

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**ESTUDO DA ABSORÇÃO DE ONDAS
ELETROMAGNÉTICAS DE ALTA FREQUÊNCIA EM
PLASMAS INOMOGÊNEOS COM PRESENÇA DE
CORRENTE †**

Cláudio José de H. Cavalcanti

Dissertação realizada sob a orientação dos
Drs. Ruth de Souza Schneider e Luiz Fer-
nando Ziebell e apresentada ao Instituto de
Física da UFRGS, em preenchimento parcial
dos requisitos para a obtenção do título de
Mestre em Física.

Porto Alegre

dezembro de 1993

†Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS).

Dedico este trabalho:

Ao meu pai, Wagner Cavalcanti (em memória) e à minha mãe Maria Rachel Cavalcanti, por terem me dado todo o apoio, amor e atenção que me proporcionaram plenas condições de chegar até aqui.

Aos meus irmãos Ricardo, Maria Nazaré e Antônio Carlos pelo companheirismo, afeto e amizade que contribuem muito para fazer da minha casa um lugar muito agradável de se viver.

Às cunhadas Leila e Neida, por fazerem parte e embelezarem ainda mais esta família, também me apoiando incondicionalmente, com afeto, carinho e muito companheirismo. Também à sobrinha adorada Laura, por encher a casa de muita alegria, mesmo virando-a de pernas para o ar!

À minha tia, Maria Angélica pelo amor e pela torcida; desde criança me incentivando. Idem para a minha avó Diva (em memória).

Agradecimentos

- Primeiramente, gostaria de agradecer aos professores Ruth de Souza Schneider e Luiz Fernando Ziebell pela segura e competente orientação, e também pelas discussões que me proporcionaram uma enorme experiência de aprendizagem, ao longo de todo o mestrado.
- Agradecimentos de coração a todos os professores de 1^o, 2^o e 3^o graus, que por amarem a profissão de ensinar, souberam como me transmitir conhecimentos em conjunto com valores humanos e éticos. Sem estas pessoas, eu teria desistido antes de chegar até aqui.
- Aos colegas que ao longo de todo ou parte do mestrado foram ótimas companhias: Alaor e Maristela, Batista (João Luis Alexandre) e Édina, Alexandre Diehl e Carmem, Renato Tubino, Ileana Greca, Ruth Hinrichs e Rolf (pela feijoada inesquecível em 1990), Hübler (Alemão) e Rø, Paulo Rosa e por aí vai. Sem esquecer os companheiros do grupo de física de plasmas, com os quais tive a oportunidade de me divertir muito no 2^o EBF: Felipe, Darcy, Renato, Glaucius, Fernando, Rudi e Giba.
- Um agradecimento muitíssimo especial para Fernanda Ostermann, Jorge Moraes e Marly. São pessoas que se revelaram mais do que amigos: são irmãos! Por todo o apoio moral e o afeto, merecem um agradecimento especial. Tal agradecimento é extensivo ao Maxwell, meu sobrinho posticho.
- Impossível esquecer de agradecer outros dois amigos, que eu tenho certeza, torcem muito por mim à distância (via satélite), direto da Argentina: Juan Manuel Martinez e Marta Pesa.
- Também é impossível esquecer os amigos de fora do instituto, que me proporcionaram momentos muito agradáveis; indiretamente me ajudaram na conclusão deste trabalho: Adriana, Misso, Gabriela, a prima Cristiane, Luis Carlos Wainstein, Motta, Sueli, Niko (outro sobrinho posticho), Betânia, Guy Desaulniers, pessoal da biodança; também o pessoal relacionado à (ex)banda de jazz: Marcos, Lola, Jonca, Vinicius, Amir, Gustavo e o companheiro de horas de estudos em jazz para bateria, Miguel Ângelo.
- Um agradecimento também a Hércules B. Rodrigues e Arthur Boos, pelas implementações magníficas que fizeram nas workstations, sem as quais este trabalho não sairia tão bem acabado (modéstia à parte). Também pelos ensinamentos dados a mim quando eu estava começando a lidar com esses bichinhos digitais.

Resumo

Neste trabalho estudamos as propriedades dielétricas de plasmas inomogêneos, com ênfase na análise dos efeitos de inomogeneidades sobre a absorção de ondas eletromagnéticas em plasmas portadores de corrente.

Inicialmente, apresentamos uma revisão sobre alguns aspectos básicos relacionados com a propagação e absorção de ondas eletromagnéticas em um plasma; nesta revisão discutimos alguns aspectos da literatura disponível sobre o tratamento da relação de dispersão em plasmas inomogêneos e sobre a obtenção do tensor dielétrico em meios inomogêneos. A seguir, utilizamos expressões gerais para as componentes do tensor dielétrico, obtidas da literatura, e as particularizamos para o caso de ondas de alta frequência propagando-se em um plasma caracterizado por uma corrente na distribuição eletrônica, ao longo da direção do campo magnético.

Realizamos então uma análise numérica com o objetivo de estudar a influência dos parâmetros do plasma e seus gradientes sobre o coeficiente de absorção de ondas eletromagnéticas de alta frequência, propagando-se perpendicularmente ao campo magnético externo.

Estudamos também os efeitos da inomogeneidade sobre a absorção de radiação de cíclotron em um plasma de tokamak, descrito de forma aproximada por uma lâmina de plasma com perfis espaciais para os parâmetros do plasma. Este cálculo não incluiu os efeitos da inomogeneidade no campo magnético, e mostrou que as inomogeneidades nos demais parâmetros não têm efeito significativo na absorção em tokamaks, ao menos para as situações de inomogeneidades suaves consideradas em nosso modelo.

Abstract

In the present work we have studied the dielectric properties of inhomogeneous plasmas, emphasizing the analysis of inhomogeneity effects on the absorption of electromagnetic waves by current-carrying plasmas.

Initially, we presented a review about some basic features related to propagation and absorption of electromagnetic waves in plasmas; in the review we discussed some topics from the available literature, about the treatment of the dispersion relation for inhomogeneous plasmas and about the procedures for derivation of the dielectric tensor for inhomogeneous plasmas. We have then utilized general expressions for the dielectric tensor components, obtained from the literature, in order to study the particular case of high-frequency waves propagating in a plasma featuring an electronic current along the direction of the magnetic field.

A numerical analysis was then conducted, in order to study the influence of plasma parameters and their gradients on the absorption coefficient for high-frequency electromagnetic waves propagating perpendicularly to the ambient magnetic field.

We have also studied the inhomogeneity effects on the absorption of electron cyclotron radiation by a tokamak plasma, with the tokamak described approximately by a plasma slab with spatial profiles for the plasma parameters. The study has not explicitly included the effects of magnetic field inhomogeneity, and it has shown that the gradients of other plasma parameters have no significant effect on the absorption by tokamak plasmas, at least in the case of smooth inhomogeneities considered in the model utilized.

Índice

1	Introdução	1
2	Propagação e absorção de ondas em plasmas	6
2.1	Introdução	6
2.2	Propagação de ondas em plasmas	6
2.3	Interação das ondas com as partículas do plasma	11
2.4	Plasmas localmente homogêneos	17
2.5	Inclusão de efeitos de inomogeneidades fracas	18
2.6	Conclusão	28
3	As componentes do tensor dielétrico	30
3.1	Introdução	30
3.2	Sistema de equações de Vlasov-Maxwell	31
3.3	Método das características para a solução da equação para f_{e1}	34
3.3.1	Solução da equação para f_{e0}	34
3.3.2	Solução da equação para f_{e1}	35
3.3.3	Obtenção das constantes de movimento das equações que descrevem as órbitas não perturbadas das partículas	37
3.4	Cálculo das componentes do tensor dielétrico	38
3.4.1	Solução das equações que descrevem as órbitas não perturbadas das partículas	40

3.4.2	Uso das curvas características no cálculo das componentes do tensor dielétrico	43
3.4.3	Expressões gerais para as componentes do tensor dielétrico	45
3.5	Inclusão de efeitos de inomogeneidades fracas no cálculo do tensor dielétrico	48
3.6	Expressões para as componentes do tensor efetivo	53
3.7	Conclusão	54
4	O plasma Maxwelliano com presença de corrente	56
4.1	Introdução	56
4.2	Expansão das componentes do tensor dielétrico efetivo em potências de raio de Larmor	56
4.3	O plasma Maxwelliano com um feixe de elétrons	63
4.4	Cálculo das integrais $I(n, m, h, s; G)$	64
4.5	Conclusão	73
5	Análise quantitativa dos efeitos das inomogeneidades	75
5.1	Introdução	75
5.2	Análise numérica da relação de dispersão	76
5.3	Análise no ponto	79
5.4	A lâmina de plasma infinita	86
5.5	Análise utilizando perfis	89
5.5.1	Uso de perfil parabólico para os parâmetros da corrente	89
5.5.2	Uso de perfil gaussiano para os parâmetros da corrente	92
5.5.3	Gráficos dos parâmetros e seus respectivos gradientes	97
5.6	Conclusão	108
6	Sumário e conclusões	110
	Referências Bibliográficas	117

Relação de Figuras

3.1	Geometria adotada.	39
3.2	Hélice cilíndrica.	42
5.1	Variação do parâmetro r_o	80
5.2	Gráfico de $\frac{p_{res}}{m_e c}$ em função de Y	81
5.3	Variação do parâmetro ρ_1	82
5.4	O efeito relativo de cada gradiente. O plasma de fundo é considerado homogêneo.	83
5.5	Variação da densidade de partículas	84
5.6	Variação do ângulo ψ	85
5.7	Deriva para $\psi = 90^\circ$	85
5.8	Desenho esquemático de um Tokamak. As regiões ampliadas mostram a lâmina de plasma.	86
5.9	Lâmina de plasma.	87
5.10	Gráficos de η , k_i^{nh} e δ em função de x para ambos os modos (<i>perfil parabólico</i>).	91
5.11	Gráficos de η , k_i^{nh} e δ em função de x para ambos os modos (<i>perfil gaussiano</i>).	93
5.12	Uma comparação dos resultados obtidos para os dois tipos de perfil.	94
5.13	Variação do parâmetro a_x	95
5.14	Variação da frequência.	96
5.15	Gráficos de n_e^σ , $T_{\parallel,\perp}^\sigma$ e $\mu_{\parallel,\perp}^\sigma$ em função de x (<i>perfil parabólico</i>).	98
5.16	Gráficos de v_o e r_o em função de x (<i>perfil parabólico</i>).	99
5.17	Gráficos de $d_{\parallel,\perp}$ e d_x em função de x (<i>perfil parabólico</i>).	100

5.18	Gráficos de d_o e ρ_1 em função de x (<i>perfil parabólico</i>).	101
5.19	Gráficos de n_e^σ , $T_{\parallel,\perp}^\sigma$ e $\mu_{\parallel,\perp}^\sigma$ em função de x (<i>perfil gaussiano</i>).	102
5.20	Gráficos de v_o e r_o em função de x (<i>perfil gaussiano</i>).	103
5.21	Gráficos de $d_{\parallel,\perp}$ e d_x em função de x (<i>perfil gaussiano</i>).	104
5.22	Gráficos de d_o e ρ_1 em função de x (<i>perfil gaussiano</i>).	105
5.23	Gráficos de B_o e Y em função de x	106
5.24	Gráfico de Y em função de x para diversos valores de frequência angular ω da onda incidente.	107

Capítulo 1

Introdução

O estudo da propagação e absorção de ondas em plasmas, quando restrito a intervalos de tempo muito menores do que o tempo médio entre colisões binárias, pode ser feito com o uso do sistema de equações de Vlasov-Maxwell. Este sistema de equações é um sistema fortemente acoplado e não linear, devendo ser resolvido de forma auto-consistente. Se o estudo for feito para ondas de pequena amplitude, porém, tal sistema pode ser linearizado, o que simplifica muito o trabalho matemático. O meio também pode conter anisotropias, como por exemplo, as causadas pela aplicação de um campo magnético externo (*que será o caso considerado nesse trabalho*). Nesse caso, o meio não terá suas propriedades de polarização expressas por uma constante dielétrica, mas sim por um tensor dielétrico, que pode ser calculado explicitamente desde que se conheçam as propriedades estatísticas do meio, ou seja, a função distribuição que descreve o plasma (*ver [KT73]*). Após ser linearizado o sistema de Vlasov-Maxwell, ondas planas são soluções do mesmo, no caso em que o meio é considerado homogêneo, ou seja, os campos podem ser escritos na forma

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (1.1)$$

onde \vec{A} pode representar campo elétrico ou magnético.

Em geral, um plasma é um meio que possui inhomogeneidades, ou seja, os parâmetros

do plasma (*densidade de partículas e temperatura, por exemplo*) variam espacialmente. No caso em que as inomogeneidades são fortes, o estudo da propagação e absorção de ondas é feito, em geral, com o uso de equações integro-diferenciais, que vêm da combinação das equações de Maxwell com a equação de Vlasov. Uma abordagem do problema nessa linha, leva a um tratamento matemático muito complexo. No entanto, quando o comprimento de onda da radiação incidente for muito menor do que a escala típica de variação espacial dos parâmetros do plasma, que é dada por¹

$$L = \frac{\partial \ln Z}{\partial x}, \quad (1.2)$$

o tratamento matemático simplifica muito, pois pode ser usada uma aproximação WKB para o sistema de equações de Vlasov-Maxwell, obtendo-se um sistema linear e homogêneo de equações algébricas, cujas incógnitas são as componentes da amplitude do campo elétrico. Além disso, a relação linear geral entre a densidade de corrente \vec{J} e o campo elétrico \vec{E}

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int \int_{-\infty}^t \vec{\sigma}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt', \quad (1.3)$$

leva à relação

$$\vec{J}(\vec{k}, \omega) = \vec{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega), \quad (1.4)$$

quando o meio é homogêneo (ou quando pode ser considerado localmente homogêneo) e estacionário. A condição de solubilidade do sistema de equações algébricas é que leva à obtenção de uma relação de dispersão formalmente idêntica ao caso em que o meio é homogêneo, com as componentes do tensor dielétrico dependendo da posição; ou seja, ponto a ponto, o meio é tratado como se fosse homogêneo. Esta é a chamada aproximação local para o estudo da propagação e absorção de ondas em plasmas fracamente inomogêneos. Uma extensão desse tratamento foi proposta por Mikhailovskii

¹A quantidade Z representa um parâmetro qualquer do plasma, tal como densidade de elétrons ou temperatura, por exemplo.

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' dt' \vec{\epsilon} \left[\frac{1}{2}(\vec{r} + \vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}' \right] \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') . \quad (1.5)$$

O terceiro capítulo é voltado para o cálculo explícito das componentes do tensor dielétrico de um plasma fracamente inhomogêneo, sem no entanto definir a função distribuição. Em [Cal90], este cálculo está feito em detalhe. O quarto capítulo está voltado para o cálculo do tensor dielétrico efetivo para uma dada função distribuição, que no presente trabalho tem uma parte que descreve o plasma de fundo e outra que descreve o feixe (*corrente*). São usadas nesse capítulo expressões modificadas para as componentes do tensor efetivo, obtidas através de uma expansão em série de potências de raio de Larmor das funções de Bessel, como está exposto em [CSZ90] e [Cal90].

O quinto capítulo faz uma análise numérica da relação de dispersão, com o objetivo de calcular o índice de refração do meio para uma dada frequência da onda incidente obtendo assim informações a respeito da absorção de energia da onda pelo meio, e também dos efeitos que as inhomogeneidades fazem nesse processo. Este estudo é feito primeiramente em um ponto do plasma, variando o maior número de parâmetros possível. Após, o estudo é dirigido a uma situação mais realista, considerando uma onda que entra em uma lâmina de plasma, utilizando-se perfis para os parâmetros do plasma, similares aos de um plasma em um TOKAMAK; os perfis são os mesmos utilizados em [FGM⁺80]. Por fim, é apresentado um resumo dos resultados obtidos, e conclusões.

em [Mik67], através da inclusão das derivadas espaciais de primeira ordem da função distribuição que descreve o equilíbrio², no cálculo do tensor dielétrico. Tal procedimento permite estudar inomogeneidades menos fracas, pelo menos quando a direção de propagação da onda é perpendicular às inomogeneidades. Para direções de propagação diferentes dessa, esse tratamento apresenta problemas. O tensor assim obtido não obedece às relações de Onsager como é de se esperar pela teoria da resposta linear, e não é a transformada de Fourier do tensor dielétrico do plasma considerado. Além disso, quando o tensor dielétrico obtido nessa abordagem é inserido na relação de dispersão, leva a uma absorção não ressonante de energia da onda incidente. Todos esses problemas ocorrem para qualquer direção de propagação da onda no meio, exceto para a direção perpendicular às inomogeneidades. Por tais razões, é natural que se suspeite que o tensor calculado por meio desse procedimento seja incorreto.

Uma outra abordagem do problema foi proposta em [BGI87] onde foi adotado um procedimento que visa obter um tensor dielétrico geral que respeite o teorema de *Poynting*. É obtido um tensor dielétrico efetivo mediante correções feitas no tensor calculado a partir da aproximação de ondas planas, para meios inomogêneos. O tensor efetivo se reduz a ele quando a direção de propagação da onda no meio é perpendicular à direção das inomogeneidades. Tal tensor efetivo não leva a uma absorção não ressonante de energia da onda e além disso, obedece às relações de Onsager, para qualquer direção de propagação. Em [BGI87] não é calculada uma forma explícita para o tensor dielétrico. Em [CSZ89], foram obtidas expressões explícitas para as componentes do tensor dielétrico efetivo, válidas para ondas eletromagnéticas de qualquer frequência que se propagam em um plasma magnetizado, em uma direção de propagação arbitrária. Os efeitos de inomogeneidade foram incluídos até ordem L^{-1} , e as expressões para o tensor efetivo podem ser aplicadas a qualquer função distribuição que possua uma simetria azimutal em relação à direção do campo magnético externo. Além disso,

²A função distribuição depende da posição via constantes de movimento, como será visto no capítulo 3.

tais expressões são aplicáveis a plasmas relativísticos e não existe nenhuma restrição quanto ao raio de Larmor, além de que ele deve ser pequeno em relação a L . Essas expressões já foram utilizadas para estudar efeitos de inhomogeneidade sobre a absorção de ciclotron eletrônica em plasmas de elétrons descritos com uma função distribuição Maxwelliana (ver [Cal90] e [CSZ90]). De maneira geral, o que se constatou foi que os efeitos de inhomogeneidade tendem a ser mais relevantes para ondas em ressonância com elétrons na cauda da distribuição, onde há uma densidade pequena de partículas e a absorção não é muito significativa. Em outras palavras, existe um efeito considerável de inhomogeneidade onde praticamente não há absorção.

Para o plasma considerado no presente trabalho, será usada uma função distribuição que contém uma parte relativa a um feixe, com um certo momentum de deriva. Dessa forma, ela descreve um plasma inhomogêneo com presença de corrente. O plasma também será considerado fracamente relativístico, de modo que o fator relativístico γ possa ser expandido em série de potências do momentum paralelo e perpendicular ao campo magnético. Será estudada aqui, a absorção de energia de ondas de alta frequência, da ordem da frequência de ciclotron do elétron³.

O plano do trabalho é o seguinte: o segundo capítulo é destinado em parte à revisão de conceitos básicos sobre a propagação e a absorção de ondas em plasmas homogêneos. Em seguida, é brevemente explicada a aproximação localmente homogênea e por fim, é exposto em linhas gerais, o procedimento adotado em [BGI87], que leva à obtenção de um tensor dielétrico efetivo que inclui efeitos de inhomogeneidade e que, quando colocado em uma relação de dispersão formalmente idêntica à obtida no caso em que o meio é homogêneo, descreve corretamente a propagação e absorção de ondas no meio inhomogêneo. O tensor assim obtido é a transformada de Fourier de um tensor dielétrico simetrizado geral (ver [BGI87] e [Cal90]), que relaciona o vetor deslocamento $\vec{D}(\vec{r}, t)$ com o vetor campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$, através de:

³Que é a frequência com que os elétrons giram (devido à força magnética) ao redor das linhas de indução, causadas pelo campo magnético externo.

Capítulo 2

Propagação e absorção de ondas em plasmas

2.1 Introdução

Neste capítulo serão abordados alguns dos principais aspectos relacionados com a propagação e absorção de ondas em plasmas homogêneos, como por exemplo, a obtenção de uma relação de dispersão, que é uma relação entre o índice de refração do meio e a frequência da onda incidente. Também serão vistos alguns conceitos básicos sobre absorção de ondas em plasmas homogêneos, usando o mesmo procedimento matemático usado por *Shafranov* em [Sha67]. Por último será visto como se faz a extensão do que foi feito para um plasma homogêneo ao caso onde o plasma é inhomogêneo, analisando as situações em que um plasma pode ser tratado como localmente homogêneo e, quando não for o caso, a inclusão de efeitos de inhomogeneidades fracas.

2.2 Propagação de ondas em plasmas

Primeiramente, será considerado um dos mais conhecidos processos de interação entre uma onda e as partículas de um plasma, que é a chamada ressonância de ciclotron. Este processo é um dos possíveis tipos de ressonância que podem ocorrer quando uma onda se propaga em um plasma que está sob a ação de um campo magnético externo. As partículas do plasma entram em movimento circular em torno das linhas desse campo

externo com uma componente de velocidade paralela a elas, o que resulta em uma trajetória helicoidal. A frequência com que as partículas giram em torno dessas linhas é denominada frequência de ciclotron. Ela é dada por $\Omega_\alpha = \frac{q_\alpha B_0}{m_\alpha c}$ para uma partícula do tipo α e as quantidades q_α , B_0 , m_α e c são, respectivamente, a carga da partícula, o módulo do campo magnético externo, a massa da partícula e a velocidade da luz no vácuo. As partículas que entram em ressonância com a onda incidente são aquelas que possuem frequência de ciclotron próxima à frequência da mesma, amortecendo-a ou amplificando-a. Além disso convém lembrar que o plasma é um meio cujas propriedades dielétricas podem ser descritas por um tensor dielétrico, definido pela relação entre o vetor deslocamento elétrico \vec{D} e o vetor campo elétrico \vec{E} , que, quando o meio é linear, pode ser escrita como:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int \int_{-\infty}^t \vec{\epsilon}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' . \quad (2.1)$$

As propriedades dielétricas do meio devem ser levadas em conta quando se quer estudar propagação e absorção de ondas. Para calcular explicitamente as componentes do tensor dielétrico, devem ser conhecidas as propriedades estatísticas do meio¹. Primeiramente será estudada a propagação de ondas, com o uso das equações de Maxwell, mostradas abaixo:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} . \quad (2.5)$$

Além dessas equações, existe uma relação constitutiva entre o campo elétrico \vec{E} e a

¹Quando se estudam fenômenos restritos a intervalos de tempo pequenos comparados ao tempo médio de colisões binárias entre as partículas que fazem parte do plasma, estas propriedades são descritas pela função distribuição de equilíbrio das partículas, solução da equação de Vlasov linearizada, como será visto no próximo capítulo.

densidade de corrente \vec{J} , que na aproximação linear é dada por:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int \int_{-\infty}^t \vec{\sigma}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt' . \quad (2.6)$$

O caráter tensorial de $\vec{\sigma}$ se deve ao fato de que o plasma é um meio que pode apresentar anisotropias. Um campo magnético externo aplicado ao plasma, por exemplo, causa tal anisotropia. Já o caráter não local pode ser visto na expressão (2.6) pelo seguinte raciocínio: O valor de \vec{J} na posição \vec{r} e no tempo t depende do campo elétrico em todas as posições \vec{r}' diferentes de \vec{r} , e em todos os instantes de tempo t' anteriores a t , de forma genérica. Por isso devemos "somar" essas contribuições através de uma integral. No caso em que o meio é homogêneo e estacionário, o tensor condutividade será invariante frente a uma translação espacial e temporal. Todas as regiões do plasma tais que $|\vec{r}' - \vec{r}|$ seja o mesmo e todos os intervalos de tempo tais que $t - t'$ também seja o mesmo, fornecerão o mesmo resultado para a densidade de corrente, quando ela é calculada a partir de (2.6). Para um meio homogêneo e estacionário pode-se portanto, escrever o tensor condutividade na forma:

$$\vec{\sigma}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \vec{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') .$$

Combinando as equações (2.4), (2.5), (2.6) e usando a expressão acima obtém-se:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int \vec{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt'}_{\vec{J}(\vec{r}, t)} . \quad (2.7)$$

Sendo $\vec{E}(\vec{r}, t)$ obtido desta equação, pode-se obter \vec{B} a partir de (2.5), por exemplo. Em geral, é difícil resolver uma equação como esta, por se tratar de uma equação integro-diferencial. É possível decompor as soluções da mesma em ondas planas do tipo

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ,$$

considerando-se somente uma das componentes de Fourier, uma vez que as equações são lineares. Segue que

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} &= -k^2 \vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \vec{E} \\ \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) &= -(\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k},\end{aligned}$$

pois no espaço $\{\vec{k}, \omega\}$ são válidas as correspondências $\nabla \rightarrow i\vec{k}$ e $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$. Da relação (2.6), usando-se as componentes de Fourier para \vec{J} e \vec{E} , chega-se a:

$$\vec{J}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \int dt' \int d\vec{r}' \vec{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}' - \omega t')} .$$

Reescrevendo:

$$\begin{aligned}\vec{J}(\vec{k}, \omega) &= \int dt' \int d\vec{r}' \vec{\sigma}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i[\vec{k} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}) - \omega(t' - t)]} \\ &= \underbrace{\int d\tau \int d\vec{R} \vec{\sigma}(\vec{R}, \tau) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega\tau)}}_{\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega)} \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) \\ &= \vec{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega),\end{aligned}\tag{2.8}$$

onde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ e $\tau = t - t'$.

Vê-se que, se o meio for homogêneo e estacionário, a transformada de Fourier da densidade de corrente é expressa pelo produto escalar da transformada de Fourier do tensor condutividade pela transformada de Fourier do campo elétrico. A equação (2.7) pode ser escrita então da seguinte forma:

$$-k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} + \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) = -i\omega \frac{4\pi}{c^2} \vec{J} .\tag{2.9}$$

Usando-se a relação (2.8), segue a expressão:

$$-k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(\vec{E} + i \frac{4\pi}{\omega} \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \right) + \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0 .\tag{2.10}$$

Reescrevendo esta equação, e lembrando que o tensor dielétrico $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega)$ é obtido de $\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega)$ através de

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega) = \vec{I} + i \frac{4\pi}{\omega} \vec{\sigma}(\vec{k}, \omega),$$

obtemos:

$$-k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\epsilon} \cdot \vec{E} + \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0. \quad (2.11)$$

Tomando a componente α da equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} -k^2 E_\alpha + \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\beta} \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta + k_\alpha \sum_{\beta} k_\beta E_\beta &= - \sum_{\beta} k^2 \delta_{\alpha\beta} E_\beta + \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{\beta} \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta \\ &+ \sum_{\beta} k_\alpha k_\beta E_\beta = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pode-se então escrever a seguinte expressão:

$$\sum_{\beta} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\alpha\beta} - k^2 \delta_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta \right) E_\beta = 0. \quad (2.13)$$

Na expressão acima estão compactadas três equações, para $\alpha = x, y, z$, cada uma delas somando em β ($\beta = x, y, z$). Dessa forma, obtemos um sistema homogêneo de equações lineares nas incógnitas E_x , E_y e E_z . Esse sistema só admitirá solução não trivial se for nulo o determinante da matriz cujos elementos são os coeficientes das incógnitas. Dessa forma, deve ser satisfeita a condição:

$$\det \left[\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\alpha\beta} - k^2 \delta_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta \right] = 0. \quad (2.14)$$

Colocando-se $\frac{\omega^2}{c^2}$ em evidência, e notando que o índice de refração é dado por $\vec{N} = \frac{\vec{k}c}{\omega}$, obtém-se:

$$\det[\mathbf{A}] = 0, \quad (2.15)$$

onde:

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} - N^2 + N_x^2 & \epsilon_{xy} + N_x N_y & \epsilon_{xz} + N_x N_z \\ \epsilon_{yx} + N_y N_x & \epsilon_{yy} - N^2 + N_y^2 & \epsilon_{yz} + N_y N_z \\ \epsilon_{zx} + N_z N_x & \epsilon_{zy} + N_z N_y & \epsilon_{zz} - N^2 + N_z^2 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Esta condição gera uma relação entre \vec{N} e ω , chamada *relação de dispersão*; para uma onda incidindo com frequência ω , ela diz com que vetor de onda² a mesma se propagará no plasma, ou qual o índice de refração do meio para esta frequência.

Nota-se a importância do conhecimento adequado e consistente das componentes do tensor dielétrico no cálculo do índice de refração do plasma. Todas elas estão presentes na relação de dispersão, o que torna necessário conhecê-las explicitamente. Isto será feito no próximo capítulo. Na próxima seção, será visto o papel desempenhado pelo tensor dielétrico na absorção de ondas em plasmas homogêneos, através do *Teorema de Poynting*.

2.3 Interação das ondas com as partículas do plasma

Quando uma onda incide em um plasma, ela interage com as partículas do mesmo, sendo amplificada ou amortecida. Nessa seção será usado o procedimento adotado por *Shafranov* em [Sha67] para ver que papel desempenha o tensor dielétrico no que se refere à absorção ou amplificação de ondas em plasmas homogêneos. Para entender o processo de perda ou ganho de energia da onda em um plasma, escreve-se a equação para a conservação de energia (*Teorema de Poynting*), que tem a forma:

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}) = -\vec{J} \cdot \vec{E}, \quad (2.17)$$

onde:

²O vetor de onda somente será determinado univocamente se forem conhecidos o ângulo entre a direção de propagação e o campo magnético externo, e o ângulo ψ , como mostra a figura 3.1.

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B}) .$$

Escrevendo os campos em suas componentes de Fourier, com amplitudes que variem pouco espacialmente, e lentamente no tempo:

$$\vec{E}(\vec{r}, \eta\vec{r}, t, \eta t) = \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, \eta\vec{r}, t, \eta t) = \vec{B}_o(\eta\vec{r}, \eta t) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{J}(\vec{r}, \eta\vec{r}, t, \eta t) = \vec{J}_o(\eta\vec{r}, \eta t) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} .$$

O parâmetro adimensional η é tal que $\eta \ll 1$, e foi introduzido para que sejam pequenas as derivadas espacial e temporal das amplitudes, se comparadas com as mesmas derivadas da parte oscilante.

Por exemplo, havendo uma absorção fraca da energia das ondas, ou seja, se suas amplitudes estão variando pouco no tempo e no espaço, o vetor de onda \vec{k} e/ou a frequência ω terão uma parte imaginária pequena ($\frac{|k_i|}{|k_r|} \ll 1$ e/ou $|\frac{\omega_i}{\omega_r}| \ll 1$), o que resultará no aparecimento de um fator de amortecimento ou amplificação nas amplitudes dos campos, como segue:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i[(k_r + ik_i)\cdot\vec{r} - (\omega_r + i\omega_i)t]} \\ &= \underbrace{\vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{-\vec{k}_i\cdot\vec{r}} e^{\omega_i t}}_{\vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t)} e^{i(\vec{k}_r\cdot\vec{r} - \omega_r t)} , \end{aligned} \quad (2.18)$$

o mesmo acontecendo com o campo \vec{B} . Dependendo do sinal de $\vec{k}_i\cdot\vec{r}$ e de ω_i , acontece amplificação ou absorção da onda no meio espacial e temporalmente.

A suposição de que as amplitudes tenham variação lenta em \vec{r} e t é no fundo uma forma de incluir os efeitos de absorção ou amplificação da onda, pelo menos no caso em que o plasma é homogêneo e estacionário. Trabalha-se então com a equação (2.17),

lembrando que em regime de altas frequências, é conveniente trabalhar com a média temporal desta equação. Deve-se lembrar também, que se existirem duas funções f e g tais que $f(\vec{r}, \eta\vec{r}, t, \eta t) = f_o(\eta\vec{r}, \eta t)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ e $g(\vec{r}, \eta\vec{r}, t, \eta t) = g_o(\eta\vec{r}, \eta t)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, e suas amplitudes não variarem apreciavelmente no intervalo de tempo em que esta média está sendo feita, a média temporal do produto f pela g será dada por:

$$\langle fg \rangle_t = \overline{Re(f)Re(g)} = \frac{1}{2} Re(f_o g_o^*) \quad . \quad (2.19)$$

Então, escreve-se:

$$\nabla \cdot \left[\frac{c}{8\pi} Re(\vec{E} \times \vec{B}^*) \right] + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial t} [Re(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) + Re(\vec{B} \cdot \vec{B}^*)] = -\frac{1}{2} Re(\vec{J} \cdot \vec{E}^*) \quad . \quad (2.20)$$

Começa-se então a trabalhar com o termo $Re(\vec{J} \cdot \vec{E}^*)$; sendo $\vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t)$ uma grandeza que varia pouco em posição e tempo, suas componentes podem ser expandidas em torno de $\vec{r}' = \vec{r}$ e $t' = t$, como segue:

$$\begin{aligned} E_{o\beta}(\eta\vec{r}', \eta t') &= E_{o\beta}(\eta\vec{r}, \eta t) + \nabla_{\vec{r}'} E_{o\beta}(\eta\vec{r}', \eta t') \Big|_{\vec{r}'=\vec{r}, t'=t} \cdot (\vec{r}' - \vec{r}) \\ &\quad + \frac{\partial E_{o\beta}(\eta\vec{r}', \eta t')}{\partial t'} \Big|_{\vec{r}'=\vec{r}, t'=t} (t' - t) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Colocando (2.21) na equação (2.6), levando-se em conta que o meio é homogêneo, vem que:

$$\begin{aligned} J_\alpha(\vec{r}, t) &= e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \sum_\beta \int dt' \int d\vec{r}' \sigma_{\alpha\beta}(\vec{r}' - \vec{r}, t' - t) \left[E_{o\beta}(\eta\vec{r}, \eta t) + \nabla_{\vec{r}'} E_{o\beta}(\eta\vec{r}, \eta t) \cdot (\vec{r}' - \vec{r}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial E_{o\beta}(\eta\vec{r}, \eta t)}{\partial t} (t' - t) \right] e^{i[\vec{k}\cdot(\vec{r}'-\vec{r})-\omega(t'-t)]} \quad . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Utilizando-se a expressão para $\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega)$ em (2.8), pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}
 J_\alpha(\vec{r}, t) = & e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \left[\sum_\beta \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) E_{o\beta}(\eta\vec{r}, \eta t) - i \underbrace{\sum_\beta \nabla_{\vec{k}} \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) \cdot \nabla_{\vec{r}} E_{o\beta}(\eta\vec{r}, \eta t)}_{\nabla \cdot \left[\sum_\beta \nabla_{\vec{k}} \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) E_{o\beta}(\eta\vec{r}, \eta t) \right]} \right] \\
 & + i \underbrace{\sum_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial E_{o\beta}(\eta\vec{r}, \eta t)}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)}{\partial \omega} E_{o\beta}(\eta\vec{r}, \eta t) \right]} . \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

O segundo termo de (2.23) pode ser escrito então como:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \left[\sum_\beta \nabla_{\vec{k}} \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) E_{o\beta}(\eta\vec{r}, \eta t) \right] &= \nabla \cdot \left\{ \nabla_{\vec{k}} \left[\sum_\beta \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega) E_{o\beta}(\eta\vec{r}, \eta t) \right] \right\} \\
 &= \nabla \cdot \left\{ \nabla_{\vec{k}} [\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t)]_\alpha \right\} . \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

Também pode-se escrever que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)}{\partial \omega} E_{o\beta}(\eta\vec{r}, \eta t) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\frac{\partial \vec{\sigma}(\vec{k}, \omega)}{\partial \omega} \cdot \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t) \right]_\alpha \right\} . \quad (2.25)$$

Colocando (2.24) e (2.25) em (2.23), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 J_\alpha(\vec{r}, t) = & e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \left[[\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t)]_\alpha - i \nabla \cdot \left\{ \nabla_{\vec{k}} [\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t)]_\alpha \right\} \right] \\
 & + i \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\frac{\partial \vec{\sigma}(\vec{k}, \omega)}{\partial \omega} \cdot \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t) \right]_\alpha \right\} . \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

O produto escalar $\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}, t)$ pode então ser calculado de (2.26), como segue:

$$\begin{aligned}
 \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}, t) &= \sum_\alpha J_\alpha(\vec{r}, t) E_\alpha^*(\vec{r}, t) = \underbrace{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}_1 \\
 &\quad \times \sum_\alpha \left[E_{o\alpha}^*(\eta\vec{r}, \eta t) [\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t)]_\alpha \right. \\
 &\quad - i E_{o\alpha}^*(\eta\vec{r}, \eta t) \nabla \cdot \left\{ \nabla_{\vec{k}} [\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t)]_\alpha \right\} \\
 &\quad \left. - E_{o\alpha}^*(\eta\vec{r}, \eta t) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\frac{\partial \vec{\sigma}(\vec{k}, \omega)}{\partial \omega} \cdot \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t) \right]_\alpha \right\} \right] . \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned}
 \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}, t) &= \vec{E}_o^*(\eta\vec{r}, \eta t) \cdot \vec{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t) \\
 &\quad - \frac{i}{2} \nabla \cdot \left\{ \nabla_{\vec{k}} \left[\vec{E}_o^*(\eta\vec{r}, \eta t) \cdot \vec{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t) \right] \right\} \\
 &\quad + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{E}_o^*(\eta\vec{r}, \eta t) \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}(\vec{k}, \omega)}{\partial \omega} \cdot \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t) \right] . \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

Para calcular $Re(\vec{J} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2}(\vec{J} \cdot \vec{E}^* + \vec{J}^* \cdot \vec{E})$ deve-se conjugar a expressão (2.28) e somá-la com o resultado desta operação. Para isso é conveniente escrever o tensor $\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega)$ em termos de suas partes hermitiana e anti-hermitiana, definidas como:

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\beta\alpha}^*}{2} \quad (2.29)$$

$$\sigma''_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\beta\alpha}^*}{2i} . \quad (2.30)$$

O tensor $\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega)$ pode então ser escrito como:

$$\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega) = \vec{\sigma}'(\vec{k}, \omega) + i\vec{\sigma}''(\vec{k}, \omega) . \quad (2.31)$$

Escrevendo o tensor dielétrico $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega)$ da mesma forma, usando a expressão que relaciona $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega)$ com $\vec{\sigma}(\vec{k}, \omega)$, obtêm-se:

$$\vec{\sigma}'(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega}{4\pi} \vec{\epsilon}''(\vec{k}, \omega) \quad (2.32)$$

$$\vec{\sigma}''(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega}{4\pi} \left[\vec{I} - \vec{\epsilon}'(\vec{k}, \omega) \right] . \quad (2.33)$$

Somando (2.28) com a sua complexa conjugada, e usando (2.31), chega-se a:

$$Re(\vec{J} \cdot \vec{E}^*) = \vec{E}_o^* \cdot \vec{\sigma}' \cdot \vec{E}_o + \frac{1}{2} \nabla \cdot \left[\nabla_{\vec{k}} (\vec{E}_o^* \cdot \vec{\sigma}'' \cdot \vec{E}_o) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E}_o^* \cdot \frac{\partial \vec{\sigma}''}{\partial \omega} \cdot \vec{E}_o \right) , \quad (2.34)$$

onde os argumentos $\vec{k}, \omega, \eta\vec{r}$ e ηt não foram colocados para não sobrecarregar demais a notação. Levando-se em conta as relações (2.32) e (2.33), e também que $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_o(\eta\vec{r}, \eta t)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \Rightarrow \vec{E}_o \cdot \vec{\epsilon}' \text{ ou } \vec{E}_o = \vec{E}^* \cdot \vec{\epsilon}' \text{ ou } \vec{E}$, chega-se à expressão

$$\begin{aligned} \text{Re}(\vec{J} \cdot \vec{E}^*) &= \frac{\omega}{4\pi} \vec{E}^* \cdot \vec{\epsilon}'' \cdot \vec{E} - \frac{\omega}{8\pi} \nabla \cdot \left[\nabla_{\vec{k}} (\vec{E}^* \cdot \vec{\epsilon}' \cdot \vec{E}) \right] - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^* \cdot \vec{E}) \\ &+ \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{E}^* \cdot \frac{\partial(\omega\vec{\epsilon}')}{\partial\omega} \cdot \vec{E} \right], \end{aligned} \quad (2.35)$$

o que levará à seguinte equação de conservação:

$$\nabla \cdot \vec{S}_T + \frac{\partial u}{\partial t} = Q, \quad (2.36)$$

onde:

$$\vec{S}_T = \frac{c}{8\pi} (\vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B}) - \frac{\omega}{8\pi} \nabla_{\vec{k}} (\vec{E}^* \cdot \vec{\epsilon}' \cdot \vec{E}) \quad (2.37)$$

$$u = \frac{1}{16\pi} \vec{E}^* \cdot \frac{\partial(\omega\vec{\epsilon}')}{\partial\omega} \cdot \vec{E} + \frac{B^2}{16\pi} \quad (2.38)$$

$$Q = -\frac{\omega}{8\pi} \vec{E}^* \cdot \vec{\epsilon}'' \cdot \vec{E} \quad (2.39)$$

A grandeza \vec{S}_T é composta por dois termos: o primeiro corresponde ao fluxo de energia eletromagnética, e o segundo pode ser interpretado como correspondendo ao fluxo de energia das partículas que se movem coerentemente com a onda ([Sha67]). Em (2.38), que define a densidade de energia u , o segundo termo é a já conhecida densidade de energia magnética. O primeiro termo é a densidade de energia elétrica mais a energia (por unidade de volume) cinética das partículas que se movem coerentemente com a onda.

A quantidade Q desempenha o papel de fonte (ou sumidouro) de energia na equação de conservação (2.36). Estes termos são interpretados em [Sha67] através de exemplos relativamente simples. Vê-se então, que a amplificação ou absorção de energia de ondas

em um plasma homogêneo está associada exclusivamente à parte anti-hermitiana do tensor dielétrico.

2.4 Plasmas localmente homogêneos

Todo plasma é um meio inhomogêneo, ou seja, sempre existem gradientes de temperatura e de densidades de partículas, entre outros, que influem na propagação e absorção de ondas. Dessa forma, já não se pode mais usar a relação (2.8) e a equação (2.14) não poderá mais fornecer o índice de refração do meio para uma dada frequência da onda incidente. No entanto, quando as inhomogeneidades podem ser consideradas fracas, é possível utilizar a aproximação localmente homogênea. Essa aproximação é válida se o comprimento de onda λ da onda incidente for muito menor do que a escala típica L de variação espacial dos parâmetros do plasma. Sendo \mathcal{N} um parâmetro do plasma, a escala de variação espacial desse parâmetro pode ser escrita como $L = \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \frac{d\mathcal{N}}{dx}\right)^{-1}$, o que leva à condição

$$\lambda \ll \left(\frac{d \ln \mathcal{N}}{dx}\right)^{-1}, \quad (2.40)$$

para a aproximação localmente homogênea.

O meio pode ser considerado homogêneo para se descrever fenômenos que ocorrem em escalas de comprimento da ordem da escala do comprimento de onda. Para fenômenos que ocorrem em escalas maiores é necessário incluir as inhomogeneidades na sua descrição.

Uma determinada onda somente "sente" apreciavelmente os efeitos da inhomogeneidade quando "vista" em escalas de comprimento da ordem de L . Quando ela é vista em escalas de comprimento da ordem de λ , ela "vê" o plasma como se ele fosse homogêneo. Com esta aproximação, analisa-se o plasma localmente, em regiões definidas por comprimentos da ordem de λ . Dessa forma, como nessas regiões o plasma pode ser tratado

como um meio homogêneo, a dependência em posição do tensor dielétrico obtido se dará de forma paramétrica, e este será formalmente idêntico ao tensor dielétrico de um plasma homogêneo. Em cada ponto do plasma pode-se considerar válida a relação (2.8), sendo obtida nesses pontos uma relação de dispersão do tipo (2.14), fornecendo o índice de refração do meio. Para estudar os efeitos das inomogeneidades na propagação e na absorção de ondas, com a inclusão explícita de gradientes dessas inomogeneidades na relação de dispersão (2.14), não pode ser usado o tensor dielétrico obtido na aproximação localmente homogênea, mas sim um tensor dielétrico efetivo, que é obtido do tensor na aproximação local, feitas algumas correções. A seguir, será explicado em linhas gerais como se obtém tal tensor.

2.5 Inclusão de efeitos de inomogeneidades fracas

Para estudar os efeitos das inomogeneidades na propagação e absorção de ondas em um plasma, deve-se incluir explicitamente na relação de dispersão, os gradientes dos parâmetros que são responsáveis por essas inomogeneidades. A abordagem proposta por Mikhailovskii [Mik67] inclui esses gradientes através de uma expansão em série da função distribuição de equilíbrio do plasma, contendo até derivada espacial de primeira ordem da mesma, ou seja, inclui os gradientes nas componentes do tensor dielétrico mantendo a mesma relação de dispersão. Porém, tal abordagem será apresentada mais adiante, pois por enquanto ainda não foi dito nada sobre função distribuição, o que será feito apenas no próximo capítulo. Pode-se adiantar que tal abordagem falha por supor válida a relação (2.8) mesmo com a hipótese de que o meio não é homogêneo, usando (2.14) como relação de dispersão. Não sendo o plasma tratado como homogêneo nem como localmente homogêneo, não se pode mais usar (2.8). Conseqüentemente, a relação (2.14) não pode ser usada para obter o índice de refração do meio em resposta à frequência ω da onda incidente, pois nesta relação estão as componentes de um tensor

que não é a transformada de Fourier do tensor dielétrico do meio em questão.

Em 1987, Beskin, Gurevich e Istomin mostraram que pode ser obtido um tensor dielétrico efetivo a partir de um tensor contruído via superposição de ondas planas e que inclui dependência espacial, que ao ser colocado numa relação de dispersão formalmente idêntica à (2.14), descreve corretamente os fenômenos de propagação e absorção de ondas em plasmas [BGI87]. Serão expostos aqui os principais aspectos do procedimento matemático adotado em [BGI87]. Em [Cal90], tal procedimento está descrito em mais detalhe. As grandezas envolvidas serão escritas como $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, \omega)e^{-i\omega t}$, onde \vec{A} pode representar \vec{E} , \vec{B} ou \vec{J} . Assim, a equação (2.7) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, \omega) - \nabla[\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, \omega)] + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = -\frac{4\pi i\omega}{c^2} \vec{J}(\vec{r}, \omega), \quad (2.41)$$

onde as componentes de $\vec{J}(\vec{r}, \omega)$ são dadas por:

$$J_\alpha(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} d\vec{r}' e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \sigma_{\alpha\beta}^o(\vec{r}', \vec{k}, \omega) E_\beta(\vec{r}', \omega). \quad (2.42)$$

Na expressão acima e em todas as subseqüentes dessa seção, índices repetidos indicam soma. Convém salientar também que os $\sigma_{\alpha\beta}^o(\vec{r}', \vec{k}, \omega)$ são componentes da transformada de Fourier de um tensor tipo condutividade obtido fazendo-se a suposição de ondas planas para os campos.

Em um meio fracamente inomogêneo pode-se escrever uma condição semelhante à (2.40), dada por:

$$\mu \equiv \frac{1}{\underbrace{k_o}_{\lambda}} \frac{1}{L} \ll 1, \quad (2.43)$$

onde k_o é o valor de \vec{k} em torno do qual o tensor condutividade tem um pico.

Será feita ainda a suposição de que é satisfeita a condição de pequeno amortecimento

$$p \equiv \frac{|\vec{k}_i|}{|\vec{k}_r|} \approx \left| \frac{\varepsilon''_{\alpha\beta}}{\varepsilon'_{\alpha\beta}} \right| \ll 1, \quad (2.44)$$

onde o vetor de onda \vec{k} é dado por

$$\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$$

e onde $\varepsilon'_{\alpha\beta}$ e $\varepsilon''_{\alpha\beta}$ são, respectivamente, a parte hermitiana e anti-hermitiana da componente do tensor $\varepsilon_{\alpha\beta}^o$ obtido na aproximação de ondas planas.

O campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ será decomposto não mais em ondas planas, mas de uma forma mais genérica, do tipo

$$E_\beta(\vec{r}, \omega) = E_\beta^o(\vec{r}, \omega) e^{i\psi(\vec{r})}, \quad (2.45)$$

com $E_\beta^o(\vec{r}, \omega)$ variando lentamente com \vec{r} e $\psi(\vec{r})$ rapidamente. Quando o meio é homogêneo, $\psi(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r}$. No caso em que o meio é inhomogêneo pode-se supor que

$$\psi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}} \vec{k}_o(\vec{r}') \cdot d\vec{r}', \quad (2.46)$$

ou equivalentemente:

$$\vec{k}_o = \nabla\psi(\vec{r}) . \quad (2.47)$$

Substituindo-se (2.45) em (2.42), obtém-se

$$J_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} d\vec{r}' e^{i[\psi(\vec{r}) + \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] } \sigma_{\alpha\beta}^o E_\beta^o, \quad (2.48)$$

onde não foram escritos os argumentos \vec{r} , \vec{k} e ω em J_α , $\sigma_{\alpha\beta}^o$ e E_β^o para não sobrecarregar a notação. Supondo que $\sigma_{\alpha\beta}^o$ não tenha singularidades em pontos próximos a \vec{k}_o , pode-se expandir esta quantidade em torno deste ponto, de forma que

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^o(\vec{r}, \vec{k}, \omega) &= \sigma_{\alpha\beta}^o(\vec{r}, \vec{k}_o, \omega) + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^o}{\partial k_i} (k_i - k_{oi}) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\beta}^o}{\partial k_i \partial k_k} (k_i - k_{oi})(k_k - k_{ok}) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \sigma_{\alpha\beta}^o}{\partial k_i \partial k_k \partial k_l} (k_i - k_{oi})(k_k - k_{ok})(k_l - k_{ol}) + \dots, \quad (2.49)$$

onde $\sigma_{\alpha\beta}^o$ e suas derivadas são calculadas em $\vec{k} = \vec{k}_o$. Escrevendo a equação (2.41) por componentes, obtém-se:

$$\underbrace{\nabla^2 E_\alpha - \frac{\partial}{\partial r_\alpha} (\nabla \cdot \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} E_\alpha}_{TE} = - \underbrace{\frac{4\pi i \omega}{c^2} J_\alpha}_{TD}. \quad (2.50)$$

Vão ser analisados separadamente o termo do lado esquerdo (*TE*) e o termo do lado direito (*TD*) de (2.50), como será mostrado a seguir. Começando-se a estudar o termo do lado esquerdo, reescreve-se o mesmo como:

$$TE = \frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial r_\beta \partial r_\beta} - \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \frac{\partial E_\beta}{\partial r_\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} E_\alpha. \quad (2.51)$$

Substituindo-se (2.45) em (2.51), chega-se a:

$$TE = e^{i\psi} \left\{ \frac{\partial^2 E_\alpha^o}{\partial r_\beta \partial r_\beta} + 2i \frac{\partial E_\alpha^o}{\partial r_\beta} k_{o\beta} + i E_\alpha^o \frac{\partial k_{o\beta}}{\partial r_\beta} - E_\alpha^o k_{o\beta} k_{o\beta} - \left[\frac{\partial^2 E_\beta^o}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + i \frac{\partial E_\beta^o}{\partial r_\beta} k_{o\alpha} + i \frac{\partial E_\beta^o}{\partial r_\alpha} k_{o\beta} + i E_\beta^o \frac{\partial k_{o\beta}}{\partial r_\alpha} - E_\beta^o k_{o\alpha} k_{o\beta} \right] + \frac{\omega^2}{c^2} E_\alpha^o \right\}. \quad (2.52)$$

Deve-se observar que $\frac{\omega^2}{c^2}$ pode ser dado por:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{\omega^2}{c^2 k_o^2} \right) k_o^2 = \frac{k_o^2}{N_o^2}, \quad (2.53)$$

notando que esta quantidade é da ordem de $\frac{1}{\lambda^2}$. Pode-se reescrever *TE*, colocando-se k_o^2 em evidência, obtendo:

$$TE = e^{i\psi} k_o^2 \left\{ \frac{1}{k_o^2} \left[\frac{\partial^2 E_\alpha^o}{\partial r_\beta \partial r_\beta} + 2i \frac{\partial E_\alpha^o}{\partial r_\beta} k_{o\beta} + i E_\alpha^o \frac{\partial k_{o\beta}}{\partial r_\beta} - E_\alpha^o k_{o\beta} k_{o\beta} \right] - \frac{1}{k_o^2} \left[\frac{\partial^2 E_\beta^o}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + i \frac{\partial E_\beta^o}{\partial r_\beta} k_{o\alpha} + i \frac{\partial E_\beta^o}{\partial r_\alpha} k_{o\beta} + i E_\beta^o \frac{\partial k_{o\beta}}{\partial r_\alpha} - E_\beta^o k_{o\alpha} k_{o\beta} \right] + \frac{\omega^2}{c^2 k_o^2} E_\alpha^o \right\}. \quad (2.54)$$

Os vários termos que aparecem na equação (2.54) têm uma ordem definida no parâmetro μ , dado por (2.43). Então, (2.54) pode ser reescrita em termos das diferentes ordens de μ . Fazendo isso, chega-se a:

$$\begin{aligned}
 TE = e^{i\psi} & \left\{ \mu^0 \left[-E_{\alpha}^{\circ} k_{\circ\beta} k_{\circ\beta} + E_{\beta}^{\circ} k_{\circ\alpha} k_{\circ\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} E_{\alpha}^{\circ} \right] \right. \\
 & + \mu \left[2i \frac{\partial E_{\alpha}^{\circ}}{\partial r_{\beta}} k_{\circ\beta} + i E_{\alpha}^{\circ} \frac{\partial k_{\circ\beta}}{\partial r_{\beta}} - i k_{\circ\beta} \frac{\partial E_{\beta}^{\circ}}{\partial r_{\alpha}} - i k_{\circ\alpha} \frac{\partial E_{\beta}^{\circ}}{\partial r_{\beta}} - i E_{\beta}^{\circ} \frac{\partial k_{\circ\beta}}{\partial r_{\alpha}} \right] \\
 & \left. + \mu^2 \left[\frac{\partial^2 E_{\alpha}^{\circ}}{\partial r_{\beta} \partial r_{\beta}} - \frac{\partial^2 E_{\beta}^{\circ}}{\partial r_{\alpha} \partial r_{\beta}} \right] \right\} . \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

O próximo passo é, supondo que μ e p (dado por (2.44)) sejam da mesma ordem de grandeza, expandir as componentes do campo elétrico na seguinte forma:

$$E_{\alpha}^{\circ} = \mu^0 \hat{E}_{\alpha 0} + \mu \hat{E}_{\alpha 1} + \mu^2 \hat{E}_{\alpha 2} + \dots \tag{2.56}$$

Substituindo-se (2.56) em (2.55), pode-se separar TE nas diferentes ordens em μ , escrevendo

$$TE = \mu^0 TE^{(0)} + \mu TE^{(1)} + \mu^2 TE^{(2)} + \dots , \tag{2.57}$$

onde, até ordem dois em μ , obtêm-se:

$$TE^{(0)} = e^{i\psi} \left[-\hat{E}_{\alpha 0} k_{\circ\beta} k_{\circ\beta} + \hat{E}_{\beta 0} k_{\circ\alpha} k_{\circ\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{E}_{\alpha 0} \right] \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned}
 TE^{(1)} = e^{i\psi} & \left\{ \left[-\hat{E}_{\alpha 1} k_{\circ\beta} k_{\circ\beta} + \hat{E}_{\beta 1} k_{\circ\alpha} k_{\circ\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{E}_{\alpha 1} \right] \right. \\
 & + i \left[2 \frac{\partial \hat{E}_{\alpha 0}}{\partial r_{\beta}} k_{\circ\beta} + \hat{E}_{\alpha 0} \frac{\partial k_{\circ\beta}}{\partial r_{\beta}} - \frac{\partial \hat{E}_{\beta 0}}{\partial r_{\beta}} k_{\circ\alpha} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial \hat{E}_{\beta 0}}{\partial r_{\alpha}} k_{\circ\beta} - \hat{E}_{\beta 0} \frac{\partial k_{\circ\beta}}{\partial r_{\alpha}} \right] \right\} \tag{2.59}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 TE^{(2)} = e^{i\psi} & \left\{ \left[-\hat{E}_{\alpha 2} k_{\circ\beta} k_{\circ\beta} + \hat{E}_{\beta 2} k_{\circ\alpha} k_{\circ\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{E}_{\alpha 2} \right] \right. \\
 & \left. + i \left[2 \frac{\partial \hat{E}_{\alpha 1}}{\partial r_{\beta}} k_{\circ\beta} + \hat{E}_{\alpha 1} \frac{\partial k_{\circ\beta}}{\partial r_{\beta}} - \frac{\partial \hat{E}_{\beta 1}}{\partial r_{\beta}} k_{\circ\alpha} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial \hat{E}_{\beta 1}}{\partial r_{\alpha}} k_{o\beta} - \hat{E}_{\beta 1} \frac{\partial k_{o\beta}}{\partial r_{\alpha}} \Big] \\
 & + \left[\frac{\partial^2 \hat{E}_{\alpha o}}{\partial r_{\beta} \partial r_{\beta}} - \frac{\partial^2 \hat{E}_{\beta o}}{\partial r_{\alpha} \partial r_{\beta}} \right] \Big\} .
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

O passo seguinte é aplicar o mesmo procedimento no termo do lado direito de (2.50), separando-o também em diferentes ordens do parâmetro μ . Escrevendo TD na forma

$$TD = - \frac{4\pi i \omega}{c^2 (2\pi)^3} \int d\vec{r}' E_{\beta} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \sigma_{\alpha\beta}^o(\vec{r}, \vec{k}, \omega) , \tag{2.61}$$

e usando-se a expansão (2.49) para $\sigma_{\alpha\beta}^o(\vec{r}, \vec{k}, \omega)$, chega-se a:

$$TD = TD_I + TD_{II} + TD_{III} + TD_{IV} + \dots , \tag{2.62}$$

onde, até o termo TD_{IV} , obtêm-se:

$$TD_I = - \frac{4\pi i \omega}{c^2 (2\pi)^3} \sigma_{\alpha\beta}^o \int d\vec{r}' E_{\beta} \int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \tag{2.63}$$

$$TD_{II} = - \frac{4\pi i \omega}{c^2 (2\pi)^3} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^o}{\partial k_i} \int d\vec{r}' E_{\beta} \int d\vec{k} (k_i - k_{oi}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}
 TD_{III} &= - \frac{4\pi i \omega}{c^2 (2\pi)^3} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\beta}^o}{\partial k_i \partial k_k} \int d\vec{r}' E_{\beta} \int d\vec{k} (k_i - k_{oi}) \\
 &\quad \times (k_k - k_{ok}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}
 TD_{IV} &= - \frac{4\pi i \omega}{c^2 (2\pi)^3} \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \sigma_{\alpha\beta}^o}{\partial k_i \partial k_k \partial k_l} \int d\vec{r}' E_{\beta} \int d\vec{k} (k_i - k_{oi}) \\
 &\quad \times (k_k - k_{ok})(k_l - k_{ol}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} .
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Escreve-se então TD em uma série de potências de μ , a exemplo do que foi feito com TE . Deve-se fazê-lo separadamente para TD_I , TD_{II} , TD_{III} e TD_{IV} . Começa-se então com TD_I , observando-se que

$$\int d\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} = (2\pi)^3 \delta(\vec{r} - \vec{r}') , \tag{2.67}$$

o que leva a:

$$TD_I = -\frac{4\pi i\omega}{c^2} \sigma_{\alpha\beta}^o \int d\vec{r}' E_\beta(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') . \quad (2.68)$$

Levando-se em conta que

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^o = \delta_{\alpha\beta} + i\frac{4\pi}{\omega} \sigma_{\alpha\beta}^o , .$$

e integrando, (2.68) resulta em:

$$TD_I = \frac{\omega^2}{c^2} (\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^o) E_\beta(\vec{r}) . \quad (2.69)$$

Usando a condição de fraco amortecimento (2.44), pode-se escrever que:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^o = \varepsilon_{\alpha\beta}^{\prime} + i\mu\varepsilon_{\alpha\beta}^{\prime\prime} . \quad (2.70)$$

Considerando-se agora a expressão (2.45) e a expansão (2.56), (2.69) pode ser escrita na forma:

$$TD_I = \mu^0 TD_I^{(0)} + \mu TD_I^{(1)} + \mu^2 TD_I^{(2)} + \dots , \quad (2.71)$$

onde, até ordem dois em μ :

$$TD_I^{(0)} = e^{i\psi} \frac{\omega^2}{c^2} (\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^{\prime}) \hat{E}_{\beta 0} \quad (2.72)$$

$$TD_I^{(1)} = e^{i\psi} \frac{\omega^2}{c^2} \left[(\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^{\prime}) \hat{E}_{\beta 1} - i\varepsilon_{\alpha\beta}^{\prime\prime} \hat{E}_{\beta 0} \right] \quad (2.73)$$

$$TD_I^{(2)} = e^{i\psi} \frac{\omega^2}{c^2} \left[(\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^{\prime}) \hat{E}_{\beta 2} - i\varepsilon_{\alpha\beta}^{\prime\prime} \hat{E}_{\beta 1} \right] . \quad (2.74)$$

Um procedimento semelhante pode ser empregado para obter séries de potências de μ para TD_{II} , TD_{III} e TD_{IV} . Serão apresentados a seguir, apenas os resultados, omitindo-se a álgebra envolvida (*isto está feito em detalhe em [Ca190]*).

Para TD_{II} :

$$TD_{II}^{(0)} = 0 \quad (2.75)$$

$$TD_{II}^{(1)} = ie^{i\psi} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}'}{\partial k_i} \frac{\partial \hat{E}_{\beta o}}{\partial r_i} \quad (2.76)$$

$$TD_{II}^{(2)} = ie^{i\psi} \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}'}{\partial k_i} \frac{\partial \hat{E}_{\beta 1}}{\partial r_i} + i \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}''}{\partial k_i} \frac{\partial \hat{E}_{\beta o}}{\partial r_i} \right] \quad (2.77)$$

Para TD_{III} :

$$TD_{III}^{(0)} = 0 \quad (2.78)$$

$$TD_{III}^{(1)} = ie^{i\psi} \frac{\omega^2}{2c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\beta}'}{\partial k_i \partial k_k} \frac{\partial k_{ok}}{\partial r_i} \hat{E}_{\beta o} \quad (2.79)$$

$$TD_{III}^{(2)} = ie^{i\psi} \frac{\omega^2}{2c^2} \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\beta}'}{\partial k_i \partial k_k} \left[\frac{\partial k_{ok}}{\partial r_i} \hat{E}_{\beta o} - i \frac{\partial^2 \hat{E}_{\beta o}}{\partial r_i \partial r_k} \right] + i \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\beta}''}{\partial k_i \partial k_k} \frac{\partial k_{ok}}{\partial r_i} \hat{E}_{\beta o} \right\} \quad (2.80)$$

Para TD_{IV} :

$$TD_{IV}^{(0)} = 0 \quad (2.81)$$

$$TD_{IV}^{(1)} = 0 \quad (2.82)$$

$$TD_{IV}^{(2)} = e^{i\psi} \frac{\omega^2}{6c^2} \frac{\partial^3 \varepsilon_{\alpha\beta}'}{\partial k_i \partial k_l \partial k_k} \left[\frac{\partial k_{ok}}{\partial r_i} \frac{\partial \hat{E}_{\beta o}}{\partial r_l} + \frac{\partial k_{ol}}{\partial r_i} \frac{\partial \hat{E}_{\beta o}}{\partial r_k} + \frac{\partial k_{ol}}{\partial r_k} \frac{\partial \hat{E}_{\beta o}}{\partial r_i} + \frac{\partial^2 k_{ol}}{\partial r_i \partial r_k} \hat{E}_{\beta o} \right] \quad (2.83)$$

Escrevendo-se (2.50) como $TE = TD$, o que gera uma igualdade em cada ordem em μ , obtêm-se em ordem zero:

$$\left(k_{o\alpha} k_{o\beta} - k_o^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}' \right) \hat{E}_{\beta o} = 0, \quad (2.84)$$

que constitui na verdade um sistema homogêneo de três equações em três incógnitas, cuja condição de solubilidade é dada por

$$\det \left[k_{o\alpha} k_{o\beta} - k_o^2 \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}' \right] = 0, \quad (2.85)$$

que é formalmente a mesma relação de dispersão que em um meio homogêneo com $\varepsilon_{\alpha\beta}$ substituído por $\varepsilon_{\alpha\beta}'$. Em aproximação de primeira ordem resulta a equação:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} E_\beta^o \left[\frac{\partial k_{o\beta}}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial k_{o\alpha}}{\partial r_\beta} - 2 \frac{\partial k_{oi}}{\partial r_i} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{2c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\beta}'}{\partial k_i \partial k_k} \left(\frac{\partial k_{ok}}{\partial r_i} + \frac{\partial k_{oi}}{\partial r_k} \right) \right] \\ + i \frac{\partial E_\beta^o}{\partial r_i} \left(k_{o\beta} \delta_{i\alpha} + k_{o\alpha} \delta_{i\beta} - 2k_{oi} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}'}{\partial k_i} \right) \\ = i \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}'' E_\beta^o. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Multiplicando-se (2.86) por E_α^{o*} e combinando-se o resultado com a expressão complexo-conjugada desta, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_i} \left[E_\alpha^{o*} E_\beta^o \left(k_{o\beta} \delta_{i\alpha} + k_{o\alpha} \delta_{i\beta} - 2k_{oi} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}'}{\partial k_i} \right) \right] \\ = 2 \frac{\omega^2}{c^2} \left(\varepsilon_{\alpha\beta}'' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\beta}'}{\partial k_i \partial r_i} \right) E_\alpha^{o*} E_\beta^o. \end{aligned} \quad (2.87)$$

A equação (2.37) pode ser facilmente reescrita usando a relação $\vec{B} = \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E})$, resultando para a componente i do vetor de Poynting:

$$S_i = - \frac{c^2}{16\pi\omega} \left(k_{o\beta} \delta_{i\alpha} + k_{o\alpha} \delta_{i\beta} - 2k_{oi} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}'}{\partial k_i} \right) E_\alpha^{o*} E_\beta^o. \quad (2.88)$$

Nota-se então que o que foi obtido em (2.87) nada mais é do que uma equação de conservação de energia, semelhante à (2.36). O termo $\frac{\partial u}{\partial t}$ que aparece naquela equação não está presente aqui pelo fato de que naquela seção foi suposta uma variação temporal lenta na amplitude dos campos, da forma $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\eta\vec{r}, \eta t) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$, onde \vec{A} pode representar qualquer um dos campos. No presente cálculo foi suposto que os campos têm a forma $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t}$. Dessa forma a derivada $\frac{\partial(\vec{A}^* \cdot \vec{A})}{\partial t}$ é nula.

Escrevendo para um meio inhomogêneo, uma equação de conservação de energia formalmente idêntica à do meio homogêneo, levando em conta a não dependência temporal das amplitudes dos campos vem que

$$\nabla \cdot \vec{S} = -\frac{\omega}{8\pi} \varepsilon_{\alpha\beta}^{ef''} E_{\alpha}^{o*} E_{\beta}^o, \quad (2.89)$$

onde $\varepsilon_{\alpha\beta}^{ef''}$ é uma componente da parte anti-hermitiana de um tensor dielétrico efetivo, que com o auxílio de (2.87), vê-se que pode ser escrito a partir de $\varepsilon_{\alpha\beta}^o$ da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{ef} = \varepsilon_{\alpha\beta}^o + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^o}{\partial k_i \partial r_l}. \quad (2.90)$$

Dessa forma pode-se interpretar a equação (2.87) como uma equação de conservação de energia para um meio fracamente inhomogêneo que é formalmente idêntica à do meio homogêneo, desde que se troque $\varepsilon_{\alpha\beta}^o$ por $\varepsilon_{\alpha\beta}^{ef}$. Então, a quantidade $\varepsilon_{\alpha\beta}^{ef}$ deve substituir $\varepsilon_{\alpha\beta}^o$ na relação de dispersão (2.14), em aproximação de ordem um em μ , de modo que se possa usar (2.14) como relação de dispersão num meio fracamente inhomogêneo.

Com o uso de $\varepsilon_{\alpha\beta}^{ef}$, serão corretamente descritas a propagação e a absorção de ondas neste meio. Em ordens mais altas no parâmetro μ , podem ser obtidas equações de conservação de energia para cada ordem de μ , e em cada uma dessas ordens, é imposta uma lei de conservação de energia do tipo (2.89), obtendo-se um vetor de Poynting e uma forma geral para o tensor dielétrico efetivo. Em [BGI87] ela é obtida, resultando em

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{ef} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{\partial^{2n} \varepsilon_{\alpha\beta}^o}{\partial^n k_i \partial^n r_l}, \quad (2.91)$$

onde podem ser incluídas inhomogeneidades de maior ordem que em (2.90). Pode-se mostrar também que o tensor dielétrico efetivo é a transformada de Fourier do tensor dielétrico simetrizado geral que relaciona o deslocamento elétrico \vec{D} com o campo elétrico \vec{E} , através de

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' dt' \vec{\epsilon} \left[\frac{1}{2}(\vec{r} + \vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}' \right] \cdot \vec{E}(\vec{r}', t'), \quad (2.92)$$

A obtenção da expressão acima está feita em detalhe em [Ca190].

2.6 Conclusão

Para o estudo da propagação e absorção usando uma relação de dispersão do tipo (2.14) é fundamental se conhecer explicitamente as componentes do tensor dielétrico do meio, seja ele homogêneo ou não. Em todos os pontos desse capítulo elas aparecem em destaque. Em um meio homogêneo vale a relação de dispersão (2.14), e $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega)$ é a transformada de Fourier do tensor dielétrico do plasma, que relaciona o deslocamento elétrico com o campo elétrico através de

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' dt' \vec{\epsilon}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \cdot \vec{E}(\vec{r}', t'),$$

ou seja,

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega) .$$

Também foi mostrado que a parte anti-hermitiana do tensor dielétrico é a que responde pela absorção da energia de ondas em plasmas homogêneos, como mostra (2.39). No caso do meio localmente homogêneo, as equações obtidas para o meio homogêneo são válidas em cada ponto e o tensor dielétrico será formalmente idêntico ao do plasma homogêneo, com uma dependência apenas paramétrica na posição. Neste caso pode-se escrever em cada ponto:

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega, \vec{r}) = \vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega, \vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega, \vec{r}) .$$

Assim pode-se usar todas as equações obtidas para o meio homogêneo ponto a ponto. No caso de um meio fracamente inomogêneo, não se pode mais supor que as soluções de (2.7) sejam ondas planas, o que leva à conclusão de que não é mais possível usar (2.14) como relação de dispersão.

Entretanto, se ainda assim for utilizado o tensor na aproximação de ondas planas, ele não será o tensor dielétrico do plasma, já que não apresenta as qualificações para tal como, por exemplo, em relação à absorção, que não é mais devida unicamente à parte anti-hermitiana do tensor dielétrico.

Pode haver parte imaginária do vetor de onda mesmo quando a parte anti-hermitiana do tensor dielétrico é nula, o que indica que um meio inomogêneo não pode ser tratado na aproximação de ondas planas. Esta parte imaginária não representa verdadeira absorção, já que a última deveria estar ligada unicamente com a parte anti-hermitiana. Foi visto entretanto, que pode ser obtido um tensor dielétrico efetivo, impondo-se que este tensor efetivo obedeça uma lei de conservação de energia do tipo (2.89).

Mostrou-se que se pode usar uma relação de dispersão formalmente idêntica à (2.14), usando-se nela este tensor efetivo, de modo a descrever corretamente a propagação e absorção de ondas em plasmas fracamente inomogêneos. Mostrou-se ainda que o tensor efetivo é a transformada de Fourier de um tensor dielétrico simetrizado geral, o que pode ser visto a partir de (2.92). Resta então obter uma expressão para as componentes do tensor dielétrico efetivo, pois como foi dito no início desta seção, é fundamental conhecer explicitamente as componentes do tensor dielétrico do meio. Este será o objetivo principal do próximo capítulo.

Capítulo 3

As componentes do tensor dielétrico

3.1 Introdução

Como foi visto no capítulo anterior, é necessário que se obtenha explicitamente uma expressão para as componentes do tensor dielétrico, para que se possa fazer um estudo quantitativo da absorção de ondas em plasmas. A obtenção de uma expressão para as componentes do tensor dielétrico é o objetivo básico deste capítulo.

Inicialmente será obtido o tensor na aproximação local, e em seguida, os efeitos de inhomogeneidades fracas serão incluídos por meio de um procedimento que mantém termos devidos aos gradientes dos parâmetros que são inhomogêneos (*ver* [Mik67]). Serão expostas as expressões para as componentes do tensor dielétrico obtidas através dessa abordagem, e que estão em [CSZ89]. Além disso, serão discutidos brevemente alguns problemas e aspectos incorretos dessa abordagem. Por último, serão apresentadas expressões para as componentes do tensor dielétrico efetivo segundo o que é sugerido em [BGI87], como foi mostrado no capítulo anterior, e que foram obtidas também em [CSZ89]. Para que seja possível obter tais expressões, deve-se antes de mais nada fazer um modelo que descreva as características do meio. Dessa forma, pode-se fazer uma descrição estatística do mesmo usando-se a teoria cinética, como está exposto em [KT73], por exemplo. É neste ponto que será iniciado este capítulo.

É conveniente ressaltar que neste trabalho não serão estudados efeitos não lineares

em propagação e absorção de ondas em meios fracamente inhomogêneos.

3.2 Sistema de equações de Vlasov-Maxwell

Para que seja feita uma descrição estatística de um plasma é necessário definir uma função distribuição para as partículas que fazem parte dele. Uma descrição completa do mesmo exigiria o conhecimento de uma função distribuição que dependesse das coordenadas e momenta de todas as partículas. Esta função distribuição incluiria todas as ordens de correlação entre as partículas, ou seja, levaria em conta as interações entre elas. Entretanto é impossível, na prática, trabalhar com tal distribuição. O que se faz é trabalhar com uma distribuição reduzida, que pode ser obtida da completa por integração nas coordenadas e momenta de uma ou mais partículas. Pode-se mostrar que as distribuições reduzidas obedecem a uma cadeia de equações onde a distribuição reduzida para n partículas aparece na equação para a distribuição para $n - 1$ partículas. É possível mostrar (ver [KT73]) que na maioria dos casos, pode-se desprezar as correlações entre as partículas, sendo a equação cinética de ordem zero sem termo de colisões (conhecida como equação de Vlasov), uma boa aproximação do problema.

No presente trabalho, serão incluídos efeitos relativísticos na absorção, sendo necessária a utilização da equação de Vlasov relativística, que tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{m_\alpha \gamma_\alpha} \vec{p} \cdot \nabla_{\vec{x}} f_\alpha + q_\alpha \left(\vec{E} + \frac{1}{m_\alpha \gamma_\alpha c} \vec{p} \times \vec{B} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_\alpha = 0 ,$$

onde $\gamma_\alpha = \left(1 + \frac{p^2}{m_\alpha^2 c^2} \right)^{1/2}$ é o fator relativístico, $\vec{p} = m_\alpha \gamma_\alpha \vec{v}$ é o momentum e f_α é a função distribuição das partículas de espécie α , definida de forma que

$$\int f_\alpha(\vec{x}, \vec{p}, t) d\vec{p} = n_\alpha(\vec{x}, t) ,$$

sendo $n_\alpha(\vec{x}, t)$ o número de partículas do tipo α por unidade de volume na posição \vec{x} e no tempo t . Considerar-se-á aqui, um sistema de coordenadas tal que o campo magnético

externo está apontando na direção z , e que todas as inomogeneidades estão na direção x . Sendo o plasma constituído somente por um tipo de íons e elétrons, e sendo a massa dos íons muito maior do que a massa dos elétrons, enquanto os elétrons giram rapidamente em torno das linhas de campo (*devido à presença do campo magnético externo*), os íons giram vagarosamente em torno dessas mesmas linhas. Ou seja, a frequência Ω_e com que os elétrons giram em torno das linhas de campo (*frequência de cíclotron dos elétrons*), é muito maior do que a dos íons. Então, em um intervalo de tempo da ordem de Ω_e^{-1} , pode-se considerar que os íons permaneceram em repouso, enquanto os elétrons se moveram apreciavelmente. Como o trabalho será feito para frequências da ordem da frequência de cíclotron dos elétrons, pode-se desconsiderar o movimento dos íons. Diz-se nessas condições que os íons formam um *background*, ou seja, um "pano de fundo" ou "meio ambiente" para o movimento dos elétrons. Com a inclusão das equações de Maxwell, forma-se um sistema de equações que deve ser resolvido de forma auto-consistente, dado por:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{1}{m_e \gamma_e} \vec{p} \cdot \nabla_{\vec{x}} f_e - e \left(\vec{E} + \frac{1}{m_e \gamma_e c} \vec{p} \times \vec{B} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_e = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -4\pi e \left(\int f_e d\vec{p} - n_i \right) \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi e}{m_e c} \int \frac{\vec{p}}{\gamma_e} f_e d\vec{p}, \quad (3.5)$$

onde e é a magnitude da carga, m_e a massa e f_e a função distribuição eletrônicas.

Convém lembrar que $\rho_e(\vec{x}, t) = -\int e f_e d\vec{p}$ e $\vec{J}_e(\vec{x}, t) = -\int e \vec{v} f_e d\vec{p} = -\frac{1}{m_e c} \int e \frac{\vec{p}}{\gamma_e} f_e d\vec{p}$ são respectivamente as densidades de carga e corrente de elétrons. Este sistema de equações é não linear, mas não se trabalhará com as equações da maneira como elas estão. Uma maneira de tratar esse sistema, é linearizar as grandezas envolvidas, supondo pequena variação das mesmas em relação ao equilíbrio, da seguinte forma:

$$f_e = f_{e0} + \varepsilon f_{e1}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \varepsilon \vec{E}_1$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \varepsilon \vec{B}_1$$

Nas equações acima o índice "zero" indica as grandezas no equilíbrio e o índice "um", as grandezas perturbadas. O movimento dos elétrons devido à agitação térmica e à presença do campo magnético externo, gera um campo magnético que associado ao campo elétrico devido à presença de íons e outros elétrons, perturba o movimento e conseqüentemente a função distribuição dos mesmos. O parâmetro adimensional ε é tal que $\varepsilon \ll 1$, e será usado para separar as equações em suas diferentes ordens de grandeza ($\varepsilon^0, \varepsilon^1$). No equilíbrio, a escolha das grandezas de origem externa ao plasma é arbitrária, desde que estas satisfaçam as equações em ordem zero:

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} + \frac{1}{m_e \gamma_e} \vec{p} \cdot \nabla_{\vec{x}} f_{e0} - e \left(\vec{E}_0 \frac{1}{m_e \gamma_e c} \vec{p} \times \vec{B}_0 \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{e0} = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_0 = -4\pi e (n_{e0} - n_{i0}) \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \vec{E}_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} \quad (3.9)$$

$$\nabla \times \vec{B}_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} - \underbrace{\frac{4\pi e}{m_e c} \int \frac{\vec{p}}{\gamma_e} f_{e0} d\vec{p}}_{\vec{J}_{e0}} + \underbrace{\frac{4\pi e}{m_i c} \int \frac{\vec{p}}{\gamma_i} f_{i0} d\vec{p}}_{\vec{J}_{i0}} \quad (3.10)$$

Pode-se escolher então $|\vec{E}_0| = 0$ e $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$, o que força a que no equilíbrio $n_{e0} = n_{i0}$ e, havendo deriva de íons, $\vec{J}_{e0} + \vec{J}_{i0} = 0$. Embora os íons não sejam incluídos na relação de dispersão pelos motivos já citados anteriormente, eles contribuem na densidade de corrente no equilíbrio, de modo a cancelar a densidade de corrente dos elétrons. Substituindo estas escolhas nas equações (3.1) a (3.5), resulta:

Em ordem ε^0 :

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} + \frac{1}{m_e \gamma_e} \vec{p} \cdot \nabla_{\vec{x}} f_{e0} - \frac{e}{m_e \gamma_e c} (\vec{p} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{e0} = 0 \quad (3.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (3.12)$$

$$\nabla \times \vec{B}_0 = 0 \quad (3.13)$$

Em ordem ϵ^1 :

$$\frac{\partial f_{e1}}{\partial t} + \frac{1}{m_e \gamma_e} \vec{p} \cdot \nabla_{\vec{x}} f_{e1} - \frac{e}{m_e \gamma_e c} (\vec{p} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{e1} = e \left(\vec{E}_1 + \frac{1}{m_e \gamma_e c} \vec{p} \times \vec{B}_1 \right) \cdot \nabla_{\vec{p}} f_{e0} \quad (3.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = -4\pi e \int f_{e1} d\vec{p} \quad (3.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (3.16)$$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \quad (3.17)$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} - \frac{4\pi e}{m_e c} \int \frac{\vec{p}}{\gamma_e} f_{e1} d\vec{p} \quad (3.18)$$

3.3 Método das características para a solução da equação para f_{e1}

3.3.1 Solução da equação para f_{e0}

O método das características consiste em resolver uma dada equação diferencial parcial em cima de uma curva chamada *curva característica*. Nestas curvas as equações a derivadas parciais se transformam em equações a derivadas totais. Vai ser mostrado que, se as trajetórias não perturbadas das partículas forem as curvas características¹, as equações para f_{e0} e f_{e1} se transformarão em equações a derivadas totais em relação ao tempo, permitindo assim resolver (3.11) e (3.14) por integração direta. Sabe-se que as equações para as órbitas das partículas sob a ação dos campos externos são dadas por:

¹Neste caso, são curvas no espaço de fase (\vec{x}, \vec{p}) .

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'} = \vec{v}' = \frac{\vec{p}'}{m_e \gamma_{e'}} \quad (3.19)$$

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = -\frac{e}{m_e \gamma_{e'} c} \vec{p}' \times \vec{B}_0, \quad (3.20)$$

devendo ser satisfeitas as condições $\vec{x}'(t' = t) = \vec{x}$ e $\vec{p}'(t' = t) = \vec{p}$. A derivada total de f_{eo} em relação a t' , é:

$$\frac{df_{eo}}{dt'} = \frac{\partial f_{eo}}{\partial t'} + \frac{d\vec{x}'}{dt'} \cdot \nabla_{\vec{x}'} f_{eo} + \frac{d\vec{p}'}{dt'} \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{eo} .$$

Sobre as trajetórias não perturbadas, podemos escrever que:

$$\frac{df_{eo}}{dt'} = \frac{\partial f_{eo}}{\partial t'} + \frac{\vec{p}'}{m_e \gamma_{e'}} \cdot \nabla_{\vec{x}'} f_{eo} - \frac{e}{m_e \gamma_{e'} c} (\vec{p}' \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{eo} .$$

Comparando a equação acima com a equação (3.11), vê-se que esta se reduz a $\frac{df_{eo}}{dt'} = 0$ sobre as curvas características, definidas pelas equações (3.19) e (3.20). Dessa forma nota-se que a distribuição não perturbada deve ser uma função arbitrária das constantes de movimento do sistema de equações composto por (3.19) e (3.20). Mais adiante, estas constantes de movimento serão obtidas.

3.3.2 Solução da equação para f_{e1}

Sabendo que f_{eo} é uma função arbitrária das constantes de movimento do conjunto de equações que descrevem as órbitas não perturbadas das partículas, resta agora solucionar a equação para f_{e1} através do mesmo procedimento adotado no estudo da equação para f_{eo} . Resulta que a derivada total da f_{e1} em relação a t' é:

$$\frac{df_{e1}}{dt'} = \frac{\partial f_{e1}}{\partial t'} + \frac{d\vec{x}'}{dt'} \cdot \nabla_{\vec{x}'} f_{e1} + \frac{d\vec{p}'}{dt'} \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{e1} . \quad (3.21)$$

Usando as equações das características:

$$\frac{df_{e1}}{dt'} = \frac{\partial f_{e1}}{\partial t'} + \frac{\vec{p}'}{m_e \gamma_{e'}'} \cdot \nabla_{\vec{x}'} f_{e1} - \frac{e}{m_e \gamma_{e'}' c} (\vec{p}' \times \vec{B}_0) \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{e1} \quad (3.22)$$

Comparando-se com a equação (3.14) obtém-se

$$\frac{df_{e1}}{dt'} = e \left(\vec{E}'_1 + \frac{1}{m_e \gamma_{e'}' c} \vec{p}' \times \vec{B}'_1 \right) \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{e0}, \quad (3.23)$$

onde $\vec{E}'_1 = \vec{E}_1(\vec{x}', t')$ e $\vec{B}'_1 = \vec{B}_1(\vec{x}', t')$. Integrando-se ambos os membros dessa equação em t' , de $-\infty$ a t , sabendo que $f_{e1}[\vec{x}'(-\infty), \vec{p}'(-\infty), t' = -\infty] = 0$ e $f_{e1}[\vec{x}'(t), \vec{p}'(t), t' = t] = f_{e1}(\vec{x}, \vec{p}, t)$, resulta:

$$f_{e1}(\vec{x}, \vec{p}, t) = e \int_{-\infty}^t \left(\vec{E}'_1 + \frac{1}{m_e \gamma_{e'}' c} \vec{p}' \times \vec{B}'_1 \right) \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{e0}(\vec{x}', \vec{p}', t') dt' \quad (3.24)$$

Tomando-se as componentes de Fourier das grandezas envolvidas:

$$\vec{E}_1(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.25)$$

$$\vec{B}_1(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.26)$$

$$f_{e1}(\vec{x}, \vec{p}, t) = f(\vec{k}, \omega, \vec{p}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3.27)$$

Substituindo-se na equação (3.24) as equações (3.25), (3.26) e (3.27), obtém-se:

$$f_{\mathcal{K}}(\vec{p}) = e \int_{-\infty}^0 \left(\vec{E}_{\mathcal{K}} + \frac{\vec{p}'}{m_e \gamma_{e'}' c} \times \vec{B}_{\mathcal{K}} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{e0}(\vec{x}', \vec{p}', t') e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \tau)} d\tau, \quad (3.28)$$

onde $\mathcal{K} = (\vec{k}, \omega)$, $\vec{r} = \vec{x}' - \vec{x}$ e $\tau = t' - t$. Da equação (3.17) pode-se mostrar que:

$$\vec{B}_{\mathcal{K}} = \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_{\mathcal{K}}) \quad .$$

Dessa forma:

$$\left(\vec{E}_{\mathcal{K}} + \frac{\vec{p}'}{m_e \gamma_{e'}' c} \times \vec{B}_{\mathcal{K}} \right) \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{e0}(\vec{x}', \vec{p}', t') = \left[\left(1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{m_e \gamma_{e'}' \omega} \right) \nabla_{\vec{p}'} f_{e0} + \frac{(\vec{k} \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{e0})}{m_e \gamma_{e'}' \omega} \vec{p}' \right] \cdot \vec{E}_{\mathcal{K}} \quad (3.29)$$

Então:

$$f_{\mathcal{K}}(\vec{p}) = e\vec{A} \cdot \vec{E}_{\mathcal{K}}, \quad (3.30)$$

onde:

$$\vec{A} = \int_{-\infty}^0 \left[\left(1 - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{k}}{m_e \gamma_e' \omega} \right) \nabla_{\vec{p}'} f_{e0} + \frac{(\vec{k} \cdot \nabla_{\vec{p}'} f_{e0})}{m_e \gamma_e' \omega} \vec{p}' \right] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \tau)} d\tau. \quad (3.31)$$

O próximo passo será justamente obter essas constantes de movimento, usando-se o fato de que o campo magnético externo \vec{B}_0 é uniforme e aponta na direção z .

3.3.3 Obtenção das constantes de movimento das equações que descrevem as órbitas não perturbadas das partículas

As constantes de movimento podem ser obtidas da equação de movimento (3.20), como segue. Existem três equações a tratar, uma para cada componente. São elas: $\frac{dp_x}{dt} = \frac{\Omega_e}{\gamma_e} p_y$, $\frac{dp_y}{dt} = -\frac{\Omega_e}{\gamma_e} p_x$ e $\frac{dp_z}{dt} = 0$, onde $\Omega_e = -\frac{eB_0}{m_e c}$ é a frequência de ciclotron dos elétrons. Trabalhando com elas, obtém-se:

$$\frac{dp_z}{dt} = 0 \Rightarrow p_z = p_{||} = cte.$$

Também:

$$dt = \frac{dp_x}{\frac{\Omega_e}{\gamma_e} p_y} = -\frac{dp_y}{\frac{\Omega_e}{\gamma_e} p_x} \Rightarrow p_x dp_x + p_y dp_y = 0.$$

Dessa forma:

$$\frac{1}{2} d(p_x^2 + p_y^2) = 0 \Rightarrow dp_{\perp} = 0 \Rightarrow p_{\perp} = cte; p_{\perp}^2 \equiv p_x^2 + p_y^2.$$

Como o fator relativístico $\gamma_e = \left(1 + \frac{p_{\perp}^2 + p_{||}^2}{m_e^2 c^2} \right)^{1/2}$ é função de p_{\perp} e $p_{||}$, conclui-se que ele também é uma constante de movimento. Além disso:

$$p_x = m_e \gamma_e v_x = m_e \gamma_e \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = m_e \gamma_e \frac{dx}{p_x} .$$

Com a equação para p_y :

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{\Omega_e}{\gamma_e} p_x \Rightarrow dt = -\frac{\gamma_e}{\Omega_e} \frac{dp_y}{p_x} .$$

Eliminando-se dt nas duas equações anteriores, obtém-se que:

$$m_e \Omega_e dx = -dp_y .$$

Integrando-se ambos os membros em x , lembrando que o campo magnético externo é constante (*de modo que Ω_e não depende de x*), resulta:

$$x = -\frac{p_y}{m_e \Omega_e} + cte .$$

Definindo $\mathcal{X}_e = x + \frac{p_y}{m_e \Omega_e}$, obtém-se que \mathcal{X}_e será também uma constante de movimento. Por procedimento análogo, pode-se mostrar que $\mathcal{Y}_e = y - \frac{p_x}{m_e \Omega_e}$ também o é. Será visto mais adiante, quando forem resolvidas as equações para as órbitas não perturbadas das partículas, que \mathcal{X}_e e \mathcal{Y}_e são as coordenadas do centro de guia².

3.4 Cálculo das componentes do tensor dielétrico

Como já foi dito, a distribuição não perturbada dos elétrons é uma função arbitrária das constantes de movimento das equações que descrevem as órbitas não perturbadas das partículas. Supondo-se que os gradientes das inomogeneidades estejam todos na direção x , f_{e0} será escrita de agora em diante como $f_{e0} = F_e(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_e)$.

É conveniente também, escrever os gradientes $\nabla_{\vec{p}'}$ e $\nabla_{\vec{x}'}$ em termos dessas novas variáveis. Escreve-se o vetor de onda \vec{k} como:

²As partículas descrevem órbitas com projeções circulares no plano xy , cujo centro é chamado centro de guia. São as coordenadas do centro de guia que são constantes no tempo.

$$\vec{k} = (k_{\perp} \cos \psi, k_{\perp} \sin \psi, k_{\parallel}), \quad (3.32)$$

onde ψ é o ângulo entre a direção de \vec{k}_{\perp} e a direção x , podendo ser calculado por $\psi = \arctg\left(\frac{k_y}{k_x}\right)$, como mostra a figura (3.1). São obtidas então expressões para $\nabla_{\vec{p}'}$ e $\vec{k} \cdot \nabla_{\vec{p}'}$ em termos das constantes de movimento:

$$\nabla_{\vec{p}'} = \frac{p_x'}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \vec{e}_x + \left(\frac{p_y'}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{1}{m_e \Omega_e} \frac{\partial}{\partial \mathcal{X}_e} \right) \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \vec{e}_z \quad (3.33)$$

$$\vec{k} \cdot \nabla_{\vec{p}'} = \frac{k_{\perp} \cos \psi p_x'}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + k_{\perp} \sin \psi \left(\frac{p_y'}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} + \frac{1}{m_e \Omega_e} \frac{\partial}{\partial \mathcal{X}_e} \right) + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \quad (3.34)$$

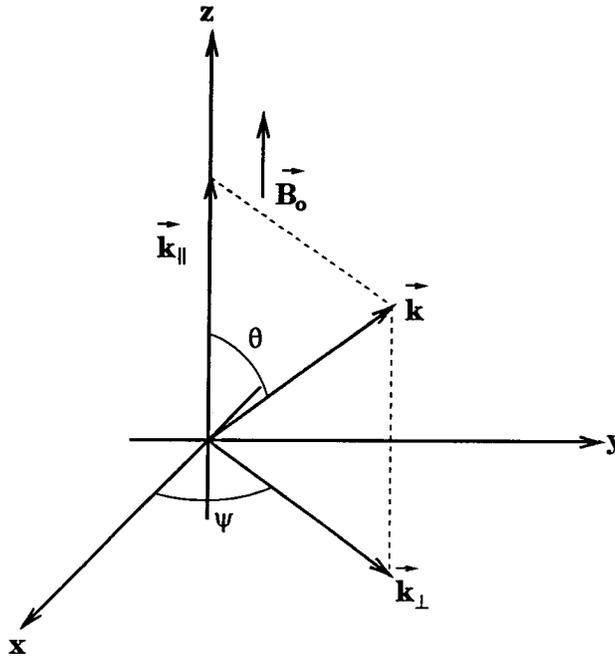


FIGURA 3.1: Geometria adotada neste trabalho. O campo magnético \vec{B}_0 aponta na direção z e as inhomogeneidades estão todas na direção x .

A aplicação das equações (3.33) e (3.34) a F_e , com a substituição do resultado em (3.31), leva à obtenção das seguintes expressões:

$$A_x = \frac{1}{p_{\perp}} \left[\varphi_0(F_e) + \frac{b \sin \psi}{m_e \gamma_e \omega} \frac{\partial F_e}{\partial \mathcal{X}_e} \right] I_x \quad (3.35)$$

$$A_y = \frac{\varphi_o(F_e)}{p_\perp} I_y + \frac{\partial F_e}{\partial \mathcal{X}_e} \left[\left(\frac{1}{m_e \Omega_e} - \frac{k_\parallel p_\parallel}{m_e^2 \gamma_e \omega \Omega_e} \right) I - \frac{b \cos \psi}{m_e \gamma_e \omega p_\perp} I_x \right] \quad (3.36)$$

$$A_z = \frac{k_\perp}{m_e \gamma_e \omega} \frac{\mathcal{L}(F_e)}{p_\perp} (I_x \cos \psi + I_y \sin \psi) + \left(\frac{\partial F_e}{\partial p_\parallel} + \frac{p_\parallel}{p_\perp} \frac{b \sin \psi}{m_e \gamma_e \omega} \frac{\partial F_e}{\partial \mathcal{X}_e} \right) I, \quad (3.37)$$

onde:

$$b = \frac{k_\perp p_\perp}{m_e \Omega_e} \quad (3.38)$$

$$\varphi_o(F_e) = \frac{\partial F_e}{\partial p_\perp} - \frac{k_\parallel}{m_e \gamma_e \omega} \mathcal{L}(F_e) \quad (3.39)$$

$$\mathcal{L}(F_e) = p_\parallel \frac{\partial F_e}{\partial p_\perp} - p_\perp \frac{\partial F_e}{\partial p_\parallel} \quad (3.40)$$

$$I_x = \int_{-\infty}^0 p_x' e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \tau)} d\tau \quad (3.41)$$

$$I_y = \int_{-\infty}^0 p_y' e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \tau)} d\tau \quad (3.42)$$

$$I = \int_{-\infty}^0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \tau)} d\tau \quad (3.43)$$

O termo de derivada de F_e em relação a \mathcal{X}_e não é levado em conta quando se calcula o tensor dielétrico na aproximação localmente homogênea, mas será mantido nas expressões subseqüentes por ser este necessário quando o meio é inomogêneo. Além disso, na aproximação local, a função distribuição depende de x , e não de \mathcal{X}_e , como será visto na próxima seção.

3.4.1 Solução das equações que descrevem as órbitas não perturbadas das partículas

O cálculo das componentes do vetor \vec{A} deve ser feito sobre a trajetória não perturbada das partículas. Deve-se então obter explicitamente a forma dessas órbitas. Escrevendo a equação (3.20), componente a componente, vem que:

$$\frac{dp_x'}{dt'} = \frac{\Omega_e}{\gamma_e} p_y' \quad (3.44)$$

$$\frac{dp_y'}{dt'} = -\frac{\Omega_e}{\gamma_e} p_x' \quad (3.45)$$

$$\frac{dp_z'}{dt'} = 0, \quad (3.46)$$

onde devem ser satisfeitas as condições:

$$p_i'(t' = t) = p_i \quad (i = x, y, z) .$$

Sabe-se também que:

$$\gamma_e' = \gamma_e \Rightarrow \text{constante no tempo} .$$

A solução de (3.46) pode ser escrita como $p_z' = p_{||}$. Multiplicando-se (3.45) pelo número imaginário i e somando-se com (3.44), obtém-se:

$$\frac{d}{dt'}(p_x' + ip_y') = -i \frac{\Omega_e}{\gamma_e} (p_x' + ip_y') . \quad (3.47)$$

Definindo $P' = (p_x' + ip_y')$ vem que:

$$\frac{dP'}{dt'} = -i \frac{\Omega_e}{\gamma_e} P' , \quad (3.48)$$

com a condição $P'(t' = t) = P$. Obtém-se então:

$$P' = P e^{-i \frac{\Omega_e}{\gamma_e} \tau} . \quad (3.49)$$

Sabendo-se que $P = p_x + ip_y$ e que $p_x = p_{\perp} \cos \phi$ e $p_y = p_{\perp} \sin \phi$, onde ϕ é o ângulo entre \vec{p}_{\perp} e a direção x , chega-se à seguinte expressão:

$$P' = p_{\perp} e^{i(\phi - \frac{\Omega_e}{\gamma_e} \tau)} . \quad (3.50)$$

Logo, pode-se escrever que:

$$p_x' = p_{\perp} \cos(\phi - \frac{\Omega_e}{\gamma_e} \tau) \quad (3.51)$$

$$p_y' = p_{\perp} \text{sen}\left(\phi - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right) \quad (3.52)$$

$$p_z' = p_{\parallel} \quad (3.53)$$

Reescrevendo-se (3.19) componente a componente:

$$\frac{dx'}{d\tau} = \frac{p_x'}{m_e \gamma_e} \quad (3.54)$$

$$\frac{dy'}{d\tau} = \frac{p_y'}{m_e \gamma_e} \quad (3.55)$$

$$\frac{dz'}{d\tau} = \frac{p_{\parallel}}{m_e \gamma_e} \quad (3.56)$$

Integrando-se em τ todas as expressões acima, lembrando que $\vec{x}'(\tau = 0) = \vec{x}$, resulta que:

$$x' - x = -\frac{p_{\perp}}{m_e \Omega_e} \left[\text{sen}\left(\phi - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right) - \text{sen}\phi \right] \quad (3.57)$$

$$y' - y = \frac{p_{\perp}}{m_e \Omega_e} \left[\text{cos}\left(\phi - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right) - \text{cos}\phi \right] \quad (3.58)$$

$$z' - z = \frac{p_{\parallel}}{m_e \gamma_e} \tau \quad (3.59)$$

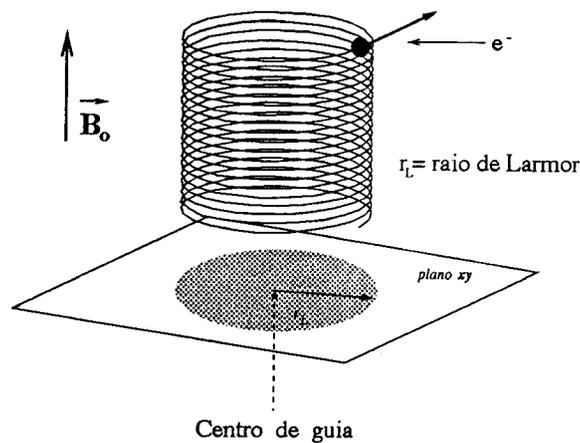


FIGURA 3.2: Hélice cilíndrica.

Para enxergar melhor a forma da órbita das partículas, convém lembrar que a

equação de uma circunferência de raio R com centro em (x_o, y_o) é $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$.

Reescreve-se então as equações para $x' - x$ e $y' - y$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x' - x &= \frac{p_{\perp} \operatorname{sen}\left(\phi - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right)}{m_e \Omega_e} + \frac{p_y}{m_e \Omega_e} \\ y' - y &= \frac{p_{\perp} \operatorname{cos}\left(\phi - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right)}{m_e \Omega_e} - \frac{p_x}{m_e \Omega_e} \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} x' - \left(x + \frac{p_y}{m_e \Omega_e}\right) &= \frac{p_{\perp} \operatorname{sen}\left(\phi - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right)}{m_e \Omega_e} \\ y' - \left(y - \frac{p_x}{m_e \Omega_e}\right) &= \frac{p_{\perp} \operatorname{cos}\left(\phi - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right)}{m_e \Omega_e} \end{aligned}$$

O que implica em:

$$\left[x' - \underbrace{\left(x + \frac{p_y}{m_e \Omega_e}\right)}_{\mathcal{X}_e} \right]^2 + \left[y' - \underbrace{\left(y - \frac{p_x}{m_e \Omega_e}\right)}_{\mathcal{Y}_e} \right]^2 = \underbrace{\left(\frac{p_{\perp}}{m_e \Omega_e}\right)^2}_{R^2}$$

Com a equação acima fica fácil ver que a trajetória das partículas no plano xy é uma circunferência com centro em $(\mathcal{X}_e, \mathcal{Y}_e)$ (que são as coordenadas do centro de guia) com raio $r_L = \left|\frac{p_{\perp}}{m_e \Omega_e}\right|$, que é o raio de Larmor dos elétrons. Como $z' - z$ varia linearmente com τ , a trajetória no espaço tridimensional é uma hélice cilíndrica, como se vê na figura 3.2. A quantidade $|\Omega_e|$ é a frequência com que os elétrons giram ao redor do centro de guia. Como já foi demonstrado anteriormente, as coordenadas do centro de guia são constantes no tempo. Com a solução das equações características obtidas, é possível começar o cálculo das componentes do vetor \vec{A} .

3.4.2 Uso das curvas características no cálculo das componentes do tensor dielétrico

Para que seja possível calcular as componentes do vetor \vec{A} , é necessário antes de mais nada, reescrever I_x , I_y e I usando-se as soluções para as órbitas não perturbadas das

partículas. O cálculo será feito para a integral I_x , sendo as outras integrais obtidas de maneira análoga.

Cálculo de I_x :

$$I_x = \int_{-\infty}^0 p_x' e^{i[k_{\perp} \cos \psi (x'-x) + k_{\perp} \sin \psi (y'-y) + k_{\parallel} (z'-z) - \omega \tau]} d\tau \quad (3.60)$$

Para resolver esta integral sobre as curvas características, substituem-se $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ e p_x' , pelas expressões que definem as órbitas não perturbadas das partículas. Usando-se a expressão para p_x' e as expressões (3.57) a (3.59) em (3.60), resultará que:

$$I_x = e^{ib \sin(\phi - \psi)} p_{\perp} \left\{ \cos \psi \int_{-\infty}^0 \cos\left[(\phi - \psi) - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right] e^{-ib \sin\left[(\phi - \psi) - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right]} e^{i\left(\frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e \gamma_e} - \omega\right)\tau} d\tau - \sin \psi \int_{-\infty}^0 \sin\left[(\phi - \psi) - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right] e^{-ib \sin\left[(\phi - \psi) - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right]} e^{i\left(\frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e \gamma_e} - \omega\right)\tau} d\tau \right\} \quad (3.61)$$

Serão usadas as relações ([AS70])

$$\cos\left[(\phi - \psi) - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right] e^{-ib \sin\left[(\phi - \psi) - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right]} = -\frac{1}{b} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(-b) e^{in\left[(\phi - \psi) - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right]} \quad (3.62)$$

$$\sin\left[(\phi - \psi) - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right] e^{-ib \sin\left[(\phi - \psi) - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right]} = -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n'(-b) e^{in\left[(\phi - \psi) - \frac{\Omega_e \tau}{\gamma_e}\right]} \quad (3.63)$$

$$e^{ib \sin(\phi - \psi)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(b) e^{in(\phi - \psi)}, \quad (3.64)$$

onde $J_n(b)$ e $J_n'(b)$ são respectivamente a função de Bessel de ordem n e sua derivada, calculadas no argumento b . Colocando-se (3.62) e (3.63) em (3.61), vem que:

$$I_x = p_{\perp} \left[-\frac{\cos \psi}{b} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_m(b) J_n(-b) e^{i(m+n)\phi} e^{-i(m+n)\psi} + i \sin \psi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_m(b) J_n'(-b) e^{i(m+n)\phi} e^{-i(m+n)\psi} \right] \times \int_{-\infty}^0 e^{i\left(\frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e \gamma_e} - \omega - \frac{n \Omega_e}{\gamma_e}\right)\tau} d\tau \quad (3.65)$$

A integral que aparece em (3.65) deve ser resolvida supondo-se que a frequência ω tem uma pequena parte imaginária positiva, como prevê o contorno de Landau ([KT73], [Akh67]). Dessa forma:

$$\int_{-\infty}^0 e^{i\left(\frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e \gamma_e} - \omega - \frac{n\Omega_e}{\gamma_e}\right)\tau} d\tau = -i \frac{\gamma_e}{\omega} \frac{1}{\gamma_e - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e \omega} + \frac{n\Omega_e}{\omega}}. \quad (3.66)$$

Colocando-se (3.66) em (3.65), fazendo-se nas somas em n a troca $n \rightarrow -n$ e lembrando que $(-1)^n J_{-n}(b) = J_n(b)$ e $J'_{-n}(b) = (-1)^n J'_n(b)$ chega-se a:

$$\begin{aligned} I_x = & i \frac{\gamma_e p_{\perp} \cos \psi}{\omega b} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n J_m(b) J_n(b) e^{i(m-n)\phi} e^{-i(m-n)\psi}}{D_{ne}} \\ & + \frac{\gamma_e p_{\perp} \sin \psi}{\omega} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_m(b) J'_n(b) e^{i(m-n)\phi} e^{-i(m-n)\psi}}{D_{ne}}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

sendo nas expressões acima $D_{ne} = \gamma_e - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e \omega} - \frac{n\Omega_e}{\omega}$. Como já foi dito, o procedimento para calcular as integrais I_y e I é análogo ao adotado para calcular a integral I_x , fazendo-se a ressalva de que na obtenção de suas expressões, deve-se usar a expressão (3.64). Obtêm-se o seguinte:

$$\begin{aligned} I_y = & i \frac{\gamma_e p_{\perp} \sin \psi}{\omega b} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n J_m(b) J_n(b) e^{i(m-n)\phi} e^{-i(m-n)\psi}}{D_{ne}} \\ & - \frac{\gamma_e p_{\perp} \cos \psi}{\omega} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_m(b) J'_n(b) e^{i(m-n)\phi} e^{-i(m-n)\psi}}{D_{ne}} \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$I = i \frac{\gamma_e}{\omega} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_m(b) J_n(b) e^{i(m-n)\phi} e^{-i(m-n)\psi}}{D_{ne}}. \quad (3.69)$$

3.4.3 Expressões gerais para as componentes do tensor dielétrico

Para calcular as componentes do vetor \vec{A} , é necessário colocar nas expressões para as suas componentes, as expressões para as integrais I_x , I_y e I . Substituindo-se (3.67) a (3.69) em (3.35), (3.36) e (3.37) e fazendo algumas manipulações, são obtidas as expressões:

$$\begin{aligned}
 A_x = & \frac{\gamma_e}{\omega} \left[\varphi_o(F_e) + \frac{b \operatorname{sen} \psi}{m_e \gamma_e \omega} \frac{\partial F_e}{\partial \mathcal{X}_e} \right] \left[\operatorname{sen} \psi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_m(b) J'_n(b) e^{i(m-n)\phi} e^{-i(m-n)\psi}}{D_{ne}} \right. \\
 & \left. + \frac{i}{b} \operatorname{cos} \psi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n J_m(b) J_n(b) e^{i(m-n)\phi} e^{-i(m-n)\psi}}{D_{ne}} \right] \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_y = & -\frac{\gamma_e}{\omega} \left[\varphi_o(F_e) + \frac{b \operatorname{sen} \psi}{m_e \gamma_e \omega} \frac{\partial F_e}{\partial \mathcal{X}_e} \right] \left[\operatorname{cos} \psi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_m(b) J'_n(b) e^{i(m-n)\phi} e^{-i(m-n)\psi}}{D_{ne}} \right. \\
 & \left. - \frac{i}{b} \operatorname{sen} \psi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n J_m(b) J_n(b) e^{i(m-n)\phi} e^{-i(m-n)\psi}}{D_{ne}} \right] \\
 & + \frac{i}{\omega} \frac{\partial F_e}{\partial \mathcal{X}_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_m(b) J_n(b) e^{i(m-n)\phi} e^{-i(m-n)\psi}}{m_e \Omega_e} \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_z = & i \frac{\gamma_e}{\omega} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \varphi_o(F_e) - \frac{D_{ne}}{\gamma_e p_{\perp}} \mathcal{L}(F_e) + \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \frac{b \operatorname{sen} \psi}{m_e \gamma_e \omega} \frac{\partial F_e}{\partial \mathcal{X}_e} \right] \right. \\
 & \left. \times \frac{J_m(b) J_n(b) e^{i(m-n)\phi} e^{-i(m-n)\psi}}{D_{ne}} \right\} . \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

As expressões obtidas acima são de extrema importância no que se refere ao cálculo das componentes do tensor dielétrico. Inicialmente, será obtida uma relação entre essas expressões e a transformada de Fourier das componentes do tensor dielétrico, na aproximação local.

Com as expressões para as componentes do vetor \vec{A} calculadas, será visto agora como obter a transformada de Fourier das componentes do tensor dielétrico $\vec{\epsilon}_{\mathcal{K}}$ na aproximação localmente homogênea, a partir das componentes do vetor \vec{A} . Para isso, será necessário usar as seguintes relações³:

$$\vec{J}_e(\vec{x}, t) = -\frac{e}{m_e} \int \frac{\vec{p}}{\gamma_e} f_e(\vec{x}, \vec{p}, t) d\vec{p} \quad (3.73)$$

$$\vec{J}_{e\mathcal{K}} = -\frac{e}{m_e} \int \frac{\vec{p}}{\gamma_e} f_{\mathcal{K}} d\vec{p} . \quad (3.74)$$

Sabe-se que a lei de Ohm linear para um meio homogêneo, pode ser expressa por (2.8). Reescrevendo (2.8):

³Aqui entende-se o índice \mathcal{K} como um indicador de que se está lidando com a componente de Fourier da grandeza em questão.

$$\vec{J}_{e\mathcal{K}} = \vec{\sigma}_{\mathcal{K}} \cdot \vec{E}_{\mathcal{K}} \Rightarrow (J_{e\mathcal{K}})_i = \sum_j (\sigma_{\mathcal{K}})_{ij} (E_{\mathcal{K}})_j . \quad (3.75)$$

Como o primeiro objetivo é obter o tensor dielétrico na aproximação localmente homogênea, pode-se por hora usar esta expressão. Usando (3.30), obtêm-se que

$$(J_{e\mathcal{K}})_i = -\frac{e}{m_e} \int \frac{p_i}{\gamma_e} \sum_j \left[e A_j^h (E_{\mathcal{K}})_j \right] d\vec{p} = \sum_j \left\{ \left[-\frac{e^2}{m_e} \int \frac{p_i}{\gamma_e} A_j^h d\vec{p} \right] (E_{\mathcal{K}})_j \right\} , \quad (3.76)$$

onde A_j^h é a componente j da parte homogênea do vetor \vec{A} , obtida fazendo nulas as derivadas espaciais nas expressões (3.35) a (3.36). Comparando-se (3.75) com (3.76), vem que:

$$(\sigma_{\mathcal{K}})_{ij} = -\frac{e^2}{m_e} \int \frac{1}{\gamma_e} p_i A_j^h d\vec{p} . \quad (3.77)$$

Com o uso de

$$(\varepsilon_{\mathcal{K}})_{kj} = \delta_{kj} + \frac{4\pi i}{\omega} (\sigma_{\mathcal{K}})_{kj} ,$$

chega-se à seguinte expressão:

$$(\varepsilon_{\mathcal{K}})_{kj} = \delta_{kj} - \frac{4\pi i e^2}{\omega m_e} \int \frac{1}{\gamma_e} p_k A_j^h d\vec{p} . \quad (3.78)$$

Obteve-se assim uma expressão que relaciona as componentes da parte homogênea do vetor \vec{A} com as componentes da transformada de Fourier do tensor dielétrico $\varepsilon_{\mathcal{K}}$, na aproximação localmente homogênea. O próximo passo será a obtenção de um tensor que leve em conta termos tais que o raio de Larmor dos elétrons seja pequeno em comparação com o comprimento característico da variação espacial da função distribuição (L).

3.5 Inclusão de efeitos de inomogeneidades fracas no cálculo do tensor dielétrico

Já se sabe que a função distribuição não perturbada deve ser uma função arbitrária das constantes de movimento de (3.20). Dessa forma, como foi suposto que as inomogeneidades estão somente na direção x , a dependência espacial de F_e deve ser expressa através da constante de movimento \mathcal{X}_e . Uma forma de lidar com isso é expandindo $F_e(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_e)$ numa série de Taylor em torno de $\mathcal{X}_e = x$, como foi feito por Mikhailovskii em [Mik67], obtendo assim uma expressão para $F_e(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_e)$ que inclui termos de inomogeneidades, como está exposto abaixo:

$$F_e(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_e) = F_e(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_e) \Big|_{\mathcal{X}_e=x} + (\mathcal{X}_e - x) \times \frac{\partial}{\partial \mathcal{X}_e} [F_e(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_e)] \Big|_{\mathcal{X}_e=x} + \dots \quad (3.79)$$

Reescrevendo (3.79):

$$F_e(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, \mathcal{X}_e) = f_e(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, x) + \frac{p_{\perp} \sin \phi}{m_e \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} [f_e(p_{\perp}^2, p_{\parallel}, x)] + \dots \quad (3.80)$$

Ao ser utilizada a aproximação localmente homogênea, só é mantido o primeiro termo em (3.80)⁴, sendo desprezados os termos que contêm derivada espacial em (3.33) e (3.34).

Já na abordagem de Mikhailovskii o tensor obtido inclui os dois termos de (3.80), onde são mantidos efeitos de inomogeneidade até primeira ordem (ver [Mik67]). Como é feita a suposição de que a inomogeneidade é fraca, podem ser desprezados os termos de mais alta ordem em (3.80). Pode-se mostrar também que:

$$\varphi_o(F_e) = \varphi_o(f_e) + (\mathcal{X}_e - x)\varphi_o(f'_e) \quad (3.81)$$

$$\mathcal{L}(F_e) = \mathcal{L}(f_e) + (\mathcal{X}_e - x)\mathcal{L}(f'_e) \quad (3.82)$$

⁴ Pelo fato de $r_L = \left| \frac{p_{\perp}}{m_e \Omega_e} \right| \ll L$. Note que $\frac{\partial}{\partial x}$ é de ordem L^{-1} .

Ao serem colocadas estas grandezas nas expressões para as componentes do vetor \vec{A} , surgirão termos em que aparecerá a derivada da função distribuição em relação a x , aqui representada por f'_e . De (3.35) a (3.37), obtêm-se:

$$A_x^h = \frac{\varphi_o(f_e)}{p_\perp} I_x \quad (3.83)$$

$$A_x^{nh} = \frac{1}{p_\perp} \left[\frac{p_\perp \text{sen}\phi}{m_e \Omega_e} \varphi_o(f'_e) + \frac{b \text{sen}\psi}{m_e \gamma_e \omega} f'_e \right] I_x \quad (3.84)$$

$$A_y^h = \frac{\varphi_o(f_e)}{p_\perp} I_y \quad (3.85)$$

$$A_y^{nh} = \frac{\text{sen}\phi}{m_e \Omega_e} \varphi_o(f'_e) I_y + f'_e \left[\left(\frac{1}{m_e \Omega_e} - \frac{k_{\parallel} p_{\parallel}}{m_e^2 \gamma_e \omega \Omega_e} \right) I - \frac{b \cos\psi}{m_e \gamma_e \omega p_\perp} I_x \right] \quad (3.86)$$

$$A_z^h = \frac{k_\perp}{m_e \gamma_e \omega} \frac{\mathcal{L}(f_e)}{p_\perp} (I_x \cos\psi + I_y \text{sen}\psi) + \frac{\partial f_e}{\partial p_{\parallel}} I \quad (3.87)$$

$$A_z^{nh} = \frac{k_\perp \text{sen}\phi}{m_e^2 \gamma_e \omega \Omega_e} \mathcal{L}(f'_e) (I_x \cos\psi + I_y \text{sen}\psi) + \left(\frac{p_\perp \sin\psi}{m_e \Omega_e} \frac{\partial f'_e}{\partial p_{\parallel}} + \frac{p_{\parallel}}{p_\perp} \frac{b \text{sen}\psi}{m_e \gamma_e \omega} f'_e \right) I, \quad (3.88)$$

onde os índices h e nh , indicam respectivamente parte homogênea e não homogênea das componentes do vetor \vec{A} . Substituindo-se (3.67) a (3.69) nas expressões (3.83) a (3.88) e colocando-se o resultado obtido em (3.78), omitindo o extenso trabalho algébrico (ver [Cal90] e [CSZ89]), obtêm-se que:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{\mathcal{K}})_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{X_e}{n_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\vec{p} p_\perp \frac{\varphi_o(f_e)}{D_{ne}} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_\perp} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} (R_{ij}^R + iR_{ij}^I) \\ &\quad - \delta_{iz} \delta_{jz} \frac{X_e}{n_e} \int d\vec{p} \frac{\mathcal{L}(f_e)}{\gamma_e} \frac{p_{\parallel}}{p_\perp} \\ &\quad + \frac{X_e}{n_e} \frac{1}{m_e \omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\vec{p} p_\perp \frac{f'_e b \text{sen}\psi}{\gamma_e D_{ne}} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_\perp} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} (R_{ij}^R + iR_{ij}^I) \\ &\quad + \frac{X_e}{n_e} \frac{1}{m_e \Omega_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\vec{p} p_\perp^2 \frac{\varphi_o(f'_e)}{D_{ne}} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_\perp} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} (S_{ij}^R + iS_{ij}^I) \\ &\quad + (\delta_{iy} \delta_{jz} + \delta_{iz} \delta_{jy}) \frac{X_e}{n_e} \frac{1}{m_e \Omega_e} \int d\vec{p} \frac{p_{\parallel} f'_e}{\gamma_e}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

onde:

$$X_e = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \omega_{pe}^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e},$$

$$R_{xx}^R = J_n'^2(b) + \cos^2\psi \left[\frac{n^2}{b^2} J_n^2(b) - J_n'^2(b) \right], R_{xx}^I = 0,$$

$$R_{xy}^R = \left[\frac{n^2}{b^2} J_n^2(b) - J_n'^2(b) \right] \text{sen}\psi \cos\psi, R_{xy}^I = \frac{n}{b} J_n(b) J_n'(b),$$

$$R_{xz}^R = \frac{n}{b} J_n^2(b) \cos\psi, R_{xz}^I = J_n(b) J_n'(b) \text{sen}\psi$$

$$R_{yy}^R = \frac{n^2}{b^2} J_n^2(b) + \cos^2\psi \left[J_n'^2(b) - \frac{n^2}{b^2} J_n^2(b) \right], R_{yy}^I = 0,$$

$$R_{yz}^R = \frac{n}{b} J_n^2(b) \text{sen}\psi, R_{yz}^I = -J_n(b) J_n'(b) \cos\psi,$$

$$R_{zz}^R = J_n^2(b), R_{zz}^I = 0,$$

com $R_{ij}^R = R_{ji}^R$ e $R_{ij}^I = -R_{ji}^I$;

$$S_{xx}^R = \frac{n}{b} \text{sen}\psi \left\{ J_n'(b) \left[J_n'(b) - \frac{J_n(b)}{b} \right] - \xi \right\}$$

$$S_{xx}^I = \cos\psi \left\{ \left[-\frac{n^2}{b^3} J_n^2(b) + \left(1 - \frac{n^2}{b^2} \right) J_n(b) J_n'(b) + \frac{2}{b} J_n'^2(b) \right] + \eta \right\}$$

$$S_{xy}^R = \frac{n}{b} \cos\psi \left\{ \left[2 \frac{n^2}{b^2} J_n'(b) - \frac{J_n(b) J_n'(b)}{b} - J_n'(b) - J_n'^2(b) \right] + \xi \right\}$$

$$S_{xy}^I = \text{sen}\psi \left\{ \left[\frac{n^2}{b^2} J_n(b) J_n'(b) - \frac{n^2}{b^3} J_n^2(b) \right] + \eta \right\}$$

$$S_{xz}^R = \text{sen}\psi \cos\psi \left[2 \frac{n^2}{b^2} J_n'(b) - J_n'(b) - 2 \frac{J_n(b) J_n'(b)}{b} \right]$$

$$S_{xz}^I = \left[\frac{n}{b} J_n(b) J_n'(b) - \frac{n}{b^2} J_n^2(b) \right] + \cos^2\psi \left[2 \frac{n}{b^2} J_n^2(b) - 2 \frac{n}{b} J_n(b) J_n'(b) \right]$$

$$S_{yx}^R = \frac{n}{b} \cos\psi \left\{ \left[\frac{n^2}{b^2} J_n^2(b) + \frac{J_n(b) J_n'(b)}{b} - 2 J_n'^2(b) \right] + \xi \right\}$$

$$S_{yx}^I = \text{sen}\psi \left\{ \left[\frac{J_n'^2(b)}{b} - \frac{n^2}{b^2} J_n(b) J_n'(b) \right] + \eta \right\}$$

$$S_{yy}^R = \frac{n}{b} \operatorname{sen} \psi \left\{ \left[\frac{n^2}{b^2} J_n^2(b) - \frac{J_n(b)J'_n(b)}{b} \right] + \xi \right\}$$

$$S_{yy}^I = \cos \psi \left\{ \left[2 \frac{n^2}{b^3} J_n^2(b) - \frac{n^2}{b^2} J_n(b)J'_n(b) - \frac{J_n'^2(b)}{b} \right] - \eta \right\}$$

$$S_{yz}^R = \frac{n^2}{b^2} J_n^2(b) - \frac{J_n(b)J'_n(b)}{b} + \cos^2 \psi \left[J_n^2(b) - 2 \frac{n^2}{b^2} J_n^2(b) + 2 \frac{J_n(b)J'_n(b)}{b} \right]$$

$$S_{yz}^I = \operatorname{sen} \psi \cos \psi \left[2 \frac{n}{b^2} J_n^2(b) - 2 \frac{n}{b} J_n(b)J'_n(b) \right]$$

$$S_{zx}^R = \operatorname{sen} \psi \cos \psi \left(\frac{n^2}{b^2} J_n^2(b) - J_n'^2(b) \right), \quad S_{zx}^I = -\frac{n}{b} J_n(b)J'_n(b)$$

$$S_{zy}^R = \frac{n^2}{b^2} J_n^2(b) + \cos^2 \psi \left[J_n'^2(b) - \frac{n^2}{b^2} J_n^2(b) \right], \quad S_{zy}^I = 0$$

$$S_{zz}^R = \frac{n}{b} J_n^2(b) \operatorname{sen} \psi, \quad S_{zz}^I = -J_n(b)J'_n(b) \cos \psi$$

$$\eta = \cos^2 \psi \left[2 \frac{n^2}{b^3} J_n^2(b) - J_n(b)J'_n(b) - 2 \frac{J_n'^2(b)}{b} \right]$$

$$\xi = -\cos^2 \psi \left[2 \frac{n^2}{b^2} J_n^2(b) - J_n^2(b) - 2 J_n'^2(b) \right].$$

Vê-se, como era de se esperar, que o tensor obtido se reduz ao tensor dielétrico de um plasma magnetizado localmente homogêneo, no limite $\frac{r_L}{L} \rightarrow 0$. Pode-se notar que o tensor obtido apresenta certos problemas se for usado em (2.14) pois na obtenção desse tensor foi suposta verdadeira a relação (2.8), que somente é válida para meios homogêneos. Isto é inconsistente com a inclusão de efeitos de inomogeneidades no cálculo do mesmo, e não se pode usar a relação de dispersão dada por (2.14) para descrever corretamente a propagação e a absorção de ondas nesse meio. O tensor obtido nessa abordagem, não é a transformada de Fourier do tensor dielétrico de um plasma fracamente inomogêneo.

Além disso, quando são isoladas as partes hermitiana e anti-hermitiana do tensor

dado por (3.89), aparecem mais problemas. Para isolá-las deve-se notar que as integrais onde aparece D_{ne} no denominador são impróprias, pois este pode se anular para certos valores de p_{\perp} e p_{\parallel} . Isto é, o integrando possui pólos nesses pontos.

Essas integrais podem ser calculadas supondo que ω tem uma parte imaginária pequena e positiva, o que é equivalente a usar o contorno de *Landau*. Pode-se então usar a fórmula de *Plemelj*

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)dx}{x - y + i\xi} = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)dx}{x - y} - i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - y)dx, \quad (3.90)$$

onde

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{y-i\xi} + \int_{y+i\xi}^{+\infty} \right].$$

Ao se aplicar esta expressão nas integrais que aparecem em (3.89) nota-se que aparecem termos ressonantes (*segundo termo em (3.90)*) na parte hermitiana do tensor, e termos não ressonantes (*primeiro termo em (3.90)*) na parte anti-hermitiana do tensor. Como já foi visto que a parte anti-hermitiana do tensor dielétrico é a responsável pela absorção ou amplificação de ondas no plasma, existiriam partículas não ressonantes absorvendo ou cedendo energia às ondas. Isto é um bom indício de que este tensor tem problemas. Além disso, se demonstra que tal tensor tem problemas de simetria, não obedecendo às relações de *Onsager*, como é citado em [Cal90] e [CSZ89]. Entretanto, quando aplicado para ondas que se propagam na direção perpendicular à direção das inhomogeneidades, a propagação e a absorção de ondas são descritas adequadamente nessa direção. Nesse caso, as contribuições não ressonantes na parte anti-hermitiana de (3.89) se anulam e as relações de *Onsager* são obedecidas.

3.6 Expressões para as componentes do tensor efetivo

O tensor dielétrico efetivo, como já foi dito no capítulo anterior, não apresenta os problemas que apresenta o tensor obtido através da abordagem de Mikhailovskii, pois é com este tensor colocado em (2.14) que se descreverá corretamente a propagação de ondas em plasmas fracamente inhomogêneos e a troca de energia das ondas com o meio, não apresentando problemas de simetria, obedecendo as relações de *Onsager*. Resta então apresentar as expressões para as componentes do tensor dielétrico efetivo, obtido segundo o procedimento exposto no capítulo anterior. Novamente omitindo o extenso trabalho algébrico (ver [CSZ89] e [Cal90]), a expressão para suas componentes é a seguinte:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}, \quad (3.91)$$

onde:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ij} = & \delta_{ij} - \delta_{iz}\delta_{jz} \frac{X_e}{n_e} \int d\vec{p} \frac{\mathcal{L}(f_e) p_{\parallel}}{\gamma_e p_{\perp}} \\ & + \frac{X_e}{n_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P \int d\vec{p} \frac{p_{\perp} \varphi_o(f_e)}{D_{ne}} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} (R_{ij}^R + iR_{ij}^I) \\ & + (\delta_{iy}\delta_{jz} + \delta_{iz}\delta_{jy}) \frac{X_e}{n_e} \frac{1}{m_e \Omega_e} \int d\vec{p} \frac{p_{\parallel} f'_e}{\gamma_e} \\ & + \frac{X_e}{n_e} \frac{1}{m_e \omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} P \int d\vec{p} p_{\perp} \frac{f'_e b \text{sen} \psi}{\gamma_e D_{ne}} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} (R_{ij}^R + iR_{ij}^I) \\ & + \frac{X_e}{n_e} \frac{1}{m_e \Omega_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P \int d\vec{p} p_{\perp}^2 \frac{\varphi_o(f'_e)}{D_{ne}} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} \\ & \times \frac{1}{2} [(S_{ij}^R + iS_{ij}^I) + (S_{ji}^R + iS_{ji}^I)^*], \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon''_{ij} = & -\pi \frac{X_e}{n_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\vec{p} \delta(D_{ne}) p_{\perp} \varphi_o(f_e) \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} (R_{ij}^R + iR_{ij}^I) \\ & - \pi \frac{X_e}{n_e} \frac{1}{m_e \omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\vec{p} \delta(D_{ne}) p_{\perp} \frac{f'_e b \text{sen} \psi}{\gamma_e} \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} (R_{ij}^R + iR_{ij}^I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\pi \frac{X_e}{n_e} \frac{1}{m_e \Omega_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\vec{p} \delta(D_{ne}) p_{\perp}^2 \varphi_o(f'_e) \left(\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}} \right)^{\delta_{iz} + \delta_{jz}} \\
& \times \frac{1}{2} [(S_{ij}^R + iS_{ij}^I) + (S_{ji}^R + iS_{ji}^I)^*] .
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Pode ser mostrado que para $\psi = 90^\circ$, o tensor dielétrico efetivo se iguala a (3.89), o que pelo menos matematicamente explica a razão do tensor (3.89) descrever corretamente a propagação e a absorção de ondas em plasmas fracamente inomogêneos, nessa direção. Vê-se também que na sua parte anti-hermitiana só existem termos ressonantes, eliminando a necessidade de encontrar um mecanismo físico consistente que explique a absorção ou amplificação não ressonante. O tensor ϵ foi construído de forma a distinguir entre a troca de energia onda-partícula (*que altera a amplitude da onda*) e a variação de amplitude devida à variação da velocidade de grupo da onda, que está relacionada com as contribuições não ressonantes na parte anti-hermitiana de (3.89) (ver [BGI87], [CSZ89] e [CSZ90]).

3.7 Conclusão

Como foi dito na introdução desse capítulo, foi mostrado inicialmente como obter as componentes do tensor dielétrico na aproximação local, a partir do sistema de equações de Vlasov-Maxwell. Após isso, foram acrescentados termos de inomogeneidade fraca ao tensor por meio de uma expansão em série da função distribuição, como feito em [Mik67]. O tensor obtido se reduz ao tensor na aproximação local quando $\frac{r_L}{L} \rightarrow 0$, como era de se esperar. Porém, este tensor leva a uma descrição incorreta da propagação das ondas no meio e da troca de energia onda-partícula, quando usado numa relação de dispersão formalmente igual a do caso homogêneo (*exceto para $\psi = 90^\circ$*). Este problema é resolvido com a introdução de um tensor dielétrico efetivo, tendo sido expostas aqui as expressões para as suas componentes, que se reduzem às expressões obtidas em [Mik67] para $\psi = 90^\circ$. No próximo capítulo vão ser reescritas as componentes do tensor efetivo, expandindo as funções de Bessel em potências de b , que fundamentalmente expressa a

razão entre o raio de Larmor e o comprimento de onda da radiação incidente.

Capítulo 4

O plasma Maxwelliano com presença de corrente

4.1 Introdução

Inicialmente, neste capítulo, serão reescritas as expressões para o tensor dielétrico efetivo, obtidas no capítulo anterior, de uma forma que torne possível o tratamento numérico de (2.14), o que possibilitará um estudo quantitativo da absorção de ondas em plasmas inomogêneos, assunto no qual se concentrará este trabalho.

Será considerado aqui, o caso de um plasma magnetizado inomogêneo, em presença de corrente, com distribuição eletrônica modelada pela adição de uma Maxwelliana e uma Maxwelliana com deriva. Serão mantidos efeitos relativísticos no estudo a ser feito, sendo o plasma tratado como fracamente relativístico.

4.2 Expansão das componentes do tensor dielétrico efetivo em potências de raio de Larmor

As expressões para as componentes do tensor dielétrico efetivo obtidas no capítulo anterior têm uma validade relativamente ampla. Qualquer plasma inomogêneo que obedeça às condições impostas até aqui, pode ser descrito pelo tensor efetivo definido por (3.92) e (3.93).

Para facilitar o tratamento numérico do problema, entretanto, devem ser reescritas

as expressões do tensor efetivo, de modo que seja possível fazer um estudo quantitativo dos efeitos que a inhomogeneidade do meio faz na absorção e/ou amplificação de ondas de alta frequência ($\approx \Omega_e$) no plasma. O procedimento matemático incluirá todas as ordens possíveis em raio de Larmor, por meio do uso das seguintes expressões (ver [AS70]), para as funções de Bessel e suas derivadas:

$$\begin{aligned} J_n^2(b) &= \sum_{m=0}^{+\infty} a(n, m)(b^2)^{n+m} \\ J_n(b)J_n'(b) &= \sum_{m=0}^{+\infty} a(n, m)(n+m)b(b^2)^{n+m-1} \\ J_n'^2(b) &= \sum_{m=0}^{+\infty} d(n, m)(b^2)^{n+m-1}, \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} a(n, m) &= \frac{(-1)^m [2(n+m)]! \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+m)}}{[(n+m)!]^2 (2n+m)! m!}, \\ d(n, m) &= \begin{cases} a(1, m-2) & (n=0) \\ \frac{1}{4} [a(n-1, m) + a(n+1, m-2) - 2 \frac{n+m-1}{n+m} a(n, m-1)] & (n > 0) \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(-m)!} = 0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

As expressões acima são então usadas em (3.92) e (3.93), decompondo as componentes do tensor efetivo em

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^h + \varepsilon_{ij}^{nh},$$

onde ε_{ij}^h só contém termos dependentes de f_e e ε_{ij}^{nh} de f_e' . Estas quantidades são chamadas, respectivamente, de parte homogênea e não homogênea do tensor dielétrico efetivo, pois a primeira depende (através de f_e) dos parâmetros típicos do plasma (*densidade, temperatura, etc...*), e a segunda depende (através de f_e') também dos gradientes desses

parâmetros. As expressões para as componentes do tensor dielétrico efetivo, segundo o que foi obtido em [CSZ90] e [Cal90], são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^h &= 1 + X_e \text{sen}^2 \psi \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} d(0, m) I(0, m, 0, 0; \mathcal{L}f_e) \\
 &+ X_e \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} [\text{sen}^2 \psi d(n, m) + \cos^2 \psi n^2 a(n, m)] \\
 &\times \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 0, s; \mathcal{L}f_e) \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xy}^h &= -X_e \text{sen} \psi \cos \psi \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} d(0, m) I(0, m, 0, 0; \mathcal{L}f_e) \\
 &+ X_e \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} \left\{ \text{sen} \psi \cos \psi [n^2 a(n, m) - d(n, m)] \right. \\
 &\times \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 0, s; \mathcal{L}f_e) \\
 &\left. - i n(n+m) a(n, m) \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 0, s; \mathcal{L}f_e) \right\} \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xz}^h &= -i X_e \text{sen} \psi \frac{N_{\perp}}{Y} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} m a(0, m) I(0, m, 1, 0; \mathcal{L}f_e) \\
 &+ X_e \frac{N_{\perp}}{Y} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} a(n, m) \\
 &\times \left[n \cos \psi \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 1, s; \mathcal{L}f_e) \right. \\
 &\left. - i(n+m) \text{sen} \psi \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 1, s; \mathcal{L}f_e) \right] \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{yy}^h &= 1 + X_e \cos^2 \psi \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(m-1)} d(0, m) I(0, m, 0, 0; \mathcal{L}f_e) \\
 &+ X_e \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m-1)} [\text{sen}^2 \psi n^2 a(n, m) + \cos^2 \psi d(n, m)] \\
 &\times \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 0, s; \mathcal{L}f_e) \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{yz}^h &= iX_e \cos\psi \frac{N_\perp}{Y} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y}\right)^{2(m-1)} ma(0, m) I(0, m, 1, 0; \mathcal{L}f_e) \\
 &+ X_e \frac{N_\perp}{Y} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y}\right)^{2(n+m-1)} a(n, m) \\
 &\times \left[n \operatorname{sen}\psi \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 1, s; \mathcal{L}f_e) \right. \\
 &\left. + i(n+m) \cos\psi \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 1, s; \mathcal{L}f_e) \right] \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zz}^h &= 1 + X_e I(0, 0, 1, 0; r_\perp \frac{\partial f_e}{\partial r_\parallel}) \\
 &+ X_e \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y}\right)^{2m} a(0, m) I(0, m, 2, 0; \mathcal{L}f_e) \\
 &+ X_e \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y}\right)^{2(n+m)} a(n, m) \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 2, s; \mathcal{L}f_e), \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

onde:

$$\varepsilon_{ji}^h = (\varepsilon_{ij}^h)^* .$$

Para a parte não homogênea do tensor:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^{nh} &= -X_e \frac{c}{\omega} \frac{N_\perp}{Y} \operatorname{sen}\psi \left\{ \operatorname{sen}^2\psi \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y}\right)^{2(m-1)} d(0, m) I(0, m, 0, 0; \frac{r_\perp}{\gamma_e} f_e') \right. \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y}\right)^{2(n+m-1)} [\operatorname{sen}^2\psi d(n, m) + \cos^2\psi n^2 a(n, m)] \\
 &\times \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 0, s; \frac{r_\perp}{\gamma_e} f_e') \\
 &+ \frac{Y}{N_\perp^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y}\right)^{2(n+m-1)} n \left\{ [(2n^2 \cos^2\psi - n - m) a(n, m) \right. \\
 &+ (1 - 2 \cos^2\psi) d(n, m)] - (1 - \delta_{m0}) a(n, m - 1) \cos^2\psi \left. \right\} \\
 &\times \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 0, s; \mathcal{L}f_e') \left. \right\} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xy}^{nh} = X_e \frac{c}{\omega} \frac{N_\perp}{Y} \left\{ \operatorname{sen}^2\psi \cos\psi \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{N_\perp}{Y}\right)^{2(m-1)} d(0, m) I(0, m, 0, 0; \frac{r_\perp}{\gamma_e} f_e') \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \operatorname{sen}\psi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} \left\{ [n^2 a(n, m) - d(n, m)] \right. \\
 & \times \operatorname{sen}\psi \cos\psi \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 0, s; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f'_e) \\
 & \left. - i n(n+m) a(n, m) \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 0, s; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f'_e) \right\} \\
 & - \frac{i}{2} \frac{Y}{N_{\perp}^2} \operatorname{sen}\psi \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(m-1)} d(0, m) I(0, m, 0, 0; \mathcal{L} f'_e) \\
 & - \frac{Y}{N_{\perp}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} \\
 & \times \left[n \cos\psi \left\{ (1 - \delta_{m0}) \left(\cos^2\psi - \frac{1}{2}\right) a(n, m-1) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (2 \cos^2\psi - \frac{3}{2}) [d(n, m) - n^2 a(n, m)] \right\} \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 0, s; \mathcal{L} f'_e) \right. \\
 & \left. - i \operatorname{sen}\psi \left[(n+m - \frac{1}{2}) n^2 a(n, m) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{2} d(n, m) \right] \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 0, s; \mathcal{L} f'_e) \right] \Big\} \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{yy}^{nh} & = -X_e \frac{c}{\omega} \frac{N_{\perp}}{Y} \operatorname{sen}\psi \left\{ \cos^2\psi \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(m-1)} d(0, m) I(0, m, 0, 0; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f'_e) \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} [\operatorname{sen}^2\psi n^2 a(n, m) + \cos^2\psi d(n, m)] \\
 & \times \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 0, s; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f'_e) \\
 & + \frac{Y}{N_{\perp}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} n \left\{ (1 - \delta_{m0}) \cos^2\psi a(n, m-1) \right. \\
 & \left. + a(n, m) [n^2 (1 - 2 \cos^2\psi) - n - m] + 2 \cos^2\psi d(n, m) \right\} \\
 & \left. \times \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 0, s; \mathcal{L} f'_e) \right\} \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xz}^{nh} & = X_e \frac{c}{\omega} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^2 \left\{ i \operatorname{sen}^2\psi \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(m-1)} m a(0, m) I(0, m, 1, 0; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f'_e) \right. \\
 & + \operatorname{sen}\psi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} a(n, m) \\
 & \left. \times \left[-n \cos\psi \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 1, s; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f'_e) \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + i(n+m)\text{sen}\psi \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 1, s; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f'_e) \Big] \\
 & + \frac{Y}{N_{\perp}^2} \text{sen}\psi \cos\psi \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(m-1)} \left[(1 - \delta_{m0}) \frac{1}{2} a(0, m-1) \right. \\
 & + m a(0, m) + \frac{1}{2} d(0, m) \Big] I(0, m, 1, 0; \mathcal{L}f'_e) \\
 & + \frac{Y}{N_{\perp}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} \left\{ \text{sen}\psi \cos\psi \left[(1 - \delta_{m0}) \frac{1}{2} a(n, m-1) \right. \right. \\
 & - \left. \left. \left(\frac{3}{2}n^2 - n - m\right)a(n, m) + \frac{1}{2}d(n, m) \right] \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 1, s; \mathcal{L}f'_e) \right. \\
 & + \left. \text{ina}(n, m) \left[n + m - \frac{1}{2} + \cos^2\psi(1 - n - m) \right] \right. \\
 & \left. \times \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 1, s; \mathcal{L}f'_e) \right\} \Big\} \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{yz}^{nh} & = -\frac{X_e c}{Y \omega} \left\{ I(0, 0, 1, 0; r_{\perp} f'_e) + i \frac{N_{\perp}^2}{Y} \text{sen}\psi \cos\psi \right. \\
 & \times \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(m-1)} m a(0, m) I(0, m, 1, 0; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f'_e) \\
 & + \frac{N_{\perp}^2}{Y} \text{sen}\psi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} a(n, m) \\
 & \times \left[n \text{sen}\psi \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 1, s; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f'_e) \right. \\
 & + \left. i(n+m)\cos\psi \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 1, s; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f'_e) \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(m-1)} \\
 & \times \left[(1 - \delta_{m0}) \frac{1}{2} \cos^2\psi a(0, m-1) \right. \\
 & + \left. \left(\cos^2\psi - \frac{1}{2} \right) m a(0, m) + \frac{1}{2} \cos^2\psi d(0, m) \right] I(0, m, 1, 0; \mathcal{L}f'_e) \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y}\right)^{2(n+m-1)} \left\{ \left[(1 - \delta_{m0}) \frac{1}{2} \cos^2\psi a(n, m-1) \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2\psi\right) n^2 a(n, m) \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left(\cos^2\psi - \frac{1}{2} \right) (n+m) a(n, m) + \frac{1}{2} \cos^2\psi d(n, m) \right] \right. \\
 & \times \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 1, s; \mathcal{L}f'_e) \\
 & \left. - \text{in} \text{sen}\psi \cos\psi (1 - n - m) a(n, m) \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 1, s; \mathcal{L}f'_e) \right\} \Big\} \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zz}^{nh} = & -X_e \frac{c}{\omega} \frac{N_{\perp}}{Y} \operatorname{sen} \psi \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2m} a(0, m) I(0, m, 2, 0; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f_e') \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m)} a(n, m) \sum_{s=\pm 1} I(n, m, 2, s; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f_e') \\
 & \left. + \frac{Y}{N_{\perp}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{N_{\perp}}{Y} \right)^{2(n+m)} n a(n, m) \sum_{s=\pm 1} s I(n, m, 2, s; \mathcal{L} f_e') \right], \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

onde $Y = \frac{|\Omega_e|}{\omega}$ e, novamente

$$\varepsilon_{ji}^{nh} = (\varepsilon_{ij}^{nh})^* .$$

Além disso

$$I(n, m, h, s; G) = \frac{1}{n_e} \int d^3 r \frac{r_{\parallel}^h r_{\perp}^{2(n+m-1)} r_{\perp} G}{\gamma_e - s n Y - N_{\parallel} r_{\parallel}}, \quad (4.13)$$

com o operador \mathcal{L} assumindo a forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\gamma_e} \left[(\gamma_e - N_{\parallel} r_{\parallel}) \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} + N_{\parallel} r_{\perp} \frac{\partial}{\partial r_{\parallel}} \right] .$$

Nas expressões acima r_{\perp} e r_{\parallel} são as componentes respectivamente perpendicular e paralela ao campo magnético, do vetor definido por $\vec{r} = \frac{\vec{p}}{m_e c}$, onde \vec{p} é o momentum do elétron. Da mesma forma, N_{\perp} e N_{\parallel} são o índice de refração do meio nas direções perpendicular e paralela ao campo. Pode-se aplicar essas expressões a qualquer função distribuição e incluir vários harmônicos. Em [Cal90], elas foram aplicadas a um plasma Maxwelliano tendo sido obtidos diversos resultados para vários valores dos parâmetros do plasma e os seus respectivos gradientes.

O que será feito neste trabalho, é aplicar as expressões (4.1) a (4.12) ao caso em que existe a presença de um feixe de elétrons (*corrente*), usando uma função distribuição com uma cauda assimétrica.

4.3 O plasma Maxwelliano com um feixe de elétrons

As componentes do tensor efetivo explicitadas na seção anterior, dependem de f_e e de f'_e através das integrais do tipo (4.13). Antes de mais nada, será definida uma função distribuição que descreva um plasma inhomogêneo em presença de corrente. Supondo que este seja composto por um plasma de fundo Maxwelliano mais uma parte de deriva, que descreve a corrente, pode-se então descrevê-lo por uma função distribuição do tipo:

$$f_e = \sum_{\sigma=0}^1 n_e^\sigma f_e^\sigma, \quad (4.14)$$

onde

$$f_e^\sigma = \frac{\mu_\perp^\sigma \mu_\parallel^\sigma}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\mu_\parallel^\sigma}{2}(r_\parallel - \sigma r_o)^2} e^{-\frac{\mu_\perp^\sigma}{2} r_\perp^2} \quad (4.15)$$

é a distribuição do plasma de fundo (*para* $\sigma = 0$) ou do feixe (*para* $\sigma = 1$). A quantidade n_e^σ é a densidade de elétrons do plasma de fundo *para* $\sigma = 0$ e do feixe *para* $\sigma = 1$. A quantidade $n_e = n_e^0 + n_e^1$, que ocorre em (4.13), é a densidade total de elétrons do plasma. Além disso:

$$\begin{aligned} \mu_\perp^\sigma &= \frac{m_e c^2}{T_\perp^\sigma} \\ \mu_\parallel^\sigma &= \frac{m_e c^2}{T_\parallel^\sigma} \\ r_o &= \frac{p_o}{m_e c}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde T_\perp^σ e T_\parallel^σ são as temperaturas respectivamente nas direções perpendicular e paralela ao campo magnético; p_o é o momentum para o qual a função distribuição do feixe tem um pico, ou seja, é o momentum médio do feixe.

É importante frisar onde estão embutidas as inhomogeneidades do meio, na equação

(4.14). Neste trabalho, se supõe que as temperaturas (*em ambas as direções*) e a densidade de elétrons, tanto para o plasma de fundo como para a corrente, tenham dependência espacial. Além disso, a velocidade de deriva, relacionada com r_o , também é inhomogênea. Dessa forma, a partir de (4.15) e (4.14), obtém-se a relação:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\omega} f_e' = & \sum_{\sigma=0}^1 n_e^\sigma \left[d_{\perp}^\sigma - \frac{\mu_{\perp}^\sigma r_{\perp}^2}{2} d_{\perp}^\sigma + \frac{d_{\parallel}^\sigma}{2} - \frac{\mu_{\parallel}^\sigma (r_{\parallel} - \sigma r_o)^2}{2} d_{\parallel}^\sigma + d_x^\sigma \right. \\ & \left. + \mu_{\parallel}^\sigma \sigma (r_{\parallel} - \sigma r_o) r_o d_o \right] f_e^\sigma, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde são introduzidas as quantidades adimensionais:

$$d_{\perp}^\sigma = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\mu_{\perp}^\sigma} \frac{d\mu_{\perp}^\sigma}{dx} \quad (4.18)$$

$$d_{\parallel}^\sigma = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\mu_{\parallel}^\sigma} \frac{d\mu_{\parallel}^\sigma}{dx} \quad (4.19)$$

$$d_x^\sigma = \frac{c}{\omega} \frac{1}{n_e^\sigma} \frac{dn_e^\sigma}{dx} \quad (4.20)$$

$$d_o = \frac{c}{\omega} \frac{1}{r_o} \frac{dr_o}{dx} \quad (4.21)$$

O fator $\frac{c}{\omega}$ no cálculo da derivada de f_e^σ em (4.17) foi incluído porque aparece em todas as componentes da parte não homogênea do tensor dielétrico, de modo que se pode incorporá-lo nas integrais $I(n, m, h, s; G)$. Isto é vantajoso, pois assim as componentes da parte não homogênea do tensor dielétrico efetivo podem ser expressas em termos das quantidades adimensionais (4.18) a (4.21), definidas acima. O próximo passo, será o cálculo de todos os tipos de integrais que aparecem nas componentes do tensor efetivo, usando a função distribuição dada por (4.14). Com as expressões apresentadas nessa seção, podemos calcular explicitamente $I(n, m, h, s; G)$, o que será feito a seguir.

4.4 Cálculo das integrais $I(n, m, h, s; G)$

As integrais $I(n, m, h, s; G)$, dadas por (4.13), devem ser primeiramente separadas em suas partes real e imaginária, de modo que seja possível escrever explicitamente as

partes ressonante e não ressonante do tensor efetivo. Usando-se a fórmula de *Plemelj* (3.90) em (4.13), resulta:

$$\begin{aligned}
 I(n, m, h, s; G) = & \underbrace{\frac{1}{n_e} P \int d^3 r \frac{r_{\parallel}^h r_{\perp}^{2(n+m-1)} r_{\perp} G}{\gamma_e - snY - N_{\parallel} r_{\parallel}}}_{I^R(n, m, h, s; G)} \\
 & + i \underbrace{\left[-\frac{1}{n_e} \pi \int d^3 r \delta(\gamma_e - snY - N_{\parallel} r_{\parallel}) r_{\parallel}^h r_{\perp}^{2(n+m-1)} r_{\perp} G \right]}_{I^I(n, m, h, s; G)}. \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

A parte imaginária de (4.22) está relacionada com a absorção ou amplificação ressonante da energia da onda incidente, devido à interação com os elétrons do plasma. Nesta seção, será mostrado basicamente como obter essas integrais, usando a função distribuição dada por (4.14). Tomando a integral $I(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e)$ como exemplo:

$$I^R(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e) = \frac{1}{n_e} \sum_{\sigma=0}^1 n_e^{\sigma} P \int d^3 r \frac{r_{\parallel}^h r_{\perp}^{2(n+m-1)} r_{\perp} \mathcal{L}f_e^{\sigma}}{\gamma_e - snY - N_{\parallel} r_{\parallel}}, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
 I^I(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e) = & -\frac{\pi}{n_e} \sum_{\sigma=0}^1 n_e^{\sigma} \int d^3 r \delta(\gamma_e - snY - N_{\parallel} r_{\parallel}) \\
 & \times r_{\parallel}^h r_{\perp}^{2(n+m-1)} r_{\perp} \mathcal{L}f_e^{\sigma}. \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

A soma em σ que ocorre nas expressões acima ocorrerá também nas expressões do tensor dielétrico efetivo, fazendo com que o mesmo seja dividido em uma parte relativa ao plasma de fundo mais uma outra parte relativa à corrente. Se for definido $\rho_0 = \frac{n_e^0}{n_e}$ como a fração de elétrons do plasma de fundo, e $\rho_1 = \frac{n_e^1}{n_e}$ como a fração de elétrons do feixe, (4.23) e (4.24) são reescritas como:

$$\begin{aligned}
 I^R(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e) &= \sum_{\sigma=0}^1 \rho_{\sigma} \left[P \int d^3 r \frac{r_{\parallel}^h r_{\perp}^{2(n+m-1)} r_{\perp} \mathcal{L}f_e^{\sigma}}{\gamma_e - snY - N_{\parallel} r_{\parallel}} \right] \\
 &= \sum_{\sigma=0}^1 \rho_{\sigma} n_e^{\sigma} I^R(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e^{\sigma}) \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

$$I^I(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e) = -\pi \sum_{\sigma=0}^1 \rho_{\sigma} \left[\int d^3 r \delta(\gamma_e - snY - N_{\parallel} r_{\parallel}) r_{\parallel}^h r_{\perp}^{2(n+m-1)} r_{\perp} \mathcal{L}f_e^{\sigma} \right]$$

$$= \sum_{\sigma=0}^1 \rho_{\sigma} n_e^{\sigma} I^I(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e^{\sigma}) \quad (4.26)$$

Dessa forma os elétrons que pertencem ao feixe e ao plasma de fundo, contribuirão com proporções diferentes para as componentes do tensor efetivo, de acordo com os valores de ρ_{σ} . É óbvio, já que $\rho_{\sigma} = \frac{n_{\sigma}}{n_e}$, que

$$\rho_0 + \rho_1 = 1 \quad .$$

Pode ser então iniciado o cálculo das partes real e imaginária de $I(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e^{\sigma})$.

Usando (4.14), escreve-se:

$$\frac{\partial f_e^{\sigma}}{\partial r_{\parallel}} = -\mu_{\parallel}^{\sigma} (r_{\parallel} - \sigma r_o) f_e^{\sigma} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial f_e^{\sigma}}{\partial r_{\perp}} = -\mu_{\perp}^{\sigma} r_{\perp} f_e^{\sigma} \quad . \quad (4.28)$$

Com isto, $\mathcal{L}f_e$ pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}f_e^{\sigma} = \left[N_{\parallel} \mu_{\parallel}^{\sigma} \sigma r_o - \gamma_e \mu_{\perp}^{\sigma} + N_{\parallel} (\mu_{\perp}^{\sigma} - \mu_{\parallel}^{\sigma}) r_{\parallel} \right] \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f_e^{\sigma} \quad . \quad (4.29)$$

O cálculo será iniciado pela parte real de $I(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e^{\sigma})$ que pode ser calculada segundo (4.22). Obtém-se

$$I^R(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e^{\sigma}) = -\frac{1}{n_e^{\sigma}} \left\{ \frac{\mu_{\perp}^{\sigma} \mu_{\parallel}^{\sigma \frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dr r^h e^{-\frac{\mu_{\parallel}^{\sigma} (r - \sigma r_o)^2}{2}} \left\{ \mu_{\perp}^{\sigma} \int_0^{\infty} du (2u)^{n+m} e^{-\mu_{\perp}^{\sigma} u} + [\mu_{\perp}^{\sigma} s n Y \right. \right. \\ \left. \left. - N_{\parallel} \mu_{\parallel}^{\sigma} \sigma r_o + N_{\parallel} \mu_{\parallel}^{\sigma} r] P \int_0^{\infty} du \frac{(2u)^{n+m} e^{-\mu_{\perp}^{\sigma} u}}{u + \alpha_{sn}} \right\} \right\}, \quad (4.30)$$

onde foram feitas as trocas de variáveis:

a) Na integral em r_{\parallel} : $r_{\parallel} \rightarrow r$

b) Na integral em r_{\perp} : $r_{\perp} \rightarrow \sqrt{2u}$.

Também foram usadas as aproximações:

$$\begin{aligned}\gamma_e(\gamma_e - snY - N_{\parallel}r_{\parallel}) &\approx \gamma_e - snY - N_{\parallel}r_{\parallel} \\ \gamma_e &\approx 1 + \frac{r_{\parallel}^2}{2} + \frac{r_{\perp}^2}{2},\end{aligned}$$

já que por hipótese, o plasma é fracamente relativístico. Define-se também:

$$\alpha_{sn} = 1 + \frac{r_{\parallel}^2}{2} - snY - N_{\parallel}r_{\parallel}.$$

A primeira integral em u que aparece em (4.30) pode ser calculada analiticamente, resultando em:

$$\int_0^{\infty} du u^{n+m} e^{-\mu_{\perp}^{\sigma} u} = \frac{(n+m)!}{(\mu_{\perp}^{\sigma})^{n+m+1}}. \quad (4.31)$$

Já para a segunda integral:

$$\begin{aligned}P \int_0^{\infty} du \frac{u^{n+m} e^{-\mu_{\perp}^{\sigma} u}}{u + \alpha_{sn}} &= P \int_0^{\infty} du \frac{u^{n+m-1} u e^{-\mu_{\perp}^{\sigma} u}}{u + \alpha_{sn}} = P \int_0^{\infty} du \frac{u^{n+m-1} [(u + \alpha_{sn}) - \alpha_{sn}] e^{-\mu_{\perp}^{\sigma} u}}{u + \alpha_{sn}} \\ &= \frac{(n+m-1)!}{(\mu_{\perp}^{\sigma})^{n+m}} - \alpha_{sn} P \int_0^{\infty} du \frac{u^{n+m-1} e^{-\mu_{\perp}^{\sigma} u}}{u + \alpha_{sn}}.\end{aligned} \quad (4.32)$$

Aplicando esse procedimento $n+m$ vezes, obtém-se, para $n+m \neq 0$:

$$\begin{aligned}P \int_0^{\infty} du \frac{u^{n+m} e^{-\mu_{\perp}^{\sigma} u}}{u + \alpha_{sn}} &= \sum_{l=0}^{n+m-1} \frac{(-1)^l (\alpha_{sn})^l (n+m-l-1)!}{(\mu_{\perp}^{\sigma})^{n+m-l}} \\ &\quad - (-1)^{n+m} (\alpha_{sn})^{n+m} e^{\mu_{\perp}^{\sigma} \alpha_{sn}} Ei(-\mu_{\perp}^{\sigma} \alpha_{sn}),\end{aligned} \quad (4.33)$$

onde

$$Ei(x) = -P \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (x > 0)$$

é a função integral exponencial (ver [AS70]). Para n e m nulos:

$$P \int_0^\infty du \frac{e^{-\mu_\perp^\sigma u}}{u - \alpha_{so}} = -e^{\mu_\perp^\sigma \alpha_{so}} Ei(-\mu_\perp^\sigma \alpha_{so}) \quad (4.34)$$

Assim, pode-se escrever:

$$P \int_0^\infty du \frac{u^{n+m} e^{-\mu_\perp^\sigma u}}{u + \alpha_{sn}} = (1 - \delta_{no} \delta_{mo}) \sum_{l=0}^{n+m-1} \frac{(-1)^l (\alpha_{sn})^l (n+m-l-1)!}{(\mu_\perp^\sigma)^{n+m-l}} - (-1)^{n+m} (\alpha_{sn})^{n+m} e^{\mu_\perp^\sigma \alpha_{sn}} Ei(-\mu_\perp^\sigma \alpha_{sn}) \quad (4.35)$$

Definindo $x_{sn} = -\mu_\perp^\sigma \alpha_{sn}$, reescreve-se a equação acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P \int_0^\infty du \frac{u^{n+m} e^{-\mu_\perp^\sigma u}}{u + \alpha_{sn}} &= \frac{1}{(\mu_\perp^\sigma)^{n+m}} \left[(1 - \delta_{no} \delta_{mo}) \sum_{l=0}^{n+m-1} (x_{sn})^l (n+m-l-1)! \right. \\ &\quad \left. - (x_{sn})^{n+m} e^{-x_{sn}} Ei(x_{sn}) \right] \\ &= \frac{1}{(\mu_\perp^\sigma)^{n+m}} \left[(1 - \delta_{no} \delta_{mo}) \sum_{l=0}^{n+m-1} (x_{sn})^l (n+m-l-1)! \right. \\ &\quad \left. - x_{sn}^{n+m-1} (1 + h_{sn}) \right], \end{aligned} \quad (4.36)$$

sendo

$$h_{sn} = x_{sn} e^{-x_{sn}} Ei(x_{sn}) - 1 \quad .$$

Substituindo-se (4.36) e (4.31) em (4.30), resulta:

$$\begin{aligned} I^R(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e^\sigma) &= -\frac{1}{n_e^\sigma} \frac{\mu_\perp^\sigma \mu_\parallel^\sigma}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\mu_\perp^\sigma} \right)^{n+m} \left\{ (n+m)! J_{h,o} + (\mu_\perp^\sigma s n Y - N_\parallel \mu_\parallel^\sigma \sigma r_o) \right. \\ &\quad \times \left[(1 - \delta_{no} \delta_{mo}) \sum_{l=0}^{n+m-1} (n+m-l-1)! J_{h,l} - J_{h,n+m-1} - J_{h,n+m-1}^{sn} \right] \\ &\quad + N_\parallel \mu_\parallel^\sigma \left[(1 - \delta_{no} \delta_{mo}) \sum_{l=0}^{n+m-1} (n+m-l-1)! J_{h+1,l} - J_{h+1,n+m-1} \right. \\ &\quad \left. \left. - J_{h+1,n+m-1}^{sn} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde

$$J_{h,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} dr r^h e^{-\frac{\mu_{\parallel}^{\sigma}(r-\sigma r_0)^2}{2}} x_{sn}^k$$

$$J_{h,k}^{sn} = \int_{-\infty}^{+\infty} dr r^h e^{-\frac{\mu_{\parallel}^{\sigma}(r-\sigma r_0)^2}{2}} x_{sn}^k h_{sn} \quad .$$

Pode-se então iniciar o cálculo de $I^I(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e^{\sigma})$, usando-se (4.29) e novamente (4.22), obtendo:

$$I^I(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e^{\sigma}) = -\frac{1}{n_e^{\sigma}} \frac{\pi \mu_{\perp}^{\sigma} \mu_{\parallel}^{\sigma \frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dr r^h e^{-\frac{\mu_{\parallel}^{\sigma}(r-\sigma r_0)^2}{2}}$$

$$\times \int_0^{\infty} dr_{\perp} \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} \delta(\gamma_e - snY - N_{\parallel} r) r_{\perp}^{2(n+m)}$$

$$\times \left[N_{\parallel} \mu_{\parallel}^{\sigma} \sigma r_0 - \gamma_e \mu_{\perp}^{\sigma} + N_{\parallel} (\mu_{\perp}^{\sigma} - \mu_{\parallel}^{\sigma}) r \right] e^{-\frac{\mu_{\perp}^{\sigma} r^2}{2}} \quad . \quad (4.38)$$

Na expressão acima foi feita a troca $r_{\parallel} \rightarrow r$. Os valores de r_{\perp} tais que

$$\gamma_e = (1 + r_{\perp}^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} = N_{\parallel} r + snY \quad , \quad (4.39)$$

são os que satisfazem a condição de ressonância. Esta condição, para $N_{\parallel} < 1$, pode ser separada em três casos distintos, de acordo com o valores de s . São eles:

$s = 0$:

$$\underbrace{(1 + r_{\perp}^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}_{> r} = \underbrace{N_{\parallel} r}_{< r} \quad (4.40)$$

$s = -1$:

$$\underbrace{(1 + r_{\perp}^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}_{> r} = \underbrace{N_{\parallel} r - nY}_{< r} \quad (4.41)$$

$s = 1$:

$$\underbrace{(1 + r_{\perp}^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}_{> r} = \underbrace{N_{\parallel} r + nY}_{\text{pode ser } > r} \quad . \quad (4.42)$$

Vê-se que em (4.40) e (4.41), a condição de ressonância (4.39) não pode ser satisfeita, pois sempre se obtém valores diferentes em ambos os lados da desigualdade. Já em

(4.42), (4.39) pode ser satisfeita, dependendo dos valores das outras grandezas contidas na sua expressão. Então, como a condição de ressonância não pode ser satisfeita para $s \neq 1$, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}
 I^I(n, m, h, s; \mathcal{L}f_e^\sigma) &= -\frac{1}{n_e^\sigma} \frac{\pi \mu_\perp^\sigma \mu_\parallel^\sigma \frac{1}{2}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \delta_{s,1} \int_{-\infty}^{+\infty} dr r^h e^{-\frac{\mu_\parallel^\sigma (r - \sigma r_0)^2}{2}} \\
 &\times \int_0^\infty dr_\perp \frac{r_\perp}{\gamma_e} \delta(\gamma_e - snY - N_\parallel r) r_\perp^{2(n+m)} \\
 &\times \left[N_\parallel \mu_\parallel^\sigma \sigma r_0 - \gamma_e \mu_\perp^\sigma + N_\parallel (\mu_\perp^\sigma - \mu_\parallel^\sigma) r \right] e^{-\frac{\mu_\perp^\sigma r_\perp^2}{2}} . \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

Sendo $\bar{\gamma}_e$ o valor de γ_e que satisfaz (4.39) (com $s = 1$), pode-se a partir dele, obter:

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}_e - nY - N_\parallel r &= 0 \Rightarrow (1 + \bar{r}_\perp^2 + r)^{\frac{1}{2}} = nY + N_\parallel \\
 &\Rightarrow \bar{r}_\perp^2 = n^2 Y^2 + 2nY N_\parallel r + N_\parallel^2 r^2 - 1 - r^2 ,
 \end{aligned}$$

o que resulta em:

$$\bar{r}_\perp^2 = (N_\parallel^2 - 1)r^2 + 2nY N_\parallel r + n^2 Y^2 - 1 . \quad (4.44)$$

Usando

$$\delta[f(x)] = \left[\left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \right]^{-1} \sum_i \delta(x - x_i) ,$$

onde os x_i são as raízes de $f(x) = 0$, pode-se escrever $\delta(\gamma_e - nY - N_\parallel r)$ da seguinte maneira:

$$\delta(\gamma_e - nY - N_\parallel r) = \frac{\gamma_e}{\bar{r}_\perp} \delta(r_\perp - \bar{r}_\perp) . \quad (4.45)$$

Como $\bar{r}_\perp^2 \geq 0$, segue que:

$$(N_\parallel^2 - 1)r^2 + 2nY N_\parallel r + n^2 Y^2 - 1 \geq 0 . \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 2nY N_{\parallel} \\
 a_o &= n^2 Y^2 - 1 \\
 b_o &= N_{\parallel} \mu_{\parallel}^{\sigma} \sigma r_o - nY \mu_{\perp}^{\sigma} \\
 b_1 &= N_{\parallel} \mu_{\parallel}^{\sigma} \\
 A &= -\frac{(\mu_{\parallel}^{\sigma} + \mu_{\perp}^{\sigma} a_2)}{2} \\
 B &= \mu_{\parallel}^{\sigma} \sigma r_o - \frac{\mu_{\perp}^{\sigma} a_1}{2} \\
 K_{n\sigma} &= K_{\sigma} e^{-\frac{\mu_{\parallel}^{\sigma} \sigma^2 r_o^2}{2}} e^{-\frac{\mu_{\perp}^{\sigma}}{2} (n^2 Y^2 - 1)}
 \end{aligned}$$

A integral $I(0, 0, 1, 0; r_{\perp} \frac{\partial f_e^{\sigma}}{\partial r_{\parallel}})$ que aparece em ε_{zz}^h pode ser obtida de:

$$I(n, m, h, s; r_{\perp} \frac{\partial f_e^{\sigma}}{\partial r_{\parallel}}) = -\mu_{\parallel}^{\sigma} I(n, m, h + 1, s; r_{\perp} f_e^{\sigma}) + \mu_{\parallel}^{\sigma} \sigma r_o I(n, m, h, s; r_{\perp} f_e^{\sigma}), \quad (4.51)$$

onde:

$$I^R(n, m, h, s; r_{\perp} f_e^{\sigma}) = I^R(n, m, h, s; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f_e^{\sigma}) \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned}
 I^I(n, m, h, s; r_{\perp} f_e^{\sigma}) &= -\frac{1}{n_e^{\sigma}} 2\pi K_{n\sigma} \delta_{s,1} \int_{r_n^-}^{r_n^+} dr r^h e^{Ar^2} e^{Br} (a_2 r^2 + a_1 r + a_o)^{n+m} \times \\
 &\times (nY + N_{\parallel} r) . \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

As partes real e imaginária das integrais $I(n, m, h, s; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f_e^{\sigma})$, que são necessárias quando se quer calcular as integrais que aparecem na parte não homogênea do tensor dielétrico, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 I^R(n, m, h, s; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f_e^{\sigma}) &= \frac{1}{n_e^{\sigma}} \frac{\mu_{\perp}^{\sigma} \mu_{\parallel}^{\sigma \frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\mu_{\perp}^{\sigma}} \right)^{n+m} \left[(1 - \delta_{no} \delta_{mo}) \sum_{l=0}^{n+m-1} (n+m-l-1)! J_{h,l} \right. \\
 &\quad \left. - J_{h, n+m-1} - J_{h, n+m-1}^{sn} \right] \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

$$I^I(n, m, h, s; \frac{r_{\perp}}{\gamma_e} f_e^{\sigma}) = -\frac{1}{n_e^{\sigma}} 2\pi K_{n\sigma} \delta_{s,1} \int_{r_n^-}^{r_n^+} dr r^h e^{Ar^2} e^{Br} (a_2 r^2 + a_1 r + a_o)^{n+m} . \quad (4.55)$$

de propagação da onda no meio. Com as expressões obtidas ao longo desse capítulo, pode-se começar a fazer um estudo quantitativo da absorção de ondas de alta frequência em plasmas inomogêneos com presença de corrente, através de uma análise numérica da relação de dispersão (2.14).

No próximo capítulo é isto basicamente que vai ser feito. Neste trabalho, entretanto, N_{\parallel} será considerado nulo, ou seja, o estudo ficará restrito ao caso de ondas que se propagam perpendicularmente ao campo magnético.

Capítulo 5

Análise quantitativa dos efeitos das inhomogeneidades

5.1 Introdução

Neste capítulo serão estudados quantitativamente os efeitos dos gradientes de densidade, temperaturas e velocidade de deriva na absorção de ondas por um plasma inhomogêneo.

Na seção 5.2 será brevemente explicado o procedimento numérico adotado para calcular as raízes da relação de dispersão.

Na seção seguinte o procedimento apresentado na segunda seção será utilizado para obter informações a respeito da absorção de ondas com frequência com valor próximo ao módulo da frequência de ciclotron dos elétrons, e também dos efeitos das inhomogeneidades nessa absorção; a análise será realizada para valores arbitrários dos parâmetros do plasma, na faixa de valores típicos de plasmas termonucleares, e também para valores arbitrários dos respectivos gradientes. Uma vez adquirida a compreensão adequada dos efeitos básicos, será feita uma aplicação a um caso em que os parâmetros do plasma são representados por perfis¹ de um Tokamak, modelado por meio de uma lâmina de plasma, apresentada na seção 5.4. Os perfis usados para os parâmetros são os mesmos usados em [FGM⁺80].

¹Maneira pela qual os parâmetros variam no espaço, ou seja, definir um perfil para um determinado parâmetro do plasma, é escrevê-lo como uma função de posição.

O estudo quantitativo a ser apresentado no presente capítulo ficará restrito ao caso de ondas que se propagam perpendicularmente ao campo magnético, embora tenham sido obtidas no capítulo anterior expressões válidas para direções de propagação arbitrárias. Com esta restrição há uma simplificação considerável nas expressões a serem utilizadas.

5.2 Análise numérica da relação de dispersão

A relação de dispersão (2.16), como já foi dito no capítulo 2, é uma relação entre o índice de refração do meio, no caso o plasma, e a frequência de uma onda. No caso em que $N_{\parallel} = 0$, dado o ângulo ψ , o índice de refração é obtido univocamente, para cada frequência, pois nesse caso só a componente perpendicular ao campo magnético é diferente de zero. Na relação de dispersão estão incluídas todas as componentes do tensor dielétrico efetivo, que contêm integrais em geral não factíveis analiticamente, dependendo da função distribuição utilizada. Na maioria dos casos, portanto, só é possível estudá-la numericamente.

Antes de entrar nessa análise numérica, é necessário que seja obtida a forma explícita da relação de dispersão, a partir de (2.15). Colocando-se $\vec{N} = (N_{\perp} \cos\psi, N_{\perp} \sin\psi, 0)$ em (2.15), usando-se (2.16), resulta

$$AN_{\perp}^4 + BN_{\perp}^2 + C = 0, \quad (5.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon_{xx} \cos^2\psi + \varepsilon_{yy} \sin^2\psi + (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}) \sin\psi \cos\psi \\ B &= \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yx} - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz} [\varepsilon_{xx} \cos^2\psi + \varepsilon_{yy} \sin^2\psi + (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}) \sin\psi \cos\psi] \\ &\quad + \sin\psi \cos\psi (\varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx} + \varepsilon_{zy} \varepsilon_{xz}) + \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx} \cos^2\psi + \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zy} \sin^2\psi \\ C &= \varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx} + \varepsilon_{yx} \varepsilon_{zy} \varepsilon_{xz} - \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx} - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zy} - \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yx} - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy}) \end{aligned}$$

É importante salientar que todas as componentes ε_{ij} do tensor dielétrico contêm N_{\perp} .

Da equação (5.1), vem que

$$N_{\perp}^{2+} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (5.2)$$

$$N_{\perp}^{2-} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (5.3)$$

O tratamento numérico da relação de dispersão consiste basicamente no seguinte: tomando-se como aproximação inicial para N_{\perp}^2 os valores obtidos para plasma frio (Com

$$X_e = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \text{ e } \omega_{pe} = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}).$$

$$N_{\perp}^2 = (1 - X_e), \quad (5.4)$$

para o modo ordinário e

$$N_{\perp}^2 = (2 - X_e) \text{ (para } \omega \approx \Omega_e), \quad (5.5)$$

para o modo extraordinário, calcula-se a aproximação seguinte para N_{\perp} através das equações (5.2) e (5.3). Usa-se então o valor obtido novamente nas mesmas equações para fazer a próxima iteração. O processo é repetido até haver uma convergência das iterações, ou seja, até que a diferença entre o resultado em uma dada iteração e o resultado na iteração anterior seja menor do que um valor anteriormente estipulado. Em geral bastam poucas iterações para que haja esta convergência. Em cada iteração, o programa toma os dois valores obtidos de (5.2) e (5.3), e compara com os valores na aproximação de plasma frio para ambos os modos, selecionando qual dos dois resultados é o do modo extraordinário e qual é o do ordinário.

É importante salientar que devem ser respeitadas a condição de validade para o tratamento de plasmas fracamente inhomôgenos (com a inclusão explícita das inhomogeneidades) e a condição de validade da expansão da função distribuição. Sabe-se que as quantidades adimensionais d_x^{σ} , d_{\parallel}^{σ} , d_{\perp}^{σ} e d_o são da ordem de $\frac{\lambda}{2\pi L}$, que deve ser tal que $\frac{\lambda}{2\pi L} \ll 1$. No presente trabalho foi estipulado um valor máximo de 0.005 (como

em [Cal90]) para essas quantidades, garantindo assim a não violação da condição de validade para o tratamento de plasmas fracamente inomogêneos.

A condição de validade para a expansão da função distribuição em raio de Larmor, feita em (3.80), escrita como $\frac{r_L}{L} \ll 1$, também não pode ser violada. Para os elétrons que possuem p_\perp próximo de $p_{\perp t}^\sigma = \sqrt{\frac{T_\perp^\sigma}{m_e}}$, que é a componente perpendicular (a \vec{B}_0) do momentum médio dos elétrons, pode-se escrever tal condição como

$$\frac{r_{Lt}^\sigma}{L} = \frac{c}{\omega} \frac{1}{m_e (\mu_\perp^\sigma)^{\frac{1}{2}} Y L} \ll 1 \quad (5.6)$$

Na região $p_\perp \approx p_{\perp t}^\sigma$, a função distribuição é mais significativa. No campo de temperaturas termonucleares e para Y próximo de 1, as partículas com $p_\perp \approx p_{\perp t}^\sigma$ satisfazem a condição (5.6) de pequeno raio de Larmor. No caso de partículas com p_\perp maiores do que $p_{\perp t}^\sigma$, como a função distribuição tende a zero com o aumento de p_\perp , mesmo que o raio de Larmor cresça, o produto $r_L \frac{\partial f_e}{\partial x}$ pode ter ainda um valor pequeno, tornando ainda possível a convergência de (3.80). Porém, o raio de Larmor ressonante é proporcional a $\sqrt{n^2 Y^2 - 1}$, dependendo do harmônico n considerado. Se para um dado harmônico a condição (5.6) é satisfeita, isto não significa necessariamente que para outros harmônicos ela também o será. Dessa forma, não é garantida a convergência de (3.80) para todos os harmônicos. No caso em que a superposição de harmônicos é desprezível, de modo que apenas um deles se torna efetivamente importante, se o raio de Larmor ressonante correspondente a esse harmônico obedece à condição (5.6), pode-se assegurar que não haverá problemas com o uso da expansão (3.80).

Nesse trabalho o estudo será feito para $\omega \approx \Omega_e$, sendo o harmônico $n = 1$ o mais importante no cálculo do índice de refração.

Inicialmente este estudo será feito para um ponto dado na lâmina, analisando a influência de cada parâmetro e de seus respectivos gradientes. O passo seguinte será usar perfis para os parâmetros do plasma, e estudar a absorção ao longo do eixo x da lâmina, bem como o efeito das inomogeneidades.

5.3 Análise no ponto

Quando se resolve a relação de dispersão para se obter o índice de refração, o resultado é em geral um número complexo. A parte real está associada com a propagação da onda no plasma, e a parte imaginária com a interação onda-partícula. É exatamente nessa interação que este trabalho está concentrado. A relação de dispersão foi resolvida duas vezes, para cada conjunto de parâmetros e para cada modo: uma vez inserindo nela somente a parte homogênea do tensor dielétrico, e a segunda, incluindo-se a parte não homogênea. Dessa forma podem ser comparados os dois resultados, e o efeito das inhomogeneidades pode ser calculado.

Sendo N_i^{nh} e N_i^h respectivamente as partes imaginárias do índice de refração com a inclusão das inhomogeneidades e sem as inhomogeneidades, pode-se definir o efeito percentual relativo das inhomogeneidades δ como:

$$\delta = 100 \times \frac{N_i^{nh} - N_i^h}{N_i^h} . \quad (5.7)$$

Pode-se mostrar que o efeito das inhomogeneidades sobre a parte real do índice de refração é praticamente nulo, como já citado em [Cal90]. Por esse motivo, este trabalho está concentrado na discussão dos efeitos dessas inhomogeneidades sobre a parte imaginária do índice de refração. Os resultados serão expostos sob a forma de gráficos, do tipo *índice de refração* $\times Y$, e $\delta \times Y$. Isto corresponde a expressar os resultados obtidos em função do inverso da frequência incidente ω , uma vez que $Y = \frac{|\Omega_e|}{\omega}$.

Na figura 5.1 são apresentados os primeiros resultados. O parâmetro que foi variado foi o parâmetro r_o , que especifica o momentum de deriva do feixe de elétrons. As letras **X** e **O** indicam respectivamente modo extraordinário e ordinário. Os gráficos mostram o efeito percentual relativo das inhomogeneidades (δ) em função de Y e a parte imaginária do índice de refração inhomogêneo (N_i^{nh}), também em função de Y . A fração de corrente presente (ρ_1) vale 0.05. A situação em que não há feixe de elétrons presentes ($r_o =$

0, $\rho_1 = 0$) é mostrada para fins de comparação. Nota-se que a máxima absorção pelos elétrons que têm momentum localizado no corpo da distribuição ocorre para $Y \approx 1$. À medida que se aumenta a velocidade de deriva, aparece um pico no gráfico do coeficiente de absorção para valores maiores de Y , que é devido à absorção pelos elétrons que têm momentum localizado na cauda da distribuição (*corrente*). Tal fato é explicado mais adiante, com o auxílio da figura 5.2.

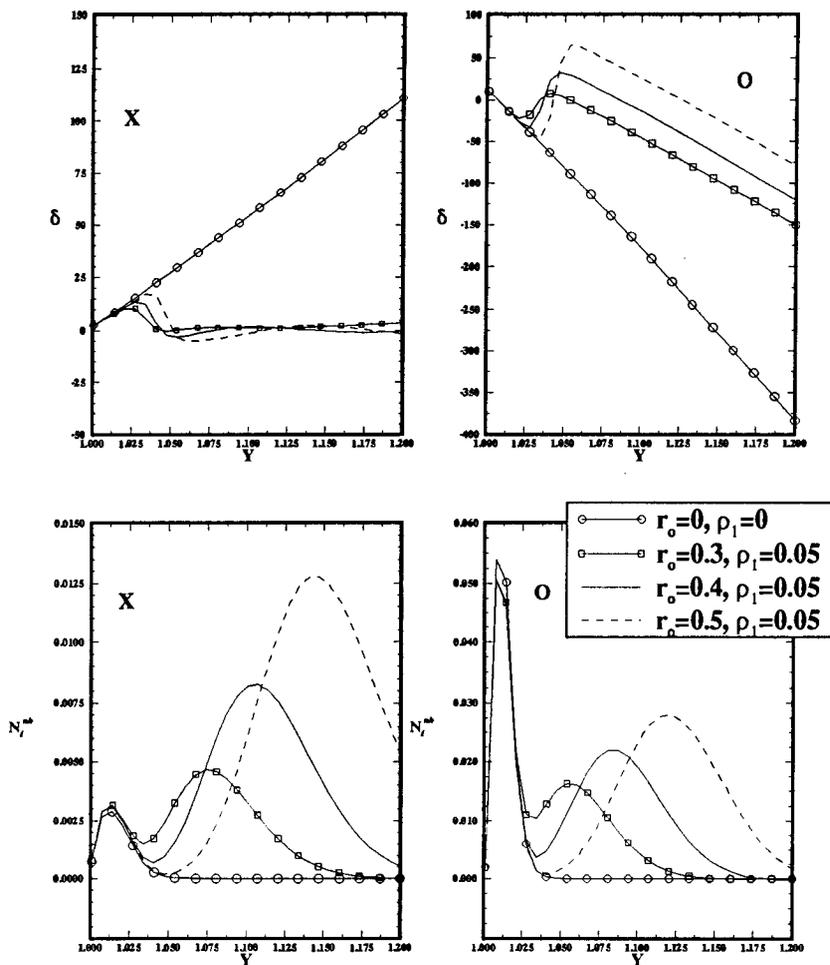


FIGURA 5.1: Variação do parâmetro r_o . Os outros parâmetros utilizados são, para todas as figuras dessa subseção: $\mu_{\perp}^o = \mu_{\parallel}^o = 255.5$, o que equivale a uma temperatura de 2 keV; $\mu_{\perp}^1 = \mu_{\parallel}^1 = 127.75$, o que equivale a uma temperatura de 4 keV; $d_{\perp}^o = d_{\parallel}^o = -0.05$, $d_{\perp}^1 = d_{\parallel}^1 = 0.05$, $X_e = 0.5$ e $\psi = 90^\circ$.

Além disso, vê-se que no modo extraordinário o efeito das inhomogeneidades (*dado por δ*) somente é significativo quando a absorção (*dada basicamente por N_i^{nh}*) é muito

pequena, tanto no caso em que não há corrente (com $r_o = \rho_1 = 0$) como no caso em que há presença dela (ver [Cal90]). Para ambos os modos o efeito percentual relativo das inhomogeneidades diminui com o aumento do coeficiente de absorção.

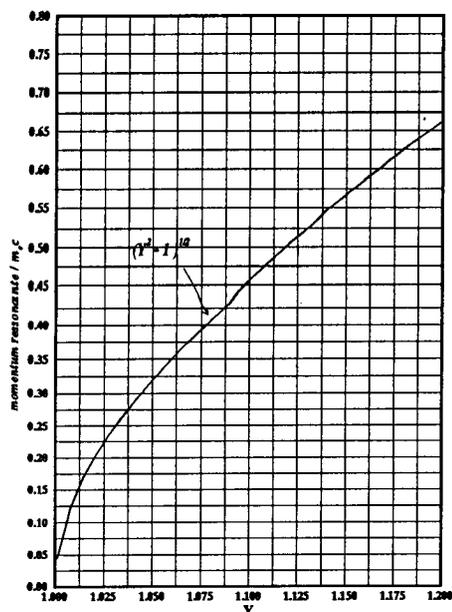


FIGURA 5.2: Gráfico de $\frac{Pr_{res}}{m_e c}$ em função de Y .

Ao ser colocada uma certa quantidade de corrente, definida por ρ_1 , com um certo momentum de deriva, aumenta-se o número de partículas na cauda da função distribuição. Espera-se que colocando partículas em regiões de momentum mais alto, aumente a absorção para valores de Y maiores, o que realmente acontece. Entretanto, como mostra a figura 5.1, o efeito de inhomogeneidades se torna menor nessas mesmas regiões.

Convém ainda salientar que em todas as figuras, $n = 1$ é o harmônico que mais contribui para a absorção, uma vez que ela está sendo estudada para ondas incidentes com $\omega \approx \Omega_e$. Sendo assim o termo $e^{-\frac{\mu\sigma}{2}(n^2 Y^2 - 1)}$, que aparece na parte imaginária das integrais $I(n, m, h, s, G)$, se torna muito pequeno para $n > 1$, de modo que a contribuição de harmônicos com $n > 1$ para a absorção se torna praticamente nula.

O deslocamento dos picos de absorção pela cauda da distribuição à medida que se aumenta r_o pode ser entendido, como foi mencionado anteriormente, com o auxílio da figura 5.2. Ela mostra o gráfico do momentum ressonante (dividido por $m_e c$) para o

harmônico $n = 1$ em função de Y .

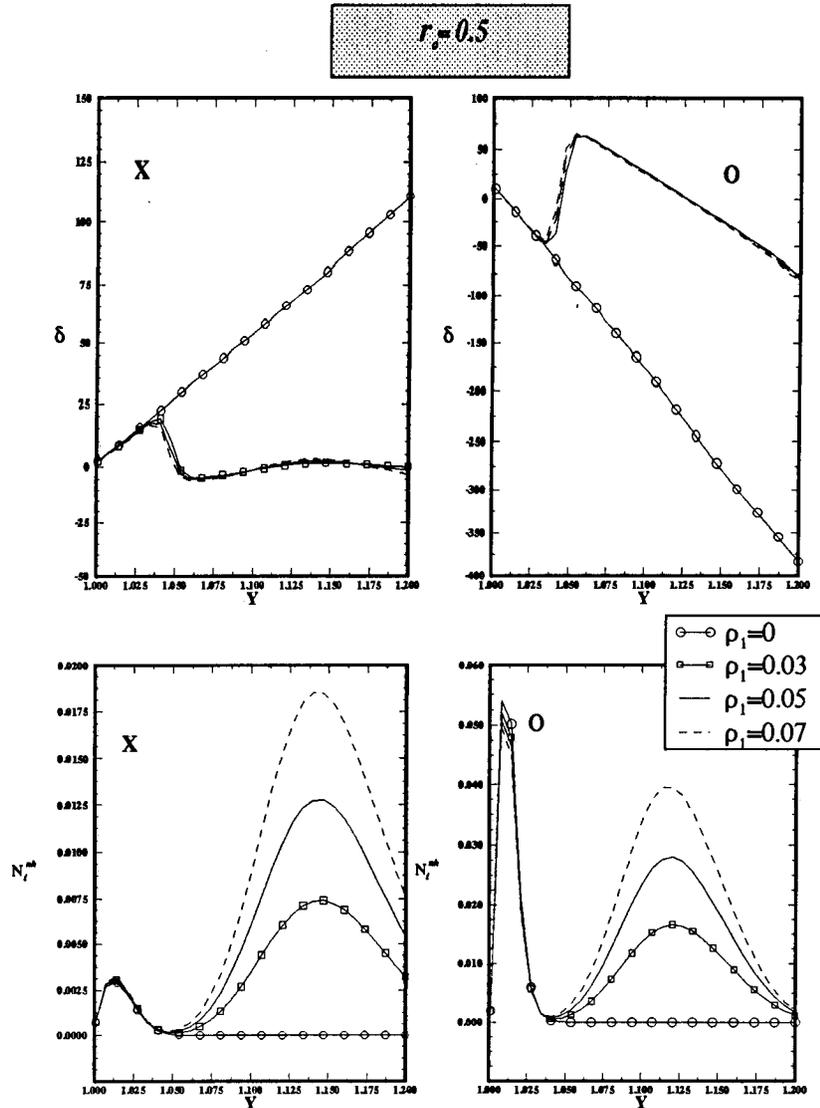


FIGURA 5.3: Variação do parâmetro ρ_1 .

Por exemplo, para partículas que têm momentum tal que $\frac{p}{m_e c} \approx 0.5$, a ressonância se dará para $Y \approx 1.125$; ou seja, se houver um número significativo de partículas com momentum dessa ordem, haverá um pico no gráfico de N_i^{nh} para $Y \approx 1.125$. Na figura 5.1 pode-se notar que para $r_o = 0.5$ o segundo pico em N_i^{nh} aparece próximo da região $Y \approx 1.125$.

Pode-se também estudar o que acontece em N_i^{nh} e δ aumentando a quantidade de corrente (através de ρ_1). Analisando a figura 5.3, que mostra as mesmas quantidades que aparecem na figura 5.1, nota-se que o aumento da quantidade de partículas do feixe para um r_o dado (no caso $r_o = 0.5$), faz com que haja um aumento na absorção

pelos elétrons da cauda sem que o pico de absorção se desloque. Isto é coerente, pois o momentum de deriva é constante em todos os casos ($r_o = 0.5$) o que faz com que o momentum ressonante também o seja; por isso o pico aparece sempre para o mesmo valor de Y .

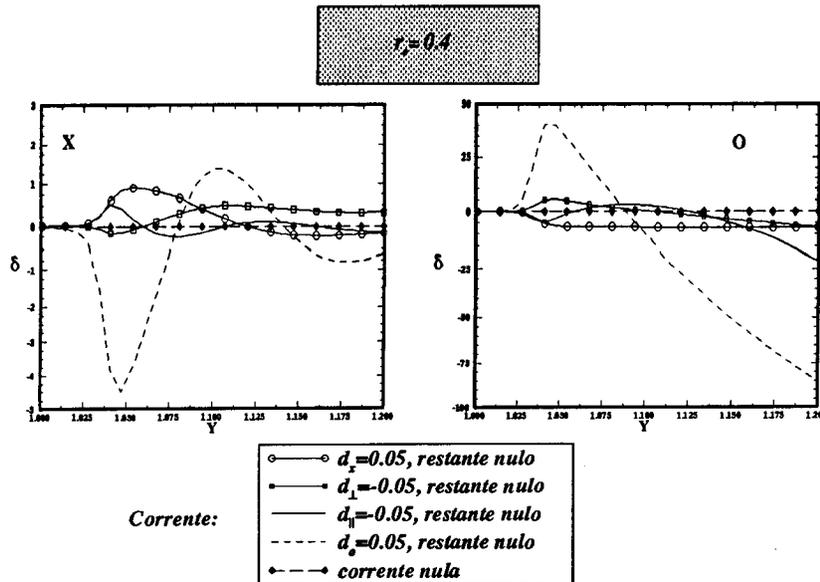


FIGURA 5.4: O efeito relativo de cada gradiente. O plasma de fundo é considerado homogêneo.

Outra análise interessante de ser feita, é a do efeito que cada gradiente tem separadamente sobre a absorção. Para isso, pode-se olhar na figura 5.4, onde estão expostos para ambos os modos, os efeitos relativos (δ) que cada um dos gradientes faz sobre o coeficiente de absorção, considerando-se o plasma de fundo homogêneo e levando-se em conta separadamente cada um dos gradientes relativos à corrente. Nota-se que tanto para o modo ordinário como para o extraordinário, o maior efeito relativo é o que está associado ao gradiente do momentum de deriva, para a maioria dos valores de Y . No caso de um plasma Maxwelliano (ver [Ca190]), foi visto que a maior contribuição provinha do gradiente de temperatura perpendicular ao campo magnético.

Outro estudo que pode ser feito é o do comportamento de N_i^{nh} e δ com a densidade do plasma (que está embutida em X_e) e ψ , o ângulo entre a direção de propagação da onda e a direção x , que é a direção dos gradientes das inhomogeneidades. Na figura 5.5 pode-se ver que o aumento da densidade faz aumentar o efeito relativo das inhomogeneidades, em

ambos os modos. Porém, no que se refere à absorção, o aumento de densidade faz com que no modo extraordinário ela diminua, acontecendo o contrário com o modo ordinário.

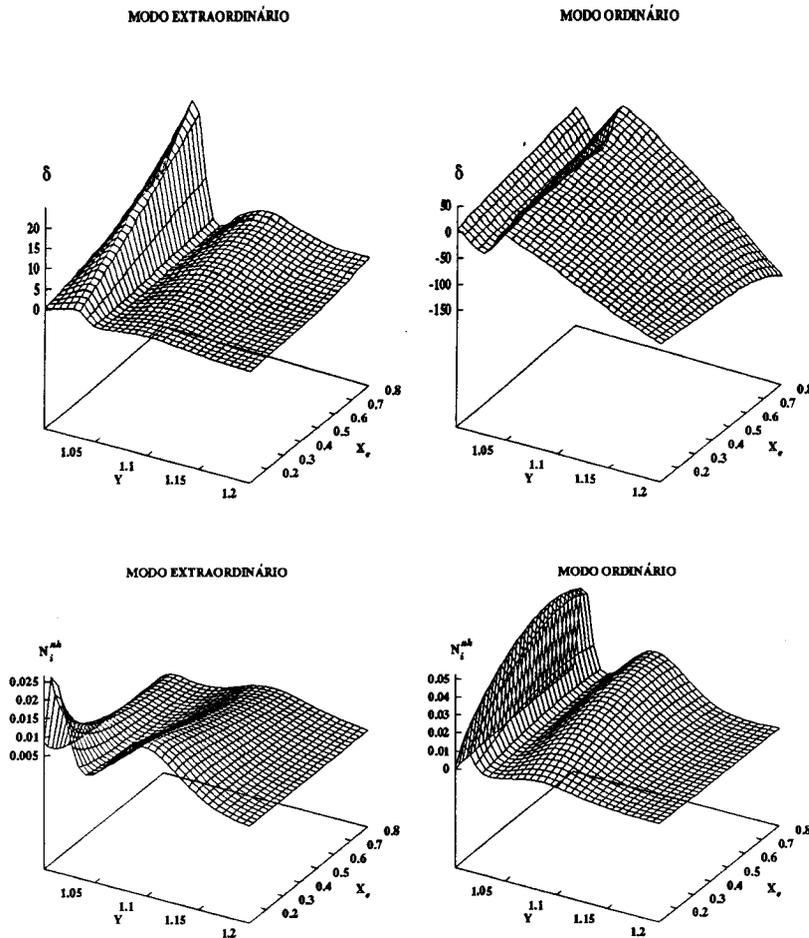


FIGURA 5.5: Gráficos tridimensionais que mostram o comportamento de N_1^{nh} e δ em função da densidade de partículas do plasma (proporcional a X_e), para vários valores de Y .

Este resultado é bem conhecido na literatura: na aproximação de partículas independentes a absorção tende a crescer com o número de partículas. Em plasmas mais densos, os efeitos dielétricos fazem com que a absorção fique proporcional ao inverso da densidade para o modo extraordinário (ver [Bek66], [FGRM78] e [BCdBE83]).

Já na figura 5.6 pode-se ver gráficos similares, de δ em função de Y e em função do ângulo entre a direção de propagação da onda e a direção das inhomogeneidades. Observa-se que para ambos os modos, o efeito máximo de inhomogeneidade acontece para $\psi = 90^\circ$. É bom lembrar que ao longo da direção $\psi = 90^\circ$ existe uma deriva de

elétrons, causada justamente pela inhomogeneidade na densidade. O comportamento do coeficiente de absorção é muito complexo, mas não é de surpreender que nessa direção os efeitos de inhomogeneidades na absorção sejam mais pronunciados.

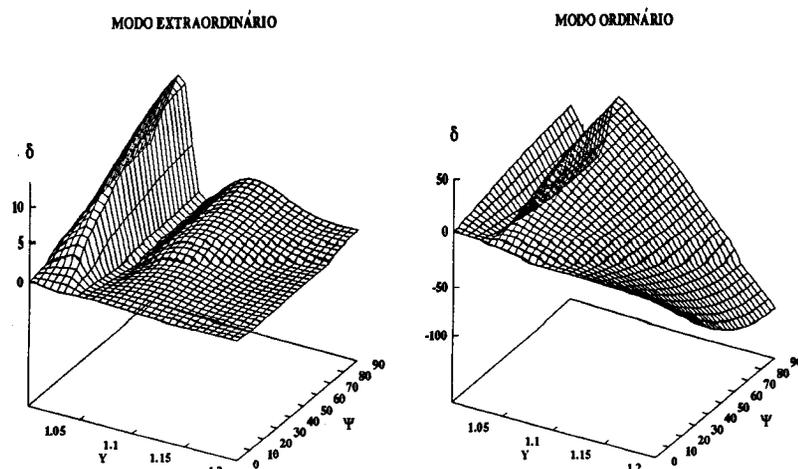


FIGURA 5.6: Gráficos tridimensionais que mostram o comportamento de δ em função do ângulo ψ , para vários valores de Y .

Na figura 5.7, pode-se ver a origem da deriva dos elétrons com mais clareza. Os elétrons giram em órbitas circulares no plano xy , devido à presença do campo magnético externo.

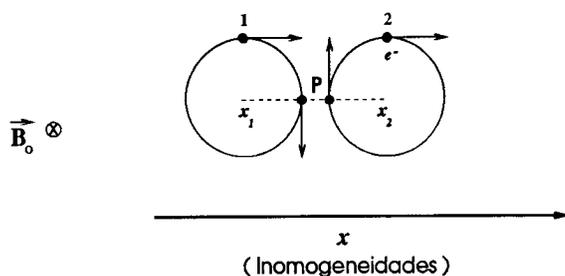


FIGURA 5.7: Deriva para $\psi = 90^\circ$.

Em 1, a densidade de elétrons tem um valor diferente de 2, o que faz com que no ponto P, haja mais elétrons indo para um lado do que para o outro, surgindo então uma

deriva na direção perpendicular às inhomogeneidades.

Em termos de análise no ponto, foram expostos os resultados mais importantes. O próximo passo, será definir perfis para os parâmetros do plasma, como foi feito em [FGM+80].

5.4 A lâmina de plasma infinita

O que se quer aqui nessa seção, é apresentar o modelo de lâmina de plasma, usado para uma descrição aproximada de um plasma em um Tokamak. O plasma pode ser analisado localmente através de uma lâmina de plasma, como mostra a figura 5.8.

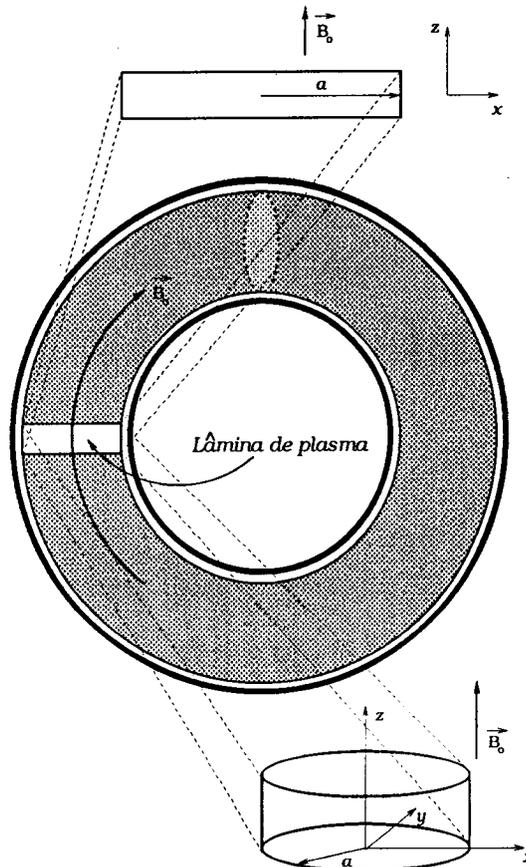


FIGURA 5.8: Desenho esquemático de um Tokamak. As regiões ampliadas mostram a lâmina de plasma.

Nela se mostra um desenho esquemático de um Tokamak toroidal, e a região a ser

tratada, que é aproximada por uma lâmina de plasma, está ampliada no quadro à direita abaixo. Está desenhado também o sistema de coordenadas adotado e a direção do campo magnético externo \vec{B}_0 em relação ao mesmo.

O campo magnético \vec{B}_0 é gerado por bobinas que estão enroladas ao longo do Tokamak. Existe também um campo poloidal, que é gerado pela corrente dos íons e elétrons na direção de \vec{B}_0 ; o campo toroidal \vec{B}_0 é mais intenso, sendo o campo poloidal desprezado na aproximação de lâmina. Na lâmina, pode se considerar que o campo \vec{B}_0 só possui componente na direção z .

Uma secção reta do plasma está ampliada na parte inferior da figura 5.8, e mostra uma visão tridimensional da lâmina de plasma. Se a direção de incidência em um ponto da superfície lateral for perpendicular à reta tangente a essa superfície nesse mesmo ponto, isto será equivalente a uma onda incidindo em um lâmina de espessura $2a$.

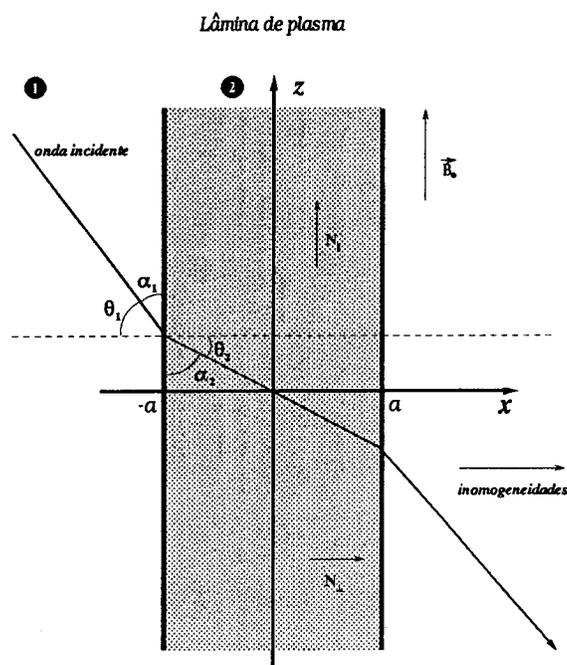


FIGURA 5.9: Lâmina de plasma infinita nas direções y e z .

A região ampliada na parte superior da figura 5.8 é na verdade essa lâmina vista de

perfil, e ela pode ser vista em detalhe na figura 5.9, que mostra um desenho de uma lâmina de plasma infinita: uma região finita por exemplo na direção x , e infinita nas direções y e z ; fora da região limitada pelas interfaces está o meio 1, que pode ser o vácuo, e dentro está o meio 2, que é o plasma.

Embora a lâmina desenhada na figura 5.8 não seja realmente infinita nas direções z e y , para pequenos ângulos de incidência em relação à direção x , podem ser desprezados os efeitos de finitude da lâmina. Dessa forma, a onda se propaga como se a lâmina fosse infinita tanto na direção z quanto na direção y .

Na figura 5.9 pode-se ver as direções do campo magnético externo \vec{B}_0 , bem como a direção dos gradientes das inhomogeneidades e das componentes do índice de refração paralelo e perpendicular ao campo magnético, em relação ao sistema de coordenadas escolhido.

Escrevendo-se a lei de *Snell* em relação aos ângulos θ_1 e θ_2 , obtém-se que:

$$N_1 \text{sen} \theta_1 = N_2 \text{sen} \theta_2, \quad (5.8)$$

onde N_1 e N_2 são os índices de refração dos meios 1 e 2, respectivamente. Em termos dos ângulos α_1 e α_2 , pode-se escrever

$$\underbrace{N_1 \cos \alpha_1}_{N_{\parallel}} = \underbrace{N_2 \cos \alpha_2}_{N_{\parallel}}, \quad (5.9)$$

de onde se conclui que a componente do índice de refração paralela ao campo magnético é contínua e constante ao longo da interface que separa os meios 1 e 2. Na verdade, o raciocínio feito para a superfície que define a interface, vale para qualquer superfície paralela ao longo da lâmina.

No presente trabalho, toda a análise será feita para a propagação perpendicular ao campo magnético. Dessa forma, em toda a lâmina, N_{\parallel} é constante e nulo. Será importante ter em mente a figura (5.9) quando os perfis forem incluídos no cálculo do

índice de refração, o que será feito a seguir.

5.5 Análise utilizando perfis

Em toda a análise feita a seguir, os parâmetros relativos ao plasma de fundo são descritos por perfis parabólicos. Tais perfis são apresentados na subseção 5.5.1 e valem também para o caso em que os parâmetros relativos à corrente são descritos por perfis gaussianos (subseção 5.5.2).

5.5.1 Uso de perfil parabólico para os parâmetros da corrente

Na presente seção, serão introduzidos perfis para os principais parâmetros do plasma; isto é, as temperaturas (*perpendicular e paralela*), a densidade, o campo magnético e a velocidade de deriva serão escritos como funções de x , podendo-se obter de tais expressões, os seus respectivos gradientes. Na formulação deste trabalho não foi considerado explicitamente o efeito da inhomogeneidade devida ao gradiente do campo magnético, no cálculo das componentes do tensor dielétrico. A variação espacial do campo magnético foi levada em conta apenas de forma local.

De maneira geral, sabe-se que a densidade e a temperatura de um plasma no Tokamak são máximas nas imediações do centro da lâmina e tendem a zero nas bordas, fato que pode ser bem descrito por um perfil parabólico, razão pela qual esta descrição já tem sido empregada na literatura (ver [FGM⁺80]).

Nessa subseção este perfil será utilizado para todos os parâmetros do plasma, com exceção do campo magnético, cujo perfil é linear (ver [FGM⁺80]).

Considere-se uma lâmina de plasma, como na figura 5.9, onde o parâmetro a é tal que a região $-a \leq x \leq a$ define a sua espessura. Os perfis são dados pelas seguintes expressões:

1) Para o plasma de fundo:

$$n_e^o(x) = n_e^o(0) \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right] \quad (5.10)$$

$$T_{\parallel}^o(x) = T_{\parallel}^o(0) \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (5.11)$$

$$T_{\perp}^o(x) = T_{\perp}^o(0) \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^2, \quad (5.12)$$

2) Para o feixe (corrente):

$$n_e^1(x) = n_e^1(0) \left[1 - \left(\frac{x}{a_1} \right)^2 \right] \quad (5.13)$$

$$T_{\parallel}^1(x) = T_{\parallel}^1(0) \left[1 - \left(\frac{x}{a_1} \right)^2 \right]^2 \quad (5.14)$$

$$T_{\perp}^1(x) = T_{\perp}^1(0) \left[1 - \left(\frac{x}{a_1} \right)^2 \right]^2, \quad (5.15)$$

onde a_1 define a escala de variação dos perfis do feixe. A velocidade de deriva, por sua vez, é dada por

$$v_o(x) = v_o(0) \left[1 - \left(\frac{x}{a_1} \right)^2 \right], \quad (5.16)$$

e a sua relação com a grandeza adimensional r_o é obtida de $r_o = \frac{\gamma_e v_o}{c}$, resultando em um perfil para r_o do tipo:

$$r_o(x) = \frac{v_o(x)}{c \left\{ 1 - \left[\frac{v_o(x)}{c} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.17)$$

Para o campo magnético externo $\vec{B}_o = B_o \vec{e}_z$, o perfil é definido como:

$$B_o(x) = B_o(0) \left[1 - \frac{x}{a_b} \right]. \quad (5.18)$$

O parâmetro a_b define a escala de variação do perfil do campo magnético; é na verdade o raio maior do Tokamak e, no presente trabalho, $a_b = 80$ cm. Também no presente trabalho $a = 22$ cm. Com isso, podem ser calculados os gradientes dos parâmetros, e

um estudo semelhante ao que foi feito na seção anterior pode ser iniciado. Os gráficos com os perfis e os gradientes em função de x estão apresentados na subseção 5.5.3.

Nesta seção, os gráficos não aparecerão na forma *quantidade* $\times Y$, sendo agora os resultados expostos em gráficos do tipo *quantidade* $\times x$. A frequência ω utilizada para a onda incidente foi suposta igual ao módulo da frequência de ciclotron no centro, definida por $\Omega_e(0) = \frac{-eB_o(0)}{m_e c}$.

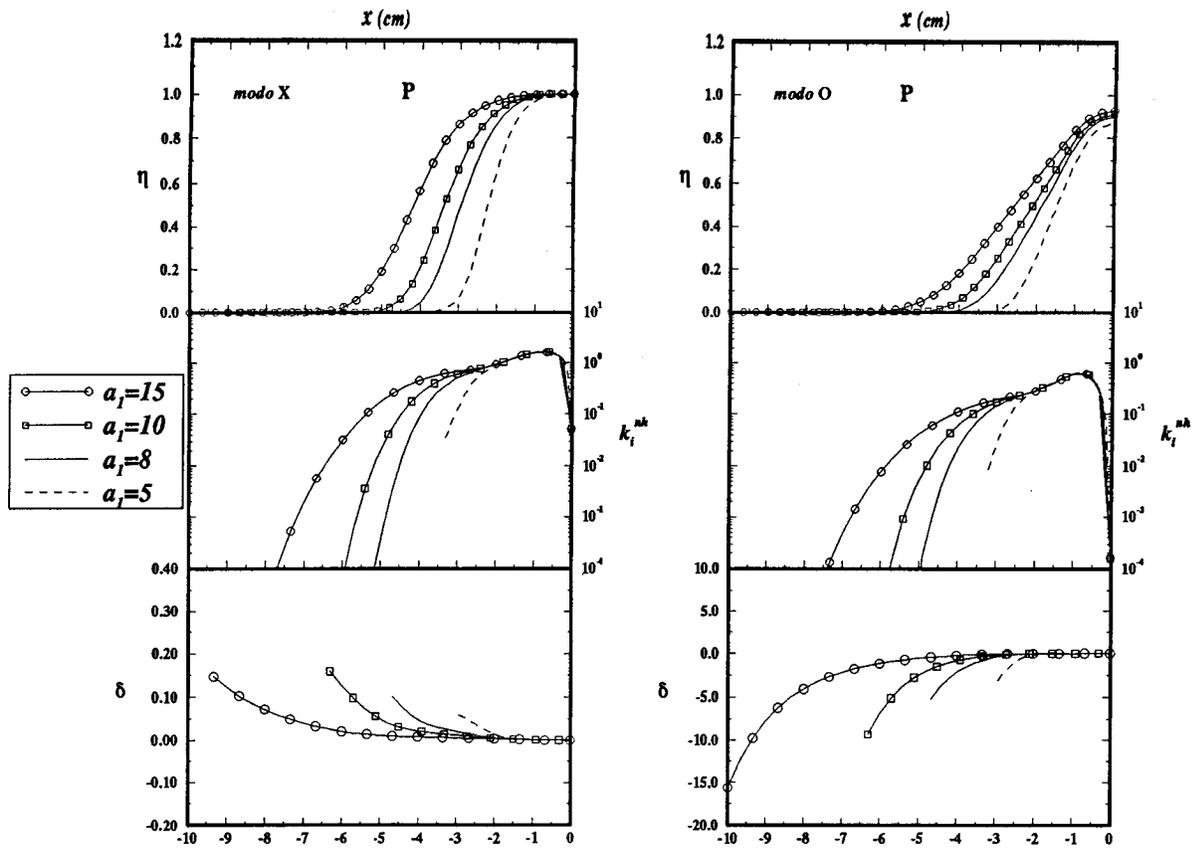


FIGURA 5.10: Gráficos de η , k_i^{nh} e δ em função de x . Os parâmetros no centro são para todos os gráficos dessa subseção: $T_{\perp}^o(0) = T_{\parallel}^o(0) = 2$ keV, $T_{\perp}^1(0) = T_{\parallel}^1(0) = 4$ keV; $\rho_1(0) = 0.1$ e $\rho_o(0) = 0.9$; $v_o(0) = 5.3 \times 10^9$ cm/s; $B_o(0) = 80$ kG.

Na figura 5.10 estão os resultados obtidos para η , k_i^{nh} e δ , para os modos ordinário e extraordinário, usando-se os perfis (5.10) a (5.18). A grandeza η é a absorção integrada, dada por

$$\eta(x) = 1 - e^{-2 \int_{-a}^x k_i^{nh}(x') dx'} \quad (5.19)$$

que é a fração de energia da onda absorvida até a posição x da lâmina. Para $x \approx -a$, $\eta \approx 0$, ou seja, nenhuma energia da onda é absorvida em regiões próximas da borda $x = -a$, por onde ela incide. À medida que x vai crescendo, η vai se tornando cada vez mais próximo de 1, como se vê nessa figura. Isto indica que nessa região aproximadamente 100% da energia da onda foi absorvida pelos elétrons do plasma. Além de η , a figura mostra os gráficos do efeito relativo das inhomogeneidades δ em função de x , bem como a parte imaginária do vetor de onda não homogêneo k_i^{nh} , também em função de x . Em todos os gráficos dessa seção o ângulo ψ vale 30° , independente do tipo de perfil utilizado para a corrente.

Nessa figura foi variado o parâmetro a_1 , sendo considerados os casos em que a corrente está progressivamente mais concentrada no centro da lâmina. Conseqüentemente, os gradientes ficam mais acentuados à medida que x se aproxima de $-a_1$.

Ao se analisar o gráfico de δ em função de x , na figura 5.10, nota-se que o efeito das inhomogeneidades somente começa a crescer onde o coeficiente de absorção se torna pequeno. Na figura, também estão expostos os mesmos gráficos para o modo ordinário. Vê-se que o efeito das inhomogeneidades sobre o coeficiente de absorção do modo ordinário é consideravelmente maior do que sobre o coeficiente do modo extraordinário.

É importante salientar que o perfil parabólico tem um inconveniente: as quantidades adimensionais d_{\parallel}^1 , d_{\perp}^1 , d_x^1 e d_o divergem para $x = \pm a_1$, o que faz com que a região próxima a esses pontos não possa ser considerada. Para que se possa fazer um estudo sem ter de tomar cuidado com tais problemas, serão usados perfis gaussianos para os parâmetros do feixe, a seguir.

5.5.2 Uso de perfil gaussiano para os parâmetros da corrente

Quando se usa um perfil gaussiano para os parâmetros da corrente, não acontecem os problemas de divergência de d_{\parallel}^1 , d_{\perp}^1 , d_x^1 e d_o , como no caso do perfil parabólico. Serão apresentados aqui, gráficos semelhantes aos da figura 5.10, e alguns outros.

Antes de mais nada, é necessário definir os perfis para os parâmetros do feixe. Eles são escritos da seguinte forma:

$$n_e^1(x) = n_e^1(-a_x) e^{-\left(\frac{x+a_x}{a_1}\right)^2} \quad (5.20)$$

$$T_{\parallel}^1(x) = T_{\parallel}^1(-a_x) e^{-\left(\frac{x+a_x}{a_1}\right)^2} \quad (5.21)$$

$$T_{\perp}^1(x) = T_{\perp}^1(-a_x) e^{-\left(\frac{x+a_x}{a_1}\right)^2} \quad (5.22)$$

$$v_o(x) = v_o(-a_x) e^{-\left(\frac{x+a_x}{a_1}\right)^2} \quad (5.23)$$

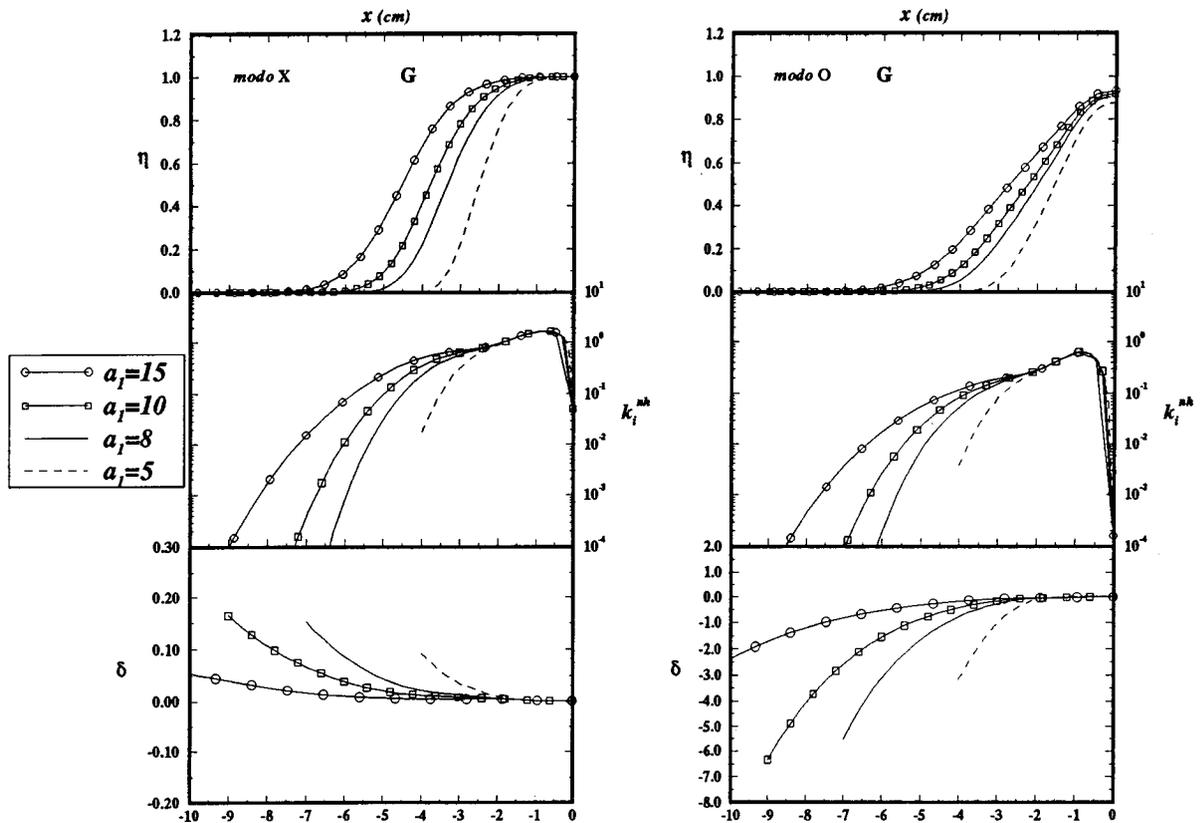


FIGURA 5.11: Gráficos de η , k_i^{nh} e δ em função de x para $a_x = 0$. Os parâmetros no centro são os seguintes, para todos os gráficos dessa subseção: $T_{\perp}^o(0) = T_{\parallel}^o(0) = 2$ keV, $T_{\perp}^1(-a_x) = T_{\parallel}^1(-a_x) = 4$ keV; $\rho_1(-a_x) = 0.1$ e $\rho_o(0) = 0.9$; $v_o(-a_x) = 5.3 \times 10^9$ cm/s; $B_o(0) = 80$ kG

Os parâmetros do plasma de fundo continuam sendo descritos por um perfil parabólico, e perto das bordas da lâmina os gradientes relativos podem também divergir. Entretanto, a absorção perto das bordas não será discutida por ser não significativa, de

modo que o problema não aparece.

Deve-se notar que a posição do centro do feixe não é mais em $x = 0$, passando a ser em $x = -a_x$. Dessa forma, este parâmetro pode ser variado de modo a colocar o feixe em regiões da lâmina onde não havia praticamente absorção (para $a_x = 0$), na tentativa de aumentar a mesma, analisando-se então o que acontece com o efeito relativo das inhomogeneidades, δ .

Para iniciar, serão apresentados gráficos similares aos do caso de perfil parabólico. Os primeiros estão na figura 5.11. Como na figura 5.10, a figura 5.11 mostra o comportamento de η , k_i^{nh} e de δ em função da posição x na lâmina. Os gráficos foram feitos para vários valores de a_1 , com $a_x = 0$, de modo que seja possível estudar (para o caso em que se considera perfil gaussiano) como se comportam η , k_i^{nh} e δ em função de x quando a corrente está progressivamente mais concentrada no centro da lâmina.

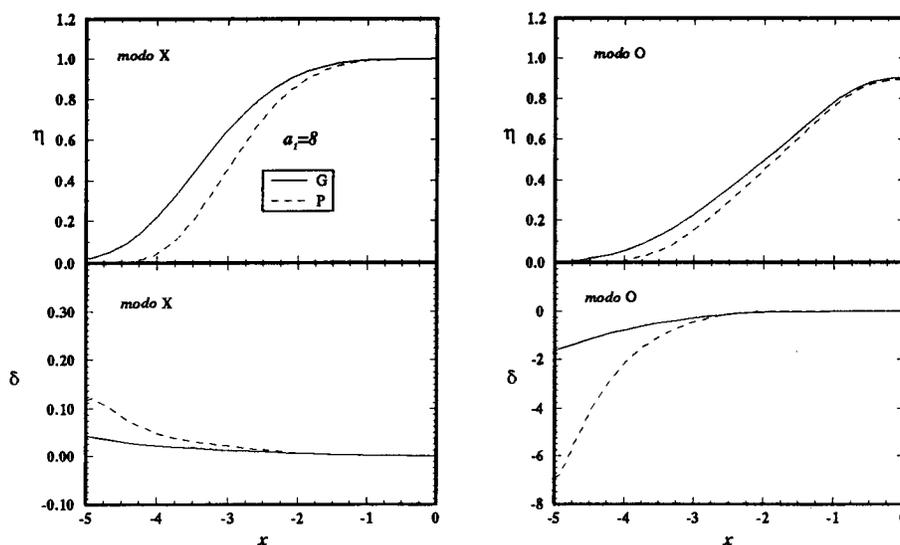


FIGURA 5.12: Uma comparação dos resultados obtidos para os dois tipos de perfil.

Não há muita diferença em relação ao perfil parabólico no que se refere aos efeitos das inhomogeneidades, pois estes efeitos continuam sendo relevantes onde o coeficiente de absorção é pouco significativo. O uso do perfil gaussiano faz apenas com que ele tenda mais lentamente a zero, ou seja, a região da lâmina para a qual o coeficiente de absorção é significativo é maior do que no caso de perfil parabólico, como mostra o

gráfico da absorção integrada η em função de x , na figura 5.12. Como também mostra essa figura, o efeito relativo da inhomogeneidade aumenta mais rapidamente no caso parabólico; à medida que x se aproxima da borda $x = -a$ da lâmina, os parâmetros do plasma (descritos por perfis parabólicos) tendem a zero muito mais rapidamente do que com o perfil gaussiano quando x se aproxima de $-a_1$, fazendo com que os seus gradientes sejam mais pronunciados para o caso parabólico do que para o caso gaussiano, na região que define o limite do feixe.

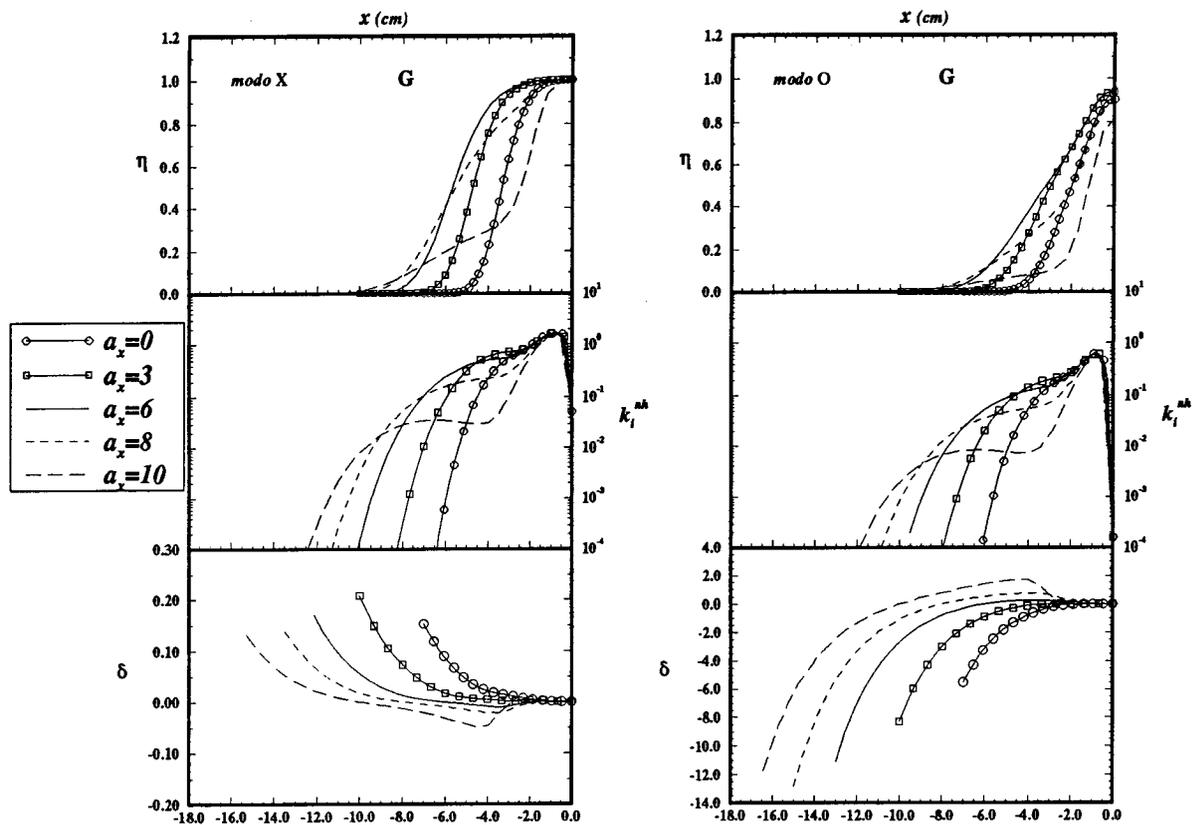


FIGURA 5.13: Gráfico de η , k_i^{nh} e δ em função de x com variação do parâmetro a_x . Para ambos os modos de propagação $a_1 = 10$.

Pode-se também deslocar o feixe ao longo da lâmina de plasma, fazendo com que seu centro coincida com valores de x onde a absorção começa a decrescer, com o intuito de aumentá-la nessas regiões. Paralelamente, pode-se analisar como se comporta δ à medida em que o feixe é deslocado ao longo da lâmina. Para fazê-lo, é preciso variar

o parâmetro a_x , que aparece nos perfis definidos pelas equações (5.20) a (5.23), e que define a posição x do centro do feixe de elétrons na lâmina. Na figura 5.13, estão expostos os gráficos obtidos para quatro posições fora do centro da lâmina ($x = 0$). Estão colocados também, resultados já expostos anteriormente (para $a_x = 0$), para fins de comparação.

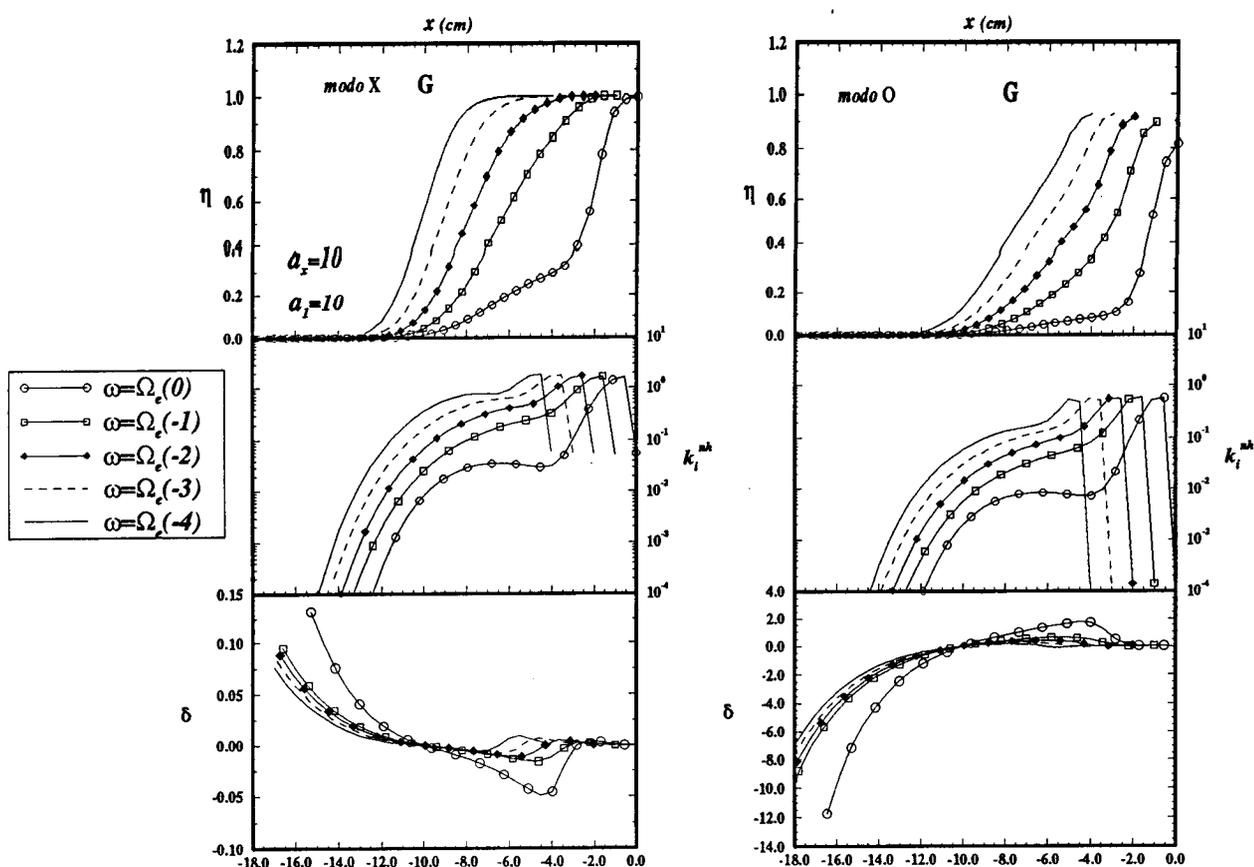


FIGURA 5.14: Gráfico de η , k_i^{nh} e δ em função de x . Variação da frequência ω para ambos os modos de propagação.

O que se vê é que, quanto mais se desloca o feixe na direção da borda $x = -a$ da lâmina, mais vai aumentando a região para a qual a absorção é significativa, como se vê nos gráficos de η , para ambos os modos. Porém, nessas mesmas regiões, o efeito relativo das inhomogeneidades tende a diminuir à medida que o feixe é deslocado para próximo de $x = -a$, tanto para o modo ordinário quanto para o modo extraordinário.

Pode-se também variar a frequência ω da onda, como mostra a figura 5.14. Nela estão apresentados gráficos para a frequência da onda igual à frequência de ciclotron

dos elétrons em $x = 0$ cm, -1 cm, -2 cm, -3 cm e -4 cm. Nota-se que a região da lâmina para a qual a absorção é significativa se desloca à medida que ω varia. Isto será explicado mais adiante, quando forem mostrados os gráficos com os perfis dos parâmetros e de seus gradientes. Nota-se ainda que o efeito relativo das inomogeneidades mais uma vez diminui à medida em que a absorção aumenta.

A análise mostrou que os efeitos de inomogeneidades não são significativos na faixa de frequência de ciclotron eletrônica, para plasmas tipo Tokamak, tanto para o modo extraordinário como para o modo ordinário, ao menos no caso em que não é levada em conta a inomogeneidade no campo magnético externo. Em situações convencionais, em que os parâmetros do plasma podem ser descritos por perfis suaves e que satisfaçam à condição de validade para a aproximação local, é de se esperar que δ diminua em todos os pontos onde aumenta consideravelmente a absorção integrada η .

5.5.3 Gráficos dos parâmetros e seus respectivos gradientes

O que resta ainda mostrar são os gráficos dos perfis e de seus respectivos gradientes, ilustrando como é a dependência dos mesmos ao longo da direção x da lâmina. Inicialmente será exposto o caso em que os parâmetros relativos ao feixe de elétrons são descritos por perfis parabólicos. Com isso se poderá ver que as quantidades adimensionais d_{\parallel} , d_{\perp} , d_x e d_o obedecem a condição de que não excedam o valor 0.05 em todas as posições x da lâmina que foram estudadas. Tal imposição sobre o valor dessas quantidades foi feita na análise paramétrica e garante a não violação da aproximação local.

Os parâmetros do plasma de fundo são sempre descritos por perfis parabólicos, e também serão expostos os seus gráficos e respectivos gradientes. Na figura 5.15 podem ser vistos, tanto para o plasma de fundo como para o feixe de elétrons, os perfis da densidade de elétrons (n_e), das temperaturas paralela e perpendicular ao campo magnético ($T_{\parallel, \perp}$) e as quantidades adimensionais $\mu_{\parallel, \perp}$; como já foi visto anteriormente,

$\mu_{\parallel, \perp} = \frac{T_{\parallel, \perp}}{m_e c^2}$. A figura 5.15 foi feita para quatro valores de a_1 e os outros parâmetros são os mesmos das figuras 5.10 e 5.11.

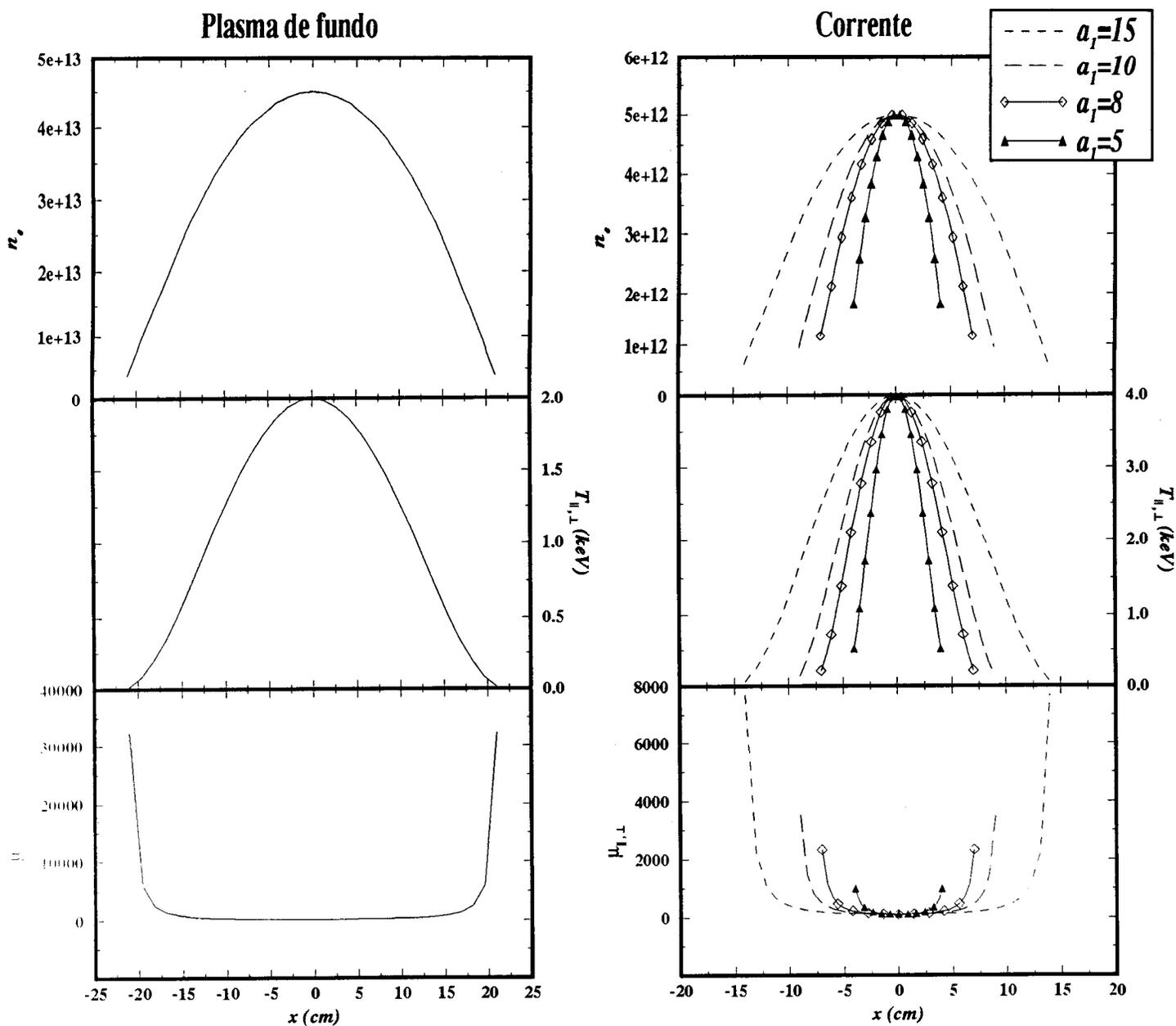


FIGURA 5.15: Gráficos de n_e^σ , $T_{\parallel, \perp}^\sigma$ e $\mu_{\parallel, \perp}^\sigma$ em função de x (parâmetros relativos ao feixe e plasma de fundo descritos por perfis parabólicos). Os gráficos do lado direito são relativos ao feixe.

No que se refere ao feixe, existem ainda os perfis para a velocidade de deriva (v_o) e para a quantidade adimensional r_o , cujo perfil pode ser obtido do perfil de v_o através de

(5.17). Tais perfis estão expostos na figura 5.16, também para quatro diferentes valores de a_1 .

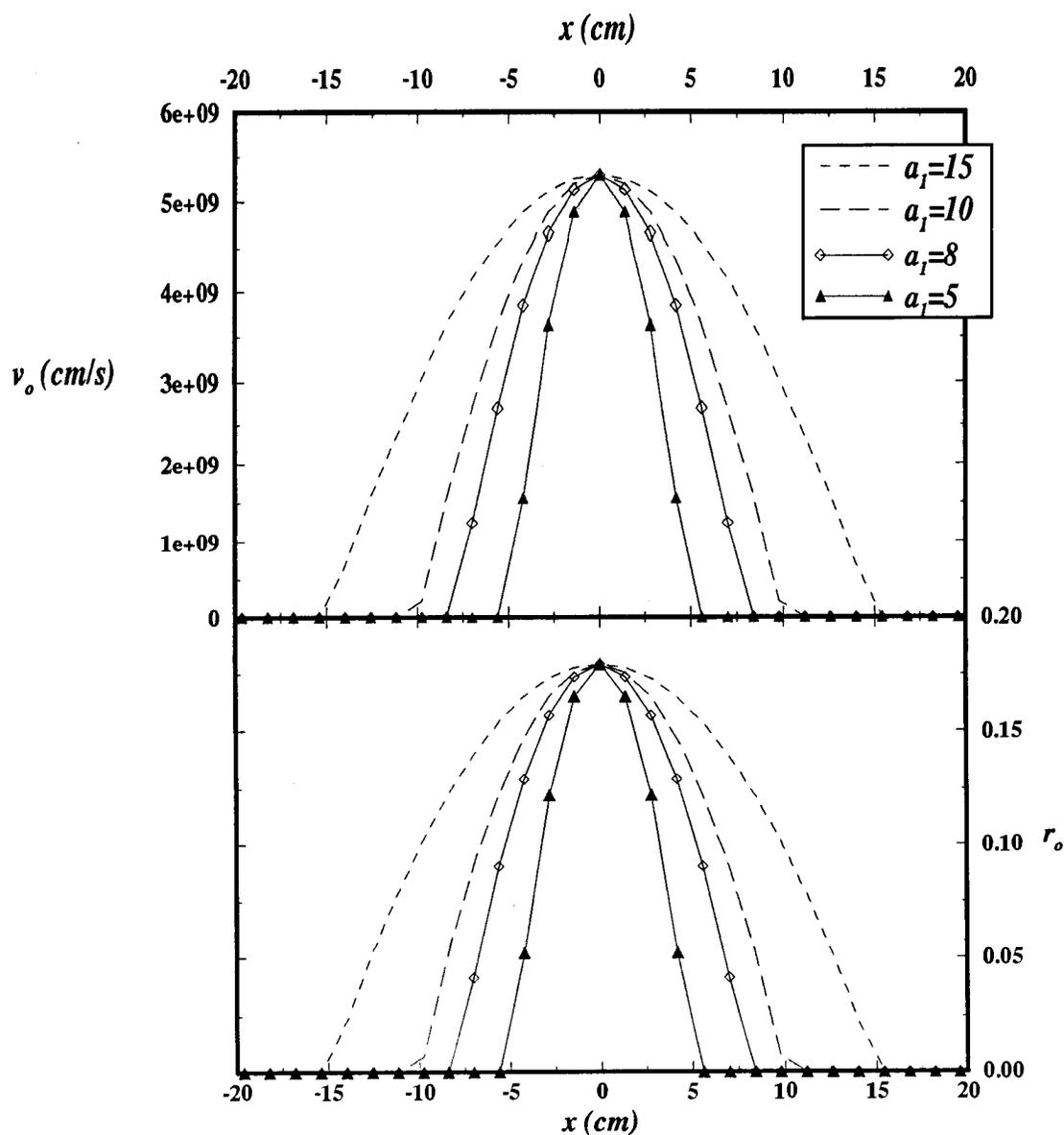


FIGURA 5.16: Gráficos de v_o e r_o em função de x (perfil parabólico).

O próximo passo é mostrar as quantidades adimensionais $d_{\parallel, \perp}$ e d_x para o plasma de fundo e para o feixe, todos em função de x . Na figura 5.17 essas quantidades podem ser vistas.

Nota-se que próximo aos limites que definem as bordas da lâmina ($x = \pm 22\text{cm}$), tanto a quantidade $d_{\parallel, \perp}$ quanto a quantidade d_x têm um crescimento abrupto (em módulo).

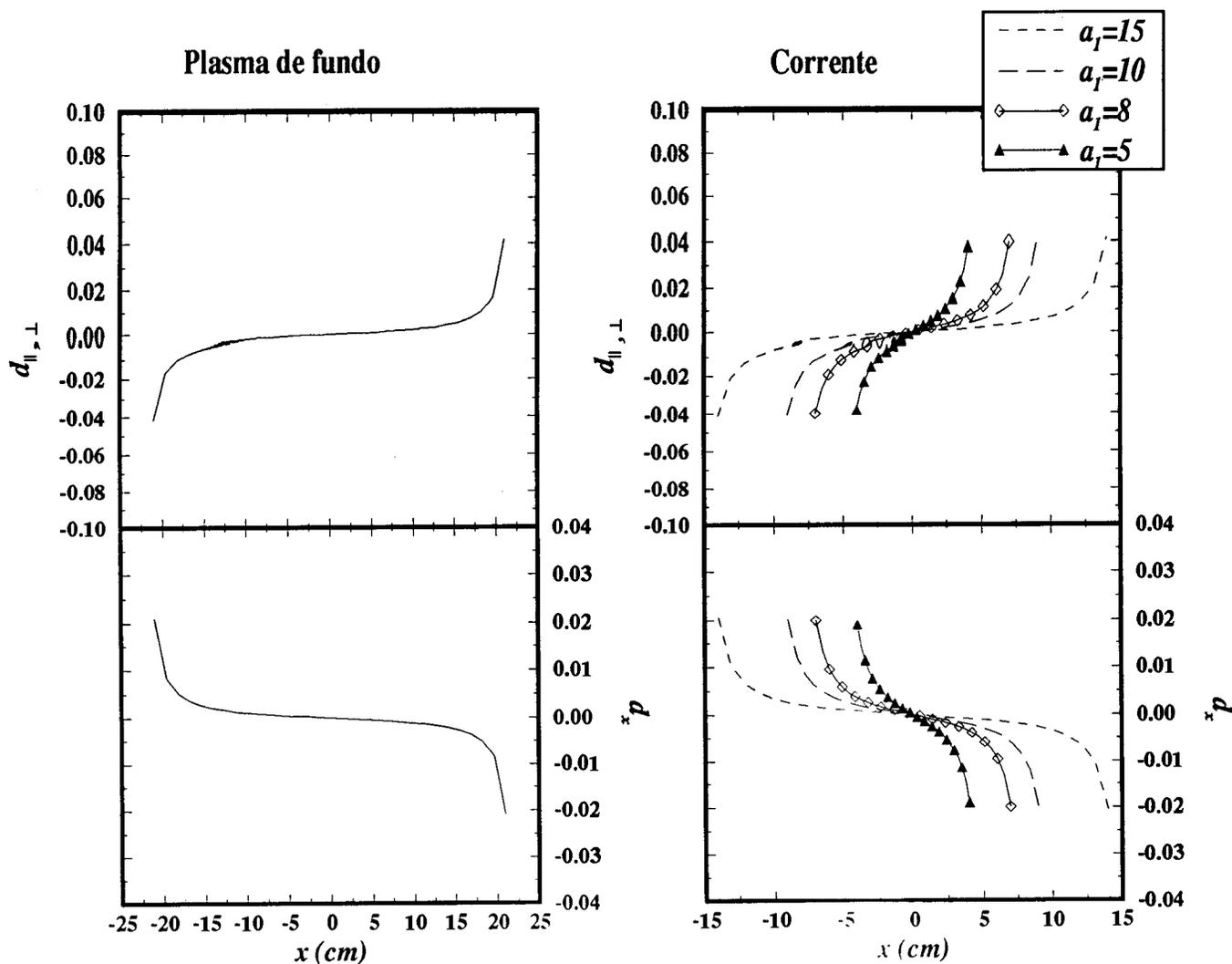


FIGURA 5.17: Gráficos de $d_{\parallel, \perp}$ e d_x em função de x (perfil parabólico).

Para o feixe de elétrons acontece o mesmo; nos limites do feixe ($x = \pm a_1$) essas quantidades crescem abruptamente, o que causa alguns problemas quando se quer calcular numericamente as quantidades η , k_i^{nh} e δ nessas regiões.

Resta agora expor os gráficos da quantidade d_o , quantidade adimensional relacionada ao gradiente da velocidade de deriva do feixe, e do perfil de ρ_1 , que é a quantidade de

corrente no plasma. Estas duas quantidades estão mostradas na figura 5.18. O exame dessa figura mostra que há um crescimento abrupto em módulo da quantidade d_o nos limites do feixe, igual ao que ocorre com $d_{\parallel,\perp}$ e d_x , na figura 5.17.

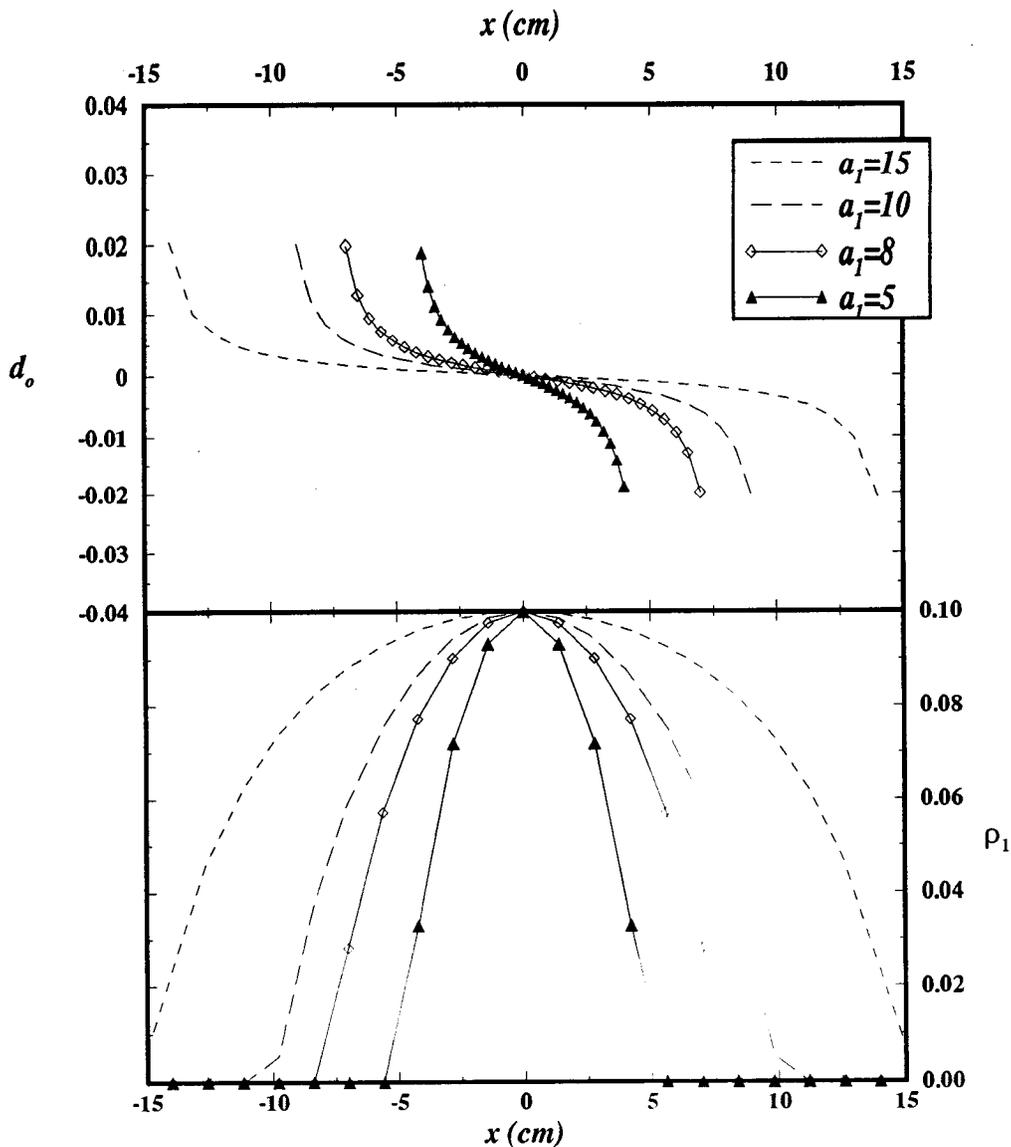


FIGURA 5.18: Gráficos de d_o e ρ_1 em função de x (perfil parabólico).

O próximo passo será expor os gráficos no caso em que os parâmetros do feixe são descritos por perfis gaussianos. Os gráficos serão similares aos mostrados até aqui. Os

perfis do plasma de fundo são expostos novamente para fins de comparação.

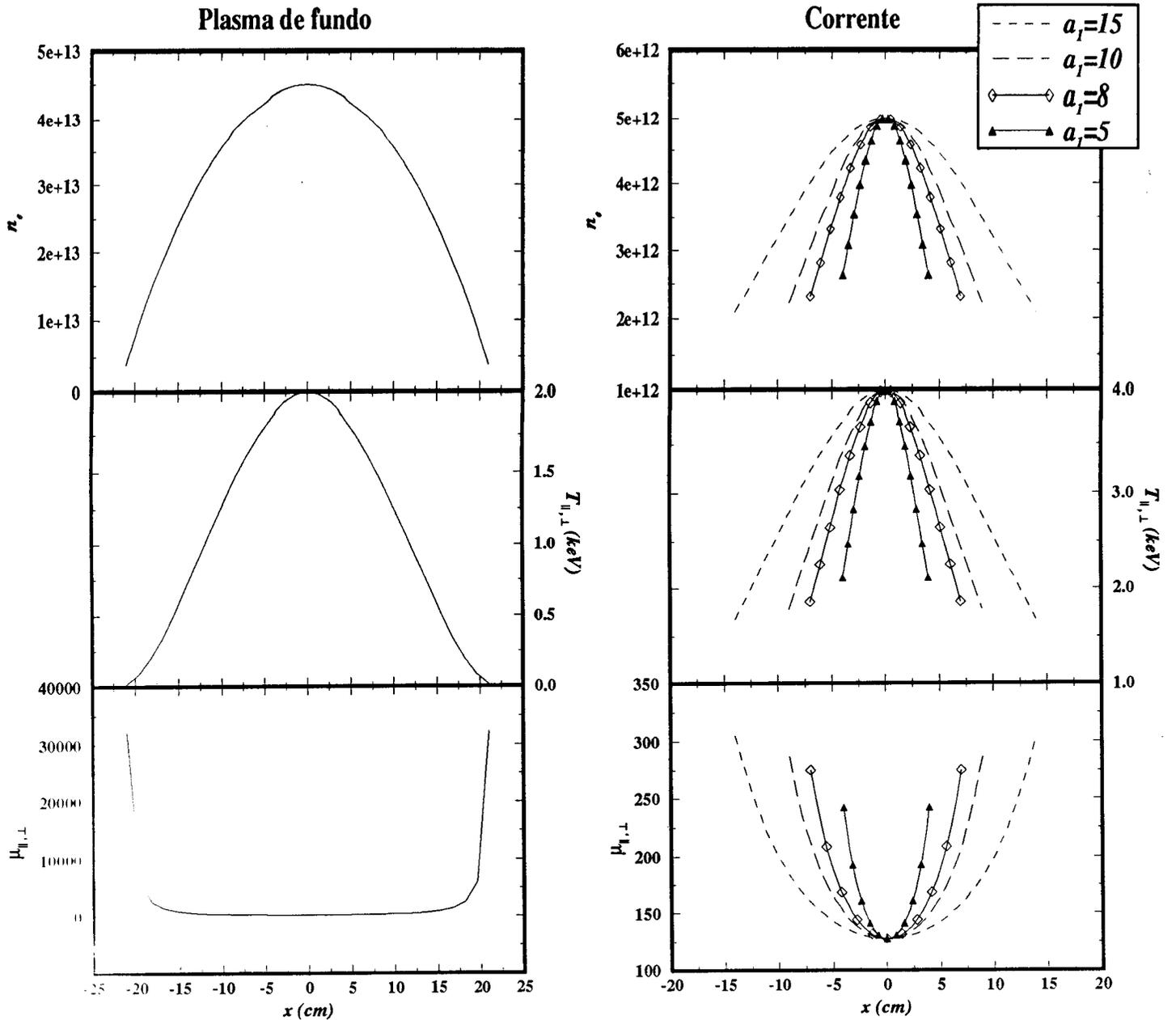


FIGURA 5.19: Gráficos de n_e^{σ} , $T_{\parallel, \perp}^{\sigma}$ e $\mu_{\parallel, \perp}^{\sigma}$ em função de x (parâmetros relativos ao feixe descritos por perfis gaussianos; os parâmetros relativos ao plasma de fundo continuam sendo descritos por perfis parabólicos). Os gráficos do lado direito são relativos ao feixe.

Olhando-se a figura 5.19 nota-se que com esse tipo de perfil, quando comparado ao caso parabólico, os parâmetros tendem a zero mais lentamente quando x se aproxima das bordas do feixe. Os gráficos para os perfis do feixe foram feitos para $a_x = 0$, ou seja,

o centro do feixe de elétrons coincide com o centro da lâmina ($x = 0$).

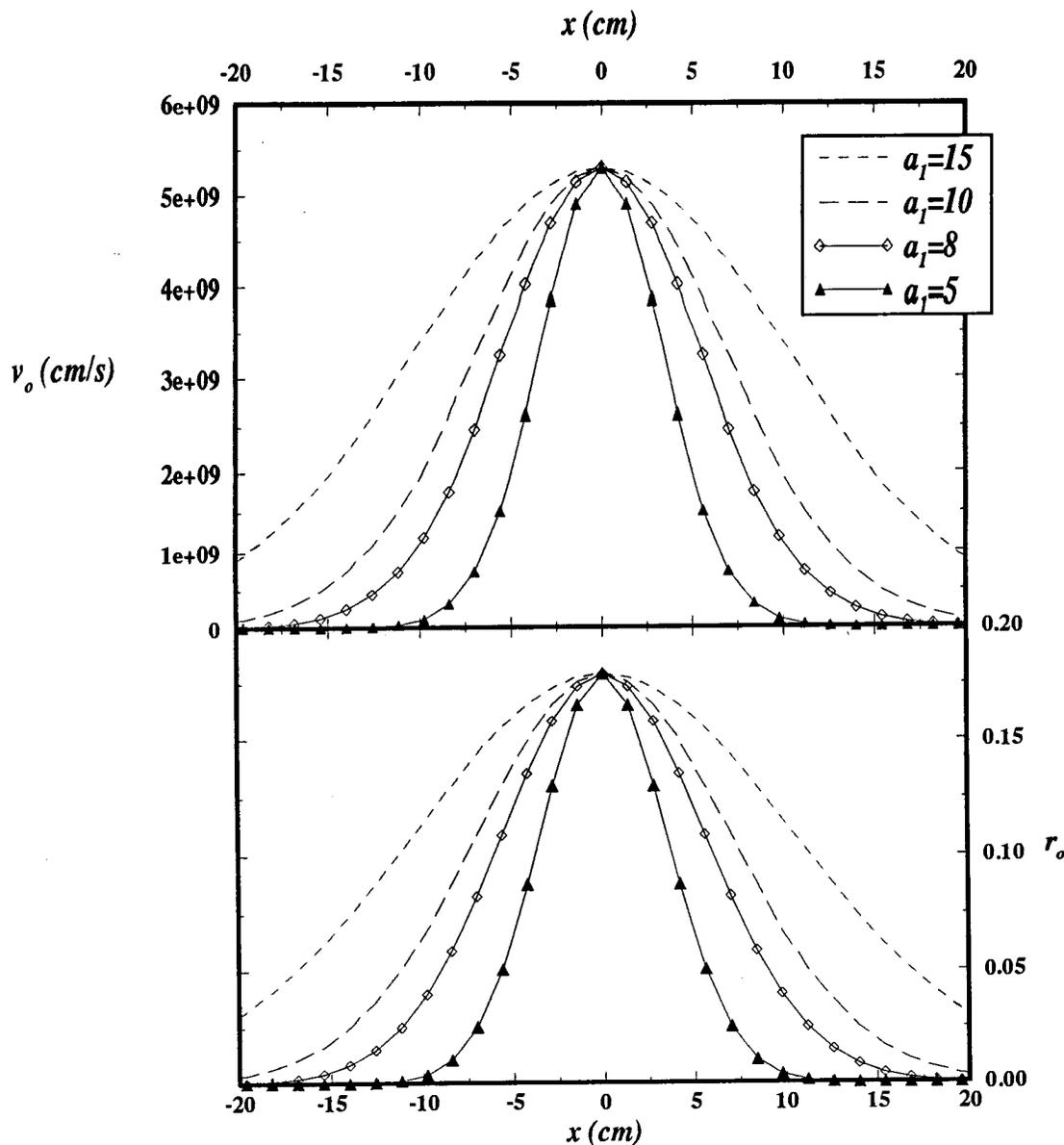


FIGURA 5.20: Gráficos de v_o e r_o em função de x (perfil gaussiano).

Na figura 5.20 são mostrados os gráficos com os perfis da velocidade de deriva e da quantidade r_o , a exemplo do que foi feito para o caso parabólico. Novamente, foi considerado $a_x = 0$.

As quantidades $d_{\parallel, \perp}$ e d_x têm seus perfis expostos na figura 5.21, para diversos

valores do parâmetro a_1 .

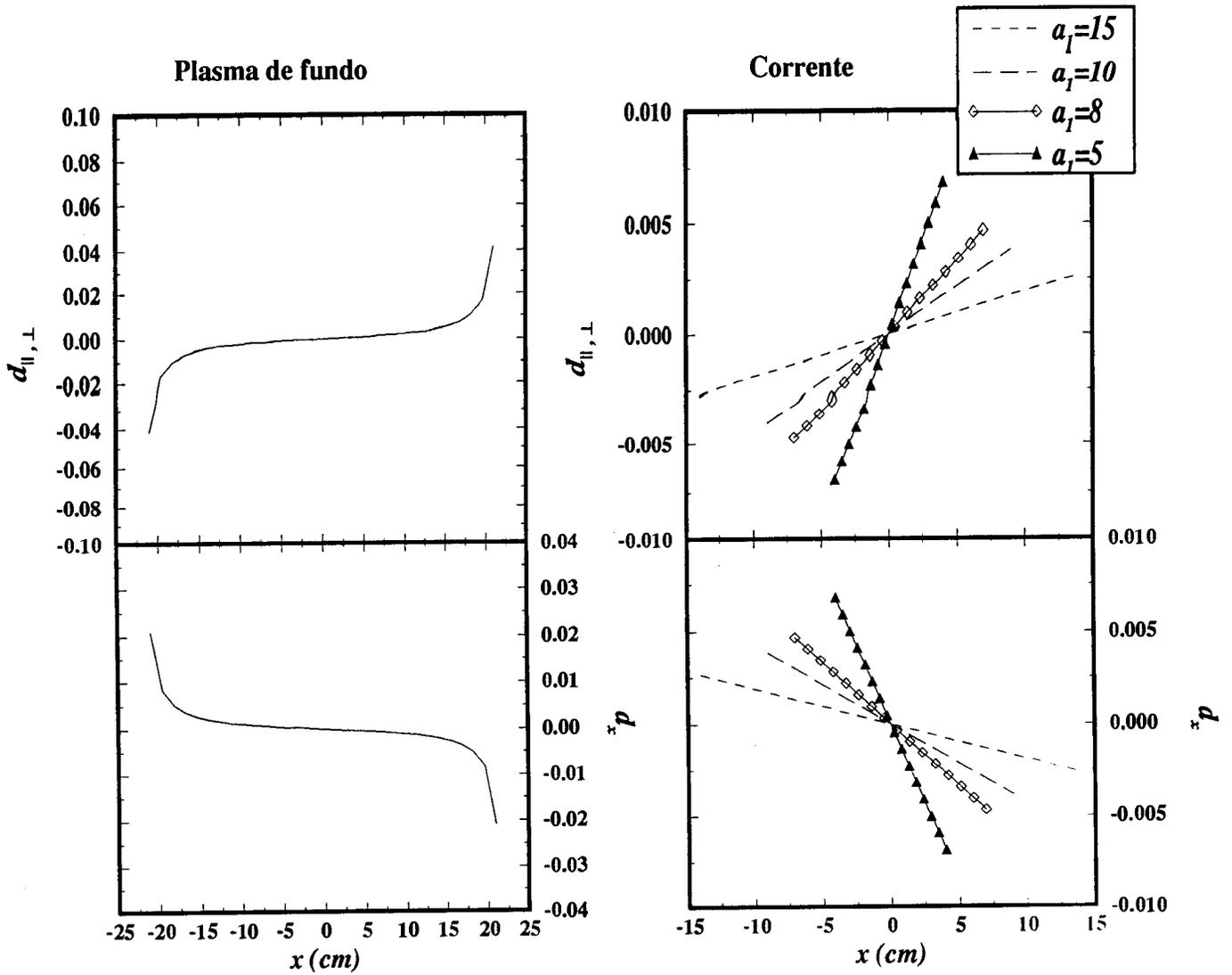


FIGURA 5.21: Gráficos de $d_{\parallel, \perp}$ e d_x em função de x (perfil gaussiano para a corrente).

Nota-se que as quantidades $d_{\parallel, \perp}$ e d_x não divergem à medida que x se aproxima das regiões que definem a largura do feixe; no caso em que os perfis para os parâmetros relativos ao feixe são gaussianos, estes tendem suavemente a zero perto dos limites que definem a largura do feixe, sem no entanto se anularem nessas regiões, como no caso parabólico. Na figura 5.21 novamente os gráficos foram feitos para $a_x = 0$.

Como foi feito no caso parabólico, pode-se olhar os gráficos da quantidade d_o e do

perfil de ρ_1 . Estes gráficos são mostrados na figura 5.22.

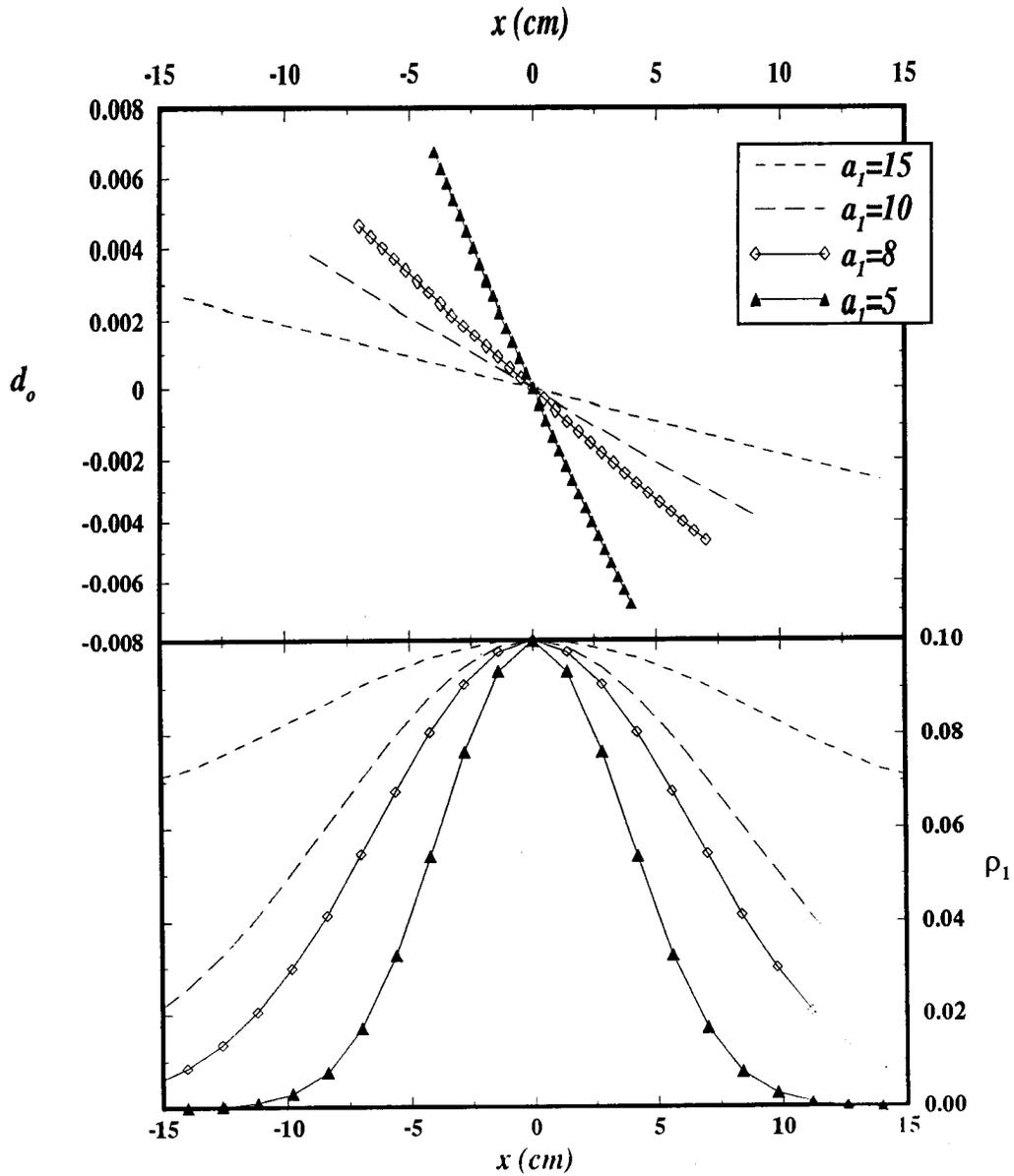


FIGURA 5.22: Gráficos de d_o e ρ_1 em função de x (perfil gaussiano).

Novamente nota-se que d_o não diverge nas bordas do feixe. A quantidade $\rho_1 = \frac{n_e^1}{n_e}$ não cai a zero tão rapidamente como no caso parabólico, de modo que se vê que para valores de x além dos limites que definem a largura do feixe (dado por a_1) ainda existe alguma quantidade de corrente.

Os perfis dos parâmetros do plasma e seus respectivos gradientes foram todos expostos. Resta agora mostrar os perfis do campo magnético externo \vec{B}_0 e de Y , que é dado por $Y = \frac{|\Omega_e|}{\omega}$. Na figura 5.23 tais gráficos são mostrados.

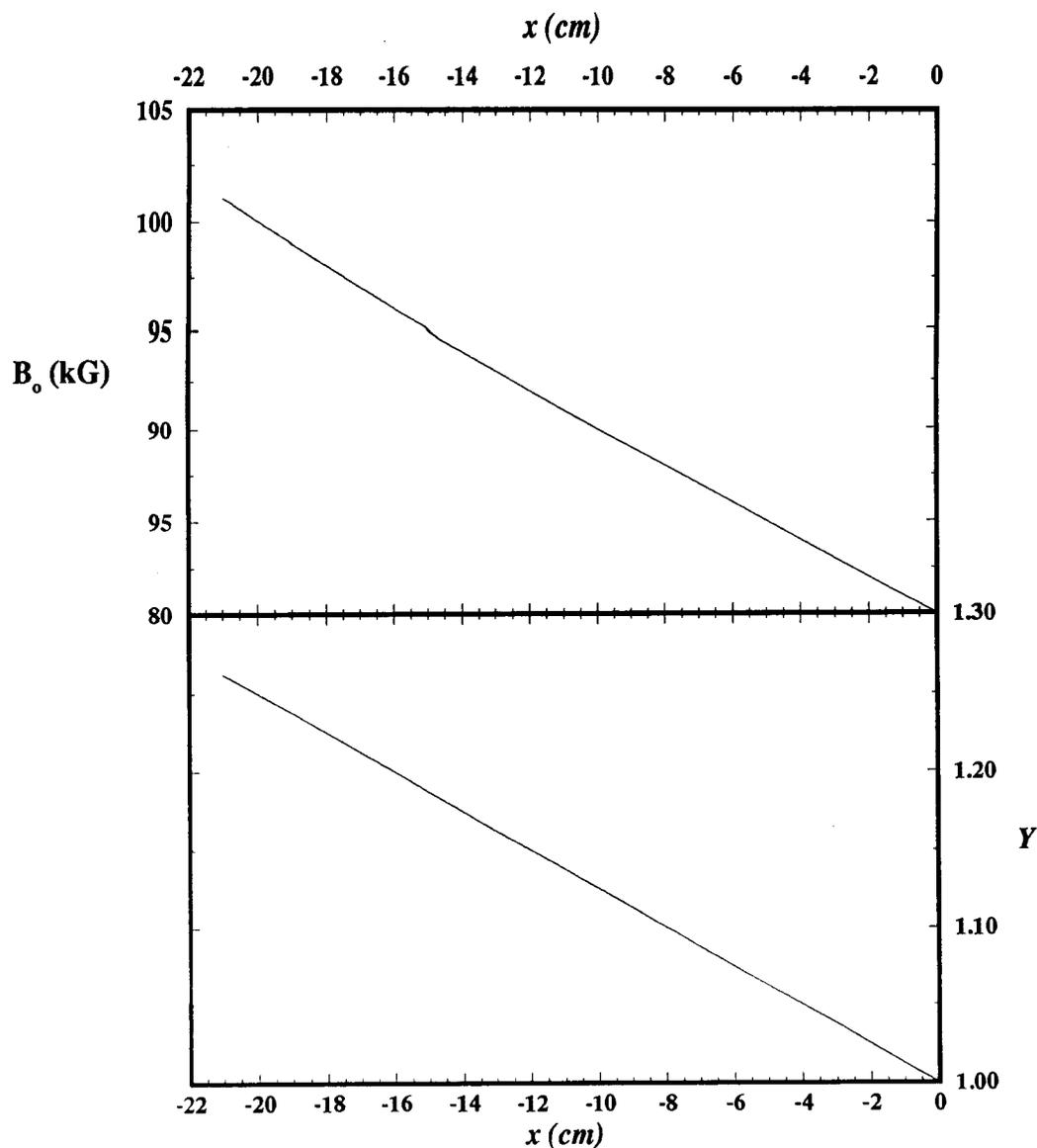


FIGURA 5.23: Gráficos de B_0 e Y em função de x .

Outro gráfico interessante de ser visto, é o de Y em função de x para vários valores da frequência ω da onda incidente. Sabe-se que no caso em que o plasma não é tratado

relativisticamente e a propagação da onda se dá na direção perpendicular ao campo magnético externo, somente os elétrons que obedecem a condição $|\Omega_e| = \omega$ entrarão em ressonância com a onda, absorvendo energia delas ou cedendo energia a elas. Nesse caso, só existirá absorção ou amplificação da energia da onda para $Y = 1$.

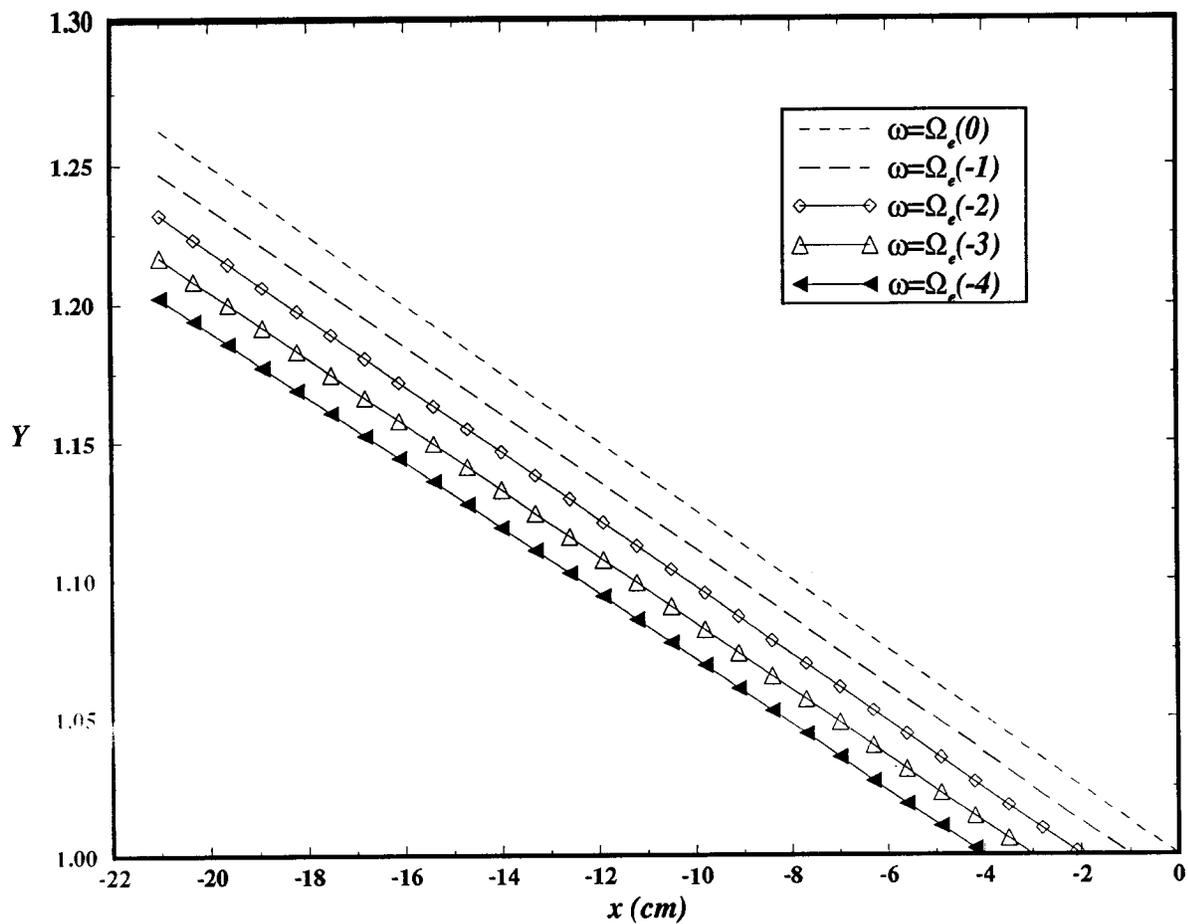


FIGURA 5.24: Gráfico de Y em função de x para diversos valores de frequência angular ω da onda incidente.

No caso em que o plasma é tratado relativisticamente, como a massa dos elétrons depende da velocidade, elétrons que estão em regiões da função distribuição onde a

velocidade é maior terão uma massa maior² do que os elétrons que têm velocidades menores. Dessa forma, nem todos os elétrons possuirão a mesma frequência de ciclotron e pode haver absorção para valores maiores de Y . Para valores de Y tais que $Y < 1$ no entanto, não é possível existir ressonância de ciclotron, para propagação perpendicular ao campo magnético.

Observando a figura 5.14, pode-se ver que quando a frequência da onda incidente é variada, k_i^{nh} se anula para valores diferentes de x . Por exemplo, para $\omega = \Omega_e(0)$, deixa de haver ressonância a partir de valores de x tais que $x > 0$. No caso em que $\omega = \Omega_e(-4)$ porém, a ressonância deixa de existir para valores de x tais que $x > -4$. Ao se observar a figura 5.24 nestes mesmos casos, nota-se que nestes mesmos valores de x é que o perfil de Y passa a ter valores tais que $Y < 1$.

5.6 Conclusão

Neste capítulo, a análise numérica da relação de dispersão foi feita inicialmente em um ponto de um plasma fracamente inhomogêneo e a seguir, em uma lâmina de plasma, cujos parâmetros são expressos por perfis adequados para a descrição de Tokamak's.

Para a análise no ponto foi feito um estudo relativamente amplo em relação aos parâmetros envolvidos, e nota-se que o gradiente que mais contribui no que se refere ao cálculo do efeito relativo das inhomogeneidades (*para a maioria dos valores de Y*) é o gradiente da velocidade de deriva, dado por d_o .

Nota-se que no caso em que o tratamento foi aplicado a um plasma que tem seus parâmetros descritos por perfis de Tokamak, o efeito relativo das inhomogeneidades só se mostrou relevante onde o coeficiente de absorção não é significativo. Mesmo que existam correntes bem localizadas, os efeitos de inhomogeneidades são muito pequenos e portanto a aproximação localmente homogênea não é má. Este resultado é importante,

²Em relação a um dado sistema de referência em repouso, por exemplo, relativo ao Tokamak onde o plasma está confinado.

pois foram estudados efeitos de inhomogeneidades na absorção de ondas em situações típicas de Tokamak. Viu-se que estes efeitos são pequenos.

No que se refere ao tipo de perfil usado, viu-se que embora os resultados obtidos com cada um dos perfis não mostrem grande diferença, é vantajoso usar perfis gaussianos para a corrente, o que elimina os problemas de divergência nos limites do feixe que aparecem quando o perfil é parabólico. Tal problema levava a resultados que certamente não descreviam corretamente o comportamento de η , k_i^{nh} e δ nessas regiões.

Capítulo 6

Sumário e conclusões

O estudo da propagação e absorção de ondas eletromagnéticas em plasmas magnetizados não homogêneos é de extrema importância na Física de Plasmas. No caso em que esse estudo se restringe a tempos muito menores do que o tempo típico de colisões binárias entre as partículas, com a interação entre as partículas sendo suposta fraca o suficiente para que se possa desprezar todas as ordens de correlação entre elas, pode-se usar a equação de Vlasov linearizada, que descreve as propriedades estatísticas do meio, e mais as equações de Maxwell para os campos.

No caso em que o meio é inhomogêneo, a combinação da equação de Vlasov com as equações de Maxwell leva a um sistema de equações íntegro-diferenciais para as componentes do campo elétrico, como se vê na equação (2.7). Existem trabalhos nessa linha na literatura, como o de Swanson [Swa81] e o de Fukuyama et al. [FNII83], por exemplo.

No caso em que o meio é homogêneo, na aproximação linear, pode-se calcular o tensor dielétrico para o meio, e o estudo da propagação e absorção de ondas em plasmas magnetizados se reduz à solução de um sistema linear e homogêneo de equações algébricas cuja condição de solubilidade é a chamada relação de dispersão. No caso em que as inhomogeneidades são fracas, pode-se encaminhar o problema da mesma forma. Na situação mais simples, em que o comprimento de onda da radiação incidente é mui-

to menor do que a escala típica de variação espacial dos parâmetros, pode-se fazer a aproximação localmente homogênea, que consiste em tratar o plasma como homogêneo ponto a ponto. Pode-se então fazer uma aproximação WKB para o sistema de equações de Vlasov-Maxwell, obtendo-se um tensor dielétrico formalmente idêntico ao do plasma homogêneo, dependendo apenas parametricamente da posição. Assim, pode-se escrever uma relação de dispersão como (2.14) válida ponto a ponto. Este tipo de tratamento não leva em conta explicitamente a existência de gradientes dos parâmetros do plasma e, em princípio, somente é válido quando as inomogeneidades do meio são muito fracas.

Em [Mik67], Mikhailovskii define e calcula um tensor dielétrico para um plasma magnetizado¹ que inclui as derivadas espaciais de primeira ordem dos parâmetros do plasma, para ser usado no tratamento de inomogeneidades menos fracas, sendo este tensor inserido na relação de dispersão de um plasma homogêneo. Sabendo-se que a solução da equação de Vlasov em ordem zero (*distribuição de equilíbrio*) deve ser uma função arbitrária das constantes de movimento, o procedimento adotado foi o de expandir em série de Taylor a função distribuição, tendo como parâmetro a razão entre o raio de Larmor das partículas do plasma e o comprimento típico de variação das inomogeneidades L , com a hipótese de que essa razão seja pequena se comparada com a unidade ($\frac{r_L}{L} \ll 1$). Dessa forma, mantendo nessa expansão somente termos até as derivadas espaciais de primeira ordem da função distribuição, pode-se obter um tensor que inclui explicitamente os gradientes dos parâmetros do plasma e que recai no tensor obtido pela aproximação homogênea quando a razão entre o raio de Larmor e a escala de variação das inomogeneidades tende a zero.

Este cálculo apresenta algumas inconsistências; como foi mostrado no capítulo 3, o tensor assim calculado não é a transformada de Fourier do tensor dielétrico do plasma. No caso de uma onda que tem uma direção de propagação qualquer em relação ao campo magnético externo, os elementos do tensor dielétrico resultante não obedecem

¹Com o campo magnético externo uniforme, apontando na direção z .

às relações de Onsager e, na mesma situação, quando inserido na relação de dispersão, este tensor prevê uma absorção não ressonante da energia das ondas eletromagnéticas, o que é fisicamente não aceitável. Esses problemas contudo, não aparecem quando a direção de propagação da onda é perpendicular à direção das inomogeneidades.

Em 1987, um trabalho feito por Beskin, Gurevich e Istomin [BGI87], mostrou como se soluciona este problema, indicando como se calcula o tensor dielétrico para plasmas inomogêneos com propriedades físicas corretas e que é a transformada de Fourier de um tensor dielétrico simetrizado. Os autores mostram que certos cálculos do tensor dielétrico, que de maneira simples incluem efeitos de inomogeneidades, não descrevem corretamente a troca de energia onda-partícula. A seguir, mostram como se obtém o tensor dielétrico correto, partindo do tensor calculado a partir da aproximação de ondas planas. No capítulo 2 da presente dissertação, foi explicado o procedimento adotado no trabalho de Beskin, Gurevich e Istomin. Este tensor, quando inserido numa relação de dispersão formalmente idêntica à que é válida para o caso homogêneo, descreve corretamente a troca de energia onda-partícula.

Usando a proposta de [BGI87] foi calculado o tensor dielétrico, levando-se em conta efeitos de inomogeneidade em primeira ordem, ou seja, na equação (2.91) somente foi mantido o termo com derivada espacial de primeira ordem. Este tensor pode ser usado para qualquer direção de propagação ou frequência da onda incidente, sendo válido também para descrever a absorção de ondas em plasmas em que os efeitos relativísticos são plenamente considerados. Pode-se mostrar que o tensor obtido obedece às relações de Onsager e que não prevê absorção não ressonante da energia das ondas. No limite em que os efeitos de inomogeneidade são considerados nulos, as expressões para as suas componentes recaem nas que são obtidas com a aproximação homogênea. Também pode-se mostrar que para propagação perpendicular à direção das inomogeneidades, as expressões para as suas componentes recaem nas calculadas por Mikhailovskii. Pelo menos matematicamente isso explica porque o tensor calculado por Mikhailovskii des-

creve bem a propagação e a absorção de ondas nessa direção. A inclusão dos efeitos de inomogeneidades usando o procedimento proposto em [BGI87] também permite levar em conta efeitos de inomogeneidades relativos a derivadas espaciais de ordens sucessivamente maiores, de modo que se pode aplicá-lo em casos em que o meio possui inomogeneidades menos fracas.

O capítulo 3 se concentra justamente no cálculo das componentes do tensor dielétrico, inicialmente obtido na aproximação local; pode-se mostrar que esse tensor depende da posição de forma apenas paramétrica, ou seja, o tensor possui uma dependência espacial através da função distribuição de equilíbrio. Após, são incluídos efeitos em primeira ordem de inomogeneidades, obtendo-se o tensor batizado de $\tilde{\epsilon}^o$. Ao final são mostradas as expressões para as componentes do tensor dielétrico efetivo, obtidas segundo a sistemática proposta em [BGI87], a qual consiste na adição de correções às componentes do tensor $\tilde{\epsilon}^o$. Os detalhes deste procedimento foram omitidos, uma vez que estão expostos em [Cal90].

O passo seguinte foi encaminhar o problema para um cálculo numérico, o que permite fazer uma análise quantitativa dos efeitos das inomogeneidades na absorção da energia de ondas pelas partículas do plasma. Foram obtidas, após algumas adaptações, expressões alternativas para as componentes do tensor dielétrico efetivo. As funções de Bessel que aparecem em todas as componentes do tensor dielétrico são expandidas em potências de b (que fundamentalmente é a razão entre o raio de Larmor e o comprimento de onda da radiação), sendo então obtidas expressões modificadas para as componentes ϵ_{ij} , onde aparecem integrais que em geral não são factíveis analiticamente, dependendo da função distribuição de equilíbrio com que se trabalha. Tais expressões estão mostradas em [CSZ90] e também no capítulo 4.

O meio escolhido para análise é formado por um plasma² Maxwelliano (*plasma de fundo*) com um feixe de elétrons, ou corrente. Tanto o plasma de fundo como o feixe

²Para as frequências de interesse neste trabalho, os íons do plasma podem ser considerados como contribuindo apenas ao "background".

possuem temperaturas anisotrópicas. Dessa forma, a função distribuição escolhida é uma maxwelliana (*que descreve o plasma de fundo*) com uma cauda superposta (*que descreve o feixe*). Definida a função distribuição com a qual se quer trabalhar, pode-se reescrever as integrais que aparecem nas expressões para as componentes do tensor dielétrico em termos de integrais que podem ser calculadas numericamente, o que está feito no capítulo 4. O próximo passo é fazer um estudo quantitativo dos efeitos de inhomogeneidades através de uma análise numérica da relação de dispersão.

O capítulo 5 foi dirigido para a análise quantitativa dos efeitos das inhomogeneidades na absorção de energia das ondas, quando estas se propagam perpendicularmente ao campo magnético externo e com frequência angular aproximadamente igual ao módulo da frequência de ciclotron dos elétrons. Inicialmente foi descrito o processo numérico de análise da relação de dispersão. Tal processo foi primeiramente aplicado em uma situação onde foi considerado um plasma inhomogêneo em alguma região do espaço, atribuindo-se valores aos parâmetros e gradientes (*limitados pelas condições de validade do modelo proposto*), ou seja, foi feita uma análise paramétrica em um determinado ponto de um plasma inhomogêneo.

Este tipo de análise foi feito anteriormente na literatura, com o uso de uma função distribuição maxwelliana com temperaturas anisotrópicas (*ver [CSZ89], [CSZ90] e [Cal90]*). Em [Cal90] viu-se que os efeitos das inhomogeneidades não eram significativos sobre a parte real do índice de refração, o que pôde ser comprovado no caso do presente trabalho. Dessa forma, não foram apresentados resultados referentes à parte real e o presente trabalho está concentrado nos efeitos sobre a parte imaginária do índice de refração (*ou do vetor de onda*). Notou-se também que a inhomogeneidade que mais contribui para o coeficiente de absorção, no caso do plasma Maxwelliano, é a da temperatura perpendicular ao campo magnético externo ([CSZ90], [Cal90]).

Também foi feita uma análise semelhante considerando-se um plasma de elétrons com dois feixes simétricos (*ver [CSZ91]*), e constatou-se que, com a inclusão desses

dois feixes, o maior efeito de inomogeneidade na absorção provinha do gradiente da velocidade de deriva dos feixes.

No capítulo 5 a análise é feita considerando-se um plasma de fundo Maxwelliano com a presença de apenas um feixe de elétrons, ou corrente (ver [CSZ93a]), como foi apresentado no capítulo 4. Notou-se também neste caso que a inomogeneidade que mais contribui na absorção é a da velocidade de deriva do feixe.

Além disso, o que se viu em geral, é que a contribuição das inomogeneidades à parte imaginária do índice de refração não é desprezível, no caso da análise paramétrica. Em certos casos os efeitos são grandes, embora no modo extraordinário se note que estes efeitos começam a crescer onde a absorção é pouco significativa.

Depois o processo numérico foi realizado usando o modelo de lâmina de plasma, simulando uma situação física mais realista, com o uso de perfis de Tokamak para os parâmetros do plasma de fundo e do feixe; os mesmos perfis usados em [FGM⁺80]. É importante aplicar o que foi visto em trabalhos anteriores ([Cal90], [CSZ89], [CSZ90] e [CSZ91]) em situações mais realistas, procurando ver como atuam as inomogeneidades na absorção da energia das ondas que se propagam no meio. Se procurou ver também como uma corrente bem localizada em uma dada região da lâmina influi na absorção.

Inicialmente a análise foi feita com perfis parabólicos para os parâmetros do feixe e do plasma de fundo. Depois foi feita usando-se perfis gaussianos para o feixe e parabólicos para o plasma de fundo. O perfil gaussiano apresenta vantagens sobre o perfil parabólico; os gradientes adimensionais correspondentes aos perfis do feixe não possuem problemas de divergência nos limites que definem a largura do feixe, como no caso parabólico. Com o uso de perfis gaussianos para a corrente, ficou possível estudar uma maior variedade de casos do que no caso em que os perfis usados eram parabólicos. Além disso, não foi necessário tomar tanto cuidado com a região de validade da abordagem na lâmina de plasma.

No caso em que a análise foi feita com o auxílio desses perfis, o que se viu foi que

os efeitos de inomogeneidades na absorção são relevantes em regiões da lâmina onde a absorção é pouco significativa, tanto com o uso de perfis parabólicos como gaussianos para o feixe. É um resultado importante uma vez que foi aplicado numa situação mais realista do que a análise paramétrica e talvez mereça estudos posteriores. Uma das possibilidades é estudar a propagação de ondas em uma direção arbitrária em relação ao campo magnético externo. Em [CSZ93b] é feita uma análise paramétrica para esse caso. Outra possibilidade seria estudar os efeitos de inomogeneidades para outros tipos de distribuição, como em [ZSL93], onde isso é feito considerando-se uma função distribuição maxwelliana relativística com deriva, para ondas que se propagam perpendicularmente ao campo magnético externo. Seria também de muito interesse incluir no cálculo do tensor dielétrico a inomogeneidade no campo magnético externo. Estudos nesse sentido já têm sido realizados, usando a abordagem proposta em [BGI87], já tendo sido obtidos alguns resultados preliminares (ver [GSZ93]), onde se estudou unicamente este tipo de inomogeneidade; os parâmetros do plasma como a densidade e a temperatura foram considerados homogêneos. A inomogeneidade do campo magnético externo apresenta um aspecto bastante diferente das inomogeneidades tratadas no presente trabalho, uma vez que em campos magnéticos inomogêneos são modificadas as órbitas de equilíbrio das partículas. Como se recorda, essas órbitas são as características do sistema, usadas na obtenção da solução da equação de Vlasov. Uma das conseqüências é que a própria condição de ressonância é modificada em relação ao caso de campo homogêneo (ver [GSZ93]). A função distribuição utilizada neste trabalho foi uma maxwelliana não relativística.

Pode-se também aplicar as expressões do tensor dielétrico efetivo em plasmas onde as inomogeneidades sejam menos fracas, incorporando derivadas espaciais de mais alta ordem nas expressões para as suas componentes, com o uso do tensor efetivo obtido em [BGI87], ou então aplicar o tratamento do presente trabalho em outras faixas de frequência. Enfim, são possibilidades que se abrem e merecem um estudo detalhado.

Referências Bibliográficas

- [Akh67] A. I. Akhiezer. *Plasma Electrodynamics*. Pergamon Press, 1967.
- [AS70] M. Abramovitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1970.
- [BCdBE83] M. Bornatici, R. Cano, O. de Barbieri, and F. Engelmann. Electron cyclotron emission and absorption in fusion plasmas. *Nuclear Fusion*, 23:1153–1257, 1983.
- [Bek66] G. Bekefi. *Radiation Processes in Plasmas*. John Wiley, 1966.
- [BG187] V. S. Beskin, A. V. Gurevich, and Ya. I. Istomin. Permittivity of a weakly inhomogeneous plasma. *Sov. Phys. JETP*, 65:715–726, 1987.
- [Cal90] R. A. Caldela. *Efeitos de Inomogeneidades no Estudo da Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Plasmas Magnetizados*. Tese de doutorado, Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1990.
- [CSZ89] R. A. Caldela, R. S. Schneider, and L. F. Ziebell. The dispersion relation and the dielectric tensor of inhomogeneous magnetized plasmas. *J. Plasma Physics*, 42:165–175, 1989.
- [CSZ90] R. A. Caldela, R. S. Schneider, and L. F. Ziebell. Inhomogeneity effects on the absorption of electromagnetic high-frequency waves by magnetized maxwellian plasmas. *J. Plasma Physics*, 43:335–355, 1990.

- [CSZ91] C. J. H. Cavalcanti, R. S. Schneider, and L. F. Ziebell. Inhomogeneity effects on the ordinary mode electron absorption by plasmas with non-maxwellian electron tails. Em *1^o CONGRESSO BRASILEIRO DE FÍSICA DE PLASMAS, Vol. II*, 136–140, Santos - SP, 1991.
- [CSZ93a] C. J. H. Cavalcanti, R. S. Schneider, and L. F. Ziebell. Effect of inhomogeneities in electron cyclotron absorption by current carrying plasmas. Em *2^o ENCONTRO BRASILEIRO DE FÍSICA DE PLASMAS*, 205–208, Serra Negra - SP, 1993.
- [CSZ93b] C. J. H. Cavalcanti, R. S. Schneider, and L. F. Ziebell. Electron absorption by inhomogeneous current-carrying plasmas. Submetido para publicação, 1993.
- [FGM+80] I. Fidone, G. Granata, R. L. Mayer, E. H. Jornada, R. S. Schneider, and L. F. Ziebell. Electron cyclotron emission from tokamak plasmas with mildly superthermal electrons. *Phys. Fluids*, 23:1336–1347, 1980.
- [FGRM78] I. Fidone, G. Granata, G. Ramponi, and R. L. Meyer. Wave absorption near the electron cyclotron frequency. *The Physics of Fluids*, 21:645–652, 1978.
- [FNII83] A. Fukuyama, S. Nishiyama, K. Itoh, and S. I. Itoh. Kinetic description of propagation and absorption structures of ICRF waves. *Nuclear Fusion*, 23:1005, 1983.
- [GSZ93] R. Gaelzer, R. S. Schneider, and L. F. Ziebell. Magnetic field inhomogeneity effects in weakly relativistic plasmas. Em *2^o ENCONTRO BRASILEIRO DE FÍSICA DE PLASMAS*, 226–229, Serra Negra - SP, 1993.
- [KT73] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece. *Principles of Plasma Physics*. McGraw-Hill, 1973.

- [Mik67] A. B. Mikhailovskii. *Reviews of Plasma Physics* vol.3, 159-228. Consultants Bureau, 1967.
- [Sha67] V. D. Shafranov. *Reviews of Plasma Physics* vol.3, 1-158. Consultants Bureau, 1967.
- [Swa81] D. G. Swanson. Derivation of the mode conversion-tunneling equation from the Vlasov equation. *The Physics of Fluids*, 24:2035, 1981.
- [ZSL93] L. F. Ziebell, R. S. Schneider, and B. Liberman. Dielectric tensor for an inhomogeneous plasma with a current-carrying distribution. Em 2^o ENCONTRO BRASILEIRO DE FÍSICA DE PLASMAS, 181-184, Serra Negra - SP, 1993.