UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Grasiela Martini

ESTRATÉGIAS DE TRABALHO PARA A APRENDIZAGEM DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

PORTO ALEGRE
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Grasiela Martini

ESTRATÉGIAS DE TRABALHO PARA A APRENDIZAGEM DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado junto ao curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Marcus Vinicius de Azevedo Basso

PORTO ALEGRE
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

ESTRATÉGIAS DE TRABALHO PARA A APRENDIZAGEM DE OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Grasiela Martini

Orientador: Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

____

Prof. Dra. Marilaine de Fraga Sant’Ana

____

Prof. Dr. Francisco Egger Moellwald

PORTO ALEGRE, DEZEMBRO DE 2010

Dedico esse trabalho aos meus pais que me apoiaram em todos os momentos de minha formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado força, nesta caminhada.

A minha família, especialmente aos meus pais, Pedro Moacir Martini e Irani Teresinha Martini, pelo apoio carinho e compreensão em todos os momentos de minha vida. Muito obrigada por sempre me apoiarem em tudo.

Aos meus colegas, que conviveram comigo nos melhores momentos e nos mais difíceis, durante a faculdade.

Aos meus amigos, que sempre tiveram paciência comigo em todos os momentos.

Ao meu professor orientador Marcus Vinicius de Azevedo Basso, pelos ensinamentos neste trabalho e em toda graduação e, também, aos professores que aceitaram participar da banca examinadora, Francisco Egger Moellwald e Marilaine de Fraga Sant'Ana.

A Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em especial ao corpo docente do Instituto de Matemática e da Faculdade de Educação, pela oportunidade de formação gratuita e de qualidade.

RESUMO

Este trabalho tem como tema apresentar estratégias didáticas que auxiliem na aprendizagem de operações com números inteiros. As leituras das referências bibliográficas mostraram a utilidade em desenvolver este conteúdo, utilizando a reta numérica e situações-problemas. Minha principal inspiração, no desenvolvimento do texto, foi através dos autores Morais (2010), Megid (2001) e Meister (2009).

Os principais conceitos envolvidos ao longo do trabalho são o posicionamento e relações entre os números inteiros, bem como suas operações de adição e subtração. O objetivo é desenvolver atividades e estratégias que poderão auxiliar no tratamento deste conteúdo a partir do entendimento e da reflexão sobre a dificuldade que os alunos apresentam no entendimento do conteúdo referente a números inteiros, dando destaque aos números negativos, para após, apresentar algumas estratégias didáticas que poderão auxiliar no tratamento deste conteúdo.

Palavras-chaves: Números inteiros, dificuldades, proposta didática.

ABSTRACT

This paper has as an aim to present some teaching strategies that could help in the learning operations with whole numbers. The reference readings showed the utility in developing this subject, using the straight-numerical and situation problems. The main inspiration in developing this text were the authors Morais (2010), Megid (2001) and Meister (2009).

The main concepts involved throughout the work are positioning, the the relationship between whole numbers, as their operations of addition and subtraction. The goal is to develop activities and strategies that may assist in the dealing with this subject; based on the understanding and reflection of the difficulties that students have in comprehending these numbers. First of all, highlighting the negative numbers, for later, presenting some teaching strategies that may help in the dealing of this content.

Keywords: Whole numbers, difficulties, didactic proposal.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste estudo, analiso algumas dificuldades que os alunos apresentam ao desenvolverem o conceito e operarem com números inteiros, a partir de algumas referências bibliográficas e experiências de sala de aula. Também desenvolvo uma sequência de atividades propostas para o ensino dos números inteiros, para detectar e descrever as dificuldades que os alunos apresentaram na resolução de cada questão. Estas atividades foram selecionadas a partir de um estudo realizado em quatro livros didáticos e conta com a contribuição do artigo de autoria da Maria Auxiliadora B. A. Megid (2001), *Construindo Matemática na sala de aula: uma experiência com os números relativos* e da dissertação do autor Anuar D. de Morais (2010), *Fórmula (-1): Desenvolvendo objetos digitais de aprendizagem e estratégias para a aprendizagem das operações com números positivos e negativos.*

A escolha desse tema baseou-se nas dificuldades encontradas para o ensino-aprendizagem de operações com números inteiros e de sua importância para o futuro escolar discente. Em vários contatos, adquiridos nas disciplinas de Estágio em Educação Matemática II e III, com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino médio, presenciei certas dificuldades para operar com números inteiros. Percebi que os educandos cometem muitos erros ao realizar operações de adição e subtração. Também pude verificar que muitos não sabem localizar a posição de um determinado número inteiro na reta numérica.

Estas dificuldades ocorrem há vários anos, lembrando que o surgimento dos números inteiros foi de difícil aceitação pelos matemáticos da antiguidade. Os jovens continuam com estes obstáculos e, pior ainda, deixam de entender tópicos matemáticos em que se faz necessário utilizar números inteiros, sendo esta apenas uma justificativa para os bloqueios atuais em sua aprendizagem. Além de ser útil no aprendizado de outros conceitos, podemos encontrar a presença dos números inteiros no nosso cotidiano.

Outro fator que percebi, nessa minha experiência em sala de aula, é que esses mesmos alunos, que apresentam muitas dificuldades em matemática, neste caso, nas operações com números inteiros, tratam o assunto satisfatoriamente no seu dia-a-dia, conforme foi possível constatar durante a realização de minha prática de ensino nas disciplinas de Estágio. Por exemplo, quando um estudante sentia dúvidas ao realizar a operação $-5-7$, bastava incluir essa operação num contexto envolvendo dinheiro para ser resolvida imediatamente: *Se você tem uma dívida de cinco reais e realiza mais uma dívida de 7 reais, como ficou sua situação* *financeira?*. A partir dessas constatações, existem duas matemáticas a que aparece no cotidiano das pessoas e aquela estudada na escola?

Além de todas essas questões, que me fizeram pensar melhor sobre o processo de aprendizagem com números inteiros, principalmente ao trabalhar as operações de adição e subtração, a escola, onde realizei à prática da disciplina de Estágio em Educação Matemática II, sugeriu desenvolver um projeto com os alunos do 7º ano (6º série) sobre a "introdução dos números negativos". Ou seja, sobre a ampliação do conceito de números inteiros, visto que esses alunos, até o momento, haviam estudado somente os naturais. Este projeto foi desenvolvido paralelamente ao conteúdo ensinado pela professora titular da escola. A ideia inicial desse trabalho surgiu a partir da percepção dessa professora, em sua docência, de vários anos, das dificuldades que este tópico apresentava para os alunos. A preocupação estava na importância de compreender as operações com números inteiros, para não prejudicar o entendimento de outros conteúdos matemáticos.

Este desafio instigou-me a pensar como poderia trabalhar de modo que facilitasse o entendimento da passagem dos números inteiros positivos para os números inteiros negativos. Considero as situações apresentadas acima, referentes a possíveis modos de trabalhar com o conceito e as operações de adição e subtração com inteiros, de modo que o aluno dê sentido ao que está aprendendo.

Mas apesar de estar muito empolgada para trabalhar com este conteúdo, que gera muitas dificuldades para os estudantes, precisava entender melhor em que pontos eles sentiam maiores dúvidas e, com isso, desenvolver estratégias de trabalho que facilitassem seu entendimento.

Parti, então, para uma pesquisa bibliográfica sobre o tema, deparando-me com a dissertação de Marta Figueiredo dos Anjos (2008), intitulada *A difícil aceitação dos números negativos: um estudo sobre a teoria dos números de Peter Barlow (1776-1862)*. Essa leitura chamou-me atenção, pois abordava justamente o assunto que estava me intrigando no momento. Esse trabalho aborda a teoria do último matemático que rejeitou os números inteiros, sem se preocupar com algum tipo de proposta didática. Esse fato também me instigou a desenvolver este estudo, mas com um enfoque diferente daquela dissertação.

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), minha prioridade não foi estudar a rejeição que os números inteiros tiveram no passado, mas, desenvolver atividades que auxiliem professores a trabalhar este conceito em sala de aula e, espero eu, que auxiliem também os estudantes. Esta proposta didática abrange os seguintes itens: o posicionamento e comparação nos inteiros, módulo e inverso de um número inteiro e as operações de adição e subtração relacionadas a esses números.

Este TCC está estruturado da seguinte maneira:

No primeiro capítulo apresento brevemente a temática deste trabalho e seus objetivos. Em sequência, apresento um capítulo referente aos números inteiros, que comporta as dificuldades na aprendizagem destes números, a presença da matemática no dia a dia dos estudantes, a importância de desenvolver um TCC relacionado às operações de adição e subtração com inteiros e uma análise referente aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Orientações Curriculares Nacionais (OCN) e livros didáticos.

O quarto capítulo é destinado aos métodos de investigação, abrangendo a criação das atividades e o processo da coleta dos dados. No capítulo seguinte, analiso os resultados obtidos com a aplicação das atividades, enfatizando as dificuldades relacionadas ao conceito e às operações com números inteiros. Informo, nos últimos capítulos, as hipóteses discutidas e o resultado final das atividades propostas.

1.1 Objetivos

Conforme foi mencionado anteriormente, este Trabalho de Conclusão de Curso centra-se no ensino-aprendizagem de números inteiros na 6º série (7º ano) do ensino fundamental, e tem por objetivos:

1) Detectar e descrever algumas dificuldades presentes no entendimento do conteúdo referente a números inteiros, dando destaque à sua parte negativa.

2) Apresentar estratégias de trabalho visando auxiliar no tratamento deste conteúdo.

2. OS NÚMEROS INTEIROS

2.1 O desenvolvimento dos números inteiros do ponto de vista da história da matemática

Neste capítulo apresentamos estudos de alguns autores que tratam do ensino de números inteiros e de sua necessidade para os matemáticos da antiguidade. Através destes autores, busco mapear as principais dificuldades sobre o tema, para poder assim entender e elaborar propostas que auxiliem no ensino deste conceito.

A ideia de números negativos apareceu inicialmente na Matemática chinesa, na Antiguidade. Os chineses utilizavam os números negativos de forma rudimentar em suas atividades cotidianas. Eles utilizavam dois tipos de barras (bambu, ferro ou marfim), uma vermelha para representar os números positivos e outra de cor preta para indicar os números negativos. Durante séculos este conceito também foi usado pelos matemáticos gregos e hindus como instrumento para a resolução de problemas, cujas soluções, entretanto não eram considerados solução reais. Sendo assim, se admitia apenas “problemas nos quais é possível interpretar os valores negativos como algo positivo” (SCHUBRING, 2000, pág 55). Portanto, a ideia do número negativo ser resultado de uma equação era considerada absurda para muitos matemáticos.

Foi necessários mais de um milênio para que as regras de sinais fossem sistematizadas, e mais alguns séculos (até o século XIX) para que os inteiros, como campo numérico, se constituíssem formalmente. Euler admitiu a existência de quantidades menores que zero, além de definir as quatro operações sobre esses números. Embora sua interpretação fosse apenas acerca de lucros e dívidas, ele forneceu motivação para o cálculo com números inteiros.

O conceito de número inteiro começou a ser difundido no início do século XIX, a partir da descoberta da sua aplicabilidade em geometria por Lazare Carnot, que estava convencido da

> (...) predominância da Geometria sobre a Álgebra e só admite o estatuto de seres matemáticos para os valores absolutos, ou seja, os números que possam ser relacionados a substâncias. (SCHUBRING, 2000, p.61)

Na época restringiam-se as operações algébricas aos “casos executáveis”; por exemplo, a diferença $a – b$ é restrita ao caso $a > b$.

No entanto, o processo de construção dos números inteiros foi longo. Do ponto de vista histórico, predominou a necessidade de admitir a existência dos números negativos como quantidades reais e, o que gerou a ampliação dos sistemas numéricos, devido à impossibilidade de realizar a subtração $a - b$ nos naturais, nos casos em que $b < a$. Para superar este obstáculo, os matemáticos criaram um novo sistema de numeração, chamado números inteiros. Para eles esse sistema é apenas uma ampliação dos naturais, precisando então ser demonstrado que as leis e operações do sistema continuam a ser cumpridas.

No entanto, o processo de construção desse novo sistema não foi simples ou rápido. Sobre esse processo, Teixeira (1993), transcreve muitas idéias de Glaser, autor que analisa os obstáculos de natureza epistemológica impostos à compreensão dos números positivos e negativos ao longo da história. Glaser se preocupava em investigar se as dificuldades vividas pelos matemáticos ao longo do tempo eram as mesmas que afligem os estudantes da atualidade.

Teixeira (1993) aponta, no desenrolar da compreensão dos números negativos, seis obstáculos encontrados nas obras de vários matemáticos da época:

> (1) inaptidão para manipular quantidades isoladas; (2) dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas; (3) dificuldade em unificar a reta numérica manifesta pela diferenciação qualitativa entre quantidades positivas e negativas, pela concepção da reta como mera justaposição de duas semi-retas opostas, ou ainda por desconsideração do caráter simultaneamente dinâmico e estático dos números; (4) ambigüidade dos dois zeros: zero absoluto e zero como origem; (5) dificuldade de afastar-se de um sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos: fixação no estágio das operações concretas por oposição ao formal; (6) desejo de um modelo unificador: utilização de um modelo aditivo para o campo multiplicativo, ao qual não se aplica. (TEIXEIRA, 1993 p.62)

Dessa forma, não se trata simplesmente de entender as propriedades, mas de aplicá-las em outros contextos. Assim como na evolução histórica, em nível de pensamento dos alunos, o uso dos negativos antecede a sua compreensão.

Além de todos os obstáculos apresentados, Schubring (2000) se surpreende ao constatar que a regra de sinais (menos multiplicado por menos dá mais) também causou muitas dificuldades para os matemáticos. Uma justificativa para tais obstáculos, na época, estava no fato de não haver "demonstração formal" para tais regras nas operações.

Muito tempo se passou até que os matemáticos passassem a aceitar como válidas as regras de sinais, associadas às propriedades dos números inteiros, junto com todas as outras definições que governavam os inteiros negativos e frações na época. Após essa aceitação, os matemáticos passaram a discutir outros problemas que envolviam os números inteiros. Um deles envolvia a dualidade do sinal de menos, que representava dois significados diferentes: a operação de subtração e o inteiro negativo. Apesar da ausência de uma explicação formal, os números inteiros passaram a ser utilizados em diferentes áreas da matemática.

Após esse relato histórico, percebe-se que não é anormal, no ensino de matemática atual, que os estudantes tenham dificuldades de aprender as operações com números inteiros, uma vez que grandes matemáticos custaram para admiti-las.

Acredito que essas dificuldades estejam ligadas ao início da ampliação dos números naturais para os números inteiros, ou seja, o problema está na introdução da parte negativa. Com isso, penso que uma possível sugestão para abordar esse conceito é construir com os alunos uma ideia da importância da presença dos números inteiros em nossa vida.

2.2 Dificuldades na aprendizagem dos números inteiros

Os números negativos não geraram dificuldades somente no passado. Atualmente, os estudantes encontram obstáculos quando operam com esses números. Megid (2001) discute as dificuldades de seus alunos quando operaram pela primeira vez com os números inteiros através de algumas atividades, nas quais ela conseguiu não só perceber as dúvidas presente no raciocínio dos estudantes, mas também “construir” com eles as principais propriedades sobre números inteiros. Além disso,

> Essa experiência, entretanto, mostrou-me que, além de materiais concretos, atividades envolvendo situações do cotidiano – recortes de jornais, interpretação de gráficos, construção de tabelas e painéis – são fundamentais para a construção do conhecimento matemático. (MEGID, 2001 p.181).

Constatei que alguns professores, observados ao longo de minha breve experiência profissional, utilizaram propostas tradicionais ao tratarem de números inteiros, através de exercícios repetitivos sem criatividade, sentido e contexto.

Ao ensinar o conceito de números inteiros no ensino fundamental, onde ocorre o primeiro contato com a representação numérica de números positivos e negativos, encontram-se inúmeras dificuldades. É geralmente neste primeiro momento que ocorre um impacto na maioria dos alunos pois, até então, usualmente, o indivíduo somente opera com números naturais e frações positivas. Por exemplo, ao comprar balas ou sorvetes, ele somente necessita quantidades positivas. Esse tipo de situação será desenvolvido em um tópico adiante, influenciado pelo livro “Na Vida Dez, na Escola Zero” de autoria Schliemann, Carraher e Carraher (1988).

A aprendizagem deste conceito de números inteiros inicia quando se começa a “demonstrar” através de exemplificações que a ideia de números negativos é algo que já faz parte do cotidiano de cada aluno, embora eles não se dêem conta disto. Ao aplicar exemplos, envolvendo dinheiro com números negativos em classe, nota-se que não há dificuldades em se obter o resultado pela maioria. Isso nos leva a refletir sobre a necessidade de se utilizar resolução de problemas no ensino e aprendizagem.

Essa aplicação sugere que o conhecimento matemático ganha mais significado quando o aluno tem situações-problemas para resolver. Além disso, possibilita ao aluno fazer conexões entre o conhecimento novo e aqueles que ele já conheceu. Assim, ele pode desenvolver a capacidade de mobilizar o conhecimento e de gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Como um exemplo, pode-se pedir a ele que compare algumas situações vivenciadas pela turma, como variação de temperatura, saldo negativo, perder em um jogo, dívidas, faltas e ausências.

Em cada situação-problema proposto por Megid (2001), ela justifica o porquê da escolha, o que pretende que os alunos aprendam ao realizar a atividade e qual a resposta obtida por eles. Esse posicionamento da autora, de primeiramente analisar os benefícios e o conteúdo possível de ser utilizado com os exercícios, antes de aplicá-los, é fundamental para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais eficientes para ensinar matemática.

Outra forma para trabalharmos com o conceito de números inteiros e suas operações de adição e subtração é a representação geométrica em uma reta. Este é um sistema muito interessante como recurso de ensino-aprendizagem, pois, além de visualizar o posicionamento dos números inteiros, os alunos conseguem compreender melhor as operações de adição e subtração com os mesmos. Além disso, operações com números inteiros é um conteúdo importante não só para o cotidiano dos alunos, mas na resolução de equações, o que lhes permite ao de compreender conceitos mais avançados em matemática.

A dissertação de Anuar Daian de Morais (2010) apresenta o auxílio da reta numérica para trabalhar as operações com números inteiros. Segundo Morais (2010), os alunos utilizam a reta numérica, pois sentem-se mais seguros ao visualizarem os conceitos e procedimentos analisados. Ao realizar as operações de adição e subtração na reta numerada, os próprios alunos poderão deduzir as regras de sinais através da generalização dos movimentos realizados, possibilitando uma nova forma de abordar e justificar a operação de adição e subtração com inteiros.

O método utilizado por Morais (2010) para resolver as operações de soma e subtração procura dar significado aos sinais de número e da operação. A primeira parcela indicará o posicionamento inicial que um indivíduo deve adotar. No segundo momento, ele deve analisar o sinal da segunda parcela: se o sinal foi positivo ele andará para a direita e se for negativo para a esquerda. Ao final ele olhará para o sinal da operação, que mostrará se ele andará no sentido mostrado na segunda parcela (operação positiva) ou se ele andará no sentido contrário ao sentido que ela representa (operação negativa). A posição final desta pessoa será o resultado da operação.

Além desse método, Morais (2010) menciona a importância de trabalhar com situações-problema para explicar este conteúdo, sugerindo que os problemas que abordam temperatura seriam os mais adequados para iniciar a discussão das operações de adição e subtração com inteiros.

Outro trabalho estudado foi um TCC de autoria de Júlio C. Meister (2009), *Estudando Dificuldades na Compreensão de Números Inteiros.* Meister (2009) analisa, através da Engenharia Didática, algumas dificuldades apresentadas pelos estudantes ao trabalharem com números inteiros, utilizando jogos para auxiliar no tratamento deste conteúdo. Analogamente, ao método utilizado nos trabalhos mencionados acima, Meister (2009) também afirma que contextualizar o assunto a ser ensinado é a melhor forma dos estudantes obterem uma boa compreensão do assunto:

> (...) o ensino dos números inteiros pode e deve ser relacionado com vivências, experiências cotidianas dos alunos, a fim de que o assunto em questão esteja presente no contexto dos estudantes. (MEISTER, 2009, p.11)

Juntando as dificuldades presentes nos três trabalhos mencionados acima e minha experiência em sala de aula, podemos destacar algumas dificuldades apresentada pelos estudantes quando trabalham com números inteiros:

- Diferenciar o sinal das operações do sinal dos números;
- Resolução das operações de adição e subtração com inteiros;
- Dificuldade em representar os problemas práticos através da escrita;
- Comparar os números inteiros;
- Dificuldade em interpretar problemas;

2.3 Matemática escolar x Matemática cotidiana

No conceito de números inteiros no ensino fundamental surgem muitas dificuldades ao se ensinar a parte negativa. A aprendizagem deste conceito inicia quando exemplificamos algumas situações, em que necessitamos da presença dos números inteiros em nossa vida. Ao realizar exemplos mentais em situações do dia a dia, nota-se que os alunos têm agilidade na resolução, mas quando se aplica um exemplo de forma numérica num modelo análogo ao anterior, nota-se que há dificuldades em chegar ao resultado pela maioria. Mas então, podemos afirmar que existem dois modos diferentes de desenvolver a matemática?

Em princípio, podemos já responder à pergunta acima, dizendo que não existem duas matemáticas diferentes, uma do dia-a-dia e outra, mais algébrica, aprendida na escola. Mas também não podemos afirmar que esses dois modos com que a matemática aparece são totalmente iguais. Schliemann, Carraher e Carraher (1988). no livro *Na vida dez, na escola zero,* se refere a esse questionamento:

> A aprendizagem de matemática na sala de aula é um momento de interação entre a matemática organizada pela comunidade científica, ou seja, a matemática formal, e a matemática como atividade humana. (SCHLIEMANN, CARRAHER E CARRAHER, 1988, p.12).

Mas será que ocorre essa interação na escola, quando se ensina matemática? Pois se houvesse, os alunos não teriam melhores resultados ao invés de apresentarem muitas dúvidas? Podemos então buscar entender um pouco mais por que muitas crianças se saiam tão mal na matemática escolar e muitas delas, se trabalhassem em feiras ou vendessem balas na rua, realizavam os cálculos envolvendo dinheiro sem dificuldades.

Não sabemos se vamos encontrar respostas, pois até mesmo Schliemann e seus colegas (1988) afirmam que:

> As situações de venda em uma feira e uma situação escolar são tantas que é difícil saber o que leva as crianças a se saírem muito bem nos problemas da vida e a demonstrarem tantas dificuldades ao resolverem os problemas na escola. (SCHLIEMANN, CARRAHER E CARRAHER, 1988, p.46).

No livro, *Na vida dez, na escola zero* temos justamente pesquisas que relatam possíveis modos de resolução que os estudantes aplicam ao desenvolverem problemas diários, que não aplicam nos problemas algébricos da escola. Nesse livro foram realizados vários testes, nos quais as crianças precisavam resolver problemas diários, orais e escritos. Pode-se perceber que os problemas que eles melhor enfrentaram se refere aos testes diários, depois aos testes orais que envolviam situações problemas, e por último aos testes escritos que eram do tipo algébrico. Os autores levantam métodos que as crianças utilizaram no momento em que estavam resolvendo os problemas. Tais métodos podem justificar essa disparidade nos resultados obtidos em cada teste.

Através de Schliemann, Carraher e Carraher (1988), percebemos que nos procedimentos orais, as crianças conseguiam fazer uma melhor manipulação de quantidades; elas conseguiam fazer modificações nos valores apresentados para trabalhar com quantidades mais manipuláveis, não havendo uma única maneira para resolver um mesmo problema. Outra característica importante nesse procedimento, é o fato delas darem um sentido para os cálculos que estavam realizando, podendo optar por várias formas de chegar ao resultado correto. “A presença de zeros facilita a resolução oral dos problemas ao contrário do que acontece com o cálculo escrito” (SCHLIEMANN, CARRAHER E CARRAHER, 1988, p. 63), ou seja, a criança optava pelo método do arredondamento, pelo qual ela facilmente consegue visualizar o resultado desejado. Já no procedimento escrito ela precisava saber o método algébrico, que não é o preferido dos estudantes.

No procedimento oral, percebeu-se um melhor resultado pelos alunos, visto que,

> (...) o modelos racionalista que se apóia exclusivamente em símbolos e fórmulas para expressar as relações matemáticas não parece ser o mais adequado para promover a compreensão matemática. (SCHLIEMANN, CARRAHER E CARRAHER, 1988, p.99).

Por outro lado, somente a experiência diária do indivíduo não é suficiente para promover todo o aprendizado de um determinado conteúdo. Por isso, segundo Schliemann e colegas (1988), quando combinamos a experiência diária com a escolar é que os melhores resultados são obtidos.

Não estamos querendo banir todas as fórmulas e procedimentos do sistema escolar. Estamos apenas pensando em maneiras de trabalhar com eles, ou seja, dar um significado a determinados conceitos, para que o aluno possa ter melhor aproveitamento escolar.

Segundo Schliemann, Carraher e Carraher (1988), o conjunto de situações usadas na escola é diferente das situações do cotidiano. Ou seja, os significados impostos aos conceitos aprendidos na escola não serão idênticos àqueles desenvolvidos no dia a dia. Da mesma forma que mencionamos anteriormente eles diferem por várias características, uma delas é a falta de significado com que os conteúdos são transmitidos no ambiente escolar, ou seja, o enfoque principal é na utilização de regras e conceitos mais abstratos.

Em síntese, podemos dizer então que a matemática diária oferece suporte para o modelo matemático ensinado na escola. Assim, neste trabalho, em todas as atividades presentes na estratégia metodológica, procuro associar alguma situação-problema que facilite a compreensão da importância de operarmos com os números negativos.

Na escola, o entendimento por parte dos alunos depende de vários fatores, por exemplo, do empenho que o professor disponibiliza para explicar determinados conceitos: se ele entende e domina o conteúdo, se ele planeja as atividades de acordo com a realidade na qual está inserido, se todo o conjunto escolar se preocupa com o aprendizado do aluno, independentemente da escola possuir recursos financeiros, se o aluno tem interesse em apreender e se empenha para que isso aconteça, se a família o incentiva a dar importância para o estudo, etc. Ou seja,

> Aprendemos, com isso, que não é possível culpar as crianças de seus fracassos na escola: a escola precisa descobrir o conhecimento dessas crianças e expandi-lo. Talvez sua política tenha sido, até hoje, a de reprimi-lo. (SCHLIEMANN, CARRAHER E CARRAHER, 1988, p.167)

Ao se ter qualquer experiência no ambiente escolar é fácil perceber os muitos pontos que precisariam ser modificados para se ter um melhor resultado no aprendizado dos alunos.

2.4 Importância de desenvolver um trabalho sobre operações com inteiros para mim, licencianda em Matemática

Neste tópico, discuto várias questões justificando a importância de desenvolver um trabalho relacionado às operações com inteiros, para a formação de futuros professores de matemática. Há algum tempo já se vem discutindo o auxílio das produções na área de Educação Matemática, no planejamento e desenvolvimento de aulas, a fim de que os alunos consigam um melhor entendimento dos conceitos dessa área.

Muitos professores de matemática, na hora de preparar suas aulas, questionam-se sobre o melhor modo de "introduzir" alguns conceitos matemáticos ao aluno, tendo em vista a importância futura no aprendizado correto desses conceitos. Ou seja, um educador matemático não pode, neste caso, ver a matéria sobre números inteiros como uma lista de conteúdos a ser transmitida ao aluno. Ele precisa ter consciência da utilidade que este conteúdo tem para os alunos.

Esses questionamentos podem ser tratados, quando este professor interessado em abordar os conceitos matemáticos de uma forma diferente, encontra trabalhos produzidos nessa área. Muito mais que auxiliar o educador, os trabalhos relacionados a conceitos matemáticos o fazem refletir sobre outras formas de transmitir esses conteúdos:

> (...) os resultados da pesquisa não podem determinar a ação a ser empreendida, mas simplesmente informar o professor, levá-lo a refletir sobre o que acontece e sobre o que ele poderia fazer (...) (GAUTHIER apud MOREIRA, 2007, p.41).

Com isso, ao desenvolver este trabalho referente a números relativos, dando um enfoque principal no tratamento dos negativos, além de entender melhor as origens das dificuldades relacionadas a esse conceito, presentes nos alunos, pretendo auxiliar outros futuros professores ou professores titulares a elaborarem atividades que facilitem o entendimento das operações com números relativos.

As pesquisas realizadas durante a formação acadêmica também ajudam, a formar profissionais que desenvolvam um senso crítico quanto à abordagem e a importância dos conteúdos na escola. Eles não vão se satisfizer em ser apenas educadores que ensinam por ensinar, mas sim professores que valorizam a educação e se doam ao máximo para que ocorram mudanças em prol do aperfeiçoamento da educação.

Reforçando esta idéia, segundo Moreira (2007),

> À medida que se desenvolvem estudos sobre os saberes mobilizados pelos professores na ação pedagógica na escola, abrem-se possibilidades concretas para que se possa desenvolver a formação na licenciatura com base em uma relação de complementaridade com o processo de produção de saberes da prática docente escolar. (MOREIRA, 2007, p.40)

No curso de Licenciatura em Matemática, estudamos os conceitos matemáticos de uma maneira mais profunda do que vamos aplicar na nossa prática em sala de aula. Segundo Moreira (2007), podemos dizer que a matemática acadêmica e a matemática escolar são diferentes. A primeira possui um aspecto mais demonstrativo, ou seja, tudo precisa ser provado de maneira formal, com exceção dos axiomas. Já segunda é uma matemática que foi fundamentada pela matemática acadêmica e que está voltada ao aprendizado de certos conceitos importante para os estudantes.

Podemos então nos perguntar por que desenvolvemos o espírito da demonstração na faculdade se não vamos utilizá-lo na escola? Ao estudar e entender o surgimento do conceito de números inteiros estamos aptos a estimular o raciocínio dedutivos dos alunos e não ensinar apenas regras e fórmulas matemáticas. Os alunos não precisam realizar demonstrações rigorosas para entender a origem das regras dos números inteiros, mas eles podem se interessar e entender este surgimento apenas justificando e deduzindo cada passo da passagem dos números naturais para os inteiros.

Na educação matemática escolar, o hábito da demonstração incentiva o aluno a desenvolver a capacidade de argumentação. Transferir algumas características da matemática acadêmica para a matemática escolar auxiliaria ou estimularia o estudante a desenvolver seu raciocínio para seu interesse e aprendizagem da matemática. Assim, ele teria consciência de que temos muitas coisas em aberto, para se pensar, no mundo da matemática.

Essa forma de trabalhar com os conceitos matemáticos não é a mais utilizada na realidade das escolas hoje. Ao contrário, através de experiências em sala de aula, percebe-se que o aluno está acostumado a decorar fórmulas e reproduzir procedimentos, enfim, a repetir o processo que o professor explica. Logo, quando se tenta abordar o conteúdo instigando o raciocínio do aluno, este, de início, já diz que não é para complicar mais ainda a matéria e sim explicar logo como precisa fazer.

Esse e outros métodos precisam ser pensados para serem aplicados no ensino dos alunos,

> O desenvolvimento de uma visão flexível e multifacetada do conhecimento matemático pode contribuir decisivamente para que o professor seja capaz de dialogar com seus alunos, de reconhecer e validar, quando for o caso, certos pontos de partida adotados para a construção de um conceito ou de avaliar uma determinada elaboração conceitual como adequada para certo estágio, ainda que se mostre necessária uma reelaboração em estágios posteriores. (MOREIRA, 2007, p.53).

Esse diálogo é fundamental para os alunos se sentirem à vontade para questionar e expor suas opiniões. E muitas vezes sugerirem formas diferentes para transmitir os conteúdos. A formação do professor é importante, pois o prepara para lidar com as dúvidas freqüentes dos alunos e “consertar” as concepções equivalentes que vão se formando. Além do mais, fornece uma postura mais segura em relação aos conteúdos que precisam ser transmitidos.

Cada trabalho divulgado na área de educação matemática constitui base importante para experiências futuras dos docentes, visto que o aprendizado adquirido ao buscar estudar novas possibilidades de realizar uma aula é imenso, permitindo a elaboração de aulas com novas metodologias.

2.5 Análise de livros didáticos e o que os PCN e OCN estão sugerindo

O objetivo principal desta seção é descrever e conectar algumas propostas didáticas dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (Brasil, 1998) e as

Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (Brasil, 2006) para melhorar o ensino dos números inteiros e compará-los com propostas oferecidas por alguns livros didáticos.

2.5.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental

Algumas propostas dos PCN (Brasil, 1998) a respeito dos números inteiros têm como base o desenvolvimento do conhecimento dos estudantes através da resolução de problemas envolvendo o seu cotidiano.

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade de gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança. (Brasil, 1998, p.40)

De acordo com os PCN (Brasil, 1998), as situações-problema demandam a realização de uma sequência de operações em sua resolução. Soluções podem já ter sido definidas no inicio, mas é possível também construí-las. Além do mais, não se trata simplesmente de dar uma reposta, é preciso verificar se ela faz realmente sentido. Estimular o aluno a questionar a sua resposta, e até mesmo o problema em si, é fundamental para o tratamento de tais situações.

Na perspectiva de relacionar os números inteiros com os naturais, os PCN (Brasil, 1998) consideram que os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, pela análise de diferentes situações em que esses números estejam presentes. Estes podem representar a falta, a diferença, direção ou deslocamento em uma reta numérica, em situações nas quais os alunos já tenham alguma idéia sobre esses números. Além desses aspectos, precisam ser apresentadas ao aluno situações pelas quais ele possa compreender as regras de cálculo presente nas operações com inteiros.

Outra sugestão dos PCN (Brasil, 1998) acerca do desenvolvimento conceitual dos números inteiros é a utilização da representação geométrica para trabalhar com sua localização, visualizar o ponto de referência (origem), identificar um número e seu oposto, comparar dois números, e deduzir regras das operações de adição e subtração.

A aprendizagem operatória dos números inteiros, tendo como pressuposto a compreensão de seu significado, supõe que o aluno domine as propriedades que regem os inteiros. Os processos necessários para compreendê-los podem ser resumidos:

- Compreensão de que os negativos são menores que os positivos;
- Diferenciar os positivos e os negativos;
- Ampliar a concepção do zero-ausência para o zero-origem;
- Compreender que a subtração é a operação inversa da adição e não apenas ligada à ideia de tirar;
- Compreender que adicionar duas grandezas com sinais diferentes (+ e -) é o mesmo que subtrair grandezas de mesmo sinal (+).

2.5.2 Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

As OCN (Brasil, 2006) colaboram para o ensino, oferecendo expectativas no auxílio ao docente em seu planejamento das aulas. Elas afirmam a importância de propiciar o prazer da descoberta para estimular o raciocínio lógico dos jovens. “Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não a quantidade de conteúdos a serem trabalhados” (Brasil, 2006). Devemos propiciar aos alunos uma diversidade de situações, capacitando-os a resolverem problemas de seu cotidiano.

Também é sugerido o trabalho com situações-problema:

> (...) a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação-problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno a construção do conhecimento matemático que permite resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento. (Brasil, 2006, p.81)

Por isso, as OCN (Brasil, 2006) sugerem não selecionar problemas, cujas resoluções os alunos já conhecem tornando-se esses pouco desafiadores; problemas interessantes devem provocar a construção de um *novo* raciocínio matemático. Além das situações-problema o docente precisa recorrer a outros elementos para diversificar a sua abordagem sobre os inteiros. Assim, os estudantes conseguem visualizar o mesmo conteúdo de diversas formas.

2.5.3 Livros Didáticos

Nesta seção, analiso as diferentes maneiras com que alguns livros didáticos apresentam o conceito de número inteiro para os alunos. Dentre elas, esses livros utilizam exercícios, etc.

Abaixo, está uma lista dos livros de 7º ano (6º série) que analisei em relação ao conceito dos números inteiros. Estes livros foram escolhidos pelo critério de serem de anos diferentes e o último livro é o adotado pela escola da rede pública onde desenvolvi o projeto da disciplina de estágio II:

- GIOVANI, José Ruy. **A conquista da matemática:** teoria e aplicação. São Paulo: FTD, 1992.

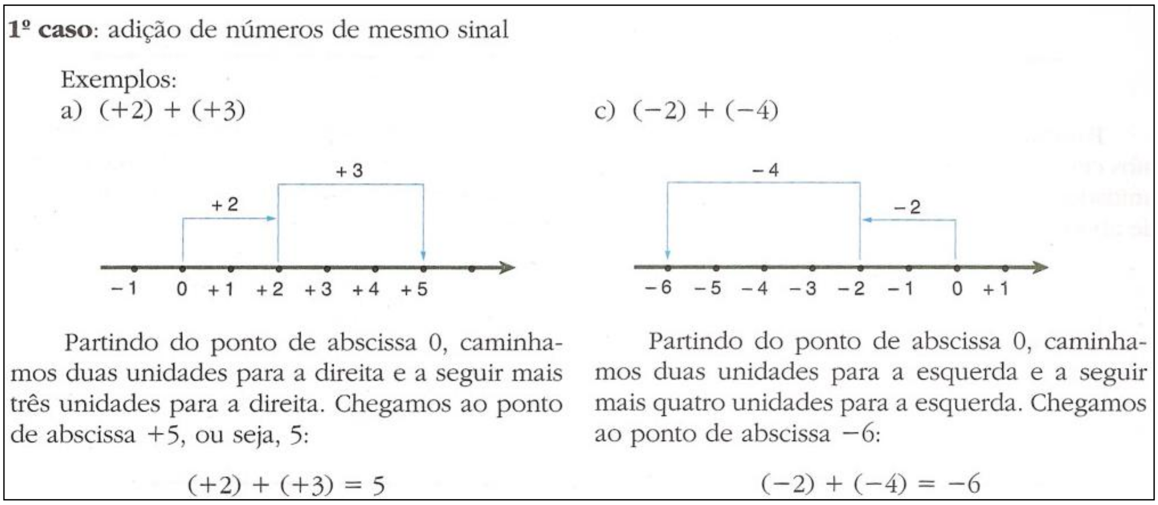
- BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática 6º série**. São Paulo: Moderna, 1996

- BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim:** 6º série (Coleção matemática hoje é feita assim). São Paulo: FTD, 2002

- BARROSO, Juliane M. **Projeto Araribá: matemática -** obra coletiva. São Paulo: Moderna, 2006.

O livro de Bianchini (1996) define os números inteiros através de uma operação, $5-7=-2$, na qual o minuendo é menor que o subtraendo, justificando que para essa operação existir, precisamos estender os números naturais. Ele disponibiliza poucas situações-problema, mas utiliza muito a reta numérica para exemplificar as principais relações entre os inteiros, como módulo, simetria, representação, comparação. Todos esses conceitos estão apresentados na primeira unidade do livro, dividido em oito capítulos. O autor reserva mais uma unidade do livro, a segunda, para exibir as operações com números inteiros. Nessa parte ele não trabalha com situações-problema, mas propõe as operações de adição e subtração através da reta numérica.

A Figura 1 mostra como o autor explica a adição de números de mesmo sinal:



1º caso: adição de números de mesmo sinal

Exemplos:

a) (+2) + (+3)

Partindo do ponto de abscissa 0, caminhamos duas unidades para a direita e a seguir mais três unidades para a direita. Chegamos ao ponto de abscissa +5, ou seja, 5:

$(+2) + (+3) = 5$

c) (−2) + (−4)

Partindo do ponto de abscissa 0, caminhamos duas unidades para a esquerda e a seguir mais quatro unidades para a esquerda. Chegamos ao ponto de abscissa −6:

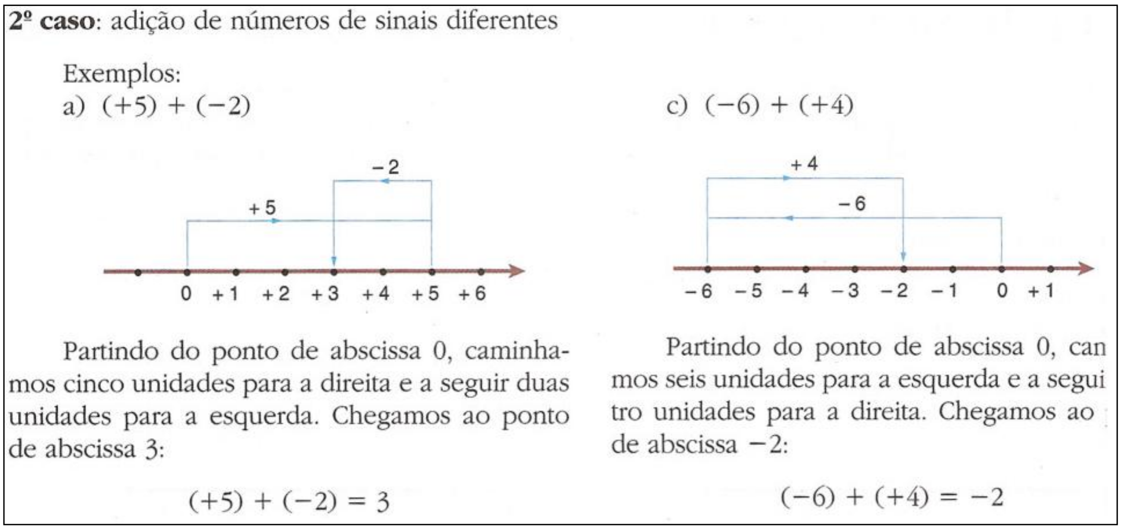
$(-2) + (-4) = -6$

Figura 1: Adição de números de mesmo sinal.

Fonte: BIANCHINI, 1996, p. 17

Seguindo estes exemplos, o autor sugere a seguinte regra: "A soma de dois números inteiros de mesmo sinal é obtida adicionando-se seus valores absolutos e conservando-se o sinal comum" (BIANCHINI, 1996, p. 17)

Após, ele explica a adição de números se sinais diferentes, conforme a Figura 2:



2º caso: adição de números de sinais diferentes

Exemplos:

a) (+5) + (−2)

Partindo do ponto de abscissa 0, caminhamos cinco unidades para a direita e a seguir duas unidades para a esquerda. Chegamos ao ponto de abscissa 3:

$(+5) + (-2) = 3$

c) (−6) + (+4)

Partindo do ponto de abscissa 0, can
mos seis unidades para a esquerda e a segui
tro unidades para a direita. Chegamos ao
de abscissa −2:

$(-6) + (+4) = -2$

Figura 2: Adição de números de sinais diferentes.

Fonte: BIANCHINI, 1996, p. 18

Analogamente, o autor enuncia a regra para este tipo de operação da adição: "A soma de dois números inteiros de sinais diferentes é obtida subtraindo-se seus valores absolutos, dando-se ao resultado o sinal do número de maior valor absoluto" (BIANCHINI, 1996, p. 18)

Este método de abordar a adição segue o utilizado por Morais (2010) em sua dissertação, mas em nenhum momento Bianchini (1996) contextualiza a operação de adição com inteiros e todos os exercícios propostos no livro são de caráter algébrico.

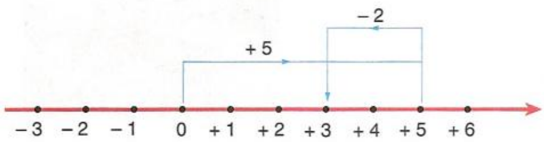
Na parte da subtração está bem colocado que devemos encarar esta operação como inversa da adição, mas acredito que não fica claro, para os alunos, a generalização da regra, como, por exemplo, em $(-6)-(-2)=(-6)+(+2)$, como mostra a Figura 3:

A subtração, como sabemos, é a operação inversa da adição.

Para efetuar uma subtração, por exemplo $(+3) - (+5)$, devemos procurar um número que somado com $+5$ dê como resultado o número $+3$. Indicando esse número por a, temos:

$$(+3) - (+5) = a \Leftrightarrow a + (+5) = (+3) \quad \text{ou} \quad (+5) + a = (+3)$$

Veja na reta numerada que, partindo do zero e caminhando $+5$, precisamos caminhar -2 para chegarmos em $+3$:



Portanto o valor de a é -2, ou seja: $(+3) - (+5) = -2$.

Temos também que $(+3) + (-5) = -2$ e então:

$$(+3) - (+5) = (+3) + (-5)$$

De modo geral, se a e b forem dois números inteiros:

$$a - b = a + (-b)$$

Isso nos permite dizer que:

A diferença entre dois números inteiros é calculada adicionando-se o primeiro número ao oposto do segundo.

Vamos aplicar a regra aos seguintes exemplos:

a) $(+6) - (+2) = (+6) + (-2) = 4$

b) $(-6) - (-2) = (-6) + (+2) = -4$

Figura 3: Subtração de números inteiros.

Fonte: BIANCHINI, 1996, p. 23

Assim como apresentou a operação de adição na reta numérica, Bianchini (1996) poderia ter apresentado a subtração, do mesmo modo que Moreira (2010).

O autor apenas adotou algumas situações-problema, sugeridas pelos PCN (Brasil, 1998) e OCN (Brasil, 2006), para iniciar o conteúdo referente a inteiros.

No livro *A conquista da matemática:* teoria e aplicações (Giovani, 1992) aborda o conceito de números inteiros na segunda unidade, iniciando com uma história sobre a extensão dos números naturais para os inteiros. Ele define esse conceito como números inteiros positivos e números inteiros negativos, através de exemplos com temperatura, destacando que há um referencial tomado como origem, o zero. As relações e propriedades nos inteiros são exemplificadas através da reta numérica, juntamente com as operações de adição e subtração. Nestas, ele utiliza também problemas para explanar aquelas propriedades, diferentemente do livro anterior, e apresenta dois tipos de exercícios: algébrico e situações-problema.

Mas, apesar dos problemas propostos para explicar a operação de subtração, a passagem do problema para a forma algébrica não é explicitado e, assim, pode não ficar clara para os alunos, conforme mostra a Figura 4:

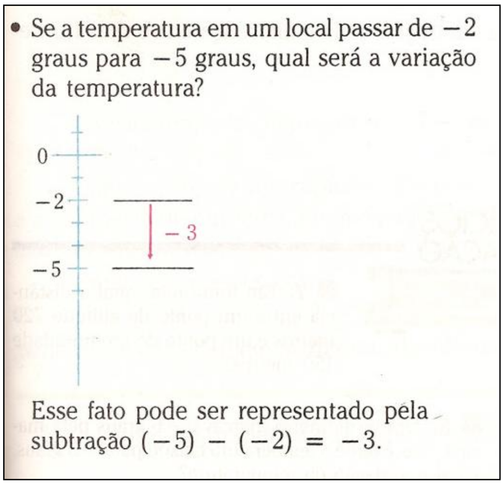


Figura 4: Subtração de inteiros envolvendo forma algébrica.

Fonte: GIOVANI, 1996, p.45.

Bigode (2002) propõe os números inteiros de maneira análoga à apresentada no livro de Giovani (1992), exemplificando até com mais situações a presença e surgimento destes números. As operações de adição estão explicadas de duas formas diferentes, uma através de problemas e outra através de “andar” sobre a reta numérica. O interessante deste livro é que o autor chama a atenção dos alunos, pois apresenta vários diálogos entre alunos, representados por falas em balões como os de histórias em quadrinhos, transmitindo informações importantes, como exemplificada pela Figura 5:

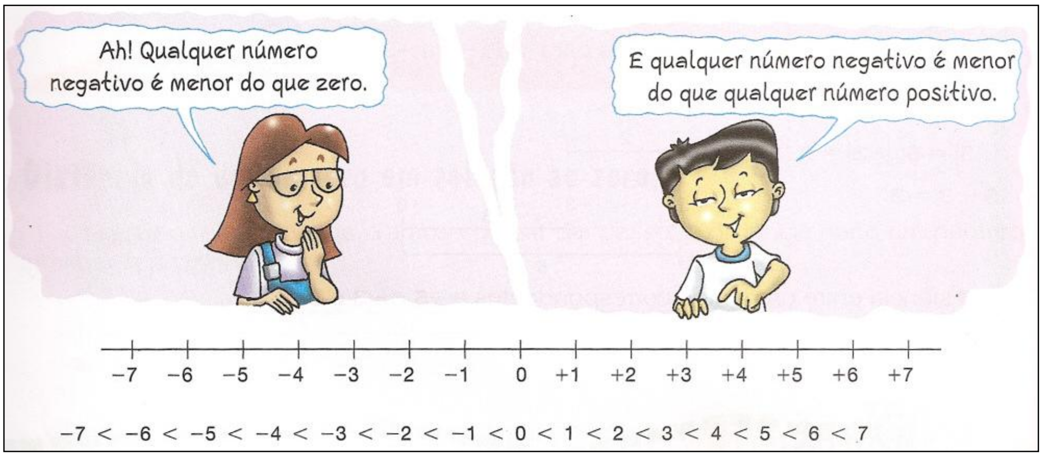
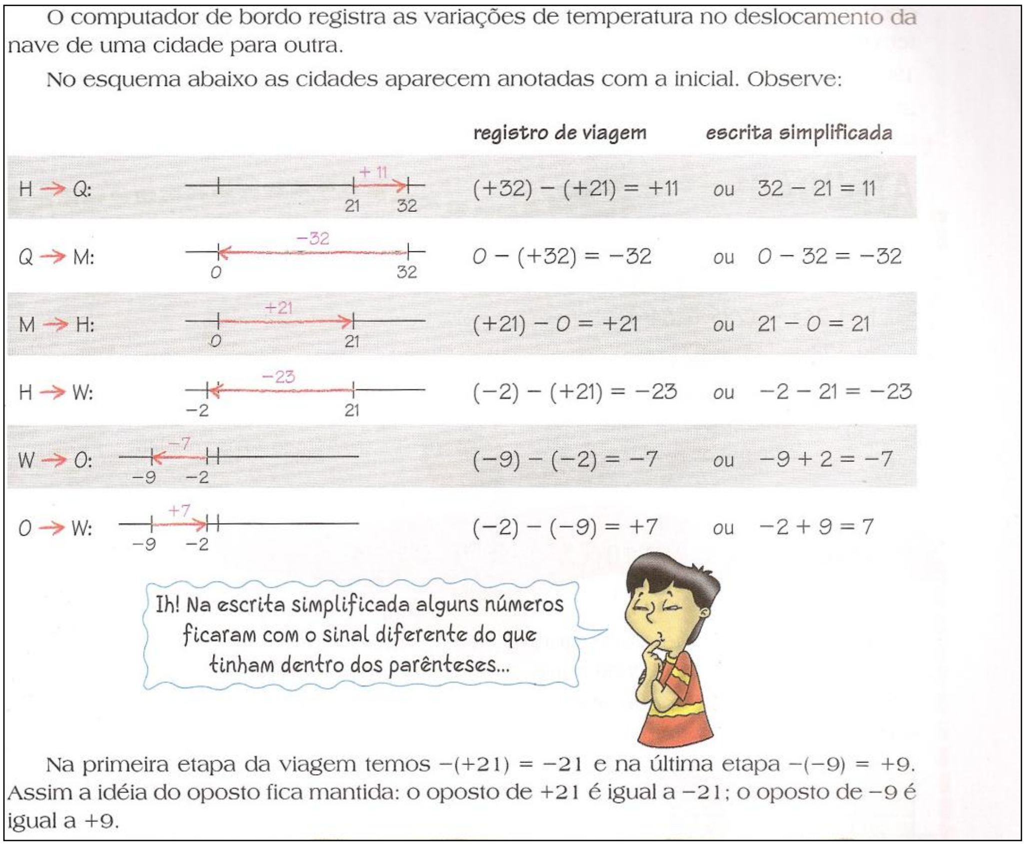


Figura 5: Abordagem utilizada para comparar os números inteiros.

Fonte: BIGODE, 2002, p.144.

Com isso, o livro se torna mais atrativo para os alunos.

Mas a explicação para a subtração com os inteiros é diferente à apresentada nos livros anteriores, como nos mostra a Figura 6:



O computador de bordo registra as variações de temperatura no deslocamento da nave de uma cidade para outra.

No esquema abaixo as cidades aparecem anotadas com a inicial. Observe:

		registro de viagem		escrita simplificada
H → Q:	+11; 21, 32	$(+32) - (+21) = +11$	ou	$32 - 21 = 11$
Q → M:	−32; 0, 32	$0 - (+32) = -32$	ou	$0 - 32 = -32$
M → H:	+21; 0, 21	$(+21) - 0 = +21$	ou	$21 - 0 = 21$
H → W:	−23; −2, 21	$(-2) - (+21) = -23$	ou	$-2 - 21 = -23$
W → O:	−7; −9, −2	$(-9) - (-2) = -7$	ou	$-9 + 2 = -7$
O → W:	+7; −9, −2	$(-2) - (-9) = +7$	ou	$-2 + 9 = 7$

Na primeira etapa da viagem temos $-(+21) = -21$ e na última etapa $-(-9) = +9$. Assim a idéia do oposto fica mantida: o oposto de $+21$ é igual a -21; o oposto de -9 é igual a $+9$.

Figura 6: Subtração com inteiros.

Fonte: BIGODE, 2002, p.145.

Nesta explanação, achei importante a idéia do oposto para entender a parte da operação – (+21) = – 21 e – (–9) = +9, mas no inicio da apresentação desta operação, o autor já disponibiliza um esquema de operações já realizadas com suas operações equivalentes. O aluno tomaria isso como verdade, mas sem uma explicação do por que é válido.

Por último, analiso o livro do Barroso (2006) que, além de ser o mais recente, é o livro adotado pela escola da rede pública onde desenvolvi o projeto da disciplina de Estágio II. Neste livro, a autora trabalha pouco com situações-problema, reta numérica e alguns jogos ao apresentar cada unidade do capítulo. Além do mais, ela é mais sucinta para explicar as operações de adição e subtração, não ficando visível o argumento utilizado para as propriedades desses cálculos. Ilustramos com as Figuras 7 e 8, a rapidez da autora em propor estas operações:

Adição com inteiros de mesmo sinal

A temperatura da carne que passou pela fritura sofreu um aumento de 155 °C.

A carne que foi armazenada na câmara frigorífica sofreu uma diminuição de 17 °C.

Temos duas situações para serem analisadas:

- Quando os dois números são positivos

  Que temperatura a carne atingiu ao ser frita?

  $$(+25) + (+155) = +180$$

  Ao ser frita, a carne atingiu a temperatura de 180 °C.

- Quando os dois números são negativos

  Qual é a temperatura da carne na câmara frigorífica?

  $$(-18) + (-17) = -35$$

  A temperatura da carne é de −35 °C.

Na adição com números inteiros de mesmo sinal, adicionam-se os valores absolutos e conserva-se o sinal dos números.

Adição com inteiros de sinais contrários

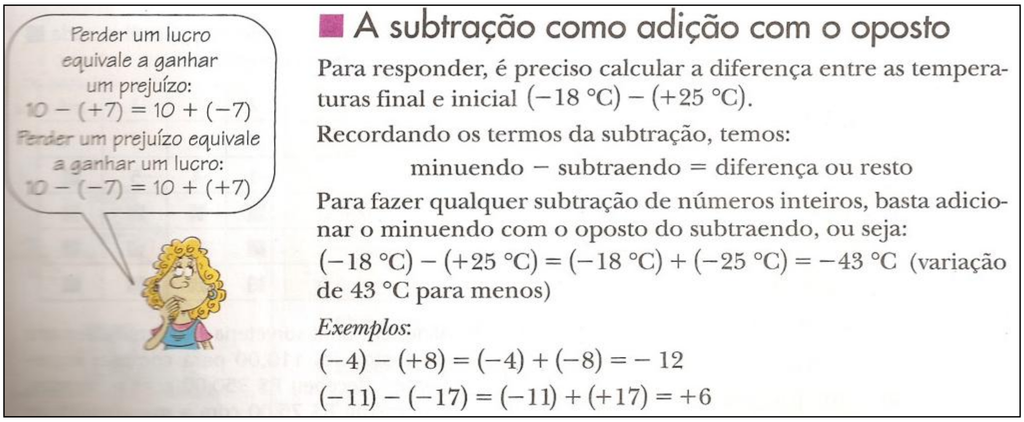
Um peixe estava em um *freezer* a uma temperatura de −18 °C. Ao ser colocado em um refrigerador, sua temperatura sofreu um aumento de 25 °C. Que temperatura esse peixe atingiu?

$$(-18) + (+25) = +7$$

Na adição com números inteiros de sinais contrários, subtraem-se os valores absolutos e conserva-se o sinal do número de maior valor absoluto.

Figura 7: Adição de inteiros.

Fonte: BARROSO, 2006, p.20.



Perder um lucro equivale a ganhar um prejuízo:
$10 - (+7) = 10 + (-7)$
Perder um prejuízo equivale a ganhar um lucro:
$10 - (-7) = 10 + (+7)$

A subtração como adição com o oposto

Para responder, é preciso calcular a diferença entre as temperaturas final e inicial $(-18\ °C) - (+25\ °C)$.

Recordando os termos da subtração, temos:

minuendo − subtraendo = diferença ou resto

Para fazer qualquer subtração de números inteiros, basta adicionar o minuendo com o oposto do subtraendo, ou seja:

$(-18\ °C) - (+25\ °C) = (-18\ °C) + (-25\ °C) = -43\ °C$ (variação de 43 °C para menos)

Exemplos:

$(-4) - (+8) = (-4) + (-8) = -12$

$(-11) - (-17) = (-11) + (+17) = +6$

Figura 8: Subtração de inteiros.

Fonte: BARROSO, 2006, p.24

Nesta minha análise dos livros didáticos, percebi que os autores utilizam mais as situações-problema e a reta numérica, no início do conceito de números inteiros. Já quando trabalham com as operações de adição e subtração, eles abandonam um pouco as sugestões dos PCN (Brasil, 1998) e OCN (Brasil, 2006), preocupando-se em reproduzir as propriedades enunciadas para cada tipo de operação.

3. MÉTODO DE INVESTIGAÇÃO

3.1 Criação de atividades

Apresentadas e comentadas nos capítulos anteriores as dificuldades que os alunos apresentam em relação à aprendizagem de números inteiros, podemos agora pensar em alguma sequência didática que vise a uma melhor compreensão dos alunos a respeito deste conteúdo.

As atividades para a realização desta sequência foram criadas a partir da leitura de livros didáticos de 6ª série e os artigos de Megid (2001) e Morais (2010), que abordam os conceitos de números inteiros, através do auxilio de uma reta numérica e de situações-problema envolvendo o cotidiano dos alunos.

Minha idéia é exemplificar o posicionamento dos números inteiros, suas propriedades e as operações de adição e subtração, através da reta numérica, incluindo problemas presentes no cotidiano dos estudantes. Em seguida, analiso o retorno que estes darão ao trabalharem este conteúdo desta forma.

Inicio a proposta didática com uma construção de um "varal de números" inteiros, que representará uma reta numerada. Com esta, representaremos a localização de números positivos e negativos, a distância de um número em relação ao zero ou entre dois números quaisquer, a comparação entre os números inteiros e o simétrico de um número. Após, posicionaremos algumas operações de adição e subtração no número que seria seu resultado. Adoto a idéia de "caminhar" pela reta, explicando que:

- A primeira parcela será a minha posição inicial;
- O sinal da operação indica se esse caminhar se dará no sentido direto ou no sentido inverso;
- O sinal do número da segunda parcela indica um caminhar para a esquerda ou para a direita;

Após essa construção do "varal dos números" e "varal das contas" (nome dado para o varal após o posicionamento das operações), distribuo uma lista de atividades a seguir para cada aluno. Nela, analiso o que os alunos entenderam a respeito dos números inteiros, aprendidos através da reta numérica, e como eles resolveriam problemas referente às situações de seu cotidiano. Solicitei aos alunos que escrevessem na folha das atividades todas as observações, justificativas, cálculos ou dúvidas que ocorressem durante sua resolução.

Atividades

1) Na atividade do varal dos números, descreva o que você percebeu sobre a representação dos números com relação: (Obs: você pode dar algum exemplo para relatar melhor)

a) posicionamento dos números positivos e negativos.

b) oposto de um número.

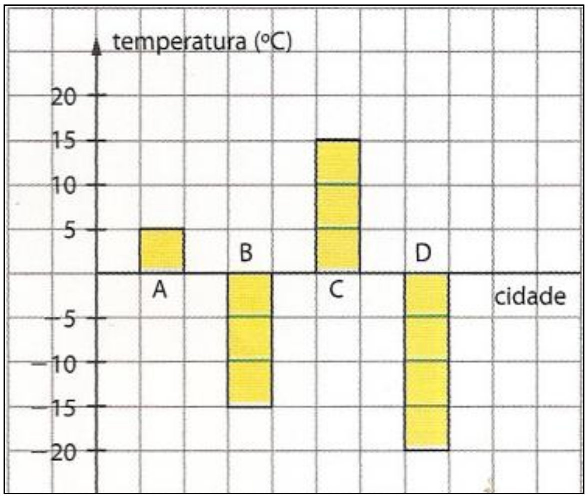
c) módulo de um número (distância desse número até o zero na reta numerada).

d) comparação de números positivos e negativos.

2) Veja no gráfico as temperaturas mínimas de 4 cidades em um mês de dezembro. Depois, responda às questões.

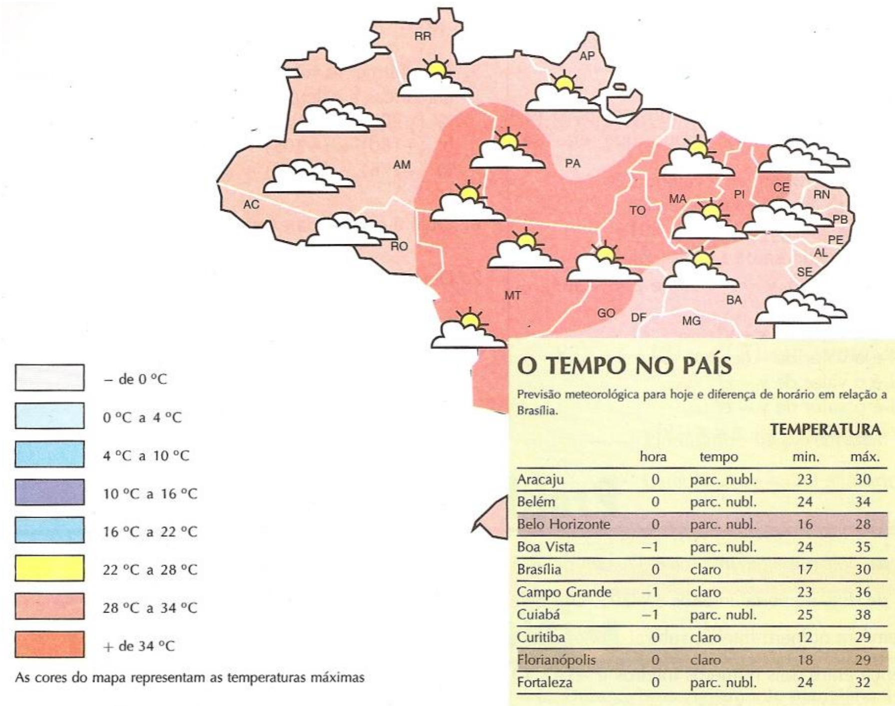
a) Qual cidade apresentou menor temperatura? Qual era a temperatura? Argumente sua resposta.

b) Duas cidades apresentam duas temperaturas iguais em módulo, mas seguramente em uma delas estava muito mais frio que em outra. Quais eram essas cidades? Qual a variação entre as temperaturas? Como você calculou a variação dessas duas temperaturas?



3) Um edifício que está sendo construído possui 15 andares, sendo que dois deles estão no subsolo e servirão para a garagem, além do andar onde ficará a portaria que fica no nível da rua. Desenhe sugestões de como será o quadro de andares do elevador que a construtora do edifício precisará encomendar. Faça o desenho.

4) Observe as informações desse recorte de jornal.



O TEMPO NO PAÍS

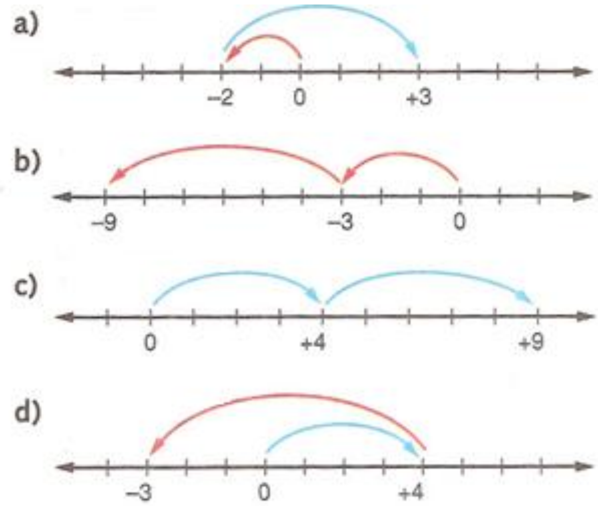
Previsão meteorológica para hoje e diferença de horário em relação a Brasília.

	hora	tempo	TEMPERATURA min.	máx.
Aracaju	0	parc. nubl.	23	30
Belém	0	parc. nubl.	24	34
Belo Horizonte	0	parc. nubl.	16	28
Boa Vista	–1	parc. nubl.	24	35
Brasília	0	claro	17	30
Campo Grande	–1	claro	23	36
Cuiabá	–1	parc. nubl.	25	38
Curitiba	0	claro	12	29
Florianópolis	0	claro	18	29
Fortaleza	0	parc. nubl.	24	32

Fonte: *Folha de S. Paulo*, set. 1994.

Responda: Qual a variação entre a temperatura máxima e a temperatura mínima de Belo Horizonte? Descreva o seu raciocínio.

5) Observe as representações e escreva as adições e subtrações correspondentes.



6) Através da atividade acima e da atividade do varal dos números com contas, que característica a adição e a subtração com números positivos e negativos apresentam. (Para justificar, abaixo estão às contas com os resultados encontrados na atividade do varal das contas, você pode utilizar os diferentes exemplos para explicar e criar a sua própria "regra" para adição e subtração de números positivos e negativos).

3 – (- 4) = 7	10 – 6 = 4	- 8 + 11 = 3	7 – 7 = 0	- 2 + 3 = 1	4 – (-4) = 8	- 1 – (-10) = 9
3 – (-3) = 6	- 1 + 11 = 10	- 6 + (-4) = -10	(-2) – 6 = -8	-21 + 14 =-7	-4 + (-2) = -6	
-2 + 0 = -2	7 – 8 = -1	0 – (-5) = +5	12 – 17 = -5	- 2 + (-2) = -4		

Dando sequência a proposta didática acima, desenvolvi mais três atividades, que tem por objetivo, estimular a criatividade dos estudantes, saber se expressar e entender um problema inventado por seu colega.

Continuação das atividades:

7) Invente um problema envolvendo números positivos e negativos e dê para o seu colega resolver.

8) Você recebeu um problema elaborado por um colega da turma. Escreva a sua opinião sobre este problema e tente resolvê-lo.

9) Você lembra do varal dos números e do varal das contas, o uso destes dois varais ajudou você a fazer cálculos com os números positivos e negativos. Explique por quê.

3.2 Coleta de dados

A prática foi desenvolvida na E.E.E.F Brasília com alunos de 6º série (atual 7º ano). Foram realizados três encontros com duração de duas horas cada, no turno da tarde, das 13h30min às 15h30min, sendo este inverso às aulas normais dos estudantes. A execução desta prática ocorreu nos dias 21 e 28 de junho de 2010 e 05 de julho de 2010. Ressalvo que essas atividades ocorreram em sequência ao período em que realizei o projeto de Estágio II, mencionado no início deste trabalho. Destaco que nesse período apenas foram trabalhadas por mim situações que exemplificam a existência dos números inteiros, mas a professora titular da turma já estava trabalhando as operações de adição e subtração de inteiros. Sua metodologia consistia em seguir o livro didático, analisado no capítulo anterior.

Outra observação pertinente deve-se ao fato da quantidade de alunos ter variado durante o período desta prática. No primeiro encontro compareceram 18 alunos, no segundo 12 e no terceiro apenas 8 estudantes. Acredito que isto ocorreu porque a professora convidou inicialmente toda a turma para participarem do projeto, contudo com o passar do tempo, observei que apenas os alunos interessados mantiveram presença nos encontros.

O primeiro encontro foi dedicado à construção do “varal dos números" e do “varal das contas”. Para esse encontro, elaborei em casa “fichas” de papel, em cada uma das quais estava escrito um número inteiro de -10 a 10. Além dessa quantidade de “fichas”, construí a mesma quantia de fichas, cada uma contendo agora uma operação de adição ou de subtração nos inteiros. Iniciei desenhando uma linha no quadro, representando uma a reta numérica, e nela marquei “traços”, cuidando para que o espaço entre um e outro fossem iguais.

Questionei os alunos sobre em qual lugar poderia colocar a “ficha” que representava o número zero. Após todos entrarem em acordo quanto ao posicionamento do zero, mais ou menos na metade da reta, solicitei que um aluno de cada vez fosse ao quadro e grudasse o número que sua “ficha” representava no lugar correspondente da reta numérica, observando que os números deveriam estar dispostos de maneira crescente. Eles poderiam pedir ajuda dos colegas se houvesse necessidade. Terminado o posicionamento dos inteiros no “varal dos números”, exemplifiquei através dele o que seria o oposto e o módulo de um número e como seria a comparação entre os inteiros.

O segundo momento do encontro foi a vez de posicionar as operações de adição e subtração no seu resultado no “varal dos números” construído anteriormente. Para os estudantes entenderem como realizar cada operação, utilizei a idéia de “caminhar” pela reta, mencionada na seção anterior:

- A primeira parcela será a minha posição inicial;
- O sinal da operação indica se esse caminhar de dará no sentido direto ou no sentido oposto;
- O sinal do número da segunda parcela indica uma caminhada para a esquerda ou para a direita;

Novamente, avisei que eles poderiam pedir ajuda aos colegas. Em cada operação quando posicionada no resultado, questionava a turma se a resposta estava certa ou não, sempre solicitando que explicassem como ficaria se estivesse errada, tomando o cuidado para que todos entendessem a operação.

A Figura 9 representa um modelo de como ficou o “varal dos números” realizado com os alunos e a Figura 10 o modelo do “varal das contas”.

Figura 9: “Varal dos números”

Figura 10: “Varal das contas”

Para analisar o que os alunos entenderam deste encontro, distribui no segundo encontro uma lista contendo a primeira parte das atividades propostas na seção anterior. Esta lista, além de conter atividades referentes ao que foi trabalhado dos números inteiros na reta numérica, possui três situações problemas que tem por objetivo perceber se eles conseguiram manipular esse conteúdo nessas situações. A correspondente análise deu-se através das respostas escritas e de discussões no momento da correção da lista de atividades. A correção foi realizada no encontro seguinte, o último, pois queria ter acesso às respostas dos alunos para realizar uma análise dos registros dos alunos antes da correção em sala de aula.

Recolhida essas respostas, entreguei aos alunos a segunda parte da proposta didática, solicitando que eles apenas realizassem a primeira atividade, que consistia de inventar um problema envolvendo os números inteiros. Pedi que eles se trocassem essa atividade e terminassem de resolver a lista em casa. A coleta de dados dessa atividade ocorreu através das respostas dos estudantes.

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo Apresento minha análise dos resultados obtidos na aplicação da proposta didática mencionada no capítulo anterior, descrevendo alguns benefícios que suas atividades proporcionaram aos estudantes, bem como as dificuldades observadas no processo de realização e correção das mesmas.

Inicio relatando como ocorreu a construção do "varal dos números" e do "varal das contas", para depois realizar a análise de cada atividade contida na sequência didática, separadamente.

<u>"Varal dos Números" e "Varal das Contas"</u>

Nesta atividade de construção percebi uma enorme participação dos alunos. Todos se dispuseram ir ao quadro e posicionar os números e as operações envolvidas. No momento em que cada um se deslocava para efetivar sua parte da tarefa, o restante dos colegas prestava atenção para ver se os números e as operações estavam posicionados nos devidos lugares.

No "varal dos números", percebi que todos não tiveram dúvidas na hora de posicionar os números inteiros. Visto isto, lancei a seguinte pergunta: *Sobre os números inteiros positivos, vocês já devem ter aprendido a posicioná-los de maneira crescente. Como vocês sabem distribuir a parte negativa destes números, também de maneira crescente, na reta numérica?*

Obtive algumas respostas diferentes:

<u>Aluno A:</u> *Porque nos termômetros dos livros, depois do zero vem o -1 e os números vão diminuindo.*

<u>Aluno B:</u> *Para ficarem parecidos com o posicionamento dos números positivos, os negativos é o contrário.*

<u>Aluno C:</u> *Os números com menos ficam no lado oposto dos com mais, e como é crescente, uma temperatura de -10 é mais baixa que a -9, assim o -10 fica a esquerda do -9.*

Complementei estas explicações, frisando que os números inteiros negativos estão sempre à esquerda do zero (ponto de referência) e os positivos à direita e que podemos olhar os negativos como o contrário dos positivos, por exemplo, o 1 é o primeiro do lado direito logo o -1 vai ser também o primeiro do lado esquerdo. Também lhes lembrei que o número positivo pode ser representado com o sinal de + ou sem o sinal.

Aproveitei esse diálogo para perguntar: *Que número é maior, o -5 ou o -7?*

Logo, vários alunos responderam -5, uns explicando que era por estar à direita do -7, outros explicaram que a temperatura é maior nesse número do que no outro. Consequentemente, a comparação entre dois positivos e um positivo e um negativo foi bem sucedida.

Explanei, utilizando a reta, o que significam simétrico e oposto de um número lembrando, neste último, com a explicação do colega de que os negativos eram o contrário dos positivos.

Terminada a explicação destes conceitos, demos início à construção do “varal das contas”. Primeiramente, esclareci como se daria o método para encontrar a solução de cada operação de inteiros. A primeira parcela seria a posição inicial, onde cada aluno iria se colocar no “varal dos números”. Em seguida eles leriam o sinal da operação: se fosse positivo eles se deslocariam no sentido indicado pelo sinal da segunda parcela; caso fosse negativo, eles andariam no sentido contrário. Como mencionado, o sinal da segunda parcela informa à direção que deveria ser tomada: se negativo, para a esquerda; se positivo, para a direita.

Abaixo, exemplifico quatro operações diferentes, juntamente com o método a ser utilizado:

- $-6+(-4)=$: O aluno está na posição inicial -6 e deverá andar 4 posições para a esquerda (sentido negativo);
- $-2+3=$: A posição inicial do aluno é -2 e ele deve andar 3 posições para a direita (sentido positivo);
- $7-8=$: A posição inicial é no 7 e o aluno deve se deslocar o contrário de 8 posições para a direita, ou seja, 8 posições para a esquerda (sentido negativo);
- $0-(-5)=$: O aluno está na posição inicial 0 (zero) e deverá andar o contrário de 5 posições para a esquerda, ou seja, 5 posições para a direita (sentido positivo);

Observei no segundo e terceiro casos, que o sinal no meio dos números representava uma operação e não o sinal da segunda parcela, pois essa foi uma dúvida presente em minhas experiências anteriores em sala de aula.

O impressionante da construção do “varal das contas” foi o comportamento adotado por parte dos estudantes, pois encararam a atividade com enorme descontração. A cada aluno que se dirigia ao quadro para posicionar sua operação, os colegas faziam questão de saber também que conta era para ajudá-lo a chegar à solução correta. Muitas vezes, realizava a pergunta *"Para onde o colega precisa andar?"*, e obtinha como resposta um "coro" de alunos explicando.

Devido ao tempo, não consegui questionar os alunos quanto à generalização das "regras" das operações de adição e subtração com inteiros. Percebi que a maioria dos estudantes compreendeu o método de abordar estas operações. Para os estudantes, fazia sentido o que eles tinham que fazer.

Abaixo mostro como ficou o "varal dos números" e o "varal das contas" no final do encontro:

Figura 11: Esquerda do "zero" no "varal dos números" e do "varal das contas"

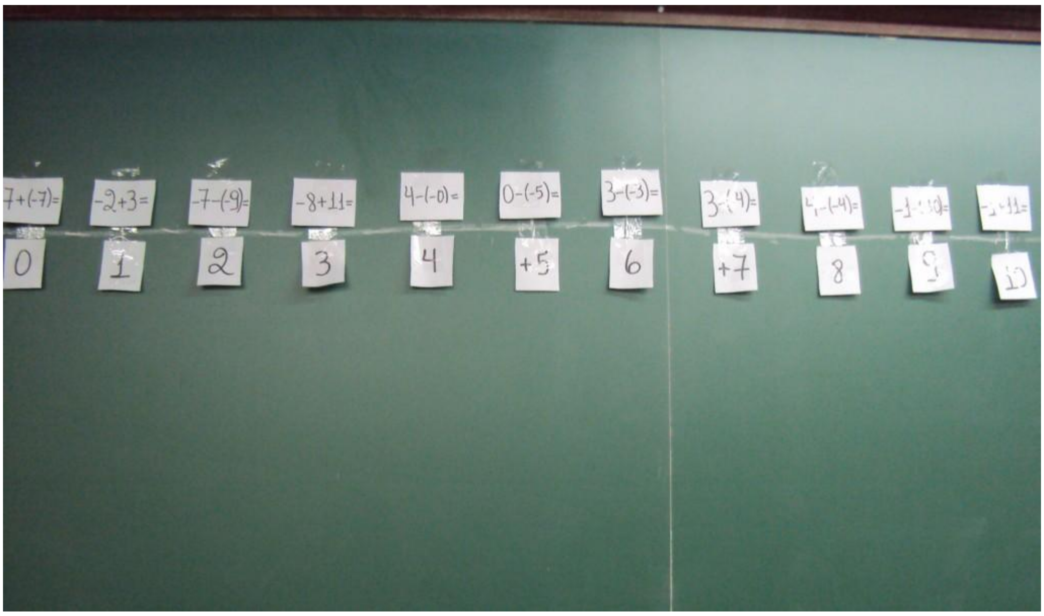


Figura 12: Direita do "zero" no "varal dos números" e do "varal das contas"

<u>Lista de Atividades (parte 1):</u>

Analiso aqui, separadamente as respostas de cada atividade, buscando entender o pensamento que os alunos utilizaram na resolução.

1) <u>Atividade do “Varal dos números”</u>

Nessa atividade, foi explorada a aprendizagem obtida em relação aos conceitos e propriedades vistos com a construção do “varal dos números”.

Antes de iniciar o relato, observo que os exemplos das respostas dos estudantes, ilustradas no decorrer deste trabalho, podem não estar com a escrita correta, mas mantive a originalidade.

O primeiro item questionava sobre o posicionamento dos números positivos e negativos. Todos os estudantes responderam de uma maneira ou de outra, que “*os positivos ficam à direita do zero e os negativos à esquerda*”. Abaixo estão duas maneiras diferentes de resolução encontradas:

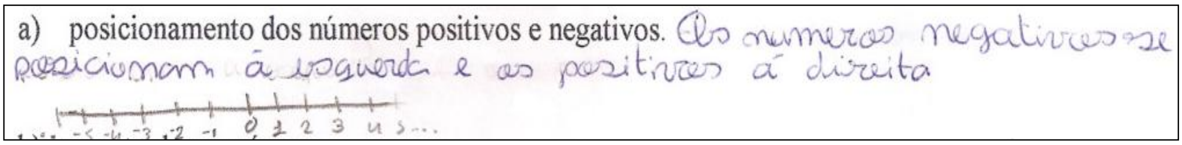

a) posicionamento dos números positivos e negativos. Os numeros negativos se posicionam à esquerda e os positivos á direita
... -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 ...

Figura 13: Resposta 1 referente ao posicionamento dos números inteiros.

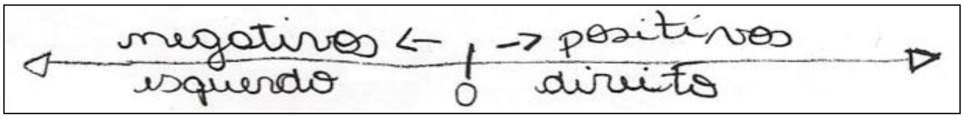

negativos ← → positivos
esquerdo 0 direito

Figura 14: Resposta 2 referente ao posicionamento dos números inteiros.

No segundo item, que tratava sobre o oposto de um número, todos os alunos que responderam explicaram através de exemplo com algumas observações, como mostra as respostas selecionadas abaixo:

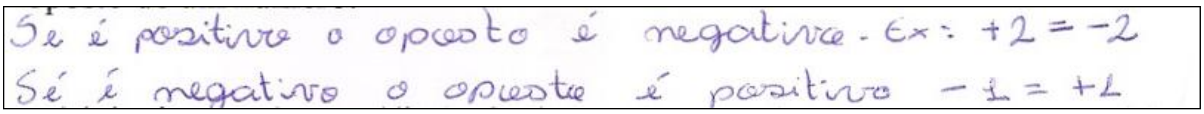

Se é positivo o oposto é negativo. Ex: +2 = -2
Sé é negativo o oposto é positivo -1 = +1

Figura 15: Resposta 1 referente ao oposto de um número inteiro.

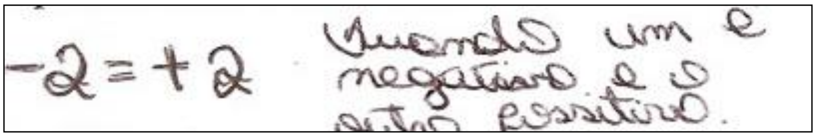


Figura 16: Resposta 2 referente ao oposto de um número inteiro.

Os alunos não conseguiram obter uma "definição" para o que seria o oposto de um número inteiro. No entanto, conseguiram exemplificar corretamente este conceito. No momento da correção, esbocei uma reta numérica e perguntei se eu poderia dizer que o oposto *é o número que dista a mesma quantidade de posições em relação à origem (zero), mas no sentido contrário.* A primeira atitude dos estudantes foi testar se seu exemplo dava certo, não demorando muito para que todos entendessem a definição.

O mesmo ocorreu nas respostas dadas ao módulo de um número, ressaltando que neste item destaquei que seria *a distância desse número até o zero na reta numerada,* pois no encontro anterior esta foi a única generalização realizada em conjunto com os educandos. É o que mostra a Figura 17 abaixo:

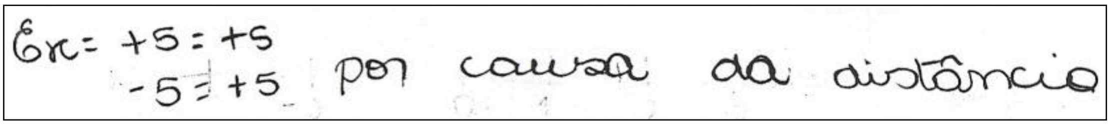


Figura 17: Resposta 1 referente ao módulo de um número inteiro.

Alguns alunos, em vez de exemplificarem, deram a seguinte definição:

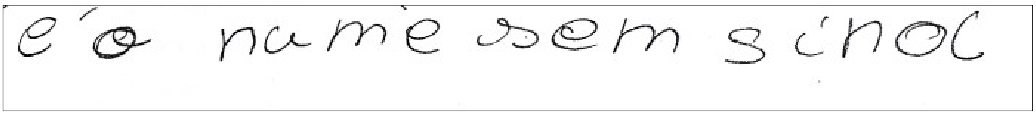


Figura 18: Resposta 2 referente ao módulo de um número inteiro.

Apesar de entender a resposta, esclareci aos estudantes que não é correto definir dessa maneira, pois estaríamos dizendo que, por exemplo, $+5 \neq 5$, o que sabemos ser um absurdo. Lembrei-lhes que um número com o sinal de + na frente ou sem ele, representa o mesmo número positivo, e esclareci novamente que o módulo de um número é sempre positivo, pois representa uma distância.

O último item trata da comparação de números positivos e negativos. Devido a essa relação ter sido obtida pelos próprios alunos no encontro anterior, esperava que os alunos mostrassem algum entendimento a respeito. Mas houve apenas um tipo de solução, como mostrado abaixo:

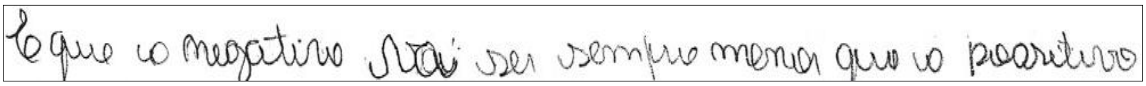


Figura 19: Resposta 1 referente a comparação de números inteiros positivos e negativos.

Houve uma exceção, um aluno que respondeu:

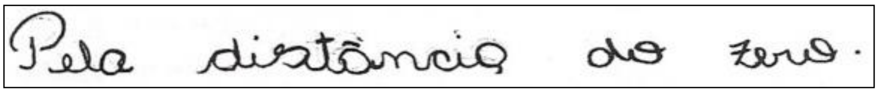


Figura 20: Resposta 2 referente a comparação de números inteiros positivos e negativos.

Minha surpresa está no fato de terem apenas comparado o negativo com o positivo. Não mencionado nada sobre a comparação entre dois positivos ou dois negativos. Devido essa quase unanimidade no estilo de reposta, percebi que o enunciado dessa questão estava confuso, podendo ter contribuído para esta ocorrência.

Utilizei o momento da correção para observar o restante das comparações, através da comparação entre -3 e -5 e entre 7 e 10. Os alunos responderam corretamente, revelando o entendimento demonstrado no encontro anterior. Não deixando de ignorar a única resposta diferente, ilustrada acima, questionei os alunos se *poderíamos criar uma propriedade de comparação entre os números inteiros utilizando a distância ao zero?* Sem a turma saber, o aluno que produziu a resposta acima se manifestou e disse: *"Entre dois números negativos o que está mais longe do zero é menor, já entre dois positivos é maior".*

Achei brilhante a explicação do estudante, complementando que essa é outra forma para compararmos os números inteiros, reproduzindo novamente a solução dada aos demais colegas que não prestaram atenção.

Realizando uma análise geral desta Atividade do "varal dos números", podemos perceber que os alunos não estão acostumados a criarem suas próprias definições e propriedades. Embora entendam o assunto e sentem dificuldade em expressá-lo. Isto confirma a idéia de Moreira (2007), apresentada no segundo capítulo, acerca das dificuldades em representar ideais através da escrita. Os alunos recorrem aos exemplos para se expressar, fato muito importante, pois eles próprios estão buscando situações para o conceito fazer sentido.

2) Comparação e Variação entre temperaturas:

Na primeira parte desta atividade, o estudante precisava analisar um gráfico que representava as temperaturas mínimas de cidades diferentes e responder qual apresentava a menor temperatura. Todos responderam corretamente, mas ocorreram dois tipos de solução.

Uma parcela pequena dos estudantes, além de explicitarem a cidade com menor temperatura e seu valor, tentaram argumentar sua resposta, conforme solicitava o exercício:

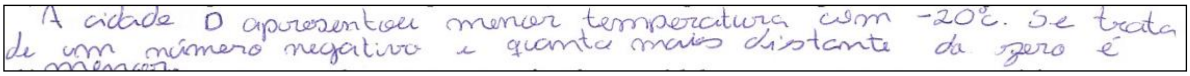

A cidade D apresentou menor temperatura com -20°C. Se trata de um número negativo e quanto mais distante do zero é

Figura 21: Resposta 1 referente a comparação de temperaturas.

Uma segunda categoria de alunos, respondeu diretamente sem levar em conta que estava sendo perguntada a justificativa para tal solução, ou seja, apenas escreveu:

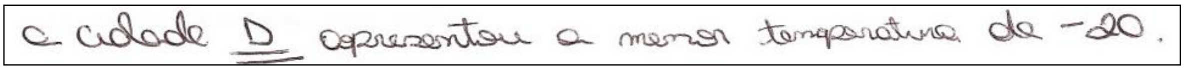

a cidade D apresentou a menor temperatura de -20.

Figura 22: Resposta 2 referente a comparação de temperaturas.

Na correção dialogamos sobre o porque da cidade D ser a cidade com menor temperatura através das respostas proporcionadas pelos educandos.

Na segunda parte desta questão estava sendo solicitada a variação de temperatura entre duas cidades que apresentavam a mesma temperatura em módulo. Utilizei variação nesta atividade para não induzir-los a utilizar a subtração, observação tirada de uma atividade semelhante que Megid (2001) aplicou e mencionou em seu trabalho.

Todos acertaram as cidades, mas no cálculo para realizarem a variação uma parte da turma somou os módulos das temperaturas, enquanto outra parte subtraiu, conforme mostramos em duas respostas escolhidas:

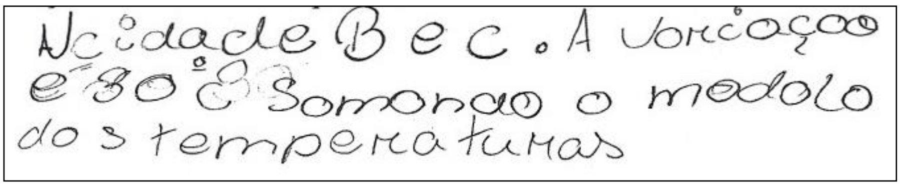

Nc cidade B e C. A varcação e 80°C Somando o modolo dos temperaturas

Figura 23: Resposta 1 referente a variação entre temperaturas.

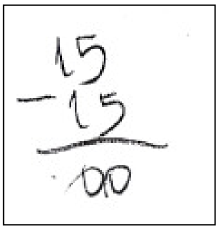


Figura 24: Resposta 2 referente a variação entre temperaturas.

Discuti e expliquei coletivamente, ambas as soluções até a turma inteira concordar com a primeira solução. Para isso, utilizei um esboço de uma reta numérica, para facilitar a visualização desta situação, além de mostrar-lhes que podemos recorrer ao auxílio da reta numerada para representar e realizar problemas de nosso dia a dia.

3) <u>Quadro de andares de um elevador</u>

Essa atividade consistia em desenhar um quadro do elevador através das características que o problema disponibilizava a respeito do prédio que iria necessitá-lo. Uma questão análoga foi proposta por Megid (2001) em seu trabalho, por isso, através da análise que a autora realizou sobre esse exercício, sabia que ocorreriam modelos variados. Mas o que surpreendeu-me foi que nenhum aluno realizou a construção certa.

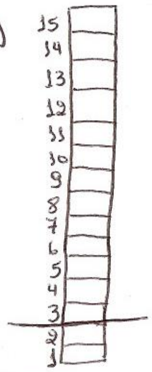
Do mesmo modo que Megid (2001), para melhor discutir o fato, selecionei dentre os vários desenhos coletados, oito. Montei uma nova atividade, conforme mostro a seguir:

1. Lembram-se desse problema? Vocês resolveram no final do encontro passado.

   Um edifício que está sendo construído possui 15 andares, sendo que dois deles estão no subsolo e servirão para a garagem, além do andar onde ficará a portaria, localizada no nível da rua. Desenhe sugestões de como será o quadro de andares do elevador que a construtora do edifício precisará encomendar. Faça o desenho.

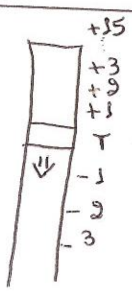
   Observe as soluções encontradas por alguns alunos e comente-as. Diga, em cada uma delas, se você a escolheria ou não para usá-la no quadro de andares, e justifique, tanto as que escolher quanto as que rejeitar.

a)


15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

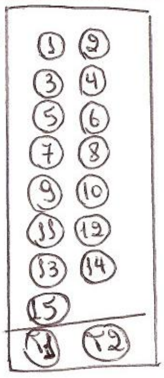
R:

b)


+15
+3
+2
+1
T
-1
-2
3

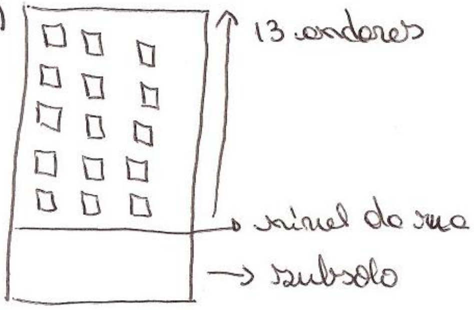
R:

c)

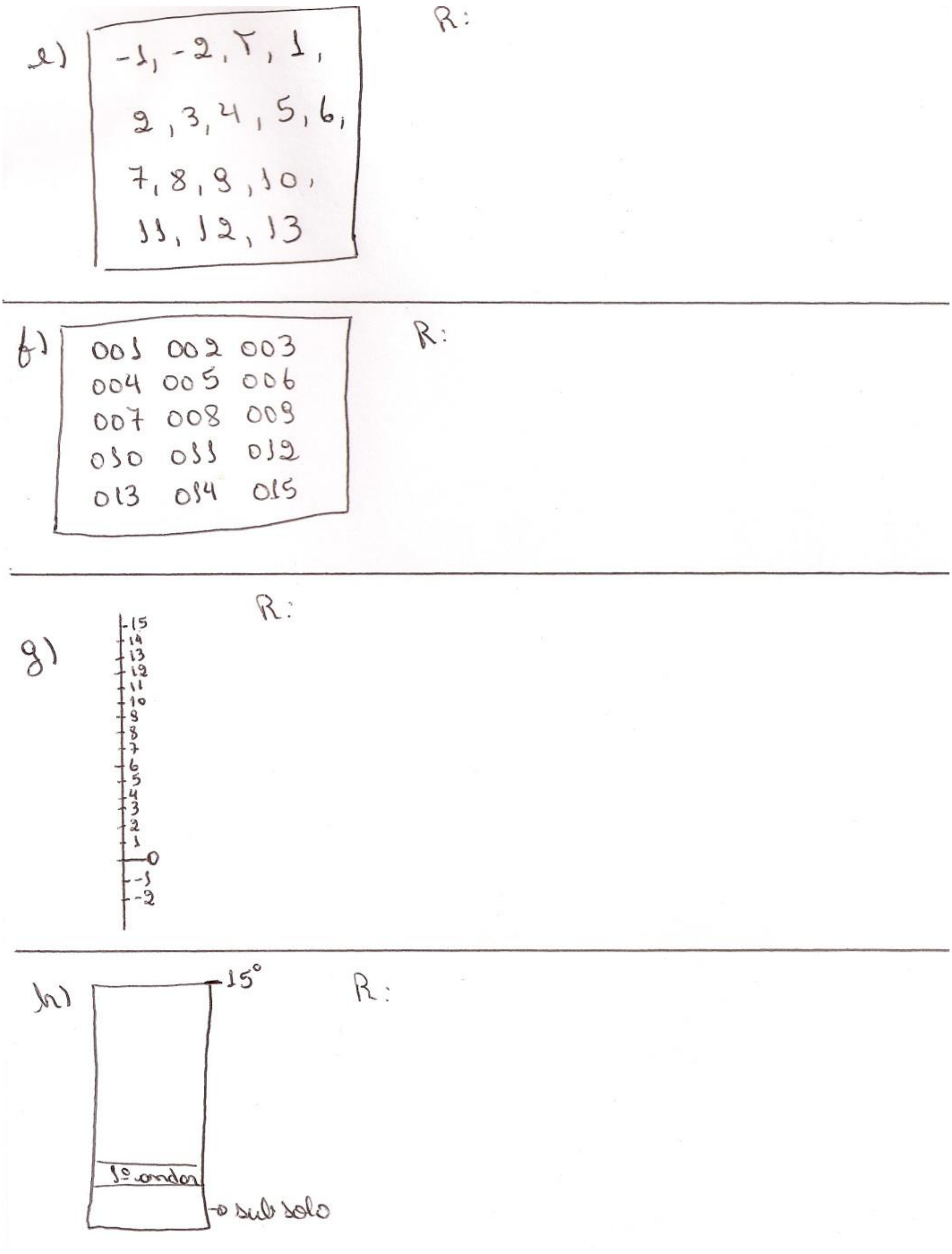

1 2
3 4
5 6
7 8
9 10
11 12
13 14
15
T1 T2

R:

d)


13 andares
nível da rua
subsolo

R:



Dei-lhes um tempo para a realização esta atividade. Em seguida, realizei a discussão coletivamente, analisando o que tinha de certo e de errado em cada situação. Lembrei-lhes que dois andares estariam no subsolo, um seria o térreo, o restante estaria acima do térreo e o total de andares seria quinze.

Desta minha última fala: “o prédio possui um total de quinze andares”, foi que grande parte dos alunos entenderam o porque as situações b, c, d, e, g e h estavam erradas. Observando que em d e em e apenas o térreo não foi considerado como um andar.

Sobrando apenas dois desenhos a serem discutidos, um aluno lançou a seguinte pergunta:

- *Tanto na letra a quanto na letra f o prédio possui quinze andares. Os desenhos das duas estão certos?*

Solicitei-lhes, então, para imaginarem que se quisessem subir para o quarto andar, que botão do quadro de elevador seria mais lógico apertar. Grande parte dos estudantes respondeu que seria o botão quatro, mas alguns ainda não se convenceram, pois argumentavam que existiam vários tipos de quadros de elevador. Nesse momento percebi que isso realmente não era muito claro para eles, mas para finalizar a discussão sobre essa atividade concordei que realmente existiam vários modelos, mas expliquei o que poderia ser modificado nas letras a e f, para que o botão que eu apertasse indicasse o andar que eu iria.

Concluo que nesta atividade não entendi muito bem as dúvidas apresentadas pelos estudantes, prejudicando a explicação sobre a importância que esta atividade traria para a aprendizagem dos números inteiros, não conseguindo associá-las com os objetivos das demais atividades.

4) Temperaturas máximas e mínimas

Essa atividade é semelhante ao exercício 2 já mencionado, com a diferença que neste é apenas pedido para calcular a variação entre a temperatura máxima (28ºC) e a temperatura mínina (16º C) desta cidade. Novamente, recorro à idéia de Megid (2001), utilizando variação para não induzir os alunos a uma subtração.

As respostas foram divididas em duas: parte dos alunos somaram as duas temperaturas e os demais as subtraíram. Utilizei a posição adotada na segunda atividade, representando o que o problema estava pedindo na reta numérica.

5) Escrever operações de adição e subtração a partir de representações na reta numerada

Em cada item desta atividade estava a representação de operações de adição e subtração com inteiros. Cada uma possui duas flechas, uma ligando o zero a uma posição e outra indo desta posição para uma última. As flechas estão pintadas de azul ou vermelho, caracterizando a primeira cor “andar para a direita” e a segunda cor “andar para a esquerda”.

O objetivo desta atividade era perceber se os alunos conseguiriam reproduzir o método da construção do “varal dos números”, mas de uma maneira inversa, identificando assim, o entendimento das operações de adição e subtração na reta numerada.

Analisando as soluções, percebi que em torno da metade dos alunos respondeu o exercício corretamente e a outra parte nem chegou a resolvê-lo. Abaixo ilustro uma solução desenvolvida corretamente:

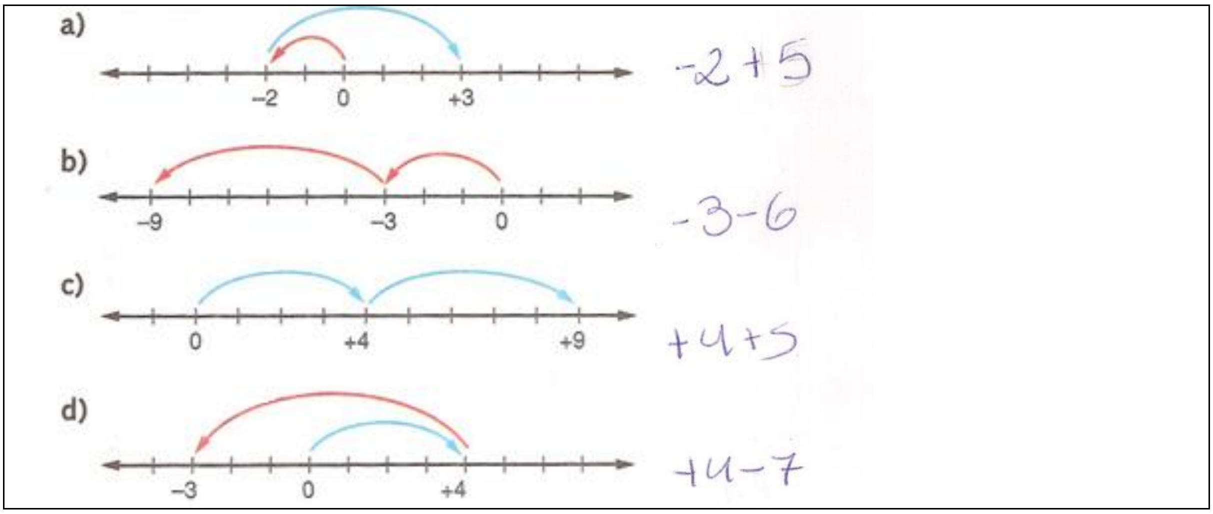


Figura 25: Resposta referente a representação das operações na reta numerada.

Para ter um melhor aproveitamento desta atividade para aqueles que não a resolveram, desenhei no quadro as quatro representações propostas. Após, solicitei para que alguém se dirigisse ao quadro e explicasse o procedimento para obter a operação de adição ou subtração.

Observei que alguns alunos tinham esquecido o método da construção do “varal das contas” e quando um colega explanou o primeiro exemplo, os demais recordaram os procedimentos realizados.

6) <u>Generalização das “regras” para as operações de adição e subtração com inteiros</u>

No primeiro encontro, não foi possível discutir sobre a generalização das propriedades e das “regras” utilizada nas operações de adição e subtração com inteiros. Logo, esta atividade serviria para observar se os alunos perceberiam alguma destas características na construção do “varal das contas”.

Através dos resultados obtidos, percebe-se a enorme dificuldade em desenvolver suas idéias no papel. Novamente, alguns estudantes sequer chegaram a resolver esta questão. No entanto, aqueles que a resolveram, souberam “defini-las”, como mostra a ilustração abaixo, exemplificando o que ocorreu em termos da maioria de soluções similares:

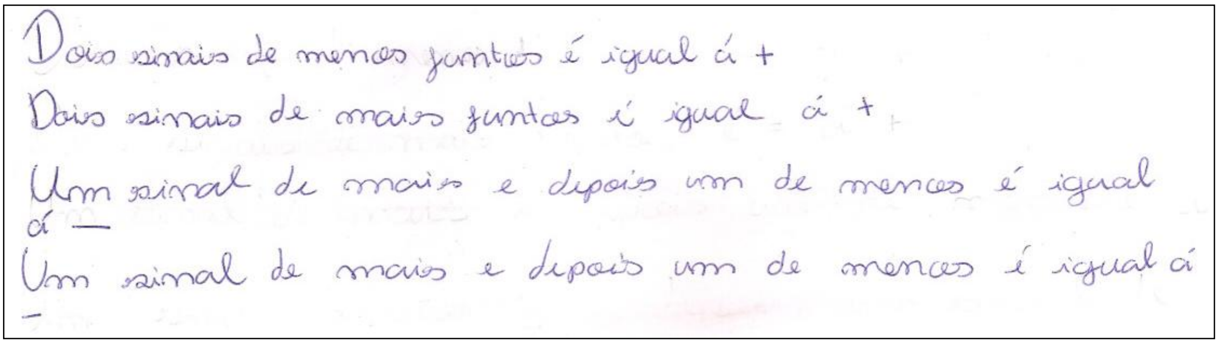

Dois sinais de menos juntos é igual á +
Dois sinais de mais juntos é igual á +
Um sinal de mais e depois um de menos é igual á —
Um sinal de mais e depois um de menos é igual á —

Figura 26: Resposta referentes a generalização das “regras” para as operações de adição e subtração com inteiros.

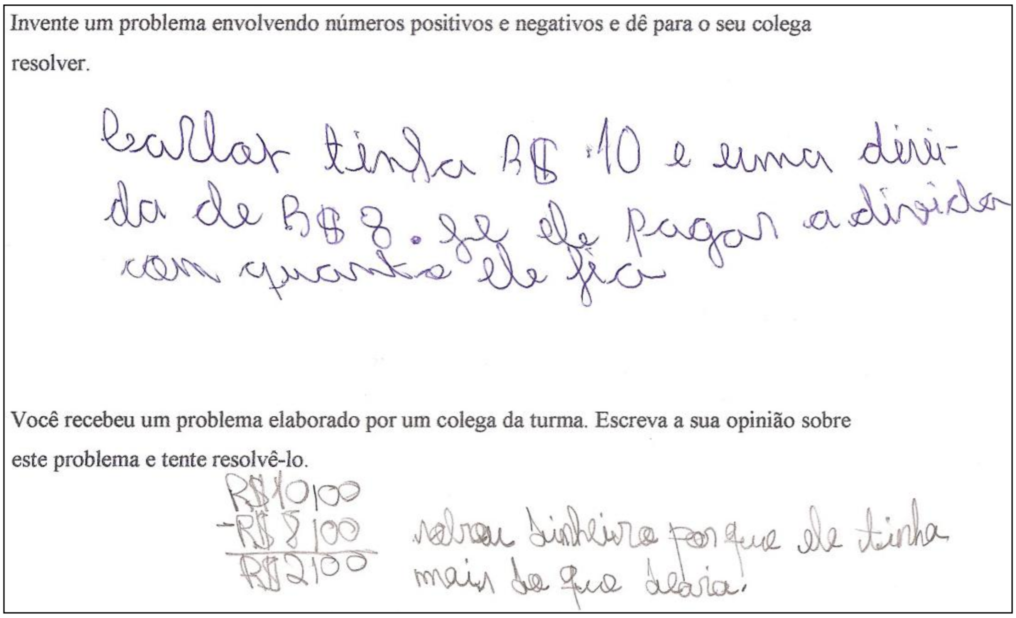
Dessa atividade, analisando as resoluções apresentadas pelos alunos, conclui que para os alunos que realizaram a atividade o método utilizado para a construção do “varal das contas” foi válido na aprendizagem das operações (adição e subtração) com inteiros.

Lista de Atividades (parte 2)

7) e 8) Invenção e resolução de problemas envolvendo números inteiros

Esta última parte da sequência didática tem por objetivo perceber quais os tipos de situações do cotidiano dos estudantes que lhes vem à mente ao se depararem com um problema que exigia a criação de um exercício envolvendo números inteiros. Para análise, escolhemos três situações diferentes criadas pelos alunos.

Na Figura 27, percebe-se um problema referente à dinheiro, mencionando dívida, mas sua solução depende apenas dos números inteiros positivos. Foi bem interpretada pelo colega que a resolveu, estando sua solução correta.


Invente um problema envolvendo números positivos e negativos e dê para o seu colega resolver.

carlar tinha R$ 10 e uma divi-da de R$ 8. se ele pagar a divida com quanto ele fica

Você recebeu um problema elaborado por um colega da turma. Escreva a sua opinião sobre este problema e tente resolvê-lo.

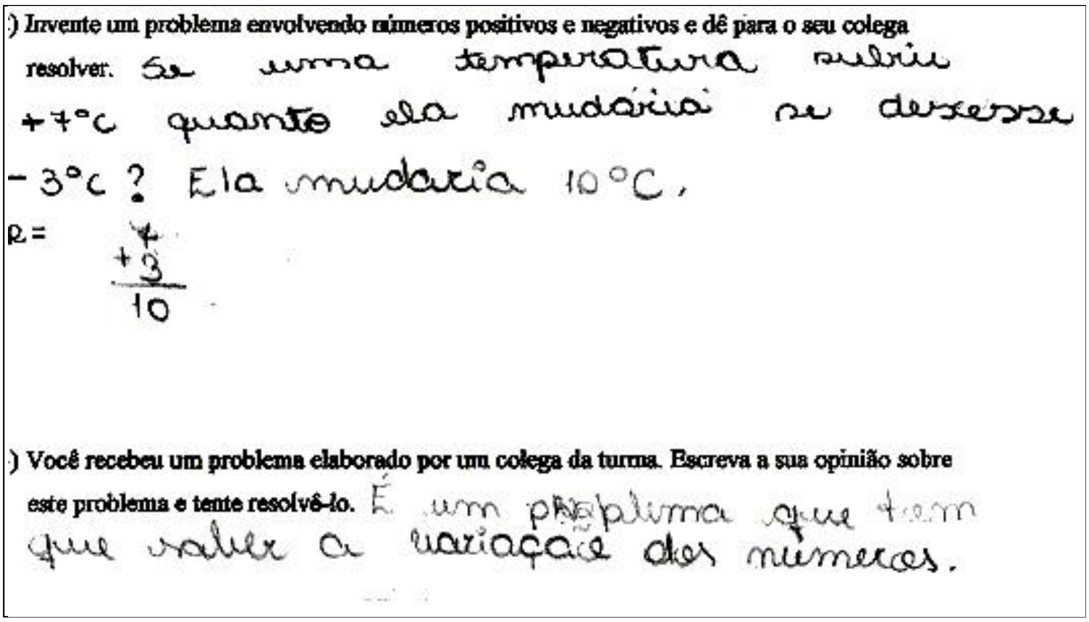
R$ 10,00
-R$ 8,00
R$ 2,00

sobrou dinheiro porque ele tinha mais do que devia!

Figura 27: Resposta 1 referente a atividade 7 e 8.

Na Figura 28, percebemos uma situação que exemplifica a questão de variação entre temperaturas apresentada na primeira parte desta proposta didática. O estudante utiliza na construção do problema um método semelhante ao utilizado na construção do "varal das contas", pois neste caso a expressão *"descesse -3ºC"* equivale a dizer andar o inverso de três posições para esquerda, ou seja, andar três posições para à direita.

Percebe-se que o aluno entendeu a diferença entre o sinal do número e o sinal da operação.


) Invente um problema envolvendo números positivos e negativos e dê para o seu colega resolver. Se uma temperatura subiu +7°C quanto ela mudaria se descesse -3°C ? Ela mudaria 10°C.

R =
7
+3
10

) Você recebeu um problema elaborado por um colega da turma. Escreva a sua opinião sobre este problema e tente resolvê-lo. É um problima que tem que saber a variaçao dos numeros.

Figura 28: Resposta 2 referente a atividade 7 e 8.

Na Figura 29, encontramos uma situação que novamente envolve dinheiro. Neste caso, o aluno não menciona nada de números inteiros negativos e nem subtração, de modo que até o colega percebeu que o problema não envolvia números negativos.

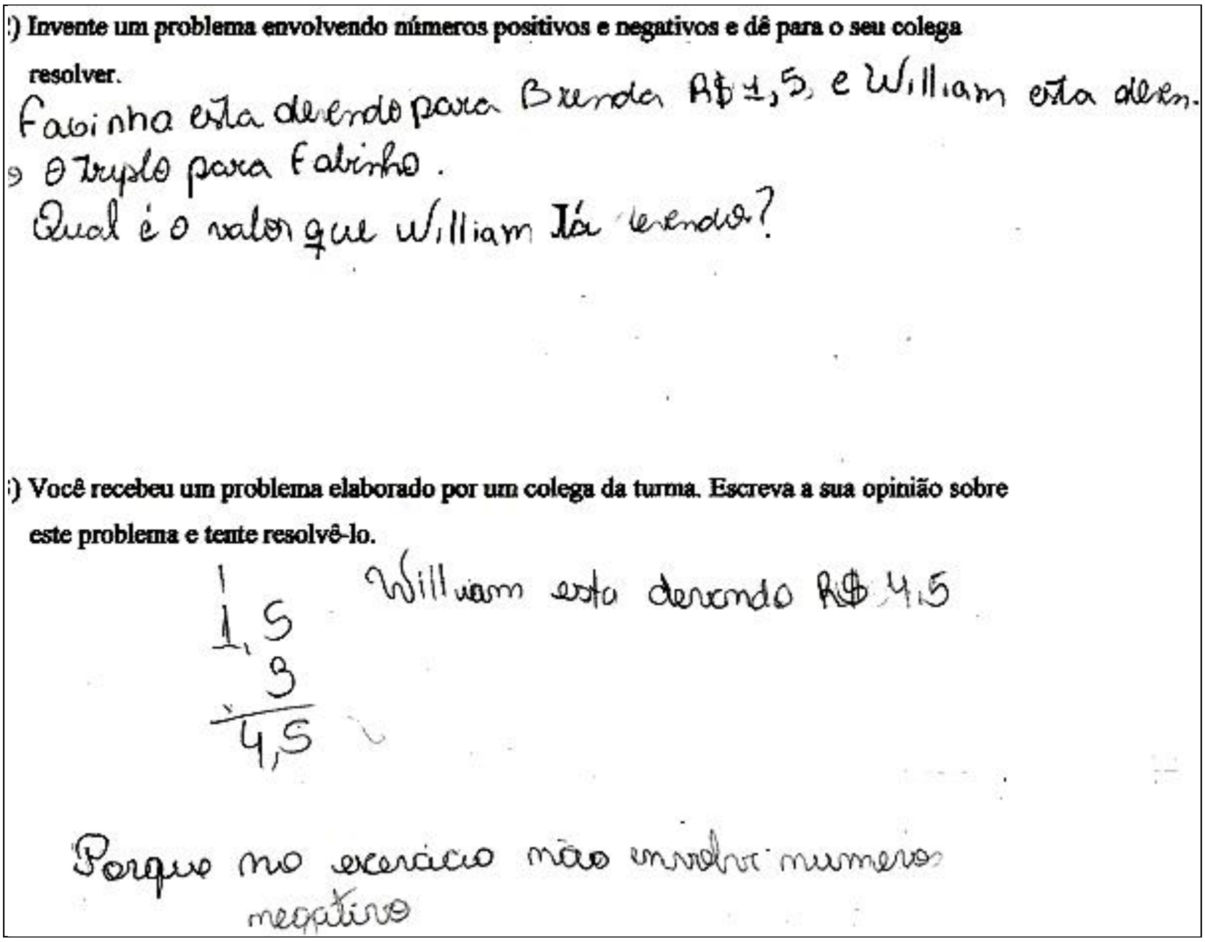


Figura 29: Resposta 3 referente a atividade 7 e 8.

9) <u>Auxílio do “varal dos números” e do “varal das contas”</u>

A última questão desenvolvida na sequência de atividades solicitava ao estudante que expressasse sua opinião em relação ao auxílio que os varais construídos no primeiro encontro, trouxeram para sua compreensão em relação ao conceito dos números inteiros.

Selecionamos quatro respostas, as mais frequentes na coleta de dados realizada. Na Figura 30 percebemos que o estudante não foi específico em sua explicação:

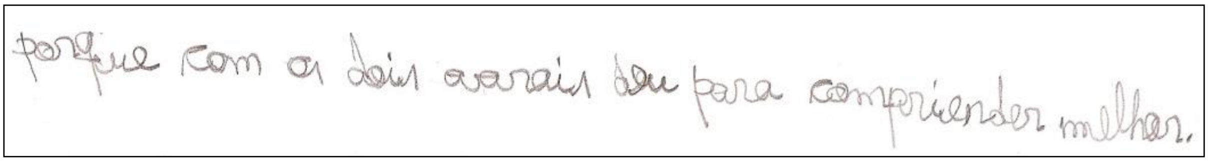

porque com os dois varais deu para compriender melhor.

Figura 30: Auxílio 1 da reta numerada.

Na Figura 31 percebe-se que a reta o auxiliou na parte do posicionamento dos números inteiros:

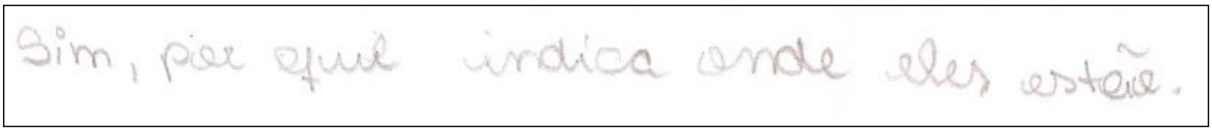

Sim, por que indica onde eles estão.

Figura 31: Auxílio 2 da reta numerada.

Na Figura 32 o estudante visualizou melhor a idéia de distância dos números:

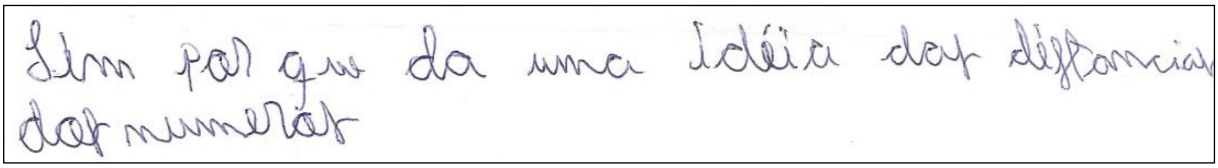

Sim por que da uma idéia das distancias dos numeros

Figura 32: Auxílio 3 da reta numerada.

Por último, na Figura 33 entende-se que o "varal das contas" ajudou na visualização das expressões de adição e subtração com inteiros

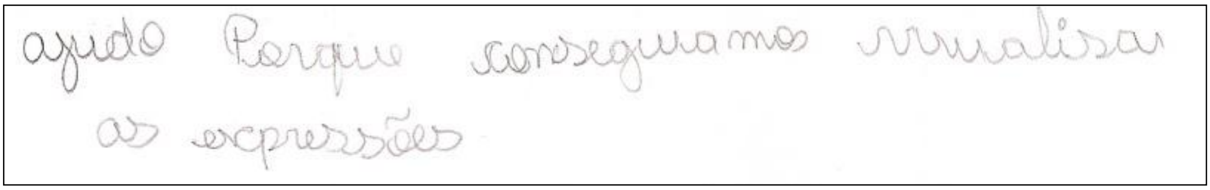

ajudo Porque conseguiamos visualisar as expressões

Figura 33: Auxílio 4 da reta numerada.

Após esta análise, obtida a partir da proposta didática apresentada anteriormente e aplicada com alunos da 6º série (7º ano), finalizo este trabalho, realizando algumas considerações gerais. No próximo capítulo, avalio se atingi os objetivos iniciais, além de mencionar algumas sugestões para desenvolver trabalhos futuros.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho tratei do ensino dos números inteiros com alunos de 6º série (7º ano), considerado problemático, bem como da análise de uma proposta didática sugerida para a melhoria do ensino deste conteúdo. Pode-se associar esses obstáculos à complexidade do conceito de número inteiro, mas também ao modo como este conceito é trabalhado na escola, ou seja, muitas vezes os professores não dão tanta importância ao ensino deste conceito, contribuindo ainda mais para o seu não entendimento.

Um dos objetivos deste trabalho foi detectar e descrever algumas dificuldades presentes no entendimento do conteúdo referente a números inteiros, através do estudo de algumas referências bibliográficas e algumas experiências adquiridas em sala de aula. Também visou analisar a contribuição da reta numerada e de situações problemas ao ensino dos números inteiros e de suas operações de adição e subtração.

Ao longo deste trabalho, percebe-se que o conhecimento matemático torna-se mais compreensível quando o aluno consegue associá-lo a algumas situações de sua realidade. Não é fácil para os alunos entenderem sobre a existência de quantidades menores que nada e, mais ainda, entenderem "propriedades" que não podem ser demonstradas formalmente, mas apenas justificadas.

A maneira como o conceito é ensinado aos alunos pode muitas vezes acarretar em erros no entendimento do conceito de números inteiros, pois na ausência das propriedades do sistema que rege os inteiros os alunos criam procedimentos equivocados na compreensão do conteúdo. Ou seja, o professor tem papel fundamental no entendimento destes conceitos por parte dos alunos,; cabe a ele refletir e elaborar propostas didáticas que melhor enfrentem os obstáculos que os alunos apresentam. Além disso,

> Todos estes elementos apontam para a importância da constante reflexão do professor sobre o que vai acontecendo, sobre as perguntas dos alunos e sobre a conveniência de não lhes dar respostas prontas, mas instigá-los a buscar, junto com os outros, as soluções ou saídas para os questionamentos. (MEGID, 2001, p.183/184).

Acredito que atingi meus objetivos iniciais, uma vez que as análises realizadas ao longo deste trabalho apontaram as principais dificuldades na aprendizagem dos números inteiros e avaliaram positivamente o auxilio que uma proposta didática envolvendo a reta numérica e situações-problema trazem para o entendimento deste conteúdo.

Com o amadurecimento em relação ao aprendizado dos números inteiros, adquirido ao longo deste trabalho, através da reflexão sobre o referencial teórico e da aplicação da sequência didática, percebi a importância de utilizar essa abordagem para trabalhar também as operações de multiplicação e divisão. Com isso, perceberíamos outros obstáculos presentes no entendimento destes conceitos. Deixo em aberto a ideia de futuramente desenvolver sequências didáticas abordando desde as propriedades dos números inteiros até todas as suas operações, utilizando nesta proposta, novamente situações-problema e a reta numerada, visando à contextualização desses conceitos.

Portanto, acredito e espero, uma vez que as atividades foram aplicadas em sala de aula, que esta sequência didática, utilizando a reta numérica e diversas situações-problema, auxilie os alunos na compreensão dos conceitos de números negativos, uma vez que ela tem o objetivo de dar um pouco de sentido e facilitar a visualização das propriedades dos mesmos. Mas deixo claro que esses obstáculos não vão desaparecer completamente, por isso cabe ao professor sempre pesquisar, refletir e elaborar diferentes propostas para serem desenvolvidas acerca deste conteúdo.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANJOS, Marta Figueiredo dos. **A difícil aceitação dos números negativos: Um estudo da teoria de Números de Peter Barlow (1776-1862).** Dissertação de Mestrado/2008 - Natal-RN.

BARROSO, Juliane M. **Projeto Araribá:** matemática / obra coletiva. São Paulo: Moderna, 2006.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática 6º série**. São Paulo: Moderna, 1996

BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática hoje é feita assim:** 6º série (Coleção matemática hoje é feita assim). São Paulo: FTD, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental).** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – volume 2.** Brasília: MEC/SEB, 2006.

GIOVANI, José Ruy. **A conquista da matemática:** teoria e aplicação. São Paulo: FTD, 1992.

MEGID, Maria Auxiliadora B. A. Construindo matemática na sala de aula: uma experiência com os números relativos. In: FIORENTINI, Dario e MIORIM, Maria Ângela (orgs). **Por trás da porta, que matemática acontece?** Campinas, SP: FE/Unicamp – Cempem, 2001.

MEISTER, Júlio C. **Estudando dificuldades na compreensão de números inteiros.** Trabalho de Conclusão da Graduação, 2009 - Porto Alegre. Disponível em http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/18224.

MORAIS, Anuar D. de. **Fórmula (-1): Desenvolvendo Objetos Digitais de Aprendizagem e Estratégias para a Aprendizagem das Operações com Números Positivos e Negativos.** Dissertação de Mestrado 2010. Porto Alegre: UFRGS.

MOREIRA, Plínio C. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escola.** Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

SCHLIEMANN, CARRAHER E CARRAHER, A. D. T **Na vida dez, na secola zero.** São Paulo: Cortez, 1998.

SCHUBRING, Gert. **Rupturas no estudo matemático dos números negativos** (primeira parte). Boletim Gepem nº 37, 2000 - Rio de janeiro .

TEIXEIRA, Leny R.M. **Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades.** In. Pro-posições. Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação Unicamp. Vol. 4, nº1[10] - Março, 1993.

7. ANEXOS

7.1 Termo de Consentimento Informado

Senhores pais ou responsáveis pedimos a vossa autorização para seu filho participar de aulas de reforço e atividades complementares de matemática. Esse é um projeto que será desenvolvido por uma estagiária da UFRGS, exclusivamente com a turma da 6º série desta escola, visto que a mesma apresenta muita dificuldade em certos conteúdos matemáticos e será sempre supervisionada pela professora Marta R. O. Trindade. As aulas ocorrerão no turno da tarde, todas as 2º feiras dás 13h30min ás 16h. Sendo que seu início será no dia 10/05/2010 e irá até o dia 14/05/2010, totalizando 6 encontros. Contamos com vossa compreensão e apoio, uma vez que acreditamos que esta atividade extraclasse só irá auxiliar na aprendizagem de seu filho. Portanto, abaixo marque a opção se seu filho participará ou não deste projeto, juntamente com sua assinatura.

( ) Sim   ( ) Não

____

Assinatura dos Pais ou responsáveis