

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS NÃO LINEARES  
EM PLASMAS DE MÚLTIPLAS ESPÉCIES

*Felipe Barbedo Rizzato*

Tese realizada sob a orientação dos  
Drs. Darcy Dillenburg e Ruth de Souza  
Schneider e apresentada ao Instituto  
de Física da UFRGS em preenchimento  
final dos requisitos para obtenção  
do grau de Doutor em Ciências.

Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes instituições: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Porto Alegre

1988

À  
Amália, Antônio, Herma, Ivo,  
Cláudio, Isabel, Sílvia e

à Marcia



## AGRADEÇO

Aos Drs. Ruth de Souza Schneider e Darcy Dillenburg pela orientação e pela I-N-E-S-T-I-M-Á-V-E-L importância que ti veram em minha formação como físico;

ao Dr. Bernardo Liberman por tão bem conduzir minha iniciação na Física de Plasmas;

aos Drs. Abraham Chian-Long Chian, Gerson Otto Ludwig, José Leonardo Ferreira, Kepler de Souza Oliveira Fº e Luiz Fernando Ziebell pelas úteis discussões sobre tópicos de Física re lacionados com o assunto deste trabalho;

aos Drs. Claudio Schneider e Victoria E. Herscovitz;

ao Grupo de Plasma do IF-UFRGS (especialmente a Rafa el A. Caldela Filho);

a Maria Cecília do Amaral e Ana Neri Juliano Nunes pe la paciente datilografia dos trabalhos relacionados com este;

a Vera Regina da Cunha pela excelente datilografia da tese;

a Zuleika Berto e Maria Alice de Brito Nagel por auxiliarem na organização das referências;

a Cleto Tartarelli, pela execução dos desenhos.

## RESUMO

Neste trabalho analisamos a propagação de ondas eletromagnéticas não lineares em plasmas constituídos por três espécies de partículas, considerando dois casos distintos.

No primeiro estudamos a propagação de ondas eletrostáticas ion-acústicas em plasmas compostos por elétrons, íons negativos e íons positivos, indicando que, para certo valor crítico da concentração dos íons negativos, a usual aproximação de íons frios pode não ser boa.

No segundo caso investigamos os processos de modulação não linear de ondas eletromagnéticas transversais em plasmas constituídos por elétrons, pósitrons e íons. Neste contexto várias situações são abordadas: modulação oblíqua ao vetor da onda portadora com geração de campos magnéticos quase estáticos, modulação na vizinhança de pontos críticos, efeitos decorrentes da inclusão de fortes campos magnéticos e efeitos cinéticos associados à temperatura do plasma.

## ABSTRACT

In this work we analyse nonlinear electromagnetic wave propagation in plasmas made up by three types of particles, considering two distinct cases.

In the first one we study the propagation of electrostatic ion-acoustic waves in plasmas made up by electrons, positive ions and negative ions, indicating that for certain critical values of negative ion concentration the usual approximation of cold ion fluid may not be good.

For the second case we investigate the modulational processes of transversally polarized electromagnetic waves in plasmas made up by electrons, positrons and ions. Within this context various situations are treated: modulations oblique with respect to the direction of the high frequency wave vector, low-frequency magnetic field generation, modulations in the neighborhood of critical points, effects derived from the inclusion of strong magnetic fields and kinetic effects associated with plasma temperatures.

## Í N D I C E

I - INTRODUÇÃO .....	1
II - ONDAS ION-ACÚSTICAS NÃO LINEARES .....	8
II.1 - ONDAS ION-ACÚSTICAS EM PLASMAS COMPOSTOS POR E LÉTRONS E UMA ESPÉCIE IÔNICA .....	8
II.1.1 - O Modelo da Onda Ion-acústica .....	8
II.1.2 - Efeitos Não Lineares .....	11
II.1.3 - Equação Korteweg-de Vries (KdV) para Ondas Ion-acústicas Não Lineares .....	13
II.1.4 - Algumas Propriedades da Equação KdV .....	15
II.2 - ONDAS ION-ACÚSTICAS EM PLASMAS COMPOSTOS POR ELÉTRONS E VÁRIAS ESPÉCIES IÔNICAS .....	18
II.2.1 - Sólitons Ion-acústicos em Plasmas com Ions Negativos .....	19
II.2.2 - Efeitos Térmicos Iônicos sobre Sólitons Ion- acústicos em Plasmas com Ions Negativos ....	25
III - ONDAS ELETROMAGNÉTICAS NÃO LINEARES DE ALTA FREQUÊNCIA	42
III.1 - A TÉCNICA DA MÚLTIPLA ESCALA DE TEMPO .....	43
III.2 - ONDAS ELETROMAGNÉTICAS NÃO LINEARES EM PLAS- MAS COMPOSTOS POR ELÉTRONS, IONS E PÓSITRONS.	52
III.2.1 - Ondas Eletromagnéticas Fracamente Não Linea- res e Geração de Campos Magnéticos de Baixa Frequência .....	53
III.2.2 - Teoria de Modulação Não Linear Próxima dos Pontos Críticos ( $\tilde{C} = 0$ ) .....	75
III.2.3 - Sólitons Eletromagnéticos em Plasmas de Elē- trons, Pósitrons e Ions Fortemente Magneti- zado .....	90
III.2.4 - Efeitos Cinéticos sobre Sólitons Eletromag- néticos em Plasmas Compostos por Elētrons, Pósitrons e Ions .....	102

IV - CONCLUSÕES ..... 134

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ..... 137

## I - INTRODUÇÃO

Neste trabalho estaremos estudando a questão da propagação de ondas eletromagnéticas não lineares em plasmas constituídos por mais de duas espécies de partículas; tal tipo de plasma será referido como plasma multiespécie. O nosso interesse específico de investigar ondas em plasmas multiespécie se deve a dois pontos complementares básicos: primeiro - plasmas frequentemente se manifestam através de seu comportamento coletivo, o qual está intimamente ligado a fenômenos ondulatorios; segundo - a composição usual dos plasmas, baseada no modelo de duas espécies distintas de partículas, por vezes não é a mais encontrada em sistemas naturais, o que naturalmente leva pesquisadores experimentais ou teóricos a incluírem em seus modelos uma grande multiplicidade de tipos de partículas.

De fato, acompanhemos por exemplo a evolução da linha de investigação na propagação de ondas eletrostáticas de baixa frequência em plasmas constituídos por elétrons (e) e íons (i) (ondas íon acústicas). Em um primeiro momento o sistema adequado de equações era linearizado e o plasma considerado era aquele formado por elétrons e um tipo de íons (ver [KT73] por exemplo). Tal tipo de modelo foi extensivamente explorado tanto teórica quanto experimentalmente, o que eventualmente levou, em uma segunda etapa, à apreciação das propriedades não lineares do sistema. Nesta fase, algumas importantes idéias teóricas (consultar [AAP+75]) que já manifestavam princípios não lineares universais,

foram veiculadas; o conceito de s3liton 3on-ac3stico tornou-se popular e uma s3rie de trabalhos se encarregou de investigar seu comportamento sob as mais variadas condi33es. Simultaneamente 3 extensa produ33o te3rica, alguns pesquisadores preocuparam-se em confirmar este comportamento atrav3s de dados experimentais. Em 1970 por fim, os s3litons 3on ac3sticos foram detectados em uma importante experi3ncia realizada por f3sicos americanos [ITB70]. Mais tarde, em observ3ncia 3s condi33es sob as quais ondas eletrost3ticas n3o lineares se propagavam na ionosfera ou nos experimentos de laborat3rio [UD74,GOD66] alguns autores refinaram o modelo b3sico de plasma que suportava ondas 3on-ac3sticas, considerando a presen3a de mais de uma esp3cie de 3ons. Pela associa33o destes novos modelos com t3cnicas n3o lineares j3 conhecidas pode-se investigar teoricamente quais as novas manifesta33es ondulat3rias que emergiriam dos sistemas. Em particular Tagare e Das [DT75] mostraram que em plasmas de el3trons, 3ons positivos e 3ons negativos, a variedade de s3litons presentes era consideravelmente enriquecida; de fato eles provaram que os s3litons acompanhados de compress3es de densidade eletr3nica, presentes nos plasmas simples, podiam se transformar em s3litons compressivos ou rarefativos quando a terceira esp3cie i3nica era inclu3da. Confirmando as expectativas te3ricas em uma experi3ncia simples e objetiva [LFN84], as novas esp3cies de s3litons foram detectadas, o que mais uma vez sugeriu que a simetria entre teoria e experimentos era adequada em se tratando deste tema.

Especificamente, neste est3gio o que se conhecia

precisamente era o comportamento das ondas quando o plasma não possuía a terceira espécie iônica ou quando era largamente povoado por esta terceira espécie; pouco se conhecia do mecanismo intermediário de transição de uma situação para outra. Em 1984 a teoria adequada foi construída [Wa84] e comprovada experimentalmente [NT84]. A teoria foi apresentada em uma forma primitiva, desconsiderando a presença de certos efeitos que se sabiam não fundamentais para o caso de ausência da terceira componente. Recentemente, todavia, mostramos que estes efeitos (temperatura dos íons, "cut-off" dos sólitons) são de fato fundamentais nas situações de transição, o que obviamente torna necessária sua inclusão [RSD87a].

Cabe notar aqui que as técnicas de inclusão de uma terceira espécie seguem os mais variados padrões. Ora a terceira componente difere das outras simplesmente por uma temperatura em particular, ora difere somente em massa, por vezes em carga e em outras situações, em todos os itens citados. Os comentários acima referem-se àquela situação em que as duas espécies de íons possuem cargas opostas, massas distintas e temperaturas distintas, o que de uma certa maneira pode dar uma visão bastante geral dos processos físicos envolvidos.

Induzidos pelos resultados curiosos que se revelaram no contexto da propagação de ondas eletrostáticas, nossa próxima questão foi referente a que acontecia com relação à propagação de ondas eletromagnéticas não lineares nos plasmas multiespécie. Para tanto observamos os seguintes pontos:

O conhecimento das propriedades de propagação de

ondas eletromagnéticas em plasmas compostos de elétrons e íons já está relativamente sedimentado (veja por exemplo [SRYT86]); sabe-se que a localização de radiação neste caso é importante tanto em âmbito experimental quanto astrofísico, sendo esta localização conectada a mecanismos que envolvem modulações não lineares de ondas transversais de alta frequência. Um ramo de estudos bem mais recente é aquele que investiga processos de localização em plasmas constituídos por elétrons e pósitrons. Já foi mostrado que este tipo de plasma está presente na magnetosfera dos pulsares [RS75], sendo originado basicamente através de mecanismos contínuos de produção de pares, o que lhe confere uma relativa estabilidade.

Recentemente alguns trabalhos pioneiros mostraram que estes plasmas podem promover modulação de ondas [CK83, LB81] eletromagnéticas, o que explicaria os observados pulsos concentrados de radiação emitidos pelos pulsares. A partir daí, o modelo básico foi aprimorado diversas vezes, sendo no entanto a composição do plasma sempre a de elétrons e pósitrons.

Nossa contribuição específica foi então a de estudar modelos em que, além de elétrons e pósitrons, também estivessem presentes íons. Tais modelos, além de permitirem a possibilidade de efetuar a transição entre plasmas de elétrons e íons e plasmas de elétrons e pósitrons, podem representar a composição real dos pulsares [LIMP86], já que os campos elétricos presentes em suas superfícies promovem extração de íons pesados, com sua subsequente agregação ao plasma magnetosférico já presente; analisamos então este tipo de plasma sob os mais

variados pontos de vista, procurando ampliar e precisar resultados teóricos com relação ao tema.

No capítulo II, desenvolvemos a teoria dos sólitons ion-acústicos em plasmas de elétrons e íons. Inicialmente derivamos alguns resultados conhecidos para o caso de uma única espécie de íons, com a finalidade de familiarização com as técnicas básicas e com os pertinentes conceitos físicos. Em seqüência, estudamos o comportamento do sistema sob os efeitos de uma terceira componente, os íons negativos. Mostramos então que uma visão objetiva do problema é favorecida pela definição de instrumentos de cálculo específicos, assim como os potenciais de Sagdeev, ou potenciais efetivos; fica claro neste ponto que as equações estacionárias que descrevem ondas não lineares são bastante equivalentes às de um oscilador anarmônico sob a ação de um campo de forças derivado dos potenciais efetivos. Finalmente estabelecemos uma equação não linear de evolução para as ondas ion-acústicas, apropriada àquela região onde há a transição entre baixa e alta densidade de íons negativos. Efeitos de temperatura são incluídos para as duas espécies de íons, revelando que as amplitudes dependem diferentemente da temperatura dos íons positivos e da dos íons negativos. Mostramos a existência de cortes ("cut-offs") para os sólitons, consideramos a presença de efeitos cinéticos e discutimos resultados de recente experiência [NT84].

No capítulo III passamos à análise da formação de ondas eletromagnéticas moduladas não lineares em plasmas de elétrons, pósitrons e íons.

Inicialmente desenvolvemos formalmente a teoria das múltiplas escalas temporais, multiplicidade esta adequada à grande disparidade dos períodos característicos dos processos ondulatórios investigados (período longo ↔ escala de tempo lenta de modulação - período curto ↔ escala de tempo rápida, determinada pela alta frequência da onda portadora); o modelo em foco é o de um oscilador harmônico perturbado por termos não lineares. A técnica da múltipla escala de tempo, em particular, nos fornece o caminho seguro para a remoção das divergências seculares oriundas da aplicação ingênua das teorias de perturbação convencionais [Da72].

Com isto em mente, a localização não linear de ondas eletromagnéticas moduladas obliquamente (em relação a seu vetor de onda) é considerada. Mostramos que a amplitude da onda se transforma em uma função fortemente dependente do ângulo formado entre as direções de modulação e do vetor de onda. Mostramos também que se este ângulo não é nulo, aparece a possibilidade de a geração de campos magnéticos de baixa frequência, também conhecidos como campos quase estáticos; estes campos são importantes em questões relativas à física da fusão nuclear [NPS87]. A análise de modulação colinear em plasmas de elétrons e pósitrons mostra que certos termos omitidos em alguns trabalhos, tornam-se importantes quando as velocidades de propagação das modulações são altas.

A seguir, notamos que a equação derivada para o caso acima não é válida quando a densidade dos íons se aproxima de uma determinada densidade especial a que chamamos crítica (is

to já acontecia com os sólitons ion acústicos). Em torno desta densidade uma nova equação não linear de evolução é então derivada. Mostramos que a variedade de soluções associadas a ela é bem superior às associadas com o caso não crítico, podendo de fato haver diferenças qualitativas profundas entre elas.

Nosso próximo passo é o de incluir campos magnéticos nos sistemas estudados. Considerando propagação de ondas ao longo destes campos, indicamos uma série de diferenças em relação aos casos mais simples. Por exemplo, o cálculo da relação de dispersão não linear fornece dois modos eletromagnéticos diferentes quando a densidade de íons é não nula, enquanto que os sólitons associados a estes modos podem ser compressivos ou rarefativos, dependendo do valor do vetor de onda da portadora.

Completando este terceiro capítulo, analisamos finalmente efeitos cinéticos sobre os sólitons eletromagnéticos. Mostramos que estes efeitos são importantes sempre que as velocidades de propagação são baixas. Sub-dividindo a secção em três tópicos principais, analisamos em seqüência sólitons em: plasmas (e), (p) na ausência de campos externos; plasmas (e)-(p) com campos magnéticos modulados; plasmas (e)-(p)-(i) submetidos à ação de campos magnéticos ultra intensos. Reparamos neste contexto, que a presença de partículas confinadas, transmitidas e refletidas pode mudar consideravelmente o cenário formado até então pelas aproximações de fluídos.

Finalmente, no capítulo IV apresentamos um resumo das principais conclusões de nosso trabalho e indicamos possíveis extensões do mesmo.

## II - ONDAS ION-ACÚSTICAS NÃO LINEARES

O objetivo básico deste capítulo é a derivação de soluções não lineares para o problema de propagação de ondas ion-acústicas em plasmas compostos por elétrons e um certo número de espécies iônicas. Para que tenhamos uma definição clara do sistema físico e com a finalidade de ilustrar as técnicas envolvidas, o primeiro passo será direcionado à análise de sistemas compostos por elétrons e uma única espécie de íons. Posteriormente situações mais gerais serão investigadas.

### II-1 - ONDAS ION-ACÚSTICAS EM PLASMAS COMPOSTOS POR ELÉTRONS E UMA ESPÉCIE IÔNICA [Da72]

#### II-1-1 - O Modelo de onda ion-acústica

Fixemos nosso sistema dinâmico como sendo composto por uma onda eletrostática que se propaga unidimensionalmente (ao longo do eixo  $x$  digamos) em um plasma eletro(e)-iônico(i). Por hipótese o sistema é homogêneo e livre de quaisquer campos externos. Ademais consideremos os íons como frios ( $T_i=0$ ) e os elétrons como possuindo uma temperatura constante denotada por  $T_e$ .

De acordo com estes dados, podemos construir o conjunto de equações que descreve a dinâmica do problema:

a) Equações de momentum:

$$m_e (\partial_t + v_e \partial_x) v_e = -e \partial_x \phi - \frac{k_B T_e}{m_e} \partial_x n_e \quad (\text{II-1})$$

$$m_i (\partial_t + v_i \partial_x) v_i = e \partial_x \phi, \quad (\text{II-2})$$

onde  $m_e$  ( $m_i$ ) é a massa do elétron (íon),  $\phi$  é o potencial eletrostático e  $v_e$  ( $v_i$ ) é a velocidade dos elétrons (íons) ao longo do eixo  $x$ . O termo  $-\frac{k_B T_e}{n_e} \partial_x n_e$  na equação (II-1) é igual a  $-\frac{1}{n_e} \partial_x P_e$  ( $P_e$  = pressão no fluido eletrônico) se tomarmos  $P_e = n_e k_B T_e$  com  $T_e = \text{constante}$ . Resumindo, nossas equações de momentum indicam que os dois fluidos tem como fonte de movimento campos eletrostáticos e campos de pressão; o modelo usa íons frios e elétrons isotérmicos;

#### b) Equações de continuidade

$$\partial_t n_e + \partial_x n_e v_e = 0 \quad (\text{II-3})$$

$$\partial_t n_i + \partial_x n_i v_i = 0, \quad (\text{II-4})$$

#### c) Equação de Poisson

$$\partial_x^2 \phi = -4\pi e (n_e - n_i) \quad (\text{II-5})$$

Se considerarmos situações para as quais as variações temporais são muito mais lentas do que a frequência característica de vibração dos elétrons, podemos equivalentemente pensar no fluido eletrônico como sendo um fluido de massa zero. De fato, expressando analiticamente a condição proposta neste parágrafo vê-se que

$$\partial_t \ll \omega_{pe} \quad (\text{II-6})$$

(onde  $\omega_{pe}$  é a referida frequência de vibração, com  $\omega_{pe}^2 \equiv \frac{4\pi n_{oe} e^2}{m_e}$  e

$n_{oe} = n_{oi} \equiv n_0 = \text{densidade de equilíbrio}$ )

se cumpre se tomarmos  $m_e \rightarrow 0$ . Fisicamente esperamos que neste regime apenas os íons, que tem massa muito superior à dos elétrons, permaneçam na qualidade de entes dinâmicos independentes. O movimento dos elétrons será função direta do movimento iônico; em outras palavras, os elétrons serão "arrastados" pelos íons.

Com estas considerações feitas, e ademais, adimensionalizando o sistema (II-1)-(II-5) segundo as regras:

$$x \rightarrow \frac{x}{(k_B T_e / 4\pi n_0 e^2)^{1/2} \lambda_D}, \quad t \rightarrow t \left( \frac{4\pi n_0 e^2}{m_i} \right)^{1/2} \quad (\text{II-7})$$

$$\phi \rightarrow \frac{e\phi}{k_B T_e}, \quad n = \frac{n_i}{n_0}, \quad v = \frac{v_i}{(k_B T_e / m_i)^{1/2}},$$

obtemos o conjunto de equações

$$\partial_t v + v \partial_x v = -\partial_x \phi \quad (\text{II-8})$$

$$\partial_t n + \partial_x n v = 0 \quad (\text{II-9})$$

$$\partial_x^2 \phi = \exp \phi - n. \quad (\text{II-10})$$

A linearização das equações (II-8)-(II-10) em torno do equilíbrio uniforme  $n=1$ ,  $v=0$ ,  $\phi=0$  reproduz a relação de dispersão linear que caracteriza ondas íon-acústicas

$$\omega^2 = (1 + 1/k^2)^{-1}, \quad (\text{II-11})$$

ou, em variáveis dimensionais

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \left( 1 + \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} \right)^{-1}. \quad (\text{II-12})$$

No limite  $k\lambda_D \rightarrow 0$  a equação (II-12) nos fornece:

$$\omega \sim c_s k + \mathcal{O}((k\lambda_D)^3), \quad (\text{II-13})$$

onde  $c_s \left( \equiv \left( \frac{k_B T_e}{m_i} \right)^{1/2} \right)$  é, neste caso, definido como a velocidade característica das ondas ion-acústicas.

### 11-1-2 - Efeitos Não Lineares

Após esta rápida familiarização com o sistema e a derivação de algumas de suas propriedades lineares, iniciaremos no estudo de efeitos não lineares através da análise da propagação de ondas solitárias associadas às equações (II-8)-(II-10).

Buscamos soluções que dependam de  $x$  e  $t$  através de uma única variável  $x - Mt$  ( $M \equiv$  Número de Mach  $\equiv v_0/c_s = v$  velocidade do pulso solitário/velocidade ion acústica). As condições de contorno apropriadas para um pulso isolado são:

$$\begin{aligned} d_\xi \phi & \text{ e } \phi \rightarrow 0 \\ d_\xi v & \text{ e } v \rightarrow 0 \\ n & \rightarrow 1 \\ d_\xi n & \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{II-14}$$

quando  $|x - Mt| \rightarrow \infty$ , onde definimos  $\xi \equiv x - Mt$ .

As equações (II-8) e (II-9) são imediatamente integradas para que obtenhamos:

$$\eta = \frac{M}{M - v} \tag{II-15}$$

$$(M - v)^2 = M^2 - 2\phi, \tag{II-16}$$

com o uso adicional das condições (II-14).

Substituindo as equações (II-15) e (II-16) na equação (II-10), multiplicando por  $d_\xi \phi$  e integrando, ficamos com:

$$\frac{1}{2} (d_\xi \phi)^2 = \left[ \exp \phi + M (M^2 - 2\phi)^{1/2} - (M^2 + 1) \right]. \quad (\text{II-17})$$

Ondas solitárias compressivas ( $n \geq n_0$ ) são soluções da equação (II-17) se  $1 < M < 1.6$ .

Para propósitos futuros, estaremos interessados em soluções para as quais  $\delta M \equiv M - 1 \ll 1$ . Esperamos naturalmente que para  $M \rightarrow 1$ , a solução se aproxime daquela do problema linear; em outras palavras, se  $\delta M \ll 1$  então  $\phi \ll 1$ .

Expandindo a equação II-17 em  $\phi$  e  $\delta M$  e retendo somente as contribuições dominantes, obtemos:

$$(d_\xi \phi)^2 = \frac{2}{3} \phi^2 (3 \delta M - \phi), \quad (\text{II-18})$$

que pode ser analiticamente integrada (em contraste à equação completa (eq. II-17)) para fornecer

$$\phi = 3 \delta M \operatorname{sech}^2 \left[ \left( \frac{1}{2} \delta M \right)^{1/2} (x - M t) \right]. \quad (\text{II-19})$$

Vemos da equação (II-19) que a amplitude máxima do pulso é  $\phi_M = 3\delta M > 0$  (sólitons compressivos) e que sua largura é da ordem de  $(\delta M)^{-1/2}$ . É fundamental notar que as variáveis  $x, t$  e  $\phi$  mantêm entre si algumas ligações representáveis por meio de uma simples teoria de escalas. Para tanto, introduzamos a variável  $\epsilon \equiv \delta M$  ( $\ll 1$ ) como sendo uma medida da amplitude do pulso. O argumento na equação (II-19) pode ser expresso como

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \epsilon^{1/2} (x - t) - \epsilon^{3/2} t \right], \quad (\text{II-20})$$

sendo o resultado final, representativo de uma teoria fracamente não linear que contém duas variáveis independentes

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \epsilon^{1/2} (x - t) \\ \tau &\equiv \epsilon^{3/2} t, \end{aligned} \quad (\text{II-21})$$

e um certo número de variáveis dependentes

$$\phi \sim v \sim n - 1 \sim \epsilon \quad (\text{II-22})$$

O que faremos a seguir é usar as condições (II-21) e (II-22) e, sem nenhuma outra restrição quanto à forma de solução (como aquela feita logo acima das equações (II-14)), deduzir uma equação geral para ondas fracamente não lineares que tenha como solução especial, a solução (II-20). Mais adiante, argumentaremos a favor das vantagens de se dispor de uma equação como esta que procuramos.

### II-1-3 - Equação Korteweg-de Vries (KdV) para Ondas Ion-acústicas Não Lineares

Suponhamos que  $n, \phi$  e  $v$  tenham uma expansão em série de potências de  $\epsilon$  em torno de um equilíbrio livre de campos externos, i.e.,

$$n = 1 + \epsilon n^{(1)} + \epsilon^2 n^{(2)} + \dots \quad (\text{II-23})$$

$$\phi = \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \dots \quad (\text{II-24})$$

$$v = \epsilon v^{(1)} + \epsilon^2 v^{(2)} + \dots \quad (\text{II-25})$$

Além disto, transformemos as variáveis de acordo com

as fórmulas (II-21), ou seja

$$\partial_x = \epsilon^{1/2} \partial_{z'} , \quad \partial_t = -\epsilon^{1/2} \partial_{z'} + \epsilon^{3/2} \partial_{\tau} . \quad (\text{II-26})$$

Em mais baixa ordem (em  $\epsilon$ ), as equações (II-8)-(II-10)

se tornam

$$\phi^{(1)} = n^{(1)} = v^{(1)} , \quad (\text{II-27})$$

onde eventuais constantes de integração das perturbações são tomadas como iguais a zero.

Na próxima ordem em  $\epsilon$ , as equações (II-8)-(II-10)

fornecem

$$\partial_{z'}^2 \phi = \phi^{(2)} + \frac{\phi^{(1)2}}{2} - n^{(2)} \quad (\text{II-28})$$

$$-\partial_{z'} n^{(2)} + \partial_{\tau} n^{(1)} + \partial_{z'} (n^{(1)} v^{(1)}) + \partial_{z'} v^{(2)} = 0 \quad (\text{II-29})$$

$$-\partial_{z'} v^{(2)} + \partial_{\tau} v^{(1)} + v^{(1)} \partial_{z'} v^{(1)} = -\partial_{z'} \phi^{(2)} . \quad (\text{II-30})$$

Eliminando  $n^{(2)}$  e  $v^{(2)}$  das equações (II-29)-(II-30)

e usando (II-27) e (II-28), encontramos uma equação de evolução temporal para  $\phi^{(1)}$ ,

$$\partial_{\tau} \phi^{(1)} + \phi^{(1)} \partial_{z'} \phi^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_{z'}^3 \phi^{(1)} = 0 . \quad (\text{II-31})$$

Esta última equação é conhecida como a equação de Korteweg-de Vries. Ela descreve a evolução de um distúrbio inicial que se propaga com  $M \sim 1$ .

Notemos que, a equação (II-31) apresenta uma solu-

ção especial do tipo

$$\phi_{esp}^{(1)}(z', \tau) \equiv \phi^{(1)}(z' - c\tau) \equiv 3c \operatorname{sech}^2 \left[ \left( \frac{1}{2}c \right)^{1/2} (z' - c\tau) \right]. \quad (\text{II-32})$$

Identificando  $c = \delta M$ , vemos que (II-32) é exatamente (II-19), o que já havia sido previsto.

A equação (II-31) surge na discussão de numerosos problemas físicos, dos quais as ondas ion acústicas são apenas um exemplo. Ela possui também grande variedade de soluções. A seguir, discutiremos a interrelação entre dispersão e não linearidade na estrutura destas soluções.

#### II-1-4 - Algumas Propriedades da equação KdV

Suponhamos que o termo não linear da equação (II-31) possa ser desprezado. A equação se torna então

$$\partial_\tau \phi + \frac{1}{2} \partial_{z'}^3 \phi = 0. \quad (\text{II-33})$$

Buscando soluções do tipo  $e^{i(k'\xi' - \omega'\tau)}$  temos

$$\omega' + \frac{1}{2} k'^3 = 0. \quad (\text{II-34})$$

Recordando-nos de que a equação KdV está definida em um referencial que se movimenta com velocidade normalizada unitária, a relação (II-34), no referencial laboratório, passa a ser:

$$\omega = k - \frac{1}{2} k^3$$

ou, em variáveis dimensionais

$$\omega = c_s k \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{D} k^2 \right]. \quad (\text{II-35})$$

A equação (II-35) corresponde aos dois primeiros termos da expansão em  $k$  da relação (II-12). É fundamental ressaltar que pacotes formados com ondas que satisfaçam (II-35) se propagam com velocidade  $c_s$  e tendem a se alargar lentamente no tempo devido ao pequeno fator dispersivo  $-\frac{1}{2} (\lambda_D k)^2$ . É óbvio que em tal situação não se pode obter soluções cujo formato seja invariável no tempo, ao estilo das soluções (II-32) por exemplo.

Por outro lado, se considerarmos a equação (II-31) com o termo não linear mas sem o termo dispersivo, ficamos com a seguinte forma:

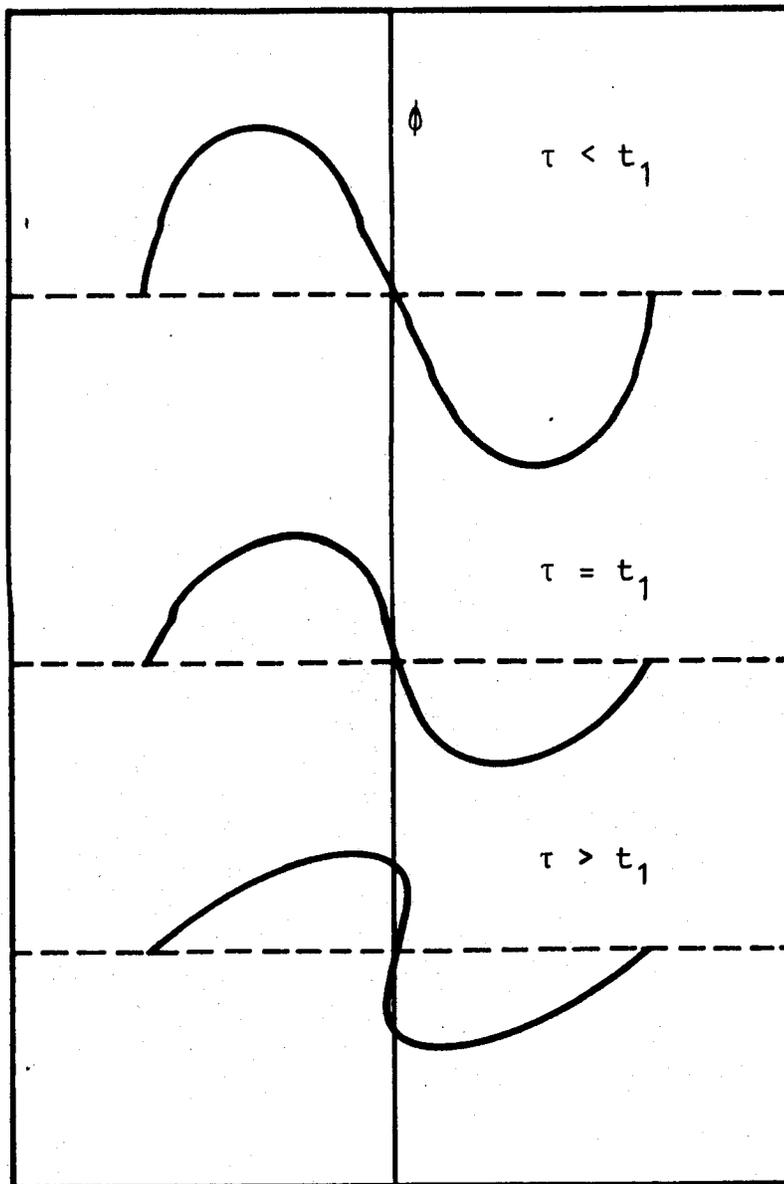
$$\partial_z \phi^{(1)} + \phi^{(1)} \partial_{z'} \phi^{(1)} = 0. \quad (\text{II-36})$$

Do ponto de vista do referencial  $\xi'$ , a equação (II.36) representa soluções cuja velocidade de propagação é proporcional à própria solução em um ponto  $\xi'$  e em um instante  $\tau$ .

Graficamente (figura II-1) é possível ver de imediato o que acontece com um pulso lançado no sistema em  $\tau < t_1$ .

Para qualquer  $\tau > t_1$  (definido como o instante da "quebra da onda") a solução do problema não é única e portanto não adequada fisicamente.

O que se depreende dos dois casos limites analisados acima, é que é precisamente o balanço entre efeitos com tendências inversas (quebra (=efeito não linear) e alargamento (=dispersão linear)) o responsável pela existência de soluções in-



X

Figura II-1 - Processo de "quebra" de ondas descrito no texto [Da72].

variantes do tipo (II-19) ou (II-32).

Por meio de uma técnica de cálculo denominada técnica do espalhamento inverso [GGKM67] pode-se mostrar que soluções do tipo onda solitária (II-32) permanecem com a mesma forma inclusive após colidirem com ondas similares. De uma maneira geral, sempre que ondas solitárias preservarem seu formato inclusive após colisões, serão denominadas sólitons. Com a mesma teoria de espalhamento inverso se mostra que, frequentemente, quaisquer distúrbios iniciais decaem para conjuntos de sólitons que se propagam no sistema para  $\tau \rightarrow \infty$ . Daí, a justificativa para o estudo das propriedades das ondas solitárias isoladas de pequena amplitude.

Dito isto, consideramos encerrada esta análise com objetivos didáticos sobre a propagação de ondas íon-acústicas não lineares em plasmas compostos por elétrons e íons. Nosso próximo ponto é o de investigar quais as consequências da inclusão de mais de uma espécie iônica na propagação destas ondas.

## II-2 - ONDAS ÍON-ACÚSTICAS EM PLASMAS COMPOSTOS POR ELÉTRONS E VÁRIAS ESPÉCIES IÔNICAS

Como já havíamos mencionado na introdução, inúmeras modificações do sistema retratado na subsecção anterior foram realizadas ao longo destes últimos anos. O objetivo básico era o de entender quais as relações entre as mudanças nas características básicas do plasma e as modificações na propagação dos pulsos solitários. Daqui por diante nos restringiremos a uma ten

dência relativamente recente que é a de proceder a análise da propagação de ondas solitárias em plasmas compostos por elétrons, uma espécie de íons positivos e uma espécie de íons negativos.

### II-2-1 - Sólitons Ion-Acústicos em Plasmas com Íons Negativos

Como foi brevemente mencionado na introdução, Das e Tagare [DT75] previram teoricamente a possibilidade de propagação de sólitons íon-acústicos de rarefação ( $n < n_0$ ), além dos tradicionais compressivos, em plasmas com íons negativos, íons positivos e elétrons. Ludwig, Ferreira e Nakamura [LFN84] verificaram experimentalmente esta previsão.

A equação final obtida por Das e Tagare [DT75] foi inspirada no uso de regras de escala, idênticas às usadas na subsecção anterior. Ela pode ser escrita como

$$\partial_z \phi + \frac{1}{2} \left( 3 \frac{n_{+0}}{U^4} - 3 \frac{n_{-0}}{Q^2 U^4} - 1 \right) \phi \partial_z \phi + \frac{1}{2} \partial_z^3 \phi = 0 \quad (\text{II-37})$$

$$U^2 = \eta_{+0} + \eta_{-0}/Q$$

onde  $n_{+0}$  ( $n_{-0}$ ) é a densidade dos íons positivos (negativos) normalizada à densidade de elétrons e  $Q$  é a razão  $m_-/m_+$ . Naturalmente consideramos sistemas com carga líquida igual a zero, ou seja, supondo íons uma vez ionizados,

$$n_{-0} + 1 = n_{+0} \quad (\text{II-38})$$

Se em (II-37) tomarmos  $n_{-0} = 0$ , reobtemos o caso expresso pela equação (II-31), pois  $U = 1$  neste caso. Uma rápida investigação, mostra que o coeficiente do termo não linear da equação (II-37) pode ser positivo ou negativo. Se ele for positivo os tradicionais

sólitons compressivos podem ter lugar no sistema, pois a equação terá estrutura similar à equação (II-31). Contudo, se ele for negativo, os sólitons rarefativos, mencionados anteriormente, podem se propagar (isto é facilmente visto; basta efetuar a substituição  $\phi \rightarrow -\phi$  para que obtenhamos uma equação do tipo da equação (II-31), onde no entanto as variáveis possuem sinal inverso). Suponhamos agora que o coeficiente do termo não linear seja próximo de zero, digamos  $3 \frac{n_{+0}}{U} - 3 \frac{n_{-0}}{Q^2 U} - 1 \sim \epsilon$ . Nestas condições a equação efetiva de evolução é a equação (II-33). De acordo com comentários já feitos, nesta situação não há a possibilidade da formação de ondas solitárias.

O que de fato ocorre é que as regras de escala usadas na subsecção II-1 não podem ser aplicadas aqui se desejarmos excitar sólitons no sistema. A modificação apropriada (se possível) das regras de escala deve ser feita dentro do ponto de vista de que os termos não lineares ainda devem ser comparáveis ao termo dispersivo para ondas cujas amplitude é da ordem de  $\epsilon$ . Supondo, pois, que o coeficiente do termo não linear seja da ordem de  $\epsilon$ , as novas regras de escala passam a ser:

$$\partial_T \sim O(\epsilon^3), \quad \partial_X \sim O(\epsilon), \quad \phi \sim O(\epsilon). \quad (\text{II-39})$$

Recomeçando os cálculos com a suposição (II-39) aplicada ao sistema de equações adimensionalizadas como anteriormente, obtemos

$$m_{\pm} = e^{\pm \phi}$$

$$\partial_T m_{\pm} + \partial_X (m_{\pm} v_{\pm}) = 0$$

$$\partial_t v_{\pm} + v_{\pm} \partial_x v_{\pm} = \frac{1}{Q_{\pm}} (\mp \partial_x \phi) \quad (\text{II-40})$$

onde  $Q_+ = 1$ ,  $Q_- = m_- / m_+ \equiv Q$

e buscando soluções sob a forma de série de potências,

$$\begin{aligned} n_{\pm} &= n_{\pm 0} + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i n_{\pm}^{(i)} \\ v_{\pm} &= \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i v_{\pm}^{(i)} \\ \phi &= \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \phi^{(i)} \end{aligned} \quad (\text{II-41})$$

obtemos, seguindo táticas similares às empregadas na derivação de (II-31),

$$\begin{aligned} \partial_z \phi^{(1)} + \frac{1}{2} \left( 3 \frac{n_{+0}}{v^4} - 3 \frac{n_{-0}}{Q^2 v^4} - 1 \right) \phi^{(1)} \partial_z \phi^{(1)} + \\ \frac{1}{4} \left( 15 \frac{n_{+0}}{v^6} + 15 \frac{n_{-0}}{Q^2 v^6} - 1 \right) \phi^{(1)2} \partial_z \phi^{(1)} + \frac{1}{2} \partial_z^3 \phi^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-42})$$

onde obviamente devemos considerar

$$3 \frac{n_{+0}}{v^4} - 3 \frac{n_{-0}}{Q^2 v^4} - 1 \sim \epsilon.$$

Além de conter termos já presentes na eq. (II-37), a equação (II-42) também contém um termo que envolve uma potência cúbica do potencial  $\phi$ . No caso em que o coeficiente do termo bilinear desta equação for estritamente nulo, ainda haverá a possibilidade de balanço entre dispersão e o mencionado termo trilinear. Este é um ponto importante que será melhor analisado com a introdução de uma técnica conhecida como técnica dos

potenciais efetivos a partir da equação (II.43).

Novamente, aqui nos restringiremos a soluções do tipo  $\phi(t, \xi) = \phi(\eta)$  com  $\eta \equiv \xi - ct$ .

De (II-41) temos então

$$d_{\eta}^2 \phi^{(1)} = - \frac{dP}{d\phi^{(1)}} \quad (\text{II-43})$$

$$\text{com } P(\phi) \equiv -c \phi^{(1)2} + \frac{1}{6} \left( \frac{3n_+0}{U^4} - \frac{3n_-0}{Q^2 U^4} - 1 \right) \phi^{(1)3} + \frac{1}{24} \left( 15 \frac{n_+0}{U^6} + 15 \frac{n_-0}{Q^3 U^6} - 1 \right) \phi^{(1)4}. \quad (\text{II-44})$$

A equação (II-43) é idêntica àquela que governa o movimento unidimensional de uma partícula de coordenada  $\phi$  em um potencial anarmônico ( $P$ ) como função do tempo  $\eta$ .

O potencial  $P$  neste caso é chamado de potencial efetivo (ou de Sagdeev).

Evidentemente este tipo de abordagem do problema poderia ter sido introduzido nas secções anteriores. Só não o foi lá, devido à relativa simplicidade de cálculos. No presente caso, a introdução do potencial efetivo apresenta uma vantagem adicional. Como observado por Watanabe [Wa84] quando do estudo de soluções exatas, o potencial  $P$  descreve concomitantemente as situações em que o coeficiente do seu termo cúbico é ou não pequeno, permitindo assim uma análise da transição entre essas duas situações. Isto fica quase evidente se notarmos que o potencial associado à equação (II-37) está contido na equação (II-44).

A figura (II-2) nos mostra o potencial efetivo  $P$  como função da amplitude da onda  $\phi^{(1)}$ . Consideramos o caso  $Q = 0.176$  e com  $c = 0.04$  [Wa84]. Denotando  $n_{-0}/n_{+0}$  por  $r$ ,

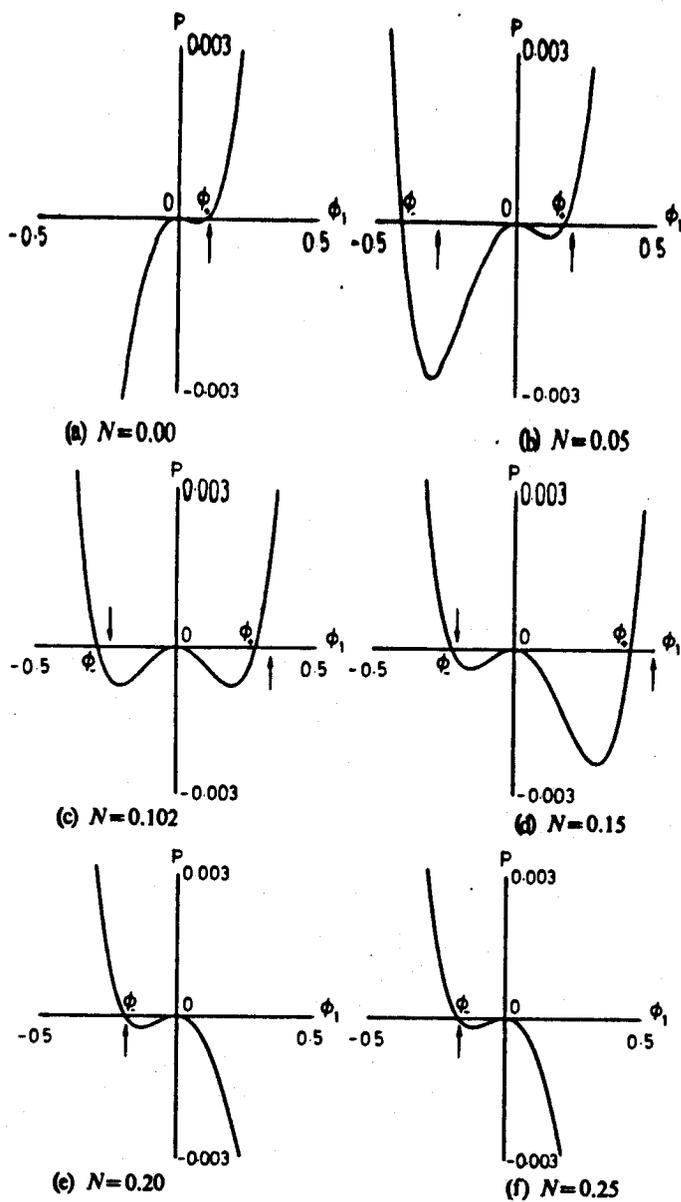


Figura II-2 - Transição da situação em que há somente sólitons compressivos ( $r=0$ ) para aquela em que há somente sólitons rarefativos ( $r=0,25$ ); em todas as situações  $c=0,04$ . Figura reproduzida de [Wa84], com  $N \equiv r$ .

fazemos  $r$  variar de zero a 0.25. Nestes gráficos, a posição inicial de nossa partícula fictícia é sempre o ponto  $(0,0)$ . Este ponto corresponde naturalmente a  $|\eta| \rightarrow 0$ , onde o potencial eletrostático é nulo. Partindo desta posição de equilíbrio instável (e o equilíbrio deve ser instável para que alguma coisa aconteça no sistema) a partícula excursiona para frente ou para trás, com energia total igual a  $0^+$  até que encontre uma raiz de  $P$ . Estas raízes de  $P$  nos dão diretamente a amplitude máxima do sôliton; a partir daí o movimento da partícula é invertido, voltando à posição inicial. É relevante notar que, como já havíamos visto logo abaixo da equação (II-17), aqui também, se  $c < 0$ , não há a formação de sôlitons.

Conforme se vê na figura II-2, quando  $r \neq 0$  podemos excitar simultaneamente sôlitons compressivos e rarefativos, o que não ocorre quando  $r = 0$ . Aí então somente temos sôlitons compressivos. Se  $r > 0.20$ , apenas sôlitons rarefativos estarão presentes no sistema. A figura 2 mostra de fato a transição entre a situação em que estão presentes apenas sôlitons compressivos e a em que estão presentes somente os rarefativos. Do ponto de vista experimental esta mecânica de transição é, no mínimo, um ponto curioso do problema [NT84]. Note-se que a figura II-2(c) representa o caso em que o coeficiente do termo bilinear em  $P$  (ver eq. II-43) é exatamente nulo. Nestas condições, em vista do coeficiente do termo trilinear ser sempre positivo, sôlitons de rarefação e compressão com mesma amplitude se propagam no plasma.

Com relação a esta situação ainda devemos mencionar que a equação (II-42) também pode ser resolvida pela técnica do

espalhamento inverso [Wa74], o que nos leva a concluir que o termo "sóliton", empregado tantas vezes nesta secção é correto.

II-2-2 - Efeitos Térmicos Iônicos sobre Sólitons Ion - Acústicos em Plasmas com Ions Negativos [RSD87a]

Efeitos térmicos para a situação em que as ondas não lineares são descritas pela equação KdV são bastante conhecidos (veja por exemplo [Ta73]).

Nosso objetivo nesta secção é o de analisar a inclusão de temperaturas  $T_{i\pm}$  para os fluídos iônicos naquela situação em que o coeficiente do termo bilinear da equação KdV é pequeno. Uma restrição importante deve no entanto ser feita; as temperaturas iônicas devem ser muito menores do que a eletrônica, caso contrário efeitos cinéticos passam a ser importantes [KT73].

O sistema de equações é bastante similar aos já utilizados. A grande diferença é a presença de termos de pressão para os íons negativos e íons positivos:

$$\partial_t n_{\pm} + \partial_x (n_{\pm} v_{\pm}) = 0 \quad (\text{II-45})$$

$$n_e = \exp(\phi) \quad (\text{II-46})$$

$$\partial_t v_{\pm} + v_{\pm} \partial_x v_{\pm} = Q_{\pm}^{-1} \left( \mp \partial_x \phi - \frac{\sigma_{\pm}}{n_{\pm}} \partial_x p_{\pm} \right) \quad (\text{II-47})$$

$$\partial_t p_{\pm} + v_{\pm} \partial_x p_{\pm} + 3 p_{\pm} \partial_x v_{\pm} = 0 \quad (\text{II-48})$$

$$\partial_x^2 \phi = n_e + n_- - n_+ \quad (\text{II-49})$$

A equação (II-48) é a equação para o campo de pres-

são dos íons positivos ( $p_+$ ) e íons negativos ( $p_-$ ). As normalizações são idênticas às anteriores com as seguintes adições:

$$\sigma_{\pm} = \frac{T_{\pm}}{T_e}$$

$$P_{\pm} \rightarrow \frac{P_{\pm}}{n_0 k_B T_{\pm}} \quad (\text{II-50})$$

Devemos notar que a equação (II-48) é derivada da condição de adiabaticidade dos íons:

$$(\text{II-48}) = d_t (P_{\pm} n_{\pm}^3) = (\partial_t + v_{\pm} \partial_x) (P_{\pm} n_{\pm}^3) = 0.$$

A aproximação adiabática é boa para os íons, se levarmos em conta o fato de que suas grandes massas dificultam seu movimento e subsequente isothermalização, ao contrário do que ocorre com elétrons.

Para derivar as equações apropriadas às escalas usadas, faremos uso de um procedimento iterativo [MOT85a]; envolvendo menos variáveis, ele é mais simples do que a técnica usada nas subseções anteriores (técnica redutivo-perturbativa).

A implementação da técnica é feita a partir das seguintes hipóteses:

a) Todas as grandezas ( $A$ ), menos o potencial eletrostático (que é variável de iteração), possuem uma expansão na forma:

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + \dots \quad (\text{II-51})$$

onde  $A_0$  denota o valor de equilíbrio de  $A$ ;  $A_1, A_2, \dots$  são

de ordem  $\epsilon^1, \epsilon^2, \dots$  respectivamente;

b) o potencial  $\phi$  ele mesmo é de ordem  $\epsilon$  mas não é expandido;

c) novas variáveis

$$\xi = x - Ut, \quad t' = t \quad (\text{II-52})$$

são introduzidas onde a constante  $U$  será determinada como a velocidade da onda na aproximação linear;

d) as derivadas em relação a  $\xi$  e  $t'$  devem ser avaliadas como

$$\partial_{\xi} \sim O(\epsilon), \quad \partial_{t'} \sim O(\epsilon^2) \quad (\text{II-53})$$

e) considerando situações experimentais específicas que indicam  $\frac{T_{\pm}}{T} \sim \phi$ , tomamos

$$\sigma_{\pm} \sim O(\epsilon). \quad (\text{II-54})$$

Assim, usando estas últimas hipóteses em conjunção com o sistema (II-45)-(II-49) se obtêm em mais baixa ordem

$$\begin{aligned} n_{\pm 1} &= \pm \frac{n_{\pm 0} \phi}{Q_{\pm} U^2}, \quad n_{e 1} = \phi \\ v_{\pm 1} &= \pm \frac{\phi}{Q_{\pm} U}, \quad 0 = \left( 1 - \frac{n_{+0}}{U^2} - \frac{n_{-0}}{Q U^2} \right) \phi. \end{aligned} \quad (\text{II-55})$$

Da última equação segue

$$U^2 = \left( n_{+0} + \frac{n_{-0}}{Q} \right). \quad (\text{II-56})$$

onde não consideramos correções de  $o(\epsilon)$  devidas à temperatura.

Na próxima ordem, temos:

$$\partial_{t'} n_{\pm 1} - U \partial_3 n_{\pm 2} + \partial_3 (n_{\pm 0} v_{\pm 2} + n_{\pm 1} v_{\pm 1}) = 0 \quad (\text{II-57})$$

$$\partial_{t'} v_{\pm 1} - U \partial_3 v_{\pm 2} + v_{\pm 1} \partial_3 v_{\pm 1} = - \frac{\sigma_{\pm}}{Q_{\pm} n_{\pm 0}} \partial_3 P_{\pm 1} \quad (\text{II-58})$$

$$- U \partial_3 P_{\pm 1} + 3 P_{\pm 0} \partial_3 v_{\pm 1} = 0 \quad (\text{II-59})$$

$$\frac{2}{U} \partial_{t'} \phi + 3 \frac{\Sigma_1}{U^4} \partial_3 \phi - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3n_{+0}}{U^4} + \frac{3n_{-0}}{Q^2 U^4} \right) \partial_3 \phi^2 = 0 \quad (\text{II-60})$$

onde  $\Sigma_1 = \frac{\sigma_- n_0}{Q^2} + \sigma_+ n_{+0}$ .

A equação (II-60) nos diz que, se o coeficiente do termo não linear for negativo (positivo), a velocidade aumenta (diminui) com  $\phi$ . A equação (II-60) é desta forma sujeita ao processo de "quebra" de ondas descrito na secção II-1-4.

Se a concentração de íons negativos for próxima àquela para qual o coeficiente do termo não linear de (II-60) se anula, então esta equação assume a forma:

$$\frac{2}{U} \partial_{t'} \phi + \frac{3 \Sigma_1}{U^4} \partial_3 \phi = 0 \quad (\text{II-61})$$

Para que possamos estudar a formação de ondas não lineares devemos analisar a próxima ordem do sistema original (II-45)-(II-49).

Das equações (II-45), (II-47) e (II-48) temos:

$$\partial_{t'} n_{\pm 2} - U \partial_3 n_{\pm 3} + \partial_3 (n_{\pm 0} v_{\pm 3} + n_{\pm 1} v_{\pm 2} + n_{\pm 2} v_{\pm 1}) = 0 \quad (\text{II-62})$$

$$\begin{aligned} \partial_{t'} v_{\pm 2} - U \partial_3 v_{\pm 3} + \partial_3 (v_{\pm 1} v_{\pm 2}) = \\ - \frac{\sigma_{\pm}}{Q_{\pm} n_{\pm 0}} \partial_3 P_{\pm 2} + \frac{\sigma_{\pm} n_{\pm 1}}{Q_{\pm} n_{\pm 0}^2} \partial_3 P_{\pm 1} \end{aligned} \quad (\text{II-63})$$

$$\partial_{t'} P_{\pm 1} - U \partial_3 P_{\pm 2} + v_{\pm 1} \partial_3 P_{\pm 1} + 3 P_{\pm 0} \partial_3 v_{\pm 2} + 3 P_{\pm 1} \partial_3 v_{\pm 1} = 0 \quad (\text{II-64})$$

Usando (II-57)-(II-60) e (II-64), obtêm-se:

$$m_{\pm 2} = \pm \left( \frac{3\sigma_{\pm} m_{\pm 0}}{Q_{\pm}^2 U^4} - \frac{3 m_{\pm 0} \bar{\Sigma}}{Q_{\pm} U^6} \right) \phi + \frac{3 m_{\pm 0}}{2 Q_{\pm}^2 U^4} \phi^2 \quad (\text{II-65})$$

$$v_{\pm 2} = \pm \left( \frac{3\sigma_{\pm}}{Q_{\pm}^2 U^3} - \frac{3 \bar{\Sigma}}{2 Q_{\pm} U^5} \right) \phi + \frac{1}{2 Q_{\pm}^2 U^3} \phi^2 \quad (\text{II-66})$$

$$P_{\pm} = \pm \left( \frac{9\sigma_{\pm} m_{\pm 0}}{Q_{\pm}^2 U^4} - \frac{9 m_{\pm 0} \bar{\Sigma}}{Q_{\pm} U^6} \right) \phi + \frac{15 m_{\pm 0}}{2 Q_{\pm}^2 U^4} \phi^2, \quad (\text{II-67})$$

que em associação a (II-62) e (II-63) fornecem, respectivamente

$$U \partial_3 m_{\pm 3} = \pm \left( \frac{27 m_{\pm 0} \bar{\Sigma}^2}{4 Q_{\pm} U^9} - \frac{18 \sigma_{\pm} m_{\pm 0} \bar{\Sigma}}{Q_{\pm}^2 U^7} + \frac{9 \sigma_{\pm}^2 m_{\pm 0}}{Q_{\pm}^3 U^5} \right) \partial_3 \phi +$$

$$\left( \frac{30 \sigma_{\pm} m_{\pm 0}}{Q_{\pm}^3 U^5} - \frac{18 m_{\pm 0} \bar{\Sigma}}{Q_{\pm}^2 U^7} \right) \phi \partial_3 \phi + \frac{5 m_{\pm 0}}{2 Q_{\pm}^3 U^5} \partial_3 \phi^3 \quad (\text{II-68})$$

e

$$U \partial_3 v_{\pm 3} = \pm \left( \frac{9 \bar{\Sigma}^2}{4 Q_{\pm} U^8} - \frac{27 \sigma_{\pm} \bar{\Sigma}}{2 Q_{\pm}^2 U^6} + \frac{9 \sigma_{\pm}^2}{Q_{\pm}^3 U^4} \right) \partial_3 \phi +$$

$$\left( -\frac{9 \bar{\Sigma}}{2 Q_{\pm}^2 U^6} + \frac{18 \sigma_{\pm}}{Q_{\pm}^3 U^4} \right) \phi \partial_3 \phi + \frac{1}{2 Q_{\pm}^3 U^4} \partial_3 \phi^3. \quad (\text{II-69})$$

Finalmente a equação de Poisson nos dá o resultado

$$\partial_{z'}^3 \phi = 2A \partial_{z'} \phi^3 + \frac{3}{2} B \partial_{z'} \phi^2 + C' \partial_{z'} \phi \quad (\text{II-70})$$

onde efetuamos as transformações

$$t' = \tilde{z}'$$

$$z' = z - \left[ \frac{3}{2} \frac{\bar{\Sigma}}{U^3} - \frac{U}{2} \left( \frac{45 \bar{\Sigma}^2}{4 U^8} - \frac{9}{U^6} \left( \sigma_{\pm}^2 m_{\pm 0} + \frac{\sigma_{\pm}^2 m_{\pm 0}}{Q_{\pm}^3} \right) \right) \right] t'. \quad (\text{II-71})$$

Na equação (II-70) definimos

$$2A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{5n_{+0}}{U^6} - \frac{5n_{-0}}{Q^3 U^6} \right) \quad (\text{II-72})$$

$$\frac{3}{2} B = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{3n_{+0}}{U^4} + \frac{3n_{-0}}{Q^2 U^4} \right) + \frac{18\Sigma}{U^8} \left( n_{+0} - \frac{n_{-0}}{Q^2} \right) + \frac{30\Delta}{U^6} \right] \quad (\text{II-73})$$

$$C' = -\frac{2}{U} \quad (\text{II-74})$$

com  $\Delta = \frac{\sigma_- n_{-0}}{Q^3} - \sigma_+ n_{+0}$  (II-75)

Sólitons caracterizados pela variável espacial  $\eta = \xi' - \bar{U}\tau'$  são obtidos de

$$(d_\eta \phi)^2 = A \phi^4 + B \phi^3 + C \phi^2 \quad (\text{II-76})$$

com  $C = 2\bar{U}$ .

As soluções não triviais da equação (II-76) são:

$$\phi_{\pm} = \frac{2\phi_+^0 \phi_-^0 \operatorname{sech}(\sqrt{C}\eta)}{(\phi_+^0 + \phi_-^0) \operatorname{sech}(\sqrt{C}\eta) \mp (\phi_+^0 - \phi_-^0)} \quad , \quad (\text{II-77})$$

onde as amplitudes  $\phi_+^0, \phi_-^0$  são raízes de  $A\phi^2 + B\phi + C = 0$  (isto pode ser claramente visualizado com o uso dos potenciais de Sagdeev). Temos aqui  $\phi_+^0 \phi_-^0 = C/A$ ; já que  $C > 0$  e  $A < 0$ , as amplitudes tem sinais opostos sendo associados respectivamente às ondas compressivas e rarefativas. Não é difícil reparar que tomando  $\Sigma = 0$ ,  $\Delta = 0$  na equação (II-70), a equação (II-42) é de pronto reobtida. Fica portanto fácil notar que aumentando o valor da concentração de íons negativos a partir de zero, a seguinte

seqüência similar a da figura II-2 emerge : s $\acute{o}$ l $\acute{o}$ tons compressivos, um par de s $\acute{o}$ l $\acute{o}$ tons compressivos e rarefativos e finalmente s $\acute{o}$ l $\acute{o}$ tons rarefativos. Cabe ressaltar que na presente situa $\tilde{c}$ o, se  $\bar{U}$  se anula (ou seja, o n $\acute{u}$ mero de Mach  $\acute{e}$  unit $\acute{a}$ rio) novamente ficamos com um s $\acute{o}$ l $\acute{o}$ ton apenas, cuja forma  $\acute{e}$

$$\phi = \frac{2B}{B^2\eta^2 - 2A} \quad , \quad (\text{II-78})$$

e cujo sinal  $\acute{e}$  determinado por B desde que  $A < 0$  .

Um ponto importante da presente teoria  $\acute{e}$  o de que pequenas temperaturas i $\acute{o}$ nicas (como as usadas aqui) s $\tilde{a}$ o praticamente negligenci $\acute{a}$ veis para solu $\tilde{c}$ oes das equa $\tilde{c}$ oes KdV usuais. O fato  $\acute{e}$  que neste caso, o coeficiente do termo n $\tilde{a}$ o linear  $\acute{e}$  muito maior do que os fatores  $\sigma_{\pm}$  . Se contudo este coeficiente  $\acute{e}$  pequeno (como no sistema analisado na presente subsec $\tilde{c}$ o), as temperaturas i $\acute{o}$ nicas tornam-se da mesma ordem de grandeza que ele, podendo desempenhar um papel fundamental.  $\acute{E}$  precisamente o que mostraremos a seguir.

#### An $\acute{a}$ lise Num $\acute{e}$ rica das Solu $\tilde{c}$ oes Obtidas

Aqui analisamos numericamente efeitos de temperatura i $\acute{o}$ nica em s $\acute{o}$ l $\acute{o}$ tons compressivos e rarefativos perto da densidade cr $\acute{i}$ tica (densidade para a qual o coeficiente do termo bilinear da equa $\tilde{c}$ o (II-70)  $\acute{e}$  nulo) em termos das vari $\acute{a}$ veis  $\Sigma$  (equa $\tilde{c}$ o II-60) e  $\Delta$  (equa $\tilde{c}$ o II-75). A regi $\tilde{a}$ o de varia $\tilde{c}$ o das temperaturas no plano  $(\Delta, \Sigma)$   $\acute{e}$  mostrada na fig. II-3, como sendo aquela no semi-plano superior delimitada pelas retas  $\Sigma = -\Delta$  e  $\Sigma = Q\Delta$  . Para os par $\acute{a}$ metros do plasma escolhemos  $n_{+0} = 1.17$  ,

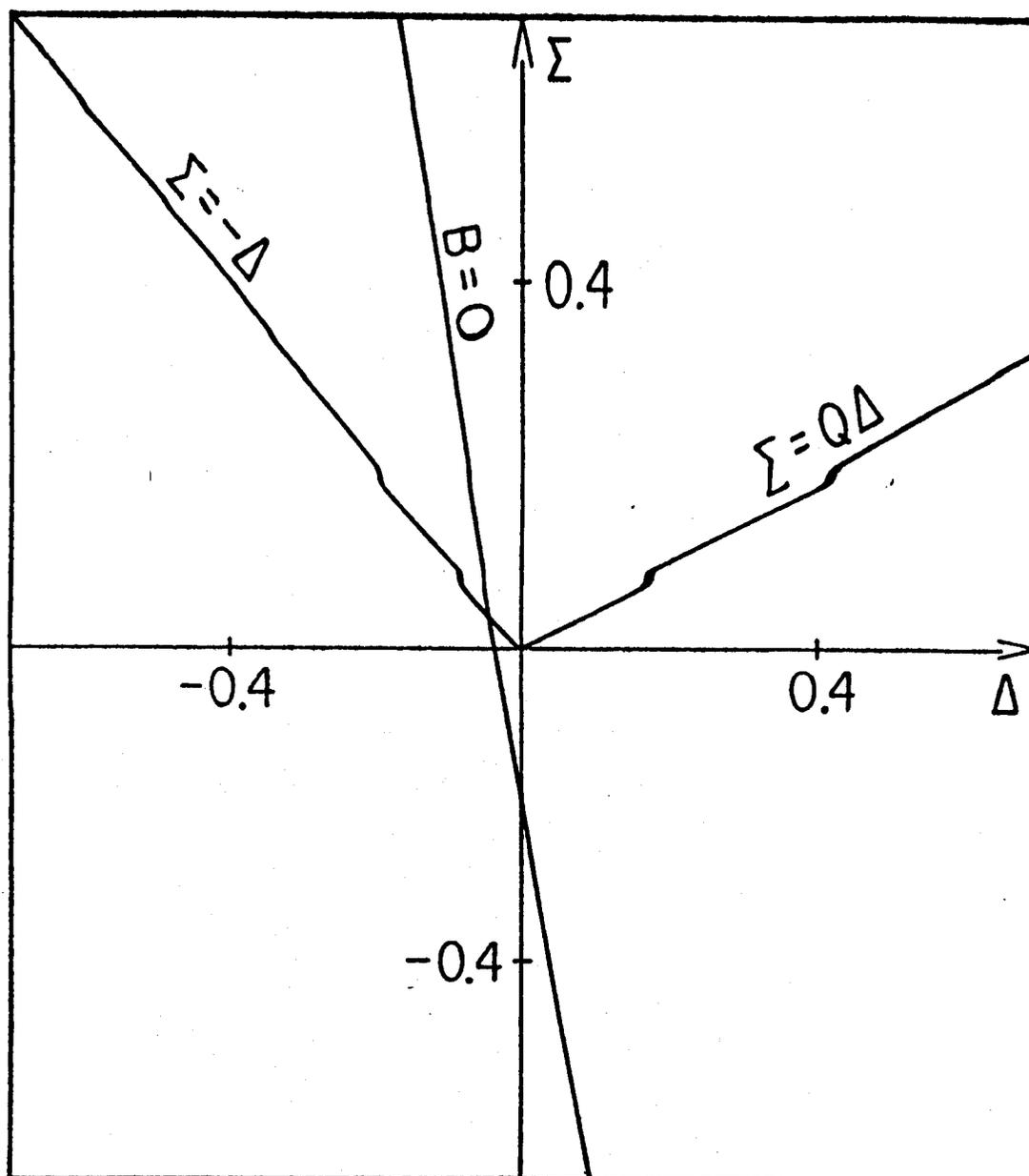


Figura II-3 - No plano  $\Delta, \Sigma$ , os valores permitidos estão entre as linhas  $\Sigma = -\Delta$  e  $\Sigma = Q\Delta$  no semiplano superior;  $B = 0$  é a reta das densidades críticas, a qual, para  $n_{+0} = 1,17$ ,  $n_{-0} = 0,17$ ,  $Q = 0,5$  é dada por  $\Sigma = -5,1.\Delta - 0,2$ .

$n_{-0} = 0.17$  ,  $Q = 0.5$  . A linha das densidades críticas  $B = 0$  corresponde a sôltons de mesma amplitude  $\phi_+^0 = |\phi_-^0|$  ; à direita desta linha  $\phi_+^0 > |\phi_-^0|$  e à esquerda  $\phi_+^0 < |\phi_-^0|$  . Para  $\Sigma$  tomamos três valores, 0, 0.1 e 0.2, deixando  $\Delta$  cobrir todos os valores permitidos na fig. II-3 desde que  $\phi_{\pm}^0$  sejam pequenos. Enfim, as curvas para  $\phi_+^0$  e  $\phi_-^0$  são mostradas na fig. II-4 para  $c = 0.02$  . Para um dado  $\Sigma$  ,  $\phi_+^0$  aumenta com o aumento de  $\sigma_-$  e diminui com o aumento de  $\sigma_+$  . No que toca à  $|\phi_-^0|$  a situação é revertida:  $|\phi_-^0|$  diminui com o aumento  $\sigma_-$  e aumenta com o aumento de  $\sigma_+$  . Estes resultados podem ser entendidos fisicamente considerando o fato de que  $\phi_+^0$  está relacionado a compressões de íons positivos e de que estas compressões são dificultadas pelo aumento na temperatura destes íons positivos. Similarmente  $\phi_-^0$  está relacionado à compressões de íons negativos, e estas "rarefações" são obstaculizadas por aumentos em  $T_-$  .

Definindo as larguras  $a_{\pm}$  por:

$$\phi_{\pm}(\eta = a_{\pm}) = \frac{1}{2} \phi_{\pm}^0$$

se obtém

$$e^{\sqrt{c} a_{\pm}} = 1 \pm \frac{2 |\phi_{\mp}^0|}{\phi_+^0 + |\phi_-^0|} \left( 1 + \sqrt{2 + \frac{|\phi_{\pm}^0|}{|\phi_{\mp}^0|}} \right) .$$

Para  $\Sigma = 0, 0.1$  e  $0.2$  a variação de  $a_{\pm}$  como função de  $\Delta$  é mostrada na fig. (II-5) com  $c = 0.02$  . A interpretação física é similar àquela dos gráficos de amplitude.

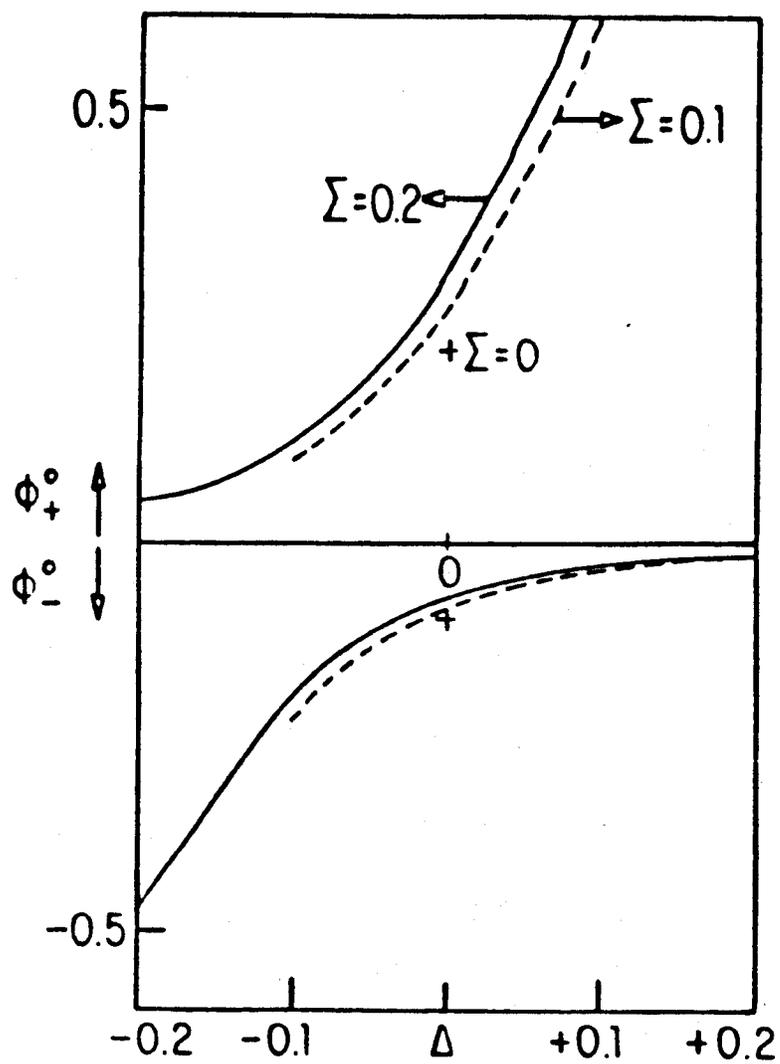


Figura II-4 - Amplitude dos s3olitos  $\phi_+^0$  e  $\phi_-^0$  como fun33es de  $\Delta$  para tr33s diferentes valores de  $\Sigma$ : 0, 0,1 e 0,2; outros par33metros como os da figura II-2.

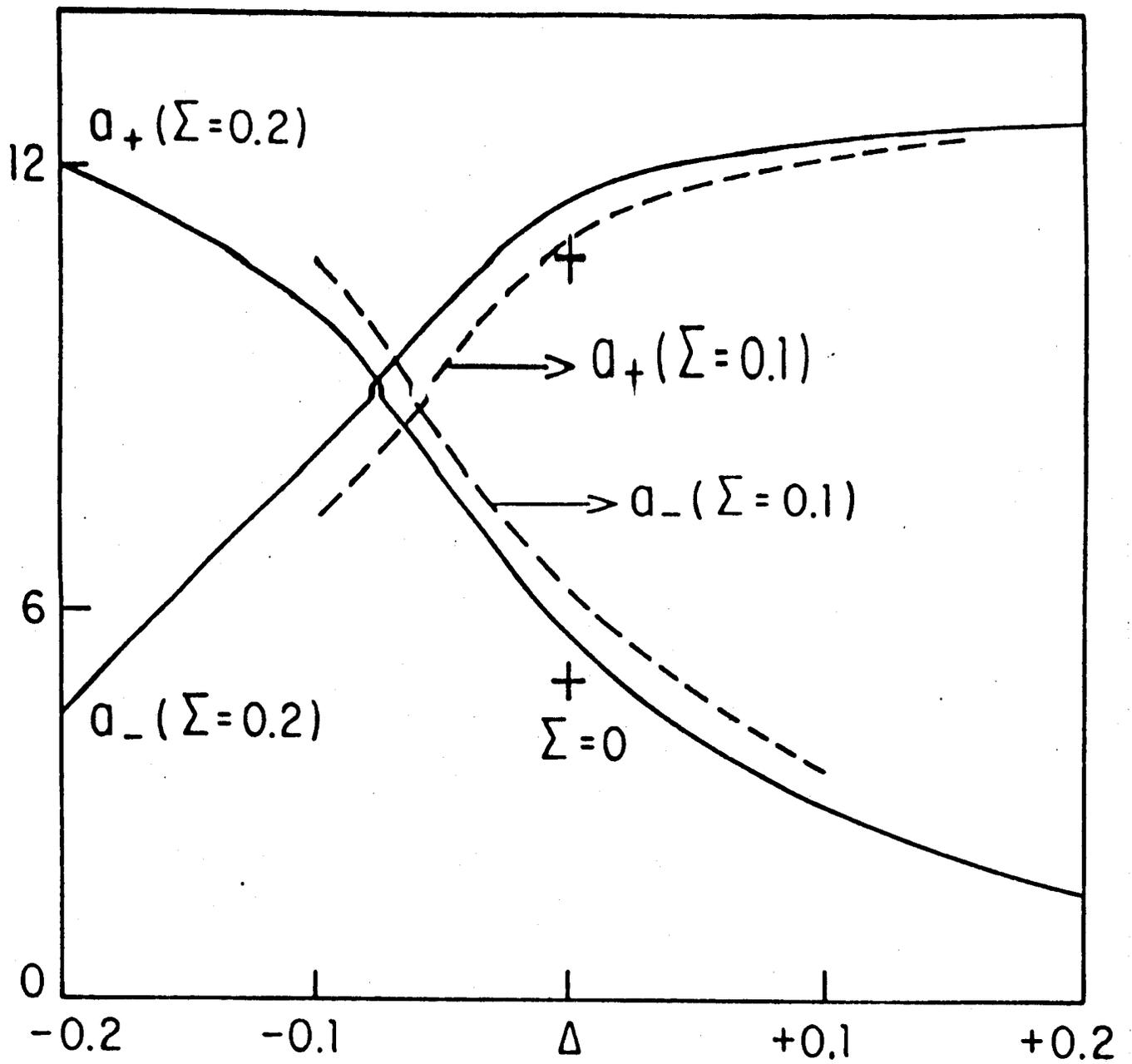


Figura II-5 - Largura dos s3olitons ( $a_{\pm}$ ) como fun33o de  $\Delta$  para tr33s diferentes valores de  $\Sigma$ ; , outros par33metros como os da figura II-2.

### Análise de Experimentos

Como exemplo analisaremos agora medidas realizadas em um recente experimento [NT84]. Este experimento foi realizado com uma concentração crítica (no sentido da equação (II-42)) de íons negativos. Fica então evidente que o primeiro termo do coeficiente B da equação (II-76) não contribui.

Em particular examinamos a dependência do número de Mach  $M (= \frac{\bar{U}}{U} + 1)$  em relação às amplitudes dos sólitons  $\phi_+^0, \phi_-^0$ , representado na figura (II-6) por círculos claros e pretos respectivamente. Da equação (II-76) segue:

$$\Delta M \equiv M - 1 = -\frac{B}{2} \phi_{\pm}^0 - \frac{A}{2} (\phi_{\pm}^0)^2 \quad (\text{II-79})$$

Para os parâmetros do experimento,  $A = -1.014$ ,  $B = 0.102$ .

As curvas resultantes são representadas pelas linhas cheias (a) e (c) na fig. (II-6). Estas curvas teóricas reproduzem qualitativamente um comportamento que se manifesta nos pontos experimentais: eles se separam de uma tal forma que o número de Mach para uma dada amplitude compressional é maior do que aquele do correspondente caso rarefativo. A linha inferior está abaixo do resultado experimental para sólitons compressivos. Para este tipo de onda contudo, é sabido que a suposição de elétrons isotérmicos prediz números de Mach menores do que os observados. O problema é que o modelo por nós usado desconsidera quaisquer efeitos cinéticos relacionados às partículas envolvidas. Em realidade sabe-se que algumas destas partículas podem viajar com velocidades semelhantes à da onda, o

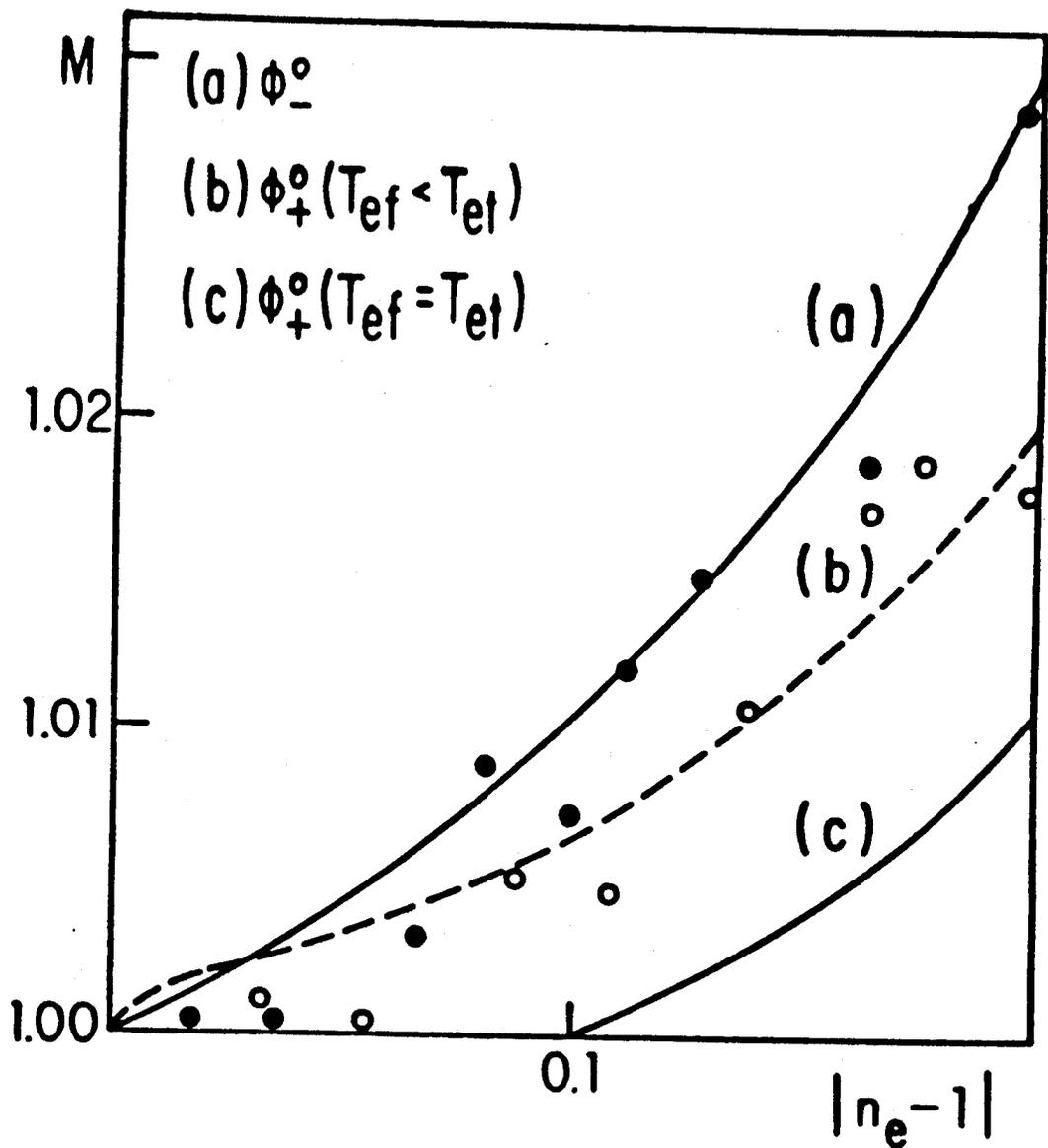


Figura II-6 - Números de Mach experimentais como funções das amplitudes dos sólitons compressivos (o) e rarefativos (●). As linhas contínuas representam a equação (II-79) para sólitons rarefativos (a) e compressivos (c); a linha pontilhada (b) representa a equação (II-80) para sólitons compressivos.  $n_{+0} = 1,114$ ,  $n_{-0} = 0,114$ ,  $Q = 0,476$ ,  $\Sigma = 0,108$ ,  $\Delta = -0,038$ ,  $\frac{T_{ef}}{T_{et}} = 0,93$ .

que proporcionaria uma troca de energia onda-partícula, não viável no modelo de fluidos. No caso específico que iremos considerar (sólitons compressivos com  $\phi > 0$ ), elétrons são atraídos pela onda podendo ser capturados por ela. Pode-se mostrar então que a expressão (II-79) é alterada para [Sc73]

$$\delta M = -\frac{B}{2} \phi_+^0 - \frac{A}{2} (\phi_+^0)^2 + \frac{D}{2} (\phi_+^0)^{1/2}. \quad (\text{II-80})$$

onde

$$D = \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{T_{ef}}{T_{et}} \right)$$

com  $T_{ef}$  = temperatura dos elétrons "livres"

e  $T_{et}$  = temperatura dos elétrons capturados pelo sóliton.

No caso dos sólitons de rarefação, devemos informar que recentemente se mostrou [Ro86] que elétrons refletidos podem ser tão significativos quanto os capturados dos casos compressivos. Neste presente trabalho contudo somente as equações (II-79) e (II-80) são consideradas para uma adequação aos dados experimentais.

Tomando  $T_{ef}/T_{et} = 0.93$  obtém-se da eq. (II-80) a curva pontilhada (b) na fig. II-6. A concordância com os resultados experimentais é melhorada e em particular a presença de sólitons compressivos abaixo do seu ponto de corte (dado por  $\delta M = 0$  na eq. (II-79)) é explicada. Note-se que este corte é uma peculiaridade das soluções da equação (II-70) quando  $c$ , que é proporcional a  $\delta M$ , se aproxima de zero (equação II-78). Na fi

gura II-7, apresentamos outro conjunto de curvas teóricas obtidas supondo que íons positivos e negativos possuam temperaturas ligeiramente diferentes:  $\sigma_+ = \frac{1}{15}$ ,  $\sigma_- = \frac{1}{16.5}$ , do qual segue  $B = 0.074$ . Comparada à fig. (II-6) (onde  $\sigma_+ = \sigma_- = \frac{1}{15}$ ), a curva (a) é baixada, a curva (c) é erguida e, escolhendo  $T_{ef}/T_{et} = 0.97$ , a curva (b) praticamente não é afetada.

### Conclusões Parciais ao Tema

Nesta subsecção II-2-2 apresentamos uma análise dos efeitos das temperaturas iônicas sobre a propagação de sólitons íon-acústicos em plasmas constituídos por elétrons, íons positivos e negativos. Consideramos a situação na qual a concentração dos íons negativos está próxima ao seu valor crítico, correspondendo a um valor quase nulo do coeficiente do termo quadrático da equação  $KdV$ . Isto nos levou a incluir um termo cúbico na equação, como também correções de temperatura de  $O(\epsilon)$  ao termo quadrático. Este ordenamento é consistente com condições que prevalecem em experimentos e com o requerimento da estabilidade marginal de ondas íon-acústicas lineares. As expressões resultantes indicam não apenas que temperaturas iônicas têm efeitos significativos nas amplitudes e larguras dos sólitons, mas também que estes efeitos são altamente assimétricos quando as temperaturas relativas aos dois tipos de íons são de sinais. É de se esperar que a análise presente possa ser de alguma validade na interpretação de resultados experimentais. Analisamos um conjunto de dados para os quais a inclusão de temperaturas iônicas reproduz qualitativamente a diferença obser-

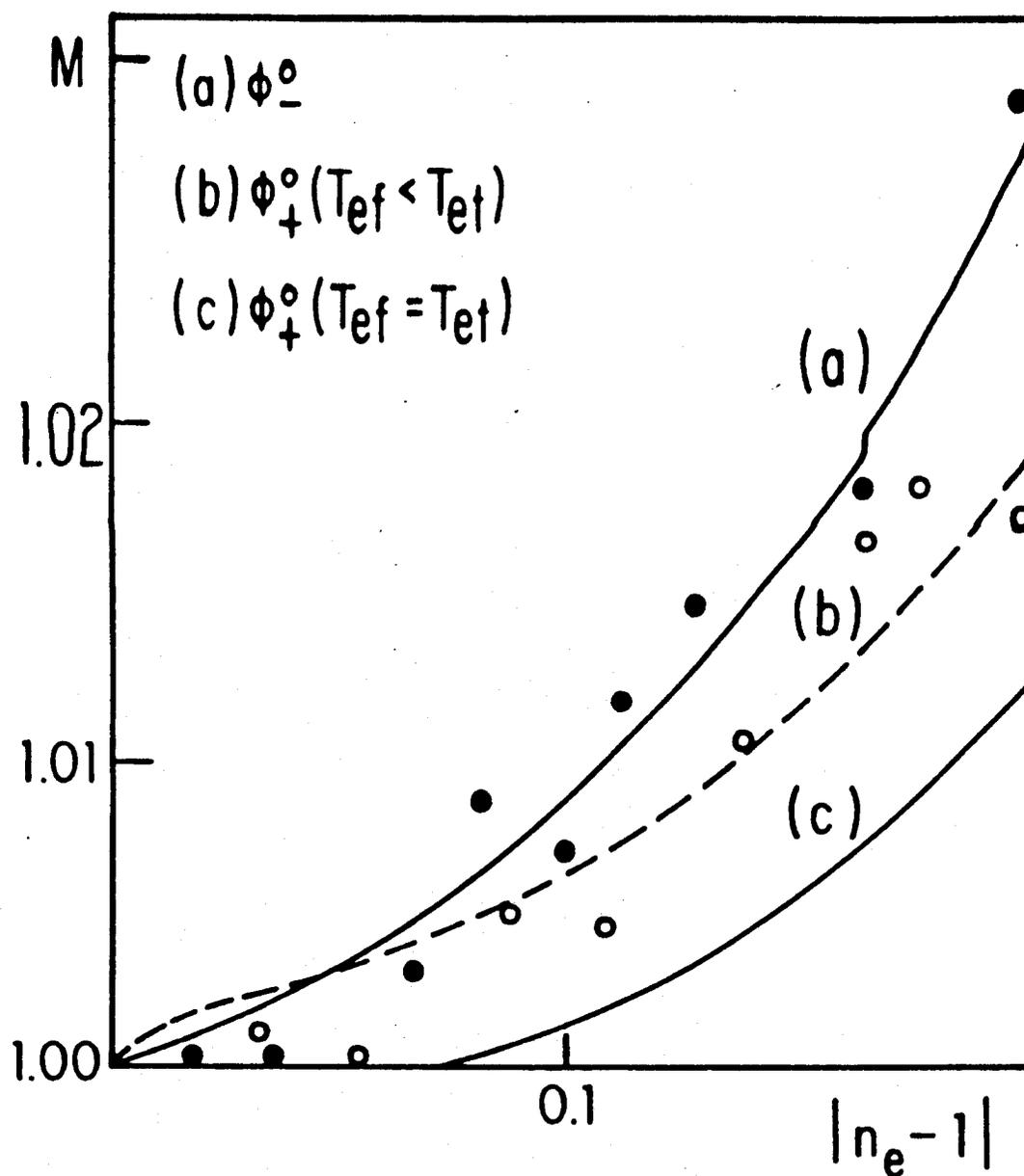


Figura II-7 - O mesmo que a figura II-6, com  $\Sigma = 0,105$ ,  
 $\Delta = -0,010$ ,  $\frac{T_{ef}}{T_{et}} = 0,97$ .

vada nos números de Mach para s $\acute{o}$ litos compressivos e rarefat $\acute{i}$ vos enquanto nenhuma diferen $\acute{c}$ a significativa deveria ocorrer de acordo com a equa $\acute{c}$ o MKdV (equa $\acute{c}$ o (II-70) sem o termo quadr $\acute{a}$ tico). Tamb $\acute{e}$ m mostramos que se em adi $\acute{c}$ o  $\tilde{a}$  temperatura i $\acute{o}$ nica, um efeito de ordem  $\epsilon$ , se inclui captura de el $\acute{e}$ trons pelos s $\acute{o}$ litos compressivos, um efeito de ordem  $\epsilon^{3/2}$ , a qualida $\acute{d}$ e de concord $\acute{a}$ ncia  $\acute{e}$  melhorada. Naturalmente, para discriminar os efeitos aqui analisados de outros que contribuem nesta ordem, resultados experimentais para vari $\acute{a}$ s temperaturas i $\acute{o}$ nicas seriam  $\acute{u}$ teis.

Resta-nos mencionar que a inclus $\acute{o}$  de corre $\acute{c}$ oes de ordem superior [NT85,TR86], bem como a an $\acute{a}$ lise da reflex $\acute{o}$  de el $\acute{e}$ trons pelos s $\acute{o}$ litos de rarefa $\acute{c}$ o [Ro86], podem aprimorar a sintonia entre resultados te $\acute{o}$ ricos e dados experimentais.

### III - ONDAS ELETROMAGNÉTICAS NÃO LINEARES DE ALTA FREQUÊNCIA

Nas secções subseqüentes, estaremos envolvidos com a análise de fenômenos modulacionais em ondas de alta frequência devidos à combinação de efeitos lineares e não lineares. Em outras palavras, escrevendo as ondas na forma geral (supondo propagação ao longo do eixo x)

$$A(x, t) = a(x, t) e^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad (\text{III-1})$$

buscaremos a construção de equações para a amplitude  $a$  que, neste contexto, depende do espaço e do tempo na forma

$$\partial_t a = T_L(a) + T_{NL}(a) \quad (\text{III-2})$$

onde  $T_L$  e  $T_{NL}$  são operadores lineares e não lineares respectivamente e onde a derivada temporal pode não estar presente nos casos estacionários. Note-se que os fenômenos modulacionais mencionados acima, devem ser definidos como um processo lento em relação aos processos de alta frequência. Com isto em mente então, podemos escrever

$$\partial_t a \ll \omega a \quad (\text{III-3})$$

$$\partial_x a \ll k a ;$$

no caso em que as amplitudes são pequenas e constantes, a conexão entre  $\omega$  e  $k$  é dada exatamente pela relação de dispersão linear do sistema. Já para ondas fracamente não lineares, a relação de dispersão linear é aproximadamente satisfeita. Em

ondas ultra-intensas, a relação de dispersão é basicamente determinada pela onda em si e não especialmente pelo meio de propagação.

Como veremos mais adiante, a relação (III-2) apresenta um comportamento bastante similar àquele comentado no capítulo anterior: do balanço entre dispersão linear (que pode estar contida em  $T_L$ ) e componentes não lineares ( $T_{NL}$ ), estruturas com extensão finita e invariantes na sua forma (ondas solitárias) podem surgir no sistema. Embora a construção de  $T_{NL}$  seja em geral complicada, sabe-se, por exemplo, que  $T_L$ , no caso de uma onda transversal eletromagnética que se propaga ao longo do eixo x em um plasma eletrônico simples, possui termos proporcionais a derivadas segundas espaciais; pois são exatamente estes termos que compõem a estrutura dispersiva da onda (veja [Ka75] para uma digressão sobre efeitos dispersivos).

Como já havíamos feito no capítulo II, a primeira secção será destinada à familiarização com as técnicas a serem empregadas nas demais. Mostraremos também a existência de equivalência entre procedimentos padronizados e outros mais simples e mais adequados aos nossos objetivos. Nas secções restantes serão feitas aplicações a sistemas físicos concretos.

### III-1 - A TÉCNICA DA MÚLTIPLA ESCALA DE TEMPO [Da72]

Para fixar idéias estudaremos aqui um oscilador anarmônico do tipo

$$d_t^2 X + \omega_0^2 X = \epsilon X^3$$

(III-4)

O fator  $\epsilon$  é positivo e muito menor do que 1. Embora o sistema não tenha dependência espacial, esta técnica não linear poderá ser estendida diretamente para tais casos.

Com relação ao oscilador, nossa primeira tentativa é a de simplesmente buscar uma expansão da solução real em torno da solução linear. Tentemos implementar esta idéia fazendo:

$$x(t) = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots \quad (\text{III-5})$$

Substituindo a equação (III-5) na equação (III-4) obtemos,

em ordem  $\epsilon^0$ :

$$d_t^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (\text{III-6})$$

Tomemos uma solução particular da equação (III-6) como sendo

$$x_0 = A e^{-i\omega_0 t} + c.c. \quad (\text{III-7})$$

em ordem  $\epsilon^1$ :

$$d_t^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0^3.$$

Usando a solução (III-7) encontramos

$$d_t^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = (3|A|^2 A e^{-i\omega_0 t} + c.c.) + (A^3 e^{-3i\omega_0 t} + c.c.). \quad (\text{III-8})$$

Escrevendo

$$x_1 = x_1(\omega_0) + \tilde{x}_1, \quad (\text{III-9})$$

com 
$$\tilde{x}_1 = -\frac{1}{8\omega_0^2} (A^3 e^{-3i\omega_0 t} + c.c.),$$

obtemos para  $X_1(\omega_0)$  a seguinte equação:

$$\frac{d^2}{dt^2} X_1(\omega_0) + \omega_0^2 X_1(\omega_0) = \left( 3|A|^2 A e^{-i\omega_0 t} + c.c. \right). \quad (\text{III-10})$$

A solução da equação (III-10) comporta-se assintoticamente como:

$$X_1(\omega_0) \sim t \text{ sem}(\omega_0 t), \quad (\text{III-11})$$

o que, devido ao fator multiplicativo  $t$ , não é aceitável para todos os tempos. Estas soluções são chamadas seculares.

Segundo um ponto de vista alternativo, a solução para a equação (III-10) poderia ser tentativamente escrita como

$$X_1(\omega_0) \sim X_1^0 e^{-i\omega_0 t} + c.c., \quad (\text{III-12})$$

o que também levaria a problemas de divergência quando inserida em (III-10).

Suponhamos agora que a frequência de vibração da solução linear (equação (III-7)) adicionemos um pequeno fator constante  $\delta$  tal que  $\omega_0 \rightarrow \omega \equiv \omega_0 + \delta$  com  $\delta \ll \omega_0$ . A equação (III-10) passa a ser escrita como

$$\frac{d^2}{dt^2} X_1 + \omega_0^2 X_1 - \frac{2\delta\omega_0}{\epsilon} (A e^{-i\omega t} + c.c.) = \left( 3|A|^2 A e^{-i\omega t} + c.c. \right) \quad (\text{III-13})$$

onde o termo  $-\frac{2\delta\omega_0}{\epsilon} (A e^{-i\omega t} + c.c.)$  provêm da correção às derivadas temporais de  $X_0$  devido ao deslocamento  $\delta$ ; a equação (III-6) por sua vez, não é afetada.

Escrevemos a equação (III-13) na forma

$$\frac{d^2}{dt^2} X_1 + \omega_0^2 X_1 = \left( 3|A|^2 A + \frac{2\delta \omega_0 A}{\epsilon} \right) e^{-i\omega t} + c.c. \quad (\text{III-14})$$

Para evitar o comportamento divergente (ou secular), basta que tomemos

$$\delta = -\epsilon \frac{3|A|^2}{2} \omega_0^{-1}. \quad (\text{III-15})$$

Fica claro neste ponto, que a grande virtude da introdução do deslocamento de frequência é a de permitir uma solução perturbativa do problema inicial definido pela equação (III-4), livre de quaisquer divergências seculares. Será curioso observar mais tarde que o método do deslocamento de frequência é, em verdade, equivalente à soma infinita dos termos divergentes da teoria de perturbações convencional.

A equação restante é simplesmente  $\frac{d^2}{dt^2} X_1 + \omega_0^2 X_1 = 0$ , que pode ser absorvida na equação (III-6) sem nenhuma perda de generalidade.

Sumarizando, nossa solução final é

$$X \cong a e^{-i\omega_0 t} - \frac{1}{8\omega_0^2} a^3 e^{-3i\omega_0 t} \quad (\text{III-16})$$

com  $a = A e^{-i\delta t}$  e  $\delta = -\epsilon \frac{3|A|^2}{2} \omega_0^{-1}$ .

A solução (III-16) vibra em duas escalas distintas de tempo. A primeira delas é a caracterizada pela rápida frequência  $\omega_0$ ; esta é a escala característica da aproximação linear. A segunda escala de tempo, a escala "modulacional" ou "escala lenta", é caracterizada pelo fator  $\delta$ , um pequeno deslocamento de frequência tipicamente não linear que promove modificações na

amplitude da solução vibratória. A seguir, construiremos uma teoria geral de evolução temporal para o sistema descrito pela equação (III-4), que possua (III-16) como solução especial ou particular (tal procedimento já foi adotado no cap. II). Com esta finalidade, associada a cada escala distinta de tempo ( $t_n$ ), introduzamos uma variável particular independente  $t_n$  de tal forma que a derivada temporal possa ser escrita como

$$d_t \rightarrow \partial_{t_0} + \epsilon \partial_{t_1} + \dots \quad (\text{III-17})$$

Quando os cálculos estiverem completos, simplesmente retornamos à única variável original  $t$  através da equação (III-17) e das definições

$$t_0 = t, \quad t_1 = \epsilon t, \quad t_2 = \epsilon^2 t, \dots \quad (\text{III-18})$$

Este procedimento, brevemente descrito nas últimas linhas, é conhecido como técnica das múltiplas escalas temporais. Veremos a seguir que a liberdade adicional introduzida pelo uso da infinidade de variáveis definidas nas equações (III-17) e (III-18) suprime o comportamento secular do sistema não linear, fornecendo soluções do tipo (III-11) apenas para tempos pequenos, quando os problemas de divergência ainda não são operantes.

Suponhamos pois que a solução da equação (III-4) possa ser escrita como

$$X = X_0 + \epsilon X_1 + \epsilon^2 X_2 + \dots \quad (\text{III-19})$$

com

$$x_0 = x_0(t_0, t_1, \dots)$$

$$x_1 = x_1(t_0, t_1, \dots) \quad (\text{III-20})$$

etc ...

Usando as equações (III-17), (III-19) e (III-20) na (III-4) obtemos:

$$\partial_{t_0}^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (\text{III-21})$$

$$2 \partial_{t_0 t_1}^2 x_0 + \partial_{t_0}^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = 3 |x_0|^2 x_0 + x_0^3 \quad (\text{III-22})$$

etc ...

Supondo que a solução da equação (III-21) seja da forma

$$x_0 = A(t_1) e^{-i\omega_0 t_0} + c.c. \quad (\text{III-23})$$

tem-se, da equação (III-22)

$$e^{-i\omega_0 t_0} (2i\omega_0 \partial_{t_1} A + \partial_{t_0}^2 x_1 + \omega_0^2 x_1) = 3|A|^2 A e^{-i\omega_0 t_0} + A^3 e^{-3i\omega_0 t_0}$$

ou

$$\partial_{t_0}^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = (3|A|^2 A + 2i\omega_0 \partial_{t_1} A) e^{-i\omega_0 t_0} + A^3 e^{-3i\omega_0 t_0} \quad (\text{III-24})$$

Escrevendo como antes  $x_1 = x_1(\omega_0) + \tilde{x}_1$  com  $\tilde{x}_1 = -\frac{1}{8\omega_0^2} A^3 e^{-3i\omega_0 t_0} + c.c.$ ,

temos para  $x_1(\omega_0)$  a equação:

$$\partial_{t_0}^2 x_1(\omega_0) + \omega_0^2 x_1(\omega_0) = (3|A|^2 A + 2i\omega_0 \partial_{t_1} A) e^{-i\omega_0 t_0} \quad (\text{III-25})$$

A única forma de evitarmos problemas seculares com a equação (III-25), é anulando o termo entre colchetes do lado

direito,

$$2 i \omega_0 \partial_{t_1} A = -3 |A|^2 A, \quad (\text{III-26})$$

de onde se obtém:

$$\partial_{t_1} A = \frac{3 i \omega_0^{-1}}{2} |A|^2 A. \quad (\text{III-27})$$

$$\text{Escrevendo } A(t_1) = \hat{a}(t_1) e^{-i\phi(t_1)}, \quad (\text{III-28})$$

$$\partial_{t_1} \hat{a} = 0$$

$$\partial_{t_1} \phi = -\frac{3}{2} \omega_0^{-1} \hat{a}^2,$$

de onde

$$\hat{a}(t_1) = c t^e; \quad \phi = -\frac{3}{2} \omega_0^{-1} \hat{a}^2 t_1 = -\frac{3 \epsilon \omega_0^{-1} \hat{a}^2}{2} t = \delta t. \quad (\text{III-29})$$

A solução (III-29) é idêntica à (III-16) e qualquer uma das duas, no limite  $\delta t \ll 1$  nos fornece para  $X(\omega_0)$  o seguinte (e nada surpreendente) resultado:

$$X(\omega_0) \sim t \text{ sen } \omega_0 t, \quad (\text{III-30})$$

Verifica-se, com estes resultados, que a solução (III-30) representa uma boa aproximação para a função (III-23), no caso de tempos pequenos. Para tempos arbitrários a expansão em  $\delta$  de  $A(t_1)$  constitui uma série de termos divergentes que são os termos da teoria de perturbação convencional; a teoria de múltiplas escalas de tempo representa, portanto, uma renormalização da frequência determinada pela teoria linear.

Com o exemplo a seguir, mostraremos que para sistemas mais complexos a técnica de múltiplas escalas passa a ser

consideravelmente distinta e mais poderosa do que a dos deslocamentos de freqüência.

Suponhamos que desejamos obter a solução para um oscilador descrito pela seguinte equação:

$$d_t^2 X + \omega_p^2 X = \epsilon \left( 1 - \beta |X|^2 \right) d_t X \quad (\text{III-31})$$

com  $0 < \epsilon \ll 1$  e  $\beta > 0$ .

Apliquemos a técnica da múltipla escala à equação (III-31);

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \epsilon X_1 + \epsilon^2 X_2 + \dots \\ X_0 &= X_0(t_0, t_1, \dots) \\ X_1 &= X_1(t_0, t_1, \dots) \end{aligned} \quad (\text{III-32})$$

considerando  $d_t$  dado pela expansão (III-17).

Analisando o sistema ordem por ordem obtemos

em ordem  $\epsilon^0$ :

$$\partial_{t_0}^2 X_0 + \omega_0^2 X_0 = 0; \quad (\text{III-33})$$

em ordem  $\epsilon^1$ :

$$\partial_{t_0}^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 + 2\partial_{t_1 t_0}^2 X_0 = \left( 1 - \beta |X_0|^2 \right) \omega_0 \partial_{t_0} X_0. \quad (\text{III-34})$$

Suponhamos agora que a solução da equação (III-33)

seja dada por

$$X_0 = A(t_1) e^{-i\omega_0 t_0} + \text{c.c.} \quad (\text{III-35})$$

A seguir substituíamos a equação (III-35) na equação

(III-34) para obtermos

$$\partial_{t_0}^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 + (-2i\omega_0 \partial_{t_1} A) e^{-i\omega_0 t_0} = -i(1 - \beta |A|^2) \omega_0^2 A e^{-i\omega_0 t_0} \quad (\text{III-36})$$

A eliminação dos termos seculares é feita exigindo-se que:

$$2\omega_0 \partial_{t_1} A = (1 - \beta |A|^2) \omega_0^2 A \quad (\text{III-37})$$

ou

$$\partial_{t_1} A = \frac{\omega_0}{2} (1 - \beta |A|^2) A \quad (\text{III-38})$$

A equação (III-38) é uma equação de evolução temporal para a variável  $A$  não podendo desta forma ser obtida por uma teoria que envolva meros deslocamentos constantes de frequência. Aqui vislumbramos o poder das teorias de múltipla escala, o que se confirmará nas secções seguintes.

A solução da equação (III-38) é

$$A^2(t_1) = \frac{4/\beta}{1 + \left(\frac{4}{\beta} A_0^2 - 1\right) \exp(-\omega_0 t_1)} \quad (\text{III-39})$$

onde  $A_0$  é a amplitude para  $t_1 = 0$ . Da equação (III-39) vemos que a amplitude satura quando  $t_1 \rightarrow \infty$ , com

$$A^2(\infty) = 4/\beta \quad (\text{III-40})$$

Voltando à variável original  $t$ , escrevemos (III-39)

como

$$A^2(t) = \frac{4/\beta}{1 + \left(\frac{4}{\beta} A_0^2 - 1\right) \exp(-\epsilon \omega_0 t)} \quad (\text{III-41})$$

e a solução completa como

$$X(t) \approx \frac{2/\beta^{1/2}}{\left[1 + \left(\frac{4}{\beta} A_0^2 - 1\right) \exp(-\epsilon \omega_0 t)\right]^{1/2}} \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (\text{III-42})$$

onde  $\phi$  é uma fase inicial.

Em nossos cálculos, a partir deste ponto, a única separação de escalas que usaremos é aquela que divide as derivadas temporais (ou espaciais) em derivadas rápidas ( $\approx \omega_0$ ) e derivadas lentas das amplitudes. Por hipótese, as derivadas lentas conterão intrinsecamente todas as escalas  $t_1, t_2, \dots$ , embora este fato não seja explicitado a cada estágio. Espera-se que a técnica alternativa aqui descrita seja no mínimo tão eficiente quanto a das múltiplas escalas, já que a primeira engloba a segunda.

Concluindo esta introdução, notamos que a solução para o oscilador (III-4) não envolve variações de amplitude, enquanto a do oscilador (III-31) somente envolve as variações de amplitude.

Os sistemas que analisaremos a seguir envolvem tanto variações não lineares nas fases das ondas quanto em suas amplitudes, sendo justamente a combinação adequada destas variações a responsável pelo aparecimento de sólitons, por exemplo. Isto ficará claro no decorrer do trabalho.

### III-2 - ONDAS ELETROMAGNÉTICAS NÃO LINEARES EM PLASMAS COMPOSTOS POR ELÉTRONS, ÍONS E PÓSITRONS

Como já havíamos mencionado na introdução desta tese, durante estes últimos anos uma quantidade considerável de trabalho tem sido devotada à análise da propagação de ondas

eletromagnéticas não lineares em plasmas de elétrons e pósitrons. Acredita-se fortemente que este tipo de plasma esteja presente na magnetosfera de pulsares [RS75].

Recentemente foi aventada a idéia de que provavelmente estes plasmas também possuam uma certa densidade de íons que causam desequilíbrios entre a população de elétrons e pósitrons [LMP86]. Esta mistura triplíce de partículas pode ser até mesmo fundamental em pulsares "jovens" (idade  $\leq 500$  anos), quando sua composição com materiais de fraca energia de ligação propicia a extração de íons da crosta externa com a subsequente incorporação destes no plasma magnetosférico criado por produção eletromagnética de pares.

Também já foi mencionada na introdução a importância do estudo da propagação de sólitons eletromagnéticos neste tipo de sistema [CK83], o que efetivamente nos conduz a analisar este tipo de situação sob vários pontos de vista diferentes, já que nenhum modelo particular se mostra incontestavelmente mais ou menos importante, a se julgar pelos dados experimentais disponíveis.

III-2-1 - Ondas Eletromagnéticas Fracamente Não Lineares e Geração de Campos Magnéticos de Baixa Frequência [Ri88]

#### O Modelo de Propagação e Equações Iniciais

Aqui estaremos ocupados em investigar a formação de estruturas modulacionais não lineares localizadas em ondas eletromagnéticas circulamente polarizadas que se propagam em relação ao eixo  $x$ , em um plasma não-magnetizado e livre de coli-

sões, constituído por elétrons, pósitrons e íons, que no equilíbrio satisfazem a condição de neutralidade de cargas.

Introduzindo os potenciais  $A$  e  $\phi$  através de suas bem conhecidas relações com os campos elétrico e magnético

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \nabla \phi ; \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{III-43})$$

escrevemos

$$\vec{A} = \vec{A}_\perp + \vec{A}_x \quad (\text{III-44})$$

$$\text{onde } \vec{A}_\perp = \vec{a}_\perp(x, z, t) e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.} + \text{ordens superiores} \quad (\text{III-45})$$

$$\vec{A}_x = \vec{a}_x(x, z, t) e^{i(kx - \omega t)} + \text{c.c.} + \text{ordens superiores} \quad (\text{III-46})$$

e  $\vec{a} = a(\hat{y} - i\hat{z})$ ,  $\vec{a}_x = a_x \hat{x}$ ,  $a, a_x$  reais.

Com relação às grandezas definidas acima, note-se que, por hipótese arbitrária, supomos que a amplitude da radiação possua dependência temporal, e dependência espacial somente nas coordenadas  $x$  e  $z$ . Outro ponto importante é que, em se tratando de modulação não linear, condições equivalentes às condições (III-3) devem ser satisfeitas. Também há que ser notado o fato de que ao potencial vetor foi permitida a inclusão de uma componente longitudinal, embora primariamente a onda considerada seja transversal. De fato, fixando definitivamente  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  (calibre de Coulomb) é possível mostrar que

$$a_x \sim k^{-1} \partial_z a \quad (\text{III-47})$$

o que, em vista das condições de modulação (III-3) pode ser es

critico como

$$0 \neq a_x \ll a .$$

(III-48)

Usando a condição (III-48), não é difícil mostrar que, enquanto estivermos considerando uma teoria na qual entrem apenas as contribuições não lineares de mais baixa ordem, podemos escrever  $\underline{A} = \underline{A}_\perp = \underline{a}(x, z, t) e^{i(kx - \omega t)} + c.c .$  Desta forma, sempre mantendo as aproximações consideradas como alicerces básicos, podemos omitir o símbolo  $\perp$  . Também ficará transparente que as contribuições harmônicas superiores designadas em (III-45), (III-46) são pequenas anulando-se no caso de modulação colinear de ondas circularmente polarizadas; este resultado já é conhecido e permite substanciais reduções no processamento analítico dos cálculos [MAF85].

O nosso conjunto inicial de equações é então:

- a) equações para os potenciais (derivadas do sistema de equações de Maxwell sob a condição  $\nabla \cdot \underline{A} = 0$ ) ,

$$\partial_t^2 \underline{A} - c^2 \nabla^2 \underline{A} = 4\pi c \underline{J} - c \partial_t \nabla \phi$$

(III-49)

$$\nabla^2 \phi = -4\pi \rho$$

onde  $\rho$  e  $\underline{J}$  são respectivamente a densidade de cargas e a corrente elétrica,

$$\rho = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha , \quad \underline{J} = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \underline{v}_\alpha$$

(III-50)

com  $\alpha = e, p$  ou  $i$  ;

- b) equações dinâmicas para as partículas na aproximação de fluí

dos frios e relativísticos, de

continuidade: 
$$\partial_t n_d + \nabla \cdot (n_d \vec{v}_d) = 0$$

momentum:

$$(\partial_t + \vec{v}_d \cdot \nabla) \vec{p}_d = q_d \left( -\nabla \phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} + \frac{1}{c} \vec{v}_d \times \nabla \times \vec{A} \right) \quad (\text{III-51})$$

onde

$$\vec{p}_d = m_d \gamma_d \vec{v}_d$$

$$\gamma_d = (1 - v_d^2/c^2)^{-1/2}$$

são o momentum relativístico e o fator de Lorentz, com  $\alpha = e, p$  somente, já que os íons, dentro de nossas restrições, são destituídos de movimento.

Levando em conta que estaremos trabalhando com uma dinâmica em duas escalas de tempo absolutamente díspares, escrevemos cada grandeza física  $G$  do conjunto (III-49) - (III-51), como sendo a soma de uma componente de baixa freqüência  $G^{(o)} (= \bar{G} = \text{média sobre a escala rápida de tempo})$  e de uma componente de alta freqüência  $G^{(h)}$  definida como  $G^{(h)} \equiv G - \bar{G}$  ( $\overline{G^{(h)}} = 0$ ). Como exemplo genérico destas duas classes de funções citamos a função  $A(x, t)$  introduzida em (III-1) no papel de uma grandeza  $G^{(h)}$  e uma função do tipo  $|A(x, t)|^2$  (que não depende das fases de alta freqüência) classificada como  $\bar{G}$ . Funções do tipo  $[A(x, t) + A^*(x, t)]^2$  são mais difíceis de tratar, pois são misturas de  $G^{(h)}$  com  $G^{(o)}$ ; de fato:  $[A^*(x, t) + A(x, t)]^2 = G^{(h)} + G^{(o)}$  com  $G^{(h)} \equiv A^{*2} + A^2$ ,  $G^{(o)} \equiv 2|A|^2$ . Ainda não foi devidamente ressaltado, mas cabe lembrar, que as grandezas do tipo  $G^{(o)}$  variam somente na escala lenta, enquanto as  $G^{(h)}$  variam de fato nas duas escalas.

Assim, considerando todas estas definições e comentários, decomposmos nosso conjunto original de equações em um subconjunto de alta freqüência e um de baixa freqüência, limitando-nos a não linearidades cúbicas (as não linearidades cúbicas devem ser mantidas, pelo menos no subconjunto de altas freqüências, pois, como já vimos na introdução deste capítulo, a amplitude das oscilações normais do meio só evolue no espaço e tempo através delas):

Altas freqüências

$$\partial_t \eta_d^{(h)} + \nabla \cdot (n_d \underline{v}_d)^{(h)} = 0 \quad (a)$$

$$\partial_t \left( \underline{v}_d^{(h)} + \frac{(\underline{v}_d \underline{v}_d)^{(h)}}{2c^2} \right) + (\underline{v}_d \cdot \nabla \underline{v}_d)^{(h)} = \frac{q_d}{m} \left( -\nabla \phi^{(h)} - \frac{1}{c} \partial_t \underline{A} + \frac{1}{c} (\underline{v}_d \times \nabla \times \underline{A})^{(h)} \right) \quad (b)$$

$$\nabla^2 \phi^{(h)} = -4\pi \rho^{(h)} \quad (III-52) \quad (c)$$

$$\partial_t^2 \underline{A} - c^2 \nabla^2 \underline{A} = 4\pi c \underline{j}^{(h)} - c \partial_t \nabla \phi^{(h)} \quad (d)$$

Baixas freqüências

$$\partial_t \eta_d^{(o)} + \nabla \cdot \left( n_d^{(h)} \underline{v}_d^{(h)} + n_{d0} \nabla \cdot \underline{v}_d^{(o)} \right) = 0 \quad (a)$$

$$\partial_t \underline{v}_d^{(o)} + \left( (\underline{v}_d^{(h)} \cdot \nabla) \underline{v}_d^{(h)} \right)^{(o)} = \frac{q_d}{m} \left( -\nabla \phi^{(o)} + \frac{1}{c} (\underline{v}_d^{(h)} \times \nabla \times \underline{A}^{(h)})^{(o)} - \frac{1}{c} \partial_t \underline{A}^{(o)} \right) \quad (b)$$

$$\nabla^2 \phi^{(o)} = -4\pi \rho^{(o)} \quad (III-53) \quad (c)$$

$$\partial_t^2 \underline{A}^{(o)} - c^2 \nabla^2 \underline{A}^{(o)} = 4\pi c \underline{j}^{(o)} - c \partial_t \nabla \phi^{(o)}, \quad (d)$$

com

$$\underline{A} = \underline{A}^{(h)} + \underline{A}^{(o)} \quad \text{e} \quad \underline{A}^{(h)} \equiv \underline{A}.$$

Com relação ao subconjunto de modos de baixa freqüência há algo por ser dito. Eles estarão aqui restritos a mo-

dos forçados (ou virtuais) com frequência induzida muito diferente de qualquer frequência característica do meio. Neste contexto, sua amplitude será proporcional à grandeza de mais baixa ordem que possamos formar com os modos normais indutores de alta frequência, ou seja, produtos bilineares destas últimas. A próxima não linearidade a ser considerada seria aquela decorrente da formação de grandezas proporcionais a potências de ordem quatro dos modos normais, o que já perfaz uma precisão excessiva para os nossos intentos de construir uma teoria não linear de ordem cúbica nas equações de evolução das amplitudes dos modos normais. É justamente este tipo de perspectiva que nos permite considerar o conjunto (III-53) (a)-(d) sem nenhuma não linearidade adicional, como talvez fosse de se esperar.

Para o conjunto (III-52), desconsideremos de início tanto a modulação quanto os termos não lineares, a fim de que obtenhamos informações com relação à escala rápida de tempo ao estilo do que foi feito no início deste capítulo III.

Tomando a divergência de (b), derivando (a) em relação ao tempo e considerando (c), obtemos das equações (III-52)

$$\partial_t^2 n^{(h)} + \frac{n_0 q_d}{m} 4\pi e (n_e^{(h)} - n_p^{(h)}) = 0; \quad (\text{III-54})$$

por outro lado, das equações (III-49) e (III-52)-(b),

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - c^2 \nabla^2 + \omega_0^2) \nabla \times A &= 0. \\ \omega_0^2 &= \frac{4\pi e^2}{m} (M_{e0} + M_{p0}) \end{aligned} \quad (\text{III-55})$$

Estas duas equações independentes descrevem os processos ondulatórios na escala rápida; a (III-55) caracteriza

a componente transversal (ou eletromagnética) da onda, e a (III-54) a componente longitudinal (ou eletrostática). Supondo soluções da forma  $e^{i(kx - \omega t)}$ , como na equação (III-1), a equação (III-54) nos informa que

$$n_{\alpha}^{(h)} (\omega^2 - \omega_0^2) = 0 \quad (\text{III-56})$$

e a equação (III-55) que

$$\nabla \times \underline{A} (\omega^2 - k^2 c^2 - \omega_0^2) = \underline{B}^{(h)} (\omega^2 - k^2 c^2 - \omega_0^2) = 0. \quad (\text{III-57})$$

Estas duas últimas igualdades nos mostram que se  $k \neq 0$ , a componente transversal de onda não pode conviver com a longitudinal. No nosso caso, por definição, desejamos  $\nabla \times \underline{A} \neq 0$ , de onde

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 + k^2 c^2 \\ n_{\alpha}^{(h)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III-58})$$

Em suma, na aproximação linear, as equações para flutuações de carga se desacoplam da equação para  $\nabla \times \underline{A}$ . A equação para  $\nabla \times \underline{A}$  por sua vez, determina a frequência característica das vibrações lineares (que deve ser usada como passo inicial para a aplicação da técnica das múltiplas escalas) o que implica em que  $n_{\alpha}^{(h)} = 0$ . As relações (III-58) são válidas em primeira aproximação e o fato de que contribuições não nulas de ordem mais alta para  $n_{\alpha}^{(h)}$  e  $\phi^{(h)}$  apareçam no decorrer dos cálculos deve ser encarada com naturalidade. Assim, não é surpreendente que, como informa a equação (III-58), não haja flutuações de densidade acompanhando ondas eletromagnéticas. O acoplamento, se

possível, deve ser decorrência das não linearidades do problema.

Consideremos agora a contribuição das não linearidades do conjunto (III-52), ainda desprezando as influências das flutuações de carga das partículas, i.e., tomando  $n_{\alpha}^{(h)}, \phi^{(h)} \rightarrow 0$  (mostraremos mais tarde que embora  $\phi^{(h)}$  e  $n_{\alpha}^{(h)}$  não sejam realmente nulos, suas ordens de grandeza são suficientemente pequenas para que não haja necessidade de considerá-los no atual estágio de cálculos).

A equação (III-52)-(b) em uma primeira aproximação nos fornece  $\tilde{v}_{\alpha}^{(h)} = \tilde{v}_{\alpha 1}^{(h)} + \tilde{v}_{\alpha 2}^{(h)} + \dots$ ;  $\tilde{v}_{\alpha n}^{(h)} \sim a^n$ ;  $\tilde{v}_{\alpha 1}^{(h)} = -\frac{q_{\alpha}}{mc} A$ .

Usando a forma específica (III-45) podemos mostrar que a segunda aproximação é  $\tilde{v}_{\alpha 2}^{(h)} \sim 0$  devido à polarização circular das ondas e que a terceira é  $\tilde{v}_{\alpha 3}^{(h)} \sim +\frac{q_{\alpha}}{mc} \left( \frac{e^2}{2m^2 c^4} \right) A (A \cdot A)$ .

Temos portanto

$$\tilde{v}_{\alpha}^{(h)} \approx -\frac{q_{\alpha}}{mc} A \left( 1 - \frac{e^2}{2m^2 c^4} A \cdot A \right), \quad (\text{III-59})$$

fórmula que será usada mais adiante e que encerra nossa primeira investida sobre as características de resposta do sistema em altas frequências.

O conjunto (III-53) envolve uma média que é calculada a seguir na sua ordem mais significativa:

$$\overline{\tilde{v}_{\alpha}^{(h)} \times \nabla \times A} \approx -\frac{q_{\alpha}}{mc} \overline{A \times \nabla \times A} \approx -\frac{q_{\alpha}}{mc} A \times \nabla \times A = \frac{q_{\alpha}}{mc} \nabla a^2 \quad (\text{III-60})$$

onde fizemos uso de (III-43)-(III-46).

É interessante notar que este termo entra como uma fonte externa para (III-53). Ele é conhecido como "Força Ponderomotriz".

Usando um procedimento similar ao que nos conduziu aos resultados em altas freqüências, não é difícil mostrar que:

$$\partial_t^2 n_e^{(1)} + \frac{4\pi e^2 n_{e0}}{m} (n_e^{(1)} - n_p^{(1)}) = \frac{2n_{e0} e^2}{m^2 c^2} \nabla^2 a^2 \quad (\text{III-61})$$

$$\partial_t^2 n_p^{(1)} - \frac{4\pi e^2 n_{p0}}{m} (n_e^{(1)} - n_p^{(1)}) = \frac{2n_{p0} e^2}{m^2 c^2} \nabla^2 a^2. \quad (\text{III-62})$$

Subtraindo (III-62) de (III-61), temos:

$$\partial_t^2 (n_e^{(1)} - n_p^{(1)}) + \omega_o^2 (n_e^{(1)} - n_p^{(1)}) = \frac{2(n_{e0} - n_{p0})}{m^2 c^2} \nabla^2 a^2. \quad (\text{III-63})$$

Relembrando o fato de que  $\partial_t$  nesta última equação é por hipótese muito menor do que qualquer freqüência característica (assim como  $\omega_o$ ), obtemos em uma primeira aproximação iterativa,

$$n_e^{(1)} - n_p^{(1)} \sim \frac{1}{2\pi m c^2} \frac{(n_{e0} - n_{p0})}{(n_{e0} + n_{p0})} \nabla^2 a^2. \quad (\text{III-64})$$

É importante novamente notar que considerar  $\partial_t \ll \omega_o$  em (III-63), é equivalente a suprimir a existência de ondas eletrostáticas com freqüência característica  $\omega_o$ . Assim como nas equações (III-57) e (III-58), o que acontece é que ondas eletrostáticas no presente contexto não são modos normais do nosso sistema, sendo totalmente induzidas (ou forçadas) por combinações não lineares da amplitude do campo eletromagnético.

A equação (III-64) nos mostra que a separação de cargas em baixa frequência é pequena (proporcional à segunda derivada espacial lenta de uma pequena amplitude ao quadrado) e que existe somente na presença de íons.

Substituindo (III-65) em (III-61) e (III-62) nós encontramos finalmente o seguinte resultado

$$\partial_t^2 n_e^{(0)} \approx \partial_t^2 n_p^{(0)} \equiv \partial_t^2 n^{(0)} = \frac{4 n_{e0} n_{p0} e^2}{m^2 c^2 (n_{e0} + n_{p0})} \nabla^2 a^2 + O\left(\frac{ea}{mc^2}\right)^6 \quad (\text{III-65})$$

Note-se que no limite  $n_p \rightarrow 0$ , por exemplo, a flutuação eletrônica tende ao valor da separação de cargas em um plasma elétron-íon, a qual, por sua vez, é praticamente desprezível.

Com todas estas informações, podemos escrever a equação para o potencial vetor  $\underline{A}$  (a equação (III-49)) na seguinte forma:

$$-2i(\omega \partial_t + kc^2 \partial_x) a + (\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) a = \delta a + \omega_0^2 \left( \frac{2e^2}{m^2 c^4} a^3 - \frac{2n^{(0)}}{n_{e0} + n_{p0}} a \right). \quad (\text{III-66})$$

Este formato de equação envolve a participação das ordens não lineares mais elementares possíveis. A existência de soluções finitas de pequena amplitude da equação (III-66) nos fornecerá apoio "a posteriori" para as aproximações utilizadas.

Na equação (III-66), introduzimos  $\delta \equiv \omega^2 - \omega_0^2 - k^2 c^2$ ; esta equação (III-66), considerada em sua parte imaginária, fornece a seguinte igualdade:

$$\partial_t a + \frac{kc^2}{\omega} \partial_x a = 0, \quad (\text{III-67})$$

de onde

$$a = a(x, z, t) = a(x - vt, z), \quad V = \frac{kc^2}{\omega}. \quad (\text{III-68})$$

Reunindo os resultados (III-66), (III-65) e (III-68) obtemos nosso conjunto final de equações:

$$(V^2 - c^2) \partial_x^2 a - c^2 \partial_z^2 a = \delta a + 2\omega_0^2 \left( \frac{e^2 a^3}{m^2 c^4} - \frac{n^{(0)} a}{m_{e0} + n_{p0}} \right) \quad (\text{III-69})$$

$$\partial_x^2 n^{(0)} = \frac{4 n_{e0} n_{p0} e^2}{V^2 m^2 c^2 (m_{e0} + n_{p0})} \nabla^2 a^2. \quad (\text{III-70})$$

Supondo soluções propagantes ao longo de um eixo  $\xi$  localizado no plano  $x - z$ , para o qual vale

$$\hat{\xi} = (\beta_x, 0, \beta_z), \quad \beta_x^2 + \beta_z^2 = 1, \quad (\text{III-71})$$

com  $\hat{\xi}$  sendo o vetor unitário alinhado com o referido eixo, temos

$$a = a(\zeta) \quad \left( \zeta \equiv \beta_x (x - vt) + \beta_z z \right). \quad (\text{III-72})$$

Substituindo  $n^{(0)}$  de (III-70) sob a condição (III-72) em (III-69) tem-se

$$\left[ \left( \frac{V^2}{c^2} - 1 \right) \beta_x^2 - \beta_z^2 \right] \frac{d}{d\zeta} a = \delta a + \left( 1 - 4n(1-n) \frac{c^2}{\beta_x^2 V^2} \right) a^3 \quad (\text{III-73})$$

ou, introduzindo os coeficientes  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ ,

$$\frac{d}{d\zeta} a = \hat{B} a - \hat{C} a^3$$

$$\hat{B} = \delta / \left[ \left( \frac{V^2}{c^2} - 1 \right) \beta_x^2 - \beta_z^2 \right] \quad (\text{III-74})$$

$$\hat{C} = 4\pi(1-n) \frac{c^2}{\beta_x^2 V^2} \sqrt{\left[ (V^2/c^2 - 1)\beta_x^2 - \beta_z^2 \right]}$$

A equação (III-74) está normalizada de acordo com as regras

$$(x, z) \rightarrow \frac{\sqrt{2} \omega_0}{c} (x, z)$$

$$a \rightarrow \frac{ea}{mc^2}$$

$$\delta \rightarrow \frac{\hat{\delta}}{2\omega_0}$$

com

$$r \equiv r_p = 1 - r_e = \frac{n_{po}}{n_{po} + n_{eo}}$$

O potencial de Sagdeev (S), derivável da equação (III-74), tem a seguinte forma:

$$S = -\frac{1}{2} a^2 (\hat{B} - \hat{C} a^2). \quad (\text{III-75})$$

Não é nada difícil observar que este potencial fornece soluções solitárias de pequena amplitude se as seguintes condições são satisfeitas

$$\hat{C} \gg \hat{B} > 0. \quad (\text{III-76})$$

A solução é:

$$a = \sqrt{\frac{2\hat{B}}{\hat{C}}} \operatorname{sech}(\sqrt{\hat{B}} \zeta). \quad (\text{III-77})$$

Se nesta fórmula tomássemos  $\delta$  (que é totalmente análogo ao deslocamento de frequência introduzido nas duas primeiras secções deste capítulo III) como nulo, então também te-

ríamos  $a = 0$ . Com isto simplesmente verificamos mais uma vez que a teoria que construímos está de fato livre das singularidades seculares, sendo a remoção destas singularidades resultado da introdução da segunda escala temporal - a da lenta modulação.

Das duas primeiras desigualdades da equação (III-76), vê-se que as soluções são subluminosas. De fato, considerando a expressão para a velocidade

$$v = \frac{kc^2}{\omega}$$

em conjunção com a relação de dispersão não linear associada à (III-76) temos

$$v - v_g < c$$

No caso de modulação colinear em plasmas de elétron-pósitron ( $r = 1/2$ ) vemos pela expressão (III-74) que a condição  $C > 0$  em (III-76) não é satisfeita; desta forma sólitons não são formados. Esta última conclusão não está de acordo com um recente trabalho [MAF85]. Parece-nos, no entanto, que para as altas velocidades consideradas (uma condição necessária para a não inclusão de efeitos térmicos), não há justificativa que nos leve a desprezar a segunda derivada temporal da equação (III-66) (que dá origem ao termo  $v^2/c^2 d_{\xi\xi}^2$  no lado esquerdo da equação (III-73)), o que foi efetivamente feito em [MAF85].

Como já mencionamos se  $\beta_x v$  (a velocidade da onda) for pequena (comparável à velocidade das ondas ion acústicas)

devemos incluir os efeitos térmicos bem como o movimento dos íons. Em particular estes dois efeitos passam a ser importantes no caso de modulações oblíquas, quando então temos  $\beta_x = 0$ .

### Geração de Campos Magnéticos de Baixa Freqüência

Uma característica importante de nosso sistema, é a de que campos magnéticos de baixa freqüência podem ser gerados. Para mostrar isto, comecemos por denotar os campos elétrico e magnético de baixas freqüências respectivamente por  $\underline{E}_s$  e  $\underline{B}_s$ .

As equações de Maxwell com as correntes de mais baixa ordem fornecem:

$$\nabla \times \underline{E}_s = -\frac{1}{c} \partial_t \underline{B}_s \quad (\text{III-78})$$

$$\nabla \times \underline{B}_s = \frac{4\pi}{c} (\underline{j}_1 + \underline{j}_2) + \frac{1}{c} \partial_t \underline{E}_s \quad (\text{III-79})$$

$$\underline{j}_1 = e (n_{e0} \underline{V}_e^{(0)} - n_{p0} \underline{V}_p^{(0)})$$

$$\underline{j}_2 = e (n_e^{(h)} \underline{V}_e^{(h)} - n_p^{(h)} \underline{V}_p^{(h)})^{(0)} \quad (\text{III-80})$$

Por outro lado, de (III-53)-b e (III-45) resulta

$$\partial_t \underline{V}_\alpha^{(0)} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left( -\nabla \phi^{(0)} + \frac{1}{c} (\underline{V}_\alpha^{(h)} \times \nabla \times \underline{A})^{(0)} - \frac{1}{c} \partial_t \underline{A}^{(0)} - \left( \underline{V}_\alpha^{(h)} \cdot \nabla \underline{V}_\alpha^{(h)} \right)^{(0)} \right) \quad (\text{III-81})$$

onde obviamente usamos

$$\underline{E}_s = -\frac{1}{c} \nabla \phi^{(0)} - \frac{1}{c} \partial_t \underline{A}^{(0)} \quad (\text{III-82})$$

Tomando o rotacional de (III-81) tem-se

$$\partial_t (\nabla \times \underline{V}_{nd}^{(0)}) = -\frac{q_d}{m} \partial_t \underline{B}_s \quad \text{ou} \quad \nabla \times \underline{V}_{nd}^{(0)} = -\frac{q_d}{m} \underline{B}_s. \quad (\text{III-83})$$

Usualmente é considerada a geração de campo devida à força ponderomotriz [KJ87]; aqui não consideramos a componente rotacional dessa força, para enfatizar um novo mecanismo de geração.

Daí segue

$$\nabla \times \underline{j}_1 = -\frac{e^2}{mc} (m_{e0} + m_{p0}) \underline{B}_s. \quad (\text{III-84})$$

Combinando as equações (III-78)-(III-84) obtemos uma equação de onda forçada para o campo  $\underline{B}_s$

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2 + \omega_0^2) \underline{B}_s = 4\pi c \nabla \times \underline{j}_2 \quad (\text{III-85})$$

de onde, através do uso das nossas hipóteses de baixa frequência, obtemos

$$\omega_0^2 \underline{B}_s = 4\pi c \nabla \times \underline{j}_2.$$

Para a obtenção de  $\underline{j}_2$ , devemos derivar uma expressão para  $n_\alpha^{(h)}$ . Evidentemente não podemos nos restringir à aproximação elementar (III-58) que fizemos quando do nosso interesse em obter a equação para a amplitude do campo eletromagnético. Começemos pois a escrever uma versão mais precisa para a equação da continuidade no regime de altas frequências:

$$\partial_t n_d^{(h)} + \nabla \cdot (\underline{V}_d^{(h)} n_d^{(0)}) + n_{d0} \nabla \cdot \underline{V}_d^{(h)} = 0. \quad (\text{III-86})$$

Usando a expressão completa para  $\underline{V}_\alpha^{(h)}$  com a inclusão de pequena componente eletrostática temos, de (b)-(II-52), (c)-(III-52),

$$\partial_t \nabla \cdot \tilde{V}_\alpha^{(h)} = -\frac{q_\alpha}{m} \nabla^2 \phi^{(h)} + \frac{q_\alpha}{2mc} \left( \frac{e^2}{m^2 c^4} \right) \partial_t \nabla \cdot [A(A \cdot A)] \quad (\text{III-87})$$

ou, supondo  $\tilde{V}_\alpha^{(h)} \sim e^{i(kx - \omega t)}$ ,

$$\nabla \cdot \tilde{V}_\alpha^{(h)} = \frac{i q_\alpha e 4\pi}{m \omega} \left( n_e^{(h)} - n_p^{(h)} \right) - i \omega \frac{q_\alpha}{2mc} \left( \frac{e^2}{m^2 c^4} \right) \nabla \cdot [A(A \cdot A)] \quad (\text{III-88})$$

Finalmente, substituindo (III-88) em (III-86) obtemos uma expressão para  $n_\alpha^{(h)}$

$$n_\alpha^{(h)} = i \left( \frac{2 \omega_\alpha^2}{\omega^2 - \omega_0^2} + 1 \right) \frac{q_\alpha}{m \omega c} \tilde{a} \cdot \nabla \left( n^{(0)} - \frac{g r^2}{m^2 c^4} a^2 \right) \quad (\text{III-89})$$

com  $\omega_\alpha^2 = \frac{4\pi e^2 n_\alpha}{m}$ ,

para a corrente  $\tilde{j}_2$

$$\tilde{j}_2 = -\frac{2ie^3}{\omega m^2 c^2} \left( \frac{\omega_e^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \left[ \left( \tilde{a} \cdot \nabla \left( n^{(0)} - \frac{2e^2 a^2}{m^2 c^4} \right) a^* - c.c. \right) \right] \quad (\text{III-90})$$

e para o campo gerado

$$\tilde{B}_5 = -\frac{2i\omega_0}{\omega} \left( \frac{\omega_e^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \left( \frac{4\pi(1-\eta)c^2}{\beta_x^2 v^2} - 1 \right) \nabla \times \left[ \left( \tilde{a} \cdot \nabla a^2 \right) \tilde{a}^* - c.c. \right], \quad (\text{III-91})$$

onde todas as grandezas foram adimensionalizadas novamente.

Note-se que  $n_\alpha^{(h)}$  é induzida por uma combinação bem mais não linear do campo  $a$ , do que aquelas que aparecem compondo  $T_{NL}$  em (III-73). Desta forma fica justificado não considerarmos a influência das flutuações de alta frequência das densidades, diretamente na equação modulacional da onda.

Escrevendo (III-91) em componentes e esquecendo

por um instante as suposições feitas sobre a polarização da onda, temos:

$$B_{sx} = i C_B \partial_z [(a_z \partial_z a^2) a_y^* - c.c.]$$

$$B_{sy} = 0$$

$$B_{sz} = -i C_B \partial_x [(a_z \partial_z a^2) a_y^* - c.c.] \quad (\text{III-92})$$

com  $C_B = \frac{2\omega_0}{\omega} \left( \frac{\omega e - \omega p}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \left( \frac{4r(1-r)c^2}{\beta_x^2 v^2} - 1 \right) f$ , onde  $f$  é um fator dependente da polarização. ( $f=1$  para polarização circular,  $f=1/2$  para polarização linear).

Da equação (III-92) pode-se ver que enquanto campos circularmente polarizados ( $a_z = -i a_y$ ) geram campos magnéticos de baixa frequência, campos lineares ( $a_z = \text{const. real } x a_y$ ) não os geram.

No nosso caso,

$$B_{sx} = C_B \beta_z^2 d_{33} a^4$$

$$B_{sy} = 0$$

$$B_{sz} = -C_B \beta_z \beta_x d_{33} a^4.$$

(III-93)

Com o auxílio das equações (III-93) é possível constatar-se que o campo  $B_s$ , está em ângulo reto com a direção de propagação da onda solitária e que sua máxima amplitude é

$$|B_{s_{max}}| = |C_B \beta_z| (d_{33} a^4)_{max} \quad (\text{III-94})$$

ou, usando a equação (III-74)

$$\left| B_{s_{\max}} \right| = 16 C_B \beta_z \hat{B} \left( \frac{\hat{B}}{c} \right)^2. \quad (\text{III-95})$$

Na fig. III-1 apresentamos curvas típicas para  $B_s$  e para a amplitude do campo  $A$ , como função da "coordenada"  $\sqrt{B}\xi$ .

### Análise Numérica

Analisamos a dependência da amplitude máxima da onda solitária  $a_0 (= \sqrt{\frac{2\hat{B}}{c}})$  no ângulo  $\theta$  na figura III-2, tomando  $\delta = -0.01$ ;  $v^2/c^2$  é igual a 0.95 e a concentração relativa de pósitrons  $r$  das várias curvas foi considerada como  $r(a) = 0$ ,  $r(b) = 0.1$ ,  $r(c) = 0.2$ . Pode ser visto que em todos os casos exceto o da curva (a), a amplitude do sóliton é uma função muito sensível do ângulo entre modulação e vetor de onda. Para cada concentração há dois pontos nos quais a amplitude vai a infinito. Estes pontos são determinados pelos zeros do coeficiente  $\hat{C}$ ; na próxima subsecção mostraremos como construir uma teoria finita perto deles. Deve também ser notado que a medida que a concentração de pósitrons aumenta, a região para a existência das ondas solitárias diminui. No caso onde  $r = 1/2$  (não representado nas figuras) esta região não existe.

Escrevendo  $B_{s_{\max}} = B_{s_{\max}}(\hat{\xi}, \hat{y})$ , e definindo a variável  $b_s = \frac{10^{-2}\omega}{\omega_0 a^5(r=0)} \frac{v^2}{c^2} \left( \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^{-1} B_{s_{\max}}$  onde  $a_0(r=0)$  é a amplitude máxima para concentração nula de pósitrons, estudamos

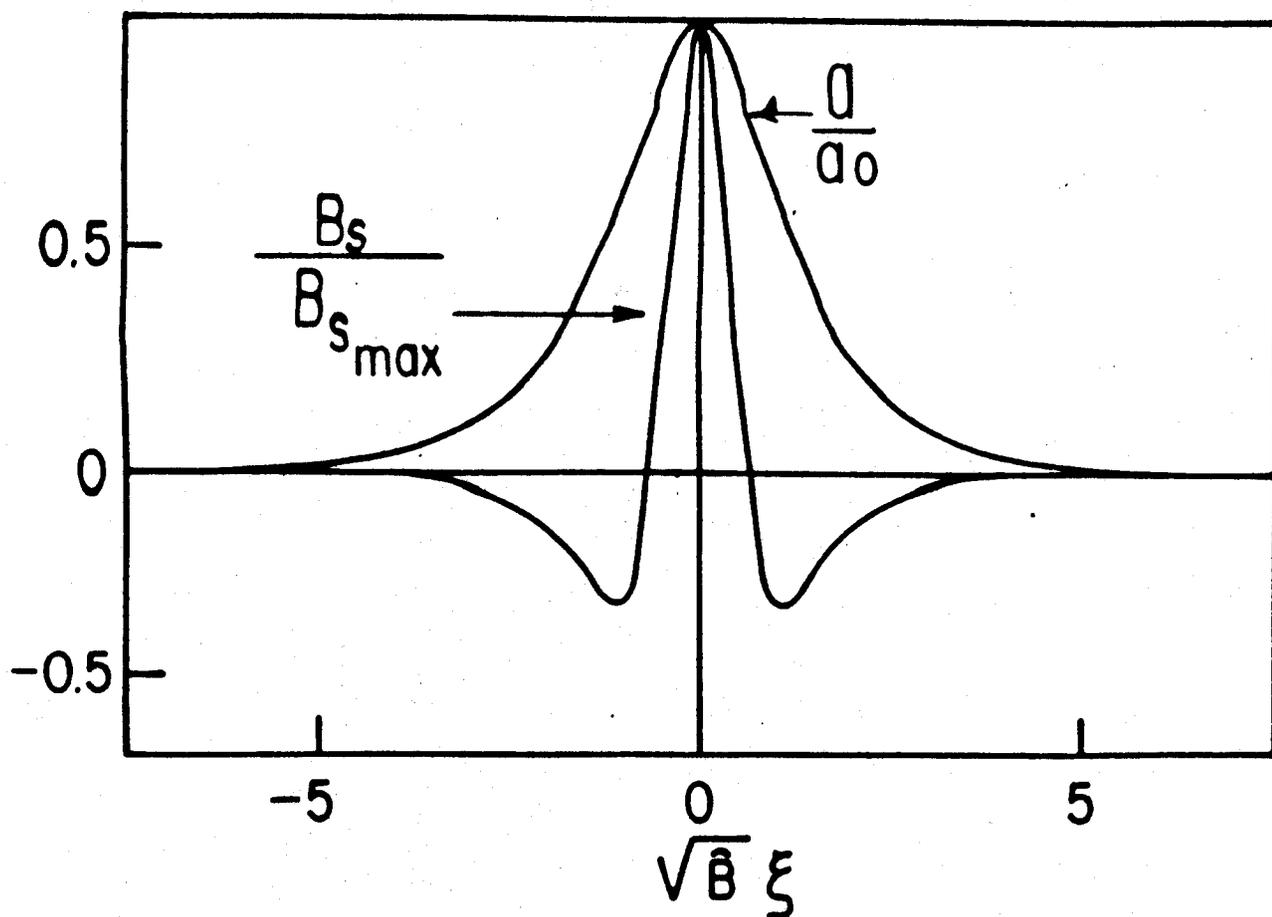


Figura III-1 - Perfis da amplitude do s3liton (a) e do campo magn3tico de baixa freq3ncia ( $B_s$ ) como fun33o de  $\sqrt{B}\xi$  para  $\beta_x^2 = 0,75$ ,  $v^2/c^2 = 0,95$ ,  $r = 0,2$  e  $\delta = -0,005$ .

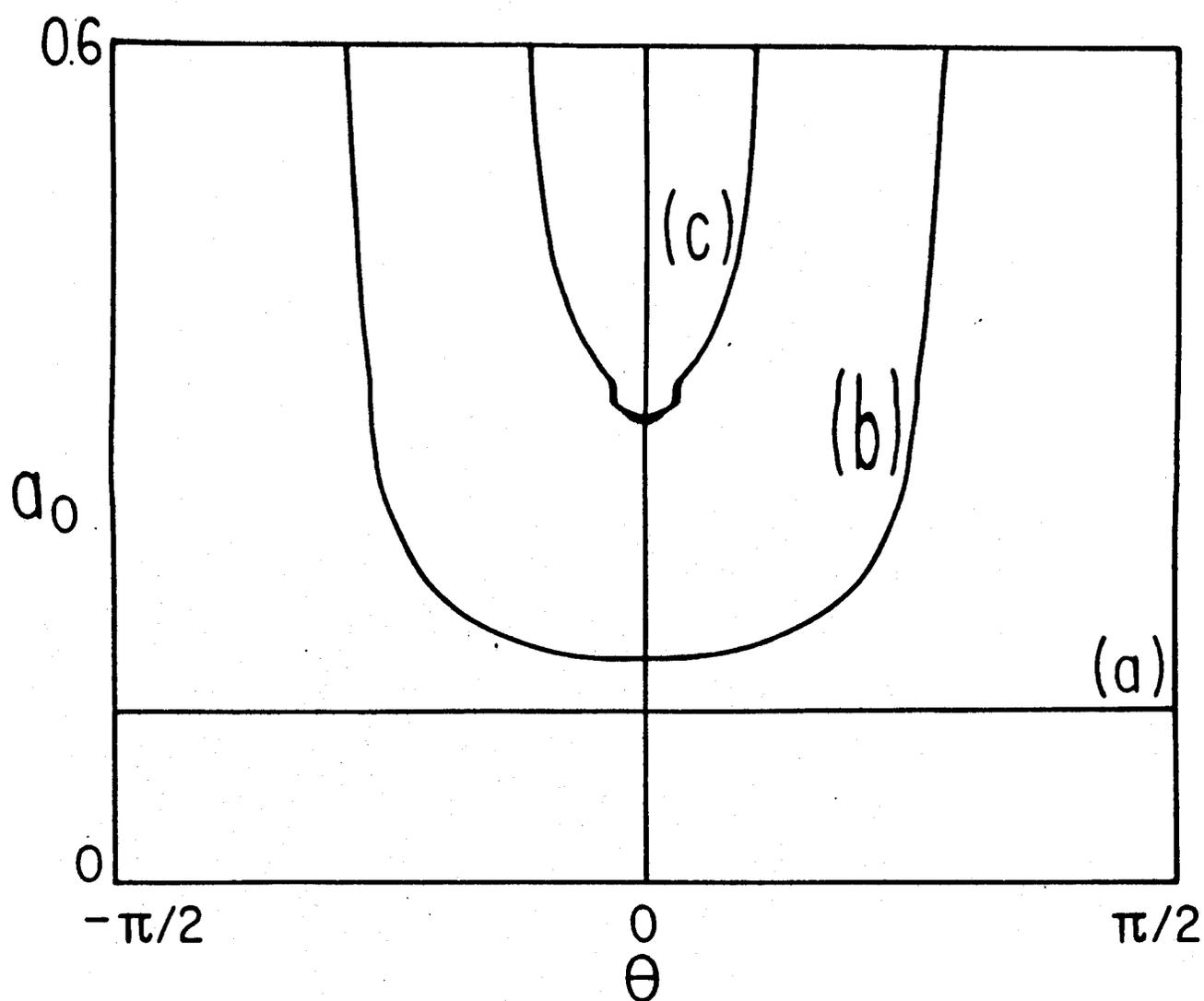


Figura III-2 - Amplitude máxima do sóliton ( $a_0$ ) como função do ângulo  $\theta$  entre as direções de modulação e de rápida variação espacial para  $\delta = -0,01$ ,  $v^2/c^2 = 0,95$ , com  $r(a) = 0$ ,  $r(b) = 0,1$  e  $r(c) = 0,2$ .

$b_s$  como função do ângulo  $\theta$  na figura (III-3), usando os mesmos parâmetros da figura (III-2). No caso  $r = 1/2$  não há campo gerado. Para  $r = 0$ , podemos notar pontos de singularidade para  $b_s$ , cuja natureza é a mesma daqueles encontrados nos gráficos de amplitude. O campo magnético está sempre ausente no caso de modulação colinear.

#### Conclusões parciais ao tema

Neste trabalho analisamos a possibilidade de localização de ondas eletromagnéticas de alta frequência em plasmas não magnetizados, frios e compostos por elétrons, íons e pósitrons. A teoria usada foi uma teoria modulacional fracamente não linear que manteve até termos de ordem cúbica na equação não linear para a amplitude da onda de alta frequência. Para tanto, expansões adequadas das equações de movimento dos vários fluidos envolvidos foram levadas a cabo. Em particular deve ficar claro que na construção da corrente não linear para a função  $A$  (equação (III-49) e equação (III-50)) devem contribuir as densidades de baixa frequência (que são formadas pelo produto de duas amplitudes) multiplicadas pelas velocidades de alta frequência em primeira aproximação no campo  $A$ , bem como as densidades de equilíbrio multiplicadas pela correção relativística de massa às velocidades de alta frequência.

Ignorando os efeitos ponderomotrizes usualmente considerados, mostramos que campos magnéticos de baixa frequência  $B_s$  são gerados pela onda. Esses campos podem ser importantes em

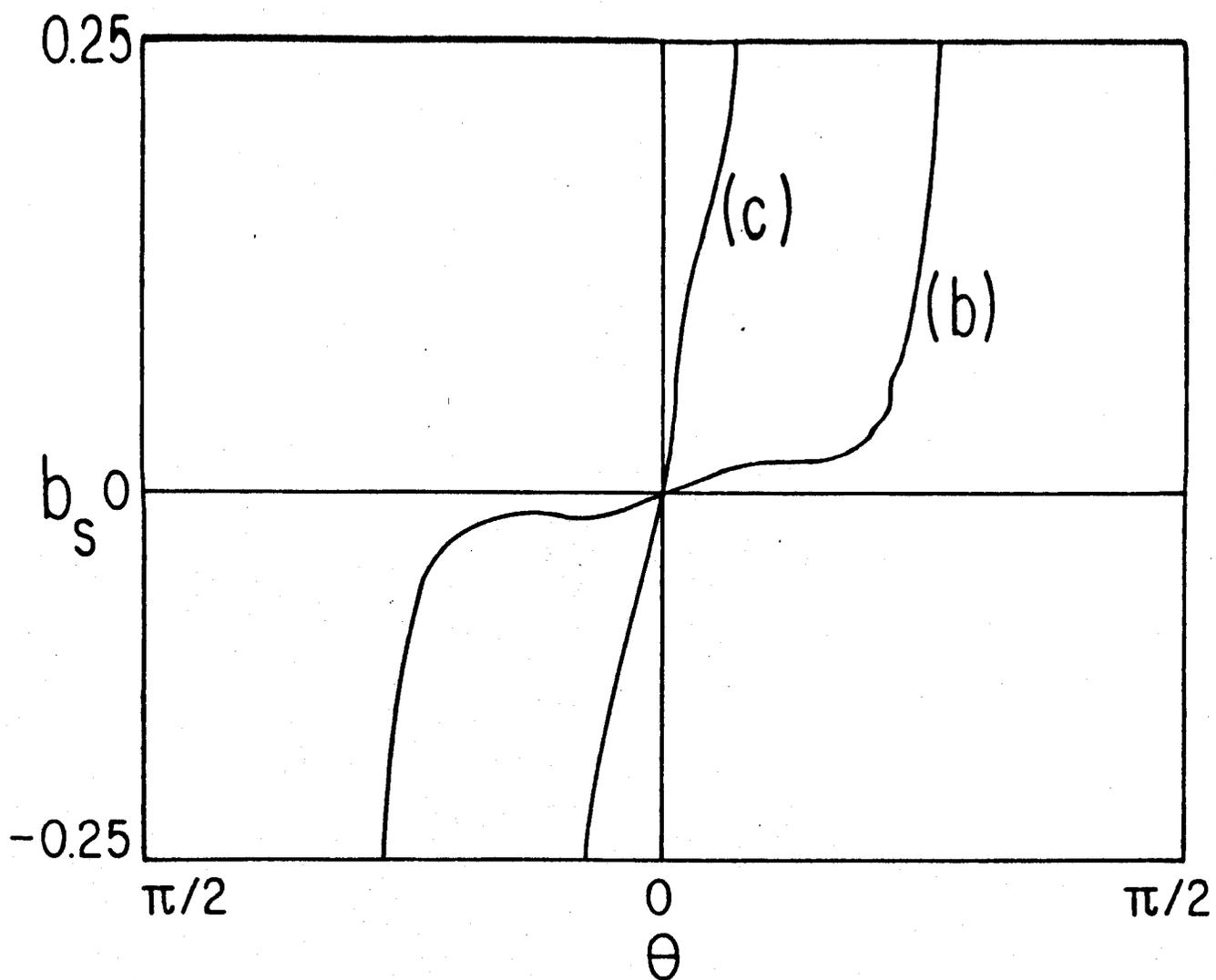


Figura III-3 - Dependência do campo magnético ( $b_s$ ) como função do ângulo  $\theta$ , com os parâmetros da figura III-2.

situações estacionárias, quando os efeitos ponderomotrizes rotacionais são nulos [KJ87]. Neste contexto indicamos que, se o campo de alta frequência não possui uma componente circularmente polarizada, o campo magnético não está presente. Deve ser notado que enquanto os campos magnéticos gerados por ondas de Langmuir são proporcionais à temperatura dos elétrons [KSH81], eles são independentes desta no caso presente.

Isso posto, procedamos de imediato à análise do nosso sistema perto dos pontos para os quais  $\hat{C} = 0$ .

III-2-2 - Teoria de Modulação Não Linear, próxima aos pontos críticos ( $\hat{C} = 0$ ) . [RSD87b]

Como mencionamos na subsecção anterior, a teoria de modulação que envolve não linearidades cúbicas apresenta problemas perto dos pontos para os quais o coeficiente  $\hat{C}$  (ver equação (III-74)) se anula. Nestes pontos, a exemplo do que já ocorria no capítulo anterior, é perdido o balanço entre dispersão e não linearidade, sendo impossível a construção de soluções localizadas com forma invariável. A solução para este problema é totalmente análoga àquela usada na obtenção de soluções para a propagação de ondas íon-acústicas em plasmas compostos por íons positivos, íons negativos e elétrons. Em outras palavras, alterando convenientemente as regras de escala que nos conduzem à equação não linear de Schrödinger, cuja versão estacionária se acha representada pela forma (III-73), esperamos obter uma equação de evolução não linear para o caso em que o coeficiente do termo cúbico é quase nulo ou nulo.

Neste sentido, antes de mais nada o que é necessário fazer, é descobrir quais as regras de escala que nos condu

zem à equação não linear de Schrödinger, equação (III-73), a partir do conjunto inicial de equações (III-49)-(III-51).

### Regras de escala da Equação Não Linear de Schrödinger

Primeiramente notemos que a equação (III-73) ainda é satisfeita se usarmos as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} a &\rightarrow \epsilon a \\ \delta &\rightarrow \epsilon^2 \delta \\ d_\xi &\rightarrow \epsilon d_\xi \end{aligned} \quad (\text{III-96})$$

Se  $\epsilon$  for pequeno ( $\epsilon \ll 1$ ), a primeira transformação (III-96) nos indica que estamos face a uma teoria fracamente não linear, que deve poder ser obtida do conjunto inicial de equações (III-49)-(III-52) através das nossas conhecidas técnicas perturbativas. Isto é corroborado pela segunda transformação que indica um pequeno deslocamento de frequência, e pela terceira transformação que indica a existência de uma escala de tempo lenta.

Reescrevamos agora o nosso sistema inicial para a situação em que a modulação é colinear ao vetor de onda de alta frequência. Suponhamos que a onda se propague ao longo do eixo  $x$ .

$$\partial_t n_{ep} + \partial_x (n_{ep} v_{px}) = 0 \quad (\text{III-97})$$

$$\partial_x^2 \phi = -4\pi e (n_e - n_p - n_{i0}) \quad (\text{III-98})$$

$$\partial_t^2 A - c^2 \partial_x^2 A = 4\pi c e (n_e v_{e\perp} - n_p v_{p\perp}) - c \partial_t \nabla \phi \quad (\text{III-99})$$

$$\left(\partial_t + V_{epx} \partial_x\right) p_{ep} = q_{ep} \left(-\partial_x \phi - \frac{1}{c} \partial_t A + \frac{1}{c} V_{ep} \times \nabla_x A\right) \quad (\text{III-100})$$

As densidades  $n_e, n_i$  e  $n_p$ , como antes, obedecem à relação  $n_{eo} = n_{po} + n_{io}$  no equilíbrio, as cargas são  $q_e = e = -q_p$  e os íons são supostos fixos. As velocidades  $V_{ep}$  possuem componente  $V_{epx}$  ao longo do vetor de onda e  $V_{ep\perp}$  no plano de polarização. O momentum relativístico é denotado por  $p_{ep} = m \gamma_{ep} V_{ep}$ , onde  $m$  é a massa de repouso de elétrons ou pósitrons e  $\gamma_{ep} = (1 - v_{epx}^2/c^2)^{-1/2} \times (1 + p_{ep\perp}^2/m^2 c^2)^{1/2}$  com  $c$  como a velocidade da luz. Para o campo de alta frequência escrevemos,

$$\tilde{A}(x,t) = A(x,t) (\hat{y} - i\hat{z}) + c.c. = \tilde{a}(x,t) (\hat{y} - i\hat{z}) e^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad (\text{III-101})$$

onde novamente salientamos o vetor de polarização  $(\hat{y} - i\hat{z})$ .

Da equação (III-100) segue imediatamente o resultado exato:

$$p_{ep\perp} = - \frac{q_{ep}}{c} A \quad (\text{III-102})$$

com o qual escrevemos a equação (III-99) na forma:

$$\partial_t^2 A - c^2 \partial_x^2 A = - \frac{4\pi e^2}{m} \left( \frac{n_e}{\gamma_e} + \frac{n_p}{\gamma_p} \right) A. \quad (\text{III-103})$$

Baseando-nos nas relações (III-96), tomaremos a amplitude  $A$  como  $A \sim \epsilon$ ,  $\partial_t A \sim \epsilon^2$  e  $\partial_x A \sim \epsilon^2$ . Ademais, levando em consideração que as flutuações de densidade não estão presentes em primeira ordem, consideraremos  $n_{ep} - n_{epo} \sim \epsilon^2$ ,  $\phi \sim \epsilon^2$ ,  $V_{epx} \sim \epsilon^2$ . Estas três últimas grandezas serão induzidas pelo potencial  $A$ .

Posto isto, a equação (III-103) em ordem  $\epsilon$  nos fornece

$$W^2 = W_0^2 + kc^2 + O(\epsilon^2), \quad (\text{III-104})$$

Em ordem  $\epsilon^2$ , obtemos

$$-2i\omega \partial_t \tilde{a} - 2ikc^2 \partial_x \tilde{a} = O(\epsilon^3). \quad (\text{III-105})$$

Em particular, a equação (III-105) nos indica que

$$\tilde{a} = \tilde{a}(z, T) \quad (\text{III-106})$$

onde  $\xi \equiv x - \frac{kc^2}{\omega} t$ ,  $T = t$ ,  $\partial_\xi \sim O(\epsilon)$  e  $\partial_T \sim O(\epsilon^3)$ .

Consideremos agora a componente  $x$  da equação de momentum (III-100) juntamente com as equações (III-97) e (III-98). Estas três equações nos darão a resposta do meio à excitação ponderomotriz.

Na ordem mais elementar ( $O(\epsilon^3)$ ) significativa este sistema de três equações passa a ser

$$\partial_t n_{ep}^{(0)} + n_{ep0} \partial_x V_{ep}^{(0)} = 0$$

$$0 = -4\pi e (n_e^{(0)} - n_p^{(0)})$$

$$\partial_t V_{epx}^{(0)} = -\frac{q_{ep}}{m} \partial_x \phi + \frac{q_{ep}}{mc} \left( -\frac{q_{ep}}{mc} \tilde{A} \times \nabla \times \tilde{A} \right)_x.$$

Como já era de esperar, este sistema é equivalente à versão unidimensional do conjunto (III-53). Na nossa ordem de precisão, podemos substituir  $\partial_t$  nessas equações por  $-v \partial_x$ , com  $v = kc^2/\omega$ , já que a diferença en-

tre as duas derivadas, como foi demonstrado na equação (III-105) é de ordem superior.

Com esta última consideração, obtemos o seguinte conjunto algébrico, o qual descreve um sistema excitado pela força ponderomotriz, que aqui entra como fonte externa:

$$-V n_{ep}^{(0)} + n_{ep0} V_{epx}^{(0)} = 0 \quad (\text{III-107})$$

$$n_e^{(0)} = n_p^{(0)} \quad (\text{III-108})$$

$$-V V_{epx}^{(0)} = -\frac{q_{ep}}{m} \partial_x \phi - \frac{2e^2}{m^2 c^2} \partial_x |\tilde{a}|^2. \quad (\text{III-109})$$

A solução deste sistema é, se  $n_{ep}^{(0)} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$ ,

$$n_e^{(0)} = n_p^{(0)} = n^{(0)} = \frac{4 n_{e0} n_{p0}}{n_{e0} + n_{p0}} \frac{c^2}{V^2} |\tilde{a}|^2 \quad (\text{III-110})$$

a qual é idêntica à obtida na equação (III-65).

Introduzindo esta última informação na equação (III-103) e expandindo adequadamente  $\gamma_{ep}$  em potências de  $A$  obtemos a seguinte equação,

$$i \partial_T \tilde{a} + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \partial_x^2 \tilde{a} = - \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left(1 - 4n(1-n) \frac{c^2}{V^2}\right) |\tilde{a}|^2 \tilde{a} \quad (\text{III-111})$$

que é precisa até  $o(\epsilon^3)$  e normalizada segundo as regras usadas na subsecção anterior. A equação (III-11), ao ser escrita na forma geral  $i \partial_t a + P \partial_x^2 a + Q |a|^2 a = 0$ , identifica a assim chamada equação não linear de Schrödinger.

A diferença essencial entre as equações (III-111) e (III-73), é o termo  $i \partial_T \tilde{a}$  de (III-111). Este termo indica que a equação permite uma lenta evolução temporal do formato de suas soluções no referencial que se movimenta com a velocidade de grupo, ao passo que a equação (III-73), como consequência do

contexto em que foi derivada, descreve soluções estacionárias neste referencial. A hipótese de  $\tilde{a}$  ser real é a geradora de soluções estacionárias.

Como já havíamos notado em ocasiões anteriores, o coeficiente do termo cúbico da (III-111) pode se anular se  $0 < r < 1/2$ ; para tanto, basta que tomemos

$$V^2 = 4r(1-r)c^2. \quad (\text{III-112})$$

$$r = \frac{M_{+0}}{M_{+0} + M_{-0}}$$

Se este coeficiente é nulo ou quase nulo (digamos de ordem  $\epsilon$ ), as regras de escala usadas não nos conduzem a uma equação onde haja balanço entre os termos não lineares e os termos lineares dispersivos (o termo  $\partial_x^2 a$ ) pois a equação efetiva de evolução seria, em ordem  $o(\epsilon^3)$ :

$$i \partial_T \tilde{a} + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \partial_x^2 \tilde{a} = 0. \quad (\text{III-113})$$

A reobtenção do balanço deve ser feita mediante uma reformulação das regras de escala, dentro dos moldes já usados anteriormente. Não é difícil ver que, supondo  $1 - 4r(1-r)c^2/V^2 \sim o(\epsilon)$  e  $\partial_x, \partial_t \sim o(\epsilon)$ , devemos ter:

$$\tilde{a} \sim o(\epsilon^{1/2})$$

e portanto

$$\partial_T \tilde{a} \sim o(\epsilon^{5/2})$$

$$\partial_x^2 \tilde{a} \sim o(\epsilon^{3/2})$$

$$n_{ep}^{(0)}, V_{ep}^{(0)}, \phi^{(0)} \sim o(\epsilon)$$

(III-114)

onde, como anteriormente,  $a = a(\xi, T)$ .

Assim, as duas primeiras ordens em relação a  $\epsilon$ , ( $\epsilon^{1/2}$  e  $\epsilon^{3/2}$ ) fornecem equações similares às equações (III-104) e (III-105). Na próxima ordem ( $o(\epsilon^{5/2})$ ), além de obtermos o nosso já conhecido termo cúbico, também devemos refinar nossa expansão da função  $\gamma_{ep}$ , bem como calcular uma expressão mais precisa (correta até ordem  $\epsilon^2$ ) para as densidades de baixa frequência; tais tipos de termos devem ser incluídos nas expressões para as correntes não lineares. Para ressaltar o fato de que os termos que estaremos calculando são  $o(\epsilon^2)$ , designaremos-os por um subíndice 2. Assim, por exemplo, a densidade será escrita como  $n_{\alpha 2}^{(0)}$ , onde  $\alpha = e, p$ , o que implica em

$$n_{\alpha \text{TOTAL}}^{(0)} = n_{\alpha}^{(0)} + n_{\alpha 2}^{(0)}.$$

Consideremos a equação da continuidade em ordem  $\epsilon^3$

$$-V \partial_z n_{\alpha 2}^{(0)} + \partial_T n_{\alpha}^{(0)} + \partial_z (n_{\alpha}^{(0)} V_{\alpha}^{(0)}) + n_{\alpha 0} \partial_z V_{\alpha}^{(0)} = 0. \quad (\text{III-115})$$

A equação de momentum por sua vez nos fornece

$$\begin{aligned} -V \partial_z V_{\alpha}^{(0)} + \partial_T V_{\alpha}^{(0)} - V \frac{2e^2}{m^2 c^4} \partial_z (|\tilde{a}|^2 V_{\alpha}^{(0)}) + \frac{1}{2} \partial_z V_{\alpha}^{(0)2} \\ - \frac{q_{\alpha}}{m} \partial_z \phi_2^{(0)} - \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{2}{\gamma_{\alpha}^*} \partial_z |\tilde{a}|^2 \end{aligned}$$

onde  $\gamma_{\alpha}^*$  indica os termos de ordem  $\epsilon^1$  do fator relativístico, definido no parágrafo abaixo da equação (III-100).

O resultado final para a equação de momentum é:

$$-V \partial_z V_{\alpha}^{(0)} + \partial_T V_{\alpha}^{(0)} = - \frac{q_{\alpha}}{m} \partial_z \phi_2^{(0)} + \frac{1}{2} \partial_z |\tilde{a}|^4 \quad (\text{III-116})$$

onde

$$\Lambda_{\alpha} = \frac{2e^4}{m^4 c^6} - \frac{V_{\alpha x}^{(0)2}}{2|\tilde{\alpha}|^4} + \frac{2e^2 V_{\alpha x}^2}{m^2 c^4 |\tilde{\alpha}|^2} = c \frac{t_e}{\dots}$$

Da equação da continuidade obtemos

$$n_{e2}^{(0)} = n_{p2}^{(0)} \quad (III-117)$$

o que completa nosso sistema de equações para as grandezas indexadas com o símbolo "2".

Substituindo a equação (III-116) na equação (III-115)

obtemos:

$$V \partial_3 n_{\alpha 2}^{(0)} = - \frac{n_{\alpha 0} q_{\alpha}}{V m} \partial_3 \phi_2^{(0)} + \bar{\Lambda}_{\alpha} \partial_3 |\tilde{\alpha}|^4 + 2 \partial_T n_{\alpha}^{(0)} \quad (III-118)$$

onde introduzimos  $\bar{\Lambda}_{\alpha} = \frac{n_{\alpha 0} V_{\alpha x}^{(0)}}{|\tilde{\alpha}|^4} - \frac{n_{\alpha 0} \Lambda_{\alpha}}{V}$ .

Usando a equação (III-117), vemos que esta última equação se transforma em

$$\partial_3 \phi_2^{(0)} = \frac{V m (\bar{\Lambda}_e - \bar{\Lambda}_p)}{(m_{e0} + m_{p0}) e} \partial_3 |\tilde{\alpha}|^4,$$

de onde deduzimos

$$n_{\alpha 2}^{(0)} = \frac{2 n_{\alpha}^{(0)}}{|\tilde{\alpha}|^2} \frac{c^2}{v^2} \int_T^3 \partial_T |\tilde{\alpha}|^2 dz' + \frac{1}{V} \left[ r_{\alpha} \bar{\Lambda}_{\beta} + (1 - r_{\alpha}) \bar{\Lambda}_{\alpha} \right] \quad (III-119)$$

sendo

$$r_{\alpha} = \frac{n_{\alpha 0}}{m_{e0} + m_{p0}}, \quad r_{\alpha} \equiv r_p.$$

Coletando todos os termos de ordem  $\epsilon^{5/2}$  da equação (III-103) escrevemos a equação não linear de evolução para o campo  $\tilde{\alpha}$ , quando o coeficiente do termo cúbico é quase nulo:

$$\begin{aligned}
i \partial_T \tilde{a} + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \partial_z^2 \tilde{a} = - \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left\{ \left(1 - 4n(1-n) \frac{c^2}{V^2}\right) |\tilde{a}|^2 \tilde{a} + \right. \\
\left. \left[ 24 \frac{c^2}{V^2} n(1-n) \left(1 - \frac{c^2}{V^2} [1 - 2n(1-n)]\right) - 3 \right] |\tilde{a}|^4 \tilde{a} - \right. \\
\left. - \frac{8c^4}{V^4} n(1-n) \tilde{a} \int \partial_T |\tilde{a}|^2 dz' \right\}. \quad (\text{III-120})
\end{aligned}$$

Pode-se expressar a integral que ocorre na equação (III-120) em termos de derivadas espaciais se procedermos ao longo dos seguintes passos: multiplicar a equação (III-120) por  $\tilde{a}^*$ ; tomar o complexo conjugado da equação (III-120) e multiplicá-lo por  $\tilde{a}$ ; subtrair os resultados, integrar por partes em  $\xi$ . Obtem-se, supondo que  $\tilde{a} \xrightarrow[\xi \rightarrow \pm\infty]{} 0$ ,

$$\tilde{a} \int \partial_T |\tilde{a}|^2 dz' = \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left(2 |\tilde{a}|^2 \partial_z \tilde{a} - \tilde{a} \partial_z |\tilde{a}|^2\right). \quad (\text{III-121})$$

A introdução da equação (III-121) na equação (III-120) resulta em:

$$\begin{aligned}
i \partial_T \tilde{a} + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \partial_z^2 \tilde{a} = - \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left\{ \left(1 - 4n(1-n) \frac{c^2}{V^2}\right) |\tilde{a}|^2 \tilde{a} + \right. \\
\left. \left[ 24 \frac{c^2}{V^2} n(1-n) \left(1 - \frac{c^2}{V^2} (1 - 2n(1-n))\right) - 3 \right] |\tilde{a}|^4 \tilde{a} + \right. \\
\left. 4i \left(1 - \frac{c^2}{V^2}\right) n(1-n) \left(2 \tilde{a}^2 \partial_z \tilde{a} - \tilde{a} \partial_z |\tilde{a}|^2\right) \right\}. \quad (\text{III-122})
\end{aligned}$$

A equação (III-122) contém os termos correspondentes à equação (III-111) e também alguns termos adicionais decorrentes do uso das novas regras de escala. O coeficiente do termo cúbico deve ser considerado pequeno, sendo esta nova estrutura da equação a responsável pelo balanço entre dispersão e não linearidade tantas vezes mencionado e a subsequente formação de ondas solitárias. Certifiquemo-nos disto, buscando so

luções moduladas quase estacionárias na forma:

$$\tilde{u}(z, T) = a(z) e^{i\sigma(z, T)} \quad (\text{III-123})$$

com  $\sigma$  real e  $\partial_T \sigma = v$  (constante).

A parte imaginária da equação (III-122) fornece:

$$\frac{i}{2} \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) \frac{v^2}{c^2} \left( 2 \partial_z a \partial_z \sigma + a \partial_z^2 \sigma \right) = 0, \quad (\text{III-124})$$

com a qual obtemos  $a^2 \partial_z^2 \sigma = \text{cte.}$ , o que, adequado às condições de contorno ( $a(|\xi|) \rightarrow 0$ ), fornece:

$$\partial_z^2 \sigma = 0. \quad (\text{III-125})$$

Da parte real da equação (III-122) extraímos a equação

$$d_z^2 a = C_1 a + 2 C_3 a^3 + 3 C_5 a^5 \quad (\text{III-126})$$

onde

$$C_1 = - \frac{2v}{v^2/c^2(v^2/c^2 - 1)}$$

$$C_3 = \frac{c^2}{v^2} \left( 4 \frac{c^2}{v^2} \nu(1-\nu) - 1 \right)$$

$$C_5 = 2 \frac{c^2}{v^2} \left[ 1 + 8 \frac{c^4}{v^4} \nu(1-\nu)(1-2\nu(1-\nu)) - 8 \frac{c^2}{v^2} \nu(1-\nu) \right].$$

Deve-se notar que a grandeza  $v$  desempenha papel análogo ao deslocamento de freqüência introduzido na subsecção anterior.

Algumas estruturas não lineares associadas com a equação (III-126) podem ser visualizadas na fig. III-4, que representa o potencial de Sagdeev  $S(a) = -1/2(C_1 a^2 + C_3 a^4 + C_5 a^6)$ ,

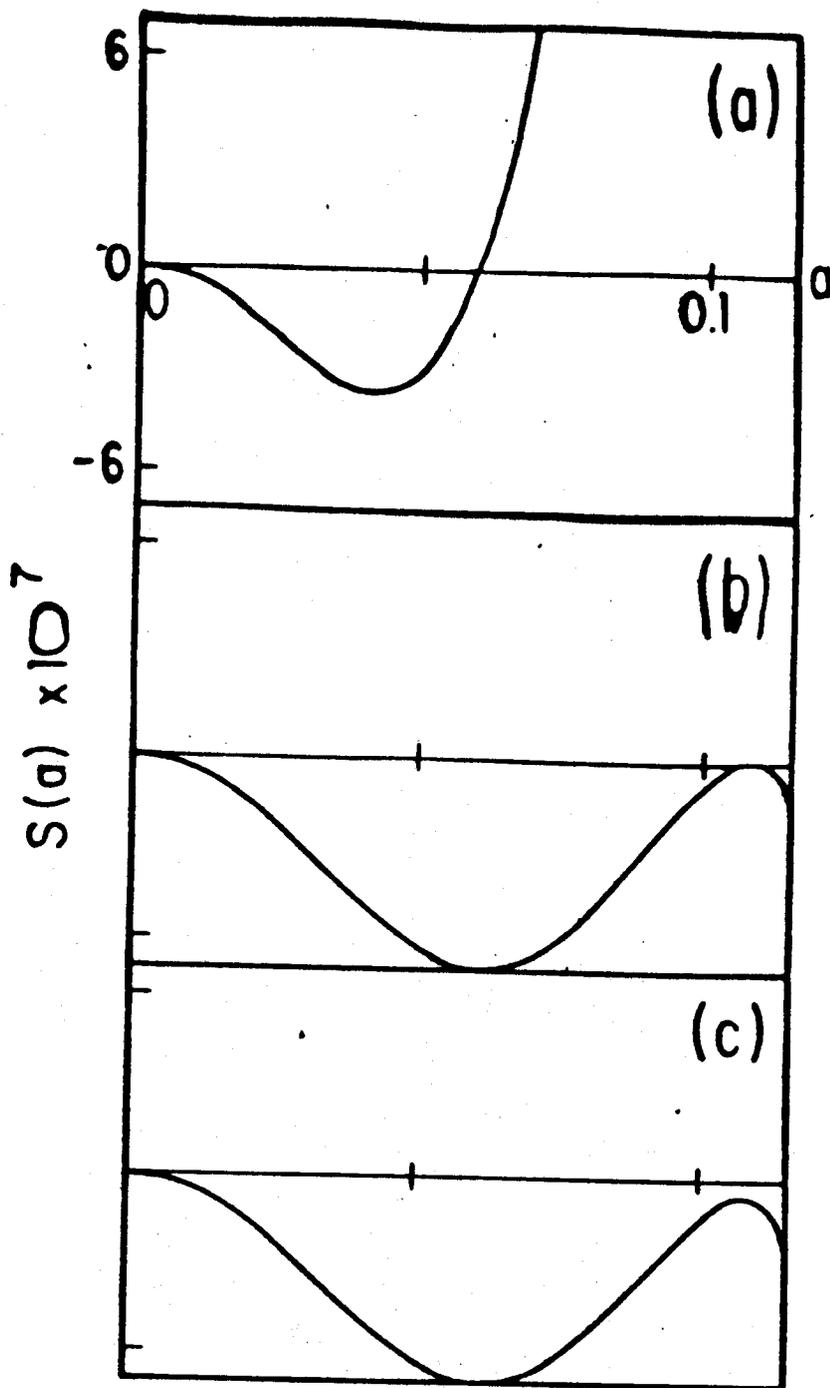


Figura III-4 - Potenciais de Sagdeev para  $\nu = 10^{-4}$ ,  $r = 0,15$  e  $v_g^2/c^2 = 0,6$  (a),  $0,552342$  (b) e  $0,552$  (c).

para os parâmetros  $v = 10^{-4}$ ,  $r = 0.15$  e  $v^2/c^2 = 0.6$  (curva a), 0.5523 (curva b) e 0.552 (curva c).

Quando  $C_3^2 > 4C_1C_5$  (o que está exemplificado na curva a), se obtém uma solução do tipo onda solitária

$$a^2 = \frac{2x_1x_2 \operatorname{sech} \chi}{(x_1+x_2)\operatorname{sech} \chi + (x_1-x_2)} \quad (\text{III-127})$$

com  $\chi \equiv 2\sqrt{C_1}\xi$ ,  $x_{1,2} = (-C_3 \pm \sqrt{C_3^2 - 4C_1C_5})/2C_5$ , a qual é muito similar a uma solução derivada no capítulo II (ver equação (II-77)).

Se  $C_3^2 = 4C_1C_5$ , duas raízes não nulas do polinômio  $S(a)$  coalescem em uma só, fornecendo um gráfico do tipo do representado pela curva b). Nestas condições se a partícula mecânica fictícia inicia seu movimento no ponto  $(0,0)$ , ela o encerra no ponto  $(a_0,0)$ , com  $a_0$  designando a amplitude máxima deste movimento.

A solução para a equação (III-126) neste caso será

$$a^2 = \frac{x_0}{2} \left( 1 - \operatorname{tgh} \frac{\chi}{2} \right) \quad (\text{III-128})$$

onde  $x_0 = -C_3/2C_5$ . Este tipo de solução representa amplitudes que são nulas em  $\xi \rightarrow +\infty$  e que tendem a um valor constante para  $\xi \rightarrow -\infty$ . Devido a esta propriedade, elas são conhecidas como soluções do tipo onda de choque ("shock-like solutions"). Ressaltamos que este tipo de choque não é o tradicional criado por mecanismos dissipativos; ele é oriundo somente de combinações entre termos dispersivos e termos não lineares. Neste contexto, cabe observar que as estruturas oscilatórias características dos choques dispersivos não estão presente em nossas solu

ções [Sa62].

Finalmente chamamos atenção para o fato de que a presença de ondas de choque como as consideradas nesta subsecção, gera o aparecimento de fluxos de partículas estacionários nas regiões onde sua amplitude é diferente de zero. Estes fluxos, designados por vezes como ventos, já foram indicados como importantes na descrição de fenômenos espaciais [KP76, Ch80].

Concluindo, se  $C_3^2 < 4C_1C_5$ , as soluções que se fazem presentes correspondem à fig. III-4 (c). Dali vemos que a partícula fictícia excursiona do ponto de máxima amplitude a um ponto de amplitude inferior, retornando após, à posição original.

Pode-se mostrar que estes sólitons, correspondendo a buracos em um campo de radiação homogêneo, têm como estrutura analítica,

$$a^2 = a_0^2 - \frac{2x_1'x_2' \operatorname{sech} \chi'}{(x_1' + x_2') \operatorname{sech} \chi' + (x_2' - x_1')} \quad (\text{III-129})$$

com

$a_0$  = amplitude do campo assintótico de radiação,

$$\chi' = 2\sqrt{C_1'} z, \quad x_{1,2}' = (-C_3' \pm \sqrt{C_3'^2 - 4C_1'C_5'}) / 2C_5',$$

$$C_1' = 6C_5'a^4 + 3(\rho a_0^4 + C_3')a_0^2 + C_1,$$

$$C_3' = -(4C_5'a_0^2 + \rho a_0^2 + C_3),$$

$$C_5' = C_5$$

e

$$\rho = 24 \frac{C^4}{V^4} n(1-n) \left[ 1 + 2 \frac{C^2}{V^2} (1 - n(1-n)) \right].$$

### Conclusões Parciais ao Tema

Mais uma vez verificamos que a mistura de íons em plasmas de elétron-pósitron produz grandes mudanças na propagação de ondas eletromagnéticas não lineares, circularmente polarizadas. A figura III-5 mostra a relação entre amplitude e velocidade de propagação para as soluções da equação (III-122), para três valores de  $r$  : 0.14, 0.15 e 0.16 . Como já havíamos mencionado no contexto de ondas íon-acústicas, pode-se mostrar, sem maiores esforços, que a solução estacionária de (III-122) é válida não apenas próximo ao ponto crítico, mas também para zonas afastadas dele. O ajuste na escala é automático. Os valores de  $(v^2/c^2)$  para os quais o coeficiente do termo cúbico se anula são, respectivamente às três concentrações escolhidas:  $(v^2/c^2)_{cr} = 0.4816, 0.51$  e  $0.5376$ . A curva (a) corresponde ao caso usual de um plasma de elétrons e íons com  $r=0$  . O valor de  $v$  foi tomado como  $10^{-4}$  em todos os casos. Para cada  $r$ , a medida que a velocidade se aproxima de seu valor crítico, a amplitude aumenta rapidamente até um nível limite correspondente à velocidade que satisfaz  $C_3^2 = 4C_1C_5$  . Os níveis limite para diferentes  $r$ 's, ficam então sobre uma curva que caracteriza a transição de ondas solitárias a ondas do tipo choque. Estas últimas podem estar relacionadas à formação de fluxos de partículas e à formação de "camadas duplas" quase-neutras em plasmas multiespécie; suas amplitudes e velocidades são determinadas pela concentração relativa de partículas. Para valores de  $v^2/c^2$  suficientemente maiores do que o crítico, as amplitudes representadas na fig. III-5 tendem ao valor obtido pelo uso

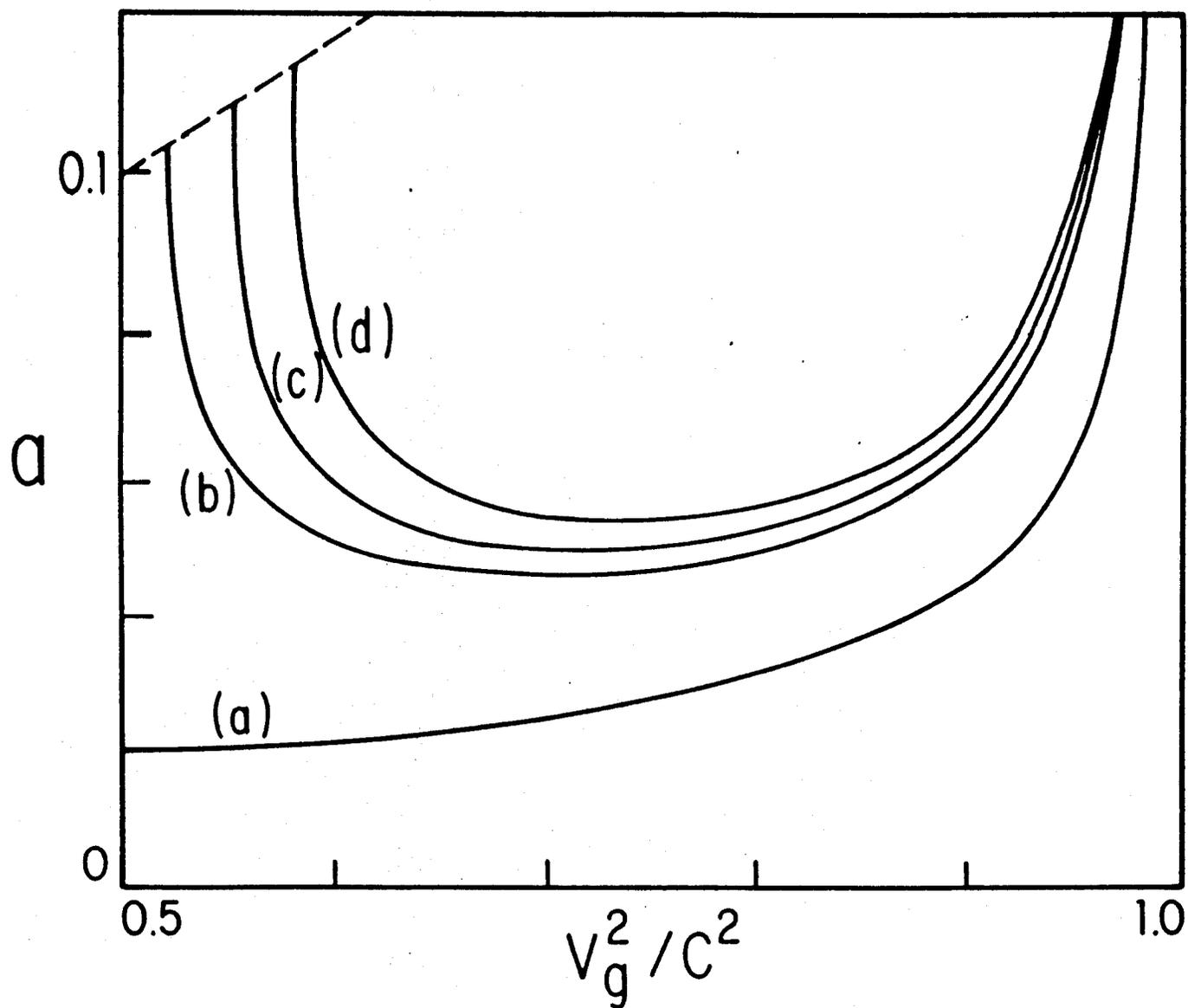


Figura III-5 - Amplitude máxima da onda solitária como função de  $V_g^2/c^2$  para  $r(a) = 0$ ,  $r(b) = 0,14$ ,  $r(c) = 0,15$  e  $r(d) = 0,16$ . Em todos os casos  $\nu = 10^{-4}$ . O corte em baixas velocidades indica a transição à soluções do tipo ondas de choque.

da equação não linear de Schrödinger, já que nesta região o termo cúbico da equação (III-126), por possuir um coeficiente não mais de ordem  $\epsilon$ , passa a predominar sobre as outras não linearidades.

III-2-3 - *Sólitons Eletromagnéticos em Plasmas de Elétrons, Pósitrons e Íons Fortemente Magnetizado* [RSD88]

Nas subsecções anteriores analisamos os aspectos concernentes à propagação de ondas eletromagnéticas não lineares em plasmas não magnetizados compostos por vários tipos de partículas. Com a presente análise, começamos a incluir os efeitos de campos magnéticos externos como ingrediente básico de nosso estudo, já que sua presença é quase uma constante em sistemas físicos reais.

Como primeiro ponto analisaremos as condições para existência de sólitons eletromagnéticos compressivos e rarefativos com polarização circular, em plasmas eletro-pósitro-iônicos, imersos em fortes campos magnéticos.

Após alguns trabalhos pioneiros sobre modulação não linear de radiação, em plasmas elétron-pósitron livres de campos externos, tanto por efeitos relativísticos [CK83] quanto por efeitos térmicos [LB81] algum esforço foi dirigido à inclusão de campos magnéticos externos [SK80; MOT85a; SSY85; MP87]. Como já foi mencionado [LMMP86], é de interesse analisar o que acontece quando uma componente iônica é incluída no sistema. Mostraremos aqui que, a exemplo do caso não magnetizado, a física destes sistemas pode ser bastante diferente daquela em que apenas duas espécies

estão presentes. Será evidenciada a ramificação da relação de dispersão calculada por Sakai e Kawata [SK80] e por Stenflo, Shukla e Yu [SSY85] em dois modos, um correspondendo à polarização circular à direita e outro à esquerda. Também estaremos interessados em descrever quantitativamente quando e sob quais condições estes modos são compressivos (correspondendo a um acúmulo de partículas na região de concentração da onda) ou rarefativos (correspondendo a um decréscimo de partículas). A condição de neutralidade completa de cargas usada em [MOT85a,MP87] é abandonada para que possamos mostrar que, mesmo em plasmas elétron-pósitron puros, potenciais eletrostáticos devidos a separação de cargas estão presentes.

Enfim, suponhamos que uma onda eletromagnética se propague ao longo do campo magnético externo  $\underline{B}_0 (=B_0 \hat{x})$ , em um plasma composto por elétrons (e), pósitrons (p) e íons de massa infinita (i). Usando a representação de potencial para os campos elétrico e magnético de alta frequência, temos:

$$\underline{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \underline{A}, \quad \underline{B} = \nabla \times \underline{A} \quad (\text{III-130})$$

com

$$\underline{A} = a(x,t) (\hat{y} - i \hat{z}) e^{i(kx - \omega t)} + c.c.$$

onde  $a$  é real;  $\hat{x}, \hat{y}$  e  $\hat{z}$  denotam os já conhecidos vetores unitários ao longo dos três eixos espaciais;  $k$  e  $\omega$  são novamente o número de onda e frequência da onda. Escrevemos as grandezas físicas ( $Q$ ) como uma parcela de equilíbrio ( $Q_0$ ), uma de alta frequência ( $Q^{(h)}$ ) e outra de baixa frequência ( $Q^{(o)}$ ), relem

brando que para polarização circular apenas a frequência fundamental está presente:

$$Q = Q_0 + Q^{(0)} + Q^{(h)} \quad (\text{III-131})$$

As equações de momentum de alta frequência, que vão determinar a fonte não linear para o campo  $\underline{A}$ , podem ser escritas na mais baixa ordem não linear significativa como

$$\partial_t \left[ \frac{V_{ep}^{(h)}}{v_{ep}} \left( 1 + \frac{V_{ep}^{(h)2}}{c^2} \right) \right] = \mp \frac{e}{mc} \partial_t \underline{A} \pm \frac{e}{mc} \frac{V_{ep}^{(h)}}{v_{ep}} \times \underline{B}_0 \pm \frac{e}{mc} \frac{V_{ep}^{(0)}}{v_{ep}} \times (\nabla \times \underline{A}) - (V_{ep}^{(0)} \cdot \nabla) \frac{V_{ep}^{(h)}}{v_{ep}}, \quad (\text{III-132})$$

onde  $\left( \frac{v_{ep}^{(h)}}{c} \right)^2$  denota a correção relativística de massa e onde a carga de elétrons (pósitrons) é novamente  $e(-e)$ . Resolveremos a equação (III-132) para  $\frac{V_{ep}^{(h)}}{v_{ep}}$  como uma função de  $\underline{A}$  e de  $\frac{V_{ep}^{(0)}}{v_{ep}}$ , usando as seguintes suposições:

a)  $|\beta| \equiv \left| \frac{eB_0}{mc\omega} \right| \equiv \left| \frac{\Omega_0}{\omega} \right| \gg 1$ , que é conhecida como aproximação

da onda de deriva para campos magnéticos intensos;

b)  $\frac{V_{ep}^{(h)}}{v_{ep}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{ep}^{h(n)}}{v_{ep}}$ ,  $\frac{V_{ep}^{h(n)}}{v_{ep}} \sim \beta^{-n}$ ;  $\frac{V_{ep}^{(0)}}{v_{ep}} \sim \beta^{-2}$  (III-133)

que são expansões perturbativas das velocidades usando o pequeno parâmetro  $\beta^{-1}$  e

c)  $\partial_t a \ll \omega a$ ;  $\partial_x a \ll ka$ , que são as usuais hipóteses de lenta modulação.

Os resultados que advêm da aplicação da equação (III-133) à (III-132) são

$$\frac{V_{ep}^{(h)1}}{v_{ep}} = \frac{ea}{mc\beta}$$

$$V_{ep}^{(h)2} = \pm \frac{ea}{mc\beta^2} + i \frac{e}{mc\Omega_0} \partial_t a$$

$$V_{ep}^{(h)3} = \pm 2i \frac{e}{mc\beta} \frac{\partial_t a}{\Omega_0} + \frac{e}{mc\beta^3} a - \frac{e k V_{ep}^{(0)}}{mc \Omega_0} a$$

$$V_{ep}^{(h)4} = \pm \frac{2e^3}{m^3 c^5 \beta^4} + \frac{3ie}{mc\beta^2} \frac{\partial_t a}{\Omega_0} \pm \frac{e}{mc\beta^4} a - \frac{2e V_{ep}^{(0)} k a}{mc \beta \Omega_0} - \frac{e}{mc} \frac{\partial_t^2 a}{\Omega_0^2},$$

de onde podemos escrever:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ep}^{(h)} = & \frac{ea}{mc\beta} (1 \pm \beta^{-1} + \beta^{-2} \pm \beta^{-3}) + i \frac{e}{mc} \frac{\partial_t a}{\Omega_0} (1 \pm 2\beta^{-1} + 3\beta^{-2}) - \\ & \frac{e}{mc} \frac{V_{ep}^{(0)} k a}{\Omega_0} (1 \pm 2\beta^{-1}) \pm \frac{e}{mc} \frac{\partial_t^2 a}{\Omega_0^2} + \frac{2e^3 a^3}{m^3 c^5 \beta^4}, \end{aligned} \quad (\text{III-134})$$

onde usamos

$$\hat{V}_{ep}^{(h)} = \hat{V}_{ep}^{(h)} (\hat{y} - i \hat{z}) e^{i(kx - \omega t)} + c.c.$$

Afirmamos aqui (e a demonstração será feita mais adiante) que a primeira parcela de cada um dos dois primeiros parênteses de (III-134) não contribuirá quando obtivermos a equação não linear de evolução para o limite elétron-pósitron puro. Com isto em mente, e visando uma primeira aproximação tratável à teoria, para cada um dos mencionados parênteses incluíremos a primeira e segunda parcelas, deixando as demais de lado. Desta forma, o resultado é:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ep}^{(h)} = & (1 \pm \beta^{-1}) \frac{ea}{mc\beta} + \frac{ie}{mc} \frac{\partial_t a}{\Omega_0} (1 \pm 2\beta^{-1}) - \\ & \frac{e}{mc} \frac{V_{ep}^{(0)} k a}{\Omega_0} (1 \pm 2\beta^{-1}) \pm \frac{e}{mc} \frac{\partial_t^2 a}{\Omega_0^2} + \frac{2e^3 a^3}{m^3 c^5 \beta^4}. \end{aligned} \quad (\text{III-135})$$

Para determinar o movimento de baixas frequências, necessitamos da força ponderomotriz paralela a  $\underline{B}_0$ , a qual é dada por [SSY85]:

$$F_{ep} = -\frac{2e^2}{m^2 c^2} (1 \pm \beta^{-1})^{-1} \left[ \partial_x \pm \frac{k\beta}{\omega(1 \pm \beta)} \partial_t \right] a^2. \quad (\text{III-136})$$

Notemos que, em contraste ao caso não magnetizado, a força dada pela equação (III-136) contém uma contribuição de vida às derivadas temporais do campo eletromagnético.

Antecipando soluções na forma  $a(x,t) = a(x - Vt) \equiv a(\xi)$ , e usando  $\beta \gg 1$ , a equação (III-136) se torna

$$F_{ep} = \mp \frac{2e^2}{m^2 c^2} \beta^{-1} (1 \mp \beta^{-1}) \left( 1 - \frac{kV}{\omega} \pm \frac{kV}{\omega} \beta^{-1} \right) a^2. \quad (\text{III-137})$$

A exemplo do que ocorria no caso não magnetizado, o movimento em baixas frequências é agora dado pelas equações de continuidade e momentum e pela equação de Poisson, todas na mais baixa ordem;

$$V n_{ep}^{(0)} = n_{ep0} V_{ep}^{(0)}, \quad (\text{III-138})$$

$$-V V_{ep}^{(0)} = \mp \frac{e\phi^{(0)}}{m} \mp \frac{2e^2}{m^2 c^2} \beta^{-1} (1 \mp \beta^{-1}) \left( 1 - \frac{kV}{\omega} \pm \frac{kV}{\omega} \beta^{-1} \right) a^2, \quad (\text{III-139})$$

$$\partial_x^2 \phi^{(0)} \approx 0 \approx n_e^{(0)} - n_p^{(0)}, \quad (\text{III-140})$$

com  $n_{ep0}$  satisfazendo à condição exata de neutralidade total de cargas  $e(n_{e0} - n_{p0}) = (\text{carga do íon}) \times n_i$ .

Destas últimas equações seguem os resultados:

$$V_{ep}^{(0)} = -\frac{4e^2}{m^2 c^2 \beta^2} \frac{1}{V} \frac{n_{ep0}}{n_{e0} + n_{p0}} \left( 1 - \frac{2kV}{\omega} \right) a^2 \quad (\text{III-141})$$

$$n_{ep}^{(0)} = \frac{4e^2}{m^2 c^2 \beta^2} \frac{1}{V^2} \frac{n_{e0} n_{p0}}{n_{e0} + n_{p0}} \left( 1 - \frac{2kV}{\omega} \right) a^2. \quad (\text{III-142})$$

Note-se que  $v_{ep}^{(0)} \sim \beta^{-2}$  como suposto em (III-133), e que as flutuações de densidade podem ser rarefativas ou compressivas, dependendo do valor da razão  $\frac{V}{(\omega/k)}$ . Também deve ser ressaltado o fato de que  $\phi^{(0)} = 2\beta^{-1} \left[ 1 - \frac{kV}{\omega} \right] \frac{ea^2}{mc^2}$  é diferente de zero mesmo na ausência de íons, o que novamente contrasta com plasmas não magnetizados.

Na equação de Maxwell para o campo  $\vec{A}$

$$\partial_t^2 \vec{A} - c^2 \partial_x^2 \vec{A} = 4\pi c \vec{J}$$

temos

$$\vec{J} = e (n_e v_e^{(h)} - n_p v_p^{(h)}) = e (n_e^{(0)} v_e^{(h)} - n_p^{(0)} v_p^{(h)}) + e (n_{e0} v_e^{(h)} - n_{p0} v_p^{(h)}). \quad (\text{III-143})$$

Usando as equações (III-130), (III-135) e (III-142) podemos reescrever a equação (III-143) na forma

$$-2i \left[ \left( \omega \bar{\Delta} + \frac{\Delta}{2} \right) \partial_t a + kc^2 \partial_x a \right] + \bar{\Delta} \partial_t^2 a - c^2 \partial_x^2 a = \quad (\text{III-144})$$

$$\delta a + \frac{2e^2 \omega_0^2}{m^2 c^4 \beta^4} \left[ 1 - 4 \frac{c^2}{V^2} \left( 1 - 2 \frac{kV}{\omega} \right)^2 n(1-n) \right] a^3$$

onde

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 (n_{e0} + n_{p0})}{m}, \quad \Delta = \frac{4\pi e^2 (n_{e0} - n_{p0})}{m \Omega_0},$$

$$\bar{\Delta} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega_0^2}, \quad n = \frac{n_{p0}}{n_{e0} + n_{p0}};$$

$\delta = \bar{\Delta} \omega^2 + \Delta \omega - k^2 c^2$  é o arbitrário mas pequeno ( $\delta \ll \omega^2$ ) deslocamento não linear de frequência.

A relação de dispersão para as ondas consideradas é

$$\omega_{\pm} = \frac{-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 4\bar{\Delta} k^2 c^2}}{2\bar{\Delta}} \quad (\text{III-145})$$

Para  $\Delta = 0$  ela se reduz à usual relação de dispersão para ondas de Alfvén em plasmas de elétron-pósitron, derivada por Sakai e Kawata [SK80] e por Stenflo, Yu e Shukla [SSY85]. Para  $\Delta \neq 0$ , contudo, a equação (III-145) fornece dois ramos diferentes. Se  $\Delta > 0$  (íons carregados positivamente) a equação (III-145) nos informa que  $\omega_+ > 0$  e  $\omega_- < 0$ , o que nos leva a identificar  $\omega_+$  ( $\omega_-$ ) com o ramo polarizado à direita (esquerda). Para  $\Delta < 0$  (íons carregados negativamente) a situação é revertida. No limite  $\Delta^2 \gg 4\bar{\Delta} k^2 c^2$  se obtém

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \frac{k^2 c^2}{\Delta} \\ \omega_- &= -\frac{\Delta}{\bar{\Delta}} - \frac{k^2 c^2}{\Delta} \end{aligned} \quad (\text{III-146})$$

As velocidades de grupo associadas com a equação (III-145) são

$$V_{g\pm} = \frac{kc^2}{\bar{\Delta}\omega \pm \Delta/2} \quad (\text{III-147})$$

enquanto que da parte imaginária da equação (III-144) segue

$$a_{\pm} = a_{\pm}(x - V_{\pm} t) \equiv a_{\pm}(\zeta)$$

com

$$V_{\pm} = V_{g\pm}$$

como deveria ser.

Nosso próximo passo é a de adimensionalizar a equação (III-144) segundo as bem conhecidas regras  $a \rightarrow ea/mc^2$ ,

$x + \sqrt{2} \omega_0 / c$  ,  $\delta + \delta / 2\omega_0^2$  , para obter:

$$\left( \frac{\Delta v^2}{c^2} - 1 \right) d_{33} a = \delta a + \beta^{-4} \left[ 1 - \frac{4c^2}{v^2} \left( 1 - \frac{2kV}{\omega} \right)^2 r(1-r) \right] a^3. \quad (\text{III-148})$$

Da equação (III-145) segue que  $v^2 < c^2/\Delta$  ; consequentemente a formação de sólitons está sujeita à usual condição de instabilidade modulacional que é idêntica àquela que dá o formato adequado ao potencial de Sagdeev

$$\frac{4c^2}{v^2} \left( 1 - \frac{2kV}{\omega} \right)^2 r(1-r) < 1. \quad (\text{III-149})$$

Esta condição é sempre satisfeita para um plasma de elétrons e íons ( $r=0$ ) .

Examinemos agora as condições de existência para sólitons de rarefação e compressão, relativamente aos dois ramos da relação de dispersão. Para tanto, primeiramente notamos que para grandes valores de  $k$  , a condição de existência é essencialmente

$$\frac{4c^2}{V_A^2} r(1-r) < 1, \quad \left( V_A = c \left( 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_b^2} \right)^{-1/2} < c \right), \quad (\text{III-150})$$

a qual sempre pode ser satisfeita mediante uma escolha apropriada de  $r$  ; suponhamos de fato que ela seja cumprida.

$$1) \Delta > 0$$

$$i.1) \omega = \omega_+ .$$

Para este ramo, não é difícil ver que  $\frac{kV}{\omega}$  é sempre maior do que 1 . Isto nos indica simplesmente (ver equação (III-142)) que este tipo de sóliton é sempre compressivo. Há corte ("cut-off") para pequenos valores de velocidade.

$$1.2) \omega = \omega_- .$$

Neste caso podemos ver que se  $k^2 > \frac{3\Delta}{4\bar{\Delta}} c^{-2}$  os s\u00f3litons s\u00e3o compressivos, enquanto que se  $k^2 < \frac{3\Delta}{4\bar{\Delta}} c^{-2}$  eles s\u00e3o rarefativos. Tamb\u00e9m temos corte para pequenos valores de  $V$ .

$$ii) \Delta < 0$$

Corresponde ao caso anterior com a permuta  $\omega_+ \leftrightarrow \omega_-$ .

Consideramos agora a situa\u00e7\u00e3o em que  $4 \frac{c^2}{V_A^2} r(1-r) > 1$ .

$$i) \Delta > 0$$

$$ii) \omega = \omega_+$$

N\u00e3o h\u00e1 forma\u00e7\u00e3o de s\u00f3liton, pois o lado esquerdo de (III-146) sempre cresce com o decr\u00e9scimo de  $k$ , enquanto que na regi\u00e3o de grandes valores de  $k$  a condi\u00e7\u00e3o de exist\u00eancia j\u00e1 n\u00e3o \u00e9 satisfeita.

$$1.2) \omega = \omega_-$$

Existem s\u00f3litons em uma regi\u00e3o finita em torno do ponto  $k^2 c^2 = \frac{3\Delta}{4\bar{\Delta}}$ . \u00c0 esquerda teremos s\u00f3litons rarefativos, e \u00e0 direita compressivos.

$$ii) \Delta < 0$$

Corresponde ao caso i) com a permuta  $\omega_+ \leftrightarrow \omega_-$ .

As regi\u00f5es de exist\u00eancia que acabamos de discutir podem ser visualizadas graficamente. Definindo  $p_{\pm} = 1 - \frac{2kV}{\omega_{\pm}}$ ,  $p_{\pm}^2 = \frac{v^2}{4c^2 r(1-r)}$ , a equa\u00e7\u00e3o (III-149) pode ser escrita como  $p_{\pm}^2 < p_{\pm}^{*2}$ . Consideremos o caso  $\Delta < 0$ . A figura III-6(a) corres-

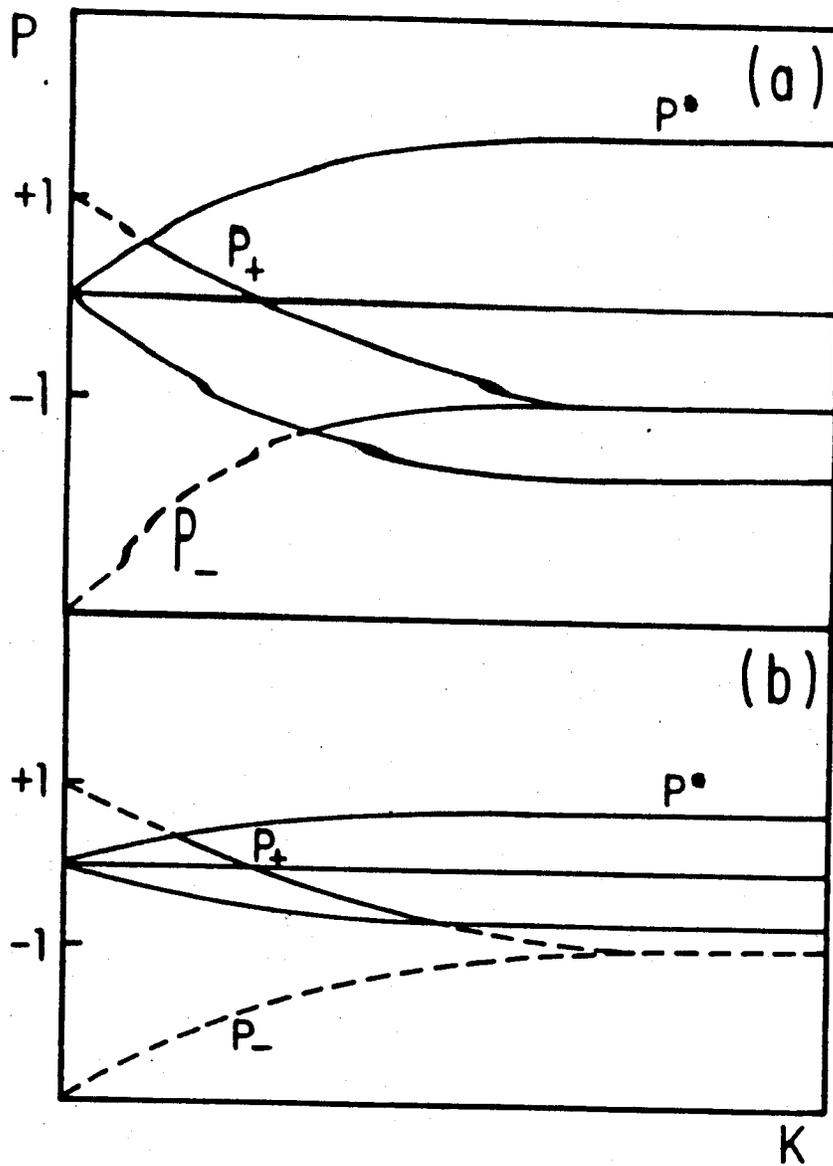


Figura III-6 -  $P_{\pm}$ ,  $P^*$  como função de  $k$  para  $\Delta < 0$ ; a)  $P_{\infty}^* > 1$ ,  
 b)  $P_{\infty}^* < 1$ ; os subscritos "+" ou "-" de  $P^*$  não  
 são mostrados pois nesta representação quali-  
 tativa  $P_+^*$  e  $P_-^*$  são essencialmente iguais.

ponde a  $P^*(k \rightarrow \infty) \equiv P_\infty^* > 1$  enquanto que a figura III-6(b) corresponde a  $P_\infty^* < 1$ ;  $P_\pm > 0$  ( $< 0$ ) corresponde a ondas rarefativas (compressivas); nas regiões de existência dos sólitons, as curvas  $P_\pm$  estão traçadas em linhas cheias.

### Conclusões parciais ao tema

Sumarizando esta subsecção, podemos dizer que analisamos a modulação não linear de ondas eletromagnéticas circularmente polarizadas em plasmas frios, fortemente magnetizados, compostos por elétrons, pósitrons e íons fixos. Este é o tipo de plasma que se acredita estar presente na magnetosfera de pulsares [LMMP86]. Supondo quase neutralidade de cargas em contraste à neutralidade completa usada em [MOT85a, MP87] derivamos uma versão estacionária da equação não linear de Schrödinger para a amplitude da onda. Na aproximação linear dois modos com frequências diferentes são obtidos.

Em um recente trabalho [SSY85] o caso  $r=1/2$  foi examinado sem a análise das regiões de existência. Para aplicar nossos resultados a esta situação devemos antes de mais nada chamar atenção de que, quando  $n_{eo} = n_{po}$ , nossa teoria cessa de ser válida. De fato, o coeficiente do termo dispersivo (que contém a segunda derivada na variável  $\xi$ ) se anula neste limite. Contudo, através de um refinamento das expressões para as velocidades  $\hat{v}_{ep}^{(h)}$  (i.e., levando em consideração termos de mais altas ordens em  $\beta^{-1}$ ) se pode mostrar que este coeficiente

é modificado da seguinte forma:  $(\bar{\Delta} v^2/c^2 - 1) \rightarrow 3 \frac{v_A^2}{c^2} \frac{\omega_o^2}{\Omega_o^2} \beta^{-2}$ .

Assim, pode ser visto que para densidades iônicas nulas, sólitons estão sempre presentes, já que neste caso os termos dispersivo e não linear tem sinais opostos. Uma análise de nossas equações mostra também que supondo  $a \sim \beta^{-q}$  e  $d_{\xi} \sim \beta^{-p}$ , altas concentrações iônicas implicam em  $p = q + 2$ , enquanto concentrações baixas, em  $p = q + 1$ . Como  $p \geq 2$  para lentas modulações, a amplitude  $\frac{ea}{mc^2}$  dos sólitons é muito maior na primeira situação. Esta diferença marcante está relacionada com o fato de que o limite  $n_{e0} = n_{p0}$  é crítico, ou em outras palavras, é um limite para o qual o coeficiente dispersivo normalizado é muito menor do que a unidade; de fato, devido à presença do termo  $\beta^{-2}$ , podemos escrever  $0 < 3 \frac{v_A^2}{c^2} \frac{\omega_0^2}{\Omega_0^2} \beta^{-2} \ll 1$ . Neste limite crítico o balanço entre não linearidade e dispersão, imprescindível para a existência de sólitons, exige um reescalonamento da amplitude dos campos, induzindo drástica redução de intensidade.

O tratamento da separação de cargas no referido trabalho deve também ser comentado. Como mostramos,  $\phi^{(0)} \sim \beta^{-1}$ , enquanto  $n^{(0)} \sim \beta^{-2}$ , Isto implica em que, para forte magnetização (com  $\beta^{-1}$  desempenhando o papel de pequeno parâmetro), contrariamente ao caso não magnetizado onde  $\phi^{(0)} \sim n^{(0)}$ , a separação de cargas pode ser importante perto da região para a qual  $1 - \frac{4c^2}{v^2} p^2 r(1-r) \lesssim \beta^{-2}$ , dando origem a termos do tipo  $\beta^{-2} a d_{\xi}^2 a^2$  que correspondem aos sólitons de cuspide ("cusped" sólitons) [LS78]. Longe desta região a dinâmica é essencialmente governada pelo termo cúbico.

Devemos, entretanto, chamar a atenção para o fato de que, no caso de instabilidade marginal, outros termos que contribuem para a separação de cargas na mesma ordem de grandeza que o termo mencionado acima, também deveriam ser considerados; correções à flutuação de densidade, por exemplo, geram termos do tipo  $\beta^{-6} a^5$  que por sua vez satisfazem à relação  $\beta^{-6} a^5 \sim \beta^{-2} a d_{\xi}^2 a^2$ . Portanto na equação (21) de [SSY85] não é necessário incluir a contribuição da separação de cargas, pois, como mostramos, não há instabilidade marginal para  $r = 1/2$ ; mas se esta contribuição for incluída como correção de ordem superior, outros termos não lineares da mesma ordem devem também ser considerados.

III-2-4 - Efeitos Cinéticos sobre Sólitons Eletromagnéticos em Plasmas Compostos por Elétrons, Pósitrons e Íons

É conveniente ressaltar que, até o presente momento, sempre baseamos nossa análise de existência dos sólitons eletromagnéticos em modelos de plasmas fluídos. Levando em consideração que a velocidade de cada partícula do plasma pode ser escrita como a soma de uma componente média  $\underline{U}(\underline{r}, t)$  (que seria a velocidade de fluido, comum a todas as partículas presentes em uma região em torno do ponto  $\underline{r}$ ) e de uma componente estocástica  $\delta \underline{v}$  (que seria específica a cada partícula), é intuitivamente aceitável que o mencionado modelo só possa se aplicar efetivamente quando a velocidade do sóliton atender a seguinte condição:

$$\left| \underline{V}_{\text{SOLITON}} - \underline{U} \right| \gg \langle \delta \underline{v}^2 \rangle \quad (\text{III-151})$$

com  $\langle \rangle$  denotando alguma adequada média estatística.

Nos casos em que esta condição não for satisfeita, teorias que de uma maneira ou outra identificam o movimento microscópico das partículas, são imprescindíveis. [MOT85b]

Nesta secção, estudaremos o que acontece quando a equação (III-151) não é satisfeita para a propagação de sólitons eletromagnéticos, à luz de uma teoria cinética adaptada a partir da teoria das ondas BGK [KT73, Da72]. Como veremos, nossa teoria não poderá ser estritamente classificada como uma teoria BGK, já que no nosso caso sempre deveremos ter a velocidade de fase não nula; a semelhança com os modos BGK usuais reside no fato de que toda a informação relevante será extraída do sistema, no referencial definido pelo cancelamento da velocidade de grupo da radiação. Também deve-se observar que nossas soluções não serão moduladas no sentido ortodoxo apresentado pelas equações (III-3). Haverá, no entanto, uma separação clara de escalas espaço-temporais, oriunda do fato de nossas condições de validade exigirem que as partículas, ao interagirem com as ondas de frequência não nula (em geral alta), as "vejam" como aproximadamente homogêneas espacialmente. A teoria será usada no que segue, para plasmas (e,p) não magnetizados, plasmas (e,p) magnetizados moderadamente, plasmas (e,p) fortemente magnetizados e plasmas (e,p,i) fortemente magnetizados. Antes do estudo das ondas eletromagnéticas no entanto, empregaremos a teoria BGK na análise da propagação de ondas eletrostáticas com a finalidade de familiarização com a técnica.

### Ondas Eletrostáticas Não Lineares

Em uma dimensão espacial ( $x$ ), o sistema de equações que descreve o plasma cinético é constituído por duas equações:

$$\partial_t f_\alpha + v \partial_x f_\alpha - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \partial_x \phi \partial_v f_\alpha = 0 \quad (\text{III-152})$$

é a equação de Vlasov eletrostática para a função de distribuição  $f_\alpha (=f_\alpha(x, v, t))$  das partículas do tipo  $\alpha$ , no espaço de fases reduzido (conhecido como espaço  $\mu$ ) descrito por uma coordenada espacial  $x$  e uma coordenada de velocidade  $v$ ;

$$\partial_x^2 \phi = -4\pi \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \quad (\text{III-153})$$

é a equação de Poisson para o potencial elétrico do sistema. A expressão para  $n_\alpha$  é

$$n_\alpha = n_{\alpha 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha dv_\alpha \quad (\text{III-154})$$

e representa simplesmente a densidade de partículas do tipo  $\alpha$  em um ponto do espaço;  $n_{\alpha 0}$  é a densidade de equilíbrio de partículas, o que implica em que a relação a seguir seja válida:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(v, |x| \rightarrow \infty, t) dV = 1 \quad (\text{III-155})$$

Examinando nosso sistema de equações, notamos que, se da equação (III-152), pudermos escrever  $f_\alpha$  como uma função do potencial eletrostático, as relações (III-153) e (III-154) podem ser usadas para que obtenhamos uma equação autoconsistente (e certamente não linear) para  $\phi$ . Para tanto suponhamos que de início sejamos bem sucedidos em encontrar uma constante

de movimento para uma partícula do tipo  $\alpha$  que se desloca no campo  $\phi(x,t)$ . Em outras palavras, suponhamos que exista uma função

$$C = C(x, v, t) \quad (\text{III-156})$$

que não varie ao longo das órbitas  $x(t), v(t)$  da partícula.

Construamos então uma função  $f_\alpha(C)$  que satisfaça à relação (III-155). Apliquemos a seguir sobre  $f_\alpha$ , a derivada temporal completa  $d_t$  que, por definição, representa a variação temporal total da função, à medida que os pontos  $x, v$  acompanham a trajetória da partícula.

Temos então

$$d_t f_\alpha = \left( d_C f_\alpha \right) d_t C = 0, \quad (\text{III-157})$$

onde usamos o fato de que  $C$  é constante sobre as órbitas físicas.

Por outro lado, escrevendo  $f_\alpha = f_\alpha(x, v, t)$  temos:

$$d_t f_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} d_t x + \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} d_t v + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = v \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + \dot{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}, \quad (\text{III-158})$$

que nada mais é do que a expressão do lado esquerdo da relação (III-152). Em outras palavras, a relação  $f_\alpha = f_\alpha(C)$  é exatamente aquela que conecta a função de distribuição ao potencial eletrostático. Conforme o que já havíamos mencionado, esta relação, através da equação (III-154), alimentará o lado direito da equação (III-153) para que obtenhamos a esperada relação de autoconsistência para  $\phi$ .

Nosso problema neste ponto, é o de encontrar as

possíveis formas para a constante de movimento. Com este intuito, escrevamos as equações dinâmicas para o movimento de uma partícula em um campo  $\phi$  :

$$d_t^2 X = - \frac{q_d}{m_d} \partial_x \phi, \quad (\text{III-159})$$

onde  $m_d$  é a massa da partícula e  $q_d$  sua carga. Agora multipliquemos a relação acima por  $dx$  para obter

$$(d_t X) d(d_t X) = - \frac{q_d}{m_d} d\phi. \quad (\text{III-160})$$

A seguir, escrevamos esta relação como

$$d_t \left[ \frac{1}{2} (d_t X)^2 + \frac{q_d}{m_d} \phi \right] = 0, \quad (\text{III-161})$$

para finalmente encontrar a igualdade

$$\frac{1}{2} V^2 + \frac{q_d}{m_d} \phi = C^{te}, \quad (\text{III-162})$$

que define a constante que procurávamos (neste caso a constante de movimento é igual à energia conservada do sistema). Cabe ressaltar que, quando efetuamos a passagem da equação (III-159) para a (III-160), tivemos de supor que  $\phi$  não possuía dependência explícita no tempo, caso contrário não obteríamos a constante de movimento. A implicação deste fato para ondas eletrostáticas é clara - o sistema deve estar em equilíbrio:

$$\partial_t \phi = 0 \Rightarrow \phi = \phi(x)$$

$$\partial_t f_d = 0 \Rightarrow f_d = f_d(x, v).$$

De posse da constante (III-162), o que nos resta fazer é definir funções  $f = f(C)$  de uma maneira adequada a ca

da tipo de sistema estudado. Por exemplo, suponhamos que estejamos considerando um plasma composto por dois tipos de partículas, cujas funções de distribuição sejam dadas por [KT73]:

$$f_{\alpha} = V_{\alpha 0} \delta \left( V^2 + \frac{2 q_{\alpha} \phi}{m_{\alpha}} - V_{\alpha 0}^2 \right) \quad (\text{III-163})$$

$$V_{\alpha 0}^2 > \left| \frac{2 q_{\alpha} \phi_{\text{max}}}{m_{\alpha}} \right| .$$

Este caso envolve apenas partículas que nunca são refletidas pelo potencial  $\phi$ , já que supusemos ser a energia cinética ( $1/2 m v_{\alpha 0}^2$ ) sempre maior do que a máxima energia potencial. Ademais, neste modelo, todas as partículas do tipo  $\alpha$  possuem a mesma energia total.

A equação para  $\phi$  (equação (III-153)) fica com o seguinte aspecto, se considerarmos  $\alpha = (e), (i)$  :

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -4\pi m_0 e \left( \frac{V_{i0}}{\sqrt{V_{i0}^2 - 2e\phi/m}} - \frac{V_{e0}}{\sqrt{V_{e0}^2 + 2e\phi/m}} \right) \quad (\text{III-164})$$

ou

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -d_{\phi} V(\phi) \quad (\text{III-165})$$

com

$$V(\phi) = -4\pi m_0 \left( V_{i0} m_i \sqrt{V_{i0}^2 - 2e\phi/m} + V_{e0} m_e \sqrt{V_{e0}^2 + 2e\phi/m} \right)$$

designando o potencial de Sagdeev.

Uma típica solução  $\phi$  oscila entre os pontos  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Esta solução está sujeita à condição de ausência de reflexão  $\frac{1}{2} m_i v_{i0}^2 > |e\phi_2|$ ,

$\frac{1}{2} m_e v_{e0}^2 > |e\phi_1|$  e para pequenos valores de  $\phi$  ela pode ser

obtida analiticamente. Expandindo a equação (III-164) em  $\phi$ ,

$$d_x^2 \phi = -4\pi m_0 e^2 \left( \frac{1}{m_i v_{i0}^2} + \frac{1}{m_e v_{e0}^2} \right) \phi \quad (\text{III-166})$$

$$\lambda_D^2 d_x^2 \phi = -\phi$$

onde  $\lambda_D^2 = (4\pi n_{oe}^2)^{-1} \left( \frac{1}{m_i v_{i0}^2} + \frac{1}{m_e v_{e0}^2} \right)^{-1}$  define a escala de comprimentos do problema.

A solução da equação (III-166) é, enfim

$$\phi = \phi_{\max} \text{sen} \lambda_D x. \quad (\text{III-167})$$

Ela representa uma onda senoidal estacionária no sistema de referência no qual os elétrons se movem com velocidade  $v_{e0}$  e os íons com velocidade  $v_{i0}$ . Contudo, quando observado em um referencial que se desloca com velocidade  $v_0$  em relação a esse em que estivemos trabalhando, o equilíbrio BGK se manifesta como uma onda com comprimento de onda  $2\pi\lambda_D^{-1}$  e com frequência não nula  $\lambda_D v_0$ . De fato, toda a discussão sobre estados de equilíbrio pode ser aplicada a problemas com dependência temporal, se eles são estacionários em algum referencial.

Uma grande variedade de ondas BGK pode ser construída se a função de distribuição inclui partículas que possam ser confinadas pelo potencial eletrostático. Nestes casos a construção das densidades de partículas deve ser feita de uma maneira mais cautelosa.

Suponhamos por exemplo que a situação seja tal que dispomos de um plasma eletrônico para o qual estamos interessados em obter soluções para o potencial  $\phi$  na forma esquematizada da figura III-7.

Se longe do poço a função de distribuição é, digamos,  $f_t(v^2)$  (usaremos o índice  $c$  para partículas confina-

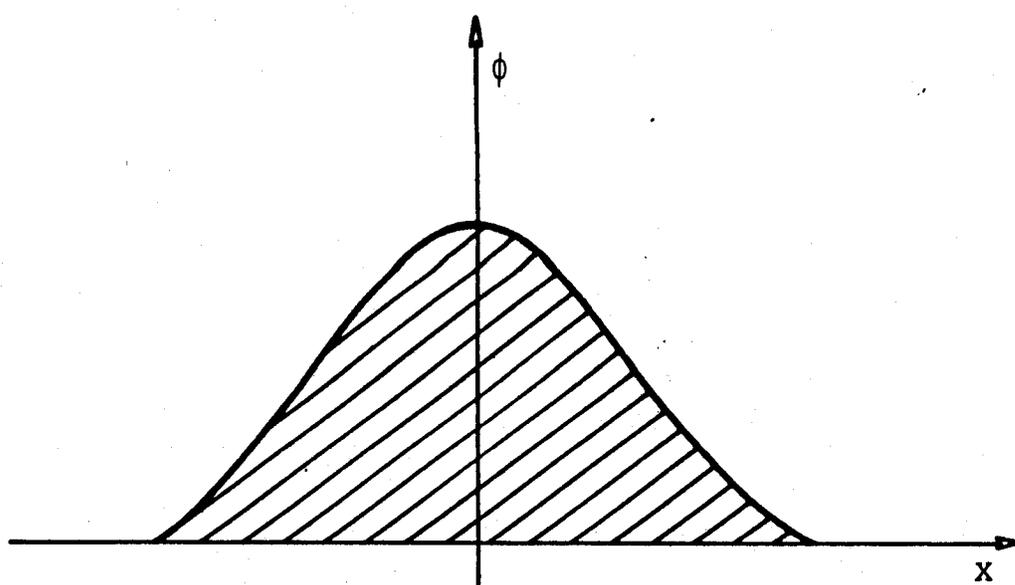


Figura III-7 - Potencial  $\phi$  como uma função da posição, com indicação (hachurado) da região de confinamento de elétrons (parcialmente copiado de [KT73]).

das pelo potencial e  $t$  para as transmitidas) ; em suas vizinhanças ela passa a ser  $f_t(V^2 + \frac{2e\phi}{m})$ ,  $V^2 > -\frac{2e\phi}{m}$ ; isto dá conta das partículas livres. Estamos no entanto face a um novo problema, que é o de considerar partículas confinadas no poço de potencial - longe do poço elas não contribuem para a densidade, mas perto dele devemos introduzir a função de distribuição  $f_c(V^2 + \frac{2e\phi}{m})$  com  $V^2 < -\frac{2e\phi}{m}$ . Nestes moldes, a densidade de partículas confinadas passa a ser escrita como:

$$n_c = 2 n_{oc} \int_0^{\sqrt{-2e\phi/m}} f_c(v) dv \quad (\text{III-168})$$

enquanto a das partículas livres se lê como:

$$n_t = 2 n_{ot} \int_{\sqrt{-2e\phi/m}}^{\infty} f_t(v) dv, \quad (\text{III-169})$$

onde o fator 2 é resultado da suposta simetria da função  $f$ .

A equação para o potencial eletrostático é finalmente expressa como:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -8\pi e \left[ n_{oc} \int_0^{\sqrt{-2e\phi/m}} f_c dv + n_{ot} \int_{\sqrt{-2e\phi/m}}^{\infty} f_t dv \right]. \quad (\text{III-170})$$

Não estudaremos em detalhe as propriedades das soluções da equação (III-170). Relembramos no entanto que alguma destas propriedades já foram usadas no capítulo II quando de nosso estudo dos sôlitons íon-acústicos; reexaminando este capítulo deve ficar bastante clara a importância da inclusão dos efeitos cinéticos.

Passemos então ao objetivo específico deste capítulo, qual seja, o de estudar os fenômenos de reflexão e confinamento de partículas de um plasma por ondas eletromagnéticas.

Evidentemente a técnica exposta anteriormente deverá ser devidamente adequada aos nossos propósitos, já que não mais estaremos lidando com ondas eletrostáticas.

### Caso de Plasma Elétron-Pósitron Não Magnetizado

Suponhamos que uma onda eletromagnética circularmente polarizada se propague ao longo do eixo  $x$  em um plasma não magnetizado de elétrons e pósitrons, sendo descrita pelo potencial transversal  $\underline{A}(x,t) = \underline{a}(x,t) e^{i(kx - \omega t)} + c.c. =$   
 $= a(x,t) (\hat{y} - i\hat{z}) e^{i(kx - \omega t)} + c.c.$ , onde consideramos a possibilidade de lentas modulações na amplitude  $a$ .

O sistema de equações que descreve o problema é, dentro do espírito de uma teoria cinética:

-equação da onda

$$\left( \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 \right) \underline{A} = 4\pi c \underline{J} \quad (\text{III-171})$$

com  $\underline{J} = \sum_{\alpha} n_{\alpha 0} q_{\alpha} \int \underline{V} f_{\alpha}(\underline{x}, \underline{p}, t) d^3 p ;$

-equação de Vlasov para a função  $f_{\alpha}$

$$d_t f_{\alpha}(\underline{x}, \underline{p}, t) = 0 \quad (\text{III-172})$$

ao longo das órbitas

$$d_t \underline{x} = \frac{\underline{p}}{m_{\alpha} \gamma} = \underline{V} \quad (\text{III-173})$$

$$d_t \underline{p} = \frac{q_{\alpha}}{c} \left( -\partial_t \underline{A} + \underline{V} \times \nabla \times \underline{A} \right)$$

onde consideramos uma dinâmica relativística para a qual intro-

duzimos  $\gamma = \left( 1 + \frac{p^2}{m_{\alpha}^2 c^2} \right)^{1/2}$ .

Ademais, podemos mencionar que a equação (III-171) é a análoga da equação (III-153) e a equação (III-172) a análoga da equação (III-152). A ausência de potenciais eletrostáticos é uma antecipação do fato de que as soluções neste caso referem-se à uma dinâmica que não gera separação de cargas; isto não se manterá como verdade quando incluirmos os campos magnéticos externos.

A componente transversal (ao eixo x) da equação (III-173) é:

$$d_t \underline{p}_\perp + \frac{q_d}{c} (\partial_t + V_x \partial_x) \underline{A} = 0. \quad (\text{III-174})$$

Identificando o termo entre parênteses como a derivada temporal total ao longo da órbita da partícula, podemos então escrever

$$\underline{p}_\perp + \frac{q_d}{c} \underline{A} = \underline{C}_{\perp 1}, \quad (\text{III-175})$$

onde  $\underline{C}_{\perp 1}$  é um vetor transversal constante. Considerando  $\underline{C}_{\perp 1} = 0$ , a componente paralela da equação (III-173) nos fornece a seguinte relação:

$$d_t p_{\parallel} = -4 \frac{e^2/c^2}{m(1+p^2/m^2c^2)^{1/2}} a \partial_x a. \quad (\text{III-176})$$

Multiplicando (III-176) por  $dx$ , ficamos com

$$V_{\parallel} dp_{\parallel} = -\frac{2e^2}{mc^2} \left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{-1/2} da^2, \quad (\text{III-177})$$

o que pode ser reescrito como

$$\left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{-1/2} \frac{p_{\parallel} dp_{\parallel}}{m} = -\left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{-1/2} \frac{2e^2}{mc^2} da^2 \quad (\text{III-178})$$

ou como

$$p_{\parallel}^2 + 4 \frac{e^2}{c^2} a^2 = C_2, \quad (\text{III-179})$$

definindo portanto a nossa outra constante de movimento; que o

nosso problema possua três constantes independentes não é surpreendente, pois o movimento das partículas se dá em três dimensões espaciais.

Construindo a função de distribuição a partir das constantes de movimento das partículas, mas mantendo em vigor a restrição  $C_{\perp} = 0$  obtemos:

$$f_{\alpha}(p_{\perp}, p_{\parallel}) = Q_{\alpha} \delta(p_{\perp} + \frac{q_{\alpha} A}{c}) f_{\alpha\parallel}(p_{\parallel}) \quad (\text{III-180})$$

onde  $Q_{\alpha}$  é um fator de normalização definido de tal forma que

$$n_{\alpha}(x, t) = n_{\alpha 0} \int f_{\alpha} d^3 p \quad (\text{III-181})$$

Uma rápida consulta à equação (III-180) nos mostra que do ponto de vista das partículas, agora estamos em face a um problema unidimensional; a dinâmica transversal é puramente determinada pela onda, enquanto que  $p_{\parallel}$  é análogo a  $v_{\parallel}$  do caso eletrostático e  $a^2$  desempenha o mesmo papel que  $\phi$ . Neste contexto o "potencial"  $a^2$  também é conhecido como potencial ponderomotriz.

Da mesma forma que para o caso eletrostático, aqui a amplitude da onda eletromagnética não pode depender do tempo para que a teoria seja aplicável. Suponhamos então que a forma da função estacionária  $a^2(x)$  seja análoga à da fig. III-7. Surge naturalmente a necessidade de discriminar entre as partículas que atravessam a barreira de potencial (veja a equação (III-179) para verificar que o potencial é de fato uma barreira) e as que são refletidas por ela. Começemos por analisar o sistema quando  $|x| \rightarrow +\infty$  designando por  $r$  as partículas refletidas.

Se  $\frac{p_{||}^2}{m^2 c^2} > 4 \frac{e^2}{m^2 c^4} a_0^2$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , e se o mo-

vimento tem o sentido de  $a^2$  crescente, as partículas cruzam a barreira de potencial. Para estas, escrevamos a função de distribuição, supondo equilíbrio térmico em relação ao eixo  $x$

$$f_{\alpha t} = Q_{\alpha t} \delta(p_{\perp}) \exp \left[ - \left( \sqrt{1 + \frac{p_{||}^2}{m^2 c^2}} - 1 \right) \frac{m^2 c^2}{p_{\perp}^2} \right]; \quad (\text{III-182})$$

Se  $\frac{p_{||}^2}{m^2 c^2} < 4 \frac{e^2}{m^2 c^4} a_0^2$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , as partícu

las que viajam em direção ao pico  $a_0$  serão refletidas pela barreira. Para estas escrevemos

$$f_{\alpha n} = Q_{\alpha n} \delta(p_{\perp}) \exp \left[ - \left( \sqrt{1 + \frac{p_{||}^2}{m^2 c^2}} - 1 \right) \frac{m^2 c^2}{p_{\perp}^2} \right]. \quad (\text{III-183})$$

Em ambos os casos introduzimos momentos térmicos (análogos às velocidades térmicas para partículas não relativísticas)  $p_r, p_t$ , supondo que a temperatura não dependa do tipo de partícula considerada; conseqüentemente passaremos a omitir o subíndice  $\alpha$  em  $Q_{\alpha}$ .

O uso de funções de distribuição descontínuas como aquela representada por (III-182) e (III-183), pode não estar bem justificado para sistemas que envolvam a equação de Vlasov (veja por exemplo [Sc86]). Contudo, continuaremos a trabalhar com estas formas relativamente simples para que não nos envolvamos com complexidades matemáticas nesta primeira abordagem do problema. Do ponto de vista físico, ao usar as equações (III-182) e (III-183) estamos de fato exigindo que as escalas de tempo as

sociadas à equação de ondas solitárias sejam mais curtas do que aquelas conectadas aos processos colisionais induzidos pelas derivadas "infinitas" de  $f$  (nos seus pontos de descontinuidade) no espaço de fases.

Para valores arbitrários de  $x$ , as funções devem ser escritas mediante o uso das constantes de movimento derivadas na equação (III-179):

$$f_{\alpha t} = Q_t \delta \left( p_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{c} A \right) \exp \left\{ - \left[ \sqrt{1 + \frac{p_{\parallel}^2}{m^2 c^2} + \frac{4e^2 a^2}{m^2 c^4}} - 1 \right] \frac{m^2 c^2}{p_{\alpha}^2} \right\}, \quad (\text{III-184})$$

$$\forall p_{\alpha}, \frac{p_{\parallel}^2}{m^2 c^2} > \frac{4e^2}{m^2 c^4} (a_0^2 - a^2);$$

$$f_{\alpha r} = Q_r \delta \left( p_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{c} A \right) \exp \left\{ - \left[ \sqrt{1 + \frac{p_{\parallel}^2}{m^2 c^2} + \frac{4e^2 a^2}{m^2 c^4}} - 1 \right] \frac{m^2 c^2}{p_{\alpha}^2} \right\}, \quad (\text{III-185})$$

$$\forall p_{\alpha}, \frac{p_{\parallel}^2}{m^2 c^2} < \frac{4e^2}{m^2 c^4} (a_0^2 - a^2).$$

Com estas relações aplicadas à equação da onda, equação (III-171), obtemos para o caso estacionário,  $kc^2/\omega = 0$ ,

$$c^2 \frac{d}{dx} a = -\omega^2 a + \frac{16\pi e^2}{m} a \left\{ n_{or} \int_r \frac{Q_r \exp \left\{ - \left[ \left( 1 + \frac{p_{\parallel}^2}{m^2 c^2} + \frac{4e^2 a^2}{m^2 c^4} \right)^{1/2} - 1 \right] \frac{m^2 c^2}{p_r^2} \right\}}{\left( 1 + \frac{p_{\parallel}^2}{m^2 c^2} + \frac{4e^2 a^2}{m^2 c^4} \right)^{1/2}} dp_{\parallel} \right. \\ \left. + n_{ot} \int_t \frac{Q_t \exp \left\{ - \left[ \left( 1 + \frac{p_{\parallel}^2}{m^2 c^2} + \frac{4e^2 a^2}{m^2 c^4} \right)^{1/2} - 1 \right] \frac{m^2 c^2}{p_t^2} \right\}}{\left( 1 + \frac{p_{\parallel}^2}{m^2 c^2} + \frac{4e^2 a^2}{m^2 c^4} \right)^{1/2}} dp_{\parallel} \right\} \quad (\text{III-186})$$

onde

$$\int_r \equiv \int_0^{\infty} \frac{4|e|}{c} (a_0^2 - a^2)^{1/2} e \int_t \equiv \int_{-\infty}^0 \frac{4|e|}{c} (a_0^2 - a^2)^{1/2}$$

A partir deste ponto nos restringiremos ao uso de temperaturas não relativísticas ( $\frac{p_{r,t}}{mc} \ll 1$ ). Este limite além de nos oferecer uma série de vantagens analíticas não nos impede, como veremos, de examinar ondas de amplitude relativística, o que por si já é um efeito de grande importância no estudo da

radiação de pulsares. Deve-se mencionar que o uso de temperaturas não relativísticas tem se mostrado útil em uma série de modelos já empregados na literatura (ver por exemplo [MP87]).

Por conseguinte, se o limite  $p_{r,t}/mc \ll 1$  for usado em (III-186), a primeira consequência flagrante é que todos os integrandos que lá aparecem serão pequenos quando  $\frac{p_{r,t}^2}{m^2 c^2} \gg 1$  ou quando  $\frac{4e^2 a^2}{m^2 c^4} \gg 1$ . Isto nos permite expandir os radicais, nas regiões onde os seus argumentos contribuem efetivamente. Feito isto, ficamos com a seguinte expressão:

$$c^2 \frac{d^2 a}{dx^2} = -w^2 a + \frac{16\sqrt{\pi} e^2}{m} a \left[ m_{0r} e^{-\alpha_r a^2} \int_0^{\sqrt{\alpha_r (a_0^2 - a^2)}} e^{-u^2} du + m_{0t} e^{-\alpha_t a^2} \int_0^{\sqrt{\alpha_t (a_0^2 - a^2)}} e^{-u^2} du \right] \quad \text{(III-187)}$$

ou

$$c^2 \frac{d^2 a}{dx^2} = -w^2 a + \frac{16\sqrt{\pi} e^2}{m} a \left[ m_{0r} e^{-\alpha_r a^2} \int_0^{\sqrt{\alpha_r (a_0^2 - a^2)}} e^{-u^2} du + m_{0t} e^{-\alpha_t a^2} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\sqrt{\alpha_t (a_0^2 - a^2)}} e^{-u^2} du \right) \right],$$

onde  $\alpha_{r,t} \equiv \frac{2e^2}{c^2} \frac{1}{P_{r,t}}$  com  $Q_{r,t}$  calculado no limite não re-

lativístico;  $Q_{r,t} = (\sqrt{2\pi} P_{r,t})^{-1}$ .

Examinemos agora dois limites interessantes que provêm da equação (III-187):

a) Ondas localizadas de pequena amplitude:

$$\alpha_{r,t} a_0^2 \ll 1. \quad \text{(III-188)}$$

Com (III-188) em vigor, escrevamos a equação (III-187) na aproximação mais elementar, usando uma expansão de primeira ordem das integrais:

$$c^2 \frac{d^2 a}{dx^2} = \left( \frac{8\pi n_{ot} e^2}{m} - \omega^2 \right) a + \frac{16\sqrt{\pi} e^2}{m} a \sqrt{a_0^2 - a^2} (n_{on} \sqrt{d_n} - n_{ot} \sqrt{d_t}). \quad (\text{III-189})$$

O potencial efetivo associado a este "oscilador não linear", de finido através de

$$\frac{d^2 a}{dx^2} = -\frac{\partial U(a)}{\partial a}$$

é:

$$c^2 U = \frac{1}{2} \left( \omega^2 - \frac{8\pi n_{ot} e^2}{m} \right) a^2 + \frac{16\sqrt{\pi} e^2}{3m} (n_{on} \sqrt{d_n} - n_{ot} \sqrt{d_t}) \left[ (a_0^2 - a^2)^{3/2} - |a_0|^3 \right]. \quad (\text{III-190})$$

Para que haja a formação de sôlitons de amplitude  $a_0$ , as condições abaixo devem ser respeitadas:

a "força" -  $\frac{\partial U}{\partial a}$  deve ser negativa quando  $a \rightarrow a_0$ :

$$\delta = \omega^2 - \frac{8\pi n_{ot} e^2}{m} > 0; \quad (\text{III-191})$$

o potencial efetivo deve ser convexo quando  $a \rightarrow 0$

$$\delta - \frac{16\sqrt{\pi} e^2 |a_0|}{m} (n_{on} \sqrt{d_n} - n_{ot} \sqrt{d_t}) < 0; \quad (\text{III-192})$$

o potencial deve ser nulo quando  $a = a_0$

$$\frac{1}{2} \delta - \frac{16\sqrt{\pi} e^2}{3m} (n_{on} \sqrt{d_n} - n_{ot} \sqrt{d_t}) |a_0| = 0, \text{ o que implica em}$$

$$|a_0| = \frac{\delta}{2} \left[ \frac{16\sqrt{\pi} e^2}{3m} (n_{on} \sqrt{d_n} - n_{ot} \sqrt{d_t}) \right]^{-1}. \quad (\text{III-193})$$

Destas condições, vemos que o deslocamento de frequência  $\delta$  deve ser positivo, (III-191), e que de fato deve haver alguma assimetria entre partículas refletidas e transmitidas para a existência do sôliton, pois da equação (III-193) ou (III-192) emerge a condição

$$n_{0r} \sqrt{d_r} > n_{0t} \sqrt{d_t} . \quad (\text{III-194})$$

Visto este ponto, passemos ao estudo da existência de ondas super-intensas no nosso plasma elétron-positrônico.

b) Ondas localizadas de grande amplitude:

$$\alpha_{r,t} a_0^2 \gg 1 . \quad (\text{III-195})$$

Quando a equação (III-195) é satisfeita, as integrais presentes na segunda das equações (III-187) podem ter o limite superior substituído por  $\infty$ , enquanto  $a(x)$  não estiver contido no intervalo para o qual  $a^2 - a_0^2 \sim \alpha_{r,t}^{-1}$ . Este intervalo, no entanto, é suficientemente pequeno (e sua contribuição vem multiplicada por um fator pequeno do tipo  $e^{-\alpha_{r,t} a_0^2}$ ) para que influa no cálculo do potencial efetivo que envolve integrações no espaço das amplitudes. Estes fatos permitem que evitemos o uso de funções exponenciais complicadas para a obtenção de soluções do problema.

Especificamente, quando  $\alpha_{r,t} a^2 \gg 1$ , a equação (III-187) assume a forma

$$c^2 \frac{d^2 a}{dx^2} = -\omega^2 a + \frac{8\pi e^2}{m} n_{0r} a e^{-\alpha_r a^2} + O(a_0 e^{-\alpha_t a_0^2}) \quad (\text{III-196})$$

de onde extraímos

$$c^2 U = \frac{1}{2} \omega^2 a^2 + \frac{4\pi n_{0r} e^2}{m \alpha_r} \left( e^{-\alpha_r a^2} - 1 \right) + O\left( \frac{1}{\alpha_t} e^{-\alpha_t a^2} \right) . \quad (\text{III-197})$$

Aplicando à forma (III-197) as condições de localização já usadas na análise de ondas de pequena amplitude, te-

MOS:

"força" em  $a = a_0$  negativa

$$-W^2 < 0, \quad (\text{III-198})$$

a qual é trivialmente satisfeita;

"potencial" convexo para  $a > 0$

$$\bar{\delta} = \left( W^2 - \frac{8\pi n_0 n e^2}{m} \right) < 0; \quad (\text{III-199})$$

"potencial" nulo quando  $a = a_0$  o que, supondo  $\alpha a_0^2 \gg 1$  e usando a relação (III-197) fornece

$$\alpha_0^2 = \frac{8\pi n_0 n e^2}{m d_n W^2}. \quad (\text{III-200})$$

A compatibilidade das equações (III-200) e (III-195)

exige que

$$W^2 \ll \frac{8\pi n_0 n e^2}{m},$$

o que não invalida a condição (III-199).

Da expressão (III-200) obtém-se

$$\frac{e^2 a_0^2}{m^2 c^4} = \frac{4\pi n_0 n e^2}{m W^2} \left( \frac{P_{n,t}}{m^2 c^2} \right)^2 \quad (\text{III-201})$$

pela qual vemos que basta a desigualdade

$$\frac{W^2}{\left( \frac{4\pi n_0 n e^2}{m} \right)} \ll \left( \frac{P_{n,t}}{mc} \right)^2 \quad (\ll 1) \quad (\text{III-202})$$

ser satisfeita para que tenhamos ondas de amplitude relativística definidas pela condição  $\frac{ea_0}{2} \gg 1$ .

As ondas representadas pela relação (III-200) ex-

pelem partículas de suas imediações, criando uma bolha de vácuo no interior do plasma. A densidade no interior da bolha é mínima, dada por

$$\frac{n_n(a \sim a_0)}{n_{0n}} \sim e^{-\frac{1}{2} a_0^2} \ll 1. \quad (\text{III-203})$$

Para o caso de ondas de pequena amplitude, a principal componente do plasma é formada pelas partículas transmitidas, já que o potencial ponderomotriz neste caso é pouco capaz de refletir partículas. Em ondas de grande amplitude, a componente fundamental é a das partículas refletidas, em vista do fato de que poucas são capazes de atravessar a barreira.

Ainda chamamos a atenção para o fato de que os sôlitons de pequena amplitude tem sua freqüência maior do que a de plasma total ( $\omega_{\text{ptotal}}^2 = 2 \times \frac{4\pi n_0 e^2}{m}$ ); em contrapartida, os sôlitons de grande amplitude tem sua freqüência menor do que a de plasma (ver equação (III-199)).

#### Caso de Plasma Elétron-Pósitron Magnetizado

Suponhamos que um campo magnético externo  $\underline{B}_0$  se já aplicado ao longo do eixo x de nosso sistema. A equação de momentum (III-174), considerada na aproximação não relativística tem sua componente transversal dada por:

$$d_t \left( \underline{V}_\perp + \frac{q_d}{mc} A \right) = -i \frac{q_d}{mc} \underline{V}_\perp B_0 \quad (\text{III-204})$$

onde escrevemos  $\underline{V} = \underline{V}_\perp (\hat{y} - i\hat{z}) + \text{c.c.}$ ,  $A \equiv a e^{-i\omega t}$  e  $d_t \equiv \partial_t + v_{\perp} \partial_x$

Nota-se que se  $\underline{B}_0 \neq 0$  a constante que havíamos encontrado no tratamento anterior não existe. Embora isto nos

impeça de resolver o problema exatamente, suponhamos que o sólito seja tão largo que a condição abaixo seja satisfeita:

$$\partial_t \ll V_x \partial_x. \quad (\text{III-205})$$

Sob a restrição (III-205) (que será confirmada mais tarde), e escrevendo  $\bar{V}_\perp = V_\perp e^{-i\omega t}$ , obtemos da equação (III-204)

$$V_\perp + \frac{q_\alpha A}{m c (1 - \beta_\alpha)} = 0 \quad (\text{III-206})$$

com  $\beta_\alpha = \frac{\Omega_\alpha}{\omega} = \frac{q_\alpha B_0}{m \omega c}$ .

Da componente  $x$  (ou paralela a  $B_0$ ) da equação de momentum, com o uso da equação (III-206) e incluindo um potencial eletrostático em baixas frequências chegamos às expressões seguintes:

$$d_t V_{||} = \frac{q_\alpha}{m c} (\vec{v}_\perp \times \nabla \times \vec{A})_x - \frac{q_\alpha}{m} \partial_x \phi \quad (\text{III-207})$$

$$d_t V_{||} = - \frac{2 e^2}{m^2 c^2 (1 - \beta_\alpha)} \partial_x a^2 - \frac{q_\alpha}{m} \partial_x \phi,$$

que podem ser integradas para que obtenhamos

$$V_{||}^2 + \frac{4 e^2}{m^2 c^2 (1 - \beta_\alpha)} a^2 + \frac{2 q_\alpha}{m} \phi = C, \quad (\text{III-208})$$

onde  $C$  é a constante associada ao movimento paralelo. Note-se que o potencial ponderomotriz da equação (III-208) depende da carga da partícula através do fator  $\beta_\alpha$ . Desta forma a dinâmica longitudinal para elétrons e pósitrons será diferente, podendo ocorrer separação de cargas; isto implica naturalmente na presença do potencial eletrostático na equação (III-208). A sepa-

ração de cargas em um plasma magnetizado composto por partículas de mesma massa é portanto uma consequência da assimetria da força ponderomotriz em relação ao sinal da carga das partículas. Esta assimetria por sua vez é decorrência do fato de que a órbita transversal destas partículas em uma onda circular com polarização definida (à direita ou à esquerda) depende não linearmente desta carga elétrica (ver equação. (III-206)). Se por exemplo,  $\beta_e > 0$ , já  $\beta_p (= -\beta_e) < 0$ , pode-se ver que o módulo da velocidade dos elétrons será menor do que o da velocidade dos pósitrons.

Passemos agora à obtenção da equação da onda para  $a(x)$ . Precisaremos, antes de mais nada, definir as funções de distribuição para elétrons e pósitrons. Escrevendo estas funções em termos de  $p$  ( $=mv$ ) e fixando-nos no caso particular dado pela equação (III-206), obtemos formas análogas àquelas referentes ao plasma não magnetizado:

$$\text{se } v_{||}^2 > \left( \frac{4e^2 a^2}{m^2 c^2 (1-\beta_\alpha)} + \frac{2q_\alpha}{m} \phi \right)_{\max} \quad (\text{III-209})$$

$$f_\alpha = f_{\alpha t} = Q_t \delta(p_\perp) e^{-\frac{p_{||}^2}{2p_t^2}}, \quad |x| \rightarrow \infty;$$

$$\text{se } v_{||}^2 < \left( \frac{4e^2 a^2}{m^2 c^2 (1-\beta_\alpha)} + \frac{2q_\alpha}{m} \phi \right)_{\max} \quad (\text{III-210})$$

$$f_\alpha = f_{\alpha n} = Q_n \delta(p_\perp) e^{-\frac{p_{||}^2}{2p_n^2}}, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Evidentemente a classificação das partículas em transmitidas ou refletidas só é válida se o "potencial" total

$$\frac{1}{m^2} \tilde{\phi}_\alpha \equiv \frac{4e^2 a^2}{m^2 c^2 (1-\beta_\alpha)} + \frac{2q_\alpha}{m} \phi \quad \text{for sempre positivo! Mostraremos que}$$

isto acontece se  $|\beta| < 1$ ; veremos que quando considerarmos  $|\beta| > 1$ , algumas transformações radicais ocorrerão.

Escrevamos agora as funções de distribuição para  $|x|$  finito:

$$\text{se } m^2 v_{||}^2 > \tilde{\phi}_{\alpha \max} - \tilde{\phi}_\alpha,$$

$$f_d = f_{dt} = Q_t \delta\left(P_{||} + \frac{q_\alpha A}{c}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2P_t^2} \left[P_{||}^2 + \frac{4e^2}{c^2(1-\beta_\alpha)} a^2 + 2q_\alpha m \phi\right]\right\}; \quad (\text{III-211})$$

$$\text{se } m^2 v_{||}^2 < \tilde{\phi}_{\alpha \max} - \tilde{\phi}_\alpha,$$

$$f_d = f_{dn} = Q_n \delta\left(P_{||} + \frac{q_\alpha A}{c}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2P_n^2} \left[P_{||}^2 + \frac{4e^2}{c^2(1-\beta_\alpha)} a^2 + 2q_\alpha m \phi\right]\right\}. \quad (\text{III-212})$$

Usando estas fórmulas na equação da onda obtemos

$$c^2 \frac{d^2 a}{dx^2} = -\omega a + \frac{8\sqrt{\pi} e^2 a}{m} \left\{ m_{0n} \left( \frac{e^{-\tilde{\phi}_e/2P_n^2}}{1-\beta} \int_0^{\left(\frac{\tilde{\phi}_{e0}-\tilde{\phi}_e}{2P_n^2}\right)^{1/2}} e^{-u^2} du + \right. \right. \quad (\text{III-213})$$

$$\left. \frac{e^{-\tilde{\phi}_p/2P_n^2}}{1+\beta} \int_0^{\left(\frac{\tilde{\phi}_{p0}-\tilde{\phi}_p}{2P_n^2}\right)^{1/2}} e^{-u^2} du \right) + m_{0t} \left( \frac{e^{-\tilde{\phi}_e/2P_t^2}}{1-\beta} \int_0^{\left(\frac{\tilde{\phi}_{e0}-\tilde{\phi}_e}{2P_t^2}\right)^{1/2}} e^{-u^2} du + \frac{e^{-\tilde{\phi}_p/2P_t^2}}{1+\beta} \int_0^{\left(\frac{\tilde{\phi}_{p0}-\tilde{\phi}_p}{2P_t^2}\right)^{1/2}} e^{-u^2} du \right) \right\}.$$

A equação (III-213) não é suficiente para a solução do problema, pois é uma relação entre duas incógnitas  $\phi$  e  $a$ . Como já supusemos que os sólitons são bastante largos, podemos implementar a idéia de quase neutralidade, pois a separação

de cargas, que é proporcional à segunda derivada espacial de  $\phi$ , é pequena. As relações de quase neutralidade podem ser escritas como  $n_e = n_p$ , ou, usando as devidas funções de distribuição,

$$n_{0n} e^{-\tilde{\phi}_e/2P_n^2} \int_0^{\left(\frac{\tilde{\phi}_{ec}-\tilde{\phi}_e}{2P_n^2}\right)^{1/2}} e^{-u^2} du + n_{0t} e^{-\tilde{\phi}_e/2P_t^2} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du =$$

$$n_{0n} e^{-\tilde{\phi}_p/2P_n^2} \int_0^{\left(\frac{\tilde{\phi}_{po}-\tilde{\phi}_p}{2P_n^2}\right)^{1/2}} e^{-u^2} du + n_{0t} e^{-\tilde{\phi}_p/2P_t^2} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du.$$

(III-214)

Desta última expressão vemos que basta tomar  $\tilde{\phi}_e = \tilde{\phi}_p$  ( $\equiv \tilde{\phi}$ ) para que a condição de quase neutralidade seja satisfeita.

Temos então:

$$\frac{4e^2}{c^2} \frac{a^2}{1-\beta} + 2me\phi = \frac{4e^2}{c^2} \frac{a^2}{1+\beta} - 2me\phi,$$

(III-215)

de onde obtemos:

$$\phi = -\frac{2e}{mc^2} \frac{\beta}{1-\beta^2} a^2$$

(III-216)

e

$$\tilde{\phi} = \frac{4e^2}{c^2} \frac{a^2}{1-\beta^2}.$$

(III-217)

Note-se que quando  $\beta^2 < 1$ , o potencial total é do tipo repulsivo, como já havíamos suposto.

Usando estas últimas informações, podemos escrever a equação da onda na forma:

$$c^2 \frac{d^2 a}{dx^2} = -w^2 a + \frac{16\sqrt{\pi}e^2}{m} a \left\{ n_{0n} \frac{e^{-\tilde{a}_n a^2}}{1-\beta^2} \int_0^{\left[\tilde{a}_n(a_0^2 - a^2)\right]^{1/2}} e^{-u^2} du + \right.$$

$$\left. n_{0t} \frac{e^{-\tilde{a}_t a^2}}{1-\beta^2} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\left[\tilde{a}_t(a_0^2 - a^2)\right]^{1/2}} e^{-u^2} du \right] \right\}$$

(III-218)

com 
$$\alpha_{n,t}^1 = (1-\beta^2)^{-1/2} \alpha_{n,t}.$$

Esta equação pode ser identificada com a equação (III-187) desde que façamos as seguintes associações:

$$\begin{aligned} \alpha^1 &\longleftrightarrow \alpha \\ \frac{m_0}{1-\beta^2} &\longleftrightarrow m_0. \end{aligned} \tag{III-219}$$

Podemos então usar os resultados referentes ao caso não magnetizado para a obtenção das condições de existência de ondas solitárias.

a) Ondas de pequena amplitude,

$$\alpha_{n,t}^1 a_0^2 \ll 1. \tag{III-220}$$

As condições de localização são obtidas das expressões (III-191)-(III-194)

$$\delta^1 = \omega^2 - \frac{8\pi n_{0t} e^2}{m(1-\beta^2)} > 0 \tag{III-221}$$

$$\delta^1 - \frac{16\sqrt{\pi} e^2 |a_0|}{m(1-\beta^2)^{3/2}} (n_{0n} \sqrt{d_n} - n_{0t} \sqrt{d_t}) < 0 \tag{III-222}$$

$$|a_0| = \frac{\delta^1}{2} \left[ \frac{16\sqrt{\pi} e^2}{3m(1-\beta^2)^{3/2}} (n_{0n} \sqrt{d_n} - n_{0t} \sqrt{d_t}) \right]. \tag{III-223}$$

Das equações acima vemos que, se a segunda condição for satisfeita sem campos externos, continuará a sê-lo com estes campos; em um certo sentido, ela não é alterada. A primeira condição no entanto pode ser invalidada pela inclusão do campo. A conclusão é a de que campos externos que satisfaçam  $\beta^2 < 1$ , de uma maneira geral dificultam a formação de ondas não li-

neares localizadas no plasma.

b) Ondas de grande amplitude

$$\frac{1}{n_{i,t}} a_0^2 \gg 1. \quad (\text{III-224})$$

Com o mesmo procedimento utilizado em a), obtêm-se

$$-W^2 < 0 \quad (\text{III-225})$$

$$\bar{\delta}' = W^2 - \frac{8\pi n_{0r} e^2}{m(1-\beta^2)} < 0 \quad (\text{III-226})$$

$$a_0^2 = \frac{8\pi n_{0r} e^2}{m d_{r,t} W^2}. \quad (\text{III-227})$$

Como pode-se ver, as condições de localização neste caso são bastante diferentes daquelas referentes às ondas de pequena amplitude. Aqui, se a condição (III-226) é satisfeita na ausência do campo externo, continuará a sê-lo, com mais facilidade, em sua presença, sendo a amplitude totalmente insensível a ele.

Para sumarizar, ressaltamos que para ondas de pequena amplitude, o campo magnético possui uma característica "nôciva" em relação à presença das ondas solitárias; ele pode aniquilar ondas que existam em sua ausência. No caso de ondas muito intensas o campo facilita a criação de estruturas localizadas.

A condição de existência de ondas ultra relativísticas é agora escrita como:  $\omega^2 \lesssim \frac{4\pi n_{0r} e^2}{m} \left(\frac{p_{r,t}}{mc}\right)^2$ , que é idêntica à (III-202) de onde obtemos:

$$\frac{W}{W_p} \lesssim \frac{P_{n,t}}{mc}, \quad W_p^2 = \frac{8\pi n_{0r} e^2}{m}. \quad (\text{III-228})$$

Por outro lado, nossa teoria está amplamente baseada na aproximação  $\omega a \gg V_{\text{th}} a$  ou, esquematicamente,  $\omega \gg V_{\text{th}}$ . Esta condição pode ser escrita como:

$$\omega a \gg \left( V_{\text{térmico}}^2 - \frac{4e^2 a^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2} \frac{1}{c} \left( \frac{\omega_p^2}{d} \left( e^{-da^2} - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad (\text{III-229})$$

onde omitimos o fator  $\beta$  pelo fato dele não ser decisivo nesta investigação, e onde usamos a relação  $V_{\text{th}}^2 = V_{t,r}^2 - \frac{4e^2 a^2}{m^2 c^2}$  que é válida para a maioria das partículas. O lado direito da equação (III-229) pode ser estimado como  $\frac{V_{r,t}}{c} \frac{\omega_p}{\sqrt{\alpha_{r,t}}}$  x (fator numérico).

Das últimas relações obtemos:

$$\omega > \omega_p \frac{V_{r,t}}{c} \left( \text{com } a \gg \frac{1}{\sqrt{\alpha_{r,t}}} \right) \quad (\text{III-230})$$

como condição efetiva para ondas relativísticas. Esta condição, no entanto, contradiz a relação (III-228), o que nos revela que dentro das condições da teoria, os sólitons são apenas moderadamente relativísticos mesmo quando  $\alpha_{r,t} a^2 \gg 1$ .

Com isto encerramos o que poderíamos chamar de situações para as quais  $0 \leq \beta < 1$ . Passemos agora a analisar o que acontece para  $\beta > 1$ , concentrando-nos efetivamente no limite  $\beta \gg 1$  que define, por exemplo, as condições ambientes na magnetosfera dos pulsares.

Se considerarmos  $\beta > 1$  na equação (III-217) estaremos em face a uma situação para a qual o potencial  $\bar{\phi}$  será de caráter atrativo em contraste ao que tem acontecido. A partir de agora adaptaremos a teoria ao mecanismo de confinamento que pode se fazer presente.

Antes de mais nada, devemos dizer que as partículas do sistema serão agora classificadas como transmitidas e confinadas.

Valendo-nos da hipótese  $\tilde{\phi}_\alpha < 0$ , fica claro que para  $|x| \rightarrow \infty$ , há somente partículas transmitidas, enquanto para  $|x|$  finito as seguintes relações são válidas:

$$\begin{aligned} -\frac{\tilde{\phi}_\alpha}{m^2} < v_{||t}^2 < \infty \\ 0 < v_{||c}^2 < -\frac{\tilde{\phi}_\alpha}{m^2} \end{aligned} \quad (\text{III-231})$$

com  $v_{||c}$  designando a velocidade das partículas confinadas.

A equação da onda fica com o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} c^2 \frac{d^2 a}{dx^2} = -\omega^2 a + \frac{8\sqrt{\pi} e^2 a}{m} \left\{ n_{oc} \left( \frac{e^{-\tilde{\phi}_e/2P_c^2}}{1-\beta} \int_{(\tilde{\phi}_e/2P_c^2)^{1/2}}^{\infty} e^{-u^2} du + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{e^{-\tilde{\phi}_p/2P_c^2}}{1+\beta} \int_0^{(\tilde{\phi}_p/2P_c^2)^{1/2}} e^{-u^2} du \right) + n_{ot} \left( \frac{e^{-\tilde{\phi}_e/2P_t^2}}{1-\beta} \int_{(\tilde{\phi}_e/2P_t^2)^{1/2}}^{\infty} e^{-u^2} du + \frac{e^{-\tilde{\phi}_p/2P_t^2}}{1+\beta} \int_{(\tilde{\phi}_p/2P_t^2)^{1/2}}^{\infty} e^{-u^2} du \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III-232})$$

Da usual hipótese de quase neutralidade emerge a condição  $\tilde{\phi}_e \approx \tilde{\phi}_p$ , com a qual reescrevemos a equação acima na forma:

$$c^2 \frac{d^2 a}{dx^2} = -\omega^2 a + \frac{16\sqrt{\pi} e^2 a}{m} \left[ \frac{n_{oc} e^{-\frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_e a^2}{P_c^2}}}{1-\beta^2} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_e a^2}{P_c^2}}} e^{-u^2} du + \frac{n_{ot} e^{-\frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_p a^2}{P_t^2}}}{1-\beta^2} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_p a^2}{P_t^2}}} e^{-u^2} du \right) \right] \quad (\text{III-233})$$

ou ainda

$$c^2 \frac{d^2 a}{dx^2} = -\left( \omega^2 - \frac{\sqrt{\pi} n_{ot} e^{-\frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_p a^2}{P_t^2}}}{2(1-\beta^2)} \right) a + \frac{16\sqrt{\pi} e^2 a}{m} \left[ \frac{n_{oc} e^{-\frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_e a^2}{P_c^2}}}{1-\beta^2} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_e a^2}{P_c^2}}} e^{-u^2} du - \frac{n_{ot} e^{-\frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_p a^2}{P_t^2}}}{1-\beta^2} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}_p a^2}{P_t^2}}} e^{-u^2} du \right].$$

Desta última expressão, pode-se notar que o termo linear do lado direito possui um coeficiente positivo no limite

$\beta^2 > 1$ . Isto significa que o potencial de Sagdeev que define o equilíbrio da nossa partícula mecânica fictícia em  $a = 0$ , é sempre atrativo em relação a este ponto (naturalmente não se deve confundir entre o "atrativo" do potencial de Sagdeev e o "atrativo" do potencial físico  $\tilde{\phi}$ ). O resultado deste fato é que ondas localizadas espacialmente não estão presentes no sistema de elétrons e pósitrons; há aqui um contraste marcante entre as situações  $\beta > 1$  e  $\beta < 1$ , já que na última a localização não linear era possível.

Caso de Plasma Elétron-Pósitron-Ion Magnetizado com  $\frac{eB_0}{mc} > \omega$

Atualmente alguns autores [LMMP86] acreditam que a magnetosfera de pulsares contenha também uma parcela de componente iônica.

Esta possibilidade já foi considerada nas secções anteriores, dentro dos limites do modelo do plasma fluido. Estudaremos esta inclusão sob as condições de validade das aproximações da teoria cinética, supondo novamente que os íons formam um "background" fixo e que o regime para  $|x| \rightarrow \infty$  seja o de neutralidade completa de cargas ( $n_{eo} = n_{io} + n_{po}$ ).

Com isto, a equação de onda se torna:

$$c^2 \frac{d^2 a}{dx^2} = -\omega a + \frac{g\sqrt{\pi} e^2 a}{m} \left\{ \frac{n_{eoc} e^{-\tilde{\phi}_e/2P_e^2}}{1-\beta} \int_0^{\left(\frac{|\tilde{\phi}_e|}{2P_e^2}\right)^{1/2}} e^{-u^2} du + \frac{n_{poc} e^{-\tilde{\phi}_p/2P_p^2}}{1+\beta} \int_0^{\left(\frac{|\tilde{\phi}_p|}{2P_p^2}\right)^{1/2}} e^{-u^2} du + \frac{n_{eot} e^{-\tilde{\phi}_e/2P_e^2}}{1-\beta} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du + \frac{n_{rot} e^{-\tilde{\phi}_p/2P_p^2}}{1+\beta} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right\}$$

(III-234)

ou

$$c^2 \frac{d^2 a}{dx^2} = - \left( \omega^2 - \frac{4\pi e^2}{m} \left( \frac{n_{pot} e^{-\frac{\tilde{\phi}_p}{2P_t^2}}}{1+\beta} + \frac{n_{eot} e^{-\frac{\tilde{\phi}_e}{2P_t^2}}}{1-\beta} \right) \right) a + \frac{8\sqrt{\pi} e^2 a}{m} \left\{ \frac{n_{eoc} e^{-\frac{\tilde{\phi}_e}{2P_c^2}}}{1-\beta} \int_0^{\left( |\tilde{\phi}_e|/2P_c^2 \right)^{1/2}} e^{-u^2} du + \frac{n_{poc} e^{-\frac{\tilde{\phi}_p}{2P_c^2}}}{1+\beta} \int_0^{\left( |\tilde{\phi}_p|/2P_c^2 \right)^{1/2}} e^{-u^2} du - \frac{n_{eot} e^{-\frac{\tilde{\phi}_e}{2P_t^2}}}{1-\beta} \int_0^{\left( |\tilde{\phi}_e|/2P_t^2 \right)^{1/2}} e^{-u^2} du - \frac{n_{pot} e^{-\frac{\tilde{\phi}_p}{2P_t^2}}}{1+\beta} \int_0^{\left( |\tilde{\phi}_p|/2P_t^2 \right)^{1/2}} e^{-u^2} du \right\}.$$

(III-235)

Nesta última equação  $n_{eo}$  e  $n_{po}$  designam as diferentes densidades para elétrons e pósitrons;  $\tilde{\phi}_{e,p}$  tem o significado usual.

Como aproximação à equação acima examinaremos a possibilidade da existência de ondas de pequena amplitude.

Localização de Ondas do tipo  $\frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}}{P_{t,c}} \ll 1$ .

Mantendo-nos afastados do ponto  $n_{eo} = n_{po}$ , para o qual já demonstramos a inexistência de localização, podemos escrever a equação (III-235) na seguinte forma aproximada:

$$c^2 \frac{d^2 a}{dx^2} = \left[ -\omega^2 + \frac{8\pi e^2}{m\beta} (n_{pot} - n_{eot}) \right] a - \beta \frac{8\sqrt{\pi} e^2 a}{m} \left[ n_{eoc} \left( \frac{\tilde{\phi}_e}{2P_c^2} \right)^{1/2} + n_{poc} \left( \frac{\tilde{\phi}_p}{2P_c^2} \right)^{1/2} - n_{eot} \left( \frac{\tilde{\phi}_e}{2P_t^2} \right)^{1/2} - n_{pot} \left( \frac{\tilde{\phi}_p}{2P_t^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (III-236)$$

Por outro lado, a condição de quase neutralidade nos diz que

$$n_{eoc} \sqrt{\tilde{\phi}_e} = n_{poc} \sqrt{\tilde{\phi}_p}, \quad (III-237)$$

de onde extraímos a relação

$$\tilde{\phi}_{e,p} = - \frac{8e^2 a^2}{\beta^2 c^2} \frac{n_{p,eoc}}{n_{poc}^2 + n_{eoc}^2}. \quad (III-238)$$

Com o uso da equação (III-238) em (III-236) obtemos finalmente a equação da onda sob a hipótese  $\frac{n_{eoc}}{n_{eot}} = \frac{n_{poc}}{n_{pot}}$

$$c^2 \frac{d^2}{dx^2} a = \bar{\delta} a - \beta^{-2} |\beta^{-1}| \bar{\gamma} \tilde{\phi} (f_c - 1) |a| a \quad (\text{III-239})$$

onde usamos

$$\bar{\gamma} \tilde{\phi} = \frac{16\sqrt{\pi}e^2}{m} \left( \frac{16e^2}{c^2} \frac{1}{p_t^2} \frac{n_{pot}^2 n_{eot}^2}{(n_{pot}^2 + n_{eot}^2)} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

e

$$f_c = \frac{p_t}{n_{ot}} \frac{n_{oc}}{p_c}$$

Pelo que nos indica a equação (III-239), a formação de sólitons está sujeita às condições:

$$\bar{\delta} > 0 \Rightarrow \frac{8\sqrt{\pi}e^2}{m\beta} (n_{pot} - n_{eot}) > \omega^2 \quad (\text{III-240})$$

$$f_c > 1 \quad (\text{III-241})$$

A primeira destas condições nos mostra que a presença de íons é essencial, pois obrigatoriamente devemos ter  $n_{eo} \neq n_{po}$ . O que determina qual tipo de partículas deve estar em excesso, é o sinal do fator  $\beta$ ; cada vez que o sinal muda (ou por inversão do campo ou por alteração no sinal de  $\omega$  e subsequente inversão do sentido de polarização da onda), a diferença  $(n_{pot} - n_{eot})$  também deve ter o sinal trocado para que haja a formação das ondas localizadas.

A segunda condição diz que algum tipo de mecanismo de confinamento deve de fato estar operando pois se  $f_c \neq 1$

as condições "ambientais" para partículas confinadas devem ser diferentes daquelas para as transmitidas. Sumarizando, o que depreendemos até aqui é que a formação de sólitons de pequena amplitude em plasmas ultramagnetizados é bem mais difícil do que nos casos anteriores. Evidentemente não pretendemos que este resultado seja completamente geral; as condições de validade da teoria devem estar sempre presentes.

#### Conclusões Parciais ao Tema

Estudamos nesta subsecção a formulação da teoria dos sólitons eletromagnéticos em plasmas (e), (p), (i), através do modelo BGK da teoria cinética. Foi visto que tal modelo é impreterível quando as velocidades das ondas tornam-se comparáveis às das partículas. Em nosso caso esta ressonância onda-partícula, se dá através da velocidade de grupo das ondas já que a velocidade de fase em geral é superlumínosa; para destacar este ponto, analisamos velocidades de grupo nulas. O primeiro sistema examinado foi aquele composto por elétrons e pósitrons não magnetizados. Notamos aí que o potencial ponderomotriz age como uma estrutura repulsiva para as partículas, dando origem a uma classificação natural - partículas refletidas são as que não atravessam a barreira ponderomotriz e partículas transmitidas são as que atravessam. Examinamos a possibilidade da ocorrência de ondas de pequena amplitude e ondas de grande amplitude. A seguir, permitimos a inclusão de campos magnéticos tais que a frequência ciclotrônica seja menor do que a frequência da onda. Alterações quantitativas em relação ao pri

meio tópico se fizeram notar, mas em termos qualitativos a física do sistema não mudou muito, a não ser talvez pela geração de potenciais eletrostáticos ausentes no caso não magnetizado. Em uma terceira etapa, relaxamos a condição mencionada em relação à frequência ciclotrônica e focalizamos a atenção no caso em que ela era muito maior do que a da onda. Sob estas condições foi mostrado que em plasmas (e), (p) puros não havia a possibilidade de formação de sólitons. A inclusão de uma componente iônica, no entanto, propicia novamente condições adequadas para a existência de ondas solitárias. Neste contexto vimos que para a existência destas ondas, o excesso de pósitrons (elétrons) em relação a elétrons (pósitrons) deveria ser uma função do sentido da polarização da onda e do sentido do campo magnético aplicado. O efeito mais significativo em relação a estes sistemas fortemente magnetizados, é que neste caso o potencial  $\tilde{\phi}_\alpha$  que atua nas partículas é de caráter atrativo, o que é radicalmente diferente dos casos anteriores; com isto em mente a classificação das partículas passou a ser: partículas confinadas pelo poço de potencial e partículas transmitidas. Verificamos que, além da presença de íons, as ondas solitárias deste último tipo de sistema exigem também a presença de partículas confinadas.

De uma maneira geral, as não linearidades presentes nas várias versões das equações de onda não são do tipo cúbico, o que de certa forma revela novas possibilidades de leis de escala e novas características, mesmo qualitativas, das ondas analisadas.

#### IV - CONCLUSÕES

Grande parte das conclusões e sugestões de trabalho presentes nesta tese se encontram feitas após cada subseção . Nestas conclusões finais nos restringimos a analisar os resultados de forma bastante geral.

Nossa tarefa foi a de estudar o comportamento ondulatório não linear de plasmas formados por mais de duas espécies de partículas. Iniciamos a análise investigando propriedades dos sólitons íon-acústicos (eletrostáticos) que se propagam em plasmas formados por elétrons, íons positivos e íons negativos. Este trabalho complementou investigações anteriores e revelou uma série de fenômenos relativamente inusitados, assim como "cut-off" de sólitons e forte dependência de amplitude e largura com a temperatura iônica. Aplicações numéricas a parâmetros experimentais foram realizadas, demonstrando que os resultados parciais da teoria são razoáveis.

Como segundo tópico, abordamos a questão referente à modulação não linear de ondas eletromagnéticas que se propagam em plasmas formados por elétrons, pósitrons e íons. A composição se ressalta em função da probabilidade de ser aquela encontrada no interior da magnetosfera dos pulsares, sendo o estudo da modulação motivado pelos observados pulsos de radiação emitidos por estes entes. Neste contexto, nosso primeiro passo foi dirigido ao problema da modulação oblíqua em plasmas não magnetizados. Vimos aí que algumas correções importantes a tra

balhos anteriores, que consideram plasmas de elétron-pósitron, devem ser feitas. Analisamos a possibilidade de geração de campos magnéticos de baixa frequência, notando sua dependência com a polarização da onda portadora.

A equação não linear que descreve a amplitude da onda portadora possui um termo cúbico no campo, cujo coeficiente pode se cancelar; nestas condições, o balanço entre não linearidade e dispersão se perde, o que impossibilita a existência dos sólitons. Nesta situação, mostramos que uma adequada redefinição das escalas de não linearidade e de modulação pode novamente nos proporcionar o balanço perdido. As soluções resultantes são bastante diferentes daquelas da usual equação não linear de Schrödinger em sua versão estacionária; não somente pulsos isolados estão presentes, mas também soluções similares a ondas de choque podem existir.

A partir deste ponto, o passo natural a ser dado foi o de inclusão de campos magnéticos externos - o que fizemos. Considerando campos extremamente intensos (caracterizados por um parâmetro  $\beta \gg 1$ ), nos foi possível deduzir que a relação de dispersão das ondas lineares do plasma elétron-positrônico se ramifica em duas quando íons são incluídos, e que sólitons de rarefação e compressão são possíveis. Ademais mostramos que, contrariamente ao caso não magnetizado, os efeitos de separação de cargas podem tornar-se importantes na região de instabilidade marginal, o que talvez induza o aparecimento dos assim chamados "cusped solitons".

O último ponto abordado foi o da construção de uma

teoria de equilíbrio cinético (ao estilo da teoria BGK) para plasmas de elétrons, pósitrons e íons, magnetizados e não magnetizados. Observando que, a soma do potencial ponderomotriz e do potencial eletrostático é equivalente ao potencial eletrostático da teoria BGK, obtivemos uma série de resultados concernentes à possibilidade ou não da existência de localização de ondas eletromagnéticas. Mostramos, por exemplo, que com o aumento da intensidade do campo externo, as ondas podem converter-se de barreiras de potencial para poços de potencial; ademais no caso de forte magnetização, a localização só é possível com a presença de íons.

Enfim, tentamos desenvolver toda esta investigação seguindo uma sistemática que começa com o simples modelo de fluido aplicado a ondas eletrostáticas e terminamos com o elaborado modelo cinético aplicado a ondas eletromagnéticas. Alguns aspectos importantes, como propagação de ondas de Langmuir em plasmas tríplexes e a relevante questão da estabilidade de nossas soluções, não foram investigadas; acreditamos, no entanto que nossos resultados possam oferecer alguma informação pertinente à teoria de propagação de radiação não linear em plasmas multiespécie.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AAP-75 AKHIEZER, A.I.; AKHIEZER, I.A.; POLOVIN, R.V.; SITENKO, A.G.; SPEPANOV, K.N. Plasma Electrodynamics. London, Pergamon, 1975. v.2.
- Ch80 CHIAN, A.C.-L. Lett. Nuovo Cimento, 29(12):393-8, 1980.
- CK83 CHIAN, A.C.-L. & KENNEL, C.F. Astrophys. & Space Sci., 97(1):9-18, 1983.
- Da72 DAVIDSON, R.C. Methods in Nonlinear Plasma Theory. New York, Academic Press, 1972. Cap.2
- DT75 DAS, G.C. & TAGARE, S.G. Plasma Physics, 17(12):1025-32, 1975.
- GGKM67 GARDNER, C.S.; GREENE, J.M.; KRUSKAL, M.D.; MIURA, R.M. Phys. Rev. Lett., 19(19):1095-7, 1967.
- GOD66 GOELER, S. von; OHE, T.; D'ANGELO, N. J. Appl. Phys., 37(6):2519-20, 1966.
- ITB70 IKEZI, H.; TAYLOR, R.J.; BAKER, D.R. Phys. Rev. Lett., 25(1):11-4, 1970.
- Ka75 KARPMAN, V.I. Nonlinear Waves in Dispersive Media. Oxford, Pergamon, 1975.
- KJ87 KENTWELL, G.W. & JONES, D.A. Phys. Rep., 145(6):319-403, 1987.
- KP76 KENNEL, C.F. & PELLAT, R. J. Plasma Phys., 15(3):335-55, 1976.
- KSH81 KONO, M.; SKORIĆ, M.M.; HAAR, D.T. J. Plasma Phys., 26(1):123-46, 1981.
- KT73 KRALL, N.A. & TRIVELPIECE, A.W. Principles of Plasma Physics. New York, McGraw-Hill, 1973. p.106
- LB81 LAKHINA, G.S. & BUTI, B. Astrophys. & Space Sci., 79(1):25-36, 1981.
- LFN84 LUDWIG, G.O.; FERREIRA, J.L.; NAKAMURA, Y. Phys. Rev. Lett., 52(4):275-8, 1984.
- LMMP86 LOMINADZE, D.G.; MACHABELI, G.Z.; MELIKIDZE, G.I.; PATA RAYA, A.D. Sov. J. Plasma Phys., 12(10):712-21, 1986.
- LS78 LITVAK, A.G. & SERGEEV, A.M. Jetp Lett., 27(10):517-20, 1978.

- MAF85 MOFIZ, U.A.; DE ANGELIS, U.; FORLANI, A. Phys. Rev. A, 31(2):951-5, 1985.
- MOT85a MIKHAILOWSKII, A.B.; ONISHCHENKO, O.G.; TATARINOV, E. G. Plasma Phys. Contr. Fusion, 27(5):527-37, 1985.
- MOT85b MIKHAILOWSKII, A.B.; ONISHCHENKO, O.G.; TATARINOV, E. G. Plasma Phys. Contr. Fusion, 27(5):539-56, 1985.
- MP87 MOFIZ, U.A. & PODDER, J. Phys. Rev. A, 36(4):1811-4, 1987.
- NPS87 NYCANDER, J.; PAVLENKO, V.P.; STENFLO, L. Phys. Fluids, 30(5):1367-70, 1987.
- NT84 NAKAMURA, Y. & TSUKABAIASHI, I. Phys. Rev. Lett., 52(26):2356-9, 1984.
- NT85 NAKAMURA, Y. & TSUKABAIASHI, I. J. Plasma Phys., 34(3):401-15, 1985.
- Ri88 RIZZATO, F.B. J. Plasma Phys. Aceito para publicação.
- Ro86 ROBERTO, M. Efeito cinético na propagação de sôlitons acústico-iônicos em plasmas com íons negativos. São José dos Campos, INPE, 1986. Diss. Mestr. Física.
- RS75 RUDERMAN, M.A. & SUTHERLAND, P.G. Astrophys. J., 196(1):51-72, 1975.
- RSD87a RIZZATO, F.B.; SCHNEIDER, R.S.; DILLENBURG, D. Plasma Phys. Contr. Fusion, 29(9):1127-6, 1987.
- RSD87b RIZZATO, F.B.; SCHNEIDER, R.S.; DILLENBURG, D. Weakly nonlinear electromagnetic waves in a electron-ion-positron plasma. Porto Alegre, 1987. 9p. Trabalho apresentado no IUPAP Energy Independence Conference on Fusion Energy and Plasma Physics, Rio de Janeiro, ago. 1987.
- RSD88 RIZZATO, F.B.; SCHNEIDER, R.S.; DILLENBURG, D. Phys. Lett. A. A ser publicado.
- Sa62 SAGDEEV, R.Z. Sov. Phys. Tech. Phys., 6(10):867-71, 1962.
- Sc73 SCHAMEL, H. J. Plasma Phys., 9:377, 1973.
- Sc86 SCHAMEL, H. Phys. Rep., 140(3):161-91, 1986.
- SK80 SAKAI, J. & KAWATA, T. J. Phys. Soc. Jpn., 49(2):753-8, 1980.
- SRYT86 SHUKLA, P.K.; RAO, N.N.; YU, M.Y.; TSINTSADZE, N.L. Phys. Rep., 138(1/2):1-149, 1986.

- SSY85 STENFLO, L.; SHUKLA, P.K.; YU, M.Y. Astrophys. & Space Sci., 117(2):303-8, 1985.
- Ta73 TAGARE, S.G. Plasma Phys., 15(12):1247-52, 1973.
- TR86 TAGARE, S.G. & REDDY, R.V. J. Plasma Phys., 35(2):219-37, 1986.
- UD74 UBEROI, C. & DAS, G.C. Plasma Phys., 16(7):669-76, 1974.
- Wa74 WADATI, M. J. Phys. Soc. Jpn., 38(3):681-6, 1974.
- Wa84 WATANABE, S. J. Phys. Soc. Jpn., 53(3):950-6, 1984.