

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

SOBRE AS DISTRIBUIÇÕES DE MOMENTUM EM

REAÇÕES (p,2p) \*

Paulo Machado Mors

Dissertação realizada sob a orientação dos Doutores Victoria E. Herscovitz e Gerhard Jacob, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do Grau de Mestre em Ciências.

\* Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes Instituições: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico (BNDE) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS).

Porto Alegre

1975

À memória de José Jorge Kamacho.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado sob a orientação da Dra. Victoria E. Herscovitz e do Dr. Gerhard Jacob, a quem agradeço a dedicação e os conhecimentos transmitidos.

Agradeço, também,

ao Dr. Th.A.J. Maris, pelo interesse e sugestões formuladas;

a Claudio Schneider, pelas discussões que mantivemos e pela inestimável colaboração prestada na parte de computação;

a Carlos Arthur Lang Lisboa e Francisco Fernando Schlabit, Chefes respectivos da Divisão de Computação e do Núcleo de Sistemas do CPD-UFRGS, pela assistência prestada;

a Sergio Ribeiro Teixeira, pelos desenhos desta Dissertação;

a Luisa Zafaneli, pelo cuidadoso trabalho de datilografia;

e a todos aqueles que, com seu apoio, tornaram possível a realização deste trabalho.

Porto Alegre, junho de 1975.

Paulo Machado Mors

## SUMÁRIO

Resultados obtidos de processos (p,2p) copla-  
nares são apresentados através de diagramas de contorno das  
distribuições de momentum, no espaço de momentum. Os diagra-  
mas de contorno, traçados para o exemplo da reação  
 $^{16}\text{O}(p,2p)^{15}\text{N}$ , para os estados nucleares  $1s$  e  $1p$ , a energias  
de bombardeio de 200 MeV e de 378 MeV, mostram-se muito sen-  
síveis à distorção causada pelos potenciais óticos que a-  
tuam sobre os prótons incidente e emergentes. Os diagramas  
apresentam-se deformados e deslocados em relação às formas  
circulares centradas na origem que teriam, no espaço de mo-  
mentum, na ausência de distorção. A deformação e o desloca-  
mento de cada diagrama são consequência, respectivamente, da  
absorção e do espalhamento elástico dos prótons de alta e-  
nergia.

## ABSTRACT

Results obtained from (p,2p) coplanar processes are presented by means of contour diagrams of momentum distributions in momentum space. The contour diagrams obtained for the example of the  $^{16}\text{O}(p,2p)^{15}\text{N}$  reaction, for the nuclear states 1s and 1p, at bombarding energies of 200 MeV and 378 MeV, appear to be very sensitive to the distortion caused by the optical potentials which act on the incident and emergent protons. Compared to the diagrams obtained in the absence of distortion, which are circular and centered at the origin, in momentum space, the distorted diagrams appear deformed and shifted. The deformation and the shift of each diagram are a consequence of the absorption and the elastic scattering of the high-energy protons, respectively.

## ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO	1
II - ESPALHAMENTO (p,2p) COPLANAR	6
II-1 Formalismo Teórico	6
II-2 Colocação do Problema	13
III - CONSTRUÇÃO DOS DIAGRAMAS	18
III-1 Introdução	18
III-2 Técnica Empregada na Construção dos Diagramas	23
III-3 Parâmetros Associados aos Prótons de Alta Energia	25
IV - APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	32
IV-1 Introdução	32
IV-2 Estado 1s	39
IV-3 Estado 1p	55
V - CONCLUSÕES	66
APÊNDICE	69
A-1 A Integral de Volume	70
A-2 As Integrais de Linha	72
A-3 Propriedades de Simetria	76
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	83

## I - INTRODUÇÃO

Das experiências de bombardeio de núcleos por partículas de alta energia são obtidas informações para o estudo da estrutura nuclear. Através destes elementos é propiciada, também, a comprovação de várias previsões teóricas feitas à luz do modelo de camadas<sup>1)</sup>. Este modelo, que supõe os núcleons distribuídos em níveis energéticos (camadas), explica com sucesso muitas das propriedades nucleares. Segundo o modelo, núcleons mais ligados ao núcleo encontram-se em camadas mais internas, devido à dependência exponencial da função de onda de um núcleon nuclear com sua energia de separação (energia mínima, positiva, necessária para removê-lo do núcleo a que está ligado).

Experiências têm sido realizadas, utilizando-se prótons ou elétrons de alta energia como projéteis, nas quais, penetrando no núcleo, a partícula incidente arranca um núcleon, apresentando-se como produto final da reação um núcleo residual e duas partículas de alta energia (processo de "knock-out"). Se a partícula incidente interage diretamente apenas com o núcleon a ser arrancado, justifica-se o termo espalhamento quase-livre elástico para este tipo de reação<sup>2), 3), 4)</sup>.

Nas referências 5) e 6) encontra-se uma revisão de processos quase-livres, tanto sob um ponto de vista teórico quanto sob um ponto de vista experimental, em um

quadro geral do que foi feito neste campo até 1972.

Para a ocorrência de processos quase-livres são impostas as seguintes condições (tanto para sua realização experimental, quanto para sua interpretação teórica)<sup>7),8)</sup>:

I) Energia incidente alta, de modo a que se tenha (i) tempo de interação da partícula incidente com o alvo (núcleon a ser arrancado) pequeno comparado com tempos nucleares característicos (considera-se como tempo nuclear característico o intervalo de tempo médio decorrido entre duas colisões sucessivas de um núcleon dentro do núcleo), e (ii) o núcleo razoavelmente transparente às partículas incidente e emergentes;

II) Momentum incidente (ou transferência de momentum) associado a um comprimento de onda reduzido de De Broglie pequeno, comparado com distâncias nucleares características (considera-se como distância nuclear característica a distância média entre dois núcleons do núcleo: cerca de 1,7 fm).

Sob estas condições, os livres caminhos médios das partículas incidente e emergentes são da ordem do raio nuclear e não ocorre, além da interação bem localizada entre as partículas projétil e alvo, praticamente qualquer outra interação violenta, quer entre o núcleo e estas partículas, quer entre estas duas partículas. As condições implicam, portanto, em uma redução da probabilidade de ocorrência de espalhamento múltiplo.



O processo quase-livre difere de um espalhamento livre devido à presença do potencial nuclear, responsável tanto pela energia de separação do núcleon alvo, quanto por sua distribuição de momentum.

Este trabalho trata de reações quase-livres em que tanto a partícula incidente quanto o núcleon alvo são prótons, isto é, reações do tipo  ${}^A_Z X_N (p, 2p) {}^{A-1}_{Z-1} Y_{N-1} (3), (9), (10)$ . Em reações  $(p, 2p)$ , para que sejam satisfeitas as condições acima enumeradas, que propiciam um processo quase-livre, é usual tomar-se 100 MeV (comprimento de onda reduzido de De Broglie de 0,44 fm) como valor mínimo para a energia incidente.

Através de um sistema de coincidência os dois prótons emergentes são detectados, procedendo-se à análise de suas energias e ângulos de emergência. São, então, construídos os espectros de energia e de correlação angular que dão informações, respectivamente, sobre as energias de separação<sup>2)</sup> e as distribuições de momentum<sup>10)</sup> dos estados-furo do núcleo residual.

É adotado, aqui, o modelo extremo de partícula única, no qual os estados-furo do núcleo residual são identificados com os estados dos prótons alvo antes de arrancados, ao invés do modelo mais completo, que trata com estados-furo não estacionários, no núcleo final<sup>11)</sup>.

Devido às colisões múltiplas com as demais partículas do núcleo, os prótons incidente e emergentes so-

frem variações em suas energias e nas direções de seus momentos, o que resulta em distorções observadas nas curvas experimentais de espectro de energia e correlação angular.

Estes efeitos de distorção são levados em consideração, no tratamento teórico-quantitativo de reações quase-livres, através da aproximação de impulso<sup>8)</sup> com ondas distorcidas<sup>3), 12)</sup> (D.W.I.A.).

Os efeitos da matéria nuclear sobre os prótons incidente e emergentes são estudados através da introdução de um potencial nuclear complexo atuando sobre cada um dos prótons em questão. É usual chamar-se de potencial ótico a este potencial nuclear complexo, em analogia com o índice de refração complexo que, na Ótica, dá conta da refração e da absorção de raios luminosos em um meio semi-transparente.

A parte real do potencial ótico dá conta do deslocamento de fase da função de onda associada ao próton (espalhamento elástico), enquanto a parte imaginária diminui a amplitude da função de onda (absorção). Daí, as variações em forma (simetrias quebradas, picos alargados) e amplitude (picos diminuídos em altura, mínimos preenchidos), nas curvas distorcidas, em comparação com aquelas que seriam obtidas se não houvesse distorção.

Até agora, os resultados de experiências (p,2p) têm sido apresentados, em geral, através das curvas de espectro de energia e de correlação angular, sendo a curva de

correlação angular relacionada com a distribuição de momentum do próton alvo.

O objetivo deste trabalho é investigar a apresentação de parte desses resultados, para experiências (p,2p) coplanares, através de diagramas de contorno das distribuições de momentum no espaço de momentum, conforme sugerido por Jacob e Maris<sup>6)</sup>.

Uma apresentação da teoria de espalhamento quase-livre (p,2p) coplanar, e a colocação formal do problema, são o tema do capítulo II.

No capítulo III são apresentados o método empregado na construção dos diagramas de contorno e a maneira pela qual foram obtidos os valores dos parâmetros utilizados nos cálculos numéricos. No capítulo IV são apresentados os resultados obtidos, e é procedida uma análise dos mesmos. O capítulo V contém as conclusões finais do trabalho, obtidas a partir do exemplo da reação  $^{16}\text{O}(p,2p)^{15}\text{N}$ . Características gerais do programa de computador elaborado para a construção dos diagramas de contorno e argumentos físicos diretamente relacionados com este programa são tema do apêndice.

## II - ESPALHAMENTO (p,2p) COPLANAR

### II-1 Formalismo teórico

A figura II-1 mostra, esquematicamente, no referencial de laboratório, um processo de espalhamento quase-livre (p,2p) coplanar.

O próton de quadrivetor energia-momentum ( $\hbar\mathbf{k}_0, E_0/c$ ) e massa  $m$  incide sobre o núcleo alvo, de número de massa  $A$ , inicialmente em repouso. Após a reação, tem-se dois prótons de quadrivetores energia-momentum ( $\hbar\mathbf{k}_j, E_j/c$ ) ( $j = 1,2$ ), espalhados em ângulos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  em relação à direção do próton incidente, além do núcleo residual  $A-1$  de quadrivetor energia-momentum ( $\hbar\mathbf{k}_r, E_r/c$ ), recuando em uma direção que forma um ângulo  $\phi_r$  com a direção do próton incidente. O próton arrancado tinha, no núcleo alvo, uma energia de separação  $S$  e, no instante do choque, um certo momento  $\hbar\mathbf{q}$ .

Os momenta emergentes,  $\hbar\mathbf{k}_1$  e  $\hbar\mathbf{k}_2$ , incidente,  $\hbar\mathbf{k}_0$ , e de recuo,  $\hbar\mathbf{k}_r$ , estão no mesmo plano, o que caracteriza a natureza coplanar do processo<sup>13)</sup>.

A energia de excitação do núcleo residual ( $E_{exc}$ ) é a diferença de energia entre a camada em que se encontrava o próton arrancado e a camada menos ligada, isto é, a diferença entre a energia de separação do próton alvo ( $S$ ) e a energia de separação do nucleon menos ligado ao núcleo

( $S_f$ ):

$$E_{exc} = S - S_f.$$

(II-1)

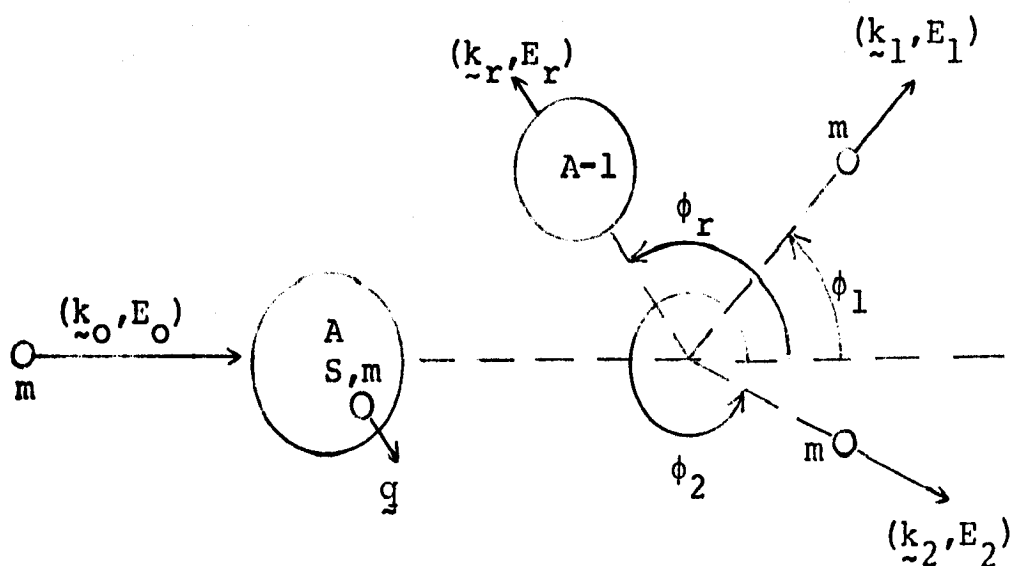


FIGURA II-1

No modelo extremo de partícula única o núcleo alvo, no instante da colisão, pode ser visto como uma partícula de massa  $m$  e momentum  $\vec{q}$  movendo-se no potencial criado por  $A-1$  partículas. Em relação ao centro de massa do sistema as  $A-1$  partículas se movem com um momentum total  $-\vec{q}$ . Como a reação quase-livre se caracteriza por uma interação bem localizada entre as partículas alvo e projétil (cf. capítulo I), o conjunto de  $A-1$  partículas não se altera com o choque, seu momentum total sendo, portanto, igual ao momentum do núcleo residual,  $\vec{k}_r$ . Logo,

$$\vec{q} = -\vec{k}_r. \quad (\text{II-2})$$

Conservação de momentum e energia, no processo, são expressas pelas relações cinemáticas

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_r \quad (\text{II-3})$$

e

$$T_0 - S = T_1 + T_2 + T_r, \quad (\text{II-4})$$

onde  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_r$  são as energias cinéticas, respectivamente, do próton incidente, dos dois prótons emergentes e do núcleo residual.

Dispondo de  $k_0$  e medindo  $k_1$  e  $k_2$  pode-se determinar  $k_r$  da eq. (II-3); daí decorrem  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_r$  e, da eq. (II-4), pode-se determinar  $S$ .

Não se considerando efeitos de polarização, e fixando-se a energia incidente, a eq. (II-3) mostra que há quatro parâmetros independentes de que se pode dispor, na experiência: por exemplo,  $k_1$ ,  $k_2$  e os ângulos que  $k_1$  e  $k_2$  formam com a direção de incidência ( $\phi_1$  e  $\phi_2$ ).

Neste trabalho estudamos processos em que as energias dos prótons emergentes são iguais e, conseqüentemente,  $k_1$  e  $k_2$  também são iguais:

$$T_1 = T_2 = T, \quad (\text{II-5})$$

$$k_1 = k_2 = k. \quad (\text{II-6})$$

Com isto, e desprezando a energia de recuo do núcleo residual frente às altas energias envolvidas (energia da ordem de 1 MeV, comparada a energias da ordem de  $10^2$  MeV), a eq. (II-4) dá:

$$T = \frac{T_0 - S}{2}. \quad (\text{II-7})$$

Portanto, uma vez fixadas a energia incidente e a camada nuclear a ser investigada (caracterizada por uma

dada energia de separação  $S$ , para um dado núcleo), fica determinada a energia emergente a ser selecionada pelos aparelhos de detecção.

Fixado um valor do ângulo de recuo  $\phi_r$ , a cada valor de  $k_r$  corresponderá um par  $(\phi_1, \phi_2)$  de ângulos de emergência. Fazendo variar, portanto, os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , pode-se construir a curva de correlação angular, que é o gráfico das taxas de contagem contra valores de  $k_r$ , e que estará diretamente relacionada com a distribuição de momentum do núcleo residual (e, de acordo com a eq. (II-2), com a distribuição de momentum do próton arrancado, no modelo extremo de partícula única) para o correspondente valor de  $\phi_r$ .

Para o núcleo residual, devido à sua pequena energia de recuo, a cinemática não relativística constituiu-se em uma boa aproximação, enquanto os prótons diretamente envolvidos na experiência devem receber um tratamento relativístico, tendo em vista suas altas energias.

A relação entre energia cinética e momentum, para os prótons, é

$$k_j = \frac{(T_j^2 + 2T_j mc^2)^{1/2}}{\hbar c} \quad (j = 0, 1, 2). \quad (\text{II-8})$$

Na aproximação de impulso com ondas distorcidas (D.W.I.A.), cujas condições de aplicabilidade<sup>14)</sup> são, basicamente, as mesmas impostas para a ocorrência de um pro -

cesso quase-livre, apresentadas no capítulo I, a seção de choque diferencial relativística de reações (p,2p) coplanares, para núcleos não polarizados, é dada pela fórmula

$$\frac{d^6\sigma}{dE_1 d\Omega_1 dE_2 d\Omega_2} = \frac{4}{(\hbar c)^2} \frac{k_1 k_2 \bar{E}_0^2}{k_0 E_3} \times \frac{d\sigma^{fr}}{d\bar{\Omega}} \times$$

$$\times \frac{N_j}{2j+1} \sum_{m_j=-j}^{+j} |g'(k_{\tilde{r}})|^2 \times \delta(E_1 + E_2 + E_r + S - E_0), \quad (\text{II-9})$$

conforme foi mostrado por Maris<sup>3),12)</sup>.

A função  $\delta$  presente em (II-9) garante a conservação de energia no processo. Além dela distinguimos, na expressão, por suas naturezas diversas, três fatores.

O primeiro é um fator puramente cinemático, onde  $\bar{E}_0$  denota a energia total do próton incidente no referencial do centro de massa e  $E_3$  denota a energia total do próton alvo no referencial de laboratório<sup>12)</sup>.

O segundo fator,  $\frac{d\sigma^{fr}}{d\bar{\Omega}}$ , é a seção de choque diferencial próton-próton livre no referencial do centro de massa e que se refere ao processo livre equivalente: o espalhamento de prótons livres com momenta iniciais  $\hbar k_0$  e  $\hbar q$  e momenta emergentes  $\hbar k_1$  e  $\hbar k_2$ .

Expressar a seção de choque quase-livre em termos desta seção de choque livre equivalente implica em introduzir um erro causado pelo fato de, no processo quase-livre, o próton alvo estar ligado e apresentar uma distribuição de momentum, enquanto no processo livre sua energia



de separação é nula e seu momentum é bem determinado (momentum nulo, no referencial de laboratório). No entanto, quando a energia incidente está entre 150 MeV e 400 MeV no referencial de laboratório, este erro é percentualmente pequeno já que, neste intervalo de energia,  $\frac{d\sigma}{d\bar{\Omega}}^{fr}$  é praticamente isotrópica e independente da energia<sup>15)</sup>.

O terceiro fator é o que mais diretamente nos interessa. É a "distribuição de momentum distorcida"

$$P(\underline{k}_r) = \frac{N_j}{2j+1} \sum_{m_j=-j}^{+j} |g'(\underline{k}_r)|^2, \quad (\text{II-10})$$

componente da seção de choque relacionada com a estrutura nuclear.

A curva de correlação angular tem essencialmente a forma da distribuição de momentum distorcida; os demais fatores que integram a seção de choque, o fator cinemático e a seção de choque próton-próton livre, variam lentamente com  $\underline{k}_r$ , na faixa de energia utilizada neste trabalho.

A eq. (II-10) representa a média sobre todos os prótons da camada nuclear a ser investigada.  $N_j$  é o número de prótons da camada,  $j$  é o número quântico momentum angular total que a caracteriza e  $m_j$  é o número quântico magnético associado a  $j$ . No caso de uma camada completa,  $N_j = 2j + 1$ .

A "transformada de Fourier distorcida"  $g'(\underline{k}_r)$  tem, no modelo extremo de partícula única, a forma

$$g'(\underline{k}_r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\underline{k}_r \cdot \underline{r}} \psi_p(\underline{r}) D_0(\underline{r}) D_1(\underline{r}) D_2(\underline{r}) d^3r, \text{ (II-11)}$$

onde  $\psi_p(\underline{r})$  é a função de onda do próton alvo.

O fator  $D(\underline{r}) = D_0(\underline{r}) D_1(\underline{r}) D_2(\underline{r})$  é a grandeza que leva em conta a distorção sofrida pelas ondas incidente e emergentes, por efeito do potencial ótico. Se não houvesse distorção, ter-se-ia  $D(\underline{r}) = 1$  e  $g'(\underline{k}_r)$  seria a transformada de Fourier  $g(\underline{q})$  (cf. eq. (II-2)) da função de onda do próton alvo, que é sua função de onda no espaço de momentum.  $P(\underline{k}_r)$  seria, então, a distribuição de momentum da camada investigada. Daí, a expressão "transformada de Fourier distorcida" para caracterizar  $g'(\underline{k}_r)$  e a expressão "distribuição de momentum distorcida" para caracterizar  $P(\underline{k}_r)$ .

Em uma aproximação semi-clássica (W.K.B.) relativística, os fatores de distorção  $D_j(\underline{r})$  são dados por<sup>16)</sup>

$$D_0(\underline{r}) = \exp \left[ -i \frac{E_0}{(\hbar c)^2 k_0} \int_{-\infty}^{\underline{r}} V_0(\underline{r}') ds_0 \right], \text{ (II-12a)}$$

$$D_j(\underline{r}) = \exp \left[ -i \frac{E_j}{(\hbar c)^2 k_j} \int_{\underline{r}}^{+\infty} V_j(\underline{r}') ds_j \right] \text{ (j=1,2). (II-12b)}$$

A integração estende-se sobre a trajetória clássica de cada próton até ( $j=0$ ) ou desde ( $j=1,2$ ) o ponto de colisão  $\underline{r}$ , sendo  $V_j(\underline{r}')$  ( $j=0,1,2$ ) o potencial ótico que atua, respectivamente, sobre o próton incidente ( $j=0$ ) e sobre os prótons emergentes ( $j=1,2$ ).

Como se vê diretamente de (II-12), realmente, na ausência de distorção, o potencial ótico sendo nulo,  $D_j(\underline{r}) = 1 (j = 0, 1, 2)$ .

## II-2 Colocação do problema

Os lugares geométricos, no espaço bi-dimensional  $\underline{k}_r$  ( $\underline{k}_r$  está no plano de espalhamento, já que o processo é coplanar), de pontos associados a valores iguais de  $P(\underline{k}_r)$  (curvas de nível), são os diagramas de contorno das distribuições de momentum, no espaço de momentum.

Não fossem os efeitos de distorção, a distribuição  $P(\underline{k}_r)$ , eq. (II-10), seria função apenas de  $|\underline{k}_r|$ . Nestas condições, os diagramas de contorno das distribuições de momentum apresentariam uma simetria rotacional no espaço de momentum, ou seja, seriam circunferências centradas na origem.

Entretanto, visto serem os fatores de distorção  $D_j(\underline{r})$  ( $j=0, 1, 2$ ), em geral, complexos, diferentes da unidade, não apresentando simetria esférica, e dependentes da geometria da experiência, espera-se um afastamento da simetria rotacional nos diagramas de contorno.

Na análise teórica dos efeitos da distorção sobre os diagramas de contorno, suporemos a seguinte condição de simetria aproximada: como os momenta externos

( $\hbar k_j$ ,  $j=0,1,2$ ) envolvidos na experiência são muito maiores do que os momenta das partículas nucleares, os ângulos e energias das partículas emergentes no processo não diferirão muito daqueles de um espalhamento livre simétrico de um próton em repouso por um próton de mesmo momentum incidente que o do espalhamento (p,2p). Quanto maior a energia incidente, mais nos aproximamos da simetria. A restrição (II-5), imposta neste trabalho, favorece a condição suposta.

Sob esta condição de simetria aproximada, desprezamos as diferenças entre os valores dos fatores de distorção  $D_j$  e os respectivos valores que assumiriam, se a experiência fosse simétrica. Isto equivale a não considerar a dependência implícita dos  $D_j$  em  $k_r$ <sup>17</sup>.

Assim, encaramos a única dependência essencial de  $P(k_r)$  em  $k_r$  como aquela presente no fator  $\exp(i k_r \cdot r)$ .

Será conveniente considerar, separadamente, os efeitos das partes reais e das partes imaginárias dos potenciais óticos responsáveis pela distorção.

Considerando apenas as partes reais destes potenciais, o produto  $D(r) = D_0(r)D_1(r)D_2(r)$  será da forma  $\exp[-i\alpha(r)]$ ,  $\alpha(r)$  real e, estando este fator de fase multiplicado por  $\exp(i k_r \cdot r)$ , na expressão de  $g'(k_r)$  (eq. (II-11)) é sugerido que se interprete  $\alpha(r)$  como um produto escalar  $\Delta k_r \cdot r$ ,  $\hbar \Delta k_r$  sendo uma variação do momentum de recuo  $\hbar k_r$ .

Nestas condições, ao invés de  $P$  ser função de  $|k_r|$ , será função de  $|k_r - \Delta k_r|$  e, sob a condição de simetria aproximada suposta "a priori", os diagramas de

contorno das distribuições de momentum se constituirão em circunferências centradas em um ponto deslocado de  $|\Delta\vec{k}_r|$  da origem do espaço de momentum, na direção do momentum incidente.

No caso de potenciais óticos atrativos,  $\Delta\vec{k}_r$  terá, ademais, o sentido do próton incidente.

Considerando apenas as partes imaginárias dos potenciais óticos, o fator  $D(\underline{r})$  será real e terá um valor menor do que a unidade (para valores de energia até 300 MeV, as partes real e imaginária do potencial ótico nuclear são quantidades negativas já que, a estas energias, o potencial é atrativo) que, espera-se, seja apenas fracamente dependente da energia, visto que a absorção varia pouco com a energia, na faixa 160-1000 MeV<sup>6)</sup>.

Neste caso, portanto, o efeito do fator  $D(\underline{r})$  será o de atenuar a amplitude da onda  $\psi_p(\underline{r})$  do próton alvo, o que implicará em uma deformação nos diagramas de contorno que, ademais, terão uma normalização pouco variável com a energia. Os diagramas deixarão de ser, então, circunferências no espaço de momentum.

O efeito combinado das partes reais e imaginárias dos potenciais óticos será, conseqüentemente, o deslocamento e a deformação dos diagramas de contorno, em comparação com as formas circulares centradas que ocorreriam, se não houvesse distorção.

Um estudo teórico destes efeitos, no espaço

de configuração, para a reação  $^{28}\text{Si}(p,2p)^{27}\text{Al}$  coplanar assimétrica, à energia incidente de 600 MeV, foi feito por Gustafsson e Berggren<sup>18)</sup>.

Segundo Jacob e Maris<sup>6)</sup> uma vez fixada a energia de excitação do núcleo residual (o que equivale a fixar  $S$ , isto é, o estado do próton a ser investigado), a construção de diagramas de contorno das distribuições de momentum de reações  $(p,2p)$  coplanares, no espaço de momentum, para várias energias de bombardeio, permitiria, além da verificação das deformações previstas nos diagramas, a medida aproximada dos valores respectivos dos deslocamentos  $\Delta k_r$ , que poderiam ser relacionados com variações nas partes reais dos potenciais óticos.

Citando textualmente estes autores, "a confirmação experimental de tal comportamento reforçaria consideravelmente a confiança no tratamento quantitativo da reação e, conseqüentemente, daria às informações sobre a estrutura nuclear extraídas de dados de processos quase-livres uma base mais sólida".

Naturalmente, já se pode prever uma dificuldade na medida de  $\Delta k_r$ , já que os diagramas experimentais apresentariam tanto os efeitos das partes reais quanto os das partes imaginárias dos potenciais óticos, não sendo possível separá-los para uma medida mais precisa.

Maris<sup>19)</sup> sugeriu que, de posse do valor medido de  $\Delta k_r$ , poder-se-ia relacioná-lo com um potencial ótico

nuclear, pois esta variação de momentum está associada à variação das energias das partículas por efeito da matéria nuclear. Esta investigação só permitiria comparar ordens de grandeza, já que são três os potenciais óticos envolvidos no problema e o efeito investigado através de  $\Delta k_r$  é um efeito médio.

No presente trabalho construímos os referidos diagramas de contorno através de um cálculo teórico, com a intenção de simular os efeitos mencionados e de verificar, qualitativamente, a validade das proposições formuladas nesta seção, através da comparação entre valores medidos nestes diagramas e parâmetros utilizados.

Foram construídos tanto diagramas que evidenciam os efeitos das partes reais dos potenciais óticos, quanto diagramas que mostram apenas os efeitos das partes imaginárias, bem como diagramas completos, isto é, aqueles que apresentam os efeitos dos potenciais óticos completos.

A reação escolhida para o estudo foi a reação  $^{16}\text{O}(p,2p)^{15}\text{N}$ , às energias de bombardeio de 200 MeV e de 378 MeV.

### III - CONSTRUÇÃO DOS DIAGRAMAS

#### III-1 Introdução

O processo tomado como objeto de estudo, como foi mencionado anteriormente, é a reação  $^{16}\text{O}(p,2p)^{15}\text{N}$  coplanar assimétrica, com prótons emergentes de mesma energia, às energias de bombardeio de 200 MeV e de 378 MeV.

O núcleo  $^{16}\text{O}$  é esfericamente simétrico, tem spin zero, isospin zero, e apresenta os níveis  $1s$  e  $1p$  totalmente preenchidos: 2 prótons no estado  $1s_{1/2}$ , 4 prótons no estado  $1p_{3/2}$  e 2 prótons no estado  $1p_{1/2}$ .

Nos cálculos realizados não foi levado em conta o desdobramento spin-órbita dos núcleons nucleares, caracterizando-se cada camada nuclear pelas partículas de mesmo número quântico momentum angular orbital  $\ell$ . Não foram, portanto, diferenciados prótons no estado  $1p_{3/2}$  de prótons no estado  $1p_{1/2}$ .

Com isto, a expressão para a distribuição de momentum distorcida (eq. (II-10)) é escrita na forma

$$P_{\ell}(\underline{k}_r) = \frac{N_{\ell}}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} |g_{\ell}^m(\underline{k}_r)|^2, \quad (\text{III-1})$$

onde  $N_{\ell}$  é o número de prótons da camada  $\ell$  e  $m$  é o número quântico magnético associado a  $\ell$ .

Para o núcleo  $^{16}\text{O}$  tem-se:



$$N_0 = 2, \quad (\text{III-2a})$$

$$N_1 = 6. \quad (\text{III-2b})$$

Sendo  $\psi_{n\ell m}(\underline{r})$  ( $n$ : número quântico principal) a função de onda do próton alvo, a transformada  $g'(\underline{k}_r)$  (eq. (II-11)) é dada por

$$g_{\ell}^m(\underline{k}_r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\underline{k}_r \cdot \underline{r}} \psi_{n\ell m}(\underline{r}) D(\underline{r}) d^3r. \quad (\text{III-3})$$

Foram escolhidas funções de onda nucleares geradas por um potencial central:

$$\psi_{n\ell m}(\underline{r}) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi). \quad (\text{III-4})$$

O potencial central adotado foi o do tipo oscilador harmônico e, portanto, as partes radiais normalizadas das funções de onda nucleares, para os estados  $1s$  e  $1p$ , têm a forma

$$R_{1\ell}(r) = \pi^{-1/4} \sqrt{\frac{2^{\ell+2}}{(2\ell+1)!!}} \gamma^{3/2} (\gamma r)^{\ell} e^{-(1/2)\gamma^2 r^2} \quad (\ell=0,1), \quad (\text{III-5})$$

com  $\gamma = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ , onde  $\omega$  é a frequência de oscilação.

Para o raio nuclear e para a raiz quadrada do raio quadrático médio ("root mean square radius") foram utilizados os valores experimentais obtidos de espalhamento de elétrons<sup>20)</sup>:

$$R = 3,41 \text{ fm}, \quad (\text{III-6})$$

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 2,64 \text{ fm}. \quad (\text{III-7})$$

Para as energias de separação dos estados  $1s$  e  $1p$  foram utilizados valores obtidos de resultados experimentais de reações  $(p,2p)^{21}$ :

$$S_0 = 44,0 \text{ MeV}, \quad (\text{III-8a})$$

$$S_1 = 16,3 \text{ MeV}, \quad (\text{III-8b})$$

onde se adotou, para a energia de separação do estado  $1p$ , uma média ponderada das energias de separação dos estados  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$ :

$$S_1 = \frac{1}{3} S_{1p_{1/2}} + \frac{2}{3} S_{1p_{3/2}}. \quad (\text{III-9})$$

O parâmetro  $\gamma$  da função de onda nuclear foi obtido fazendo-se coincidir o valor experimental de  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$  (relação (III-7)) com o valor calculado:

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle r_0^2 \rangle + \frac{3}{4} \langle r_1^2 \rangle, \quad (\text{III-10})$$

onde

$$\langle r_0^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 R_{10}^2(r) r^2 dr = \frac{3}{2} \frac{1}{\gamma^2} \quad (\text{III-11a})$$

e

$$\langle r_1^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 R_{11}^2(r) r^2 dr = \frac{5}{2} \frac{1}{\gamma^2}. \quad (\text{III-11b})$$

Assim,

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \frac{3}{2} \frac{1}{\gamma} \quad (\text{III-12})$$

e, portanto,

$$\gamma = 0,568 \text{ fm}^{-1}. \quad (\text{III-13})$$

Adotou-se, como potencial ótico nuclear, um potencial do tipo poço quadrado, ou seja, uma densidade nuclear

$$\rho(r) = \begin{cases} 0, & r > R \\ C, & r < R \end{cases}, \quad (\text{III-14})$$

onde  $R = r_0 A^{1/3}$  ( $A = 16$ , para a reação estudada) é o raio nuclear e  $C$  é uma constante determinada pela condição de normalização

$$\int \rho(r) d^3r = 4\pi \int_0^{\infty} r^2 \rho(r) dr = 1: \quad (\text{III-15a})$$

$$4\pi C \int_0^R r^2 dr = 1, \quad (\text{III-15b})$$

isto é,

$$C = \frac{3}{4\pi R^3}. \quad (\text{III-16})$$

Foram consideradas apenas as partes centrais dos potenciais óticos que atuam sobre as partículas incidente ( $j = 0$ ) e emergentes ( $j = 1, 2$ ). Explicitando as partes real e imaginária do potencial  $V_j(r)$ , tem-se

$$V_j(r) = U_j(r) + iW_j(r), \quad (\text{III-17})$$

onde  $U_j(r)$  e  $W_j(r)$  são reais.

Esta expressão pode ser escrita na forma

$$V_j(r) = (\alpha_j + i) W_j(r), \quad (\text{III-18})$$

onde  $\alpha_j$  é a razão entre a parte real e a parte imaginária do potencial.

Expressando a parte imaginária do potencial  $\bar{O}$  tico na forma<sup>22),23)</sup>

$$W_j(r) = - \frac{(\hbar c)^2 k_j}{E_j} \frac{1}{2\lambda_j}, \quad (\text{III-19})$$

temos

$$V_j(r) = - \frac{1}{2\lambda_j} \frac{(\hbar c)^2 k_j}{E_j} (\alpha_j + i). \quad (\text{III-20})$$

No caso de a parte imaginária do potencial ótico (parte do potencial responsável pela absorção) ser do tipo poço quadrado (constante, dentro do núcleo), o parâmetro  $\lambda_j$  em (III-19) é o livre caminho médio da partícula dentro do núcleo.

Com a convenção de que as integrais de linha para o caso  $j=0$  e para os casos  $j=1,2$ , respectivamente, sejam aquelas indicadas nas eqs. (II-12a) e (II-12b), os fatores de distorção

$$D_j(\underline{r}) = \exp \left[ -i \frac{E_j}{(\hbar c)^2 k_j} \int V_j(r') ds_j \right] \quad (j=0,1,2) \quad (\text{III-21})$$

têm agora a forma

$$D_j(\underline{r}) = \exp \left[ \frac{1}{2\lambda_j} (i\alpha_j - \beta_j) \int ds_j \right] \quad (j=0,1,2), \quad (\text{III-22})$$

onde  $\beta_j$  tem o valor 1 ou 0 quando, respectivamente, se considera ou não o efeito da parte imaginária do potencial ótico  $V_j$ ; outrossim, a  $\alpha_j$  é atribuído o valor zero quando não se considera o efeito da parte real do potencial ótico  $V_j$ .

Como foram adotados potenciais óticos que se anulam na região fora do núcleo, os caminhos percorridos pelos prótons, representados pelas integrais de linha em (II-22), correspondem apenas a caminhos percorridos dentro do núcleo.

O livre caminho médio do próton de alta energia dentro do núcleo pode ser expresso, em termos da seção de choque total próton-núcleo ( $\sigma_j^T$ ), pela relação

$$\lambda_j = \frac{1}{\rho \sigma_j^T} . \quad (\text{III-23})$$

### III-2 Técnica empregada na construção dos diagramas

Uma vez fixadas a energia incidente no processo  $^{16}\text{O}(p, 2p)^{15}\text{N}$  e a camada nuclear a ser investigada, determinamos os valores da distribuição de momentum  $P(k_r)$  para pares  $(k_r, \phi_r)$  de modo que, em um mapeamento polar como o esquematizado na figura III-1, diagramas pudessem ser construídos, ligando-se pontos associados a valores iguais de  $P$ .

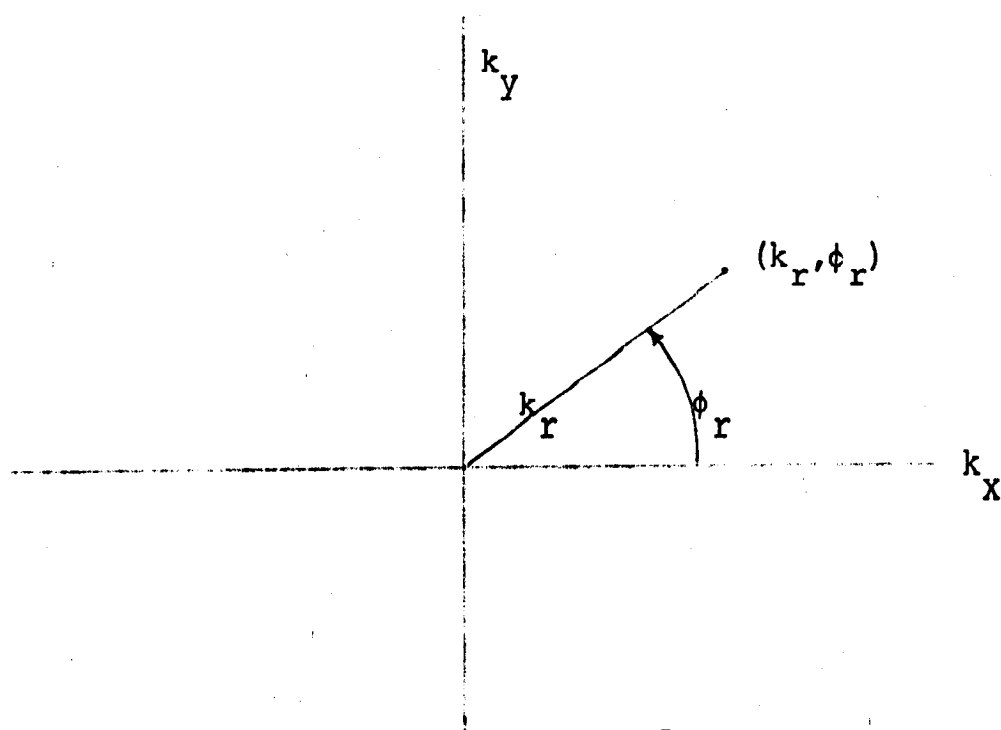


FIGURA III-1

A direção do próton incidente foi associado o eixo  $x$ ;  $k_x$  e  $k_y$  referem-se, respectivamente, às componentes  $x$  e  $y$  do momentum de recuo  $\vec{k}_r$ .

Os valores das distribuições de momentum foram calculados através de um programa de computador, de cuja elaboração alguns detalhes relevantes são discutidos no apêndice.

A fim de obter orientação para uma boa escolha dos valores de  $P$  a utilizar na construção dos diagramas, foram construídas algumas curvas de correlação angular, para cada caso, associadas a alguns dos ângulos de recuo.

A escolha resultou em diagramas de contorno associados a valores de  $P$  correspondentes, nas curvas de correlação angular, em cada direção, a regiões nem próximas dos picos e nem próximas dos mínimos das curvas.

Inicialmente, fez-se variar  $k_r$  de 0 a  $1 \text{ fm}^{-1}$  a intervalos constantes de  $0,1 \text{ fm}^{-1}$ , e  $\phi_r$  a intervalos de  $15^\circ$ . A localização de pontos de cada diagrama, associados ao respectivo valor da distribuição de momentum, foi efetuada através de interpolação linear em cada direção  $\phi_r$ , tomando-se um ponto associado a um valor calculado de P maior do que o procurado e outro ponto associado a um valor calculado de P menor do que o procurado. Tornou-se necessário, para melhor localização dos pontos dos diagramas, com exceção do caso do estado  $1s$ ,  $T_0 = 378 \text{ MeV}$ , proceder-se a uma segunda etapa, na qual se reduziu o intervalo de variação de  $k_r$  a no máximo  $0,04 \text{ fm}^{-1}$ , na região a ser pesquisada.

### III-3 Parâmetros associados aos prótons de alta energia

Para cada próton de alta energia envolvido na reação,  $\alpha_j$  sendo a razão entre as partes real e imaginária do potencial ótico nuclear, e  $\lambda_j$  sendo seu livre caminho médio dentro do núcleo, o mais conveniente é atribuir, a estes parâmetros, valores obtidos de dados experimentais, por serem mais realísticos que valores calculados teoricamente.

Foram feitas medidas com o synchro-cyclotron de 600 MeV da Organização Européia para a Pesquisa Nuclear (CERN), em Genebra<sup>24)</sup>. Estas medidas cobrem um intervalo de energia de 180 a 560 MeV, para vários núcleos, entre eles o

$^{16}\text{O}$ . Neste intervalo de energia, a ref. 24) fornece, diretamente, valores numéricos para a seção de choque total próton-núcleo, e para a razão entre as partes real e imaginária da amplitude de espalhamento próton-núcleon a zero grau independente de spin, que equivale à razão entre as partes real e imaginária do potencial ótico nuclear que atua sobre o próton<sup>22)</sup>.

Foi-nos possível extrapolar as curvas que fornecem estes dados experimentais, de maneira a estender o intervalo de energia para a faixa - 160 - 560 MeV.

Neste intervalo de energia, portanto, obtêm-se, da ref. 24), valores numéricos para  $\sigma_j^T$  e  $\alpha_j$ . De posse destes valores, e utilizando as eqs. (III-23), (III-19) e (III-18), obtêm-se os valores numéricos de  $\lambda_j$  e do potencial ótico nuclear respectivo.

Desta maneira, determinamos os parâmetros associados aos prótons de alta energia, exceção feita a dois casos, nos quais as energias cinéticas não recaíram no intervalo 160-560 MeV. Trata-se das energias dos prótons emergentes no caso do bombardeio a 200 MeV:  $T = 78$  MeV, estado  $1s$ ;  $T = 92$  MeV, estado  $1p$ .

Nestes casos, recorreremos a um método usual, que utiliza argumentos teóricos e outros dados experimentais, que passamos a descrever.

Inicialmente, corrigimos a energia cinética do próton para sua energia efetiva dentro da matéria nu -



clear. Esta correção é expressa por<sup>25)</sup>

$$T_{ef} = T - U, \quad (\text{III-24})$$

onde  $U$  é a parte real do potencial ótico nuclear que atua sobre o próton.

A esta energia, determinamos a seção de choque total média livre próton-núcleon,

$$\sigma_o^t (T_{ef}) = \frac{1}{2} (\sigma_{pp} + \sigma_{pn}), \quad (\text{III-25})$$

onde, para os valores de  $\sigma_{pp}$  e  $\sigma_{pn}$ , seções de choque livre próton-próton e próton-nêutron, à energia  $T_{ef}$ , foram utilizados os dados experimentais da ref. 15).

Outra correção foi feita, esta sobre o valor de  $\sigma_o^t$ , para levar em conta o princípio de exclusão de Pauli, visto que o núcleon alvo é um núcleon nuclear. Com esta correção, segundo Goldberger<sup>26)</sup>, a seção de choque total efetiva próton-núcleon é

$$\sigma^t (T) = \sigma_o^t (T_{ef}) \left[ 1 - \frac{7}{3} \frac{\epsilon_F}{T_{ef}} \right], \quad (\text{III-26})$$

onde  $\epsilon_F$  é a energia de Fermi que, para o núcleo  $^{16}\text{O}$ , vale 26,30 MeV.

O valor do livre caminho médio, em cada caso, foi calculado através da relação

$$\lambda_j = \frac{1}{\xi \sigma_j^t}, \quad (\text{III-27})$$

onde  $\xi$  densidade da matéria nuclear,  $\xi$ , foi atribuído o valor  $15\rho$ ;  $\xi$  refere-se à densidade do  $^{15}\text{N}$  normalizada ao número de massa, enquanto  $\rho$  refere-se à densidade do  $^{16}\text{O}$  normalizada a 1.

Os valores de  $\alpha_j$  e dos potenciais óticos foram obtidos do trabalho teórico de Dabrowski e Sobiczewski<sup>25)</sup> que calcularam, para energias de até 300 MeV, parâmetros do potencial ótico que atua sobre um núcleon que atravessa a matéria nuclear. Como estes parâmetros referem-se à matéria nuclear ( $r_0 = 1,10$  fm), foi necessário corrigi-los para o núcleo  $^{16}\text{O}$  ( $r_0 = 1,35$  fm<sup>20</sup>). Esta correção baseia-se na expectativa de que a integral, sobre o volume nuclear, do potencial ótico que atua sobre a partícula que atravessa o núcleo, deve ter um certo valor fixo. Com isto, a correção para o caso do potencial ótico poço quadrado é expressa na forma

$$V = V_{DS} \times \left(\frac{1,10}{1,35}\right)^3, \quad (\text{III-28})$$

onde  $V_{DS}$  refere-se ao potencial ótico central calculado em 25).

Como impusemos a condição de energias emergentes iguais (cf. eq. (II-5)), os potenciais óticos que atuam sobre os prótons emergentes, em cada caso, são iguais:

$$U_1 = U_2 = U, W_1 = W_2 = W; \text{ e, conseqüentemente, } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.$$

A tabela III-1 apresenta os parâmetros determinados para todos os casos investigados neste trabalho. As energias cinéticas  $T$  e os momenta  $\hbar k_j$  foram obtidos através das eqs. (II-7) e (II-8), respectivamente.

Poderíamos ter determinado valores, para os parâmetros dos prótons cujas energias não se encontram no intervalo 160-560 MeV, através de um método mais simples, se bem que baseado puramente em cálculos teóricos. O método seria o de se obter os referidos parâmetros da ref. 25), que fornece diretamente tanto a parte real quanto a parte imaginária do potencial ótico nuclear, ou seja, também a razão  $\alpha_j$  e o livre caminho médio  $\lambda_j$  (cf. eq. (III-19)). A única correção a ser feita seria, então, a expressa pela eq. (III-28).

Apresentamos, a seguir, uma comparação entre os três métodos de obtenção dos dados numéricos, descritos nesta seção:

- (i) Obtenção direta dos dados através de resultados experimentais;
- (ii) Utilização de argumentos teóricos e de resultados experimentais de espalhamento livre;
- (iii) Obtenção direta dos dados através de cálculos teóricos.

$T_0$ (MeV)	Estado Nuclear	S (MeV)	T (MeV)	$k_{O1}$ ( $\text{fm}^{-1}$ )	k ( $\text{fm}^{-1}$ )	$\alpha_0$	$\alpha$	$\lambda_0$ (fm)	$\lambda$ (fm)	$-W_0$ (MeV)	-W (MeV)	$-U_0$ (MeV)	-U (MeV)
378	1s	44,0	167	4,68	2,96	0,25	1,03	4,49	4,05	15,4	12,9	3,9	13,3
	1p	16,3	181	4,68	3,09	0,25	0,94	4,49	4,15	15,4	13,0	3,9	12,2
200	1s	44,0	78	3,27	1,98	0,80	2,34	4,26	3,26	13,1	9,6	10,5	22,4
	1p	16,3	92	3,27	2,15	0,80	2,04	4,26	3,69	13,1	10,2	10,5	20,8

TABELA III-1

Parâmetros utilizados nos cálculos.

A comparação é feita para valores de parâmetros associados a um próton com energia cinética de 200 MeV, já que este valor se inclui tanto no intervalo de energia da ref. 24) quanto no da ref. 25).

A tabela III-2 apresenta os resultados obtidos, para  $\alpha$  e  $\lambda$ , através de cada um dos três métodos acima enumerados ( $T = 200$  MeV).

	Método de Determinação		
	(i)	(ii)	(iii)
$\alpha$	0,80	0,83	0,83
$\lambda$ (fm)	4,26	4,26	4,55

TABELA III-2

A comparação entre estes valores mostra uma consistência razoável entre os três métodos. Observa-se que o método (ii) forneceu dados mais consistentes com o método (i) (os dois métodos utilizados neste trabalho) do que o método (iii).

## IV - APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

### IV-1 Introdução

Inicialmente, vamos apresentar e analisar algumas curvas de distribuição de momentum da reação  $^{16}\text{O}(p,2p)^{15}\text{N}$  coplanar simétrica. A apresentação e a discussão dos diagramas de contorno construídos serão feitas logo após.

A figura IV-1 apresenta curvas características do estado nuclear  $1s$ , enquanto a figura IV-2 apresenta curvas características do estado nuclear  $1p$ . Ambas se referem ao processo em que a energia do próton incidente é de 200 MeV. Valores positivos de  $k_r$  correspondem a um ângulo 0 de recuo, valores negativos de  $k_r$  correspondem a um ângulo  $\pi$  de recuo.

Na figura IV-1, a curva sem distorção é a gaussiana típica do estado  $1s$ , enquanto as curvas distorcidas apresentam as seguintes características:

(i) A curva construída considerando-se apenas as partes reais dos potenciais óticos nucleares que atuam sobre os prótons de alta energia apresenta-se deslocada, em relação à curva não distorcida, no sentido de  $k_r$  positivo, revelando, também, uma atenuação em sua amplitude (~50% da amplitude da curva não distorcida) e um alargamento de seu pico. A curva reflete o espalhamento elástico dos prótons, no processo. Na figura, esta curva e a curva não distorcida representam resultados calculados multiplicados pelo fator 0,25.

(ii) A curva construída considerando-se apenas as partes imaginárias dos potenciais óticos apresenta-se com a amplitude atenuada (amplitude ~20% da amplitude da curva não distorcida), sem deslocamento do pico. A curva reflete a absorção sofrida pelos prótons, no processo.

(iii) A curva construída considerando-se os potenciais óticos completos apresenta uma combinação dos efeitos comentados em (i) e (ii), representando tanto o espalhamento elástico quanto a absorção que ocorrem no processo. São curvas deste tipo as obtidas experimentalmente.

(iv) As três curvas distorcidas não apresentam a simetria da gaussiana não distorcida.

Na figura IV-2 a curva sem distorção apresenta os dois picos, e o zero na origem, característicos do estado lp. As mesmas considerações, feitas com relação às curvas distorcidas do estado ls, valem para o estado lp tornando-se, para este último, mais evidente a assimetria das curvas provocada pela distorção. Note-se o mínimo preenchido, nas curvas distorcidas.

A atenuação e o alargamento dos picos, nas curvas que apresentam a distorção causada pelas partes reais dos potenciais óticos, é consequência de seus deslocamentos já que, não ocorrendo absorção, deve-se verificar a conservação da probabilidade  $\int P(\underline{k}_r) d^3k_r$ , isto é, a conservação do número total de partículas.

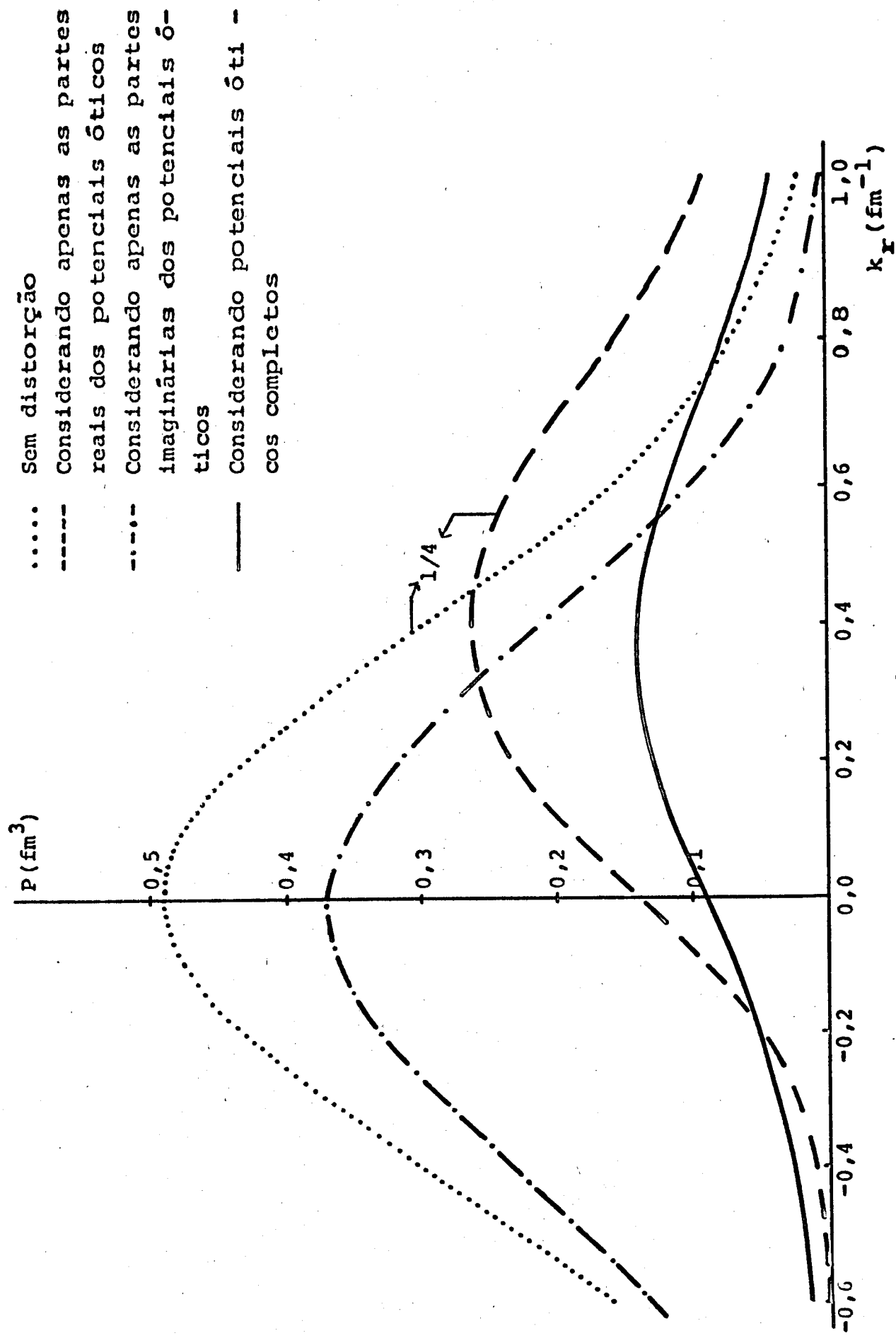


FIGURA IV-1  
 Curvas de distribuição de momentum do estado  $1s$  do  $^{16}\text{O}$ , obtidas da reação  $^{16}\text{O}(p,2p)^{15}\text{N}$  coplanar simétrica, à energia incidente de 200 MeV.



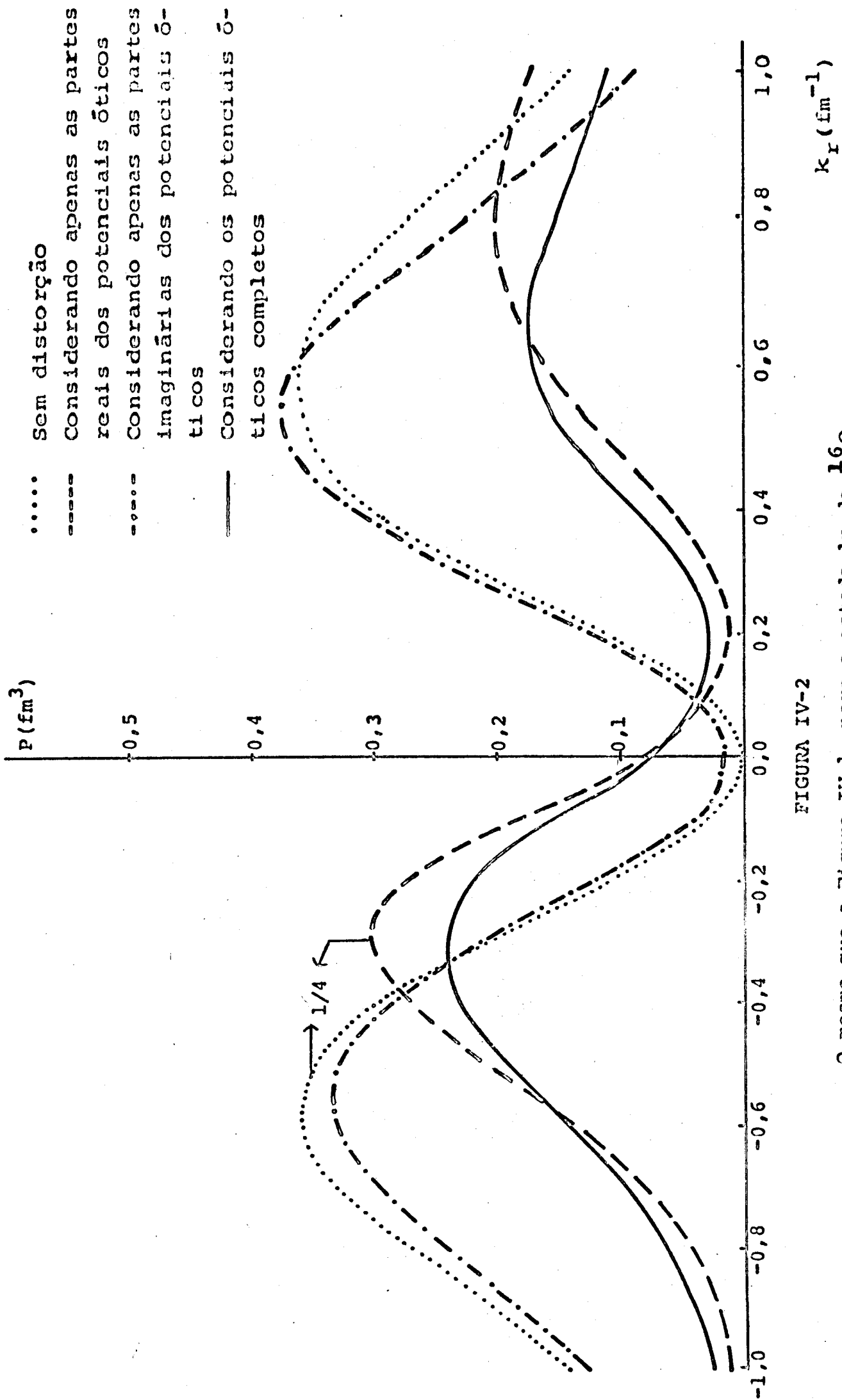


FIGURA IV-2

O mesmo que a Figura IV-1, para o estado  $1p$  do  $^{16}\text{O}$ .

Se, para cada estado nuclear investigado, e para cada energia de incidência, é construída a superfície  $P(\underline{k}_r)$  ( $\underline{k}_r$  apresentando apenas componentes nas direções  $x$  e  $y$ , já que o espalhamento é coplanar), a interseção desta superfície com um plano perpendicular ao plano de espalhamento, que contenha a direção de incidência, será uma curva de correlação angular do tipo das apresentadas nas figuras IV-1 e IV-2. Por outro lado, a interseção da superfície  $P(\underline{k}_r)$  com um plano paralelo ao plano de espalhamento, que corte o eixo vertical em um determinado valor de  $P(\underline{k}_r)$ , será o diagrama de contorno associado ao dado valor de  $P(\underline{k}_r)$ .

Os diagramas de contorno construídos apresentam uma simetria em relação ao eixo  $k_x$ , simetria esta que é discutida no apêndice. Foram calculados pontos de cada diagrama associados a ângulos de recuo com valores entre  $0$  e  $\pi$ , sendo a parte inferior de cada diagrama (pontos associados a ângulos de recuo com valores entre  $\pi$  e  $2\pi$ ) reproduzida da parte superior, por reflexão em relação ao eixo  $k_x$ .

Como os diagramas foram construídos por pontos, são também indicados esses pontos, localizados da maneira exposta na seção III-2.

Na seção II-2 foi apresentada a expectativa de se obter os diagramas de contorno que apresentam distorção causada apenas pelas partes reais dos potenciais óticos, como circunferências centradas em pontos fora da origem. Como a argumentação que origina esta expectativa é baseada na

suposição de uma condição de simetria aproximada, suposição esta que leva a não se considerar a dependência implícita dos fatores de distorção em  $k_r$ , mas, no entanto, ocorrem desvios da simetria (que aumentam com a diminuição da energia incidente), na realidade os pontos calculados para a construção desses diagramas não se localizam todos sobre circunferências. Procurou-se, contudo, construir, para cada conjunto de pontos calculados, a circunferência que melhor se aproxime destes pontos.

Cada diagrama apresentado traz a especificação do valor numérico (em  $\text{fm}^3$ ) da distribuição de momentum a que está associado.

Para facilidade de notação adotar-se-á, doravante, com referência aos três tipos de diagramas distorcidos, a seguinte nomenclatura:

(i) " $\beta = 0$ " são os diagramas que apresentam distorção causada apenas pelas partes reais dos potenciais óticos que atuam sobre os prótons de alta energia;

(ii) " $\alpha = 0$ " são os diagramas que apresentam distorção causada apenas pelas partes imaginárias dos potenciais óticos;

(iii) "Completos" são os diagramas que apresentam distorção causada pelo efeito combinado das partes reais e imaginárias dos potenciais óticos (potenciais óticos completos). Estes são os diagramas que podem ser obtidos experimentalmente.

Foi definido um parâmetro adimensional, "deformação", para as curvas  $\alpha = 0$  e completas, como a razão entre o comprimento do maior segmento de reta que une dois pontos da curva, em uma direção paralela ao eixo  $k_y$ , e o comprimento do maior segmento de reta que une dois pontos da curva, em uma direção paralela ao eixo  $k_x$ . Em uma curva não deformada a medida da "deformação" é 1. Quanto mais deformada for uma curva, menor será o valor numérico do parâmetro "deformação" a ela associado.

Note-se que há fontes de imprecisão, decorrentes da técnica adotada na construção dos diagramas de contorno. O processamento do programa de computador (discutido no apêndice) e a interpolação linear para a localização de pontos de um diagrama (discutida na seção III-2) acarretam pequena imprecisão. Já o traçado de uma curva, por pontos, pode acarretar uma imprecisão maior.

Além disto, como já foi salientado, leituras sobre as curvas  $\beta = 0$  são feitas sobre as circunferências a justadas aos pontos calculados, sendo de se notar, também, que o próprio processo de leitura de parâmetros sobre as curvas está sujeito a uma imprecisão operacional.

Dáí, não serem significativas pequenas diferenças entre valores lidos tanto para a "deformação" quanto para os deslocamentos das curvas.

Adotou-se, portanto, o critério de se aproximar, até a primeira casa decimal, valores de "deformação".

Este parâmetro foi definido tão somente para uma análise qualitativa dos efeitos de distorção.

#### IV-2 Estado 1s

São apresentados e analisados, a seguir, os diagramas de contorno das distribuições de momentum do estado nuclear 1s.

1. A figura IV-3 apresenta, para o processo em que a energia do próton incidente é de 378 MeV, os diagramas de contorno das distribuições de momentum do estado 1s, construídos levando-se em conta apenas as partes reais dos potenciais óticos, ou seja, anulando-se os fatores  $\beta_j$  na eq. (III-22) (diagramas  $\beta = 0$ ). Os valores das distribuições de momentum associados às curvas são, conforme está indicado na figura, respectivamente, 1,40, 1,00, 0,60 e 0,20 fm<sup>3</sup>.

Nota-se que foi possível construir circunferênças quase perfeitamente ajustadas aos pontos calculados. Este fato caracteriza bem a validade da condição de simetria aproximada (suposta como base da argumentação desenvolvida na seção II-2), para o caso da energia incidente de 378 MeV.

A figura mostra o sensível deslocamento sofrido pelas curvas, na direção e no sentido do momentum do próton incidente.

Confirma-se, portanto, que os diagramas de con

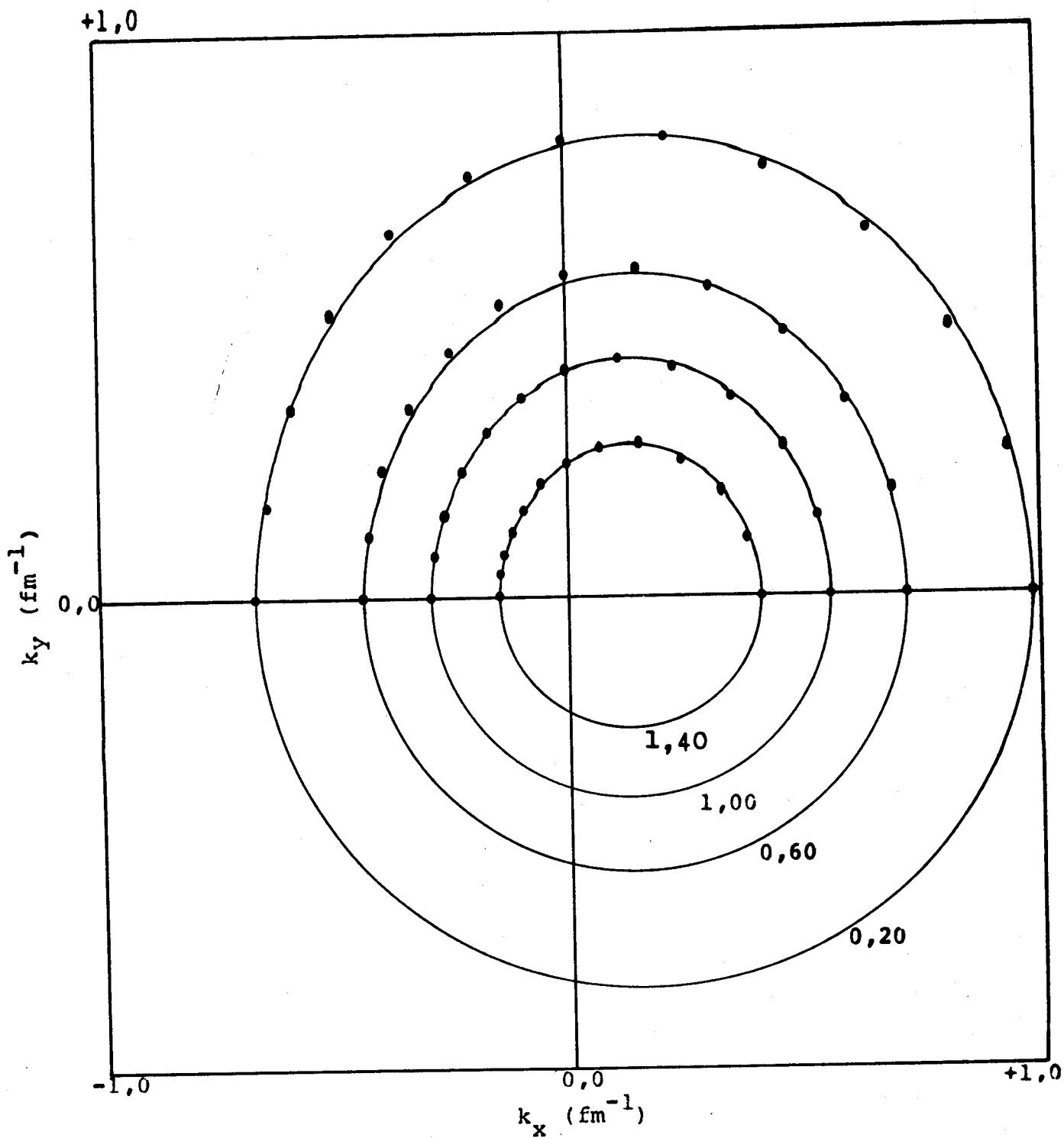


FIGURA IV-3

Diagramas construídos considerando-se apenas as partes reais dos potenciais óticos (diagramas  $\beta=0$ ), característicos do estado nuclear  $1s$  do  $^{16}\text{O}$ , para o processo com  $T_0=378$  MeV, e relativos aos valores 1,40, 1,00, 0,60 e 0,20 fm<sup>3</sup> da distribuição de momentum.

torno, distorcidos por potenciais óticos reais, mantêm aproximadamente a forma circular dos diagramas não distorcidos, mas têm seus centros localizados fora da origem do espaço de momentum, na direção de incidência. Como as partes reais dos potenciais óticos em questão são negativas (potenciais atrativos, cf. tabela III-1) o deslocamento observado tem, além da direção, o sentido do momentum incidente. A distribuição de momentum distorcida pelas partes reais dos potenciais óticos é, portanto, aproximadamente, uma função definida da mesma maneira que a distribuição de momentum não distorcida, substituindo-se a dependência desta em  $|\underline{k}_r|$  pela dependência daquela em  $|\underline{k}_r - \Delta\underline{k}_r|$ , onde  $\Delta\underline{k}_r$  é a medida dos deslocamentos sofridos pelos diagramas.

Os raios das circunferências da figura IV-3 não são muito diferentes dos raios das circunferências associadas aos valores respectivos de P, no caso sem distorção. Por exemplo, para  $P = 0,60 \text{ fm}^3$ , o raio da circunferência deslocada, na figura IV-3, é de  $0,59 \text{ fm}^{-1}$ , enquanto que o do diagrama não distorcido é de  $0,62 \text{ fm}^{-1}$ . Estas diferenças podem ser compreendidas como consequência das variações em forma e amplitude das curvas distorcidas.

As quatro circunferências construídas não apresentam um centro comum. No entanto, seus centros estão próximos uns dos outros, em torno do ponto médio  $k_x = 0,14 \text{ fm}^{-1}$ , afastados de no máximo  $\pm 0,02 \text{ fm}^{-1}$  deste ponto. Daí podemos dizer que o deslocamento das curvas,  $\Delta k_r$ , é de, a-

proximadamente,  $0,14 \text{ fm}^{-1}$ .

Apresentamos, a seguir, uma comparação entre este deslocamento e variações de momentum sofridas pelos prótons de alta energia, por efeito das partes reais dos potenciais óticos.

A eq. (III-24) dá a energia cinética de um nêutron atravessando a matéria nuclear; a partir desta energia, através da eq. (II-8), pode-se determinar o respectivo momentum da partícula.

Desta maneira, determina-se a variação no número de onda, sofrida pelo próton de alta energia, por efeito da parte real do potencial ótico nuclear.

O cálculo dos valores de  $\Delta k_0$  (próton incidente) e de  $\Delta k$  (prótons emergentes, de mesma energia), para os prótons envolvidos na investigação do estado  $1s$ , no processo a 378 MeV, utilizando parâmetros da tabela III-1, fornece:

$$\Delta k_0 = 0,03 \text{ fm}^{-1}, \quad (\text{IV-1a})$$

$$\Delta k = 0,13 \text{ fm}^{-1}. \quad (\text{IV-1b})$$

O valor

$$\Delta k_r = 0,14 \text{ fm}^{-1} \quad (\text{IV-2})$$

e o valor de  $\Delta k$  são perfeitamente comparáveis.

Isto pode ser entendido da seguinte maneira. Como  $\Delta k_r$  é a medida de um efeito médio (a cada ponto de um diagrama está associado um dado  $k_r$  e, portanto, uma certa geometria para o processo) e como o espalhamento tem, apro-



ximadamente, a simetria de um processo livre,  $\Delta k_0$  sendo pequeno em comparação com  $\Delta k$ , e  $\Delta k_1$  e  $\Delta k_2$  tendo, praticamente, as direções de  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente, o valor  $|\Delta k_1| = |\Delta k_2| = \Delta k$  deve estar próximo do valor de  $\Delta k_r$ , lido sobre os diagramas. Dito de outra forma, a relação cinemática

$$\underline{k}_0 = \underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_r \quad (\text{IV-3})$$

terá sua análoga

$$\underline{k}_0 + \Delta \underline{k}_0 = \underline{k}_1 + \Delta \underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \Delta \underline{k}_2 + \underline{k}'_r, \quad (\text{IV-4})$$

quando se introduz o efeito das partes reais dos potenciais óticos. Destas relações temos

$$\underline{k}'_r = \underline{k}_r - (\Delta \underline{k}_1 + \Delta \underline{k}_2 - \Delta \underline{k}_0). \quad (\text{IV-5})$$

Portanto, a distribuição de momentum distorcida pelas partes reais dos potenciais óticos é dada pela distribuição de momentum não distorcida associada ao momentum de recuo efetivo (IV-5). O valor de  $\Delta k_r$ , lido sobre os diagramas, é um parâmetro global mas, devido às condições favoráveis de simetria, torna-se bem próximo da variação  $(\Delta k_1 + \Delta k_2 - \Delta k_0)$  de cada  $k_r$ .

Associado à variação  $\Delta k_r = 0,14 \text{ fm}^{-1}$ , estaria um potencial ótico real  $U = -14,8 \text{ MeV}$ . O potencial ótico real associado à variação  $\Delta k = 0,13 \text{ fm}^{-1}$  é  $U = -13,3 \text{ MeV}$  (cf. tabela III-1). Vê-se, portanto, que a construção de diagramas de contorno pode fornecer, através das medidas de seus deslocamentos, elementos para o cálculo de um potencial médio atuante sobre o próton de alta energia<sup>6), 27), 28)</sup>.

Comparações quantitativas mais efetivas podem ser feitas para o caso das reações quase-livres ( $e, e'p$ ), nas quais os elétrons de alta energia contribuem de maneira desprezível para a distorção, o único potencial ótico presente sendo, portanto, o que atua sobre o próton emergente<sup>28)</sup>.

2. A figura IV-4 mostra, para o processo em que  $T_0 = 200 \text{ MeV}$ , o diagrama  $\beta = 0$ , para o estado  $1s$ , associado a  $P = 0,60 \text{ fm}^3$ .

Nota-se que, neste caso, não foi possível construir uma circunferência tão bem ajustada aos pontos calculados, quanto no caso  $T_0 = 378 \text{ MeV}$ . Fica, portanto, bem caracterizado o fato de a geometria do processo mais se aproximar da simetria suposta na seção II-2, quanto maior for a energia do próton incidente.

Vê-se, nitidamente, que a circunferência está bem mais deslocada do centro, do que a correspondente circunferência ( $P = 0,60 \text{ fm}^3$ ) para o caso  $T_0 = 378 \text{ MeV}$ . Este aumento do deslocamento  $\Delta k_r$  com a diminuição da energia é reflexo do aumento, em valores absolutos, das partes reais

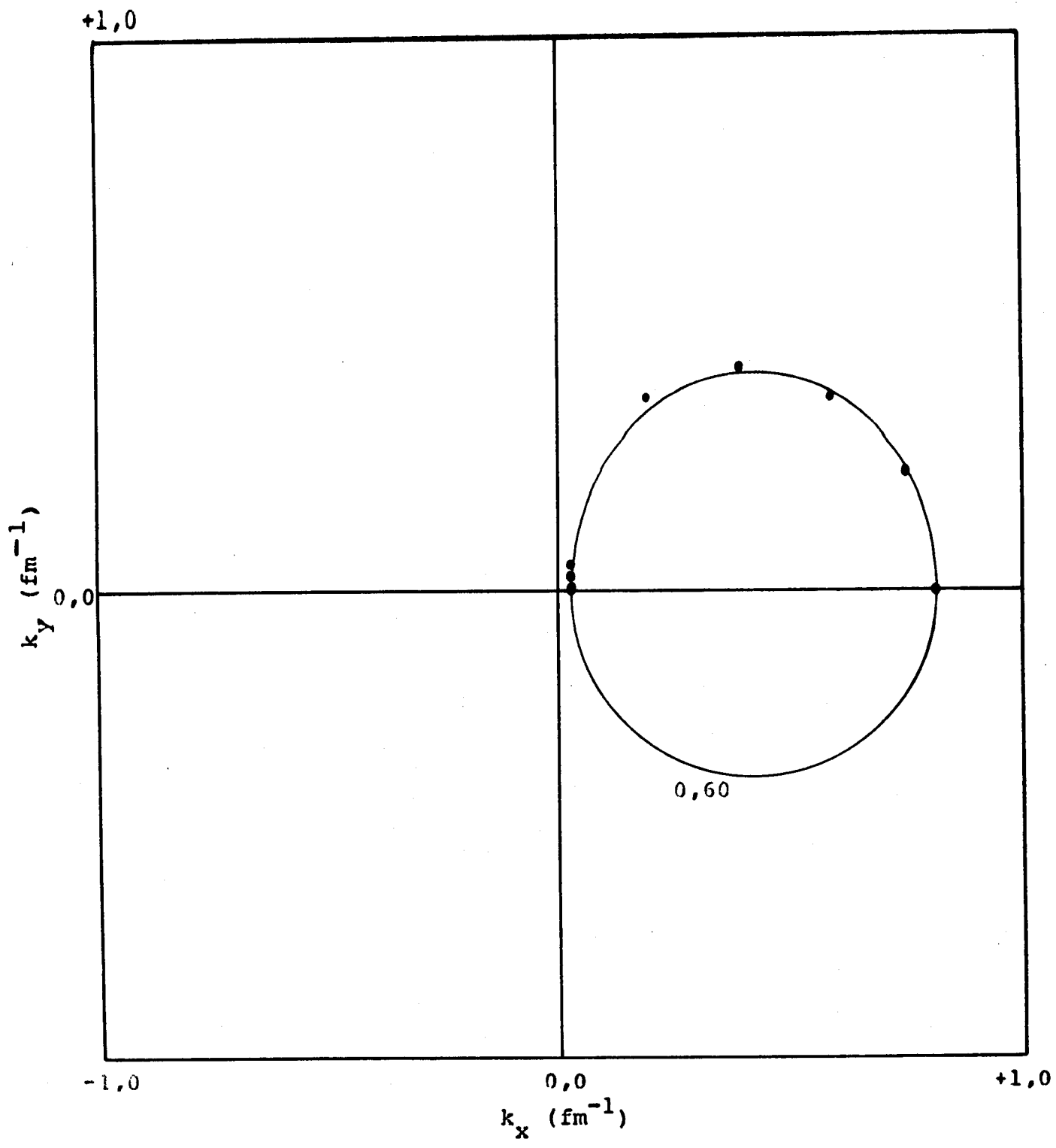


FIGURA IV-4

Diagrama  $\beta=0$ , característico do estado  $1s$ , para o processo com  $T_0=200$  MeV, associado a  $P=0,60$   $\text{fm}^3$ .

dos potenciais óticos, com a diminuição da energia (cf. tabela III-1), isto é, do maior espalhamento elástico sofrido pelos prótons, a energias mais baixas.

A circunferência tem um raio de  $0,40 \text{ fm}^{-1}$ . Comparando este valor com o raio da respectiva circunferência ( $P = 0,60 \text{ fm}^3$ ) para o caso  $T_0 = 378 \text{ MeV}$ ,  $0,59 \text{ fm}^{-1}$ , e o raio da respectiva circunferência não distorcida,  $0,62 \text{ fm}^{-1}$ , vê-se que a variação do raio da curva distorcida pelas partes reais dos potenciais óticos, em comparação com o da curva não distorcida, aumentou com a diminuição da energia incidente. Isto reflete a maior variação em forma e amplitude, das curvas de correlação angular distorcidas, com a diminuição da energia. Esta diminuição do raio, simultaneamente com o aumento do deslocamento, implicaram em que a circunferência da figura IV-4 esteja toda ela localizada na região de  $k_x$  positivos.

O deslocamento da curva, na direção e no sentido de incidência, é de  $0,43 \text{ fm}^{-1}$ . Nota-se que, aproximadamente, este é o deslocamento da curva de correlação angular, construída considerando-se apenas as partes reais dos potenciais óticos, apresentada na figura IV-1.

Comparando o deslocamento da curva com as variações de momentum dos prótons de alta energia, obtêm-se:

$$\Delta k_r = 0,43 \text{ fm}^{-1}, \quad (\text{IV-6})$$

$$\Delta k_o = 0,09 \text{ fm}^{-1}, \quad (\text{IV-7a})$$

$$\Delta k = 0,27 \text{ fm}^{-1}. \quad (\text{IV-7b})$$

Ainda aqui,  $\Delta k$  e  $\Delta k_r$  são comparáveis, mas, devido ao fato de a geometria do processo não se aproximar tanto da geometria de um espalhamento livre quanto no caso de energias mais altas e, também, ao fato de o valor de  $\Delta k_0$  não ser desprezível, a diferença entre  $\Delta k_r$  e  $\Delta k$  é apreciável.

3. A figura IV-5 apresenta três diagramas de contorno das distribuições de momentum do estado  $1s$ , para o caso  $T_0 = 378$  MeV, construídos considerando-se apenas as partes imaginárias dos potenciais óticos, ou seja, anulando-se os fatores  $\alpha_j$  na eq. (III-22) (diagramas  $\alpha = 0$ ). Os valores da distribuição de momentum associados às curvas são, respectivamente, 0,30, 0,20 e 0,10 fm<sup>3</sup>.

Observa-se a deformação sofrida pelas curvas, em relação às formas circulares que teriam, no caso sem distorção. Outrossim, dentro de limites aceitáveis de precisão (3%), as curvas estão "centradas" na origem do espaço de momentum, não ocorrendo, efetivamente, deslocamentos das mesmas. Confirma-se, portanto, a expectativa de que o efeito das partes imaginárias dos potenciais óticos, responsáveis pela absorção dos prótons de alta energia, é o de deformar os diagramas de contorno das distribuições de momentum, sem deslocá-los no espaço de momentum, o deslocamento de diagramas sendo, unicamente, causado pelas partes reais dos potenciais óticos.

A medida do parâmetro "deformação" nas três

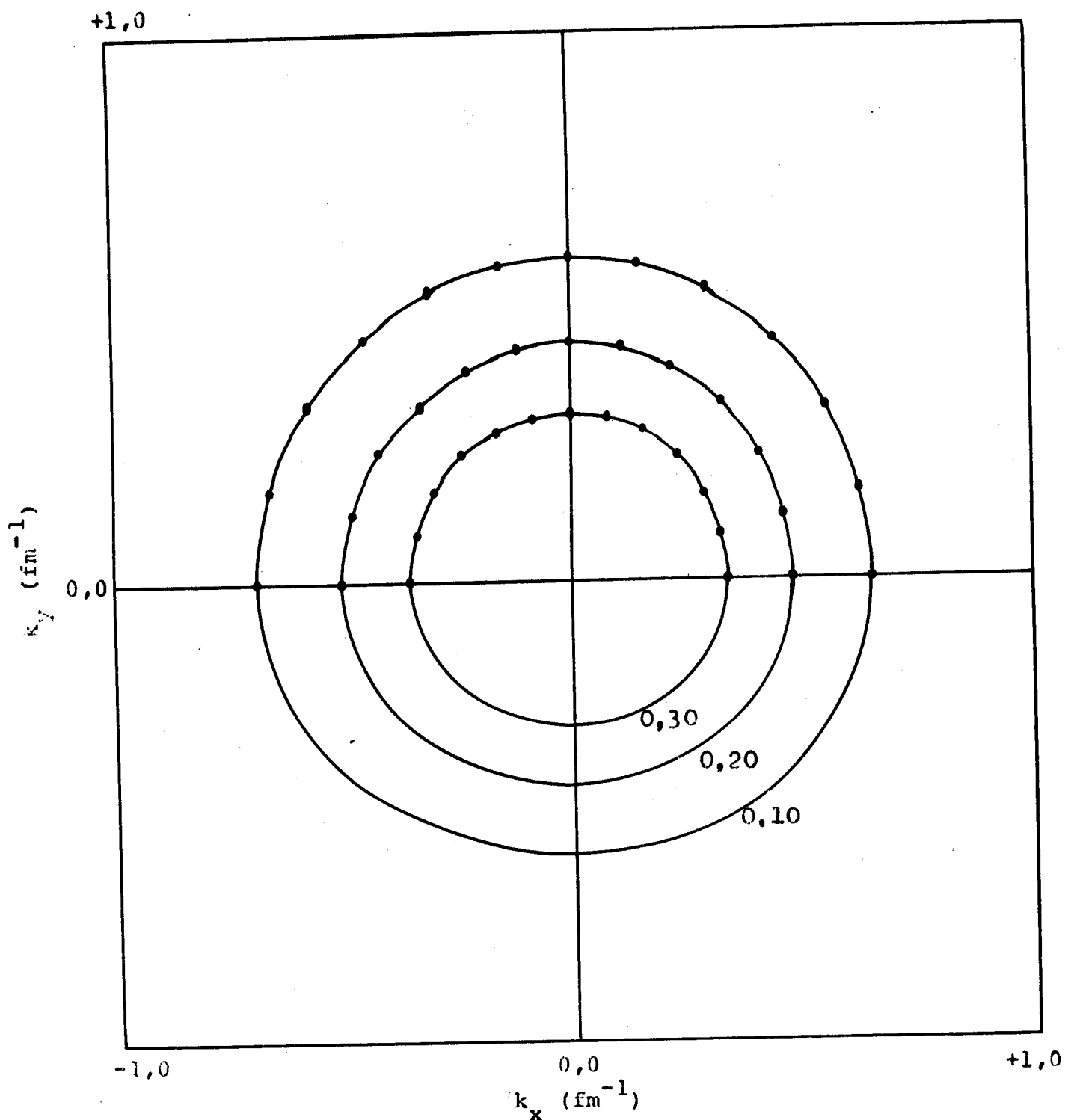


FIGURA IV-5

Diagramas construídos considerando-se apenas as partes imaginárias dos potenciais óticos (diagramas  $\alpha=0$ ), característicos do estado nuclear  $1s$ , para o processo com  $T_0=378$  MeV, e relativos aos valores 0,30, 0,20 e 0,10 fm<sup>3</sup> da distribuição de momentum.

curvas forneceu, aproximadamente, o mesmo valor, 0,9, em uma indicação de que a absorção não depende do valor da distribuição de momentum.

4. A figura IV-6 apresenta o diagrama  $\alpha = 0$ , para o caso  $T_0 = 200$  MeV, estado  $1s$ , associado a  $P=0,20$  fm<sup>3</sup>.

Torna-se, novamente, evidente o efeito da absorção, causando a deformação da curva. O parâmetro "deformação" apresentou, aqui, o valor 0,9, ou seja, o mesmo valor do parâmetro medido sobre a curva correspondente ( $P=0,20$  fm<sup>3</sup>), no caso  $T_0 = 378$  MeV.

Isto é reflexo da pequena variação das partes imaginárias dos potenciais óticos com a energia (cf. tabela III-1), isto é, a pequena variação da absorção com a energia.

5. A figura IV-7 apresenta três diagramas, para o caso  $T_0 = 378$  MeV, estado  $1s$ , construídos considerando-se tanto as partes reais quanto as partes imaginárias dos potenciais óticos nucleares, ou seja, os potenciais complexos completos (diagramas completos). As curvas estão associados os valores de distribuição de momentum 0,30, 0,20 e 0,10 fm<sup>3</sup>, respectivamente.

Observa-se, nitidamente, tanto os deslocamentos quanto as deformações apresentadas pelas curvas, isto é, a combinação dos efeitos das partes reais (deslocamentos) com os efeitos das partes imaginárias (deformações) dos potenciais óticos.

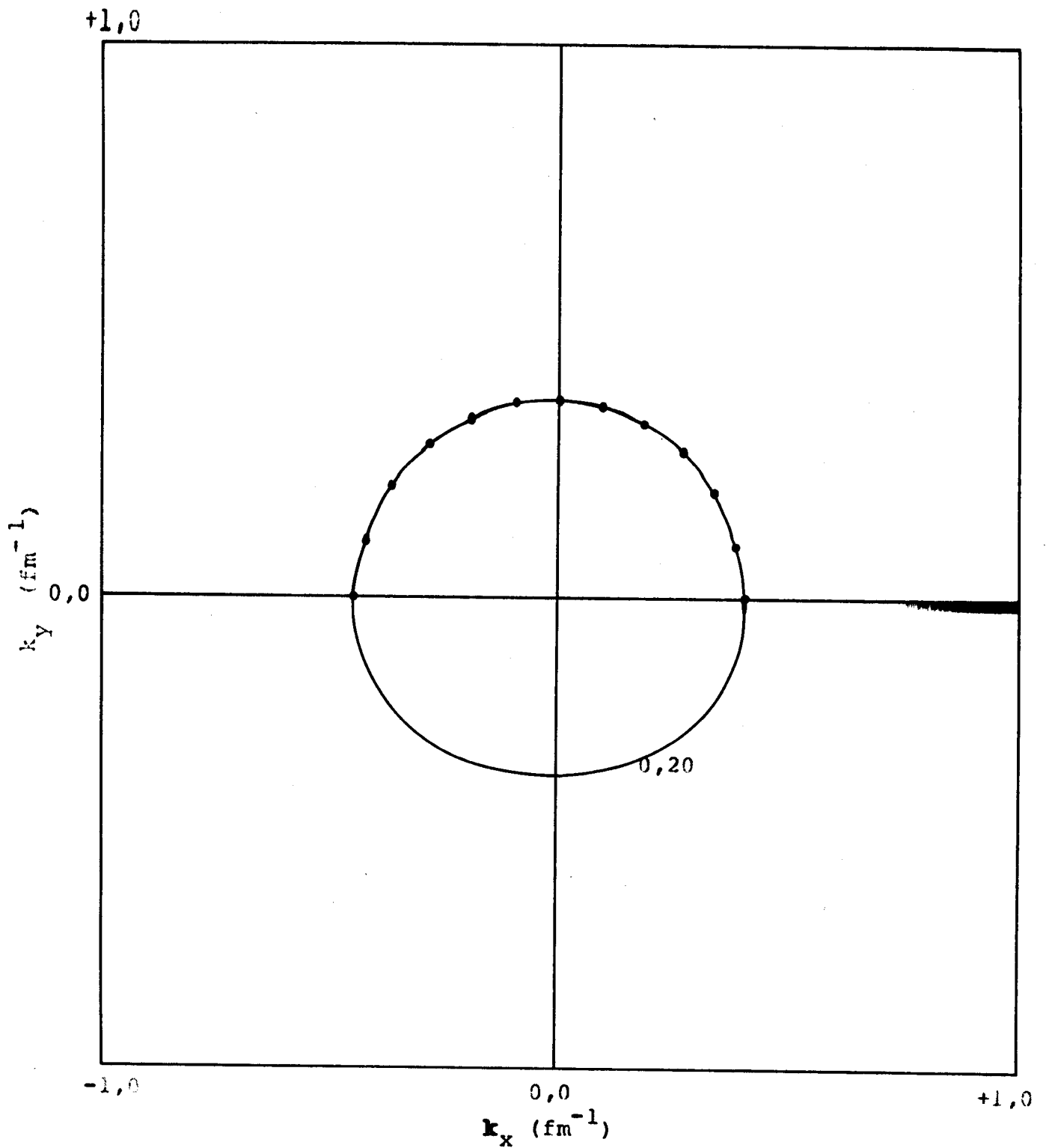


FIGURA IV-6

Diagrama  $\alpha=0$ , estado  $1s$ , para o processo com  $T_0=200$  MeV, associado a  $P=0,20$   $\text{fm}^3$ .



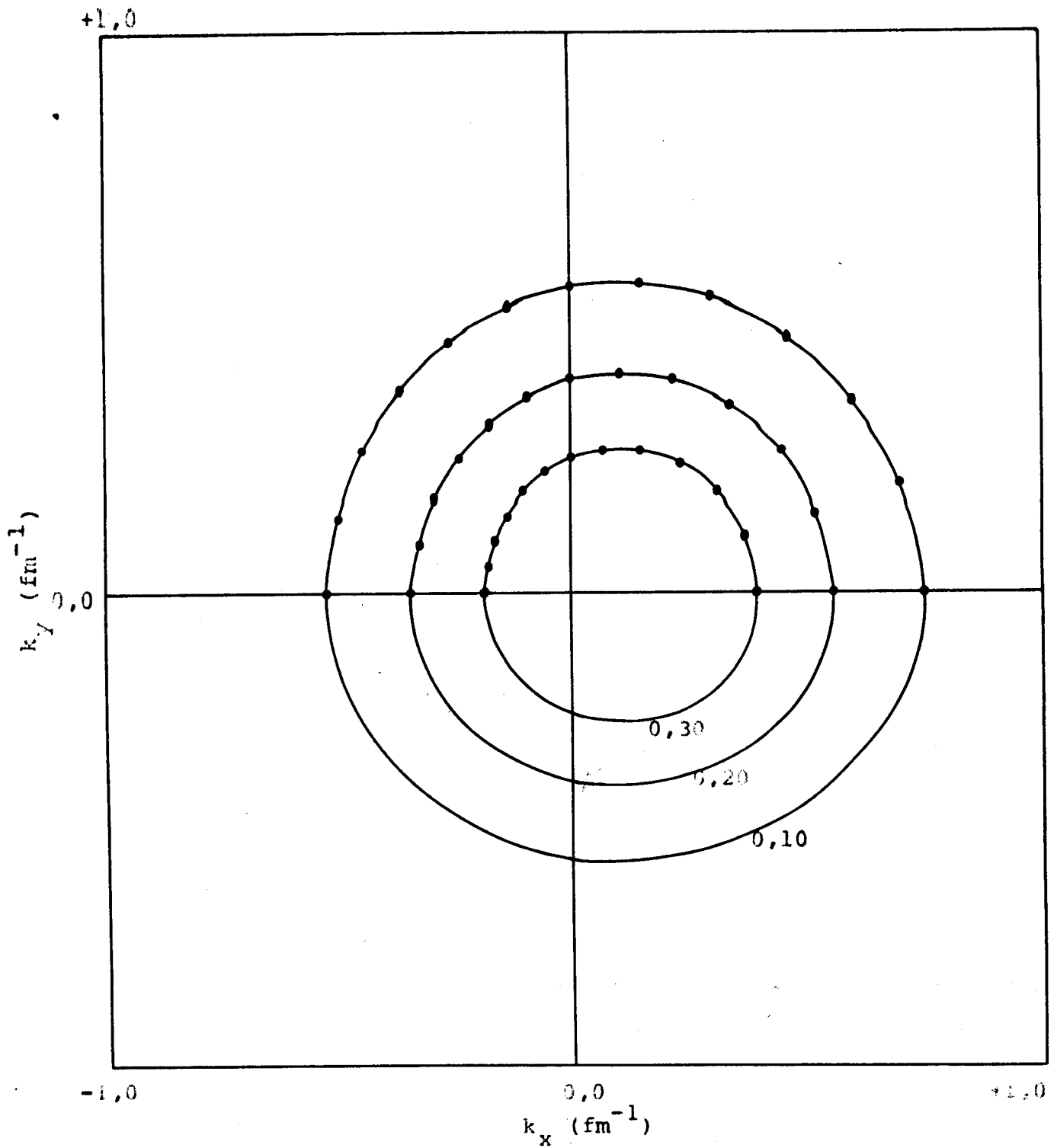


FIGURA IV-7

Diagramas construídos considerando-se os potenciais óticos com -pletos (diagramas completos), característicos do estado nuclear  $1s$ , para o processo com  $T_0 = 378$  MeV, e relativos aos valores 0,30, 0,20 e 0,10  $\text{fm}^3$  da distribuição de momentum.

As três curvas apresentam, como medida do parâmetro "deformação", o valor 0,9.

Como, para cada uma das curvas, o ponto médio do segmento de reta que une os dois pontos onde a curva corta o eixo  $k_x$  recai, aproximadamente, no ponto  $k_x = 0,11 \text{ fm}^{-1}$ , adotamos o valor  $\Delta k_x = 0,11 \text{ fm}^{-1}$  para o deslocamento das curvas, em relação à origem.

À energia  $T_0 = 378 \text{ MeV}$ , associados a  $P = 0,20 \text{ fm}^3$ , foram construídos, além do diagrama completo, os diagramas  $\beta = 0$  e  $\alpha = 0$  (figuras IV-3 e IV-5, respectivamente). Torna-se interessante, comparando estas três curvas, analisar mais detidamente a composição dos efeitos de distorção. As seguintes observações podem ser feitas:

(i) A medida da "deformação" para as curvas  $\alpha = 0$  e completa, é a mesma, 0,9, evidenciando que a deformação da curva completa, sendo reflexo da absorção, deve ser a mesma que a da curva  $\alpha = 0$ ;

(ii) Os deslocamentos das curvas  $\beta = 0$  e completa são, aproximadamente,  $0,14$  e  $0,11 \text{ fm}^{-1}$ , respectivamente. Como foi observado na seção IV-1, este tipo de leitura sobre os diagramas não pode ser encarado como muito preciso. Daí, a comparação entre estes valores evidenciar, analogamente ao observado em (i), que o deslocamento da curva completa, sendo reflexo do espalhamento, deve ser o mesmo que o da curva  $\beta = 0$ .

Os diagramas de contorno completos são os que

podem ser obtidos experimentalmente. Apesar de a leitura dos deslocamentos, sobre estes diagramas, ser mais difícil do que no caso das curvas  $\beta = 0$ , a comparação entre os valores de  $\Delta k_r$  medidos nas figuras IV-7 e IV-3 mostra a concordância razoável entre estes valores, evidenciando a viabilidade experimental deste tipo de medida, para uma análise semi-quantitativa como a apresentada no item 1.

6. A curva da figura IV-8 é o diagrama completo, para o caso  $T_0 = 200$  MeV, estado  $1s$ , associado a  $P=0,10$  fm<sup>3</sup>.

Novamente, é evidente a combinação dos efeitos do espalhamento elástico e da absorção, respectivamente, o deslocamento e a deformação da curva.

A leitura, sobre a curva, do parâmetro "deformação", forneceu o valor 0,8. Comparando este valor com a leitura 0,9 feita sobre a curva respectiva ( $P=0,10$  fm<sup>3</sup>), para o caso  $T_0 = 378$  MeV, vê-se, mais uma vez, o reflexo da pequena variação das partes imaginárias dos potenciais óticos com a energia (cf. tabela III-1).

Assim como o diagrama da figura IV-4 ( $\beta = 0$ ,  $T_0 = 200$  MeV,  $P = 0,60$  fm<sup>3</sup>), a curva da figura IV-8 está toda ela localizada na região de  $k_x$  positivos, o que pode ser explicado com base na mesma argumentação exposta no item 2, ao se comentar este fato.

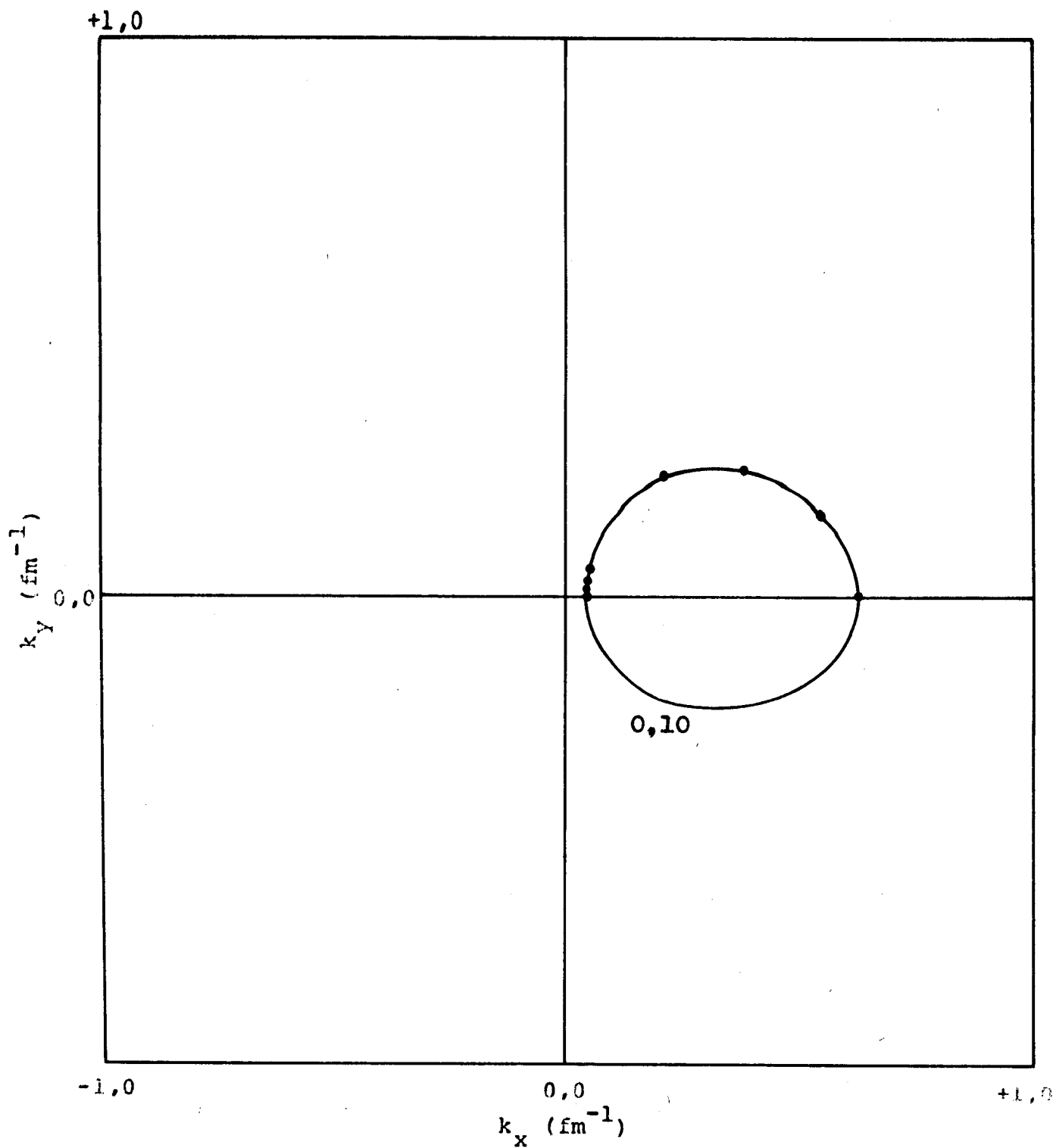


FIGURA IV-8

Diagrama completo, estado  $1s$ , para o processo com  $T_0 = 200 \text{ MeV}$ , associado a  $P = 0,10 \text{ fm}^3$ .

### IV-3 Estado lp

A seguir são apresentados e analisados os diagramas de contorno das distribuições de momentum do estado nuclear lp.

1. A figura IV-9 apresenta os diagramas  $\beta=0$ , para o processo em que  $T_0 = 378$  MeV, associados a  $P=1,00\text{fm}^3$ .

Devido ao formato das curvas de correlação angular para o estado lp (curvas da figura IV-2, por exemplo), diagramas associados a um mesmo valor da distribuição de momentum são, em geral, duas curvas que não se cruzam, como as da figura IV-9. A curva interna corresponde às partes laterais internas dos picos, nas curvas de correlação angular, isto é, as mais próximas da origem, enquanto a curva externa corresponde às partes laterais externas dos picos, isto é, as mais afastadas da origem.

As circunferências traçadas na figura ajustam-se bem aos pontos calculados, mas não tão bem quanto no caso do estado ls,  $T_0 = 378$  MeV (figura IV-3). Este fato decorre da forma mais acidentada da curva de correlação angular do estado lp, em comparação com a curva de correlação angular do estado ls.

Observa-se, nitidamente, o deslocamento dos diagramas, reflexo do espalhamento elástico sofrido pelos prótons de alta energia. Neste caso (estado lp), uma medida de deslocamentos, para comparação com potenciais óticos

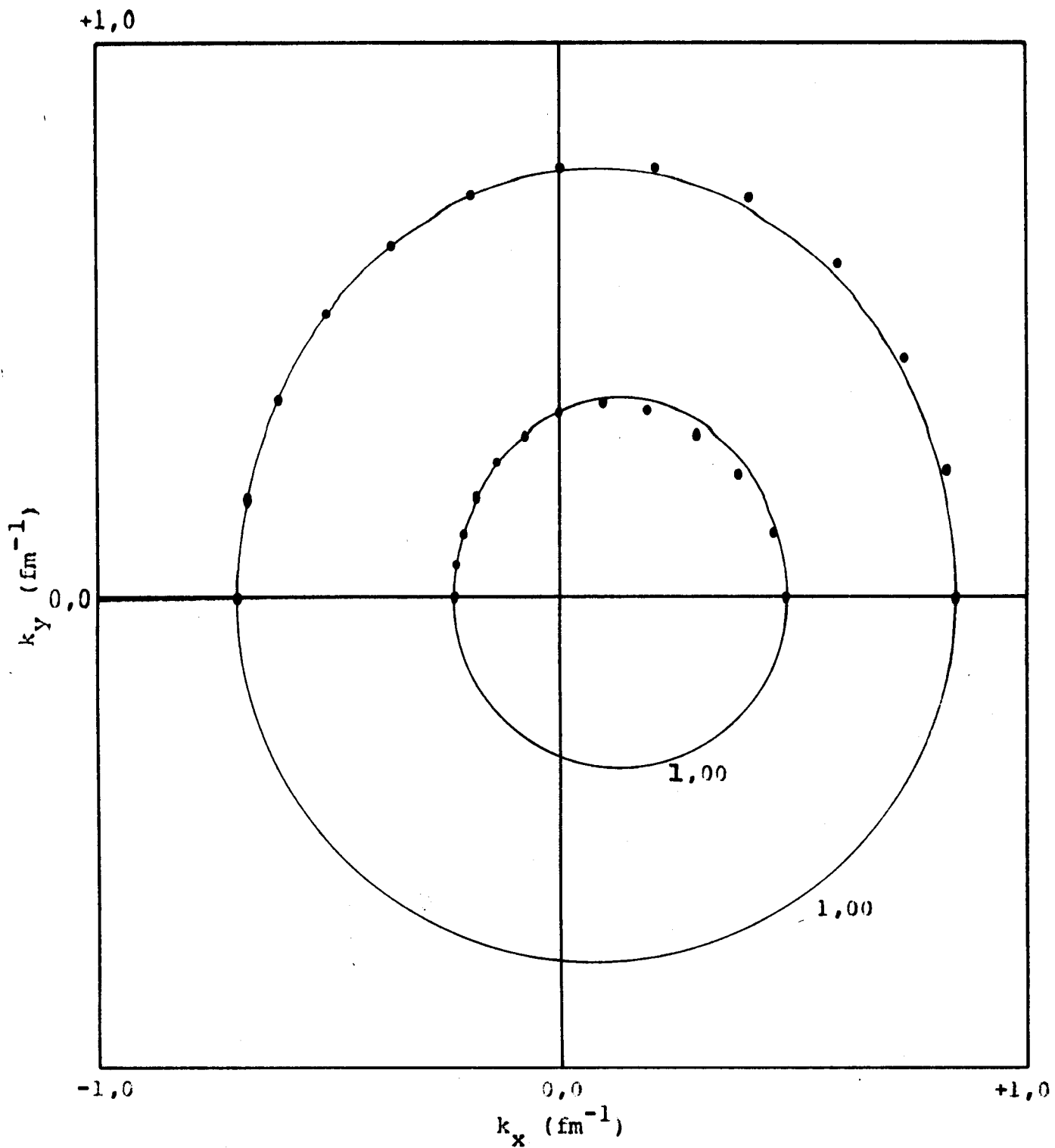


FIGURA IV-9

Diagramas  $\beta=0$ , estado  $1p$ , para o processo com  $T_0=378$  MeV, associados a  $P=1,00$   $\text{fm}^3$ .

reais, não se apresenta tão imediata como no caso do estado  $1s$ . Nas curvas da figura IV-9, por exemplo, as leituras dos deslocamentos forneceram, para as curvas interna e externa,  $0,13 \text{ fm}^{-1}$  e  $0,07 \text{ fm}^{-1}$ , respectivamente. Parece-nos natural que, para efetuar uma medida de deslocamento que permita uma análise semi-quantitativa como a apresentada no item 1, no caso do estado  $1p$  deve-se localizar um diagrama que corresponda a uma região próxima aos mínimos, nas curvas de correlação angular. O deslocamento de tal diagrama será, então, aproximadamente, o deslocamento dos mínimos das curvas de correlação angular, em qualquer direção  $\phi_r$ . A construção de um tal diagrama foge ao critério que estabelecemos, com base para a escolha dos valores da distribuição de momentum associados aos diagramas construídos, apresentado na seção III-2.

2. As curvas da figura IV-10 são os diagramas  $\beta = 0$ , associados a  $P = 0,70 \text{ fm}^{-3}$ , para o processo coplanar no qual  $T_0 = 200 \text{ MeV}$ .

Observa-se o nítido deslocamento das circunferências, na direção e no sentido do próton incidente.

A circunferência interna traçada não se ajusta muito bem aos pontos calculados, refletindo um afastamento sensível da geometria de um processo livre, para o espalhamento quase-livre a  $200 \text{ MeV}$ , significando que, a esta energia, a condição de simetria aproximada, suposta na seção II-2, que equivale a desprezar a dependência implícita

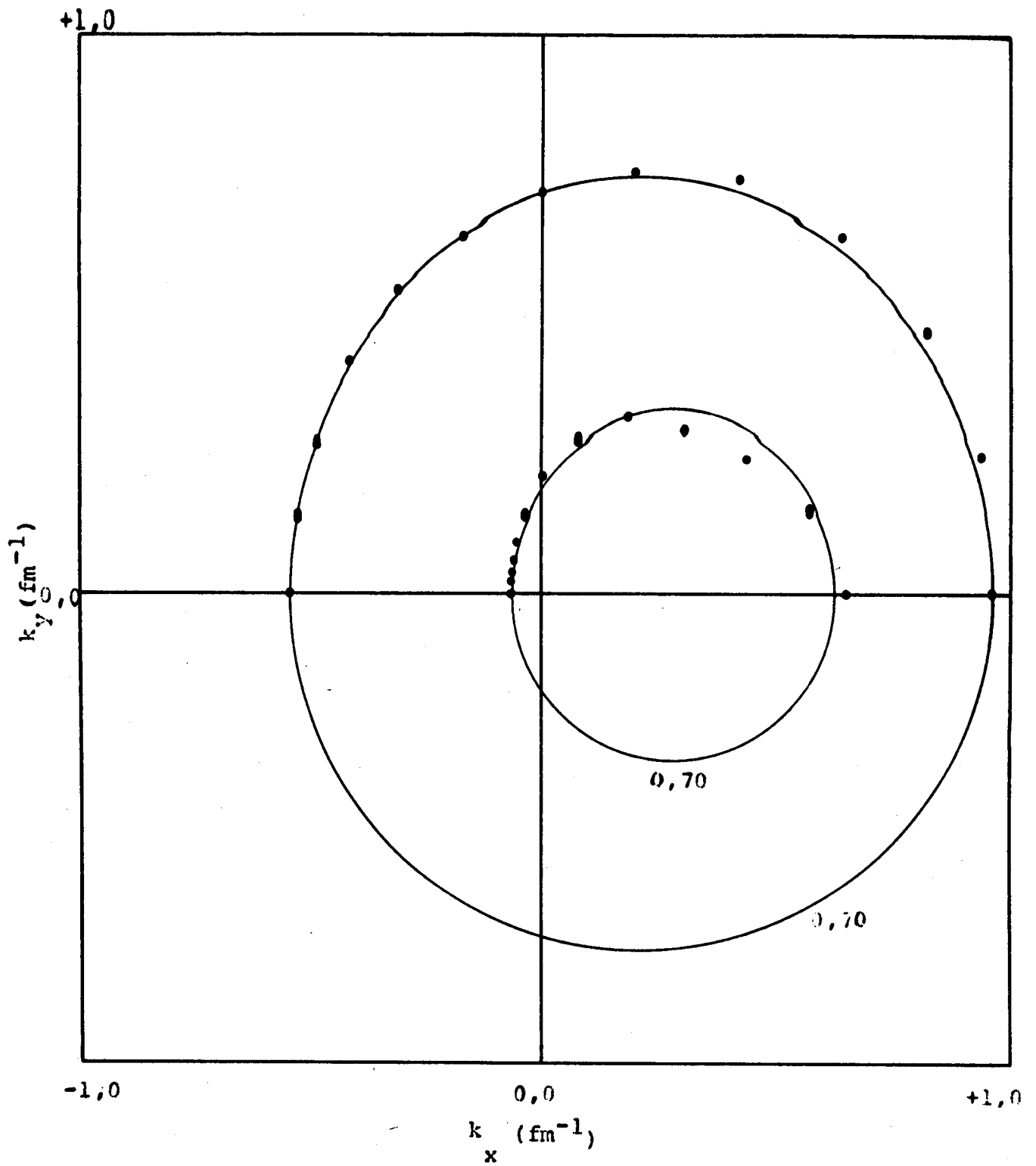


FIGURA IV-10

Diagramas  $\beta=0$ , estado  $1p$ , para o processo com  $T_0=200$  MeV, associados a  $P=0,70$   $\text{fm}^3$ .



dos fatores de distorção em  $k_r$ , já é uma simplificação muito forte.

3. A figura IV-11 apresenta os diagramas  $\alpha = 0$  do estado  $1p$ , para o processo a  $T_0 = 378$  MeV, associados a  $P = 0,20 \text{ fm}^3$ .

As curvas apresentam-se, em uma boa precisão (1%), "centradas" na origem, evidência de que as partes imaginárias dos potenciais óticos, responsáveis pela absorção, causam apenas a deformação dos diagramas, o deslocamento dos mesmos sendo efeito das partes reais dos potenciais óticos (espalhamento elástico).

Medidas para o parâmetro "deformação" forneceram, para as curvas interna e externa, os valores 0,8 e 1,0, respectivamente. Como às duas curvas está associado o mesmo valor da distribuição de momentum, é razoável que se adote o valor médio destas medidas, 0,9, para uma medida quantitativa do efeito da absorção (o de deformar os diagramas de contorno).

A curva externa é praticamente uma circunferência (a medida do parâmetro "deformação", não aproximada até a primeira casa decimal, é 0,98). O efeito da absorção sobre este diagrama, portanto, foi praticamente o de reduzir o raio da correspondente ( $P = 0,20 \text{ fm}^3$ ) circunferência externa que, no caso sem distorção, é de  $1,20 \text{ fm}^{-1}$ , no espaço de momentum.

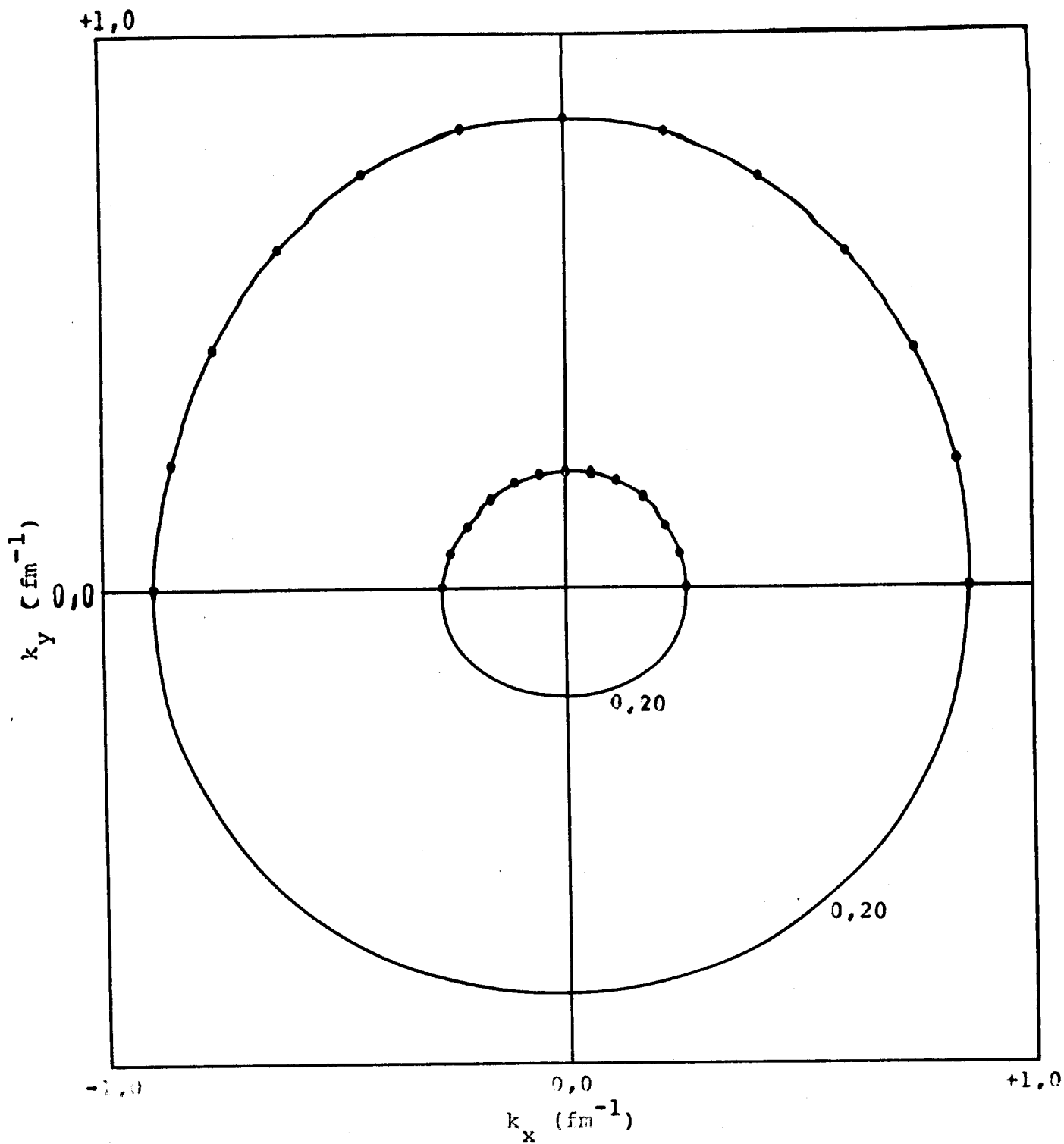


FIGURA IV-11

Diagramas  $\alpha=0$ , estado  $1p$ , para o processo com  $T_0=378$  MeV, associados a  $P=0,20$   $\text{fm}^3$ .

4. A figura IV-12 apresenta os diagramas  $\alpha=0$ , associados a  $P = 0,20 \text{ fm}^3$ , correspondentes ao processo coplanar com  $T_0 = 200 \text{ MeV}$ .

As medidas do parâmetro "deformação" forneceram, para as curvas interna e externa, os valores 0,8 e 1,0 (média 0,9), respectivamente, ou seja, as mesmas medidas correspondentes ao processo com  $T_0 = 378 \text{ MeV}$  (item 3). Temos, novamente, o reflexo da pequena variação das partes imaginárias dos potenciais óticos com a energia (cf. tabela III-1), implicando na pequena variação da absorção com a energia.

5. As curvas da figura IV-13 são os diagramas completos, para o processo em que  $T_0 = 378 \text{ MeV}$ , associados a  $P = 0,20 \text{ fm}^3$ .

É nítida, nas duas curvas, a composição dos efeitos das partes reais e imaginárias dos potenciais óticos que atuam sobre os prótons de alta energia.

Medidas do parâmetro deformação forneceram, para as curvas interna e externa, os valores 0,8 e 0,9, respectivamente. A coincidência da média entre estes dois valores, aproximada até a primeira casa decimal, 0,9, com a respectiva média para o caso  $\alpha = 0$ , da figura IV-11, evidencia, novamente, que a deformação dos diagramas completos, sendo reflexo da absorção, deve ser a mesma das curvas  $\alpha=0$ .

6. A figura IV-14 apresenta os diagramas completos, para o processo a  $200 \text{ MeV}$ , associados a  $P=0,12 \text{ fm}^3$ .

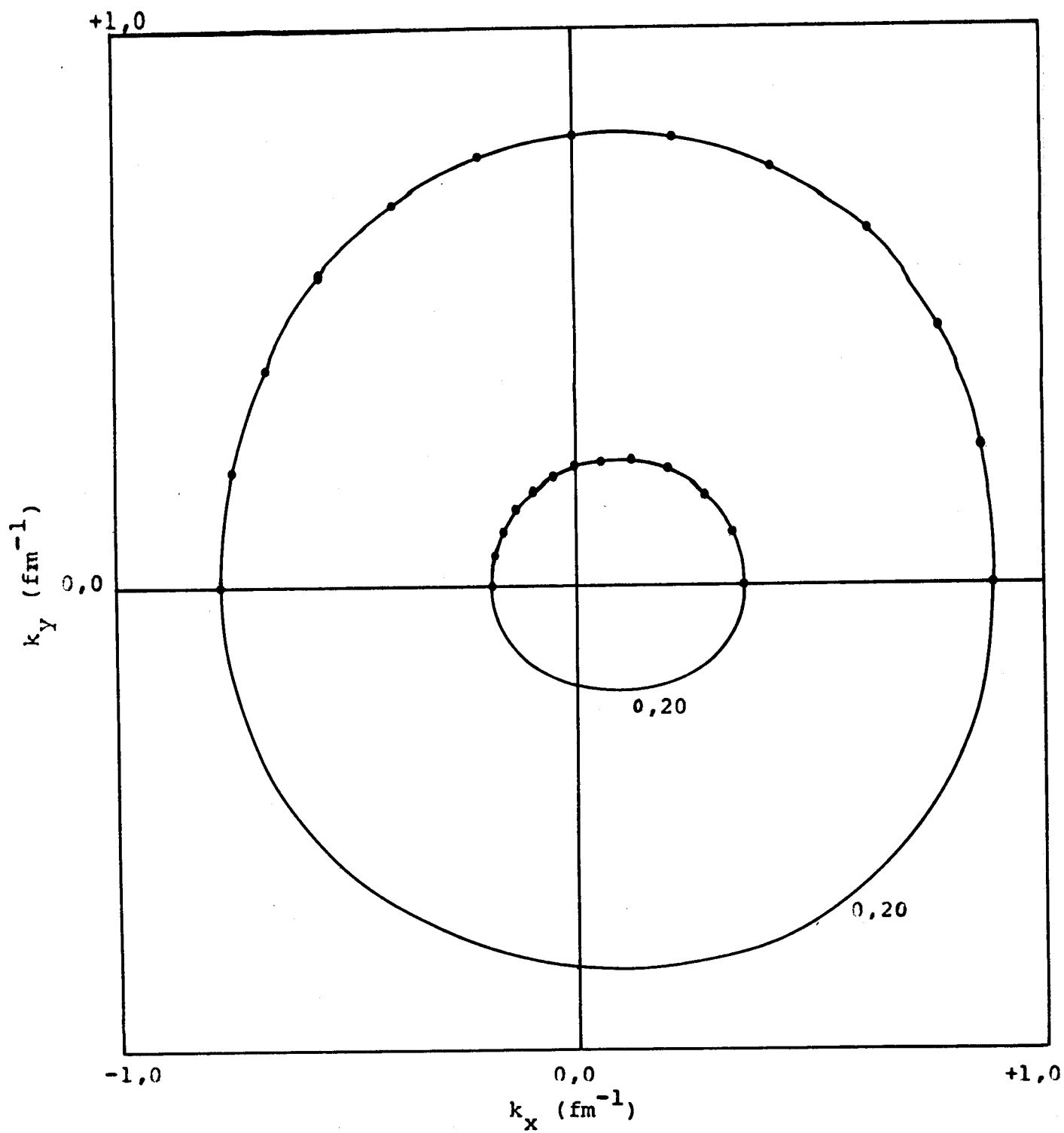


FIGURA IV-13

Diagramas completos, estado  $1p$ , para o processo com  $T_0=378$  MeV, associados a  $P=0,20 \text{ fm}^3$ .

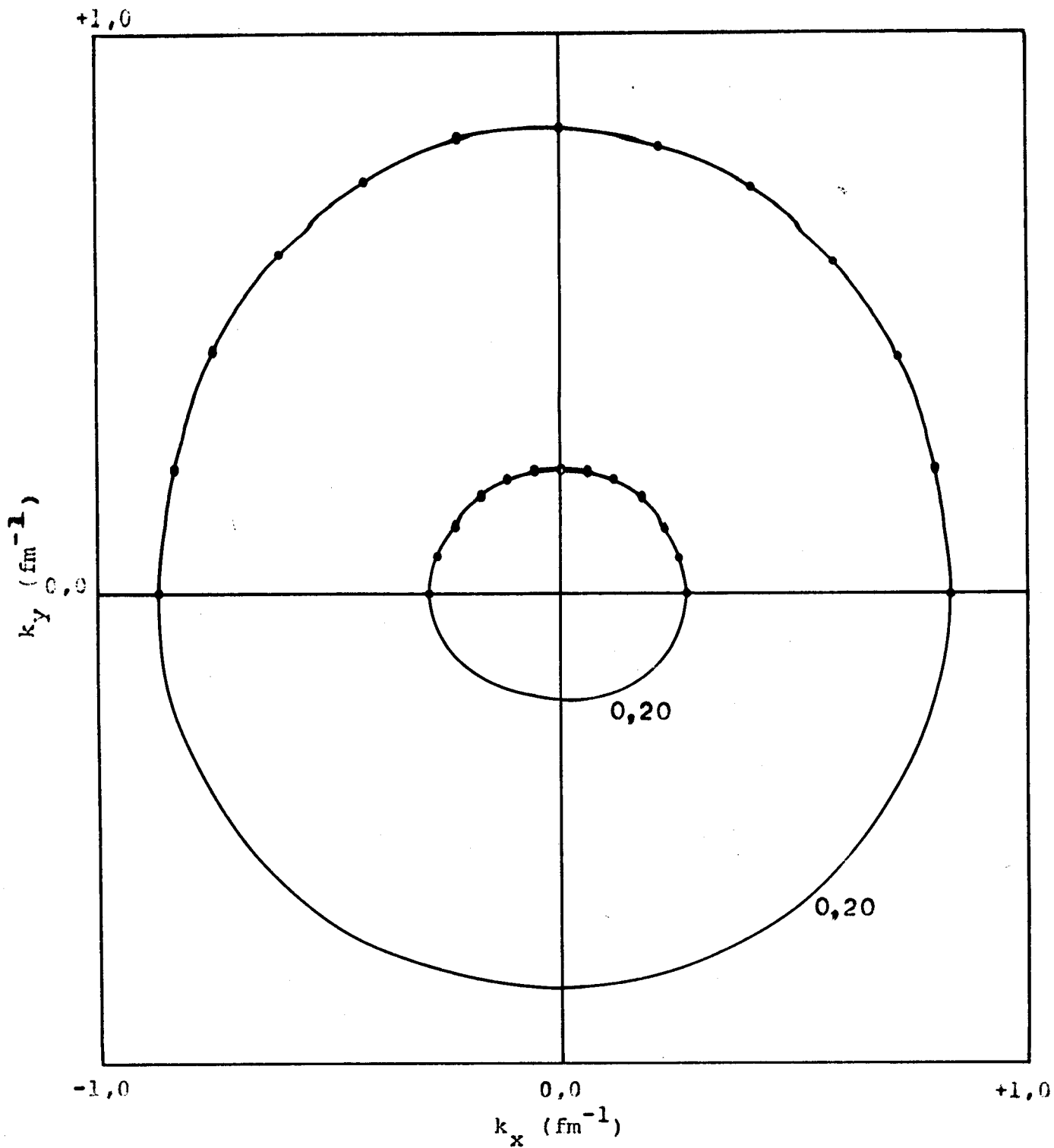


FIGURA IV-12

Diagramas  $\alpha=0$ , estado  $1p$ , para o processo com  $T_0=200$  MeV, associados a  $P=0,20 \text{ fm}^3$ .

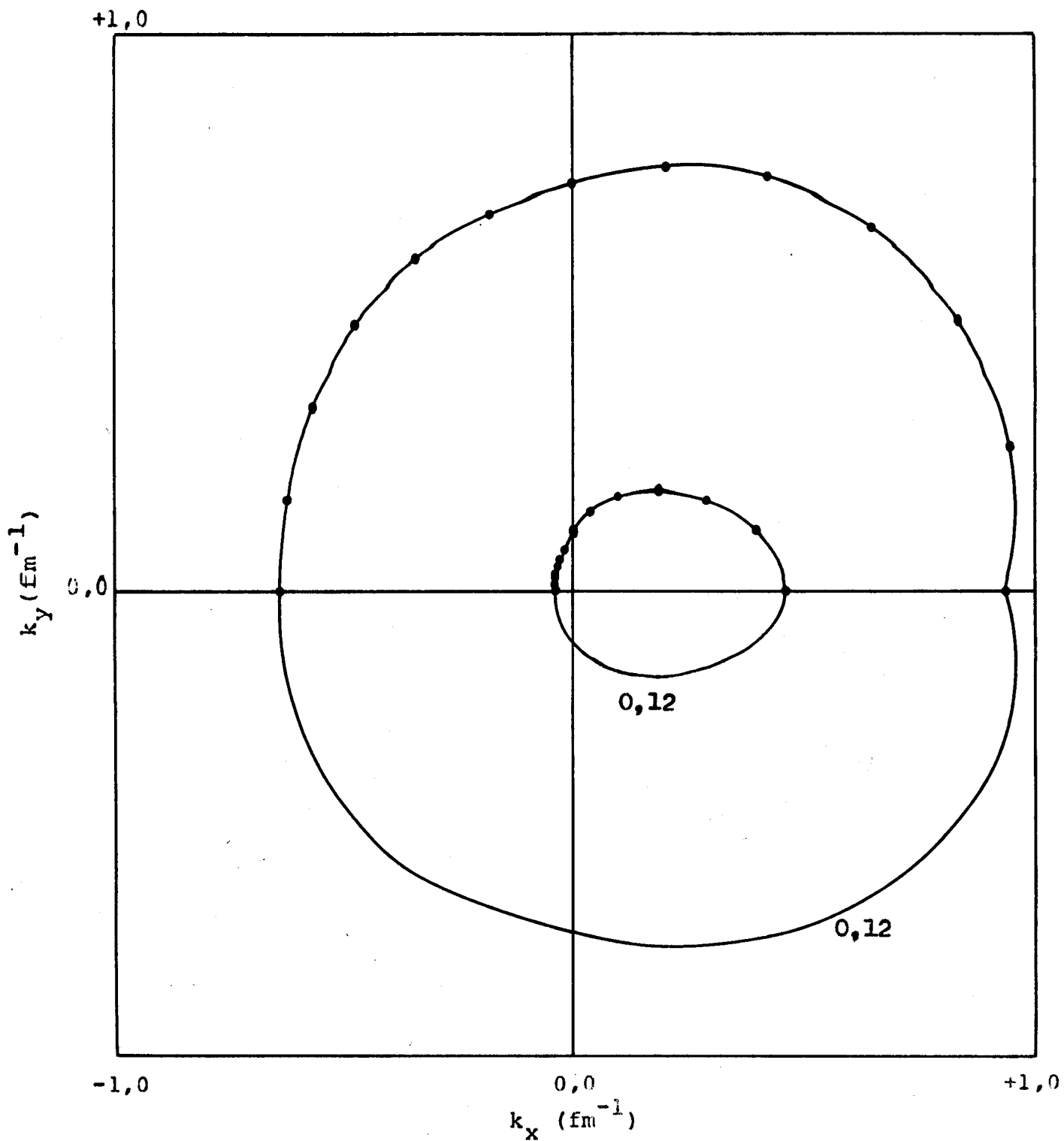


FIGURA IV-14

Diagramas completos, estado  $1p$ , para o processo com  $T_0=200$  MeV, associados a  $P=0,12 \text{ fm}^3$ .

A composição dos efeitos das partes reais e imaginárias dos potenciais óticos está, novamente, evidente.

Observa-se que a deformação da curva externa apresenta-se com características bem diferentes das outras deformações anteriormente apresentadas. Neste caso, o parâmetro "deformação", que se mostrou útil em análises qualitativas anteriores, já não pode servir como base para conclusões, pois entre outros aspectos, a assimetria em relação a qualquer direção paralela ao eixo  $k_y$  é excessivamente acentuada.

Nota-se, portanto, que sob certas condições, pode-se obter diagramas de contorno com formas poucos suaves, refletindo o fato de que curvas de correlação angular, associadas a diferentes ângulos de recuo do núcleo residual, podem diferir bastante umas das outras.

## V - CONCLUSÕES

Foram construídos, no espaço de momentum, diagramas de contorno das distribuições de momentum dos estados  $1s$  e  $1p$  do  $^{16}\text{O}$ , recorrendo-se ao processo de espalhamento quase-livre  $^{16}\text{O}(p,2p)^{15}\text{N}$  coplanar assimétrico, com prótons emergentes de mesma energia, a energias de bombardeio de 200 MeV e de 378 MeV.

A construção de tais diagramas torna bem evidente o relacionamento entre o potencial ótico nuclear, que atua sobre os prótons de alta energia envolvidos no processo, e a distorção das distribuições de momentum obtidas de espalhamento quase-livre.

Verifica-se que o efeito das partes reais dos potenciais óticos nucleares é o de deslocar os diagramas, na direção do momentum de incidência. A altas energias de incidência, em que se torna possível desprezar a dependência implícita dos fatores de distorção no momentum de recuo do núcleo residual, os diagramas que revelam a distorção causada unicamente por efeito de potenciais óticos reais apresentam, ademais, a simetria rotacional de diagramas traçados na ausência de distorção.

Verifica-se, também, que o deslocamento dos diagramas é sensível às energias envolvidas, aumentando com a diminuição da energia do próton incidente, reflexo da for



te dependência das partes reais dos potenciais óticos com a energia.

Ao se considerar apenas as partes imaginárias dos potenciais óticos nucleares, os diagramas de contorno a apresentam-se deformados, em relação à forma circular característica dos diagramas não distorcidos, não apresentando, por outro lado, deslocamentos.

A observação de que diagramas distorcidos apenas por potenciais óticos imaginários apresentam, para processos com diferentes energias de incidência, aproximadamente a mesma deformação, revela a fraca dependência das partes imaginárias dos potenciais óticos com a energia.

Fica, outrossim, evidenciada, nos diagramas distorcidos pelos potenciais óticos completos, a composição dos efeitos das partes reais e imaginárias destes potenciais isto é, o deslocamento e a deformação dos diagramas de contorno, respectivamente.

O relacionamento dos deslocamentos lidos sobre os diagramas, com variações em número de onda dos prótons de alta energia, quando na matéria nuclear, revela que a apresentação de resultados de espalhamento quase-livre, a partir de dados experimentais, através de diagramas de contorno das distribuições de momentum, no espaço de momentum, poderá revelar-se útil em uma estimativa de valores de partes reais de potenciais óticos nucleares. Tal estimativa deverá fornecer resultados mais conclusivos, se se recorrer

a processos  $(e, e'p)$  já que, nestes processos, os elétrons não contribuem para a distorção.

O cálculo teórico descreveria mais corretamente a situação física, para reações quase-livres, se lançasse mão de funções de onda "consistentes"<sup>29), 30)</sup> com os potenciais óticos, para os prótons nucleares, e de fatores de forma mais realísticos para os próprios potenciais óticos .

## APÊNDICE

Para a construção dos diagramas de contorno das distribuições de momentum, no espaço de momentum, foi elaborado um programa para computador, em linguagem ALGOL, que calcula, para cada camada nuclear investigada (caracterizada pelo número quântico momentum angular orbital  $l$ ) e para cada energia incidente (na reação  $^{16}\text{O}(p,2p)^{15}\text{N}$ ) o valor da distribuição de momentum distorcida associado a cada par  $(k_r, \phi_r)$ .

A técnica de construção dos diagramas é apresentada na seção III-2.

O processamento do programa foi efetuado no computador B6700 do Centro de Processamento de Dados da UFRGS.

Para cada par  $(k_r, \phi_r)$  o programa determina, inicialmente, as funções trigonométricas dos ângulos de emergência na reação, através das relações seguintes, deduzidas da conservação de momentum:

$$\text{sen } \phi_1(2) = \frac{b(\pm) a \sqrt{\frac{4}{a^2+b^2} - 1}}{2}, \quad (\text{A-1a})$$

$$\text{cos } \phi_1(2) = \frac{a(\mp) b \sqrt{\frac{4}{a^2+b^2} - 1}}{2}, \quad (\text{A-1b})$$

onde

$$a = \frac{k_0 - k_r \cos \phi_r}{k} \quad (\text{A-2})$$

$$b = - \frac{k_r \sin \phi_r}{k} \quad (\text{A-3})$$

Situações de cinemática não permitida ocorrem quando  $\frac{4}{a^2 + b^2} < 1$ , um exemplo sendo encontrado na situação correspondente à figura IV-1, para  $k_r \lesssim 0,7 \text{ fm}^{-1}$ .

Determinados os parâmetros dados pelas eqs. (A-1), o programa calcula, conforme descrito na seção A-2, as integrais de linha associadas a cada ponto de colisão, presentes nos fatores de distorção (III-22).

A seção A-3 apresenta algumas propriedades de simetria e relações válidas para o processo coplanar, e cuja utilização contribuiu para uma redução do tempo de processamento computacional dos cálculos.

O cálculo da integral tripla, envolvida na de terminação de cada transformada de Fourier distorcida (III-3), é tratado a seguir.

#### A-1. A integral de volume

Para o cálculo da integral tripla foi utilizada a "procedure" TRIPLEINTEGRAL, cujo método é uma generalização a três dimensões do método de Simpson adaptado<sup>31)</sup>.

Um dos parâmetros de entrada desta rotina é o chamado "relative error tolerance", caracterizado por EPS, e associado à precisão dos cálculos.

Consideraram-se aceitáveis, quanto à precisão, os cálculos efetuados que forneceram diferenças entre valores calculados numericamente (através do programa) e exatamente, de distribuições de momentum não distorcidas, de até  $\pm 0,01 \text{ fm}^3$ .

Este critério implicou na adoção do valor 0,01 para o parâmetro EPS, e na obtenção de curvas suaves, para os gráficos de correlação angular (do tipo dos apresentados nas figura IV-1 e IV-2).

Além da própria função a ser integrada, definida no programa principal, os outros parâmetros de entrada da "procedure" TRIPLEINTEGRAL são os limites de integração.

A origem do sistema de coordenadas foi colocada no centro de massa do núcleo alvo, tendo sido escolhidos a direção de incidência como direção x e o plano de espalhamento como plano x-y. O sistema de coordenadas utilizado foi o de coordenadas polares esféricas ( $r, \theta, \phi$ ).

As especificações AXIS=1, AXIS=2 e AXIS=3, na "procedure", foram associados os eixos de integração em  $r, \theta$  e  $\phi$ , respectivamente.

Os limites de integração em  $r$  são, em princípio, 0 e  $\infty$ . No entanto, devido ao rápido decaimento das funções de onda nucleares, o integrando tende a zero, com o

aumento do valor de  $r$ , o que permite que se adote um ponto de corte, isto é, um limite superior finito na integração em  $r$ .

Os pontos de corte utilizados foram  $r = 3R$ , para o estado  $1s$ , e  $r = 4R$ , para o estado  $1p$  ( $R$ , raio do núcleo).

Os limites de integração em  $\theta$  são, em princípio,  $0$  e  $\pi$ . No entanto, devido a propriedades de simetria (expostas na seção A-3), reduziu-se o intervalo de integração numérica em  $\theta$  ao intervalo  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

O comando da "procedure" TRIPLEINTEGRAL que, originalmente, se apresenta como

```
"FA:= F;"
```

foi substituído pelo comando

```
"FA:= IF AXIS=2 AND T=0. THEN 0. ELSE F;"
```

"T=0." refere-se ao limite inferior de integração. Como ao integrando ("FA") é multiplicado o fator  $\sin \theta$ , proveniente do elemento de volume, pode-se anulá-lo imediatamente no ponto  $\theta=0$ .

## A-2 As integrais de linha

Cada uma das integrais de linha, presentes nos

fatores de distorção, representa o caminho percorrido por um dos prótons dentro do núcleo, devido à adoção da forma poço quadrado para o potencial ótico nuclear, conforme foi observado na seção III-1.

Neste caso, portanto, a integração pode ser feita analiticamente, contrariamente ao caso mais realístico em que é utilizado um potencial ótico mais elaborado quando, em geral, a integral de linha só é passível de ser calculada numericamente.

As expressões das integrais de linha, para um ponto genérico  $(r, \theta, \phi)$ , são apresentadas a seguir, distinguindo-se os casos em que  $r$  é menor e maior do que o raio nuclear  $R$ .

1º) Caso  $r \leq R$  (figura A-1)

$$\overline{AB} = \int ds_o = \sqrt{R^2 - r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta \sin^2\phi)} + r \sin\theta \cos\phi \quad (\text{A-4a})$$

$$\overline{BC}_j = \int ds_j = \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2\theta - r^2(\sin\theta \sin\phi \cos\phi_j - \sin\theta \cos\phi \sin\phi_j)^2} - r(\sin\theta \sin\phi \sin\phi_j + \sin\theta \cos\phi \cos\phi_j) \quad (j=1,2) \quad (\text{A-4b})$$

2º) Caso  $r \geq R$

Neste caso, várias situações devem ser consideradas, algumas delas implicando em que uma ou mais das in

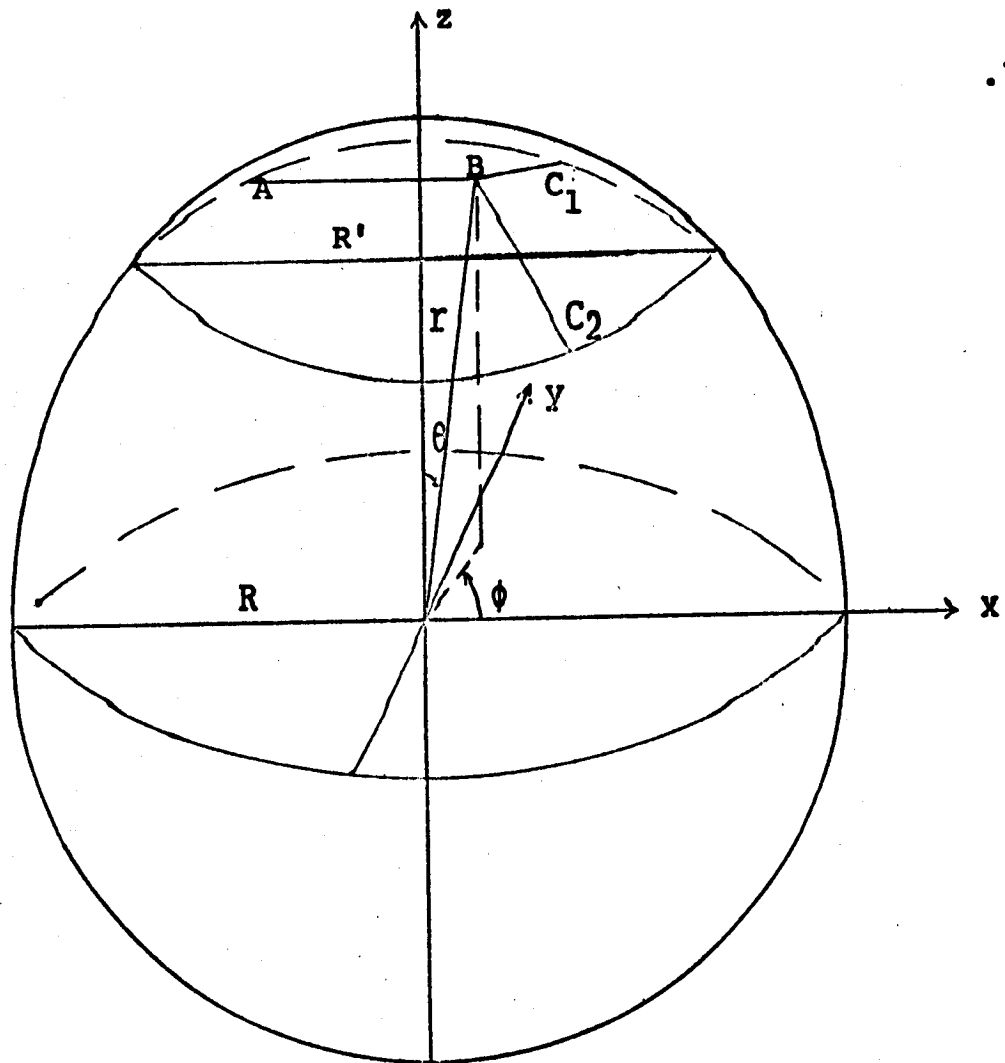


FIGURA A-1

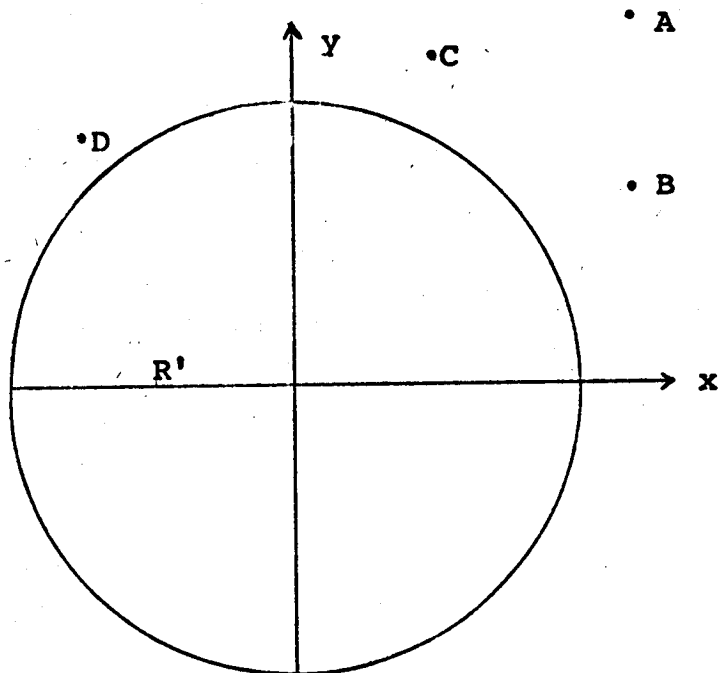


FIGURA A-2



tegrais de linha se anulam.

A figura A-2 representa o corte do plano de espalhamento no núcleo, uma circunferência de raio  $R' = \sqrt{R^2 - z^2}$  quando  $|z| < R$ . Na figura são apresentados pontos característicos de cada uma das situações consideradas.

Às energias envolvidas neste trabalho, tem-se sempre uma cinemática com espalhamento "para a frente", isto é,  $0 \leq \phi_j \leq \frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2} \leq \phi_j \leq 2\pi$  ( $j=1,2$ ).

Quando o ponto  $(r, \theta, \phi)$  é tal que  $|z| > R$ ,  $\int ds_0 = \int ds_1 = \int ds_2 = 0$ . Caso contrário, as seguintes situações podem se apresentar:

$$\begin{array}{l}
 x \geq R' \left\{ \begin{array}{l} |y| \geq R' \rightarrow \int ds_0 = \int ds_1 = \int ds_2 = 0 \quad (\text{ponto A}) \\ |y| < R' \rightarrow \int ds_1 = \int ds_2 = 0 \quad (\text{ponto B}) \end{array} \right. \\
 0 < x < R', \quad |y| \geq R' \rightarrow \int ds_0 = 0 \quad (\text{ponto C}) \\
 x \leq 0 \rightarrow \int ds_0 = 0 \quad (\text{ponto D})
 \end{array}$$

Para as situações em que uma ou mais das integrais de linha não se anulam, estas são calculadas através das expressões

$$\int ds_0 = 2 \sqrt{R^2 - r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi)}, \quad (\text{A-5a})$$

$$\int ds_j = 2 \sqrt{R^2 - r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 (\phi - \phi_j))} \quad (j=1,2). \quad (\text{A-5b})$$

Quando o radicando da expressão (A-5b) é menor do que zero,  $\int ds_j = 0$  ( $j=1,2$ ). É o caso em que, mesmo

não se enquadrando em nenhuma das situações anteriormente apresentadas, a integral de linha deve se anular, devido ao fato de o próton emergente não atravessar a matéria nuclear. A figura A-3 exemplifica uma destas situações, onde os dois prótons emergentes não atravessam o núcleo.

### A-3 Propriedades de simetria

Uma importante propriedade do fator de distorção  $D(\underline{r})$ , válida para espalhamentos coplanares e para a disposição de eixos coordenados aqui adotada, é a simetria em relação ao plano x-y que se pode deduzir diretamente da figura A-4<sup>29)</sup>.

O fator de distorção assume o mesmo valor nos pontos A e B, simétricos em relação ao plano x-y:  $D(\underline{r}_A) = D(\underline{r}_B)$ , ou seja,

$$D(r, \theta, \phi) = D(r, \pi - \theta, \phi). \quad (\text{A-6})$$

Esta propriedade pode ser verificada diretamente das relações (A-4) e (A-5), lembrando que  $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$  e  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$  e observando que, naquelas relações, tem-se sempre  $(\cos \theta)^2$ .

Como, ante a substituição  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ,  $\underline{k}_r \cdot \underline{r}$  se mantém inalterado ( $\underline{k}_r$  não possui componente na direção z, já

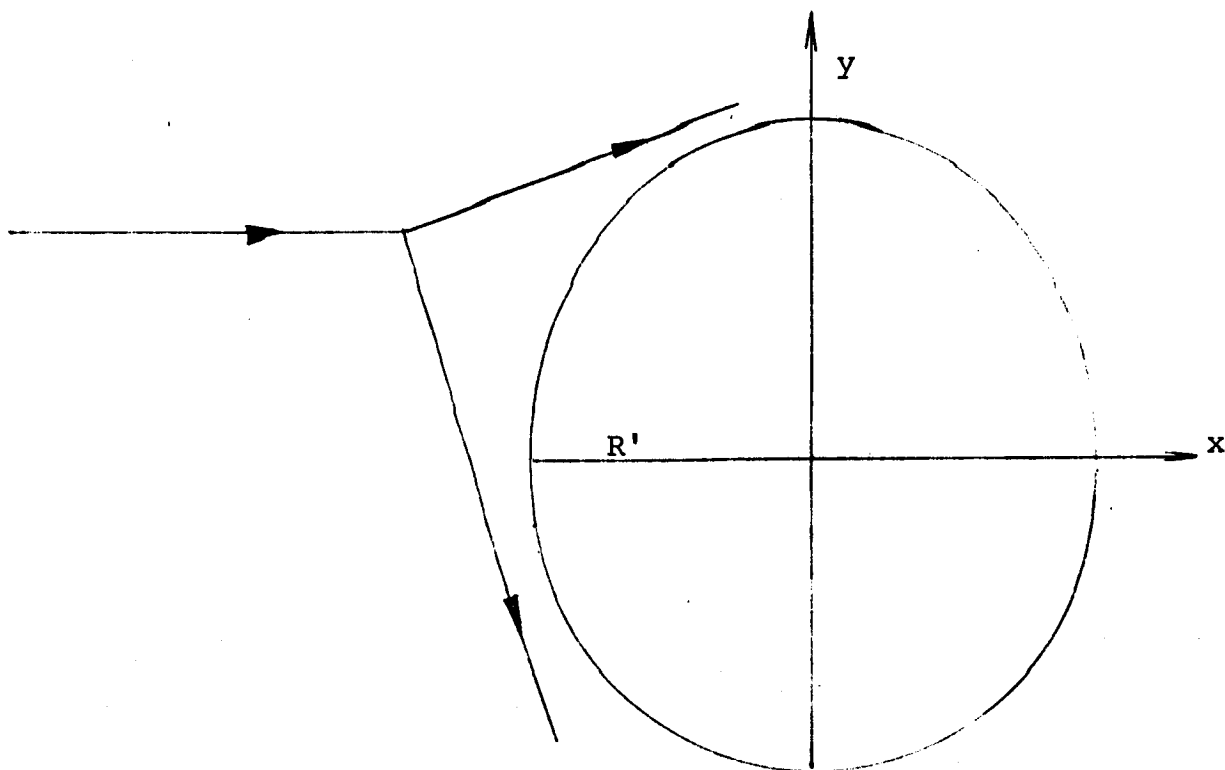


FIGURA A-3

que o espalhamento é coplanar), e o harmônico esférico, devido à propriedade

$$Y_{\ell}^m(\pi - \theta, \phi) = (-1)^{\ell+m} Y_{\ell}^m(\theta, \phi), \quad (\text{A-7})$$

ou se mantém inalterado ou muda de sinal, e como a distribuição de momentum distorcida depende de  $|g_{\ell}^m(k_r)|$ , as integrais de volume envolvidas no cálculo das transformadas distorcidas podem ser efetuadas com os limites de integração 0 e  $\frac{\pi}{2}$  em  $\theta$ , multiplicando-se por 2 o resultado obtido.

Outra propriedade das transformadas distorcidas, com as mesmas condições de aplicabilidade da propriedade (A-6), é a expressa pela relação

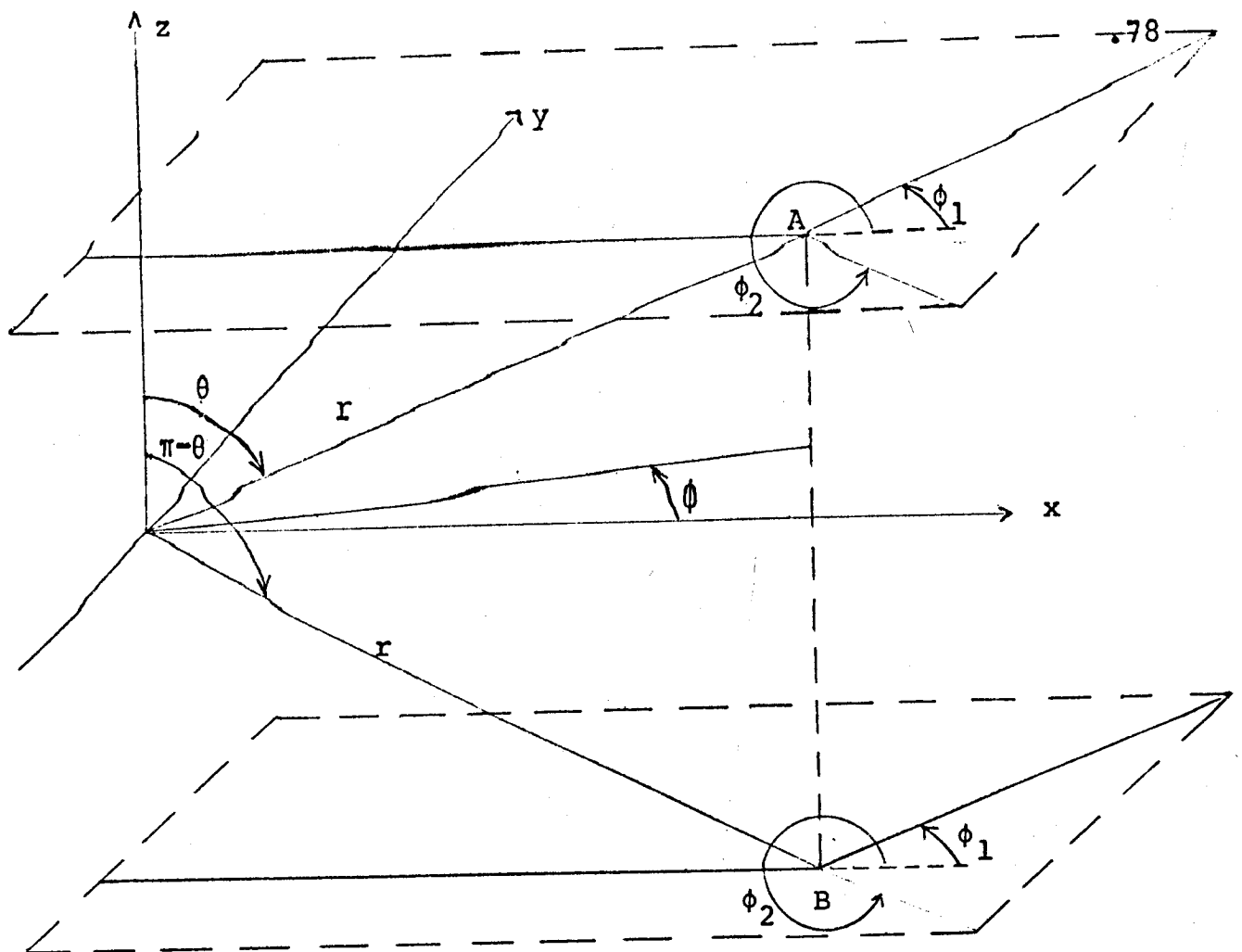


FIGURA A-4

$$g_{\ell}^{\prime m}(\underline{k}_{-r}) = (-1)^{\ell+m} g_{\ell}^{\prime m}(\underline{k}_r), \quad (\text{A-8})$$

obtida efetuando-se a substituição  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  na expressão

$$g_{\ell}^{\prime m}(\underline{k}_r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\underline{k}_r \cdot \underline{r}} R_{n\ell}(r) Y_{\ell}^m(\theta, \phi) D(r, \theta, \phi) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi, \quad (\text{A-9})$$

e lançando-se mão das propriedades (A-6) e (A-7).

Daí se conclui que  $g_{\ell}^{\prime m}(\underline{k}_r) \neq 0$ , apenas se o inteiro  $I = \ell + m$  for par. Logo, escolhido o eixo polar perpendicular ao plano de espalhamento, não há necessidade de se calcular as transformadas distorcidas para as quais  $I$  é um inteiro ímpar.

Finalmente, outra propriedade é a que incorre na simetria em relação ao eixo  $k_x$ , verificada nos diagramas de contorno das distribuições de momentum apresentados no capítulo IV.

A expressão explícita do fator de distorção, considerando-se os potenciais óticos completos, obtida da eq. (III-22), é

$$D(r, \theta, \phi) = \exp \left\{ \frac{1}{2\lambda_0} (i\alpha_0 - 1) \int ds_0 + \frac{1}{2\lambda_1} (i\alpha_1 - 1) \int ds_1 + \frac{1}{2\lambda_2} (i\alpha_2 - 1) \int ds_2 \right\}. \quad (\text{A-10})$$

O integrando de  $g_\ell^m(k_r, \phi_r)$  (eq. (III-3)), em um ponto  $(r, \theta, \phi)$ , denotado por  $I_\ell^m(\phi_r, \phi)$ , tem a forma

$$I_\ell^m(\phi_r, \phi) = \exp \left[ i(k_r \cos \phi_r r \sin \theta \cos \phi + k_r \sin \phi_r r \sin \theta \sin \phi) \right] \times R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) D(r, \theta, \phi). \quad (\text{A-11})$$

Efetuada as substituições

$$\phi_r \rightarrow 2\pi - \phi_r \quad (\text{A-12a})$$

$$\phi \rightarrow 2\pi - \phi \quad (\text{A-12b})$$

observa-se que:

(i) (A-12a) implica nas substituições

$$\cos \phi_1 \leftrightarrow \cos \phi_2 \quad (\text{A-13a})$$

e

$$\sin \phi_1 \leftrightarrow -\sin \phi_2 \quad (\text{A-13b})$$

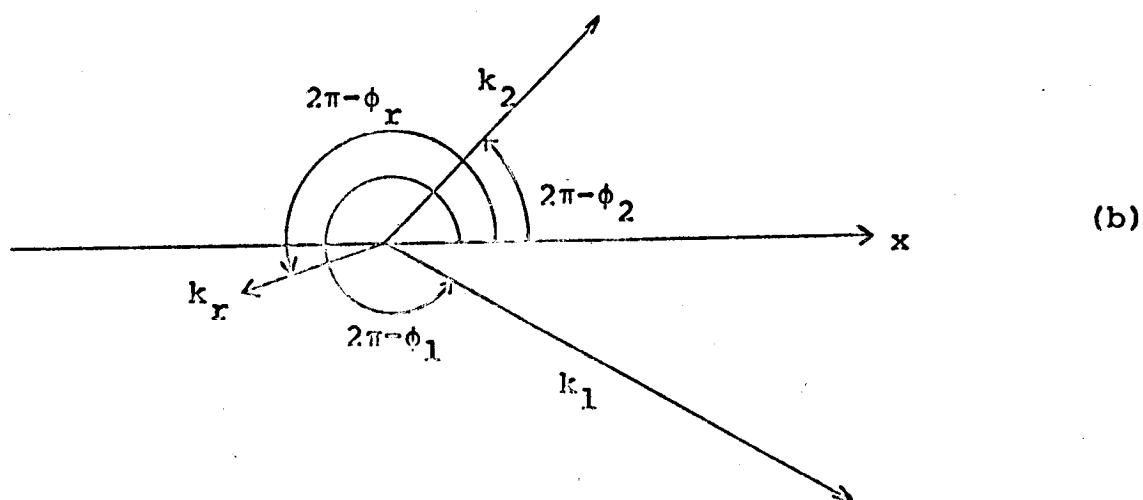
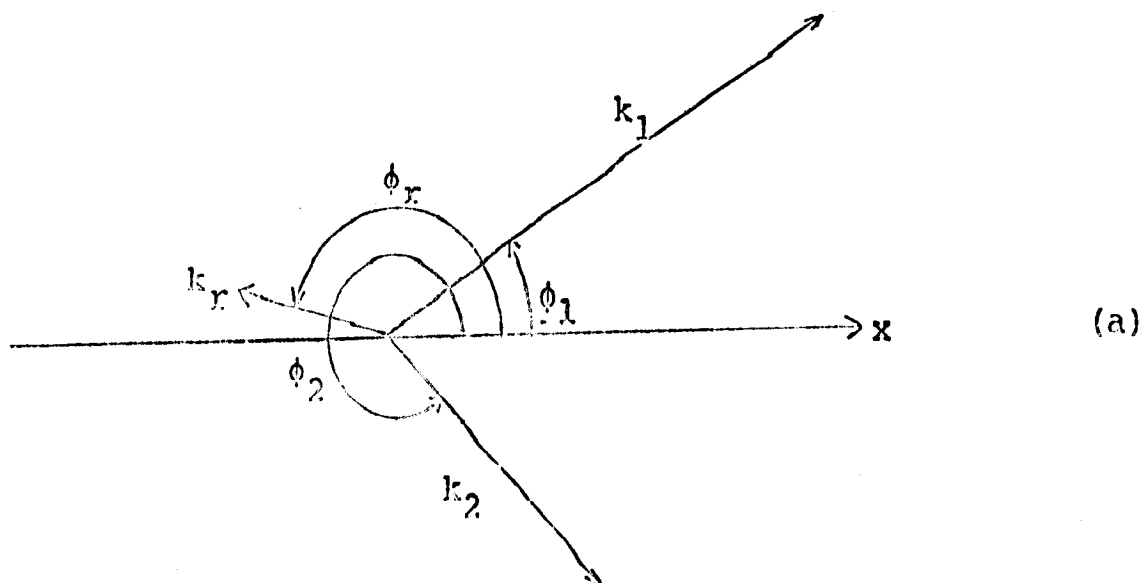


FIGURA A-5

mesmo para  $k_1 \neq k_2$ , conforme pode ser visualizado na figura A-5. Para o caso  $k_1 = k_2$ , isto pode ser verificado diretamente das eqs. (A-1)-(A-3).

(ii) (A-12b) e (A-13a,b) implicam em

$$\int ds_0 \leftrightarrow \int ds_0 \quad (\text{A-14a})$$

e

$$\int ds_1 \leftrightarrow \int ds_2, \quad (\text{A-14b})$$

conforme pode ser verificado diretamente das eqs. (A-4) ou (A-5).

(iii) (A-12a) e (A-13a,b) implicam, conforme pode ser verificado da eq. (II-3), em

$$k_1 \leftrightarrow k_2. \quad (\text{A-15})$$

(iv) A exponencial em (A-11) não se altera.

(v) As transformações (A-14a,b) e (A-15), realizadas simultaneamente (esta última acarretando  $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$  e  $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ ), deixam inalterada a expressão (A-10) da distorção.

(vi) (A-12b) implica na substituição

$$Y_{\ell}^m(\theta, \phi) \rightarrow Y_{\ell}^{m*}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell}^{-m}(\theta, \phi). \quad (\text{A-16})$$

Com base nas observações finais (iv)-(vi) pode-se concluir, portanto, que o integrando de  $g_{\ell}^m(k_r, 2\pi - \phi_r)$ , em um ponto  $(r, \theta, 2\pi - \phi)$ , é relacionado com o integrando de  $g_{\ell}^m(k_r, \phi_r)$ , em um ponto  $(r, \theta, \phi)$ , na forma

$$I_{\ell}^m(2\pi - \phi_r, 2\pi - \phi) = (-1)^m I_{\ell}^{-m}(\phi_r, \phi). \quad (\text{A-17})$$

Como a determinação das transformadas distor-

cidas envolve integração em  $\phi$ , no intervalo  $[0; 2\pi]$ , pode-se escrever

$$g_{\ell}^m(k_r, 2\pi - \phi_r) = (-1)^m g_{\ell}^{-m}(k_r, \phi_r). \quad (\text{A-18})$$

Ora, a expressão da distribuição de momentum distorcida (III-1) envolve o somatório, em todos os valores de  $m$  ( $m = -\ell, \dots, +\ell$ ), dos  $|g_{\ell}^m(k_r)|^2$ . Logo,

$$P_{\ell}(k_r, 2\pi - \phi_r) = P_{\ell}(k_r, \phi_r). \quad (\text{A-19})$$

Esta relação expressa a simetria em relação ao eixo  $k_x$ , verificada nos diagramas de contorno das distribuições de momentum, e utilizada quando se restringiu o cálculo computacional ao cálculo de apenas metade de cada diagrama.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. M.G.Mayer and J.H.D.Jensen, Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, Wiley (1955).
2. H.Tyrén, Th.A.J.Maris and P.Hillman, Nuovo Cimento 6 (1957) 1507.
3. Th.A.J.Maris, P.Hillman and H.Tyrén, Nucl.Phys. 7 (1958) 1.
4. Th.A.J.Maris, Proc. 5<sup>th</sup> Int. Conf. High-Energy Phys. and Nucl. Structure, Uppsala (1974) 356.
5. G.Jacob and Th.A.J.Maris, Rev.Mod.Phys. 38 (1966) 121.
6. G.Jacob and Th.A.J.Maris, Rev.Mod.Phys. 45 (1973) 6.
7. R.Serber, Phys.Rev. 72 (1974) 1114.
8. G.F.Chew, Phys.Rev. 80 (1950) 196.
9. O.Chamberlain and E.Segrè, Phys.Rev. 87 (1952) 81;  
H.Tyrén, P.Hillman and Th.A.J.Maris, Nucl.Phys. 7 (1958) 10.
10. J.B.Cladis, W.N.Hess and B.J.Moyer, Phys.Rev. 87 (1952) 425;  
P.Hillman, H.Tyrén and Th.A.J.Maris, Phys.Rev.Lett. 5 (1960) 107.
11. A.M.Green and G.E.Brown, Nucl.Phys. 18 (1960) 1;  
V.E.Herscovitz, G.Jacob and Th.A.J.Maris, Nucl.Phys. A109 (1968) 478.
12. Th.A.J.Maris, Nucl.Phys. 9 (1958/59) 577.
13. T.J.Gooding and H.G.Pugh, Nucl.Phys. 18 (1960) 46;

- K.F.Riley, H.G.Pugh and T.J.Gooding, Nucl.Phys. 18 (1960) 65;
- H.G.Pugh and K.F.Riley, Proc. Rutherford Jubilee Int. Conf., Manchester (1961) 195.
14. G.F.Chew and M.L.Goldberger, Phys.Rev. 87 (1952) 778.
15. V.S.Barashenkov and V.M.Maltsev, Fortschr.Physik 9 (1961) 549.
16. L.I.Schiff, Phys.Rev. 103 (1956) 443.
17. B.Gottschalk, K.H.Wang and K.Strauch, Nucl.Phys. A90 (1967) 83.
18. C.Gustafsson and T.Berggren, Phys.Letters 35B (1971) 546.
19. Discussão particular.
20. R.Herman and R.Hofstadter, High Energy Electron Scattering Tables (Stanford University Press) Stanford (1960) pg.62.
21. H.Tyrén, S.Kullander, O.Sundberg, R.Ramachandran, P.Isacsson and T.Berggren, Nucl.Phys. 79 (1966) 321.
22. A.K.Kerman, H.Mc Manus and R.M.Thaler, Ann.Phys. (N.Y.) 8 (1959) 551.
23. A.Bohr and B.R.Mottelson, Nuclear Structure (Vol. 1), W.A.Benjamin (1969).
24. P.Schwaller, B.Favier, D.F.Measday, M.Pepin, P.U.Renberg and C.Serre, CERN 72-13 (1972).
25. J.Dabrowski and A.Sobiczewski, Phys.Letters 5 (1963) 87.
26. M.L.Goldberger, Phys.Rev. 74 (1948) 1269.
27. A.Watt, Phys.Lett. 27B (1968) 190.
28. K.Nakamura and N.Izutsu, pré-publicação (1975).

29. C.Schneider, Dissertação apresentada ao Instituto de Física da UFRGS, para obtenção do título de Mestre em Ciências (1971).
30. V.E.Herscovitz, G.Jacob, Th.A.J.Maris and C.Schneider, Rev.Bras.Fís. 1 (1971) 43.
31. Burroughs Numerals: Numerical Analysis System, Algol Procedure Library (1971);  
W.M.McKeeman, Comm. ACM 5(1962) 604.