu \phi^H} \quad (7.15)$$

Coletando tôdas as partes (7.3), (7.10) e (7.15), obte-

mos

$$S K(x) \phi^H(x) = \quad (7.16)$$

$$= -S \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)}{\partial \phi^H} + S \frac{\partial}{\partial \mathcal{H}_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)}{\partial \mathcal{Q}_\mu \phi^H}$$

que mostra a equivalência entre o formalismo hamiltoniano da matriz S e as equações de Euler-Lagrange.

A principal diferença entre a prova que está sendo estabelecida e as dos capítulos anteriores é o uso de operador "time-ordering".

Nos casos anteriores, com o uso de T^* , tôdas as quantidades são desenvolvidas como somas de campos independentes. Com isto, a mudança de representação é imediata. No caso aqui tratado, as derivadas, por exemplo, são tratadas como tal, e frente a uma mudança de representação a forma não se conserva. Do ponto de vista de aplicação da matriz S , a diferença entre os dois operadores aparece ao tomarmos elementos de matriz do tipo

$$\langle 0 | T^{(*)} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{H}_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{Q}_\nu} \right\} | 0 \rangle \quad (7.17)$$

onde o uso de T ou de T^+ resultou em

$$\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial \phi_\mu \partial y_\nu} + W(\xi) \quad (7.18)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial \phi_\mu \partial y_\nu} \quad (7.19)$$

Em pequenas ordens de perturbação pode-se mostrar que o termo $W(\xi)$ é cancelado pela contribuição proveniente da parte de \mathcal{H}_I^D dependente de ξ .

A extensão da demonstração feita acima para o caso de lagrangeanos de interação que envolvem derivadas de campo em forma não-linear não é de modo algum imediata. No caso de haver um produto de derivadas dos campos ϕ_1 e ϕ_2 , os momenta conjugados serão dados por

$$\begin{aligned} \pi_1^H &= \frac{\partial \mathcal{L}(\phi_i^H)}{\partial \dot{\phi}_1^H} = \dot{\phi}_1^H + \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}_1^H} \\ \pi_2^H &= \dot{\phi}_2^H + \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}_2^H} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Ao tentarmos passar para a representação de Dirac o problema que se apresenta é o aparecimento de $U \dot{\phi}_1^H U^{-1}$ e $U \dot{\phi}_2^H U^{-1}$. Eles passarão para

$$\begin{aligned} U \dot{\phi}_1^H U^{-1} &= \dot{\phi}_1 - U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}_1^H} U^{-1} \\ U \dot{\phi}_2^H U^{-1} &= \dot{\phi}_2 - U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}_2^H} U^{-1} \end{aligned} \quad (7.21)$$

mas os últimos termos vão envolver $U \dot{\phi}_2^H U^{-1}$ e $U \dot{\phi}_1^H U^{-1}$, que faz com que o sistema seja de difícil solução. Este é um dos motivos pelos quais o formalismo lagrangeano da matriz S é mais conveniente para cálculos práticos.

VIII - Conclusão

Neste trabalho foi mostrado que o formalismo da matriz S nos dá resultados idênticos aos obtidos a partir do formalismo variacional.

A demonstração foi feita sem utilizar a teoria de perturbação e, embora tenhamos considerado por simplicidade interações que envolvem linearmente a derivada de primeira ordem, a extensão para qualquer tipo de interação é imediata no caso de tratarmos com a forma lagrangeana da matriz S .

Foi mostrado que a principal diferença entre as duas formulações está no tratamento dado aos limites que aparecem na teoria. Enquanto que na formulação hamiltoniana os limites são tomados no início da teoria, na lagrangeana eles só são tomados após esta ser resolvida.

Reciprocamente, a equivalência das duas formulações pode ser postulada, determinando-se a partir dela a forma do funcional de campos que aparece como expoente na matriz S .

Este processo constitui uma alternativa a argumentos de

correspondência para determinação do expoente, com a vantagem de ser aplicável a casos em que não se dispõe de tais argumentos.

Foram desprezados em nosso estudo os problemas que surgem na definição da matriz , como por exemplo o de sua existência³⁰, e os problemas relacionados com termos adicionais devidos a intervalos finitos de tempo³¹.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^D &= U (\pi^H \dot{\phi}^H - \mathcal{L}(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)) U^{-1} = \\
 &= \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{1}{2} \left(U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} U^{-1} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{A.6}$$

ou seja

$$\mathcal{H}^D = \mathcal{H}_0^D + \mathcal{H}_I^D
 \tag{A.7}$$

$$\mathcal{H}_I^D = - \mathcal{L}_I(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{1}{2} \left(U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} U^{-1} \right)^2$$

* devido a (A.3)

$$\mathcal{H}_I^D = - U \left[\mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} \right)^2 \right] U^{-1}
 \tag{A.8}$$

Deve ser notado que as fórmulas (A.7) e (A.8) são diferentes devido a sinais e às representações dos operadores.

Apêndice B - Produto ordenado de três fatores

Vamos mostrar que um produto ordenado no tempo de 3 fatores pode ser posto como uma soma de produtos de um deles pelos outros dois ordenados no tempo.

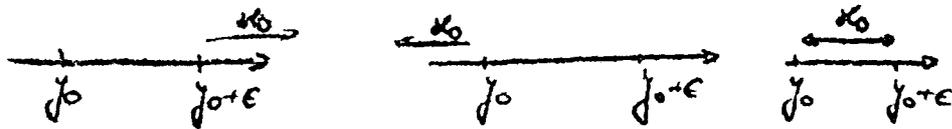
Partimos de

$$T\{\phi(x) \phi(y+\epsilon) P(y)\} =$$

$$= \theta(x_0 - y_0 - \epsilon) \phi(x) \phi(y+\epsilon) P(y) + \theta(y_0 - x_0) \phi(y+\epsilon) \phi(x) P(y) \quad (B.1)$$

$$+ [\theta(y_0 + \epsilon - x_0) - \theta(y_0 - x_0)] \phi(y+\epsilon) \phi(x) P(y)$$

Visto graficamente, cada termo corresponde a numa
das regiões dadas abaixo



Lembrando que

$$\theta(y-x) = 1 - \theta(x-y) \quad (B.2)$$

o último termo de (B.1) pode ser escrito

$$[\theta(y+\epsilon-x) - \theta(y-x)] \phi(y+\epsilon) \phi(x) P(y) =$$

(B.3)

$$= [\theta(y+\epsilon-x) - 1 + \theta(x-y)] \phi(y+\epsilon) \phi(x) P(y)$$

com o que obtemos a forma desejada

$$T\{\phi(x) \phi(y+\epsilon) P(y)\} =$$

(B.4)

$$= T\{\phi(y+\epsilon) \phi(x)\} P(y) + \phi(y+\epsilon) T\{\phi(x) P(y)\}$$

$$- \phi(y+\epsilon) \phi(x) P(y)$$

Apêndice C - Relação entre $\frac{\partial U \mathcal{L}_I U^{-1}}{\partial U \phi^H U^{-1}}$ e $U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \phi^H} U^{-1}$

Vamos novamente supor que $\mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)$ é linear em $\partial_\mu \phi^H$. Com esta suposição podemos escrever

$$\mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) = \partial_\mu \phi^H \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)}{\partial \partial_\mu \phi^H} \quad (C.1)$$

Iniciamos com

$$U \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) U^{-1}}{\partial \phi^H} = U \left[\frac{\partial \partial_\mu \phi^H}{\partial \phi^H} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)}{\partial \partial_\mu \phi^H} + \partial_\mu \phi^H \cdot \frac{\partial}{\partial \phi^H} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H)}{\partial \partial_\mu \phi^H} \right\} \right] U^{-1} \quad (C.2)$$

Como $\partial_\mu \phi^H$ e ϕ^H são independentes entre si, o primeiro termo na (C.2) é nulo. Devido à condição de linearidade, $\partial \mathcal{L}_I / \partial \partial_\mu \phi^H$ não contém $\partial_\mu \phi^H$, o que permite escrever

$$U \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) U^{-1}}{\partial \phi^H} = U \partial_\mu \phi^H U^{-1} \cdot \frac{\partial \left\{ U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \partial_\mu \phi^H} U^{-1} \right\}}{\partial \phi^H} \quad (C.3)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial (U \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) U^{-1})}{\partial U \phi^H U^{-1}} &= \\ &= \frac{\partial (U \partial_\mu \phi^H U^{-1})}{\partial U \phi^H U^{-1}} \cdot U \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) U^{-1}}{\partial \partial_\mu \phi^H} + \\ &+ U \partial_\mu \phi^H U^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial U \phi^H U^{-1}} \left\{ U \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) U^{-1}}{\partial \partial_\mu \phi^H} \right\} \end{aligned} \quad (C.4)$$

Como $U \phi^H U^{-1} = \phi^H$, podemos subtrair a (C.4) da (C.3)

e obter, após usar a (A.2),

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) U^{-1}}{\partial \phi^H} &= \\
 &= \frac{\partial U \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) U^{-1}}{\partial \phi} + \frac{1}{2} \left(U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} U^{-1} \right)^2
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

O segundo membro da (C.5) pode ser posto em forma diferente, usando

$$U \mathcal{L}_I(\phi^H, \partial_\mu \phi^H) U^{-1} = \mathcal{L}_I(\phi, \partial_\mu \phi) - U \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial \dot{\phi}^H} U^{-1} \tag{C.6}$$

Referências

1. A.Akhiezer & V.Berestetski, Quantum Electrodynamics, Interscience Publishers, § 23.
2. C.Yang & D.Feldman, Phys.Rev. 79, 972 (1950).
3. S.Schweber, Nuovo Cimento V. 2, 397 (1955).
4. K.Nishijima, Prog.Theor.Phys. 8, 401 (1952).
5. Y.Takahashi e H.Umezawa, Prog.Theor.Phys. V. 9, 14 e 501 (1953).
6. Y.Nambu, Prog.Theor.Phys. V. 7, 131 (1952).
7. K.Nishijima, Fields and Particles, Benjamin (1969).
8. O.Horse & H.Feshbach, Methods of Theoretical Physics, Cap.VII.
9. R.Peierls, Proc.Roy.Soc., A 214, 143 (1952).
10. S.Schweber, Relativistic Quantum Field Theory, Row & Peterson.
11. F.J.Dyson, Phys.Rev. V. 75, 486 (1949).
12. J.Schwinger, Phys.Rev. 74, 1439 (1948).
13. S.Tomonaga, Prog.Theor.Phys. V. 1, 27 (1946)
Z.Koba, T.Tati & S.Tomonaga, Prog.Theor.Phys. V.2, 101 (1947).
14. Ver. por exemplo, H.Umezawa, Quantum Field Theory, North-Holland (1955), cap. VI.
15. D.Sukhanov, JETP. V. 14, 1361 (1962).
16. S.Kanesawa & S.Tomonaga, Prog.Theor.Phys. V. 3, 1 (1948).
17. Y.Takahashi & H.Umezawa, Prog.Theor.Phys. V. 9, 501 (1953).
18. S.Kanesawa & Z.Koba, Prog.Theor.Phys. V. 4, 297 (1949).
19. Y.Katayama, Prog.Theor.Phys. V. 10, 31 (1953).
20. P.T.Matthews, Phys.Rev. V. 76, 1657 (1949).
21. N.Bogoliubov & D.Shirkov, Theory of Quantized Fields, Interscience Publishers (1959), § 17.

22. J.J.Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, A.W. (1967), Cap. IV.
23. P.T.Matthews, *Phys.Rev.* 76, 684 (1949).
24. N.Bogoliubov, ref. 21, pag. 232.
25. A.Salam, *Nucl.Phys.* V. 18, 686 (1960).
26. S.Kamefuchi et al, *Nucl.Phys.* 28, 546 (1961).
27. Referência 3, cap. VII.
28. G.C.Wick, *Phys.Rev.* 80, 268 (1950).
F.Mandel, *Quantum Field Theory*, cap. 13.
29. J.Schwinger, *Quantum Electrodynamics*, paper 31.
30. R.Haag, *Dan.Mat.Pys.Medd.*, V.29 (12), (1955):
Rayski, *Acta Physica Polonica* V.A37, 269 (1970).
31. E.C.G.Stueckelberg, *Phys.Rev.* 81, 130 (1951).
32. Th.A.J.Maris, D.Dillenburger, G.Jacob, *Nuclear Physics*, 18B.
366 (1970).