Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

O Teorema de Wagner-Preston, Ações Parciais de Grupos e Ações de Semigrupos Inversos.

Renne Garcia Paiva

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre, dezembro de 2010

AGRADECIMENTOS

Ao professor Wagner Oliveira Cortes por ter contribuído de forma inestimável com orientação e apoio fornecendo condições necessárias para a realização deste trabalho.

A todos os professores, funcionários da UFRGS, em especial aos que foram meus professores e contribuíram de algum modo com minha formação acadêmica e humana.

A todos amigos e funcionários da casa de estudante CEU-UFRGS.

Finalmente, a minha amada família, em especial meus irmãos Douglas, Diego, Raniere, minha mãe e meu pai que sempre me apoiaram e incentivaram nas principais decisões de minha vida.

A meus pais Rosenmager (in memoriam) e Célia.

Dissertação submetida por Renne Garcia Paiva como requisito parcial para obtenção de grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador:

Prof. Dr. Wagner Oliveira Cortes - UFRGS

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera - UFRGS

Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos - USP

Prof. Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero - UFRGS

Conteúdo

RESUMO . . . . **vi**

ABSTRACT . . . . **vii**

INTRODUÇÃO . . . . **viii**

1 SEMIGRUPOS **1**

1.1 Semigrupos Regulares e Semigrupos Inversos 2

1.1.1 A Relação de Ordem Parcial de um Semigrupo Inverso e o Teorema da Representação de Wagner-Preston 8

2 SEMIGRUPO INVERSO ASSOCIADO A UM GRUPO **12**

2.1 Relações e Monóides Livres 12

2.1.1 Relações de Equivalência 12

2.1.2 Monóides Livres 21

2.2 Semigrupo Universal S(G) 22

2.3 Representações de S(G) 27

3 BIJEÇÃO ENTRE AS AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS E AÇÕES DO SEMIGRUPO INVERSO UNIVERSAL SOBRE UM CONJUNTO X **31**

BIBLIOGRAFIA **36**

RESUMO

Iniciamos este trabalho apresentando alguns resultados bem conhecidos sobre semigrupos que serão utilizados frequentemente nesta dissertação. Iremos provar o Teorema de Wagner-Preston. Em seguida, dado um grupo G, construímos um semigrupo universal $S(G)$, via geradores e relações. Além disso, mostramos que as ações parciais de G em um conjunto X estão em correspondência uma a uma com as ações de $S(G)$ em X. Esses resultados foram obtidos por R. Exel em [4].

ABSTRACT

In this work we present some well known results on semigroups which will be frequently utilized in this dissertation. We prove the Wagner-Preston's theorem. Furthermore, given a group G, we construct the universal semigroup $S(G)$, via generators and relations. Besides, we show that the partial actions of G on a set X are in a one-to-one correspondence to the actions of $S(G)$ on X. These results were obtained by R. Exel in [4].

INTRODUÇÃO

O conceito de semigrupo inverso é bastante recente na história da matemática, data da década de 1950. Esse surgiu indepedentemente com V. V. Wagner [16] e com G. Preston ([12], [13], [14]), em 1952 e 1954, respectivamente, como uma das formas de solucionar o problema da caracaterização abstrata de pseudogrupos. O teorema de Wagner-Preston mostra que todo semigrupo inverso pode ser considerado um subsemigrupo do semigrupo das bijeções parciais. Esse teorema é o análogo ao teorema de Cayley para a teoria de grupos. O leitor interessado pode consultar [8] e [10].

A noção de ação parcial é ainda mais recente. Essa noção apareceu independentemente em várias áreas da matemática na década de 1990. Na teoria de álgebra de operadores, esse conceito proporcionou aparecimento de poderosas ferrramentas, alavancando uma série de descobertas, como por exemplo o leitor pode consultar [1] e as referências neles contida.

Em [4], R. Exel introduziu de maneira algébrica ação parcial de um grupo sobre um conjunto e ações de semigrupos inverso em conjuntos. Ele provou que existe uma corrrespondência bijetora entre as ações parciais de um grupo G sobre um conjunto X e as ações do semigrupo universal $S(G)$ sobre o mesmo conjunto X.

Nesta dissertação, vamos estudar os resultados obtidos em [4] e o Teorema de Wagner-Preston descrito em [10].

No Capítulo 1, na seção 1, relembramos algumas definições, exemplos de semigrupos e resultados clássicos em semigrupos. Na seção 2, seguiremos a teoria desenvolvida em [10] para provar o Teorema de Wagner-Preston.

No Capítulo 2, na seção 2.1, iremos relembrar as clássicas definições de relações de equivalência, congruência e temas relacionados que nos ajudarão a compreender a contrução do semigrupo universal. Na seções 2.2 e 2.3, iremos desenvolver a teoria de R. Exel [4] do semigrupo universal a partir de um grupo G.

No capítulo 3, iremos estudar as ações parcias de grupos e semigrupos inversos feitas por R. Exel [4] e iremos dar alguns exemplos destas ações. O principal resultado deste capítulo nos diz que existe uma correspondência bijetora entre as ações parciais de um grupo G em um conjunto X e as ações do semigrupo universal $S(G)$ em X.

Todos os resultados desta dissertação estão baseados nas referências [2], [10], [11] e [15].

1 SEMIGRUPOS

Neste capítulo, além de algumas definições e resultados clássicos em semigrupos, que serão úteis para o desenvolvimento do que segue, apresentaremos o Teorema da Representação de Wagner-Preston, que caracteriza os semigrupos inversos.

Definição 1.1. Um conjunto não-vazio S, munido de uma operação

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & S \times S & \longrightarrow & S \\ & (s_1, s_2) & \mapsto & s_1 \cdot s_2 \end{array},$$

é um *semigrupo* se $(s_1 \cdot s_2) \cdot s_3 = s_1 \cdot (s_2 \cdot s_3)$, $\forall s_1, s_2, s_3 \in S$. Além disso, dizemos que S é um *monóide* se $\exists e \in S$ tal que $es = se = s$, $\forall s \in S$.

Quando não houver dúvida com relação à operação, denotaremos $s_1 \cdot s_2$, simplesmente, por $s_1 s_2$.

Exemplo 1.2. O conjunto dos números naturais com adição usual é um semigrupo. A mesma situação ocorre com os conjuntos dos números inteiros, racionais, reais e complexos com relação à adição.

Definição 1.3. Seja S um semigrupo. Um subconjunto não-vazio T de S é dito um *subsemigrupo* de S se $x, y \in T \Rightarrow xy \in T$.

Exemplo 1.4. O conjunto $(\mathbb{N}, +)$ é um subsemigrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

Observação 1.5. Sejam $(S, \cdot)$ um semigrupo e T um subconjunto não-vazio de S. Então T é um subsemigrupo de S se, e somente se, a operação em S restrita aos elementos de T é fechada.

Definição 1.6. Sejam S um semigrupo e S_1, S_2 subconjuntos não-vazios de S. O *produto dos subconjuntos* S_1 e S_2 é definido por:

$$S_1 S_2 = \{s_1 s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}.$$

Se $S_1 = \{s_1\}$, então representamos $S_1 S_2$ por $s_1 S_2$ e $S_2 S_1$ por $S_2 s_1$.

Definição 1.7. Sejam S um semigrupo e I um subconjunto não-vazio de S.

(i) I é um *ideal à esquerda* de S se $SI \subseteq I$;

(ii) I é um *ideal à direita* de S se $IS \subseteq I$;

(iii) I é um *ideal* de S se $SI \subseteq I$ e $IS \subseteq I$.

A próxima proposição mostra que todo ideal à direita (esquerda) é um subsemigrupo.

Proposição 1.8. *Sejam S um semigrupo qualquer e I um ideal à direita (à esquerda) de S. Então, I é um subsemigrupo de S.*

Demonstração. Sejam I um ideal à direita de S e s_1, $s_2 \in I$. Então $s_1 s_2 \in I$, pois I é um ideal direita de S. Para o caso em que I é um ideal á esquerda de S, a prova é análoga. □

O exemplo a seguir ilustra que a recíproca desta proposição, em geral, não é verdadeira.

Exemplo 1.9. O conjunto $(\mathbb{N}, +)$ é um subsemigrupo de $(\mathbb{Z}, +)$, porém $(\mathbb{N}, +)$ não é um ideal de $(\mathbb{Z}, +)$, pois temos $7 \in \mathbb{N}$ e $-8 \in \mathbb{Z}$, mas $7 + (-8) \notin \mathbb{N}$.

1.1 Semigrupos Regulares e Semigrupos Inversos

No que segue apresentamos a definição de semigrupo regular.

Definição 1.10. Um semigrupo S é dito um *semigrupo regular* se, para cada $s \in S$, $\exists s^* \in S$ tal que $ss^*s = s$ e $s^*ss^* = s^*$. O elemento s^* é denominado um *quase-inverso* de s.

Dizemos que um elemento $e \in S$ é um idempotente se $ee = e$.

A próxima teorema caracteriza completamente quando os idempotentes de um semigrupo regular S comutam entre si.

Teorema 1.11. *Seja S um semigrupo regular. Então os idempotentes de S comutam entre si se, e somente se, cada elemento de S possui um único elemento quase-inverso.*

Demonstração. Suponhamos que os idempotentes de S comutam entre si e sejam u e v quase-inversos de $x \in S$. Então $u = uxu = u(xvx)u = (ux)(vx)u$. Notamos que $(ux)^2 = (ux)(ux) = u(xux) = ux$ e $(vx)^2 = (vx)(vx) = v(xvx) = vx$ e, com isto, ux e vx são idempotentes. Além disso, de maneira análoga, obtemos que xv e xu também são idempotentes. Como os idempotentes de S comutam, temos $u = (ux)(vx)u = (vx)(ux)u = v(xux)u = vxu = (vxv)xu = v(xv)(xu) = v(xu)(xv) = v(xux)v = vxv = v$.

Reciprocamente, suponhamos que, para cada $s \in S$, existe um único quase-inverso $s^* \in S$ e sejam e e f elementos idempotentes. Iremos mostrar que (ef) é um idempotente. Por hipótese, existe $x = (ef)^*$, um quase-inverso de ef. Notamos que fxe é um idempotente de S, pois $(fxe)^2 = (fxe)(fxe) = f(x(ef)x)e = fxe$. Além disso, $(ef)fxe(ef) = e(ff)x(ee)f = (ef)x(ef) = ef$ e $fxe(ef)(fxe) = fx(ee)(ff)xe = fxefxe = fxe$. Assim, fxe é um idempotente quase-inverso de (ef) e, com isto, fxe e $(ef)^*$ são quase-inversos de (ef). Logo, por hipótese, temos $fxe = (ef)^*$ e segue que $(ef)^*$ é um idempotente. Além disso, $(ef)^*(ef)^*(ef)^* = (ef)^*$, isto é, um idempotente sempre é inverso dele mesmo. Então, por hipótese (unicidade), temos que $(ef) = (ef)^*$, pois $(ef)^*$ é um quase-inverso para (ef). Com isso, concluimos que o conjunto dos idempotentes de S é fechado com relação ao produto e todo elemento quase-inverso de um idempotente é ele mesmo.

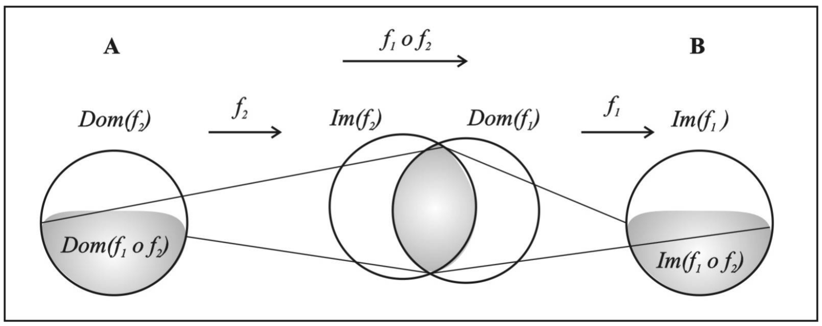
Por sua vez, como $ef(fe)ef = e(ff)(ee)f = (ef)(ef) = ef$ e $fe(ef)fe = f(ee)(ff)e = (fe)(fe) = fe$ obtemos, pela unicidade do quase-inverso de ef, que $ef = fe$. Portanto, os idempotentes de S comutam entre si. □

Motivados pelo teorema acima podemos definir semigrupos inversos.

Definição 1.12. Um semigrupo S é dito um *semigrupo inverso* se, para cada $s \in S$, existe um único $s^* \in S$ tal que $ss^*s = s$ e $s^*ss^* = s^*$.

A seguir apresentaremos um exemplo de semigrupo inverso.

Exemplo 1.13. Sejam X um conjunto não-vazio, $I(X) = \{f : A \to B$ bijetiva, onde $A, B \subset X\}$, o conjunto das bijeções parciais de X, e $f_1, f_2 \in I(X)$. Definimos $f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x))$, para todo $x \in Dom(f_1 \circ f_2) = f_2^{-1}(Im(f_2) \cap Dom(f_1))$. Além disso, $Im(f_1 \circ f_2) = f_1(Im(f_2) \cap Dom(f_1))$. A operação de composição em $I(X)$ é ilustrada na seguinte figura:



Mostraremos que $(I(X), \circ)$ é um semigrupo inverso. De fato, claramente a operação de composição de funções em $I(X)$ é associativa. Notamos que, para cada $f \in I(X)$, existe um único $f^* = f^{-1} \in I(X)$ com a propriedade que $f^* \circ f \circ f^* = f^*$ e $f \circ f^* \circ f = f$. Logo, $(I(X), \circ)$ é um semigrupo inverso.

Na próxima proposição veremos algumas propriedades de semigrupos inversos que serão importantes na prova do Teorema da Representação de Wagner-Preston.

Proposição 1.14. *Se S é um semigrupo inverso, então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) *para todo $s \in S$, temos que ss^* e s^*s são idempotentes, $s(s^*s) = s$ e $(ss^*)s = s$;*

(ii) $(s_1 ... s_n)^* = s_n^* ... s_1^*$, $\forall s_1, ..., s_n \in S$ *e* $n \geq 1$;

(iii) *para todo idempotente $f \in S$ e todo $s \in S$, temos que s^*fs é um idempotente;*

(iv) *se e é um idempotente em S, então $e^* = e$;*

(v) $(s^*)^* = s$, *para todo* $s \in S$.

Demonstração. (i) Notamos que $(s^*s)^2 = (s^*s)(s^*s) = (s^*ss^*)s = s^*s$. Analogamente temos $(ss^*)^2 = (ss^*)(ss^*) = s(s^*ss^*) = ss^*$. As outras igualdades são imediatas, pois S é um semigrupo inverso.

(ii) Mostraremos por indução. De fato, se $n = 2$, temos que $s_2^* s_1^*(s_1 s_2) s_2^* s_1^* = s_2^*(s_1^* s_1)(s_2 s_2^*) s_1^*$. Pelo item (i) e o Teorema 1.11, temos que $(s_1^* s_1)$ e $(s_2 s_2^*)$ são idempotentes e $(s_1^* s_1)(s_2 s_2^*) = (s_2 s_2^*)(s_1^* s_1)$. Assim, $s_2^* s_1^*(s_1 s_2) s_2^* s_1^* = s_2^*(s_2 s_2^*)(s_1^* s_1) s_1^* = (s_2^* s_2 s_2^*)(s_1^* s_1 s_1^*) = s_2^* s_1^*$. De maneira análoga, obtemos $s_1 s_2(s_2^* s_1^*) s_1 s_2 = s_1 s_2$ e, como S é um semigrupo inverso, segue que $(s_1 s_2)^* = s_2^* s_1^*$. Supondo, por hipótese de indução, que $(s_1 \cdots s_k)^* = s_k^* \cdots s_1^*$ obtemos, finalmente, que $(s_1 \cdots s_k s_{k+1})^* = ((s_1 \cdots s_k)(s_{k+1}))^* = (s_{k+1}^*)(s_k^* \cdots s_1^*) = s_{k+1}^* s_k^* \cdots s_1^*$.

(iii) Observamos que $(s^* f s)^2 = (s^* f s)(s^* f s) = s^* f(s s^*) f s$. Assim, pelo item (i), temos que ss^* é um idempotente e, pelo Teorema 1.11, o idempotente ss^* comuta com f. Logo, $(s^* f s)^2 = s^*(ff)(ss^*)s = s^* f(ss^* s) = s^* f s$.

(iv) Como $eee = (ee)e = ee = e$, segue que $e^* = e$.

(v) Seja $s \in S$. Então existe um único elemento $s^* \in S$ tal que $ss^*s = s$ e $s^*ss^* = s^*$. Pelo item (ii), temos $s^*(s^*)^*s^* = s^*$ e $(s^*)^*s^*(s^*)^* = (s^*)^*$. Logo, pela unicidade do quase-inverso, temos $(s^*)^* = s^*$ e, portanto, $(s^*)^* = s$. □

De agora em diante, o conjunto dos idempotentes de um semigrupo inverso S será denotado por $E(S)$. Note que, se A é um subconjunto não-vazio de S então $E(A) = A \cap E(S)$. Além disso, um subconjunto não-vazio $A \subseteq S$ é um subsemigrupo inverso se a operação dos elementos de S restrita aos elementos de A e se cada elemento de A possui um único quase-inverso em A.

Observação 1.15. Seja S um semigrupo inverso. Então $E(S)$ é um subsemigrupo inverso de S, pois, pelo item (iv) da Proposição 1.14, temos $e^* = e$, para todo idempotente $e \in E(S)$. Assim, pelo Teorema 1.11, segue que os idempotentes de S comutam e, com isto, o produto de elementos de $E(S)$ continua em $E(S)$. Logo, $E(S)$ é um subsemigrupo inverso e comutativo de S.

Lema 1.16. *Se S é um semigrupo inverso, então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) *para todo* $e \in E(S)$ *e todo* $s \in S$, *existe um* $f \in E(S)$ *tal que* $es = sf$;

(ii) *para todo* $e \in E(S)$ *e todo* $s \in S$, *existe um* $f \in E(S)$ *tal que* $se = fs$.

Demonstração. (i) Seja $f = s^*es$. Então, pelo item (iii) da Proposição 1.14, f é um idempotente de S. Pelo Teorema 1.11, os idempotentes comutam e, com isto, temos $sf = s(s^*es) = (ss^*)es = e(ss^*)s = e(ss^*s) = es$.
(ii) Seja $f = ses^*$. Então, pelo item (iii) da Proposição 1.14, f é um idempotente. Assim, pelo Teorema 1.11, temos $fs = (ses^*)s = se(s^*s) = (ss^*s)e = se$. □

Na próxima proposição temos uma relação entre grupos e semigrupos inversos.

Antes disso, relembremos a definição de grupo.

Definição 1.17. Seja um conjunto não-vazio G, onde está definido uma operação fechada

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g_1, g_2) & \mapsto & g_1 \cdot g_2 \end{array},$$

satisfazendo:
(i) $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$, $\forall s_1, s_2, s_3 \in S$;
(ii) $\exists e \in G$ tal que $g.e = e.g$, $\forall g \in G$;
(iii) $\forall g \in G$, $\exists g^{-1}$ tal que $g.g^{-1} = g^{-1}.g = e$.
Nestas condições, dizemos que $(G, .)$ *é um grupo*, ou seja, é um conjunto não vazio G munido de uma operação fechada que é associativa, admite elemento neutro e admite inverso para cada um de seus elementos. Além disso, se a operação for comutativa ($g.h = h.g, \forall g, h \in G$), dizemos que G é *grupo abeliano*, em homenagem ao matemático N. Abel (1802-1829).

Proposição 1.18. *S é um grupo se, e somente se, S é um semigrupo inverso com um único idempotente.*

Demonstração. Seja S um grupo. Então S é um semigrupo com um único inverso, pois, para cada $x \in S$, existe um único $x^* = x^{-1}$, inverso de x em S, que satisfaz as condições da Definição 1.12. Mostraremos que S possui um único idempotente. De fato, denotamos por 1_S a unidade de S e suponhamos que exista um outro idempotente h em S. Assim, $hh = h$ e, como S é grupo, temos $(h^{-1})hh = h^{-1}h$, o que implica $h = 1_S$.

Reciprocamente, suponhamos que S é um semigrupo inverso com um único idempotente e. Mostraremos que S é um grupo. De fato, pelo item (i) da Proposição 1.14, temos que ss^* e s^*s são idempotentes, $\forall s \in S$. Por hipótese, segue que $ss^* = s^*s = e$. Assim, para cada $s \in S$, $se = s(s^*s) = s = (ss^*)s = es$ e, com isto, e é a identidade de S. Além disso, para cada $s \in S$, $ss^* = e = s^*s$ e, daí, segue que todo elemento $s \in S$ tem um elemento inversível em S. Logo, S é um grupo. $\square$

Dado $g \in S$, denotaremos por gS (Sg) o conjunto gerado por g à direita (à esquerda) em S, isto é, $gS = \{gs : s \in S\}$ $(Sg = \{sg : s \in S\})$.

Proposição 1.19. *Se S é um semigrupo inverso, então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) *$gS = gg^*S$, $\forall g \in S$, e gg^* é o único idempotente gerador à esquerda de gS;*

(ii) *$Sg = Sg^*g$ $\forall g \in S$, e g^*g é o único idempotente gerador à direita de Sg;*

(iii) *$eS \cap fS = efS$, $\forall e, f \in E(S)$;*

(iv) *$Se \cap Sf = Sef$, $\forall e, f \in E(S)$.*

Demonstração. (i) Para cada $g \in G$, temos $gS = (gg^*)gS \subseteq gg^*S \subseteq gS$ e, sendo assim, $gS = gg^*S$. Agora, seja $e \in E(S)$ tal que $gS = gg^*S = eS$. Então, temos $gg^* = (gg^*)(gg^*) \in gg^*S = eS$, $e = (e)(e) \in eS = gg^*S$ e, sendo assim, $\exists s_1, s_2 \in S$ tais que $gg^* = es_1$ e $e = gg^*s_2$. Logo, pelo Teorema 1.11, temos $gg^* = es_1 = (ee)s_1 = e(es_1) = e(gg^*) = (gg^*)e = (gg^*)(gg^*s_2) = (gg^*)(gg^*)s_2 = gg^*s_2 = e$.

(ii) Análogo ao item (i).

(iii) Seja $x \in eS \cap fS$. Então, $\exists s_1, s_2 \in S$, tais que $x = es_1 = fs_2$. Assim, $ex = e(es_1) = (ee)s_1 = es_1 = x$ e $fx = f(fs_2) = (ff)s_2 = fs_2 = x$. Logo, $x = ex = efx$ e, portanto, $eS \cap fS \subseteq efS$.

Por outro lado, seja $x \in efS$. Então, $\exists s \in S$, tal que $x = efs$ e, daí, temos

$efx = ef(efs) = (ee)(ff)s = efs = x$. Assim, $x = efx = ef(efs) = (ee)(ff)s = efs \in eS$ e $x = efx = ef(efs) = f(ee)fs = fefs = (ff)ex = fes \in fS$. Logo $efS \subseteq eS \cap fS$

(iv) Análogo ao item (iii). $\square$

Observação 1.20. Sejam S um semigrupo inverso e $s, t \in S$. Então $t^*s^*sS = t^*s^*stS$, pois, pelo item (i) da Proposição 1.19, temos $t^*s^*sS = t^*s^*s(t^*s^*s)^*S = t^*s^*s(s^*(s^*)^*(t^*)^*)S = t^*(s^*ss^*)stS = t^*s^*stS$.

1.1.1 A Relação de Ordem Parcial de um Semigrupo Inverso e o Teorema da Representação de Wagner-Preston

Nesta seção o principal objetivo é apresentar o Teorema da Representação de Wagner-Preston.

Seja S um semigrupo inverso. Dados $s, t \in S$ definimos a seguinte relação:

$$s \leq t \Longleftrightarrow s = te$$

para algum idempotente $e \in S$.

A próxima proposição nos dá algumas propriedades da relação $\leq$ definida acima.

Proposição 1.21. *Seja S um semigrupo inverso e sejam $s, t \in S$. Então são equivalentes:*

(i) $s \leq t$;

(ii) $s = et$, *para algum idempotente* $e \in S$;

(iii) $s^* \leq t^*$;

(iv) $s = ss^*t$;

(v) $s = ts^*s$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Suponhamos $s \leq t$. Então temos $s = tf$, para algum idempotente $f \in S$. Logo, pelo item (ii) do Lema 1.16, temos $tf = et$, para algum idempotente $e \in S$ e, portanto, $s = et$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Suponhamos $s = et$, para algum idempotente $e \in S$. Assim, pelos itens (ii) e (iv) da Proposição 1.14, o quase-inverso de s é $s^* = t^*e$ e, com isto, $s^* \leq t^*$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Suponhamos $s^* \leq t^*$. Então $s^* = t^*e$, para algum idempotente $e \in S$, e, pelos itens (ii) e (v) da Proposição 1.14, o quase-inverso de s^* é $s = et$. Daí, usando o fato que tt^* e t^*t são idempotentes em S e que os idempotentes em um semigrupo inverso comutam, temos $ss^*t = (et)(t^*e)t = e(tt^*)et = (ee)tt^*t = et = s$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Suponhamos $s = ss^*t$. Como ss^* é um idempotente em S, pelo item (i) do Lema 1.16, temos $(ss^*)t = tf$, para algum idempotente $f \in S$. Sendo assim, $sf = (ss^*t)f = (tf)f = t(ff) = tf = s$ e, daí, $ts^*s = t(s^*s)f = tfs^*s = ss^*s = s$.

$(v) \Rightarrow (i)$ Suponhamos $s = ts^*s$. Como ss^* é idempotente, segue que $s \leq t$. $\square$

Lema 1.22. *Seja S um semigrupo inverso. A relação $\leq$, definida anteriormente sobre os elementos de S, é uma relação de ordem parcial.*

Demonstração. Mostraremos que a relação $\leq$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. De fato, para cada $s \in S$, existe um único $s^* \in S$ tal que $s = ss^*s$ e, como ss^* é um idempotente, obtemos $s \leq s$.

Por sua vez, supondo $s_1 \leq s_2$ e $s_2 \leq s_1$, pelo item (v) da Proposição 1.21, temos $s_1 = s_2s_1^*s_1$ e $s_2 = s_1s_2^*s_2$. Deste modo, $s_1 = s_2s_1^*s_1 = s_1(s_2^*s_2)(s_1^*s_1) = s_1(s_1^*s_1)(s_2^*s_2) = (s_1s_1^*s_1)s_2^*s_2 = s_1s_2^*s_2 = s_2$.

Finalmente, supondo $s_1 \leq s_2$ e $s_2 \leq s_3$, existem $e, f \in E(S)$ tais que $s_1 = s_2e$ e $s_2 = s_3f$. Logo, $s_1 = s_2e = (s_3f)e = (s_3)fe$ e, portanto, $s_1 \leq s_3$. $\square$

Lema 1.23. *Sejam S um semigrupo inverso e s_1, s_2, s_3, $s_4 \in S$. Se $s_1 \leq s_2$ e $s_3 \leq s_4$, então $s_1s_3 \leq s_2s_4$ e $s_3s_1 \leq s_4s_2$.*

Demonstração. Por hipótese, existem $e, f \in E(S)$ tais que $s_1 = s_2e$ e $s_3 = s_4f$. Assim, $s_1s_3 = s_2es_4f$ e, pelo item (i) do Lema 1.16, existe um idempotente $h \in S$ tal que $es_4 = s_4h$. Logo, $s_1s_3 \leq s_2s_4$. De maneira análoga, $s_3s_1 \leq s_4s_2$. $\square$

Observação 1.24. Note que, usando a Proposição 1.20 e o Lema 1.23, se $s_1 \leq s_2$ então $s_1^*s_1 \leq s_2^*s_2$ e $s_1s_1^* \leq s_2s_2^*$.

Agora temos as ferramentas necessárias para enunciar e provar o Teorema da Representação de Wagner-Preston. Tal teorema caracteriza os semigrupos inversos, a partir do fato que todo semigrupo inverso é isomorfo a um subsemigrupo de $I(X)$, o conjunto das bijeções parciais de X. Além disso, preserva a relação de ordem, $s_1 \leq s_2$ através do homomorfismo $\pi : S \to I(X)$, como veremos a seguir.

Sejam S e T semigrupos. Dizemos que $\delta : S \to T$ é um homomorfismo de semigrupos se satisfaz $\delta(s_1 s_2) = \delta(s_1)\delta(s_2)$, para quaisquer $s_1, s_2 \in S$.

Dado um conjunto X e um homomorfismo $\pi : S \to I(X)$, então definimos uma relação de ordem natural dada por:

$$\pi(s_1) \leq \pi(s_2) \Longleftrightarrow Dom(\pi(s_1)) \subseteq Dom(\pi(s_2)) \text{ e } \pi(s_1)(x) = \pi(s_2)(x),$$

onde $x \in Dom(\pi(s_1))$.

Teorema 1.25. *Seja S um semigrupo inverso. Então existe um conjunto X e um homomorfismo injetivo $\pi : S \to I(X)$ tais que $s_1 \leq s_2 \Longleftrightarrow \pi(s_1) \leq \pi(s_2)$.*

Demonstração. Seja $\pi_s : s^*sS \longrightarrow ss^*S$, dada por $\pi_s(x) = sx$. Notamos que π está bem definida, pois, para cada $x \in s^*sS$, temos $x = s^*st$ para algum $t \in S$ e $\pi_s(s^*st) = ss^*st = st \in sS$. Assim, pelo item (i) da Proposição 1.19, temos $\pi_s(s^*st) \in sS = ss^*S$. De maneira análoga, obtemos que $\pi_{s^*} : ss^*S \longrightarrow s^*sS$, dada por $\pi_{s^*}(x) = s^*x$, está bem definida. Por sua vez, seja $x \in s^*sS$, então $x = s^*st$ para algum $t \in S$. Logo, pelo item (i) da Proposição 1.14, temos $\pi_{s^*} \circ \pi_s(s^*st) = \pi_{s^*}s(s^*st) = (s^*s)(s^*s)t = s^*st$ e $\pi_s \circ \pi_{s^*}(ss^*t) = \pi_s s^*(ss^*t) = (ss^*)(ss^*)t = ss^*t$. Assim, π_s é bijetiva e $\pi_s^{-1} = \pi_{s^*}$.

Agora, seja $\pi : S \longrightarrow I(S)$, dada por $\pi(s) = \pi_s$. Claramente π está bem definida. Mostraremos que π é um homomorfismo, isto é, que $\pi_s \circ \pi_t = \pi_{st}$, $\forall s, t \in S$. Para isso é necessário mostrar que $Dom(\pi_s \circ \pi_t) = Dom(\pi_{st})$ e que $\pi_s \circ \pi_t = \pi_{st}$, $\forall x \in Dom(\pi_{st})$. De fato, pela definição do $Dom(\pi_s \circ \pi_t)$, pela sobrejetividade de π_s, pelo item (iii) da Proposição 1.19 e pela Observação 1.20, temos $Dom(\pi_s \circ \pi_t) = \pi_t^{-1}(Im(\pi_t) \cap Dom(\pi_s)) = \pi_{t^*}(tt^*S \cap s^*sS) = \pi_{t^*}(tt^*s^*sS) = (t^*tt^*)s^*sS = t^*s^*sS = t^*s^*stS = (st)^*stS = Dom(\pi_{st})$. Agora, notamos que, para cada $x \in Dom(\pi_{st})$, temos $\pi_{st}(x) = stx$ e que $(\pi_s \circ \pi_t)(x) = \pi_s(\pi_t(x)) = \pi_s(tx) = stx$. Sendo assim, $\pi_{st}(x) = (\pi_s \circ \pi_t)(x)$, $\forall x \in Dom(\pi_{st}) = Dom(\pi_s \circ \pi_t)$, e, portanto, π é um homomorfismo. Além disso, dados $s_1, s_2 \in S$ tais que $\pi(s_1) = \pi(s_2)$, ou seja, tais que $\pi_{s_1} = \pi_{s_2}$. Pela sobrejetividade de π_s, temos $s_1{s_1}^*S = s_2{s_2}^*S$ e, do item (i) da Proposição 1.19, segue que $s_1S = s_2S$ e, portanto, o homomorfismo π é injetivo.

Para mostrar a segunda parte do teorema. Suponhamos que $s_1 \leq s_2$, então pela Observação 1.23, temos que ${s_1}^*s_1 \leq {s_2}^*s_2$. Assim, $\exists e \in E(S)$, tal que ${s_1}^*s_1 = {s_2}^*s_2e$. Logo $Dom(\pi_{s_1}) \subset Dom(\pi_{s_2})$. Agora, seja $x \in Dom(\pi_{s_1})$. Então $\exists r \in S$, tal que $x = {s_1}^*s_1r$. Notamos que ${s_1}^*s_1x = {s_1}^*s_1{s_1}^*s_1r = {s_1}^*s_1r = x$, com isto, segue do item *(v)* da Proposição 1.20 que $\pi_{s_2}(x) = s_2x = s_2{s_1}^*s_1x = s_1x = \pi_{s_1}(x)$.

Reciprocamente, suponhamos $\pi_{s_1} \leq \pi_{s_2}$, então ${s_1}^*s_1S \subseteq {s_2}^*s_2S$ e $\pi_{s_1}(x) = \pi_{s_2}(x)$ para $x \in {s_1}^*s_1S$. Notamos que ${s_1}^* = {s_1}^*s_1{s_1}^* \in {s_1}^*s_1S$. Assim, $\pi_{s_1}({s_1}^*) = \pi_{s_2}({s_1}^*)$, então $s_1{s_1}^* = s_2{s_1}^*$. Multiplicando a direita em ambos os lados por s_1, obtemos que $s_1 = s_2{s_1}^*s_1$, e seque que, $s_1 \leq s_2$. $\square$

2 SEMIGRUPO INVERSO ASSOCIADO A UM GRUPO

Este capítulo está dividido em três seções. Iniciaremos a Seção 2.1 com algumas definições e resultados clássicos, com o intuito de uma melhor compreensão da construção do semigrupo universal $S(G)$. Este, definido via geradores e relações, será visto na Seção 2.2. Finalmente, na Seção 2.3, estudaremos as representações de $S(G)$, utilizadas para demonstrar, no último teorema deste capítulo, que $S(G)$ é um semigrupo inverso.

2.1 Relações e Monóides Livres

2.1.1 Relações de Equivalência

As relações podem ser definidas em um conjunto qualquer e iremos definí-las em um semigrupo, o nosso objeto de estudo.

Uma *relação binária*, em um semigrupo S, é um subconjunto $\Re \subseteq S \times S$. Se $(x, y) \in \Re$, diremos que x *se relaciona com* y *pela relação* $\Re$ quando $(x, y) \in \Re$. Por sua vez, o conjunto de todas as relações binárias em S será denotado por $\mathbb{R}(S)$ e, durante esta seção, o termo *relação* significará uma relação binária.

Exemplo 2.1. Alguns exemplos importantes de relações binárias são os seguintes:
(i) a relação de todos os pares ordenados de $S \times S$, conhecida como *relação universal*;
(ii) $\Re = \{(x, x) : x \in S\}$, conhecida como *relação identidade* e denotada por $1_{\Re}$;
(iii) $\Re^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \Re\}$, conhecida como a *relação inversa* de $\Re$.

Definição 2.2. Sejam $\Re_1, \Re_2 \in \mathbb{R}(S)$. Então a *relação composta* de $\Re_1$ e $\Re_2$, denotada por $\Re_1 \circ \Re_2$, é definida por

$$\Re_1 \circ \Re_2 = \{(x, y) : (x, z) \in \Re_1 \text{ e } (z, y) \in \Re_2, \text{ para algum } z \in S\}.$$

Proposição 2.3. $(\mathbb{R}(S), \circ)$ *é um monóide.*

Demonstração. Suponhamos $\Re_1, \Re_2, \Re_3 \in \mathbb{R}(S)$. Então, dados $x, y \in S$, temos que

$$(x, y) \in (\Re_1 \circ \Re_2) \circ \Re_3$$

$$\Longleftrightarrow (x, z) \in (\Re_1 \circ \Re_2) \text{ e } (z, y) \in \Re_3, \text{ para algum } z \in S$$

$$\Longleftrightarrow (x, s) \in \Re_1, (s, z) \in \Re_2 \text{ e } (z, y) \in \Re_3, \text{ para alguns } z, s \in S$$

$$\Longleftrightarrow (x, s) \in \Re_1, (s, y) \in \Re_2 \circ \Re_3, \text{ para algum } s \in S$$

$$\Longleftrightarrow (x, y) \in \Re_1 \circ (\Re_2 \circ \Re_3).$$

Assim, $(\mathbb{R}(S), \circ)$ é um semigrupo. Notamos que $1_\Re \in \mathbb{R}(S)$ e, $\forall \Re \in \mathbb{R}(S)$, temos $\Re \circ 1_\Re = \Re = 1_\Re \circ \Re$, pois $\Re \circ 1_\Re = \{(x, y) : (x, y) \in \Re \text{ e } (y, y) \in 1_\Re, \forall y \in S\} = \{(x, y) : (x, x) \in 1_\Re \text{ e } (x, y) \in \Re, \forall x \in S\} = \Re$. Logo, $(\mathbb{R}(S), \circ)$ é um monóide. □

Observação 2.4. Seja $\Re$ uma relação sobre um semigrupo S. Podemos definir recursivamente as *potências* $\Re^n$ de $\Re$, $\forall n \in \mathbb{N}$, da seguinte maneira:
(i) $\Re^0 = 1_S = \{(x, x) : x \in S\}$;
(ii) $\Re^1 = \Re$;
(iii) $\Re^{n+1} = \Re^n \circ \Re$.

Proposição 2.5. *Se* $\Re_1, \Re_2, ..., \Re_n \in \mathbb{R}(S)$, *então as seguintes propriedades são satisfeitas:*
(i) $(\Re^{-1})^{-1} = \Re$*;*
(ii) $\Re_1 \subset \Re_2 \Rightarrow \Re_1 \circ \Re_3 \subset \Re_2 \circ \Re_3$*;*
(iii) $\Re_1 \subset \Re_2 \Rightarrow \Re_1^{-1} \subset \Re_2^{-1}$*;*
(iv) $(\Re_1 \circ ... \circ \Re_n)^{-1} = \Re_n^{-1} \circ ... \circ \Re_1^{-1}$.

Demonstração. (i) Notamos que segue imediatamente da definição, pois $(\Re^{-1})^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \Re^{-1}\} = \{(x, y) : (y, x) \in \Re^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \Re\}\} = \Re$;
(ii) Suponhamos $\Re_1 \subset \Re_2$. Então temos $\Re_1 \circ \Re_3 = \{(x, y) : (x, z) \in \Re_1 \subset \Re_2$ e $(z, y) \in \Re_3$, para algum $z \in S\} \subset \Re_2 \circ \Re_3 = \{(x, y) : (x, z) \in \Re_2$ e $(z, y) \in \Re_3$, para algum $z \in S\}$;

(iii) Suponhamos $\Re_1 \subset R_2$. Então, por definição, temos $\Re_1^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in \Re_1 \subset \Re_2\}$. Assim, segue que $\Re_1^{-1} \subset \Re_2^{-1}$;

(iv) Mostraremos por indução. De fato, para $n = 2$, temos, por definição, que $(\Re_1 \circ \Re_2)^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in \Re_1 o \Re_2\} = \{(y,x) : (y,z) \in \Re_1$ e $(z,x) \in \Re_2$, para algum $z \in S\} = \{(x,y) : (x,z) \in \Re_2^{-1}$ e $(z,y) \in \Re_1^{-1}$, para algum $z \in S\}$ $= \Re_2^{-1} \circ \Re_1^{-1}$. Suponhamos, por hipótese de indução, que $(\Re_1 \circ \Re_2 \circ \cdots \circ \Re_k)^{-1} = \Re_k^{-1} \circ \cdots \circ \Re_2^{-1} \circ \Re_1^{-1}$ e mostraremos que a propriedade é válida para $k+1$. De fato, temos $(\Re_1 \circ \Re_2 \circ \cdots \Re_k \circ \Re_{k+1})^{-1} = ((\Re_1 \circ \Re_2 \circ \cdots \circ \Re_k) \circ (\Re_{k+1}))^{-1} = (\Re_{k+1})^{-1} \circ (\Re_1 \circ \Re_2 \circ \cdots \circ \Re_k)^{-1} = (\Re_{k+1})^{-1} \circ \Re_k^{-1} \circ \cdots \circ \Re_2^{-1} \circ \Re_1^{-1}$. □

Definição 2.6. Uma relação binária $\Re$, em um semigrupo S, é dita uma *relação de equivalência* se, $\forall x, y, z \in S$, valem as seguintes propriedades:

(i) $(x,x) \in \Re$; (reflexividade)

(ii) se $(x,y) \in \Re$ então $(y,x) \in \Re$; (simetria)

(iii) se $(x,y) \in \Re$ e $(y,z) \in \Re$ então $(x,z) \in \Re$. (transitividade)

Observação 2.7. Se $\Re$ é uma relação simétrica então $\Re^{-1} = \Re$. De fato, dado $(x,y) \in \Re$, como $\Re$ é simétrica, temos que $(y,x) \in \Re$ e, daí, $(x,y) \in \Re^{-1}$. Por sua vez, dado $(x,y) \in \Re^{-1}$ temos que $(y,x) \in \Re$ e, como $\Re$ é simétrica, segue que $(x,y) \in \Re$.

Definição 2.8. Sejam $(S,\cdot)$ um semigrupo e $\Re$ uma relação binária em S.

(i) $\Re$ é dita *compatível à direita* (*à esquerda*) se $\forall a \in S$ e $\forall (s,t) \in \Re$, temos que $(sa,ta) \in \Re$ $\big((as,at) \in \Re\big)$.

(ii) $\Re$ é dita *compatível* se $\forall (s_1,s_2),(t_1,t_2) \in \Re$, temos que $(s_1t_1, s_2t_2) \in \Re$.

(iii) $\Re$ é dita uma *congruência à direita* (*à esquerda*) se $\Re$ é uma relação de equivalência compatível à direita (esquerda). Se $\Re$ é uma relação de equivalência compatível, então $\Re$ é dita uma *congruência*.

Lema 2.9. *Uma relação $\Re$, de um semigrupo S, é uma congruência se, e somente, se $\Re$ é uma congruência à esquerda e à direita simultaneamente.*

Demonstração. Suponhamos que $\Re$ é uma congruência e sejam $s, t, a \in S$ tais que $(s,t) \in \Re$. Pela reflexividade, temos que $(a,a) \in \Re$ e, pela compatibilidade, temos que (sa, ta), $(as, at) \in \Re$. Assim, $\Re$ é uma congruência à esquerda e à direita simultaneamente.

Reciprocamente, suponhamos que $\Re$ uma congruência à esquerda e à direita simultaneamente e sejam $(s_1, s_2), (t_1, t_2) \in \Re$. Então, pela compatibilidade à direita de $\Re$, temos que $(s_1t_1, s_2t_1) \in \Re$ e, pela compatibilidade à esquerda de $\Re$, temos que $(s_2t_1, s_2t_2) \in \Re$. Assim, pela transitividade, segue que $(s_1t_1, s_2t_2) \in \Re$ e, portanto, $\Re$ é uma congruência. □

Exemplo 2.10. Dado um conjunto X, sempre é possível construir uma relação de equivalência sobre o conjunto X, a partir de uma função cujo domínio seja X. Dada uma função $f : X \to X$, definimos $\Re = \{(x,y) : f(x) = f(y)\}$. É fácil de ver que é uma relação de equivalência, pois as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $(x,x) \in \Re$, pois $f(x) = f(x)$; (reflexividade)

(ii) se $f(x) = f(y)$ então $f(y) = f(x)$; (simetria)

(iii) se $f(x) = f(y)$ e $f(y) = f(z)$ então $f(x) = f(z)$. (transitividade)

Em geral a relação de equivalência acima não é uma congruência como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 2.11. Considere o semigrupo $(\mathbb{Z}, .)$, a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = x^2 - x - 2$, e a relação $\Re = \{(x,y) : f(x) = f(y)\}$. Notamos que, pelo Exemplo 2.10, $\Re$ é uma relação de equivalência. Todavia, $\Re$ não é uma congruência em $\mathbb{Z}$, pois $f(-1) = 0 = f(2)$ e $f(-2) = 4 = f(3)$ implicam que $(-1,2), (-2,3) \in \Re$, mas $((-1).(-2), 2.3)) \notin \Re$, uma vez que $f(2) = -2$ e $f(6) = 28$.

A seguir temos um exemplo clássico de congruência.

Exemplo 2.12. A relação sobre $(\mathbb{Z}, +)$, definida por $\Re = \{(p,q)\colon\ p - q$ é divisível por $m\}$ é uma congruência. Notamos que, se $(p,q) \in \Re$ então, por definição, $\exists r \in \mathbb{Z}$

tal que $rm = p - q$. Claramente $(p,p) \in \Re$. Sejam $(p,q) \in \Re$, então $\exists r \in \mathbb{Z}$, tal que $rm = p - q$ e, com isto, $-rm = q - p$. Assim $(q,p) \in \Re$. Finalmente, sejam $(p,q) \in \Re$ e $(q,r) \in \Re$, então $\exists r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$, tais que $r_1 m = p - q$ e $r_2 m = q - r$. Logo $(r_1 + r_2)m = p - r$ e, com isto $(p,r) \in \Re$.

Agora, mostraremos que $\Re$ é uma congruência. De fato, dado $(s,t) \in \Re$, $\exists r_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $s - t = r_1 m$. Daí, multiplicando por $a \in \mathbb{Z}$ à direita e depois à esquerda, obtemos $sa - ta = r_1 ma$ e $as - at = ar_1 m$, respectivamente. Deste modo, $(sa,ta),(as,at) \in \Re$, ou seja, $\Re$ é uma congruência à esquerda e à direita simultaneamente. Logo, pelo Lema 2.9, $\Re$ é uma congruência.

Definição 2.13. Seja $\Re$ uma relação de equivalência em um semigrupo S. Dado $s \in S$, a *classe de equivalência* de s pela relação $\Re$, denotada por $\overline{s}$, é o conjunto $\overline{s} = \{x \in S$, tal que $(x,s) \in \Re\}$. Dizemos $\overline{s}$ é o conjunto de elementos $x \in S$ que são equivalentes a s. Quando $\Re$ é uma congruência, dizemos que x é *côngruo* a s módulo $\Re$ e denotamos $x \equiv s \text{ mod}(\Re)$.

A seguir temos outros dois exemplos clássicos de congruência.

Exemplo 2.14. A classe de equivalência $\overline{0}$, pela relação de congruência $\Re = \{(p,q)$: $p - q$ é divisível por $m\}$, são os múltiplos de m, isto é, $\overline{0} = \{r = nm : n \in \mathbb{Z}\}$.

O próximo exemplo aparece em ([2] pág.5).

Exemplo 2.15. Na Geometria Analítica, um vetor é uma classe de equivalência formada por segmentos orientados no espaço vetorial euclidiano e definida pela seguinte relação: dois segmentos não nulos são equivalentes se, e somente se, possuem o mesmo comprimento, mesma direção e sentido, ou são ambos nulos.

Definição 2.16. Seja $\Re$ uma relação de equivalência em um conjunto A. Então o *conjunto quociente* de A por $\Re$, denotado por $A/\Re$, é o conjunto $A/\Re = \{\overline{x} : x \in A\}$, ou seja, $A/\Re$ é o conjunto de todas as classes de equivalência de $\Re$ em A.

A seguir temos um exemplo clássico de conjunto quociente.

Exemplo 2.17. Se $\Re = \{(p,q)\colon\ p-q$ é divisível por $2\}$ então $\mathbb{Z}/\Re = \{\overline{0}, \overline{1}\}$.

Proposição 2.18. *Seja $\Re$ uma congruência sobre um semigrupo $(S,\cdot)$. Então existe uma operação $\odot$, tal que $(S/\Re, \odot)$ é um semigrupo.*

Demonstração. Considere a operação $\odot : S/\Re \times S/\Re \to S/\Re$, definida por $\odot(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x \cdot y}$. Note que $\odot$ está bem definida. De fato, suponhamos $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x'}, \overline{y'})$. Deste modo, $(x, x'), (y, y') \in \Re$ e, como $\Re$ é uma congruência, segue que $(x \cdot y, x' \cdot y') \in \Re$. Assim, $\overline{x \cdot y} = \overline{x'.y'}$, ou seja, $\odot$ é uma operação sobre $S/\Re$. Além disso, pela associatividade de $(S,\cdot)$ e pela definição de $\odot$, temos $\overline{x} \odot (\overline{y} \odot \overline{z}) = \overline{x} \odot \overline{x \cdot y} = \overline{x \cdot (y \cdot z)} = \overline{(x \cdot y) \cdot z} = \overline{x \cdot y} \odot \overline{z} = (\overline{x} \odot \overline{y}) \odot \overline{z}$. Logo, $(S/\Re, \odot)$ é um semigrupo. □

Observação 2.19. Se $\Re$ é uma congruência sobre um monóide $(M,\cdot)$ então $(M/\Re, \odot)$ é um monóide. De fato, pela Proposição 2.18, $(M/\Re, \odot)$ é um semigrupo e, sendo 1_M a identidade em $(M,\cdot)$, segue que $\overline{1_M}$ é a identidade em $(M/\Re, \odot)$, pois $\overline{1_M} \odot \overline{x} = \overline{1_M \cdot x} = \overline{x} = \overline{x \cdot 1_M} = \overline{x} \odot \overline{1_M}$.

Desde que uma família de relações de equivalência em um semigrupo S seja não-vazia, sempre podemos extrair uma única e menor relação de equivalência contendo $\Re$ a qual denotaremos por $\Re^{\natural}$. Além disso sempre é possível extrair uma única e menor congruência em um semigrupo S contendo $\Re$, a qual denotamos por $\Re^{\sharp}$. Mas antes, precisamos de algumas ferramentas para verificar estes fatos.

Lema 2.20. *Seja $(\Re_i)_{i \in I}$ uma família não-vazia de relações de equivalência em um conjunto S. Então $\bigcap\{\Re_i : i \in I\}$ é uma relação de equivalência em S.*

Demonstração. É claro que $1_\Re \in \bigcap\limits_{i \in I} \Re_i$, pois $1_\Re \in \Re$ para toda relação de equivalência. Dado $(x,y) \in \bigcap\limits_{i \in I} \Re_i$ temos que $(x,y) \in \Re_i$, $\forall i \in I$, e, como cada $\Re_i$ é uma relação de equivalência, temos que $(y,x) \in \Re_i$, $\forall i \in I$. Daí, segue que $(y,x) \bigcap\limits_{i \in I} \Re_i$. Finalmente, suponhamos que (x,y), $(y,z) \in \bigcap\limits_{i \in I} \Re_i$. Como cada $\Re_i$ é uma relação de equivalência, temos que $(x,z) \in \Re_i$, $\forall i \in I$. Portanto, $\bigcap\limits_{i \in I} \Re_i$ é uma relação de equivalência. □

Observação 2.21. De maneira análoga ao Lema 2.20, temos que a interseção de uma família não-vazia de congruências, em um semigrupo S é uma congruência.

Definição 2.22. Se $\Re$ é uma relação de equivalência em um conjunto S, dizemos que $\Re^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Re^n$ é o *fecho transitivo* de S.

No próximo lema veremos uma justificativa do nome fecho transitivo.

Lema 2.23. *Se $\Re$ é uma relação em um conjunto S, então $\Re^\infty$ é a menor relação transitiva, em S, contendo $\Re$.*

Demonstração. É claro que $\Re^\infty \supset \Re = \Re^1$. Suponhamos que $(x, y), (y, z) \in \Re^\infty$. Então $\exists m, n \in \mathbb{N}$ tais que $(x, y) \in \Re^m$ e $(y, z) \in \Re^n$. Logo, $(x, z) \in \Re^m \circ \Re^n \subset \Re^\infty$. Agora, suponhamos que $\Re'$ é uma relação transitiva em S, tal que $\Re' \supseteq \Re$. Notamos que $\Re^2 = \Re \circ \Re \subseteq \Re' \circ \Re'$, pois $\forall (x, y) \in \Re \circ \Re$, $\exists z \in S$ tal que $(x, z) \in \Re \subset \Re'$ e $(z, y) \in \Re \subset \Re'$. Além disso, $\Re' \circ \Re' \subseteq \Re'$, pois dado $(x, y) \in \Re' \circ \Re'$, $\exists z \in S$ tal que $(x, z) \in \Re'$ e $(z, y) \in \Re'$. Como $\Re'$ é uma relação transitiva, temos $(x, y) \in \Re'$. Logo, por indução, temos $\Re^n \subseteq \Re'$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e, portanto, $\Re^\infty \subseteq \Re'$. $\square$

Na próxima proposição temos uma caracterização para $\Re^\natural$.

Proposição 2.24. *Se $\Re$ é uma relação em um conjunto S então $\Re^\natural = [\Re \cup \Re^{-1} \cup 1_\Re]^\infty$ é a menor relação de equivalência contendo $\Re$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.23, temos que $\Re^\natural$ é uma relação transitiva e $\Re^\natural \supseteq \Re$. Notamos que $1_\Re \in \Re^\natural$ e, com isto, $\Re^\natural$ é uma relação reflexiva. Claramente, pela definição de $\Re^{-1}$, temos que $\widetilde{\Re} = \Re \cup \Re^{-1} \cup 1_\Re$ é uma relação simétrica. Desta maneira, pela Observação 2.7, temos $\widetilde{\Re} = \widetilde{\Re}^{-1}$ e, pelo item (iv) da Proposição 2.5, segue que $\widetilde{\Re}^n = (\widetilde{\Re}^{-1})^n = (\widetilde{\Re}^n)^{-1}$. Seja $(x, y) \in \Re^\natural$. Então $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $(x, y) \in \widetilde{\Re}^n$ e, como $\widetilde{\Re}^n$ é uma relação simétrica, temos que $(y, x) \in \widetilde{\Re}^n$. Assim, $(y, x) \in \Re^\natural$ e obtemos que $\Re^\natural$ é uma relação de equivalência contendo $\Re$. Agora, mostraremos que $\Re^\natural$ é a menor relação de equivalência contendo $\Re$. De fato, suponhamos que exista uma relação de equivalência $\mathcal{H}$, em S, tal que $\mathcal{H} \supseteq \Re$ e $\mathcal{H} \subset \Re^\natural$. Como $\Re \subset \mathcal{H}$, pela Proposição 2.5 (iii) e Observação 2.7, segue que $\Re \subset \mathcal{H}^{-1} = \mathcal{H}$. Claramente temos $1_\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, pois $\mathcal{H}$ é reflexiva. Assim, $\widetilde{\Re} = \Re \cup \Re^{-1} \cup 1_\Re \subset \mathcal{H}$ e, como $\mathcal{H}$ é uma relação de equivalência, pelo Lema 2.23, temos $\Re^\natural \subseteq \mathcal{H}$. Logo, $R^\natural = \mathcal{H}$ e, portanto, $R^\natural$ é a menor relação de equivalência contendo $\Re$. $\square$

Definição 2.25. Seja $\Re$ uma relação em um semigrupo S. Definimos a relação $\Re^c$ por $\Re^c = \{(s_1xs_2, s_1ys_2) : s_1, s_2 \in S \cup \{1_S\}$ e $(x,y) \in \Re\}$.

Lema 2.26. *Se $\Re$, $\Re_1$ e $\Re_2$ são relações em S, então as seguintes propriedadades são satisfeitas:*

(i) $\Re \subset \Re^c$*;*

(ii) $(\Re^c)^{-1} = (\Re^{-1})^c$*;*

(iii) $\Re_1 \subset \Re_2 \Rightarrow {\Re_1}^c \subset {\Re_2}^c$*;*

(iv) $(\Re^c)^c = \Re^c$*;*

(v) $(\Re_1 \cup \Re_2)^c = {\Re_1}^c \cup {\Re_2}^c$*;*

(vi) $\Re = \Re^c \Leftrightarrow \Re$ *é compatível à direita e à esquerda.*

Demonstração. (i) Se $(x,y) \in \Re$ então $(1_Sx1_S, 1_Sy1_S) \in \Re^c$. Logo $\Re \subset \Re^c$.

(ii) Suponhamos que $(a,b) \in (\Re^c)^{-1}$. Então $(b,a) \in \Re^c$ e, pela Definição 2.24, temos $b = s_1xs_2$ e $a = s_1ys_2$, para alguns $s_1, s_2 \in S \cup \{1_S\}$ e $(x,y) \in \Re$. Desta maneira, $(y,x) \in \Re^{-1}$ e segue, da Definição 2.25, que $(a,b) \in (\Re^{-1})^c$. Para mostrar a inclusão reversa, suponhamos que $(a,b) \in (\Re^{-1})^c$. Então, pela Definição 2.25, existem $s_1, s_2 \in S \cup \{1_S\}$ e $(x,y) \in \Re^{-1}$ tais que $a = s_1xs_2$ e $b = s_1ys_2$. Deste modo, $(y,x) \in \Re$. Logo, pela Definição 2.25, temos que $(b,a) \in \Re^c$ e, portanto, $(a,b) \in (\Re^c)^{-1}$.

(iii) Suponhamos $\Re_1 \subset \Re_2$ e seja $(a,b) \in {\Re_1}^c$. Então, existem $s_1, s_2 \in S \cup \{1_S\}$ e $(x,y) \in \Re_1 \subset \Re_2$ tais que $a = s_1xs_2$ e $b = s_1ys_2$. Assim, $(a,b) \in {\Re_2}^c$.

(iv) Notamos que, do item (i), obtemos $\Re \subset \Re^c$ e, do item (iii), temos $\Re \subset (\Re^c)^c$. Agora, para mostrar a inclusão reversa, suponhamos que $(a,b) \in (\Re^c)^c$. Então, pela Definição 2.24, existem $s_1, s_2 \in S \cup \{1_S\}$ e $(x,y) \in \Re^c$ tais que $a = s_1xs_2$ e $b = s_1ys_2$. Usando novamente a Definição 2.24, temos $x = s_2cs_3$ e $y = s_2ds_3$, para alguns $s_2, s_3 \in S \cup \{1_S\}$ e $(c,d) \in \Re$. Assim, $a = (s_1s_2)c(s_3s_2)$ e $b = (s_1s_2)d(s_3s_2)$, onde $s_1s_2, s_3s_2 \in S \cup \{1_S\}$ e $(c,d) \in \Re$. Logo, $(a,b) \in \Re^c$.

(v) Notamos que $\Re_1 \subset \Re_1 \cup \Re_2$. Deste modo, por (i), obtemos $\Re_1 \subset (\Re_1 \cup \Re_2)^c$ e, analogamente, temos $\Re_2 \subset (\Re_1 \cup \Re_2)^c$. Assim, pelo item (iv), $\Re_1^c \cup \Re_2^c \subset (\Re_1 \cup \Re_2)^c$. Por outro lado, seja $(a, b) \in (\Re_1 \cup \Re_2)^c$. Então, existem $s_1, s_2 \in \Re_1 \cup \{1_S\}$ e $(x, y) \in \Re_1 \cup \Re_2$ tais que $a = s_1 x s_2$ e $b = s_1 y s_2$. Assim, $(x, y) \in \Re_1$ ou $(x, y) \in \Re_2$ e, segue que, $(a, b) \in \Re_1^c$ ou $(a, b) \in \Re_2^c$. Logo, $(a, b) \in \Re_1^c \cup \Re_2^c$.

(vi) Suponhamos que $\Re = \Re^c$. Para cada $s, t, a \in S$, com $(s, t) \in \Re$, temos, pela Definição 2.25, $(as, at) = (as1_s, at1_S) \in \Re^c = \Re$. Desta maneira, $\Re$ é compatível à esquerda. De modo análogo, para cada $(s, t) \in \Re$, temos que $(sa, ta) \in \Re$ e, com isto, $\Re$ é compatível à direita. Reciprocamente, suponhamos que $\Re$ é compatível à direita e à esquerda e seja $(a, b) \in \Re^c$. Então, temos $a = s_1 x s_2$ e $b = s_1 y s_2$ para alguns $s_1, s_2 \in S_1 \cup \{1_s\}$ e $(x, y) \in \Re$. Como $\Re$ é compatível à direita e a esquerda, temos $(xs_2, ys_2) \in \Re$ e $(s_1 x, s_1 y) \in \Re$. Logo, $(s_1 x s_2, s_1 y s_2) = (a, b) \in \Re$ e, portanto, $\Re = \Re^c$. □

Lema 2.27. *Seja $\Re$ uma relação em um semigrupo S. Se $\Re$ é uma relação compatível à esquerda e à direita, então $\Re^n$ é compatível à esquerda e à direita,* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Suponhamos que $\Re$ seja uma relação compatível à direita e à esquerda e seja $(s, t) \in \Re^n = \Re^{n-1} \circ \Re$. Então, pela Definição 2.2, $\exists z_1 \in S$ tal que $(s, z_1) \in \Re^{n-1}$ e $(z_1, t) \in \Re$. Logo, pela Definição 2, 2, $\exists z_2 \in S$ tal que $(s, z_2) \in \Re^{n-2}$ e $(z_2, z_1) \in \Re$. Procedendo dessa maneira $n-1$ vezes, obtemos $z_1, z_2, z_3, ..., z_{n-1} \in S$ tais que $(s, z_1), (z_1, z_2), ..., (z_{n-1}, t) \in \Re$. Como $\Re$ é compatível à direita e à esquerda, pelo item (i) da Definição 2.8, obtemos que $(as, az_1), (az_1, az_2), ..., (az_{n-1}, at) \in \Re$ e $(sa, z_1 a), (z_1 a, z_2 a), ..., (z_{n-1} a, ta) \in \Re$. Além disso, pela Definição 2.2, temos que $(as, at), (sa, ta) \in \Re^n$. Portanto, $\Re^n$ é compatível à direita e à esquerda. □

Finalizamos esta seção com uma caracterização para $\Re^\sharp$.

Proposição 2.28. *Se $\Re$ é uma relação em um semigrupo S, então $\Re^\sharp = (\Re^c)^\natural$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.24, temos que $(\Re^c)^\natural$ é uma relação de equivalência contendo $\Re^c$ e, pelo item (i) do Lema 2.25, segue que $\Re^c \supseteq \Re$. Mostraremos que $(\Re^c)^\natural$

é uma congruência. De fato, se $(s,t) \in (\Re^c)^\natural$ então, pela Proposição 2.24, temos que $(s,t) \in \widetilde{\Re}^n$, onde $\widetilde{\Re} = \Re^c \cup (\Re^c)^{-1} \cup \{1_S\}$. Desta maneira, pelo item (v) do Lema 2.26, obtemos $\widetilde{\Re} = (\Re^c \cup (\Re^c)^{-1} \cup 1_s)^c = (\Re \cup \Re^{-1} \cup 1_S)^c$. Assim, pelo item (vi) do Lema 2.26, temos que $\widetilde{\Re}$ é compatível à direita e à esquerda e, pelo Lema 2.27, obtemos que $\widetilde{\Re}^n$ tambem é compatível à direita e à esquerda. Então, pela Definição 2.8, segue que $(as, at) \in \widetilde{\Re}^n \subset (\Re^c)^\natural$ e $(sa, ta) \in \widetilde{\Re}^n \subset (\Re^c)^\natural$, $\forall a \in S$. Deste modo, $(\Re^c)^\natural$ é uma congruência em S, contendo $\Re$. Para mostrar a minimalidade, seja $\mathfrak{H} \supseteq \Re$ uma congruência qualquer em S. Então, pelos itens (iii) e (vi) do Lema 2.26 e pelo item (iii) da Definição 2.8, obtemos $\Re^c \subset \mathfrak{H}^c = \mathfrak{H}$. Agora, pela Proposição 2.24, obtemos que $(\Re^c)^\natural$ é a menor congruência contendo $\Re$ e, portanto, $\Re^\sharp = (\Re^c)^\natural$. $\square$

2.1.2 Monóides Livres

Para construir o semigrupo universal, precisamos da definição de *monóide livre*. Este conceito é muito útil na "Teoria da Computação", onde tem aplicação em compiladores, e em diversas áreas da Matemática, tais como "Álgebra Aplicada"e "Sistemas Dinâmicos".

Definição 2.29. Dado um conjunto não-vazio A, denotaremos por A^+ o conjunto de todas as sequência finitas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, com $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Exemplo 2.30. Se $A=\{a,b\}$ então $A^+ = \{(a), (b), (a,a), (b,b), (a,b), (b,a), (a,a,a), (a,a,b), (a,b,a), ...\}$.

Definição 2.31. O conjunto A^+, munido da operação de concatenação, definida por $(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m)$, é um semigrupo denominado *semigrupo livre sobre A*.

Observação 2.32. (i) Note que, para cada $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A^+$, podemos escrever $(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1)(a_2)...(a_n)$, onde $(a_1), (a_2), \ldots, (a_n) \in A^+$, ou seja, todo elemento de A^+ é escrito de forma única como um produto finito de sequências unitárias. Logo, fazendo a identificação $a := (a)$, $\forall a \in A$, os elementos $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A^+$

podem ser denotados por $a_1a_2\cdots a_n$ e denominados *palavras* do *alfabeto* A.

(ii) A *palavra vazia*, que representa a sequência vazia ( ), será denotada pelo símbolo 1_{A^+}.

(iii) Se A^+ é um semigrupo livre sobre A, então $A^* = A^+ \cup \{1_{A^+}\}$ é um monóide, denominado *monóide livre sobre* A.

(iv) Como a identificação $a := (a)$, então sempre existe a inclusão natural $i : A \to A^+$.

Definição 2.33. Seja R um subconjunto não-vazio de $A^+ \times A^+$, então o semigrupo via geradores e relações é definido por $< A \mid R >= A^+/_{\Re^\sharp}$, onde $\Re^\sharp$ é a menor congruência sobre A^+ que contém $\Re$. Os elementos de R são denominados relações e, usualmente, são dados por equações que possuem solução em $< A \mid R >$. Os elementos de $< A \mid R >$ são as classes de congruências de palavras sobre A e, por abuso de notação, dizemos que são simplesmente as palavras sobre A.

Observação 2.34. Duas palavras de $< A \mid R >$ representam o mesmo elemento se podem ser obtidas uma da outra aplicando as relações de R.

No exemplo a seguir temos um semigrupo definido via geradores e relações.

Exemplo 2.35. Seja $A = \{a, b\}$ e seja $S =< A \mid R >$ gerado pelas relações $a^2 = a$ e $b^2 = b$, isto é, um semigrupo livre sobre A, gerado por dois idempotentes, onde os elementos de S são palavras formadas por $a's$ e $b's$. De acordo com a Observação 2.34, e, desde que sejam aplicadas as relações de R, teremos $aab = ab$, $aaab = abb$ no quociente, ou seja, na mesma classe de equivalencia.

2.2 Semigrupo Universal S(G)

Utilizando os resultados da seção anterior, veremos que, dado um grupo G, sempre é possível extrair um semigrupo universal com algumas caracterizações e, para o caso finito, uma relação entre a cardinalidade de G e $S(G)$. De agora em diante e denotará a unidade do grupo G.

Definição 2.36. Seja G um grupo. O *semigrupo universal* $S(G)$ de G é definido via geradores e relações como segue. Para cada elemento $t \in G$, tomamos um gerador $[t]$, e, para cada par de elementos $t, s \in G$, consideramos as seguintes relações:
(i) $[s^{-1}][s][t] = [s^{-1}][st]$;
(ii) $[s][t][t^{-1}] = [st][t^{-1}]$;
(iii) $[s][e] = [s]$;
(iv) $[e][s] = [s]$.

Observação 2.37. Para todo $[t] \in S(G)$, temos $[t][t^{-1}][t] = [t]$, pois, usando (i) e (iii), segue que $[t][t^{-1}][t] = [t][t^{-1}t] = [t][e] = [t]$. Notamos que $[e][s] = [ss^{-1}][s]$. Assim, usando (ii), segue que $[e][s] = [s][s^{-1}][s]$ e, por (i) e (iii), temos $[e][s] = [s][s^{-1}][s] = [s][s^{-1}s] = [s][e] = [s]$. Logo, podemos omitir o item (iv) da Definição 2.36. Além disso, usando (i), (ii) e (iii), obtemos $[e][s] = [s] = [s][e]$, $\forall [s] \in S(G)$.

A observação acima é o primeiro passo para mostrar que $S(G)$ é um semigrupo inverso.

Exemplo 2.38. Seja o grupo $G = (\mathbb{Z}_2, +)$. Então $S(G) = \{[\overline{0}], [\overline{1}], [\overline{1}] + [\overline{1}]\}$, pois $[\overline{1}] + [\overline{1}] + [\overline{1}] = [\overline{1}] + [\overline{1} + \overline{1}] = [\overline{1}] + [\overline{1}]$.

No teorema a seguir temos uma propriedade universal para semigrupos.

Teorema 2.39. *Sejam A um conjunto, S um semigrupo e $\delta : A \to S$ uma aplicação. Então existe um único homomorfismo $\gamma : A^+ \to S$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"'] & S \\
A^{+} \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}
$$

Demonstração. Definindo $\gamma(a_1a_2a_3\cdots a_n) = \delta(a_1)\delta(a_2)\delta(a_3)\cdots\delta(a_n)$, temos um homomorfismo, pois, dadas $a_1a_2\cdots a_n$ e $b_1b_2\cdots b_m$ em A^+, temos

$$
\begin{aligned}
\gamma((a_1a_2\cdots a_n)(b_1b_2\cdots b_m)) &= \gamma(a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_m)\\
&= \delta(a_1)\delta(a_2)\cdots\delta(a_n)\delta(b_1)\delta(b_2)\cdots\delta(b_m)\\
&= \big(\delta(a_1)\delta(a_2)\cdots\delta(a_n)\big)\big(\delta(b_1)\delta(b_2)\cdots\delta(b_m)\big)\\
&= \gamma(a_1a_2\cdots a_n)\gamma(b_1b_2\cdots b_m).
\end{aligned}
$$

Além disso, $\forall a \in A$, temos $\gamma(i(a)) = \gamma(a) = \delta(a)$ e, com isto, o diagrama é comutativo. A unicidade segue do fato que se $\gamma' : A^+ \to S$ é um homomorfismo tal que $\gamma'(i(a)) = \delta(a)$, obtemos, $\forall a_1a_2\cdots a_n \in A^+$, $\gamma'(a_1a_2...a_n) = \gamma'(i(a_1)i(a_2)...i(a_n)) = \gamma'(i(a_1))\gamma'(i(a_2))...\gamma'(i(a_n)) = \delta(a_1)\delta(a_2)...\delta(a_n) = \gamma(a_1a_2...a_n)$ e, daí, $\gamma = \gamma'$. $\square$

Como $A \subseteq A^+$, o teorema anterior mostra que δ é a restrição de γ a A. Assim, dizemos que γ estende δ a A.

A próxima proposição decorre da propriedade universal para semigrupos e nos auxiliará a mostrar que $S(G)$ é um semigrupo inverso.

Proposição 2.40. *Sejam G um grupo, S um semigrupo e $f\colon G \to S$ uma função tal que, $\forall s, t \in G$, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $f(s^{-1})f(s)f(t) = f(s^{-1})f(st)$;

(ii) $f(s)f(t)f(t^{-1}) = f(st)f(t^{-1})$;

(iii) $f(s)f(e) = f(s)$.

Então existe um único homomorfismo $\tilde{f} : S(G) \to S$ *tal que* $\tilde{f}([t]) = f(t)$ *e o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{[t]}"'] & S \\ S(G) \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Decorre diretamente do Teorema 2.39, com $[\ \ ] : G \to S(G)$, definida por $[\ \ ](t) = [t]$. $\square$

Definição 2.41. Dado um semigrupo S, o *semigrupo oposto* $(S^{op}, \cdot)$ tem os mesmos elementos de S e a multiplicação é definida por $s \cdot t := ts$, onde ts é o produto de t por s no semigrupo S. Além disso, dizemos que γ é um *anti-automorfismo* se $\gamma : S \to S^{op}$, tal que $\gamma(st) = \gamma(s) \cdot \gamma(t)$ para todo $s, t \in S$.

Proposição 2.42. *Seja G um grupo. Então existe um único anti-automorfismo* $\gamma : S(G) \to S(G)$ *tal que* $\gamma[t] = [t^{-1}]$, $\forall t$ *em* G.

Demonstração. Considere $f : G \to S(G)^{op}$, definida $f(t) = [t^{-1}]$. Mostraremos que f satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) da Proposição 2.40. Dados $e, s, t \in G$, temos

$$\begin{aligned} f(s^{-1}) \cdot f(s) \cdot f(t) &= [s] \cdot [s^{-1}] \cdot [t^{-1}] = [s] \cdot ([t^{-1}][s^{-1}]) = [t^{-1}][s^{-1}][s] \\ &= [t^{-1}s^{-1}][s] = [s] \cdot [t^{-1}s^{-1}] = f(s^{-1}) \cdot f(st) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(s) \cdot f(t) \cdot f(t^{-1}) &= ([s^{-1}] \cdot [t^{-1}]) \cdot [t] = ([t^{-1}][s^{-1}]) \cdot [t] = [t][t^{-1}][s^{-1}] \\ &= [t][t^{-1}s^{-1}] = [t^{-1}s^{-1}] \cdot [t] = f(st) \cdot f(t^{-1}) \end{aligned}$$

$$f(s) \cdot f(e) = [s^{-1}] \cdot [e] = [e][s^{-1}] = [s^{-1}] = f(s)$$

Assim, pela Proposição 2.40, existe um único homomorfismo $\widetilde{f} : S(G) \to S(G)^{op}$, tal que $\widetilde{f}([t]) = [t^{-1}]$. Daí, definindo $\gamma : S(G) \to S(G)$ por $\gamma[t] = \widetilde{f}(t)$, temos $\gamma([s][t]) = \widetilde{f}([s][t]) = \widetilde{f}([s]) \cdot \widetilde{f}([t]) = [s^{-1}] \cdot [t^{-1}] = [t^{-1}][s^{-1}] = \gamma(t)\gamma(s)$, ou seja, γ é um anti-automorfismo. $\square$

O próximo resultado nos fornece algumas caracterizações para $S(G)$.

Proposição 2.43. *Para cada $t \in G$, seja $\varepsilon_t = [t][t^{-1}]$. Então, dados $s, t \in G$, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *ε_t é um idempotente auto-adjunto, isto é, $\varepsilon_t^* = \varepsilon_t = \varepsilon_t^2$;*

(ii) *$[t]\varepsilon_s = \varepsilon_{ts}[t]$;*

(iii) *ε_t e ε_s comutam, isto é, $\varepsilon_s\varepsilon_t = \varepsilon_t\varepsilon_s$.*

Demonstração. (i) Para cada $t \in G$, temos que $\varepsilon_t^* = ([t][t^{-1}])^* = [t^{-1}]^*[t]^* = [t][t^{-1}] = \varepsilon_t = [t][t^{-1}][e] = [t][t^{-1}][tt^{-1}] = [t][t^{-1}][t][t^{-1}] = \varepsilon_t^2$;

(ii) Usando (i) e (ii) da Definição 2.36, obtemos $[t]\varepsilon_s = [t][s][s^{-1}] = [ts][s^{-1}] = [ts][e][s^{-1}] = [ts][s^{-1}t^{-1}ts][s^{-1}] = [ts][s^{-1}t^{-1}][ts][s^{-1}] = [ts][s^{-1}t^{-1}][tss^{-1}] = \varepsilon_{ts}[t]$;

(iii) Por (ii), $\varepsilon_t\varepsilon_s = [t][t^{-1}]\varepsilon_s = [t]\varepsilon_{t^{-1}s}[t^{-1}] = \varepsilon_{t(t^{-1}s)}[t][t^{-1}] = \varepsilon_s[t][t^{-1}] = \varepsilon_s\varepsilon_t$. □

Na próxima proposição veremos que os elementos de $S(G)$ admitem uma determinada decomposição.

Proposição 2.44. *Todo elemento $a \in S(G)$ admite a decomposição: $a = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[s]$, onde $n \geq 0$ e $r_1, ..., r_n, s \in G$. Além disso, temos:*

(i) *$r_i \neq r_j$, se $i \neq j$;*

(ii) *$r_i \neq s$ e $r_i \neq e$, $\forall i = \{1, ..., n\}$.*

Demonstração. Seja R um subconjunto de $S(G)$ contendo os elementos que admitem a decomposição acima. Como n pode ser 0, temos que $[s] \in R$, para todo $s \in G$. Para provar que $R = S(G)$, é suficiente verificar que R é um ideal à direita de $S(G)$, pois, como $[e] \in R$, isso implica que $R = S(G)$. Note que, $\forall s, t \in G$, temos $[s][t] = [s][s^{-1}][s][t] = [s][s^{-1}]sst] = \varepsilon_s[st]$. Assim, dados $a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s] \in R$ e $[t_1][t_2]\cdots[t_m] \in S(G)$, temos $a[t_1][t_2]\cdots[t_m] = \cdots = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}\varepsilon_s\varepsilon_s...\varepsilon_{st_1\cdots t_m}[st_1\cdots t_m]$. Logo, $a[t_1][t_2]\cdots[t_m] \in R$ e, portanto, R é um ideal à direita de $S(G)$.

Além disso, dada uma decomposição $a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_i}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_{j-1}}\varepsilon_{r_j}\varepsilon_{r_{j+1}}...\varepsilon_{r_n}[s]$, com $r_i = r_j$, comutando os $r_k{}'s$ e usando o fato eles são idempotentes, obtemos

$$a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_i}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_{j-1}}\varepsilon_{r_j}\varepsilon_{r_{j+1}}...\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_i}\varepsilon_{r_j}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_{j-1}}\varepsilon_{r_{j+1}}...\varepsilon_{r_n}[s]$$
$$= \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_i}^2\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_{j-1}}\varepsilon_{r_{j+1}}...\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_i}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_{j-1}}\varepsilon_{r_{j+1}}...\varepsilon_{r_n}[s]$$

Por sua vez, dada uma decomposição $a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_i}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}[s]$, com $r_i = s$, comutando os $r_k's$ e usando o fato que $\varepsilon_s = [s][s^{-1}]$, obtemos

$$a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_i}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_s\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}\varepsilon_s[s]$$
$$= \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}][s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}[ss^{-1}][s]$$
$$= \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}[e][s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}[s].$$

Finalmente, dada uma decomposição $a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_i}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}[s]$, com $r_i = e$, comutando os $r_k's$ e usando o fato que $\varepsilon_e = [e][e^{-1}] = [e][e] = [e]$, obtemos

$$a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_i}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_e\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}\varepsilon_e[s]$$
$$= \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}[e][s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_{i-1}}\varepsilon_{r_{i+1}}...\varepsilon_{r_n}[s].$$ □

Definição 2.45. Se $a \in S(G)$ está escrito na forma $a = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$, e satisfaz as condições (i) e (ii) da Proposição 2.44, dizemos que *a está na forma padrão.*

Na próxima proposição veremos que $S(G)$ é um semigrupo regular.

Proposição 2.46. *Para cada $a \in S(G)$, $\exists a^* \in S(G)$ tal que $aa^*a = a$ e $a^*aa^* = a^*$.*

Demonstração. Dado $a \in S(G)$ temos, pela Proposição 2.44, que $a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$. Mostraremos que $a^* = [s^{-1}]\varepsilon_{r_n}...\varepsilon_{r_1}$ satisfaz $aa^*a = a$ e $a^*aa^* = a^*$. De fato, $aa^*a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}]\varepsilon_{r_n}...\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}][s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s] = a$ e $a^*aa^* = [s^{-1}]\varepsilon_{r_n}...\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}]\varepsilon_{r_n}...\varepsilon_{r_1} = [s^{-1}][s][s^{-1}]\varepsilon_{r_n}...\varepsilon_{r_1} = [s^{-1}]\varepsilon_{r_n}...\varepsilon_{r_1} = a^*$. □

2.3 Representações de S(G)

Como $S(G)$ é um semigrupo regular, para provar que ele é um semigrupo inverso, basta mostrar a unicidade do quase-inverso a^*. No entanto, os resultados de unicidade, em estruturas oriundas de geradores e relações, são difíceis de estabelecer, se não conseguirmos encontrar uma separação familiar das representações, e este é o objetivo dessa seção. Uma *representação* para $S(G)$ é um homomorfismo de $S(G)$ em um semigrupo. Em particular, a função:

$$\begin{array}{rccc} \partial\colon & S(G) & \to & G \\ & [t] & \mapsto & t \end{array}$$

é uma representação de $S(G)$.

Definição 2.47. Dado $a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s] \in S(G)$, o *grau* de a é definido por $\partial(a)$.

Observação 2.48. Notamos que, dado $a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$, temos $\partial(a) = s$, pois $\partial(\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]) = r_1{r_1}^{-1}r_2{r_2}^{-1}...r_n{r_n}^{-1}s = s$.

As representações serão frequentemente obtidas com o auxílio da Proposição 2.42. Na próxima proposição veremos uma outra representação para $S(G)$, um pouco menos trivial. Para isso, precisamos de algumas ferramentas como segue.

Definição 2.49. $\mathcal{P}_e(G)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de G que contém a unidade e de G.

Observação 2.50. G e $\{e\}$ são, respectivamente, o maior e menor elementos de $\mathcal{P}_e(G)$.

Definição 2.51. $F(\mathcal{P}_e(G))$ é o conjunto de todas as funções de $\mathcal{P}_e(G)$ em $\mathcal{P}_e(G)$, ou seja, $F(\mathcal{P}_e(G)) = \{\delta; \delta : \mathcal{P}_e(G) \to \mathcal{P}_e(G) \text{ é função}\}$.

Observação 2.52. O conjunto $F(\mathcal{P}_e(G))$, munido da operação composição de funções, é um semigrupo.

Definição 2.53. Para cada $t \in G$, definimos a função $\delta_t : \mathcal{P}_e(G) \to \mathcal{P}_e(G)$, por $\delta_t(E) = tE \cup \{e\}$, onde $tE = \{ts : s \in E\}$.

Observação 2.54. Como $e \in E$, $\forall E \in \mathcal{P}_e(G)$, podemos escrever $\delta_t(E) = tE \cup \{e, t\}$.

Proposição 2.55. *Seja $\gamma : G \to F(\mathcal{P}_e(G))$, definida por $\gamma(t) = \delta_t$, onde $\delta_t : \mathcal{P}_e(G) \to \mathcal{P}_e(G)$ é definida por $\delta_t(E) = tE \cup \{e, t\}$. Então, existe um único homomorfismo de semigrupos $\Lambda : S(G) \to F(\mathcal{P}_e(G))$ tal que $\Lambda([t]) = \delta_t$.*

Demonstração. Dados $s, t \in G$ e $E \in \mathcal{P}_e(G)$, temos $\delta_{s^{-1}}\delta_s\delta_t(E) = \delta_{s^{-1}}\delta_s(\delta_t(E)) = \delta_{s^{-1}}\delta_s(tE \cup \{e,t\}) = \delta_{s^{-1}}(\delta_s(tE \cup \{e,t\})) = \delta_{s^{-1}}(s(tE \cup \{e,t\}) \cup \{e,s\}) = \delta_{s^{-1}}(stE \cup \{e,s,st\}) = s^{-1}(stE \cup \{e,s,st\} \cup \{e,s^{-1}\}) = tE \cup \{e,s^{-1},t\} \cup \{e,s^{-1}\} = tE \cup \{e,s^{-1},t\} = tE \cup \{s^{-1},t\} \cup \{e,s^{-1}\} = s^{-1}(stE \cup \{e,st\}) \cup \{e,s^{-1}\} = \delta_{s^{-1}}(stE \cup \{e,st\}) = \delta_{s^{-1}}(\delta_{st}(E)) = \delta_{s^{-1}}\delta_{st}(E)$ e, daí, $\delta_{s^{-1}}\delta_s\delta_t = \delta_{s^{-1}}\delta_{st}$. Analogamente, mostra-se que $\delta_s\delta_t\delta_{t^{-1}} = \delta_{st}\delta_{t^{-1}}$ e que $\delta_s\delta_e = \delta_s$. Logo, δ_t satisfaz as condições da Proposição 2.40 e, portanto, existe um único homomorfismo $\Lambda : S(G) \to F(\mathcal{P}_e(G))$ tal que $\Lambda([t]) = \delta_t$. □

Observação 2.56. (i) O homomorfismo Λ, da proposição anterior, é uma representação de $S(G)$.

(ii) Para todo $r \in G$ e para todo $E \in \mathcal{P}_e(G)$, temos $\Lambda(\varepsilon_r)(E) = E \cup \{r\}$, pois $\Lambda(\varepsilon_r)(E) = \Lambda([r][r^{-1}])(E) = \Lambda([r])\Lambda([r^{-1}])(E) = \delta_r\delta_{r^{-1}}(E) = \delta_r(r^{-1}E \cup \{e, r^{-1}\}) = r(r^{-1}E \cup \{e, r^{-1}\}) \cup \{e, r\} = E \cup \{e, r\} = E \cup \{r\}$.

(iii) Note que $\Lambda(a)(\{e\}) = \Lambda(\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s])(\{e\}) = \Lambda(\varepsilon_{r_1})...\Lambda(\varepsilon_{r_n})\Lambda([s])(\{e\}) = (\Lambda(\varepsilon_{r_1})...\Lambda(\varepsilon_{r_n}))(\Lambda([s])(\{e\})) = (\Lambda(\varepsilon_{r_1})...\Lambda(\varepsilon_{r_n}))(\delta_s(\{e\})) = (\Lambda(\varepsilon_{r_1})...\Lambda(\varepsilon_{r_n}))(\{e,s\}) = (\Lambda(\varepsilon_{r_1})...\Lambda(\varepsilon_{r_{n-1}}))((\Lambda(\varepsilon_{r_n})(\{e,s\})) = (\Lambda(\varepsilon_{r_1})...\Lambda(\varepsilon_{r_{n-1}})(\{e, r_n, s\}) = \{e, r_1, r_2, ..., r_n, s\}$.

Com base nas representações Λ e ∂, podemos mostrar a unicidade da decomposição padrão de $a \in S(G)$, como veremos na próxima proposição.

Proposição 2.57. *Todo elemento $a \in S(G)$ admite uma única decomposição padrão $a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$, a menos da ordem dos ε_{r_i}'s e do $[s]$.*

Demonstração. Suponhamos que exista outra decomposição padrão $a = \varepsilon_{t_1}...\varepsilon_{t_m}[u]$. Pela Observação 2.48, temos $\partial(a) = s$ e $\partial(a) = u$. Daí, segue que $u = s$. Além disso, pelo item (iii) da Observação 2.56, temos $\Lambda(a)(\{e\}) = \{e, r_1, r_2, ..., r_n, s\}$ e $\Lambda(a)(\{e\}) = \{e, t_1, t_2, ..., t_m, u\}$. Como $s = u$, segue que $\{t_1, t_2, ..., t_m\} = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$ e, portanto, a decomposição é única. □

Na próxima observação obtemos, a partir da unicidade da decomposição padrão, uma caracterização para os idempotentes de $S(G)$.

Observação 2.58. Se $f=\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$ é um idempotente em $S(G)$ então $f=\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}$. De fato, se $f = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$ é idempotente, então $\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$ e, pelo item (ii) da Proposição 2.43, temos $\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{sr_1}...\varepsilon_{sr_n}[s][s]$. Logo, pela unicidade da decomposição, segue que $[s][s] = [s]$. Daí, $\partial([s][s]) = \partial([s])$, ou seja, $s^2 = s$. Sendo assim, $s = e$ e, portanto, $f = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[e] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}$.

Na próxima proposição veremos que, se G é um grupo finito, então é possível computar a ordem de $S(G)$.

Proposição 2.59. *Se G é um grupo finito de ordem p, então $S(G)$ possui $2^{p-2}(p+1)$ elementos.*

Demonstração. Se $f = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[e]$, os $r_i's$ podem ser tomados de $2^{p-1} =| \mathcal{P}(G\backslash\{e\}) |$ modos diferentes. Por sua vez, se $f = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$, com $s \neq e$, então os $r_i's$ podem ser tomados de $2^{p-2} = |\mathcal{P}(G\backslash\{e,s\})|$ modos diferentes e, como temos $p-1$ escolhas possíveis para $s \neq e$, temos $(p-1)2^{p-2}$ elementos da forma $f = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s]$, com $s \neq e$. Portanto, $S(G)$ possui $2^{p-1} + (p-1)2^{p-2} = 2^{p-2}(p+1)$ elementos. □

Agora, estamos em condições de mostrar que $S(G)$ é um semigrupo inverso.

Teorema 2.60. *Se G é um grupo então $S(G)$ é um semigrupo inverso.*

Demonstração. Seja $a = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s] \in S(G)$ e sejam a^* e b quase-inversos de a. Escrevendo $b^* = \varepsilon_{t_1}...\varepsilon_{t_m}[u]$, temos $b = (b^*)^* = [u^{-1}]\varepsilon_{t_1}...\varepsilon_{t_m}$ e, daí, $s = \partial(a) = \partial(aba) = \partial(a)\partial(b)\partial(a) = su^{-1}s$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade, por $s^{-1}u$, obtemos que $s = u$ e, portanto, $[s][u^{-1}] = [s][s^{-1}] = \varepsilon_s$. Sendo assim, $\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s] = a = aba = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s][u^{-1}]\varepsilon_{t_1}...\varepsilon_{t_m}\varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}...\varepsilon_{r_n}\varepsilon_{t_1}...\varepsilon_{t_m}[s]$ e, pela unicidade da decomposição, obtemos $\{t_1, ..., t_m\} \subseteq \{r_1, ..., r_n\}$. Aplicando um argumento análogo em $(bab)^* = b^*$, obtemos $\{r_1, ..., r_n\} \subseteq \{t_1, ..., t_m\}$ e, portanto, segue que $b = a^*$. □

3 BIJEÇÃO ENTRE AS AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS E AÇÕES DO SEMIGRUPO INVERSO UNIVERSAL SOBRE UM CONJUNTO X

As ações parciais de grupo estão presente em várias áreas da Matemática, tais como teoria de operadores, sistema dinâmicos e áreas relacionadas. Exel e Dochuachaev (2003) desenvolveram a teoria algébrica de ações parciais de grupos em álgebras e esta teoria tem sido amplamente estudada, ver [3] e [5], e as referências neles contida.

O objetivo deste capítulo é mostrar a correspondência entre as ações de semigrupos inversos e ações parciais de grupos em um conjunto qualquer X. Começamos este capítulo definindo ações parciais de um grupo G e ação de um semigrupo inverso sobre um conjunto X.

Definição 3.1. Sejam X um conjunto e G um grupo. Uma *ação parcial* de G em X é um par

$$\Xi = (\{D_g\}_{g \in G}, \{\xi_g\}_{g \in G}),$$

onde para cada $g \in G$, D_g é um subconjunto de X e $\xi_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é uma bijeção, tais que para cada $g, h \in G$ as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $D_e = X$ e $\xi_e = id_X$, onde id_X é a função identidade de X;

(ii) $\xi_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$;

(iii) $\xi_g \circ \xi_h(x) = \xi_{gh}(x)$ para todo $x \in D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h^{-1}}$.

Observação 3.2. (i) Usando o item (iii) da definição acima, obtemos $\xi_g^{-1} = \xi_{g^{-1}}$, para todo $g \in G$.

(ii) Se $D_g = X$, para todo $g \in G$, então Ξ é uma ação global de G sobre X.

Exemplo 3.3. Sejam $G = (\mathbb{Z}_4, +) = (\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}, +)$ e $Y = \{(1,0), (0,1), (-1,0)\}$. Definimos $D_{\overline{0}} = Y$, $D_{\overline{1}} = \{(0,1), (-1,0)\}$, $D_{\overline{2}} = \{(1,0), (-1,0)\}$, $D_{\overline{3}} = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\xi_{\overline{g}} : D_{\overline{g}^{-1}} \to D_{\overline{g}}$ por $\xi_{\overline{g}}(x, y) = (x\cos[g(\frac{\pi}{2})] - y\sin[g(\frac{\pi}{2})], x\sin[g(\frac{\pi}{2})] + y\cos[g(\frac{\pi}{2})])$ e $\xi_{\overline{0}} = id_Y$. É fácil ver que, para cada $\overline{g} \in G$, $\xi_{\overline{g}} : D_{\overline{g}^{-1}} \to D_{\overline{g}}$ é uma bijeção. Notamos que $\xi_{\overline{g}}(D_{\overline{g}^{-1}} \cap D_{\overline{h}}) = D_{\overline{g}} \cap D_{\overline{gh}}$, para todo $\overline{g}, \overline{h} \in G$, pois $\xi_{\overline{1}}(D_{\overline{3}} \cap D_{\overline{1}}) = \xi_{\overline{1}}(0,1) = (-1,0) = D_{\overline{1}} \cap D_{\overline{2}}$, $\xi_{\overline{1}}(D_{\overline{3}} \cap D_{\overline{2}}) = \xi_{\overline{1}}(1,0) = (0,1) = D_{\overline{1}} \cap D_{\overline{3}}$, $\xi_{\overline{2}}(D_{\overline{2}} \cap D_{\overline{1}}) = \xi_{\overline{2}}(-1,0) = (1,0) = D_{\overline{2}} \cap D_{\overline{3}}$, $\xi_{\overline{2}}(D_{\overline{2}} \cap D_{\overline{3}}) = \xi_{\overline{2}}(1,0) = (-1,0) = D_{\overline{2}} \cap D_{\overline{1}}$, $\xi_{\overline{3}}(D_{\overline{1}} \cap D_{\overline{3}}) = \xi_{\overline{3}}(0,1) = (1,0) = D_{\overline{3}} \cap D_{\overline{2}}$ e $\xi_{\overline{3}}(D_{\overline{1}} \cap D_{\overline{2}}) = \xi_{\overline{3}}(-1,0) = (0,1) = D_{\overline{3}} \cap D_{\overline{1}}$. Além disso, $\xi_{\overline{g}} \circ \xi_{\overline{h}}(x) = \xi_{\overline{gh}}(x)$, para todo $x \in D_{\overline{g}^{-1}} \cap D_{\overline{g}^{-1}\overline{h}^{-1}}$. Logo $\Xi = (\{D_{\overline{g}}\}_{\overline{g} \in (\mathbb{Z}_4, +)}, \{\xi_{\overline{g}}\}_{\overline{g} \in (\mathbb{Z}_4, +)})$, é uma ação parcial de G em Y.

Exemplo 3.4. Sejam $G = (\mathbb{Z}_4, +)$ e $X = \{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$. Definimos $D_{\overline{0}} = D_{\overline{1}} = D_{\overline{2}} = D_{\overline{3}} = X$ e $\Lambda_{\overline{g}} : D_{\overline{g}^{-1}} \to D_{\overline{g}}$ por $\Lambda_{\overline{g}}(x, y) = (x\cos[g(\frac{\pi}{2})] - y\sin[g(\frac{\pi}{2})], x\sin[g(\frac{\pi}{2})] + y\cos[g(\frac{\pi}{2})])$. É claro que $\Lambda_{\overline{g}}$ é uma bijeção e pela Observação 3.2, temos que $\Lambda = (\{D_{\overline{g}}\}_{\overline{g} \in (\mathbb{Z}_4, +)}, \{\Lambda_{\overline{g}}\}_{\overline{g} \in (\mathbb{Z}_4, +)})$ é uma ação global de G em X.

Observação 3.5. Sejam $\Xi = (\{D_g\}_{g \in G}, \{\Lambda_g\}_{g \in G})$ uma ação global de um grupo G em um conjunto X e seja $Y \subset X$. Definindo, para cada $g \in G$, $D_g = Y \cap \Lambda_g(Y)$ e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$, por $\alpha_g = \Lambda_g|_{D_{g^{-1}}}$, é fácil de ver que $\alpha = (\{D_g\}_{g \in G}, \alpha_g)$ é uma ação parcial de G em Y.

Definição 3.6. Sejam S um semigrupo inverso e X um conjunto não-vazio. Uma *ação* de S em X é um homomorfismo $\varsigma : S \to I(X)$, onde $I(X)$ é o conjunto das bijeções parciais de X em X.

A próxima proposição exibe condições necessárias e suficientes para que um grupo G aja parcialmente em um conjunto X.

Proposição 3.7. *Sejam G um grupo e X um conjunto. O par $\Xi = (\{D_g\}_{g \in G}, \{\xi_g\}_{g \in G})$, onde $\xi_g : G \to I(X)$, é uma ação parcial de G em X se, e somente se, para todo $s, t \in G$ as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) $\xi_s \xi_t \xi_{t^{-1}} = \xi_{st} \xi_{t^{-1}}$;

(ii) $\xi_e = id_X$.

Demonstração. Suponhamos que $\xi : G \to I(X)$ é uma ação parcial de G em X. Então, para todo $g \in G$, existem uma família de subconjuntos $D_g \subset I(X)$ e uma família de bijeções $\xi_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ satisfazendo a Definição 3.1. Do primeiro item da Definição 3.1, obtemos $\xi_e = id_X$. Agora, mostraremos que $\xi_s\xi_t\xi_{t^{-1}} = \xi_{st}\xi_{t^{-1}}$, $\forall s, t \in G$. De fato, pelos itens (ii) e (iii) da Definição 3.1, temos $\xi_t\xi_{t^{-1}} = \xi_e$, ou seja, $\xi_t\xi_{t^{-1}} = Id_{D_t}$e, sendo assim, $Dom(\xi_s\xi_t\xi_{t^{-1}}) = D_{s^{-1}} \cap D_t$. Além disso, $Dom(\xi_{st}\xi_{t^{-1}}) = \xi^{-1}_{t^{-1}}(D_{t^{-1}} \cap D_{(st)^{-1}}) = \xi_t(D_{t^{-1}} \cap D_{(st)^{-1}})$. Logo, pelo item (ii) da Definição 3.1, temos $Dom(\xi_{st}\xi_{t^{-1}}) = D_{(t^{-1})^{-1}} \cap D_{(t^{-1})^{-1}(st)^{-1}} = D_t \cap D_{tt^{-1}s^{-1}} = D_t \cap D_{s^{-1}}$ e, com isto, $Dom(\xi_s\xi_t\xi_{t^{-1}}) = Dom(\xi_{st}\xi_{t^{-1}})$. Agora, seja $x \in D_t \cap D_{s^{-1}}$. Então, pelo item (iii) da Definição 3.1, temos $(\xi_s\xi_t\xi_{t^{-1}})(x) = (\xi_s(\xi_t\xi_{t^{-1}}(x)) = (\xi_s(\xi_{tt^{-1}}(x)) = \xi_s(x) = \xi_{se}(x) = \xi_{s(tt^{-1})}(x) = \xi_{(st)t^{-1}}(x) = \xi_{st}(\xi_{t^{-1}}(x)) = \xi_{st}\xi_{t^{-1}}(x)$.

Reciprocamente, suponhamos que as condições (i) e (ii) são satisfeitas, $\forall s, t \in G$. Da condição (ii), temos $\xi_e = id_X$ e, com isto, obtemos o item (i) da Definição 3.1. Agora, mostraremos que, $\forall t \in G$, existe uma família de bijeções $\xi_t : D_{t^{-1}} \to D_t$. De fato, na condição (i), tomando $s = t^{-1}$, obtemos $\xi_{t^{-1}}\xi_t\xi_{t^{-1}} = \xi_{t^{-1}t}\xi_{t^{-1}} = \xi_e\xi_{t^{-1}} = \xi_{t^{-1}}$ e, tomando $s = t$ e $t = t^{-1}$, obtemos $\xi_t\xi_{t^{-1}}\xi_{(t^{-1})^{-1}} = \xi_t\xi_{t^{-1}}\xi_t = \xi_{tt^{-1}}\xi_t = \xi_e\xi_t = \xi_t$. Como $I(X)$ é um semigrupo inverso, segue que $\xi_t^* = \xi_{t^{-1}}$. Definindo $D_t = Im(\xi_t)$, temos $Dom(\xi_t) = Im({\xi_t}^*) = Im({\xi_t}^{-1}) = D_{t^{-1}}$. Desta maneira, $\xi_t : D_{t^{-1}} \to D_t$ é uma bijeção, $\forall t \in G$. Por sua vez, pela condição (i), obtemos $\xi_{t^{-1}}\xi_{s^{-1}} = \xi_{t^{-1}e}\xi_{s^{-1}} = \xi_{(t^{-1}s^{-1})s}\xi_{s^{-1}} = \xi_{t^{-1}s^{-1}}\xi_s\xi_{s^{-1}}$ e, sendo assim, $Dom(\xi_{t^{-1}}\xi_{s^{-1}}) = Dom(\xi_{t^{-1}s^{-1}}\xi_s\xi_{s^{-1}})$. Note que $Dom(\xi_{t^{-1}}\xi_{s^{-1}}) = Dom(\xi_{t^{-1}}) \cap Im(\xi_{s^{-1}}) = \xi^{-1}_{s^{-1}}(D_t \cap D_{s-1}) = \xi_s(D_{s-1} \cap D_t)$ e, como $\xi_s\xi_{s^{-1}} = id_{D_s}$, temos $Dom(\xi_{t^{-1}s^{-1}}\xi_s\xi_{s^{-1}}) = Dom(\xi_{(st)^{-1}}) \cap Im(id_{D_s}) = D_s \cap D_{st}$. Logo, $\xi_s(D_{s^{-1}} \cap D_t) = D_s \cap D_{st}$ e o item (ii), da Definição 3.1, está satisfeito. Além disso, notamos que $Dom(\xi_{(st)^{-1}}\xi_s\xi_{s^{-1}}) = D_s \cap D_{st}$ e $\xi_{t^{-1}}\xi_{s^{-1}}(x) = \xi_{t^{-1}e}\xi_{s^{-1}}(x) = \xi_{(t^{-1}s^{-1})s}\xi_{s^{-1}}(x) = \xi_{t^{-1}s^{-1}}\xi_s\xi_{s^{-1}}(x) = \xi_{(st)^{-1}}\xi_s\xi_{s^{-1}}(x)$, $\forall x \in D_s \cap D_{st}$. Em particular, tomando $s = t^{-1}$ e $t = s^{-1}$, obtemos $Dom(\xi_{st}\xi_{t^{-1}}\xi_t) = D_{t^{-1}} \cap D_{t^{-1}s^{-1}}$ e $\xi_s\xi_t(x) = \xi_{st}\xi_{t^{-1}}\xi_t(x)$, $\forall x \in D_{t^{-1}} \cap D_{t^{-1}s^{-1}}$. Como $\xi_{t^{-1}}\xi_t = id_{D_{t^{-1}}}$, obtemos $\xi_s\xi_t(x) = \xi_{st}(x)$, $\forall x \in D_{t^{-1}} \cap D_{t^{-1}s^{-1}}$, e, com isto, o item (iii) da Definição 3.1 é satisfeito. Portanto, $\xi : G \to I(X)$ é uma ação parcial de G em X. $\square$

Observação 3.8. Sejam G um grupo, X um conjunto e $\xi : G \to I(X)$ uma ação parcial de G em X. Pelo item (ii) da Proposição 1.14(i) e pelo item (i) da Proposição 3.7, obtemos $\xi_{s^{-1}}\xi_s\xi_t = (\xi_{t^{-1}}\xi_{s^{-1}}\xi_s)^{-1} = (\xi_{t^{-1}s^{-1}}\xi_s)^{-1} = (\xi_{(st)^{-1}}\xi_s)^{-1} = \xi_{s^{-1}}\xi_{st}$.

Agora, temos as ferramentas necessárias para mostrar a correspondência entre ações parciais de G em X e as ações de semigrupos inversos $S(G)$ em X como veremos no próximo teorema e este é o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.9. *Sejam G um grupo e X um conjunto. Existe uma correspondência bijetiva entre ações parciais de G em X e as ações de $S(G)$ em X.*

Demonstração. Mostraremos, inicialmente, que a cada ação parcial ξ de G em X corresponde a uma única ação de $S(G)$ em X. De fato, seja ξ uma ação parcial de G em X. Pela Proposição 3.7 e pela Observação 3.8, ξ satisfaz as propriedades da Proposição 2.39 e, daí, existe um único homorfismo $\widetilde{\xi} : S(G) \to I(X)$, dado por $\widetilde{\xi}([t]) = \xi_t$. Portanto, pela Definição 3.6, ξ_t é uma ação de $S(G)$ em X.

Reciprocamente, se α é uma ação de $S(G)$ em X então, pela Definição 3.6, $\alpha : S(G) \to I(X)$ é um homomorfismo. Definindo $\xi : G \to I(X)$, por $\xi(t) = \xi_t = \alpha([t])$, temos $\xi(e) = \alpha([e]) = Id_X$, $\xi_s\xi_t\xi_{t-1} = \alpha([s][t][t^{-1}]) = \alpha([st][t^{-1}]) = \alpha([st])\alpha([t^{-1}]) = \xi_{st}\xi_{t^{-1}}$ e, analogamente, $\xi_{s^{-1}}\xi_s\xi_t = \xi_{s^{-1}s}\xi_{st}$. Logo, pela Proposição 3.7, ξ é uma ação parcial de G em X. Agora, usando os argumentos do último parágrafo, existe uma ação $\widetilde{\xi} : S(G) \to I(X)$, tal que $\widetilde{\xi}([t]) = \xi_t$ e, pela unicidade, temos $\widetilde{\xi} = \alpha$. □

Exemplo 3.10. Sejam $G = (\mathbb{Z}_4, +) = (\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}, +)$ e $Y = \{(1,0), (0,1), (-1,0)\}$. Consideremos a ação parcial do Exemplo 3.3, onde $\xi_{\overline{g}} : D_{\overline{g}^{-1}} \to D_{\overline{g}}$ é dada por $\xi_{\overline{g}}(x,y) = (x\cos[g(\frac{\pi}{2})] - y\sin[g(\frac{\pi}{2})], x\sin[g(\frac{\pi}{2})] + y\cos[g(\frac{\pi}{2})])$, com $D_{\overline{g}} = X \cap \xi_{\overline{g}}(X)$. Logo $D_{\overline{0}} = Y$, $D_{\overline{1}} = \{(0,1), (-1,0)\}$, $D_{\overline{2}} = \{(1,0), (-1,0)\}$ e $D_{\overline{3}} = \{(1,0), (0,1)\}$. Para determinar a ação de $\widetilde{\delta} : S(G) \to I(Y)$, construiremos o semigrupo inverso $S(G)$. Pelo Teorema 2.58, sabemos que $S(G)$ possui $2^{4-2}(4+1) = 20$ elementos. Utilizando a decomposição padrão, a Definição 2.35 e a Proposição 2.42, obtemos os seguintes elementos de $S(G)$:

$[\overline{0}]$, $[\overline{1}]$, $[\overline{2}]$, $[\overline{3}]$,

$\varepsilon_{\overline{1}} = [\overline{1}] + [\overline{3}]$, $\varepsilon_{\overline{2}} = [\overline{2}] + [\overline{2}]$, $\varepsilon_{\overline{3}} = [\overline{3}] + [\overline{1}]$,

$\varepsilon_{\overline{1}}[\overline{2}] = [\overline{1}] + [\overline{3}] + [\overline{2}] = [\overline{1}] + [\overline{3} + \overline{2}] = [\overline{1}] + [\overline{1}]$,

$\varepsilon_{\overline{1}}[\overline{3}] = [\overline{1}] + [\overline{3}] + [\overline{3}] = [\overline{1}] + [\overline{3} + \overline{3}] = [\overline{1}] + [\overline{2}]$,

$\varepsilon_{\overline{2}}[\overline{1}] = [\overline{2}] + [\overline{2}] + [\overline{1}] = [\overline{2}] + [\overline{2} + \overline{1}] = [\overline{2}] + [\overline{3}]$,

$\varepsilon_{\overline{2}}[\overline{3}] = [\overline{2}] + [\overline{2}] + [\overline{3}] = [\overline{2}] + [\overline{2} + \overline{3}] = [\overline{2}] + [\overline{1}]$,

$\varepsilon_{\overline{3}}[\overline{2}] = [\overline{3}] + [\overline{1}] + [\overline{2}] = [\overline{3}] + [\overline{1} + \overline{2}] = [\overline{3}] + [\overline{3}]$,

$\varepsilon_{\overline{3}}[\overline{1}] = [\overline{3}] + [\overline{1}] + [\overline{1}] = [\overline{3}] + [\overline{1} + \overline{1}] = [\overline{3}] + [\overline{2}]$,

$\varepsilon_{\overline{1}}\varepsilon_{\overline{2}} = [\overline{1}] + [\overline{3}] + [\overline{2}] + [\overline{2}] = [\overline{1}] + [\overline{3} + \overline{2}] + [\overline{2}] = [\overline{1}] + [\overline{1}] + [\overline{2}]$,

$\varepsilon_{\overline{1}}\varepsilon_{\overline{2}}[\overline{3}] = [\overline{1}] + [\overline{3}] + [\overline{2}] + [\overline{2}] + [\overline{3}] = [\overline{1}] + [\overline{3} + \overline{2}] + [\overline{2}] + [\overline{3}] = [\overline{1}] + [\overline{1}] + [\overline{2}] + [\overline{3}]$,

$\varepsilon_{\overline{1}}\varepsilon_{\overline{3}} = [\overline{1}] + [\overline{3}] + [\overline{3}] + [\overline{1}] = [\overline{1}] + [\overline{3} + \overline{3}] + [\overline{1}] = [\overline{1}] + [\overline{2}] + [\overline{1}]$,

$\varepsilon_{\overline{1}}\varepsilon_{\overline{3}}[\overline{2}] = [\overline{1}] + [\overline{3}] + [\overline{3}] + [\overline{1}] + [\overline{2}] = [\overline{1}] + [\overline{3} + \overline{3}] + [\overline{1}] + [\overline{2}] = [\overline{1}] + [\overline{2}] + [\overline{1}] + [\overline{2}]$,

$\varepsilon_{\overline{2}}\varepsilon_{\overline{3}} = [\overline{2}] + [\overline{2}] + [\overline{3}] + [\overline{1}] = [\overline{2}] + [\overline{2} + \overline{3}] + [\overline{1}] = [\overline{2}] + [\overline{1}] + [\overline{1}]$,

$\varepsilon_{\overline{2}}\varepsilon_{\overline{3}}[\overline{1}] = [\overline{2}] + [\overline{2}] + [\overline{3}] + [\overline{1}] + [\overline{1}] = [\overline{2}] + [\overline{2} + \overline{3}] + [\overline{1}] + [\overline{1}] = [\overline{2}] + [\overline{1}] + [\overline{1}] + [\overline{1}]$.

$\varepsilon_{\overline{1}}\varepsilon_{\overline{2}}\varepsilon_{\overline{3}} = [\overline{1}] + [\overline{3}] + [\overline{2}] + [\overline{2}] + [\overline{3}] + [\overline{1}] = [\overline{1}] + [\overline{3} + \overline{2}] + [\overline{2}] + [\overline{3}] + [\overline{1}] = [\overline{1}] + [\overline{1}][\overline{2}] + [\overline{3}] + [\overline{1}] =$
$[\overline{1}] + [\overline{1}] + [\overline{2} + \overline{3}] + [\overline{1}] = [\overline{1}] + [\overline{1}] + [\overline{1}] + [\overline{1}]$.

Assim, $S(G) = \{[\overline{0}], [\overline{1}], [\overline{2}], [\overline{3}], [\overline{1}][\overline{3}], [\overline{2}][\overline{2}], [\overline{3}][\overline{1}], [\overline{1}][\overline{1}], [\overline{1}][\overline{2}], [\overline{2}][\overline{3}], [\overline{2}][\overline{1}], [\overline{3}][\overline{3}], [\overline{3}][\overline{2}], [\overline{1}][\overline{3}], [\overline{1}][\overline{1}][\overline{2}][\overline{3}], [\overline{1}][\overline{2}][\overline{1}], [\overline{1}][\overline{2}][\overline{1}][\overline{2}], [\overline{2}][\overline{1}][\overline{1}], [\overline{2}][\overline{1}][\overline{1}][\overline{1}], [\overline{1}][\overline{1}][\overline{1}][\overline{1}]\}$ e, pelo Teorema da correspondência, $\widetilde{\delta}([t]) = \xi_t$ temos $\widetilde{\delta}([\overline{0}]) = \xi_{\overline{0}} = Id_Y$, $\widetilde{\delta}([\overline{1}]) = \xi_{\overline{1}}, \widetilde{\delta}([\overline{2}]) = \xi_{\overline{2}}, \widetilde{\delta}([\overline{3}]) = \xi_{\overline{3}}, \widetilde{\delta}([\overline{1}][\overline{3}]) = \xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{3}}, \widetilde{\delta}([\overline{2}][\overline{2}]) = \xi_{\overline{2}}\xi_{\overline{2}}, \widetilde{\delta}([\overline{3}][\overline{1}]) = \xi_{\overline{3}}\xi_{\overline{1}}, \widetilde{\delta}([\overline{1}][\overline{1}]) = \xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{1}}, \widetilde{\delta}([\overline{1}][\overline{2}]) = \xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{2}}, \widetilde{\delta}([\overline{2}][\overline{3}]) = \xi_{\overline{2}}\xi_{\overline{3}}, \widetilde{\delta}([\overline{2}][\overline{1}]) = \xi_{\overline{2}}\xi_{\overline{1}}, \widetilde{\delta}([\overline{3}][\overline{3}]) = \xi_{\overline{3}}\xi_{\overline{3}}, \widetilde{\delta}([\overline{1}][\overline{1}][\overline{2}]) = \xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{2}}, \widetilde{\delta}([\overline{1}][\overline{1}][\overline{2}][\overline{3}]) = \xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{2}}\xi_{\overline{3}}$,

$\widetilde{\delta}([\overline{1}][\overline{2}][\overline{1}]) = \xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{2}}\xi_{\overline{1}}, \widetilde{\delta}([\overline{1}][\overline{2}][\overline{1}][\overline{2}]) = \xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{2}}\xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{2}}, \widetilde{\delta}([\overline{2}][\overline{1}][\overline{1}]) = \xi_{\overline{2}}\xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{1}}, \widetilde{\delta}([\overline{2}][\overline{1}][\overline{1}][\overline{1}]) = \xi_{\overline{2}}\xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{1}}$ e $\widetilde{\delta}([\overline{1}][\overline{1}][\overline{1}][\overline{1}]) = \xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{1}}\xi_{\overline{1}}$.

Bibliografia

[1] ABADIE, F.; Enveloping actions and takai duality for partial actions, J. Funct. Anal. $197(2003), 1467$.

[2] BOULOS, P. e CAMARGO, I.; Geometria Analítica - Um Tratamento Vetorial. 2ed. São Paulo: Makron Books.

[3] CLIFFORD, A. H e PRESTON G. B.; The algebraic theory of semigroups, Volume 2. USA: American Mathematical Society, (1971).

[4] EXEL, R; Partial actions of groups and actions of inverse semigroups, Proceedings of the American Mathematical Society $126(1998), 3481-3494$.

[5] GERÔNIMO, J. R.; FRANCO, V. S.; Fundamentos de Matemática: Uma introdução a lógica matemática, teoria dos conjuntos, relações e funções. 2ed. Maringá: Eduem (2008).

[6] GOBERNA, M. á., JORNET, V., PUENTE, R. e RODRíGUEZ, M.; Algebra Y Fundamentos: Una Introducción. Espanha: Editorial Ariel, S. A. (2000).

[7] GRILLET, P. A.; Semigroups: an introduction to the structure theory. USA: Marcel Dekker, Inc. (1995).

[8] HOWIE, J. M; An introduction to semigroup theory, London: Academic Press Inc. Ltd., (1976).

[9] HOWIE, J. M; Fundamentals of semigroup theory, New York: Oxford University Press Inc. (1995).

[10] LAWSON, M. V; Inverse Semigroups - The Theory of Partial Symmetries. Singapura: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1998).

[11] LOTHAIRE, M.; Combinatorics on Words, USA: Cambridge University Press (1997).

[12] PRESTON, G.B.; Inverse semi-groups, Journal of London Mathematical Society 29(1954), 396403.

[13] PRESTON, G.B.; Inverse semi-groups with minimal right ideals, Journal of London Mathematical Society 29(1954), 404411.

[14] PRESTON, G.B.; Representations of inverse semi-groups, Journal of London Mathematical Society 29(1954), 411419.

[15] VIDE, C. M., MITRANA, V. e PAUN, G.; Formal languages and applications, Alemanha: Springer Verlag Berlin Heidelberg (2004).

[16] WAGNER, V. V.; Generalized groups, Doklady Akademii Nauk 84(1952), 11191122.