UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Estudo de equações de advecção-difusão conservativas e estimativas de comutadores em espaços de Lebesgue com pesos

por

Junielson Pantoja de Aquino

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do título de

Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Lucas da Silva Oliveira (UFRGS)
Orientador

Porto Alegre, setembro de 2024

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

, Junielson Pantoja de Aquino

Estudo de equações de advecção-difusão conservativas e estimativas de comutadores em espaços de Lebesgue com pesos / Junielson Pantoja de Aquino

.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2024.

98 p.: il.

Tese (doutorado)— Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2024.
Orientador: Oliveira (UFRGS), Lucas da Silva

Tese: Matemática Aplicada, Análise Aplicada
, , ,

Estudo de equações de advecção-difusão conservativas e estimativas de comutadores em espaços de Lebesgue com pesos

por

Junielson Pantoja de Aquino

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Lucas da Silva Oliveira (UFRGS)

Banca examinadora:

Prof. Dr. Leonardo Pranges Bonorino
PPGMAT - UFRGS

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano
PPGMAT/PPGMAp - UFRGS

Prof. Dr. Diego Marcon Farias
PPGMAT - UFRGS

Prof. Dr. Tiago Henrique Picon
USP - Ribeirão Preto

Tese defendida em
Maio de 2024.

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira
Coordenador

*"Você pode destruir mil planetas,
galáxias, ou universos, mas não é capaz
de destruir este Saiyajin."*

– Akira Toriyama

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, meus mais profundos e sinceros agradecimentos a Deus, que nos presenteia com a vida e a oportunidade de aprender e evoluir neste mundo.

Agradeço imensamente aos meus amados pais que sempre batalharam para proporcionar uma vida digna e honesta a nossa família e um futuro melhor para seus filhos. Agradeço também ao meu querido irmão pela participação especial e insubstituível que têm na minha vida. Aos demais familiares que sempre torceram por mim, obrigado por tudo.

Ao meu orientador Lucas da Silva Oliveira e a Patrícia Lisandra Guidolin pela co-orientação, que estão sempre dispostos a me ajudar, o meu sincero obrigado! Aos colegas e amigos da PPGMAp, quero agradecer pelos bons momentos passados diariamente em nosso laboratório, com conversas enriquecedoras e descontraídas. Meus agradecimentos também a todos os professores que compartilharam comigo um pouco de suas experiências.

SUMÁRIO

RESUMO

Nesta tese, trataremos de dois problemas. Primeiramente, usando uma técnica baseada em métodos de energia, fornecemos um estudo rigoroso sobre resultados de existência global e estimativas supnorm para solução fraca de equações de difusão-advecção $u_t + \mathrm{div}(b(x,t)\varphi(u)) = \mu(t)\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ com dados iniciais $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$; em relação ao termo de velocidade advectiva arbitrária, apenas assumimos que $b(x,t)$ e $\mathrm{div}\, b(x,t)$ são limitados. Em segundo, estendendo algumas ideias introduzidas por Alvarez *et al* obtemos uma formulação abstrata para provarmos continuidade de comutadores entre funções de BMO e uma classe abstrata de operadores lineares contínuos agindo em certos espaços de Lebesgue com pesos; em particular, esses resultados incluem vários resultados sobre estimativas para comutadores envolvendo operadores integrais fracionários e operadores pseudo-diferenciais.

ABSTRACT

In this dissertation, we will work on two problems. Firstly, using a technique based on energy methods we provide a rigorous study concerning global existence results and supnorm estimates for weak solution of advection-diffusion equations $u_t+\mathrm{div}(b(x,t)\varphi(u)) = \mu(t)\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ with initial data $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$; in respect of the arbitrary advective speed term, we only assume that $b(x,t)$ and $\mathrm{div}\, b(x,t)$ are bounded. Secondly, extending previous ideas from the work of Alvarez *et al* we obtained an abstract framework to prove boundedness for commutators between BMO functions and a class of linear operators acting continuously on weighted Lebesgue spaces; in particular, such result includes as corollaries several results concerning commutator estimates for fractional integral operators and pseudo-differential operators.

1 INTRODUÇÃO

Nesse trabalho, iremos trabalhar com duas classes de problemas distintos. Na primeira parte da tese, trataremos de um problema sobre o comportamento assintótico de soluções de equações de advecção-difusão; na segunda parte, iremos estudar o comportamento de certos comutadores. Como os problemas tem natureza muito distinta, vamos quebrar a introdução em duas partes para facilitar a leitura.

1.1 Comportamento assintótico da solução da equação evolutiva dada pelo operador p-laplaciano

Nessa parte do trabalho, obtemos condições para existência global de soluções limitadas (fracas) do problema de valor inicial para equações p-laplacianas de evolução do tipo

$$u_t + \operatorname{div}(b(x,t)\varphi(u)) = \mu(t)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \tag{1.1}$$

Aqui $p > 2$ é uma constante $\mu \in C^0([0,\infty))$ é positiva, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo $|\varphi(u)| \leq |u|^{k+1}$ para alguma constante $k \geq 0$ e $b(x,t) \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ com $\operatorname{div}(b(x,t)) \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ satisfazendo as seguintes condições

$$b(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n)) \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} b(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n)) \tag{1.3}$$

Por uma solução (limitada) de (1.1) em algum intervalo de tempo $[0,T_*)$, queremos dizer qualquer função $u(\cdot,t) \in C^0([0,T_*), L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)) \cap L^p_{loc}((0,T_*), W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n))$ satisfazendo a equação do problema (1.1) em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0,T_*))$ com $u(\cdot,0) = u_0$ e $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n))$, ou seja, para cada $0 < T < T_*$ dado, temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq M_1(T) \quad \forall\, 0 \leq t \leq T \tag{1.4}$$

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M_\infty(T) \quad \forall\, 0 \leq t \leq T, \tag{1.5}$$

para alguns limites $M_1(T), M_\infty(T)$ dependendo de T. Especificamente, para uma função $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times (0,T_*))$ podemos associar uma distribuição T_u definida por

$$T_u(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n \times (0,T_*)} u(x,t)\phi(x,t)dxdt$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times (0,T_*))$. Para a equação do nosso problema p-Laplaciano, dizemos que u é uma solução no sentido das distribuições se, para qualquer função de teste $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times (0,T_*))$, temos

$$\int_0^{T_*}\int_{\mathbb{R}^n} u_t\phi + \int_0^{T_*}\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(b(x,t)\varphi(u))\phi = \int_0^{T_*}\int_{\mathbb{R}^n} \mu(t)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\phi.$$

Em resumo $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0,T_*))$ é o espaço das distribuições sobre $\mathbb{R}^n \times (0,T_*)$ permitindo tratar soluções fracas das equações diferenciais parciais.

Para a existência local (no tempo) de tais soluções, ver, por exemplo [35, 37, 38, 52, 53].

Vamos apresentar o resultado que inspirou esse trabalho: no artigo [10] descobriu-se que para certos valores de k, a solução do problema

$$u_t + (b(x,t)u^{k+1})_x = \mu(t)u_{xx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(\cdot,0) = u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \tag{1.6}$$

para um campo de advecção arbitrário continuamente diferenciável b satisfazendo

$$b(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R})), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \tag{1.7}$$

$$\left|\frac{\partial b(x,t)}{\partial x}\right| < B(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1.8}$$

existe globalmente. Como pode-se observar, tal problema, o termo advectivo dado em (1.6) tem a mesma natureza do termo advectivo do problema que estamos interessados em estudar.

Para o leitor ter uma intuição do que está acontecendo, reescrevemos a equação do problema (1.6) como segue:

$$u_t + (k+1)b(x,t)u^k u_x = -\frac{\partial b(x,t)}{\partial x}u^{k+1} + \mu(t)u_{xx}. \tag{1.9}$$

Note que a dependência explícita da variável espacial no terno $b(x,t)$ torna o comportamento assintótico da solução difícil de prever. Como b depende de x, na região onde $\frac{\partial b(x,t)}{\partial x} < 0$, o terno $\frac{\partial b(x,t)}{\partial x} u^{k+1}$ estimula a solução u a crescer em magnitude. Observando que soluções de (1.6) conservam a massa, se $u(\cdot,t)$ cresce acentuadamente em algum lugar, então o perfil de $u(\cdot,t)$ terá que ser longo e afinado, tornando-se mais suscetível aos efeitos dissipativos do termo difusivo presente na equação. Então, a conclusão da competição entre os termos do lado direito em (1.9) é difícil de prever.

No nosso caso, o operador difusivo é dado pelo p-Laplaciano, e espera-se que a força deste operador, para certos valores de k, também seja capaz de controlar a solução de (1.1) e assim garantir sua existência global.

Para garantir a existência global é necessário que a solução seja limitada para todo tempo $t > 0$. Sabendo que as soluções podem ser estendidas a intervalos de existência mais amplos enquanto permanecerem limitadas, é importante examinar o comportamento das normas altas no intervalo de existência da soluções, em particular da norma $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, como será feito. A técnica usada no trabalho é baseada em métodos de energia e foi desenvolvida pelo matemático Paulo Zingano da Universidade do Rio Grande do Sul.

Muitos trabalhos nessa direção foram desenvolvidos. Vamos citar alguns resultados conhecidos:

- [2, 23, 24, 44] Quando $k = 0$ e b não depende explicitamente de x, ou quando b depende de x com $\partial b(x,t)/\partial x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$ em (1.6), já foi comprovado que, para cada $1 \leq p_0 \leq p < \infty$, $\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R})}$ decresce monotonicamente em t, e $\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C(p_0)\|u(\cdot,t)\|_{L^{p_0}(\mathbb{R})} t^{-1/2p_0}$.
- [4, 22] Para $k = 0$ e $b = b(x,t)$ (não assumindo $\partial b(x,t)/\partial x \geq 0$), a existência global foi provada.

- [54] A existência global de soluções para o problema (1.6), exigindo apenas $b(x,t)$ limitado, foi provado para o caso $0 \leq k < 1/n$, onde n é a dimensão da variável espacial.

- [28] A existência global de soluções para o problema (1.6) foi provado para o caso $0 \leq k < 2/n$, desde que b e $\operatorname{div} b$ sejam limitados.

- Em [10], descobriu-se a existência global para soluções de equações do tipo (1.1) quando $k \in [0, p-2+\frac{p-1}{n})$.

Este último resultado é a principal motivação para essa parte da tese. Temos como objetivo estender o intervalo $[0, p-2+\frac{p-1}{n})$, isto é, investigar para quais valores de k é possível garantir a existência global de soluções para o problema (1.1).

Todas as soluções construídas até agora têm $\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ monotonicamente decrescente no tempo, isto é,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;\; \forall\, 0 < t < T_*. \tag{1.10}$$

A propriedade acima é fundamental para atingir o nosso objetivo, pois o controle da norma L^∞, usando o argumento apresentado nesta tese, depende do controle de alguma norma L^q, para algum $q \geq 1$, ver teorema principal. No artigo [10] podemos encontrar a demonstração da propriedade acima (1.10), desde que $k \geq 1 - 2/p$ ou $p > n$. Como já mencionado, neste mesmo artigo, os autores provaram a existência global das soluções da equação (1.1) para

$$0 \leq k < p - 2 + \frac{p-1}{n}, \tag{1.11}$$

deixando em aberto o que aconteceria no caso crítico $k_* = p-2+\frac{p-1}{n}$. Poderíamos garantir a existência global para $k \geq p-2+\frac{p-1}{n}$? Ou ainda, quais condições deveríamos assumir a fim de estender o intervalo de existência global $[0, p-2+\frac{p-1}{n})$? Nosso trabalho responde a segunda questão. Acrescentando a hipótese (1.3) , conseguimos garantir a existência global da solução $u(\cdot,t)$ para todo k, satisfazendo

$$0 \leq k < p - 2 + \frac{p}{n}. \tag{1.12}$$

Tal resultado, exibe um comportamento anti-Fujita com respeito a solução do problema (1.1).

Para finalizar a descrição deste primeiro problema do trabalho, enunciamos o resultado principal desta parte:

Teorema 1.1.1. *Seja* $\overline{q} \geq 1$, $0 \leq t_0 < t < T_*$, $\frac{n(k-(p-2))}{p} < \overline{q}$ *e* $u(\cdot, t)$ *solução de (1.1). Então*

$$
\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \mathbb{U}_\infty(t_0;t) \\
&\leq (4\overline{q})^{\frac{np}{\overline{q}p-n(k-(p-2))}} \max\left\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{\overline{q}p+n(p-2-k)}} \mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{\overline{q}p}{\overline{q}p+n(p-2-k)}} \right\},
\end{aligned}
$$

onde

$$
\mathbb{U}_q(t_0;t) := \sup\left\{ \|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} : t_0 \leq \tau \leq t \right\},
$$

$$
\mathbb{B}_\mu(t_0;t) := \sup\left\{ \frac{B(\tau)}{\mu(\tau)} : t_0 \leq \tau \leq t \right\},
$$

e $B(t) := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |div\, b(x,t)|$.

Esse resultado será enunciado como **Teorema 2.3.1**. Considerando a propriedade (1.10), e substituindo o valor $\overline{q} = 1$ no teorema acima, garantimos a existência global.

1.2 Continuidade de comutadores em espaços de lebesgue com pesos

No que segue, vamos supor que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (a classe de Schwartz) e, por conta disso, os operadores integrais que iremos apresentar podem todos ser rigorosamente definidos com o auxílio da teoria de distribuições temperadas; para mais detalhes, recomendamos o texto de Duoandikoetxea [21].

Apesar de nosso trabalho tratar de estimativas em espaços com peso para comutadores, é impossível motivarmos esse problema sem falarmos de dois dos pontos de virada no desenvolvimento da Análise Harmônica no século passado: a teoria dos operadores de Calderón-Zygmund e o papel que o espaço das funções de oscilação média limitada desempenha no estudo de tais operadores. Se definirmos para cada $1 \leq j \leq n$ a **j-ésima transformada de Riesz de** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ como

$$R_j f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy\,, \tag{1.13}$$

juntamente com a **transformada de Hilbert de** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ através da fórmula

$$Hf(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy\,, \tag{1.14}$$

teremos a nossa disposição os exemplos mais importantes da teoria de operadores integrais singulares desenvolvida por Alberto Calderón e Antoni Zygmund nos anos 50 e que hoje em dia é conhecida como a *teoria dos operadores de Calderón-Zygmund*: uma classe ampla de operadores integrais singulares

$$Tf(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y)\, dy \tag{1.15}$$

que agem continuamente sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p < \infty$ e que também satisfazem

$$|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C_1}{\lambda} \|f\|_{L^1}\,. \tag{1.16}$$

A base central para o estudo desses operadores (e de generalizações dos mesmos para o caso em que o núcleo dos operadores não é dado por uma convolução) reside no **teorema de Calderón-Zygmund:** se $T : L^{p_0}(\mathbb{R}) \to L^{p_0}(\mathbb{R})$ para algum $1 < p_0 < \infty$, então $T : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ *para todo* $1 < p < \infty$ e T satisfaz (1.16).

Entre todos os casos, é preferível trabalharmos com algum valor de p para o qual tenhamos o maior número possível de ferramentas disponíveis: não é de surpreender que vamos escolher o espaço $L^2(\mathbb{R})$. De uma forma bastante informal e sem nos apegarmos no desenvolvimento histórico natural, podemos garantir que para uma classe ampla de operadores, o resultado principal consiste em provar que $T(1) \in$

BMO, onde precisamos dar sentido para $T(1)$ como um certo limite envolvendo funções de corte e onde definimos BMO, o espaço das funções de oscilação média limitada, como sendo

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \fint_Q |f - f_Q| dx \leq C|Q|, \ \forall\, Q \subseteq \mathbb{R}^n\} \tag{1.17}$$

onde

$$f_Q = \fint_Q f(x)\, dx = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx$$

O resultado que temos em mente é o seguinte teorema obtido por Guy David e Jean-Lin Journé em 1984:

Teorema 1.2.1 (Teorema $T(1)$ de David e Journé)**.** *Suponha que T é um operador linear contínuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ associado com um núcleo K que satisfaz*

- *(Decaimento) $|K(x, y)| \leq A|x - y|^{-n}$;*
- *(Regularidade em x) $|K(x, y) - K(x', y)| \leq A|x - y|^{-n-\gamma}|x - x'|^{\gamma}$ se $|x - x'| \leq |x - y|/2$;*
- *(Regularidade em y) $|K(x, y) - K(x, y')| \leq A|x - y|^{-n-\gamma}|y - y'|^{\gamma}$ se $|y - y'| \leq |x - y|/2$*

e que para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto, fora do suporte de f a distribuição Tf coincide com a função

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy.$$

Então T pode ser estendido para um operador um operador linear limitado sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,

$$T(1), T^*(1) \in BMO(\mathbb{R}^n) \tag{1.18}$$

.

O papel central do espaço BMO em diversos problemas em Análise Harmônica começou a ser revelado quase duas décadas antes do resultado acima; de fato, vale a pena uma nos aprofundarmos um pouco nessa explicação e como o teorema acima se conecta com o tema dessa tese. Se definimos o **espaço de Hardy** $H^1(\mathbb{R}^n)$ como sendo o conjunto

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } 1 \leq j \leq n\}, \tag{1.19}$$

equipado com a norma $\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^1} + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|$, foi apenas em 1971 que Charles Fefferman demonstrou o seguinte resultado:

Teorema 1.2.2 (Fefferman). *O espaço dual de $H^1(\mathbb{R}^n)$ é o espaço $BMO(\mathbb{R}^n)$*

Esse trabalho clássico não apenas motivou o desenvolvimento de diversos resultados em Análise Harmônica: ele trouxe a tona o fato de que existe um importante papel sendo desempenhado pelo espaço BMO. Um pouco depois desse resultado de Fefferman, em um trabalho clássico na teoria de operadores integrais singulares de 1977, Calderón [6] propôs um programa para analisar a continuidade do operador integral singular de Cauchy sobre a curva $\gamma(x) = x + iA(x)$, a saber, o operador integral definido por

$$Cf(x) = p.\,v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)[1 + ia(y)]}{x - y + i[A(x) - A(y)]} dy \tag{1.20}$$

onde $A' = a \in {}^{\infty}$. O problema central é determinar quando esse operador integral singular leva continuamente $L^p(\mathbb{R})$ em si mesmo, e um cálculo mais ou menos direto proposto por Calderón nos permite reduzir o problema de entender a continuidade do operador acima (quando esse age sobre $L^p(\mathbb{R})$), ao problema de entender a continuidade de uma classe de integrais singulares definidos sobre a reta conhecidos como **comutadores de Cálderon** (bem como suas respectivas variantes maximais):

$$C_k f(x) = p.\,v. \int_{\mathbb{R}} \frac{(A(x) - A(y))^k}{(x - y)^{k+1}} f(y)\, dy\,. \tag{1.21}$$

O ponto central é que todos esses operadores são exemplos de **operadores de Calderón-Zygmund**. Assim, sabemos que basta mostrarmos que $T : L^{p_0}(\mathbb{R}) \to$

$L^{p_0}(\mathbb{R})$ para algum $1 < p_0 < \infty$ para obtermos $T : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ *para todo* $1 < p < \infty$ (teorema de Cálderon-Zygmund). Nessa época, porém, Calderón não tinha a sua disposição o teorema $T(1)$ e, portanto, ele precisava proceder de outra forma; ele simplesmente observou que para cada $k \geq 0$, o operador C_k satisfazia

$$\|C_k\|_{2,2} \leq CM^k \tag{1.22}$$

onde M é a constante Lipschitz da função A. Cálderon [6] utilizou esse resultado para mostrar que se M é suficientemente pequeno (comparado com a constante L), o controle sobre os operadores acima associado com a decomposição

$$\frac{1}{x-y+i[A(x)-A(y)]} = \frac{1}{x-y}\sum_{k=0}^{\infty}(-i)^k\left[\frac{A(x)-A(y)}{x-y}\right]^k \tag{1.23}$$

nos permite concluir que a integral de Cauchy sobre curvas Lipschitz é limitada. [1]

Devido a importância do resultado descrito acima, rapidamente iniciou-se um estudo da continuidade dessas classes de comutadores em diversos espaços de funções, já que eles servem como exemplos centrais de operadores de Calderón-Zygmund. Curiosamente, o estudo de comutadores já havia sido iniciado um ano antes no trabalho de Coifman, Rochberg e Weiss [15] sobre fatoração em espaços de Hardy: tais autores estudarem operadores da forma

$$[b, R_j] = M_b \circ R_j - R_j \circ M_b\,, \tag{1.24}$$

onde $M_b f(x) = b(x)f(x)$ é o operador de multiplicação por $b(x)$ e onde R_j são as transformadas de Riesz introduzidas anteriormente. O resultado central obtido por esses autores foi o seguinte:

Teorema 1.2.3 (Coifman-Rochberg-Weiss). *Se $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, então existe uma constante $C_n > 0$ tal que para todo $1 \leq j \leq n$ vale a estimativa*

$$\|[b, R_j]\|_{L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_n\|b\|_{BMO}\,. \tag{1.25}$$

[1] O caso geral segue utilizando um argumento intrincado introduzido por David [17]. Existem muitos trabalhos relacionados, mas os artigos de Coifman, Jones e Semmes [14] e o artigo de Calderón *et al* [7] são ótimas fontes para referências gerais, extensões e aplicações das ideias discutidas acima.

Reciprocamente, se para cada $1 \leq j \leq n$ *vale a estimativa*

$$\|[b, R_j]\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty, \tag{1.26}$$

então $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ *e temos que*

$$\|b\|_{BMO} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \|[b, R_j]\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)} . \tag{1.27}$$

O **Teorema 1.2.3** é nosso principal motivador e a partir dele somos levados rapidamente a uma questão central: quanto podemos generalizar o resultado acima, no sentido de ampliar a classe de operadores integrais singulares considerados? Como essa pergunta é muito complexa, vamos tentar dar algum tipo de resposta parcial para a mesma no que segue.

Uma das demonstrações do **Teorema 1.2.3** apresentadas originalmente por Coifman, Rocheberg e Weiss, nos mostra que se T denota um CZO, que $[b, T] : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $b \in BMO$. A ideia central para provar esse resultado é ao mesmo tempo simples e impressionante, já que relaciona o estudo da continuidade de comutadores com a teoria de pesos para operadores integrais singulares: se definimos para $z \in \mathbb{D}$ o operador

$$T_z(f) = e^{-zb} T(e^{zb} f) \quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) , \tag{1.28}$$

então podemos verificar que ele depende de forma holomorfa na variável z, e que vale a relação

$$\frac{d}{dz} T_z(f) \Big|_{z=0} = [b, T]f \quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) . \tag{1.29}$$

Assim, sabendo que $T_z : L^2(\mathbb{R}^n, e^{zb(x)}dx) \to L^2(\mathbb{R}^n, e^{zb(x)}dx)$ para z com norma suficientemente pequena, podemos obter a continuidade em $L^2(\mathbb{R}^n)$ do comutador. Algumas extensões desse resultado para operadores mais gerais e envolvendo outros espaços de funções foram obtidas por Murray [41], Hofmann [31] e Chen and Yong [11], para citar alguns exemplos.

O resultado de Coifman, Rochberg e Weiss também foi estendido para a continuidade de comutadores de operadores integrais singulares agindo sobre espaços de Lebesgue com pesos no trabalho de Alvarez *et al* em [1]: essencialmente, os autores mostram nesse trabalho que se $w \in A_p$ é um peso na classe de Muckenhoupt-Whedden e se T é um operador linear que satisfaz $T : L^p(w) \to L^p(w)$, então $[b, T] : L^p(w) \to L^p(w)$. Aqui $f \in L^p(w)$ se

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} < \infty,$$

e $w \in A_p$, se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \left(\fint_Q w(x)\, dx \right) \left(\fint_Q w(x)^{1-p'}\, dx \right)^{p-1} \leq C,$$

sobre todos os cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$. Uma versão desse resultado com depedência ótima na característica do peso foi obtida posteriormente por Chung, Pereyra e Pérez [13].

O principal resultado da segunda parte dessa tese é que podemos estender um pouco mais esses dois últimos resultados, obtendo uma versão que se aplica, em particular, para operadores integrais fracionários e outros exemplos de operadores integrais singulares que não são CZO. De forma precisa, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.4. *Sejam $1 < p \leq q < \infty$, $T : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ um operador linear limitado, para qualquer $w \in A_{pq}$. Suponha ainda que existe uma função crescente $\psi : [1, \infty) \to [0, \infty)$ tal que:*

$$\|T(f)\|_{L^p(w^p) \to L^q(w^q)} \leq \psi([w]_{A_{pq}}) \quad \forall f \in L^p(w^p). \tag{1.30}$$

Então existem constantes a_n e b_n independentes de $[w]_{A_{pq}}$ tal que

$$\|[b, T]\|_{L^p(w^p) \to L^q(w^q)} \leq a_n \psi(b_n [w^r]_{A_{pq}}) \|b\|_{BMO}, \tag{1.31}$$

onde $b \in BMO$. Temos que $w \in A_{pq}$, se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$[w]_{A_{pq}} = \sup_Q \left(\fint_Q w(x)^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\fint_Q w(x)^{-p'}\, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C,$$

sobre todos os cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Esse resultado será enunciado como **Teorema 3.2.1**. Iremos apresentar ainda uma versão mais fina do resultado acima no caso especial em que $q = p'$, e aplicações desses teoremas em uma variedade de situações, recuperando de forma unificada alguns resultados clássicos sobre comutadores e também alguns resultados que, acreditamos, serem inéditos. Isso nos dá uma resposta, ao menos parcial, para a pergunta acima; note que não temos a recíproca que aparece no teorema de Coifman-Rocheberg-Weiss. Além disso, ao que tudo indica, o espaço BMO não desempenha o mesmo papel quando trabalhamos com operadores mais hiper-singulares (uma classe de operadores que não será tratada nessa tese), mas um espaço que combina o espaço BMO com o espaço de Sobolev parece ser o substituo natural [9]; falaremos um pouco mais disso no fim do **Capítulo 3**.

1.3 Descrição geral dos capítulos

A tese está dividida da seguinte forma:

- No capítulo 2 trataremos do problema principal sobre a existência global e limitação das soluções do problema de advecção-difusão (1.1) – (1.2) – (1.3). Essa parte do trabalho é independente das demais: todos os resultados necessários para a sua leitura foram demonstrados.

- No capítulo 3 trataremos da continuidade em espaços de Lebesgue com pesos de certos comutadores envolvendo funções em BMO e certos operadores que agem como operadores integrais fracionários. Esse capítulo não está completamente auto-contido, e certos resultados clássicos envolvendo continuidade de operadores integrais singulares são referenciados apenas.

Ao final de cada capítulo, incluímos uma seção de comentários gerais, incluindo comparações com resultados prévios e/ou indicações de trabalhos futuros, tanto no âmbito de problemas em aberto que gostaríamos de trabalhar no futuro, quanto problemas de pesquisa corrente envolvendo temas relacionados com a presente tese.

2 SOBRE O COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE CERTAS CLASSES DE EDP DE ADVECÇÃO DIFUSÃO

Como já explicamos na introdução, nessa seção vamos nos concentrar em analisar a questão sobre a existência global de soluções para um problema de valor inicial associado a uma equação de advecção-difusão cujo termo difusivo é, essencialmente, o *p-laplaciano*. Seja $u(\cdot,t)$ solução do problema de valor inicial para equações p-laplacianas de evolução do tipo

$$u_t + \operatorname{div}(b(x,t)\varphi(u)) = \mu(t)\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

Aqui, $p > 2$ é uma constante, $\mu \in C^0([0,\infty))$ é positiva, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo $|\varphi(u)| \leq |u|^{k+1}$ para alguma constante $k \geq 0$ e $b(x,t) \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ com $\operatorname{div}(b(x,t)) \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ satisfazendo as seguintes condições

$$b(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n)),$$

$$\operatorname{div} b(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,\infty), L^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

Por uma solução (limitada) em algum intervalo de tempo $[0,T_*)$, queremos dizer qualquer função $u(\cdot,t) \in C^0([0,T_*), L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)) \cap L^p_{loc}((0,T_*), w^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n))$ satisfazendo a equação do problema, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0,T_*))$, com $u(\cdot,0) = u_0$ e $u(\cdot,t) \in L^\infty_{loc}([0,T_*), L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n))$, ou seja, para cada $0 < T < T_*$ dado, temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq M_1(T) \quad \forall\ 0 \leq t \leq T$$

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M_\infty(T) \quad \forall\ 0 \leq t \leq T,$$

para alguns limites $M_1(T), M_\infty(T)$ dependendo de T. Especificamente, para uma função $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times (0,T_*))$ podemos associar uma distribuição T_u definida por

$$T_u(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n \times (0,T_*)} u(x,t)\phi(x,t)dxdt$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times (0, T_*))$. Para a equação do nosso problema p-Laplaciano, dizemos que u é uma solução no sentido das distribuições se, para qualquer função de teste $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times (0, T_*))$, temos

$$\int_0^{T_*} \int_{\mathbb{R}^n} u_t \phi + \int_0^{T_*} \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(b(x,t)\varphi(u))\phi = \int_0^{T_*} \int_{\mathbb{R}^n} \mu(t) \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)\phi.$$

Em resumo $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0, T_*))$ é o espaço das distribuições sobre $\mathbb{R}^n \times (0, T_*)$ permitindo tratar soluções fracas das equações diferenciais parciais.

Teorema Principal. *Seja* $u(\cdot, t)$ *solução do problema* (1.1) *sobre as hipóteses* (1.2), (1.3), *temos que*

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \mathbb{U}_\infty(t_0;t) \\ &\leq (4\overline{q})^{\frac{np}{\overline{q}p - n(k-(p-2))}} \max\left\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{\overline{q}p+n(p-2-k)}} \mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{\overline{q}p}{\overline{q}p+n(p-2-k)}} \right\} \end{aligned}$$

onde

$$\mathbb{U}_q(t_0;t) := \sup\left\{ \|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} : t_0 \leq \tau \leq t \right\},$$

e

$$\mathbb{B}_\mu(t_0;t) := \sup\left\{ \frac{B(\tau)}{\mu(\tau)} : t_0 \leq \tau \leq t \right\}, B(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |div\, b(x,t)|.$$

Esse resultado será enunciado como **Teorema 2.3.1**. O capítulo é dividido da seguinte forma:

- Na **Seção 2.1** vamos apresentar algumas funções auxiliares que serão usadas para demonstrar rigorosamente os resultados obtidos nas seções posteriores. Também será enunciado e referenciado uma desigualdade fundamental para nossa análise: Desigualdade Sobolev-Nirenberg-Gagliardo;

- Na **Seção 2.2** apresentamos alguns resultados sobre soluções fracas da nossa EDP; tais resultados são adaptações, para o nosso contexto, de alguns resultados similares obtidos em [18, 37, 10];

- Na **Seção 2.3** provamos o nosso resultado principal; essa seção é particularmente técnica, mas tentamos fazer todos os cálculos explícitos para facilitar a leitura;

- Na **Seção 2.4** discutimos limitações e extensões dos nossos resultados, comparado-os em particular com os resultados obtidos em dimensão um por Guidolin [28]. Apresentamos também alguns projetos futuros.

Os resultados abaixo são baseados em um trabalho colaborativo com os professores Patrícia Guidolin e Paulo Zingano.

2.1 Preliminares

Nesta seção, vamos apresentar algumas funções auxiliares que serão usadas. Também sera enunciado e referenciado a Desigualdade Sobolev-Nirenberg-Gagliardo. Esses resultados preliminares serão necessários para as discussões subsequentes.

2.1.1 Funções de Corte

Dado $R > 0$, definimos $\zeta_R \in C^2(\mathbb{R}^n)$, a função de corte dada por

$$\zeta_R(x) = \zeta(x/R), \tag{2.1}$$

onde $0 \leq \zeta(x) \leq 1$ e satisfaz $\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1/2 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$. Note que

$$\zeta_R'(x) = \frac{1}{R}\zeta'(\frac{x}{R}) < \frac{C_1}{R} \quad \text{e} \quad \zeta_R''(x) = \frac{1}{R^2}\zeta''(\frac{x}{R}) < \frac{C_2}{R^2}. \tag{2.2}$$

2.1.2 Funções Suavizadoras

Introduziremos algumas funções suavizadoras que serão utilizadas no decorrer do texto. Consideramos uma função $S \in C^1(\mathbb{R})$ tal que:

- $S'(v) \geq 0, \quad \forall v;$
- $S(0) = 0$; e
- $S(v) = sgn(v), \quad |v| \geq 1,$

e para cada $\delta > 0$, construímos a função regularizadora

$$S_\delta(v) = S(\frac{v}{\delta})$$

seja L_δ a função de valor absoluto regularizante

$$L_\delta(u) = \int_0^u S(\frac{v}{\delta})dv. \tag{2.3}$$

Observe que, quando $\delta \to 0$, temos que $S(\frac{v}{\delta}) \to sgn(u)$ e $L_\delta(u) \to |u|$, uniformemente em u. Além disso, dado $u \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ fixo, temos:

$$0 \leq L_\delta(u) \leq |u|; \tag{2.4}$$

$$|L'_\delta(u)| \leq 1; \quad \text{e} \tag{2.5}$$

$$0 \leq L''_\delta(u) \leq \frac{C}{\delta}. \tag{2.6}$$

Outra importante propriedade de $L_\delta(u)$ é:

$$|u|L''_\delta(u) \to 0 \ \text{ e } \ L'_\delta(u) \to sgn(u), \quad \text{quando } \ \delta \to 0. \tag{2.7}$$

Definimos também a função auxiliar: $\Phi_\delta(u) = \begin{cases} u^2, & \text{se } \ q = 2 \\ (L_\delta(u))^q, & \text{se } \ q > 2, \end{cases}$.

Para $q > 2$, temos

$$\Phi'_\delta(u) = q(L_\delta(u))^{q-1}L'_\delta(u); \quad \text{e} \tag{2.8}$$

$$\Phi''_\delta(u) = q(q-1)(L_\delta(u))^{q-2}(L'_\delta(u))^2 + q(L_\delta(u))^{q-1}L''_\delta(u). \tag{2.9}$$

2.1.3 Desigualdade de Sobolev-Nirenberg-Gagliardo (SNG)

Teorema 2.1.1. *Se* $0 < s \leq r \leq \infty, 1 \leq p \leq \infty,$ *e*

$$\frac{1}{r} = \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-\theta)\frac{1}{s},$$

então existe uma constante $C(n)$ *independente de* u *tal que*

$$\|v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C(r,s,p,n)\|v\|^{1-\theta}_{L^s(\mathbb{R}^n)}\|\nabla v\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in L^s(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Ver [42].

2.2 Solução fraca e algumas propriedades

Começamos relembrando uma importante técnica de regularização ([18], [37]): Dado um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ arbitrário, $h > 0$ (pequeno) e qualquer função $v(\cdot,t) \in L^r(I, L^q_{loc}(\mathbb{R}^n))$, onde $q, r \in [1,\infty)$, seja $v_h(\cdot,t) \in C^0(I, L^q_{loc}(\mathbb{R}^n))$, a média de Steklov definida por

$$v_h(\cdot,t) := \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \tilde{v}(\cdot,\tau)d\tau, \qquad t \in I, \tag{2.10}$$

onde $\tilde{v}(\cdot,\tau) = v(\cdot,\tau)$ se $\tau \in I$, $\tilde{v}(\cdot,\tau) = 0$ se $\tau \notin I$. Seja $u(\cdot,t) \in C^0([0,T_*), L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)) \cap L^p_{loc}((0,T_*), W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty_{loc}([0,T_*), L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n))$ solução de (1.1). Então obtemos (ver [18], Cap. II; [37], Cap. 1) que, para qualquer bola $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}$:

$$\int_{B_R} \{u_{h,t}(x,t)\phi(x) + [\mu(t)|\nabla u|^{p-2}\nabla u]_h \cdot \nabla\phi\}dx = \int_{B_R} [b(x,t)\varphi(u)]_h \cdot \nabla\phi dx, \tag{2.11}$$

para todo $0 < t < T_* - h$, e qualquer $\phi \in W^{1,p}_0(B_R) \cap L^\infty(B_R)$, onde $u_{h,t}(\cdot,t) = \frac{\partial}{\partial t}u_h(\cdot,t) = [u(\cdot,t+h) - u(\cdot,t)]/h$ é a derivada forte pontualmente de $u_h(\cdot,t)$ em $L^1(B_R)$, e $\cdot$ denota o produto interno padrão de um par de vetores n-dimensionais. Como em [18, 37, 50] a expressão (2.11) é um ponto de partida muito útil para a derivação de uma série de propriedades de solução importantes, conforme ilustrado pelos resultados a seguir.

Proposição 2.2.1. Seja $u(\cdot,t) \in C^0([0,T_*), L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)) \cap L^p_{loc}((0,T_*), W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty_{loc}([0,T_*), L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n))$ uma solução qualquer do problema (1.1), onde $k \geq 0$. Então

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2} dx dt < \infty, \tag{2.12}$$

para todo $0 < T < T_*$, de modo que $u(\cdot,t) \in L^p_{loc}((0,T_*), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))$.

Proposição 2.2.2. Sob as mesmas hipóteses da proposição anterior, temos

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\ 0 < t < T_*, \tag{2.13}$$

desde que (i) $k \geq 1 - 2/p$, ou (ii) $p \geq n$.

A prova dos dois resultados acima pode ser encontrada em [10]. Além disso, é importante notar que a hipótese (1.3) não é necessária para o desenvolvimento do argumento.

O próximo resultado é o ponto de partida para nossa análise, e é o primeiro resultado original da nossa tese, ele é análogo Proposição 2.2 de [10].

Proposição 2.2.3. Seja $u(\cdot,t) \in C^0([0,T_*), L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)) \cap L^p_{loc}((0,T_*), W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty_{loc}([0,T_*), L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n))$ qualquer solução do problema (1.1), onde $k \geq 0$, temos, para cada $q \geq 2$, que $\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ é absolutamente contínua em $t \in (0,T_*)$. Além disso, existe $E_q \subset (0,T_*)$ com medida Lebesgue nula, tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\mu(t)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u|^{q-2} = \\ -q(q-1)\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^u \varphi(v)|v|^{q-2}dv\right) \cdot \big(\operatorname{div}(b(x,t))\big)dx, \end{aligned} \tag{2.14}$$

se $t \in (0,T_*) \setminus E_q$.

Demonstração. Defina $\Phi_\delta(u) := L_\delta(u)^q$, onde $L_\delta(u)$ é definido em (2.3). Vamos considerar em (2.11) $\phi(x) = \Phi'_\delta(u_h(x,t))\zeta_R(x)$, integrando (2.11) em (t_0,t), aplicando fubini no primeiro termo, e fazendo $h \to 0$

$$\int_{B_R} \Phi_\delta(u(x,t))\zeta_R(x)dx + \int_{t_0}^t \int_{B_R} \mu(\tau)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\phi(x) dx d\tau =$$

$$+\int_{B_R} \Phi_\delta(u(x,t_0))\zeta_R(x)dx$$
$$+\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \varphi(u)b(x,\tau)\cdot\nabla\phi(x)dxd\tau}_{I} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
I = &\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \varphi(u)\Phi_\delta''(u)b(x,\tau)\cdot\nabla u\zeta_R(x)dxd\tau\\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{\frac{R}{2}<|x|<R} \varphi(u)\Phi_\delta'(u)b(x,\tau)\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau\\
&=\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \nabla G_\delta(u)\cdot b(x,\tau)\zeta_R(x)dxd\tau\\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{\frac{R}{2}<|x|<R} \varphi(u)\Phi_\delta'(u)b(x,\tau)\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

onde $G_\delta(u)=\int_0^u \varphi(v)\Phi_\delta''(v)dv$. Integrando por partes (2.16), obtemos

$$\begin{aligned}
I = &-\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} G_\delta(u)\mathrm{div}b(x,\tau)\zeta_R(x)dxd\tau-\int_{t_0}^{t}\int_{\frac{R}{2}<|x|<R} G_\delta(u)b(x,\tau)\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau\\
&+\int_{t_0}^{t}\int_{\frac{R}{2}<|x|<R} \varphi(u)\Phi_\delta'(u)b(x,\tau)\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Substituindo I em (2.15), e observando que $\Phi_\delta(u):=L_\delta(u)^q$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R} L_\delta^q(u(x,t))\zeta_R(x)dx+q(q-1)\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \mu(\tau)|\nabla u|^p L_\delta(u)^{q-2}(L_\delta'(u))^2\zeta(x)dxd\tau\\
&+\underbrace{q\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} \mu(\tau)|\nabla u|^p L_\delta(u)^{q-1}L_\delta''(u)\zeta(x)dxd\tau}_{A}\\
&+\underbrace{q\int_{t_0}^{t}\int_{\frac{R}{2}<|x|<R} \mu(\tau)|\nabla u|^{p-2}\nabla u L_\delta(u)^{q-1}L_\delta'(u)\nabla\zeta(x)dxd\tau}_{B}\\
&=\int_{B_R} L_\delta^q(u(x,t_0))\zeta_R(x)dx\\
&-\int_{t_0}^{t}\int_{B_R} G_\delta(u)\mathrm{div}\, b(x,\tau)\zeta_R(x)dxd\tau-\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\frac{R}{2}<|x|<R} G_\delta(u)b(x,\tau)\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau}_{C}\\
&+\underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{\frac{R}{2}<|x|<R} \varphi(u)\Phi_\delta'(u)b(x,\tau)\cdot\nabla\zeta_R(x)dxd\tau}_{D}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

pela proposição (2.2.1), hipóteses (1.2), (1.3), (1.4) e (1.5), tomando $t_0 \to 0, \delta \to 0$ e $R \to \infty$ (nesta ordem), obtemos

$$\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} + q(q-1)\int_0^t \mu(\tau)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u|^{q-2} dx d\tau = \|u_0\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$
$$- q(q-1)\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^u \varphi(v)|v|^{q-2} dv\right)\cdot \big(\operatorname{div} b(x,t)\big) dx d\tau \tag{2.19}$$

pois $A \to 0$ quando $\delta \to 0$ e B, C and D vão para zero quando $R \to \infty$. Nas expressões acima, todas as integrais são bem definidas e finitas, envolvendo funções integráveis (no sentido de Lebesgue). Então, pelo teorema da diferenciação de Lebesgue, obtemos o resultado desejado. □

2.3 Existência global

Nesta seção, nosso objetivo de garantir a existência global da solução $u(\cdot,t)$ do problema (1.1) sobre as hipóteses (1.2), (1.3). Vamos começar mostrando como a igualdade de energia (2.14) pode ser usada para obter uma estimativa do tipo $L^q - L^p$. Depois apresentaremos alguns lemas e junto com um processo iterativo alcançaremos o nosso resultado principal.

Lema 2.3.1. Seja $p > 2$, $q \geq 2$ e $\frac{n(k-(p-2))}{p} < \frac{q}{2}$. Se para algum $\widehat{t} \in (0, T_*) \setminus E_q$ é tal que

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\mid_{t=\widehat{t}} \geq 0,$$

então

$$\|u(\cdot,\widehat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq J(q)\left(\frac{B(\widehat{t})}{\mu(\widehat{t})}\right)^{\frac{n}{pq-2n(k-(p-2))}} \|u(\cdot,\widehat{t})\|^{1+\frac{n(k-(p-2))}{pq-2n(k-(p-2))}}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.20}$$

onde

$$J(q) \equiv J(n,p,q,k,\mathcal{C}) := \left(\mathcal{C}(n)\frac{p+q-2}{p(q+k)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{np}{pq-2n(k-(p-2))}}. \tag{2.21}$$

Demonstração. Seja $p > 2, q \geq 2$, $\frac{n(k-(p-2))}{p} < \frac{q}{2}$, e $\widehat{t} \in (0, T_*) \setminus E_q$ com , $\frac{\partial}{\partial t}\|u(\cdot,t)\|^q_{L^q(\mathbb{R})}\mid_{t=\widehat{t}} \geq 0$. Então de (2.14) e $B(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\operatorname{div} b(x,t)|$, segue

$$\mu(\widehat{t}) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u|^{q-2} dx \leq B(\widehat{t}) \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^u |\varphi(v)||v|^{q-2} dv dx. \tag{2.22}$$

Como $|\varphi(v)| \leq |v|^{k+1}$ para alguma constante $k \geq 0$, temos

$$\int_0^u |\varphi(v)||v|^{q-2} dv \leq \int_0^u |v|^{k+q-1} dv = \frac{1}{q+k}|u|^{q+k}.$$

Substituindo em (2.22),

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u|^{q-2} dx \leq \frac{B(\widehat{t})}{(q+k)\mu(\widehat{t})} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q+k} dx. \tag{2.23}$$

Para facilitar os cálculos, vamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$w(x) := w(x,\widehat{t}) = \begin{cases} u(x,\widehat{t}), \text{ se } q = 2 \\ |u(x,\widehat{t})|^\alpha, \text{ se } q > 2 \end{cases},$$

onde $\alpha = \frac{p+q-2}{p}$. Em termos de $w(x)$, tem-se,

- $\|u(\cdot,\widehat{t})\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|w(\cdot)\|^\beta_{L^\beta(\mathbb{R}^n)}$, onde $\beta = \frac{pq}{p+q-2} = \frac{q}{\alpha}$;
- $\|u(\cdot,\widehat{t})\|^{\frac{q}{2}}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)} = \|w(\cdot)\|^{\beta_0}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}$, onde $\beta_0 = \frac{\beta}{2}$;
- $\|u(\cdot,\widehat{t})\|^{q+k}_{L^{q+k}(\mathbb{R}^n)} = \|w(\cdot)\|^{\widetilde{\beta}}_{L^{\widetilde{\beta}}(\mathbb{R}^n)}$, onde $\widetilde{\beta} = \frac{p(q+k)}{p+q-2} = \frac{q+k}{\alpha}$.

$$\nabla w = \alpha |u|^{\alpha-1}\frac{u}{|u|}\nabla u \Rightarrow |\nabla w| = \alpha |u|^{\alpha-1}|\nabla u|$$
$$\Rightarrow |\nabla w|^p = \alpha^p |u|^{p(\alpha-1)}|\nabla u|^p = \alpha^p |u|^{q-2}|\nabla u|^p,$$

pois α foi escolhido de forma que esta igualdade fosse satisfeita $p(\alpha-1) = q-2$, assim

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |u|^{q-2} dx = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^p \|\nabla w\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Logo podemos reescrever (2.23) em termos de w

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^p \|\nabla w\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{B(\widehat{t})}{(q+k)\mu(\widehat{t})}\|w\|^{\widetilde{\beta}}_{L^{\widetilde{\beta}}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha \left(\frac{B(\widehat{t})}{(q+k)\mu(\widehat{t})} \right)^{1/p} \|w\|_{L^{\widetilde{\beta}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\widetilde{\beta}}{p}}. \tag{2.24}$$

Note que $\widetilde{\beta} > \beta_0$, já que $\widetilde{\beta} = \frac{q+k}{\alpha} \geq \frac{q}{\alpha} > \frac{q}{2\alpha} = \beta_0$.

Desta forma podemos usar a desigualdade de Sobolev-Nirenberg-Gagliardo, com $r = \widetilde{\beta}$ e $s = \beta_0$, aplicando ao lado direito de (2.24), obtemos

$$\|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha \left(\frac{B(\widehat{t})}{(q+k)\mu(\widehat{t})} \right)^{1/p} C^{\frac{\widetilde{\beta}}{p}} \|w\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-a)\frac{\widetilde{\beta}}{p}} \|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{a\frac{\widetilde{\beta}}{p}} \tag{2.25}$$

onde $C := C(n)$ e a satisfaz

$$\frac{1}{\widetilde{\beta}} = a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{\beta_0}.$$

Em (2.25) podemos juntar os termos semelhantes, pois $a\frac{\widetilde{\beta}}{p} < 1$, já que $\frac{n(k-(p-2))}{p} < \frac{q}{2}$, (ver apêndice). Obtemos

$$\|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-a\frac{\widetilde{\beta}}{p}} \leq \alpha \left(\frac{B(\widehat{t})}{(q+k)\mu(\widehat{t})} \right)^{1/p} C^{\frac{\widetilde{\beta}}{p}} \|w\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-a)\frac{\widetilde{\beta}}{p}}$$

$$\|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha^{\frac{p}{p-a\widetilde{\beta}}} \left(\frac{B(\widehat{t})}{(q+k)\mu(\widehat{t})} \right)^{\frac{1}{p-a\widetilde{\beta}}} C^{\frac{\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}} \|w\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\widetilde{\beta}(1-a)}{p-a\widetilde{\beta}}}. \tag{2.26}$$

Aplicando novamente a desigualdade de Sobolev-Nirenberg-Gagliardo com parâmetros β e β_0, temos

$$\|w\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} \leq K \|w\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{1-b} \|\nabla w\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{b}, \tag{2.27}$$

onde b satisfaz

$$\frac{1}{\beta} = b\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-b)\frac{1}{\beta_0},$$

e K vem da desigualdade (SNG). Combinando (2.26) e (2.27), segue que

$$\begin{aligned}
\|w\|_{L^\beta(\mathbb{R}^n)} &\leq K \|w\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{1-b} \alpha^{\frac{bp}{p-a\widetilde{\beta}}} \left(\frac{B(\widehat{t})}{(q+k)\mu(\widehat{t})} \right)^{\frac{b}{p-a\widetilde{\beta}}} C^{\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}} \|w\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{b\widetilde{\beta}(1-a)}{p-a\widetilde{\beta}}} \\
&\leq K \alpha^{\frac{bp}{p-a\widetilde{\beta}}} \left(\frac{B(\widehat{t})}{(q+k)\mu(\widehat{t})} \right)^{\frac{b}{p-a\widetilde{\beta}}} C^{\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}} \|w\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{(1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}(1-a)}{p-a\widetilde{\beta}}}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Elevando a desigualdade (2.28) na potência β, obtemos

$$\|w\|_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}^{\beta} \leq K^{\beta}\alpha^{\frac{\beta b p}{p-a\widetilde{\beta}}}\left(\frac{B(\widehat{t})}{(q+k)\mu(\widehat{t})}\right)^{\frac{\beta b}{p-a\widetilde{\beta}}} C^{\frac{\beta b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}}\|w\|_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}^{\beta\left((1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}(1-a)}{p-a\widetilde{\beta}}\right)}. \tag{2.29}$$

Reescrevendo a desigualdade (2.29) em função de $\|u(\cdot,\widehat{t})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, tem-se

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,\widehat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq K^{\frac{\beta}{q}}\alpha^{\frac{\beta b p}{q(p-a\widetilde{\beta})}}\left(\frac{B(\widehat{t})}{(q+k)\mu(\widehat{t})}\right)^{\frac{\beta b}{q(p-a\widetilde{\beta})}} C^{\frac{\beta b\widetilde{\beta}}{q(p-a\widetilde{\beta})}}\|u(\cdot,\widehat{t})\|_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{(1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}(1-a)}{p-a\widetilde{\beta}}}\\ &= K^{\frac{\beta}{q}}\left(\alpha^p C^{\widetilde{\beta}}\right)^{\frac{\beta b}{q(p-a\widetilde{\beta})}}\left(\frac{B(\widehat{t})}{(q+k)\mu(\widehat{t})}\right)^{\frac{\beta b}{q(p-a\widetilde{\beta})}}\|u(\cdot,\widehat{t})\|_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{(1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}(1-a)}{p-a\widetilde{\beta}}}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Para finalizar a demonstração, vamos reescrever (2.30) em função de p, q, k, n. já vimos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{p+q-2}{p}\\ \beta &= \frac{pq}{p+q-2}\\ \beta_0 &= \frac{pq}{2(p+q-2)}\\ \widetilde{\beta} &= \frac{p(q+k)}{p+q-2}\\ \frac{1}{\widetilde{\beta}} &= a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)+(1-a)\frac{1}{\beta_0}\\ \frac{1}{\beta} &= b\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)+(1-b)\frac{1}{\beta_0}.\end{aligned}$$

Com alguns cálculos obtemos;

$$\frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{n}{pq-2n(k-(p-2))}, \tag{2.31}$$

$$(1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a) = 1+\frac{n(k-(p-2))}{pq-2n(k-(p-2))}, \tag{2.32}$$

ver **Apêndice 1**. Além disso, como $C = C(n)$ e $K = K(n)$, reescalonando C e K tais que $\widetilde{C} = C^{\frac{1}{a}}$ e $\widetilde{K} = K^{\frac{1}{b}}$. As constantes que aparecem na desigualdade (2.30) ficam majoradas da seguinte forma

$$K^{\frac{\beta}{q}}\left(\frac{\alpha^p C^{\widetilde{\beta}}}{q+k}\right)^{\frac{\beta b}{q(p-a\widetilde{\beta})}} = \widetilde{K}^{\frac{\beta b}{q}}\left(\frac{\alpha^p \widetilde{C}^{a\widetilde{\beta}}}{q+k}\right)^{\frac{\beta b}{q(p-a\widetilde{\beta})}},$$

tomando $\mathcal{C} = \max\left\{\widetilde{C}, \widetilde{K}\right\}$, segue que

$$K^{\frac{\beta}{q}}\left(\frac{\alpha^p C^{\widetilde{\beta}}}{q+k}\right)^{\frac{\beta b}{q(p-a\widetilde{\beta})}} \leq \mathcal{C}^{\frac{\beta b}{q}+\frac{a\widetilde{\beta}\beta b}{q(p-a\widetilde{\beta})}}\left(\frac{\alpha}{(q+k)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{p\beta b}{q(p-a\widetilde{\beta})}} = \left(\frac{\mathcal{C}\alpha}{(q+k)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{p\beta b}{q(p-a\widetilde{\beta})}},$$

onde $\frac{p\beta b}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{np}{pq-2n(k-(p-2))}$ e $\alpha = \frac{p+q-2}{p}$. Assim reescrevendo a nova constante em função de p, q, n e k, tem-se

$$K^{\frac{\beta}{q}}\left(\frac{\alpha^p C^{\widetilde{\beta}}}{q+k}\right)^{\frac{\beta b}{q(p-a\widetilde{\beta})}} \leq \left(\mathcal{C}(n)\frac{p+q-2}{p(q+k)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{np}{pq-2n(k-(p-2))}}. \tag{2.33}$$

Desta forma, podemos reescrever (2.30) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,\widehat{t})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq & \left(\mathcal{C}(n)\frac{p+q-2}{p(q+k)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{np}{pq-2n(k-(p-2))}}\left(\frac{B(\widehat{t})}{\mu(\widehat{t})}\right)^{\frac{n}{pq-2n(k-(p-2))}} \\ & \times \|u(\cdot,\widehat{t})\|_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}^{1+\frac{n(k-(p-2))}{pq-2n(k-(p-2))}}.\end{aligned}$$

Donde concluímos a demonstração do nosso lema. □

Observação 2.3.1. A restrição que aparece no Lema anterior $\frac{n(k-(p-2))}{p} < \frac{q}{2}$, não é apenas uma limitação do argumento apresentado, mas uma condição que aparece naturalmente na análise de escalas.

Lema 2.3.2. Seja $p > 2$, $q \geq 2$ e $\frac{n(k-(p-2))}{p} < \frac{q}{2}$. Para cada $t \in [0, T_*)$, temos

$$\mathbb{U}_q(t_0;t) \leq \max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}; J(q)\mathbb{B}_\mu(t_0;t)^{\frac{n}{pq-2n(k-(p-2))}}\mathbb{U}_{\frac{q}{2}}(t_0;t)^{1+\frac{n(k-(p-2))}{pq-2n(k-(p-2))}}\right\} \tag{2.34}$$

onde

$$\mathbb{U}_q(t_0;t) := \sup\left\{\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} : t_0 \leq \tau \leq t\right\}, \tag{2.35}$$

$$\mathbb{B}_\mu(t_0;t) := \sup\left\{\frac{B(\tau)}{\mu(\tau)} : t_0 \leq \tau \leq t\right\} \tag{2.36}$$

e $J(q)$ é definida em (2.21).

Demonstração. Defina

$$\lambda_q(t) = J(q)\mathbb{B}_\mu(t_0;t)^{\frac{n}{pq-2n(k-(p-2))}}\mathbb{U}_{\frac{q}{2}}(t_0;t)^{1+\frac{n(k-(p-2))}{pq-2n(k-(p-2))}}.$$

A demonstração se resume em analisar três casos:

Caso I: $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \lambda_q(t), \quad \forall t_0 \leq \tau \leq t < T_*$.

Pelo Lema 1 devemos ter $\frac{d}{dt}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < 0$ para quase todo $\tau \in [t_0,t]$, então $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ decresce monotonamente nesse intervalo. Em particular,

$$\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \forall \tau \in [t_0,t],$$

logo

$$\mathbb{U}_q(t_0;t) = \|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Caso II: $\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \lambda_q(t)$, e $\|u(\cdot,t_*)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda_q(t)$ para algum $t_* \in (t_0,t)$.

Neste caso, seja $t_1 \in (t_0,t_*]$ tal que

$$\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \lambda_q(t), \quad \forall \tau \in [t_0,t_1) \;\text{ e }\; \|u(\cdot,t_1)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \lambda_q(t).$$

Provamos a seguinte afirmação.

Afirmação: $\forall \tau \in [t_1,t], \quad \|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda_q(t)$.

Suponha, por absurdo que exista t_2, t_3 com $t_1 \leq t_2 < \tau < t_3 \leq t$ tal que

$$\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \lambda_q(t) \;\text{ e }\; \|u(\cdot,t_2)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \lambda_q(t).$$

Assim, teria de existir $t_{**} \in (t_2,t_3) \setminus E_q$ com $\frac{d}{dt}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > 0$ em $\tau = t_{**}$, de modo que, pelo Lema 1, valeria $\|u(\cdot,t_{**})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda_q(t)$, contradizendo a suposição de que $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \lambda_q(t)$ em (t_2,t_3), concluindo a afirmação.

Note que, do Caso I,

$$\mathbb{U}_q(t_0;t_1) = \|u(\cdot,t_0)\|_{q(\mathbb{R}^n)} \forall \tau \in [t_0,t_1), \quad \text{e} \quad \forall \tau \in [t_1,t], \|u(\cdot,\tau)\|_{q(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda_q(t),$$

então

$$\mathbb{U}_q(t_0;t) = \|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Caso III: $\|u(\cdot,t_0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda_q(t), \quad \forall t_0 \leq \tau \leq t < T_*$. Suponhamos, por absurdo que exista t_1, t_2 com $t_0 \leq t_1 < \tau < t_2 \leq t$ tal que $\|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} > \lambda_q(t)$ e $\|u(\cdot,t_1)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \lambda_q(t)$. Então repetindo o argumento no Caso II, concluímos que $\mathbb{U}(t_0;t) \leq \lambda_q(t)$.

E isso completa a demonstração do Lema. $\square$

Lema 2.3.3. Seja $p > 2$, $\overline{q} \geq 1$, $\frac{n(k-(p-2))}{p} < \overline{q}$ e $u(\cdot,t)$ solução de (1.1) no intervalo $[0,T_*)$. Então

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{2^m\overline{q}}(t_0,t) \leq \max\{&\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}};\\
&\mathcal{J}(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\overline{q}}}^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^l\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-l}}},\ 2 \leq l \leq m;\\
&\mathcal{J}(1,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(1,m)}\mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-1}}}\Big\},
\end{aligned} \tag{2.37}$$

onde

$$\mathcal{J}(l,m) = \prod_{j=l}^{m} J(2^j\overline{q})^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}},$$

$$\mathcal{B}(l,m) = \frac{n}{2^m\overline{q}p}\left(\frac{2^{m+1}\overline{q}p-2h}{2^l\overline{q}p-2h} - 1\right) \quad \forall 1 \leq l \leq m,$$

com $h := n(k-p+2)$ e $J(q)$, $\mathbb{U}_{\overline{q}}(t_0;t)$ e $\mathbb{B}_\mu(t_0;t)$ são definidos em (2.21), (2.35), (2.36) respectivamente e $0 \leq t_0 < t < T_*$.

Demonstração. Aplicando o **Lema** 2 sucessivamente para $q = 2\overline{q}, q = 2^2\overline{q}, q = 2^3\overline{q}, ..., q = 2^{(m-1)}\overline{q}, q = 2^m\overline{q}$, e como vamos variar o valor q, denotamos $h := n(k-p+2)$, assim

$$\begin{aligned}
&\mathbb{U}_{2^m\overline{q}}(t_0,t) \leq \max\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}};\\
&J(2^m\overline{q})\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^m\overline{q}p-2h}}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{m-1}\overline{q}}}^{1+\frac{h}{2^m\overline{q}p-2h}};\\
&J(2^m\overline{q})J(2^{m-1}\overline{q})^{(1+\frac{h}{2^m\overline{q}p-2h})}\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^m\overline{q}p-2h}}\\
&\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^{m-1}\overline{q}p-2h}(1+\frac{h}{2^m\overline{q}p-2h})}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{m-2}\overline{q}}}^{(1+\frac{h}{2^m\overline{q}p-2h})(1+\frac{h}{2^{m-1}\overline{q}p-2h})};\\
&J(2^m\overline{q})J(2^{m-1}\overline{q})^{(1+\frac{h}{2^m\overline{q}p-2h})}J(2^{m-2}\overline{q})^{(1+\frac{h}{2^m\overline{q}p-2h})(1+\frac{h}{2^{m-1}\overline{q}p-2h})}\\
&\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^m\overline{q}p-2h}}\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^{m-1}\overline{q}p-2h}(1+\frac{h}{2^m\overline{q}p-2h})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^{m-2}\overline{q}p-2h}(1+\frac{h}{2^m\overline{q}p-2h})(1+\frac{h}{2^{m-1}\overline{q}p-2h})}\\
&\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{m-3}\overline{q}}}^{(1+\frac{h}{2^m\overline{q}p-2h})(1+\frac{h}{2^{m-1}\overline{q}p-2h})(1+\frac{h}{2^{m-2}\overline{q}p-2h})};\cdots;\\
&J(2^m\overline{q})\cdots J(2\overline{q})^{(1+\frac{h}{2^m\overline{q}p-2h})\cdots(1+\frac{h}{2^2\overline{q}p-2h})}\\
&\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2^m\overline{q}p-2h}}\cdots\mathbb{B}_\mu(t_0,t)^{\frac{n}{2\overline{q}p-2h}(1+\frac{h}{2^m\overline{q}p-2h})\cdots(1+\frac{h}{2^2\overline{q}p-2h})}\\
&\mathbb{U}_{\overline{q}}(t_0,t)^{(1+\frac{h}{2^m\overline{q}p-2h})\cdots(1+\frac{h}{2\overline{q}p-2h})}\} \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

A partir de agora, tentaremos simplificar os termos da desigualdade (2.38). Começamos escrevendo o expoente

$$
C_j := \left(1+\frac{h}{2^j\overline{q}p-2h}\right) = \frac{2^j\overline{q}p-h}{2^j\overline{q}p-2h}. \qquad (2.39)
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
C_m\cdots C_j &= \left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^m\overline{q}p-2h}\right)\left(\frac{2^{m-1}\overline{q}p-h}{2^{m-1}\overline{q}p-2h}\right)\\
&\quad\cdots\left(\frac{2^{j+1}\overline{q}p-h}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}\right)\left(\frac{2^j\overline{q}p-h}{2^j\overline{q}p-2h}\right)\\
&= \left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^m\overline{q}p-2h}\right)\left(2\frac{2^{m-1}\overline{q}p-h}{2^{m-1}\overline{q}p-2h}\right)\\
&\quad\cdots\left(\frac{2^{j+1}\overline{q}p-h}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}\right)\left(2\frac{2^j\overline{q}p-h}{2^j\overline{q}p-2h}\right)\frac{1}{2^{m-j}}\\
&= \left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^j\overline{q}p-2h}\right)\frac{1}{2^{m-j}}. \qquad (2.40)
\end{aligned}
$$

Além disso, para simplificar a notação, usando a definição (2.21) e o resultado obtido em (2.40), escrevemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}(l,m) :&= J(2^m\overline{q})J(2^{m-1}\overline{q})^{C_m}J(2^{m-2}\overline{q})^{C_mC_{m-1}}\cdots J(2^l\overline{q})^{C_m\cdots C_{l+1}}\\
&= J(2^m\overline{q})J(2^{m-1}\overline{q})^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^m\overline{q}p-2h}}J(2^{m-2}\overline{q})^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^{m-1}\overline{q}p-2h}\frac{1}{2}}\\
&\quad\cdots J(2^l\overline{q})^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^{l+1}\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-(l+1)}}}\\
&= \prod_{j=l}^{m} J(2^j\overline{q})^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}}. \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{B}(l,m) := \frac{n}{2^m\overline{q}p-2h} + \frac{n}{2^{m-1}\overline{q}p-2h}\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^m\overline{q}p-2h}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{n}{2^{m-2}\overline{q}p - 2h}\left(\frac{2^m\overline{q}p - h}{2^{m-1}\overline{q}p - 2h}\right)\frac{1}{2} \\
&+ \frac{n}{2^{m-3}\overline{q}p - 2h}\left(\frac{2^m\overline{q}p - h}{2^{m-2}\overline{q}p - 2h}\right)\frac{1}{2^2} + \cdots \\
&+ \frac{n}{2^{l}\overline{q}p - 2h}\left(\frac{2^m\overline{q}p - h}{2^{l+1}\overline{q}p - 2h}\right)\frac{1}{2^{m-(l+1)}} \\
&= \frac{n}{2^{m}\overline{q}p - 2h}\left(\frac{2^m\overline{q}p - h}{2^{m+1}\overline{q}p - 2h}\right)2 \\
&+ \frac{n}{2^{m-1}\overline{q}p - 2h}\left(\frac{2^m\overline{q}p - h}{2^{m}\overline{q}p - 2h}\right) \\
&+ \frac{n}{2^{m-2}\overline{q}p - 2h}\left(\frac{2^m\overline{q}p - h}{2^{m-1}\overline{q}p - 2h}\right)\frac{1}{2} \\
&+ \frac{n}{2^{m-3}\overline{q}p - 2h}\left(\frac{2^m\overline{q}p - h}{2^{m-2}\overline{q}p - 2h}\right)\frac{1}{2^2} + \cdots \\
&+ \frac{n}{2^{l}\overline{q}p - 2h}\left(\frac{2^m\overline{q}p - h}{2^{l+1}\overline{q}p - 2h}\right)\frac{1}{2^{m-(l+1)}} \\
&= \frac{n[2^m\overline{q}p - h]}{2^m}\sum_{j=l}^{m}\frac{2^{j+1}}{[2^j\overline{q}p - 2h][2^{j+1}\overline{q}p - 2h]}. \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

Usando em (2.42) frações parciais, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{2^{j+1}}{(2^j\overline{q}p - 2h)\,(2^{j+1}\overline{q}p - 2h)} = \\
&\frac{1}{\overline{q}p}\left(\frac{2}{2^j\overline{q}p - 2h} - \frac{2}{2^{j+1}\overline{q}p - 2h}\right). \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

Podemos reescrever

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=l}^{m}\frac{2^{j+1}}{[2^j\overline{q}p - 2h][2^{j+1}\overline{q}p - 2h]} \\
&= \frac{1}{\overline{q}p}\sum_{j=l}^{m}\left(\frac{2}{2^j\overline{q}p - 2h} - \frac{2}{2^{j+1}\overline{q}p - 2h}\right) \\
&= \frac{1}{\overline{q}p}\left(\frac{2}{2^l\overline{q}p - 2h} - \frac{2}{2^{l+1}\overline{q}p - 2h} + \frac{2}{2^{l+1}\overline{q}p - 2h} \cdots - \frac{2}{2^{m+1}\overline{q}p - 2h}\right) \\
&= \frac{1}{\overline{q}p}\left(\frac{2}{2^l\overline{q}p - 2h} - \frac{2}{2^{m+1}\overline{q}p - 2h}\right).
\end{aligned}
$$

Desta forma, conseguimos cancelar muitos termos de $\mathcal{B}(l,m)$, obtendo

$$
\mathcal{B}(l,m) = \frac{n(2^m\overline{q}p - h)}{2^m\overline{q}p}\left(\frac{2}{2^l\overline{q}p - 2h} - \frac{2}{2^{m+1}\overline{q}p - 2h}\right)
$$

$$= \frac{n}{2^m\overline{q}p}\left(\frac{2^{m+1}\overline{q}p-2h}{2^l\overline{q}p-2h}-1\right) = \frac{n(2-2^{l-m})}{2^l\overline{q}p-2h}. \tag{2.44}$$

Assim, usando (2.40), a notação (2.41) e o que obtemos para $\mathcal{B}(l,m)$ em (2.44), podemos escrever (2.38) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{2^m\overline{q}}(t_0,t) \leq \max\Bigg\{ &\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}};\ \mathcal{J}(m,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(m,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{m-1}\overline{q}}}^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^m\overline{q}p-2h}};\\
&\mathcal{J}(m-1,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(m-1,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{m-2}\overline{q}}}^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^{m-1}\overline{q}p-2h}\frac{1}{2}};\\
&\mathcal{J}(m-2,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(m-2,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{m-3}\overline{q}}}^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^{m-2}\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^2}};\cdots;\\
&\mathcal{J}(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\overline{q}}}^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^l\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-l}}};\\
&\cdots;\mathcal{J}(1,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(1,m)}\mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-1}}}\Bigg\},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{2^m\overline{q}}(t_0,t) \leq \max\{&\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}};\\
&\mathcal{J}(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\overline{q}}}^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^l\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-l}}},\ 2\leq l\leq m;\\
&\mathcal{J}(1,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(1,m)}\mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-1}}}\Bigg\},
\end{aligned} \tag{2.45}$$

onde

$$\mathcal{J}(l,m) = \prod_{j=l}^{m} J(2^j\overline{q})^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}},$$

$$\mathcal{B}(l,m) = \frac{n(2-2^{l-m})}{2^l\overline{q}p-2h}$$

O próximo resultado consiste em majorar os termos intermediários da estimativa (2.45) em função do primeiro e do último termo. $\square$

Lema 2.3.4. Sejam $\overline{q} \geq 1$, $\frac{n(k-(p-2))}{p} < \overline{q}$ e $u(\cdot,t)$ solução de (1.1) no intervalo $[0,T_*)$, então (2.45) pode ser estimada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}_{2^m\overline{q}}(t_0,t) \leq \max\{&\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}};\mathcal{J}(l,m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}};\\
&\mathcal{J}(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(1,m)}\mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2\overline{q}p-2h}\right)};\\
&\mathcal{J}(1,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(1,m)}\mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2\overline{q}p-2h}\right)}\Bigg\},
\end{aligned} \tag{2.46}$$

para todo $2 \leq l \leq m$.

Demonstração. Começamos usando uma interpolação para a norma $L^{2^{l-1}\overline{q}}$, já que $\overline{q} \leq 2^{l-1}\overline{q} \leq 2^m\overline{q}$, obtendo

$$\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\overline{q}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|^{1-\theta}_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)} \|u(\cdot,t_0)\|^{\theta}_{L^{2^m\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.47}$$

onde θ satisfaz $\frac{1}{2^{l-1}\overline{q}} = \frac{1-\theta}{\overline{q}} + \frac{\theta}{2^m\overline{q}}$, ou seja,

$$\theta = \frac{1-2^{-l+1}}{1-2^{-m}} \ \text{ e } \ 1-\theta = \frac{2^{-l+1}-2^{-m}}{1-2^{-m}}. \tag{2.48}$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^l\overline{q}p-2h}\right)\frac{1}{2^{m-l}}} \\
&\leq \mathcal{J}(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{\overline{q}p-2^{-m}h}{\overline{q}p-2^{-l+1}h}\right)\left(\frac{2^{-l+1}-2^{-m}}{1-2^{-m}}\right)} \|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{\overline{q}p-2^{-m}h}{\overline{q}p-2^{-l+1}h}\right)\left(\frac{1-2^{-l+1}}{1-2^{-m}}\right)} \\
&= \mathcal{J}(l,m)^{\frac{1}{p_1}}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{\overline{q}p-2^{-m}h}{\overline{q}p-2^{-l+1}h}\right)\left(\frac{1-2^{-l+1}}{1-2^{-m}}\right)} \\
&\cdot \mathcal{J}(l,m)^{\frac{1}{p_2}}\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{\overline{q}p-2^{-m}h}{\overline{q}p-2^{-l+1}h}\right)\left(\frac{2^{-l+1}-2^{-m}}{1-2^{-m}}\right)},
\end{aligned} \tag{2.49}$$

onde $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$. Escolhendo

$$p_1 = \left(\frac{\overline{q}p-2^{-l+1}h}{\overline{q}p-2^{-m}h}\right)\left(\frac{1-2^{-m}}{1-2^{-l+1}}\right) > 1,$$

temos

$$p_2 = \left(\frac{1-2^{-m}}{2^{-l+1}-2^{-m}}\right)\left(\frac{\overline{q}p-2^{-l+1}h}{\overline{q}p-h}\right),$$

e usando desigualdade de Young na estimativa (2.49), obtemos

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^{l-1}\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^l\overline{q}p-2h}\right)\frac{1}{2^{m-l}}} \\
&\leq \frac{1}{p_1}\mathcal{J}(l,m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{p_2}\mathcal{J}(l,m) \\
&\cdot \left(\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(l,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{\overline{q}p-2^{-m}h}{\overline{q}p-2^{-l+1}h}\right)\left(\frac{2^{-l+1}-2^{-m}}{1-2^{-m}}\right)}\right)^{p_2} \\
&= \frac{1}{p_1}\mathcal{J}(l,m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{p_2}\mathcal{J}(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(1,m)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{\overline{q}p-2^{-m}h}{\overline{q}p-h}\right)} \\
&\leq \max\big\{\mathcal{J}(l,m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}(\mathbb{R}^n)};
\end{aligned}$$

$$\mathcal{J}(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\overline{q}p}\left(\frac{2^{m+1}\overline{q}p-2h}{2\overline{q}p-2h}-1\right)}\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{\overline{q}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{2^{m-1}}\frac{2^m\overline{q}p-h}{2\overline{q}p-2h}}\Bigg\}. \tag{2.50}$$

Aplicando (2.50) em (2.45), obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_{2^m\overline{q}}(t_0,t)\leq \max\{&\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}};\mathcal{J}(l,m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}};\\ &\mathcal{J}(l,m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\overline{q}p}\left(\frac{2^{m+1}\overline{q}p-2h}{2\overline{q}p-2h}-1\right)}\mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2\overline{q}p-2h}\right)};\\ &\mathcal{J}(1,m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\overline{q}p}\left(\frac{2^{m+1}\overline{q}p-2h}{2\overline{q}p-2h}-1\right)}\mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2\overline{q}p-2h}\right)}\Bigg\},\end{aligned}$$

para todo $2\leq l\leq m$. □

Lema 2.3.5. Seja $\overline{q}\geq 1$, $\frac{n(k-(p-2))}{p}<\overline{q}$ e $u(\cdot,t)$ solução de (1.1) no intervalo $[0,T_*)$. Então

$$\mathbb{U}_{2^m\overline{q}}(t_0,t)\leq \mathbf{J}(\overline{q},n,p,k)\max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}};\mathbb{B}_\mu^{\mathcal{B}(1,m)}\mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2\overline{q}p-2h}\right)}\right\} \tag{2.51}$$

onde $\mathbb{U}_{\overline{q}}(t_0;t)$ e $\mathbb{B}_\mu(t_0;t)$ são definidos em (2.35), (2.36), respectivamente.

Demonstração. Defina

$$\mathcal{J}_1(m):=\max_{2\leq l\leq m}\mathcal{J}(l,m) \tag{2.52}$$

$$\mathcal{J}_2(m):=\max\{1,\mathcal{J}_1(m)\}=\max\{1,\mathcal{J}(2,m),\cdots,\mathcal{J}(m,m)\} \tag{2.53}$$

$$\mathcal{J}_3(m):=\max\{\mathcal{J}(1,m),\mathcal{J}_1(m)\}=\max_{1\leq l\leq m}\mathcal{J}(l,m). \tag{2.54}$$

Assim, podemos escrever (2.46) da seguinte forma

$$\begin{aligned}&\mathbb{U}_{2^m\overline{q}}(t_0,t)\leq \max\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}};\mathcal{J}_1(m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}};\\ &\mathcal{J}_1(m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\overline{q}p}\left(\frac{2^{m+1}\overline{q}p-2h}{2\overline{q}p-2h}-1\right)}\mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2\overline{q}p-2h}\right)};\\ &\mathcal{J}(1,m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\overline{q}p}\left(\frac{2^{m+1}\overline{q}p-2h}{2\overline{q}p-2h}-1\right)}\mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2\overline{q}p-2h}\right)}\Bigg\}\\ &\leq \max\left\{\mathcal{J}_2(m)\|u(\cdot,t_0)\|_{L^{2^m\overline{q}}};\mathcal{J}_3(m)\mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{2^m\overline{q}p}\left(\frac{2^{m+1}\overline{q}p-2h}{2\overline{q}p-2h}-1\right)}\mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2\overline{q}p-2h}\right)}\right\}.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Basta agora garantir que $\mathcal{J}_3(m)$ é uniformemente limitada em m, isto é, existe uma constante que independe de m, tal que

$$\mathcal{J}_3(m) = \max_{1 \leq l \leq m} \mathcal{J}(l,m) \leq \mathbf{J}(\overline{q}, n, p, k). \tag{2.56}$$

Sabendo que $J(2^j\overline{q}) = \left(\mathcal{C}(n) \frac{p+2^j\overline{q}-2}{p(2^j\overline{q}+k)^{\frac{1}{p}}} \right)^{\frac{np}{2^j\overline{q}p-2h}}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(l,m) &= \prod_{j=l}^{m} J(2^j\overline{q})^{\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}} \\
&= \prod_{j=l}^{m} \left(\mathcal{C}(n) \frac{p+2^j\overline{q}-2}{p(2^j\overline{q}+k)^{\frac{1}{p}}} \right)^{\left(\frac{np}{2^j\overline{q}p-2h}\right)\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}\right)} \\
&\leq \underbrace{\prod_{j=1}^{m} \mathcal{C}(n)^{\left(\frac{np}{2^j\overline{q}p-2h}\right)\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}\right)}}_{I} \\
&\times \underbrace{\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{p+2^j\overline{q}-2}{p(2^j\overline{q}+k)^{\frac{1}{p}}} \right)^{\left(\frac{np}{2^j\overline{q}p-2h}\right)\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}\right)}}_{II}.
\end{aligned}$$

Antes de analisar I e II, vale observar que $\overline{q}p - h \geq 0$. E ainda, por frações parciais, segue que,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{j+1}}{(2^j\overline{q}p-2h)(2^{j+1}\overline{q}p-2h)} = \\
&\frac{1}{\overline{q}p} \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{2}{2^j\overline{q}p-2h} - \frac{2}{2^{j+1}\overline{q}p-2h} \right) = \\
&\frac{1}{\overline{q}p} \left(\frac{1}{\overline{q}p-h} \right)
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j2^{j+1}}{(2^j\overline{q}p-2h)(2^{j+1}\overline{q}p-2h)} = \\
&\frac{1}{\overline{q}p} \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{2j}{2^j\overline{q}p-2h} - \frac{2j}{2^{j+1}\overline{q}p-2h} \right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\overline{q}p}\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{2j}{2^j\overline{q}p-2h}-\frac{2(j+1)}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}+\frac{2}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}\right)=\\
&\frac{1}{\overline{q}p}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{-2(m+1)}{2^{m+1}\overline{q}p-2h}+\sum_{j=0}^{m}\frac{2}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}\right)=\\
&\frac{1}{\overline{q}p}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{-2(m+1)}{2^{m+1}\overline{q}p-2h}+\sum_{j=0}^{m}\frac{2}{2^{j+1}\overline{q}p-2^{j+1}h}\right)=\\
&\frac{1}{\overline{q}p}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{-2(m+1)}{2^{m+1}\overline{q}p-2h}+\frac{1}{\overline{q}p-h}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{2^j}\right)=\\
&\frac{1}{\overline{q}p}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{-2(m+1)}{2^{m+1}\overline{q}p-2h}+\frac{1}{\overline{q}p-h}\left(2-\frac{1}{2^m}\right)\right)=\\
&\frac{1}{\overline{q}p}\left(\frac{2}{\overline{q}p-h}\right).
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

Se $\mathcal{C}(n)\leq 1$ então $I\leq 1$ para todo $1\leq l\leq m$; Se $\mathcal{C}(n)\geq 1$, usando (2.57), então

$$
\begin{aligned}
I&=\prod_{j=1}^{m}\mathcal{C}(n)^{\frac{np(2^m\overline{q}p-h)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(2^j\overline{q}p-2h)(2^{j+1}\overline{q}p-2h)}\right)}\\
&\leq\prod_{j=1}^{m}\mathcal{C}(n)^{\frac{np(2^m\overline{q}p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(2^j\overline{q}p-2h)(2^{j+1}\overline{q}p-2h)}\right)}\\
&\leq\mathcal{C}(n)^{n\overline{q}p^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{j+1}}{(2^j\overline{q}p-2h)(2^{j+1}\overline{q}p-2h)}}\\
&=\mathcal{C}(n)^{\frac{np}{\overline{q}p-h}}.
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

Antes de estimar II, para todo $p\geq 2$ e $q\geq 1$, observe que

$$
\frac{p-1}{p}q\geq\frac{p-1}{p},\quad\text{pois}\quad\frac{p-1}{p}>0
$$

$$
\text{e}\quad\frac{p-1}{p}>\frac{p-2}{p},\quad\text{então}
$$

$$
\frac{p-2}{p}<q\frac{p-1}{p}=q-\frac{q}{p}\Rightarrow\frac{p+q-2}{p}<q.
$$

Como $2^j\overline{q}\geq 1$ para todo j, temos $\frac{p+2^j\overline{q}-2}{p(2^j\overline{q}+k)^{\frac{1}{p}}}\leq\frac{p+2^j\overline{q}-2}{p}\leq 2^j\overline{q}$, pois $(2^j\overline{q}+k)^{\frac{1}{p}}\geq 1$, já que $\overline{q}\geq 1$, $k\geq 0$ e $j=1,2,\ldots$. Assim, usando (2.57) e (2.58), podemos estimar II da seguinte forma:

$$
II\leq\prod_{j=1}^{m}(2^j\overline{q})^{\left(\frac{np}{2^j\overline{q}p-2h}\right)\left(\frac{2^m\overline{q}p-h}{2^{j+1}\overline{q}p-2h}\frac{1}{2^{m-(j+1)}}\right)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^{m} (2)^{\frac{np(2^m \overline{q}p-h)}{2^m}\left(\frac{j2^{j+1}}{(2^j\overline{q}p-2h)(2^{j+1}\overline{q}p-2h)}\right)} \\
&\times \prod_{j=1}^{m} \overline{q}^{\frac{np(2^m \overline{q}p-h)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(2^j\overline{q}p-2h)(2^{j+1}\overline{q}p-2h)}\right)} \\
&\leq \prod_{j=1}^{m} (2)^{\frac{np(2^m \overline{q}p)}{2^m}\left(\frac{j2^{j+1}}{(2^j\overline{q}p-2h)(2^{j+1}\overline{q}p-2h)}\right)} \\
&\times \prod_{j=1}^{m} \overline{q}^{\frac{np(2^m \overline{q}p)}{2^m}\left(\frac{2^{j+1}}{(2^j\overline{q}p-2h)(2^{j+1}\overline{q}p-2h)}\right)} \\
&\leq (2)^{n\bar{q}p^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j2^{j+1}}{(2^j\overline{q}p-2h)(2^{j+1}\overline{q}p-2h)}} \\
&\times \overline{q}^{n\bar{q}p^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{j+1}}{(2^j\overline{q}p-2h)(2^{j+1}\overline{q}p-2h)}} \\
&\leq (2^2\overline{q})^{\frac{np}{\overline{q}p-h}} = (4\overline{q})^{\frac{np}{\overline{q}p-h}} \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

Portanto, para todo $1 \leq l \leq m$,

$$
\mathcal{J}(l,m) \leq (4\overline{q})^{\frac{np}{\overline{q}p-h}} =: \mathbf{J}(\overline{q}, n, p, k),
$$

concluindo a prova. $\square$

Agora, sabendo que $\lim_{q\to\infty} \mathbb{U}_q(t_0;t) = \mathbb{U}_\infty(t_0;t)$ e fazendo $m \to \infty$ em (2.51), obtemos o nosso resultado principal:

Teorema 2.3.1. *Seja $\overline{q} \geq 1$, $0 \leq t_0 < t < T_*$, $\frac{n(k-(p-2))}{p} < \overline{q}$ e $u(\cdot,t)$ solução de (1.1). Então*

$$
\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \mathbb{U}_\infty(t_0;t) \\
&\leq (4\overline{q})^{\frac{np}{\overline{q}p-n(k-(p-2))}} \max\left\{ \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{\overline{q}p+n(p-2-k)}} \mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{\overline{q}p}{\overline{q}p+n(p-2-k)}} \right\}
\end{aligned}
$$

onde

$$
\mathbb{U}_q(t_0;t) := \sup\left\{ \|u(\cdot,\tau)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} : t_0 \leq \tau \leq t \right\},
$$

e

$$
\mathbb{B}_\mu(t_0;t) := \sup\left\{ \frac{B(\tau)}{\mu(\tau)} : t_0 \leq \tau \leq t \right\}, B(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |div\, b(x,t)|.
$$

Em particular, para $t_0 = 0$ e $\overline{q} = 1$, a solução $u(\cdot,t)$ fica limitada $\forall t \geq 0$.

Corolário 2.3.1. Seja $u(\cdot,t)$ solução de (1.1) com k satisfazendo $0 \leq k \leq \frac{p+n(p-2)}{n}$, então u é globalmente definida, isto é, $(T_* = \infty)$ com

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (4)^{\frac{np}{p-n(k-(p-2))}} \max\left\{\|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}; \mathbb{B}_\mu^{\frac{n}{p+n(p-2-k)}} \|u(\cdot,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{p+n(p-2-k)}}\right\},$$

$\forall t > 0$.

2.4 Comentários Finais

Nesta seção de comentários finais, discutiremos algumas questões relevantes que surgiram durante a análise do problema em questão, bem como questões em aberto.

- As limitações relacionadas às funções b e $\operatorname{div} b$, durante análise da proposição 2.2.3, foram consideradas para garantir a convergências das integrais apresentadas durante a demonstração do mesmo.

- Comparando o problema unidimensional com $p = 2$ com o problema desta tese; para o nosso problema n-dimensional, se consideramos o **Teorema** 2.3.1, com $p = 2$ e $n = 1$, obtemos

  $$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \mathbb{U}_\infty(t_0;t) \leq (4\overline{q})^{\frac{2}{2\overline{q}-k}} \max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}; \mathbb{B}_\mu^{\frac{1}{2\overline{q}-k}} \mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{2\overline{q}}{2\overline{q}-k}}\right\},$$

  e para o problema da reta a qual nos serviu de inspiração, foi obtido a desigualdade

  $$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \mathbb{U}_\infty(t_0;t) \leq \overline{q}^{\frac{1}{2\overline{q}-k}} \max\left\{\|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}; \mathbb{B}_\mu^{\frac{1}{2\overline{q}-k}} \mathbb{U}_{\overline{q}}^{\frac{2\overline{q}}{2\overline{q}-k}}\right\}.$$

  Note que ambas desigualdade são quase idênticas, sendo a diferença dada pelos termos $(4\overline{q})^{\frac{2}{2\overline{q}-k}}$ e $\overline{q}^{\frac{1}{2\overline{q}-k}}$, diferença que não invalida ou prejudica o resultado final: conclusão sobre a existência global da solução. O método aplicado para demonstração do **Teorema principal** tanto no caso da tese, quanto o problema apresentado no artigo [28], foi muito semelhante, a mudança ocorreu na demonstração do Lema 2.3.1: Para o caso do artigo foi aplicado a desigualdade de Sobolev-Nirenberg-Gagliardo ([42]), seguida pela desigualdade de Nash (sharp, ver [8]). Enquanto no caso da tese, foi apenas utilizado 2 vezes a aplicação da desigualdade de Sobolev-Nirenberg-Gagliardo ([42]). A restrição para os valores de k, continuam iguais quando se compara ambos os problemas na reta, isto é, $0 \leq k < 2\overline{q}$, observe também que $(4\overline{q})^{\frac{2}{2\overline{q}-k}} > \overline{q}^{\frac{1}{2\overline{q}-k}}$.

- A condição imposta $\frac{n(k-(p-2))}{p} < \frac{q}{2}$ imposta no Lema 2.3.1 acima não é resultado de uma limitação do método de análise, mas uma condição natural que é prevista por argumentos de análise de escalas.

- Exigindo mais do termo $b(x,t)$ em comparação ao que foi feito no artigo [10], conseguimos estender o intervalo $[0, p-2+\frac{p-1}{n})$ para o intervalo $[0, p-2+\frac{p}{n})$. Ainda, é possível garantir a existência global da solução do nosso problema para valores $k \geq p-2+\frac{p}{n}$ se exigirmos que a condição inicial seja adequadamente pequena, ver [10].

- Como problemas em aberto, podemos citar:

  1. Considerando a condição inicial no espaço $L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, é possível garantir a existência global da solução para valores de $k \geq p-2+\frac{p}{n}$?

  2. A propriedade de decaimento da norma L^q pode ser verificada para $q > 1$?

  3. É possível caracterizar todos $b(x,t)$, de forma que $\limsup \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0$ para toda solução do problema descrito?

Acreditamos que estas questões servem de motivação para a continuidade desta pesquisa.

3 COMUTADORES EM ESPAÇOS DE LEBESGUE COM PESO

Nesse capítulo vamos analisar a continuidade de comutadores $[b, T]$ agindo sobre espaços de Lebesgue com peso, no qual estamos assumindo que $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ e que T é um operador linear satisfazendo $T : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ quando $1 < p \leq q < \infty$ e $w \in A_{pq}$. Como já indicamos na introdução o ponto de partida é o teorema de Coifman-Rochberg-Weiss [15]: *se $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, então existe uma constante $C_n > 0$ tal que para todo $1 \leq j \leq n$ vale a estimativa*

$$\|[b, R_j]\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \|b\|_{BMO} \tag{3.1}$$

e, reciprocamente, se para cada $1 \leq j \leq n$ vale a estimativa

$$\|[b, R_j]\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty, \tag{3.2}$$

então $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ e temos que

$$\|b\|_{BMO} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \|[b, R_j]\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)} . \tag{3.3}$$

Aqui R_j é a j-ésima componente da transformada de Riesz. Como indicamos na introdução, a técnica de demonstração do resultado acima consiste em definirmos para $z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ o operador

$$T_z(f) \doteq e^{-zb} T(e^{zb} f) \text{ para } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{3.4}$$

e verificar que ele depende de forma holomorfa na variável z. Uma vez provado tais propriedades, podemos encontrar um disco de raio suficientemente pequeno em torno da origem do plano complexo, tal que para esse disco vale a fórmula integral de Cauchy e, com o auxílio dela, podemos verificar a relação

$$\frac{d}{dz} T_z(f)\Big|_{z=0} = [b, T]f. \tag{3.5}$$

Assim, sabendo que $T_z : L^2(\mathbb{R}^n, e^{zb(x)}dx) \to L^2(\mathbb{R}^n, e^{zb(x)}dx)$ para z com norma suficientemente pequena, podemos obter a continuidade em $L^2(\mathbb{R}^n)$ do comutador.

A versão com dependência ótima na característica do peso foi obtida por Chung, Pereyra e Pérez em [13] enunciado a seguir: *seja* T *um operador linear limitado agindo sobre* $L^2(w)$ *para qualquer* $w \in A_2$ *e suponha ainda que existe uma função crescente* $\varphi : [1, \infty) \to [0, \infty)$, *tal que*

$$\|T\|_{L^2(w) \to L^2(w)} \leq \varphi([w]_{A_2}). \tag{3.6}$$

Então existem constantes positivas γ_n *e* c_n *independentes de* $[w]_{A_2}$, *tais que*

$$\|[b, T]\|_{L^2(w) \to L^2(w)} \leq c_n \varphi(\gamma_n [w]_{A_2}) [w]_{A_2} \|b\|_{BMO}. \tag{3.7}$$

Seguindo as ideias centrais desse artigo, conseguimos provar que tal método pode ser estendido para um contexto mais geral, a saber:

Teorema 3.0.1. *Sejam* $1 < p \leq q < \infty$, $T : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ *um operador linear limitado, para qualquer* $w \in A_{pq}$. *Suponha ainda que existe uma função crescente* $\psi : [1, \infty) \to [0, \infty)$ *tal que:*

$$\|Tf\|_{L^p(w^p) \to L^q(w^q)} \leq \psi([w]_{A_{pq}}), \quad \forall f \in L^p(w^p).$$

Então existem constantes $a_n > 0$ *e* $b_n > 1$ *independentes de* $[w]_{A_{pq}}$, *tal que*

$$\|[b, T]\|_{L^p(w^p) \to L^q(w^q)} \leq a_n \psi(b_n [w^r]_{A_{pq}}) \|b\|_{BMO}, \quad b \in BMO. \tag{3.8}$$

Como veremos mais adiante, o **Teorema 3.0.1** não se aplica apenas a comutadores envolvendo integrais singulares do tipo Calderón-Zygmund, mas também a classes de operadores que generalizam o potencial de Riesz e também a operadores pseudo-diferenciais.

O capítulo é organizado da seguinte forma:

- Na **Seção 3.1** iremos enunciar e demonstrar alguns dos resultados básicos necessários para as discussões subsequentes. Eles incluem a definição de operadores integrais singulares, operadores integrais fracionários, operadores pseudo-diferenciais, e uma série de resultados elementares sobre a teoria de pesos A_p e A_{pq};

- Na **Seção 3.2** apresentamos a prova do nosso resultado principal;
- Na **Seção 3.3** discutimos algumas aplicações do teorema principal no estudo de comutadores envolvendo integrais fracionárias e operadores pseudo-diferenciais.
- Por fim, na **Seção 3.4** discutimos alguns resultados sobre a nossa pesquisa corrente a respeito de comutadores.

A discussão abaixo é centrada em um projeto colaborativo com os professores Carlos Pérez Moreno, Tiago Picon e Lucas Oliveira.

3.1 Preliminares

Nesta seção apresentamos algumas definições e resultados básicos sobre as classes de pesos e de operadores em que estamos interessados. No que segue, vamos supor que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (a classe de Schwartz) e, por conta disso, os operadores integrais que iremos apresentar podem todos ser rigorosamente definidos com o auxílio da teoria de distribuições temperadas; para mais detalhes, recomendamos a referência [21].

3.1.1 Pesos

Definição 3.1.1. Se denominamos por w uma função localmente integrável não-negativa em $\mathbb{R}^n$, dizemos que $w \in A_p$, com $1 < p < \infty$, se existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, a seguinte desigualdade seja satisfeita:

$$[w]_{A_p} \doteq \sup_Q \left(\fint_Q w(x)\, dx \right) \left(\fint_Q w(x)^{1-p'}\, dx \right)^{p-1} \leq C,$$

onde $\displaystyle\fint_Q w(x)\,dx = \frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)dx$ e $|Q|$ denota a medida do cubo Q.
Para $p = 1$, dizemos que $w \in A_1$, se existe uma constante $C > 0$ tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$\fint_Q w(x)\,dx \leq Cw(y), \quad q.t.p \;\; y \in Q.$$

Finalmente, $A_\infty = \bigcup_{p\geq 1} A_p$.

Definição 3.1.2. Dado $1 \leq p \leq q < \infty$, dizemos que $w \in A_{pq}$, se existe uma constante $C > 0$ tal que para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$[w]_{A_{pq}} \doteq \sup_Q \left(\fint_Q w(x)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\fint_Q w(x)^{-p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C,$$

quando $1 < p < \infty$, e

$$\left(\fint_Q w(x)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq Cw(x), \quad q.t.p \;\; x \in Q,$$

quando $p = 1$.

Quando $p = q$, a classe A_{pq} coincide com $A_{P'}$ pois as expressões de ambas as definições se reduzem à mesma condição. Em geral, os pesos A_{pq} podem ser vistos como uma extensão dos pesos A_P.

Dizemos que uma coleção de pesos A_{pq} é estável, se $w \in A_{pq}$ implica que existe um $r > 1$ tal que $w^r \in A_{pq}$. De fato,

(I) A_p é estável, i.e., dado $w \in A_p$, existe $\epsilon > 1$ tal que $w^\epsilon \in A_p$, ver ([21], p. 139).

(II) $w \in A_{pq} \Leftrightarrow w^q \in A_{1+q/p'}$ ver (Prop.2.1 [3]).

Dado $w^q \in A_{1+q/p'}$, temos por (I) que $w^{\epsilon q} \in A_{1+q/p'}$ para algum $\epsilon > 1$ e de (II) temos que $w^\epsilon \in A_{pq}$. Portanto, concluímos A_{pq} é estável.

Definição 3.1.3. Seja $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável, definimos

$$\|b\|_{BMO} = \sup_Q \fint_Q |b(y) - b_Q|\, dy \leq \infty,$$

no qual o supremo é tomado sobre todos os cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$, com lados paralelos aos eixos, e que

$$b_Q = \fint_Q b(y)\, dy.$$

Teorema 3.1.1. *(Sharp John-Nirenberg). Existem constantes dimensionais* $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$ *tal que*

$$\sup_Q \fint_Q \exp\left(\frac{\alpha_n}{\|b\|_{BMO}}|b(y) - b_Q|\right) dy \leq \beta_n.$$

A demonstração pode ser encontrada em ([34], p. 31-32).

Observação 3.1.1. Na verdade, no teorema acima podemos tomar $\alpha_n = 2^{-(n+2)}$.

Lema 3.1.1. Sejam $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha_n < 1 < \beta_n$, as constantes dimensionais do Teorema 3.1.1. então para todo $s \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$|s| \leq \frac{\alpha_n}{\|b\|_{BMO}} \Rightarrow e^{sb} \in A_2 \text{ e } [e^{sb}]_{A_2} \leq \beta_n^2.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.1, se $|s| \leq \frac{\alpha_n}{\|b\|_{BMO}}$ e Q fixo, temos

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \exp(|s||b(y) - b_Q|)dy \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q \exp(\frac{\alpha_n}{\|b\|_{BMO}}|b(y) - b_Q|)dy \leq \beta_n.$$

Assim

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \exp(s(b(y) - b_Q))dy \leq \beta_n$$

e

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \exp(-s(b(y) - b_Q))dy \leq \beta_n.$$

Multiplicando as igualdades, e observando que as partes b_Q se anulam

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \exp(s(b(y) - b_Q))dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \exp(-s(b(y) - b_Q))dy\right)$$

$$= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \exp(sb(y))dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \exp(-sb(y))dy\right) \leq \beta_n^2.$$

Logo $e^{sb} \in A_2$, com

$$[e^{sb}]_{A_2} \leq \beta_n^2.$$

$\square$

Observação 3.1.2. De maneira análoga a prova do Lema 3.1.1, se $1 < p < \infty$ e se $s \in \mathbb{R}$ temos

$$|s| \leq \frac{\alpha_n}{\|b\|_{BMO}} \min\left\{1, \frac{1}{p-1}\right\} \Rightarrow e^{sb} \in A_p \text{ e } [e^{sb}]_{A_p} \leq \beta_n^p.$$

Lema 3.1.2. Sejam $w \in A_2$ e $r_w \doteq 1 + \frac{1}{2^{n+5}[w]_{A_2}}$. Então

$$\left(⨍_Q w^{r_w} dx\right)^{\frac{1}{r_w}} \leq 2 ⨍_Q w dx.$$

Demonstração. Seja $w_Q \doteq \frac{1}{|Q|}\int_Q w$ e $\delta > 0$. Usando o teorema de Fubini e a linearidade da integral, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1+\delta} dx &= \frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{1}{\delta}\left(\int_0^{|w(x)|} \lambda^{\delta-1}\right) w(x) dx \\
&= \frac{\delta}{|Q|}\int_0^{\infty} \lambda^{\delta} w(\{x \in Q : w(x) > \lambda\})\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= \frac{\delta}{|Q|}\int_0^{w_Q} \lambda^{\delta} w(\{x \in Q : w(x) > \lambda\})\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&+ \frac{\delta}{|Q|}\int_{w_Q}^{\infty} \lambda^{\delta} w(\{x \in Q : w(x) > \lambda\})\frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= I + II\,. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Observe que $I \leq (w_Q)^{\delta+1}$, no qual $w_Q = \frac{w(Q)}{|Q|}$.
Para estimar II fazemos duas afirmações. A primeira é a seguinte: se

$$E_Q = \{x \in Q : w(x) \leq \frac{1}{2[w]_{A_2}} w_Q\},$$

então

$$|E_Q| \leq \frac{1}{2}|Q|. \qquad (3.10)$$

De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos para qualquer $f \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy\right)^2 w(Q) &= \left(\frac{1}{|Q|}\int f(y)w(y)w(y)^{-1}dy\right)^2 \int_Q w(y)dy \\
&\leq \left(\frac{1}{|Q|}\left(\int_Q f(y)^2 w(y)dy\right)^{1/2}\left(\int_Q w(y)^{-1}\right)^{1/2}\right)^2 \int_Q w(y)dy \\
&= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{-1}\right)\int f(y)^2 w(y)dy \\
&\leq [w]_{A_2}\int f(y)^2 w(y)dy,
\end{aligned}$$

e portanto se $E \subset Q$, tomando $f = \chi_E$,

$$\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^2 \leq [w]_{A_2}\frac{w(E)}{w(Q)}. \tag{3.11}$$

Observe que:

$$\int_{E_Q} w(x)dx = \int_Q w(x)\chi_{E_Q}(x)dx \leq \int_Q \chi_{E_Q}(x)\frac{w(Q)}{2[w]_{A_2}}dx = |E_Q|\frac{w(Q)}{2[w]_{A_2}}.$$

Portanto, temos por (3.11)

$$\left(\frac{|E_Q|}{|Q|}\right)^2 \leq [w]_{A_2}\frac{w(E_Q)}{w(Q)} \leq [w]_{A_2}\frac{w(Q)}{w(Q)}|E_Q|\frac{1}{2[w]_{A_2}} = \frac{1}{2}\frac{|E_Q|}{|Q|}$$
$$\Rightarrow 2|E_Q| \leq |Q|,$$

do qual a primeira observação decorre. Em particular, isto implica que

$$|Q| \leq 2|Q \setminus E_Q| = 2|\{x \in Q : w(x) > \frac{1}{2[w]_{A_2}}w_Q\}|. \tag{3.12}$$

A segunda afirmação é a seguinte: para $\lambda > w_Q$ vale

$$w(\{x \in Q : w(x) > \lambda\}) \leq 2^{n+1}\lambda|\{x \in Q : w(x) > \frac{\lambda}{2[w]_{A_2}}w_Q\}|. \tag{3.13}$$

Na verdade, como $\lambda > w_Q$, para provar esta afirmação consideramos a decomposição padrão (local) de Calderón-Zygmund de w no nível $\lambda > 0$ (Ver Apêndice B). Então existe uma família de cubos disjuntos $\{Q_i\}_i$ contidos em Q que satisfaz

$$\lambda < w_{Q_i} \leq 2^n\lambda$$

para cada i. Agora observe que, exceto por um conjunto nulo, temos

$$\{x \in Q : w(x) > \lambda\} \subset \{x \in Q : M_Q^d w(x) > \lambda\} = \bigcup_i Q_i,$$

no qual M_Q^d é o operador máximo diádico restrito a um cubo Q. Isso junto com (3.12) produz

$$w(\{x \in Q : w(x) > \lambda\}) \leq \sum_i w(Q_i) \leq$$

$$\leq 2^n \lambda \sum_i |Q_i| \leq 2^{n+1} \lambda \sum_i \left| \left\{ x \in Q_i : w(x) > \frac{\lambda}{2[w]_{A_2}} w_{Q_i} \right\} \right| \leq$$

$$\leq 2^{n+1} \lambda |\{x \in Q : w(x) > \frac{\lambda}{2[w]_{A_2}} w_Q\}|$$

já que $w_{Q_i} > \lambda$. Isso prova a segunda afirmação (3.13). Agora, combinando

$$\begin{aligned} II &= \frac{\delta}{|Q|} \int_{w_Q}^{\infty} \lambda^{\delta} w(\{x \in Q : w(x) > \lambda\}) \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &\leq \frac{2^{n+1}\delta}{|Q|} \int_{w_Q}^{\infty} \lambda^{\delta+1} |\{x \in Q : w(x) > \frac{1}{2[w]_{A_2}} \lambda\}| \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &\leq (2[w]_{A_2})^{\delta+1} 2^{n+1} \delta \frac{1}{|Q|} \int_{\frac{w_Q}{2[w]_{A_2}}}^{\infty} \lambda^{\delta+1} |\{x \in Q : w(x) > \lambda\}| \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &\leq (2[w]_{A_2})^{\delta+1} 2^{n+1} \frac{\delta}{\delta+1} \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\delta+1} dx. \end{aligned}$$

Definindo aqui $\delta \doteq \frac{1}{2^{5+n}[w]_{A_2}}$, obtemos (usando que $t \leq 2^t$, para $t \geq 1$,) que

$$II \leq \frac{1}{2} \frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\delta+1} dx$$

e finalmente

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{\delta+1} dx \leq 2(w_Q)^{\delta+1},$$

donde concluímos a demonstração. □

É sabido que se $w \in A_p$, então $b = \log w \in BMO(\mathbb{R}^n)$, ver [26] (p. 409-410). Uma recíproca parcial também vale: se $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, existe um $s_0 > 0$, tal que $w = e^{sb} \in A_p$, $|s| \leq s_0$. Como consequência do Teorema Sharp de John-Nirenberg podemos obter uma versão desta recíproca parcial para pesos A_{pq}.

Lema 3.1.3. Seja $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, e $\alpha_n < 1 < \beta_n$ as constantes dimensionais do Teorema 3.1.1. Então para todo $s \in \mathbb{R}$ temos

$$|s| \leq \frac{\alpha_n}{\|b\|_{BMO}} \min\left\{\frac{1}{q}, \frac{1}{p'}\right\} \Rightarrow e^{sb} \in A_{pq} \text{ and } [e^{sb}]_{A_{pq}} \leq \beta_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+1}.$$

Observação: Vamos provar o caso em que $\frac{1}{p'} < \frac{1}{q}$ e no caso que $\frac{1}{q} < \frac{1}{p'}$ a prova segue de maneira análoga.

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.1, se $|s| \leq \frac{\alpha_n}{\|b\|_{BMO}} \min\left\{\frac{1}{q}, \frac{1}{p'}\right\} = \frac{\alpha_n}{\|b\|_{BMO}} \frac{1}{p'}$ e se Q é fixado

$$⨍_Q \exp\left(p'|s||b(y) - b_Q|\right) dy \leq ⨍_Q \exp\left(\frac{\alpha_n}{\|b\|_{BMO}}|b(y) - b_Q|\right) dy \leq \beta_n;$$

assim

$$⨍_Q \exp\left(p's(b(y) - b_Q)\right) dy \leq \beta_n$$

e

$$⨍_Q \exp\left(-p's(b(y) - b_Q)\right) dy \leq \beta_n.$$

Como $q < p'$, nós também temos

$$⨍_Q \exp\left(qs(b(y) - b_Q)\right) dy \leq ⨍_Q \exp\left(p'|s||b(y) - b_Q|\right) dy \leq \beta_n.$$

Agora, note que

$$\left(⨍_Q \exp\left(qs(b(y) - b_Q)\right) dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(⨍_Q \exp\left(-p's(b(y) - b_Q)\right) dy\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \beta_n^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}}.$$

Logo, $e^{sb} \in A_{pq}$ com

$$[e^{sb}]_{A_{pq}} \leq \beta_n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+1}.$$

□

Definição 3.1.4. Para $1 \leq p < \infty$, o espaço de Lebesgue com peso $L^p(w)$ é definido como o conjunto de todas as funções mensuráveis f tais que:

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Aqui $\|f\|_{L^p(w)}$ representa a norma de f ponderada com respeito a função w.

Observação 3.1.3. Os espaços de Lebesgue com peso $L^p(w)$ são uma generalização dos espaços de Lebesgue clássicos L^p, onde uma função adicional, chamada peso, é introduzida para ajustar a norma do espaço.

Definição 3.1.5. Seja $T : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ um operador linear contínuo, com $1 < p \leq q < \infty$, para qualquer $w \in A_{pq}$, isto é

$$\|Tf\|_{L^q(w^q)} \leq C\|f\|_{L^p(w^p)}, \ \forall f \in L^p(w^p). \tag{3.14}$$

Para cada $z \in \mathbb{C}$ e para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, definimos a família de operadores

$$T_z(f) \doteq e^{zb}T(e^{-zb}f), \quad b \in BMO(\mathbb{R}^n).$$

Um dos passos principais na prova do nosso teorema principal é que a família de operadores $\{T_z(f)\}$ é holomorfa no parâmetro z. O passo central é obter a continuidade dessa família: uma vez feito isso, podemos dar sentido a certas integrais (no parâmetro) dos operadores $T_z(f)$ que usaremos para definir nossos comutadores. Assim, o passo técnico central reside no lema abaixo:

Lema 3.1.4. Seja $D_\eta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \eta\}$ e suponha que T é um mapa linear que satisfaz (3.14). Então para cada função $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ e cada $w \in A_{pq}$, existe um $\eta > 0$ (a qual depende de p e q) tal que para cada $f \in L^p(w^p)$ com suporte compacto, o mapa $z \to T_z(f)$ é contínuo de D_η em $L^q(w^q)$.

Demonstração. Precisamos encontrar um $\eta > 0$ tal que para $z \in D_\eta$ e $z_n \subset D_\eta$, se $z_n \to z$ então $\|(T_{z_n} - T_z)f\|_{L^q(w^q)} \to 0$ quando $n \to \infty$. Escreva

$$\begin{aligned} T_{z_n}f - T_zf &= e^{z_nb}T((e^{-z_nb} - e^{-zb})f) + (e^{z_nb} - e^{zb})T(e^{-zb}f) \\ &= T_1f + T_2f, \end{aligned}$$

onde

$$T_1f = e^{z_nb}T((e^{-z_nb} - e^{-zb})f) \text{ e } T_2f = (e^{z_nb} - e^{zb})T(e^{-zb}f).$$

Considere a norma $L^q(w^q)$ de $T_1 f$. Seja $\alpha_n = Re(z_n)$. Temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_1 f(x)|^q w^q(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |e^{z_n b(x)} T((e^{-z_n b} - e^{-zb})f)(x)|^q w^q(x)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{q\alpha_n b(x)} |T((e^{-z_n b} - e^{-zb})f)(x)|^q w^q(x)dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |T((e^{-z_n b} - e^{-zb})f)(x)|^q e^{q\eta|b(x)|} w^q(x)dx$$

para $|z_n| < \eta$.

Fixe $\gamma > 0$ tal que $e^{\gamma|b|} \in A_{pq}$. Então $e^{\gamma|b|/2} \in A_{pq}$ e por hipótese

$$T : L^p(e^{\gamma p|b|/2}) \to L^q(e^{\gamma q|b|/2}).$$

Como A_{pq} é estável, então $w^{1+\epsilon} \in A_{pq}$, para algum $\epsilon > 0$, nós também temos

$$T : L^p(w^{p(1+\epsilon)}) \to L^q(w^{q(1+\epsilon)}).$$

Assim, pelo resultado da interpolação de Stein (ver [49] Cap. V), obtemos

$$T : L^p(w^p e^{\gamma p|b|\epsilon/2(1+\epsilon)}) \to L^q(w^q e^{\gamma q|b|\epsilon/2(1+\epsilon)}).$$

Portanto, definindo $\eta \doteq \gamma\epsilon/2(1+\epsilon)$, temos

$$T : L^p(w^p e^{\eta p|b|}) \to L^q(w^q e^{\eta q|b|}).$$

Segue que a norma de $T_1 f$ é limitada por

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(e^{-z_n b(x)} - e^{-zb(x)})f(x)|^p e^{p\eta|b(x)|} w^p(x)dx.$$

Afirmamos que esta integral se aproxima de 0 quando $n \to \infty$. De fato, é claro que a integral converge para 0 pontualmente. Além disso

$$|(e^{-z_n b(x)} - e^{-zb(x)})f(x)|e^{\eta|b(x)|}$$

$$\leq e^{|\alpha_n||b(x)|}|f(x)|e^{\eta|b(x)|} + e^{|\alpha||b(x)|}|f(x)|e^{\eta|b(x)|}$$

$$\leq 2|f(x)|e^{2\eta|b(x)|},$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p e^{2p\eta|b(x)|} w^p(x)dx \leq \|f\|_{L^\infty}^p \int_{supp(f)} e^{2p\eta|b(x)|} w^p(x)dx$$

$$\leq C\|f\|_{L^\infty}^p \left(\int_{supp(f)} e^{2p\eta|b(x)|(1+\epsilon)/\epsilon} dx\right)^{\epsilon/(1+\epsilon)} \left(\int_{supp(f)} w^{p(1+\epsilon)} dx\right)^{1/(1+\epsilon)}$$

$$= C\|f\|_{L^\infty}^p \left(\int_{supp(f)} e^{\gamma p|b(x)|} dx\right)^{\epsilon/(1+\epsilon)} \left(\int_{supp(f)} w^{p(1+\epsilon)} dx\right)^{1/(1+\epsilon)}.$$

Como $e^{\gamma p|b(x)|}$ e $w^{p(1+\epsilon)}$ são localmente integráveis e f tem suporte compacto, está última expressão é finita. Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue $\int_{\mathbb{R}^n} |T_1 f(x)|^q w^q(x)dx$ vai para 0 quando $n \to \infty$.

Usaremos argumentos semelhantes para estimar a norma $T_2 f$. desde

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_2 f|^q w^q(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |(e^{z_n b(x)} - e^{zb(x)})T(e^{-zb}f)(x)|^q w^q(x)dx.$$

Está última integral é limitada por $2\int_{\mathbb{R}^n} |T(e^{-zb}f)(x)|^q e^{q\eta|b(x)|} w^q(x)dx$, assim usando o mesmo argumento de interpolação como acima, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_2 f|^q w^q(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |e^{-zb}f(x)|^p e^{p\eta|b(x)|} w^p(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p e^{p\eta|b(x)|} w^p(x)dx.$$

Portando, podemos concluir que $\int_{\mathbb{R}^n} |T_2 f|^q w^q(x)dx$ vai para 0 quando $n \to \infty$. Segue-se que $\|(T_{z_n} - T_z)f\|_{L^q(w^q)} \to 0$ quando $n \to \infty$, a qual completa a prova do lema. $\square$

Seja $0 < r < \eta$ e $\partial D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, orientado no sentido anti-horário. Pelo lema anterior, a integral de Bochner

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D_r} \frac{T_z(f)}{z^{n+1}} dz \tag{3.15}$$

existe para cada $n = 0, 1, 2, ...$, e produz um operador, C_n, que é densamente definido em $L^p(w^p)$ com valores em $L^q(w^q)$. Além disso,

$$\|C_n(f)\|_{L^q(w^q)} \leq M\frac{n!}{r^n}\|f\|_{L^p(w^p)}$$

mostrando assim $C_n \in \mathcal{L}(L^p(w^p), L^q(w^q))$ com a norma do operador limitado por $M\frac{n!}{r^n}$.

Agora estamos prontos para provar a continuidade dos comutadores iterados (que, em particular, também se aplica ao caso dos comutadores simples)

Lema 3.1.5. Seja $T : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ um operador linear, com $1 < p \leq q < \infty$, satisfazendo (3.14), e $w \in A_{pq}$ classe de pesos estáveis. Então, dado $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ e $w \in A_{pq}$, o comutador $n - th$ de T e b, definido pontualmente como

$$T((b(x) - b(\cdot))^n f(\cdot))(x)$$

para $f \in L^p(w^p)$ coincide com o operador C_n dado em (3.15). Assim, para cada $n = 1, 2, ...,$ o n-ésimo comutador pertence a $\mathcal{L}(L^p(w^p), L^q(w^q))$.

Demonstração. Para $N \in \mathbb{N}$ e $f \in L^p(w^p)$ com $supp(f)$ compacto, defina

$$S_N(x,z) = \sum_{j=0}^{N} \frac{z^j}{j!} b(x), \quad T_z^N(f)(x) = S_N(x,z) T(S_N(\cdot, -z) f)(x).$$

Como $S_N(x,z) \to e^{zb(x)}$ e $|S_N(x,z)| \leq e^{\eta |b(x)|}$ para todo $z \in D_\eta$, o mesmo argumento usado para provar o lema anterior, mostra que $T_z^N(f) \to T_z(f)$ em $L^q(w^q)$, com $\|T_z^N(f)\| L^q(w^q)$ uniformemente limitado para $z \in D_\eta$. Usando o teorema da convergência dominado para a integral de Bochner [51], vemos que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{T_z^N(f)(x,z)}{z^{n+1}} dz = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{T_z(f)}{z^{n+1}} dz$$

existe em $L^q(w^q)$. Mas como T é linear, para todo $N > n$, temos

$$\begin{aligned}
C_n(f)(x) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{T_z^N(f)(x,z)}{z^{n+1}} dz \\
&= n! \sum_{j=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} \frac{b(x)^j}{j!} T\left(\frac{(-b(\cdot))^l}{l!} f(\cdot)\right)(x) \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r} z^{j+l-n-1} dz \\
&= n! \sum_{j+l=n} \frac{b(x)^j}{j!} T\left(\frac{(-b(\cdot))^l}{l!} f(\cdot)\right)(x) = T((b(x) - b(\cdot))^n f(\cdot))(x).
\end{aligned}$$

Podemos concluir que o enésimo comutador $T((b(x) - b(\cdot))^n f(\cdot))(x)$ coincide com o operador C_n e, portanto, pertence a $\mathcal{L}(L^p(w^p), L^q(w^q))$. Isso completa a prova do lema.

□

As ideias apresentadas aqui, seguem a referência [1].

3.1.2 Exemplos de operadores aplicáveis do Teorema 3.2.1

Iremos apresentar uma série de exemplos de operadores integrais, bem como apresentar as estimativas com peso que possuem dependência ótima na característica do peso para cada um desses exemplos. No que segue, vamos supor que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (a classe de Schwartz) e, por conta disso, os operadores integrais que iremos apresentar podem todos ser rigorosamente definidos com o auxílio da teoria de distribuições temperadas; para mais detalhes, recomendamos os textos de Duoandikoetxea [21], Grafakos [27] e também as referências ([46] e [47]).

Operadores Integrais de Calderón-Zygmund

Definição 3.1.6. Diremos que $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\} \to \mathbb{C}$ é um núcleo padrão se existem constantes $A > 0$ e $\delta > 0$ tais que

I. $|K(x,y)| \leq A|x-y|^{-n}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq y$;

II. $|K(x,y)-K(z,y)| \leq A|x-z|^{\delta}(|x-y|+|z-y|)^{-n-\delta}$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|x-z| \leq \max\{|x-y|, |z-y|\}/2$;

III. $|K(x,y)-K(x,z)| \leq A|y-z|^{\delta}/(|x-y|+|x-z|)^{-n-\delta}$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|y-z| \leq \max\{|x-y|, |x-z|\}/2$.

A classe de todos os núcleos padrão do tipo acima associados a constantes positivas A e δ será denotado por $SK(A, \delta)$.

Vamos nos concentrar com o estudo dos operadores lineares contínuos $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ cujo núcleo de Schwartz coincide com algum núcleo padrão K

sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\}$; isso significa que podemos dar uma interpretação para a ação da distribuição $T(f)$ sobre uma função teste g (quando $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) como uma integral absolutamente convergente (quando os suportes de f e g não se intersectam). A definição abaixo será nosso guia nessa seção:

Definição 3.1.7. Damos $0 < \delta, A < \infty$ e $K \in SK(A, \delta)$, um operador linear contínuo $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é dito estar associado com o núcleo K se ele satisfaz

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\, dy$$

sempre que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $x \notin \operatorname{supp}(f)$. Além disso, para T que está associado com um núcleo padrão K, se T admite uma extensão contínua sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é, se existe $B > 0$ tal que T satisfaz a desigualdade

$$\|Tf\|_{L^2} \leq B \|f\|_{L^2}$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então diremos que T é um operador de Calderón-Zygmiind associado com o núcleo padrão K.

Exemplo 3.1.1. A *Transformada de Hilbert* $H : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ é o operador integral dado pela convolução com o núcleo $K(x) = 1/(\pi x)$ para x na reta real. Mais precisamente,

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} \text{pv} \int \frac{f(y)}{x-y} dy = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy, \quad \forall f \in S(\mathbb{R}), \tag{3.16}$$

no qual o processo limite acima é chamado de integral de valor principal. Usando a propriedade da transformada de Fourier de convoluções e o fato de que H se comporta como

$$Hf(x) = f * \frac{1}{\pi x}$$

no sentido das distribuições temperadas, temos que

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i \text{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi)$$

no qual $\text{sgn}(\xi)$ é a função sinal. Consideramos a norma L^2 de H dada por

$$\|Hf\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |Hf(x)|^2 dx$$

Pelo teorema de Plancherel temos que:

$$\|Hf\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{Hf}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |-i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\,,$$

e como $|-i\mathrm{sgn}(\xi)| = 1$ para todo $\xi \neq 0$ temos

$$\|Hf\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\,.$$

Logo, como podemos checar que todas as propriedades da **Definição 3.2.1** para a transformada de Hilbert, vemos que ela é um exemplo de operador de Calderón-Zygmund.

Exemplo 3.1.2 (As Transformadas de Riesz)**.** Seja $n \geq 2$ e $1 \leq j \leq n$. Para $f \in S(\mathbb{R}^n)$ defina

$$R_j f(x) = c_n \mathrm{pv} \int_{\mathbb{R}^\kappa} f(y) \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} dy, \tag{3.17}$$

no qual

$$c_n = \Gamma((n+1)/2)/\pi^{(n+1)/2}. \tag{3.18}$$

Novamente, o limite existe para todo $f \in S(\mathbb{R}^n)$ devido ao cancelamento de R_j que comuta com translações e dilatações, é limitado em L^2 e satisfaz

$$\widehat{(R_j f)}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi). \tag{3.19}$$

As transformadas de Riesz são de interesse na análise de equações diferenciais parciais. Considere o operador laplaciano como sendo

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Então para toda $f \in S(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = R_i R_j \Delta f.$$

Para prova isto, basta tomar a transformada de Fourier de ambos os lados e aplicar (3.19). Consequentemente

$$\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\Delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)};$$

o laplaciano controla todas as derivadas parciais de segunda ordem na norma L^2.

Para a classe dos operadores de Calderón-Zygmund com núcleos convolutivos e não-convolutivos, existe uma ampla teoria, iniciada nos trabalhos de Muckenhoupt e Whedden [40] descrevendo a continuidade desses operadores entre espaços de Lebesgue com peso. A problema da dependência precisa da norma $L^2(w)$ dos operadores de Calderón-Zygmund na característica de Muckenhoupt $[w]_{A_2}$ ficou conhecida como a **conjectura** A_2; ela foi resolvida por Tuomas Hytönen em [33], que provou que a estimativa ótima na característica A_2 é dada pela desigualdade

$$\|Tf\|_{L^2(w)} \leq C(T)[w]_{A_2}\|f\|_{L^2(w)}.$$

Pelo teorema sharp de extrapolação de Rubio de Francia devido a Dragicevic, Grafakos, Pereyra e Petermichl [19], a desigualdade acima implica que $L^p(w)$ é limitado, com

$$\|Tf\|_{L^p(w)} \leq C_p(T)[w]_{A_p}^{\max\{1,1/(p-1)\}}\|f\|_{L^p(w)},$$

para todo $1 < p < \infty$ no qual

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \left(\fint_Q w(x)\,dx\right)\left(\fint_Q w(x)^{1-p'}\,dx\right)^{p-1}.$$

Para mais detalhes, ver o artigo [33].

Operadores Integrais Fracionários

Definição 3.1.8. Diremos que $K_\nu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\} \to \mathbb{C}$ é um núcleo fracionário de ordem $0 < \nu < n$ se existem constantes $A > 0$ e $\delta > 0$ tais que

I. $|K_\nu(x,y)| \leq A|x-y|^{-n+\nu}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq y$;

II. $|K_\nu(x,y) - K_\nu(z,y)| \leq A|x-z|^\delta(|x-y|+|z-y|)^{-n+\nu-\delta}$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|x-z| \leq \max\{|x-y|, |z-y|\}/2$;

III. $|K_\nu(x,y) - K_\nu(x,z)| \leq A|y-z|^\delta(|x-y|+|x-z|)^{-n+\nu-\delta}$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|y-z| \leq \max\{|x-y|, |x-z|\}/2$.

A classe de todos os núcleos do tipo acima associados a constantes positivas A, ν e δ será denotado por $F(A, \delta, \nu)$.

Definição 3.1.9. Sejam $0 < \delta, A < \infty$, $0 < \nu < n$ e $K_\nu \in F(A, \delta, \nu)$, um operador linear contínuo $T_\mu : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é dito estar associado com o núcleo K_ν se ele satisfaz

$$T_\nu(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\nu(x, y) f(y)\, dy$$

sempre que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $x \notin \operatorname{supp}(f)$.

Exemplo 3.1.3. O *potencial de Riesz* I_ν, $0 < \nu < n$, é definido como

$$I_\nu f(x) = \frac{1}{c_\nu} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-(n-\nu)} f(y) dy, \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \tag{3.20}$$

no qual

$$c_\nu = \pi^{n/2} 2^\nu \frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma((n-\nu)/2)}\,.$$

Observe que, diferentemente dos dois exemplos anteriores, podemos interpretar a integral acima como um integral absolutamente convergente. De fato, podemos até mesmo interpretar I_ν como um operador de suavização, já que o mesmo é limitado de L^p em L^q para p e q satisfazendo $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\nu}{n}$, com $1 < p < \frac{\nu}{n}$ e $0 < \nu < n$. A ação de I_ν é suavizante no sentido de que $I_\nu f$ se comporta melhor localmente do que a função de entrada f, uma vez que $I_\nu f \in L^q$ sempre que $f \in L^p$ com $q > p$ de acordo com a escala $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\nu}{n}$. Essas estimativas são amplamente conhecidas e remontam aos trabalhos de Littlewood, Paley, Sobolev e Riesz [29, 30, 43, 45] na primeira metade do século XX.

Novamente, temos resultados precisos para a continuidade e dependência no controle da característica $A_{p,q}$ para essa classe de operadores em diversas situações. O seguinte resultado foi obtido por Michael T. Lacey, Kabe Moen, Carlos Pérez e Rodolfo H. Torres [36], além disso esta estimativa é sharp.

Teorema 3.1.2. *Sejam $1 < p < n/\alpha$ e q definida pela equação $1/q = 1/p - \alpha/n$, e seja $w \in A_{pq}$. Então*

$$\|I_\alpha f\|_{L^q(w^q)} \leq c[w]_{A_{pq}}^{(1-\alpha/n)\max\{1, p'/q\}} \|f\|_{L^p(w^p)}.$$

Operadores Pseudo-diferenciais

Definição 3.1.10. Diremos que $a \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ é um símbolo de ordem $m \in \mathbb{Z}$ se existem constantes $A_{\alpha,\beta} > 0$ associadas a cada par de multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tais que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leq A_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}, \ \ \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

A classe de todos os símbolos de ordem m será denotado por S^m.

Como no caso de operadores integrais singulares e de operadores integrais fracionários, vamos nos concentrar em dar uma definição suficientemente robusta sem entrarmos em grandes detalhes.

Definição 3.1.11. Dado um símbolo $a \in S^m$, um operador linear contínuo $P_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é dito um operador pseudo-diferencial associado ao símbolo $a(x,\xi)$ se ele satisfaz

$$P_a(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi, \ \ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Podemos checar com certo trabalho que, de fato, a integral na **Definição 3.1.11** é absolutamente convergente e infinitamente diferenciável. Um argumento utilizando integração por partes nos permite checar de fato que $P_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (como é feito, por exemplo, por Hounie [32]). Além disso, existe uma conexão íntima entre a teoria de operadores pseudo-diferenciais e a teoria de operadores integrais singulares, como pode ser visto em detalhes, por exemplo, no texto clássico de Stein [46].

Exemplo 3.1.4. Para uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o *potencial de Bessel* J^α de ordem α é definido pela fórmula:

$$J^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{-\alpha/2} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x.\xi}d\xi,$$

é um exemplo, bastante simples de um operador pseudo-diferencial. Aqui, ξ é a variável no espaço de Fourier, e $a(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}$ (não depende de x) é o símbolo do operador pseudo-diferencial. Este símbolo caracteriza o comportamento do operador no espaço de Fourier, e a operação $(1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}\widehat{f}(\xi)$ efetua uma suavização na função f. Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $J^\alpha f \in H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, significando que a aplicação do operador aumenta a regularidade da função. Uma pequena modificação da forma

$$Pf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{-\alpha/2} \psi(x)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x.\xi}d\xi$$

nos dá um outro exemplo (aqui $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$). Para mais detalhes sobre o potencial de Bessel, referenciamos o clássico de Stein [46] e para mais detalhes sobre a teoria de operadores pseudo-diferenciais o texto [47], também de Stein.

Diferentemente dos casos tratados acima, a literatura para cotas ótimas para operadores pseudo-diferenciais é mais escassa. O resultado abaixo é um exemplo que nos interessa, já que para $m < 0$, operadores pseudo-diferenciais se comportam como operadores suavizantes entre espaços de Sobolev e também agem como operadores integrais fracionários.

3.2 Prova do Teorema Principal

Teorema 3.2.1. *Seja $1 < p \leq q < \infty$, $T : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ um operador linear limitado, para qualquer $w \in A_{pq}$. Suponha ainda que existe uma função crescente $\psi : [1,\infty) \to [0,\infty)$ tal que:*

$$\|T(f)\|_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)} \leq \psi([w]_{A_{pq}}) \quad \forall f \in L^p(w^p). \tag{3.21}$$

Então existem constantes $a_n > 0$ e $b_n > 1$ independentes de $[w]_{A_{pq}}$, tal que

$$\|[b,T]\|_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)} \leq a_n\psi(b_n[w^r]_{A_{pq}})\|b\|_{BMO}, \quad b \in BMO(\mathbb{R}^n). \tag{3.22}$$

Demonstração. Seja z um número complexo qualquer e defina

$$T_z(f) = e^{zb}T(e^{-zb}f).$$

Pela discussão dos **Lemas 3.1.4 e 3.1.5** vemos que T_z é analítico em $z = 0$. Então, pelo teorema de representação de Cauchy, um cálculo fornece

$$[b,T](f) = \frac{d}{dz}T_z(f)|_{z=0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon} \frac{T_z(f)}{z^2}dz, \ \epsilon > 0.$$

Agora, usando a desigualdade de Minkowski para integrais, segue

$$\|[b,T]\|_{L^q(w^q)} \leq \frac{1}{2\pi\epsilon^2}\int_{|z|=\epsilon} \|T_z(f)\|_{L^q(w^q)}|dz|, \ \epsilon > 0. \tag{3.23}$$

Vamos analisar a norma interna $\|T_z(f)\|_{L^q(w^q)}$,

$$\|T_z(f)\|_{L^q(w^q)} = \|T(e^{-zb}f)\|_{L^q(w^q e^{qRe(zb)})}.$$

Para fazer isso, usamos a hipótese (3.21), isto é: T é limitado de $L^p(w^p)$ em $L^q(w^q)$ com $w \in A_{pq}$, e além disso

$$\|T(f)\|_{L^q(w^q)} \leq \psi([w]_{A_{pq}})\|f\|_{L^p(w^p)}, \ \ \forall f \in L^p(w^p).$$

Portanto devemos verificar condições para que $we^{Re(zb)} \in A_{pq}$, isto é, calcular

$$[we^{Re(zb)}]_{A_{pq}} = \sup_Q \left(\fint_Q w(x)^q e^{qRe(zb(x))}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\fint_Q w(x)^{-p'} e^{-p'Re(zb(x))}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Agora, como $w \in A_{pq}$ escolha um $r > 1$ tal que $w^r \in A_{pq}$. Usando isso e a desigualdade de Hölder, temos para um arbitrário Q, com $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, a seguinte desigualdade

$$\left(\fint_Q w(x)^q e^{qRe(zb(x))}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\fint_Q w(x)^{-p'} e^{-p'Re(zb(x))}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq \left(\fint_Q w(x)^{qr}\,dx\right)^{\frac{1}{qr}} \left(\fint_Q e^{qRe(zb(x))r'}\,dx\right)^{\frac{1}{r'q}}$$

$$\times \left(\fint_Q w(x)^{-p'r}\,dx\right)^{\frac{1}{rp'}} \left(\fint_Q e^{-p'Re(zb(x))r'}\,dx\right)^{\frac{1}{r'p'}}$$

$$\leq \left(\fint_Q w(x)^{qr}\,dx\right)^{\frac{1}{qr}} \left(\fint_Q w(x)^{-p'r}\,dx\right)^{\frac{1}{p'r}}$$

$$\times \left(\fint_Q e^{qRe(zb(x))r'} \, dx \right)^{\frac{1}{r'q}} \left(\fint_Q e^{-p'Re(zb(x))r'} \, dx \right)^{\frac{1}{r'p'}}$$

$$\leq [w^r]_{A_{pq}}^{\frac{1}{r}} [e^{Re(zr'b)}]_{A_{pq}}^{\frac{1}{r'}}.$$

Como $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ estamos em condições de aplicar o Lema 3.1.3, isto é

$$\text{se } |Re(zr')| \leq \frac{\alpha_n}{\|b\|_{BMO}} \min \left\{ \frac{1}{q}, \frac{1}{p'} \right\} \quad \text{então} \quad [e^{Re(zr')\cdot b}]_{A_{pq}} \leq \beta_n^{1/q-1/p+1}.$$

Assim, e como $r > 1$ e $1 < p \leq q < \infty$,

$$[we^{Re(zb)}]_{A_{pq}} \leq [w^r]_{A_{pq}}^{\frac{1}{r}} \beta_n^{(1/q-1/p+1)\frac{1}{r'}} \leq [w^r]_{A_{pq}} \beta_n.$$

Usando essa estimativa para z, e observando que $\|e^{-zb} f\|_{L^p(w^p e^{pRe(zb)})} = \|f\|_{L^p(w^p)}$,

$$\begin{aligned} \|T_z(f)\|_{L^q(w^q)} &= \|T(e^{-zb} f)\|_{L^q(w^q e^{qRe(zb)})} \\ &\leq \psi([we^{Re(zb)}]_{A_{pq}}) \|f\|_{L^p(w^p)} \leq \psi([w^r]_{A_{pq}} \beta_n) \|f\|_{L^p(w^p)}. \end{aligned}$$

Agora escolhendo o raio

$$\epsilon = \frac{\alpha_n}{r' \|b\|_{BMO}} \min \left\{ \frac{1}{q}, \frac{1}{p'} \right\},$$

podemos continuar estimando a norma em (3.23), isto é

$$\|[b, T](f)\|_{L^q(w^q)} \leq \frac{1}{2\pi\epsilon^2} \int_{|z|=\epsilon} \|T_z(f)\|_{L^q(w^q)} |dz|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi\epsilon^2} \int_{|z|=\epsilon} \psi([w^r]_{A_{pq}} \beta_n) \|f\|_{L^p(w^p)} |dz| = \frac{1}{\epsilon} \psi([w^r]_{A_{pq}} \beta_n) \|f\|_{L^p(w^p)},$$

no qual,

$$|Re(zr')| \leq r'|z| = r'\epsilon = \frac{\alpha_n}{\|b\|_{BMO}} \min \left\{ \frac{1}{q}, \frac{1}{p'} \right\}.$$

Finalmente, para esse ϵ,

$$\|[b, T]\|_{L^p(w^p) \to L^q(w^q)} \leq a_n \psi([w^r]_{A_{pq}} b_n) \|b\|_{BMO},$$

no qual $a_n = \frac{2^{n+2}}{\min\left\{\frac{1}{q}, \frac{1}{p'}\right\}} r'$ e $b_n = \beta_n$.

□

3.3 Aplicações

A vantagem em nossa formulação do teorema principal é que ele é suficientemente flexível para ser utilizado em uma grande variedade de situações. Vamos começar com uma aplicação básica, recuperando um resultado clássico (em seu formato essencialmente optimal) sobre a continuidade de comutadores de potenciais de Riesz e funções em $BMO(\mathbb{R}^n)$, quando esses estão agindo em espaços de Lebesgue com pesos. Iremos apresentar também uma versão mais fina do **Teorema 3.2.1** no caso especial em que $q = p'$, a prova segue de maneira análoga ao Teorema principal, e usaremos também a relação que a característica da classe de pesos $A_{pp'}$ tem com a classe de pesos A_2:

Corolário 3.3.1. Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos os seguintes resultados:

I . (Estimativa para o potencial de Riesz) Para cada $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ e cada $w \in A_{pq}$, obtemos

$$\|[b, I_\alpha]\|_{L^p(w^p) \to L^q(w^q)} \leq a_n (b_n [w]^r_{A_{pq}})^{(1-\alpha/n)\max\{1,p'/q\}} \|b\|_{BMO}.$$

II . (Comutadores interados) Sejam $T : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ um operador linear limitado, $w \in A_{pq}$ e $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$. Se definimos $T^0_b(f) = T(f)$, e para $k \geq 1$, o comutador de k-ésima ordem pela formula

$$T^k_b(f)(x) = T\left((b(x) - b)^k f\right)(x)\,,$$

se vale a estimativa

$$\|T(f)\|_{L^p(w^p) \to L^q(w^q)} \leq \psi([w]_{A_{pq}}) \;\; \forall f \in L^p(w^p)\,, \tag{3.24}$$

então existem constantes a_n e b_n independentes de $[w]_{A_{pq}}$, tal que

$$\|T^k_b\|_{L^p(w^p) \to L^q(w^q)} \leq a^k_n k! \psi(b_n [w]^r_{A_{pq}}) \|b\|^k_{BMO}.$$

O seguinte resultado foi obtido por Auscher e Martell em [3]:

Teorema (Auscher-Martell). *Dados* $0 < \alpha < n$ *e* $1 \leq p_0 < s_0 < q_0 \leq \infty$ *satisfazendo* $1/p_0 - 1/s_0 = \alpha/n$, *suponha que o operador linear* $T : L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \to L^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ *e que exista uma família de operadores sublineares* $\{A_r\}_r > 0$ *satisfazendo* $A_r : L^\infty_c(\mathbb{R}^n) \to L_{p_0}(\mathbb{R}^n)$. *Se*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T(I - A_{r(B)})f|^{s_0}dx\right)^{1/s_0} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j r(2^{j+1}B)\left(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f|^{p_0}dx\right)^{1/p_0}$$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T(A_{r(B)})f|^{q_0}dx\right)^{1/q_0} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \left(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f|^{s_0}dx\right)^{1/s_0}$$

valem para toda $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ *e toda bola* B, *onde* r_B *é o raio da bola, então para cada* $p_0 < p < q < q_0$ *satisfazendo* $1/p - 1/q = \alpha_n$ *e* $w \in A_{1+1/p_0-1/p} \cap RH_{q(q_0/q)'}$ *temos* $T : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ *se* $\sum_j \alpha_j < \infty$ *e também temos que a estimativa*

$$\|[b,T]f\|_{L^q(w^q)} \leq C\|f\|_{L^p(w^p)}\|b\|_{BMO}$$

é satisfeita para toda $f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ *se* $\sum_j j^k\alpha_j < \infty$ *para algum* $k \geq 1$.

Note que se $p_0 = 1$ e $q_0 = \infty$, então a condição w se torna $w \in A_{1+1/p'} \cap RH_q$, isto é $w \in A_{pq}$ [3, Prop.2.1]. Como um corolário imediato do **Teorema 3.2.1** temos o seguinte resultado:

Corolário 3.3.2. Sob as hipóteses do teorema acima, e considerando $p_0 = 1$ e $q_0 = \infty$, se $\sum_j \alpha_j < \infty$ segue que $[b,T] : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ é limitado.

O próximo resultado é uma versão mais fina do **Teorema 3.2.1** no caso especial em que $q = p'$, a prova segue de maneira análoga ao Teorema principal. Aqui usaremos também a relação que a característica da classe de pesos $A_{pp'}$ tem com a classe de pesos A_2.

Teorema 3.3.1. *Seja* $1 < p < 2$, $T : L^p(w^p) \to L^{p'}(w^{p'})$ *um operador linear contínuo, para qualquer* $w \in A_{pp'}$, *e suponha que exista uma função crescente* ψ :

$[1,\infty) \to [0,\infty)$ tal que:

$$\|T(f)\|_{L^{p'}(w^{p'})} \leq \psi([w]_{A_{pp'}})\|f\|_{L^p(w^p)}, \quad \forall \quad f \in L^p(w^p). \tag{3.25}$$

Então

$$\|[b,T]\|_{L^p(w^p)\to L^{p'}(w^{p'})} \leq C2^{2n}\psi(4[w]_{A_{pp'}}\beta_n)[w]_{A_{pp'}}^{p'}\|b\|_{BMO}\,, \tag{3.26}$$

*onde β_n é como no **Teorema 3.2.1**.*

Demonstração. Seja z um número complexo qualquer e defina

$$T_z(f) = e^{zb}T(e^{-zb}f).$$

Em (definição 3.1.5) vemos que T_z é analítica em $z = 0$. Então, pelo Teorema de representação de Cauchy, um cálculo fornece

$$[b,T](f) = \frac{d}{dz}T_z(f)|_{z=0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\epsilon}\frac{T_z(f)}{z^2}dz,\ \epsilon > 0.$$

Agora, pela desigualdade de Minkowski para integrais,

$$||[b,T](f)||_{L^{p'}(w^{p'})} \leq \frac{1}{2\pi\epsilon^2}\int_{|z|=\epsilon}||T_z(f)||_{L^{p'}(w^{p'})}|dz|,\ \epsilon > 0. \tag{3.27}$$

Vamos analisar a norma interna $||T_z(f)||_{L^{p'}(w^{p'})}$,

$$||T_z(f)||_{L^{p'}(w^{p'})} = ||T(e^{-zb}f)||_{L^{p'}(w^{p'}e^{p'Re(zb)})}.$$

Para fazer isso, usamos a hipótese principal: T é limitado de $L^p(w^p)$ em $L^{p'}(w^{p'})$ se $w \in A_{pp'}$, com

$$||T(f)||_{L^{p'}(w^{p'})} \leq \psi([w]_{A_{pp'}})||f||_{L^p(w^p)}.$$

Segue da definição que $we^{Re(zb)} \in A_{pp'} \Leftrightarrow w^{p'}e^{p'Re(zb)} \in A_2$ e

$$[we^{Re(zb)}]_{A_{pp'}}^{p'} = [w^{p'}e^{p'Re(zb)}]_{A_2}.$$

Portanto devemos verificar condições para que $w^{p'}e^{p'Re(zb)} \in A_2$, isto é, calcular

$$[w^{p'}e^{p'Re(zb)}]_{A_2} = \sup_Q\left(\fint_Q w(x)^{p'}e^{p'Re(zb(x))}\,dx\right)\left(\fint_Q w(x)^{-p'}e^{-p'Re(zb(x))}\,dx\right).$$

Como $w^{p'} \in A_2$ usando o Lema 3.1.2, se $r = r_{w^{p'}} = 1 + \frac{1}{2^{n+5}[w^{p'}]_{A_2}} < 2$, então

$$\left(\fint_Q w^{\pm p' r} dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq 2 \fint_Q w^{\pm p'} dx.,$$

pois $w^{-p'} \in A_2$ e $r_{w^{p'}} = r_{w^{-p'}}$. Usando isso e a desigualdade de Hölder, temos para um arbitrário Q,

$$\left(\fint_Q w(x)^{p'} e^{p' Re(zb(x))}\, dx\right)\left(\fint_Q w(x)^{-p'} e^{-p' Re(zb(x))}\, dx\right).$$

$$\leq \left(\fint_Q w(x)^{p' r}\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\fint_Q e^{p' Re(zb(x)) r'}\, dx\right)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\times \left(\fint_Q w(x)^{-p' r}\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\fint_Q e^{-p' Re(zb(x)) r'}\, dx\right)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\leq 4 \left(\fint_Q w(x)^{p'}\, dx\right) \left(\fint_Q w(x)^{-p'}\, dx\right)$$
$$\times \left(\fint_Q e^{p' Re(zb(x)) r'}\, dx\right)^{\frac{1}{r'}} \left(\fint_Q e^{-p' Re(zb(x)) r'}\, dx\right)^{\frac{1}{r'}}$$

$$\leq 4 [w^{p'}]_{A_2} [e^{p' Re(zr'b)}]_{A_2}^{\frac{1}{r'}}.$$

Assim, como $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ estamos em condições de aplicar Lema 3.1.1,

$$\text{se } |p' Re(zr')| \leq \frac{\alpha_n}{||b||_{BMO}} \ \text{ então } \ [e^{p' Re(zr'b)}]_{A_2} \leq \beta_n^2.$$

Para este z, e $1 < r < 2$,

$$[w^{p'} e^{p' Re(zb)}]_{A_2} \leq 4[w^{p'}]_{A_2} \beta_n^{\frac{2}{r'}} \leq 4[w^{p'}]_{A_2} \beta_n.$$

$$\Rightarrow [w e^{Re(zb)}]_{A_{pp'}}^{p'} \leq 4[w]_{A_{pp'}}^{p'} \beta_n \leq 4[w]_{A_{pp'}}^{p'} \beta_n^{p'}$$

$$\Rightarrow [w e^{Re(zb)}]_{A_{pp'}} \leq 4[w]_{A_{pp'}} \beta_n.$$

Usando essa estimativa para z, e observando que $||e^{-zb}f||_{L^p(w^p e^{pRe(zb)})} = ||f||_{L^p(w^p)}$,

$$||T_z(f)||_{L^{p'}(w^{p'})} = ||T(e^{-zb}f)||_{L^q(w^{p'}e^{p'Re(zb)})} \leq \psi(4[w]_{A_{pp'}}\beta_n)||f||_{L^p(w^p)}.$$

Tomando o raio

$$\epsilon = \frac{\alpha_n}{p'r'||b||_{BMO}},$$

podemos continuar estimando a norma em (3.27):

$$||[b,T]||_{L^{p'}(w^{p'})} \leq \frac{1}{2\pi\epsilon^2}\int_{|z|=\epsilon} ||T_z(f)||_{L^{p'}(w^{p'})}|dz|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi\epsilon^2}\int_{|z|=\epsilon} \psi(4[w]_{A_{pp'}})||f||_{L^p(w^p)}|dz| = \frac{1}{\epsilon}\psi(4[w]_{A_{pp'}}\beta_n)||f||_{L^p(w^p)},$$

onde

$$|p'Re(zr')| \leq p'r'|z| = p'r'\epsilon = \frac{\alpha_n}{||b||_{BMO}}.$$

Finalmente, para esse ϵ,

$$||[b,T]||_{L^p(w^p)\to L^{p'}(w^{p'})} \leq C2^{2n}\psi(4[w]_{A_{pp'}}\beta_n)[w]_{A_{pp'}}^{p'}||b||_{BMO},$$

pois $r' = 1 + 2^{n+5}[w^{p'}]_{A_2} \approx 2^n[w^{p'}]_{A_2} = 2^n[w]_{A_{pp'}}^{p'}$, e $\alpha_n = \frac{1}{2^{n+2}}$.
Observe que o raio optimal é essencialmente o inverso de $[w]_{A_{pp'}}^{p'}||b||_{BMO}$. Isso prova o teorema. $\square$

Corolário 3.3.3. Assuma que $0 < m < n$ e $1/q = 1/p - m/n$ e considere P_a um operador pseudo-diferencial com símbolo $a \in S^{-m}$. Então, para cada $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ e cada $w \in A_{pq}$, existe uma $\Phi : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ crescente tal que

$$\|[b,P_a]\|_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)} \leq C_n\Phi([w]_{A_{pq}}, m)\|b\|_{BMO}.$$

A demonstração de que dispomos do teorema acima, que é uma simples concatenação do primeiro item do **Teorema 3.3.1** com as estimativas existentes para operadores pseudo-diferenciais, infelizmente não parece nos fornecer uma cota ótima para Φ; por conta disso não nos dedicamos a uma expressão exata desse resultado no enunciado acima.

3.4 Comentários Finais

Observação Importante. Cabe ressaltar aqui mais uma vez que ideia da prova do teorema principal é baseada nos resultados de [13] a prova é muito similar do teorema obtido no artigo de Cruz-Uribe e Moen [16], ao menos no caso de potenciais de Riesz. Apesar disso, a nossa prova nos proporciona resultados novos, como pode ser constatado na seção anterior e, além disso, ele nos levou a uma série de problemas interessantes e que, aparentemente, podem ser coletivamente atacados da mesma forma, obtendo assim resultados novos a respeito de comutadores para amplas classes de operadores. Abaixo iremos indicar os principais tipos de questões que podem ser trabalhadas:

Problema 1. Dado $b \in I_1(BMO)$ isso implica que existe um $s > 0$ tal que $e^{sb} \in A_p$? É sabido que para $w \in A_p$, então $b = \log w \in BMO$. Se $b \in I_1(BMO) \Rightarrow e^{sb} \in A_p$, então $sb \in BMO$, isto é, $b \in I_1(BMO) \Rightarrow b \in BMO$, que já é uma conclusão nada óbvia e que, possivelmente, é um indicativo que esse resultado seja falso ou que a classe de pesos que satisfazem tal propriedade é muito pequena. Se isso for verdade, podemos reproduzir a prova do resultado acima e obter uma nova demonstração de certos resultados conhecidos sobre diferenciação de operadores integrais singulares.

Problema 2. Um resultado muito interessante obtido por Margaret Murray em [41], nos diz que se T é a transformada de Hilbert e se I_{-s} denota a derivada fracionária de ordem s, ou seja, o operador definido pela relação

$$\widehat{I_{-s}f}(\xi) = c_{d,s}|\xi|^s \widehat{f}(\xi)\,,$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então o comutador

$$C_b(T)f(x) \doteq [b, I_{-s}T]f(x)$$

leva continuamente $L^p(\mathbb{R})$ em $L^p(\mathbb{R})$ quando $b \in I_s(BMO)$. Um teorema de Steve Hofmann [31] nos dá condições para que tenhamos uma versão $L^2(w)$ desse mesmo resultado para toda $w \in A_2$. Em particular, podemos aplicar o teorema de extrapolção de Rubio de Francia e obter uma versão do teorema de Murray no contexto de pesos; a única restrição de que o teorema de Hofmann pede condições adicionais sobre o tamanho de s). A pergunta natural nesse caso então é: determinar qual a precisa relação entre s e a característica A_p do peso envolvido? Podemos também nos questionar o que acontece nos *endpoints*, ou seja, quando tratamos dos $L^1 \to L^{1,\infty}$ ou $H^1 \to L^1$. Existe um resultado recente, no caso de espaços sem peso, devido a Chen, Ding and Hong [12] que dá condições necessárias e suficientes para termos $C_b(T) : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to BMO(\mathbb{R}^n)$ e $C_b(T) : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ quando T é um dos núcleos variáveis de Calderón-Zygmund [20].

Problema 3. Podemos estender esse tipo de teorema para uma classe mais geral de espaços? Os resultados de Michalowski, Rule and Staubach [39] para operadores pseudo-diferenciais são um bom indicativo de que esse deve ser o caso. Dificuldades técnicas novas devem aparecer, mas problemas importantes estão relacionados com essa linha de problemas; por exemplo, existe uma conexão direta com o **Problema 1**: é verdade que para $r > s$

$$[b, I_{-s}T] : L^p(w) \to W^{r-s,p}(w)\,, \text{ when } w \in A_p \text{ and } b \in I_r(BMO)\,?$$

Se esse resultado for verdadeiro, qual o comportamento da característica A_p dos pesos em termos de s?

4 APÊNDICE A

Lema 4.0.1. Sabendo que a satisfaz $\frac{1}{\widetilde{\beta}} = a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{\beta_0}$, onde $\widetilde{\beta} = \frac{(q+k)}{\alpha}$, e $\beta_0 = \frac{q}{2\alpha}$, com $\alpha = \frac{p+q-2}{p}$. Então vale

$$\frac{a\widetilde{\beta}}{p} < 1 \Leftrightarrow \frac{q}{2} > \frac{n(k-(p-2))}{p}.$$

Demonstração. Note que

$$\frac{1}{\widetilde{\beta}} = a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{\beta_0} \tag{4.1}$$

$$\Leftrightarrow 1 = a\widetilde{\beta}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + (1-a)\frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0} = a\widetilde{\beta}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{\beta_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0} - 1 = a\widetilde{\beta}\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right) > 0.$$

Portando, usando (4.1)

$$a\widetilde{\beta} < p \Leftrightarrow \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0} - 1 < p\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right) \tag{4.2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0} - 1 < -1 + \frac{p}{n} + \frac{p}{\beta_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0} < \frac{p}{n} + \frac{p}{\beta_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\widetilde{\beta} - p}{\beta_0} < \frac{p}{n}.$$

Substituindo $\widetilde{\beta}, \beta_0$ obtemos $\frac{\widetilde{\beta}-p}{\beta_0} = \frac{2(k-(p-2))}{q}$. Voltando a (4.2), temos

$$a\widetilde{\beta} < p \Leftrightarrow \frac{\widetilde{\beta} - p}{\beta_0} < \frac{p}{n} \tag{4.3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(k-(p-2))}{q} < \frac{p}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(k-(p-2))}{p} < \frac{q}{2}.$$

$\square$

Vamos determinar as seguintes expressões:

1. $\frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})}$;

2. $(1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)$.

Já vimos as seguintes relações:

$$\alpha = \frac{p+q-2}{p} \tag{4.4}$$

$$\beta = \frac{pq}{p+q-2} \tag{4.5}$$

$$\beta_0 = \frac{pq}{2(p+q-2)} \tag{4.6}$$

$$\widetilde{\beta} = \frac{p(q+k)}{p+q-2} \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{\widetilde{\beta}} = a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)+(1-a)\frac{1}{\beta_0} \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{\beta} = b\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)+(1-b)\frac{1}{\beta_0}. \tag{4.9}$$

Vamos começar;

1. $\frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})}$ =? Temos,

$$\frac{1}{\widetilde{\beta}} = a\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)+(1-a)\frac{1}{\beta_0}$$

$$\Leftrightarrow 1 = a\widetilde{\beta}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}-\frac{1}{\beta_0}\right)+\frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0}-1 = a\widetilde{\beta}\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow a\widetilde{\beta} = \frac{\left(\frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0}-1\right)}{\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right)}. \tag{4.10}$$

Assim,

$$q(p-a\widetilde{\beta}) = q\left(p-\frac{\left(\frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0}-1\right)}{\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right)}\right), \tag{4.11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{1}{q\left(p - \frac{\left(\frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0}-1\right)}{\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right)}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right)}{q\left(p\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right) - \left(\frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0}-1\right)\right)}$$

de maneira análoga a (4.10), segue

$$b\beta = \frac{\left(\frac{\beta}{\beta_0}-1\right)}{\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right)}. \tag{4.12}$$

De (4.11) e (4.12), tem-se

$$\frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{\left(\frac{\beta}{\beta_0}-1\right)}{\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right)} \frac{\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right)}{q\left(p\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right) - \left(\frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0}-1\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{\left(\frac{\beta}{\beta_0}-1\right)}{q\left(p\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right) - \left(\frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0}-1\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{\frac{1}{\beta_0}(\beta-\beta_0)}{\frac{q}{\beta_0}\left(p\beta_0\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right) - \widetilde{\beta}+\beta_0\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{(\beta-\beta_0)}{q\left(p\beta_0\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right) - \widetilde{\beta}+\beta_0\right)}, \quad \text{obs: } \beta_0 = \frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{\beta_0}{q\beta_0\left(p\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right) - \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0}+1\right)}, \quad \text{obs: } \frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0} = \frac{2(q+k)}{q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{1}{q\left(p\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right) - \frac{2(q+k)}{q}+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{1}{pq\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right) - 2(q+k)+q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{1}{-q+\frac{pq}{n}+pq\frac{2\alpha}{q} - 2(q+k)+q}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{1}{\frac{pq}{n}+2\alpha p - 2(q+k)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{n}{pq + 2n\alpha p - 2n(q+k)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{n}{pq + 2n(p+q-2) - 2n(q+k)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\beta}{q(p-a\widetilde{\beta})} = \frac{n}{pq - 2n(k-p+2)}. \tag{4.13}$$

2. $(1-b) + \frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)$. ? Temos

$$(1-b) + \frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a) = \frac{p(1-b) + (b\widetilde{\beta} - a\widetilde{\beta})}{p-a\widetilde{\beta}} \tag{4.14}$$

De (4.10), (4.11) e (4.12), segue

$$a\widetilde{\beta} = \frac{\left(\frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0} - 1\right)}{\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right)},$$

$$b\widetilde{\beta} = \frac{\frac{\widetilde{\beta}}{\beta}}{\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right)},$$

$$\Rightarrow (b\widetilde{\beta} - a\widetilde{\beta}) = \frac{\left(1 - \frac{\widetilde{\beta}}{\beta}\right)}{\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right)}$$

$$\frac{1}{p-a\widetilde{\beta}} = \frac{\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right)}{p\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right) - \left(\frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0} - 1\right)}$$

e um calculo simples mostra;

$$p(1-b) = \frac{p\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right)}{\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right)}$$

Substituindo essas expressões acima em (4.14), obtemos

$$(1-b) + \frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a) = \frac{p(1-b) + (b\widetilde{\beta} - a\widetilde{\beta})}{p-a\widetilde{\beta}} =$$

$$\left\{ \frac{p\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right)}{\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right)} + \frac{\left(1 - \frac{\widetilde{\beta}}{\beta}\right)}{\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right)} \right\} \times \frac{\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right)}{p\left(-\frac{1}{p} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_0}\right) - \left(\frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0} - 1\right)}$$

$$\Leftrightarrow (1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)=\frac{p\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{\widetilde{\beta}}{\beta}\right)}{p\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right)-\left(\frac{\widetilde{\beta}}{\beta_0}-1\right)}$$

$$\Leftrightarrow (1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)=\frac{\frac{p}{\beta pn}\left(np-n\beta+p\beta\right)+\frac{1}{\beta}\left(\beta-\widetilde{\beta}\right)}{\frac{1}{\beta_0}\left(p\beta_0\left(-\frac{1}{p}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_0}\right)-\widetilde{\beta}+\beta_0\right)}$$

$$\Leftrightarrow (1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)=\frac{\frac{1}{\beta n}\left(np-n\beta+p\beta+n\beta-n\widetilde{\beta}\right)}{\frac{1}{\beta_0}\left(-\beta_0+\frac{p\beta_0}{n}+p-\widetilde{\beta}+\beta_0\right)}$$

$$\Leftrightarrow (1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)=\frac{\frac{1}{\beta n}\left(np+p\beta-n\widetilde{\beta}\right)}{\frac{1}{\beta_0}\left(\frac{p\beta_0}{n}+p-\widetilde{\beta}\right)},\quad \beta_0=2\beta$$

$$\Leftrightarrow (1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)=\frac{\frac{1}{2n}\left(np+p\beta-n\widetilde{\beta}\right)}{\left(\frac{p\beta_0}{n}+p-\widetilde{\beta}\right)}$$

$$\Leftrightarrow (1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)=\frac{\frac{1}{2n}\left(np+p\beta-n\widetilde{\beta}\right)}{\frac{1}{n}\left(p\beta_0+np-n\widetilde{\beta}\right)}$$

$$\Leftrightarrow (1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)=\frac{\frac{1}{2}\left(np+\frac{pq}{\alpha}-\frac{n(q+k)}{\alpha}\right)}{\left(\frac{pq}{2\alpha}+np-\frac{n(q+k)}{\alpha}\right)}$$

$$\Leftrightarrow (1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)=\frac{\frac{1}{2\alpha}\left(np\alpha+pq-n(q+k)\right)}{\frac{1}{2\alpha}\left(pq+2np\alpha-2n(q+k)\right)}$$

$$\Leftrightarrow (1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)=\frac{np\alpha+pq-n(q+k)}{pq+2np\alpha-2n(q+k))}.$$

Lembrando que $\alpha=\frac{p+q-2}{p}$, segue

$$(1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)=\frac{n(p+q-2)+pq-n(q+k)}{pq+2n(p+q-2)-2n(q+k))}$$

$$(1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)=\frac{pq-n(k-(p-2))}{pq-2n(k-(p-2))}$$

Assim, concluímos,

$$(1-b)+\frac{b\widetilde{\beta}}{p-a\widetilde{\beta}}(1-a)=1+\frac{n(k-(p-2))}{pq-2n(k-(p-2))}$$

5 APÊNDICE B: ANÁLISE

5.1 Espaços L^p

Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis de X em $\mathbb{K}$ tais que

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$$

será denotado por $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$.

Notação. Seja $1 \leq p \leq \infty$; denotamos por p' o expoente conjugado

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Teorema 5.1.1. *(Desigualdade de Hölder para integrais) Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ e $q \in \mathcal{L}^q(X, \Sigma, \mu)$, então $fg \in \mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demonstração. O caso $\|f\|_{L^p} = 0$ ou $\|g\|_{L^q} = 0$ é simples. Suponha então $\|f\|_{L^p} \neq 0 \neq \|g\|_{L^q}$. Primeiro é conveniente mostrar que para quaisquer a e b positivos, temos

$$a^{1/p} \cdot b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{5.1}$$

Para tanto, considere, para cada $0 < \alpha < 1$, a função $f = f_\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^\alpha - \alpha t$. Note que f tem um máximo em $t = 1$ e portanto $t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha)$ para todo $t > 0$. Fazendo $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$ obtém-se (5.1). É claro que (5.1) também é válida se $a = 0$ ou $b = 0$. Tomando

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} \quad \text{e} \quad b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q}$$

em (5.1), o resultado segue. □

Teorema 5.1.2. *(Desigualdade de Minkowski para integrais) Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* (X, Σ, μ) *um espaço de medida. Se* $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$*, então* $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ *e*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \tag{5.2}$$

Demonstração. Se $p = 1$ ou $\|f+g\|_{L^p} = 0$, o resultado é claro. Podemos então supor $\|f + g\|_{L^p} \neq 0$ e $p > 1$. Perceba que para todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\ &= 2^p (\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p), \end{aligned}$$

e daí segue que $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$. Agora vamos provar (5.2). Observe primeiro que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq |f(x) + g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \\ &\leq |f(x) + g(x)|^{p-1}(|f(x)| + |g(x)|) \\ &= |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \end{aligned} \tag{5.3}$$

para todo $x \in X$. Tomando $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ temos $(p-1)q = p$, e portanto $|f + g|^{p-1} = |f + g|^{p/q} \in \mathcal{L}^q(X, \Sigma, \mu)$. Da desigualdade de Hölder, temos

$$\int_X |f||f + g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q}.$$

$$\int_X |g||f + g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q}.$$

Somando as duas desigualdades acima e combinando com (5.3) temos

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1/q} \left[\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p} \right],$$

e dividindo ambos os membros por $\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1/q}$, o resultado segue. □

Note que $\|\cdot\|_{L^p}$ não é, em geral, uma norma em $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$, pois pode ocorrer $\|f\|_{L^p} = 0$ para f não identicamente nula. De modo geral, se (X, Σ, μ) é um espaço de medida, introduzimos uma relação de equivalência dizendo que duas funções $f, g : X \to \mathbb{K}$ são equivalentes se $f = g$ μ-quase sempre, isto é, se existe um conjunto $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \notin A$. Denotando a classe de equivalência de uma função f por $[f]$, é imediato que no conjunto quociente

$$L^p(X, \Sigma, \mu) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu\})$$

as operações

$$[f] + [g] = [f + g] \quad \text{e} \quad c[f] = [cf]$$

estão bem definidas e tornam $L^p(X, \Sigma, \mu)$ um espaço vetorial. Além disso, definindo

$$\|[f]\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$$

corrigimos o que faltava para $\|\cdot\|_{L^p}$ ser uma norma. Assim $(L^p(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_{L^p})$ é um espaço vetorial normado.

Teorema 5.1.3. *Se $1 \leq p < \infty$, então $L^p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|[f]\|_{L^P} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Demonstração. Ver [5]. □

Para mais detalhes, recomendados os textos [5, 27]

5.2 Espaço de Schwartz

Definição 5.2.1. O espaço de Schwartz ou espaço de funções de decaimento rápido em $\mathbb{R}^n$, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é a coleção das $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tais que

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

equipada com a família de semi-normas

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta f)(x)| < \infty$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, aqui $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ e $D^\beta = \partial_1^{\beta_1} \partial_2^{\beta_2} \ldots \partial_n^{\beta_n}$.

A classe de Schwartz não é um espaço vetorial normado no sentido usual porque não é possível definir uma única norma $\| \cdot \|$ que capture completamente a estrutura do espaço de Schwartz. Em vez disso, a classe de Schwartz é um espaço vetorial topológico, cuja topologia é definida por uma família de seminormas

Definição 5.2.2. (*Convergência na Classe de Schwartz*). Uma sequência de funções $(f_k) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, para todo multi-índice α e β, as seguintes normas tendem a zero:

$$\|f_k - f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta (f_k(x) - f(x))|$$

ou seja $f_k \to f$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ significa que f_k converge para f com respeito a todas as seminormas $\| \cdot \|_{\alpha,\beta}$.

Definição 5.2.3. Um funcional linear continuo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dito uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas é denotado por $\mathcal{S}'$.

Teorema 5.2.1. *Se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Aqui $\widehat{\phi}$ denota a transformada de Fourier de ϕ, dado por*

$$\widehat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-2\pi x \cdot \xi} dx.$$

Demonstração. Ver [49]. □

Teorema 5.2.2. *Se $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\phi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Aqui $h = \phi * \psi$ denotada a convolução de ϕ e ψ, dada por*

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y)\psi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\psi(x-y) dy.$$

Demonstração. Ver [49]. □

Algumas das propriedades de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e de sua topologia são expressas no seguinte Teorema.

Teorema 5.2.3. *Valem as seguintes proposições:*

1. *A aplicação* $\phi(x) \to x^\alpha D^\beta \phi(x)$ *é continua em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. *Se* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *então* $\lim_{h\to 0} \tau_h\phi(x) = \phi$ *em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

3. *Se* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e* $h = (0, \ldots, h_i, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *então o seguinte limite ocorre em em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
$$\frac{\phi - \tau_h\phi}{h_i} \to \frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \quad \textit{quando} \quad |h| \to 0.$$

4. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço métrico.*

5. *A transformada de Fourier é um isomorfismo de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

6. *O espaço* C_c^∞ *é denso em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

7. *O espaço* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *para* $1 \leq p < \infty$.

8. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço separável.*

Demonstração. Ver [49]. □

5.3 Teorema de Decomposição de Calderón-Zygmund

Nesta seção apresentamos algumas definições e resultados básicos sobre a teoria de decomposição de Calderón-Zygmund, para mais detalhes, recomendamos os capítulos I e II do texto [46].

Teorema 5.3.1. *Seja* F *um conjunto fechado não vazio em* $\mathbb{R}^n$. *Então podemos escrever* $F^c = \Omega$ *como união enumerável de cubos fechados* Q_k *(não-degenerados), com interiores disjuntos* $\Omega = \bigcup Q_k$, *tais que seus diâmetros sejam comparáveis às suas distâncias a* F, *isto é, existem constantes* c_1, c_2, *tais que:*

$$c_1 \cdot diam(Q_k) \leq dist(Q_k, F) \leq c_2 \cdot diam(Q_k) \quad \forall k.$$

De fato, podemos tomar $c_1 = 1$ *e* $c_2 = 4$.

Demonstração. Considere M_0 uma malha de cubos unitários com vértices em $\mathbb{Z}^n$, defina

$$M_k = 2^{-k} M_0, \quad k \in \mathbb{Z}$$

um cubo diádico com vértice $2^k \in \mathbb{Z}$. Seja

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k$$

onde

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega : c \cdot 2^{-k} \leq dist(x, F) \leq c \cdot 2^{-k+1} \right\},$$

c será uma constante escolhida adiante. Agora defina

$$\mathcal{F} = \{\text{coleção dos cubos diádicos } \ Q : Q \in M_k \ \text{ e } \ Q \cap \Omega_k \neq \emptyset\},$$

se $Q \in M_k$ então $diam(Q) = \sqrt{n} 2^{-k}$. Note que

$$\Omega \subset \bigcup_{\mathcal{F}} Q,$$

se $Q \in \mathcal{F}$, existe $x \in Q \cap \Omega_k$ e $Q \in M_k$

$$dist(Q, F) \leq dist(x, F) \leq c \cdot 2^{-k+1},$$

por outro lado

$$dist(Q, F) \geq dist(x, F) - diam(Q) \geq c \cdot 2^{-k} - \sqrt{n} 2^{-k},$$

tomando $c = 2\sqrt{n}$, tem-se

$$diam(Q) \leq dist(Q, F) \leq 4 \cdot diam(Q).$$

Portanto $\Omega = \bigcup_{\mathcal{F}} Q$. Para cada cubo $Q \in \mathcal{F}$ tome $Q' \in \mathcal{F}$ maximal tal que $Q \subset Q'$ (está bem definida peça última desigualdade)

$$\Omega = \bigcup_{\mathcal{F}} Q'.$$

$\square$

Teorema 5.3.2. *(Decomposição de Calderón-Zygmund- versão I) Seja f uma função não-negativa e integrável em $\mathbb{R}^n$ e seja $\alpha > 0$ um constante. Existe uma decomposição em $\mathbb{R}^n$ tal que:*

- $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega, \quad F \cap \Omega = \emptyset.$
- $f(x) \leq \alpha$ *quase todo ponto em F.*
- $\Omega = \bigcup Q_k$, $Q_{k's}$ *cubos com interiores disjuntos, e para cada Q_k, temos*

$$\alpha < \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} f(x)dx \leq 2^n \alpha$$

Demonstração. Considere a malha diádica $M_k = 2^{-k} M_0$, escolha k_0 muito pequeno, de modo que $\forall Q \in M_{k_0}$ tem-se

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q f(x)dx \leq \alpha.$$

Nós o dividimos em 2^n cubos congruentes.

- Se $\frac{1}{m(Q')} \int_{Q'} f(x)dx > \alpha$, escolha Q' para sua decomposição.
- Se $\frac{1}{m(Q')} \int_{Q'} f(x)dx \leq \alpha$, não escolha Q' para sua decomposição.

Ao final, obtemos $\Omega = \bigcup Q'_k$, e para cada Q'_k, segue

$$\alpha < \frac{1}{m(Q'_k)} \int_{Q'_k} f(x)dx \leq \frac{m(Q_k)}{m(Q'_k)} \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} f(x)dx \leq 2^n \alpha.$$

Em $F = \Omega^c$, se $x \in F$, existe uma sequência Q_j, com $diam(Q_j) \to 0$, $x \in Q_j$

$$\frac{1}{m(Q_j)} \int_{Q_j} f(y)dy \leq \alpha,$$

Teorema da Diferenciação de Lebesgue, implica que $f(x) \leq \alpha$ quase todo ponto $x \in F$. □

Teorema 5.3.3. *(Decomposição de Calderón-Zygmund- versão II) Seja f uma função não-negativa e integrável $\mathbb{R}^n$ e uma constante $\alpha > 0$. Existe uma decomposição em $\mathbb{R}^n$, tal que:*

- *$\mathbb{R}^n = F \cup \Omega, \quad F \cap \Omega = \emptyset, \quad F$ é fechado*

- *$f(x) \leq \alpha$ quase todo ponto em F.*

- *$\Omega = \bigcup Q_k$, $Q_{k's}$ cubos fechados com interiores disjuntos, de modo que*

$$m(\Omega) \leq \frac{A}{\alpha}\|f\|_{L^1}; \qquad \frac{1}{m(Q_k)}\int_{Q_k} f(x)dx \leq B \cdot \alpha,$$

onde A e B são constantes que só dependem da dimensão.

Demonstração. Ver [46]. □

5.4 Espaços de Hölder

Suponha que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $0 < \gamma \leq 1$. Começamos considerando a classe de funções contínuas de Lipschitz $u : U \to \mathbb{R}$, que por definição satisfazem a estimativa

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \quad (x, y \in U) \tag{5.4}$$

para alguma constante $C > 0$. Note que (5.4) implica, naturalmente, que u é contínua e, mais importante, fornece um módulo uniforme de continuidade. Revela-se útil considerar também funções u que satisfazem uma variante de (5.4), nomeadamente

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma \quad (x, y \in U) \tag{5.5}$$

para algum $0 < \gamma \leq 1$ e uma constante $C > 0$. Tal função é dita ser Hölder contínua com expoente γ.

Definição 5.4.1. Se $u : U \to \mathbb{R}$ é limitado e contínuo, escrevemos

$$\|u\|_{C(\overline{U})} = \sup_{x \in U} |u(x)|.$$

A seminorma γ^{th}-Hölder de $u : U \to \mathbb{R}$ é

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \sup_{x,y \in U} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}, \quad x \neq y$$

e a norma γ^{th}-Hölder é

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} = \|u\|_{C(\overline{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}.$$

Definição 5.4.2. O espaço de Hölder

$$C^{k,\gamma}(\overline{U})$$

consiste de todas as funções $u \in C^k(\overline{U})$ para qual a norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{U})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{U})}. \tag{5.6}$$

é finita.

Então o espaço $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ consiste naquelas funções u que são k-vezes continuamente diferenciáveis e cujas derivadas parciais de ordem k^{th} são limitadas e contínuas de Hölder com expoente γ. Tais funções são bem comportadas e, além disso, o próprio espaço $C^{k,\gamma}(\overline{U})$ possui uma boa estrutura matemática.

5.5 Espaços de Sobolev

Os espaços de Hölder introduzido anteriormente, infelizmente não são frequentemente configurações adequadas para a teoria de EDP elementar, pois normalmente não conseguimos fazer estimativas analíticas boas o suficiente para demonstrar que as soluções que construímos realmente pertencem a tal espaço. O que é necessário são alguns outros tipos de espaços, contendo funções menos suaves. Na prática, devemos encontrar um equilíbrio, projetando espaços que compreendem funções que têm algumas, mas não muito, propriedades de suavidade.

5.5.1 Derivadas fracas

Começamos por enfraquecer substancialmente a notação de derivadas parciais.

Notação. Definimos $C_c^\infty(U)$ como sendo o espaço das funções infinitamente diferenciável $\phi : U \to \mathbb{R}$, com suporte compacto em U. Às vezes chamaremos uma função ϕ pertencente a $C_c^\infty(U)$ de função de teste.

Motivação para definição de derivada fraca. Suponha que nos é dado uma função $u \in C^1(U)$. Então se $\phi \in C_c^\infty(U)$, vemos pela fórmula de integração por partes que

$$\int_U u\phi_{x_i} dx = -\int_U u_{x_i}\phi dx \quad (i = 1, ..., n). \tag{5.7}$$

Não há termos de contorno, uma vez que ϕ tem suporte compacto em U e, portanto, desaparece perto de ∂U. Mais geralmente, se k é um inteiro positivo, $u \in C^k(U)$, e $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é um multiíndice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$, então

$$\int_U uD^\alpha\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u\phi dx. \tag{5.8}$$

Essa igualdade se mantém desde

$$D^\alpha\phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\phi$$

e podemos aplicar a fórmula (5.7) $|\alpha|$ vezes.

Examinamos a seguir a fórmula (5.8), válida para $u \in C^k(U)$, e perguntamos se alguma variante dela ainda pode ser verdadeira mesmo se u não for k vezes continuamente diferenciável. Note que, o lado esquerdo de (5.8) faz sentido se u for apenas localmente integrável: o problema é que u não é $C^k(U)$, então a expressão $D^\alpha u$ no lado direito de (5.8) não tem significado óbvio. Resolvemos essa dificuldade perguntando se existe uma função localmente integrável v para a qual a fórmula (5.8) é válida, com v substituindo $D^\alpha u$:

Definição 5.5.1. Suponha $u, v \in L^1_{loc}(U)$ e α é um multiíndice. Dizemos que v é a derivada parcial fraca de ordem α^{th} de u, escrevemos

$$D^\alpha u = v,$$

se

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx \tag{5.9}$$

para todas as funções testes $\phi \in C_c^\infty(U)$.

Em outras palavras, se nos for dado u e se existir uma função v que verifica (5.9) para todo ϕ, dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco, se não existir tal função v, então u não possui uma derivada parcial fraca de ordem α^{th}.

Lema 5.5.1. (*Unicidade da derivada fraca*). Uma derivada parcial fraca d ordem α^{th} de u, se existir, é definida exclusivamente até um conjunto de medida zero.

Demonstração. Assuma que $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(U)$ satisfaz

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \tilde{v} \phi dx$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(U)$. Então

$$\int_U (v - \tilde{v}) \phi dx = 0$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(U)$, de onde $v - \tilde{v} = 0$ quase todo ponto. $\square$

5.5.2 Definição de espaço de Sobolev

Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e seja k um inteiro não negativo. Definimos agora certos espaços de funções, cujos membros têm derivadas fracas de várias ordens situadas em vários espaços L^p.

Definição 5.5.2. O espaço de Sobolev

$$W^{k,p}(U)$$

consiste em todas as funções integráveis localmente $u : U \to \mathbb{R}$ tal que para cada multiíndice α com $|\alpha| \leq k,\ D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(U)$.

Observação 5.5.1. Se $p = 2$, usualmente escrevemos

$$H^k(U) = W^{k,2}(U) \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Definição 5.5.3. Se $u \in W^{k,p}(U)$, definimos sua norma como sendo

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}, \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(U)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname*{ess\,sup}_U |D^\alpha u|.$$

Definição 5.5.4. Seja $\{u_m\}_{m=1}^\infty, u \in W^{k,p}(U)$. Dizemos que u_m converge para u em $W^{k,p}(U)$, escrevemos

$$u_m \to u \ \text{ em } \ W^{k,p}(U),$$

se

$$\lim_{m \to \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0.$$

Temos

$$u_m \to u \ \text{ em } \ W^{k,p}_{loc}(U)$$

significa

$$u_m \to u \ \text{ em } \ W^{k,p}(V)$$

para cada $V \subset\subset U$.

Definição 5.5.5. Denotamos por

$$W^{k,p}_0(U)$$

o fecho de $C_c^\infty(U)$ em $W^{k,p}(U)$. Assim $u \in W^{k,p}_0(U)$ se e somente se existem funções $u_m \in C_c^\infty(U)$ tais que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(U)$.

Notação. É costume escrever

$$H_0^k(U) = W_0^{k,2}(U).$$

Veremos nos exemplos que se $n = 1$ e U é um intervalo aberto em $\mathbb{R}^1$, então $u \in W^{1,p}(U)$ se e somente se u é igual q.t.p. a uma função absolutamente contínua cuja derivada ordinária (que existe q.t.p) pertence a $L^p(U)$. Uma caracterização tão simples está, no entanto, disponível apenas para $n = 1$. Em geral, uma função pode pertencer a um espaço de Sobolev e ainda assim ser descontínua ou ilimitada.

Exemplo 5.5.1. Considere $U = B^0(0,1)$, a bola unitária aberta em $\mathbb{R}^n$, e

$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad (x \in U,\ x \neq 0).$$

Para quais valores $\alpha > 0, n, p$ a função $u \in W^{1,p}(U)$? Para responder, observe primeiro que u é suave para longe de 0, com

$$u_{x_i}(x) = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}} \quad (x \neq 0),$$

e assim

$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \quad (x \neq 0).$$

Seja $\phi \in C_c^\infty(U)$ e fixe $\epsilon > 0$. Então

$$\int_{U-B(0,\epsilon)} u\phi_{x_i} dx = -\int_{U-B(0,\epsilon)} u_{x_i}\phi dx + \int_{\partial B(0,\epsilon)} u\phi\nu^i dS,$$

$\nu = (\nu^1, \dots, \nu^n)$ denotando a normal apontando para dentro em $\partial B(0,\epsilon)$. Se $\alpha+1 < n, |Du(x)| \in L^1(U)$. Neste caso

$$\left|\int_{\partial B(0,\epsilon)} u\phi\nu^i dS\right| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \int_{\partial B(0,\epsilon)} \epsilon^{-\alpha} dS \leq C\epsilon^{n-1-\alpha} \to 0.$$

Assim

$$\int_U u\phi_{x_i} dx = -\int_U u_{x_i}\phi dx$$

para todo $\phi \in C_c^\infty(U)$, se $0 \leq \alpha < n-1$. Além disso $|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \in L^p(U)$ se somente se $(\alpha+1)p < n$. Consequentemente $u \in W^{1,p}(U)$ se somente se $\alpha < \frac{n-p}{p}$. Em particular $u \notin W^{1,p}(U)$ para cada $p \geq n$.

Exemplo 5.5.2. Seja $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ um subconjunto denso e enumerável de $U = B^0(0,1)$. Escreva

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x - r_k|^{-\alpha} \quad (x \in U).$$

Então $u \in W^{1,p}(U)$ para $\alpha < \frac{n-p}{p}$. Se $0 < \alpha < \frac{n-p}{p}$ vemos que u pertence a $W^{1,p}(U)$ e ainda é ilimitado em cada subconjunto aberto de U.

Este último exemplo ilustra um fato fundamental, que embora uma função u pertencente a um espaço de Sobolev possua certas propriedades de suavidade, ela ainda pode se comportar de maneira bastante ruim de outras maneiras, para mais detalhes, recomendados o texto [25].

6 APÊNDICE C: TEORIA DA MEDIDA

6.1 Medida de Lebesgue

A medida de Lebesgue fornece uma maneira de descrever o “tamanho"ou “volume"de certos subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, para mais detalhes, recomendamos o texto [48].

Definição 6.1.1. Uma coleção $\mathcal{M}$ de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ é chamada de σ- álgebra se

1. $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$,
2. $A \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbb{R}^n - A \in \mathcal{M}$,
3. Se $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$.

Teorema 6.1.1. *(Existência de medida de Lebesgue e conjuntos mensuráveis de Lebesgue). Existe uma σ-álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e um mapa*

$$|\cdot| : \mathcal{M} \to [0, \infty]$$

com as seguintes propriedades:

1. *Todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e, todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ pertencem a $\mathcal{M}$.*
2. *Se B é uma bola em $\mathbb{R}^n$, então $|B|$ é igual ao volume n-dimensional de B.*
3. *Se $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ e os conjuntos $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ são disjuntos dois a dois, então*
$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right| = \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|.$$

4. Se $A \subseteq B$, onde $B \in \mathcal{M}$ e $|B| = 0$, então $A \in \mathcal{M}$ e $|A| = 0$.

o conjunto em $\mathcal{M}$ é chamado de conjunto mensurável de Lebesgue e $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue n-dimensional.

Notação. Se alguma propriedade é válida em todos os pontos de $\mathbb{R}^n$, exceto para um conjunto mensurável com medida de Lebesgue zero, dizemos que a propriedade é válida em quase todo ponto, abreviado "q.t.p".

6.2 Funções mensuráveis e integração

Definição 6.2.1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função mensurável se

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$$

para cada subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$.

Em particular se f é contínua, então f é mensurável. A soma e produtos de duas funções mensuráveis também são funções mensuráveis. Em adicional, se $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ são funções mensuráveis, então também são $\limsup f_k$ e $\liminf f_k$.

Teorema 6.2.1. *(Teorema de Egoroff's). Seja $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, f$ funções mensuráveis, e assuma que*

$$f_k \to f \quad q.t.p \quad em \quad A,$$

onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável, $|A| < \infty$. Então para cada $\epsilon > 0$ existe um subconjunto mensurável $E \subset A$ tal que

1. $|A - E| \leq \epsilon$
2. *$f_k \to f$ uniformemente em E.*

agora se f é uma função não negativa e mensurável, é possível, por uma aproximação de f com funções simples, definir a integral de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

Isto concorda com a integral usual se f for contínua ou integrável por Riemann. Se f for mensurável, mas não necessariamente não negativo, definimos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- dx,$$

desde que pelo menos um dos termos do lado direito seja finito. neste caso dizemos que f é integrável.

Definição 6.2.2. Uma função mensurável f é somável se

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| dx < \infty.$$

Observe cuidadosamente nossa terminologia: uma função mensurável é integrável se tiver uma integral (que pode ser igual a $+\infty$ ou $-\infty$) e é somável se essa integral for finita.

Definição 6.2.3. se a função de valor real f for mensurável, definimos o supremo essencial de f como sendo

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{\mu \in \mathbb{R} : |\{f > \mu\}| = 0\}.$$

6.3 Teoremas de convergência para integrais

A teoria de integração de Lebesgue é especialmente útil porque fornece os seguintes teoremas de convergência poderosos.

Teorema 6.3.1. *(Lema de Fatou's). Suponha que as funções $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ são não negativas e mensuráveis. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to\infty} f_k dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Teorema 6.3.2. *(Teorema da convergência monótona). Suponha que as funções $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ são mensuráveis, com*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \ldots .$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f_k dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx.$$

Teorema 6.3.3. *(Teorema da convergência dominada). Suponha que as funções $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ são integráveis e*

$$f_k \to f \quad q.t.p.$$

Suponha também

$$|f_k| \leq g \quad q.t.p.,$$

para alguma função somável g. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k dx \to \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Álvarez, J., Bagby, R. J., Kurtz, D. S., and Pérez, C. Weighted estimates for commutators of linear operators. *Studia Math. 104*, 2 (1993), 195–209.

[2] Amick, C. J., Bona, J. L., and Schonbek, M. E. Decay of solutions of some nonlinear wave equations. *Journal of Differential Equations 81*, 1 (1989), 1–49.

[3] Auscher, P., and Martell, J. M. Weighted norm inequalities for fractional operators. *Indiana Univ. Math. J. 57*, 4 (2008), 1845–1869.

[4] Barrionuevo, J. A., Oliveira, L. S., and Zingano, P. R. General asymptotic supnorm estimates for solutions of one-dimensional advection-diffusion equations in heterogeneous media. *International Journal of Partial Differential Equations 2014* (2014).

[5] Botelho, G., Pellegrino, D., and Teixeira, E. *Fundamentos de análise funcional.* SBM, 2012.

[6] Calderón, A.-P. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 74*, 4 (1977), 1324–1327.

[7] Calderon, A. P., Calderon, C. P., Fabes, E., Jodeit, M., and Rivière, N. M. Applications of the Cauchy integral on Lipschitz curves. *Bull. Amer. Math. Soc. 84*, 2 (1978), 287–290.

[8] Carlen, E. A., and Loss, M. Sharp constant in nash's inequality. *International Mathematics Research Notices 1993*, 7 (1993), 213–215.

[9] Chaffee, L., Hart, J., and Oliveira, L. Sobolev-BMO and fractional integrals on super-critical ranges of Lebesgue spaces. *J. Funct. Anal. 272*, 2 (2017), 631–660.

[10] Chagas, J., Guidolin, P., and Zingano, P. Global solvability results for parabolic equations with p-laplacian type diffusion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 458*, 1 (2018), 860–874.

[11] Chen, Y., and Ding, Y. Sharp bounds for the commutators with variable kernels of fractional differentiations and BMO Sobolev spaces. *Nonlinear Anal. 116* (2015), 85–99.

[12] Chen, Y., Ding, Y., and Hong, G. Commutators with fractional differentiation and new characterizations of BMO-Sobolev spaces. *Anal. PDE 9*, 6 (2016), 1497–1522.

[13] Chung, D., Pereyra, M. C., and Perez, C. Sharp bounds for general commutators on weighted Lebesgue spaces. *Trans. Amer. Math. Soc. 364*, 3 (2012), 1163–1177.

[14] Coifman, R. R., Jones, P. W., and Semmes, S. Two elementary proofs of the L^2 boundedness of Cauchy integrals on Lipschitz curves. *J. Amer. Math. Soc. 2*, 3 (1989), 553–564.

[15] Coifman, R. R., Rochberg, R., and Weiss, G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. *Ann. of Math. (2) 103*, 3 (1976), 611–635.

[16] Cruz-Uribe, D., and Moen, K. Sharp norm inequalities for commutators of classical operators. *Publ. Mat. 56*, 1 (2012), 147–190.

[17] David, G. Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér* (1984), 157–189.

[18] DiBenedetto, E. *Degenerate parabolic equations.* Springer Science & Business Media, 1993.

[19] Dragičević, O., Grafakos, L., Pereyra, M. C., and Petermichl, S. Extrapolation and sharp norm estimates for classical operators on weighted lebesgue spaces. *Publicacions Matematiques* (2005), 73–91.

[20] Duoandikoetxea, J. Extrapolation of weights revisited: new proofs and sharp bounds. *J. Funct. Anal. 260*, 6 (2011), 1886–1901.

[21] Duoandikoetxea, J., and Zuazo, J. D. *Fourier analysis*, vol. 29. American Mathematical Soc., 2001.

[22] e Silva, P. B., Melo, W. G., and Zingano, P. R. An asymptotic supnorm estimate for solutions of 1-d systems of convection–diffusion equations. *Journal of Differential Equations 258*, 8 (2015), 2806–2822.

[23] e Silva, P. B., Schütz, L., and Zingano, P. On some energy inequalities and supnorm estimates for advection–diffusion equations in $\mathbb{R}^n$. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 93* (2013), 90–96.

[24] Escobedo, M., and Zuazua, E. Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbb{R}^n$. *Journal of Functional Analysis 100*, 1 (1991), 119–161.

[25] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, vol. 19. American Mathematical Society, 2022.

[26] García-Cuerva, J., and De Francia, J. R. *Weighted norm inequalities and related topics*. Elsevier, 2011.

[27] Grafakos, L., et al. *Modern Fourier Analysis*, vol. 250. Springer, 2009.

[28] Guidolin, P., Schütz, L., Ziebell, J., and Zingano, J. Global existence results for solutions of general conservative advection-diffusion equations in $\mathbb{R}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 515*, 1 (2022), 126361.

[29] Hardy, G. H., and Littlewood, J. E. Some properties of fractional integrals. i. *Mathematische Zeitschrift 27*, 1 (1928), 565–606.

[30] Hardy, G. H., and Littlewood, J. E. Some properties of fractional integrals. ii. *Mathematische Zeitschrift 34*, 1 (1932), 403–439.

[31] Hofmann, S. Parabolic singular integrals of Calderón-type, rough operators, and caloric layer potentials. *Duke Math. J. 90*, 2 (1997), 209–259.

[32] Hounie, J. *Introdução aos operadores pseudo-diferenciais*. 16º Colóquio Brasileiro de Matemática. [16th Brazilian Mathematics Colloquium]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1987.

[33] Hytönen, T. P. The sharp weighted bound for general calderón—zygmund operators. *Annals of mathematics* (2012), 1473–1506.

[34] Journé, J.-L. *Calderón-Zygmund operators, pseudodifferential operators and the Cauchy integral of Calderón*, vol. 994 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[35] Kalashnikov, A. S. Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations. *Russian Mathematical Surveys 42*, 2 (1987), 169–222.

[36] Lacey, M. T., Moen, K., Pérez, C., and Torres, R. H. Sharp weighted bounds for fractional integral operators. *Journal of Functional Analysis 259*, 5 (2010), 1073–1097.

[37] Li, H., Wu, Z., Yin, J., and Zhao, J. *Nonlinear diffusion equations*. World Scientific, 2001.

[38] Lions, J.-L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires. *Dunod* (1969).

[39] Michalowski, N., Rule, D. J., and Staubach, W. Weighted L^p boundedness of pseudodifferential operators and applications. *Canad. Math. Bull. 55*, 3 (2012), 555–570.

[40] Muckenhoupt, B. Weighted norm inequalities for the hardy maximal function. *Transactions of the American Mathematical Society 165* (1972), 207–226.

[41] Murray, M. A. M. Commutators with fractional differentiation and BMO Sobolev spaces. *Indiana Univ. Math. J. 34*, 1 (1985), 205–215.

[42] Nirenberg, L. On elliptic partial differential equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche 13*, 2 (1959), 115–162.

[43] Riesz, M. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy.

[44] Schonbek, M. E. Uniform decay rates for parabolic conservation laws. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 10*, 9 (1986), 943–956.

[45] Sobolev, S. L. On a theorem of functional analysis. *Mat. Sbornik 4* (1938), 471–497.

[46] Stein, E. M. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, 1970.

[47] Stein, E. M. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, vol. 43 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[48] Stein, E. M., and Shakarchi, R. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces.* Princeton University Press, 2009.

[49] Stein, E. M., and Weiss, G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, vol. 1. Princeton University Press, 1971.

[50] Urbano, J. M. The method of intrinsic scaling. *Lecture Notes in Mathematics 1930* (1930).

[51] Yosida, K. *Functional analysis.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the sixth (1980) edition.

[52] ZHAO, J. N. Existence and non existence of solutions for $u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 172*, 1 (1993), 130–146.

[53] ZHOU, S. A priori l-estimate and existence of solutions for some nonlinear parabolic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 42*, 5 (2000), 887–904.

[54] ZINGANO, P. R. Two problems in partial differential equations (in Portuguese). *arXiv preprint arXiv:1801.04361* (2018).