UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Vanessa Girelli Tonet

O USO DO COMPUTADOR COMO INSTRUMENTO PARA O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Porto Alegre
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Vanessa Girelli Tonet

O USO DO COMPUTADOR COMO INSTRUMENTO PARA O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Porto Alegre
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

O USO DO COMPUTADOR COMO INSTRUMENTO PARA O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Vanessa Girelli Tonet

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Prof. Dr. Franscisco Egger Moellwald
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Porto Alegre, julho de 2011

“*Um dia virá em que só se terá um único pensamento: A EDUCAÇÃO***”**

- Nietzsche **-**

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que além da vida, proporcionou-me saúde, força e perseverança, para que eu seguisse nesta caminhada.

A minha família, em especial aos meus pais, Maria Girelli Tonet e Henrique Tonet, pelo amor, apoio e incentivo incondicional.

Ao meu noivo Luís, pelo carinho, amor, paciência, apoio e incentivo, e por compreender os momentos de ausência para a conclusão deste trabalho.

Aos meus amigos e colegas do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, em especial a Sara, Marilise, Juliana e Daniel, pelo apoio, acolhida, força e companheirismo.

Aos meus amigos do GTCN Velha Carreta que compreenderam a minha ausência.

A professora Sibele de Andrade Tesch, minha professora do Ensino Médio, pelos conselhos e incentivos que foram fundamentais para que este momento pudesse acontecer.

Aos meus amigos e demais familiares, pela força e apoio.

Aos meus professores da Graduação, que me ensinaram, apoiaram e incentivaram a seguir nesta caminhada, que ajudaram a constituir essa pessoa que sou hoje. E em especial ao meu orientador, professor Marcus Vinicius de Azevedo Basso, pela amizade, apoio e confiança em mim depositados e pelos sábios ensinamentos/conselhos que levarei sempre comigo.

Aos professores Franscisco Egger Moellwald e Vilmar Trevisan, por aceitarem gentilmente compor a banca examinadora.

Enfim, a todos, **muito obrigada**!!!

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal a elaboração de uma proposta pedagógica que utiliza o computador como instrumento para introduzir o pensamento algébrico. A escolha das atividades que compuseram esta proposta foi feita com base na leitura dos textos de Usiskin (2003), Lins e Gimenez (1997), House (2003), Bonadiman (2007), Demana e Leitzel (2003), Vlassis e Demonty (2002) e Kern (2008), os quais abordam aspectos da álgebra, situações-problema e o uso do computador na educação, que constituem o nosso foco. A proposta pedagógica é composta por uma atividade adaptada do livro (VLASSIS, J; DEMONTY, I. 2002) e também da sequência didática proposta por (KERN, 2008) que foi aplicada com alunos de uma escola privada de Porto Alegre. A coleta de dados ocorreu em uma escola pública de Porto Alegre, através de uma oficina com alunos da 7ª série (atual 8º ano). Analisamos os dados coletados na oficina e traçamos um paralelo com os resultados obtidos por Kern quando implementou a sua proposta. Nas considerações finais encontram-se os resultados desta pesquisa e algumas de suas contribuições para o Ensino da Álgebra na Educação Básica.

Palavras-chaves: Álgebra; Informática na Educação; Ensino-Aprendizagem de Matemática

ABSTRACT

The main go of this work is the development has as main objective the development of a pedagogy that uses the computer as a tool to introduce algebric thinking. The choice of activities was based on reading the texts Usiskin (2003), Lins and Gimenez (1997), House (2003), Bonadiman (2007), Demana and Leitzel (2003), Vlassis and Demonty (2002) and Kern (2008), which approach aspects of algebra, problems-situation and the use of the computer in education, which will be our focus in this activity. The didactic sequence consists of an activity adapted from the book (VLASSIS, J; DEMONTY, I. 2002) and also the didactic sequence proposed by Kern (KERN, 2008) which was used with students in a private school of Porto Alegre. The collection of data occurred in a public school in Porto Alegre, through a workshop with students from 7th grade (now 8th year). We analyzed the collected data in the workshop and we draw a parallel with the results obtained by Kern when implementing his proposal. In the final considerations are the results of this research and some of its contributions to the Teaching of Algebra in Education.

Keywords: Algebra; Computing in Education, Teaching - Learning of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

Através das experiências que tive em sala de aula, tanto como aluna quanto como professora - durante as cadeiras de práticas de ensino e aprendizagem do curso de licenciatura em Matemática, os estágios e a bolsa do PIBID[1] - conversando com meus alunos, percebi que muitos deles não conseguiam compreender o significado de incógnita, variável e igualdade. Muitas vezes eles chegavam a um determinado resultado “4=32” e não percebiam que as quantidades em cada membro da igualdade eram diferentes. Eles resolviam as equações e expressões algébricas de forma mecânica e, penso eu, essa é uma das razões para não conseguirem entender o significado de igualdade. Significado este parecido com o comportamento de uma balança, ou seja, o que eu tenho em um dos pratos da balança deve corresponder à quantidade que tenho no outro prato, para que ela fique equilibrada.

Esta pesquisa tem como objetivo principal elaborar, justificar, planejar, implementar e validar uma proposta pedagógica que utiliza as tecnologias digitais – mais especificamente, o computador como instrumento – para a introdução do pensamento algébrico.

Com os objetivos definidos, determinamos a questão central da investigação: O uso do computador auxilia na aprendizagem de conceitos matemáticos, e, em particular, daqueles relacionados com a introdução do pensamento algébrico, de equações e expressões algébricas?

A partir desta questão, outras questões surgiram e também são objetos de estudo em nossa pesquisa:

- Como o computador pode ser utilizado para a aprendizagem de equações e expressões algébricas?
- Como se dá o desenvolvimento do pensamento algébrico?
- “O que é o “x” ou, como se dá a compreensão da diferença dos significados de incógnita e variável?
- “a questão da igualdade (balança)”

Neste capítulo descrevemos alguns fatores que influenciaram nossa escolha por este tema. E apresentamos justificativas para a escolha do tema.

No segundo capítulo apresentamos a base teórica que baliza a elaboração da proposta pedagógica e a avaliação da mesma, bem como um breve histórico do desenvolvimento e ensino da álgebra.

---

[1] PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência. Neste programa atuei numa escola da rede pública de ensino de Porto Alegre, ao longo de um ano e meio, durante os anos de 2009 e 2010.

No terceiro capítulo descrevemos e justificamos a escolha da metodologia utilizada para a implementação da proposta, apresentando aspectos pertinentes dos sujeitos de estudo, a coleta de dados, os materiais utilizados e a dinâmica de trabalho – a proposta, na qual apresento as atividades trabalhadas.

No quarto capítulo descrevo a análise dos dados.

E no quinto e último capítulo estão as considerações finais, em que são sistematizados os resultados desta pesquisa e sinalizados algumas de suas contribuições para o ensino da álgebra na Educação Básica.

1.1 Porque a utilização do computador?

Durante a realização das disciplinas de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática 1 e 2 – disciplinas do terceiro e quarto semestres, respectivamente, do curso de licenciatura em matemática da UFRGS – trabalhei no Projeto Amora do Colégio de Aplicação da UFRGS (CAp – UFRGS), nas oficinas de matemática oferecidas no contra-turno das aulas. Essas oficinas faziam parte do currículo, sendo obrigatória a frequência discente como em qualquer outra disciplina. As turmas eram mistas, com crianças de quinta e sexta série do Ensino Fundamental. Os meus esforços nessas oficinas foram centrados nas Assessorias de Interação Virtual e foi lá que percebi a importância do uso do computador como um complemento e suporte na aprendizagem de matemática.

O uso do computador é defendido por diversos autores, dentre eles Papert (2008), que afirma o seguinte: independentemente da personalidade, da cultura ou do gênero da criança, os micromundos - ambientes de aprendizagem pensados no qual as crianças pudessem aprender álgebra, geometria, entre outros - estão mais próximos à aprendizagem informal da criança do que o processo escolar adotado. As idéias de Papert vão ao encontro das idéias de John Dewey, o qual afirma que as crianças aprenderiam melhor se a aprendizagem realmente fizesse parte da experiência de vida; ou a idéia de Paulo Freire de que elas aprenderiam melhor se fossem verdadeiramente responsáveis por seus próprios processos de aprendizagem; ou a idéia de Jean Piaget de que a inteligência surge de um processo evolutivo no qual, muitos fatores deveriam dispor de tempo para encontrar seu próprio equilíbrio; ou a idéia de Lev Vigotsky de que a conversação desempenha um papel crucial na aprendizagem. (PAPERT, 2008, p 29).

Papert, analisando os usos de computadores para melhorar a aprendizagem de crianças, afirma que:

> [...] o uso mais potente de computadores para melhorar a estrutura epistemológica da aprendizagem infantil foi a construção de micromundos, nos quais as crianças executam atividades matemáticas porque são espaços virtuais atrativos, exigindo o desenvolvimento de habilidades matemáticas específicas. Simultaneamente, o formato desses mundos ajusta-se ao estilo oral bem-sucedido da aprendizagem da criança pequena. Oferecendo-lhe a oportunidade de aprender e de usar a matemática por meio de um modo não-formalizado de conhecer, encoraja em vez de inibir a criança a eventualmente adotar um modo também formalizado, do mesmo modo como a Máquina do Conhecimento eventualmente estimularia a criança a ler, em vez de desencorajar a leitura. [...] A essência da Máquina do Conhecimento seria perdida caso ela fosse concebida apenas como um mecanismo para ensinar as crianças a ler.
> (PAPERT, 2008, p. 30-31)

Segundo Papert (2008), a “Máquina do Conhecimento” fornece ao usuário o poder de conhecer o que os outros sabem. O que diferencia uma verdadeira máquina do conhecimento dos vídeos interativos, e-books, livros eletrônicos, CD-i e outros que utilizam a realidade virtual, é o tamanho do esforço necessário para reunir o conhecimento. Ela é um sistema que possibilitaria explorar um mundo muito mais rico do que aquele dos livros em papel. Utilizando a fala, o tato, ou gestos, o usuário guiaria a máquina ao tópico de seu interesse, rapidamente, navegando em um espaço de conhecimento muito mais amplo do que qualquer enciclopédia impressa. A pessoa poderia encontrar o caminho até os sons e as imagens relevantes que, no seu entender, a ajudasse a saber, o que desejasse conhecer. Embora não seja o caso, um dia essa possibilidade será ampliada até para se experimentar o cheiro e o tato, e talvez a cinestesia de estar com os animais, por exemplo.

Com base em seus estudos e pesquisas, Papert afirma que “o computador contribui para tornar a descoberta mais provável e também para torná-la mais rica” (PAPERT, 2008, p 124).

Segundo Papert “os computadores não apenas melhorariam a aprendizagem escolar, mas apoiariam formas diferentes de pensar e aprender” (PAPERT, 2008, p 167).

> [...] é óbvio que a instrução em matemática é, em média, bastante fraca. Não se infere daí, porém, que a única via para melhorar o desempenho seja o aperfeiçoamento da instrução. Um outro caminho passa por oferecer às crianças micromundos verdadeiramente interessantes onde elas possam *usar* matemática, *pensar sobre ela*, ou *brincar com ela*. Se as crianças realmente desejam aprender algo e têm a oportunidade de aprender com o uso, elas fazem-no mesmo se o ensino é fraco.
> (PAPERT, 2008, p. 135)

Tarouco e outros (2004) reforçam a importância do uso dos computadores e das novas tecnologias na educação:

> A importância do uso dos computadores e das novas tecnologias na educação deve-se hoje não somente ao impacto desta ferramenta na nossa sociedade e às novas exigências sociais e culturais que se impõem, mas também ao surgimento da Tecnologia Educativa. Os computadores começaram a ser utilizados no contexto educativo a partir do rompimento com o paradigma tradicional e o surgimento do construtivismo, que enfatiza a participação e experimentação do sujeito na construção de seu próprio conhecimento, através de suas interações. Com isso a capacidade do professor e o conteúdo dos livros constituem uma condição necessária, mas não suficiente para garantir aprendizagem, pois ela envolve um processo de assimilação e construção de conhecimentos e habilidades, de natureza individual e intransferível.
> (TAROUCO, L; ROLAND, L; FABRE, M.C; KONRATH, M, 2004 p 1)

Em seu livro Papert (2008) faz uma analogia das idéias do construtivismo com um provérbio africano[2], visando reforçar a importância do uso dos computadores na educação:

> A educação tradicional codifica o que pensa que os cidadãos precisam saber e parte para alimentar as crianças com esse "peixe". O construcionismo é construído sobre a suposição de que as crianças farão melhor descobrindo ("pescando") por si mesmas o conhecimento específico de que precisam; [...] O tipo de conhecimento que as crianças mais precisam é o que as ajudará a obter mais conhecimento. [...] Evidentemente, além do conhecimento sobre pescar, é também fundamental possuir bons instrumentos de pesca – por isso precisamos de computadores – e saber onde existem águas férteis – motivo pelo qual precisamos desenvolver uma ampla gama de atividades mateticamente[3] ricas, ou "micromundos".
> (PAPERT, 2008, p. 135)

[2] Provérbio africano: se um homem tem fome, você pode dar-lhe um peixe, mas é melhor dar-lhe uma vara e ensiná-lo a pescar. (PAPERT, 2008, p. 134)

[3] A palavra *mateticamente* deriva da palavra *matética* ou arte de aprender. (PAPERT, 2008, p. 89)

1.2 Porque o ensino da álgebra?

Já nas disciplinas de Estágio em Educação Matemática, mais precisamente no Estágio 2, e no PIBID, trabalhei com as séries finais do Ensino Fundamental. Nestas experiências pude perceber que os alunos não tinham o pensamento algébrico bem desenvolvido, pois faziam várias confusões tais como: confusão entre incógnita e variável. E não compreendiam muitas vezes o que era uma igualdade. Foi aí que senti a necessidade de realizar esta pesquisa.

Peggy A. House (2003) diz que apesar das tecnologias digitais terem evoluído muito nesses últimos anos, o impacto dessas tecnologias no ensino não acompanharam este crescimento:

> "[...] o impacto das tecnologias do computador sobre como e o que os alunos aprendem e como e o que os professores ensinam não acompanhou a influência dessa tecnologia sobre muitas outras esferas da atividade humana, como a da indústria, a do comércio e a do setor de serviços. Em muitas salas de aula, os alunos continuam sendo treinados para armazenar informações e para desenvolver a competência do desempenho de manipulações algorítmicas. E, embora níveis adequados de conhecimento factual e de técnicas sejam resultados importantes do programa de álgebra, a necessidade maior dos alunos é uma compreensão sólida dos conceitos algébricos e a capacidade de usar o conhecimento em situações novas e às vezes inesperadas."
>
> (HOUSE, 2003, p. 02)

Muitos pesquisadores vêm examinando o currículo de matemática das escolas. Segundo (HOUSE, 2003, p. 3), "alguns destes propõem novos sistemas de transmissão incorporando programas de computadores, planilhas eletrônicas e manipuladores de símbolos, vindo a alterar não só a maneira como ensinamos, mas também o que ensinamos".

Portanto, a escolha do tema nos parece relevante, assim como o uso do computador enquanto um instrumento que contribui para a aprendizagem de Matemática.

CAPÍTULO 2: BASE TEÓRICA

Não é fácil definir a álgebra. Existem muitas divergências quanto à sua definição. Autores como: Zalman Usiskin dizem que a álgebra ensinada na escola relaciona-se com a compreensão das letras (hoje é comum serem chamadas de variáveis) e das operações com elas. Porém, como o próprio conceito de variável tem vários significados, a redução da álgebra ao estudo das variáveis não responde à pergunta: O que é a álgebra da escola? Para ilustrar este fato, Usiskin (2003) nos dá o seguinte exemplo:

> Consideramos as seguintes equações, todas com a mesma forma – o produto de dois números é igual a um terceiro:
>
> 1. $A = b \cdot h$
> 2. $40 = 50x$
> 3. $senx = cosx \cdot tgx$
> 4. $1 = n \cdot (1/n)$
> 5. $y = kx$
>
> (USISKIN, 2003, p. 10)

As explicações para cada um dos itens do exemplo serão apresentados na seção 2.2.

2.1 Um breve resumo da evolução histórica da álgebra e do ensino da álgebra

Conforme Boyer (apud BONADIMAN, 2007), a palavra *álgebra* vem da palavra árabe *al-jabr*, utilizada por Mohammed ibn-Musa al Khwarizmi no título do seu livro *Al-jabr wa'l muqabalah. A*l Khwarizmi nasceu por volta de 800 d.C em Khwarizmi, que situa-se atualmente no Uzbequistão. Viveu em Bagdá onde escreveu este livro, o qual tratava de equações e cujo título referia-se à idéia de uma equação como balança em equilíbrio, considerada como um sistema para resolver problemas matemáticos que envolvam números desconhecidos.

Os grandes marcos da evolução histórica da álgebra, segundo Lins e Gimenez (1997, p. 91), se dão inicialmente com os babilônios e egípcios, cerca de 1700 a.C., que desenvolveram regras eficientes para diversos cálculos e para a resolução de problemas. Por volta do ano de 250 d.C. o grego Diofanto introduz um sinal especial para a incógnita em uma equação e uma escrita das equações um pouco mais parecida com a nossa, que utilizava um sinal especial para a igualdade.

O francês François Viète (cerca de 1550) é o primeiro que sistematiza o uso de letras para representar os dados (valores conhecidos) em uma expressão algébrica. O cálculo com letras, que representam quantidades ou grandezas geométricas, que introduz tem suas regras próprias, compatíveis com as noções usuais da aritmética e da geometria. Por fim, surge a gênese da noção da estrutura algébrica, primeiro com Galois (1811-1832) e Abel (1802-1829), de forma "implícita", e depois com Bourbaki (a partir de 1940), e aí entramos no domínio próprio do "cálculo com letras", mas num sentido bem mais sofisticado, o da *sintaxe*; uma visão completamente "abstrata".

A atividade algébrica é resolver problemas da álgebra (resolver equações, por exemplo), sejam eles problemas "descontextualizados" ou parte da solução de problemas contextualizados. Em resumo, a atividade algébrica é descrita como "fazer ou usar álgebra" (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 90).

2.2 O uso das letras em álgebra

No exemplo de Usiskin (2003, p. 10), que aqui retomamos:

> Consideramos as seguintes equações, todas com a mesma forma – o produto de dois números é igual a um terceiro:
> 1. $A = b \cdot h$
> 2. $40 = 50x$
> 3. $senx = cosx \cdot tgx$
> 4. $1 = n \cdot (1/n)$
> 5. $y = kx$

Geralmente chamamos (1) de fórmula, já (2) de equação ou sentença aberta, (3) de identidade, (4) de propriedade e (5) de equação de uma função que traduz uma propriedade direta. E assim, percebemos que esses diversos nomes refletem diversos usos dados à idéia de variável.

> Em (1), *A*, *b* e *h* representam a área, a base e a altura e têm caráter de coisa conhecida. Em (2) tendemos a pensar em x como uma incógnita. Em (3), x é o argumento de uma função. A equação (4), ao contrário das anteriores, generaliza um modelo aritmético e *n* identifica um exemplo do modelo. Em (5), x é mais uma vez o argumento de uma função, y o valor e k uma constante (ou parâmetro, dependendo de como é usada). Somente em (5) há o caráter de "variabilidade", do qual resulta o termo *variável*. Mesmo assim, tal caráter não está presente se imaginarmos aquela equação como a representação analítica de uma reta de inclinação k, passando pela origem.
>
> (USISKIN, 2003, p. 10)

As concepções de variável mudam. Hoje em dia se evita distinguir nome-objeto, e pensamos simplesmente numa variável como um símbolo pelo qual se podem substituir coisas, mais precisamente, coisas de um determinado conjunto, enquanto consideradas indistintas. Segundo (USISKIN, 2003, p. 11), a concepção de variável como "símbolo que representa indistintamente os elementos de um conjunto" parece tão natural hoje em dia raramente é questionada. Porém, não é o único ponto de vista possível a respeito de variáveis.

2.3 Concepções de álgebra

> **As finalidades da álgebra** *são determinadas por, ou relacionam-se com,* **concepções** *diferentes* **da álgebra** *que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos* **usos das variáveis.**
>
> (USISKIN, 2003, p. 13 - grifo do autor)

Com base em tudo isso, Usiskin divide a álgebra em 4 concepções:

- **Concepção 1:** A álgebra como aritmética generalizada.
- **Concepção 2:** A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas.
- **Concepção 3:** A álgebra como estudo de relações entre grandezas.
- **Concepção 4:** A álgebra como estudo das estruturas.

Na <u>primeira concepção</u>, a variável é vista como generalizadora de modelos, por exemplo:

$$-1 \cdot 7 = -7$$

$$-2 \cdot 7 = -14$$

São situações que podem ser generalizadas de modo a salientar propriedades como:

$$-x \cdot y = -xy$$

A variável com esta noção, de generalizadora de modelos, é muito utilizada na modelagem matemática. Um exemplo disto encontramos em Usiskin:

> [...] o recorde mundial T(em segundos) para a prova de uma milha no ano Y, desde 1900, pode ser descrito com bastante proximidade pela equação:
>
> $$T = -0{,}4Y + 1020$$
>
> Esta equação simplesmente generaliza os valores aritméticos encontrados em almanaques esportivos.
>
> (USISKIN, 2003 p. 13).

Nesta concepção de álgebra, “as instruções-chave para o aluno são *traduzir e generalizar*. Trata-se de técnicas importantes, não só para a álgebra, mas também para a aritmética.” (USISKIN, 2003 p. 13).

Em seus estudos, Demana & Leitzel (2003) observaram que:

> [...] a introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas dá aos alunos a percepção de que as variáveis podem representar números de vastos conjuntos numéricos e de que elas são instrumentos úteis na descrição de generalizações. Quando se introduzem variáveis em tabelas [...], os alunos perceberam que todas as informações numéricas da tabela se resumem na última linha. A variável é um instrumento eficaz para expressar todos os casos particulares de uma maneira concisa.
>
> (DEMANA, F.; LEITZEL, J, 2003, p. 74)

E “quando se introduzem variáveis em tabelas para expressar relações generalizadas, os alunos adquirem prática em escrever expressões algébricas” (DEMANA, F.; LEITZEL, J, 2003. p. 74-75).

Na <u>segunda concepção,</u> as variáveis são incógnitas ou constantes.

Vamos considerar o seguinte problema proposto por USISKIN:

> Adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número.
>
> Facilmente se traduz o problema para a linguagem da álgebra:
>
> $5x + 3 = 40.$
>
> (USISKIN, 2003, p. 14)

Sob a primeira concepção o problema acabou, pois já encontramos o modelo geral, mas dentro da segunda concepção podemos continuar resolvendo até encontrar o valor de x que neste caso é 7,4. Muitos alunos têm dificuldades de resolver este tipo de problema na passagem da álgebra para a aritmética.

Nesta concepção as atividades centrais são *simplificar* e *resolver*.

Já na <u>terceira concepção</u>, as variáveis *variam* (podem assumir diversos valores), ou seja, são um *argumento* (os valores que representam o domínio da função) ou um *parâmetro* (um número do qual dependem outros números).

Quando temos $A = b \cdot h$, fórmula da área de um retângulo, expressamos uma relação entre três grandezas. A distinção deste caso para o anterior é que, neste caso, as letras variam.

Na <u>quarta concepção</u>, a variável é um pouco mais que um símbolo arbitrário.

Quando pedimos para um aluno fatorar a expressão algébrica $6x^2 + 31ax - 105a^2$, o “sentido” de variável não coincide com nenhum dos anteriores. Aqui ela não é um argumento, não existe equação para ser resolvida ou modelo aritmético a ser generalizado, e ela não opera como uma incógnita. A variável tornou-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades.

> A introdução de expressões algébricas através da resolução de problemas e da computação torna a simplificação de expressões útil e natural. Para simplificar a expressão P + 0,35P, os alunos defrontam com a propriedade distributiva, escrevem a expressão na forma fatorada e agrupam os termos assim:
>
> $P + 0{,}35P = (1 + 0{,}35)P = 1{,}35P$
>
> (DEMANA, F.; LEITZEL, J, 2003. p 75)

No quadro 1, Usiskin (2003, p. 20) sintetiza as diferentes concepções de álgebra relacionando com os diferentes usos de variáveis.

Quadro 1: Usos da Variável segundo Usiskin

CONCEPÇÃO DA ÁLGEBRA	USO DAS VARIÁVEIS
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo das relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Lins e Gimenez (1997), pensando nas abordagens para o ensino da álgebra, procuram caracterizar as atividades algébricas em sala de aula. Para eles, as propostas para a sala de aula resultam sempre de visões do que seja aquilo que queremos promover por meio do ensino. Segundo os autores, existem várias tendências de abordagens para a educação algébrica, das quais destacam as três principais:

- **1ª tendência:** Letrista
- **2ª tendência:** Letrista-facilitadora
- **3ª tendência:** Modelagem

A primeira abordagem é assumida por quem acredita que a atividade algébrica resume-se a "cálculos literais". Suas atividades caracterizam-se pelo desenvolvimento de técnicas (algoritmos) e depois pela prática (exercícios), não havendo reflexão nem investigação sobre a álgebra.

Já a segunda tendência apresenta uma abordagem ainda letrista, porém incorporando outros elementos para "facilitar" o aprendizado da álgebra, como por situações concretas ou material concreto, geralmente, associando álgebra com geometria. É assumida por propostas que afirmam que a capacidade para lidar com as expressões literais surge com a "abstração", por meio do trabalho com situações "concretas".

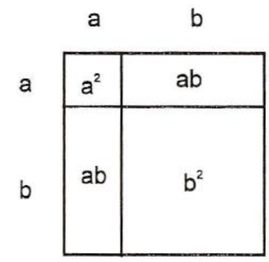


Imagem 1a: Atividade que ilustra a tendência Letrista-Facilitadora

disponível em LINS e GIMENEZ, 1997 p. 207

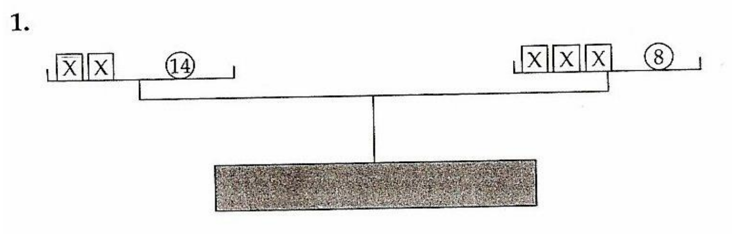


Imagem 1b: Exemplo de atividade da tendência Letrista-Facilitadora

disponível em VLASSIS, J; DEMONTY, I. 2002. pg 84

Na ultima tendência, a modelagem, o "concreto" também está presente como ponto de partida, porém numa visão diferente. O "concreto" é visto como o real, e as atividades são situações reais ou realistas[4]. Nessas situações o conhecimento algébrico é tido como uma ferramenta para organizar e resolver e não como um objeto de estudo (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 109): "se o modelo é algébrico, então, há atividade algébrica; o foco é na motivação que a modelagem oferece e na possibilidade de os alunos se tornarem capazes de "aplicar" o que aprenderam. Essa abordagem propõe que o aluno aprenda "em ação" o que já é um avanço bem grande em relação ao que hoje domina no Brasil. Segundo BONADIMAN (2003, p. 47), os defensores desta tendência alegam que essa abordagem do ensino da álgebra elementar diminui a distância que há entre a matemática escolar e a matemática da vida.

Para Lins e Gimenez (1997) não basta abordagens letristas nem as letristas-facilitadoras, pois as letristas ignoram completamente que o "texto em letras" não carrega, em si, significado algum, e que este significado é produzido em relação a um

[4] A diferença é que uma situação realista é criada com finalidade didática, embora buscando o máximo de semelhança com o que poderia ser uma situação real. No outro caso, a situação é tomada do próprio cotidiano dos alunos (situações vividas, jornais, revistas ou TV, por exemplo). Nota de rodapé em (LINS e GIMENEZ, 1997, p 108)

núcleo, e que, via de regra, há muitos significados possíveis. Todo o “cálculo com letras” está subordinado a uma *lógica das* operações, e essa lógica imprime características particulares às possibilidades desse cálculo. As letristas-facilitadoras, por ignorarem que a passagem de um *campo semântico* constituído em torno de outro núcleo – possível e até provavelmente não-familiar – não se dá por “passagem suave”, “abstração”, “generalização” ou qualquer outra coisa que sugira que permanece de alguma forma uma essência.

2.4 Por que situações-problema?

Ensinar por situações-problemas tem como objetivo provocar, junto aos alunos, uma reflexão aprofundada sobre os conteúdos matemáticos. Esta reflexão deve manifestar-se não somente através da situação de aprendizagem, mas também na exploração desta por meio das sínteses e dos exercícios. “**Uma situação-problema não se define somente pela situação propriamente dita, mas também pela maneira como o professor explora essa situação**.” (grifo dos autores. VLASSIS, J; DEMONTY, I. 2002, p. 40)

Vlassis e Demonty destacam três elementos fundamentais para a definição de uma situação-problema:

> - [...] **a situação deve verdadeiramente pôr um problema aos alunos**. Para Charlot (1992, p. 181), [...] só existe problema, no sentido estrito do termo, se o aluno é obrigado a trabalhar o enunciado da questão que lhe é posta, a estruturar a situação que lhe é proposta.
> - [...] os problemas postos não têm de ser especialmente concretos ou dizer respeito à vida de todos os dias. [...] **a função principal da álgebra não é resolver problemas da vida quotidiana.**
> - [...] segundo Douady (1986), **os conhecimentos visados pela aprendizagem (conteúdo ou método) devem ser ferramentas adaptadas ao problema.** (grifo das autoras)
>
> (VLASSIS, J; DEMONTY, I. 2002. pg 40-41)

Tais autores (2002, p.41) ainda afirmam que na situação problema: “[...] um dos objectivos prioritários consiste em colocar os conteúdos algébricos em contextos que justificam a sua utilização: é o aspecto funcional da álgebra que é sobretudo trabalhado a este nível [...].”

Muitos professores concordam com o ensino por situações-problema, porém alegam que não têm tempo de a utilizarem. É verdade que leva mais tempo aplicar esta abordagem, porém muitas vezes é necessária a sua utilização para promover a "reflexão e o raciocínio para aumentar a compreensão; estes processos característicos das situações-problema levam tempo."

Mas não precisamos nos utilizar das situações-problema o tempo todo, é necessário que se trabalhem as duas coisas, as situações-problemas e exercícios de treino para que também se desenvolva o domínio das técnicas. A respeito disso, Vlassis e Demonty (2002) comentam que:

> [...] a aprendizagem por situações-problema não significa resolver qualquer tipo de situação a qualquer momento de aprendizagem. [...] um problema será resolvido uma primeira vez; depois, as reflexões e as noções que ele fez emergir poderão ser re-analisadas para abordar novos saberes. Portanto, não será sempre necessário recorrer a uma nova situação-problema. [...] **o ensino por situações-problema não significa a supressão de exercícios de treino.** Estes são também necessários, dado que a matemática implica também o domínio de técnicas.
>
> (VLASSIS, J; DEMONTY, I. 2002, p. 43)

Vlassis e Demonty (2002, p. 45) destacam dois motivos que consideram fundamentais para o ensino de situações-problema, o primeiro motivo é o de que este ensino por situações-problema "dá sentido à aprendizagem matemática". Os autores argumentam que estas situações colocam a matemática num contexto de tal forma que ela representa uma ferramenta para a resolução. E permite aos alunos aplicarem seus conhecimentos anteriores, dando sentido as novas aprendizagens. Já o segundo motivo afirma que este tipo de ensino "é coerente com a maneira como o aluno aprende", pois o aluno vai construindo o seu conhecimento de forma ativa.

Para explorarmos situações-problema em sala de aula, antes de mais nada, precisamos preparar cuidadosamente toda a atividade. Inicialmente temos que garantir que haja uma compreensão global da situação pelos alunos de forma clara e objetiva. Em seguida, dar tempo para que os alunos reflitam sobre o problema e busquem uma solução. É importante cuidar para não influenciarmos na estratégia de resolução dos alunos. Finalmente, devemos permitir que os alunos argumentem sobre suas estratégias e soluções, mas cuidar para limitar o número de soluções a tratar, escolhendo as que realmente trazem diferentes elementos para comparação.

Depois podemos fazer uma síntese por escrito dos pontos importantes que apareceram no debate, tanto os conceitos abordados quanto os procedimentos adotados para a resolução. Em função do contexto, podem ser dadas respostas diferentes, porém complementares. Podemos também evidenciar esta questão apresentando formas de “generalizar” estas respostas para que possamos resolver este problema de uma forma mais geral.

CAPÍTULO 3: TÉCNICAS E PROCEDIMENTOS:

A escolha das atividades, para comporem a sequência didática deste trabalho e a oficina realizada para a sua implementação, foi feita com base na leitura dos textos de Usiskin (2003), Lins e Gimenez (1997), House (2003), Bonadiman (2007), Demana e Leitzel (2003), Vlassis e Demonty (2002) e Kern (2008), os quais abordam aspectos da álgebra ou situações-problema, tratados no capítulo anterior. A sequência didática utilizada em nosso Trabalho é composta por uma atividade adaptada do livro de Vlassis & Demonty (2002) e pela proposta de sequência didática do professor Kern (KERN, 2008), que foi aplicada com alunos de uma escola privada de Porto Alegre.

3.1 Sujeitos do Estudo

Pensando nos aspectos abordados anteriormente, realizamos uma oficina com o objetivo de introduzir o pensamento algébrico. Implementamos uma sequência didática, a qual utilizava em alguns momentos situações-problema e o computador como instrumento para desenvolver o pensamento algébrico. Na oficina estiveram presentes uma média de 27 alunos por encontro.

Estas atividades foram realizadas com os alunos da 7ª série, atual 8º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Educação Básica Monsenhor Leopoldo Hoff. A escola está localizada no bairro Chácara das Pedras, na rua Moema, número 255 e, devido a sua localização, atende alunos dos bairros Chácara das Pedras, Vila Bom Jesus e Vila Jardim. Ela tem laboratório de informática, sala de vídeo (com vídeo, DVD e data show), sala lúdica, área coberta, três quadras abertas, biblioteca, refeitório, pracinha e área verde. A Escola atende a uma média de 1500 alunos nos três turnos. Além de ter Ensino Infantil, Fundamental e Médio a Escola também atende os alunos de EJA.

Existe uma intimidade e uma confiança muito grande dos pais quanto ao Serviço de Orientação Escolar (SOE). A diretora é muito dinâmica e aberta a novas propostas. Saliento que a diretora juntamente com a professora de matemática das 7ªs séries abraçaram a idéia do nosso projeto e fizeram de tudo para que a oficina ocorresse e tivesse êxito. Destaco que a professora concedeu os períodos de aula para que pudéssemos implementar as atividades, já que ficaria muito difícil os alunos comparecerem no turno inverso por diversos motivos.

3.2 Coleta de dados

A oficina realizada com as 7ªs séries, foi pensada para acontecer em cinco encontros com seis atividades (a qual caracterizou-se pela implementação da sequência didática), mas devido a problemas técnicos com o laboratório de informática e a necessidade de fazermos discussões durante os encontros, o cronograma foi alterado. Além da mudança de algumas datas, mantivemos a quantidade de encontros e o total de períodos, embora não sendo mais dois por encontro, mas acabamos não aplicando algumas atividades pensadas inicialmente, o que não comprometeu o objetivo principal da oficina, que era a introdução do pensamento algébrico. Em anexo encontra-se uma tabela com o cronograma inicial pensado para cada atividade (Apêndice 1). E as atividades que foram aplicadas (Apêndices 2-5). Cada período tem duração de 50 minutos.

Estes encontros e suas respectivas atividades ocorreram nos seguintes dias:

Tabela 1: Cronograma da realização dos Encontros

Cronograma da realização dos Encontros		
06/06/2011	**Encontro1:** Atividade1: A volta da Mesa	2 períodos
09/06/2011	**Encontro 2:** Continuação da Atividade 1 e discussão	1 período
10/06/2011	**Encontro 3:** Atividade 2: Impressoras	2 períodos
13/06/2011	**Encontro 4:** Atividade 3: Máquinas algébricas e discussão	3 períodos
16/06/2011	**Encontro 5:** Atividade 6: Máquinas algébricas e discussão	2 períodos

Para a coleta dos dados foram utilizados os seguintes recursos:

- Folha de registro;
- Diário de Campo;

3.3 Materiais

Folha de Registro: a folha de registro contém as questões e é o local onde os alunos vão apresentar as suas soluções das questões.

Diário de Campo: contém minhas observações acerca dos encontros - relatos de discussões entre os alunos, dúvidas que surgiam, entre outros.

Objeto de aprendizagem Árvores Algébricas: este objeto foi desenvolvido por um grupo do Instituto Freudenthal[5] da Universidade de Utretch – Holanda, baseado na idéia de "Educação Matemática Realista (EMR)[6]" que o grupo desenvolveu em meados da década de 70. Baseamo-nos nos princípios que norteiam esta idéia para o desenvolvimento da nossa proposta.

A EMR tem como idéia central que a matemática é uma atividade humana e, assim sendo, se apresenta em constante renovação, portanto, não deve ser transmitida mas descoberta e reinventada pelos alunos, deve ser vivida como uma atividade humana, para que se torne então um conhecimento pleno de significados. A palavra realista tem um sentido amplo e significa trabalhar com situações matemáticas que o aluno possa imaginar e compreender. Pretende ser uma matemática que faça sentido para o aluno.

Kern (2008) apresenta o destaque que a EMR dá ao processo de aprendizagem da matemática, separando-o em dois componentes: o horizontal e o vertical.

> No horizontal os alunos utilizam ferramentas matemáticas para organizar e resolver problemas. No vertical, há o processo de reorganização do conhecimento construído pelo aluno, dentro do sistema matemático, como a descoberta de atalhos e conexões entre os conceitos e estratégias e a aplicação destas descobertas em outros problemas a serem resolvidos.
>
> (KERN, 2008, p. 66)

Um objeto de aprendizagem se caracteriza por ser um pequeno software (*applet*), de natureza criativa, voltado para um aprendizado de conteúdo bastante específico. O *site* do Instituto contém uma coletânea bem variada destes objetos[7], separados em tópicos como aritmética, álgebra, geometria, funções, matemática discreta, entre assuntos. E também apresenta uma sugestão de quando, "em que escolaridade", poderiam ser utilizados.

---

[5] O Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education tem como objetivo traçar diretrizes e produzir material visando a melhoria do ensino de matemática e de ciências. *Site*: <http://www.fi.uu.nl/fisme/nl>. Acesso em: 25 de maio de 2011.

[6] Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/en/projects/realme.html>. Acesso em: 25 de maio de 2011.

[7] Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/wisweb/>. Acesso em: 25 de maio de 2011.

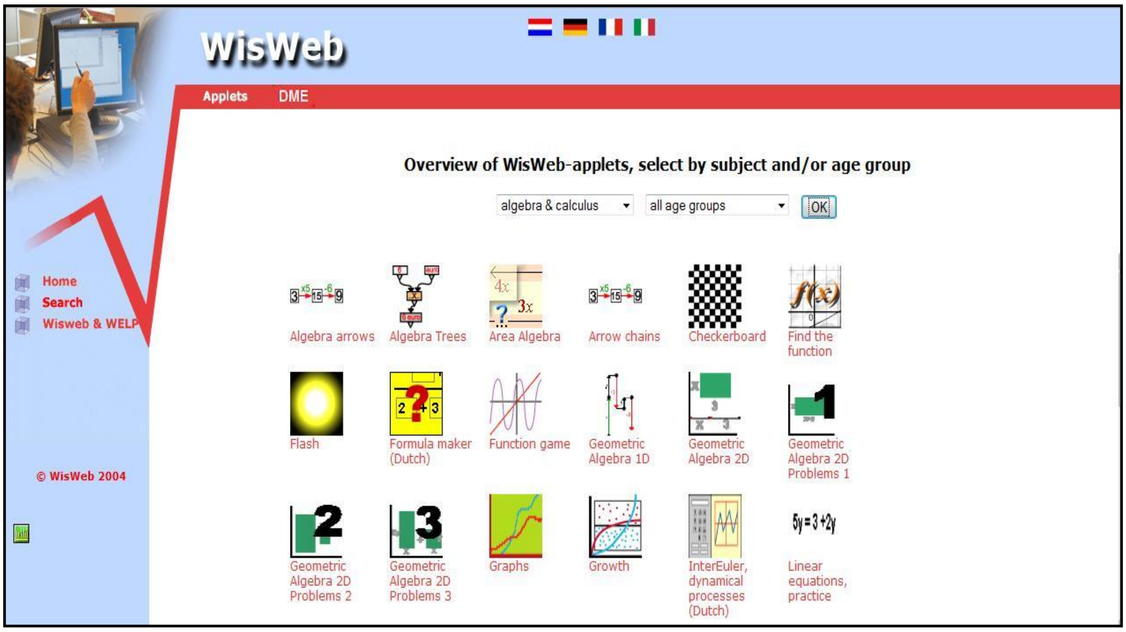


Figura 1: Sites com os applets desenvolvidos pelo Instituto Freudenthal, 2004

O objeto escolhido por nós para compor nossa proposta didática “Árvores Algébricas” é uma versão em português que foi desenvolvida por Newton Kern em parceria com o Instituto Freudenthal e está disponibilizado no site EDUMATEC da UFRGS em http://www.edumatec.mat.ufrgs.br, através dos *links* Atividades / Atividades Diversas de Funções e Gráficos / Máquinas Algébricas para o Ensino Fundamental[8].

Na parte situada à esquerda do objeto, encontram-se caixas para compor a “máquina”. As caixas brancas destinam-se para a entrada e a saída das informações. As caixas em amarelo são as caixas das operações: multiplicação, divisão, adição, subtração, potenciação (uma específica para a segunda potência e outra para uma potência qualquer) e radiciação (somente para raiz quadrada). Os alunos têm que unir com as setas as caixas brancas nas amarelas conforme a ordem da operação a ser realizada.

Um pouco mais embaixo das caixas tem a opção de limpar tudo, mostrar o gráfico e apresentar as operações pelo seu valor ou pela expressão. Quando ligamos uma caixa amarela a uma branca, a caixa branca torna-se cinza representando o resultado daquela operação.

---

[8] Disponível em: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/atividades_diversas/maquina/arvoresalgebricas.htm>. Acesso em 17 de junho de 2011.

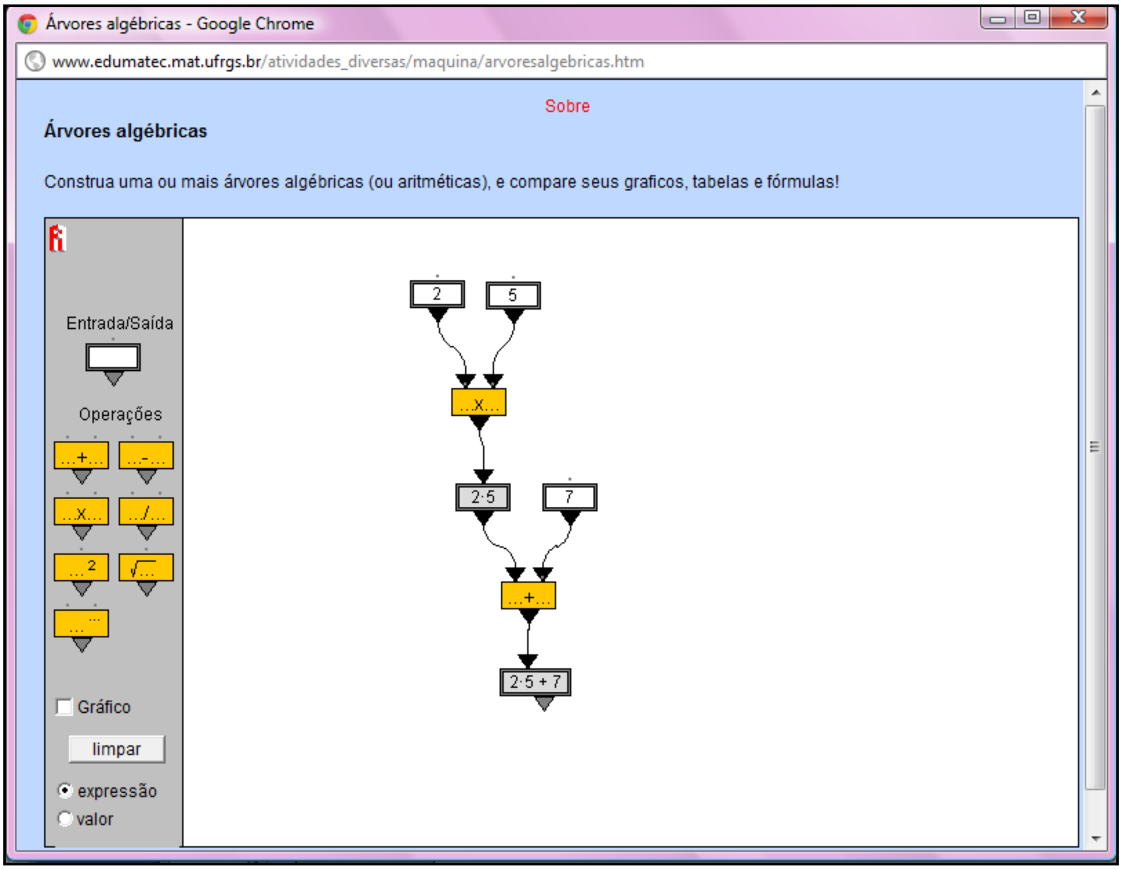


Figura 2: *Applet* Árvores Algébricas disponível no site EDUMATEC da UFRGS em 2011

A figura 2 ilustra o procedimento que implementa (2 x 5 + 7). Para isso utilizamos três caixas brancas, onde foram colocados os números 2, 5 e 7, e duas caixas amarelas, que aplicam as operações multiplicação e adição, respectivamente. Essas caixas são ligadas por fim a mais duas caixas brancas, que se tornam cinzas por representarem o resultado das operações.

O *applet* possibilita trabalharmos com a representação dos números por letras, formando assim expressões algébricas. Podemos associar essas expressões a seus gráficos e tabelas, como mostra a figura 3.

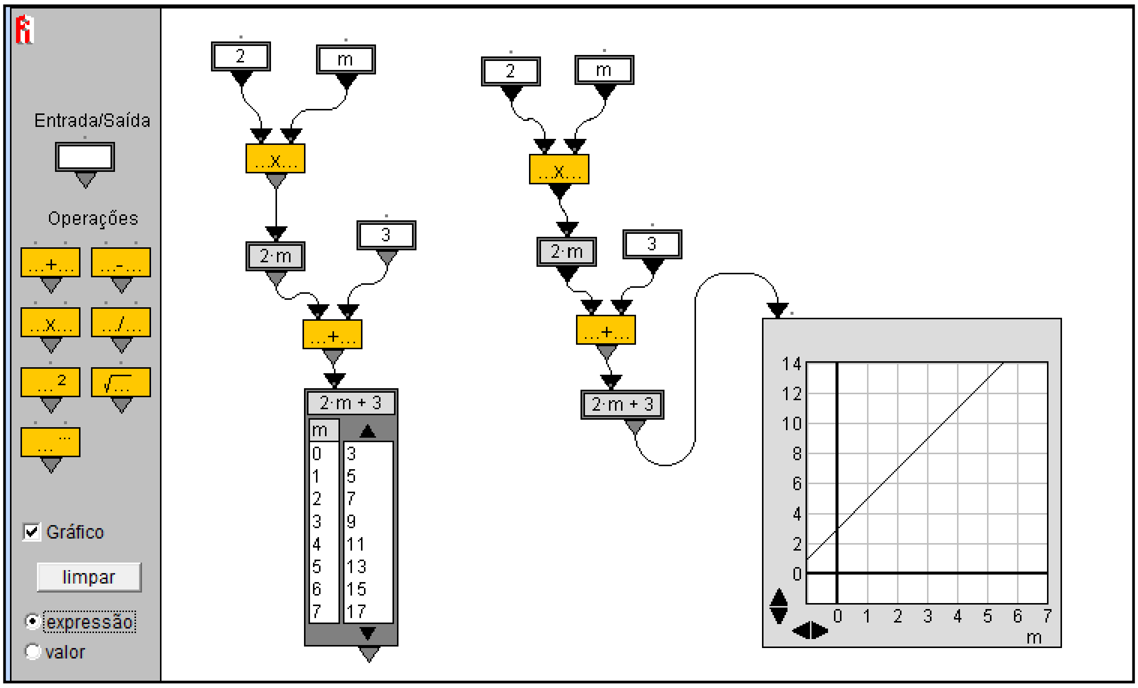


Figura 3: Árvore com a opção da tabela e de gráfico

A figura 4 indica como podemos relacionar diferentes gráficos de funções diferentes num mesmo plano cartesiano. Quando estão visíveis o gráfico e a tabela de uma função podemos clicar em um valor da tabela e o *applet* indica no gráfico a posição deste ponto. A única restrição na hora de plotarmos vários gráficos de diferentes funções num mesmo plano, é que ele só aceita funções com a mesma variável.

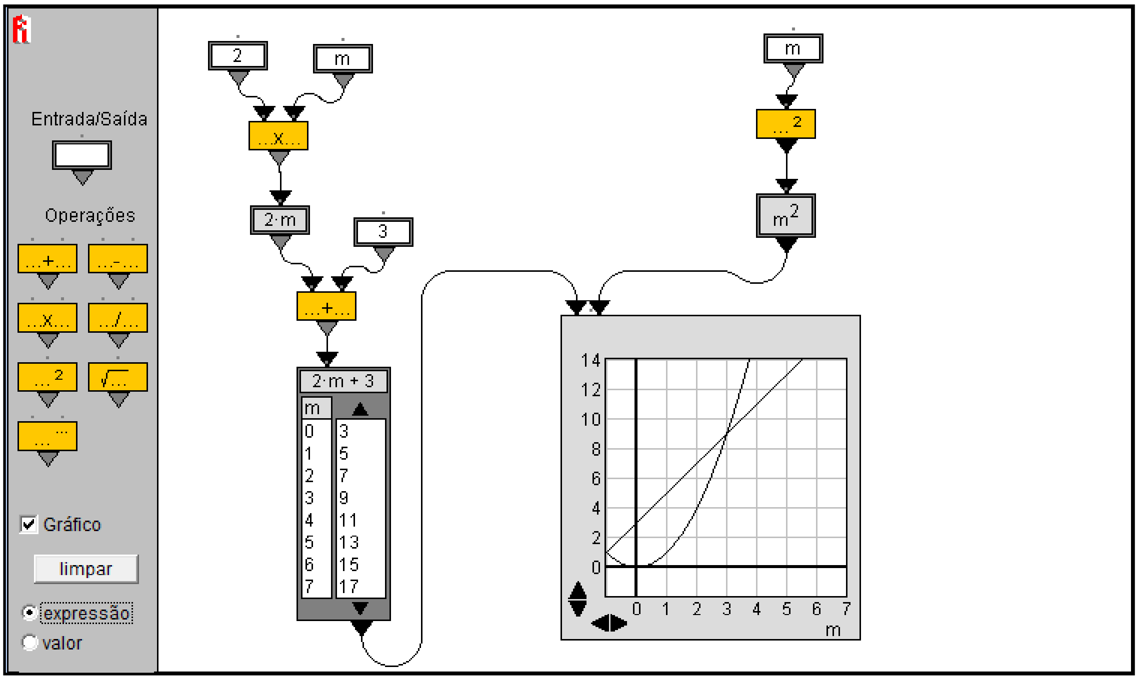


Figura 4: Comparação de gráficos de diferentes funções em um mesmo plano cartesiano

3.4 Dinâmica de trabalho: A proposta

Aqui apresentamos a nossa proposta de sequência didática elaborada e implementada através da realização da oficina na EEEB Leopoldo Hoff.

Objetivos:

- Introduzir o pensamento algébrico;
- Desenvolver a idéia de que podemos expressar as etapas de resolução de um problema mesmo sem ter conhecimento de todos os dados do problema;
- Auxiliar na transição de uma situação da linguagem corrente para aquela que faz uso da linguagem algébrica;
- Familiarizar os alunos com as diferentes formas de representação de uma relação funcional.

Recursos:

- Laboratório de informática
- Objeto de Aprendizagem Virtual: Árvores Algébricas
- Folha de Registro

Procedimentos Metodológicos (descrevendo atividades):

Em todos os encontros, os alunos serão divididos em trios. Explicaremos como procederão com as atividades. Após, os alunos as resolverão no computador utilizando o aplicativo Árvores Algébricas e também na folha de registros que será entregue com a atividade.

A atividade 1 foi adaptada do livro A Álgebra Ensinada por Situações-Problema, de Joëlle Vlassis e Isabelle Demonty, do Instituto Piaget, publicado no ano de 2002. Já as atividades 2 a 6 foram retiradas do trabalho de Kern (2008).

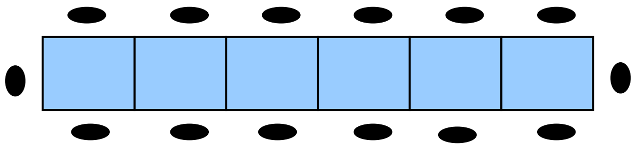
Encontro 1: (1h40min)

Objetivos: familiarizar os alunos com o aplicativo Árvores Algébricas, fazê-los perceber a existência de máquinas generalizadoras e usar as linguagens escrita e algébrica.

Atividade 1: (Adaptada do livro de VLASSIS, J. e DEMONTY, I. 2002, p 143)

À Volta da Mesa

Os pais do pequeno Júlio organizam uma festa para o seu aniversário. Contataram o senhor Boulèlfrite, o fornecedor. Este dispõe de pequenas mesas quadradas. Propõe colocá-las umas ao lado das outras de modo a fazer uma grande mesa em que os convidados serão instalados segundo o modelo seguinte:



1. *Desenhe 8 mesas assim como o número de cadeiras disponíveis.*
2. *Resolva os problemas utilizando o aplicativo Árvores Algébricas. Desenhe na folha a máquina utilizada para resolver cada item.*

   a) Se o senhor Boulèlfrite dispõe de 20 mesas, quantos lugares estarão disponíveis para os convidados?

   b) E se ele dispusesse de 54 mesas?

   c) Encontre um processo que lhe permita obter, para cada caso, o número de cadeiras disponíveis em relação ao número de mesas.
3. *Explique esse processo com suas palavras.*
4. *Exprima esse processo em linguagem matemática.*

Encontro 2: (1h40min)

Objetivos: Produzir as máquinas generalizadoras. Construir a máquina inversa. Usar a linguagem algébrica.

Atividade 2: (Retirada de KERN, 2008, p 123-124)

Impressoras

O laboratório de informática da escola tem duas impressoras: uma a jato de tinta e a outra a laser. A impressora a *jato de tinta imprime 12 páginas por minuto, e a* impressora a *laser imprime 18 páginas por minuto.*

1. Resolver os problemas utilizando o aplicativo árvores algébricas. Desenhar nesta folha a máquina utilizada para resolver cada item:

a) Quantas páginas a impressora a *jato de tinta imprime em 2 minutos? E em 5 minutos? E em 13 minutos?*

b) E quantas páginas a impressora a *laser imprime em 3 minutos? E em 7 minutos? E em 12 minutos?*

c) As duas impressoras juntas conseguirão imprimir quantas páginas em 6 minutos? E em 9 minutos?

d) Quanto tempo a impressora *de jato de tinta leva para imprimir 900 páginas?*

e) E quanto tempo a impressora a *laser leva para imprimir 900 páginas*

f) E quanto tempo as duas juntas levariam para imprimir 900 páginas?

g) No caso do item anterior, quantas folhas cada máquina imprimiu?

Encontro 3: (1h40min)

Objetivos: Trabalhar com as diferentes formas de representar de maneiras diversas uma mesma situação-problema através de tabelas, gráficos, máquinas algébricas e expressões algébricas. Construir gráficos com o aplicativo Árvores Algébricas.

Atividade3: Máquinas algébricas – problemas (Retirada de KERN, 2008, p 128)

1) A impressora jato de tinta imprime 12 páginas por minuto.

a) Desenhe a máquina que representa quantas páginas foram impressas a partir do tempo de funcionamento da impressora.

b) Complete a tabela abaixo:

Tempo (min)	Cópias
5	
40	
	120
	900

c) Construa o gráfico que corresponde à máquina do item a.

d) Quantas cópias a impressora produz em duas horas?

e) Se a letra "m" representa o "número de minutos", então podemos escrever:

Número de cópias = ______________________________

f) Desenhe a máquina que, informando o número de cópias feitas, calcula o tempo de impressão.

g) Quanto tempo a máquina leva para produzir 330 cópias?

*h) Se a letra "**c**" representa o número de cópias feitas pela impressora, então podemos escrever:*

Tempo de funcionamento da impressora (em minutos) = ____________

<u>*Atividade 4: Máquinas algébricas – problemas*</u> (Retirada de KERN, 2008, p 129)

2) Numa experiência de medição da água na garrafa com bolinhas de vidro foi realizada com os recipientes abaixo. Os dados foram registrados em três tabelas diferentes, uma para cada recipiente.

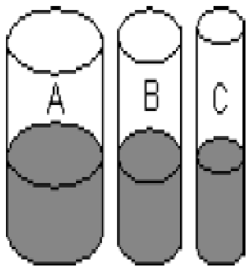


Tabela 1	
bolinhas	cm
30	3
60	6
90	9

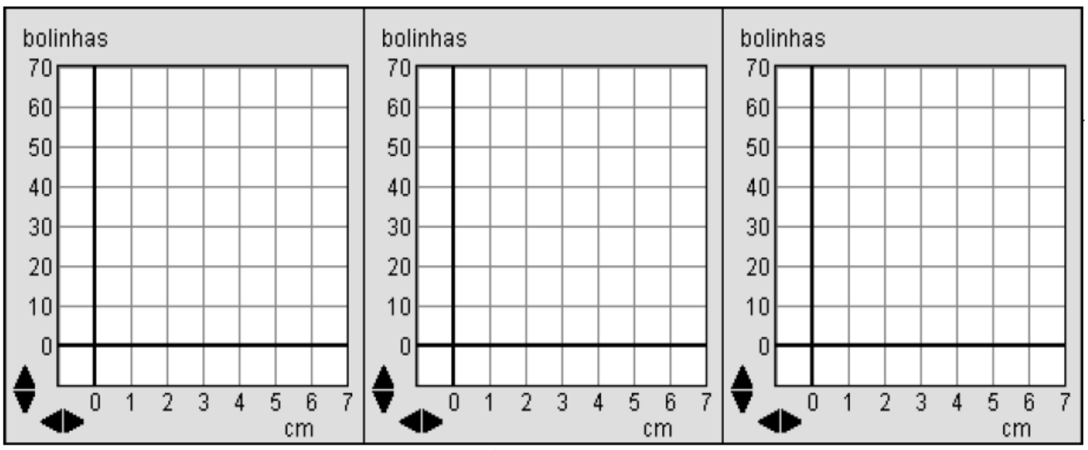
Tabela 2	
bolinhas	cm
30	2
60	4
90	6

Tabela 3	
bolinhas	cm
12	1
36	3
60	5

a) Qual é a tabela que corresponde a cada recipiente?

b) Desenhe o gráfico de cada recipiente:

Recipiente A Recipiente B Recipiente C



c) Desenhe a máquina que, informando o quanto sobe em cm o nível de água, calcula o número de bolinhas.

d) Se a = número de cm que subiu o nível de água então podemos escrever:

- para o recipiente A, o *número de bolinhas =* ____________

- para o recipiente B, o *número de bolinhas =* ____________

- para o recipiente C, o *número de bolinhas =* ____________

Encontro 4: (1h40 min)

Objetivo: Resolver situações–problema envolvendo mais de duas variáveis.

Atividade 5: Pizzaria Sabor Jovem (Retirada de KERN, 2008, p 130)

No cardápio da pizzaria ‘Sabor Jovem” tem-se:

Pizza brotinho	*R$ 3,00*
Refrigerante	*R$ 1,50*
Sorvete	*R$ 1,20*

1) *João muito faminto, pediu 3 pizzas, 1 refrigerante e 2 sorvetes. Quanto gastou?*

2) *João pagou a conta com R$ 20,00. Quanto recebeu de troco?*

3) *O dono da pizzaria quer uma máquina que calcula os gastos do freguês. Faça esta máquina e desenhe ao lado.*

4) *Usando as letras “p”, “r” e “s” para representar as quantidades de pizza, refrigerante e sorvete que alguém comprou, podemos escrever:*

   Gasto total = ________________________________

5) *O dono da pizzaria também quer que a máquina calcule o troco do freguês. Faça esta máquina e desenhe ao lado.*

6) *Confira se a máquina está funcionando legal! Para isto calcule no papel e na máquina o gasto e o troco para:*

   5 pizzas, 3 refrigerantes, 2 sorvetes e pagamento com R$ 30,00

a) *Resposta na máquina:*

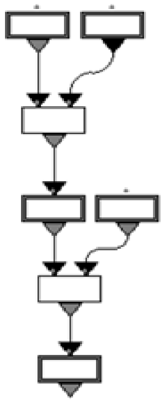
b) *Resposta no papel:*

Encontro 5: (1h40min)

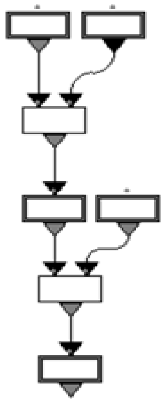
Objetivos: Transcrever expressões em linguagem corrente para linguagem algébrica. Identificar expressões algébricas equivalentes.

Atividade 6: máquinas algébricas e discussão (Retirada e adaptada de KERN, 2008, p 131-132)

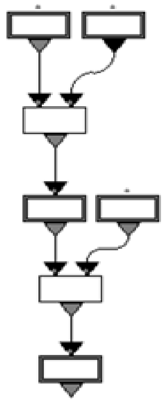
1. Complete a máquina: ela dobra um número e depois adiciona 5 ao resultado.



2. Complete a máquina: ela adiciona 5 ao número e depois dobra o resultado.



3. Complete a máquina: ela dobra um número e depois adiciona 10 ao resultado.

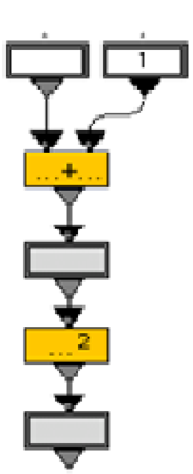


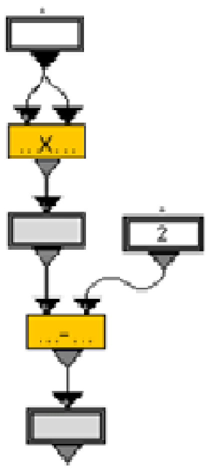
4. Associe cada máquina a sua expressão algébrica:

Máquina 1 ■	■ $2 \cdot (x+5)$
Máquina 2 ■	■ $2 \cdot x + 10$
Máquina 3 ■	■ $2 \cdot x + 5$

5. Nas três máquinas acima têm duas que são iguais! Descubra quais são essas duas! Como você descobriu isso?

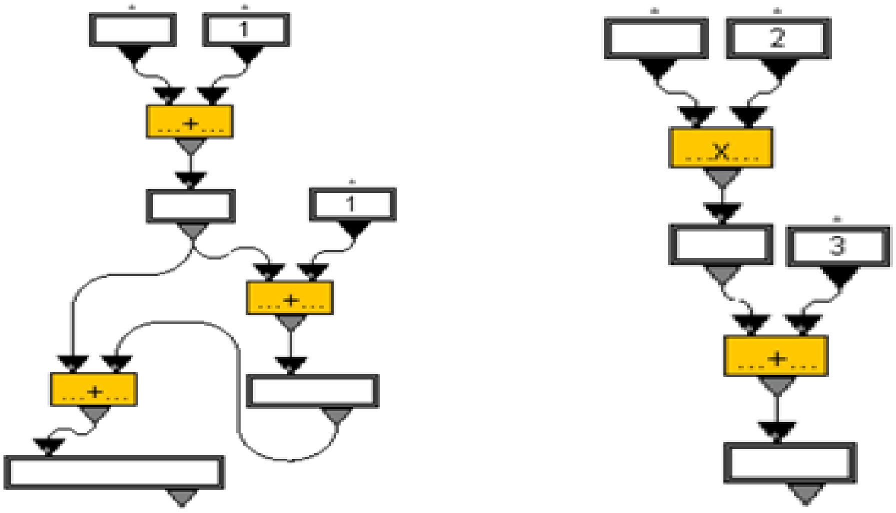
6. Explique com suas palavras o que as máquinas abaixo fazem:





Explicação:

7. Compare as duas máquinas e decida: a) o que há de diferente entre o resultado das duas máquinas? b) qual é a melhor?



Explicação:

CAPÍTULO 4: ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo apresento a análise dos dados obtidos com a implementação da proposta didática mencionada no capítulo anterior, bem como alguns benefícios e dificuldades encontrados durante este processo.

<u>Atividade 1</u>:

A atividade 1 ocorreu em dois encontros, o primeiro com duração de dois períodos e o segundo em um período. Iniciamos o primeiro encontro no laboratório de informática com explicações sobre como aconteceriam essas oficinas no laboratório. Primeiramente explicamos como o aplicativo Árvores Algébricas funciona, e fizemos alguns exemplos juntamente com os alunos para que eles compreendessem melhor como estruturar a “máquina”[9]. Ressaltamos que os alunos sempre deveriam fazer a resolução das questões no *applet* e depois fazer o desenho da máquina na folha de registro, ficando os cálculos da resolução final para o computador.

Na primeira questão, que pedia para desenhar oito mesas, dispostas uma ao lado da outra, e as cadeiras dispostas em volta, a maioria dos alunos, com exceção de um trio, desenhou conforme explicado e exemplificado no problema (figura 5). Um trio, na hora de representar as mesas unidas, fez um traço, ligando os lados das mesas que deveriam se encontrar (figura 6).

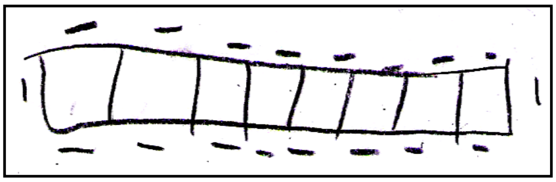


Figura 5: Resolução da Questão 1 feita pela maioria dos alunos – Atividade 1

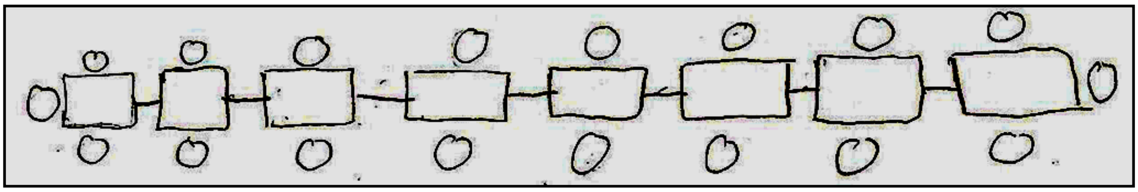


Figura 6: Outra solução da Questão 1 – Atividade 1

Para resolver a segunda questão, a grande maioria dos grupos comparou o exemplo que o problema forneceu com a resposta da questão anterior e, com isso perceberam o padrão de distribuição das cadeiras, de acordo com as mesas.

[9] Entende-se aqui por máquina o produto final, construído no applet Árvores Algébricas.

Nesta questão no item a, que fornecia a quantidade de mesas e pedia a quantidade de lugares disponíveis, duas soluções diferentes surgiram entre os grupos:

Uma delas é a solução da figura 7. Quando questionamos os grupos de como pensaram para elaborar esta máquina, os alunos responderam comparando com o desenho da questão anterior: “quando eu tenho 8 mesas uma do lado da outra eu vou ter 8 cadeiras em cima, 8 cadeiras em baixo e mais uma em cada ponta. Então é só somar o número de cadeiras que tem em cima e em baixo, que é o mesmo número de mesas somado duas vezes e depois somar mais duas cadeiras que ficam nas pontas. Inserem duas vezes o valor 20, que representa o número de mesas, e somam esses valores estão somando a quantidade de cadeiras que tem em cada lado da mesa, e depois somam as duas cadeiras que ficam na ponta.”

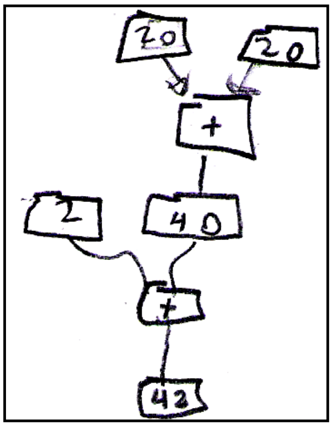


Figura 7: Resolução do item “a” da questão 2 através de somas – Atividade 1

A outra resolução (figura 8) foi a solução da maioria dos alunos, que perceberam que a quantidade de cadeiras que tem “acima e abaixo” das mesas é o dobro da quantidade de mesas, mais as duas cadeiras que ficam nas pontas.

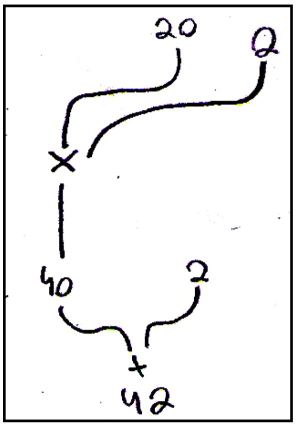


Figura 8: Resolução do item a da questão 2 usando multiplicação e adição – Atividade 1

Para a resolução do item b que fazia o mesmo questionamento do item a, porém a quantidade de mesas fornecidas eram 54, esperávamos que os alunos, percebessem que não precisavam apagar a máquina construída no item anterior para a resolução deste item, pois ela seria a mesma para qualquer valor que informássemos.

A grande maioria dos alunos, assim como os alunos do professor Kern (2008, p. 83)[10], acabou apagando a máquina antes mesmo de ler o próximo item. E depois seus membros acabaram percebendo que não precisavam ter apagado a máquina anterior, que o que iria mudar era só o número de mesas, passando de 20 para 54. Neste item eles mantiveram o mesmo raciocínio do item a, conforme as figuras 9 e 10.

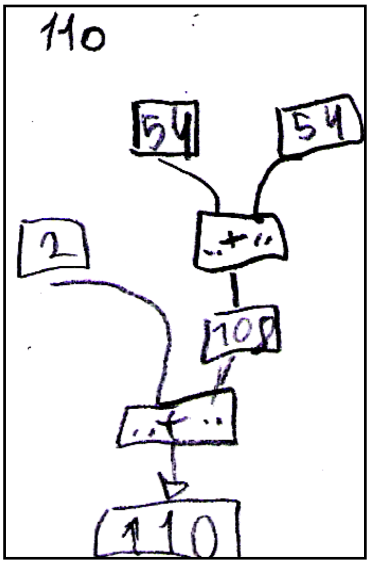


Figura 9: Representa a solução da maioria dos alunos no item b da questão 2 – Atividade 1

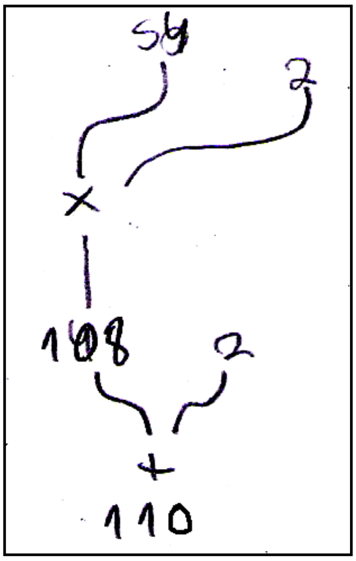


Figura 10: Representa a outra solução do item b da questão 2 – Atividade 1

No item c, que solicitava a construção da máquina generalizadora, os alunos não tiveram dificuldades de encontrar esta máquina, pois já haviam percebido, ainda

[10] Em (KERN, 2008 p 83).

no item b, que esta máquina existia, e era a mesma que estavam usando nos itens anteriores, nos quais tinham um número determinado de mesas para encontrar o número de cadeiras. Aqui, a todo o momento, os alunos vinham nos perguntar se a forma como estavam representando esse número de mesas estava correto. Eles se sentiram mais inseguros nesta questão. Mas quando dissemos que eles podiam representar da forma que eles acreditassem que estivesse mais correta, que não tinha uma única forma de fazer esta representação, ficaram mais tranquilos. Percebemos com isso, um apego à idéia de que só existe uma maneira de trabalhar com as generalizações, e que o correto seria sempre utilizar a letra “x” para fazer uma representação. Encontramos somente duas respostas que não utilizaram a letra “x” para representar esta generalização (figura 11). Já, a figura 8 12 representa as soluções que apresentam a letra “x” como generalização do número de mesas.

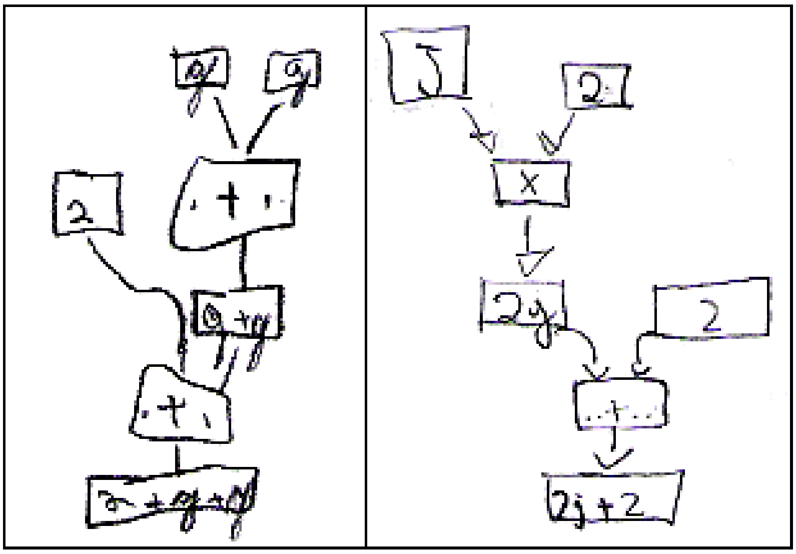


Figura 11: As soluções que não usaram a letra "x" para representar a generalização – Atividade 1

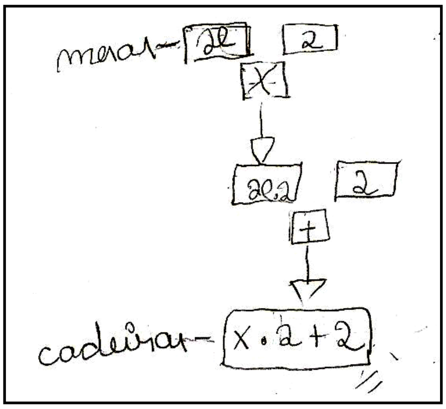
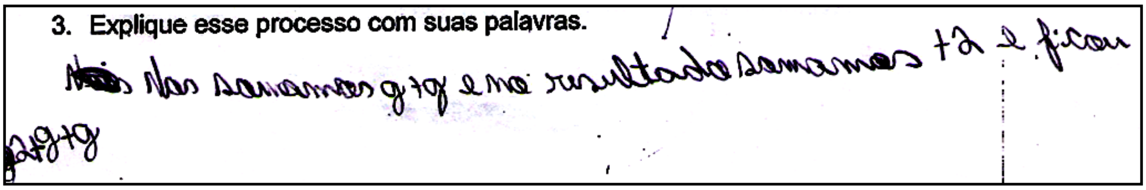


Figura 12: Solução que apresenta a letra "x" para generalizar o número de mesas – Atividade 1

Na terceira questão, que pedia para que os alunos explicassem com as suas palavras, o que acontecia nesse processo, encontramos dois tipos de resposta. Uma delas explica exatamente o procedimento como se eles estivessem fazendo a conta, só que por extenso. E a outra já explica um pouco o que quer dizer cada um dos elementos, mas acaba terminando só representado a conta também. Percebi que os alunos têm muita dificuldade para expressar em palavras o que estão pensando e o que estão fazendo. As figuras 13 e 14 representam essas soluções.


3. Explique esse processo com suas palavras.

~~Nós~~ Nós somamos 9+9 e no resultado somamos +2 e ficou 2·9+9

Figura 13: Solução 1 da questão 3 – Atividade 1

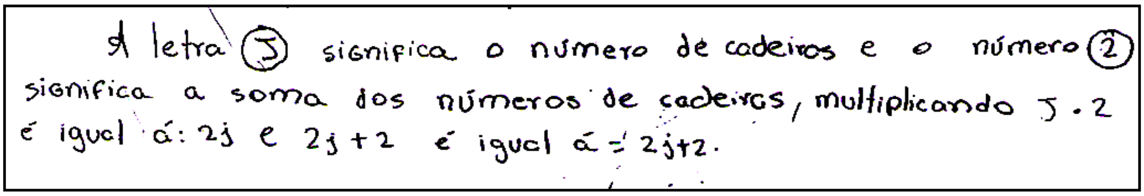

A letra J significa o número de cadeiras e o número 2 significa a soma dos números de cadeiras, multiplicando J · 2 é igual á: 2j e 2j + 2 é igual á = 2j+2.

Figura 14: Solução 2 da questão 3 – Atividade 1

Já na última questão, a qual solicitava aos alunos que expressassem o processo em linguagem matemática, a grande maioria escreveu a expressão algébrica deste processo, conforme a figura 15. Um trio escreveu a máquina generalizadora novamente (figura 16) e outro trio tentou escrever todo o processo (figura 17), mas acabou escrevendo igualdades que não são verdadeiras, então percebemos que eles ainda não compreenderam o significado do sinal “=”, de igualdade.

Encerrada a atividade, comentamos sobre alguns tipos de soluções encontradas pelos colegas. E como neste caso explicamos o que acabou dando problema na resolução, eles também testaram valores, para perceberem que $x \cdot 2$ é diferente de $x \cdot 2 + 2$, e que essa resposta à questão 4 poderia ter sido elaborada de outra forma, sem que tivesse o sinal de igualdade entre essas duas “afirmações”.

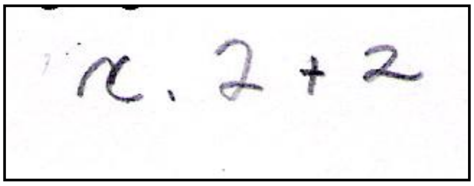

$x . 2 + 2$

Figura 15: Solução 1 da questão 4 – expressão algébrica – Atividade 1

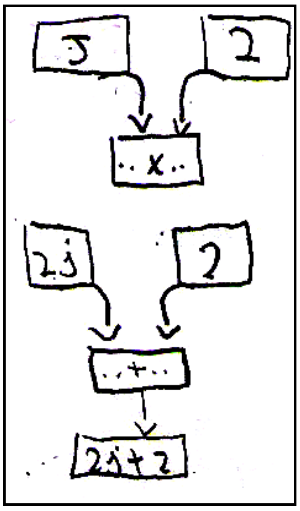


Figura 16: Solução 2 da questão 4 - máquina – Atividade 1

$$x \cdot 2 = x \cdot 2 + 2 = x \cdot 2 + 2$$

Figura 17: Solução 3 da questão 4 – Atividade 1

No final do primeiro encontro, a grande maioria tinha conseguido resolver somente até o item b da segunda questão, pois teve um pouco de dificuldade na adaptação com o *applet*. Então, resolvemos continuar esta atividade no próximo encontro.

Ao final do segundo encontro, foram poucos os alunos que ainda apagavam as máquinas para resolverem o novo problema; eles já esperavam para ler o novo item e ver se podiam aproveitar a mesma estrutura para continuar resolvendo. Os alunos reconheceram a existência de máquinas generalizadoras. E já começavam a perceber a relação entre as linguagens para expressar um mesmo procedimento de formas diferentes; apenas apresentavam dificuldades para escrever o que estavam pensando.

Foi muito importante o momento em que paramos as atividades para discutir as idéias que os grupos tiveram nas resoluções, pois enquanto eles iam defendendo suas idéias, percebiam características que eram fundamentais estarem presentes nas resoluções. Eles perceberam que não existe somente uma maneira de se resolver um problema, que podemos olhar o problema de diferentes formas e que algumas delas nos proporcionariam alcançar a solução. Neste momento também foi importante a participação dos alunos, a ajuda de um para com o outro para explicar algo que o colega não tivesse entendido. Por isso e também devido a alguns problemas técnicos, que tivemos em dois dias no laboratório de informática, acabamos tendo que mudar um pouco o cronograma de atividades. Com essa mudança passamos a fazer essas discussões nos outros encontros também, pois acreditamos que elas eram muito ricas em termos de aprendizado para os alunos e não poderíamos privá-los disso.

Com essa atividade, concluímos que os alunos alcançaram os objetivos pretendidos e que estavam baseados em Vlassis e Demonty (2002), pois quando os eles perceberam a existência de máquinas generalizadoras, entenderam a ideia de a letra poder assumir o papel do “número generalizado” e a possibilidade de cálculo com valores numéricos, atribuindo um valor à letra.

Atividade 2:

Esta atividade aconteceu no terceiro encontro, e continua com os mesmos propósitos, ou seja: que os alunos percebam que podem utilizar a mesma estrutura de resolução para resolver diversos casos; que os alunos consigam produzir máquinas generalizadoras e usar a linguagem algébrica. Nesta atividade, também nos interessa que eles construam a máquina inversa nas questões que exigem este tipo de raciocínio.

A atividade das impressoras estava dividida em vários itens, agrupados pela similaridade. As perguntas dos itens “a” e “b” exigem máquinas generalizadoras bem simples, mas apesar de perceber a existência dessas máquinas, a metade dos trios preferiu construí-las novamente para resolver as outras perguntas dos mesmos itens, enquanto a outra metade construiu uma só e a cada tempo solicitado substituía o valor pedido. As figuras 18 e 19, representam as soluções dos itens “a” e “b”, respectivamente, de todos os trios, pois independentemente de repetirem ou não a máquina no *applet*, na folha de registro eles acabaram desenhando uma máquina para cada resultado.

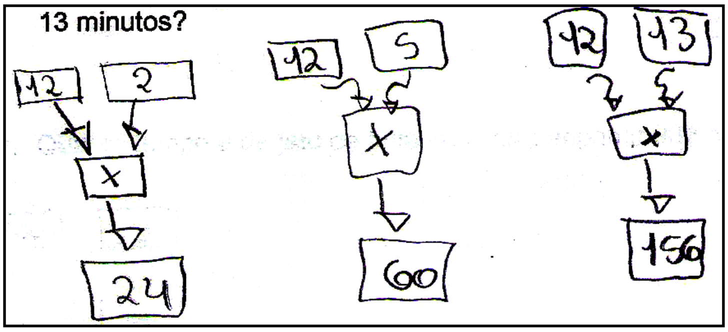


Figura 18: Representa a solução dos alunos do item a - Atividade 2

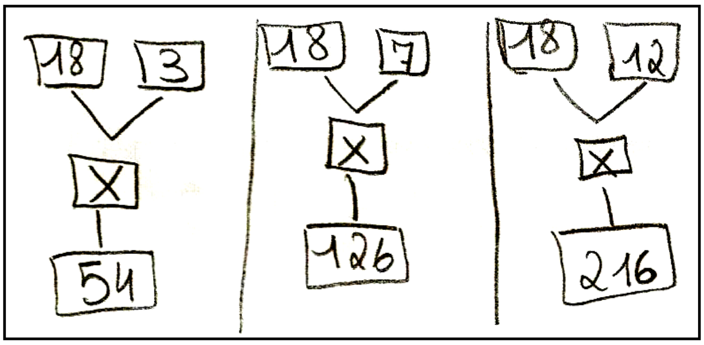


Figura 19: Representa a solução dos alunos do item b – Atividade 2

No item “c”, esperávamos que os alunos integrassem as duas máquinas já trabalhadas, e foi o que todos fizeram com exceção de um trio que calculou tudo separadamente sem interligar as máquinas. Não houve dificuldade neste item. A figura 20 representa a solução dos alunos neste item: eles multiplicavam a quantidade de folhas que cada impressora imprimia por minuto, pelo tempo pedido no problema, e após somavam esses valores para descobrir a quantidade total de folhas que foram impressas. A figura 21 representa a solução do único trio que resolveu sem interligar as máquinas.

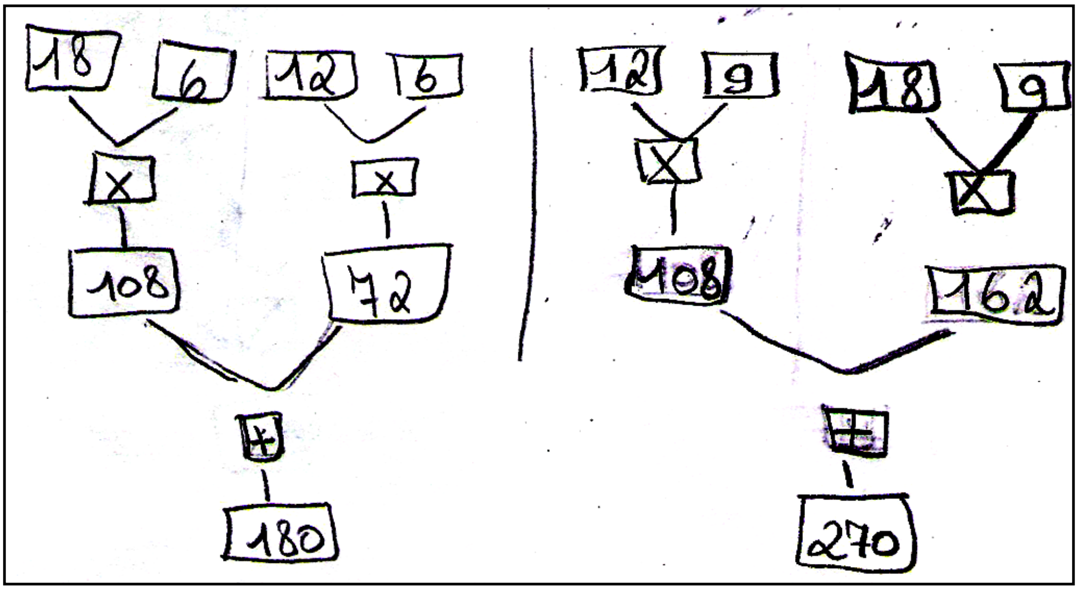


Figura 20: Solução do item c - Atividade 2

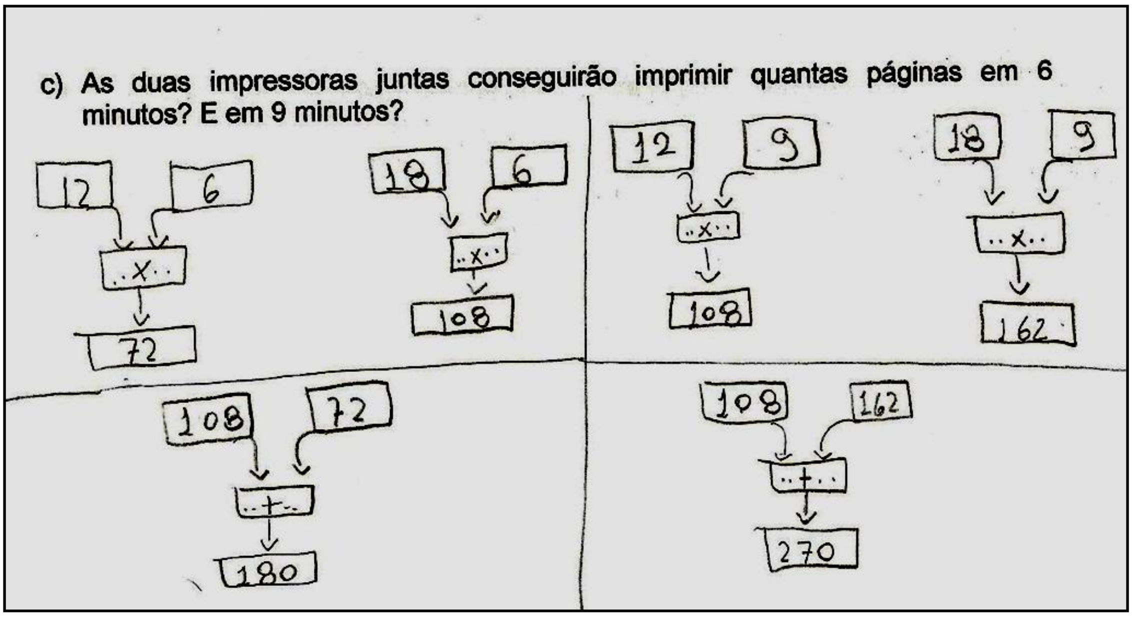


Figura 21: Solução por partes do item "c" - Atividade 2

Os itens “d” e “e” poderiam representar uma dificuldade para os alunos por se tratarem de relações inversas. Contudo os alunos não apresentaram dificuldades para resolver esta questão, pois perceberam que precisavam fazer o contrário do que fizeram nos itens “a” e “b”, quando queriam determinar o número de páginas impressas num tempo determinado pelo problema. Agora nos itens “d” e “e”, eles tinham a quantidade de páginas impressas e precisavam descobrir em quanto tempo cada impressora levaria para imprimir essas páginas. Como anteriormente eles haviam multiplicado os valores, agora eles tinham que dividir esses valores. Esta foi a justificativa que os alunos deram quando questionados quanto à resolução destes itens. As figuras 22 e 23 representam, respectivamente, a resolução do item “d” e “e”.

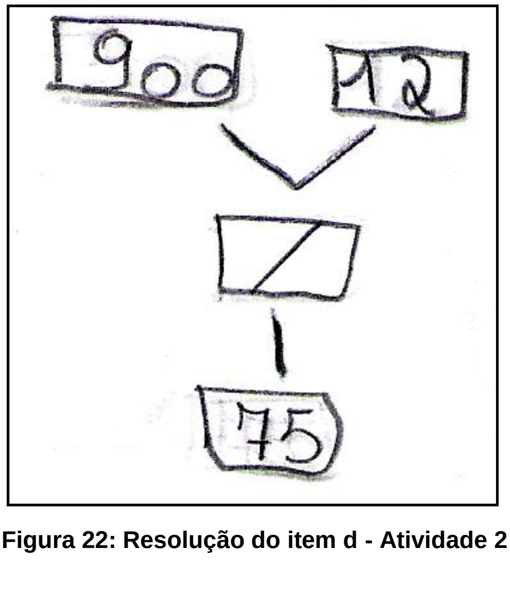


Figura 22: Resolução do item d - Atividade 2

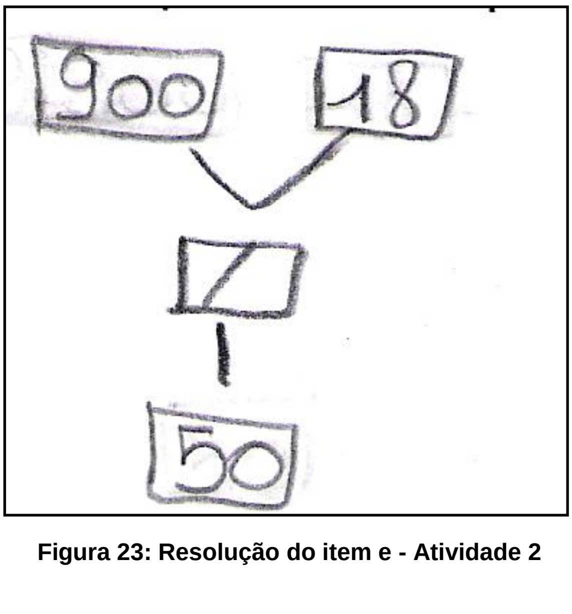


Figura 23: Resolução do item e - Atividade 2

Já no item “f” a resolução não se dá através da máquina inversa, como nos dois itens anteriores, aqui, a estrutura é um pouco diferente. Nesta questão, a maioria dos alunos mostrou bastante dificuldade em entender como resolver, já que não adiantava proceder como nos itens anteriores. Depois de muita discussão entre os grupos e questionamentos que fomos fazendo, sempre tomando o cuidado de não influenciar e guiar os alunos a um determinado raciocínio, eles conseguiram encontrar um raciocínio a partir da compreensão do que estava sendo solicitado na questão o que os levou a uma solução.

Alguns conseguiram resolver por tentativa e erro, eles sabiam como calcular a quantidade de páginas se soubessem o tempo, então foram testando até descobrir quanto tempo eles tinham que colocar para a resposta dar 900 cópias (figura 24).

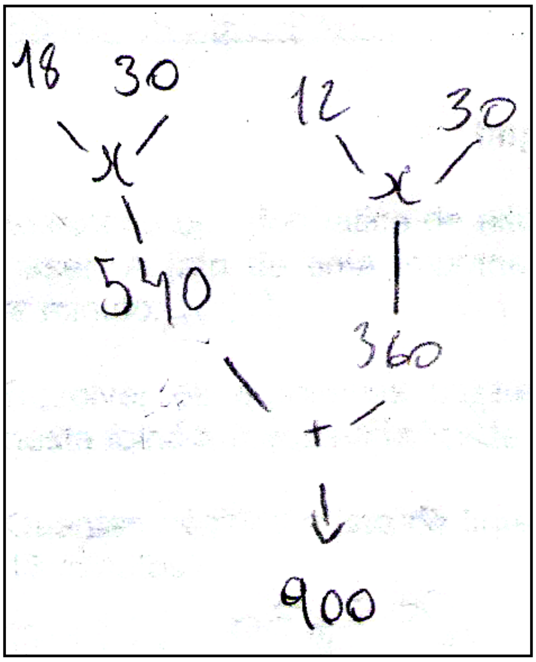


Figura 24: Resolução por tentativa e erro do item "f" - Atividade 2

Já as figuras 25 e 26 apresentam a solução de quem conseguiu perceber que precisava somar a quantidade de páginas que cada impressora imprime em um minuto para, assim, calcular a máquina inversa (dos itens “d” e “e”) e descobrir o tempo que as duas impressoras levariam juntas para imprimir as 900 páginas. A figura 26 apresenta a solução com as duas máquinas interligadas, mas só três trios conseguiram resolver desta maneira.

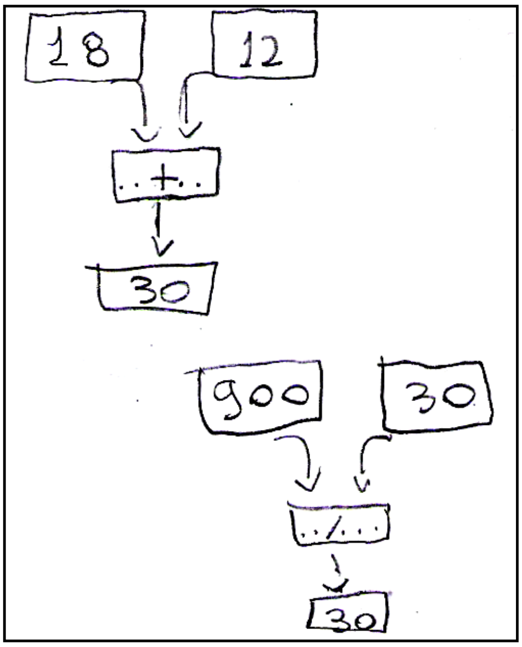


Figura 25: Resolução 1 do item "f" - Atividade 2

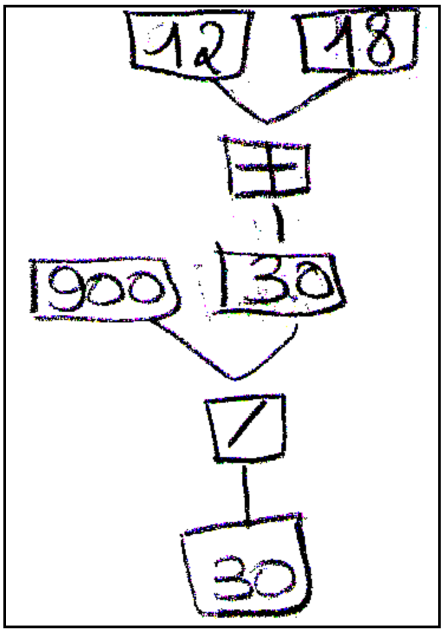


Figura 26: Solução 2 do item "f" - Atividade 2

O item “g” perguntava quantas folhas cada máquina imprimiu no item anterior. Como os alunos acabaram de descobrir o tempo que as impressoras levaram para imprimir, ficou fácil de resolver este item. Os alunos que não resolveram por tentativa e erro o item anterior fizeram a máquina como nos itens “a” e “b” (figura 27). E os outros alunos, que resolveram por tentativa e erro o item anterior, já encontraram o valor ainda naquele item, informando somente os valores (figura 28). Conforme questionamento feito a eles: “a gente descobriu quantas páginas cada uma iria imprimir na questão anterior, e para não repetir novamente a máquina colocamos só o resultado nesta questão, pode ser?”

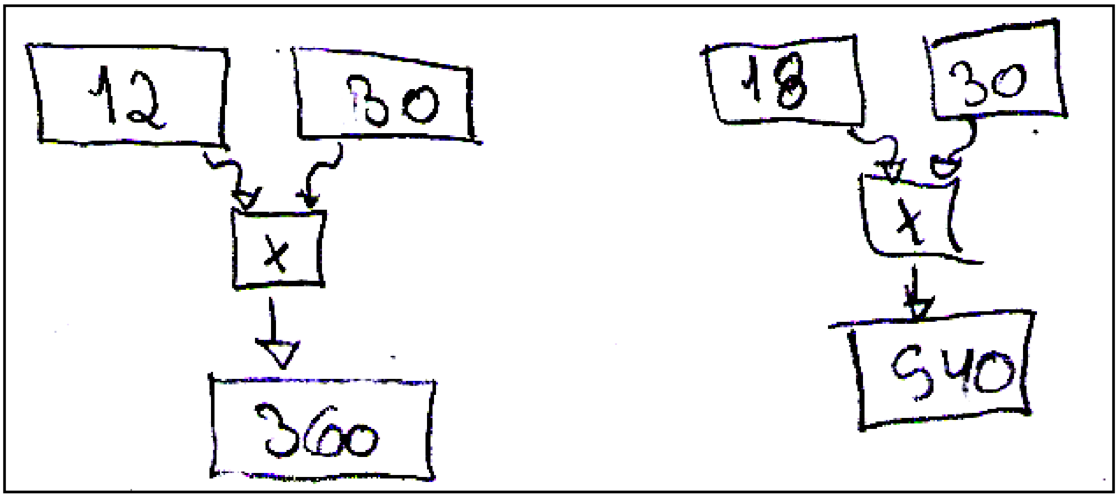
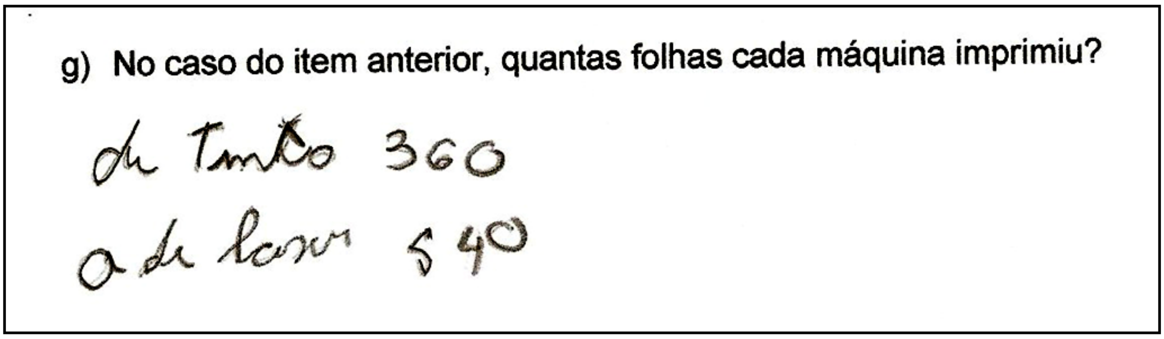


Figura 27: Resposta do item "g" - Atividade 2


g) No caso do item anterior, quantas folhas cada máquina imprimiu?

da Tinta 360

a de laser 540

Figura 28: Resposta do item "g" que só informou os resultados - Atividade 2

Nesta atividade, muitos alunos mostraram claramente raciocínios generalizadores, apesar de muitos, nos três primeiros itens, optarem por copiar cada máquina separadamente. Isto ocorreu também com os alunos de Kern (2008, p 84):

> [...]enquanto trabalhando no aplicativo, os alunos já criavam apenas uma máquina e mudavam os valores de entrada conforme os dados da pergunta. A idéia de que uma máquina era suficiente para resolver vários problemas já estava presente, mas não refletiu na solução transcrita na “folha guia de atividade”.

Os alunos não tiveram muitas dificuldades para encontrar a máquina inversa. O item em que os alunos sentiram mais dificuldade foi o “f”, pois não estavam acostumados a resolver perguntas mais complexas. No entanto, depois de debaterem entre si, cada grupo foi chegando num consenso para a resolução. Os que não conseguiam enxergar de outra forma acabaram resolvendo por tentativa e erro até descobrirem que tempo era necessário inserir na máquina para que a resposta fosse 900 páginas impressas. Apesar de alguns grupos partirem para a tentativa e erro, eles conseguiram interpretar corretamente o que a sua máquina estava propondo ao ponto de na questão seguinte não sentirem a necessidade de resolver novamente, já que acabaram utilizando os passos empregados na questão anterior e descobrindo também a resposta do item seguinte, “g”.

Como esperado, assim como em Kern (2008), por se tratar de um item com maior complexidade, os alunos tiveram mais dificuldade para a sua resolução. Os alunos fizeram vários testes e após bastante discussão nos grupos, aos poucos, cada um foi conseguindo chegar na sua resposta.

Depois das atividades, fizemos discussões no grande grupo para que os alunos explicassem para seus colegas suas formas de resolver os itens “f” e “g”. E os grupos que não conseguiram resolver sem ser por tentativa e erro, conseguiram compreender o raciocínio dos colegas e perceber que por tentativa e erro o processo era mais demorado e, segundo os próprios estudantes, “mais trabalhoso”.

Atividade 3:

A atividade 3 ocorreu no quarto encontro, e teve duração de dois períodos. Esta atividade envolve as diferentes formas de se representar a situação-problema, através de tabela, gráfico, máquina algébrica e representação algébrica.

Na primeira questão, no item “a”, era solicitado aos alunos para desenharem a máquina que representava a quantidade de páginas impressas a partir do tempo de funcionamento da impressora. Na sua totalidade, os grupos conseguiram construir a máquina generalizadora (figura 29), o que já era esperado, pois eles já vinham apresentando raciocínio generalizador nas outras atividades, diferentemente dos alunos de Kern (2008, p. 96), que ainda construíam máquinas numéricas.

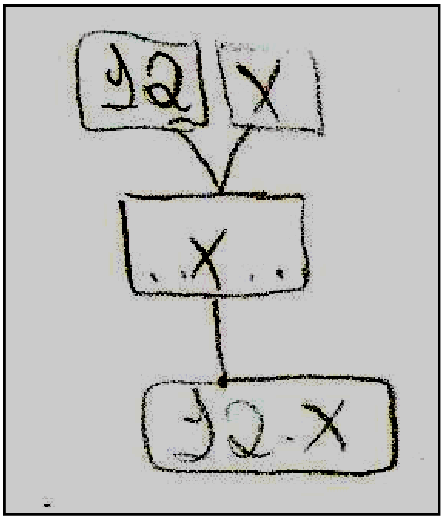
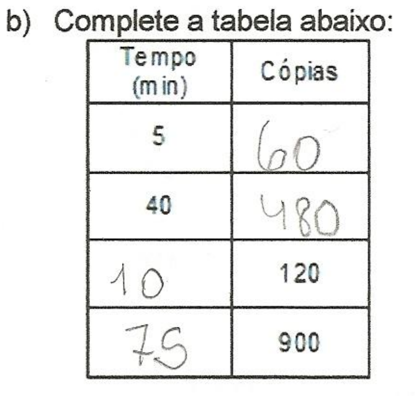


Figura 29: Solução do item "a" - Atividade 3

Já no item “b”, o qual solicitava que os alunos completassem uma tabela que já estava com alguns dados preenchidos, a maioria dos alunos conseguiu preencher as duas primeiras linhas, pois se tratava da aplicação direta da máquina do item anterior. Mas nas outras duas linhas, os alunos tinham que utilizar a máquina inversa para poder preencher as células restantes, e nesta parte eles tiveram um pouco de dificuldade em perceber essa relação da máquina inversa com a segunda coluna da tabela, mas todos conseguiram resolver esta questão. A figura 30 ilustra a solução deste item pelos trios.



b) Complete a tabela abaixo:

Tempo (min)	Cópias
5	60
40	480
10	120
75	900

Figura 30: Solução do item "b" - Atividade 3

O item “c” foi aquele em que os alunos tiveram mais dificuldade para resolver. Percebemos que a maioria dos alunos, se não a sua totalidade, não havia ainda trabalhado com esse tipo de questão, na qual eles precisavam construir um gráfico. Paramos a atividade e fizemos uma discussão entre os grupos para ver o que eles conheciam de gráficos e tabelas. A partir da discussão, os alunos começaram a perceber a relação entre o gráfico e a tabela e entre o gráfico e a máquina – a relação da tabela com a máquina eles haviam percebido sem dificuldades durante a atividade. Nessa discussão propusemos que os alunos fossem testando diferentes máquinas para ver como eram os gráficos que se relacionavam com elas. Assim eles puderam perceber a diferença entre os gráficos de diversas funções como, por exemplo, quando a operação ‘elevar ao quadrado’ estava presente. Na hora da construção dos gráficos, os alunos não informaram as “grandezas” envolvidas, apesar de termos alertado quanto a isso.

As figuras 31 e 32 apresentam as diferentes resoluções que apareceram neste item. Alguns alunos, apesar de verem no aplicativo que o gráfico da máquina do item “a” era uma reta, desenharam somente os pontos que estavam representados na tabela. Isso nos indica que ainda não compreenderam o significado do gráfico e a relação entre a tabela e o gráfico.

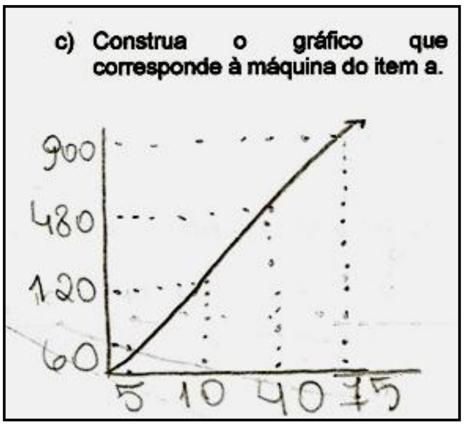


Figura 31: Gráfico 1 do item "c" – Atividade 3

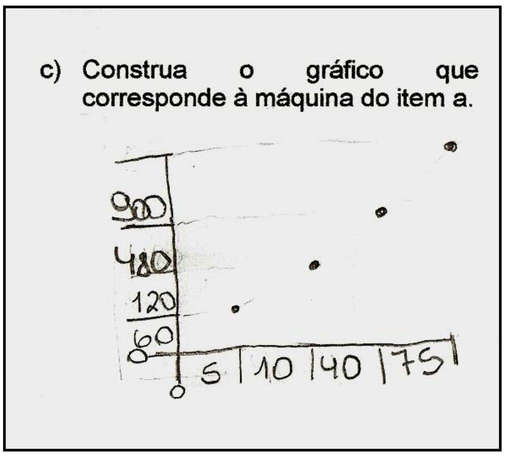


Figura 32: Gráfico 2 do item "c" - Atividade 3

O item “d” pedia para os alunos o número de cópias que a impressora produz em duas horas. Nesta questão os alunos tinham que se dar conta de transformar as duas horas em minutos, pois as máquinas com que estavam trabalhando pediam o tempo em minutos. Todos os trios conseguiram perceber que teriam que fazer esta conversão para colocar o dado na máquina, sem dificuldades. A figura 33 representa a máquina da resolução deste item.

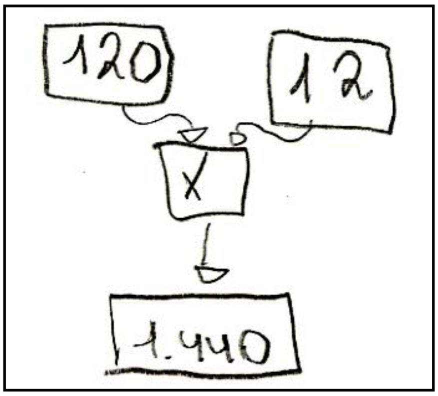


Figura 33: Máquina que representa a solução do item "d" - Atividade 3

Dois trios tiveram bastante dificuldade nos itens “b” e “c”, com isso demoraram muito para prosseguir com a atividade, resolvendo-a até o item “d”. Nos próximos itens a atividade vai pedindo explicitações das expressões algébricas.

No item “e”, perguntava se a letra “m” representasse o “número de minutos”, como poderíamos escrever o número de cópias? Dos grupos que resolveram esta questão, todos responderam $12 \cdot m$ (figura 34). Ninguém respondeu $12m$ sem o sinal da multiplicação, nem somente 12. Acredito que isso ocorreu pelo fato de que o *applet* sempre apresenta esse tipo de solução com o sinal da multiplicação na resposta.

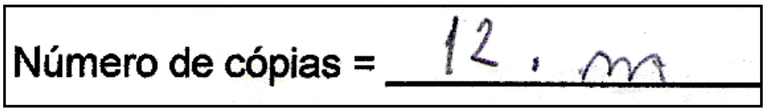


Figura 34: Solução do item "e" - Atividade 3

Já o item “f” pedia para desenhar a máquina inversa. Neste item não houve grandes dificuldades e, apesar de não ser solicitada a mesma representação para o número de cópias, os alunos usaram a resposta do item anterior para resolver este item (figura 35).

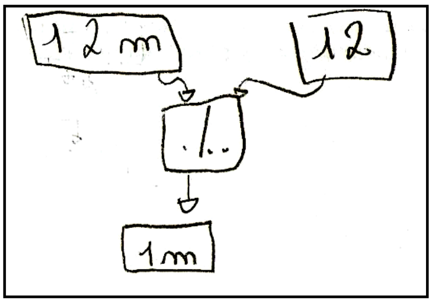


Figura 35: Solução do item "f" - Atividade 3

O item “g” pedia para os alunos quanto tempo a impressora levaria para imprimir 330 cópias. Todos os alunos substituíram 12m por 330 na máquina anterior para obter o tempo (figura 36). Como o tempo não deu exato, nenhum trio chegou a fazer alguma conversão, o que esperávamos que alguns fizessem.

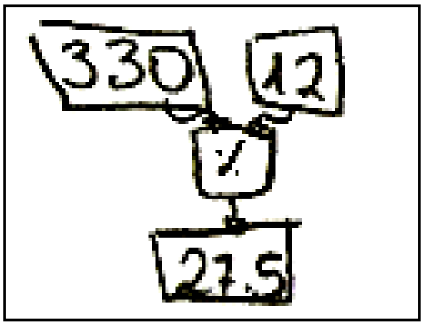


Figura 36: Resolução do item "g" - Atividade 3

No item “h” pedia para os alunos escreverem o tempo de funcionamento da impressora (em minutos) se a letra “c” representasse o número de cópias feitas pela impressora. Um trio em vez de colocar o número 12 (que representa quantas páginas a impressora imprime por minuto) e dividir pelo número de cópias (máquina inversa), o trio substituiu o número 12 por “x” e multiplicou ao invés de dividir por “c” (figura 37). Já os outros grupos responderam $12 \cdot c$ (figura 38). As duas soluções não representam a máquina inversa. Ou seja, os alunos resolveram incorretamente este item, pois resolvendo pela máquina inversa, as soluções deveriam ser c/12, que é o número total de cópias impressas dividido pelo número de cópias impressas em um minuto, resultando então no tempo de funcionamento da impressora.


Tempo de funcionamento da impressora (em minutos) = x · c

Figura 37: Resposta do item "h" - Atividade 3


Tempo de funcionamento da impressora (em minutos) = 12.c

Figura 38: Resolução do item "h" pela maioria dos alunos - Atividade 3

Todos os grupos conseguiram construir a máquina generalizadora, o que já era esperado, pois eles já vinham apresentando raciocínio generalizador nas outras atividades. Nesta atividade já tivemos que lidar com a diferença do ritmo de trabalho entre os trios, pois houve grupos que demonstraram dificuldade na construção do gráfico e na relação entre os diferentes tipos de representações.

Pudemos perceber que os alunos trabalharam muito pouco com tabelas e gráficos durante as aulas, por isso tivemos que retomar e explicar qual a relação do gráfico com as outras representações e como construímos um gráfico, entre outras dúvidas que iam surgindo. No fim deste encontro duas duplas não conseguiram terminar atividade.

A maioria dos alunos não apresentou dificuldade na hora de escrever a expressão algébrica. E quando solicitados, conseguiam explicar seus procedimentos. Portanto acreditamos que a maioria dos alunos já possui uma apropriação da linguagem algébrica.

Atividade 6:

No quinto e último encontro, a atividade 6 tinha como objetivos transcrever “expressões em linguagem corrente” para “expressões algébricas” e identificar expressões algébricas equivalentes. Retomamos um pouco do que foi trabalhado até este momento e, após, os alunos começaram a resolver esta última atividade.

As três primeiras questões tinham o intuito de que os alunos, a partir de uma estrutura pré-estabelecida, montassem a máquina que correspondesse à situação-problema estipulada. Nestas questões todos os alunos completaram as máquinas satisfatoriamente e utilizaram a letra “x” para representar o “número desconhecido” (figura 39).

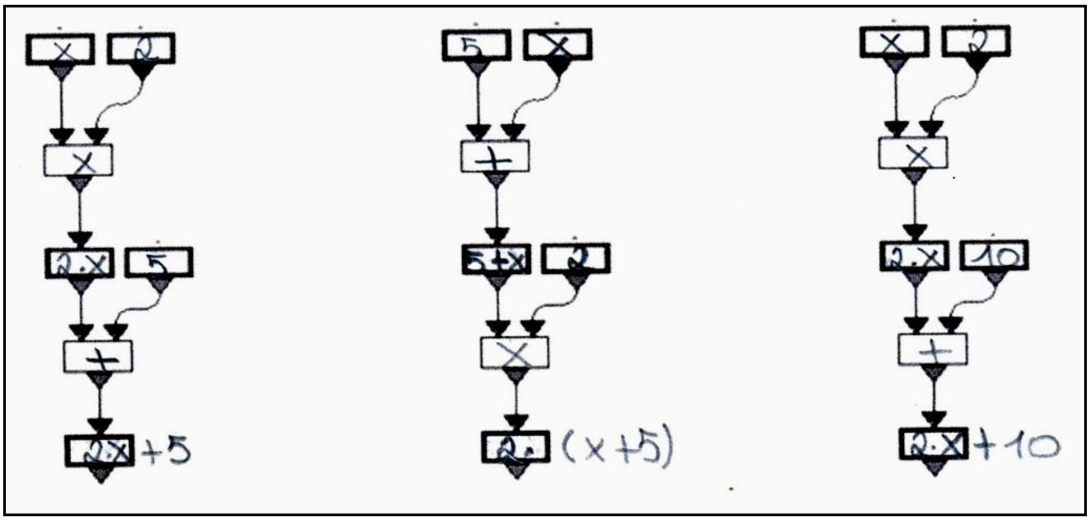


Figura 39: Solução das três primeiras questões - Atividade 6

Na questão 4, todos os alunos ligaram corretamente cada máquina com a sua respectiva resposta (figura 40). Seu propósito era fazer os alunos perceberem que a ordem em que são efetuadas as operações se reflete na escrita da expressão algébrica.

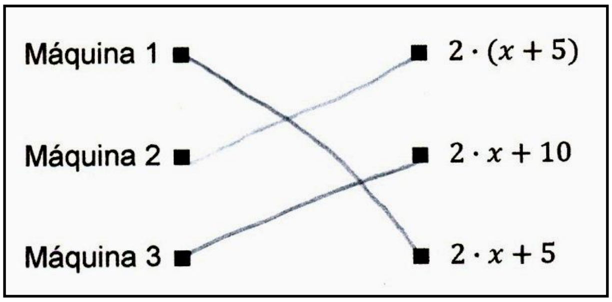


Figura 40: Solução da quarta questão - Atividade 6

Na questão 5, os alunos deveriam identificar as máquinas equivalentes. Os grupos que “retiraram os parênteses” corretamente conseguiram identificar quais máquinas eram iguais. Já os outros acharam que só retirando os parênteses, sem resolver operação alguma, era suficiente para descobrir quais máquinas seriam iguais, e acabaram obtendo um resultado não satisfatório (figura 41). Como os alunos ainda não haviam visto multiplicação de polinômios e, portanto, poderiam não saber essa “propriedade”, esperávamos que testassem valores para comprovarem quais maquinas eram realmente equivalentes. Mas isto não aconteceu, com exceção de três trios que retiraram os parênteses da máquina e testaram o resultado para confirmar (figura 42).

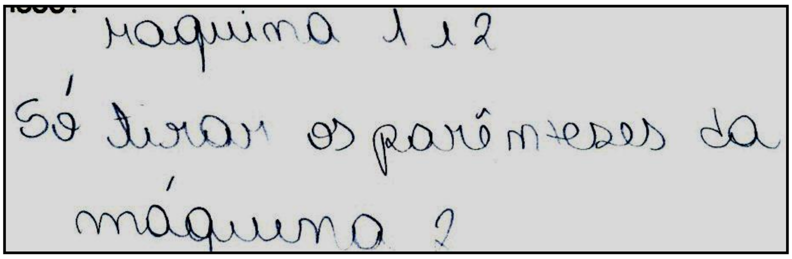


Figura 41: Resolução 1 da questão 5 - Atividade 6

Figura 42: Segunda solução para a quinta questão - Atividade 6

Na questão 6 os alunos tinham que explicar em linguagem corrente o processo de cada máquina. Os alunos apresentaram três tipos de resposta:

Dois terços dos trios não substituíram valores para saber qual o processo de cada máquina. Escreveram diretamente o que significava cada um deles. Metade destes grupos não prestou atenção ao que foi explicado no início da aula, quando foi retomado o significado de cada operação que podia ser utilizada nas caixas amarelas, e acabou interpretando a caixa que "elevava um valor" ao quadrado como sendo uma multiplicação por dois (figura 43). A outra metade dos dois terços dos alunos respondeu corretamente, sem precisar do auxílio da máquina e da substituição de letras para encontrar o processo de cada máquina (figura 44).

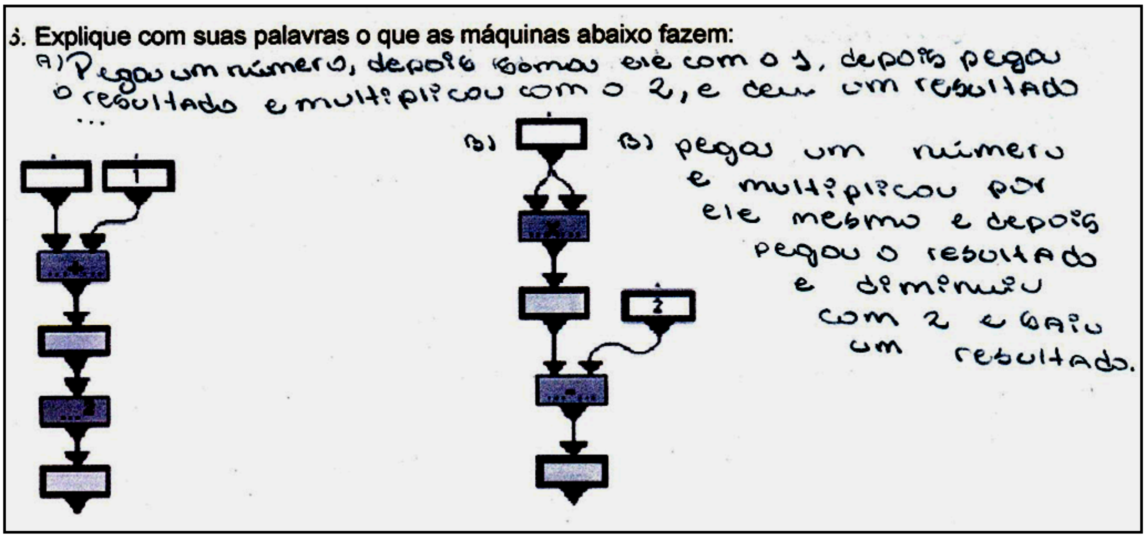


Figura 43: Resolução 1 da questão 6 - Atividade 6

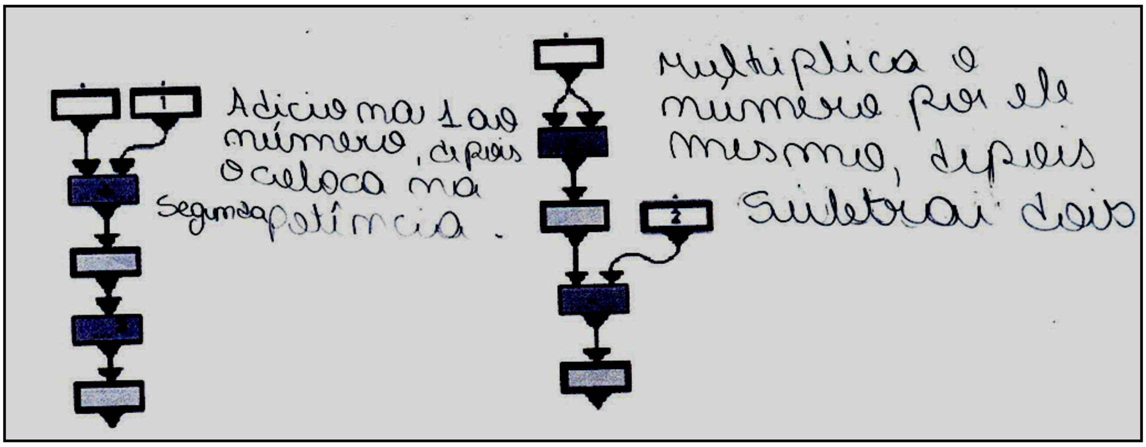


Figura 44: Solução 2 da questão 6 - Atividade 6

Já um terço dos alunos substituiu as caixas em branco por uma letra para descobrirem qual era o processo destas máquinas generalizadoras. Todos os alunos que resolveram desta maneira conseguiram chegar numa resposta correta (figura 45).

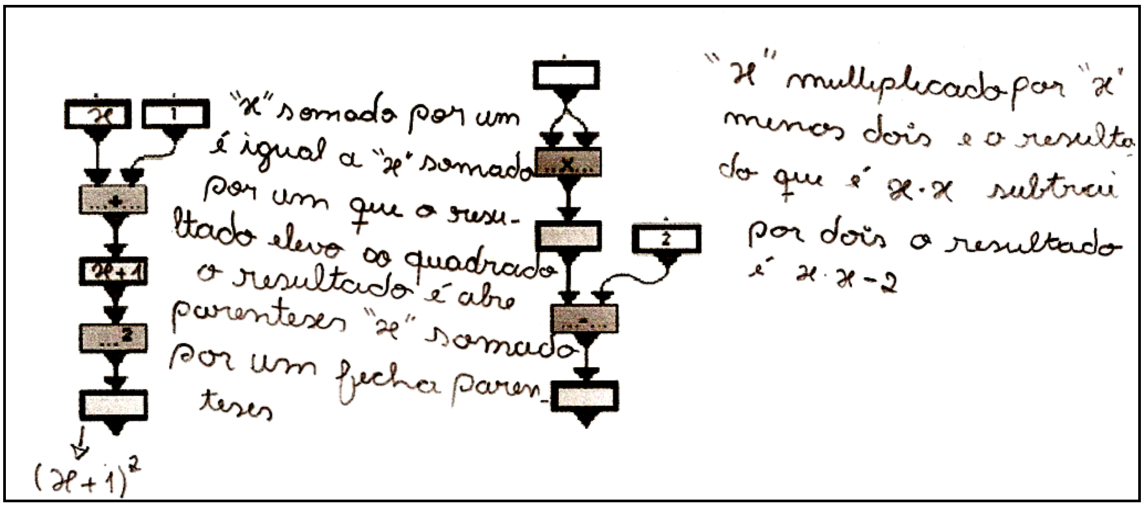


Figura 45: Solução 3 da questão 6 - Atividade 6

No item "a" da questão 7 do era pedido para os alunos compararem as duas máquinas e dizerem o que havia de diferente nos resultados, e no item "b" ele deviam responder qual delas era a melhor. Esta questão tem o intuito de provocar o reconhecimento de expressões algébricas equivalentes. Essas máquinas possuem estruturas diferentes, porém resultam em expressões equivalentes.

Três grupos deixaram esta questão em branco por falta de tempo. Já os alunos que responderam, em um primeiro momento, perguntavam "como eu vou encontrar uma diferença se os resultados são iguais?". Então pedíamos para que eles escrevessem isso, se não encontrassem nenhuma diferença (figura 46).

Percebemos que, na última questão, os alunos haviam compreendido que existem expressões equivalentes e as trataram como sendo iguais. Por isso, quando questionados da diferença, eles alegavam que não existia diferença entre uma e outra. No item “b” todos os alunos escolheram a segunda máquina como a melhor, só um trio escreveu que ela seria melhor por ser a mais simples. Os outros escreveram que ela era melhor porque era mais rápida. Acreditamos que os alunos a qualificaram como rápida no sentido dela conter menos “passos” para chegar ao resultado.

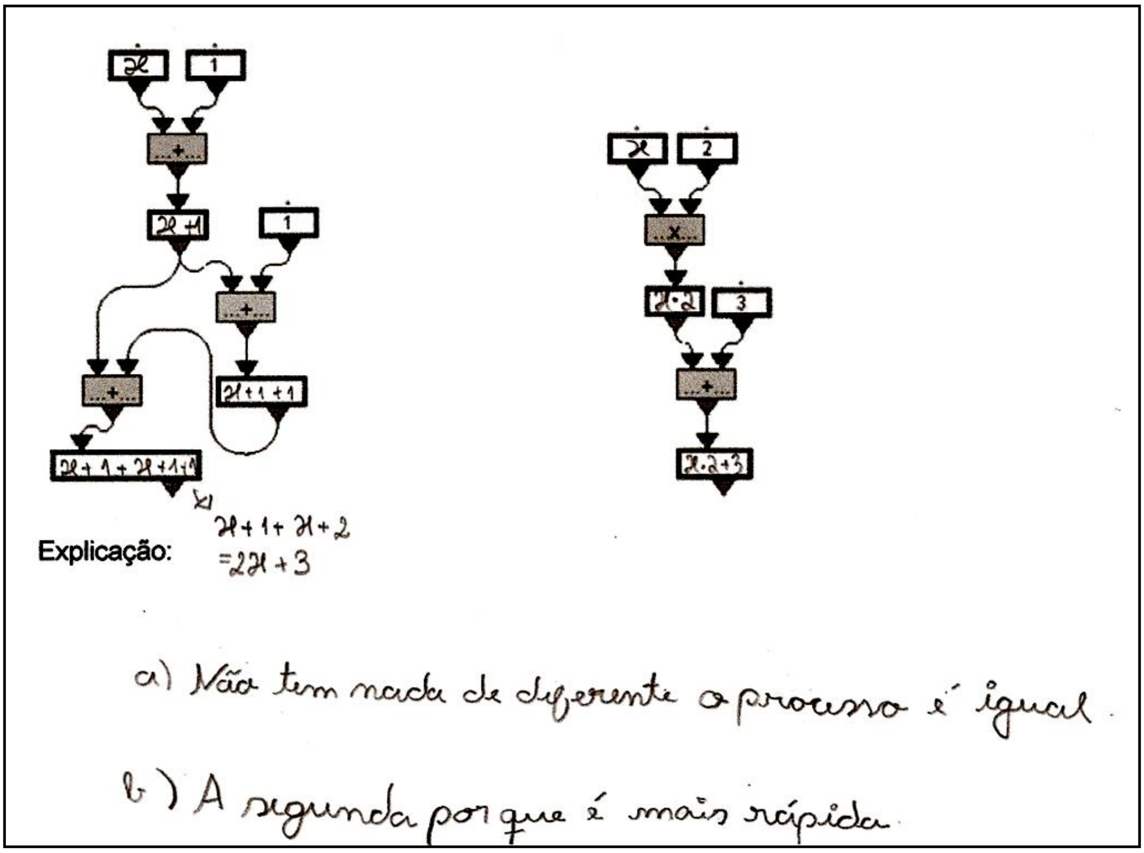


Figura 46: Solução da questão 7 itens "a" e "b" - Atividade 6

Esta atividade tratou de forma um pouco mais abstrata a linguagem algébrica e a representação de expressões algébricas. Percebemos que os alunos mostraram desenvoltura, assim como os alunos de Kern (2008), para transcrever expressões dadas em linguagem corrente para as máquinas algébricas. E da mesma forma o contrário. Na questão em que os alunos tinham que perceber a existência de expressões equivalentes, eles não tiveram dúvidas quanto a esta percepção, porém eles ainda as tratam como expressões iguais e não como equivalentes. As expressões algébricas são diferentes, porém representam o mesmo número, então as chamamos de equivalentes. Por isso, ao término da atividade, enquanto fazíamos o fechamento da oficina, levantamos este tópico para que ficasse mais clara para os alunos essa diferença entre “igual” e “equivalente”. Nesta questão não tivemos nenhum caso em que os alunos fizeram comparações entre as operações – como em (Kern, 2008, p. 110). Em nosso estudo, os alunos compararam os resultados e/ou a praticidade da máquina.

Acompanhando a evolução dos alunos durante a oficina, foi possível identificar o crescimento na compreensão da linguagem algébrica. Inicialmente, eles construíam uma máquina nova para cada resolução. Com o desenrolar das atividades, eles passaram a resolver as atividades através da máquina generalizadora, percebendo que alguns valores nas caixas de entrada nunca mudavam, enquanto outros mudavam várias vezes no decorrer do problema. Este comportamento demonstra que os alunos compreenderam a idéia de variabilidade.

Os alunos conseguiram aos poucos fazer a transição da linguagem corrente para a algébrica e vice-versa.

CAPÍTULO 5: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta de ensino e aprendizagem para a introdução do pensamento algébrico. Conforme vimos anteriormente, não é fácil definir a álgebra. Ao longo da história, a concepção de variável mudou bastante. Hoje em dia, segundo USISKIN (2003, p. 11), ela é tida como "símbolo que representa indistintamente os elementos de um conjunto", tal como a utilização de letras para a construção de máquinas generalizadoras. Mas esta concepção não é a única.

Nossas atividades fazem parte da concepção de álgebra que trata a variável como generalizadora de modelos e situações, e vinculam-se também à concepção de que as variáveis variam e podem assumir qualquer valor em um determinado contexto de definição. Estamos de acordo com a seguinte afirmação de Demana e Leitzel (2003, p 74) "[...] a introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas dá aos alunos a percepção de que as variáveis podem representar números de vastos conjuntos numéricos e de que elas são instrumentos úteis na descrição de generalizações"

Acreditamos, também, assim como Vlassis e Demonty (2002, p 45), que é fundamental o ensino por situações-problema, pois dá aos alunos um sentido à aprendizagem matemática, permite-lhes aplicar seus conhecimentos anteriores, dando sentido a novas aprendizagens.

E para que isso aconteça temos que preparar toda a atividade com cuidado. Os alunos têm que ter uma compreensão global da situação-problema. Temos que dar tempo para que eles reflitam e busquem soluções para os problemas sozinhos. Não podemos influenciá-los na estratégia de resolução, podemos questioná-los, mas sem interferir neste processo. Temos que permitir que os alunos debatam os diferentes pontos de vista, mas temos que saber guiar esta discussão e selecionar somente algumas questões com características distintas cada para facilitar a discussão. E, sempre que necessário, fazer uma sistematização dos conteúdos envolvidos.

Acreditamos que as atividades cumpriram seus objetivos, pois conseguimos introduzir o pensamento algébrico através do uso do computador e de situações-problemas. Ao termino das atividades os alunos conseguiam compreender que existem diferentes maneiras de representar uma expressão algébrica, além de perceber a existência de expressões equivalentes. Eles conseguiram trabalhar com as máquinas generalizadoras, utilizando letras para representar esta generalização, e compreender a necessidade destas generalizações. Os alunos perceberam também a existência de máquinas inversas, e obtiveram um crescimento na compreensão da linguagem algébrica, fazendo com destreza a transição de uma linguagem algébrica para a linguagem corrente e vice-versa. Perceberam maneiras diferentes de se utilizar a álgebra.

A sequência de atividades aplicada com os alunos está disponível nos anexos. Cabe ao professor, avaliar o perfil de seus alunos e fazer as adaptações necessárias para implementar essas atividades em suas aulas.

.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONADIMAN, Adriana. *Álgebra no Ensino Fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas.* Dissertação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, Porto Alegre, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/11228>. Acesso em: 27 do abril de 2011.

COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. *As Idéias da Álgebra.* Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2003.

DEMANA, F.; LEITZEL, J. *Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos.* In: A. Coxford & A. Shulte, (Org,) ***As Idéias da Álgebra.*** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2003. p. 70-78.

HOUSE, Peggy A. *Reformular a álgebra da escola média: por que e como?* In: A. Coxford & A. Shulte, (Org,) ***As Idéias da Álgebra.*** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2003. p. 1-8.

KERN, Newton Bohrer. *Uma introdução ao pensamento algébrico através de relações funcionais.* Dissertação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/15584>. Acesso em: 10 de maio de 2011.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*. Campinas, SP: Papirus, 1997

PAPERT, Seymour. *A Máquina das Crianças*: *repensando a escola na era da informática*. Trad. Sandra Costa. Ed. Revisada. Porto Alegre, Artmed, 2008.

TAROUCO, L. M. R; ROLAND, L. C; FABRE, M.C. J. M; KONRATH, M. L. P. *Jogos Educacionais*. Artigo. Revista CINTED-UFRGS. 2004.

USISKIN, Zalman. *Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis*. In: A. Coxford & A. Shulte, (Org,) ***As Idéias da Álgebra.*** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 2003. p. 9-22.

VLASSIS, J; DEMONTY, I. *A Álgebra ensinada por situações-problemas*. Trad. Teresa Serpa. Coleção Horizontes Pedagógicos. Instituto Piaget. Lisboa, 2002.

APÊNDICE

Apêndice 1: Atividades Realizadas:

Tabela 2: Cronograma Inicial da Realização da Oficina

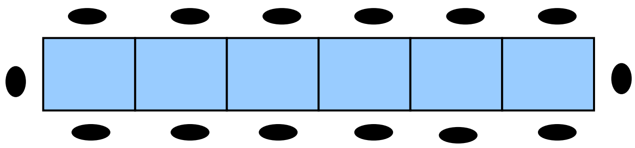
Cronograma Início da Realização da Oficina		
02/06/2011	**Encontro1:** Atividade1: A volta da Mesa	2 períodos
03/06/2011	**Encontro 2:** Atividade 2: Impressoras	2 períodos
06/06/2011	**Encontro 3:** Atividade 3: Máquinas algébricas e Atividade 4: Bolinhas de Vidro	2 períodos
09/06/2011	**Encontro 4:** Atividade 5: Pizzaria Sabor Jovem	2 períodos
10/06/2011	**Encontro 5:** Atividade 6: Máquinas algébricas e discussão	2 períodos

Apêndice 2: Atividade 1 – A Volta da Mesa

ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO BÁSICA MONSENHOR LEOPOLDO HOFF
Nomes:____ Nºs: _________ Turma: ____

À Volta da Mesa

Os pais do pequeno Júlio organizam uma festa para o seu aniversário. Contataram o senhor Boulèlfrite, o fornecedor. Este dispõe de pequenas mesas quadradas. Propõe colocá-las umas ao lado das outras de modo a fazer uma grande mesa em que os convidados serão instalados segundo o modelo seguinte:



1. Desenhe 8 mesas assim como o número de cadeiras disponíveis.

2. Resolver os problemas utilizando o aplicativo árvores algébricas. Desenhar na folha a máquina utilizada para resolver cada item.

a) Se o senhor Boulèlfrite dispõe de 20 mesas, quantos lugares estarão disponíveis para os convidados?

b) E se ele dispusesse de 54 mesas?

c) Encontre um processo que lhe permita obter, para cada caso, o número de cadeiras disponíveis em relação ao número de mesas.

3. Explique esse processo com suas palavras.

4. Exprima esse processo em linguagem matemática.

Apêndice 3: Atividade 2 - Impressoras

ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO BÁSICA MONSENHOR LEOPOLDO HOFF

Nomes:____ Nºs: _________ Turma: ____

Impressoras

O laboratório de informática da escola tem duas impressoras: uma a jato de tinta e a outra a laser. A jato de tinta imprime 12 páginas por minuto, e a laser imprime 18 páginas por minuto.

1. Resolver os problemas utilizando o aplicativo árvores algébricas. Desenhar nesta folha a máquina utilizada para resolver cada item:

a) Quantas páginas a jato de tinta imprime em 2 minutos? E em 5 minutos? E em 13 minutos?

b) E quantas páginas a laser imprime em 3 minutos? E em 7 minutos? E em 12 minutos?

c) As duas impressoras juntas conseguirão imprimir quantas páginas em 6 minutos? E em 9 minutos?

d) Quanto tempo a de jato de tinta leva para imprimir 900 páginas?

e) E quanto tempo a laser leva para imprimir 900 páginas?

f) E quanto tempo as duas juntas levariam para imprimir 900 páginas?

g) No caso do item anterior, quantas folhas cada máquina imprimiu?

Apêndice 4: Atividade 3 – Maquinas Algébricas - Problemas

ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO BÁSICA MONSENHOR LEOPOLDO HOFF

Nomes:____ Nºs: _________ Turma: ___

Atividade: Máquinas algébricas – problemas

1) A impressora jato de tinta imprime 12 páginas por minuto.

   a) Desenhe a máquina que representa quantas páginas foram impressas a partir do tempo de funcionamento da impressora.

   b) Complete a tabela abaixo:

Tempo (min)	Cópias
5	
40	
	120
	900

   c) Construa o gráfico que corresponde à máquina do item a.

d) Quantas cópias a impressora produz em duas horas?

e) Se a letra “m” representa o “número de minutos”, então podemos escrever:

Número de cópias = ____________________________

f) Desenhe a máquina que informando o número de cópias feitas, calcula o tempo de impressão.

g) Quanto tempo a máquina leva para produzir 330 cópias?

h) Se a letra “**c**” representa o número de cópias feitas pela impressora, então podemos escrever:

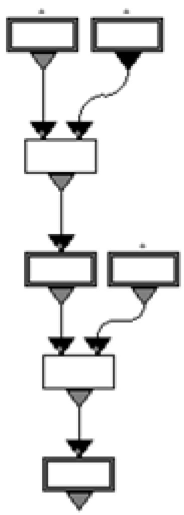
Tempo de funcionamento da impressora (em minutos) = _________________

Apêndice 5: Atividade 6 – Máquinas Algébricas

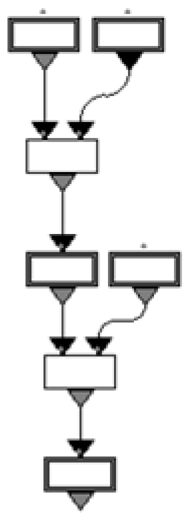
ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO BÁSICA MONSENHOR LEOPOLDO HOFF

Nomes:____ Nºs: _________ Turma: ____

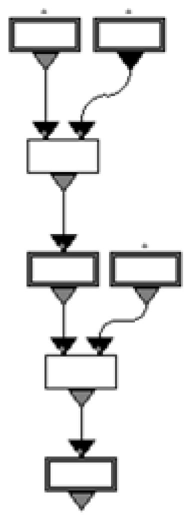
1. Complete a máquina: ela dobra um número e depois adiciona 5 ao resultado.



2. Complete a máquina: ela adiciona 5 ao número e depois dobra o resultado.



3. Complete a máquina: ela dobra um número e depois adiciona 10 ao resultado.



4. Associe cada máquina a sua expressão algébrica:

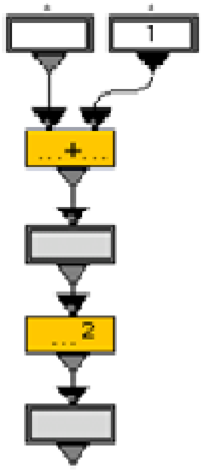
Máquina 1 ■ ■ $2 \cdot (x+5)$

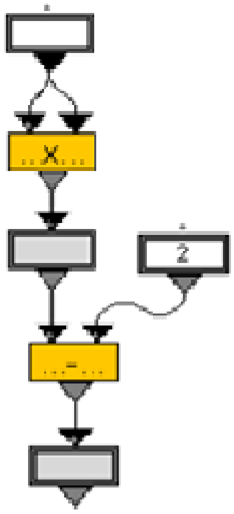
Máquina 2 ■ ■ $2 \cdot x + 10$

Máquina 3 ■ ■ $2 \cdot x + 5$

5. Nas três máquinas acima têm duas que são iguais! Descubra quais são essas duas! Como você descobriu isso?

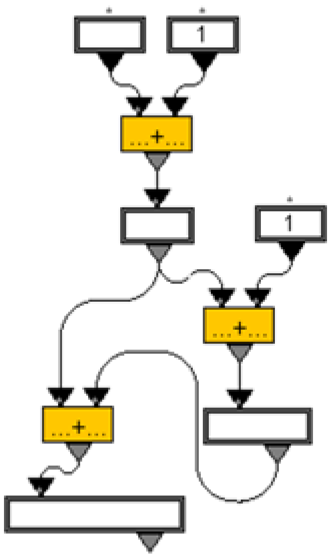
6. Explique com suas palavras o que as máquinas abaixo fazem:

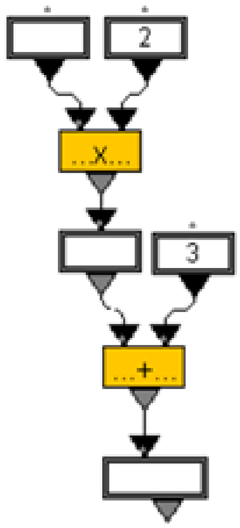




Explicação:

7. Compare as duas máquinas e decida: a) o que há de diferente entre o resultado das duas máquinas? b) qual é a melhor?





Explicação:

ANEXO

Anexo 1: Autorização para o uso do nome e imagens da Escola

M L H

ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO BÁSICA
MONSENHOR LEOPOLDO HOFF
Telefone: 33 34 74 09
Rua Moema, 255 – Bairro Chácara das Pedras
Porto Alegre - RS

Porto Alegre, 26 de abril de 2011.

Termo de Consentimento

Eu,VANESSA GIRELLI TONET,solicito autorização da Escola Estadual de Educação Básica Monsenhor Leopoldo Hoff para o uso de nome da escola e de eventuais imagens que possa realizar ao longo do meu estágio. Declaro que não estarei usando ou citando fatos que possam desabonar o referido estabelecimento de ensino.

Eu, Nina Rosa Ventimiglia Xavier, diretora da escola, declaro que a mesma está autorizada a empregar em seu TCC o nome e dados da escola.

ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO BÁSICA
MONSENHOR LEOPOLDO HOFF
Dec. de Criação 8608/11-02-58
Dec. de Reorg. 29606/02-05-90

Nina Rosa Ventimiglia Xavier
E. E. de Educação Básica Monsenhor Leopoldo Hoff
DIRETORA
Mat. 1554684/01