UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO MATEMÁTICA, MÍDIAS DIGITAIS E DIDÁTICA: TRIPÉ PARA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

César Augusto dos Santos

ALGORITMO DA DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS NA 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Porto Alegre
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO MATEMÁTICA, MÍDIAS DIGITAIS E DIDÁTICA: TRIPÉ PARA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

César Augusto dos Santos

ALGORITMO DA DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS NA 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

Monografia apresentada como requisito parcial para obtenção de título de Especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Bello.

Porto Alegre
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

ALGORITMO DA DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS NA 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

César Augusto dos Santos

Comissão examinadora

Prof. Dr. Samuel E. Lopez Bello
Orientador

Profa. Dra. Lúcia Helena M. Carrasco

Eu dedico este trabalho de conclusão
para Camila Bressan,
por todo o seu apoio e paciência,
sem os quais nada seria possível.

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste trabalho seria impossível sem a colaboração de algumas pessoas e instituições que, de diversas formas, deram sua contribuição em diferentes etapas. Destas, manifesto um agradecimento especial ao prof. Dr. Samuel Edmundo Lopez Bello.

Aos funcionários e professores do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PPGEnsimat) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Finalmente, a Deus pela saúde, a minha noiva, Camila Bressan, que me “agüentou” durante este período, a minha família, em especial a meu pai e minha mãe, que estão distantes de mim, mas presentes em meus pensamentos.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é diagnosticar as concepções de alunos de 6ª série do ensino fundamental sobre o algoritmo da divisão de números naturais. Foi desenvolvido a partir de uma Engenharia Didática, produzida e aplicada durante este curso de pós-graduação em Matemática, Mídias Digitais e Didática. Examina as seguintes questões: a) quais são as relações que os alunos fazem entre o dividendo, o divisor, o quociente e o resto; b) se eles conhecem o algoritmo da divisão de números naturais; c) se eles compreendem o zero no quociente. Para isso, foi elaborado um teste diagnóstico com dez questões, para então fazer a intervenção didática necessária. Como avaliação dos resultados da intervenção didática, foi aplicado no final da Engenharia o mesmo teste inicial – exceto ajustes na questão sete. É possível concluir que, inicialmente, os alunos da 6ª série apresentaram dificuldades na compreensão da técnica da divisão, segundo nossos critérios, assim como em estabelecer relações entre seus termos. Posteriormente, foi possível perceber que houve uma evolução considerável por parte dos alunos na compreensão do tema, apesar de ainda alguns apresentarem dificuldades para compreender a divisão.

Palavras-chave: Divisão de Números Naturais - Algoritmo - Engenharia Didática

ABSTRACT

The goal of this paper is to diagnose the conceptions of 6^{th} grade Elementary School students about division algorithm of natural numbers. It was developed from a Didactic Engineering, produced and applied during this postgraduate course in Mathematics, Digital Medias and Didactics. It investigates the following issues: a) what are the relationships that students make between dividend, divisor, quotient and remainder b) if they know the algorithm of the division of natural numbers, c) if they understand the zero in the quotient. For this, we developed a diagnostic test with ten questions, and then make the necessary didactic intervention. As an assessment of the results of didactic intervention was applied at the end of the Didactic Engineering the same initial test - except adjustments in question seven. It was concluded that, initially, students from 6th grade had difficulties in understanding the technical division, according to our criteria, and establish relations between its terms. Later, it was observed that there was considerable progress by students in the understanding of the topic, though there as still students who have difficulty understanding the division.

Keywords: Division of Natural Numbers - Algorithm - Didactic Engineering

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No ano de 2006 comecei a trabalhar como professor de matemática na rede municipal de Esteio e, em 2008, passei a trabalhar na rede municipal de Sapucaia do Sul. Desde então, sempre tenho trabalhado com alunos de 6ª série. Dentre os assuntos matemáticos trabalhados nesta série, observo que os alunos apresentam dificuldades para resolver operações simples de divisão. Sabendo da importância que essa operação matemática possui, comecei a desenvolver um interesse especial para tentar entender o porquê das dificuldades dos alunos e de que forma poderia intervir para auxiliá-los no entendimento desse assunto. Então, decidi por desenvolver na Engenharia Didática III, disciplina do curso de especialização *latu sensu* em Matemática, Mídias Digitais e Didática, do instituto de Matemática da UFRGS, o tema da divisão de números naturais e agora, no presente trabalho de conclusão, pretendo abordar novamente o assunto, aprofundando um pouco mais as questões teóricas que dão sustentação ao tema que escolhi.

A partir da seleção do assunto, destaco como objetivo geral deste trabalho analisar a dificuldade dos alunos de 6ª série em compreender o algoritmo da divisão de números naturais e, além disso, verificar como eles lidam com o zero no quociente, uma vez que tenho percebido que a maioria dos meus alunos tem dúvidas quanto ao tema e que muitas pesquisas apontam a mesma situação em diferentes lugares do Brasil.

Inicialmente, para a construção deste trabalho de conclusão, foi feita uma revisão da literatura, na qual foram selecionados livros teóricos e dissertações de mestrado e teses de doutorado sobre o assunto, além das informações constantes na Engenharia Didática III.

Em relação à literatura, considero importante destacar as dissertações de Castella (2005), Fonseca (2005) e Gomes (2008). Também ressalto o papel dos PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), no que diz respeito aos conteúdos, objetivos e importância da matemática no ensino fundamental.

Os conhecimentos matemáticos em relação às quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) são importantes tanto na vida escolar quanto na vida cotidiana. Por isso, costumo fazer uma breve revisão de conteúdos de séries anteriores logo no início de cada ano letivo. Em geral, são as operações de divisão de números naturais, divisão de números racionais, multiplicação e subtração com números decimais que provocam maior dúvida entre os alunos. A partir dessa constatação, como já foi referido anteriormente, surgiu à necessidade de investigar o porquê das dificuldades apresentadas pelos alunos, em especial no que se refere à divisão de números naturais, para, então, propor intervenções que possam auxiliar na compreensão do tema.

O material empírico de referência para as minhas análises foi constituído a partir da Engenharia Didática, desenvolvida entre os meses de maio e junho de 2010, em uma escola da rede municipal de Sapucaia do Sul, com alunos de 6ª série do ensino fundamental. Entre os recursos utilizados nessa experiência didática, posso destacar os vídeos sensibilizadores sobre o ensino da divisão de números naturais, apresentados aos alunos logo no início do trabalho, servindo para auxiliar no entendimento do algoritmo da divisão.

Dentre as obras selecionadas para este trabalho de conclusão, destaco os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) de Matemática do Ensino Fundamental – 5ª a 8ª séries, pelo importante papel que assumem na organização de um trabalho de qualidade no dia-a-dia de professores e alunos. Na apresentação do volume de Matemática, os PCNs explicitam que:

> (...) o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p.15)

É interessante retomar, na citação acima, a importância que o documento dá para o papel da Matemática nesse nível de ensino, destacando a sua função como uma área do conhecimento que permite desenvolver o espírito de investigação, essencial não apenas para a Matemática, mas para várias outras disciplinas. Os PCNs também indicam que a resolução de problemas deve ser o ponto de partida da atividade matemática, dando importância para a história da matemática e para as tecnologias da comunicação.

Outro tópico relevante dos PCNs pode ser observado quando se lê:

> (...) a importância de o aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções. (BRASIL, 1998, p.15)

Uma questão primordial no ensino atual diz respeito ao desenvolvimento de atitudes, independentemente da disciplina trabalhada. Os PCNs ressaltam essa ideia, como exemplificado acima, ao afirmar a importância do respeito ao outro, do desenvolvimento da auto-estima e da segurança. Ensinar matemática não se resume a fazer cálculos, tabelas e gráficos; ensinar matemática também é desenvolver atitudes que promovam um bom relacionamento entre professor e alunos, e entre esses e a sociedade para a qual a escola os prepara.

Retomando o que já assinalei anteriormente, o objetivo deste trabalho de conclusão é analisar a dificuldade dos alunos de 6ª série em compreender o algoritmo da divisão de números naturais. Para tanto, no capítulo 2, faço uma revisão bibliográfica de algumas questões teóricas relacionadas ao tema do trabalho. No capítulo 3, será abordada a Engenharia Didática III, em seus aspectos teóricos, metodológicos e práticos, através de um relato das atividades desenvolvidas em sala de aula. No quarto capítulo, farei uma análise da aplicação da Engenharia Didática III, relacionando-a com a fundamentação teórica apresentada no capítulo 2. Conjuntamente a essa análise, também irei expor minha posição em relação à Engenharia Didática III, considerando a teoria selecionada para fundamentar a referida análise. No último capítulo, faço as considerações finais a respeito da pesquisa que desenvolvi.

2 REVISÃO TEÓRICA: algoritmos e números naturais

Neste capítulo serão abordadas algumas questões teóricas relacionadas aos números naturais e aos algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão, dando ênfase a esse último, por se tratar de um trabalho que pretende analisar a divisão de números naturais.

2.1 O Sistema de Numeração Decimal e a importância do zero

O sistema de numeração que utilizamos está baseado na ideia de agrupamento: dez unidades formam uma dezena, dez dezenas formam uma centena, dez centenas formam um milhar, e assim por diante. Esse sistema é chamado decimal justamente por organizar grupos de dez, além de ser também posicional. Utilizamos para a escrita dos números dez símbolos denominados de algarismos: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0 e, principalmente, é posicional porque é utilizado o símbolo "zero" (0) para as casas vazias.

Gundlach (1992) coloca que o modelo posicional abrange duas ideias: quando um homem de contar (pessoa que fazia contagens) tiver erguido todos os seus dedos, ele terá que voltar à posição original (com as mãos fechadas) antes de continuar a contagem. Ele precisará registrar na memória quantas vezes fechou a mão para garantir um resultado preciso. Um segundo homem, então, só levanta um dedo a cada vez que o primeiro fechar as mãos, até levantar todos os dedos. Um terceiro homem entra em cena e levanta um dedo quando o segundo homem fecha as mãos. A posição de cada homem indica o valor que seus dedos erguidos representam. Assim, em nosso sistema de numeração o valor representado por um algarismo vai depender de sua posição, por isso é chamado de posicional. O mesmo símbolo pode significar quantidades diferentes; utilizando apenas dez símbolos é possível fazer a representação de qualquer número natural.

A ideia do sistema posicional não é muito simples, e demorou muito tempo para ser desenvolvida pela humanidade. É importante que seja bem trabalhada com os alunos, pois eles precisam que essa idéia esteja bem clara para avançar no aprendizado da matemática. Caso os alunos não tenham segurança no Sistema de Numeração Decimal e no posicionamento dos números, eles poderão apresentar dificuldades no entendimento de outras questões.

Belfort e Mandarino (2007) afirmam que, para desenvolver o sistema posicional mencionado acima, o algarismo para representar o zero (0) é fundamental. Quando escrevemos, por exemplo, 203, o zero representa a ausência de dezenas agrupadas em centenas. Dessa forma, além dos nove símbolos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), foi preciso acrescentar um símbolo para "escrever esse vazio", para o zero. A compreensão do papel do zero e do sistema de numeração é uma tarefa complexa. O registro consciente de quantidades maiores do que dez faz parte do conceito dos números, exigindo da criança que relacione os símbolos às quantidades, observando que o sucessor de um número tem sempre uma unidade a mais. As autoras também salientam que também é necessário compreender que os mesmos algarismos são utilizados para representar todos os números naturais, variando apenas o posicionamento de cada um deles.

2.2 Breve revisão sobre os algoritmos da adição, da subtração e da multiplicação

Um algoritmo é uma técnica prática, elaborada para facilitar a execução de determinada tarefa, no caso, para executar tarefas de cálculo. Dentre as estratégias de cálculo, os algoritmos das quatro operações ocupam lugar de destaque. Explorando as vantagens do Sistema de Numeração Decimal, eles foram idealizados para possibilitar a realização de cálculos com exatidão e rapidez. Os algoritmos especificam de forma muito precisa a sequência de ações e de decisões que devem ser respeitadas para resolver um determinado problema. Se for realizado na sua totalidade e na ordem proposta, é certo que se chegará à solução.

Em relação ao trabalho com as operações aritméticas e com os algoritmos, Silva, Lourenço e Côgo (2004) afirmam que,

> (...) em nossos dias, a utilização, com compreensão, das operações aritméticas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) tornou-se um dos objetivos principais de qualquer Educação Matemática Básica. É preciso ter em mente a importância de desenvolver a compreensão do sentido e a utilização das operações na resolução dos diversos problemas do cotidiano, o que é mais importante do que o simples domínio de algoritmos. (SILVA; LOURENÇO; CÔGO, 2004, p. 71)

Nesse sentido, é importante que o aluno conheça com segurança o significado da operação a qual ele se propõe a trabalhar. Depois que esse conhecimento já está assimilado pelo aluno, então será possível passar para a utilização do algoritmo. É importante esclarecer a diferença entre operação – agir sobre objetos, realizar transformações, promover ações mentais – e algoritmo – processo de cálculo, técnica de operação escrita, sequência de etapas para resolver determinado problema.

De acordo com os PCNs (1998), o trabalho a ser realizado com as operações deve estar concentrado na compreensão do significado de cada uma delas. Essa compreensão passa por várias experiências concretas para que o significado das operações possa ser interiorizado e, então, transferido para a aprendizagem do algoritmo, que vem a ser um mecanismo de cálculo.

Segundo Belfort e Mandarino (2007), a habilidade de utilizar um algoritmo corretamente não se adquire de imediato; é necessário tempo e prática. Com o algoritmo da adição não é diferente, pois o professor deve oferecer, primeiramente, inúmeras oportunidades concretas para que a criança possa se expressar em linguagem matemática. Assim, quando ela escreve 3+2=5, essa ação deve refletir uma experiência e não apenas uma informação transmitida pelo professor. As autoras recomendam que as primeiras atividades com o algoritmo da adição já envolvam a "reserva", ou seja, quando a soma das unidades isoladas é maior que nove, sendo necessário fazer um agrupamento na casa das dezenas. Segundo as autoras, dessa forma o aluno compreende porque é necessário começar o cálculo pela casa das unidades, da direita para a esquerda.

O algoritmo da subtração tem finalidade similar ao da adição, isto é, serve para sistematizar e facilitar o cálculo. Ele deve ser apresentado aos alunos quando eles já dominarem com certa segurança os significados da subtração: retirar, comparar e completar, bem como o sistema de numeração, e o algoritmo da adição (CARDOSO, 1998). Belfort e Mandarino (2007) destacam que o uso correto da linguagem matemática (minuendo, subtraendo, resto ou diferença) na resolução do algoritmo da subtração não deve ser o foco principal, mas sim o debate e o registro.

No algoritmo da subtração, o grande desafio para os alunos é a compreensão do significado dos reagrupamentos em ordem inferior, popularmente conhecidos como “emprestar um” e as regras do sistema de numeração decimal. Para Kamii e Declarck (1992), o objetivo do ensino tanto da subtração como da adição deveria ser ensinar às crianças a pensar e não simplesmente ensinar-lhes técnicas específicas para darem respostas escritas. As crianças que compreendem as ideias envolvidas na adição e resolvem adição mentalmente também têm a capacidade de expressar seu conhecimento no papel. Essas crianças, compreendendo os significados da subtração, também são capazes de resolver essa operação aritmética, tanto mentalmente como por escrito.

Em relação ao algoritmo da multiplicação, é interessante observar que Belfort e Mandarino (2007) afirmam a importância de formação de um conceito sustentado por experiências concretas, nas quais os alunos têm a oportunidade de construir, aperfeiçoar e transferir os conceitos da multiplicação. Segundo as autoras,

> A criança, antes mesmo de ter iniciado o estudo das operações de multiplicação e divisão, já pode ter contato com problemas que possam ser resolvidos apenas por adição e subtração, mas que já tragam algumas das ideias necessárias para conceituar as novas operações (...). (BELFORT; MANDARINO, 2007, p. 14)

As autoras também afirmam que a multiplicação de números naturais pode ser trabalhada sob o enfoque da soma de parcelas iguais e do raciocínio combinatório, no qual se verifica quantas possibilidades existem de formar pares com duas coleções. O enfoque da multiplicação como a soma de parcelas repetidas é mais natural, sendo este o tipo de experiência mais adequada quando se inicia o trabalho com o algoritmo da multiplicação.

Segundo Coll e Teberosky (2000), a multiplicação tem relação direta com a adição, assim como a divisão estaria relacionada com a subtração. A adição sucessiva, em que todas as parcelas são iguais, é um dos significados da multiplicação, servindo para resolver situações em que algo se repete um determinado número de vezes. Entretanto, a multiplicação também é usada quando queremos determinar o número de combinações entre os elementos de duas coleções.

2.3 O algoritmo da divisão

Por ser o algoritmo da divisão objeto de estudo deste trabalho de conclusão, optei por dar um destaque à revisão teórica desse algoritmo, pois pretendo aprofundar um pouco mais as questões que envolvem a divisão: seu uso na escola, sua presença no currículo e suas dificuldades de ensino. É claro que isso não significa um distanciamento em relação aos outros algoritmos; todos estão interligados e a compreensão de qualquer um deles fornece subsídios para o entendimento dos outros.

De acordo com Cardoso (1998), a divisão pode ter os seguintes significados: partes iguais ou repartir (por exemplo, distribuindo 30 figurinhas entre 5 crianças, quantas figurinhas recebe cada uma?) e medida ou quanto cabe (por exemplo, quantos pacotes com 3 figurinhas cada um podem ser feitos a partir de 30 figurinhas?). A noção do conceito da operação da divisão precisa estar clara para o aluno, para que ele possa dar significado ao cálculo que vai executar.

Nunes e Bryant (1997) mostram que a compreensão inicial das crianças sobre a divisão baseia-se na noção de compartilhar (repartir), sendo esta uma idéia básica na compreensão da divisão. Ao repartir, a criança se vale principalmente dos esquemas de correspondência — um para você, um para mim — com o objetivo de estabelecer a equivalência entre as partes envolvidas. Para isso, a criança pode utilizar apenas procedimentos de caráter aditivo, onde tudo que necessita fazer é distribuir até que não haja mais elementos disponíveis para serem distribuídos, ou exista um número insuficiente de elementos para continuar a distribuição. Dessa forma, a equivalência é obtida através da adição ou subtração de alguns elementos a serem distribuídos.

A divisão, como afirma Vergnaud (1991 *apud* Nicolodi, 2009, p. 31), envolve regras operatórias complexas, como divisões sucessivas, multiplicação, subtração e busca de um quociente que pode envolver um resto e resultar em números fracionários. Também requer o estabelecimento de relações diversas, como considerar o tamanho do todo, o número de partes, o tamanho das partes (que deve ser o mesmo); a relação direta entre o total de elementos e o tamanho das partes; a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que compreender o conceito de divisão implica a construção de um novo sentido de número e de novas invariáveis operatórias por parte do sujeito: o todo deve ser distribuído em partes iguais; o todo deve ser distribuído igualmente entre todas as partes até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição; o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes acrescido do resto; quanto maior ou menor o número de partes, menor ou maior o tamanho de cada parte (relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes); e o resto nunca pode ser nem igual ou maior que o número de partes ou que o tamanho das partes.

Segundo os PCNs (1998), em relação às operações básicas, o ensino deve se concentrar na compreensão do significado de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo do cálculo. Além disso, o documento cita a importância das situações-problema na compreensão da existência dos números e das operações, bem como o estudo de questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático. O ensino de matemática, de acordo com os PCNs, deve possibilitar ao aluno “reconhecer as contribuições que ela oferece para compreender as informações e posicionar-se criticamente diante delas” (1998, p. 57). Sobre esse assunto, Nicolodi (2009) cita Correa, que afirma:

> A operação de divisão envolve conhecimentos além daquele relativo à obtenção de parcelas equivalentes quando se reparte. Como uma operação multiplicativa, requer a coordenação dos fatores envolvidos — dividendo, divisor e quociente — através do entendimento das relações que estes termos podem estabelecer entre si (CORREA, 2000 *apud* NICOLODI, 2009, p. 31)

De acordo com Nunes e Bryant (1997), a divisão, de um ponto de vista informal, corresponde ao ato de repartir, separar as partes de um todo e distribuí-las. Vergnaud (1991 *apud* Nicolodi, 2009, p. 32) afirma que dentro da divisão há os termos que compõem esta operação e que o dividendo e o divisor estão unidos por uma relação de equivalência. Assim, considerando a divisão como o ato de repartir, Vergnaud define os termos dessa operação como exemplificado abaixo:

Dividendo: o “todo” (totalidade), o qual se quer distribuir em partes iguais.

Divisor: delimita a quantidade de partes ao qual se deve distribuir o todo.

Quociente: a quantidade correspondente a cada uma das partes em que se distribuiu o todo (o tamanho da parte ou extensão da parte).

Resto: a quantidade que sobrou, ou seja, não suficiente para mais uma rodada de distribuição.

Brito e Correa (2004) apresentam alguns obstáculos responsáveis pela dificuldade que os alunos encontram no domínio do algoritmo da divisão: o primeiro deles diz respeito à direção em que o cálculo é realizado, pois na divisão este é efetuado em direção contrária à da adição, subtração e multiplicação; todas essas operações são efetuadas da direita para a esquerda e a divisão é da esquerda para a direita.

A segunda dificuldade, conforme Brito e Correa (2004), refere-se ao fato de que o domínio do algoritmo da divisão envolve não só os seus fatos básicos, mas também aqueles relativos à multiplicação e à subtração. A terceira dificuldade ocorre porque a divisão envolve o uso de estimativa, permitindo ao estudante, através de tentativa e erro, chegar ao quociente, embora possa não obter sucesso nas primeiras tentativas. Em quarto e último lugar, existe interação entre os algoritmos, mas o padrão (o curso da ação em direção a um resultado) muda de um foco para outro.

De acordo com as autoras, essas dificuldades talvez se expliquem porque o entendimento acerca da conceitualização da divisão é muitas vezes confundido com a competência em operar o algoritmo da divisão. Aplicar o algoritmo nessa operação com precisão passa a ser o único critério para definir e avaliar a compreensão que a criança tem sobre esse conceito. Segundo Correa e Spinillo (2004), tal modo de tratar o ensino de conceitos lógico-matemáticos, no caso específico da divisão, apresenta algumas limitações, a saber: (a) reduz a matemática à execução de algoritmos, ignorando que ela forneça modelos para a apresentação e a compreensão do mundo; (b) ignora as diferenças entre operação e algoritmo, haja vista que a operação refere-se às transformações realizadas sobre os números, quantidades, grandezas e medidas, enquanto o algoritmo refere-se ao conjunto de procedimentos que conduz à execução de uma operação; (c) desconhece que, do ponto de vista psicológico, o processo de aquisição dos conceitos matemáticos envolve invariantes operatórios, sistemas de representação que conferem significados aos conceitos.

Vygotsky (2001) comenta sobre a prática de ensino centrada na memorização não-significativa dos conceitos e afirma

> A experiência pedagógica nos ensina que o ensino direto de conceitos sempre se mostra impossível e pedagogicamente estéril. (...) Em tais casos, a criança não assimila o conceito, mas a palavra, capta mais de memória que de pensamento e sente-se impotente diante de qualquer tentativa de emprego consciente do conhecimento assimilado. (VYGOTSKY, 2001, p. 247)

É importante perceber que a prática de sala de aula no ensino da divisão (que envolve a resolução de problemas, a participação ativa dos alunos na busca de estratégias para encontrar o resultado esperado e a descoberta das relações entre os conceitos matemáticos) permite que os alunos evoluam na elaboração dos conceitos e, também, no entendimento do algoritmo.

A partir do momento em que o aluno tem clareza das possibilidades da divisão (repartição, comparação, medida), consegue representá-la, utilizando material concreto, e verbaliza o que fez e como fez, então é possível apresentar o algoritmo da divisão. Belfort e Mandarino (2007) explicam que o algoritmo tem como ponto de partida a relação entre a divisão e a subtração. Alunos que apresentam dificuldade em compreender o algoritmo da divisão - pelos processos euclidiano e abreviado - podem ter mais sucesso através do processo das subtrações sucessivas. Quando bem explorado, esse processo permite à criança efetuar todas as etapas com segurança e estabelecer relações mais sólidas com o algoritmo da divisão euclidiana, contribuindo para a compreensão do processo inteiro.

Algumas pesquisas em psicologia cognitiva e educação matemática, como é o caso da pesquisa de Lautert (2005), apontam para as dificuldades que as crianças vivenciam em relação ao conceito da divisão. Dentre elas, é possível destacar a dificuldade em aprender as relações inversas entre os termos da divisão quando o dividendo é mantido constante e também a dificuldade em lidar com o resto.

Lautert (2005) investigou o efeito de uma intervenção específica sobre o conceito de divisão com alunos da 3ª série do ensino fundamental, com o objetivo de identificar e propor idéias para superar as dificuldades desses alunos. As crianças foram divididas em dois grupos, sendo que um deles recebeu intervenção durante o processo de resolução de problemas de divisão. Os resultados obtidos mostraram que o grupo de crianças que recebeu essa intervenção apresentou um desempenho mais satisfatório em relação ao outro grupo, pois conseguiram superar algumas dificuldades em relação à divisão, sendo inclusive capazes de identificar e analisar os princípios invariantes necessários para a compreensão dessa operação matemática, além de desenvolver habilidades metacognitivas essenciais para a aprendizagem.

A pesquisa de Castela (2005) intitulada "Divisão de números naturais: concepções de alunos de 6ª série" discorre sobre o processo de ensino e aprendizagem da divisão. O tema surgiu a partir da verificação, por parte da autora, das dificuldades dos alunos de 6ª série em efetuar cálculos de divisão. Castela investigou as concepções dos alunos no que diz respeito à divisão de números naturais, respondendo às seguintes questões:

a. Os alunos conhecem a técnica da divisão?

b. Os alunos sabem utilizar a divisão como ferramenta na resolução de problemas?

c. Quais relações os alunos fazem entre dividendo, divisor, quociente e resto?

O objetivo da pesquisa era tornar o conteúdo de operação de divisão mais acessível aos estudantes. Além disso, a pesquisadora também pretendia, em sua investigação, fornecer subsídios ao ensino da divisão nos cursos de formação de professores.

A pesquisa foi realizada com alunos de 6ª série de uma escola da rede particular de ensino do município de São Paulo. O instrumento de pesquisa continha doze questões, que foram divididas em dois tipos: oito questões formais e quatro contextualizadas[1].

A coleta de dados ocorreu por meio de um instrumento diagnóstico escrito e entrevistas com alguns alunos, descritos de forma quantitativa e qualitativa, expressos por meio de tabelas e gráficos. Dessa forma, foi possível descobrir e observar fenômenos, com o objetivo de descrevê-los, classificá-los e interpretá-los.

Ao final de seu trabalho, a autora respondeu às questões de pesquisa, citadas anteriormente, e chegou às seguintes conclusões: no que se refere à primeira questão, Castela observou que doze alunos (de um total de vinte e oito participantes) dominavam a técnica da divisão, segundo os critérios da pesquisa, e que o engano mais frequente com relação a essa técnica é o uso incorreto do zero no quociente. No entanto, em entrevista os alunos rapidamente identificaram o engano.

Em relação à segunda questão, Castela constatou que todos os alunos utilizaram a operação de divisão para resolver, pelo menos, uma das questões contextualizadas.

A última questão, sobre as relações entre os termos da divisão, a pesquisadora observou que quinze alunos estabeleceram corretamente a relação entre dividendo, divisor, quociente e resto, tanto quando era solicitado que encontrassem o dividendo, como quando se pediu para encontrar o divisor. Outros nove alunos apenas conseguiram estabelecer relações quando era pedido que se encontrasse o dividendo. Castela (2005) atribui isso ao fato de que, para encontrar o dividendo, basta aplicar a operação inversa à operação dada, conhecida pelos alunos como prova real.

Retomando a conclusão de Castela (2005) sobre a primeira questão, (domínio da técnica da divisão), é importante destacar que

> (...) O engano mais frequente com relação a essa técnica é o uso incorreto do zero no quociente. Entretanto, há alunos capazes de identificar rapidamente o engano, se adequadamente estimulados. É o que mostra a entrevista do aluno número 6 que, após fazer a prova real, percebe rapidamente que o problema

---

[1] De acordo com Castela (2005), questões formais são aquelas que envolvem a aplicação de um algoritmo, sem qualquer contexto. Questões contextualizadas são descritas como “problemas do tipo escolar”, ou seja, questões que relacionam o algoritmo a situações comuns aos alunos.

> era o zero mal utilizado e, por estimativa, nos explica qual seria o resultado correto. (CASTELA, 2005, p. 140)

Assim como Castela (2005) observou a dificuldade dos alunos em compreender o zero no quociente, também percebi, na minha prática de sala de aula, o mesmo fato, conforme explicitado no capítulo anterior. Castela, a partir das suas investigações, acrescenta que quando estimulados individualmente, os alunos conseguem perceber o engano e rapidamente o corrigem.

Fonseca (2005) em sua pesquisa “A divisão de números racionais decimais: um estudo diagnóstico junto a alunos de 6º série” investiga o processo de ensino e aprendizagem de matemática, especialmente do algoritmo da divisão. Esse tema foi escolhido, pois como professor, o autor notava que o ensino de algoritmos era mecanizado, sem haver uma verdadeira compreensão do processo por parte dos alunos. O pesquisador observou que os alunos sentem maior dificuldade em contextos matemáticos do que nos cotidianos.

O autor investigou em sua pesquisa a compreensão dos alunos em relação à divisão de números racionais, na forma decimal, contemplando uma sequência didática com duas situações: as operações aritméticas e as questões contextualizadas. Para isso, formulou as seguintes questões:

a. Os alunos conhecem a técnica da divisão de números racionais e a utiliza para resolver questões contextualizadas?

b. Os alunos sabem utilizar a divisão como ferramenta na resolução de problemas?

c. Quais relações os alunos estabelecem entre dividendo, divisor e quociente?

A pesquisa foi descrita como qualitativa, pelo fato de tratar de um estudo de caso analisado em seu ambiente natural. A mesma foi realizada com vinte e quatro alunos de 6ª série do ensino fundamental. Os instrumentos de análise foram feitos por coleta de dados, a partir de questões escritas e entrevistas, a fim de compreender as resoluções apresentadas nos protocolos. Dessa forma, Fonseca (2005) elaborou seu instrumento de pesquisa com nove questões, divididas da seguinte maneira: cinco questões contextualizadas e quatro questões formais envolvendo o algoritmo da divisão.

A análise dos dados possibilitou ao autor concluir que menos da metade dos alunos dominava a técnica do algoritmo da divisão e que, em problemas contextualizados, buscava diversas estratégias, diferentes do emprego da divisão. Quanto à relação de dividendo, divisor e quociente, observou que apenas cinco alunos fizeram a relação correta entre esses termos.

Saiz (1996), em seu artigo "Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir", fez um estudo exploratório com estudantes de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, totalizando 300 alunos de doze turmas diferentes. O estudo contou com a colaboração dos professores que participaram de um curso de aperfeiçoamento, os quais aplicaram cinco problemas e quatro "contas" de divisão com seus alunos, coletando os resultados para análise. Observou-se que as principais dificuldades na resolução de problemas foram as seguintes: os alunos não sabiam o significado da divisão; não reconheciam o problema como sendo de divisão, realizando outras operações como adição, subtração ou multiplicação. Tais estudos evidenciam as dificuldades que os alunos enfrentam para compreender a lógica dos algoritmos das operações aritméticas e mostram que a memorização de regras e fórmulas não surte efeito positivo no desempenho dos alunos. A autora ressalta que o professor poderá selecionar ou criar situações de aprendizagem que proporcionam ao aluno explicar suas ideias, trabalhar com elas e refletir sobre seus significados, e não apenas utilizar exercícios de repetição de modelos criados nos livros didáticos.

As pesquisas citadas anteriormente apontam algumas dificuldades dos alunos em realizar com sucesso cálculos de divisão. É de conhecimento geral que o algoritmo mais privilegiado e utilizado nas escolas brasileiras é o algoritmo de Euclides. Tal técnica, também conhecida simplesmente como algoritmo da divisão, surgiu na obra *Elementos*, por volta de 300 a.C., e embora tenha sido descoberto há tanto tempo, ainda é o método mais usual nos dias atuais.

Em seu artigo sobre números naturais Campbell (2002 *apud* Castela, 2005, p. 31) define o algoritmo da divisão ou algoritmo de Euclides. Para ele, este algoritmo consiste no seguinte teorema: dados os números naturais A e D (com D diferente de zero), os quais chamados de dividendo e divisor, respectivamente, existem números naturais Q – chamado de quociente e R – chamado de resto, únicos, tais que: A = QD + R, em que $0 \leq R < |D|$, onde $|D|$ denota o absoluto D.

A relação A = DQ + R é utilizada, em geral, pelos estudantes para verificar “se a conta está certa”, o que denotamos por prova real. Anteriormente, no referencial teórico, foi enfatizada a importância de o ensino se concentrar na compreensão do significado dos termos da divisão, as relações existentes entre eles e o estudo do cálculo.

Para ilustrar a divisão euclidiana, segue abaixo alguns exemplos comentados sobre essa técnica.

$$\begin{array}{r|l} 100 & 15 \\ \cline{2-2} 10 & 6 \end{array}$$

Como 100 = 15 x 6 + 10, e 10 < 15, dizemos que na divisão de 100 por 15 o quociente é 6 e o resto é 10.

Outro exemplo é o seguinte: *É verdade que 23 = 7 x 2 + 9* ? Entretanto, não é correto afirmar que, na divisão de 23 por 7, o quociente é 2 e o resto é 9, pois 9 é maior do que o divisor 7. Portanto, a divisão não obedece ao algoritmo de Euclides, mas podemos continuar dividindo e chegar ao resultado. Em 23 $\div$ 7 = 2 (7) + 9, a questão do resto e de continuar dividindo poderia ser tratada usando o método das subtrações sucessivas, ou seja, continuar dividindo e somando os quocientes, como segue:

23 $\div$ 7 = (2+1) 7 + 2. A questão que está marcada com um X não obedece, então, ao algoritmo de Euclides, enquanto que a questão não marcada está de acordo com este algoritmo.

$$\begin{array}{r|l} 23 & 7 \\ \cline{2-2} 9 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 7 \\ \cline{2-2} 2 & 3 \end{array}$$

3 A ENGENHARIA DIDÁTICA: divisão de números naturais

O presente capítulo tem por objetivo apresentar uma Engenharia Didática sobre o tema da divisão de números naturais, que desenvolvi em uma turma de 6ª série, em uma escola municipal de Sapucaia do Sul, na qual sou o professor regente e que é objeto de discussão deste trabalho de conclusão. Pretende-se, aqui, expor primeiramente os aspectos teóricos que sustentaram a produção da referida Engenharia e, posteriormente, os aspectos práticos da sua realização.

3.1 Aspectos teóricos da Engenharia Didática

A Engenharia Didática é uma das abordagens tratadas na Didática da Matemática que se caracteriza como uma forma particular de organizar os procedimentos metodológicos de pesquisas desenvolvidas no contexto de sala de aula. Gomes (2008), em sua dissertação de mestrado intitulada “Reflexões sobre uma prática de ensino: uma Engenharia Didática”, comenta que tal trabalho caracteriza-se como uma metodologia de pesquisa, um esquema experimental, baseado em realizações didáticas em classe, ou seja, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino ou sequências didáticas.

Artigue (1996 *apud* Gomes, 2008, p. 12) apresenta a Engenharia Didática comparando-a com o trabalho do engenheiro. Ao realizar um projeto, apoiando-se sobre o conhecimento científico de seu domínio, o engenheiro, assim como o professor, ou pesquisador da Engenharia Didática, aceita a submeter-se a um controle científico, e ao mesmo tempo se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos menos precisos que os científicos. O trabalho do professor, ao elaborar ou escolher uma seqüência didática, deve levar em conta de forma integrada o domínio do conhecimento, o conhecimento prévio do aluno, o papel do professor e dos seus alunos. Para tanto, em cada sequência é necessário uma definição do significado da aprendizagem. Artigue ressalta que a criação de uma sequência didática ocorre em um processo interativo, no qual o objetivo é a elaboração de um grupo de decisões para que os processos tenham significado e as estratégias sejam mais efetivas. Levam-se em consideração as respostas dos alunos e as condições as quais estão submetidas. Dessa forma, o processo envolve uma análise da situação proposta, das condições da organização, da escolha de estratégias baseadas nas análises da instrução dada, da determinação de critérios de avaliação, da elaboração de questões que estejam de acordo com os critérios determinados e uma revisão de todo processo em função dessa avaliação.

A Engenharia Didática abrange quatro fases: Análises Prévias, Concepção e Análise a Priori, Experimentação e Análise a Posteriori e Validação da Experiência. Gomes (2008), em sua dissertação de mestrado sobre o assunto, expõe as etapas da Engenharia Didática. A primeira fase é constituída pelas Análises Prévias, na qual os dados são coletados com o objetivo de se refletir sobre eles e estruturar a forma de intervenção que será adotada pelo professor. Nesta fase estão incluídas três dimensões, a saber: 1) Dimensão Epistemológica, associada ao conteúdo contemplado pelo ensino; 2) Dimensão Didática, relacionada à forma como o ensino do conteúdo em questão vem sendo desenvolvido; e 3) Dimensão Cognitiva, associada às características cognitivas dos alunos participantes.

A segunda fase da Engenharia Didática, a Concepção e Análise a Priori, é constituída por duas etapas: a descrição do objeto e a previsão de melhorias para o processo de ensino e aprendizagem. Nessa última etapa, são apontadas problemáticas referentes ao objeto de estudo e são construídas hipóteses que serão verificadas na prática investigativa da proposta didática a ser elaborada. A elaboração das hipóteses se constitui elemento importante no trabalho com a Engenharia Didática, pois são elas que serão comparadas com os resultados finais da sequência didática para verificar a validação ou não da mesma.

Além disso, Artigue (1996 *apud* Gomes, 2008, p. 11) afirma que é necessário, naquela fase descritiva, descrever as escolhas globais, no âmbito mais amplo, e as escolhas locais, que descrevem as atividades propostas. As escolhas globais se referem à organização global da Engenharia, e a partir delas parte-se para um Plano de Ação. São formuladas, então, as hipóteses, a princípio implícitas, e que serão comparadas com os resultados finais, contribuindo para a validação da Engenharia Didática. As hipóteses se tornam explícitas e verbalizadas a partir do delineamento do Plano de Ação, momento em que se tem uma idéia do todo do trabalho.

A terceira fase da Engenharia Didática - a Experimentação e Análise a Posteriori – trata da aplicação prática do planejamento didático, que deverá ser desenvolvido em sala de aula. Durante essa fase, volta-se constantemente às hipóteses formuladas com o objetivo de conferir se o que foi planejado está dando certo e se as hipóteses são válidas; por esse motivo, elas não podem ser muito amplas. Gomes (2008) afirma que junto à experimentação é iniciada a Análise a Posteriori e a Validação da Experiência, pois o professor não pode esperar para analisar o próprio trabalho após o seu término; essa análise deve ser constante. Durante a fase da Experimentação é importante coletar uma série de materiais produzidos pelos alunos, para então analisá-los durante a etapa da Validação.

A última fase da Engenharia Didática refere-se à Validação. Nessa fase, é verificado se o aprendizado dos alunos sobre determinado tema matemático foi consolidado. A Validação está apoiada sobre todos os dados colhidos durante a fase de Experimentação. Como já foi citado anteriormente, a Validação ocorre durante todo o processo de aplicação da Engenharia Didática, por meio de um confronto entre os dados obtidos na Análise a Priori e na Análise a Posteriori, verificando se as hipóteses feitas no início da Engenharia Didática foram confirmadas ou não e por qual motivo (GOMES, 2008).

Para finalizar, é necessário destacar a importância da Engenharia Didática para o desenvolvimento de um trabalho de qualidade em sala de aula, que proporciona aos alunos e ao professor momentos de interação e de construção de conhecimento.

3.2 A experiência com a Engenharia Didática: sua aplicação em sala de aula

Nesta seção apresentarei o relato de parte da Engenharia Didática que desenvolvi, com forme explicado anteriormente. A sequência de atividades da referida Engenharia foi pensada a partir da constatação de que os alunos apresentavam dificuldades para efetuar cálculos de divisão de números naturais, o que levou à escolha desse tema para o desenvolvimento da Engenharia Didática. Nos parágrafos seguintes, irei apresentar como desenvolvi o referido trabalho durante as aulas de matemática. Descreverei também o cenário onde a experiência foi realizada e para cada um dos encontros trarei um registro, ao qual segue uma análise do desenrolar da experiência através das atividades propostas aos alunos.

O objetivo principal da Engenharia Didática foi investigar mais profunda e detalhadamente a compreensão dos alunos sobre o cálculo da divisão de números naturais, para então realizar intervenções que poderiam auxiliá-los no melhor entendimento do assunto. Posteriormente, buscou-se compreender a dificuldade dos alunos quanto ao uso do zero no quociente.

Para a aplicação da Engenharia Didática, foram formuladas algumas questões orientadoras (hipóteses), bem como estratégias de problematização que poderiam trazer à tona os conhecimentos prévios dos alunos e também suas dificuldades. A validação (ou não) dessas hipóteses ocorreu posteriormente, após a conclusão da Engenharia Didática, e teve como objetivo verificar se houve apropriação, por parte dos alunos, do conceito da divisão e da relação entre seus termos, bem como do uso do zero no quociente.

Dentre as hipóteses elencadas para esta Engenharia Didática, destaco a que se referia ao pressuposto de que os alunos não conheciam em profundidade o algoritmo da divisão, em especial o uso do zero no quociente. Outra hipótese relevante que merece destaque referia-se ao pressuposto de que os alunos apresentariam um desempenho superior no teste diagnóstico aplicado após o final da Engenharia Didática em relação à primeira aplicação, no início da prática.

No início da prática (Engenharia Didática) foi aplicado um teste preliminar de sondagem com a turma, ou seja, os alunos receberam um material fotocopiado sobre a divisão de números naturais, com o objetivo de sondar os conhecimentos prévios sobre o tema. As atividades compreenderam questões contextualizadas (situações-problema) e questões informais, conforme teste inicial de sondagem (anexo A) aplicado aos alunos.

Todos os alunos responderam ao teste diagnóstico. O gráfico abaixo mostra o número de alunos que não respondeu corretamente as questões propostas no teste diagnóstico inicial - preliminar.

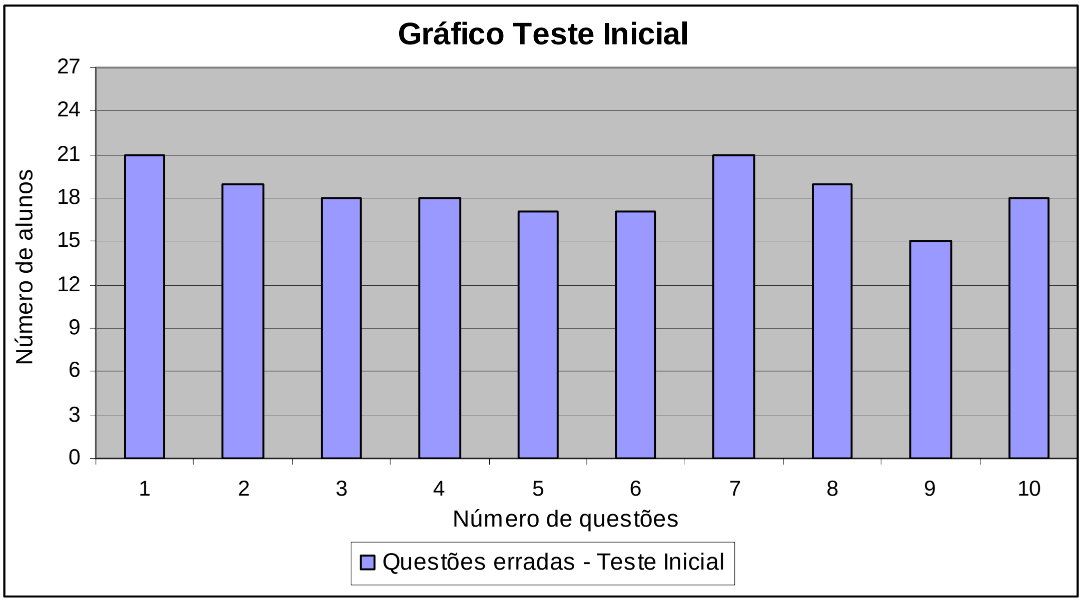


Figura 1- Gráfico do teste inicial de sondagem

Conforme é possível observar no gráfico, houve um elevado número de questões que não foram resolvidas corretamente. As questões 1 e 7 foram as que apresentaram uma frequência maior de erro por parte dos alunos.

No relato da experiência busco evidenciar, para cada um dos três encontros, os objetivos e as expectativas gerais, bem como os diferentes momentos que foram contemplados (intervenção do professor, discussão em grande grupo, discussão em pequenos grupos), conforme previsto na concepção da situação didática.

3.2.1 Aula 1

Na primeira aula, o objetivo era deixar os alunos cientes da experiência didática e melhorar o entendimento que tinham sobre a divisão de números naturais, bem como aplicar o teste diagnóstico. A expectativa maior era de que os alunos reagissem bem e tivessem uma boa aceitação da experiência didática, pelo fato de ser algo novo e não corriqueiro no cotidiano escolar. Então, no primeiro encontro apresentei aos alunos a Engenharia Didática sobre divisão de números naturais, as etapas e o porquê da aplicação desse projeto. Em seguida, distribui aos alunos o teste diagnóstico. Outra expectativa do primeiro encontro era que, com a resolução das atividades propostas, feita após o teste diagnóstico, os alunos tivessem clareza do significado da palavra “dividir”. Para isso, realizei uma aula esclarecedora de dúvidas sobre a divisão de números naturais envolvendo situações-problemas do cotidiano, com auxílio de materiais concretos para a resolução dos cálculos e para um melhor entendimento do conceito da divisão.

A primeira aula foi planejada para ser executada em dois momentos distintos. No momento inicial, apresentei a Engenharia Didática aos alunos com auxílio do projetor. Ao fazer questionamentos verbais e interagir com a turma, percebi que ficaram entusiasmados por participar da Engenharia Didática e também ansiosos por ter a oportunidade de melhorar suas habilidades no cálculo da divisão de números naturais. No segundo momento, apliquei o teste diagnóstico com a turma, realizado de forma individual. Após o teste, a turma foi dividida em grupos de cinco alunos. Cada grupo recebeu 42 cédulas de dinheiro de brinquedo divididas na mesma proporção (em cédulas de cem, cinquenta, vinte, dez, cinco, dois e um real). Cada grupo deveria escolher um caixa que seria o encarregado de dividir igualmente o dinheiro recebido entre todos os participantes. O caixa poderia receber auxílio dos colegas do grupo para efetuar a divisão do dinheiro com igualdade. Os grupos usaram estratégias de divisão diferentes, ou seja, alguns iniciaram a divisão pelas cédulas maiores e outros pelas menores. No final a maioria dos grupos conseguiu dividir o “dinheiro de brinquedo” de maneira equivalente a cada membro.

Após essa atividade em pequenos grupos, foi realizada uma conclusão da tarefa no quadro, com a participação oral de todos. Um aluno de cada grupo foi chamado ao quadro para explicar à turma como o seu grupo resolveu a tarefa. Com o objetivo de reconhecer a divisão como operação inversa da multiplicação, é necessário compreender os termos da divisão e os seus significados, ou seja, entender a relação desses termos na divisão e também na multiplicação. Para isso, fiz uma revisão sobre os nomes dos termos (dividendo, divisor, quociente e resto) e retomei com os alunos que para se obter o valor do dividendo em uma divisão é suficiente fazer a prova real, ou seja: o dividendo é igual ao produto do divisor e do quociente, acrescido do resto. A partir dessa fórmula matemática, é possível encontrar os outros termos da divisão. Veja exemplo dessa etapa na figura 2.

Figura 2 – Situação didática – aula 1

3.2.2 Aula 2

Na segunda aula, o objetivo maior foi fazer com que os alunos compreendessem o cálculo da divisão através de vídeos sensibilizadores. A expectativa era grande, pois se trata de uma ferramenta didática pouco explorada na minha escola e eu não sabia qual seria a reação dos alunos diante desta estratégia. Para sensibilizálos, utilizei dois vídeos que tratam do assunto da divisão de números naturais. O primeiro vídeo, intitulado *A divisão e as suas interpretações*, parte de uma situação concreta (aniversário de uma criança) para, então, apresentar alguns conceitos de divisão, como: partilha, comparação, medida e proporção. Cada conceito é apresentado através de exemplos e animações, bem como explicações de uma professora de matemática. O segundo vídeo, cujo título é *Técnicas de cálculo da divisão,* apresenta algumas técnicas para efetuar esse cálculo, tais como: utilização de material concreto, método das subtrações sucessivas, método euclidiano e também por estimativa. Este vídeo é apresentado por professores com a participação de alunos, que explicam como trabalhar com as técnicas acima descritas.

Escolhi estes vídeos porque ambos apresentam o conteúdo da divisão com muita propriedade e são de fácil entendimento. Além disso, acredito que eles podem auxiliar no ensino do conteúdo da divisão de números naturais e sua interpretação.

Os vídeos mostraram, através de uma maneira lúdica e divertida, algumas situações do cotidiano que envolve cálculos de divisão. Os vídeos também abordaram a divisão através dos métodos das subtrações sucessivas, breve e longo. Durante a apresentação desses vídeos, as dúvidas dos alunos que foram surgindo eram esclarecidas. Essa parte foi realizada oralmente, por meio de um debate envolvendo todos os alunos.

A turma mostrou-se bastante interessada em assistir aos vídeos. Para os alunos, foi uma novidade assistir a um vídeo de matemática, pois eles comentaram que estavam mais acostumados a assistir vídeos nas aulas de História. Alguns alunos, inclusive, solicitaram que eu trouxesse mais vídeos para as nossas aulas, sobre todos os assuntos trabalhados. Durante a exibição, eu parava o DVD para explicar algum conceito que gerava dúvida ou interesse maior nos alunos, nos momentos solicitados por eles.

Durante e após a exibição dos vídeos, quando abri espaço para os comentários dos alunos, houve interesse da maioria, mas também alguns alunos não deram importância e aproveitaram para dormir, não participando dessa parte da aula. Ao serem questionados sobre tal comportamento, os alunos responderam que não gostam de matemática e que “não estavam a fim” de assistir aos vídeos. Segue abaixo figura que ilustra o momento da exibição de um dos vídeos.

Figura 3 – Situação didática – aula 2

Uma parte importante mostrada no vídeo *Técnicas de Cálculo da divisão* foi em relação à técnica da divisão por subtrações sucessivas, também conhecida como *método americano*. O vídeo apresentou a questão $1302 \div 12$ e o professor/apresentador resolveu da maneira abaixo exemplificada, explicando a questão passo-a-passo e contextualizando-a por meio de exemplos que envolviam quantias de dinheiro.

$$
\begin{array}{r|l}
1302 & 12 \\ \cline{2-2}
\underline{-1200} & 100 \\
104 & 5 \\
\underline{-60} & \underline{+\ 4} \\
54 & 109 \\
\underline{-48} & \\
06 &
\end{array}
$$

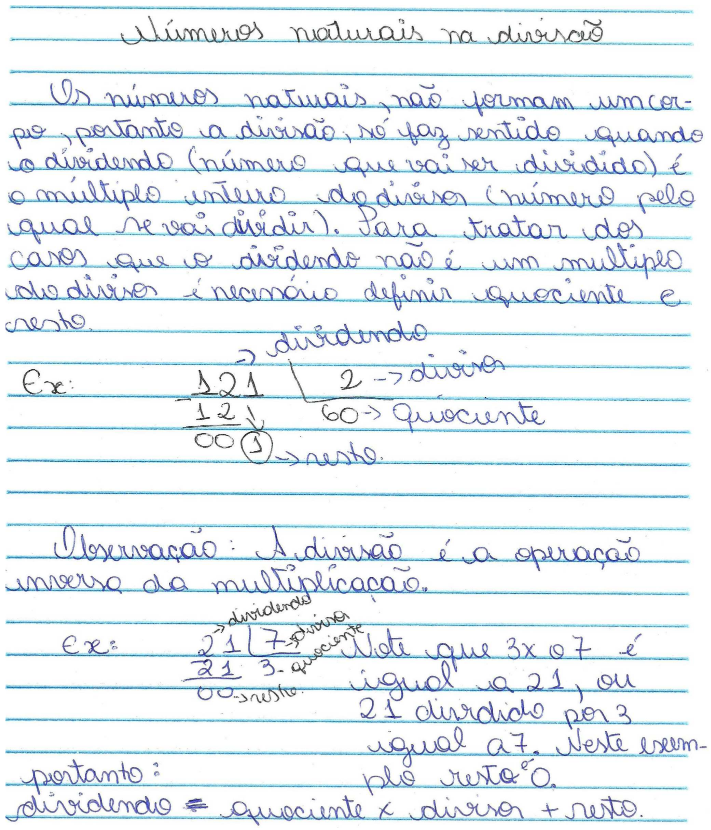
Após a apresentação do vídeo (a qual está descrita no parágrafo anterior), um aluno destacou que sempre teve dificuldade nos cálculos que envolvem **zero no quociente**, pois ele nunca sabia quando acrescentar ou não o zero. O próprio aluno deu o exemplo de um cálculo cujo resultado exige zero no quociente. Ele disse que na conta $422 \div 4$ o resultado é 105 e o resto é 2, mas que uma vez ele errou em uma prova esse mesmo cálculo, pois colocou como resposta 15 e resto 1. Com o método das subtrações sucessivas apresentado no vídeo acima referido, o aluno conseguiu compreender esse tipo de cálculo sem medo de errar, pois dessa forma fica mais fácil efetuar cálculos que envolvem o zero no quociente, segundo o próprio aluno. Reproduzindo a sua fala, "Agora eu entendi como fazer para não errar. Assim é bem mais fácil, se eu tivesse visto esse jeito antes, não tinha errado na prova do ano passado".

Após a exibição e discussão dos vídeos sensibilizadores, foi solicitado aos alunos que fizessem uma pesquisa na internet sobre a divisão de números naturais, bem como da relação dos termos: dividendo, divisor, quociente e resto. A intenção dessa atividade era unificar a tecnologia da informática com a matemática, especificamente para contribuir na melhoria do entendimento da divisão.

3.2.3 Aula 3

Para a terceira aula foram traçados dois objetivos específicos: melhorar o entendimento da divisão dos números naturais e verificar se houve evolução no aprendizado dos alunos em relação a este algoritmo e ao entendimento do uso do zero no quociente. Para contemplar o primeiro objetivo, planejei fazer uma discussão sobre a pesquisa realizada pelos alunos (solicitada na aula 2) e explicações finais sobre a divisão de números naturais. Com relação ao segundo objetivo, planejei fazer um teste diagnóstico (anexo B), com as mesmas questões que foram respondidas na etapa de sondagem, no início da Engenharia Didática. A expectativa maior era em relação ao crescimento dos alunos quanto ao entendimento do algoritmo da divisão, pois ao realizar novamente o teste diagnóstico eu esperava que eles tivessem um desempenho bastante superior em relação àquele realizado no início da experiência didática.

Nesta última aula, os alunos trouxeram o material que foi pesquisado por eles na internet sobre a divisão. As classes foram organizadas em círculo para a realização de um seminário, no qual cada aluno teve a oportunidade de expor o que pesquisou, bem como de esclarecer suas dúvidas com o professor e também com os próprios colegas. À medida que os alunos apresentavam suas pesquisas, eu os questionava e incentivava o restante da turma para que também respondessem aos questionamentos. Segue abaixo na figura 4 pesquisa realizada por uma aluna.


Números naturais na divisão

Os números naturais não formam um corpo, portanto a divisão só faz sentido quando o dividendo (número que vai ser dividido) é o múltiplo inteiro do divisor (número pelo qual se vai dividir). Para tratar dos casos que o dividendo não é um múltiplo do divisor é necessário definir quociente e resto.

Ex: 121 → dividendo; 2 → divisor; 60 → quociente; 1 → resto

Observação: A divisão é a operação inversa da multiplicação.

Ex: 21 → dividendo; 7 → divisor; 3 → quociente; 00 → resto

Note que 3x o 7 é igual a 21, ou 21 dividido por 3 igual a 7. Neste exemplo resto é 0.

portanto:
dividendo = quociente x divisor + resto.

Figura 4 – Exemplo de pesquisa – aula 3

A aluna que apresentou a pesquisa acima comentou que achou interessante a pesquisa de matemática, pois o mais comum é fazer pesquisas em outras disciplinas. Ela também questionou porque não é utilizada a Internet com mais frequência para pesquisar nas aulas de matemática, já que a escola disponibiliza laboratório de informática com esse recurso tecnológico. A aluna também argumentou que os alunos em geral gostam de usar o computador e que esse seria um bom recurso para as aulas. Respondi que concordava com a ideia dela, mas que no momento o laboratório de informática da escola era pequeno e não comporta uma turma, mas que eu iria pensar em uma alternativa para contemplar essa vontade dos alunos em usar o computador nas aulas de matemática.

Depois desse primeiro momento da aula, as classes foram reorganizadas da forma convencional para a realização de um teste diagnóstico com as mesmas questões que foram aplicadas no período de sondagem, no início da Engenharia Didática. O teste encontra-se em anexo.

O objetivo desse teste seria diagnosticar a evolução dos alunos frente ao primeiro teste realizado após a minha intervenção didática, ou seja, fazer uma comparação. Como pode ser visto, de fato, houve uma melhora considerável, embora alguns alunos persistissem em erros anteriores. O gráfico abaixo compara os resultados dos testes.

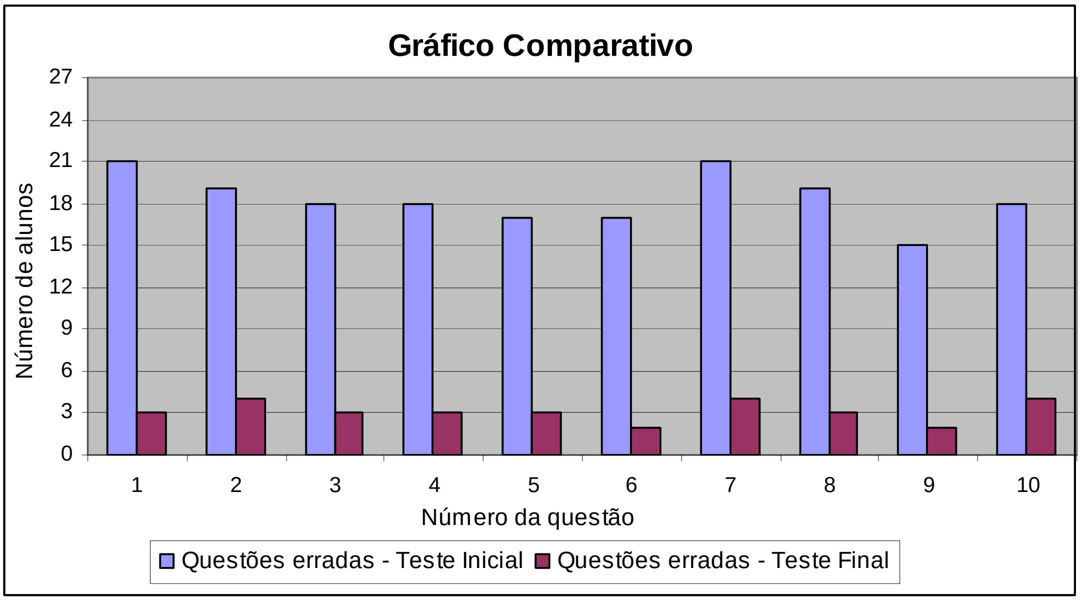


Figura 5 – Gráfico comparativo

4 ANÁLISES

No capítulo anterior, apresentei partes da Engenharia Didática que desenvolvi com minha turma de 6ª série do ensino fundamental, destacando as atividades que foram executadas em cada uma das aulas. Neste capítulo, pretendo analisar este trabalho de conclusão, à luz do referencial teórico apresentado no capítulo 2.

Inicio a minha análise retomando os resultados do teste diagnóstico inicial, que foi aplicado no início da minha Engenharia Didática. O objetivo desse teste era verificar o conhecimento prévio dos alunos em relação à divisão de números naturais. Ele era composto por questões formais e contextualizadas, totalizando dez questões. O teste encontra-se em anexo.

Na seção dos relatos, na apresentação dos resultados do primeiro teste, percebemos os erros dos alunos na questão numero 1. Tal questão aborda a divisão e os seus termos. Nessa atividade, os alunos deveriam efetuar um cálculo e identificar qual número corresponde a cada termo da divisão. A intenção da questão era verificar se os alunos eram capazes de identificar e estabelecer relações entre os termos da divisão.

Foi verificado que a maior dificuldade encontrada inicialmente pelos alunos foi à identificação ou reconhecimento dos termos: dividendo, divisor, resto e quociente. Segundo Castela (2005), a construção do conceito de divisão requer, por parte do aluno, o entendimento das relações entre dividendo e divisor na determinação do quociente. A autora ressalta que é importante que o aluno reconheça o significado da técnica do algoritmo da divisão, para não fazer os cálculos de forma automática, o que muitas vezes acarreta em erros nos cálculos.

Retomando o que foi citado no capítulo dois, Correa (2005) afirma que a divisão exige a coordenação dos termos envolvidos – dividendo, divisor, quociente e resto – através da compreensão das relações que eles estabelecem entre si. Portanto, é importante para o aluno reconhecer e compreender o significado e as relações existentes entre os termos da divisão, para que possa resolver com segurança essa operação.

O algoritmo da divisão e os termos foram retomados em aula e, após minha intervenção, muitos alunos recordaram do posicionamento do resto e do quociente, sendo que o divisor e o dividendo causaram dúvidas quanto ao local correto que assumem neste algoritmo. Um dos motivos alegados para tal dúvida é o uso da calculadora, por isso o esquecimento da posição desses termos.

A intenção das questões de dois a cinco era verificar se os alunos conseguiam identificar o resto e o quociente, sem fazer contas. Dessa forma, esperava-se que eles tivessem conhecimento sobre a relação entre os termos da divisão euclidiana. O gráfico da figura 1 mostra quantos alunos não acertaram cada questão do teste diagnóstico. Como já foi mencionado anteriormente, a compreensão do significado e das relações existentes entre os termos da divisão é importante para que as questões sejam resolvidas com acerto (CASTELA, 2005).

A questão sete visava verificar se os alunos, frente a situações-problemas envolvendo divisão, seriam capazes de estabelecer algumas relações próprias da concepção-processo entre dividendo, divisor, quociente e resto, sintetizadas na expressão $A = DQ + R$, mencionada no teorema do algoritmo da divisão. Também se esperava que os alunos conseguissem obter os valores do quociente e do resto imediatamente, sem fazer contas, conforme visto anteriormente.

Com base no gráfico apresentado na figura 1, na seção dos relatos, 21 alunos não acertaram a questão número 7. Houve alunos que erraram a questão por não compreender as relações entre os termos da divisão, assim como alguns alunos erraram por ter apresentado dificuldades na interpretação da questão, ou seja, eles não entenderam o que era para fazer na questão. Neste mesmo capítulo e também no capítulo 2 já mencionamos a importância do significado dos termos da divisão para a resolução de situações-problema, como é o caso da questão 7. Em relação ao não-entendimento da questão por parte de alguns alunos e analisando a minha própria prática, durante a experiência didática eu alterei a forma de apresentação da questão (os itens a, b e c foram colocados em parágrafo separados), com o objetivo de facilitar o entendimento por parte dos alunos.

A intenção da questão oito era abordar a divisão como operação inversa da multiplicação e também, para verificar se os alunos sabiam estabelecer relações entre dividendo, divisor, resto e quociente.

A maior dificuldade apresentada pelos alunos foi descobrir o valor desconhecido, pois se deve efetuar a operação inversa a que aparece. A questão oito (a) era: 546 ÷ [ ] = 21. Nela, chamou atenção que três alunos apresentaram a resolução 546 x 21; em seguida, se deram conta que o resultado encontrado era "muito grande" e optaram por dividir ao invés de multiplicar. Por isso, pela presença desse tipo de concepção, os alunos em geral podem apresentar certa dificuldade para resolver esse tipo de questão.

A respeito de situações-problema no ensino de matemática, os PCNs afirmam que tal atividade caracteriza-se como "eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem" (BRASIL, 1998). Ainda de acordo com os PCNs, um dos princípios norteadores do ensino de matemática é

> A situação problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (BRASIL, 1998, p. 40)

Neste sentido, o objetivo das últimas questões apresentadas no teste – nove e dez – era verificar se os alunos sabiam resolver questões contextualizadas na forma de situações-problema. A questão nove retoma a divisão como operação inversa da multiplicação, e seria uma questão comum do tipo "grupos iguais", não fosse pelo dado dos 5 reais que sobraram para o menino fazer o lanche. A ideia é verificar se essa informação seria incorporada à resolução.

Do total de 27 alunos, 15 erraram a questão em análise. O erro mais comum foi efetuar a multiplicação de 21 por 29 e não adicionar 5 ao resultado. Também ocorreu de subtrair 5 ao resultado do cálculo de multiplicação, ao invés de somar. Retomando o que já foi mencionado anteriormente sobre a importância de conhecer o significado dos termos da divisão e as relações entre os mesmos, é necessário salientar a importância dos alunos em conhecer com clareza tal assunto, pois dessa forma seria possível responder à questão com segurança, sem cometer erros.

A questão 10 foi apresentada de forma contextualizada. Segundo Castela (2005), questões contextualizadas permitem ao aluno refletir melhor sobre os valores dados. Assim, o objetivo específico dessa questão era verificar se os alunos refletiriam sobre os valores apresentados e se utilizariam a divisão para resolvê-la. Ela apresenta um problema quotitivo[2] clássico, com exceção dos 3 reais que sobraram. Esse pode ter sido o motivo pelo qual houve um maior índice de erro nessa questão em relação à anterior, conforme pode ser observado no gráfico da figura 1.

Na seção dos relatos está explícito o uso de material concreto como forma de auxílio no entendimento da divisão de números naturais. O material utilizado envolvia cédulas de dinheiro de brinquedo. Esse recurso contribuiu para que os alunos entendessem o significado da operação e também os conceitos dos termos da divisão. Sobre a utilização de material concreto em sala de aula, há muito se sabe da importância que tal atividade tem para a compreensão de conceitos abstratos por parte dos alunos. Azevedo afirma que

> Nada deve ser dado à criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração. (AZEVEDO, 1979, p. 27).

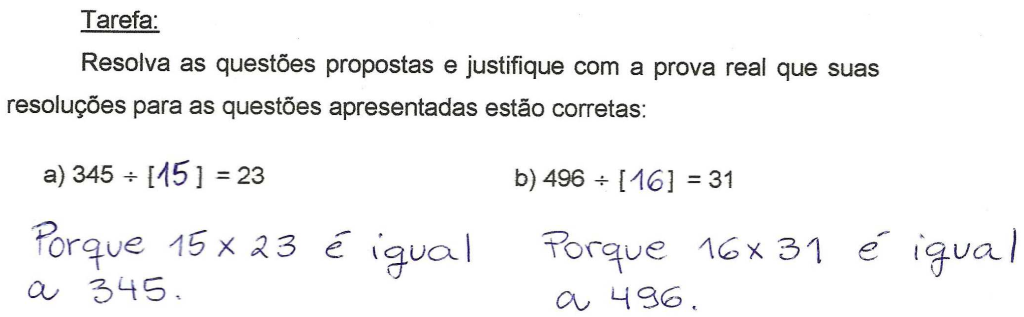
Lorenzato (2006, p.3) aponta que “(...) o ensino deveria dar-se do concreto ao abstrato, justificando que o conhecimento começa pelos sentidos e que só se aprende fazendo”. A partir da ressalva de Lorenzato, pode-se constatar que instigar o estudante é fundamental, pois essa ação possibilita ao aprendiz apropriar-se do conhecimento a partir das suas conclusões. O professor nesse processo atua apenas como um mediador, direcionando os questionamentos dos educandos, capacitando-os a encontrar suas próprias respostas.

O índice de erro nas questões 8 e 9 do teste diagnóstico (que tratavam da divisão como operação inversa da multiplicação), mostra a dificuldade dos alunos em compreender esse processo. Na minha intervenção didática durante a experiência, procurei trabalhar uma alternativa para melhorar esse entendimento, tal como a utilização da prova real e a insistência no significado de cada termo da divisão

---

[2] De acordo com Fonseca (2005) problemas quotitivos envolvem a divisão de grandezas de mesma natureza. Problemas de divisão partitivos envolvem grandezas de natureza diferente.

euclidiana. Assim, analisando as atividades dos alunos após a minha intervenção, pude perceber que a maioria tirou a prova real (fato que contribui para o entendimento da questão). Outro fator relevante refere-se à forma de resolução da questão. Alguns alunos resolveram, por exemplo, a questão 345 ÷ [ ] = 23 fazendo 345 x 23. Ao perceber que o resultado era um número muito alto, eles retomaram e resolveram novamente a questão por meio de uma divisão (345 ÷ 23), chegando assim ao resultado correto. Segue abaixo exemplo da tarefa citada, utilizada durante a intervenção, e a sua resolução por parte de dois alunos:


Tarefa:

Resolva as questões propostas e justifique com a prova real que suas resoluções para as questões apresentadas estão corretas:

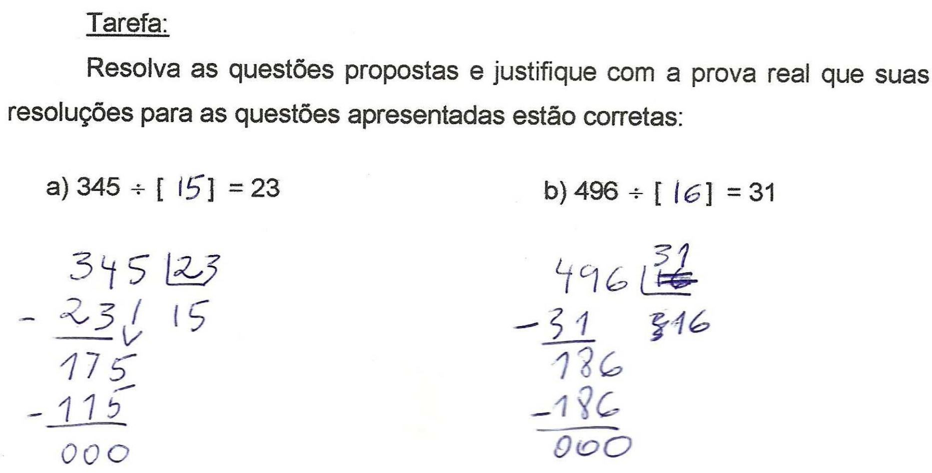
a) 345 ÷ [15] = 23

Porque 15 x 23 é igual a 345.

b) 496 ÷ [16] = 31

Porque 16 x 31 é igual a 496.

Figura 6 – Exemplo de atividade


Tarefa:

Resolva as questões propostas e justifique com a prova real que suas resoluções para as questões apresentadas estão corretas:

a) 345 ÷ [15] = 23

b) 496 ÷ [16] = 31

Figura 7 - Exemplo de atividade

Outra ferramenta importante utilizada na intervenção didática foi o uso de mídia digital, neste caso de vídeos sensibilizadores. A respeito da utilização de recursos tecnológicos nas aulas de matemática, os PCNs afirmam que “pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos” (BRASIL, 1998, p. 44). De acordo com o documento, o uso da tecnologia tem várias finalidades, entre elas: “como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem; como auxiliar no processo de construção de conhecimento.” (BRASIL, 1998, p. 44).

Para Martin-Barbero (1995), a empatia dos jovens com as novas tecnologias é cognitiva, uma vez que temos novos modos de dizer e de narrar. Dessa forma, é importante não só que a escola a reconheça como “um novo organizador perceptivo”, mas também que repense a sua função dentro da sociedade.

Na seção de relatos, foi descrito o vídeo *Técnicas de Cálculo da Divisão.* Esse vídeo apresentou a questão $1302 \div 12$ e sua resolução através do método das subtrações sucessivas. Mandarino e Belfort (2007) consideram essa forma de dividir uma boa opção para os alunos que apresentam dificuldades no entendimento e na utilização do algoritmo da divisão por meio dos processos longo e abreviado. As autoras afirmam que quando o método das subtrações sucessivas é bem explorado, o aluno consegue efetuar as etapas necessárias com segurança e consegue estabelecer mais facilmente relações com o algoritmo longo da divisão tradicional.

A questão apresentada pelo vídeo, $1302 \div 2$, conforme citado anteriormente, foi resolvida pelo método das subtrações sucessivas. Retomando o que Mandarino e Belfort (2007) afirmam sobre tal método, é possível relacionar a fala das autoras com o ocorrido em sala de aula, pois para o aluno citado na seção de relatos o método das subtrações sucessivas foi facilmente compreendido, ao contrário do método euclidiano, que causava muitas dúvidas e algumas vezes o levava ao erro. Uma das causas de erro nos cálculos de divisão que efetuava refere-se ao zero intercalado no quociente; pelo processo das subtrações sucessivas há menos possibilidade de erro dessa natureza, pois tal técnica tem como ponto de partida a relação que existe entre a subtração e a divisão.

A figura 8 ilustra a maneira como o aluno resolvia a divisão através do método longo (resposta incorreta), enquanto a figura 9 representa à mesma divisão efetuada pelo método das subtrações sucessivas (resposta correta).

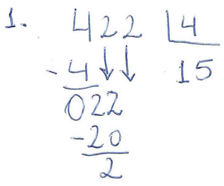


Figura 8 - Exemplo de atividade

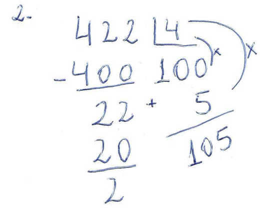


Figura 9 - Exemplo de atividade

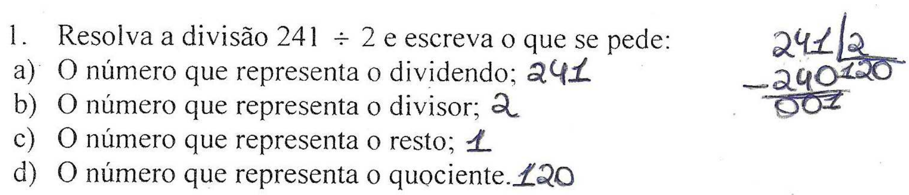
Na figura 8, está representado o método que o aluno conhecia e que utilizava para resolver os cálculos nas aulas de Matemática (método longo). Observa-se que o erro do aluno está ao baixar o número 2 e não acrescentar um zero no quociente, em seguindo baixando o outro 2 e formando o número 22, dividindo-o, então, por 4. Conforme destacado no capítulo do referencial teórico, conhecer o valor posicional dos números é muito importante para resolver cálculos com precisão. Pude perceber, a partir dessa experiência, que este aluno conhecia apenas o método longo para resolver o algoritmo da divisão. Outros alunos também demonstraram curiosidade sobre o método apresentado pelo vídeo, e disseram desconhecer o método das subtrações sucessivas. Acredito que apenas o método longo não é suficiente para que os alunos compreendam com clareza o algoritmo da divisão; é necessário que aprendam os mais diversos métodos de resolução, para que possam, inclusive, optar por aquele que mais se adaptam no momento de resolver cálculos.

A figura 9 mostra a mesma questão, resolvida corretamente pelo mesmo aluno, através do método das subtrações sucessivas. De acordo com Belfort e Mandarino (2007), alunos que apresentam dificuldade em compreender o algoritmo da divisão pelo processo longo podem ter mais sucesso através do processo das subtrações sucessivas. Esse processo, quando bem explorado, possibilita ao aluno efetuar todas as etapas do algoritmo com segurança e contribuir para a compreensão do processo inteiro da divisão.

No último encontro da Engenharia Didática, conforme citado na seção dos relatos, foi discutida a pesquisa sobre a divisão que os alunos realizaram. Tem se defendido amplamente que o professor realize pesquisa em sala de aula e Bagno (1998) define pesquisa como sendo uma “investigação feita com o objetivo expresso de obter conhecimento específico e estruturado sobre um assunto preciso” (p.18). Dessa forma, a pesquisa realizada pelos alunos sobre divisão contribuiu para a ampliação do conhecimento, além de envolver o uso de ferramentas diferenciadas, no caso, o computador com acesso à internet.

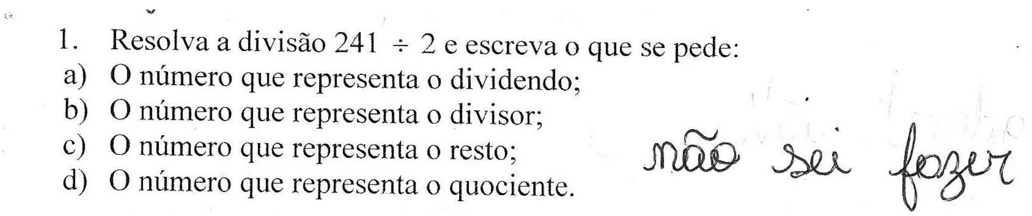
Retomando o último encontro, foi realizado o teste diagnóstico (individual) final, com o objetivo de verificar a evolução dos alunos sobre a resolução do algoritmo da divisão. Houve uma significativa melhora em relação ao primeiro teste realizado, conforme pode ser visto no gráfico comparativo da figura 5.

Na questão que solicita a identificação dos termos da divisão no algoritmo, a maioria dos alunos evoluiu positivamente em comparação ao teste diagnóstico, embora 3 alunos não conseguissem alcançar bons resultados. As figuras 10 e 11 ilustram essa situação, ou seja, a figura 10 mostra o retrato geral da turma (questão resolvida corretamente) e a figura 11 demonstra que, mesmo com o desenvolvimento da experiência didática, não foi possível atingir com sucesso a totalidade dos alunos.


1. Resolva a divisão 241 ÷ 2 e escreva o que se pede:
a) O número que representa o dividendo; 241
b) O número que representa o divisor; 2
c) O número que representa o resto; 1
d) O número que representa o quociente. 120

241 | 2
-240 120
001

Figura 10 - Exemplo de atividade – teste final


1. Resolva a divisão 241 ÷ 2 e escreva o que se pede:
a) O número que representa o dividendo;
b) O número que representa o divisor;
c) O número que representa o resto;
d) O número que representa o quociente.

não sei fazer

Figura 11 - Exemplo de atividade – teste final

As questões de 2 a 6 do teste exigiam do aluno um conhecimento sobre a relação entre os termos da divisão, ou seja, eles deveriam compreender que dividendo = divisor x quociente + resto. A partir do entendimento dessa relação, os alunos deveriam ser capazes de produzir novas relações entre os termos.

Como foi observado na questão 1, na qual a maioria dos alunos apresentou uma melhora significativa em relação ao primeiro teste, nas questões de 2 a 6 também houve evolução, apesar de ainda haver alguns alunos que não conseguiram relacionar corretamente os termos da divisão. Abaixo segue exemplo de um aluno que resolveu corretamente tais questões.

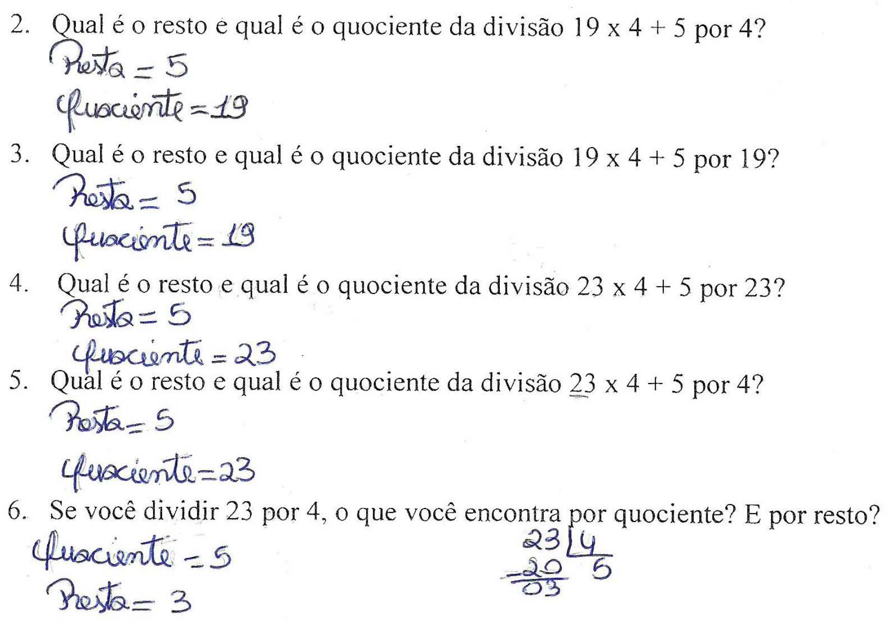
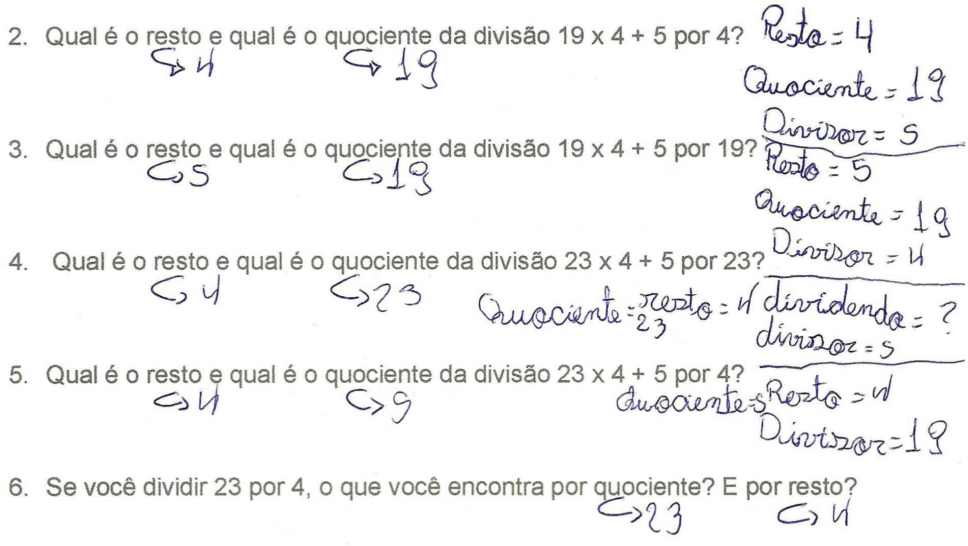

2. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 19 x 4 + 5 por 4?
Resta = 5
Quociente = 19
3. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 19 x 4 + 5 por 19?
Resta = 5
Quociente = 19
4. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 23 x 4 + 5 por 23?
Resta = 5
Quociente = 23
5. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 23 x 4 + 5 por 4?
Resta = 5
Quociente = 23
6. Se você dividir 23 por 4, o que você encontra por quociente? E por resto?
Quociente = 5
Resta = 3
23 | 4
-20   5
03

Figura 12 – Questões – teste final

Outros alunos cometeram erros durante a coleta dos dados e, por consequência, os resultados dos cálculos não foram eficientes, conforme mostra a figura 13. No entanto, apesar dos erros cometidos, observei uma progressão, ou seja, suas estratégias foram adequadas. Isso me faz pensar que é possível um entendimento maior de como fazer a divisão, conforme esse algoritmo for cada vez mais explorado e discutido em sala de aula.


2. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 19 x 4 + 5 por 4?
↳4 ↳19
Resto = 4
Quociente = 19
Divisor = 5

3. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 19 x 4 + 5 por 19?
↳5 ↳19
Resto = 5
Quociente = 19
Divisor = 4

4. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 23 x 4 + 5 por 23?
↳4 ↳23
Quociente = 23 resto = 4 dividendo = ?
divisor = 5

5. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 23 x 4 + 5 por 4?
↳4 ↳9
Quociente = 5 Resto = 4
Divisor = 19

6. Se você dividir 23 por 4, o que você encontra por quociente? E por resto?
↳23 ↳4

Figura 13 – Questões – teste final

Outra questão do teste final que merece ser analisada é a de número 7. Durante o teste preliminar de sondagem muitos alunos erraram a questão, e um dos motivos para que houvesse tantos erros foi devido à forma de apresentação da questão, que de acordo com os alunos estava confusa. Ao refazer a atividade, deixando-a mais clara e objetiva, somando-se à intervenção didática, o número de alunos que responderam adequadamente foi elevado, satisfazendo as expectativas. Assim, saliento a importância da boa elaboração de uma questão, com clareza e objetividade, para que possa ser interpretada e resolvida adequadamente. A respeito desse assunto, Os PCNs afirmam que “só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada.” (BRASIL, 1998, p. 41).

As questões 9 e 10 do teste final, conforme já mencionado, eram contextualizadas. Retomando o que foi comentado anteriormente, o erro mais comum na questão número 9 do teste diagnóstico inicial foi efetuar a multiplicação de 21 por 29 e não adicionar 5 ao resultado. Em comparação com o teste final, poucos alunos cometeram esse tipo de erro. Já a questão 10 apresenta um problema quotitivo clássico, com exceção dos 3 reais que sobraram. Esse pode ter sido o motivo pelo qual houve um maior índice de erro nessa questão em relação à anterior, tanto no teste inicial como no final.

9. Joana deu uma certa quantia, em reais, para seu filho comprar 21 presentes de Páscoa. O menino gastou 29 reais em cada presente e ainda lhe sobraram 5 reais para fazer um lanche. Quanto Joana havia dado para seu filho?

Ela deu para seu filho 614 reais.

10. Seu Pedro ~~gastou~~ comprou presentes de natal para todos os seus netos com 375 reais, gastando exatamente 31 reais por presentes, e ainda lhe sobraram 3 reais para tomar um suco. Quantos netos tem seu Pedro?

Seu pedro Tem 12 netos.

Figura 14 – Questões – teste final

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetivos gerais da educação dizem respeito aos propósitos válidos para todos os indivíduos. O objetivo específico com o estudo da matemática é desenvolver no aluno a capacidade de comparar, analisar e sintetizar, tornando-o capaz de fazer uso concreto do conhecimento matemático. A matemática é necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da nossa realidade e, juntamente com as outras disciplinas, deve assumir a tarefa de preparar cidadãos para uma sociedade cada vez mais permeada por novas tecnologias, possibilitando o ingresso de parcelas significativas da população a patamares mais elevados do saber.

Esta monografia de fim de curso de especialização *latu sensu* em Matemática, Mídias Digitais e Didática, teve como objetivo principal analisar a dificuldade dos alunos de 6ª série em compreender o algoritmo da divisão de números naturais. Através do que foi apresentado ao longo deste trabalho, busquei evidenciar a relevância e a pertinência de trabalhar o algoritmo da divisão através de atividades diferenciadas, como o uso de material concreto, pesquisas e da exibição de vídeos. Essas atividades foram desenvolvidas a partir do planejamento e execução de uma Engenharia Didática, pensada com a finalidade de colaborar no entendimento dos alunos sobre o algoritmo da divisão.

Com relação aos algoritmos, muito se aprende por tentativas e erros, idas e vindas, por aproximações sucessivas e aperfeiçoamentos. Por isso, os erros cometidos pelo aluno devem ser vistos naturalmente como parte do processo ensino-aprendizagem. Na maioria das vezes, é possível usá-los para promover uma aprendizagem significativa.

Retomando o que já foi esclarecido no desenvolvimento deste trabalho, a análise das respostas dos alunos no teste inicial de sondagem mostrou que, de um modo geral, quando solicitados para resolver as operações aritméticas, os alunos utilizavam recursos auxiliares como lápis e papel e poucos faziam uso do cálculo mental. Apresentavam dificuldades para resolver divisões com zero no quociente, como também demonstraram não compreender as propriedades básicas das operações aritméticas. No decorrer da atividade relativa ao teste inicial de sondagem, verifiquei que os alunos tinham dificuldades para interpretar corretamente os enunciados das questões, fato que os levava a cometer muitos erros na resolução dessas mesmas atividades.

Pode-se concluir, a partir da análise dos elementos coletados ao longo da intervenção, que a utilização de materiais concretos, da pesquisa com auxílio da internet e vídeos sensibilizadores foi muito significativa, pois os alunos puderam realizar abstrações e generalizações sobre os conceitos da divisão e da relação existente entre os termos.

Os resultados da análise qualitativa do mesmo teste inicial de sondagem, realizado ao final da Engenharia Didática, mostraram uma evolução significativa na compreensão dos procedimentos do algoritmo da divisão, confirmando que a aplicação de uma metodologia com materiais concretos ou recursos audiovisuais para o ensino da divisão surte efeito positivo, mesmo que a abordagem adotada nas séries anteriores não tenha explorado os mesmos recursos. Conclui-se que a maioria dos alunos atingiu um nível satisfatório de compreensão do algoritmo trabalhado, sendo capazes não apenas de explicar adequadamente cada passo dos procedimentos algorítmicos, mas também apreendendo as propriedades da operação e aplicando-as, de modo pertinente, na resolução de problemas.

Talvez a ressalva que deve ser feita está relacionada com o uso incorreto do zero intercalado no quociente. A maioria dos alunos demonstrou essa dificuldade e o trabalho realizado na Engenharia Didática não foi suficiente para saná-la plenamente. A dificuldade de efetuar cálculos que envolvem o zero no quociente pode estar relacionada ao entendimento do valor posicional dos números, trabalhado nas séries iniciais do ensino fundamental, que talvez não tenha sido compreendido adequadamente pelo aluno. Além disso, o fato do algoritmo da divisão de Euclides ser bastante utilizado em sala de aula, em detrimento de outras técnicas, (por exemplo, o método das subtrações sucessivas) também pode ser um fator relevante.

Dessa forma, é um desafio para os colegas docentes explorar cada vez mais a construção do número e o sistema de numeração decimal, pois ambos são indispensáveis para que os alunos tenham uma base sólida, que dará suporte para a compreensão dos algoritmos das quatro operações, em especial da divisão. Também é importante trabalhar na escola, no ensino fundamental, com técnicas diferentes das usuais, buscando maneiras diferenciadas para resolver os algoritmos.

Espero com este trabalho poder contribuir para que outros professores façam da sala de aula um ambiente de investigação e de intervenção para melhorar o conhecimento dos alunos, especialmente através do uso de mídias digitais, considerando que o mundo no qual vivemos, alunos e professores, é um mundo digital.

6 REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Edith D. M. Apresentação do trabalho matemático pelo sistema montessoriano. In: Revista de Educação e Matemática, n. 3, 1979 (p. 26-27).

BAGNO, Marcos. Pesquisa na escola: o que é, como se faz**.** São Paulo: Loyola, 1998.

BELFORT, Elizabeth; MANDARINO, Mônica. Pró-letramento: Programa de formação continuada de professores dos anos/séries iniciais do ensino fundamental: matemática, fascículo 2. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2007.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: 5ª a 8ª série. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf Acesso em: 04 out. 2010

BRITO, M F; CORREA, J. Divisão e representação no processo de solução de problemas aritméticos. Pedagogia Cidadã: cadernos de formação. Educação Matemática. São Paulo: Unesp, 2004. p. 81-90.

CARDOSO, Virgínia Cardia. Materiais didáticos para as quatro operações. 4ª edição. São Paulo: Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática. Instituto de Matemática e Estatística da USP, 1998.

CORREA, Jane; SPINILLO, Alina G. O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. PAVANELLO, Regina Maria (Org). Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula*.* São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático, Coleção SBEM, 2004. p.103 – 127.

CASTELA, Cristiane Attili. Divisão de números naturais: concepções de alunos de 6ª série. 2005, 152 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica. São Paulo. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/cristiane_attili_castela.pdf Acesso em: 22 abr. 2010

COOL, César; TEBEROSKY, Ana. Aprendendo Matemática: conteúdos essenciais para o ensino fundamental de 1ª a 4ª série. São Paulo: Ática, 2000.

FONSECA, Fábio Luís. A divisão de números racionais decimais: um estudo diagnóstico junto a alunos de 6ª série. 2005, 133 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica. São Paulo. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/fabio_luis_fonseca.pdf Acesso em: 22 abr 2010

GOMES, Helena Carina Malaguez. Reflexões sobre uma prática de ensino: uma Engenharia Didática. 2008, 58 p. Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. Coordenação Prof. Vera Clotilde Garcia. Disponível em: http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/orientacoes/tcc.pdf/Microsoft%20Word%20-%20TCC_Helena_Carina_Malaguez_Gomes_144112.pdf
Acesso em: 20 set 2010

GUNDLACH, Bernard H. Números e numerais. São Paulo: Atual, 1992.

KAMII, Constance; DECLARCK, Geórgia. Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus,1992.

LAUTERT, Síntria Labres. As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção. 2005. 325 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia – Universidade Federal do Pernambuco.

LORENZATO, Sergio. (Org.). O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006, v. 1.

MARTÍN-BARBERO, Jesús. América Latina e os anos recentes: o estudo da recepção em comunicação social. IN: Sujeito, O lado oculto do receptor. São Paulo: Editora Brasiliense,1995.

NICOLODI, Josiane Elias. O conhecimento dos alunos de primeira série do ensino fundamental sobre a divisão. 2009, 87 p. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, UNIVALI – Universidade do Vale do Itajaí. Santa Catarina. Disponível em: http://siaibib01.univali.br/pdf/Josiane%20Elias%20Nicolodi.pdf Acesso em: 27 nov 2010

NUNES, Teresina; BRYANT, Peter. Crianças fazendo matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

SAIZ, Irma. Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SILVA, Circe M. S. da; LOURENÇO, Simone T; CÔGO, Ana M. O ensino aprendizagem da matemática e a pedagogia do texto. Brasília: Plano Editora, 2004.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch. A construção do pensamento e da linguagem. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

ANEXOS

ATIVIDADES DE SONDAGEM INICIAL – DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS
PROFESSOR CÉSAR AUGUSTO DOS SANTOS
ALUNO:..DATA:...................SÉRIE 6ª

1. Resolva a divisão 241 $\div$ 2 e escreva o que se pede:
   a) O número que representa o dividendo;
   b) O número que representa o divisor;
   c) O número que representa o resto;
   d) O número que representa o quociente.

2. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 19 x 4 + 5 por 4?

3. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 19 x 4 + 5 por 19?

4. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 23 x 4 + 5 por 23?

5. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 23 x 4 + 5 por 4?

6. Se você dividir 23 por 4, o que você encontra por quociente? E por resto?

7. Considere o número 7 x 124 + 1 o qual chamaremos de A. (a) Se você dividir A por 7, o que você irá obter como resto? E como quociente? (b) Se você dividir A por 2, o que você irá obter como resto? E como quociente? (c) Considere o número 7 x 124 + 2. Quando ele é divido por 2, qual será o valor do resto? Qual o quociente?

8. Resolva as questões propostas e justifique que suas resoluções para as questões apresentadas estão corretas:

a) 546 $\div$ [   ] = 21   b) 612 $\div$ [   ] = 34

9. Joana deu uma certa quantia, em reais, para seu filho comprar 21 presentes de Páscoa. O menino gastou 29 reais em cada presente e ainda lhe sobraram 5 reais para fazer um lanche. Quanto Joana havia dado para seu filho?

10. Seu Pedro comprou presentes de natal para todos os seus netos com 375 reais, gastando exatamente 31 reais por presentes, e ainda lhe sobraram 3 reais para tomar um suco. Quantos netos tem seu Pedro?

ATIVIDADES DE SONDAGEM FINAL – DIVISÃO DE NÚMEROS NATURAIS
PROFESSOR CÉSAR AUGUSTO DOS SANTOS
ALUNO:..DATA:....................SÉRIE 6ª

1. Resolva a divisão 241 $\div$ 2 e escreva o que se pede:
a) O número que representa o dividendo;
b) O número que representa o divisor;
c) O número que representa o resto;
d) O número que representa o quociente.

2. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 19 x 4 + 5 por 4?

3. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 19 x 4 + 5 por 19?

4. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 23 x 4 + 5 por 23?

5. Qual é o resto e qual é o quociente da divisão 23 x 4 + 5 por 4?

6. Se você dividir 23 por 4, o que você encontra por quociente? E por resto?

7. Considere o número 7 x 124 + 1 o qual chamaremos de A faça o que se pede:

(a) Se você dividir A por 7, o que você irá obter como resto? E como quociente?

(b) Se você dividir A por 2, o que você irá obter como resto? E como quociente?

(c) Considere o número 7 x 124 + 2. Quando ele é divido por 2, qual será o valor do resto? Qual o quociente?

8. Resolva as questões propostas e justifique que suas resoluções para as questões apresentadas estão corretas:

a) 546 $\div$ [ ] = 21 b) 612 $\div$ [ ] = 34

9. Joana deu uma certa quantia, em reais, para seu filho comprar 21 presentes de Páscoa. O menino gastou 29 reais em cada presente e ainda lhe sobraram 5 reais para fazer um lanche. Quanto Joana havia dado para seu filho?

10. Seu Pedro comprou presentes de natal para todos os seus netos com 375 reais, gastando exatamente 31 reais por presentes, e ainda lhe sobraram 3 reais para tomar um suco. Quantos netos tem seu Pedro?