Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Programa de Pós-graduação em Matemática

Ação de Grupóides sobre Álgebras: Teoremas de Estrutura

por

Daiana Aparecida da Silva Flôres

Porto Alegre, 29 de abril de 2011

Tese submetida por Daiana Aparecida da Silva Flôres[†], como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Prof. Dr. Antonio Paques

Banca examinadora:
Prof. Dr. Antonio Paques (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos (IME - USP)
Prof. Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero (IM - UFRGS)
Prof. Dr. Mikhajolo Dokuchaev (IME - USP)

[†]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)

Aos meus pais

Agradecimentos

A Deus. À minha família que nunca deixou de acreditar em mim e esteve presente em todos os momentos apesar da distância. Em particular a minha mãe, ao meu pai, as minhas irmãs e ao meu namorado pelas orações, compreensão e incentivo.

Aos colegas de Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS pelo carinho com que me receberam, em especial ao Diego e a Saradia meus amigos queridos que estarão para sempre no meu coração. Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS pela acolhida e aos professores que contribuiram na minha formação. À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo incentivo financeiro.

Ao professor Dirceu Bagio pela amizade e disponibilidade em ajudar sempre que foi necessário. Ao professor Antonio Paques meu profundo agradecimento pela generosidade em dividir comigo o seu amor pela pesquisa e por ser um exemplo de dedicação e comprometimento com o trabalho.

Resumo

O principal objetivo desta tese é um estudo de certas estruturas oriundas da ação de grupóides sobre álgebras. Especificamente tratamos do estudo de estruturas do tipo skew anel de grupóide. Dentre os principais resultados apresentados damos uma descrição estrutural intrínsica de um skew anel de grupóide, sob determinadas condições específicas, damos condições necessárias e suficientes para que um skew anel de grupóide seja uma extensão de Galois e apresentamos dois teoremas de dualidade do tipo Cohen-Montgomery para ações de grupóides.

Abstract

The main purpose of this thesis is a study of certain structures arisen from the groupoid actions on algebras. Specifically, we deal with the study of structures of the type skew groupoid ring. Among the main results presented, we give an intrinsic structural description of the skew groupoid ring, under some specific conditions, we give necessary and sufficient conditions in order a skew groupoid ring be a Galois extension, and we present two type Cohen-Montgomery duality theorems for groupoid actions.

Sumário

Introdução

A noção de grupóide é usualmente apresentada como uma categoria pequena (isto é, uma categoria cujos objetos e morfismos formam conjuntos), cujos morfismos são isomorfismos. Esta noção é uma natural extensão da noção de grupo. Um grupóide com somente um objeto é justamente um grupo. A noção de grupóide foi introduzida na literatura por H. Brandt [7] em 1926 e hoje o seu uso está amplamente disseminado por várias áreas da Matemática, tais como Análise Funcional, Teoria Ergódica, Teoria da Homotopia, Geometria Algébrica, Geometria Diferencial, Topologia Diferencial e Teoria de Grupos, entre outras.

A versão axiomática de grupóide, que é adotada neste texto, provém de [19]. Um grupóide é um conjunto não vazio munido de uma operação binária parcialmente definida, para a qual os axiomas de grupo valem, sempre que isso faça sentido. Um exemplo bastante simples que ilustra muito bem essa idéia, ao mesmo tempo que reforça a idéia de extensão da noção de grupo, é uma reunião disjunta de grupos.

A noção de ação de grupóide que usamos neste texto, curiosamente, nasce da noção de ação parcial de grupóide e é uma extensão natural da noção de ação de grupo. Ação parcial de grupóide sobre conjunto foi introduzida na literatura primeiramente para grupóides ordenados, na forma de premorfismo ordenado, por N. Gilbert [15]. Posteriormente uma versão de ação de grupóide sobre anel foi estudada por D. Bagio, D. Flôres e A. Paques [2], em cujo trabalho eles a apresentam como uma generalização da noção de ação parcial de grupo, conforme introduzida por M. Dokuchaev e R. Exel em [13]. Em [3] Bagio e Paques estendem essa noção para o contexto de grupóides em geral. A noção de ação (global) de grupóide que é usada neste texto foi extraída deste último artigo mencionado.

Atualmente existe uma vasta literatura sobre ações de grupos sobre álgebras e as estruturas que elas originam, a qual constitue uma fonte natural de inspiração para o estudo de resultados similares no contexto mais geral de grupóides.

O objetivo desta tese é o estudo de algumas estruturas originadas a partir da ação de grupóides sobre álgebras. Praticamente, quase todos os resultados que aqui apresentamos dizem respeito a algum tipo de skew anel de grupóide, conforme passamos a descrever.

O Capítulo 2 compreende duas partes. Na primeira apresentamos uma descrição intrínsica da estrutura de um skew anel de grupóide que é Azumaya e cujo centro está contido na álgebra de base. Especificamente, se β é uma ação de um grupóide finito G sobre uma álgebra unitária R e o skew anel de grupóide $A = R \star_\beta G$ é Azumaya com $C(A) \subseteq R$ então $A \simeq R^\beta \otimes_{C(A)} \mathrm{End}_{C(A)}(C_R(R^\beta))$ e o centralizador $C_R(R^\beta)$ de R^β em R é descrito em termos de homomorfismos entre determinadas álgebras de Galois centrais e/ou comutativas (veja Teorema 2.1.11).

Na segunda parte introduzimos uma ação $\beta^\star$ de G sobre $A = R \star_\beta G$, via conjugação, e exibimos condições necessárias e suficientes para que A seja uma extensão de Galois de $A^{\beta^\star}$ (veja Teorema 2.2.11). Também mostramos nesta segunda parte que o novo skew anel de grupóide $A \star_{\beta^\star} G$ é de fato isomorfo ao skew anel de grupóide $R \star_\gamma \widetilde{G}$, onde $\widetilde{G}$ é um novo grupóide obtido como um produto semi-direto de G por G e γ é uma ação de $\widetilde{G}$ sobre R construída a partir das ações β e $\beta^\star$ (veja Teorema 2.2.17).

No Capítulo 3 tratamos da dualidade para ação de grupóides. Especificamente apresentamos uma espécie de generalização dos teoremas de dualidade para ação de grupos, devidos a M. Cohen e S. Montgomery [11].

Se R é uma K-álgebra unitária e β é uma ação de um grupóide finito G sobre R então o skew anel de grupóide $R \star_\beta G$ é uma K-álgebra (fortemente) graduada e, por conseguinte, um KG^*-módulo álgebra à esquerda, o que nos permite considerar o produto smash $(R \star_\beta G)\#KG^*$ (na literatura há vários tipos de produto smash; ressaltamos que o produto smash que consideramos aqui, visto como K-módulo, é um produto tensorial sobre K de dois K-módulos). Por outro lado, dada uma K-álgebra R graduada por um grupóide finito G, existe uma ação β de G sobre o produto smash $R\#KG^*$ e também podemos considerar o skew anel de grupóide $(R\#KG^*) \star_\beta G$. Mostramos neste capítulo que ambas as álgebras assim construídas não são unitárias, mas contêm, cada uma, uma subálgebra unitária isomorfa a uma soma direta de determinadas álgebras de matrizes (veja Teoremas 3.1.12 e 3.2.7). No caso específico em que G é um grupo reobtemos os teoremas de Cohen e Montgomery.

No Capítulo 1 cuidamos de apresentar unicamente os pré-requisitos estritamente necessários ao bom entendimento dos demais capítulos. Alguns resultados são a versão global de resultados oriundos de [3] e, justamente porque este artigo ainda não está publicado, anexamos suas respectivas demonstrações. Nem todos os resultados colocados neste capítulo são oriundos da literatura. Alguns são originais. Destacamos, em particular, a correspondência bijetiva existente entre determinadas ações de um grupóide finito G sobre uma K-álgebra R e as ações da K-álgebra KG sobre R (veja Teorema 1.2.11). São exatamente essas ações de grupóide que são consideradas em quase todos os resultados dos capítulos seguintes. Outrossim, é também mostrado que toda graduação por um grupóide finito sobre uma K-álgebra A corresponde bijetivamente uma estrutura de KG^*-módulo álgebra à esquerda sobre A (veja Teorema 1.4.1).

Aqui KG^* é visto como uma K-álgebra de Hopf fraca. Por uma álgebra de Hopf fraca (ou um grupóide quântico finito) entendemos um K-módulo H com uma estrutura de álgebra e de coálgebra satisfazendo determinadas condições específicas de compatibilidade. Álgebras de Hopf finitas, álgebras de grupóide finito e seus duais são exemplos imediatos de álgebra de Hopf fraca. Esta noção surge naturalmente na teoria de álgebras de von Neumann e foram introduzidas na literatura por G. Böhm e outros em [5, 6].

Em nenhum momento nesta tese tratamos de ações parciais de grupóides. Acreditamos, contudo, que todos os resultados aqui apresentados devem continuar valendo, mediante as devidas adequações ambientais, quando considerados no contexto de ações parciais globalizáveis.

Neste texto, por anel é entendido um anel associativo não necessariamente comutativo e não necessariamente unitário. Por anel comutativo é entendido um anel unitário que é comutativo. Anéis não unitários podem eventualmente conter subanéis unitários e, quando aqueles são também unitários, não necessariamente as respectivas unidades coincidem. Por extensão de anéis unitários entendemos que os mesmos têm o mesmo elemento identidade.

Capítulo 1

Ação de Grupóide e Estruturas Relacionadas

Neste capítulo vamos introduzir os conceitos que serão utilizados no restante da tese, alguns desses resultados são bastante conhecidos na literatura e as suas demonstrações podem ser encontradas nas referências indicadas. Além disso, alguns resultados clássicos para o caso de ação de grupos serão generalizados para o caso de ação de grupóides.

1.1 Ação de Grupóide

Nesta seção daremos as definições de grupóide e de ação (global) de grupóide sobre um anel com unidade. Além, é claro, de apresentar exemplos tanto de grupóides como de ações de grupóides sobre anéis. Usualmente um grupóide é definido como uma categoria pequena na qual todo morfismo é invertível, porém aqui vamos usar a definição algébrica de grupóides dada em [19]. Por esse motivo optamos por começar mostrando que essas duas definições são equivalentes.

Definição 1.1.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de uma classe de objetos denotada por $Obj_{\mathcal{C}}$, para cada par (A, B) de objetos de $\mathcal{C}$ associamos um conjunto de morfismos de A para B denotado por $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ e para cada A nos objetos de $\mathcal{C}$ existe um morfismo identidade $I_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$. Além disso, para cada tripla de objetos de $\mathcal{C}$ existe uma operação de composição de morfismos*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(A,C) \\ (f,g) & \longrightarrow & g \circ f \end{array}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, *para todo* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ *e* $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D)$,

(2) $f \circ I_A = I_B \circ f = f$, *para todo* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$,

(3) $Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(A',B') = \emptyset$ *sempre que* $(A,B) \neq (A',B')$.

Definição 1.1.2. *Um grupóide é uma categoria na qual as classes dos objetos e dos morfismos formam um conjunto e todo morfismo é invertível, isto é, para todo* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ *existe* $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$ *tal que*

(4) $f \circ g = I_B$ *e* $g \circ f = I_A$.

Agora vamos apresentar a definição axiomática de grupóide.

Definição 1.1.3. *[19] Seja* G *um conjunto não vazio equipado com uma operação binária definida parcialmente, que será denotada pela concatenação. Dados* $g, h \in G$ *escrevemos* $\exists gh$ *sempre que o produto* gh *está definido. Um elemento* $e \in G$ *é chamado uma identidade se* $\exists eg$ *e* $\exists ge$ *então* $eg = g = ge$. *O conjunto das identidades de* G *será denotado por* G_0. *O conjunto* G *é chamado um grupóide se os axiomas usuais de grupo valem quando isto fizer sentido, isto é:*

(G1) *Para todo* $g, h, l \in G$, $\exists g(hl)$ *se e somente se* $\exists (gh)l$, *e neste caso esses são iguais,*

(G2) *Para todo* $g, h, l \in G$ $\exists g(hl)$ *se e somente se* $\exists gh$ *e* $\exists hl$,

(G3) *Para cada* $g \in G$ *existem (únicos) elementos* $d(g), r(g) \in G$ *tais que* $\exists g d(g)$, $\exists r(g) g$ *e* $g d(g) = g = r(g) g$,

(G4) *Para cada* $g \in G$ *existe um elemento* $g^{-1} \in G$ *tal que* $d(g) = g^{-1} g$ *e* $r(g) = g g^{-1}$.

É fácil verificar que o elemento g^{-1} é o único elemento satisfazendo a propriedade requerida em $(G4)$ bem como que $(g^{-1})^{-1} = g$, para todo $g \in G$. No lema a seguir mostraremos algumas propriedades básicas acerca de grupóides.

Lema 1.1.4. *[19] Seja G um grupóide. Então para todo $g, h \in G$ temos:*

(1) $\exists gh$ se e somente se $d(g) = r(h)$, e neste caso $d(gh) = d(h)$ e $r(gh) = r(g)$,

(2) $\exists gh$ se e somente se $\exists h^{-1}g^{-1}$, e neste caso, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

Demonstração: (1) Suponha que existe gh em G. Por $(G3)$, temos que $\exists gd(g)$ e $gd(g) = g$, $\exists r(h)h$ e $r(h)h = h$. Assim, por $(G1)$, segue que

$$gh = (gd(g))(r(h)h) = g(d(g)r(h))h.$$

Portanto, $\exists d(g)r(h)$ por $(G2)$. E como $d(g)$ e $r(h)$ são identidades então $d(g) = d(g)r(h) = r(h)$.

Reciprocamente, se $d(g) = r(h)$ então $\exists gr(h) = g(hh^{-1})$. Logo, por $(G2)$ segue que $\exists gh$.

Note que, $(gh)d(h) = g(hd(h)) = gh$ e $r(g)(gh) = (r(g)g)h = gh$. Logo, $d(gh) = d(h)$ e $r(gh) = r(g)$ por $(G3)$.

(2) Por (1) temos que $\exists gh$ se e somente se $d(g) = r(h)$. Como $d(g) = r(g^{-1})$ e $r(h) = d(h^{-1})$, então $d(h^{-1}) = r(g^{-1})$ e assim $\exists h^{-1}g^{-1}$. Além disso,

$$gh(h^{-1}g^{-1}) = g(hh^{-1})g^{-1} = gr(h)g^{-1} = gd(g)g^{-1} = gg^{-1} = r(g) = r(gh) \text{ e}$$

$$(h^{-1}g^{-1})gh = h^{-1}(g^{-1}g)h = h^{-1}d(g)h = h^{-1}r(h)h = h^{-1}h = d(h) = d(gh).$$

Portanto, pela unicidade do elemento inverso, segue que $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$. □

Observação 1.1.5. *As Definições 1.1.2 e 1.1.3 são equivalentes. De fato, seja G um grupóide no sentido categórico. Considere o conjunto de todos os morfismos de X para Y, isto é, $Hom_G(X, Y)$. Então a composição torna-se uma operação definida parcialmente, pois $f : X \longrightarrow Y \in Hom_G(X, Y)$ e $g : U \longrightarrow V \in Hom_G(U, V)$ então $g \circ f$ está definida se e somente se $Y = U$. Os objetos de G são identificados com as identidades. Naturalmente (1) $\Longrightarrow$ $(G1)$, (2) $\Longrightarrow$ $(G3)$ e (4) $\Longrightarrow$ $(G4)$.*

Reciprocamente, seja G um grupóide no sentido algébrico. Então consideraremos que os objetos de G do ponto de vista categórico são precisamente as identidades de G. Dadas duas identidades e, f o conjunto dos morfismos de e para f é dado por

$$Hom_G(e,f) = \{g \in G \mid r(g) = f \ \ e \ d(g) = e\},$$

isto é, o conjunto de todos os elementos $g \in G$ *tais que* $\exists fge$. *Então, dados* $e, f, f' \in G_0$ *definimos*

$$\begin{array}{ccc} Hom_G(e,f) \times Hom_G(f,f') & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(e,f'). \\ (g,h) & \longrightarrow & hg \end{array}$$

Note que esta operação está bem definida , pois $d(h) = f = r(g)$, $d(hg) = d(g) = e$ *e* $r(hg) = r(h) = f'$. *Para cada* $e \in Obj_G$ *temos que* $e \in Hom_G(e,e)$ *é tal que* $eg = g = ge$, *para todo* $g \in Hom_G(e,e)$, *assim* $e = I_e$. *Naturalmente,* $(G1) \Longrightarrow (1)$, $(G3) \Longrightarrow (2)$, $(G4) \Longrightarrow (4)$ *e a unicidade das identidades implica* (3). *Portanto, as duas definições são de fato equivalentes.* $\square$

Um elemento $e \in G$ é uma identidade de G se $e = d(g) = r(g^{-1})$, para algum $g \in G$. Neste caso, e é chamado identidade domínio de g e identidade imagem de g^{-1}. Para cada $e \in G_0$ temos que $e^2 = e$. Sendo assim, $d(e) = e = r(e)$ e $e^{-1} = e$. Denotaremos por G_e o conjunto de todos os elementos $g \in G$ tais que $d(g) = e = r(g)$, ou seja,

$$G_e = \{g \in G \mid d(g) = e = r(g)\}$$

e por G^2 o conjunto dos elementos $(g,h) \in G \times G$ tais que $\exists gh$, isto é,

$$G^2 = \{(g,h) \in G \times G \mid d(g) = r(h)\} = \{(g,h) \in G \times G \mid \exists gh\}.$$

Claramente, G_e é um grupo cujo elemento identidade é e, e é chamado *grupo principal associado a* e. Mais ainda, denotaremos por:

$$T_e = \{g \in G \mid r(g) = e\} \ \text{ e } \ S_e = \{g \in G \mid d(g) = e\}.$$

Definição 1.1.6. *Um conjunto não vazio* X *com uma operação binária associativa é chamado um semigrupo. Um semigrupo* X *é chamado um semigrupo inverso se para cada* $x \in X$ *existe um único elemento* $x^{-1} \in X$ *tal que*

$$xx^{-1}x = x \ \ e \ \ x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}.$$

Há uma ligação muito estreita entre os grupóides e os semigrupos inversos como ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 1.1.7. *Todo semigrupo inverso X é um grupóide com respeito ao* produto restrito *definido como segue: para todo $x, y \in X$,*

$$\exists x.y \text{ se e somente se } x^{-1}x = yy^{-1}.$$

As identidades de $(X, .)$ são exatamente os idempotentes de X.

Naturalmente, todo grupo é um grupóide cujo único objeto é G e cujos morfismos são os elementos de G. A seguir daremos outros exemplos de grupóides.

Exemplo 1.1.8. *Seja I um conjunto não vazio com n elementos. Considere em $I \times I$ a seguinte operação binária parcial, $\exists(i,j)(l,k)$ se e somente se $j = l$ e, neste caso, $(i,j)(l,k) = (i,k)$. Note que, $d(i,j) = (j,j)$, $r(i,j) = (i,i)$ e $(i,j)^{-1} = (j,i)$. Aqui, $G_0 = \{(i,j) \in I \times I \mid i = j\}$, denotaremos esse grupóide por I_n.*

Note que este grupóide surge naturalmente na teoria de anéis. Seja R um anel com unidade. Então para qualquer número natural n, considere o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com apenas uma entrada não nula igual a 1, denotaremos esse conjunto por M. Observe que uma matriz A em M estará univocamente determinada pela posição da entrada igual a 1. Então existe uma operação binária definida parcialmente em M dada exatamente pela multiplicação de matrizes. Isto é, dadas duas matrizes $A, B \in M$ dizemos que $\exists AB$ se e somente se a entrada não nula de A está na posição ij e a entrada não nula de B está na posição jk. Note que via a multiplicação de matrizes a entrada não nula de AB estará na posição ik. O grupóide M é isomorfo a I_n.

Exemplo 1.1.9. *Seja G um grupo agindo por automorfismos num conjunto X. Em $X \times G$ definimos a seguinte operação parcial:*

$$(x,g)(y,h) = \begin{cases} (x, gh), & \text{se } x = g.y \\ \text{indefinida caso contrário} \end{cases}$$

O conjunto $X \times G$ com esta multiplicação parcial será denotado por $P(X,G)$. Com as definições acima, é fácil verificar que $P(X,G)$ é um grupóide, no qual os inversos são dados por: $(x,g)^{-1} = (g^{-1}.x, g^{-1})$, e as identidades domínio e imagem são dadas respectivamente por: $d(x,g) = (g^{-1}.x, 1_G)$ e $r(x,g) = (x, 1_G)$.

Exemplo 1.1.10. *A união disjunta* $G = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ *de grupos* G_λ, $\lambda \in \Lambda$, *é um grupóide. O produto* gh *está definido se e somente se* g, h *pertencem a um mesmo* G_λ, *e neste caso* gh *é exatamente o produto no grupo* G_λ.

Exemplo 1.1.11. *Um típico exemplo de grupóide é o grupóide fundamental* $\pi(X)$ *de um espaço topológico* X. *Um objeto de* $\pi(X)$ *é um ponto de* X *e um morfismo* $x \to x'$ *de* $\pi(X)$ *é a classe de homotopia dos caminhos* f *de* x *para* x'. *Lembrando, um caminho* f *é uma função contínua de* I *em* X, I *o intervalo fechado* $[0,1]$, *com* $f(0) = x$ *e* $f(1) = x'$. *Dois caminhos* $f : x \longrightarrow x'$ *e* $g : x \longrightarrow x'$ *são homotópicos se existe uma função contínua* $F : I \times I \longrightarrow X$ *com* $F(t,0) = f(t)$, $F(t,1) = g(t)$, $F(0,s) = x$ *e* $F(1,s) = x'$, *para todo* $s, t \in I$. *A composição de dois caminhos* $g : x' \longrightarrow x''$ *e* $f : x \longrightarrow x'$ *é o caminho* h *o qual é "*f *seguido de* g*", dado explicitamente por*

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1), 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

composição esta, aplicada também para a classe de homotopia. As identidades deste grupóide correspondem aos elementos de X *e o inverso de qualquer caminho é o mesmo caminho traçado na direção oposta.*

Exemplo 1.1.12. *Considere o fecho normal* N *de uma extensão de corpos separável e finita* L/K *e seja* G *o grupo de Galois de* N/K. *Se* $L = L_1, \cdots, L_n$ *denotam os diferentes conjugados de* L *em* N *sob a ação de* G *e* G_{ij} *denota o conjunto dos isomorfismos de* L_i *em* L_j, $1 \leq i, j \leq n$ *então* $\overline{G} = \bigcup\limits_{i,j} G_{ij}$ *é um grupóide, onde operação parcial é dada por:*

$$\exists \sigma_{ij}\sigma_{lk} \text{ se e somente se } i = k,$$

para todo $1 \leq i, j, l, k \leq n$. *Neste caso,* $\sigma_{ij}\sigma_{lk} = \sigma_{ij} \circ \sigma_{lk} \in G_{lj}$.

Finalizaremos esta seção apresentando a definição de ação de grupóide sobre uma álgebra.

Definição 1.1.13. *[3] Sejam* G *um grupóide,* K *um anel comutativo e* R *uma* K*-álgebra unitária. Uma ação de* G *sobre* R *é um par*

$$\beta = (\{E_g\}_{g \in G}, \{\beta_g\}_{g \in G})$$

onde para cada $g \in G$, $E_g = E_{r(g)}$ é um ideal de R, e $\beta_g : E_{g^{-1}} \longrightarrow E_g$ é um isomorfismo de K-álgebras satisfazendo as seguintes condições:

(1) β_e é a aplicação identidade de E_e, I_{E_e}, para todo $e \in G_0$,

(2) $\beta_g \beta_h = \beta_{gh}$, para todo $(g, h) \in G^2$.

É imediato ver que se $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ é uma ação de G sobre R então $\beta_{(e)} = (\{E_g\}_{g\in G_e}, \{\beta_g\}_{g\in G_e})$ é uma ação do grupo principal G_e sobre o anel E_e, para todo $e \in G_0$. Observe que pela definição de ação temos que $E_g = E_{r(g)}$, para todo $g \in G$. Então, em particular $E_g = E_{r(g)} = E_e$, para todo $g \in G_e$.

Exemplo 1.1.14. *Sejam $G = \{g, g^{-1}, r(g), d(g)\}$ um grupóide e $R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4$, onde K é um anel comutativo e e_1, e_2, e_3, e_4 são idempotentes centrais dois a dois ortogonais cuja soma é 1_R. Considere $E_g = E_{r(g)} = Ke_3 \oplus Ke_4$, $E_{g^{-1}} = E_{d(g)} = Ke_1 \oplus Ke_2$, $\beta_{r(g)} = I_{E_{r(g)}}$, $\beta_{d(g)} = I_{E_{d(g)}}$, $\beta_g(xe_1 + ye_2) = xe_3 + ye_4$ e $\beta_{g^{-1}}(xe_3 + ye_4) = xe_1 + ye_2$, para todo $x, y \in K$. É fácil verificar que $\beta = (\{E_h\}_{h\in G}, \{\beta_h\}_{h\in G})$ é uma ação de G sobre R.*

1.2 Anel de Grupóide e Biálgebra Fraca

Iniciamos esta seção lembrando a definição de biálgebra fraca e a noção de H-módulo álgebra nesse contexto, ambos os conceitos foram introduzidos por Gabriela Böhm em [4] (veja também [5]). Tanto Böhm quando Caenepeel e De Groot [8] apontam a álgebra de grupóide como o primeiro exemplo de biálgebra fraca que não é uma biálgebra. Mostraremos a seguir que toda álgebra de grupóide é uma biálgebra fraca.

Além disso, mostraremos também que o dual da álgebra de um grupóide finito é uma biálgebra fraca. Finalizamos esta seção mostrando que sob determinadas condições os conceitos de ação de um grupóide G sobre uma K-álgebra A e de KG-módulo álgebra são duais no seguinte sentido: se G age sobre A então A tem uma estrutura de KG-módulo álgebra à esquerda, e reciprocamente se A é um KG-módulo álgebra à esquerda então G age sobre A.

Definição 1.2.1. *Sejam K um anel comutativo e C um K-módulo. Dizemos que C é uma coálgebra com comultiplicação e counidade dadas respectivamente por:*

$$\Delta : C \longrightarrow C \otimes C \ e \ \varepsilon : C \longrightarrow K,$$

onde Δ *e* ε *são aplicações* K*-lineares tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes I_C"] \\ C \otimes C \arrow[r, "I_C\otimes\Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ K \otimes C & & C \otimes K \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes I_C"] \arrow[ur, "I_C\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Onde $\varphi : C \longrightarrow K \otimes C$ *e* $\widetilde{\varphi} : C \longrightarrow C \otimes K$ *definidas respectivamente por* $\varphi(x) = 1_K \otimes x$ *e* $\widetilde{\varphi}(x) = x \otimes 1_K$*, para todo* $x \in C$*, são os isomorfismos canônicos.*

A comutatividade do primeiro diagrama é chamada coassociatividade da comultiplicação.

Definição 1.2.2. *[5, Definição 2.1] Uma biálgebra fraca* H *é uma álgebra que é também uma coálgebra tal que a comultiplicação* Δ *e a counidade* ε *satisfazem as seguintes condições:*

(F1) $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$*, para todo* $x, y \in H$*,*

(F2) $\varepsilon(xyz) = \sum \varepsilon(xy_1)\varepsilon(y_2z)$*, para todo* $x, y, z \in H$*,*

(F3) $\varepsilon(xyz) = \sum \varepsilon(xy_2)\varepsilon(y_1z)$*, para todo* $x, y, z \in H$*,*

(F4) $\Delta^2(1_H) = (\Delta(1_H) \otimes 1_H)(1_H \otimes \Delta(1_H))$*,*

(F5) $\Delta^2(1_H) = (1_H \otimes \Delta(1_H))(\Delta(1_H) \otimes 1_H)$*.*

onde $\Delta^2 = (\Delta \otimes I_H) \circ \Delta = (I_H \otimes \Delta) \circ \Delta$*.*

As propriedades $(F4)$ e $(F5)$ podem ser reescritas da seguinte maneira:

$(F4')$ $\Delta^2(1_H) = \sum 1_1 \otimes 1_2 1_{1'} \otimes 1_{2'}$,

$(F5')$ $\Delta^2(1_H) = \sum 1_1 \otimes 1_{1'} 1_2 \otimes 1_{2'}$.

Usamos a notação de Sweedler-Heyneman para a comultiplicação, ou seja,

$$\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2 = \sum h_{1'} \otimes h_{2'}.$$

Exemplo 1.2.3. *Toda biálgebra é uma biálgebra fraca.*

De fato, claramente $\Delta^2(1) = (\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1))$ e

$$\begin{aligned}\sum \varepsilon(hk_1)\varepsilon(k_2l) &= \sum \varepsilon(h)\varepsilon(k_1)\varepsilon(k_2)\varepsilon(l)\\ &= \varepsilon(h)\varepsilon(\sum \varepsilon(k_1)k_2)\varepsilon(l)\\ &= \varepsilon(h)\varepsilon(k)\varepsilon(l) = \varepsilon(hkl).\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.4. *Considere G um grupóide finito e K um anel comutativo. A álgebra de grupóide é o K-módulo livre com base $\{u_g \mid g \in G\}$, munido de uma multiplicação definida por:*

$$u_g u_h = \begin{cases} u_{gh}, & se\ d(g) = r(h) \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

É fácil ver que o elemento unidade de KG é dado por $\sum\limits_{e \in G_0} u_e$. Além disso, as aplicações $\Delta : KG \longrightarrow KG \otimes KG$ e $\varepsilon : KG \longrightarrow K$ definidas respectivamente por

$$\Delta(u_g) = u_g \otimes u_g \quad e \quad \varepsilon(u_g) = 1_K,\ para\ todo\ g \in G.$$

garantem a KG uma estrutura de coálgebra. Logo, KG é uma álgebra e uma coálgebra. A álgebra de grupóide é uma biálgebra fraca que não é uma biálgebra.

De fato, observemos primeiro que ε não é um homomorfismo de álgebras. De fato, note que dados $g, h \in G$ tais que $d(g) \neq r(h)$ então $u_g u_h = 0$ e assim $\varepsilon(u_g u_h) = 0$. Por outro lado, $\varepsilon(u_g)\varepsilon(u_h) = 1_K 1_K = 1_K$ e como $1_K \neq 0$ então $\varepsilon(u_g u_h) \neq \varepsilon(u_g)\varepsilon(u_h)$. Desta forma, KG não é uma biálgebra, como já havíamos comentado anteriormente.

Mostremos que KG é uma biálgebra fraca. Para tanto iniciaremos mostrando que Δ é multiplicativa, isto é,

$$\Delta(u_g u_h) = \Delta(u_g)\Delta(u_h)$$

para todo $g, h \in G$. De fato, sejam $g, h \in G$ então

$$\Delta(u_g)\Delta(u_h) = (u_g \otimes u_g)(u_h \otimes u_h) = u_g u_h \otimes u_g u_h.$$

Se $d(g) = r(h)$ então $u_g u_h = u_{gh}$ e daí

$$\Delta(u_g)\Delta(u_h) = u_{gh} \otimes u_{gh} = \Delta(u_{gh}) = \Delta(u_g u_h).$$

Se $d(g) \neq r(h)$ então $u_g u_h = 0$. Logo, $\Delta(u_g)\Delta(u_h) = 0 = \Delta(u_g u_h)$. Mostremos que

$$\varepsilon(u_g u_h u_k) = \sum \varepsilon(u_g (u_h)_1)\varepsilon((u_h)_2 u_k) = \varepsilon(u_g u_h)\varepsilon(u_h u_k).$$

Note que

$$\varepsilon(u_g u_h u_k) = \begin{cases} 1_K, \text{ se } d(g) = r(h) \text{ e } d(h) = r(k) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\varepsilon(u_g u_h) = \begin{cases} 1_K, \text{ se } d(g) = r(h) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\varepsilon(u_h u_k) = \begin{cases} 1_K, \text{ se } d(h) = r(k) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Assim,

$$\varepsilon(u_g u_h)\varepsilon(u_h u_k) = \begin{cases} 1_K, \text{ se } d(g) = r(h) \text{ e } d(h) = r(k) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $\varepsilon(u_g u_h u_k) = \varepsilon(u_g u_h)\varepsilon(u_h u_k)$, para todo $g, h, k \in G$. A condição $(F3)$ é igual a condição $(F2)$ neste caso. Finalmente, mostremos que vale $(F4)$. A condição $(F5)$ se mostra de maneira similar. De fato,

$$\begin{aligned} \Delta^2(\sum_{e \in G_0} u_e) &= (\Delta \otimes I_{KG})(\Delta(\sum_{e \in G_0} u_e)) \\ &= (\Delta \otimes I_{KG})(\sum_{e \in G_0} u_e \otimes u_e) \\ &= \sum_{e \in G_0} \Delta(u_e) \otimes u_e = \sum_{e \in G_0} u_e \otimes u_e \otimes u_e. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(1\otimes\Delta(1))(\Delta(1)\otimes 1) &= ((\sum_{e\in G_0} u_e)\otimes \sum_{f\in G_0} u_f\otimes u_f)((\sum_{e'\in G_0} u_{e'}\otimes u_{e'})\otimes \sum_{f'\in G_0} u_{f'})\\ &= (\sum_{e,f\in G_0} u_e\otimes u_f\otimes u_f)(\sum_{e',f'\in G_0} u_{e'}\otimes u_{e'}\otimes u_{f'})\\ &= \sum_{e,f,e',f'\in G_0} u_e u_{e'}\otimes u_f u_{e'}\otimes u_f u_{f'}\\ &= \sum_{e\in G_0} u_e\otimes u_e\otimes u_e\end{aligned}$$

sendo assim $(F4)$ é satisfeita e portanto KG é uma biálgebra fraca. □

As demonstrações dos três próximos resultados são muito simples. Entretanto esses resultados serão bastante utéis em várias outras demonstrações. Vamos usá-los, por exemplo, para mostrar que o dual de KG, com G finito, é uma biálgebra fraca.

Lema 1.2.5. *Sejam G um grupóide e $g,h\in G$. Então $gh^{-1}\in G_0$ se e somente se $g=h$.*

Demonstração: Suponha que $gh^{-1}=e$, para algum $e\in G_0$. Pelo Lema 1.1.4 (1) temos que $\exists gh^{-1}$ se e somente se $d(g)=r(h^{-1})=d(h)$. Então

$$g=gd(g)=gd(h)=g(h^{-1}h)=(gh^{-1})h=eh=h.$$

Reciprocamente, se $g=h$ então $gh^{-1}=hh^{-1}=r(h)\in G_0$. □

Lema 1.2.6. *Sejam G um grupóide, $g,h\in G$. Então, existe $l\in G$, com $d(h)=d(l)$ tal que $g=hl^{-1}$ se e somente se $r(g)=r(h)$.*

Demonstração: Suponha que $g=hl^{-1}$, então $r(g)=r(h)$. Reciprocamente, se $r(g)=r(h)$ então tomando $l=g^{-1}h$ temos que $d(l)=d(h)$ e $hl^{-1}=h(g^{-1}h)^{-1}=hh^{-1}g=r(h)g=r(g)g=g$. □

Similarmente ao lema anterior temos o seguinte

Lema 1.2.7. *Sejam G um grupóide, $h,l\in G$. Então, existe $g\in G$, com $d(g)=r(h)$ tal que $gh=l$ se e somente se $d(l)=d(h)$.*

Seja H uma biálgebra fraca que como K-módulo é livre de posto finito. O dual de H é o K-módulo livre $H^* = Hom_K(H, K)$ equipado com as estruturas duais definidas pela dualização da multiplicação, da comultiplicação, da unidade e da counidade de H. No que segue mostraremos que o dual de KG onde G é um grupóide finito é também uma biálgebra fraca.

Exemplo 1.2.8. *Começemos por observar que* $KG^* = \bigoplus_{g \in G} Kv_g$ *onde* $\{v_g \mid g \in G\}$ *é a base dual de* $\{u_g \mid g \in G\}$*, isto é,*

$$v_g(u_h) = \delta_{g,h} 1_K.$$

A estrutura de álgebra em KG^* *é dada por:*

$$v_g v_h = \delta_{g,h} v_g \quad e \quad \sum_{g \in G} v_g = 1_{KG^*}.$$

Nas expressões acima δ *denota o delta de Kronecker. Definimos as aplicações* $\Delta : KG^* \longrightarrow KG^* \otimes KG^*$ *e* $\varepsilon : KG^* \longrightarrow K$ *respectivamente por:*

$$\Delta(v_g) = \sum_{hl=g} v_h \otimes v_l = \sum_{d(h)=d(g)} v_{gh^{-1}} \otimes v_h$$

e

$$\varepsilon(\sum_{g \in G} a_g v_g) = \sum_{e \in G_0} a_e.$$

O dual da álgebra de um grupóide finito, KG^**, é uma biálgebra fraca.*

Com efeito, mostremos primeiramente que KG^* é uma coálgebra. Provemos que Δ satisfaz a coassociatividade, isto é,

$$(\Delta \otimes I_{KG^*}) \circ \Delta = (I_{KG^*} \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

De fato, seja $v_g \in KG^*$ então

$$\begin{aligned}
(I_{KG^*} \otimes \Delta) \circ \Delta(v_g) &= (I_{KG^*} \otimes \Delta)(\sum_{d(h)=d(g)} v_{gh^{-1}} \otimes v_h) \\
&= \sum_{d(h)=d(g)} v_{gh^{-1}} \otimes \Delta(v_h) \\
&= \sum_{d(h)=d(g)} \sum_{d(l)=d(h)} v_{gh^{-1}} \otimes v_{hl^{-1}} \otimes v_l.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I_{KG^*}) \circ \Delta(v_g) &= (\Delta \otimes I_{KG^*})(\sum_{d(h)=d(g)} v_{gh^{-1}} \otimes v_h) \\
&= \sum_{d(h)=d(g)} \Delta(v_{gh^{-1}}) \otimes v_h \\
&= \sum_{d(h)=d(g)} \sum_{d(l)=d(gh^{-1})} v_{gh^{-1}l^{-1}} \otimes v_l \otimes v_h.
\end{aligned}$$

Trocando l por h na equação acima obtemos:

$$(\Delta \otimes I_{KG^*}) \circ \Delta(v_g) = \sum_{d(l)=d(g)} \sum_{d(h)=d(gl^{-1})} v_{g(hl)^{-1}} \otimes v_h \otimes v_l.$$

Agora vamos substituir hl por t. Note que se $t = hl$ então $h^{-1}t = h^{-1}hl = d(h)l$. Mas, $d(h) = d(gl^{-1}) = d(l^{-1}) = r(l)$. Assim, $h^{-1}t = r(l)l = l$. Além disso, sabemos que $d(t) = d(l)$. Então, $d(l) = d(g)$ se e somente se $d(t) = d(g)$. Desta forma, temos que

$$(\Delta \otimes I_{KG^*}) \circ \Delta(v_g) = \sum_{d(l)=d(g)} \sum_{d(h)=d(gl^{-1})} v_{gt^{-1}} \otimes v_{tl^{-1}} \otimes v_l.$$

Note que,

$$(g, (hl)^{-1}) \in G^2 \Longleftrightarrow (gl^{-1}, h^{-1}) \in G^2$$

$$(g, (hl)^{-1}) \in G^2 \Longleftrightarrow d(g) = r((hl)^{-1}) = d(hl) = d(t) \text{ e}$$

$$(gl^{-1}, h^{-1}) \in G^2 \Longleftrightarrow d(gl^{-1}) = r(h^{-1}) = d(h).$$

Portanto, $d(gl^{-1}) = d(h)$ se e somente se $d(g) = d(t)$. Então,

$$(\Delta \otimes I_{KG^*}) \circ \Delta(v_g) = \sum_{d(l)=d(g)} \sum_{d(t)=d(g)} v_{gt^{-1}} \otimes v_{tl^{-1}} \otimes v_l$$

Portanto, $(\Delta \otimes I_{KG^*}) \circ \Delta = (I_{KG^*} \otimes \Delta) \circ \Delta$.

Agora mostremos que $(\varepsilon \otimes I_{KG^*}) \circ \Delta = \varphi$ e $(I_{KG^*} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \widetilde{\varphi}$, onde as aplicações $\varphi : KG^* \longrightarrow K \otimes KG^*$ e $\widetilde{\varphi} : KG^* \longrightarrow KG^* \otimes K$ são os isomorfismos canônicos. Novamente seja $v_g \in KG^*$. Então

$$(\varepsilon \otimes I_{KG^*})(\Delta(v_g)) = (\varepsilon \otimes I_{KG^*})(\sum_{d(h)=d(g)} v_{gh^{-1}} \otimes v_h) = \sum_{d(h)=d(g)} \varepsilon(v_{gh^{-1}}) \otimes v_h$$

Por Lema 1.2.5 temos que $gh^{-1} \in G_0$ se e somente se $h = g$ e por definição

$$\varepsilon(v_l) = \begin{cases} 1_K, & \text{se } l \in G_0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma,

$$(\varepsilon \otimes I_{KG^*})(\Delta(v_g)) = \varepsilon(v_{r(g)}) \otimes v_g = 1_K \otimes v_g = \varphi(v_g).$$

Por outro lado,

$$(I_{KG^*} \otimes \varepsilon)(\Delta(v_g)) = (I_{KG^*} \otimes \varepsilon)(\sum_{d(h)=d(g)} v_{gh^{-1}} \otimes v_h) = \sum_{d(h)=d(g)} v_{gh^{-1}} \otimes \varepsilon(v_h)$$

Note que, dado $h \in G$, com $d(h) = d(g)$ então $h \in G_0$ se e somente se $h = d(g)$. De fato, se $h \in G_0$ então $h = d(h) = d(g)$. Reciprocamente, se $h = d(g)$ então $h \in G_0$. Logo,

$$(I_{KG^*} \otimes \varepsilon)(\Delta(v_g)) = v_g \otimes \varepsilon(v_{d(g)}) = v_g \otimes 1_K = \widetilde{\varphi}(v_g).$$

Portanto, KG^* é uma coálgebra.

Mostremos que Δ satisfaz a condição $(F1)$ da definição de biálgebra fraca, ou seja, que $\Delta(v_g v_h) = \Delta(v_g)\Delta(v_h)$, para todo $g, h \in G$. Note que

$$\Delta(v_g)\Delta(v_h) = (\sum_{d(l)=d(g)} v_{gl^{-1}} \otimes v_l)(\sum_{d(k)=d(h)} v_{hk^{-1}} \otimes v_k) = \sum_{\substack{d(l)=d(g) \\ d(k)=d(h)}} v_{gl^{-1}} v_{hk^{-1}} \otimes v_l v_k.$$

Para o cálculo de $\Delta(v_g)\Delta(v_h)$ vamos analisar os seguintes casos $g = h$ e $g \neq h$.

<ins>Caso 1:</ins> Suponha que $g = h$ então $v_g v_h = v_g$. Assim $\Delta(v_g v_h) = \Delta(v_g)$. Por outro lado, se $l = k$ então naturalmente $gl^{-1} = gk^{-1}$ e se $l \neq k$ então $v_l v_k = 0$ e desta forma $v_{gl^{-1}} v_{gk^{-1}} \otimes v_l v_k = 0$.

Portanto, $\Delta(v_g)\Delta(v_h) = \sum_{d(l)=d(g)} v_{gl^{-1}} \otimes v_l = \Delta(v_g) = \Delta(v_g v_h)$.

<ins>Caso 2:</ins> Suponha que $g \neq h$ então $v_g v_h = 0$. E como Δ é uma aplicação linear temos que $\Delta(v_g v_h) = 0$. Por outro lado, se $l = k$ então $gl^{-1} \neq hk^{-1}$. De fato, suponha

que $gl^{-1} = hk^{-1}$ então $gl^{-1}l = hk^{-1}k$. Assim, $gd(l) = hd(k)$, e como $d(l) = d(g)$ e $d(k) = d(h)$ então $g = h$. Absurdo. Logo, se $v_l v_k \neq 0$ então $v_{gl^{-1}} v_{hk^{-1}} = 0$. Portanto, $\Delta(v_g)\Delta(v_h) = 0 = \Delta(v_g v_h)$.

Mostremos que ε satisfaz $(F2)$, isto é,

$$\varepsilon(v_g v_h v_l) = \sum \varepsilon(v_g (v_h)_1)\varepsilon((v_h)_2 v_l) = \sum_{d(k)=d(h)} \varepsilon(v_g v_{hk^{-1}})\varepsilon(v_k v_l)$$

para todo $g, h, l \in G$. Vamos dividir em três casos: $h \neq l$, $h = l = g$, $h = l \neq g$.

Caso 1: Suponha que $h \neq l$ então $v_g v_h v_l = 0$. Por outro lado,

$$\sum \varepsilon(v_g (v_h)_1)\varepsilon((v_h)_2 v_l) = \sum_{d(k)=d(h)} \varepsilon(v_g v_{hk^{-1}})\varepsilon(v_k v_l) = \begin{cases} \varepsilon(v_g v_{hl^{-1}})\varepsilon(v_l), \text{ se } d(l) = d(h) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Sabemos que $v_g v_{hl^{-1}} \neq 0$ se e somente se $g = hl^{-1}$. Pelo Lema 1.2.6 temos que essa condição é equivalente à $r(g) = r(h)$. Logo,

$$\sum_{d(k)=d(h)} \varepsilon(v_g v_{hk^{-1}})\varepsilon(v_k v_l) = \begin{cases} \varepsilon(v_{hl^{-1}})\varepsilon(v_l), \text{ se } r(g) = r(h) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Suponha que $r(g) = r(h)$ então $\sum_{d(k)=d(h)} \varepsilon(v_g v_{hk^{-1}})\varepsilon(v_k v_l) = \varepsilon(v_{hl^{-1}})\varepsilon(l)$. Pelo Lema 1.2.5 temos que $hl^{-1} \in G_0$ se e somente se $h = l$. Como $h \neq l$, por hipótese, então $hl^{-1} \notin G_0$ e assim $\varepsilon(v_{hl^{-1}}) = 0$. Assim, temos que $\sum_{d(k)=d(h)} \varepsilon(v_g v_{hk^{-1}})\varepsilon(v_k v_l) = 0 = \varepsilon(v_g v_h v_l)$.

Caso 2: Suponha que $h = l = g$ então $v_g v_h v_l = v_g$. Neste caso, $\varepsilon(v_g v_h v_l) = \varepsilon(v_g)$. Por outro lado,

$$\sum_{d(k)=d(g)} \varepsilon(v_g v_{gk^{-1}})\varepsilon(v_k v_g) = \varepsilon(v_g v_{gg^{-1}})\varepsilon(v_g) = \varepsilon(v_g v_{r(g)})\varepsilon(v_g).$$

Se $h = l = g \in G_0$ então $g = r(g)$ e assim $\varepsilon(v_g v_{r(g)})\varepsilon(v_g) = \varepsilon(v_g v_g)\varepsilon(v_g) = \varepsilon(v_g)\varepsilon(v_g) = 1_K = \varepsilon(v_g)$. Por outro lado, se $h = l = g \notin G_0$ então $\varepsilon(v_g v_{r(g)})\varepsilon(v_g) = 0 = \varepsilon(v_g)$.

Logo, neste caso, $\varepsilon(v_g v_h v_l) = \sum_{d(k)=d(h)} \varepsilon(v_g v_{hk^{-1}})\varepsilon(v_k v_l)$ como queríamos.

Caso 3: Suponha que $h = l \neq g$. Então, neste caso $v_g v_h v_l = 0$. Por outro lado,

$$\sum \varepsilon(v_g(v_h)_1)\varepsilon((v_h)_2 v_l) = \sum_{d(k)=d(h)} \varepsilon(v_g v_{hk^{-1}})\varepsilon(v_k v_l).$$

Como $l = h$ então

$$\sum_{d(k)=d(h)} \varepsilon(v_g v_{hk^{-1}})\varepsilon(v_k v_l) = \varepsilon(v_g v_{hh^{-1}})\varepsilon(v_h) = \varepsilon(v_g v_{r(h)})\varepsilon(v_h).$$

Agora vamos analisar dois casos: $h = l \in G_0$ e $h = l \notin G_0$. No primeiro, temos que $r(h) = h$ e daí

$$\sum_{d(k)=d(h)} \varepsilon(v_g v_{hk^{-1}})\varepsilon(v_k v_l) = \varepsilon(v_g v_h)\varepsilon(v_h) = 0,$$

pois $g \neq h$ implica que $v_g v_h = 0$.

No segundo, temos que

$$\sum_{d(k)=d(h)} \varepsilon(v_g v_{hk^{-1}})\varepsilon(v_k v_l) = \varepsilon(v_g v_{r(h)})\varepsilon(v_h) = 0,$$

pois se $h \notin G_0$ então $\varepsilon(v_h) = 0$.

Em todos os casos temos que vale $(F2)$. A condição $(F3)$ é feita usando raciocínio similar.

Mostremos que Δ satisfaz a condição $(F4)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\Delta^2(\sum_{g\in G} v_g) &= \sum_{g\in G} \Delta^2(v_g) \\
&= \sum_{g\in G} (I \otimes \Delta)(\Delta(v_g)) \\
&= \sum_{g\in G} (I \otimes \Delta)(\sum_{d(h)=d(g)} v_{gh^{-1}} \otimes v_h) \\
&= \sum_{g\in G} \sum_{d(h)=d(g)} v_{gh^{-1}} \otimes \Delta(v_h) \\
&= \sum_{g\in G} \sum_{d(h)=d(g)} \sum_{d(l)=d(h)} v_{gh^{-1}} \otimes v_{hl^{-1}} \otimes v_l
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(1_{KG^*} \otimes \Delta(1_{KG^*}))(\Delta(1_{KG^*}) \otimes 1_{KG^*}) &= (\sum_{\substack{g,l,t\in G \\ d(t)=d(g)}} v_l \otimes v_{gt^{-1}} \otimes v_t)(\sum_{\substack{h,k,s\in G \\ d(s)=d(h)}} v_{hs^{-1}} \otimes v_s \otimes v_k) \\
&= \sum_{\substack{g,l,h,k,s,t\in G \\ d(t)=d(g) \\ d(s)=d(h)}} v_l v_{hs^{-1}} \otimes v_{gt^{-1}} v_s \otimes v_t v_k
\end{aligned}$$

Sabemos que $v_t v_k \neq 0$ se e somente se $k = t$. Então

$$(1_{KG^*} \otimes \Delta(1_{KG^*}))(\Delta(1_{KG^*}) \otimes 1_{KG^*}) = \sum_{g,l,h \in G} \sum_{d(k)=d(g)} \sum_{d(s)=d(h)} v_l v_{hs^{-1}} \otimes v_{gk^{-1}} v_s \otimes v_k.$$

Agora note que $v_{gk^{-1}} v_s \neq 0$ se e somente se $gk^{-1} = s$ e pelo Lema 1.2.7 temos que isto ocorre se e somente se $d(s) = r(k)$. Como g é qualquer então

$$(1_{KG^*} \otimes \Delta(1_{KG^*}))(\Delta(1_{KG^*}) \otimes 1_{KG^*}) = \sum_{l,h \in G} \sum_{r(k)=d(h)} \sum_{d(g)=d(k)} v_l v_{hkg^{-1}} \otimes v_{gk^{-1}} \otimes v_k.$$

Finalmente, $v_l v_{hkg^{-1}} \neq 0$ se e somente se $l = hkg^{-1}$. Então

$$(1_{KG^*} \otimes \Delta(1_{KG^*}))(\Delta(1_{KG^*}) \otimes 1_{KG^*}) = \sum_{h \in G} \sum_{d(g)=d(k)} \sum_{r(k)=d(h)} v_{hkg^{-1}} \otimes v_{gk^{-1}} \otimes v_k.$$

Observe que fazendo $t = hk$ então

$$(1_{KG^*} \otimes \Delta(1_{KG^*}))(\Delta(1_{KG^*}) \otimes 1_{KG^*}) = \sum_{t \in G} \sum_{d(g)=d(t)} \sum_{d(k)=d(g)} v_{tg^{-1}} \otimes v_{gk^{-1}} \otimes v_k.$$

Portanto, $\Delta^2(1_{KG^*}) = (1_{KG^*} \otimes \Delta(1_{KG^*}))(\Delta(1_{KG^*}) \otimes 1_{KG^*})$. Analogamente mostra-se que vale $(F5)$ e desta forma KG^* é uma biálgebra fraca. $\square$

Definição 1.2.9. *[8, Proposição 4.15] Sejam H uma biálgebra fraca e A uma K-álgebra com unidade, a qual é também um H-módulo à esquerda tal que $h.(ab) = \sum (h_1.a)(h_2.b)$, para todo $h \in H$ e $a, b \in A$. Dizemos que A é um H-módulo álgebra à esquerda se*

$$(hk).1_A = \sum \varepsilon(h_1 k) h_2.1_A$$

para todo $h, k \in H$.

A seguir daremos outras condições equivalentes para que um H-módulo à esquerda seja um H-módulo álgebra.

Seja H uma biálgebra fraca. Então as aplicações:

$$\Pi^L : H \longrightarrow H \;\text{ e }\; \overline{\Pi}^L : H \longrightarrow H$$

definidas respectivamente por

$$\Pi^L(h) = \sum \varepsilon(1_1 h) 1_2 \;\text{ e }\; \overline{\Pi}^L(h) = \sum \varepsilon(1_2 h) 1_1$$

para todo $h \in H$ são projeções. De fato, mostremos que $\Pi^L \circ \Pi^L = \Pi^L$

$$\begin{aligned}
\Pi^L(\Pi^L(h)) &= \Pi^L(\sum \varepsilon(1_1 h)1_2) \\
&= \sum \varepsilon(1_{1'}\varepsilon(1_1)h1_2)1_{2'} \\
&= \sum \varepsilon(1_1 h)\varepsilon(1_{1'}1_2)1_{2'} \\
&= \sum \varepsilon(1_1 h)1_2 \\
&= \Pi^L(h)
\end{aligned}$$

pois $\Delta^2(1) = \sum 1_1 \otimes 1_{1'}1_2 \otimes 1_{2'}$. Analogamente mostra-se que $\overline{\Pi}^L \circ \overline{\Pi}^L = \overline{\Pi}^L$.

Observação 1.2.10. *[8, Proposição 4.8] Seja H uma biálgebra fraca. Então,*

$$\overline{\Pi}^L \circ \Pi^L = \overline{\Pi}^L \quad e \ \Pi^L \circ \overline{\Pi}^L = \Pi^L.$$

Consequentemente, $Ker\overline{\Pi}^L = Ker\Pi^L$.

De fato, seja $h \in H$. Então,

$$\begin{aligned}
\Pi^L(\overline{\Pi}^L(h)) &= \sum \Pi^L(\varepsilon(1_2 h)1_1) \\
&= \sum \varepsilon(1_{1'}\varepsilon(1_2 h)1_1)1_{2'} \\
&= \sum \varepsilon(1_{1'}1_1)\varepsilon(1_2 h)1_{2'} \\
&= \sum \varepsilon(1_{1'}1_H h)1_{2'} \\
&= \sum \varepsilon(1_{1'}h)1_{2'} = \Pi^L(h).
\end{aligned}$$

Pois por $(F2)$ temos que $\varepsilon(xyz) = \sum \varepsilon(xy_1)\varepsilon(y_2 z)$, para todo $x, y, z \in H$. Usando raciocínio análogo mostrasse que $\overline{\Pi}^L \circ \Pi^L = \overline{\Pi}^L$. $\square$

Proposição 1.2.11. *[8, Proposição 4.15] Sejam H uma biálgebra fraca e A uma K-álgebra com unidade, a qual é também um H-módulo à esquerda tal que $h.(ab) = \sum(h_1.a)(h_2.b)$, para todo $h \in H$ e $a, b \in A$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) A é um H-módulo álgebra à esquerda,

(2) $(hk).1_A = \sum \varepsilon(h_2 k)h_1.1_A$,

(3) $\overline{\Pi}^L(h).a = a(h.1_A)$,

(4) $\Pi^L(h).a = (h.1_A)a$,

(5) $\overline{\Pi}^L(h).1_A = h.1_A$,

(6) $\Pi^L(h).1_A = h.1_A$,

(7) $Ker\Pi^L.1_A = 0$,

para todo $h, k \in H$ *e* $a \in A$.

Demonstração: (1) $\Longrightarrow$ (4) Suponha que $(hk).1_A = \sum \varepsilon(h_1k)h_2.1_A$. Seja $h \in H$ e $a \in A$. Então

$$\begin{aligned}
\Pi^L(h).a = (\sum \varepsilon(1_1h)1_2).a &= \sum \varepsilon(1_1h)(1_2.a) = \sum \varepsilon(1_1h)(1_2.(1_Aa)) \\
&= \sum(\varepsilon(1_1h)(1_21_{1'}.1_A))(1_{2'}.a) = \sum((1_1h).1_A)(1_2.a) \\
&= \sum(1_1.(h.1_A))(1_2.a) = 1_H.((h.1_A)a) = (h.1_A)a
\end{aligned}$$

(4) $\Longrightarrow$ (6) Basta tomar $a = 1_A$.

(6) $\Longrightarrow$ (7) Suponha que $\Pi^L(h).1_A = h.1_A$. Seja $x \in K^L$ então $0 = \Pi^L(x).1_A = x.1_A$. Desta forma, $K^L.1_A = 0$.

(7) $\Longrightarrow$ (1) Mostremos primeiro que $\sum \varepsilon(h_1k)h_2 - hk \in K^L$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Pi^L(\sum \varepsilon(h_1k)h_2 - hk) &= \sum \varepsilon(1_1(\sum \varepsilon(h_1k)h_2 - hk))1_2 \\
&= \sum \varepsilon(1_1\varepsilon(h_1k)h_2 - 1_1hk)1_2 \\
&= \sum(\varepsilon(h_1k)\varepsilon(1_1h_2) - \varepsilon(1_1hk))1_2 \\
&= \sum(\varepsilon(1_1h_2)\varepsilon(h_1k) - \varepsilon(1_1hk))1_2 \\
&= \sum(\varepsilon(1_1hk) - \varepsilon(1_1hk))1_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Então $(\sum \varepsilon(h_1k)h_2 - hk).1_A = 0$ e assim

$$(hk).1_A = \sum \varepsilon(h_1k)h_2.1_A.$$

As demonstrações de (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (5) $\Longrightarrow$ (7) são análogas. E assim o resultado está provado uma vez que pela Observação 1.2.10 temos que $Ker\overline{\Pi}^L = Ker\Pi^L$. $\square$

Teorema 1.2.12. *Sejam G um grupóide finito e A uma K-álgebra com unidade. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ é uma ação de G sobre A tal que E_e tem unidade para todo $e \in G_0$ e $A = \bigoplus\limits_{e\in G_0} E_e$,

(2) A é um KG-módulo álgebra à esquerda.

Demonstração: (1) $\Longrightarrow$ (2) Denotemos por 1_g o elemento identidade de E_g, para todo $g \in G$. Observe que os 1_g's são idempotentes centrais em A e que $A = \bigoplus\limits_{e\in G_0} E_e$ implica que $E_e \cap E_f = 0$ para todo $e \neq f$, e $1_A = \sum\limits_{e\in G_0} 1_e$. Para cada $g \in G$ e $a \in A$ definimos

$$u_g.a = \beta_g(a1_{g^{-1}}).$$

Mostremos que A é um KG-módulo álgebra à esquerda com essa ação. Primeiramente mostremos que A é um KG-módulo à esquerda. De fato, sejam $g, h \in G$ e $a \in A$ então

$$u_g.(u_h.a) = u_g.(\beta_h(a1_{h^{-1}})) = \beta_g(\beta_h(a1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}).$$

Observe que $\beta_h(a1_{h^{-1}})1_{g^{-1}} \in E_h \cap E_{g^{-1}} = E_{r(h)} \cap E_{d(g)}$. Assim, se $d(g) \neq r(h)$ então $\beta_h(a1_{h^{-1}})1_{g^{-1}} = 0$ e se $d(g) = r(h)$ então $E_h \cap E_{g^{-1}} = E_{r(h)} = E_h$ e $\beta_g(\beta_h(a1_{h^{-1}})) = \beta_{gh}(a1_{h^{-1}})$. Além disso $E_{h^{-1}} = E_{d(h)} = E_{d(gh)} = E_{(gh)^{-1}}$ e desta forma $1_{h^{-1}} = 1_{(gh)^{-1}}$. Então

$$u_g.(u_h.a) = \begin{cases} \beta_{gh}(a1_{(gh)^{-1}}), & \text{se } d(g) = r(h) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, uma vez que

$$u_g u_h = \begin{cases} u_{gh}, & \text{se } d(g) = r(h) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então

$$(u_g u_h).a = \begin{cases} u_{gh}.a = \beta_{gh}(a1_{(gh)^{-1}}), \text{ se } d(g) = r(h) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $u_g.(u_h.a) = u_{gh}.a$, para todo $g, h \in G$ e $a \in A$. Mais ainda,

$$1_{KG}.a = (\sum_{e \in G_0} u_e).a = \sum_{e \in G_0} u_e.a = \sum_{e \in G_0} \beta_e(a1_e) = \sum_{e \in G_0} a1_e = a \sum_{e \in G_0} 1_e = a1_A = a.$$

Portanto, A é um KG-módulo à esquerda. Agora, note que

$$u_g.(ab) = \beta_g(ab1_{g^{-1}}) = \beta_g(a1_{g^{-1}}b1_{g^{-1}}) = \beta_g(a1_{g^{-1}})\beta_g(b1_{g^{-1}}) = (u_g.a)(u_g.b),$$

para todo $g \in G$ e $a, b \in A$. Finalmente mostremos que ação satisfaz a condição (1) da proposição anterior, isto é,

$$(u_g u_h).1_A = \sum \varepsilon((u_g)_1 u_h)(u_g)_2.1_A = \varepsilon(u_g u_h)u_g.1_A.$$

Com efeito, sejam $g, h \in G$ tais que $d(g) = r(h)$ então

$$\varepsilon(u_g u_h)u_g.1_A = \varepsilon(u_{gh})u_g.1_A = u_g.1_A = \beta_g(1_A 1_{g^{-1}}) = 1_g.$$

Entretanto, se $d(g) \neq r(h)$ então $u_g u_h = 0$ e assim $\varepsilon(u_g u_h)u_g.1_A = 0$. Logo,

$$\varepsilon(u_g u_h)u_g.1_A = \begin{cases} 1_g, \text{ se } d(g) = r(h) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, se $d(g) = r(h)$ então $(u_g u_h).1_A = u_{gh}.1_A = \beta_{gh}(1_A 1_{(gh^{-1})}) = 1_{gh}$ e $E_{gh} = E_{r(gh)} = E_{r(g)}$ o que implica que $1_g = 1_{gh}$. Porém, se $d(g) \neq r(h)$ então $u_g u_h = 0$ e daí

$$(u_g u_h).1_A = \begin{cases} 1_g, \text{ se } d(g) = r(h) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, temos a igualdade e desta forma A é um KG-módulo álgebra à esquerda.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Suponha que A é um KG-módulo álgebra à esquerda. Para cada $g \in G$ definimos

$$1_g = u_g.1_A.$$

Mostremos primeiro que para cada $g \in G$, 1_g é um idempotente central de A. De fato,

$$1_g = u_g.1_A = u_g.(1_A 1_A) = (u_g.1_A)(u_g.1_A) = 1_g 1_g.$$

Note que

$$\Pi^L(u_g) = \sum \varepsilon(u_e u_g)u_e = \varepsilon(u_{r(g)}u_g)u_{r(g)} = \varepsilon(u_g)u_{r(g)} = u_{r(g)}$$

e

$$\overline{\Pi}^L(u_g) = \sum u_e \varepsilon(u_e u_g) = u_{r(g)}\varepsilon(u_{r(g)}u_g) = u_{r(g)}\varepsilon(u_g) = u_{r(g)}.$$

Logo, pelas condições (3) e (4) da Proposição 1.2.11 temos

$$a1_g = a(u_g.1_A) = \overline{\Pi}^L(u_g).a = \Pi^L(u_g).a = (u_g.1_A)a = 1_g a \text{ , para todo } a \in A.$$

Então para todo $g \in G$, $E_g = A1_g$ é naturalmente um ideal bilateral de A.

Mais ainda, por Proposição 1.2.11 (6) e do fato que $\Pi^L(u_g) = u_{r(g)}$ segue que

$$u_g.1_A = \Pi^L(u_g).1_A = u_{r(g)}.1_A, \text{ para todo } g \in G.$$

Assim, $1_g = 1_{r(g)}$ e deste modo $E_g = E_{r(g)}$, para todo $g \in G$.

Mostremos agora que $A = \bigoplus\limits_{e \in G_0} E_e$. De fato, seja $a \in A$ então

$$\begin{aligned} a = 1_{KG}.a = (\sum_{e \in G_0} u_e).a = \sum_{e \in G_0} u_e.a = \sum_{e \in G_0} (u_e.(1_A a)) \\ = \sum_{e \in G_0} (u_e.1_A)(u_e.a) = \sum_{e \in G_0} 1_e(u_e.a) \in \sum_{e \in G_0} E_e. \end{aligned}$$

Seja $x \in E_e \cap \sum\limits_{f \neq e} E_f$. Logo, $x = (u_e.1_A)a = \sum\limits_{f \neq e}(u_f.1_A)b_f$, com $a, b_f \in A$. Então, por Proposição 1.2.11 (4) temos que

$$x = \Pi^L(u_e).a = u_e.a \ \text{ e } \ x = \Pi^L(\sum_{f \neq e} u_f).b_f = \sum_{f \neq e} \Pi^L(u_f).b_f = \sum_{f \neq e} u_f.b_f.$$

Assim, para cada $f' \in G_0$, $f' \neq e$ temos:

$$u_{f'}.x = u_f.(\sum_{f \neq e} u_f.b_f) = \sum_{f \neq e}(u_{f'}u_f).b_f = u_{f'}.b_{f'}$$

e

$$u_{f'}.x = u_{f'}.(u_e.a) = (u_{f'}u_e).a = 0.$$

Logo, $u_{f'}.b_{f'} = 0$, para todo $f^{'} \in G_0$, com $f^{'} \neq e$. Portanto, $x = 0$ e deste modo $A = \bigoplus_{e \in G_0} E_e$.

Agora para cada $g \in G$ definimos $\gamma_g : E_{g^{-1}} \longrightarrow E_g$ por $\gamma_g(1_{g^{-1}}x) = u_g.(x1_{g^{-1}})$. Note que, γ_g está bem definida e é um homomorfismo de K-álgebras pois:

$$\begin{aligned}(i)\ u_g.(x1_{g^{-1}}) &= (u_g.x)(u_g.1_{g^{-1}}) = (u_g.x)(u_g.(u_{g^{-1}}.1_A)) \\ &= (u_g.x)(u_{gg^{-1}}.1_A) = (u_g.x)(u_{r(g)}.1_A) \\ &= (u_g.x)1_{r(g)} = (u_g.x)1_g \in A1_g = E_g.\end{aligned}$$

Em particular, $\gamma_g(1_{g^{-1}}) = 1_g$. E para todo $x, y \in A$ temos

(ii) γ_g é claramente K-linear,

(iii) $\gamma_g(xy1_{g^{-1}}) = u_g.(xy1_{g^{-1}}) = (u_g.(x1_{g^{-1}}))(u_g.(y1_{g^{-1}})) = \gamma_g(x1_{g^{-1}})\gamma_g(y1_{g^{-1}})$,

(iv) Claramente, $\gamma_e(x1_e) = u_e.(x1_e) = (u_e.x).1_e = (1_{KG}.x)1_e = x1_e = I_{E_e}(x1_e)$.

(v) Finalmente, para todo $(g, h) \in G^2$ temos que $d(g) = r(h)$, consequentemente $1_{g^{-1}} = u_{r(g^{-1})}.1_A = u_{d(g)}.1_A = u_{r(h)}.1_A = 1_h$. E sendo assim

$$\begin{aligned}\gamma_g\gamma_h(x1_{h^{-1}}) &= \gamma_g(u_h.(x1_{h^{-1}})) = \gamma_g((u_h.x)1_h) \\ &= \gamma_g((u_h.x)1_{g^{-1}}) = u_g.(u_h.x)1_g \\ &= (u_{gh}.x)1_{r(g)} = (u_{gh}.x)1_{r(gh)} \\ &= (u_{gh}.x)1_{gh} = \gamma_{gh}(x1_{(gh)^{-1}}).\end{aligned}$$

Portanto, $\gamma_g\gamma_h = \gamma_{gh}$, para todo $(g, h) \in G^2$. $\square$

É importante observar que existem ações de grupóides sobre álgebras que não são soma direta dos ideais E_e's como pode ser visto no Exemplo 1.6.3.

1.3 Skew Anel de Grupóide

Na primeira seção deste capítulo definimos ação de grupóide sobre uma K-álgebra com unidade. Vamos definir o skew anel de grupóide associado a uma dada ação.

Definição 1.3.1. *[2] Seja $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de um grupóide G sobre uma K-álgebra R. O skew anel de grupóide $R \star_\beta G$ correspondente a ação β é definido como a soma direta*

$$R \star_\beta G = \bigoplus_{g\in G} E_g\delta_g$$

no qual os δ_g's são símbolos, com adição usual e a multiplicação definida por

$$(x_g\delta_g)(y_h\delta_h) = \begin{cases} x_g\beta_g(y_h)\delta_{gh}, & \textit{se } d(g) = r(h) \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

para todo $g, h \in G$, $x_g \in E_g$ e $y_h \in E_h$.

Observe que esta multiplicação está bem definida. De fato, uma vez que $d(g) = r(h)$ então $E_{d(g)} = E_{r(h)}$. Mas, $E_{d(g)} = E_{g^{-1}}$ e $E_{r(h)} = E_h$ então $E_{g^{-1}} = E_h$. Assim, podemos aplicar β_g em E_h. Além disso, $x_g\beta_g(y_h) \in E_g$ e

$$E_g = E_{r(g)} = E_{r(gh)} = E_{gh}.$$

Portanto, $x_g\beta_g(y_h) \in E_{gh}$ e desta forma a multiplicação está bem definida. Como já observamos anteriormente, para cada $e \in G_0$, $\beta_{(e)} = (\{E_g\}_{g\in G_e}, \{\beta_g\}_{g\in G_e})$ é uma ação do grupo G_e sobre a K-álgebra E_e. Assim, podemos considerar o skew anel de grupo $A_e = E_e \star_{\beta_{(e)}} G_e$. Mostraremos no próximo lema que o skew anel de grupóide $R\star_\beta G$ é uma K-álgebra associativa e, logo em seguida, exibiremos condições necessárias e suficientes sob as quais este é também unitário.

Lema 1.3.2. *[3, Observação 3.2] Seja $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de um grupóide G sobre uma K-álgebra R unitária. Então, $A = R \star_\beta G$ é uma K-álgebra associativa.*

Demonstração: É fácil verificar que A é um K-módulo. Mostraremos que a multiplicação é associativa. De fato, sejam $x_g\delta_g, y_h\delta_h, z_l\delta_l \in A$, com $x_g \in E_g$, $y_h \in E_h$ e $z_l \in E_l$. Então, pela definição da multiplicação

$$(x_g\delta_g)[(y_h\delta_h)(z_l\delta_l)] = \begin{cases} (x_g\delta_g)(y_h\beta_h(z_l)\delta_{hl}), & \text{se } d(h) = r(l) \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e assim

$$(x_g\delta_g)[(y_h\delta_h)(z_l\delta_l)] = \begin{cases} x_g\beta_g(y_h\beta_h(z_l))\delta_{ghl}, \text{ se } d(h)=r(l) \text{ e } d(g)=r(hl) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $d(g) = r(hl) = r(h)$ implica que $E_{d(g)} = E_{r(h)}$. Assim, $E_{g^{-1}} = E_h$ e desta forma podemos aplicar β_g em E_h e

$$(x_g\delta_g)[(y_h\delta_h)(z_l\delta_l)] = \begin{cases} x_g\beta_g(y_h)\beta_g(\beta_h(z_l)\delta_{ghl}, \text{ se } d(h)=r(l) \text{ e } d(g)=r(h) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Como $d(g) = r(h)$ então $\beta_g\beta_h = \beta_{gh}$ e assim

$$(x_g\delta_g)[(y_h\delta_h)(z_l\delta_l)] = \begin{cases} x_g\beta_g(y_h)\beta_{gh}(z_l)\delta_{ghl}, \text{ se } d(h)=r(l) \text{ e } d(g)=r(h) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$[(x_g\delta_g)(y_h\delta_h)](z_l\delta_l) = \begin{cases} (x_g\beta_g(y_h)\delta_{gh})(z_l\delta_l), \text{ se } d(g)=r(h) \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$[(x_g\delta_g)(y_h\delta_h)](z_l\delta_l) = \begin{cases} x_g\beta_g(y_h)\beta_{gh}(z_l)\delta_{ghl}, \text{ se } d(g)=r(h) \text{ e } d(gh)=d(h)=r(l) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $(x_g\delta_g)[(y_h\delta_h)(z_l\delta_l)] = [(x_g\delta_g)(y_h\delta_h)](z_l\delta_l)$. □

Proposição 1.3.3. *[3, Proposição 3.3] Seja $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de um grupóide G sobre uma K-álgebra unitária R. Suponha que E_e é unitário para todo $e \in G_0$. Então,*

(1) o skew anel de grupo $A_e = E_e \star_{\beta(e)} G_e$ é unitário para todo $e \in G_0$,

(2) A é unitário se e somente se G_0 é finito.

Além disso, neste caso, o elemento identidade de A (resp., A_e) é dado por $\sum_{e\in G_0} 1_e\delta_e$ (resp., $1_e\delta_e$) onde 1_e denota o elemento identidade de E_e, para todo $e \in G_0$.

Demonstração: (1) Imediato.

(2) Suponha que A é unitário e seja $1_A = \sum_{g\in G} x_g\delta_g$, com $x_g \in E_g$. Então para cada $e \in G_0$ temos

$$1_e\delta_e = 1_A 1_e\delta_e = \sum_{g\in G}(x_g\delta_g)(1_e\delta_e) = \sum_{d(g)=e} x_g\beta_g(1_e)\delta_{ge} = \sum_{d(g)=e} x_g\delta_g,$$

pois se $d(g) = e$ então $E_e = E_{d(g)} = E_{g^{-1}}$, e assim $1_e = 1_{g^{-1}}$. Portanto, $x_e = 1_e$ e $x_g = 0$, para todo $e \neq g \in G$ com $d(g) = e$. Uma vez que e é arbitrário temos que $x_e = 1_e$, para todo $e \in G_0$ e $x_g = 0$, para todo $g \notin G_0$. Portanto, G_0 é finito.

Reciprocamente, suponha que G_0 é finito e considere $x = \sum_{e\in G_0} 1_e\delta_e$. Assim, para qualquer $x_g \in E_g = E_{r(g)}$ temos

$$x(x_g\delta_g) = \sum_{e\in G_0}(1_e\delta_e)(x_g\delta_g) = (1_{r(g)}\delta_{r(g)})(x_g\delta_g) = 1_{r(g)}\beta_{r(g)}(x_g)\delta_{r(g)g} = x_g\delta_g$$

e

$$\begin{aligned}(x_g\delta_g)x &= \sum_{e\in G_0}(x_g\delta_g)(1_e\delta_e) = (x_g\delta_g)(1_{d(g)}\delta_{d(g)}) \\ &= x_g\beta_g(1_{d(g)})\delta_{gd(g)} = x_g\beta_g(1_{g^{-1}})\delta_g = x_g 1_g\delta_g = x_g\delta_g.\end{aligned}$$

Portanto, $x = 1_A$ como queríamos. □

Lema 1.3.4. *Seja $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de um grupóide G sobre uma K-álgebra unitária R tal que E_e tem unidade para todo $e \in G_0$, $R = \bigoplus_{e\in G_0} E_e$ e G_0 é finito. Então, a aplicação $\varphi : R \longrightarrow R \star_\beta G$ dada por $\varphi(x) := x1_{R\star_\beta G} = \sum_{e\in G_0} x1_e\delta_e$ é um homomorfismo injetor de K-álgebras.*

Demonstração: É fácil verificar que φ é um homomorfismo de K-módulos. Sejam $x, y \in R$. Então, $\varphi(xy) = \sum_{e\in G_0} xy1_e\delta_e$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\varphi(x)\varphi(y) = (\sum_{e\in G_0} x1_e\delta_e)(\sum_{f\in G_0} y1_f\delta_f) &= \sum_{e\in G_0}\sum_{f\in G_0} x1_e\delta_e y1_f\delta_f \\ &= \sum_{e\in G_0} x1_e\delta_e y1_e\delta_e = \sum_{e\in G_0} x1_e\beta_e(y1_e)\delta_e \\ &= \sum_{e\in G_0} x1_e y1_e\delta_e = \sum_{e\in G_0} xy1_e\delta_e.\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para todo $x, y \in R$. Assim, temos que φ é um homomorfismo de K-álgebras. Além disso, φ é claramente injetor. $\square$

Pelo lema acima temos que se $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de um grupóide G sobre um anel R tal que E_e tem unidade para todo $e \in G_0$, $R = \bigoplus_{e\in G_0} E_e$ e G_0 é finito então A é um R-módulo à esquerda via:

$$x.(\sum_{g\in G} x_g\delta_g) = \varphi(x)(\sum_{g\in G} x_g\delta_g),$$

para todo $x \in R$ e $y = \sum_{g\in G} x_g\delta_g \in A$. Mais explicitamente,

$$\begin{aligned}
x.(\sum_{g\in G} x_g\delta_g) &= \varphi(x)(\sum_{g\in G} x_g\delta_g) = (\sum_{e\in G_0} x1_e\delta_e)(\sum_{g\in G} x_g\delta_g) \\
&= \sum_{g\in G}(\sum_{e\in G_0}(x1_e\delta_e)(x_g\delta_g) = \sum_{g\in G}(x1_{r(g)}\delta_{r(g)})(x_g\delta_g) \\
&= \sum_{g\in G} x1_{r(g)}\beta_{r(g)}(x_g)\delta_{r(g)g} = \sum_{g\in G} x1_{r(g)}x_g\delta_g = \sum_{g\in G} xx_g\delta_g.
\end{aligned}$$

Além disso, A é também um R-módulo à direita via:

$$(\sum_{g\in G} x_g\delta_g).x = (\sum_{g\in G} x_g\delta_g)\varphi(x),$$

para todo $x \in R$ e $y = \sum_{g\in G} x_g\delta_g \in A$. Mais explicitamente,

$$\begin{aligned}
(\sum_{g\in G} x_g\delta_g).x &= (\sum_{g\in G} x_g\delta_g)\varphi(x) = \sum_{g\in G}\sum_{e\in G_0} x_g\delta_g x1_e\delta_e \\
&= \sum_{g\in G} x_g\delta_g x1_{d(g)}\delta_{d(g)} = \sum_{g\in G} x_g\beta_g(x1_{d(g)})\delta_{gd(g)} \\
&= \sum_{g\in G} x_g\beta_g(x1_{g^{-1}})\delta_g,
\end{aligned}$$

pois $E_{g^{-1}} = E_{d(g)}$ e assim $1_{g^{-1}} = 1_{d(g)}$. De fato, via essas ações definidas acima A é um R-bimódulo. Lembraremos de [21] a definição de K-álgebra graduada por um grupóide.

Definição 1.3.5. *[21] Sejam K um anel comutativo, A uma K-álgebra com unidade e G um grupóide finito. Dizemos que A é G-graduada ou graduada por G se existe um conjunto $\{A_g\}_{g\in G}$ de subgrupos do grupo aditivo tais que*

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g$$

e para todo $g, h \in G$ temos:

$$A_g A_h \begin{cases} \subseteq A_{gh}, & se\ d(g) = r(h) \\ = 0, & caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

Se $A_g A_h = A_{gh}$, para todo $(g, h) \in G^2$ então A é chamado fortemente graduado. A componente principal de A é o conjunto:

$$A_0 = \bigoplus_{e\in G_0} A_e.$$

Todo elemento não nulo $a \in A$ tem uma única expressão como soma de elementos homogêneos $a = \sum_{g\in G} a_g$ e o elemento não nulo a_g dessa decomposição é chamado componente homogênea de grau g de a.

Proposição 1.3.6. *[20, Proposição 2.2] Se A é uma K-álgebra unitária graduada por um grupóide finito G, então para cada $e \in G_0$, A_e é um subanel de A e $1_A \in \bigoplus_{e\in G_0} A_e$.*

Demonstração: De $A_e A_e \subseteq A_e$ segue imediatamente que A_e é um subanel de A. Seja $1_A = \sum_{g\in G} a_g$ a decomposição do 1_A em componentes homogêneas. Escolha $h \in G$ e $b_h \in A_h$ então $b_h = 1_A b_h = \sum_{g\in G} a_g b_h$. Se $(g, h) \notin G^2$ então $a_g b_h = 0$. Se $(g, h) \in G^2$ então $a_g b_h \in A_{gh}$. Consequentemente, $a_g b_h = 0$ sempre que $g \neq r(h)$. Disto segue que $a_g b = 0$ se $g \notin G_0$ para todo $b \in A$. Como A tem unidade então $a_g = 0$, para todo $g \notin G_0$. Portanto, $1_A \in \bigoplus_{e\in G_0} A_e$. □

Observação 1.3.7. (1) *Se A é uma K-álgebra com unidade G-graduada então A_e tem unidade. De fato, seja $1_A = \sum_{e\in G_0} 1_e \in \bigoplus_{e\in G_0} A_e$. Então, para todo $f \in G_0$ temos que:*

$$1_f 1_A = 1_f(\sum_{e\in G_0} 1_e) = \sum_{e\in G_0} 1_f 1_e = 1_f 1_f = 1_f^2$$

e

$$a_f = a_f 1_A = a_f(\sum_{e\in G_0} 1_e) = \sum_{e\in G_0} a_f 1_e = a_f 1_f.$$

Analogamente, temos também $1_f a_f = a_f$. Portanto $1_f = 1_{A_f}$.

(2) Sejam A uma K-álgebra G-graduada, $a = \sum_{g\in G} a_g$ e $b = \sum_{h\in G} b_h$ em A. Então,

$$ab = (\sum_{g\in G} a_g)(\sum_{h\in G} b_h) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h = \sum_{k\in G}(\sum_{gh=k} a_g b_h)$$

Note que dados $g, h \in G$ com $d(g) = r(h)$ então $gh = k$ se e somente se $g = kh^{-1}$. De fato, se $gh = k$ então $d(k) = d(h) = r(h^{-1})$. Assim, $(k, h^{-1}) \in G^2$ e $gh = k \iff ghh^{-1} = kh^{-1} \iff gr(h) = kh^{-1} \iff gd(g) = kh^{-1} \iff g = kh^{-1}$. Além disso, pelo Lema 1.2.7 temos que $gh = k$ se e somente se $d(h) = d(k)$. Logo,

$$ab = \sum_k (\sum_{d(h)=d(k)} a_{kh^{-1}} b_h).$$

Portanto, a componente homogênea de grau g de ab é dada por:

$$(ab)_g = \sum_{d(h)=d(g)} a_{gh^{-1}} b_h.$$

A seguir mostraremos que $A = R \star_\beta G$ é uma K-álgebra fortemente graduada por G.

Lema 1.3.8. *[2, Proposição 3.4] Seja $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de um grupóide G sobre uma K-álgebra R tal que E_e é unitário para todo $e \in G_0$. Então, $A = R \star_\beta G$ é fortemente graduado por G.*

Demonstração: Por definição, $A = \bigoplus_{g\in G} E_g\delta_g$. Então, tomando $A_g = E_g\delta_g$, para todo $g \in G$ temos que

$$\begin{aligned} A_g A_h &= (E_g\delta_g)(E_h\delta_h) = E_g\beta_g(E_h)\delta_{gh} = E_g\beta_g(E_{r(h)})\delta_{gh} \\ &= E_g\beta_g(E_{d(g)})\delta_{gh} = E_g\beta_g(E_{g^{-1}})\delta_{gh} = E_g E_g \delta_{gh} \\ &= E_g\delta_{gh} = E_{r(g)}\delta_{gh} = E_{r(gh)}\delta_{gh} = E_{gh}\delta_{gh} = A_{gh}. \end{aligned}$$

para todo $(g,h) \in G^2$. Além disso, $A_g A_h = 0$ sempre que $(g,h) \notin G^2$. $\square$

Na próxima seção mostraremos que os conceitos de K-álgebra graduada por um grupóide finito G e KG^*-módulo álgebra à esquerda são duais no seguinte sentido: toda K-álgebra graduada é um KG^*-módulo álgebra à esquerda, e reciprocamente todo KG^*-módulo álgebra à esquerda é uma K-álgebra G-graduada.

1.4 Graduação, Dualidade e Produto Smash

Nesta seção vamos mostrar que os conceitos de K-álgebra graduada por um grupóide finito G e KG^*-módulo álgebra são duais no sentido que já foi esclarecido anteriormente. Em seguida vamos definir o produto smash fraco $A\#KG^*$, onde A é uma K-álgebra graduada por G.

Teorema 1.4.1. *Sejam G um grupóide finito e A uma K-álgebra com unidade. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) A é graduada por G,

(2) A é um KG^*-módulo álgebra à esquerda.

Demonstração: (1) $\Longrightarrow$ (2) Suponha que A é uma K-álgebra com unidade G-graduada. Para cada $a = \sum_{g \in G} a_g \in A$ e $g \in G$ definimos

$$v_g.a = a_g \ \text{ (a componente homogênea de grau } g\text{)}.$$

Mostremos primeiro que A um KG^*-módulo à esquerda via essa ação. De fato, sejam $g,h \in G$ e $a = \sum_{g \in G} a_g$. Então,

$$v_g.(v_h.a) = v_g.a_h = \begin{cases} a_g, \text{ se } g = h \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, uma vez que v_g e v_h são ortogonais (se $g \neq h$) então

$$(v_g v_h).a = \begin{cases} a_g, \text{ se } g = h \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $v_g.(v_h.a) = (v_g v_h).a$. Além disso, $1_{KG^*}.a = (\sum\limits_{g\in G} v_g).a = \sum\limits_{g\in G} v_g.a = \sum\limits_{g\in G} a_g = a$. Portanto, A é um KG^*-módulo à esquerda.

Agora mostremos que

$$v_g.(ab) = \sum((v_g)_1.a)((v_g)_2.b) = \sum_{d(h)=d(g)} (v_{gh^{-1}}.a)(v_h.b),$$

para todo $g, h \in G$ e $a, b \in A$. De fato, sejam $a = \sum\limits_{g\in G} a_g$ e $b = \sum\limits_{h\in G} b_h$ em A. Então, pela Observação 1.3.7 (2) temos que $(ab)_g = \sum\limits_{d(h)=d(g)} a_{gh^{-1}} b_h$. Assim, pela definição da ação temos que

$$v_g.(ab) = (ab)_g = \sum_{d(h)=d(g)} a_{gh^{-1}} b_h.$$

Por outro lado,

$$\sum((v_g)_1.a)((v_g)_2.b) = \sum_{d(h)=d(g)} (v_{gh^{-1}}.a)(v_h.b) = \sum_{d(h)=d(g)} a_{gh^{-1}} b_h.$$

Assim, $v_g.(ab) = \sum\limits_{d(h)=d(g)} (v_{gh^{-1}}.a)(v_h.b)$ como queríamos.

Finalmente mostremos que a ação definida acima satisfaz a seguinte condição

$$(v_g v_h).1_A = \sum \varepsilon((v_g)_1 v_h)(v_g)_2.1_A.$$

Note que,

$$\sum \varepsilon((v_g)_1 v_h)(v_g)_2.1_A = \sum_{d(l)=d(g)} \varepsilon(v_{gl^{-1}} v_h) v_l.1_A.$$

Mas, $v_{gl^{-1}} v_h \neq 0$ se e somente se $gl^{-1} = h$. Isto ocorre se e somente se $l = h^{-1}g$. Como $d(h^{-1}g) = d(g)$ então podemos considerar $l = h^{-1}g$. Assim,

$$\sum \varepsilon((v_g)_1 v_h)(v_g)_2.1_A = \begin{cases} \varepsilon(v_h) v_{h^{-1}g}.1_A, \text{ se } r(g) = r(h) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Caso 1: Suponha que $g = h = e \in G_0$. Uma vez que $1_A = \sum\limits_{e\in G_0} 1_e$ então $(v_g v_h).1_A = v_e.1_A = 1_e$. Por outro lado,

$$\sum \varepsilon((v_g)_1 v_h)(v_g)_2.1_A = \varepsilon(v_h)v_{h^{-1}g}.1_A = \varepsilon(v_e)v_e.1_A = 1_K 1_e = 1_e.$$

Caso 2: Suponha que $g \neq h$. Então $v_g v_h = 0$ e desta forma $(v_g v_h).1_A = 0$. Por outro lado,

$$\sum \varepsilon((v_g)_1 v_h)(v_g)_2.1_A = \begin{cases} \varepsilon(v_h)v_{hg^{-1}}.1_A, \text{ se } r(g) = r(h) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Mas, por Lema 1.2.5 temos que $h^{-1}g \in G_0$ se e somente se $g = h$. Como, por hipótese, $g \neq h$ então $g^{-1}h \notin G_0$ e assim $v_{h^{-1}g}.1_A = 0$.

Caso 3: Suponha que $g = h \notin G_0$. Daí, $(v_g v_h).1_A = v_g.1_A = 0$ e

$$\sum_{d(l)=d(h)} \varepsilon(v_{gl^{-1}} v_h)v_l.1_A = \varepsilon(v_g)v_{h^{-1}g}.1_A = \varepsilon(v_h)v_{g^{-1}g}.1_A = \varepsilon(v_h)v_{d(g)}.1_A = 0,$$

pois uma vez que $h \notin G_0$ então $\varepsilon(v_h) = 0$.

Portanto, em todos os casos temos que

$$(v_g v_h).1_A = \sum \varepsilon((v_g)_1 v_h)(v_g)_2.1_A.$$

Assim, A é um KG^*-módulo álgebra como queríamos.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Seja A um KG^*-módulo álgebra via: $v_g.a$, para todo $a \in A$. Definimos $A_g = \{v_g.a \mid \text{para todo } a \in A\}$. Para simplificar vamos denotar $v_g.a$ por a_g, para todo $g \in G$. Como $1_{KG^*} = \sum_{g \in G} v_g$ e $1_{KG^*}.a = a$, para todo $a \in A$, então

$$a = 1_{KG^*}.a = (\sum_{g \in G} v_g).a = \sum_{g \in G} v_g.a = \sum_{g \in G} a_g \in \sum_{g \in G} A_g,$$

o que implica que $A = \sum_{g \in G} A_g$. Mostremos que essa soma é direta. De fato, seja $x \in A_g \cap \sum_{h \neq g} A_h$. Assim, $x = v_g.a = \sum_{h \neq g} v_h.b_{(h)}$, com $a, b_{(h)} \in A$. Mas,

$$v_g.x = v_g.(v_g.a) = (v_g v_g).a = v_g.a = x$$

e

$$v_g.x = v_g.(\sum_{h \neq g} v_h.b_{(h)}) = \sum_{h \neq g} (v_g v_h).b_{(h)} = 0.$$

Logo, $x = 0$ e assim $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$. Note que $(v_g.a) + (v_g.b) = v_g.(a + b)$, para todo $g \in G$ e $a, b \in A$. Deste modo, A_g é um subgrupo do grupo aditivo de A.

Agora, dados $a, b \in A$. Então, como A é um KG^*-módulo álgebra temos que

$$v_g.(ab) = \sum_{d(h)=d(g)} (v_{gh^{-1}}.a)(v_h.b).$$

Logo, para todo $h, g \in G$ temos que $A_{gh^{-1}} A_h \subset A_g$. Tomando $l = gh^{-1}$ temos, pelo Lema 1.2.7, que isso é equivalente à $d(l) = r(h)$. Isto é, $l = gh^{-1}$ se e somente se $(l, h) \in G^2$. Assim,

$$A_l A_h \subset A_{lh}, \text{ se } (l, h) \in G^2.$$

Mostremos que $A_l A_h = 0$ quando $(l, h) \notin G^2$. De fato, sejam $a_l = v_l.a \in A_l$ e $b_h = v_h.b \in A_h$. Como $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ então

$$a_l b_h = \sum_{k \in G} z_k.$$

Para todo $t \in G$ temos que

$$\begin{aligned} z_t &= v_t.(\sum_{k \in G} z_k) \\ &= v_t.(a_l b_h) \\ &= \sum_{d(s)=d(t)} (v_{ts^{-1}}.a_l)(v_s.b_h) \\ &= \sum_{d(s)=d(t)} (v_{ts^{-1}}.(v_l.a))(v_s.(v_h.b)) \\ &= \sum_{d(s)=d(t)} ((v_{ts^{-1}} v_l).a)((v_s v_h).b). \end{aligned}$$

Mas, $v_s v_h \neq 0$ se e somente se $s = h$. Assim,

$$z_t = \begin{cases} ((v_{th^{-1}} v_l).a)(v_h.b), \text{ se } d(h) = d(t) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha que $d(h) = d(t)$. Então, $z_t = ((v_{th^{-1}} v_l).a)(v_h.b)$. Sabemos que $v_{th^{-1}} v_l \neq 0$ se e somente se $th^{-1} = l$. O que implica que $d(l) = d(h^{-1}) = r(h)$. Entretanto, por hipótese, $d(l) \neq r(h)$. Portanto, $v_{th^{-1}}v_l = 0$ e assim $z_t = 0$, para todo $t \in G$. Logo, $a_l b_h = \sum_{t\in G} z_t = 0$ e desta forma $A_l A_h = 0$. □

A noção de produto smach fraco pode ser vista com mais detalhes em [9] e [8]. Aqui lembraremos essa definição e temos como objetivo mostrar que se A é uma K-álgebra graduada por um grupóide finito G então $A\#KG^*$ é um produto smash.

Definição 1.4.2. *[8] Seja A uma K-álgebra sem unidade. Uma pré-unidade é um elemento de A satisfazendo:*

$$ea = ae = ae^2,$$

para todo $a \in A$.

Note que se A é uma K-álgebra unitária então e é uma pré-unidade se e somente se e é um idempotente central de A.

Lema 1.4.3. *[8] Sejam A um anel sem unidade e $e \in A$ uma pré-unidade. Então, $p : A \longrightarrow A$ dada por $p(a) = ae$ é um homomorfismo de álgebras que satisfaz $p^2 = p$.*

Demonstração: Mostremos primeiro que $p^2 = p$. De fato, $p^2(a) = p(p(a)) = p(ae) = (ae)e = ae^2 = ae = p(a)$, para todo $a \in A$. Assim, $p^2 = p$. Agora, sejam $a, b \in A$. Então,

$$p(a + b) = (a + b)e = ae + be = p(a) + p(b)$$

e

$$p(ab) = p^2(ab) = abe^2 = aebe = p(a)p(b).$$

Portanto, p é um homorfismo de álgebras que satisfaz $p^2 = p$. □

Definição 1.4.4. *[8] Sejam K um anel comutativo, A e B K-álgebras com unidade e seja $\mathcal{R} : B \otimes A \longrightarrow A \otimes B$ uma aplicação K-linear. Escrevemos*

$$\mathcal{R}(b \otimes a) = \sum a_{\mathcal{R}} \otimes b_{\mathcal{R}}.$$

Então, $A\#_{\mathcal{R}}B$ é igual à $A \otimes B$ como K-módulo, mas com multiplicação dada por:

$$m_{A\#_{\mathcal{R}}B} = (m_A \otimes m_B) \circ (I_A \otimes \mathcal{R} \otimes I_B)$$

ou

$$(a\#b)(c\#d) = \sum ac_{\mathcal{R}} \otimes b_{\mathcal{R}}d.$$

Dizemos que $(A, B, \mathcal{R})$ tem uma estrutura de produto smash se $A\#_{\mathcal{R}}B$ é uma K-álgebra associativa com unidade $1_A\#1_B$, e dizemos que $(A, B, \mathcal{R})$ tem uma estrutura de produto smash fraco se $A\#_{\mathcal{R}}B$ é uma K-álgebra associativa com pré-unidade $1_A\#1_B$.

Em tudo o que se seguirá usaremos $\otimes$ para denotar $\otimes_K$. Observemos que se A é um KG-módulo álgebra à esquerda então claramente $\mathcal{R} : KG \otimes A \longrightarrow A \otimes KG$ dada por $\mathcal{R}(u_g \otimes a) = u_g.a \otimes u_g$ é uma aplicação K-linear. Considere $A\#KG$ igual à $A \otimes KG$ como K-módulo e multiplicação dada por

$$\begin{aligned}(a\#u_g)(b\#u_h) &= (m_A \otimes m_{KG})((I_A \otimes \mathcal{R} \otimes I_{KG})(a \otimes u_g \otimes b \otimes u_h))\\ &= (m_A \otimes m_{KG})(a \otimes u_g.b \otimes u_g \otimes u_h)\\ &= a(u_g.b) \otimes u_g u_h.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(a\#u_g)(b\#u_h) = \begin{cases} a(u_g.b)\#u_{gh}, & \text{se } d(g) = r(h)\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Sabemos pelo Teorema 1.4.1 que se A é uma K-álgebra com unidade graduada por um grupóide finito G então A é um KG^*-módulo álgebra à esquerda. Seja $\mathcal{R} : KG^* \otimes A \longrightarrow A \otimes KG^*$ definida por

$$\mathcal{R}(v_g \otimes a) = \sum_{d(h)=d(g)} (v_{gh^{-1}}.a) \otimes v_h, \text{ para todo } a \in A \text{ e } g \in G.$$

Considere $A\#KG^*$ igual à $A \otimes KG^*$ como K-módulo e multiplicação dada por

$$\begin{aligned}(a\#v_g)(b\#v_h) &= (m_A \otimes m_{KG^*})((Id_A \otimes \mathcal{R} \otimes Id_{KG^*})(a \otimes v_g \otimes b \otimes v_h))\\ &= (m_A \otimes m_{KG^*})(\sum_{d(l)=d(g)} a \otimes (v_{gl^{-1}}.b) \otimes v_l \otimes v_h)\\ &= \sum_{d(l)=d(g)} a(v_{gl^{-1}}.b) \otimes v_l v_h.\end{aligned}$$

Mas, $v_l v_h \neq 0$ se e somente se $l = h$. Assim,

$$(a\#v_g)(b\#v_h) = \begin{cases} a(v_{gh^{-1}}.b)\#v_h, \text{ se } d(h) = d(g) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Proposição 1.4.5. *Nas condições acima $A\#_{\mathcal{R}}KG^*$ é um produto smash fraco.*

Demonstração: Naturalmente, $\mathcal{R}$ é uma aplicação K-linear. Então resta mostrar que essa multiplicação é associativa e que $1_A\#1_{KG^*}$ é uma pré-unidade. Mostremos primeiro que vale a associatividade. De fato, sejam $a, b, c \in A$ e $g, h, l \in G$ então

$$\begin{aligned}(a\#v_g)[(b\#v_h)(c\#v_l)] &= \begin{cases} (a\#v_g)(b(v_{hl^{-1}}.c)\#v_l), \text{ se } d(h) = d(l) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} a(v_{gl^{-1}}.(b(v_{hl^{-1}}.c)))\#v_l, \text{ se } d(g) = d(h) = d(l) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}\end{aligned}$$

Suponha que $d(g) = d(h) = d(l)$ então

$$\begin{aligned}(a\#v_g)[(b\#v_h)(c\#v_l)] &= \sum_{d(k)=d(gl^{-1})} a(v_{gl^{-1}k^{-1}}.b)(v_k.(v_{hl^{-1}}.c))\#v_l \\ &= \sum_{d(k)=r(l)} a(v_{g(kl)^{-1}}.b)((v_k v_{hl^{-1}}).c)\#v_l.\end{aligned}$$

Mas, $v_k v_{hl^{-1}} \neq 0$ se e somente se $k = hl^{-1}$. Neste caso, $d(k) = d(hl^{-1}) = d(l^{-1}) = r(l)$ então

$$\begin{aligned}(a\#v_g)[(b\#v_h)(c\#v_l)] &= a(v_{g(hl^{-1}l)^{-1}}.b)(v_{hl^{-1}}.c)\#v_l \\ &= a(v_{g(hd(l))^{-1}}.b)(v_{hl^{-1}}.c)\#v_l \\ &= a(v_{gh^{-1}}.b)(v_{hl^{-1}}.c)\#v_l.\end{aligned}$$

Conclusão

$$(a\#v_g)[(b\#v_h)(c\#v_l)] = \begin{cases} a(v_{gh^{-1}}.b)(v_{hl^{-1}}.c)\#v_l, \text{ se } d(g) = d(h) = d(l) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$[(a\#v_g)(b\#v_h)](c\#v_l) = \begin{cases} (a(v_{gh^{-1}}.b)\#v_h)(c\#v_l), \text{ se } d(g) = d(h) = d(l) \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} a(v_{gh^{-1}}.b)(v_{hl^{-1}}.c)\#v_l), \text{ se } d(g) = d(h) = d(l) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $(a\#v_g)[(b\#v_h)(c\#v_l)] = [(a\#v_g)(b\#v_h)](c\#v_l)$. Para finalizar mostremos que $1_A\#1_{KG^*}$ é uma pré-unidade de $A\#KG^*$. De fato, seja $a\#v_h \in A\#KG^*$. Então,

$$\begin{aligned}
(1_A\#1_{KG^*})(a\#v_h) &= \sum_{l\in G}(1_A\#v_l)(a\#v_h) \\
&= \sum_{l\in G}\sum_{d(k)=d(l)} 1_A(v_{lk^{-1}}.a)\#v_k v_h \\
&= \sum_{d(l)=d(h)} a_{lh^{-1}}\#v_h.
\end{aligned}$$

Tomando $lh^{-1} = k$ então $d(k) = d(h^{-1}) = r(h)$. Reciprocamente, dados $h, k \in G$ tais que $d(k) = r(h)$ então tomando $l = kh$ temos que $lh^{-1} = k$. Assim,

$$(1_A\#1_{KG^*})(a\#v_h) = \sum_{d(k)=r(h)} a_k\#v_h.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(a_g\#v_h)(1_A\#1_{KG^*}) &= \sum_{d(k)=d(h)} a_g(v_{hk^{-1}}.1_A)\#v_k 1_{KG^*} \\
&= \sum_{d(k)=d(h)} a_g(v_{hk^{-1}}.1_A)\#v_k.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.2.5 sabemos que $hk^{-1} \in G_0$ se e somente se $k = h$. Assim,

$$\begin{aligned}
(a_g\#v_h)(1_A\#1_{KG^*}) &= a_g(v_{hh^{-1}}.1_A)\#v_h \\
&= a_g(v_{r(h)}.1_A)\#v_h \\
&= a_g 1_{r(h)}\#v_h.
\end{aligned}$$

Observe que $a_g 1_{r(h)} \in A_g A_{r(h)}$ e como

$$A_gA_{r(h)}\begin{cases}\subset A_g, \text{ se } d(g)=r(h)\\ =0, \text{ caso contrário,}\end{cases}$$

então

$$a_g1_{r(h)}=\begin{cases}a_g, \text{ se } d(g)=r(h)\\ 0, \text{ caso contrário.}\end{cases}$$

Se tomarmos $a=\sum\limits_{g\in G}a_g$ um elemento qualquer de A então

$$(a\#v_h)1_A\#1_{KG^*}=\sum_{d(g)=r(h)}a_g\#v_h.$$

Desta forma, $(1_A\#1_{KG^*})(a\#v_h)=(a\#v_h)(1_A\#1_{KG^*})$. Para finalizar, note que

$$\begin{aligned}(1_A\#1_{KG^*})(1_A\#1_{KG^*})&=\sum_{g\in G}(1_A\#v_g)(1_A\#1_{KG^*})\\&=\sum_{g\in G}\sum_{d(h)=d(g)}1_A(v_{gh^{-1}}.1_A)\#v_h1_{KG^*}\\&=\sum_{g\in G}v_{gg^{-1}}.1_A\#v_g\\&=\sum_{g\in G}1_{r(g)}\#v_g.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}(a\#v_h)(1_A\#1_{KG^*})^2&=(a\#v_h)(\sum_{g\in G}1_{r(g)}\#v_g)\\&=\sum_{g\in G}\sum_{d(k)=d(h)}a(v_{hk^{-1}}.1_{r(g)})\#v_kv_g\\&=\sum_{d(g)=d(h)}a(v_{hg^{-1}}.1_{r(g)})\#v_g\\&=a(v_{r(h)}.1_{r(h)})\#v_h\\&=a1_{r(h)}\#v_h.\end{aligned}$$

Seja $a=\sum\limits_{k\in G}a_k$ a decomposição do a em componentes homogêneas. Então, $a1_{r(h)}=\sum\limits_{k\in G}a_k1_{r(h)}=\sum\limits_{d(k)=r(h)}a_k$. Logo, $a1_{r(h)}\#v_h=\sum\limits_{d(k)=r(h)}a_k\#v_h=(a\#v_g)(1_A\#1_{KG^*})$. Portanto, $1_A\#1_{KG^*}$ é uma pré-unidade de $A\#KG^*$ e desta forma $A\#KG^*$ tem uma estrutura de produto smash fraco. $\square$

Observe que se A uma K-álgebra com unidade graduada por um grupóide finito G então $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$. Além disso, $KG^* = \bigoplus_{h\in G} Kv_h$. Logo,

$$A\#KG^* = (\bigoplus_{g\in G} A_g)\#(\bigoplus_{h\in G} Kv_h) = \bigoplus_{g,h\in G} (A_g\#v_h).$$

como K-módulo.

No caso em que G é um grupo sabemos que as aplicações:

$$\varphi : A \longrightarrow A\#KG^* \quad \text{e} \quad \psi : KG^* \longrightarrow A\#KG^*$$

definidas respectivamente por $\varphi(a) = a\#v_{1_G}$ e $\psi(v_g) = 1_A\#v_g$ são homomorfismos injetores de K-álgebras. Porém, isso não é verdade, em geral, no caso em que G é um grupóide como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 1.4.6. *Seja $G = \{g, g^{-1}, r(g), d(g)\}$ um grupóide, K um anel comutativo e $A = Ku_{d(g)} \oplus Ku_{r(g)} \oplus Ku_g \oplus Ku_{g^{-1}}$ com*

$$u_l u_k = \begin{cases} u_{lk}, & \textit{se } d(l) = r(k) \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Então A é uma K-álgebra graduada por G tal que $1_A = u_{d(g)} + u_{r(g)}$. Lembremos que KG^* é o K-módulo livre com base $\{v_l \mid l \in G\}$ satisfazendo $v_l(u_k) = \delta_{l,k}$ e $1_{KG^*} = \sum_{l\in g} v_l$. É fácil ver que

$$\Delta(1_{KG^*}) = v_{r(g)} \otimes v_g + v_g \otimes v_{d(g)} + v_{d(g)} \otimes v_{g^{-1}} + v_{g^{-1}} \otimes v_{r(g)} + v_{g^{-1}} \otimes v_g + v_{d(g)} \otimes v_{d(g)} + v_g \otimes v_{g^{-1}} + v_{r(g)} \otimes v_{r(g)},$$

$$(u_g\#1_{KG^*})(u_{d(g)}\#1_{KG^*}) = u_g\#v_{g^{-1}} + u_g\#u_{d(g)}$$

e

$$u_g u_{d(g)}\#1_{KG^*} = u_g\#1_{KG^*}.$$

Portanto, neste caso, φ não é um homomorfismo de K-álgebras. Por outro lado,

$$(1_A\#v_g)(1_A\#v_g) = 1_A(v_{gg^{-1}}).1_A\#v_g = v_{r(g)}.(u_{d(g)} + u_{r(g)})\#v_g = u_{r(g)}\#v_g$$

e

$$1_A\#v_g v_g = 1_A\#v_g = u_{d(g)}\#v_g + u_{r(g)}\#v_g.$$

Portanto, ψ também não é um homomorfismo de K-álgebras neste exemplo.

1.5 Separabilidade

Nesta seção daremos as definições de extensão separável, Azumaya, H-separável e alguns resultados envolvendo esses conceitos, que serão usados no capítulo 2. Esses são resultados clássicos na teoria de extensões separáveis e as suas demonstrações podem ser encontradas nas referências indicadas.

Definição 1.5.1. *Sejam S um anel unitário e $R \subseteq S$ um subanel com mesma unidade de S. Dizemos que S é uma extensão separável de R se existe $e = \sum_{i=1}^{n} r_i \otimes s_i \in S \otimes_R S^{op}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} r_i s_i = 1_R$ e $\sum_{i=1}^{n} s r_i \otimes s_i = \sum_{i=1}^{n} r_i \otimes s_i s$, para todo $s \in S$. O elemento $e \in S \otimes_R S^{op}$ é chamado elemento de separabilidade de S sobre R. Se R for comutativo esse elemento é de fato um idempotente. Em particular, se $R = C(S)$ (centro de S) então S é dito uma extensão de Azumaya de R (ou simplesmente Azumaya sobre R ou R-álgebra de Azumaya ou ainda separável e central).*

Definição 1.5.2. *Sejam S um anel unitário e $R \subseteq S$ um subanel com mesma unidade de S. Dizemos que S é Hirata-separável (ou simplesmente H-separável) sobre R se existem $u_i \in C_S(R)$ e $v_i \in C_{S \otimes_R S}(S)$ tais que $\sum_i u_i v_i = 1_S \otimes 1_S$. O conjunto $\{u_i, v_i\}$ é chamado sistema de Hirata (ou H-sistema).*

Lembremos que $C_S(R) = \{s \in S \mid sr = rs \text{ para todo} r \in R\}$ é o centraizador de R em S.

Definição 1.5.3. *Seja R um anel unitário. Um R-módulo à esquerda M é dito um gerador para a categoria dos R-módulos à esquerda se para qualquer R-módulo à esquerda N existem um conjunto não vazio Λ e um homomorfismo de R-módulos à esquerda sobrejetor $\Phi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \longrightarrow N$, onde $M_\lambda = M$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Ou seja, se todo R-módulo à esquerda N é um quociente de $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$.*

Definição 1.5.4. *Seja R um anel unitário. Um R-módulo à esquerda M é dito um progerador para a categoria dos R-módulos à esquerda se M for projetivo, finitamente gerado e gerador.*

O teorema abaixo caracteriza as álgebras de Azumaya.

Teorema 1.5.5. *([12, Teorema 3.4]) Sejam R um anel comutativo e S uma R-álgebra unitária. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) S é Azumaya sobre R;

(2) S é um $S \otimes_R S^{op}$-progerador e S é R-central;

(3) S é um R-progerador e a aplicação $\varphi : S \otimes_R S \longrightarrow End_R(S)$ dada por

$$\varphi(\sum_i r_i \otimes s_i)(s) = \sum_i r_i s s_i$$

é um isomorfismo de anéis.

Teorema 1.5.6. *[12, Teorema 4.1] Sejam R um anel comutativo e T um R-progerador. Então $S = End_R(T)$ é Azumaya sobre R.*

O teorema abaixo será de fundamental importância para as demonstrações dos resultados obtidos no capítulo dois. Este resultado é conhecido como teorema do duplo comutador.

Teorema 1.5.7. *[12, Teorema 4.3] Sejam S uma R-álgebra de Azumaya e T uma subálgebra de S contendo R e separável sobre R. Então $C_S(T)$ é uma subálgebra separável de S e $C_S(C_S(T)) = T$. Se T for Azumaya sobre R então $C_S(T)$ também o é, e a aplicação de R-álgebras $T \otimes_R C_S(T) \longrightarrow S$ dada por $x \otimes y \longrightarrow xy$ é um isomorfismo.*

Proposição 1.5.8. *[23, Proposição 1.3] Seja S uma extensão H-separável de R tal que R é um somando direto de S como R-bimódulo. Então, $C_S(R)$ é separável sobre $C(S)$ e $C_S(C_S(R)) = R$.*

Lema 1.5.9. *[18, Lema 1] Sejam S uma extensão H-separável de R e M um S-módulo à esquerda. Se M é um gerador como R-módulo à esquerda então M é um gerador como S-módulo à esquerda.*

O próximo resultado mostra que extensões H-separáveis são separáveis.

Teorema 1.5.10. *[16, Teorema 2.2] Se S é uma extensão H-separável de R então S é uma extensão separável sobre R.*

O resultado a seguir relaciona extensões Azumaya e H-separáveis.

Teorema 1.5.11. *[18, Teorema 1] Sejam S uma álgebra de Azumaya e $R \subset S$ um subanel de S tal que $S \supseteq R \supseteq C(S)$. Se S é projetivo como R-módulo à esquerda então S é H-separável sobre R.*

O próximo teorema é a transitividade de extensões separáveis.

Teorema 1.5.12. *[17, Proposição 2.5] Sejam S um anel, R e T subanéis de S tais que $R \supseteq T$. Se S é uma extensão separável de R e R é uma extensão separável de T então S é uma extensão separável de T.*

1.6 Extensões de Galois e Álgebras de Galois

Dois conceitos importantes na teoria de Galois são os de subanel dos elementos invariantes e a aplicação traço. Vamos iniciar esta seção definindo esses conceitos e mostrando alguns resultados envolvendo essas noções.

Definição 1.6.1. *Seja $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de um grupóide G sobre uma K-álgebra com unidade R tal que cada E_e é unitário para todo $e \in G_0$ denotemos por 1_e a unidade de E_e. A subálgebra dos elementos invariantes sobre a ação β é definido por*

$$R^\beta = \{x \in R \mid \beta_g(x1_{d(g)}) = x1_{r(g)}, \textit{para todo } g \in G\}.$$

Seja G um grupóide finito. A aplicação $tr_\beta : R \longrightarrow R$ definida por $tr_\beta(x) = \sum\limits_{g\in G} \beta_g(x1_{g^{-1}})$, para todo $x \in R$, é chamada aplicação traço. É fácil verificar que tr_β é um homomorfismo de R^β-bimódulo. No lema a seguir mostraremos que sob determinadas condições $tr_\beta(R) \subset R^\beta$. Esse resultado é de fundamental importância para introduzirmos a noção de extensão de Galois no contexto de ação de grupóide sobre álgebras como foi feito em [10] para o caso de ação de grupo.

Lema 1.6.2. *[3, Lema 4.2] Seja $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de um grupóide finito G sobre uma K-álgebra com unidade R tal que cada E_e é unitário para todo $e \in G_0$ e $R = \bigoplus\limits_{e\in G_0} E_e$. Então*

(1) $tr_\beta(R) \subset R^\beta$,

(2) $tr_\beta(\beta_g(x)) = tr_\beta(x)$, para todo $x \in E_{g^{-1}}$ e $g \in G$.

Demonstração: Sejam $x \in R$ e $h \in G$. Então

$$\beta_h(tr_\beta(x)1_{h^{-1}}) = \beta_h(\sum_{g\in G} \beta_g(x1_{g^{-1}})1_{h^{-1}})$$

note que $\beta_g(x1_{g^{-1}})1_{h^{-1}} \in E_g \cap E_{h^{-1}} = E_{r(g)} \cap E_{d(h)}$. Logo, se $r(g) \neq d(h)$ então $\beta_g(x1_{g^{-1}})1_{h^{-1}} = 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\beta_h(tr_\beta(x)1_{h^{-1}}) &= \beta_h(\sum_{r(g)=d(h)} \beta_g(x1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}) \\
&= \sum_{r(g)=d(h)} \beta_h(\beta_g(x1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}) \\
&= \sum_{r(g)=d(h)} \beta_{hg}(x1_{(hg)^{-1}})1_h
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.2.6 temos que $l = hg$ se e somente se $r(l) = r(h)$. Daí,

$$\beta_h(tr_\beta(x)1_{h^{-1}}) = \sum_{r(l)=r(h)} \beta_l(x1_{l^{-1}})1_h = \sum_{l\in G} \beta_l(x1_{l^{-1}})1_h = tr_\beta(x)1_h.$$

(2) Sejam $g \in G$ e $x \in E_{g^{-1}}$. Então

$$\begin{aligned}
tr_\beta(\beta_g(x)) &= \sum_{h\in G} \beta_h(\beta_g(x)1_{h^{-1}}) = \sum_{d(h)=r(g)} \beta_{hg}(x)1_h \\
&= \sum_{d(l)=d(h)} \beta_l(x)1_{lg^{-1}} = \sum_{d(l)=d(h)} \beta_l(x) = tr_\beta(x),
\end{aligned}$$

pois $E_{lg^{-1}} = E_{r(lg^{-1})} = E_{r(l)} = E_l$. □

Observe que os itens (1) e (2) do lema acima são asseguradas pela hipótese que $R = \bigoplus_{e\in G_0} E_e$. Em geral se isso não ocorre os itens (1) e (2) do lema anterior não são verdadeiros. Conforme veremos no exemplo seguinte.

Exemplo 1.6.3. *[3, Observação 4.3] Considere o grupóide $G = \{g_1, g_2, g_3\}$, com $G_0 = \{g_1, g_2\}$, $g_3^{-1} = g_3$ e $g_3g_3 = g_2$, e tome $R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4$, onde K é um anel com unidade e e_1, e_2, e_3, e_4 são idempotentes centrais dois a dois ortogonais com soma 1_R. Considere $E_{g_1} = R$, $E_{g_2} = Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4$, $E_{g_3} = E_{g_2}$, $\beta_{g_1} = I_{E_{g_1}}$, $\beta_{g_2} = I_{E_{g_2}}$ e $\beta_{g_3}(ae_2 + be_3 + ce_4) = be_2 + ae_3 + ce_4$, para todo $a, b, c \in K$. É fácil verificar que $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ é uma ação de G sobre R e é imediato verificar que $R^\beta = Ke_1 \oplus K(e_2 + e_3) \oplus Ke_4$, $tr_\beta(e_3) = e_2 + 2e_3 \notin R^\beta$ e $tr_\beta(e_2) = 2e_2 + e_3 \neq e_2 + 2e_3 = tr_\beta(\beta_{g_3}(e_2))$.*

Observação 1.6.4. *Se* $R = \bigoplus_{e\in G_0} E_e$ *então* $R^\beta \subseteq \bigoplus_{e\in G_0} E_e^{\beta(e)}$*. De fato, qualquer* $x \in R$ *é da forma* $x = \sum_{e\in G_0} x_e$*, com* $x_e \in E_e$ *e* $x \in R^\beta$ *se e somente se* $\beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g$*, para todo* $g \in G$*. Isto ocorre se e somente se* $\beta_g(x_{d(g)}) = x_{r(g)}$*, para todo* $g \in G$*. Em particular,* $\beta_g(x_e) = x_e$*, para todo* $g \in G_e$*. Assim,* $x_e \in E_e^{\beta(e)}$*, para todo* $e \in G_0$ *e* $x = \sum_{e\in G_0} x_e \in \bigoplus_{e\in G_0} E_e^{\beta(e)}$*. Em geral a inclusão* $R^\beta \subseteq \bigoplus_{e\in G_0} E_e^{\beta(e)}$ *é estrita, como ilustra o seguinte exemplo:* $G = \{g, g^{-1}, r(g), d(g)\}$*,* $R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4$*, onde* K *é um anel com unidade e* e_1, e_2, e_3, e_4 *são idempotentes centrais ortogonais dois a dois com soma igual a* 1_R*,* $E_g = E_{r(g)} = Ke_1 \oplus Ke_2$*,* $E_{g^{-1}} = E_{d(g)} = Ke_3 \oplus Ke_4$*,* $\beta_g(xe_3 + ye_4) = xe_1 + ye_2$ *e* $\beta_{g^{-1}}(xe_1 + ye_2) = xe_3 + ye_4$*, para todo* $x, y \in K$*. É fácil verificar que* $\beta = (\{E_h\}_{h\in G}, \{\beta_h\}_{h\in G})$ *é uma ação de* G *sobre* R*,* $R^\beta = K(e_1 + e_3) \oplus K(e_2 + e_4)$*,* $E_{d(g)}^{\beta_{d(g)}} = Ke_3 \oplus Ke_4$ *e* $E_{r(g)}^{\beta_{r(g)}} = Ke_1 \oplus Ke_2$*.*

No que segue vamos considerar $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de um grupóide finito G sobre uma K-álgebra com unidade R tal que cada E_e é unitário para todo $e \in G_0$ e $R = \bigoplus_{e\in G_0} E_e$. Naturalmente como $R^\beta \subset R$ então R é um R^β-bimódulo via a multiplicação.

Seja $\tau : R \times R \longrightarrow R \star_\beta G$ definida por $\tau(x, y) = \sum_{g\in G} x\beta_g(y1_{g^{-1}})\delta_g$. É fácil verificar que τ é biaditiva e R^β-balanceada. Logo, pela propriedade universal do produto tensorial temos que $\tau' : R \otimes_{R^\beta} R \longrightarrow R \star_\beta G$, definida por $\tau'(x \otimes y) = \sum_{g\in G} x\beta_g(y1_{g^{-1}})\delta_g$ é um homomorfismo de grupos abelianos. Um cálculo simples mostra que τ' é de fato um homomorfismo de R^β-bimódulos.

Lema 1.6.5. *[3] A aplicação* $j : R \star_\beta G \longrightarrow End(R)_{R^\beta}$ *definida por* $j(\sum a_g\delta_g)(x) = \sum a_g\beta_g(x1_{g^{-1}})$*, para todo* $x \in R$ *é um bem definido homomorfismo de* R*-módulos à esquerda e também um homomorfismo de* K*-álgebras unitárias.*

Demonstração: Mostremos primeiro que j está bem definida. De fato, sejam $x \in R$ e $y \in R^\beta$ então

$$\begin{aligned} j(\sum a_g\delta_g)(xy) &= \sum a_g\beta_g(xy1_{g^{-1}}) = \sum a_g\beta_g(x1_{g^{-1}})\beta_g(y1_{g^{-1}}) \\ &= \sum a_g\beta_g(x1_{g^{-1}})y1_g = \sum a_g\beta_g(x1_{g^{-1}})y = j(\sum a_g\delta_g)(x)y. \end{aligned}$$

Uma verificação simples mostra que j é R-linear à esquerda. Para finalizar mostremos que j é um homomorfismo de anéis. Claramente, para todo $x \in R$

$$j(1_{R\star_\beta G})(x) = j(\sum_{e\in G_0} 1_e\delta_e)(x) = \sum_{e\in G_0} 1_e\beta_e(x1_e) = \sum_{e\in G_0} 1_e x = x = I_R(x),$$

e para todo $(g,h) \in G^2$ temos

$$j((x_g\delta_g)(y_h\delta_h))(x) = j(x_g\beta_g(y_h)\delta_{gh})(x) = x_g\beta_g(y_h)\beta_{gh}(x1_{(gh)^{-1}}).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(j(x_g\delta_g)j(y_h\delta_h))(x) &= j(x_g\delta_g)(j(y_h\delta_h)(x))\\ &= j(x_g\delta_g)(y_h\beta_h(x1_{h^{-1}}))\\ &= x_g\beta_g(y_h\beta_h(x1_{h^{-1}})),\end{aligned}$$

mas $E_{d(g)} = E_{r(h)}$ e assim $E_{g^{-1}} = E_h$. Logo,

$$(j(x_g\delta_g)j(y_h\delta_h))(x) = x_g\beta_g(y_h)\beta_{gh}(x1_{h^{-1}}).$$

Agora se $d(g) \neq r(h)$ então $(x_g\delta_g)(y_h\delta_h) = 0$ e $E_{g^{-1}} \cap E_h = 0$. Daí

$$(j(x_g\delta_g)j(y_h\delta_h))(x) = j(x_g\delta_g)(y_h\beta_h(x1_{h^{-1}})) = x_g\beta_g(y_h\beta_h(x1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}) = 0.$$

Portanto, $j((x_g\delta_g)(y_h\delta_h)) = j(x_g\delta_g)j(y_h\delta_h)$, para todo $g,h \in G$. $\square$

No lema anterior $End(R)_{R^\beta}$ denota os endomorfismos de R que são R^β-lineares à direita. Observe que R é um $R\star_\beta G$-módulo à esquerda via:

$$xy = j(x)y, \text{ para todo } x \in R\star_\beta G \text{ e } y \in R.$$

Para qualquer $R\star_\beta G$-módulo à esquerda M definimos:

$$M^G = \{m \in M \mid (1_g\delta_g)m = 1_g m, \text{ para todo } g \in G\}$$

o conjunto dos invariantes de M sobre G. Lembremos que $\varphi : R \longrightarrow R\star_\beta G$ definida por $\varphi(x) = \sum_{e\in G_0} x1_e\delta_e$ é um homomorfismo injetor de anéis. Se M é um $R\star_\beta G$-módulo à esquerda, necessariamente M é também um R-módulo à esquerda via:

$$xm = \varphi(x)m, \text{ para todo } x \in R \text{ e } m \in M.$$

Em particular como R é um $R \star_\beta G$-módulo à esquerda via j, então R^G coincide com R^β.

Definição 1.6.6. *[3] Sejam G um grupóide finito, R uma K-álgebra unitária e $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de G sobre R. Dizemos que R é uma extensão de Galois de R^β se existem elementos $\{x_i, y_i \in R \mid 1 \leq i \leq m\}$ tais que $\sum_{i=1}^{m} x_i\beta_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \delta_{g,e}1_e$, para todo $g \in G$ e $e \in G_0$. O conjunto $\{x_i, y_i\}_{1\leq i\leq m}$ é chamado sistema de coordenadas de Galois de R sobre R^β.*

Na definição anterior δ denota o delta de Kronecker. A seguir apresentamos um exemplo de uma ação β de um grupóide G sobre uma K-álgebra R na qual R é uma extensão de Galois de R^β.

Exemplo 1.6.7. *Sejam $G = \{g, g^{-1}, r(g), d(g)\}$ um grupóide e $R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4$, onde K é um anel comutativo e e_1, e_2, e_3, e_4 são idempotentes centrais dois a dois ortogonais cuja soma é 1_R. Considere $E_g = E_{r(g)} = Ke_3 \oplus Ke_4$, $E_{g^{-1}} = E_{d(g)} = Ke_1 \oplus Ke_2$, $\beta_{r(g)} = I_{E_{r(g)}}$, $\beta_{d(g)} = I_{E_{d(g)}}$, $\beta_g(xe_1 + ye_2) = xe_3 + ye_4$ e $\beta_{g^{-1}}(xe_3 + ye_4) = xe_1 + ye_2$, para todo $x, y \in K$. Sabemos pelo Exemplo 1.1.14 que $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ é uma ação global de G sobre R. É fácil verificar que R é uma extensão de Galois de $R^\beta = K(e_1+e_2)\oplus K(e_3+e_4)$ onde o conjunto $\{e_i, e_i\}_{1\leq i\leq 4}$ é o sistema de coordenadas de Galois de R sobre R^β.*

O Teorema 1.6.9 na sequência é a versão global de [3, Teorema 5.3] cuja demonstração é praticamente idêntica à deste teorema. Contudo a repetimos aqui para conveniência do leitor. Para a prova desse teorema necessitamos do seguinte resultado.

Teorema 1.6.8. *[26, Teorema 18.8] Sejam M um R-módulo à esquerda e $S = End_R(M)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) M é um gerador para a categoria dos R-módulos à esquerda,

(2) M é um S-módulo à direita projetivo finitamente gerado e $R \simeq End(M)_S$.

Teorema 1.6.9. *[3, Teorema 5.3] As seguintes condições são equivalentes:*

(1) R é uma extensão de Galois de R^{β},

(2) R é um R^{β}-módulo à direita projetivo finitamente gerado e $j : R \star_{\beta} G \longrightarrow End(R)_{R^{\beta}}$ dada por $j(\sum_{g\in G} x_g\delta_g)(x) = \sum_{g\in G} x_g\beta_g(x1_{g^{-1}})$ é um isomorfismo de K-álgebras e de R-módulos à esquerda,

(3) Para todo $R \star_{\beta} G$-módulo à esquerda M a aplicação $\mu : R \otimes_{R^{\beta}} M^G \longrightarrow M$ dada por $\mu(x \otimes m) = xm$ é um isomorfismo de R-módulos à esquerda,

(4) A aplicação $\rho : R \otimes_{R^{\beta}} R \longrightarrow \prod_{g\in G} E_g$ dada por $\rho(x \otimes y) = (x\beta_g(y1_{g^{-1}}))_{g\in G}$ é um isomorfismo de R-módulos à esquerda,

(5) $RtR = R \star_{\beta} G$, onde $t = \sum_{g\in G} 1_g\delta_g$,

(6) A aplicação τ' é sobrejetiva,

(7) R é um gerador para a categoria dos $R \star_{\beta} G$-módulos à esquerda.

Demonstração: (1) $\Longrightarrow$ (2) Sejam $\{x_i, y_i; 1 \leq i \leq m\}$ um sistema de coordenadas de Galois de R sobre R^{β}, isto é,

$$\sum_{i=1}^{m} x_i\beta_g(y_i1_{g^{-1}}) = \delta_{e,g}1_e, \text{ para todo } e \in G_0 \text{ e } g \in G.$$

Mostremos que $\{x_i, f_i\}_{i=1}^{m}$ é uma base dual de R como R^{β}-módulo à direita, onde

$$f_i = tr_{\beta}(y_{i}\text{-}) \in Hom_{R^{\beta}}(R, R^{\beta}).$$

De fato, seja $x \in R$ então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} x_if_i(x) &= \sum_{i=1}^{m} x_itr_{\beta}(y_ix) = \sum_{i=1}^{m} x_i(\sum_{g\in G}\beta_g(y_ix1_{g^{-1}}))\\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i(\sum_{g\in G}\beta_g(y_i1_{g^{-1}})\beta_g(x1_{g^{-1}}))\\ &= \sum_{g\in G}(\sum_{i=1}^{m} x_i\beta_g(y_i1_{g^{-1}}))\beta_g(x1_{g^{-1}})\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i f_i(x) = \sum_{g\in G}(\delta_{e,g}1_e)\beta_g(x1_{g^{-1}})$$
$$= \sum_{e\in G_0}\beta_e(x1_e) = \sum_{e\in G_0} x1_e = x(\sum_{e\in G_0} 1_e) = x,$$

pois $R = \bigoplus_{e\in G_0} E_e$. Pelo Lema 1.6.5 temos que j é um homomorfismo de R-módulos à esquerda. Resta mostrar que j é injetora e sobrejetora. Seja $f \in End(R)_{R^\beta}$. Tome

$$w = \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\beta_g(y_i 1_{g^{-1}})\delta_g \in R\star_\beta G.$$

Então

$$j(w)(x) = \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\beta_g(y_i1_{g^{-1}})\beta_g(x1_{g^{-1}}) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\sum_{g\in G}\beta_g(y_i x 1_{g^{-1}})$$
$$= \sum_{i=1^m} f(x_i)tr_\beta(y_i x) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)f_i(x) = f(\sum_{i=1}^{m} x_i f_i(x)) = f(x).$$

Finalmente, se $v = \sum_{g\in G} a_g\delta_g$ é tal que $j(v) = 0$, então

$$0 = \sum_{h\in G}\sum_{i=1}^{m} j(v)(x_i)\beta_h(y_i1_{h^{-1}})\delta_h = \sum_{i=1}^{m}\sum_{g,h\in G} a_g\beta_g(x_i1_{g^{-1}})\beta_h(y_i1_{h^{-1}})\delta_h$$
$$= \sum_{r(g)=r(h)} a_g\beta_g(\sum_{i=1}^{m} x_i\beta_{g^{-1}h}(y_i1_{h^{-1}})1_{g^{-1}})\delta_h = \sum_{e\in G_0}\sum_{r(g)=r(h)} a_g\beta_g(\delta_{e,g^{-1}h}1_e1_{g^{-1}})\delta_h.$$

Pelo Lema 1.2.5 temos que $g^{-1}h \in G_0$ se e somente se $h = g$. Assim,

$$0 = \sum_{e\in G_0}\sum_{r(g)=r(h)} a_g\beta_g(\delta_{e,g^{-1}h}1_e1_{g^{-1}})\delta_h = \sum_{g\in G} a_g\beta_g(1_{d(g)}1_{g^{-1}})\delta_g = \sum_{g\in G} a_g\delta_g = v.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) Seja $\{x_i, f_i\}_{i=1}^{n}$ uma base dual de R como R^β-módulo à direita. Como j é sobrejetora seja $v_i \in R\star_\beta G$ tal que

$$j(v_i) = f_i,\ 1 \le i \le n.$$

Seja $x \in R$, então

$$j(1_{R\star_\beta G})(x) = j(\sum_{e\in G_0} 1_e\delta_e)(x) = \sum_{e\in G_0} \beta_e(x1_e) = \sum_{e\in G_0} x1_e = x$$

e

$$j(\sum_{i=1}^{n} x_iv_i)(x) = \sum_{i=1}^{n} x_ij(v_i)(x) = \sum_{i=1^n} x_if_i(x) = x$$

como j é injetora então $\sum\limits_{i=1}^{n} x_iv_i = 1_{R\star_\beta G}$. Além disso, como j é um homomorfismo de anéis, então

$$j(1_g\delta_gv_i)(x) = (j(1_g\delta_g)j(v_i))(x) = j(1_g\delta_g)(f_i(x)) = \beta_g(f_i(x)1_{g^{-1}}) = f_i(x)1_g,$$

pois $f_i(x) \in R^\beta$. Por outro lado, como j é R-linear à esquerda então $j(1_gv_i)(x) = 1_gj(v_i)(x) = 1_gf_i(x)$. Logo, novamente pela injetividade da aplicação j temos que

$$1_g\delta_gv_i = 1_gv_i.$$

e consequentemente $(1_g\delta_g)(v_ix) = (1_g\delta_gv_i)x = (1_gv_i)x = 1_g(v_ix)$, ou seja, $v_ix \in M^G$, para todo $x \in M$.

Desta forma, $\nu : M \longrightarrow R \otimes_{R^\beta} M^G$ dada por $\nu(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes v_ix$ é um bem definido homomorfismo de R-módulos à esquerda. Note que, para todo $x \in M$ temos que

$$\mu(\nu(x)) = \mu(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes v_ix) = \sum_{i=1}^{n} x_iv_ix = 1_{R\star_\beta G}x = x.$$

Por outro lado, para todo $x \otimes v \in R \otimes_{R^\beta} M^G$ e $v_i = \sum\limits_{g\in G} r_{ig}\delta_g$ temos

$$\begin{aligned}
\nu(\mu(x \otimes v)) = \nu(xv) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes v_i(xv) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (v_ix)v \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (\sum_{g\in G} r_{ig}\delta_gx)v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (\sum_{g\in G} r_{ig}\beta_g(x)\delta_g)v \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (\sum_{g\in G} r_{ig}\beta_g(x))(1_g\delta_gv) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes (\sum_{g\in G} r_{ig}\beta_g(x))v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu(\mu(x \otimes v)) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes j(v_i)(x)v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes f_i(x)v \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x) \otimes v = x \otimes v\end{aligned}$$

Portanto, ν é a inversa de μ.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Seja $\mathcal{F} = \{f : G \longrightarrow R \mid f(g) \in E_g, \text{ para todo } g \in G\}$. Claramente $\mathcal{F}$ é um R-bimódulo naturalmente isomorfo à $\prod_{g \in G} E_g$ e um $R \star_\beta G$-módulo à esquerda via a bem definida ação

$$((a_g\delta_g)f)(h) = \begin{cases} a_g\beta_g(f(g^{-1}h)1_{g^{-1}}), \text{ se } r(h) = r(g) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

para todo $g, h \in G$ e $f \in \mathcal{F}$. Note que, $a_g\beta_g(f(g^{-1}h)1_{g^{-1}}) \in E_g = E_{r(g)} = E_{r(h)} = E_h$. Assim, a ação acima está bem definida. Mais ainda, a aplicação $R \longrightarrow \mathcal{F}^G$, $r \longmapsto f_r$ tal que $f_r(h) = \beta_h(r1_{h^{-1}})$, $h \in G$ é um bem definido isomorfismo de R^β-módulos à esquerda. De fato, tal aplicação é claramente um homomorfismo de R^β-módulos à esquerda de R para $\mathcal{F}$. Dados $g, h \in G$ e $r \in R$ temos

$$\begin{aligned}((1_g\delta_g)f_r)(h) &= \beta_g(f_r(g^{-1}h)1_{g^{-1}}) \\ &= \beta_g(\beta_{g^{-1}h}(r1_{(g^{-1}h)^{-1}})1_{g^{-1}}) \\ &= \beta_h(r1_{h^{-1}})1_g = f_r(h)1_g,\end{aligned}$$

quando $r(h) = r(g)$. Se $r(h) \neq r(g)$ então $E_g \cap E_h = 0$ e consequentemente $f_r(h)1_g = 0 = ((1_g\delta_g)f_r)(h)$. Portanto, $f_r \in \mathcal{F}^G$. Se para algum $r \in R$ tivermos que $f_r(h) = 0$, para todo $h \in G$ então $r = r1_R = \sum_{e \in G_0} r1_e = \sum_{e \in G_0} \beta_e(r1_e) = \sum_{e \in G_0} f_r(e) = 0$. Finalmente, dada $f \in \mathcal{F}^G$ e tomando $r = \sum_{e \in G_0} f(e)$ temos que

$$\begin{aligned}f_r(h) &= \sum_{e \in G_0} \beta_h(f(e)1_{h^{-1}}) = \beta_h(f(d(h))1_{h^{-1}}) = \beta_h(f(h^{-1}h)1_{h^{-1}}) \\ &= ((1_h\delta_h)f)(h) = 1_h f(h) = f(h),\end{aligned}$$

para todo $h \in G$. Portanto, a aplicação dada pela composição $R \otimes_{R^\beta} R \simeq R \otimes_{R^\beta} \mathcal{F}^G \longrightarrow \mathcal{F} \simeq \prod\limits_{g\in G} E_g$ é o requerido isomorfismo ρ.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Basta observar que $\rho(r \otimes r') = (r\beta_g(r' 1_{g^{-1}}))_{g\in G}$, para todo $r, r' \in R$. Logo, se $G_0 = \{e_1, \cdots, e_t\}$, dado $z = (1_{e_1}, \cdots, 1_{e_t}, 0, \cdots, 0) \in \prod\limits_{g\in G} E_g$, pela sobrejetividade de ρ existe $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \otimes y_i \in R \otimes R$ tal que $\rho(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \otimes y_i) = z$ e portanto $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\beta_g(y_i 1_{g^{-1}}) = 1_e\delta_{e,g}$, para todo $e \in G_0$ e $g \in G$.

(1) $\Longleftrightarrow$ (5) Vamos iniciar mostrando que RtR é um ideal de $R \star_\beta G$. De fato, para todo $h \in G$ e $a_h \in E_h$ temos

$$\begin{aligned}(a_h\delta_h)t &= \sum_{g\in G}(a_h\delta_h)(1_g\delta_g) = \sum_{r(g)=d(h)} a_h\beta_h(1_{h^{-1}})\delta_{hg} = \sum_{r(g)=d(h)} a_h\beta_h(1_g 1_{h^{-1}})\delta_{hg}\\ &= \sum_{r(g)=d(h)} a_h 1_h\delta_{hg} = a_h \sum_{r(l)=r(h)} 1_l\delta_l = a_h t,\end{aligned}$$

pois $1_g = 1_{r(g)} = 1_{d(h)} = 1_{h^{-1}}$ e $1_h = 1_{r(h)} = 1_{r(hg)} = 1_{hg}$ e

$$\begin{aligned}t(a_h\delta_h) &= \sum_{g\in G}(1_g\delta_g)(a_h\delta_h) = \sum_{d(g)=r(h)} \beta_g(a_h)\delta_{gh} = \sum_{d(l)=d(h)} \beta_{lh^{-1}}(a_h)\delta_l\\ &= \sum_{d(l)=d(h)} \beta_l(\beta_{h^{-1}}(a_h))\delta_l = t\beta_{h^{-1}}(a_h).\end{aligned}$$

Portanto, $RtR = R \star_\beta G$ se e somente se existem elementos $x_i, y_i \in R$, $1 \leq i \leq n$ tais que

$$\sum_{e\in G_0} 1_e\delta_e = 1_{R\star_\beta G} = \sum_{i=1}^{n} x_i t y_i = \sum_{g\in G}(\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_g(y_i 1_{g^{-1}}))\delta_g$$

e isso ocorre se e somente se $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n}$ é um sistema de coordenadas de Galois de R sobre R^β.

(5) $\Longleftrightarrow$ (6) É suficiente observar que $\tau'(R \otimes_{R^\beta} R) = RtR$.

(2) $\Longleftrightarrow$ (7) Seja $(R^\beta)^{op}$ o anel oposto de R^β. Observe que R é naturalmente um $(R^\beta)^{op}$-módulo à esquerda via multiplicação à direita. Lembremos que R é também um $R \star_\beta G$-módulo à esquerda via j. De fato, é fácil ver que essas duas ações são

compatíveis, isto é, que R é um $((R^\beta)^{op}, R\star_\beta G)$-bimódulo. Consequentemente, a aplicação $\theta : (R^\beta)^{op} \longrightarrow End_{R\star_\beta G}(R)$ dada por $\theta(r)(x) = xr$, para todo $r \in (R^\beta)^{op}$ e $x \in R$ está bem definido. Além disso, é fácil verificar que θ é um homomorfismo de anéis cuja inversa é a aplicação $\psi : End_{R\star_\beta G}(R) \longrightarrow (R^\beta)^{op}$ dada por $\psi(f) = f(1_R)$. Finalmente, desde que $End(R)_{R^\beta} = End_{(R^\beta)^{op}}(R)$, o resultado segue pelo Teorema 1.6.8. $\square$

Definição 1.6.10. *Seja G um grupóide finito e $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de G sobre uma K-álgebra com unidade R. Dizemos que R é uma álgebra de Galois sobre R^β se R é uma extensão de Galois de R^β e R^β está contido no centro $C(R)$ de R.*

Lema 1.6.11. *Sejam G um grupóide finito, R uma K-álgebra unitária e $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de G sobre R tal que cada E_e é unitário e $R = \bigoplus\limits_{e\in G_0} E_e$. Se R é uma extensão de Galois de R^β então R é uma extensão separável de R^β.*

Demonstração: Como R é uma extensão de Galois de R^β, existem $\{r_i, s_i \in R \mid i \leq i \leq n\}$ tais que $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i\beta_g(s_i1_{g^{-1}}) = \delta_{g,e}1_e$, para todo $g \in G$ e $e \in G_0$. Tome $d = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \otimes s_i \in R\otimes_{R^\beta} R$ mostremos que d é o elemento de separabilidade de R sobre R^β. De fato, para todo $e \in G_0$ temos $1_e = \sum\limits_{i=1}^{n} r_is_i1_e$. Então temos $1_R = \sum\limits_{e\in G_0} 1_e = \sum\limits_{e\in G_0}(\sum\limits_{i=1}^{n} r_is_i1_e)1_e = (\sum\limits_{e\in G_0} 1_e)(\sum\limits_{i=1}^{n} r_is_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} r_is_i$. Portanto, $\sum\limits_{i=1}^{n} r_is_i = 1_R$.

Uma simples verificação mostra que, para cada $1 \leq i \leq n$, temos $rr_i = \sum\limits_{j=1}^{n} r_jtr_\beta(s_jrr_i)$. Logo, para todo $r \in R$ temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} rr_i \otimes s_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_jtr(s_jrr_i)\otimes s_i &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} r_j \otimes tr(s_jrr_i)s_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} r_j \otimes \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in G} \beta_g(s_jr1_{g^{-1}})\beta_g(r_i1_{g^{-1}})s_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} r_j \otimes \sum_{g\in G} \beta_g(s_jr1_{g^{-1}}) \sum_{i=1}^{n} \beta_g(r_i1_{g^{-1}})s_i
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} rr_i \otimes s_i = \sum_{j=1}^{n} r_j \otimes \sum_{e \in G_0} s_j r 1_e = \sum_{j=1}^{n} r_j \otimes \sum_{e \in G_0} \beta_e(s_j r 1_e) 1_e$$
$$= \sum_{j=1}^{n} r_j \otimes s_j r \sum_{e \in G_0} 1_e = \sum_{j=1}^{n} r_j \otimes s_j r.$$

Portanto, R é uma extensão separável de R^{β}. $\square$

Capítulo 2

Teoremas de Estrutura para o Skew Anel de Grupóide $R \star_\beta G$

2.1 Quando o skew anel de grupóide é Azumaya

Os resultados obtidos nesta seção são generalizações naturais dos resultados demonstrados por Alfaro e Szeto em [1] para o caso do skew anel de grupóide. No caso de grupos os resultados são os seguintes:

Teorema 2.1.1. *[1, Teorema 1] Sejam R um anel e G um grupo finito agindo por automorfismos sobre R. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) $R \star G$ é uma álgebra Azumaya e $C(R \star G) \subset R$,

(2) $R \star G$ é H-separável sobre R e R é uma $C(R)^G$-álgebra separável,

(3) R é uma extensão de Galois de R^G e R^G é uma álgebra Azumaya.

Lembramos que R^G é o subanel dos elementos de R que são invariantes sob a ação de G.

Teorema 2.1.2. *[1, Teorema 2] Sejam R um anel e G um grupo finito agindo por automorfismos sobre R. Suponha que $R \star G$ é uma álgebra Azumaya e $C(R \star G) \subset R$, então:*

(1) $R \star G \simeq C(R)^G \otimes_{C(R \star G)} (E \star G)$, onde $E = C_R(R^G)$,

(2) $E \star G$ é uma $C(R \star G)$-álgebra de Azumaya,

(3) E é uma extensão de Galois de $C(R \star G)$.

Além disso, as demonstrações para o caso de skew anel de grupóide foram inspiradas nas demonstrações de resultados similares dadas no caso do skew anel de grupo parcial e apresentadas em [14].

Em toda esta seção R é uma álgebra com unidade (sobre um anel comutativo K), G é um grupóide finito e $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ é uma ação de G sobre R tal que cada E_e é unitário e $R = \bigoplus\limits_{e\in G_0} E_e$. Denotando por A o skew anel de grupóide $R \star_\beta G$ temos o seguinte resultado.

Lema 2.1.3. $C(A) \subseteq R \Longleftrightarrow C(A) = C(R)^\beta$.

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Suponha que $C(A) \subset R$. Seja $x \in C(A) \subset R$ então x comuta com qualquer elemento de R bem como com todo elemento $1_g\delta_g \in A$. Assim, $x \in C(R)$ e $x1_g\delta_g = 1_g\delta_g x$, para todo $g \in G$. Logo,

$$\begin{aligned}
&(\sum_{e\in G_0} x1_e\delta_e)1_g\delta_g = 1_g\delta_g(\sum_{e\in G_0} x1_e\delta_e)\\
\Longleftrightarrow &\sum_{e\in G_0} x1_e\delta_e 1_g\delta_g = \sum_{e\in G_0} 1_g\delta_g x1_e\delta_e\\
\Longleftrightarrow\ & x1_{r(g)}\delta_{r(g)}1_g\delta_g = 1_g\delta_g x1_{r(g)}\delta_{r(g)}\\
\Longleftrightarrow\ & x1_g\delta_g = \beta_g(x1_{g^{-1}})\delta_g,
\end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Desta forma, $\beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g$, para todo $g \in G$. Portanto, $x \in C(R)^\beta$.

Reciprocamente, se $x \in C(R)^\beta$ então $x \in C(R)$ e $\beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g$, para todo $g \in G$. Seja $y = \sum\limits_{g\in G} y_g\delta_g \in A$. Daí, $xy = x(\sum\limits_{g\in G} y_g\delta_g) = \sum\limits_{g\in G} xy_g\delta_g = \sum\limits_{g\in G} y_g x\delta_g = \sum\limits_{g\in G} y_g\beta_g(x1_{g^{-1}})\delta_g = (\sum\limits_{g\in G} y_g\delta_g)x = yx$. Assim, $x \in C(A)$. Portanto, $C(R)^\beta = C(A)$.

($\Longleftarrow$) Imediata, pois $C(A) = C(R)^\beta \subset R$. □

Definição 2.1.4. *Seja X um subconjunto não vazio de R. Dizemos que X é β invariante se $\beta_g(X \cap E_{g^{-1}}) = X \cap E_g$, para todo $g \in G$.*

Lema 2.1.5. *Sejam $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação do grupóide G sobre R e X um subconjunto β-invariante de R. Então, $C_R(X)$ é β-invariante. Em particular, $C(R)$ e $C_R(R^\beta)$ são β-invariantes.*

Demonstração: Seja $r \in C_R(X)$ assim $rx = xr$, para todo $x \in X$. Com isso,

$$\begin{aligned}\beta_g(r1_{g^{-1}})x &= \beta_g(r1_{g^{-1}})1_g x = \beta_g(r1_{g^{-1}})\beta_g(\beta_{g^{-1}}(x1_g)) = \beta_g(r\beta_{g^{-1}}(x1_{g^{-1}}))\\ &= \beta_g(\beta_{g^{-1}}(x1_{g^{-1}})r) = \beta_{r(g)}(x1_g)\beta_g(r1_{g^{-1}}) = x1_g\beta_g(r1_{g^{-1}})\\ &= x\beta_g(r1_{g^{-1}}),\end{aligned}$$

para todo $g \in G$. Portanto, $C_R(X)$ é β-invariante. □

Teorema 2.1.6. *As afirmações seguintes são equivalentes:*

(1) A é uma álgebra Azumaya e $C(A) \subset R$,

(2) A é H-separável sobre R e R é separável sobre $C(R)^{\beta}$,

(3) R é uma extensão de Galois de R^{β} e R^{β} é Azumaya sobre $C(A)$,

(4) $C_R(R^{\beta})$ é uma extensão de Galois de $C(A)$ e R^{β} é Azumaya sobre $C(A)$.

Neste caso, $C(A) = C(R)^{\beta} = C(R^{\beta})$ e $A \simeq R^{\beta} \otimes_{C(A)} (R' \star_{\beta} G)$, onde $R' = C_R(R^{\beta})$.

Demonstração: (1) $\Longrightarrow$ (2) Suponha que A é Azumaya e $C(A) \subset R$. Mostremos primeiro que A é H-separável sobre R. Para tanto, note que A é um R-módulo à esquerda projetivo finitamente gerado. Logo, pelo Teorema 1.5.11, temos que A é H-separável sobre R.

Resta mostrar que R é separável sobre $C(R)^{\beta}$. Note que:

$$\begin{aligned}A = R \star_{\beta} G &= \bigoplus_{g\in G} E_g\delta_g\\ &= (\bigoplus_{e\in G_0} E_e\delta_e) \oplus (\bigoplus_{g\in G\setminus G_0} E_g\delta_g)\\ &= (\bigoplus_{e\in G_0} E_e 1_e\delta_e) \oplus (\bigoplus_{g\in G\setminus G_0} E_g\delta_g)\\ &= (\bigoplus_{e\in G_0} E_e)(\sum_{e\in G_0} 1_e\delta_e) \oplus (\bigoplus_{g\in G\setminus G_0} E_g\delta_g)\\ &= R1_A \oplus (\bigoplus_{g\in G\setminus G_0} E_g\delta_g).\end{aligned}$$

Logo, A é H-separável sobre R e R é um somando direto de A como R-bimódulo. Assim, pela Proposição 1.5.8 segue que $C_A(R)$ é separável sobre $C(A)$ e $C_A(C_A(R)) = R$. Pelo Teorema 1.5.7 temos que $C_A(C_A(R))$ é separável sobre $C(A)$. Logo, R é separável sobre $C(A)$ e desde que $C(A) \subset R$, pelo Lema 2.1.3, temos que $C(A) = C(R)^\beta$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Suponha que A é H-separável sobre R e que R é separável sobre $C(R)^\beta$. Vamos proceder por etapas.

<u>Etapa 1:</u> Mostremos que A é Azumaya e $C(A) \subset R$ (isto é, (2) $\Longrightarrow$ (1)).

Por hipótese, A é H-separável sobre R. Assim, pelo Teorema 1.5.10 segue que A é separável sobre R. Além disso, temos que R é separável sobre $C(R)^\beta$. Então, pelo Teorema 1.5.12 segue que A é separável sobre $C(R)^\beta$.

Como A é H-separável sobre R e R é um somando direto de A como R-bimódulo, pela Proposição 1.5.8 segue que $C_A(R)$ é separável sobre $C(A)$ e $C_A(C_A(R)) = R$. Mais ainda, $C(A) \subset C_A(C_A(R)) = R$ e pelo Lema 2.1.3, temos que $C(A) = C(R)^\beta$. Portanto, A é separável sobre $C(R)^\beta = C(A)$. Assim, A é Azumaya e $C(A) \subset R$.

<u>Etapa 2:</u> Mostremos que $End_{C(R)^\beta}(R)$ é uma $C(R)^\beta$-álgebra de Azumaya.

De fato, pela etapa 1 A é uma $C(R)^\beta$-álgebra de Azumaya então, pelo Teorema 1.5.5, segue que A é um $C(R)^\beta$-módulo projetivo finitamente gerado. Como R é um somando direto de A como R-módulo à esquerda, então R é um somando direto de A como $C(R)^\beta$-módulo. Logo, R é um $C(R)^\beta$-módulo projetivo finitamente gerado. (Naturalmente, R é um gerador na categoria dos $C(R)^\beta$-módulos). Portanto, pelo Teorema 1.5.6, temos que $End_{C(R)^\beta}(R)$ é uma $C(R)^\beta$-álgebra Azumaya.

<u>Etapa 3:</u> Mostremos que $C_{End_{C(R)^\beta}(R)}(A) = End_A(R) \simeq (R^\beta)^{op}$ como $C(R)^\beta$-álgebras.

A primeira igualdade é imediata. Para provarmos o isomorfismo, lembremos que $j : A \longrightarrow End(R)_{R^\beta}$ dada por $j(\sum\limits_{g\in G} r_g\delta_g)(r) = \sum\limits_{g\in G} r_g\beta_g(r1_{g^{-1}})$ é um homomorfismo de K-álgebras e de R-módulos à esquerda. Em particular, R é um A-módulo à esquerda via j, isto é, $(\sum\limits_{g\in G} r_g\delta_g).r = j(\sum\limits_{g\in G} r_g\delta_g)(r)$, para todo $\sum\limits_{g\in G} r_g\delta_g \in A$ e $r \in R$. Além disso, R é um $(R^\beta)^{op}$-módulo à esquerda via $x.r = rx$, para todo $x \in (R^\beta)^{op}$ e $r \in R$. De fato, R é um $((R^\beta)^{op}, A)$-bimódulo, pois

$$
\begin{aligned}
x.((\sum_{g\in G} r_g\delta_g).r) &= x.(\sum_{g\in G} r_g\beta_g(r1_{g^{-1}})) = (\sum_{g\in G} r_g\beta_g(r1_{g^{-1}}))x \\
&= \sum_{g\in G} r_g\beta_g(r1_{g^{-1}})\beta_g(x1_{g^{-1}}) = \sum_{g\in G} r_g\beta_g(rx1_{g^{-1}}) \\
&= (\sum_{g\in G} r_g\delta_g).(rx) = (\sum_{g\in G} r_g\delta_g).(x.r).
\end{aligned}
$$

Agora, definimos a aplicação $\theta : (R^\beta)^{op} \longrightarrow End_A(R)$ dada por $\theta(x)(r) = x.r = rx$. Como

$$
\theta(x)((\sum_{g\in G} r_g\delta_g).r) = x.((\sum_{g\in G} r_g\delta_g).r) = (\sum_{g\in G} r_g\delta_g).(x.r) = (\sum_{g\in G} r_g\delta_g).(\theta(x)(r))
$$

então θ está bem definida, isto é, $\theta(x)$ é A-linear à esquerda. Uma simples verificação mostra que θ é um homomorfismo de $C(R)^\beta$-álgebras. Definimos a aplicação $\widetilde{\theta}$: $End_A(R) \longrightarrow (R^\beta)^{op}$ por $\widetilde{\theta}(f) = f(1_R)$. Note que,

$$
\begin{aligned}
\beta_g(f(1_R)1_{g^{-1}}) &= (1_g\delta_g).f(1_R) = f((1_g\delta_g).1_R) = f(\beta_g(1_R1_{g^{-1}})) \\
&= f(1_g) = f(1_g1_R) = 1_gf(1_R) = f(1_R)1_g,
\end{aligned}
$$

pois f é A-linear à esquerda e 1_g é central. Logo, $\widetilde{\theta}$ está bem definida. Claramente, $\widetilde{\theta}$ é inversa de θ. Portanto, θ é um isomorfismo de $C(R)^\beta$-álgebras.

Etapa 4: Finalmente, mostremos que R é uma extensão de Galois de R^β, R^β é uma álgebra de Azumaya e $C(R^\beta) = C(R)^\beta$.

Temos por hipótese que A é uma álgebra H-separável sobre R, pela *Etapa 3* temos que R é um A-módulo à esquerda e, além disso, R é naturalmente um gerador na categoria dos R-módulos à esquerda. Então, pelo Lema 1.5.9, segue que R é um gerador na categoria dos A-módulos à esquerda. Pelo Teorema 1.6.9, segue que R é uma extensão de Galois de R^β.

Mostremos que R^β é uma álgebra de Azumaya e $C(R^\beta) = C(R)^\beta$. Como R é uma extensão de Galois de R^β então pelo Teorema 1.6.9 temos que $A \simeq End(R)_{R^\beta}$. Além disso, é fácil ver que $End(R)_{R^\beta} \subset End_{C(R)^\beta}(R)$ e, sendo assim, $A \subset End_{C(R)^\beta}(R)$ como $C(R)^\beta$-subálgebra. Pela etapa 1 temos que A é Azumaya sobre $C(R)^\beta$, assim $C(A) = C(R)^\beta$. Pelo Teorema 1.5.7 segue que $C_{End_{C(R)^\beta}(R)}(A)$ é Azumaya sobre

$C(R)^\beta$ e $C_{End_{C(R)^\beta}(R)}(C_{End_{C(R)^\beta}(R)}(A)) = A$. Mas, pela etapa 3, $C_{End_{C(R)^\beta}(R)}(A) = End_A(R) \simeq (R^\beta)^{op}$. Logo, $(R^\beta)^{op}$ é Azumaya sobre $C(R)^\beta = C(A)$, o que implica que R^β é Azumaya sobre $C(R)^\beta = C(A)$ e assim $C(R^\beta) = C(A) = C(R)^\beta$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Suponha que R é uma extensão de Galois de R^β e R^β é Azumaya sobre $C(A)$. Como R é uma extensão de Galois de R^β então, pelo Teorema 1.6.9, segue que R é um R^β-módulo à direita projetivo finitamente gerado e $A \simeq End(R)_{R^\beta}$ como anéis e portanto como $C(R)^\beta$-álgebras. Além disso, como R^β é Azumaya sobre $C(A)$ então, pelo Teorema 1.5.5 temos que R^β é um $C(A) = C(R^\beta)$-módulo projetivo finitamente gerado. Mais ainda, uma vez que $C(A) = C(R^\beta) \subset R$ então pelo Lema 2.1.3 temos que $C(R)^\beta = C(A) = C(R)^\beta$. Assim, como R é um R^β-módulo à direita projetivo finitamente gerado e R^β é um $C(R)^\beta$-módulo projetivo finitamente gerado então R é um $C(R)^\beta$-módulo projetivo finitamente gerado. Claramente R é um gerador na categoria dos $C(R)^\beta$-módulos. Logo, pelo Teorema 1.5.6 segue que $End_{C(R)^\beta}(R)$ é uma álgebra Azumaya sobre $C(R)^\beta$, daí $C(End_{C(R)^\beta}(R)) = C(R)^\beta$.

Finalmente, $End(R)_{R^\beta} = C_{End_{C(R)^\beta}(R)}(R^\beta)$. Basta observar que $End(R)_{R^\beta}$ é uma subálgebra de $End_{C(R)^\beta}(R)$ e um (R^β, R^β)-bimódulo via

$$(xf)(r) = f(rx) \ \text{ e } \ (fx)(r) = f(r)x,$$

para toda $f \in End(R)_{R^\beta}$, $x \in R^\beta$ e $r \in R$.

Temos que $End_{C(R)^\beta}(R)$ é uma álgebra de Azumaya sobre $C(R)^\beta$ e R^β é uma álgebra de Azumaya sobre $C(A)$ ($C(A) = C(R^\beta) \subset R \Longleftrightarrow C(A) = C(R)^\beta$). Pelo Teorema 1.5.7 temos que $C_{End_{C(R)^\beta}(R)}(R^\beta)$ é Azumaya. Assim, $C_{End_{C(R)^\beta}(R)}(R^\beta) = End(R)_{R^\beta}$ é Azumaya. Como R é uma extensão de Galois de R^β então pelo Teorema 1.6.9 segue que $A \simeq End(R)_{R^\beta}$. Logo, A é Azumaya e $C(A) \subset R$.

(1) $\Longrightarrow$ (4) Suponha que A é Azumaya e $C(A) \subset R$ então como (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) segue que R^β é uma $C(A)$-álgebra de Azumaya ($C(A) = C(R^\beta) \subset R^\beta$). Pelo Teorema 1.5.7 segue que $C_A(R^\beta)$ é uma $C(A)$-álgebra de Azumaya e $A \simeq R^\beta \otimes_{C(A)} C_A(R^\beta)$.

Mostremos que $C_A(R^\beta) = C_R(R^\beta) \star_\beta G = R' \star_{\beta'} G$, com $R' = C_R(R^\beta)$. Com efeito, R' é β-invariante pelo Lema 2.1.5 e claramente $1_g \in R'$, para todo $g \in G$. É imediato ver que $\beta' = \beta\mid_{R'} = (\{E'_g = R' 1_g\}_{g\in G}, \{\beta_g \mid_{E'_{g^{-1}}}\}_{g \in G})$ é uma ação de G sobre R'. Além disso, observe que $R' = R' 1_R = R' \bigoplus_{e\in G_0} 1_e = \bigoplus_{e \in G_0} R' 1_e = \bigoplus_{e\in G_0} E'_e$.

Agora, se $x = \sum\limits_{g \in G} x_g \delta_g \in C_A(R^\beta)$ então $xy = yx$, para todo $y \in R^\beta$, ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} &(\sum_{g\in G} x_g\delta_g)y = y(\sum_{g\in G} x_g\delta_g), \text{ para todo } y \in R^\beta \\ \Longleftrightarrow &\sum_{g\in G} x_g\beta_g(y1_{g^{-1}})\delta_g = \sum_{g\in G} yx_g\delta_g, \text{ para todo } y \in R^\beta \\ \Longleftrightarrow &\sum_{g\in G} x_g y\delta_g = \sum_{g\in G} yx_g\delta_g, \text{ para todo } y \in R^\beta \\ \Longleftrightarrow &\; x_g y = yx_g, \text{ para todo } g \in G \text{ e } y \in R^\beta. \end{aligned}$$

Mas, isto é equivalente a dizer que $x_g \in C_R(R^\beta) \cap E_g = R^{'} \cap E_g = R^{'} 1_g = E_g^{'}$ ou ainda $x = \sum\limits_{g\in G} x_g\delta_g \in \bigoplus\limits_{g\in G} E'_g\delta_g = R' \star_{\beta'} G$. Portanto, $C_A(R^\beta) = R' \star_{\beta'} G$. Assim, $R^{'} \star_{\beta'} G$ é uma $C(A)$-álgebra de Azumaya e $C(R^{'} \star_{\beta'} G) = C(A) = C(R^\beta) \subset C_R(R^\beta) = R^{'}$. Logo, por (1) $\Longrightarrow$ (3) temos que $R' = C_R(R^\beta)$ é uma extensão de Galois sobre $(R^{'})^{\beta^{'}} = C(R^\beta) = C(A)$.

(4) $\Longrightarrow$ (3) Basta observar que como $C_R(R^\beta)$ é uma extensão de Galois de $C(A)$ então existem elementos $\{x_i, y_i \in C_R(R^\beta) \mid 1 \leq i \leq n\}$ tais que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\beta_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \delta_{e,g}1_e$, para todo $g \in G$ e $e \in G_0$. Mas, $C_R(R^\beta) \subset R$ donde segue que R é uma extensão de Galois de R^β. $\square$

Observação 2.1.7. *Pelo Teorema 2.1.6 é claro que se A é Azumaya e $C(A) \subseteq R$ então $R^{'} = C_R(R^\beta)$ é uma álgebra de Galois sobre $(R^{'})^{\beta^{'}} = C(R^\beta) = C(A)$, pois $C(R^\beta) \subseteq C(R^{'})$.*

O teorema seguinte nos dá uma caracterização para as álgebras de Galois.

Teorema 2.1.8. *Se R é uma extensão de Galois sobre R^β e $E_e^{\beta(e)} \subseteq C(E_e)$, para todo $e \in G_0$, então para cada $e \in G_0$ existem $\{v_{e,i} \mid 1 \leq i \leq m_e\}$ idempotentes dois a dois ortogonais em $C(E_e)$ e subgrupos $H_i \subset G_e$ tais que $E_e v_{e,i}$ é uma álgebra de Galois central com grupo de Galois H_i para cada $1 \leq i \leq m_e$ e $E_e = \bigoplus\limits_{i=1}^{m_e} E_e v_{e,i}$ ou $E_e = (\bigoplus\limits_{i=1}^{m_e} E_e v_{e,i}) \oplus C(E_e)v_e$, onde $v_e = 1_e - \sum\limits_{i=1}^{m_e} v_{e,i}$ e $C(E_e)v_e = E_e v_e$ é uma álgebra de Galois comutativa com grupo $G_e\mid_{C(E_e)v_e} \simeq G_e$. Neste caso,*

$$R = \bigoplus_{e\in G_0} (\bigoplus_{i=1}^{m_e} E_e v_{e,i}) \quad ou \quad R = \bigoplus_{e\in G_0} (\bigoplus_{i=1}^{m_e} E_e v_{e,i} \oplus C v_e).$$

A demonstração deste teorema é uma consequência dos resultados seguintes:

Teorema 2.1.9. *([25, Teorema 3.8]) Sejam R um anel comutativo e B uma álgebra de Galois sobre R com grupo de Galois G. Então existem idempotentes dois a dois ortogonais $\{e_i \mid 1 \leq i \leq m, \text{para algum inteiro } m\}$ em $C(B)$ e subgrupos H_i de G tais que Be_i é uma álgebra de Galois central com grupo de Galois H_i para cada $1 \leq i \leq m$ e $B = \bigoplus_{i=1}^{m} Be_i$ ou $B = \bigoplus_{i=1}^{m} Be_i \oplus Ce$, onde $e = 1 - \sum_{i=1}^{m} e_i$ e $C(B)e = Be$ é uma álgebra de Galois comutativa com grupo de Galois $G\mid_{Ce} \simeq G$.*

Lema 2.1.10. *Se R é uma extensão de Galois sobre R^β então E_e é uma extensão de Galois de $E_e^{\beta(e)}$ com grupo de Galois G_e.*

Demonstração: Se R é uma extensão de Galois de R^β então existem $x_i, y_i \in R$, $1 \leq i \leq m$ tais que:

$$\sum_{1\leq i\leq m} x_i\beta_g(y_i1_{g^{-1}}) = \delta_{g,e}1_e, \text{ para todo } e \in G_0 \text{ e } g \in G.$$

Para cada $e \in G_0$ tome $x_i' = x_i1_e$ e $y_i' = y_i1_e$. Então, para todo $g \in G_e$ temos

$$\sum_{1\leq i\leq m} x_i'\beta_g(y_i'1_{g^{-1}}) = \sum_{1\leq i\leq m} x_i1_e\beta_g(y_i1_e1_{d(g)}) = \sum_{1\leq i\leq m} x_i\beta_g(y_i1_e) = \delta_{g,e}1_e = \delta_{g,e}.$$

Portanto, E_e é uma extensão de Galois de $E_e^{\beta(e)}$. $\square$

Demonstração do Teorema 2.1.8**:**

Pela Observação 1.6.4, $R^\beta \subseteq \bigoplus_{e\in G_0} E_e^{\beta(e)}$ e por hipótese $E_e^{\beta(e)} \subseteq C(E_e)$, para todo $e \in G_0$. Logo, $R^\beta \subseteq \bigoplus_{e\in G_0} E_e^{\beta(e)} \subseteq \bigoplus_{e\in G_0} C(E_e) = C(R)$. Desta forma $R^\beta \subseteq C(R)$ e portanto R é uma álgebra de Galois sobre R^β.

Como R é uma extensão de Galois de R^β segue do Lema 2.1.10 que E_e é uma extensão de Galois sobre $E_e^{\beta(e)}$. Por hipótese $E_e^{\beta(e)} \subseteq C(E_e)$, para todo $e \in G_0$, e consequentemente E_e é uma álgebra de Galois sobre $E_e^{\beta(e)}$.

Para cada $e \in G_0$, G_e é um grupo e então pelo Teorema 2.1.9 temos que existem $\{v_{e,i} \mid 1 \leq i \leq m_e\}$ idempotentes dois a dois ortogonais em $C(E_e)$ e subgrupos $H_i \subset G_e$ tais que $E_ev_{e,i}$ é uma álgebra de Galois central com grupo de Galois H_i para cada $1 \leq i \leq m_e$ e $E_e = \bigoplus_{i=1}^{m_e} E_ev_{e,i}$ ou $E_e = (\bigoplus_{i=1}^{m_e} E_ev_{e,i}) \oplus C(E_e)v_e$, onde

$v_e = 1_e - \sum_{i=1}^{m_e} v_{e,i}$ e $C(E_e)v_e = E_e v_e$ é uma álgebra de Galois comutativa com grupo $G_e \mid_{C(E_e)v_e} \simeq G_e$.

Uma vez que $R = \bigoplus_{e \in G_0} E_e$ então

$$R = \bigoplus_{e \in G_0} (\bigoplus_{i=1}^{m_e} E_e v_{e,i}) \quad \text{ou} \quad R = \bigoplus_{e \in G_0} (\bigoplus_{i=1}^{m_e} E_e v_{e,i} \oplus C v_e).$$

□

O teorema acima nos será extremamente útil para complementar a descrição do skew anel de grupóide $A = R \star_\beta G$. Recordemos (conforme vimos na demonstração do Teorema 2.1.6) que G age sobre $R^{'} = C_R(R^\beta)$ via a restrição de β a $R^{'}$, isto é, $\beta^{'} = \beta \mid_{R'} = (\{E^{'}_g = R^{'} 1_g\}_{g \in G}, \{\beta_g \mid_{E^{'}_g}\}_{g \in G})$. Recordemos também que $R^{'} = \bigoplus_{e \in G_0} E^{'}_e$.

Teorema 2.1.11. *Se A é Azumaya com $C(A) \subset R$ e $(E^{'}_e)^{\beta^{'}_{(e)}} \subseteq C(E^{'}_e)$, para todo $e \in G_0$, então*

$$A \simeq \bigoplus_{e,f \in G_0} \bigoplus_{i,j} R^\beta \otimes_{C(A)} Hom(E^{'}_e v_{e,i}, E^{'}_f v_{f,j}), \; com \; 1 \leq i \leq m_e \; e \; 1 \leq j \leq m_f,$$

ou

$$A \simeq \bigoplus_{e,f \in G_0} R^\beta \otimes_{C(A)} Hom((\bigoplus_{i=1}^{m_e} E^{'}_e v_{e,i}) \oplus C v_e, (\bigoplus_{j=1}^{m_f} E^{'}_f v_{f,j}) \oplus C v_{f,j}).$$

Demonstração: Como A é uma álgebra de Azumaya e $C(A) \subset R$ então pelo Teorema 2.1.6 temos que

$$A \simeq R^\beta \otimes_{C(A)} (R' \star_{\beta'} G).$$

e $R^{'}$ é uma extensão de Galois de $(R^{'})^{\beta^{'}} = C(R^\beta) = C(A)$.

Pelo Teorema 1.6.9, temos que R' é um $C(A)$-módulo à direita projetivo finitamente gerado e a aplicação $j : R' \star_{\beta'} G \longrightarrow End_{C(A)}(R')$ é um isomorfismo de K-álgebras e de $C(A)$-módulos. Logo,

$$A \simeq R^\beta \otimes_{C(A)} End_{C(A)}(R').$$

Mais ainda, pelo Teorema 2.1.8 temos que

$$R' = \bigoplus_{e\in G_0}(\bigoplus_{i=1}^{m_e} E_e' v_{e,i}) \text{ ou } R' = \bigoplus_{e\in G_0}(\bigoplus_{i=1}^{m_e} E_e' v_{e,i} \oplus C v_e).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A &\simeq R^\beta \otimes_{C(A)} End_{C(A)}(\bigoplus_{e\in G_0}(\bigoplus_{i=1}^{m_e} E_e' v_{e,i})) \\ &\simeq \bigoplus_{e,f\in G_0}\bigoplus_{i,j} R^\beta \otimes_{C(A)} Hom_{C(A)}(E_e' v_{e,i}, E_f' v_{f,j}) \text{ com } 1 \le i \le m_e \text{ e } 1 \le j \le m_f, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} A &\simeq R^\beta \otimes_{C(A)} End_{C(A)}(\bigoplus_{e\in G_0}(\bigoplus_{i=1}^{m_e} E_e' v_{e,i} \oplus C v_e)) \\ &\simeq \bigoplus_{e,f\in G_0} R^\beta \otimes_{C(A)} Hom_{C(A)}((\bigoplus_{i=1}^{m_e} E_e' v_{e,i}) \oplus C v_e, (\bigoplus_{j=1}^{m_f} E_f' v_{f,j}) \oplus C v_{f,j}) \end{aligned}$$

. □

2.2 Ação de G sobre $R\star_\beta G$ e estruturas relacionadas

Dividimos esta seção em duas subseções. Na primeira investigamos condições necessárias e suficientes sob as quais uma ação de um grupóide finito G sobre uma K-álgebra unitária R induz uma ação de G sobre o skew anel de grupóide $A = R\star_\beta G$. Também investigamos quando o skew anel de grupóide é uma extensão de Galois de sua parte fixa pela respectiva ação de G. Esses resultados foram inspirados em [24]. Agora, uma vez que G age sobre A então podemos construir o skew do skew. Na segunda subseção mostraremos que este duplo skew é, na realidade, ainda um skew.

2.2.1 Skew anéis de grupóide que são extensões de Galois

Em [24] Szeto e Xue mostram que se G é um grupo finito agindo por automorfismos sobre um anel R então podemos induzir uma ação de G sobre o skew anel de grupo $(R \star G)$. Mais ainda, os autores mostram que R é uma extensão de Galois de R^G (o subanel dos elementos invariantes pela ação de G) se e somente se $R \star G$ é uma extensão de Galois de sua parte fixa pela respectiva ação de G. Nosso objetvo nesta seção é generalizar estes resultados para o caso de ação de grupóide. Mais explicitamente, consideremos o grupo dos automorfismos internos $G^{'}$ de $R \star G$ induzidos pelos elementos de G, isto é, $g^{'}(x) = gxg^{-1}$, para todo $g \in G$ e $x \in R \star G$. É fácil ver que a restrição de $G^{'}$ à R coincide com G. Logo, é claro que se R é uma extensão de Galois de R^G então $R \star G$ é uma extensão de Galois de $(R \star G)^{G^{'}}$ com as mesmas constantes de Galois. Além disso, Szeto e Xue mostram em [24] que a recíproca também vale, ou seja,

Teorema 2.2.1. *([24, Teorema 3.1]) Se $R\star G$ é uma extensão de Galois de $(R\star G)^{G^{'}}$ então R é uma extensão de Galois de R^G.*

Iniciaremos exibindo condições necessárias e suficientes sobre o grupóide G sob as quais uma ação de G sobre uma K-álgebra R induz uma ação de G sobre $A = R\star_\beta G$.

Vamos trabalhar na seguinte situação: G um grupóide finito, R uma álgebra com unidade sobre um anel comutativo K e $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ é uma ação de G sobre R tal que para cada $e \in G_0$, E_e tem unidade e $R = \bigoplus_{e\in G_0} E_e$.

Queremos construir uma ação do grupóide G sobre $A = R \star_\beta G$. Faremos isto de forma gradativa. Começaremos por definir para cada $x \in A$ e $g \in G$ a seguinte aplicação:

$$\beta^*_g(x) := 1_g\delta_g x 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}.$$

Note primeiramente que, tomando $x = r_h\delta_h \in A$ temos

$$(1_g\delta_g)(r_h\delta_h) = \begin{cases} \beta_g(r_h 1_{g^{-1}})\delta_{gh}, \text{ se } (g,h) \in G^2 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha que $(g,h) \in G^2$, isto é, $d(g) = r(h)$ então

$$(1_g\delta_g)(r_h\delta_h)(1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}) = \begin{cases} \beta_g(r_h 1_{g^{-1}})\beta_{gh}(1_{g^{-1}}1_{(gh)^{-1}})\delta_{ghg^{-1}}, \text{ se } (gh,g^{-1}) \in G^2 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, $(gh, g^{-1}) \in G^2$ se e somente se $d(h) = d(gh) = r(g^{-1}) = d(g)$. Além disso, sabemos que $E_{g^{-1}} = E_{d(g)}$, para todo $g \in G$, e se $h \in G_{d(g)}$ então $E_{(gh)^{-1}} = E_{d(gh)} = E_{d(h)} = E_{d(g)} = E_{g^{-1}}$. Assim, $1_{g^{-1}} = 1_{(gh)^{-1}}$ e $\beta_{gh}(1_{g^{-1}}1_{(gh)^{-1}}) =$

$\beta_{gh}(1_{(gh)^{-1}}) = 1_{gh}$. Mas, $E_{gh} = E_{r(gh)} = E_{r(g)} = E_g$, daí $1_{gh} = 1_g$. Logo, $\beta_{gh}(1_{(gh)^{-1}}) = 1_{gh} = 1_g$. Desta forma, obtemos

$$\beta_g^*(r_h\delta_h) = \begin{cases} \beta_g(r_h 1_{g^{-1}})\delta_{ghg^{-1}}, \text{ se } h \in G_{d(g)} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que, $\beta_g(r_h 1_{g^{-1}}) \in E_g = E_{r(g)}$, $r(ghg^{-1}) = r(g)$ e $d(ghg^{-1}) = d(g^{-1}) = r(g)$. Assim, $ghg^{-1} \in G_{r(g)}$ e desta forma $\beta_g^*(r_h\delta_h) \in E_{r(g)} \star_{\beta_{(r(g))}} G_{r(g)}$.

Em geral, $A_e = E_e \star_{\beta_(e)} G_e$ não é um ideal de A, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.2.2. *Seja $G = \{g, g^{-1}, r(g), d(g)\}$ e $R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4$, onde K é um anel comutativo e e_1, e_2, e_3, e_4 são idempotentes centrais dois a dois ortogonais com soma 1_R. Tome $E_g = Ke_3 \oplus Ke_4$, $E_{g^{-1}} = Ke_1 \oplus Ke_2$, $E_{r(g)} = Ke_3 \oplus Ke_4$, $E_{d(g)} = Ke_1 \oplus Ke_2$, $\beta_{r(g)} = Id_{E_{r(g)}}$, $\beta_{d(g)} = Id_{E_{d(g)}}$, $\beta_g(xe_1 + ye_2) = xe_3 + ye_4$, $\beta_{g^{-1}}(xe_3 + ye_4) = xe_1 + ye_2$ e note que $\beta = (\{E_h\}_{h\in G}, \{\beta_h\}_{h\in G})$ é uma ação de G sobre R. Além disso, é fácil verificar que $A_{r(g)}$ não é um ideal de A.*

Dados $x, y \in A$ nem sempre $\beta_g^*(xy) = \beta_g^*(x)\beta_g^*(y)$, para todo $g \in G$ como mostra o seguinte exemplo

Exemplo 2.2.3. *Considere G, R e β como no exemplo acima. Então temos que*

$$\beta_{r(g)}^*((r_g\delta_g)(r_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}})) = \beta_{r(g)}^*(r_g\beta_g(r_{g^{-1}})\delta_{r(g)}) = \beta_{r(g)}(r_g\beta_g(r_{g^{-1}}))\delta_{r(g)} = r_g\beta_g(r_{g^{-1}})\delta_{r(g)}.$$

Por outro lado, $\beta_{r(g)}^*(r_g\delta_g) = 0 = \beta_{r(g)}^*(r_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}})$. Portanto,

$$\beta_{r(g)}^*((r_g\delta_g)(r_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}})) = r_g\beta_g(r_{g^{-1}})\delta_{r(g)} \neq 0 = \beta_{r(g)}^*(r_g\delta_g)\beta_{r(g)}^*(r_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}).$$

A próxima proposição exibe condições necessárias e suficientes sobre o grupóide G, sob as quais $\beta_g^*(xy) = \beta_g^*(x)\beta_g^*(y)$, para todo $x, y \in A$ e para todo $g \in G$.

Proposição 2.2.4. *Para todo $g \in G$, $\beta_g^* \in End(A)$ se e somente se o grupóide G satisfaz a seguinte condição: $g, h \in G_e$, para algum $e \in G_0$ se e somente se $gh \in G_e$.*

Demonstração: Sejam $g \in G$, $x_h\delta_h$ e $y_l\delta_l \in A$. Suponha que $d(h) = r(l)$, isto é, $(h, l) \in G^2$. Assim, $(x_h\delta_h)(y_l\delta_l) = x_h\beta_h(y_l 1_{h^{-1}})\delta_{hl}$. Então pela definição de β_g^* temos que

$$\beta_g^*((x_h\delta_h)(y_l\delta_l)) = \begin{cases} \beta_g(x_h\beta_h(y_l 1_{h^{-1}})1_{g^{-1}})\delta_{ghlg^{-1}}, \text{ se } hl \in G_{d(g)} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\beta_g^*(x_h\delta_h) = \begin{cases} \beta_g(x_h 1_{g^{-1}})\delta_{ghg^{-1}}, \text{ se } h \in G_{d(g)} \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$\beta_g^*(y_l\delta_l) = \begin{cases} \beta_g(y_l 1_{g^{-1}})\delta_{glg^{-1}}, \text{ se } l \in G_{d(g)} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha que $h, l \in G_{d(g)}$ (isto é, d(h)=r(h)=d(l)=r(l)=d(g)). Então,

$$\begin{aligned} \beta_g^*(x_h\delta_h)\beta_g^*(y_l\delta_l) &= \beta_g(x_h 1_{g^{-1}})\delta_{ghg^{-1}}\beta_g(y_l 1_{g^{-1}})\delta_{glg^{-1}} \\ &= \beta_g(x_h 1_{g^{-1}})\beta_{ghg^{-1}}(\beta_g(y_l 1_{g^{-1}})1_{(ghg^{-1})^{-1}})\delta_{ghg^{-1}glg^{-1}}. \end{aligned}$$

Agora como $E_{(ghg^{-1})^{-1}} = E_{d(ghg^{-1})} = E_{d(g^{-1})} = E_{r(g)} = E_g$ então $1_{(ghg^{-1})^{-1}} = 1_g$. Daí,

$$\begin{aligned} \beta_g^*(x_h\delta_h)\beta_g^*(y_l\delta_l) &= \beta_g(x_h 1_{g^{-1}})\beta_{ghg^{-1}}(\beta_g(y_l 1_{g^{-1}}))\delta_{ghd(g)lg^{-1}} \\ &= \beta_g(x_h 1_{g^{-1}})\beta_{gh}(y_l 1_{g^{-1}})\delta_{ghlg^{-1}}. \end{aligned}$$

Note que, $y_l 1_{g^{-1}} \in E_l \cap E_{g^{-1}} = E_{r(l)} \cap E_{d(g)} = E_{d(g)} = E_{d(h)} = E_{h^{-1}}$ e $E_{g^{-1}} = E_{d(g)} = E_{d(h)} = E_{h^{-1}}$, e assim $1_{g^{-1}} = 1_{h^{-1}}$. Logo,

$$\beta_g^*(x_h\delta_h)\beta_g^*(y_l\delta_l) = \beta_g(x_h\beta_h(y_l 1_{g^{-1}})1_{g^{-1}})\delta_{ghlg^{-1}}.$$

Portanto,

$$\beta_g^*(x_h\delta_h)\beta_g^*(y_l\delta_l) = \begin{cases} \beta_g(x_h\beta_h(y_l 1_{h^{-1}})1_{g^{-1}})\delta_{ghlg^{-1}}, \text{ se } h, l \in G_{d(g)} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $\beta_g^*((x_h\delta_h)(y_l\delta_l)) = \beta_g^*(x_h\delta_h)\beta_g^*(y_l\delta_l)$ se e somente se a seguinte condição é satisfeita: $h, l \in G_{d(g)}$ se e somente se $hl \in G_{d(g)}$. Uma vez que podemos considerar $G_0 = \{d(g) \mid g \in G\}$ o resultado está provado. □

O próximo lema dá uma condição equivalente para que o grupóide G satisfaça a propriedade requerida na Proposição 2.2.4. Essa caracterização será muito importante no que segue.

Lema 2.2.5. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) G satisfaz: $g,h \in G_e$, para algum $e \in G_0$ se e somente se $gh \in G_e$,

(2) Todo elemento $g \in G$ pertence a G_e, para algum $e \in G_0$. Neste caso, G é a união disjunta dos G_e's, $G = \bigcup_{e \in G_0} G_e$.

Demonstração: (1) $\Longrightarrow$ (2) Suponha que $g,h \in G_e$ para algum $e \in G_0$ se e somente se $gh \in G_0$. Seja $l \in G$ então, $r(l) = ll^{-1} \in G_{r(l)}$. Assim, pela hipótese, segue que $l \in G_{r(l)}$ e claramente $r(l) \in G_0$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Suponha que todo elemento $g \in G$ pertence a G_e, para algum $e \in G_0$. Mostremos que (1) vale. De fato, sejam $g,h \in G_e$, para algum $e \in G_0$. Logo, $d(g) = r(g) = e = d(h) = r(h)$. Como $d(gh) = d(h) = e = r(g) = r(gh)$ então $gh \in G_e$.

Reciprocamente, sejam $g,h \in G$ tais que $gh \in G_e$, para algum $e \in G_0$. Daí, $d(gh) = r(gh) = e$. Mas, $d(gh) = d(h)$ e $r(gh) = r(g)$. Assim, $d(h) = e = r(g)$. Porém, como $g,h \in G$ então, por hipótese, $g \in G_{f_1}$ e $h \in G_{f_2}$, com $f_1, f_2 \in G_0$. Desta forma, como $d(h) = e = r(g)$ segue que $f_1 = f_2 = e$. Portanto, $g,h \in G_e$. $\square$

Nesta seção estamos tratando de grupóides finitos, porém o Lema 2.2.5 vale para um grupóide qualquer, não necessariamente finito. Claramente o grupóide dado no Exemplo 1.1.10 satisfaz as condições equivalentes do Lema 2.2.5, assim como o exemplo a seguir.

Exemplo 2.2.6. *Seja $G = \{1, 2, \cdots, n\}$, com $G^2 = \{(i,i) \mid i \in G\}$ e $ii = i = i^{-1}$. Então é imediato que G é um grupóide satisfazendo as condições equivalentes do Lema 2.2.5.*

Recordemos (seção 3 do capítulo 1) que $\beta_{(e)} = (\{E_g\}_{g \in G_e}, \{\beta_g\}_{g \in G_e})$ é uma ação do grupo G_e sobre o anel E_e, onde $E_g = E_{r(g)} = E_e$, para todo $g \in G_e$ e que $A_e = E_e \star_{\beta_{(e)}} G_e = \bigoplus_{g \in G_e} E_e \delta_g$ é o skew anel de grupo correspondente. O resultado abaixo mostra, entre outras coisas, que se $G = \bigcup_{e \in G_0} G_e$ então A_e é um ideal de A.

Lema 2.2.7. *Se $G = \bigcup_{e \in G_0} G_e$ então*

(1) A_e é um ideal de A,

(2) $A = \bigoplus_{e \in G_0} A_e$,

(3) A_e tem unidade $1_e\delta_e$.

Demonstração: (1) Sejam $x = r_g\delta_g \in A_e$ e $y = r_h\delta_h \in A$. Então, $g \in G_e$ e $h \in G$. Mas, como $G = \bigcup_{e\in G_0} G_e$ então $h \in G_f$, para algum $f \in G_0$. Assim,

$$xy = (r_g\delta_h)(r_h\delta_h) = \begin{cases} r_g\beta_g(r_h 1_{g^{-1}})\delta_{gh}, & \text{se } (g,h) \in G^2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $(g,h) \in G^2$ se e somente se $d(g) = r(h) = e$. Daí, $e = f$. Desta forma,

$$xy = (r_g\delta_h g)(r_h\delta_h) = \begin{cases} r_g\beta_g(r_h 1_{g^{-1}})\delta_{gh}, & \text{se } e = f \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em ambos os casos temos que $xy \in A_e$, uma vez que E_e é um ideal de R, e se $g, h \in G_e$ então $gh \in G_e$. Analogamente, $yx \in A_e$. Portanto, A_e é um ideal de A.
(2) Basta notarmos que, neste caso, $A = \bigoplus_{g\in G} E_g\delta_g = \bigoplus_{e\in G_0} (\bigoplus_{g\in G_e} E_g\delta_g) = \bigoplus_{e\in G_0} A_e$.
(3) É fácil verificar que $1_e\delta_e$ é unidade de A_e para todo $e \in G_0$. □

No restante deste capítulo vamos supor que $G = \bigcup_{e\in G_0} G_e$. Nestas condições a ação de G sobre A esta dada na proposição seguinte.

Proposição 2.2.8. *O par $\beta^* = (\{A_g\}_{g\in G}, \{\beta_g^*\}_{g\in G})$ é uma ação de G sobre A, onde para cada $g \in G$, $A_g := A_{r(g)}$ e $\beta_g^* : A_{d(g)} \longrightarrow A_{r(g)}$ dada por $\beta_g^*(r_h\delta_h) = \beta_g(r_h)\delta_{ghg^{-1}}$. Além disso, $A = \bigoplus_{e\in G_0} A_e$ e $\beta^* |_R = \beta$.*

Demonstração: Sabemos pelo Lema 2.2.7 (1) e (3) que para cada $g \in G$, $A_{r(g)}$ é um ideal unitário de A com elemento identidade dado por $1_{r(g)}\delta_{r(g)}$. Mais ainda, pela Proposição 2.2.4 temos que $\beta_g^*(xy) = \beta_g^*(x)\beta_g^*(y)$, para todo $x, y \in A_{d(g)}$ para todo $g \in G$. Logo, β_g^* é um homomorfismo de K-álgebras. Para vermos que β_g^* é um isomorfismo de K-álgebras basta observarmos que $\beta_g^*\beta_{g^{-1}}^* = I_{A_{r(g)}}$ e $\beta_{g^{-1}}^*\beta_g^* = I_{A_{d(g)}}$. Neste caso, como $g \in G_e$, para algum $e \in g_0$ então $d(g) = e = r(g)$. Assim, $\beta_g^* : A_e \longrightarrow A_e$.

Agora, note que dado $r_h\delta_h \in A_e$ temos que

$$\beta_e^*(r_h\delta_h) = \beta_e(r_h 1_e)\delta_{ehe} = r_h\delta_h,$$

pois $h \in G_e$. Logo, $\beta^*_e = I_{A_e}$, para todo $e \in G_0$.

Sejam $g, h \in G$ tais que $(g, h) \in G^2$, isto é, $g, h \in G_e$, para algum $e \in G_0$. Então, dado $r_l\delta_l \in A_e$ temos

$$\beta^*_g(\beta^*_h(r_l\delta_l)) = \beta^*_g(\beta_h(r_l 1_{h^{-1}})\delta_{hlh^{-1}}) = \beta_g(\beta_h(r_l 1_{h^{-1}})1_{g^{-1}})\delta_{ghlh^{-1}g^{-1}}.$$

Mas, $r_l \in E_l$ e $E_{h^{-1}} = E_{d(h)} = E_e$. Assim, $r_l 1_{h^{-1}} = r_l 1_e = r_l$. Mais ainda, $\beta(r_l) \in E_h = E_{r(h)} = E_{(g)} = E_{g^{-1}}$. Logo, $\beta_h(r_l)1_{g^{-1}} = \beta_h(r_l)$. Então,

$$\beta^*_g(\beta^*_h(r_l\delta_l)) = \beta_g(\beta_h(r_l))\delta_{ghl(gh)^{-1}} = \beta_{gh}(r_l)\delta_{ghl(gh)^{-1}} = \beta^*_{gh}(r_l\delta_l).$$

Portanto, β^* é uma ação de G sobre A. Pelo Lema 2.2.7 (2) temos que $A = \bigoplus_{e \in G_0} A_e$.

Finalmente, sejam $r \in R$ e $g \in G$ Então, $r = \sum_{f \in G_0} r 1_f \delta_f$ e $g \in G_e$, para algum $e \in G_0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\beta^*_g(\sum_{f \in G_0} r 1_f \delta_f 1_e \delta_e) &= \beta^*_g(r 1_e \delta_e) = \beta_g(r 1_e 1_{g^{-1}})\delta_{geg^{-1}} \\
&= \beta_g(r 1_{g^{-1}})\delta_{gg^{-1}} = \beta_g(r 1_{g^{-1}})\delta_{r(g)} \\
&= \beta_g(r 1_{g^{-1}})\delta_e.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\beta_g(r 1_{g^{-1}})$ pode ser visto em A da seguinte forma:

$$\beta_g(r 1_{g^{-1}}) \sum_{e \in G_0} 1_e \delta_e = \sum_{e \in G_0} \beta_g(r 1_{g^{-1}}) 1_e \delta_e = \beta_g(r 1_{g^{-1}})\delta_{r(g)} = \beta_g(r 1_{g^{-1}})\delta_e,$$

pois $\beta_g(r 1_{g^{-1}})1_e \in E_g \cap E_e = E_{r(g)} \cap E_e$ e $R = \bigoplus_{e \in G_0} E_e$. Portanto, $\beta^* |_R = \beta$. □

Definimos, o subanel dos elementos invariantes de A sobre a ação β^* por

$$A^{\beta^*} = \{x \in A \mid \beta^*_g(x 1_{d(g)}\delta_{d(g)}) = x 1_{r(g)}\delta_{r(g)}, \text{para todo } g \in G\}.$$

Como consequência imediata do que vimos acima temos que se R é uma extensão de Galois de R^β então A é uma extensão de Galois de A^{β^*}. A seguir veremos alguns lemas que vão nos permitir provar a recíproca disto. O próximo lema mostra a relação existente entre R^β (resp., A^{β^*}) e $\bigoplus_{e \in G_0} E_e^{\beta_{(e)}}$ (resp., $\bigoplus_{e \in G_0} A_e^{\beta^*_{(e)}}$).

Lema 2.2.9. *As seguintes afirmações valem:*

(1) $R^{\beta} = \bigoplus_{e \in G_0} E_e^{\beta(e)}$,

(2) $A^{\beta^*} = \bigoplus_{e \in G_0} A_e^{\beta^*_{(e)}}$.

Demonstração: (1) Seja $x = \sum_{e \in G_0} x_e \in R^{\beta}$. Assim, $\beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g$, para todo $g \in G$. Isso implica que $\beta(x_{d(g)}) = x_{r(g)}$, para todo $g \in G$. Mas, $G = \bigcup_{e \in G_0} G_e$ e então $g \in G_e$, para algum $e \in G_0$. Logo, $d(g) = e = r(g)$ e $\beta_g(x_e) = x_e$, para todo $g \in G$. Em particular, $\beta_h(x_e) = x_e$, para todo $h \in G_e$. Desta forma, $x_e \in E_e^{\beta(e)}$, para todo $e \in G_0$. Portanto, $x = \sum_{e \in G_0} x_e \in \sum_{e \in G_0} E_e^{\beta(e)}$.

Reciprocamente, seja $x_e \in E_e^{\beta(e)}$. Mostremos que $x_e \in R^{\beta}$. Seja $g \in G = \bigcup_{e \in G_0} G_e$, o que implica que $g \in G_f$, para algum $f \in G_0$. Se $e = f$ então $g \in G_e$. Daí, $\beta_g(x_e 1_{g^{-1}}) = \beta_g(x_e) = x_e 1_g = x_e$. Agora, se $e \neq f$ então $x_e 1_{g^{-1}}, x_e 1_g \in E_e \cap E_f = \{0\}$. Donde segue que $\beta_g(x_e 1_{g^{-1}}) = \beta_g(0) = 0 = x_e 1_g$. Portanto, $\beta_g(x_e 1_{g^{-1}}) = x_e 1_g$, para todo $g \in G$, e assim $x_e \in R^{\beta}$.

(2) Decorre da Proposição 2.2.8 e de (1). □

Já sabíamos pela Observação 1.6.4 que $R \subset \bigoplus_{e \in G_0} E_e^{\beta(e)}$ no lema anterior mostramos que se $G = \bigcap_{e \in G_0} G_e$ então vale a igualdade.

Lema 2.2.10. *Se A é uma extensão de Galois de A^{β^*} então A_e é uma extensão de Galois de $A_e^{\beta^*_{(e)}}$, para todo $e \in G_0$.*

Demonstração: Decorre da Proposição 2.2.8 e do Lema 2.1.10. □

Teorema 2.2.11. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) R é uma extensão de Galois de R^{β},

(2) A é uma extensão de Galois de A^{β^*}.

Demonstração: (1) $\Longrightarrow$ (2) Já visto.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Se A é uma extensão de Galois de A^{β^*} então pelo Lema 2.2.10 temos que A_e é uma extensão de Galois de $A_e^{\beta^*_{(e)}}$. Como, para cada $e \in G_0$, G_e é um grupo então pelo Teorema 2.2.1 temos que E_e é uma extensão de Galois de $E_e^{\beta_{(e)}}$. Logo, para cada $e \in G_0$ existem $\{x_{e,i}, y_{e,i} \in E_e \mid 1 \leq i \leq n\}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} x_{e,i}\beta_g(y_{e,i}) = \delta_{g,e}1_e, \text{ para todo } g \in G_e.$$

Considere, $x_i = \sum_{e \in G_0} x_{e,i} \in R$ e $y_i = \sum_{e \in G_0} y_{e,i} \in R$, $1 \leq i \leq n$. Mostremos que $\{x_i, y_i \in R \mid 1 \leq i \leq n\}$ são as coordenadas de Galois de R sobre R^{β}. Observe primeiramente que, $x_i 1_g = (\sum_{e \in G_0} x_{e,i})1_{r(g)} = x_{r(g),i}$ e $y_i 1_{g^{-1}} = (\sum_{e \in G_0} y_{e,i})1_{d(g)} = y_{d(g),i}$. Agora, seja $g \in G$ então $g \in G_f$, para algum $f \in G_0$. Então, $d(g) = f = r(g)$ e daí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_g(y_i 1_{g^{-1}}) &= \sum_{i=1}^{n} x 1_g \beta_g(y 1_{d(g)}) = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{r(g)}\beta_g(y_i 1_f) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i 1_f \beta_g(y_{f,i}) = \sum_{i=1}^{n} x_{f,i}\beta_g(y_{f,i}) = \delta_{g,f}1_f\end{aligned}$$

para todo $g \in G$ e $f \in G_0$. Portanto, R é uma extensão de Galois de R^{β}. $\square$

Observação 2.2.12. *Com isso mostramos que a generalização do Teorema 2.2.1 de Szeto e Xue só é possível no caso em que G é a união disjunta de seus grupos principais.*

2.2.2 O Duplo Skew Anel de Grupóide

Sejam G, R e β como na seção anterior. Então sabemos que

$$\beta^* = (\{A_g\}_{g \in G}, \{\beta^*_g\}_{g \in G})$$

é uma ação de G sobre A. Por conseguinte, podemos construir o skew anel de grupóide, $A \star_{\beta^*} G = \bigoplus_{g \in G} A_g \delta^*_g$, onde δ^*_g's são símbolos, a soma é usual e a multiplicação é definida naturalmente por:

$$(x_g\delta_g\delta^*_{g'})(y_h\delta_h\delta^*_{h'}) = \begin{cases} x_g\delta_g\beta^*_{g'}(y_h\delta_h 1_{d(g')}\delta_{d(g')}))\delta^*_{g'h'}, & \text{se } (g', h') \in G^2 \\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Como $G = \bigcup_{e \in G_0} G_e$ então $(g^{'}, h^{'}) \in G^2$ se e somente se $g^{'}, h^{'} \in G_e$, para algum $e \in G_0$. Suponha que $(g^{'}, h^{'}) \in G^2$. Em particular, $d(g^{'}) = e$ e, neste caso, temos que

$$(x_g \delta_g \delta^*_{g'})(y_h \delta_h \delta^*_{h'}) = x_g \delta_g \beta^*_{g'}(y_h \delta_h 1_e \delta_e) \delta^*_{g'h'}.$$

Agora, observe que

$$y_h \delta_h 1_e \delta_e = \begin{cases} y_h \delta_h, \text{ se } e = d(h) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Mas, $h \in G = \bigcup_{e \in G_0} G_e$ assim, $e = d(h)$ se e somente se $h \in G_e$. Portanto,

$$(x_g \delta_g \delta^*_{g'})(y_h \delta_h \delta^*_{h'}) = \begin{cases} x_g \delta_g \beta^*_{g'}(y_h \delta_h) \delta^*_{g'h'}, \text{ se } g^{'}, h^{'} \text{ e } h \in G_e \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

No caso em que $g^{'}, h^{'}$ e $h \in G_e$, em particular, temos que $d(g^{'}) = e$ e $h \in G_{d(g^{'})}$. Logo,

$$(x_g \delta_g \delta^*_{g'})(y_h \delta_h \delta^*_{h'}) = \begin{cases} x_g \delta_g \beta_{g'}(y_h 1_{(g')^{-1}}) \delta_{g'h(g')^{-1}} \delta^*_{g'h'}, \text{ se } g^{'}, h^{'} \text{ e } h \in G_e \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, observe que $y_h \in E_h = E_{r(h)} = E_e$ e $1_{(g')^{-1}} = 1_{d(g')} = 1_e$. Assim, $y_h 1_{(g')^{-1}} = y_h$ e

$$x_g \delta_g \beta_{g'}(y_h 1_{(g')^{-1}}) \delta_{g'h(g')^{-1}} = \begin{cases} x_g \beta_g(\beta_{g'}(y_h) 1_{g^{-1}}) \delta_{gg'h(g')^{-1}}, \text{ se } e = d(g) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Novamente temos que $e = d(g)$ se e somente se $g \in G_e$. Além disso, se $g \in G_e$ então $1_{g^{-1}} = 1_e$ e, neste caso, segue que $y_h 1_{g^{-1}} = y_h$.

Assim, do que vimos acima podemos concluir que

$$(x_g \delta_g \delta^*_{g'})(y_h \delta_h \delta^*_{h'}) = \begin{cases} x_g \beta_{gg'}(y_h) \delta_{gg'h(g')^{-1}} \delta^*_{g'h'}, \text{ se } g, h, g^{'}, h^{'} \in G_e \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 2.2.13. *Sejam G e H grupóides. Uma aplicação $\theta : G \longrightarrow H$ é chamada um homomorfismo de grupóides se:*

$$\theta(gh) = \theta(g)\theta(h), \text{ para todo } (g,h) \in G^2.$$

Observação 2.2.14. *Seja $\theta : G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupóides então*

(1) $\theta(d(g)) = d(\theta(g))$ *e* $\theta(r(g)) = r(\theta(g))$,

(2) $\theta(g)^{-1} = \theta(g^{-1})$.

De fato, $\theta(g) = \theta(gd(g)) = \theta(g)\theta(d(g))$. *Logo,* $\theta(d(g)) = d(\theta(g))$. *Analogamente,* $\theta(r(g)) = r(\theta(g))$. *Finalmente,* $d(\theta(g)) = \theta(d(g)) = \theta(g^{-1}g) = \theta(g^{-1})\theta(g)$ *e* $r(\theta(g)) = \theta(r(g)) = \theta(gg^{-1}) = \theta(g)\theta(g^{-1})$. *Portanto,* $\theta(g)^{-1} = \theta(g^{-1})$. □

Para cada $e \in G_0$, $g \in G_e$ denotemos θ^e_g o automorfismo interno de G_e, isto é, $\theta^e_g(h) = ghg^{-1}$, para todo $h \in G_e$. Claramente, a aplicação $\theta^e : G_e \longrightarrow Aut(G_e)$ dada por $\theta^e(g) = \theta^e_g$ é um homorfismo de grupos. Veremos no lema a seguir que a aplicação $\theta : \bigcup_{e\in G_0} G_e \longrightarrow \bigcup_{e\in G_0} Aut(G_e)$ é claramente um homomorfismo de grupóides, pois: $\theta(gh) = \theta^e_{gh} = \theta^e_g\theta^e_h = \theta(g)\theta(h)$, para todo $(g,h) \in G^2$.

Para cada $e \in G_0$ temos que $G_e \rtimes_{\theta^e} G_e$ é um grupo com multiplicação dada por $(g,h)(l,k) = (g\theta^e_h(l), hk)$.

Para cada $(g,h) \in G_e \rtimes_{\theta^e} G_e$ consideremos $\gamma^e_{(g,h)} : E_e \longrightarrow E_e$ dada por $\gamma^e_{(g,h)}(r) = \beta_{gh}(r)$, para todo $r \in E_e$. Claramente, $\gamma^e_{(g,h)} \in Aut(E_e)$.

Lema 2.2.15. *A aplicação $\gamma^e : G_e \rtimes_{\theta^e} G_e \longrightarrow Aut(E_e)$ definida por $\gamma^e(g,h) = \gamma^e_{(g,h)}$, para todo $(g,h) \in G_e \rtimes_{\theta^e} G_e$ é um homomorfismo de grupos. Isto é, γ^e é uma ação de $G_e \rtimes_{\theta^e} G_e$ sobre E_e.*

Demonstração: Note que $\gamma^e_{(e,e)} = \beta_{ee} = \beta_e = I_{E_e}$, para todo $e \in G_0$. Agora, sejam $((g,g'),(h,h')) \in G_e \rtimes_{\theta^e} G_e$ então

$$\begin{aligned}\gamma^e_{[(g,g')(h,h')]} &= \gamma^e_{(g\theta^e_{g'}(h),g'h')} = \beta_{g\theta^e_{g'}(h)g'h'} = \beta_{gg'h(g')^{-1}g'h'} \\ &= \beta_{gg'hd(g')h'} = \beta_{gg'heh'} = \beta_{gg'hh'} = \beta_{gg'}\beta_{hh'} = \gamma^e_{(g,g')}\gamma^e_{(h,h')}.\end{aligned}$$

□

Denotemos por $\widetilde{G} = \bigcup_{e\in G_0} G_e \rtimes_{\theta^e} G_e$. Pelo Lema 2.2.5 temos que $\widetilde{G}$ é um grupóide satisfazendo:

$$(g,g'),(h,h') \in G_e \rtimes_{\theta^e} G_e \text{ se e somente se } (g,g')(h,h') \in G_e \rtimes_{\theta^e} G_e.$$

Além disso, se $(g,h) \in \widetilde{G}$ então $(g,h) \in G_e \rtimes_{\theta^e} G_e$, para algum $e \in G_0$. Logo, $g,h \in G_e$ e $r(g,h) = (e,e) = d(g,h)$.

Proposição 2.2.16. *O par* $\gamma = (\{E_{(g,h)}\}_{(g,h)\in\widetilde{G}}, \{\gamma_{(g,h)}\}_{(g,h)\in\widetilde{G}})$ *com* $E_{(g,h)} = E_e$ *e* $\gamma_{(g,h)} = \gamma^e_{(g,h)}$ *é uma ação de* $\widetilde{G}$ *sobre* R*, para todo* $e \in G_0$ *tal que* $(g,h) \in G_e \rtimes_{\theta^e} G_e$.

Demonstração: Seja $(g,h) \in \widetilde{G}$ então $(g,h) \in G_e \rtimes_{\theta^e} G_e$, para algum $e \in G_0$. Logo, $g,h \in G_e$ e daí como β é uma ação de G sobre R temos que $E_e = E_{(g,h)}$ é um ideal unitário de R com elemento identidade 1_e. Como $r(g,h) = (e,e)$ então $E_{(g,h)} = E_{r(g,h)}$. Além disso, claramente $\gamma_{(g,h)} = \gamma^e_{(g,h)}$ é um isomorfismo de K-álgebras. Como $[(g,g^{'}),(h,h^{'})] \in \widetilde{G}$ se e somente se $(g,g^{'}),(h,h^{'}) \in G_e \rtimes_{\theta^e} G_e$, para algum $e \in G_0$, então segue imediatamente do Lema 2.2.15 que:

$$\gamma_{(e,e)} = I_{E_e} \ \text{ e } \ \gamma_{[(g,g')(h,h')]} = \gamma_{(g,g')}\gamma_{(h,h')}.$$

Portanto, γ é uma ação de $\widetilde{G}$ sobre R. $\square$

Como pela Proposição 2.2.16 γ é uma ação de $\widetilde{G}$ sobre a K-álgebra R podemos construir o skew anel de grupóide $R \star_\gamma \widetilde{G}$. Sejam $x\delta_{(g,g')}$, $y\delta_{(h,h')} \in R \star_\gamma \widetilde{G}$, com $x \in E_{(g,g')}$ e $y \in E_{(h,h')}$. Então, $(g,g^{'}) \in G_e \rtimes_{\theta^e} G_e$ e $(h,h^{'}) \in G_f \rtimes_{\theta^f} G_f$, com $e,f \in G_0$. Assim,

$$(x\delta_{(g,g')})(y\delta_{(h,h')}) = \begin{cases} x\gamma^e_{(g,g')}(y1_e)\delta_{(g,g')(h,h')}, \text{ se } [(g,g^{'}),(h,h^{'})] \in \widetilde{G}^2 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Mas, $[(g,g^{'}),(h,h^{'})] \in \widetilde{G}^2$ se e somente se $(g,g^{'})$, $(h,h^{'}) \in G_e \rtimes_{\theta^e} G_e$, isto é, se $e = f$. Isto ocorre se e somente se $g,g^{'},h,h^{'} \in G_e$. Suponha que $g,g^{'},h,h^{'} \in G_e$. Assim,

$$\begin{aligned}(x\delta_{(g,g')})(y\delta_{(h,h')}) &= x\gamma^e_{(g,g')}(y1_e)\delta_{(g\theta^e_{g'}(h),g'h')} \\ &= x\beta_{gg'}(y1_e)\delta_{(gg'h(g')^{-1},g'h')}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(x\delta_{(g,g')})(y\delta_{(h,h')}) = \begin{cases} x\beta_{gg'}(y1_e)\delta_{(gg'h(g')^{-1},g'h')}, \text{ se } g,h,g^{'},h^{'} \in G_e \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema 2.2.17. *A aplicação $\psi : (R\star_\beta G)\star_{\beta^*} G \longrightarrow R\star_\gamma \widetilde{G}$ definida por $\psi(r\delta_g\delta^*_{g'}) = r\delta_{(g,g')}$, para todo $g, g^{'} \in G$ e $r \in E_g$, é um isomorfismo de K-álgebras unitárias.*

Demonstração: Sejam $x_g\delta_g\delta^*_{g'}$, $y_h\delta_h\delta^*_{h'} \in (R \star_\beta G) \star_{\beta^*} G$. Então,

$$\psi((x_g\delta_g\delta^*_{g'})(y_h\delta_h\delta^*_{h'})) = \begin{cases} \psi(x_g\beta_g(\beta_{g'}(y_h))\delta_{gg'h(g')^{-1}}\delta^*_{g'h'}), \text{ se } g,h,g^{'},h^{'} \in G_e \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha que $g, g^{'}, h, h^{'} \in G_e$, para algum $e \in G_0$. Daí,

$$\begin{aligned} \psi((x_g\delta_g\delta^*_{g'})(y_h\delta_h\delta^*_{h'})) =& \psi(x_g\beta_g(\beta_{g'}(y_h))\delta_{gg'h(g')^{-1}}\delta^*_{g'h'}) \\ &= x_g\beta_g(\beta^*_{g'}(y_h))\delta_{(gg'h(g')^{-1},g'h')} \\ &= x_g\beta_{gg'}(y_h)\delta_{(gg'h(g')^{-1},g'h')}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\psi(x_g\delta_g\delta^*_{g'})\psi(y_h\delta_h\delta^*_{h'}) = x_g\delta_{(g,g')}y_h\delta_{(h,h')} = x_g\beta_{gg'}(y_h)\delta_{(gg'h(g')^{-1},g'h')}.$$

Logo, $\psi((x_g\delta_g\delta^*_{g'})(y_h\delta_h\delta^*_{h'})) = \psi(x_g\delta_g\delta^*_{g'})\psi(y_h\delta_h\delta^*_{h'})$ e, desta forma, ψ é um homomorfismo de anéis. Claramente, $\psi(\sum\limits_{e\in G_0} 1_e\delta_e\delta^*_e) = \sum\limits_{e\in G_0} 1_e\delta_{(e,e)}$. É fácil verificar que $\rho : R\star_\gamma \widetilde{G} \longrightarrow (R\star_\beta G)\star_{\beta^*} G$ definida por $\rho(x\delta_{(g,g')}) = x\delta_g\delta^*_{g'}$, para todo $(g,g^{'}) \in \widetilde{G}$ e $x \in E_{(g,g')}$ é a inversa de ψ.Portanto, ψ é um isomorfismo de K-álgebras. $\square$

Capítulo 3

Dualidade para ação de grupóides

Neste capítulo trataremos de generalizar os teoremas de dualidade para ação e coação dados por Cohen e Montgomery em [11] para o caso de ação de grupóide. Mais precisamente, mostraremos que $(R \star_\beta G)\#KG^*$ assim como $(A\#KG^*) \star_\beta G$ (onde A é uma K-álgebra graduada) não são K-álgebras unitárias mas contêm uma K-subálgebra unitária isomorfa a uma soma direta de K-álgebras de matrizes.

3.1 Dualidade 1

Vamos trabalhar na seguinte situação: $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação de um grupóide finito G sobre uma K-álgebra R tal que E_e é unitário para todo $e \in G_0$.

Sabemos pela seção 3 do capítulo 1 que $A = R \star_\beta G$ é uma K-álgebra graduada. Logo, pelo Teorema 1.4.1 temos que A é um KG^*-módulo álgebra à esquerda e pela Proposição 1.4.5 que $A\#KG^*$ é um produto smash fraco. Recordemos também (veja seção 1 do capítulo 1) as seguintes notações:

$$T_e = \{g \in G \mid r(g) = e\} \text{ e } S_e = \{g \in G \mid d(g) = e\}.$$

Proposição 3.1.1. *As seguintes afirmações se verificam:*

(1) $$A\#KG^* = \underbrace{\Big(\bigoplus_{r(g)=d(g)=r(h)} E_g\delta_g\#v_h\Big)}_{B_0} \oplus \underbrace{\Big(\bigoplus_{r(g)\neq d(g)=r(h)} E_g\delta_g\#v_h\Big)}_{B_1} \oplus \underbrace{\Big(\bigoplus_{d(g)\neq r(h)} E_g\delta_g\#v_h\Big)}_{B_2},$$

como K-módulo.

(2) *B_0 é uma K-álgebra unitária de $A\#KG^*$ com elemento identidade $w = \sum_{e \in G_0} w_e$, onde $w_e = 1_e\delta_e \# \sum_{l \in T_e} v_l$.*

(3) *$B = B_0 \oplus B_1 = (A\#KG^*)(1_A\#1_{KG^*})$ é também uma subálgebra unitária de $A\#KG^*$.*

(4) *B_2 é um ideal de $A\#KG^*$ tal que $B_2(A\#KG^*)B_2 = 0$. Em particular, $B_2^2 = 0$ e $A\#KG^*$ não é unitário.*

Demonstração: (1) Sejam $g, h \in G$ então ou $r(g) = d(g) = r(h)$ ou $r(g) \neq d(g) = r(h)$ ou $d(g) \neq r(h)$. Portanto, (1) vale.

(2) Claramente B_0 é um K-submódulo de $A\#KG^*$. Sejam $x = a_g\delta_g\#v_h$ e $y = a_l\delta_l\#v_k$ em B_0, isto é, $r(g) = d(g) = r(h)$ e $r(l) = d(l) = r(k)$. Então

$$xy = (a_g\delta_g\#v_h)(b_l\delta_l\#v_k) = \begin{cases} a_g\delta_g(v_{hk^{-1}}.b_l\delta_l)\#v_k, & \text{se } d(k) = d(h) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela definição da ação de KG^* sobre A, $v_{hk^{-1}}.b_l\delta_l \neq 0$ se e somente se $hk^{-1} = l$. Isto ocorre se e somente se $k = l^{-1}h$. Observe que, neste caso, $d(k) = d(h)$. Assim,

$$xy = \begin{cases} a_g\delta_g b_l\delta_l\#v_k, & \text{se } k = l^{-1}h \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $d(g) = r(h) = r(l)$ então $a_g\delta_g b_l\delta_l = a_g\beta_g(b_l)\delta_{gl} \in E_{gl}\delta_{gl}$. Logo,

$$xy = \begin{cases} a_g\beta_g(b_l)\delta_{gl}\#v_k, & \text{se } k = l^{-1}h \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma vez que $d(gl) = d(l) = r(k)$ e $r(gl) = r(g) = r(h) = r(l) = d(l) = r(k)$ então $r(gl) = d(gl) = r(k)$. Sendo assim $xy \in B_0$ e portanto B_0 é uma subálgebra de $A\#KG^*$.

Resta mostrar que $w = \sum_{e \in G_0}(1_e\delta_e\#\sum_{l \in T_e} v_l)$ é a unidade de B_0. Claramente $w \in B_0$ e dado $x = a_g\delta_g\#v_h \in B_0$ temos:

$$xw = (a_g\delta_g\#v_h)(\sum_{e \in G_0} 1_e\delta_e\#\sum_{l \in T_e} v_l)$$

$$
\begin{aligned}
xw &= \sum_{e\in G_0}(a_g\delta_g\#v_h)(1_e\delta_e\#\sum_{l\in T_e}v_l)\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{d(k)=d(h)} a_g\delta_g(v_{hk^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_k(\sum_{l\in T_e}v_l)\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{l\in T_e\\ d(l)=d(h)}} a_g\delta_g(v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_l.
\end{aligned}
$$

Pela definição da ação de KG^* sobre A, temos que $v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e \neq 0$ se e somente se $hl^{-1} = e$. Isto ocorre se e somente se $l = h$ e, neste caso, $v_{r(h)}.1_e\delta_e \neq 0$ se e somente se $r(h) = e$. Assim,

$$xw = a_g\delta_g 1_{r(h)}\delta_{r(h)}\#v_h.$$

Mas $r(h) = d(g)$ e desta forma $a_g\delta_g 1_{r(h)}\delta_{r(h)} = a_g\beta_g(1_{d(g)})\delta_{gd(g)} = a_g\delta_g$. Portanto, $xw = x$.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
wx &= (\sum_{e\in G_0}1_e\delta_e\#\sum_{l\in T_e}v_l)(a_g\delta_g\#v_h)\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{l\in T_e}(1_e\delta_e\#v_l)(a_g\delta_g\#v_h)\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{l\in T_e}\sum_{d(k)=d(l)} 1_e\delta_e(v_{lk^{-1}}.a_g\delta_g)\#v_kv_h\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{l\in T_e\\ d(l)=d(h)}} 1_e\delta_e(v_{lh^{-1}}.a_g\delta_g)\#v_h.
\end{aligned}
$$

Agora $v_{lh^{-1}}.a_g\delta_g \neq 0$ se e somente se $lh^{-1} = g$ e isto ocorre se e somente se $l = gh$. Observe que $d(gh) = d(h)$, desta forma podemos considerar $l = gh$. Porém, se $l = gh$ então $r(l) = r(g)$ e assim $e = r(g)$. Logo, como $a_g \in E_g = E_{r(g)}$ segue que

$$wx = (1_{r(g)}\delta_{r(g)})(a_g\delta_g)\#v_h = \beta_{r(g)}(a_g)\delta_{r(g)g}\#v_h = a_g\delta_g\#v_h = x.$$

(3) É imediato ver que B é uma K-subálgebra de $A\#KG^*$. Mostremos que w é o elemento identidade de B. De fato, seja $x = a_g\delta_g\#v_h \in B$, isto é, $d(g) = r(h)$. Então

$$
\begin{aligned}
xw &= (a_g\delta_g\#v_h)(\sum_{e\in G_0} 1_e\delta_e\#\sum_{l\in T_e} v_l)\\
&= \sum_{e\in G_0}(a_g\delta_g\#v_h)(1_e\delta_e\#\sum_{l\in T_e} v_l)\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{d(k)=d(h)} a_g\delta_g(v_{hk^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_k(\sum_{l\in T_e} v_l)\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{l\in T_e\\ d(l)=d(h)}} a_g\delta_g(v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_l.
\end{aligned}
$$

Pela definição da ação de KG^* sobre A temos que $v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e \neq 0$ se e somente se $hl^{-1} = e$. Isto ocorre se e somente se $l = h$ e, neste caso, $v_{r(h)}.1_e\delta_e \neq 0$ se e somente se $e = r(h)$. Assim,

$$
xw = a_g\delta_g 1_{r(h)}\delta_{r(h)}\#v_h,
$$

mas $r(h) = d(g)$ e desta forma $a_g\delta_g 1_{r(h)}\delta_{r(h)} = a_g\beta_g(1_{d(g)})\delta_{gd(g)} = a_g\delta_g$. Portanto, $xw = x$.

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
wx &= (\sum_{e\in G_0} 1_e\delta_e\#\sum_{l\in T_e} v_l)(a_g\delta_g\#v_h)\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{l\in T_e}(1_e\delta_e\#v_l)(a_g\delta_g\#v_h)\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{l\in T_e}\sum_{d(k)=d(l)} 1_e\delta_e(v_{lk^{-1}}.a_g\delta_g)\#v_kv_h\\
&= \sum_{e\in G_0}\sum_{\substack{l\in T_e\\ d(l)=d(h)}} 1_e\delta_e(v_{lh^{-1}}.a_g\delta_g)\#v_h.
\end{aligned}
$$

Agora $v_{lh^{-1}}.a_g\delta_g \neq 0$ se e somente se $lh^{-1} = g$. Isto ocorre se e somente se $l = gh$. Note que se $l = gh$ então $e = r(l) = r(g)$ e $d(l) = d(h)$. Logo, como $a_g \in E_g = E_{r(g)}$ segue que

$$
wx = 1_{r(g)}\delta_{r(g)}a_g\delta_g\#v_h = \beta_{r(g)}(a_g)\delta_{r(g)g}\#v_h = a_g\delta_g\#v_h = x.
$$

(4) Sejam $x = a_g\delta_g\#v_h \in B_2$, isto é, $d(g) \neq r(h)$ e $y = b_l\delta_l\#v_k \in A\#KG^*$. Então

$$yx = (b_l\delta_l\#v_k)(a_g\delta_g\#v_h) = \begin{cases} b_l\delta_l(v_{kh^{-1}}.a_g\delta_g)\#v_k, & \text{se } d(h) = d(k) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela definição da ação, $v_{kh^{-1}}.a_g\delta_g \neq 0$ se e somente se $kh^{-1} = g$. Mas, se $kh^{-1} = g$ então $d(g) = d(h^{-1}) = r(h)$ o que é uma contradição. Portanto, $v_{kh^{-1}}.a_g\delta_g = 0$ e consequentemente $yx = 0 \in B_2$.

Por outro lado,

$$xy = (a_g\delta_g\#v_h)(b_l\delta_l\#v_k) = \begin{cases} a_g\delta_g(v_{hk^{-1}}.b_l\delta_l)\#v_k, & \text{se } d(k) = d(h) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pela definição da ação, $v_{hk^{-1}}.b_l\delta_l \neq 0$ se e somente se $hk^{-1} = l$. Isto ocorre se e somente se $k = l^{-1}h$. Assim,

$$xy = \begin{cases} a_g\delta_g b_l\delta_l\#v_k, & \text{se } k = l^{-1}h \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas,

$$a_g\delta_g b_l\delta_l = \begin{cases} a_g\beta_g(b_l)\delta_{gl}, & \text{se } d(g) = r(l) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Entretanto, como $hk^{-1} = l$ então $r(l) = r(h) \neq d(g)$. Portanto, $a_g\delta_g b_l\delta_l = 0$ e daí $xy = yx = 0$, para todo $x \in B_2$ e $y \in A\#KG^*$. Então, B_2 é um ideal de $A\#KG^*$, $B_2^2 = 0$ e $A\#KG^*$ não é unitário. □

Observação 3.1.2. *Em geral B_1 não é uma subálgebra (e portanto tampouco um ideal) de $A\#KG^*$ conforme ilustra os seguintes exemplos:*

Exemplo 3.1.3. *Seja $G = \{g, g^{-1}, d(g), r(g)\}$ um grupóide. Então,*

$$B_0 = \underbrace{E_{d(g)}\delta_{d(g)}\#v_{d(g)}}_{5} \oplus \underbrace{E_{d(g)}\delta_{d(g)}\#v_{g^{-1}}}_{6} \oplus \underbrace{E_{r(g)}\delta_{r(g)}\#v_{r(g)}}_{7} \oplus \underbrace{E_{r(g)}\delta_{r(g)}\#v_g}_{8}$$

$$B_1 = \underbrace{E_g\delta_g\#v_{d(g)}}_{1} \oplus \underbrace{E_g\delta_g\#v_{g^{-1}}}_{2} \oplus \underbrace{E_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\#v_{r(g)}}_{3} \oplus \underbrace{E_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\#v_g}_{4}$$

A multiplicação de B_1 é dada pela tabela abaixo:

.	1	2	3	4
1	0	0	0	8
2	0	0	7	0
3	0	6	0	0
4	5	0	0	0

Logo, neste caso, $B_1^2 = B_0$ *e assim sendo* B_1 *não é uma subágebra de* $A\#KG^*$.

No Exemplo 3.1.3 constatamos que $B = B_0 \oplus B_1$ *é interessantemente uma álgebra* $\mathbb{Z}_2$*-graduada. Entretanto o mesmo não ocorre no exemplo seguinte:*

Exemplo 3.1.4. *Seja* $G = \{g, g^{-1}, d(g), r(g), h, h^{-1}, r(h) = d(g), d(h), gh, h^{-1}g^{-1}\}$. *Notemos que* $E_g\delta_g\#v_{g^{-1}}$, $E_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\#v_{r(g)}$, $E_g\delta_g\#v_{d(g)}$ *e* $E_h\delta_h\#v_{h^{-1}}$ *são* K*-submódulos de* B_1,

$$\begin{aligned}
(E_g\delta_g\#v_{g^{-1}})(E_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\#v_{r(g)}) &= E_g\delta_g(v_{g^{-1}r(g)}.E_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}})\#v_{r(g)} \\
&= E_g\delta_g(v_{g^{-1}}.E_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}})\#v_{r(g)} \\
&= E_g\delta_g E_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}})\#v_{r(g)} \\
&= E_g\beta_g(E_{g^{-1}})\delta_{gg^{-1}}\#v_{r(g)} \\
&= E_{r(g)}\delta_{r(g)}\#v_{r(g)} \subset B_0.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(E_g\delta_g\#v_{d(g)})(E_h\delta_h\#v_{h^{-1}}) &= E_g\delta_g(v_{d(g)h}.E_h\delta_h)\#v_{h^{-1}} \\
&= E_g\delta_g(v_{r(h)h}.E_h\delta_h)\#v_{h^{-1}} \\
&= E_g\delta_g E_h\delta_h\#v_{h^{-1}} = E_g\beta_g(E_h)\delta_{gh}\#v_{h^{-1}} \\
&= E_g\beta_g(E_{r(h)})\delta_{gh}\#v_{h^{-1}} \\
&= E_g\beta_g(E_{d(g)})\delta_{gh}\#v_{h^{-1}} \\
&= E_gE_g\delta_{gh}\#v_{h^{-1}} = E_{r(g)}\delta_{gh}\#v_{h^{-1}} \\
&= E_{r(gh)}\delta_{gh}\#v_{h^{-1}} = E_{gh}\delta_{gh}\#v_{h^{-1}} \subset B_1.
\end{aligned}$$

Neste caso B_1 *também não é uma subálgebra de* $A\#KG^*$.

Decorre da Proposição 3.1.1 que B_0 é uma K-subálgebra unitária de B. Na sequência mostraremos que B_0 é isomorfa a uma soma direta de álgebras de matrizes. Para tanto necessitamos alguma preparação. Começaremos com a proposição seguinte.

Proposição 3.1.5. *As seguintes afirmações se verificam:*

(1) $W = \{w_e \mid e \in G_0\}$ *é um conjunto de idempotentes centrais de* B_0 *ortogonais dois a dois e com soma igual a* $1_{B_0} = w$.

(2) $B_0 = \bigoplus_{e \in G_0} B_e$, *onde cada* $B_e = B_0 w_e = \bigoplus_{\substack{g \in G_e \\ h \in T_e}} E_g \delta_g \# v_h$ *é um ideal de* B_0 *e uma* K*-álgebra unitária, com elemento identidade* w_e.

(3) Para cada $e \in G_0$, $W_e = \{w_{e,g} := 1_e \delta_e \# v_g \mid g \in T_e\}$ *é um conjunto de idempotentes de* B_e *ortogonais dois a dois e com soma igual a* $1_{B_e} = w_e$.

Demonstração: (1) Sejam $w_e = 1_e \delta_e \# \sum_{g \in T_e} v_g$ e $w_f = 1_f \delta_f \# \sum_{h \in T_f} v_h$ em W. Então

$$\begin{aligned} w_e w_f &= \sum_{g \in T_e} (1_e \delta_e \# v_g)(1_f \delta_f \# \sum_{h \in T_f} v_h) \\ &= \sum_{g \in T_e} \sum_{d(k) = d(g)} 1_e \delta_e (v_{gk^{-1}} . 1_f \delta_f) \# v_k (\sum_{h \in T_f} v_h) \end{aligned}$$

e assim

$$w_e w_f = \begin{cases} \sum\limits_{g \in T_e} \sum\limits_{\substack{h \in T_f \\ d(h) = d(g)}} 1_e \delta_e (v_{gh^{-1}} . 1_f \delta_f) \# v_h \\ 0, \text{ se } d(h) \neq d(g), \text{ para todo } g \in T_e \text{ e } h \in T_f. \end{cases}$$

Mas $v_{gh^{-1}} . 1_f \delta_f \neq 0$ se e somente se $gh^{-1} = f$. Isto ocorre se e somente se $h = g$. Neste caso, devemos ter ainda que $r(g) = f$, ou seja, $e = f$. Daí

$$w_e w_e = \sum_{g \in T_e} 1_e \delta_e 1_e \delta_e \# v_g = 1_e \delta_e \# \sum_{g \in T_e} v_g = w_e.$$

Portanto,

$$w_e w_f = \begin{cases} w_e, \text{ se } e = f \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, por definição $w = \sum_{e \in G_0} w_e$. Resta mostrarmos que w_e é central em B_0. De fato, seja $x = a_g\delta_g \# v_h \in B_0$. Então

$$xw_e = (a_g\delta_g\#v_h)(1_e\delta_e\#\sum_{l\in T_e} v_l) = \sum_{d(t)=d(h)} a_g\delta_g(v_{ht^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_t(\sum_{l\in T_e} v_l).$$

Se $r(t) \neq e$, para todo $t \in G$ tal que $d(t) = d(h)$ então $v_t(\sum_{l\in T_e} v_l) = 0$. Logo,

$$xw_e = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{l\in T_e \\ d(l)=d(h)}} a_g\delta_g(v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_l \\ 0, \text{ se } d(h) \neq d(l), \forall l \in T_e. \end{cases}$$

Vamos analisar melhor a primeira situação:

$$xw_e = \sum_{\substack{l\in T_e \\ d(l)=d(l)}} a_g\delta_g(v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_l.$$

Mas, $v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e \neq 0$ se e somente se $hl^{-1} = e$. Porém, sabemos que $hl^{-1} \in G_0$ se e somente se $l = h$. Neste caso, $v_{hh^{-1}}.1_e\delta_e \neq 0$ se e somente se $e = r(h)$. Assim, temos que

$$xw_e = \begin{cases} a_g\delta_g 1_e\delta_e\#v_h, \text{ se } h \in T_e \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Como $d(g) = r(h) = e$ então:

$$a_g\delta_g 1_e\delta_e = a_g\beta_g(1_e)\delta_{ge} = a_g\delta_g.$$

Portanto,

$$xw_e = \begin{cases} x, \text{ se } h \in T_e \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$w_e x = \sum_{l\in T_e}(1_e\delta_e\#v_l)(a_g\delta_g\#v_h) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{l\in T_e \\ d(l)=d(h)}} 1_e\delta_e(v_{lh^{-1}}.a_g\delta_g)\#v_h, \\ 0, \text{ se } d(h) \neq d(l), \text{ para todo } l \in T_e. \end{cases}$$

Vamos analisar melhor a primeira situação:

$$w_e x = \sum_{\substack{l\in T_e \\ d(l)=d(h)}} 1_e\delta_e(v_{lh^{-1}}.a_g\delta_g)\#v_h.$$

Mas, $v_{lh^{-1}}.a_g\delta_g \neq 0$ se e somente se $lh^{-1} = g$. Isto ocorre, se e somente se $l = gh$. O que implica que $d(l) = d(h)$ e $r(l) = r(g)$ e sendo assim, $e = r(g)$. Então,

$$w_e x = \begin{cases} 1_{r(g)}\delta_{r(g)}a_g\delta_g \# v_h, & \text{se } g \in T_e \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, como $a_g \in E_g = E_{r(g)}$ então $1_{r(g)}\delta_{r(g)}a_g\delta_g = \beta_{r(g)}(a_g)\delta_g = a_g\delta_g$. Assim,

$$w_e x = \begin{cases} x, & \text{se } g \in T_e \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $r(g) = d(g) = r(h)$ então $w_e x = x = x w_e$ sempre que $g \in G_e$ e $h \in T_e$ e $w_e x = 0 = x w_e$ caso contrário. Logo, os w_e's são centrais em B_0.

(2) Observemos agora que $B_0 = B_0 w = B_0(\sum\limits_{e \in G_0} w_e) = \sum\limits_{e \in G_0} B_0 w_e$. Uma vez que os w_e's são dois a dois ortogonais esta soma é direta. Como os w_e's são idempotentes centrais em B_0 então cada $B_e = B_0 w_e$ é um ideal de B_0 e uma K-álgebra unitária. Além disso, pelos cálculos feitos para mostrar que os w_e's são centrais temos que $B_e = \bigoplus\limits_{\substack{g \in G_e \\ h \in T_e}} E_g\delta_g \# v_h$.

(3) Sejam $w_{e,g} = 1_e\delta_e \# v_g$ e $w_{e,h} = 1_e\delta_e \# v_h$ em W_e. Então

$$w_{e,g}w_{e,h} = \begin{cases} 1_e\delta_e(v_{gh^{-1}}.1_e\delta_e) \# v_h, & \text{se } d(h) = d(g) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por definição, $v_{gh^{-1}}.1_e\delta_e \neq 0$ se e somente se $gh^{-1} = e$. Isto ocorre se e somente se $h = g$. Logo,

$$w_{e,g}w_{e,h} = \begin{cases} w_{e,g}, & \text{se } h = g \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

□

Observação 3.1.6. *Para cada $e \in G_0$ e $l \in G_e$, $w_{e,l} = 1_e\delta_e \# v_l \in W_e$ não é central em B_e.*

De fato, seja $x = a_g\delta_g \# v_h \in B_e$, isto é, $r(g) = d(g) = r(h) = e$. Então,

$$xw_{e,l} = (a_g\delta_g\#v_h)(1_e\delta_e\#v_l) = \begin{cases} a_g\delta_g(v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_l, \text{ se } d(l) = d(h) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, como $v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e \neq 0$ se e somente se $l = h$. Então

$$xw_{e,l} = \begin{cases} x, \text{ se } l = h \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$w_{e,l}x = (1_e\delta_e\#v_l)(a_g\delta_g\#v_h) = \begin{cases} 1_e\delta_e(v_{lh^{-1}}.a_g\delta_g)\#v_h, \text{ se } d(l) = d(h) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Uma vez que $v_{lh^{-1}}.a_g\delta_g \neq 0$ se e somente se $lh^{-1} = g$ e isto só ocorre se $l = gh$. Neste caso, $r(l) = r(gh) = r(g) = e$ então

$$w_{e,l}x = \begin{cases} x, \text{ se } l = gh \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $w_{e,l}$ não é central em B_e. □

Proposição 3.1.7. *Para cada $e \in G_0$,*

(1) o conjunto $U_e = \{u_{g,e} := 1_g\delta_g\#\sum\limits_{h\in T_e} v_h \mid g \in G_e\}$ é um subgrupo do grupo das unidades de B_e. O inverso de cada elemento $u_{g,e}$ é dado por $u_{g^{-1},e}$.

(2) o grupo U_e age sobre o conjunto W_e via conjugação.

(3) a órbita de cada elemento $w_{e,h} \in W_e$, via a ação de U_e, é dada por $w_{e,h}^{U_e} = \{w_{e,gh} \mid g \in G_e\} = \{w_{e,l} \mid l \in S_{d(h)}\}$.

Demonstração: (1) Sejam $u_{g,e} = 1_g\delta_g\#\sum\limits_{h\in T_e} v_h$ e $u_{l,e} = 1_l\delta_l\#\sum\limits_{k\in T_e} v_k$ em U_e, isto é, $g, l \in G_e$. Então

$$
\begin{aligned}
u_{g,e}u_{l,e} &= \sum_{h\in T_e}(1_g\delta_g\# v_h)(1_l\delta_l\# \sum_{k\in T_e} v_k)\\
&= \sum_{h\in T_e}\sum_{d(t)=d(h)} 1_g\delta_g(v_{ht^{-1}}.1_l\delta_l)\# v_t(\sum_{k\in T_e} v_k)\\
&= \sum_{h\in T_e}\sum_{\substack{k\in T_e\\ d(k)=d(h)}} 1_g\delta_g(v_{hk^{-1}}.1_l\delta_l)\# v_k.
\end{aligned}
$$

Por definição $v_{hk^{-1}}.1_l\delta_l \neq 0$ se e somente se $hk^{-1}=l$. Isto ocorre se e somente se $k=l^{-1}h$. Neste caso, $d(k)=d(l^{-1}h)=d(h)$ e $r(k)=r(l^{-1}h)=r(l^{-1})=d(l)=e$ então

$$u_{g,e}u_{l,e}=\sum_{h\in T_e} 1_g\delta_g 1_l\delta_l\# v_{l^{-1}h}=1_{gl}\delta_{gl}\#\sum_{h\in T_e} v_{l^{-1}h}.$$

Tomando $t=l^{-1}k$ temos que $r(t)=r(l^{-1})=d(l)=e$ assim, $t\in T_e$. Reciprocamente, se $t\in T_e$ então tomando $h=lt\in T_e$ temos que $l^{-1}h=l^{-1}lt=d(l)t=et=t$. Daí,

$$u_{g,e}u_{l,e}=\sum_{h\in T_e} 1_g\delta_g 1_l\delta_l\# v_k=1_{gl}\delta_{gl}\#\sum_{t\in T_e} v_t.$$

Logo, como $gl\in G_e$ então $u_{g,e}u_{l,e}\in U_e$. Para finalizar mostremos que todo elemento em U_e é invertível. De fato, seja $u_{g,e}=1_g\delta_g\#\sum_{h\in T_e} v_h\in U_e$. Então tomando $u_{g^{-1},e}=1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\#\sum_{l\in T_e} v_l\in U_e$ temos que

$$
\begin{aligned}
u_{g,e}u_{g^{-1},e} &= (1_g\delta_g\#\sum_{h\in T_e} v_h)(1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\#\sum_{l\in T_e} v_l)\\
&= \sum_{h\in T_e}\sum_{d(k)=d(h)} 1_g\delta_g(v_{hk^{-1}}.1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}})\# v_k(\sum_{l\in T_e} v_l)\\
&= \sum_{h\in T_e}\sum_{\substack{l\in T_e\\ d(l)=d(h)}} 1_g\delta_g(v_{hl^{-1}}.1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}})\# v_l\\
&= \sum_{h\in T_e} 1_g\delta_g 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\# v_{gh}\\
&= \sum_{h\in T_e} 1_{gg^{-1}}\delta_{gg^{-1}}\# v_{gh}\\
&= \sum_{h\in T_e} 1_e\delta_e\# v_{gh}.
\end{aligned}
$$

Aqui novamente podemos considerar $gh = k$ e daí

$$u_{g,e}u_{g^{-1},e} = 1_e\delta_e\# \sum_{k\in T_e} v_k = w_e = 1_{B_e}.$$

Portanto, $u_{g,e}^{-1} = u_{g^{-1},e}$ e desta forma U_e é um subgrupo do grupo das unidades de B_e.

(2) Basta mostrar que W_e é invariante pela conjugação por elementos de U_e. De fato, sejam $w_{e,l} = 1_e\delta_e\#v_l \in W_e$ e $u_{g,e} = 1_g\delta_g\# \sum_{h\in T_e} v_h \in U_e$. Então

$$u_{g,e}w_{e,l}u_{g^{-1},e} = (1_g\delta_g\# \sum_{h\in T_e} v_h)(1_e\delta_e\#v_l)(1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\# \sum_{k\in T_e} v_k).$$

Primeiro, vejamos

$$\begin{aligned}(1_g\delta_g\# \sum_{h\in T_e} v_h)(1_e\delta_e\#v_l) &= \sum_{h\in T_e}\sum_{d(t)=d(h)} 1_g\delta_g(v_{ht^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_tv_l \\ &= \sum_{\substack{h\in T_e\\ d(h)=d(l)}} 1_g\delta_g(v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_l.\end{aligned}$$

Pela definição da ação temos que $v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e \neq 0$ se e somente se $hl^{-1} = e$. Isto ocorre se e somente se $h = l$ e como $l \in T_e$ então

$$(1_g\delta_g\# \sum_{h\in T_e} v_h)(1_e\delta_e\#v_l) = 1_g\delta_g 1_e\delta_e\#v_l = 1_g\delta_g\#v_l.$$

Agora,

$$\begin{aligned}u_{g,e}w_{e,l}u_{g^{-1},e} &= (1_g\delta_g\#v_l)(1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\# \sum_{k\in T_e} v_k) \\ &= \sum_{d(t)=d(l)} 1_g\delta_g(v_{lt^{-1}}.1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}})\#v_t(\sum_{k\in T_e} v_k) \\ &= \sum_{\substack{k\in T_e\\ d(k)=d(l)}} 1_g\delta_g(v_{lk^{-1}}.1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}})\#v_k.\end{aligned}$$

Pela definição $v_{lk^{-1}}.1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} \neq 0$ se e somente se $lk^{-1} = g^{-1}$. Isto ocorre se e somente se $k = gl$. Observe que, neste caso $d(k) = d(gl) = d(l)$ e $r(k) = r(gl) = r(g) = e$, consequentemente

$$u_{g,e}w_{e,l}u_{g^{-1},e} = 1_g\delta_g 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\#v_{gl} = 1_{gg^{-1}}\delta_{gg^{-1}}\#v_{gl} = 1_{r(g)}\delta_{r(g)}\#v_{gl} = 1_e\delta_e\#v_{gl}.$$

Note que $r(gl) = r(g) = e$ e assim $gl \in T_e$. Portanto,

$$u_{g,e}.w_{e,h} := u_{g,e}w_{e,l}u_{g^{-1},e} = 1_e\delta_e\#v_{gl} \in W_e.$$

(3) Seja $w_{e,h} = 1_e\delta_e\#v_h \in W_e$. É imediato ver que a órbita de $w_{e,h}$ é dada por:

$$w_{e,h}^{U_e} = \{u_{g,e}.w_{e,h} \mid g \in G_e\} = \{1_e\delta_e\#v_{gh} \mid g \in G_e\} = \{w_{e,l} \mid l \in S_{d(h)}\}.$$

$\square$

Proposição 3.1.8. *Para cada $e \in G_0$, se $w_{e,h_1}^{U_e}, \cdots, w_{e,h_{n_e}}^{U_e}$ são as distintas órbitas em W_e e se ω_{e,h_i} denota a soma dos elementos da órbita $w_{e,h_i}^{U_e}$, para cada $1 \leq i \leq n_e$ então:*

(1) $d(h_i) \neq d(h_j)$, *para todo* $i \neq j$,

(2) $\omega_{e,h_i} = 1_e\delta_e\# \sum\limits_{l\in T_e\cap S_{d(h_i)}} v_l$ *e* $w_e = \sum\limits_{1\leq i\leq n_e} \omega_{e,h_i}$,

(3) os elementos ω_{e,h_i} são idempotentes centrais de B_e ortogonais dois a dois com soma $1_{B_e} = w_e$,

(4) para cada $1 \leq i \leq n_e$, $B_{e,h_i} = B_e\omega_{e,h_i} = \bigoplus\limits_{\substack{g\in G_e \\ l\in T_e\cap S_{d(h_i)}}} E_g\delta_g\#v_l$ é um ideal de B_e e uma K-álgebra unitária, com elemento identidade ω_{e,h_i},

(5) $B_e = \bigoplus\limits_{1\leq i\leq n_e} B_{e,h_i}$.

Demonstração: (1) Decorre do item (3) da Proposição 3.1.7.

(2) Imediato.

(3) Sejam $1 \leq i, j \leq n_e$ então

$$\begin{aligned}\omega_{e,h_i}\omega_{e,h_j} &= (1_e\delta_e\# \sum_{l\in T_e\cap S_{d(h_i)}} v_l)(1_e\delta_e\# \sum_{k\in T_e\cap S(d(h_j))} v_k) \\ &= \sum_{l\in T_e\cap S_{d(h_i)}} \sum_{d(t)=d(l)} 1_e\delta_e(v_{lt^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_t(\sum_{k\in T_e\cap S_{d(h_j)}} v_k).\end{aligned}$$

Mas $v_t(\sum\limits_{k\in T_e\cap S_{d(h_j)}} v_k) \neq 0$ se e somente se $v_t = v_k$, para algum $k \in T_e \cap S_{d(h_j)}$. Entretanto, $d(t) = d(l) = d(h_i) \neq d(h_j) = d(k)$, se $i \neq j$. Portanto, $t \neq k$, para todo $k \in T_e \cap S_{d(h_j)}$ e assim

$$\omega_{e,h_i}\omega_{e,h_j} = 0, \text{ sempre que } i \neq j.$$

Por outro lado, se $i = j$ então podemos tomar $t = k$ e daí

$$\omega_{e,h_i}\omega_{e,h_i} = \sum_{l\in T_e\cap S_{d(h_i)}} \sum_{d(t)=d(l)} 1_e\delta_e(v_{lt^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_t \quad = \sum_{l\in T_e\cap S_{d(h_i)}} 1_e\delta_e\#v_l = \omega_{e,h_i}.$$

Para finalizar mostremos que ω_{e,h_i} é central. De fato, seja $x = a_l\delta_l\#v_k \in B_e$. Então

$$\begin{aligned}
\omega_{e,h_i}x &= (1_e\delta_e\# \sum_{t\in T_e\cap S_{d(h_i)}} v_t)(a_l\delta_l\#v_k) \\
&= \sum_{t\in T_e\cap S_{d(h_i)}} (1_e\delta_e\#v_t)(a_l\delta_l\#v_k) \\
&= \sum_{t\in T_e\cap S_{d(h_i)}} \sum_{d(s)=d(t)} 1_e\delta_e(v_{ts^{-1}}.a_l\delta_l)\#v_sv_k.
\end{aligned}$$

Assim

$$\omega_{e,h_i}x = \begin{cases} \sum\limits_{t\in T_e\cap S_{d(h_i)}} 1_e\delta_e(v_{tk^{-1}}.a_l\delta_l)\#v_k, \text{ se } d(k) = d(h_i) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por definação $v_{tk^{-1}}.a_l\delta_l \neq 0$ se e somente se $tk^{-1} = l$. Isto ocorre se e somente se $t = lk$. Neste caso, $d(t) = d(lk) = d(k)$ e $r(t) = r(lk) = r(l) = e$ então

$$\omega_{e,h_i}x = \begin{cases} a_l\delta_l\#v_k, \text{ se } d(k) = d(h_i) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$x\omega_{e,h_i} = (a_l\delta_l\#v_k)(1_e\delta_e\# \sum_{t\in T_e\cap S_{d(h_i)}} v_t) = \sum_{d(s)=d(k)} a_l\delta_l(v_{ks^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_s(\sum_{t\in T_e\cap S_{d(h_i)}} v_t).$$

então

$$x\omega_{e,h_i} = \begin{cases} \sum\limits_{t\in T_e\cap S_{d(h_i)}} a_l\delta_l(v_{kt^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_t, \text{ se } d(k) = d(h_i) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Mas, $v_{kt^{-1}}.1_e\delta_e \neq 0$ se e somente se $kt^{-1} = e$. Isto só ocorre se $t = k$ então

$$x\omega_{e,h_i} = \begin{cases} a_l\delta_l\#v_k, \text{ se } d(k) = d(h_i) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $x\omega_{e,h_i} = \omega_{e,h_i}x$, para todo $x \in B_e$.

(4) Como os ω_{e,h_i}'s são idempotentes centrais em B_e então cada $B_{e,h_i} = B_e\omega_{e,h_i} = \bigoplus_{\substack{g\in G_e \\ l\in T_e\cap S_{d(h_i)}}} E_g\delta_g\#v_l$ é um ideal de B_e e uma K-álgebra unitária.

(5) Note que $B_e = B_e w_e = B_e(\sum_{1\leq i\leq n_e} \omega_{e,h_i}) = \sum_{1\leq i\leq n_e} B_e\omega_{e,h_i}$. Como os ω_{e,h_i}'s são dois a dois ortogonais esta soma é direta. $\square$

Proposição 3.1.9. *Para cada $e \in G_0$ e cada $1 \leq i \leq n_e$,*

(1) $\Omega_{e,h_i} = \{\omega_{e,h_i,l} := 1_e\delta_e\#v_l \mid l \in T_e \cap S_{d(h_i)}\}$ é um conjunto de idempotentes (não centrais) e ortogonais dois a dois cuja soma é $1_{B_{e,h_i}} = \omega_{e,h_i}$,

(2) o conjunto $U_{e,h_i} = \{u_{g,e,h_i} := 1_g\delta_g\# \sum_{l\in T_e\cap S_{d(h_i)}} v_l \mid g \in G_e\}$ é um subgrupo de U_e,

(3) U_{e,h_i} age transitivamente por conjugação sobre Ω_{e,h_i}.

Demonstração: (1) Note que Ω_{e,h_i} é um subconjunto de W_e e portanto os elementos de Ω_{e,h_i} são idempotentes ortogonais dois a dois. Mostremos que os $\omega_{e,h_i,l}$'s não são centrais em B_{e,h_i}. De fato, seja $x = a_g\delta_g\#v_h \in B_{e,h_i}$. Então

$$x\omega_{e,h_i,l} = (a_g\delta_g\#v_h)(1_e\delta_e\#v_l) = a_g\delta_g(v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_l.$$

Por definição $v_{hl^{-1}}.1_e\delta_e \neq 0$ se e somente se $hl^{-1} = e$ e isto ocorre se e somente se $h = l$. Daí,

$$x\omega_{e,h_i,l} = \begin{cases} a_g\delta_g\#v_l, \text{ se } h = l \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\omega_{e,h_i,l}x = (1_e\delta_e\#v_l)(a_g\delta_g\#v_h) = 1_e\delta_e(v_{lh^{-1}}.a_g\delta_g)\#v_h.$$

Por definição $v_{lh^{-1}}.a_g\delta_g \neq 0$ se e somente se $lh^{-1} = g$ e isto só ocorre se $h = g^{-1}l$. Note que, neste caso, $d(h) = d(g^{-1}l) = d(l) = d(h_i)$ e $r(h) = r(g^{-1}l) = r(g^{-1}) = d(g) = e$ então

$$\omega_{e,h_i,l}x = \begin{cases} x, \text{ se } h = g^{-1}l \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma, os $\omega_{e,h_i,l}$'s não são, em geral, centrais.

(2) Note que $U_{e,h_i} \neq \emptyset$ pois $\omega_{e,h_i} \in U_{e,h_i}$. Agora, sejam $u_{l,e,h_i} = 1_l\delta_l \# \sum_{k \in T_e \cap S_{d(h_i)}} v_k$ e $u_{t,e,h_i} = 1_t\delta_t \# \sum_{s \in T_e \cap S_{d(h_i)}} v_s$ em U_{e,h_i}. Então

$$\begin{aligned} u_{l,e,h_i}u_{t,e,h_i} &= (1_l\delta_l \# \sum_{k \in T_e \cap S_{d(h_i)}} v_k)(1_t\delta_t \# \sum_{s \in T_e \cap S_{d(h_i)}} v_s) \\ &= \sum_{k,s \in T_e \cap S_{d(h_i)}} (1_l\delta_l \# v_k)(1_t\delta_t \# v_s) \\ &= \sum_{k,s \in T_e \cap S_{d(h_i)}} 1_l\delta_l(v_{ks^{-1}}.1_t\delta_t)\# v_s. \end{aligned}$$

Por definição $v_{ks^{-1}}.1_t\delta_t \neq 0$ se e somente se $ks^{-1} = t$ e isto ocorre se e somente se $k = ts$. Neste caso, $d(k) = d(ts) = d(s) = d(h_i)$ e $r(k) = r(ts) = r(t) = e$ então

$$u_{l,e,h_i}u_{t,e,h_i} = \sum_{s \in T_e \cap S_{d(h_i)}} 1_l\delta_l 1_t\delta_t \# v_s.$$

Como $l \in G_e$ e $t \in T_e$ então $1_l\delta_l 1_t\delta_t = \beta_l(1_t)\delta_{lt} = \beta_l(1_{r(t)})\delta_{lt} = \beta_l(1_{d(l)})\delta_{lt} = 1_l\delta_{lt}$. Mas, $E_l = E_{r(l)} = E_{r(lt)} = E_{lt}$ implica que $1_l = 1_{lt}$ e portanto

$$u_{l,e,h_i}u_{t,e,h_i} = \sum_{s \in T_e \cap S_{d(h_i)}} 1_{lt}\delta_{lt}\# v_s.$$

Note que $r(lt) = r(l) = e = d(t) = d(lt)$. Logo, $lt \in G_e$ e sendo assim $u_{l,e,h_i}u_{t,e,h_i} \in U_{e,h_i}$. É fácil ver que dado $u_{l,e,h_i} = 1_l\delta_l \# \sum_{k \in T_e \cap S_{d(h_i)}} v_k \in U_{e,h_i}$ então $u_{l^{-1},e,h_i} = 1_{l^{-1}}\delta_{l^{-1}} \# \sum_{t \in T_e \cap S_{d(h_i)}} v_t$ é o inverso de u_{l,e,h_i}. Portanto, U_{e,h_i} é um subgrupo de U_e.

(3) Pela Proposição 3.1.7 (2) temos que U_e age sobre W_e e pelo item (2) U_{e,h_i} é um subgrupo de U_e então U_{e,h_i} age sobre W_e. Então como Ω_{e,h_i} é um subconjunto de W_e basta mostrarmos que Ω_{e,h_i} é invariante pela ação de U_{e,h_i}. De fato, $u_{g,e,h_i} =$

$1_g\delta_g\# \sum\limits_{l\in T_e\cap S(d(h_i))} v_l \in U_{e,h_i}$ e $\omega_{e,h_i,k} = 1_e\delta_e\# v_k \in W_{e,h_i}$. Então, pela definição da ação de U_{e,h_i} sobre W_e temos que

$$\begin{aligned}
u_{g,e,h_i}.\omega_{e,h_i,k} &= u_{g,e,h_i}\omega_{e,h_i,k}u_{g^{-1},e,h_i} \\
&= (1_g\delta_g\# \sum_{l\in T_e\cap S(d(h_i))} v_l)(1_e\delta_e\# v_k)(1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}\# \sum_{l\in T_e\cap S(d(h_i))} v_l) \\
&= 1_e\delta_e\# v_{gh},
\end{aligned}$$

uma vez que $r(gk) = r(g) = e$ e $d(gk) = d(k) = d(h_i)$ então $gk \in T_e \cap S_{d(h_i)}$. Portanto, $1_e\delta_e\# v_{gk} \in \Omega_{e,h_i}$ e consequentemente, temos que U_{e,h_i} age sobre Ω_{e,h_i} e neste caso, claramente a ação é transitiva. $\square$

Denotamos por n_{e,h_i} a cardinalidade de Ω_{e,h_i}.

A Proposição 3.1.9 propicia as condições necessárias para que possamos usar o lema a seguir. Esse lema é de fundamental importância para os resultados principais desta seção e da seção seguinte.

Lema 3.1.10. *[22, Lema 1.6] Seja T uma anel e seja $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ a decomposição do 1 em soma direta de idempotentes dois a dois ortogonais. Seja G um subgrupo do grupo das unidades de T, e suponha que G permuta o conjunto $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ transitavamente por conjugação. Então $T \simeq M_n(U)$, onde U é o anel $U = e_1Te_1$.*

Proposição 3.1.11. *Para cada $e \in G_0$ e $1 \leq i \leq n_e$ temos que $B_{e,h_i} \simeq M_{n_{e,h_i}}(E_e)$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.1.9 (1) temos que Ω_{e,h_i} é um conjunto de idempotentes ortogonais dois a dois cuja soma é $1_{B_{e,h_i}}$ e pela Proposição 3.1.9 (3) temos que U_{e,h_i} age transitivamente por conjugação sobre o conjunto Ω_{e,h_i}. Logo, pelo Lema 3.1.10 temos que $B_{e,h_i} \simeq M_{n_{e,h_i}}(S_{e,h_i})$ onde:

$$S_{e,h_i} = (\omega_{e,h_i,l_1})B_{e,h_i}(\omega_{e,h_i,l_1}), \text{ com } l_1 \in T_e \cap S_{d(h_i)}.$$

Lembremos que $B_{e,h_i} = \bigoplus\limits_{\substack{g\in G_e \\ k\in T_e\cap S_{d(h_i)}}} E_g\delta_g\# v_k$. Seja $x = \sum\limits_{\substack{g\in G_e \\ k\in T_e\cap S_{d(h_i)}}} a_g\delta_g\# v_k$. Então

$$
\begin{aligned}
x\omega_{e,h_i,l_1} &= \sum_{\substack{g\in G_e\\ k\in T_e\cap S_{d(h_i)}}} \sum_{d(t)=d(k)} a_g\delta_g(v_{kt^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_tv_{l_1}\\
&= \sum_{\substack{g\in G_e\\ k\in T_e\cap S_{d(h_i)}}} a_g\delta_g(v_{kl_1^{-1}}.1_e\delta_e)\#v_{l_1}\\
&= \sum_{g\in G_e} a_g\delta_g 1_e\delta_e\#v_{l_1}\\
&= \sum_{g\in G_e} a_g\delta_g\#v_{l_1}.
\end{aligned}
$$

Agora temos que:

$$
\begin{aligned}
\omega_{e,h_i,l_1}x\omega_{e,h_i,l_1} &= (1_e\delta_e\#v_{e,h_i,l_1})(\sum_{g\in G_e} a_g\delta_g\#v_{l_1})\\
&= \sum_{g\in G_e}\sum_{d(t)=d(l_1)} 1_e\delta_e(v_{l_1t^{-1}}.a_g\delta_g)\#v_tv_{l_1}\\
&= \sum_{g\in G_e} 1_e\delta_e(v_{l_1l_1^{-1}}.1_g\delta_g)\#v_{l_1}\\
&= \sum_{g\in G_e} 1_e\delta_e(v_e.a_g\delta_g)\#v_{l_1}\\
&= 1_e\delta_e a_e\delta_e\#v_{l_1}\\
&= a_e\delta_e\#v_{l_1}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\omega_{e,h_i,l_1}B_{e,h_i}\omega_{e,h_i,l_1} = E_e\delta_e\#v_{l_1}.
$$

Mostremos que a aplicação $\varphi : E_e \longrightarrow E_e\delta_e \otimes v_{l_1}$ dada por $\varphi(a_e) = a_e\delta_e\#v_{l_1}$ é isomorfismo de K-álgebras.

Claramente φ é um homomorfismo sobrejetor de K-módulos. Mostremos que φ é multiplicativa. De fato, sejam $a_e, b_e \in E_e$ então

$$
\begin{aligned}
\varphi(a_e)\varphi(b_e) = (a_e\delta_e\#v_{l_1})(b_e\delta_e\#v_{l_1}) = a_e\delta_e(v_{l_1l_1^{-1}}.b_e\delta_e)\#v_{l_1} = a_e\delta_e(v_e.b_e\delta_e)\#v_{l_1}\\
= a_e\delta_e b_e\delta_e\#v_{l_1} = a_e\beta_e(b_e)\delta_e\#v_{l_1} = a_eb_e\delta_e\#v_{l_1} = \varphi(a_eb_e).
\end{aligned}
$$

Além disso, seja $a_e \in E_e$ tal que $\varphi(a_e) = 0$. Então,

$$0 = a_e\delta_e\#v_{l_1} = a_e\delta_e(1_e\delta_e\#v_{l_1}) = a_e\delta_e(1_A\#v_{l_1}).$$

Mas, como $\{1_A\#v_h \mid h \in G\}$ é linearmente independente sobre $R \star_\beta G$ então $a_e = 0$. Logo, φ é um isomorfismo de K-álgebras. Desta forma, temos que

$$S_{e,h_i} = \omega_{e,h_i,l_1} B_{e,h_i} \omega_{e,h_i,l_1} = E_e\delta_e \otimes v_{l_1} \simeq E_e.$$

Portanto, $B_{e,h_i} \simeq M_{n_{e,h_i}}(E_e)$. □

Teorema 3.1.12. *A álgebra unitária B_0 é isomorfa a uma soma direta de K-álgebras de matrizes, mais especificamente*

$$B_0 = \bigoplus_{e\in G_0} (\bigoplus_{i=1}^{n_e} M_{n_{e,h_i}}(E_e)).$$

Demonstração: Sabemos que $B_0 = \bigoplus_{e\in G_0} B_e = \bigoplus_{e\in G_0} (\bigoplus_{i=1}^{n_e} B_{e,h_i})$. Mas, pela proposição anterior temos que $B_{e,h_i} \simeq M_{n_{e,h_i}}(E_e)$. Logo, segue o resultado. □

3.2 Dualidade 2

Seja A uma K-álgebra com unidade G-graduada por um grupóide finito G. Então pelo Teorema 1.4.1 temos que A é um KG^*-módulo álgebra à esquerda e sendo assim podemos construir o produto smash fraco:

$$B = A\#KG^*.$$

Proposição 3.2.1. *Uma ação de G sobre $A\#KG^*$ é dada por:*

$$\beta = (\{B_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$$

onde $B_g = \bigoplus_{\substack{l,k\in G \\ d(k)=r(g)}} A_l\#v_k$ *e* $\beta_g : B_{g^{-1}} \longrightarrow B_g$ *é dada por* $\beta_g(a_l\#v_k) = a_l\#v_{kg^{-1}}$ *tal que* $B = \bigoplus_{e\in G_0} B_e$.

Demonstração: Mostremos primeiro que B_g é um ideal de $A\#KG^*$. De fato, sejam $x = a_l\#v_k \in B_g$ e $y = b_s\#v_t \in A\#KG^*$. Então, $d(k) = r(g)$ e

$$xy = (a_l\#v_k)(b_s\#v_t) = \begin{cases} a_l(v_{kt^{-1}}.b_s)\#v_t, & \text{se } d(k) = d(t) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por definição $v_{kt^{-1}}.b_s \neq 0$ se e somente se $kt^{-1} = s$. Isto ocorre se e somente se $t = s^{-1}k$. Note que, se $t = s^{-1}k$ então $d(t) = d(k)$. Logo,

$$xy = (a_l\#v_k)(b_s\#v_t) = \begin{cases} a_lb_s\#v_t, & \text{se } t = s^{-1}k \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora vejamos:

$$a_lb_s \begin{cases} \in A_{ls}, & \text{se } d(l) = r(s) \\ = 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim concluímos que

$$xy = (a_l\#v_k)(b_s\#v_t) = \begin{cases} a_lb_s\#v_t, & \text{se } t = s^{-1}k \text{ e } d(l) = r(s) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que $d(t) = d(s^{-1}k) = d(k) = r(g)$, então $xy \in B_g$. Analogamente mostra-se que $yx \in B_g$. Além disso, claramente $B_g = B_{r(g)}$ para todo $g \in G$.

Agora mostremos que $\beta_g : B_{g^{-1}} \longrightarrow B_g$ é um isomorfismo de anéis. Com efeito, dados $x = a_l\#v_k$ e $y = b_s\#v_t$ em $B_{g^{-1}}$ temos $d(k) = d(g) = d(t)$ e $xy = a_l(v_{kt^{-1}}.b_s)\#v_t$. Sabemos que $v_{kt^{-1}}.b_s \neq 0$ se e somente se $kt^{-1} = s$. Isto ocorre se e somente se $t = s^{-1}k$. Como $d(s^{-1}k) = d(k) = d(g)$ então podemos considerar $t = s^{-1}k$. Assim,

$$xy = (a_l\#v_k)(b_s\#v_t) = \begin{cases} a_lb_s\#v_t, & \text{se } t = s^{-1}k \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas $a_lb_s \neq 0$ se e somente se $d(l) = r(s)$. Portanto,

$$xy = (a_l\#v_k)(b_s\#v_t) = \begin{cases} a_lb_s\#v_t, & \text{se } t = s^{-1}k \text{ e } d(l) = r(s) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Consequentemente,

$$\beta_g(xy) = \begin{cases} a_l b_s \# v_{tg^{-1}}, & \text{se } t = s^{-1}k \text{ e } d(l) = r(s) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\beta_g(x)\beta_g(y) = (a_l \# v_{kg^{-1}})(b_s \# v_{tg^{-1}}),$$

e como $d(kg^{-1}) = d(g^{-1}) = r(g) = d(tg^{-1})$ temos

$$\begin{aligned} \beta_g(x)\beta_g(y) &= a_l(v_{kg^{-1}(tg^{-1})^{-1}}.b_s) \# v_{tg^{-1}} \\ &= a_l(v_{kg^{-1}gt^{-1}}.b_s) \# v_{tg^{-1}} = a_l(v_{kd(g)t^{-1}}.b_s) \# v_{tg^{-1}} \\ &= a_l(v_{kt^{-1}}.b_s) \# v_{tg^{-1}}. \end{aligned}$$

Sabemos que $v_{kt^{-1}}.b_s \neq 0$ se e somente se $t = s^{-1}k$ e que $a_l b_s \neq 0$ se e somente se $d(l) = r(s)$. Desta forma,

$$\beta_g(x)\beta_g(y) = \begin{cases} a_l b_s \# v_{tg^{-1}}, & \text{se } t = s^{-1}k \text{ e } d(l) = r(s) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $\beta_g(xy) = \beta_g(x)\beta_g(y)$. Mais ainda, é fácil verificar que $\beta_g^{-1} = \beta_{g^{-1}}$. Logo, β_g é um isomorfismo de anéis para todo $g \in G$.

Naturalmente, $\beta_e = I_{B_e}$, para todo $e \in G_0$.

Finalmente, provaremos que $\beta_g\beta_h = \beta_{gh}$, para todo $(g,h) \in G^2$. Suponha que $d(g) = r(h)$ primeiramente. Observe que o domínio $dom(\beta_g\beta_h)$ da composta $\beta_g\beta_h$ é $\beta_{h^{-1}}(B_h \cap B_{g^{-1}})$. Mas, $d(g) = r(h)$ e assim $B_h \cap B_{g^{-1}} = B_h$. Logo, $\beta_{h^{-1}}(B_h \cap B_{g^{-1}}) = \beta_{h^{-1}}(B_h) = B_{h^{-1}}$.

Por outro lado, $dom(\beta_{gh}) = B_{(gh)^{-1}} = \sum_{d(k)=d(gh)} A_l \# v_k$. Entretanto, $d(gh) = d(h)$ implica que $B_{(gh)^{-1}} = B_{h^{-1}}$. Portanto, $dom(\beta_g\beta_h) = dom(\beta_{gh}) = B_{h^{-1}}$ e para todo $x = a_l \# v_k \in B_{h^{-1}}$ temos

$$\begin{aligned} \beta_g(\beta_h(x)) = \beta_g(\beta_h(a_l \# v_k)) = \beta_g(a_l \# v_{kh^{-1}}) &= a_l \# v_{kh^{-1}g^{-1}} \\ = a_l \# v_{k(gh)^{-1}} = \beta_{gh}(a_l \# v_k) &= \beta_{gh}(x). \end{aligned}$$

Desta forma β é uma ação de G sobre $A\#KG^*$. Além disso, dado $x = a_l\#v_k \in A\#KG^*$ então $x \in B_{d(k)}$ e se $e \neq f \in G_0$ então naturalmente $B_e \cap B_f = 0$. Logo, $B = \bigoplus\limits_{e\in G_0} B_e$. $\square$

Uma vez que G age sobre $A\#KG^*$ então podemos formar:

$$B \star_\beta G = \bigoplus_{g\in G} B_g\delta_g$$

com multiplicação dada por:

$$(a_l\#v_k)\delta_g(b_s\#v_t)\delta_h = \begin{cases} a_l\#v_k\beta_g(b_s\#v_t)\delta_{gh}, \text{ se } d(g)=r(h) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Lembremos (ver Observação 1.3.7 (1)) que como A é G-graduada então A_e é unitário para todo $e \in G_0$, denotemos por $1_e = 1_{A_e}$.

Proposição 3.2.2. *As seguintes afirmações se verificam:*

(1) $B \star_\beta G = \bigoplus\limits_{g\in G} \underbrace{(\bigoplus\limits_{d(k)=r(g)} A_l\#v_k)}_{B_g}\delta_g = B_0 \oplus B_1,$

onde $B_0 = \bigoplus\limits_{e\in G_0}(\bigoplus\limits_{g\in G_e}(\bigoplus\limits_{\substack{r(l)=d(l)=r(k)\\ d(k)=e}} A_l\#v_k)\delta_g)$ *e* B_1 *é o complementar de* B_0 *em* $B \star_\beta G$ *como* K*-módulos.*

(2) $B_2(B \star_\beta G) = 0$*, onde* $B_2 = \bigoplus\limits_{g\in G}(\bigoplus\limits_{\substack{d(l)\neq r(k)\\ d(k)=r(g)}} A_l\#v_k)\delta_g$*. Em particular,* $B \star_\beta G$ *não tem unidade.*

(3) B_0 *é uma* K*-subálgebra unitária de* $B \star_\beta G$*, com elemento identidade igual a* $w = \sum\limits_{e\in G_0}(\sum\limits_{f\in G_0} 1_f\# \sum\limits_{h\in T_f\cap S_e} v_h)\delta_e$.

Demonstração: (1) Imediato.

(2) Sejam $x = (a_l\#v_k)\delta_t \in B_2$ e $y = (a_g\#v_h)\delta_s \in B \star_\beta G$. Então, $d(l) \neq r(k)$, $d(k) = r(t)$ e $d(h) = r(s)$. Logo,

$$xy = \begin{cases} (a_l \# v_k)\beta_t(a_g \# v_h)\delta_{ts}, \text{ se } d(t) = r(s) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (a_l \# v_k)(a_g \# v_{ht^{-1}})\delta_{ts}, \text{ se } d(t) = r(s) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (a_l(v_{kth^{-1}}.a_g) \# v_{ht^{-1}})\delta_{ts}, \text{ se } d(t) = r(s) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por definição $v_{kth^{-1}}.a_g \neq 0$ se e somente se $kth^{-1} = g$. Isto ocorre se e somente se $t = k^{-1}gh$. Se $t = k^{-1}gh$ então $d(t) = d(h) = r(s)$ e $r(t) = r(k^{-1}) = d(k)$. Assim,

$$xy = (a_l a_g \# v_{g^{-1}k})\delta_{k^{-1}ghs}.$$

Mas, como $g = kth^{-1}$ então $r(g) = r(k) \neq d(l)$. Consequentemente, $a_l a_g = 0$. Portanto, $xy = 0$ e, sendo assim, $B_2(B \star_\beta G) = 0$.

(3) Claramente B_0 é um K-submódulo de $B \star_\beta G$. Considere $x = (a_l \# v_k)\delta_g$ e $y = (b_s \# v_t)\delta_h$ em B_0. Então $r(l) = d(l) = r(k)$, $d(k) = e$, $r(s) = d(s) = r(t)$, $d(t) = f$, $g \in G_e$ e $h \in G_f$, com $e, f \in G_0$, e

$$xy = \begin{cases} a_l \# v_k \beta_g(b_s \# v_t)\delta_{gh}, \text{ se } e = f \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (a_l \# v_k)(b_s \# v_{tg^{-1}})\delta_{gh}, \text{ se } e = f \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Note que, $d(tg^{-1}) = d(g^{-1}) = r(g) = e = d(k)$. Então,

$$xy = \begin{cases} (a_l(v_{k(tg^{-1})}.b_s) \# v_{tg^{-1}})\delta_{gh}, \text{ se } e = f \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por definição $v_{kgt^{-1}}.b_s \neq 0$ se e somente se $kgt^{-1} = s$. O que necessariamente implica que $r(k) = r(t)$. Note também que $s = kgt^{-1}$ ocorre se e somente se $tg^{-1} = s^{-1}k$. Disto decorre que

$$xy = \begin{cases} (a_l b_s \# v_{tg^{-1}})\delta_{gh}, \text{ se } e = f \text{ e } tg^{-1} = s^{-1}k \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos analisar a seguinte situação: $e = f$ e $s = kgt^{-1}$. Daí, $xy = (a_l b_s \# v_{s^{-1}k})\delta_{gh}$. Como $s = kgt^{-1}$ então $d(l) = r(k) = r(s)$ e, sendo assim, $a_l b_s \in A_{ls}$. Observe que $d(ls) = d(s)$, $r(ls) = r(l) = r(k) = r(s) = d(s)$ e $r(s^{-1}k) = r(s^{-1}) = d(s)$. Assim, $d(ls) = r(ls) = r(s^{-1}k)$. Finalmente, $d(s^{-1}k) = d(k) = e = r(g) = r(gh)$ e, além disso, como $g, h \in G_e$ então $gh \in G_e$. Portanto, $xy \in B_0$ e consequentemente B_0 é uma K-subálgebra de $B \star_\beta G$.

Resta mostrarmos que $w = \sum\limits_{e\in G_0}(\sum\limits_{f\in G_0} 1_f \# \sum\limits_{h\in T_f\cap S_e} v_h)\delta_e$ é o elemento identidade de B_0. De fato, seja $x = (a_l \# v_k)\delta_g \in B_0$, isto é, $g \in G_{e'}$, para algum $e' \in G_0$, $r(l) = d(l) = r(k)$ e $d(k) = e'$. Então,

$$\begin{aligned}
wx &= \sum_{e\in G_0}(\sum_{f\in G_0} 1_f \# \sum_{h\in T_f\cap S_e} v_h)\delta_e(a_l\#v_k)\delta_g \\
&= (\sum_{f\in G_0} 1_f \# \sum_{h\in T_f\cap S_{e'}} v_h)\delta_{e'}(a_l\#v_k)\delta_g \\
&= \sum_{f\in G_0} 1_f \# \sum_{h\in T_f\cap S_{e'}} v_h\beta_{e'}(a_l\#v_k)\delta_g \\
&= (\sum_{f\in G_0} \sum_{h\in T_f\cap S_{e'}} (1_f\#v_h)(a_l\#v_k))\delta_g \\
&= (\sum_{f\in G_0} \sum_{h\in T_f\cap S_{e'}} 1_f(v_{hk^{-1}}.a_l)\#v_k)\delta_g.
\end{aligned}$$

Por definição $v_{hk^{-1}}.a_l \neq 0$ se e somente se $hk^{-1} = l$. Isto ocorre se e somente se $h = lk$. Note que, se $h = lk$ então $d(h) = d(k) = e'$ e $r(h) = r(l)$. Logo,

$$wx = (1_{r(l)}a_l\#v_k)\delta_g.$$

Mas $a_l = 1_A a_l = (\sum\limits_{e\in G_0} 1_e)a_l = \sum\limits_{e\in G_0} 1_e a_l = 1_{r(l)}a_l$, pois $1_e a_l = 0$ se $e \neq r(l)$. Portanto, $wx = x$. Analogamente mostra-se que $xw = x$. □

Na sequência mostraremos que B_0 é isomorfa a uma soma direta de álgebras de matrizes. Para tanto necessitamos (assim como vimos na seção anterior) da devida preparação.

Proposição 3.2.3. *A seguintes afirmações se verificam:*

(1) $W = \{w_e := (\sum\limits_{f\in G_0} 1_f \# \sum\limits_{h\in T_f\cap S_e} v_h)\delta_e \mid e\in G_0\}$ *é um conjunto de idempotentes centrais dois a dois ortogonais em* B_0 *cuja soma é igual a* $w = 1_{B_0}$*,*

(2) $B_0 = \bigoplus\limits_{e\in G_0} B_0 w_e$*, onde* $B_e = B_0 w_e = \bigoplus\limits_{g\in G_e} (\bigoplus\limits_{\substack{r(l)=d(l)=r(k)\\ d(k)=e}} A_l \# v_k)\delta_g$ *é um ideal de* B_0 *e uma* K*-álgebra unitária com elemento identidade* w_e*.*

Demonstração: (1) Sejam $e, e^{'} \in G_0$. Então,

$$w_e w_{e'} = [(\sum_{f\in G_0} 1_f \# \sum_{h\in T_f\cap S_e} v_h)\delta_e][(\sum_{f'\in G_0} 1_{f'} \# \sum_{l\in T_{f'}\cap S_{e'}} v_l)\delta_{e'}]$$

Pela definição, temos que

$$w_e w_{e'} = \begin{cases} (\sum\limits_{f\in G_0} 1_f \# \sum\limits_{h\in T_f\cap S_e} v_h)(\sum\limits_{f'\in G_0} 1_{f'} \# \sum\limits_{l\in T_{f'}\cap S_e} v_l)\delta_e, \text{ se } e = e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{f,f'\in G_0} \sum\limits_{\substack{h\in T_f\cap S_e\\ l\in T_{f'}\cap S_e}} (1_f \# v_h)(1_{f'} \# v_l)\delta_e, \text{ se } e = e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{f,f'\in G_0} \sum\limits_{\substack{h\in T_f\cap S_e\\ l\in T_{f'}\cap S_e}} 1_f(v_{hl^{-1}}.1_{f'}) \# v_l \delta_e, \text{ se } e = e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por definição, $v_{hl^{-1}}.1_{f'} \neq 0$ se e somente se $hl^{-1} = f^{'}$. Isto ocorre se e somente se $h = l$ e neste caso, se e somente se $f = f^{'}$. Logo,

$$w_e w_{e'} = \begin{cases} \sum\limits_{f\in G_0} 1_f \# \sum\limits_{h\in T_f\cap S_e} v_h \delta_e = w_e, \text{ se } e = e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, os w_e's são idempotentes dois a dois ortogonais.

Resta mostrarmos que para cada $e \in G_0$, w_e é central em B_0. De fato, seja $x = (a_l \# v_k)\delta_g \in B_0$, isto é, $g \in G_{e'}$, para algum $e^{'} \in G_0$, $r(l) = d(l) = r(k)$ e $d(k) = e^{'}$. Então,

$$xw_e = \begin{cases} \sum\limits_{f\in G_0}\sum\limits_{h\in T_f\cap S_e} (a_l\#v_k)\beta_g(1_f\#v_h)\delta_{ge}, \text{ se } e=e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sum\limits_{f\in G_0}\sum\limits_{h\in T_{f\cap S_e}} (a_l\#v_k)(1_f\#v_{hg^{-1}})\delta_{ge}, \text{ se } e=e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sum\limits_{f\in G_0}\sum\limits_{h\in T_f\cap S_e} (a_l(v_{k(hg^{-1})^{-1}}.1_f)\#v_{hg^{-1}}\delta_g, \text{ se } e=e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por definição $v_{kgh^{-1}}.1_f \neq 0$ se e somente se $kgh^{-1} = f$. Isto ocorre se e somente se $h = kg$. Como $d(kg) = d(g) = e^{'}$ e $r(kg) = r(k)$. Daí,

$$xw_e = \begin{cases} (a_l 1_{r(k)}\#v_k)\delta_g, \text{ se } e=e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Mas, $a_l = a_l 1_A = \sum\limits_{e\in G_0} a_l 1_e = a_l 1_{d(l)} = a_l 1_{r(k)}$. Portanto,

$$xw_e = \begin{cases} x, \text{ se } e=e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$w_e x = \begin{cases} \sum\limits_{f\in G_0}\sum\limits_{h\in T_f\cap S_e} (1_f\#v_h)\beta_e(a_l\#v_k)\delta_{eg}, \text{ se } e=e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sum\limits_{f\in G_0}\sum\limits_{h\in T_f\cap S_e} (1_f\#v_h)(a_l\#v_k)\delta_g, \text{ se } e=e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \sum\limits_{f\in G_0}\sum\limits_{h\in T_f\cap S_e} (1_f(v_{hk^{-1}}.a_l)\#v_k)\delta_g, \text{ se } e=e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por definição $v_{hk^{-1}}.a_l \neq 0$ se e somente se $hk^{-1} = l$. Isto ocorre se e somente se $h = lk$. Como $d(lk) = d(k) = e$ e $r(lk) = r(l)$. Daí,

$$w_e x = \begin{cases} (1_{r(l)}a_l \# v_k)\delta_g = x, \text{ se } e = e^{'} \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $xw_e = w_e x = x$ se e somente se $e = e^{'}$ e $xw_e = w_e x = 0$, caso contrário, o que mostra que w_e é central em B_0.

(2) Observemos que $B_0 = B_0 w = B_0(\sum\limits_{e \in G_0} w_e) = \sum\limits_{e \in G_0} B_0 w_e$. Como os w_e's são ortogonais dois a dois então esta soma é direta. Uma vez que os w_e's são idempotentes centrais em B_0 então cada $B_e = B_0 w_e$ é um ideal de B_0 e uma subálgebra unitária. Além disso, pelos cálculos feitos para mostrarmos a centralidade dos w_e's temos que $B_e = \bigoplus\limits_{g \in G_e} (\bigoplus\limits_{\substack{r(l)=d(l)=r(k) \\ d(k)=e}} A_l \# v_k)\delta_g$. □

Proposição 3.2.4. *A seguintes afirmações se verificam:*

(1) Para cada $f \in G_0$, $W_f = \{w_{e,f} := (1_f \# \sum\limits_{h \in T_f \cap S_e} v_h)\delta_e \mid e \in G_0\}$ é um conjunto de idempotentes centrais em B_e ortogonais dois a dois com soma igual a $1_{B_e} = w_e$,

(2) Para cada $e \in G_0$, $B_e = \bigoplus\limits_{f \in G_0} B_{e,f}$ onde $B_{e,f} = B_e w_{e,f} = \bigoplus\limits_{g \in G_e} (\bigoplus\limits_{\substack{l \in G_f \\ k \in T_f \cap S_e}} A_l \# v_k)\delta_g$ é um ideal de B_e e uma K-álgebra unitária com elemento identidade $w_{e,f}$.

Demonstração: (1) Sejam $e, f, f^{'} \in G_0$. Então,

$$\begin{aligned} w_{e,f} w_{e,f'} &= (1_f \# \sum_{h \in T_f \cap S_e} v_h)\delta_e (1_{f'} \# \sum_{l \in T_{f'} \cap S_e} v_l)\delta_e \\ &= (1_f \# \sum_{h \in T_f \cap S_e} v_h)\beta_e (1_{f'} \# \sum_{l \in T_{f'} \cap S_e} v_l)\delta_e \\ &= \sum_{h \in T_f \cap S_e} \sum_{l \in T_{f'} \cap S_e} (1_f \# v_h)(1_{f'} \# v_{le})\delta_e \\ &= \sum_{h \in T_f \cap S_e} \sum_{l \in T_{f'} \cap S_e} (1_f \# v_h)(1_{f'} \# v_l)\delta_e \\ &= \sum_{h \in T_f \cap S_e} \sum_{l \in T_{f'} \cap S_e} (1_f(v_{hl^{-1}}.1_{f'}) \# v_l)\delta_e. \end{aligned}$$

Por definição $v_{hl^{-1}}.1_{f'} \neq 0$ se e somente se $hl^{-1} = f^{'}$. Isto ocorre se e somnete se $l = h$ e $f = r(h) = f^{'}$. Assim,

$$w_{e,f}w_{e,f'} = \begin{cases} (1_{f'}\# \sum\limits_{h \in T_{f'} \cap S_e} v_h)\delta_e = w_{e,f'}, \text{ se } f = f^{'} \\ \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, sejam $e, f \in G_0$. Mostremos que $w_{e,f}$ é central em B_e. Com efeito, seja $x = (a_l \# v_k)\delta_g \in B_e$, isto é, $g \in G_e$, $r(l) = d(l) = r(k)$, $d(k) = e$ e

$$\begin{aligned} xw_{e,f} &= (a_l \# v_k)\beta_g(1_f \# \sum_{h \in T_f \cap S_e} v_h)\delta_g \\ &= (a_l \# v_k)(1_f \# \sum_{h \in T_f \cap S_e} v_{hg^{-1}})\delta_g \\ &= \sum_{h \in T_f \cap S_e} (a_l \# v_k)(1_f \# v_{hg^{-1}})\delta_g \\ &= \sum_{h \in T_f \cap S_e} (a_l(v_{k(hg^{-1})^{-1}}.1_f) \# v_{hg^{-1}})\delta_g. \end{aligned}$$

Por definição $v_{kgh^{-1}}.1_f \neq 0$ se e somente se $h = kg$. Isto ocorre se e somente se $f = r(h) = r(kg) = r(k)$. Logo,

$$xw_{e,f} = \begin{cases} (a_l \# v_k)\delta_g = x, \text{ se } f = r(k) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} w_{e,f}x &= (1_f \# \sum_{h \in T_f \cap S_e} v_h)\beta_e(a_l \# v_k)\delta_g \\ &= (1_f \# \sum_{h \in T_f \cap S_e} v_h)(a_l \# v_k)\delta_g \\ &= \sum_{h \in T_f \cap S_e} (1_f \# v_h)(a_l \# v_k)\delta_g \\ &= \sum_{h \in T_f \cap S_e} (1_f(v_{hk^{-1}}.a_l) \# v_k)\delta_g. \end{aligned}$$

Pela definição $v_{hk^{-1}}.a_l \neq 0$ se e somente se $hk^{-1} = l$. Isto ocorre se e somente se $f = r(h) = r(l)$. Assim,

$$w_{e,f}x = \begin{cases} (a_l \# v_k)\delta_g = x, \text{ se } f = r(l) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Mas como $r(l) = r(k)$ então

$$xw_{e,f} = w_{e,f}x = \begin{cases} x, \text{ se } l \in G_f \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

(2) Observemos que $B_e = B_e w_e = B_e(\sum_{f \in G_0} w_{e,f}) = \sum_{f \in G_0} B_e w_{e,f}$. Como os $w_{e,f}$'s são ortogonais dois a dois então esta soma é direta. Uma vez que os $w_{e,f}$'s são idempotentes centrais em B_e então cada $B_{e,f} = B_e w_{e,f}$ é um ideal de B_e e uma subálgebra unitária. Além disso, pelos cálculos feitos para mostrarmos a centralidade dos $w_{e,f}$'s temos que $B_{e,f} = \bigoplus_{g \in G_e} (\bigoplus_{\substack{l \in G_f \\ k \in T_f \cap S_e}} A_l \# v_k)\delta_g$. □

Proposição 3.2.5. *Para cada $e, f \in G_0$,*

(1) $W_{e,f} = \{w_{e,f,h} := (1_f \# v_h)\delta_e \mid h \in T_f \cap S_e\}$ é um conjunto de idempotentes (não centrais) e ortogonais dois a dois em $B_{e,f}$ cuja soma é igual a $w_{e,f} = 1_{B_{e,f}}$,

(2) $U_{e,f} = \{u_{e,f,g} := (1_f \# \sum_{l \in T_f \cap S_e} v_l)\delta_g \mid g \in G_e\}$ é um subgrupo do grupo das unidades de $B_{e,f}$,

(3) $U_{e,f}$ age transitivamente por conjugação sobre o conjunto $W_{e,f}$.

Demonstração: (1) Sejam $e, f \in G_0$ e $h, l \in T_f \cap S_e$. Então,

$$\begin{aligned} w_{e,f,h}w_{e,f,l} &= (1_f \# v_h)\delta_e(1_f \# v_l)\delta_e \\ &= (1_f \# v_h)\beta_e(1_f \# v_l)\delta_e \\ &= (1_f \# v_h)(1_f \# v_l)\delta_e \\ &= (1_f(v_{hl^{-1}}.1_f) \# v_l)\delta_e. \end{aligned}$$

Por definição $v_{hl^{-1}}.1_f \neq 0$ se e somente se $h = l$. Logo,

$$w_{e,f,h}w_{e,f,l} = \begin{cases} (1_f\#v_h)\delta_e = w_{e,f,h}, & \text{se } h = l \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Naturalmente, $\sum\limits_{h\in T_e\cap S_e} w_{e,f,h} = w_{e,f} = 1_{B_{e,f}}$. Mostremos que $w_{e,f,h}$ não é central em $B_{e,f}$. De fato, seja $x = (a_l\#v_k)\delta_g \in B_{e,f}$, isto é, $g \in G_e$, $l \in G_f$, $k \in T_f \cap S_e$ e assim

$$\begin{aligned} w_{e,f,h}x &= (1_f\#v_h)\delta_e(a_l\#v_k)\delta_g \\ &= (1_f\#v_h)\beta_e(a_l\#v_k)\delta_{eg} \\ &= (1_f\#v_h)(a_l\#v_k)\delta_g \\ &= (1_f(v_{hk^{-1}}.a_l)\#v_k)\delta_g. \end{aligned}$$

Por definição $v_{hk^{-1}}.a_l \neq 0$ se e somente se $hk^{-1} = l$. Isto ocorre se e somente se $h = lk$. Como $d(lk) = d(k) = e$ e $r(lk) = r(l) = f$ então $lk \in T_f \cap S_e$, assim podemos considerar $h = lk$. Logo,

$$w_{e,f,h}x = \begin{cases} x, & \text{se } h = lk \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} xw_{e,f,h} &= (a_l\#v_k)\delta_g(1_f\#v_h)\delta_e \\ &= (a_l\#v_k)\beta_g(1_f\#v_h)\delta_{ge} \\ &= (a_l\#v_k)(1_f\#v_{hg^{-1}})\delta_g \\ &= (a_l(v_{k(hg^{-1})^{-1}}.1_f)\#v_{hg^{-1}})\delta_g. \end{aligned}$$

Pela definição da ação de KG^* sobre A temos que $v_{kgh^{-1}}.1_f \neq 0$ se e somente se $h = kg$. Assim,

$$xw_{e,f,h} = w_{e,f}x = \begin{cases} x, & \text{se } h = kg \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $w_{e,f,h}$ não é central em $B_{e,f}$.

(2) Sejam $e, f \in G_0$ e $g, h \in G_e$. Então,

$$\begin{aligned} u_{e,f,g}u_{e,f,h} &= (1_f\# \sum_{l\in T_f\cap S_e} v_l)\delta_g(1_f\# \sum_{k\in T_f\cap S_e} v_k)\delta_h \\ &= (1_f\# \sum_{l\in T_f\cap S_e} v_l)\beta_g(1_f\# \sum_{k\in T_f\cap S_e} v_k)\delta_{gh} \\ &= (1_f\# \sum_{l\in T_f\cap S_e} v_l)(1_f\# \sum_{k\in T_f\cap S_e} v_{kg^{-1}})\delta_{gh}. \end{aligned}$$

Mas, se $t = kg^{-1}$ então $r(t) = r(k) = f$ e $d(t) = d(g^{-1}) = r(g) = e$. Consequentemente $t \in T_f \cap S_e$. Reciprocamente, dado $k \in T_f \cap S_e$ tomando $t = kg$ temos que $r(t) = r(k) = f$, $d(t) = d(g) = e$ e $tg^{-1} = kgg^{-1} = ke = k$. Logo,

$$\begin{aligned} u_{e,f,g}u_{e,f,h} &= (1_f\# \sum_{l\in T_f\cap S_e} v_l)(1_f\# \sum_{t\in T_f\cap S_e} v_t)\delta_{gh} \\ &= \sum_{l,t\in T_f\cap S_e} (1_f(v_{lt^{-1}}.1_f)\# v_t)\delta_{gh} \\ &= \sum_{l\in T_f\cap S_e} (1_f\# v_l)\delta_{gh}. \end{aligned}$$

Como $r(gh) = r(g) = e = d(h) = d(gh)$ então $gh \in G_e$ e desta forma $u_{e,f,g}u_{e,f,h} \in U_{e,f}$. Finalmente, dado $u_{e,f,g} \in U_{e,f}$ é fácil verificar que $u_{e,f,g^{-1}} = u^{-1}_{e,f,g}$.

(3) Sejam $e, f \in G_0$, $g \in G_e$ e $h \in T_f \cap S_e$. Então,

$$\begin{aligned} u_{e,f,g}w_{e,f,h}u_{e,f,g^{-1}} &= (1_f\# \sum_{l\in T_f\cap S_e} v_l)\delta_g(1_f\# v_h)\delta_e(1_f\# \sum_{k\in T_f\cap S_e} v_k)\delta_{g^{-1}} \\ &= (1_f\# \sum_{l\in T_f\cap S_e} v_l)\beta_g(1_f\# v_h)\delta_g(1_f\# \sum_{k\in T_f\cap S_e} v_k)\delta_{g^{-1}} \\ &= \sum_{l\in T_f\cap S_e} (1_f\# v_l)(1_f\# v_{hg^{-1}})\delta_g(1_f\# \sum_{k\in T_f\cap S_e} v_k)\delta_{g^{-1}} \\ &= \sum_{l\in T_f\cap S_e} (1_f(v_{l(hg^{-1})^{-1}}.1_f)\# v_{hg^{-1}})\delta_g(1_f\# \sum_{k\in T_f\cap S_e} v_k)\delta_{g^{-1}} \\ &= (1_f\# v_{hg^{-1}})\delta_g(1_f\# \sum_{k\in T_f\cap S_e} v_k)\delta_{g^{-1}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_{e,f,g}w_{e,f,h}u_{e,f,g^{-1}} &= (1_f\#v_{hg^{-1}})\beta_g(1_f\#\sum_{k\in T_f\cap S_e} v_k)\delta_{gg^{-1}}\\
&= (1_f\#v_{hg^{-1}})(1_f\#\sum_{k\in T_f\cap S_e} v_{kg^{-1}})\delta_e\\
&= \sum_{k\in T_f\cap S_e}(1_f(v_{hg^{-1}(kg^{-1})^{-1}}.1_f)\#v_{kg^{-1}})\delta_e\\
&= \sum_{k\in T_f\cap S_e}(1_f(v_{hk^{-1}}.1_f)\#v_{kg^{-1}})\delta_e\\
&= (1_f\#v_{hg^{-1}})\delta_e.
\end{aligned}
$$

Note que $r(hg^{-1}) = r(h) = f$ e $d(hg^{-1}) = d(g^{-1}) = r(g) = e$. Logo, $hg^{-1} \in T_f \cap S_e$ e portanto $u_{e,f,g}w_{e,f,h}u_{e,f,g^{-1}} \in W_{e,f}$. Denotando por

$$u_{e,f,g}.w_{e,f,h} = u_{e,f,g}w_{e,f,h}u_{e,f,g^{-1}},$$

esta é naturalmente uma ação de $U_{e,f}$ sobre $W_{e,f}$. Finalmente, dados $h, l \in T_f \cap S_e$, basta tomar $g = l^{-1}h$ para termos $u_{e,f,g}.w_{e,f,h} = w_{e,f,l}$, mostrando assim que esta ação é transitiva. □

Proposição 3.2.6. *Sejam $e, f \in G_0$ e $h \in T_f \cap S_e$. Então*

$$B_{e,f} \simeq M_{n_{e,f}}(\bigoplus_{g\in G_e} A_g),$$

onde $n_{e,f}$ denota a cardinalidade da órbita de $w_{e,f,h}$.

Demonstração: Pela Proposição 3.2.5 temos que $U_{e,f}$ age transitivamente por conjugação sobre o conjunto $W_{e,f}$. Então, pelo Lema 3.1.10 segue que

$$B_{e,f} \simeq M_{n_{e,f}}(S_{e,f}),$$

onde $S_{e,f} = w_{e,f,h}B_{e,f}w_{e,f,h}$.

A partir daqui vamos proceder por etapas.

<u>Etapa 1:</u> $S_{e,f} = \bigoplus_{g\in G_e}(A_{hgh^{-1}}\#v_{hg^{-1}})\delta_g$.

De fato, seja $x = (a_l\#v_k)\delta_g \in B_{e,f}$. Então,

$$\begin{aligned} xw_{e,f,h} &= (a_l\#v_k)\delta_g(1_f\#v_h)\delta_e = (a_l\#v_k)\beta_g(1_f\#v_h)\delta_g \\ &= (a_l\#v_k)(1_f\#v_{hg^{-1}})\delta_g = (a_l(v_{k(hg^{-1})^{-1}}.1_f)\#v_{hg^{-1}})\delta_g. \end{aligned}$$

Por definição $v_{kgh^{-1}}.1_f \neq 0$ se e somente se $kgh^{-1} = f$. Isto ocorre se e somente se $kg = h$. Como $d(kg) = d(g) = e$ e $r(kg) = r(k) = f$ então podemos considerar $h = kg$. Logo,

$$xw_{e,f,h} = \begin{cases} (a_l\#v_{hg^{-1}})\delta_g, \text{ se } kg = h \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Continuando temos:

$$\begin{aligned} w_{e,f,h}xw_{e,f,h} &= (1_f\#v_h)\delta_e(a_l\#v_{hg^{-1}})\delta_g = (1_f\#v_h)\beta_e(a_l\#v_{hg^{-1}})\delta_g \\ &= (1_f\#v_h)(a_l\#v_{hg^{-1}})\delta_g = (1_f(v_{h(hg^{-1})^{-1}}.a_l)\#v_{hg^{-1}})\delta_g. \end{aligned}$$

Por definição $v_{hgh^{-1}}.a_l \neq 0$ se e somente se $hgh^{-1} = l$. Como $d(hgh^{-1}) = d(h^{-1}) = r(h) = t$ e $r(hgh^{-1}) = r(h) = f$ então podemos tomar $l = hgh^{-1}$. Assim,

$$w_{e,f,h}xw_{e,f,h} = \begin{cases} (a_{hgh^{-1}}\#v_{hg^{-1}})\delta_g, \text{ se } kg = h \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

<u>Etapa 2:</u> A aplicação $\varphi : G_e \longrightarrow G_f$ definida por $\varphi(g) = hgh^{-1}$ é claramente uma bijeção que induz um isomorfismo de K-álgebras $\theta : \bigoplus\limits_{g\in G_e} A_g \longrightarrow \bigoplus\limits_{g\in G_e} A_{hgh^{-1}}$ dada por $\theta(\sum\limits_{g\in G_e} a_g) = \sum\limits_{g\in G_e} a_{hgh^{-1}}$.

<u>Etapa 3:</u> A aplicação $\gamma : \bigoplus\limits_{g\in G_e} A_g \longrightarrow \bigoplus\limits_{g\in G_e} (A_{hgh^{-1}}\#v_{hg^{-1}})\delta_g$ dada por $\gamma(\sum\limits_{g\in G_e} a_g) = \sum\limits_{g\in G_e} (a_{hgh^{-1}}\#v_{hg^{-1}})\delta_g$ é um isomorfismo de K-álgebras.

É fácil ver que γ é um isomorfismo de K-módulos. Mostremos que γ é multiplicativa. Para tanto, basta mostrarmos que $\gamma(a_gb_l) = \gamma(a_g)\gamma(b_l)$, para todo $a_g \in A_a$ e $b_l \in A_l$, com $g, l \in G_e$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\gamma(a_g)\gamma(b_l) &= (a_{hgh^{-1}}\# v_{hg^{-1}})\delta_g(b_{hlh^{-1}}\# v_{hl^{-1}})\delta_l \\
&= (a_{hgh^{-1}}\# v_{hg^{-1}})\beta_g(b_{hlh^{-1}}\# v_{hl^{-1}})\delta_{gl} \\
&= (a_{hgh^{-1}}\# v_{hg^{-1}})(b_{hlh^{-1}}\# v_{hl^{-1}g^{-1}})\delta_{gl} \\
&= (a_{hgh^{-1}}(v_{hg^{-1}(hl^{-1}g^{-1})^{-1}}.b_{hlh^{-1}})\# v_{h(gl)^{-1}})\delta_{gl} \\
&= (a_{hgh^{-1}}(v_{hgh^{-1}}.b_{hgh^{-1}})\# v_{h(gl)^{-1}})\delta_{gl} \\
&= (a_{hgh^{-1}}b_{hlh^{-1}}\# v_{h(gl)^{-1}})\delta_{gl} \\
&= (\theta(a_g)\theta(b_l)\# v_{h(gl)^{-1}})\delta_{gl} \\
&= (\theta(a_gb_l)\# v_{h(gl)^{-1}})\delta_{gl} \\
&= ((a_gb_l)_{h(gl)h^{-1}}\# v_{h(gl)^{-1}})\delta_{gl} \\
&= \gamma(a_gb_l).
\end{aligned}
$$

Pelas etapas acima podemos concluir que:

$$
S_{e,f} = \bigoplus_{g\in G_e}(A_{hgh^{-1}}\# v_{hg^{-1}})\delta_g \simeq \bigoplus_{g\in G_e} A_g \quad \text{e} \quad B_{e,f} \simeq M_{n_{e,f}}(\bigoplus_{g\in G_e} A_g).
$$

□

Teorema 3.2.7. *A álgebra unitária B_0 é isomorfa a uma soma direta de K-álgebras de matrizes, isto é,*

$$
B_0 = \bigoplus_{e\in G_0}(\bigoplus_{f\in G_0} M_{n_{e,f}}(\bigoplus_{g\in G_e} A_g)).
$$

Demonstração: Sabemos pelas Proposições 3.2.3 e 3.2.4 que $B_0 = \bigoplus_{e\in G_0} B_e = \bigoplus_{e\in G_0}(\bigoplus_{f\in G_0} B_{e,f})$. Pela proposição anterior temos que $B_{e,f} \simeq M_{n_{e,f}}(\bigoplus_{g\in G_e} A_g)$. Logo, segue o resultado. □

Referências Bibliográficas

[1] R. Alfaro and G. Szeto, *Skew group rings which are Azumaya*, Communications in Algebra, **23(6)** (1995), 2255-2261.

[2] D. Bagio, D. Flôres and A. Paques, *Partial Actions of Ordered Groupoids on Rings*, Journal of Algebra and Its Applications, **9** (2010), 501-517.

[3] D. Bagio and A. Paques, *Partial groupoid Actions: globalization, Morita theory and Galois theory*, preprint.

[4] G. Böhm, *Doi-Hopf modules over weak entwining modules*, Comm. Algebra, **28** (2000), 4687-4698.

[5] G. Böhm, F. Nill and K. Szlachányi, *Weak Hopf algebra I. Integral theory and C^*-struture*, J. Algebra, (1999), 385-438.

[6] G. Böhm and K. Szlachányi, *A coassociative C^*-quantum group with integral dimensions*, Lett. in Math. Phys. **35** (1996), 437-456.

[7] H. Brandt, *Uber eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes*, Math. Ann. 96 (1926) 360-366.

[8] S. Caenepeel and E. De Groot, *Modules over weak entwining strutures*, Comtemporary Mathematics, **267** (2000), 31-54.

[9] S. Caenepeel, B. Ion, G. Militaru and S. Zhu, *The factorization problem and the smash biproduct of algebras and coalgebras*, Algebras and Representation Theory, in press.

[10] S. Chase, D. K. Harrison and A. Rosenberg, *Galois theory and Galois cohomology of commutative rings*, Mem. AMS, **52** (1968), 1-19.

[11] M. Cohen and S. Montgomery, *Group-graded Rings, Smash Products, and Group Actions*, American Mathematical Society, **282** (1984), 237-258.

[12] F. DeMeyer and E. Ingraham, *Separable Algebras Over Commutative Rings*, Springer Verlag, **181** (1971).

[13] M. Dokuchaev and R. Exel, *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*, Trans. AMS 357 (2005), 1931-1952.

[14] D. Freitas, *Extensões Galois-Azumaya-Hopf parciais*, Tese de doutorado, PPG-Mat UFRGS 2010.

[15] N.D. Gilbert, *Actions and expansions of ordered groupoids*, J. Pure Appl. Algebra 198 (2005), 175-195.

[16] K. Hirata, *Some types of separable extensions of rings*, Nagoya Math. J., **33** (1968), 107-115.

[17] K. Hirata and K. Sugano, *On Semisimple extensions and separable extensions over non commutative rings*, J. Math. Soc. Japan, **18** (1966), 360-373.

[18] S. Ikehata, *Note on Azumaya algebras and H-separable extensions*, Math. J. Okayama Univ., **23** (1981), 17-18.

[19] M. V. Lawson, *Inverse Semigroups*, World Scientific, New Jersey, 1998.

[20] F. Li and G. Liu, *On Strongly Groupoid Graded Rings and the Corresponding Clifford Theorem*, Algebra Colloquium, **13:2** (2006), 181-196.

[21] P. Lundström, *Separable Groupoid Ring*, Communications in Algebra, **34** (2006), 3029-3041.

[22] D. S. Passman, *The algebraic structure of group rings*, Wiley-Interscience, New York, 1977.

[23] K. Sugano, *Note on Semisimple extensions and separable extensions*, Osaka J. Math., **4** (1967), 265-270.

[24] G. Szeto and L. Xue, *Skew Group Rings which are Galois*, Internat. J. Math. and Math. Sci., **23(4)** (2000), 279-283.

[25] G. Szeto and L. Xue, *The Struture of Galois Algebras*, Jornal of Algebra, **237** (2001), 238-246.

[26] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Sc. Pub., 1991.