

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Problemas do tipo Erdős-Rothschild para
grafos**

por

Matheus Micadei Marzo

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do título de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Carlos Hoppen
Orientador

Porto Alegre, agosto de 2024

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Marzo, Matheus Micadei

Problemas do tipo Erdős-Rothschild para grafos /
Matheus Micadei Marzo.—Porto Alegre: PPGMAp da
UFRGS, 2024.

75 p.: il.

Tese (doutorado)— Universidade Federal do Rio Grande
do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Apli-
cada, Porto Alegre, 2024.

Orientador: Hoppen, Carlos

Tese: Matemática Aplicada: Matemática Discreta,
Dissertação, Tese, Mestrado, Doutorado

Problemas do tipo Erdős-Rothschild para grafos

por

Matheus Micadei Marzo

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial
para a obtenção do título de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Matemática Discreta

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Banca examinadora:

Prof. Dr. Guilherme Oliveira Mota
Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Fábio Happ Botler
Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira
Coordenador

*“E disse ao homem: Eis que o temor do Senhor é a
sabedoria, e apartar-se do mal é a inteligência”.*

Jó 28:28.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que em seu infinito amor nos concedeu a vida e, com ela, a oportunidade de nos aprimorarmos a cada dia. Sou grato pela paciência, sabedoria e orientação durante toda minha vida e especial nessa etapa.

Aos meus pais, Alcides Antônio Marzo e Maria Regina Micadei Marzo, por seus esforços incansáveis na criação e educação de seus três filhos, pelo apoio e força inabaláveis durante esta longa jornada, de modo nem todas as palavras do mundo seriam suficientes para descrever minha gratidão. Aos meus irmãos, Rodrigo e Lucas, por serem as minhas pessoas preferidas.

A todos os professores que fizeram e fazem parte da minha trajetória de vida, e que me moldaram como pessoa. De modo especial, ao meu orientador, prof. Dr. Carlos Hoppen, pela paciência, tenacidade e vontade inabalável, por nunca ter desistido desse trabalho, mesmo quando não havia nenhum indício que essa tese poderia ter sucesso.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), por proporcionar uma formação de excelência a mim e a tantos outros estudantes.

Fazem parte desta jornada os professores prof. Dr. Luís Felipe Cesar da Rocha Bueno, profa. Dra. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz, profa. Dra. Ana Luísa Dine Martins e prof. Dr. Gabriel Haeser, aos quais expresso minha profunda gratidão.

À Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro crucial.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS	viii
RESUMO	ix
ABSTRACT	x
1 INTRODUÇÃO E CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA	1
1.1 Problema de Erdős-Rothschild	5
1.2 Problema proposto, principais resultados e organização do texto . . .	10
2 DEFINIÇÕES E FERRAMENTAS BÁSICAS	15
3 RESULTADOS DE COLORAÇÕES PARA PADRÕES LOCAL- MENTE ARCO-ÍRIS	18
3.1 Construindo colorações localmente arco-íris	20
3.2 Resultados do tipo imersão: encontrando cotas para colorações local- mente arco-íris.	28
4 RESULTADOS GERAIS EM TEORIA EXTREMAL DOS GRA- FOS	34
5 ESTABILIDADE E RESULTADO EXATO	39
5.1 Um resultado de estabilidade para colorações localmente arco-íris . .	39
5.1.1 Um resultado de estabilidade para colorações localmente arco- íris quando $k = 3$	49
5.2 Monotonicidade de soluções de Turán	50

5.3	Resultado exato: determinando o grafo extremal.	59
6	CONCLUSÃO E PRÓXIMOS PASSOS	67
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75

LISTA DE FIGURAS

1.1	Grafo de Turán $T_4(13)$	2
1.2	Ambos grafos coloridos induzem o mesmo padrão.	5
1.3	Representações de K_4^R	6
1.4	Os padrões que pertencem à família K_4^{LR}	6
1.5	Os três padrões distintos da família QK_4	14
3.1	Do lado esquerdo um grafo G com dois vértices e uma aresta, do lado direito um possível grafo multicolorido \mathbf{G}	20
3.2	Caso em que $ l_{1,3} \cap l_{2,4} = 1$	21
3.3	opção a: $a_1 \neq c$ e $c_1 \neq a$. Opção b: $a_1 \neq c$ e $c_1 = a$. Opção c: $a_1 = c$ e $c_1 \neq a$. Opção d: $a_1 = c$ e $c_1 = a$	23
3.4	$a_1 \neq d$ e $c_1 \neq a$	24
3.5	$a_1 = d$ e $c_1 \neq a$	24
3.6	coloração possível de K_4	24
5.1	Os padrões que pertencem à família K_4^{LR} . O primeiro padrão no canto superior esquerdo é um padrão <i>minimal</i>	53
5.2	As arestas azuis têm listas de tamanho dois e a aresta vermelha tem tamanho três.	55

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

Lista de Símbolos

$\chi'(F)$	Índice cromático de um grafo F (coloração de arestas)
$\chi(F)$	Número cromático de um grafo F (coloração de vértices)
\hat{G}	Grafo colorido associado com o grafo G
G	Grafo multicolorido associado com o grafo G
P	Família de padrões associados a um determinado grafo
$\sigma(k)$	Função que relaciona a paridade de k
F_s^{min}	Família dos padrões de F que são s -minimal
K_{k+1}^{LR}	Família dos padrões de K_{k+1} que são localmente arco-íris
$K_{k+1}^{LR}(s)$	Família dos padrões de K_{k+1} que são localmente arco-íris com s cores distintas
K_{k+1}^M	Família dos padrões monocromáticos de K_{k+1}
K_{k+1}^R	Família de padrões com o padrão arco-íris de K_{k+1}
QK_{k+1}	Família dos padrões de K_{k+1} que são quase localmente arco-íris.
$T_k(n)$	Grafo de Turán com n vértices e k -partido
$t_k(n)$	Número de arestas do grafo de Turán $T_k(n)$
$ex(n,F)$	Função extremal com parâmetros F e n

RESUMO

Esta tese aborda diversos problemas do tipo Erdős-Rothschild, com o foco principal sendo a família de padrões localmente arco-íris com um determinado número mínimo de cores.

O trabalho demonstra que, para um número fixo de cores distintas s e um número suficientemente grande de cores r , o grafo de Turán $T_k(n)$ é a única estrutura que maximiza o número de colorações livres de padrões localmente arco-íris com pelo menos s cores. Isso significa que o grafo de Turán é o único grafo extremal para o problema proposto.

Para chegar a essa conclusão, a tese emprega o método da estabilidade, que mostra que se um grafo tem um número de colorações livres de $K_{k+1}^{LR}(s)$ maior ou igual a $T_k(n)$, então esse grafo precisa ter uma estrutura próxima à do grafo de Turán, com poucas arestas internas em relação a alguma partição em k partes. A conclusão, como enunciada no parágrafo anterior, segue por um resultado que conhecemos por resultado exato.

A demonstração da estabilidade para $K_{k+1}^{LR}(s)$ envolve o uso do Lema da Regularidade de Szemerédi e lemas de imersão, que garantem a existência de padrões proibidos em colorações de grafos com base em sua estrutura. A tese também desenvolve algoritmos para construir colorações localmente arco-íris em situações específicas, o que é crucial para a prova dos lemas de imersão.

ABSTRACT

This thesis addresses several problems of the Erdős-Rothschild type, focusing primarily on the family of locally rainbow patterns with at least a given number of distinct colors.

The work demonstrates that, for a fixed number of distinct colors s and a sufficiently large number of colors r , the Turán graph $T_k(n)$ is the unique structure that maximizes the number of colorings avoiding locally rainbow patterns with at least s colors. This means that the Turán graph is the only extremal graph for the proposed problem.

To reach this conclusion, the thesis employs the stability method, which shows that if a graph has a number of colorings free of $K_{k+1}^{LR}(s)$ greater than or equal to $T_k(n)$, then this graph must be structurally similar to the Turán graph, with few internal edges with respect to a partition into k parts. The conclusion, as stated in the previous paragraph, follows from a result we know as the exact result.

The proof of stability for $K_{k+1}^{LR}(s)$ involves the use of Szemerédi's Regularity Lemma and embedding lemmas, which guarantee the existence of forbidden patterns in graph colorings based on their structure. The thesis also develops algorithms to construct locally rainbow colorings in specific situations, which is crucial for proving the embedding lemmas.

1 INTRODUÇÃO E CONTEXTUALIZAÇÃO DO PROBLEMA

A Combinatória se destaca como uma das áreas mais sólidas e reconhecidas da Matemática. Dentro dessa disciplina fascinante, a Teoria dos Grafos assume um papel distinto, revelando-se como um dos seus aspectos mais cativantes. Em particular, a Teoria Extremal emerge como uma ramificação particularmente intrigante. Referenciando o renomado matemático Paul Erdős, podemos traçar as origens do estudo de problemas extremais em grafos, quando, em 1940-1941, devido às contribuições de Turán, foram consolidados os fundamentos dessa linha de pesquisa, a qual tem continuamente apresentado resultados notáveis nos últimos anos.

Ao considerarmos um grafo G , o reconhecemos pela estrutura $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito com n elementos e E é um conjunto de pares de elementos de V . Em referências futuras, nos referiremos ao conjunto de vértices de G como $V(G)$. Se $\{u, v\} \in E(G)$, afirmamos que existe uma aresta entre os vértices u e v . Estendemos essa definição para criar a estrutura de um grafo colorido, atribuindo a cada aresta $\{u, v\} \in E(G)$ uma cor $c \in P = \{1, 2, \dots, r\}$. Utilizamos o termo r -coloração de G para descrever um grafo colorido com até r cores, onde r é um inteiro positivo e G é um grafo. Assim, uma r -coloração de G é uma função $f : E(G) \rightarrow [r]$ que associa uma cor de $[r] = \{1, 2, \dots, r\}$ a cada aresta de G . Denotaremos um grafo colorido como \hat{G} .

Nossa meta, no âmbito da Teoria Extremal de Grafos, reside em maximizar ou minimizar um parâmetro específico em um dado grafo, denominado função objetivo. As soluções almejadas devem, por sua vez, pertencer a um domínio definido de soluções viáveis, sujeitas a um conjunto predefinido de restrições. A título de exemplo, podemos considerar uma questão aparentemente trivial: qual é o número máximo de arestas que um grafo com n vértices pode conter?

No presente contexto, o objeto de interesse é enfatizado pela expressão “o número máximo de arestas”, ou seja, a função a ser maximizada. O domínio viável das soluções possíveis abrange todos os grafos com um determinado número de vértices, haja vista que o conjunto de restrições é vazio. Denominamos como “grafo ótimo” ou “grafo extremal” aquele que maximiza a função objetivo e reside no domínio viável, ou seja, é uma solução para um problema extremal. Nesse caso específico, o grafo ótimo é definido como aquele que contém todas as arestas possíveis, isto é, para quaisquer $u, v \in V(G)$, temos $\{u, v\} \in E(G)$. Este grafo é reconhecido como um grafo completo, sendo representado por K_n , onde n denota o número de vértices no grafo completo.

Os problemas extremais são mais frequentemente apresentados impondo uma estrutura específica a um grafo ou em uma família de grafos. Um exemplo notório dessa categoria de problemas foi investigado por Paul Turán, envolvendo o número máximo de arestas em um grafo que não contém K_{k+1} , o grafo completo com $k + 1$ vértices, como subgrafo.

O grafo de Turán, denotado por $T_k(n)$, é um grafo $k + 1$ -partido, balanceado, composto por n vértices. Vamos examinar o significado de cada um desses conceitos.

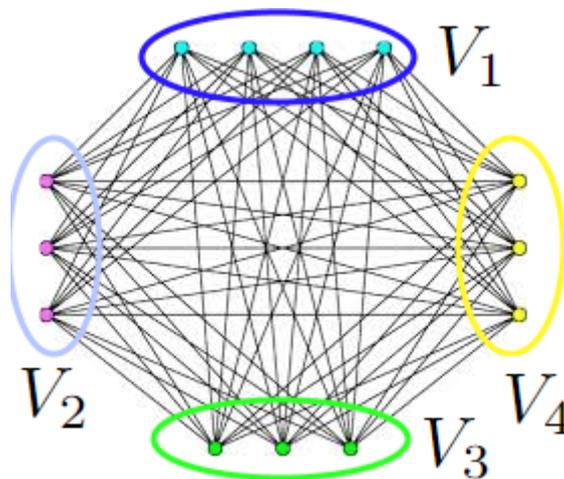


Figura 1.1: Grafo de Turán $T_4(13)$

Vamos destacar as propriedades do grafo $T_4(13)$ apresentado na Figura 1.1 por meio da seguinte lista:

- O conjunto de vértices pode ser agrupado em quatro conjuntos disjuntos, formando uma partição do conjunto de vértices do grafo, de modo que em cada grupo não exista nenhuma aresta interna (um conjunto com essa propriedade é comumente referido como "conjunto independente"). Assim, dizemos que $T_4(13)$ é um grafo 4-partido.
- A partição dos vértices de $T_4(13)$ nos conjuntos V_1, V_2, V_3 e V_4 satisfaz $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Isso caracteriza o que denominamos como uma partição balanceada.
- Se $u \in V_i$ e $v \in V_j$, com $i \neq j$, então $\{u, v\} \in E(T_4(13))$. Em outras palavras, $T_4(13)$ possui o maior número possível de arestas, exceto pelas arestas internas de cada parte. Por essa razão, referimos ao grafo de Turán $T_4(13)$ como um grafo multipartido completo.

As propriedades enunciadas anteriormente são características compartilhadas por todos os grafos de Turán $T_k(n)$. Portanto, referimo-nos a esses grafos como sendo k -partidos, completos e balanceados. Essas estruturas são soluções para o problema extremal investigado por Paul Turán.

Teorema 1.1. *(Turán, 1941 [24])* *Sejam $n, k \geq 2$. Todo grafo com n vértices e $|E(T_k(n))|$ arestas que não contém K_{k+1} como subgrafo é isomorfo ao grafo de Turán $T_k(n)$.*

Denotamos o número de arestas de $T_k(n)$ por $t_k(n)$ para a qual temos as seguintes cotas:

$$\frac{(k-1)n^2}{2k} - k \leq t_k(n) \leq \frac{(k-1)n^2}{2k}. \quad (1.1)$$

Em 1946, uma extensão do problema de Turán foi abordada, considerando cotas superiores e inferiores para o caso em que o grafo proibido não é simplesmente

K_{k+1} , mas um grafo arbitrário F . Definimos $\text{ex}(n, F)$ como o número máximo de arestas em um grafo com n vértices, sem cópias de F , portanto quando $F = K_{k+1}$ temos $\text{ex}(n, K_{k+1}) = t_k(n)$. Além disso, $\chi(F)$ representa o menor número possível de conjuntos independentes que particionam o conjunto de vértices de F . Essa definição de $\chi(F)$ é equivalente ao menor número de cores necessário para colorir $V(G)$ de modo que, se $\{u, v\} \in E(G)$, então os vértices u e v possuam cores diferentes. Por esse motivo $\chi(F)$ é denominado número cromático de F .

Teorema 1.2. (Erdős - Stone, 1946 [9]) *Dados um grafo F e $\epsilon > 0$, existe um n_0 tal que, se $n \geq n_0$ vale que*

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(F) - 1}\right) \frac{n^2}{2} - \chi(F) + 1 \leq \text{ex}(n, F) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(F) - 1} + \epsilon\right) \frac{n^2}{2}.$$

O teorema anterior não fornece a identidade específica do grafo extremal, ao contrário do Teorema de Turán; no entanto, oferece informações sobre o comportamento esperado desse grafo ótimo. De maneira talvez surpreendente, podemos concluir que, para $\chi(F) \geq 3$, o grafo extremal terá no máximo,

$$\text{ex}(n, F) \leq \frac{\chi(F) - 2}{\chi(F) - 1} \frac{n^2}{2} + \epsilon \frac{n^2}{2}$$

muito similar a cota inferior de arestas do grafo de Turán, $|T_{k-1}(n)| = t_{k-1}(n) \geq \frac{k-2}{k-1} \frac{n^2}{2} - (k-1)$. Observe que o grafo $t_{k-1}(n)$ é um grafo com número cromático igual a $k-1$, o que o torna um candidato óbvio para $\text{ex}(n, F)$.

Para $\chi(F) = 2$, o teorema não traz uma cota precisa para a resolução do problema extremal, todavia temos como informação que a ordem de grandeza do número de arestas da solução extremal (isto é, a cota para número de arestas do grafo extremal em termos assintóticos), será menor do que n^2 . Existem diversas contribuições para o caso do grafo bipartido, veja por exemplo [1] e [3].

1.1 Problema de Erdős-Rothschild

A classe de problemas que estudaremos neste texto foi apresentada anos mais tarde, e os problemas nesta classe ficaram conhecidos como problemas do tipo Erdős-Rothschild.

Será conveniente, para descrever esse problema, apresentar a noção de padrão de cores.

Definição 1.3. (*Isomorfismo de grafos coloridos*) Dados dois grafos coloridos \hat{A} e \hat{B} tais que $\{a_1, \dots, a_l\}$ é a lista de cores do grafo \hat{A} e $\{b_1, \dots, b_l\}$ é a lista de cores do grafo \hat{B} , dizemos que \hat{A} e \hat{B} são isomorfos se existir uma bijeção g entre ambas as listas de cores e uma bijeção $f : V(\hat{A}) \rightarrow V(\hat{B})$, de modo que $\{x, y\} \in E(\hat{A})$ e $\{x, y\}$ tem cor a se, e somente se, $\{f(x), f(y)\} \in E(\hat{B})$ e tem cor $g(a)$.

Definição 1.4. (*Padrão de cores*) Dado um grafo F , definimos um padrão de cores P de F como qualquer partição do conjunto de arestas de F . Dois padrões de cores de um grafo F são equivalentes se existir um isomorfismo colorido entre eles.

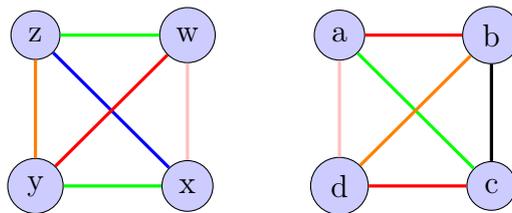


Figura 1.2: Ambos grafos coloridos induzem o mesmo padrão.

A Figura 1.2 apresenta duas colorações do mesmo padrão; de fato, basta tomar as bijeções f da seguinte forma: $f(a) = z, f(b) = w, f(c) = x$ e $f(d) = y$ e g a bijeção que leva a cor vermelha na cor verde; a cor verde na cor azul; a cor rosa na laranja; a cor preta na cor rosa e a cor laranja na cor vermelha.

Definimos o padrão de K_{k+1} em que cada aresta está associada a uma cor diferente como padrão arco-íris, que denotaremos por K_{k+1}^R , conforme ilustrado

na Figura 3.1. Da mesma forma, o padrão no qual todas as arestas estão associadas à mesma cor será denotado por K_{k+1}^M , e o chamaremos de padrão monocromático.

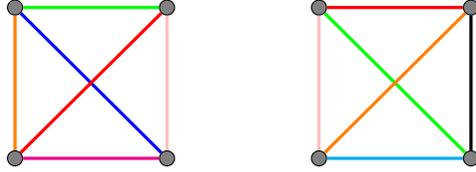


Figura 1.3: Representações de K_4^R

Uma coloração onde as arestas incidentes a cada vértice têm cores distintas é denominada de coloração própria do grafo. Uma família de padrões é um conjunto cujos elementos são padrões de cor. Diremos que K_{k+1}^{LR} é a família de todos os padrões associados a colorações próprias de K_{k+1} , à qual denominaremos como família de padrões localmente arco-íris de K_{k+1} . Por exemplo, a família K_4^{LR} é composta por quatro elementos. Os grafos coloridos da Figura 1.4 induzem os padrões mencionados:

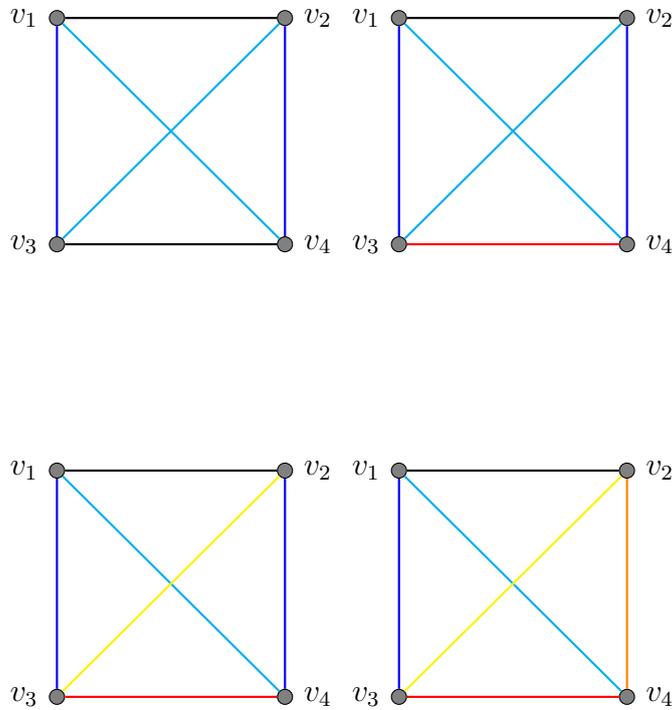


Figura 1.4: Os padrões que pertencem à família K_4^{LR}

Chamaremos de $K_{k+1}^{LR}(s)$ a família de padrões localmente arco-íris coloridos com pelo menos s cores distintas. Por exemplo, $K_4^{LR}(3)$ é exatamente igual a K_4^{LR} enquanto $K_4^{LR}(6)$ só tem o padrão arco-íris.

Dado um padrão P de F e um grafo colorido \hat{G} , dizemos que \hat{G} é P -livre se não existe uma cópia de F , digamos F_1 , tal que a coloração das arestas de F_1 induz o padrão P .

Os problemas que ficaram conhecidos como problemas do tipo Erdős-Rothschild são aqueles em que temos uma família de padrões \mathbf{P} , r cores, e desejamos maximizar o número de r -colorações livres dos padrões em \mathbf{P} para grafos com n vértices. Denotamos por $c_{r,\mathbf{P}}(G)$ o número de colorações de um grafo G livres dos padrões da família \mathbf{P} e $c_{r,\mathbf{P}}(n) = \max\{c_{r,\mathbf{P}}(G), |V(G)| = n\}$. Por fim, um grafo que admite $c_{r,\mathbf{P}}(n)$ colorações é dito (r, \mathbf{P}) -extremal. Além disso, caso a família \mathbf{P} contenha apenas um padrão P , iremos escrever $c_{r,P}(G)$, $c_{r,P}(n)$ e (r, P) -extremal para denotar as propriedades mencionadas anteriormente.

O motivo para o nome de problema do tipo Erdős-Rothschild foi o seguinte problema proposto em [10]. Dado um número de cores r e um grafo arbitrário F , o objetivo era contar de quantos modos era possível colorir um grafo G com n vértices, utilizando r cores, de modo que cada coloração de \hat{G} seja livre de cópias monocromáticas de F . Um caso que recebeu especial atenção foi quando o grafo F é o grafo completo K_{k+1} . Erdős e Rothschild conjecturaram que, para n suficientemente grande, $c_{2,K_{k+1}^M}(n) = c_{2,K_{k+1}^M}(T_k(n))$, ou seja, o grafo de extremal relativo ao problema de Turán para K_{k+1} admite o maior número de 2-colorações livres de K_{k+1}^M . Yuster [25] provou a conjectura para o caso do triângulo K_3^M e $n \geq 6$, enquanto Alon, Balogh, Keevash e Sudakov [2] mostraram o seguinte teorema:

Teorema 1.5. *Sejam $k \geq 2$ um inteiro e $r \in \{2, 3\}$. Existe um n_0 tal que todo grafo G com $n > n_0$ vértices satisfaz $c_{r, K_{k+1}^M}(G) \leq r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}$. Além disso, o único grafo com n vértices para qual o número de r -colorações evitando K_{k+1}^M é igual a $r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}$ é o grafo de Turán $T_k(n)$.*

Alon, Balogh, Keevash e Sudakov provaram que o resultado obtido no Teorema 1.5 não poderia ser estendido para valores maiores de r . Foram obtidos outros avanços ao se considerar o parâmetro r . Botler, Corsten, Dankovics, Frankl, Hàn, Jiménez e Skokan [7] provaram, para $r \in \{5, 6\}$, resultados para grafos (r, K_{k+1}^M) -extremais. Para $r = 6$, eles mostraram que $T_8(n)$ é o único grafo $(6, K_3^M)$ -extremal para $n \geq n_0$ e, para $r = 5$, provaram um resultado aproximado mostrando uma cota superior da forma $c_{5, K_3^M}(n) \leq 6^{n^2/4 + o(n^2)}$. Para $r = 5$, este problema admite várias configurações não isomorfas que atingem o valor extremal em sentido assintótico, e os grafos extremais exatos não são conhecidos. Para $r = 7$, Pikhurko e Staden [21] conseguiram avançar provando que o grafo de Turán $T_8(n)$ é o único grafo $(7, K_3^M)$ -extremal para n suficientemente grande.

Em 2006, Balogh [4] foi o primeiro a tratar de padrões não-monocromáticos. Um de seus resultados implica que, para $r = 2$ cores e qualquer padrão P de K_{k+1} , denotado por K_{k+1}^P , que usa essas as duas cores, o grafo $(2, K_{k+1}^P)$ -extremal é o grafo de Turán $T_k(n)$, para $n \geq n_0$. No entanto, ele também observou que para $r = 3$ cores, e considerando apenas as colorações do grafo completo K_n com duas cores, o número de colorações é pelo menos $3(2^{\binom{n}{2}} - 1)$, que é mais do que o número de colorações K_k^R -livres do grafo de Turán $T_2(n)$. Isso mostra que o comportamento da solução é diferente para padrões distintos de um mesmo grafo.

Os autores Benevides, Hoppen e Sampaio [6] apresentaram diversos resultados gerais para o problema de Erdős-Rothschild. O teorema enunciado abaixo garante que a busca por grafos extremais para os problemas do tipo Erdős-Rothschild

em grafos completos pode se concentrar nos grafos multipartidos, independentemente do padrão estudado, o que, sem dúvida, é extremamente valioso.

Considere $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$ como uma família de padrões $\{P_i\}$, onde cada padrão P_i é de um grafo completo K_{k_i} , com $i \in I$ onde I é um conjunto de índices que não é necessariamente finito. Podemos agora enunciar o resultado:

Teorema 1.6. *Sejam $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 2$, e $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$ uma família de padrões de grafos completos. Para todo número natural n , existe um grafo multipartido completo G^* de n vértices que é $(r, \mathbf{P}_{\mathbf{K}})$ -extremal, isto é, G^* é r -colorido e não tem cópia de $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$. Além disso, para qualquer grafo G que é $(r, \mathbf{P}_{\mathbf{K}})$ -extremal existe um grafo como G^* de modo que $|E(G^*)| \geq |E(G)|$.*

O resultado acima foi demonstrado quando $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$ é uma família com apenas um elemento em [6] e a demonstração foi generalizada para o caso enunciado no Teorema 1.6 em [19].

Para grafos proibindo o padrão arco-íris temos um resultado mais forte:

Teorema 1.7. [16] *Sejam r e $k \geq 2$ tais que $r \geq \binom{k+1}{2}^{8k+4}$. Existe n_0 de modo que todo grafo de ordem $n \geq n_0$ possui no máximo $r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}$ colorações livres de K_{k+1}^R . Além disso, o grafo $T_k(n)$ é o único grafo com n vértices que atinge a igualdade.*

O Teorema 1.7 exige um número elevado de cores r para garantir que $T_k(n)$ seja o grafo extremal. Os autores de [16] destacam que o mesmo resultado provavelmente deve valer para valores menores de r . O resultado principal desse texto tem como uma das consequências uma melhora para esse r , que pode ser vista no Teorema 5.2.

Os mesmo grupo de autores provaram, em [15], resultados específicos para $k = 2$, melhorando a dependência nos parâmetros r e n_0 . Para r -colorações K_3^R -livres, mostraram que, para todo $r \geq 5$, existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, o grafo

$T_2(n)$ é o (r, K_3^R) -extremal. Já se tivermos $r \geq 10$, todo $n \geq 5$ é suficiente para provar que $T_2(n)$ é o grafo extremal. Hoppen, Lefmann e Nolibos [14] abordaram uma generalização desse problema, considerando o caso específico onde as famílias proibidas consistem nos padrões de K_{k+1} com pelo menos s cores distintas, denotada por \mathbf{P}_{k+1}^s , com $2 \leq s \leq \binom{k+1}{2}$. Quando $s = \binom{k+1}{2}$ o único padrão na família é justamente o padrão arco-íris; esse resultado demonstrou uma melhora significativamente para o número mínimo de cores r em relação a cota apresentada no Teorema 1.7, de fato, foi demonstrado que, para $r_0(s) \geq \left(\lfloor \frac{(s+1)^2}{4} \rfloor \right)^{4k}$, temos que $c_{r_0(s), \mathbf{P}_{k+1}^s} \leq r^{t_k(n)}$, e que o grafo extremal é isomorfo ao grafo de Turán.

O resultado obtido em [14] pode ser dividido em três casos, considerando o parâmetro s , de forma que temos cotas melhores para valores menores de s , já que a família de padrões proibidas é maior. Quando $s < s_0(k)$, um determinado limiar que iremos suprimir nesse texto, foi demonstrado que $c_{r_0(s), \mathbf{P}_{k+1}^s} \leq r^{t_k(n)}$, com $r_0(s) \geq (s-1)^2$; para $s_0(k) \leq s < s_1(k)$ foi demonstrado um resultado semelhante, mas com $r_0(s) \geq (s-1)^7$. Iremos suprimir o caso em que $s \geq s_1(k)$, já que ela não é trivial, mas recomendamos que o leitor consulte as cotas obtidas em [14].

1.2 Problema proposto, principais resultados e organização do texto

O Teorema 1.7 e sua generalização em [19] servem como inspiração para o principal resultado deste artigo. Buscamos obter um resultado semelhante para uma família ainda não explorada na literatura: os padrões em que cada vértice é localmente arco-íris. Um padrão induzido por um grafo colorido \hat{G} é considerado localmente arco-íris se, para cada vértice v , as arestas associadas a v são coloridas

com cores distintas entre si. Em outras palavras, a definição de padrão localmente arco-íris é equivalente a afirmar que \hat{G} é uma coloração própria de arestas.

Dessa forma, o objetivo dessa tese é demonstrar o resultado estabelecido pelo Teorema 5.13 para a família $K_{k+1}^{LR}(s)$, isto é, a família de padrões de grafos localmente arco-íris coloridas com pelo menos s cores distintas, o que estende os resultados anteriores. Observe que para $s = \binom{k+1}{2}$ o problema é igual ao apresentado em [16], e a cota inferior obtida para r foi melhorada.

A essência de nossa demonstração reside na aplicação de uma técnica conhecida como método da estabilidade. Um exemplo clássico dessa estratégia é encontrado na demonstração do Teorema 1.5. Essa técnica sugere que, se um grafo satisfizer determinadas hipóteses, ele deve possuir alguma estrutura “bem comportada”. No caso específico do Teorema 1.5, os autores concluem que, se um grafo tiver pelo menos o mesmo número de colorações que um grafo de Turán, então ele não pode diferir muito do grafo de Turán e deve, portanto, possuir uma partição com poucas arestas internas. O resultado por eles demonstrado é o seguinte:

Lema 1.8. *Seja k inteiro positivo. Então para todo $\delta > 0$ existe n_0 tal que se G é um grafo com $n > n_0$ vértices com pelo menos $3^{t_k(n)}$ colorações com três cores livres de K_{k+1}^M , então existe uma partição do conjunto de vértices $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_k$ tal que $\sum_i e(V_i) \leq \delta n^2$.*

Diremos nesse caso que os padrões monocromáticos satisfazem um critério de “estabilidade” para três cores. De forma análoga, podemos expandir essa noção para uma família qualquer de padrões, isto é, dados uma família de padrões \mathbf{P} de K_{k+1} e um número r de cores, dizemos que \mathbf{P} satisfaz o critério de estabilidade com respeito a r se vale o seguinte: para todo $\delta > 0$ se um grafo G com n vértices satisfaz $c_{r,\mathbf{P}}(G) \geq r^{t_k(n)}$, então existe uma partição dos vértices de G em k partes de modo que o número de arestas internas seja menor do que δn^2 . Além disso, mostraremos que qualquer solução extremal para uma família de padrões que

satisfazem o critério de estabilidade deve ser k -partida, chamamos essa parte do processo de resultado exato. As técnicas utilizadas para demonstrar essa propriedade se beneficiam principalmente do Lema da Regularidade de Szemerédi (Teorema 4.8).

Uma implicação das provas utilizando o método descrito acima é a necessidade de um número muito grande de vértices para se construir um grafo que satisfaça as condições propostas, já que o Lema da Regularidade de Szemerédi produz um $n_0(k)$ que é do tipo torre de 2, dependendo de k , como podemos ver no Teorema 4.9; outros resultados semelhantes podem ser consultados em [13]. Descreveremos com mais detalhes o Lema de Regularidade no Capítulo 4.

Os resultados apresentados a seguir são originais desse trabalho. Apresentaremos abaixo um resultado no qual denominaremos “resultado exato”. Esse resultado demanda como hipótese o conceito de “propriedade de estabilidade de cores”, o qual será abordado em detalhes no Capítulo 5. Demonstramos o seguinte resultado exato, baseado no resultado apresentado por Hoppen, Lefmann e Odermann em [15]:

Teorema 1.9. *Seja $k \geq 3$ e seja \mathbf{P} uma família de padrões K_{k+1} , tal que (K_{k+1}, \mathbf{P}) satisfaz a propriedade de estabilidade de cores para um inteiro positivo $r > e(k+1)$. Então existe n_0 tal que cada grafo de ordem $n > n_0$ tem no máximo $r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}$ colorações \mathbf{P} -livres. Além disso, o único grafo com n vértices que possui $r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}$ colorações \mathbf{P} -livres é o grafo de Turán $T_k(n)$.*

Para enunciar o resultado de estabilidade, consideraremos a função

$$r_0(k, s) = \begin{cases} (s+2)^7 & \text{se } s \in \{\sigma(k), \dots, \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1\}, \\ (s+2)^{4k+3} & \text{para } s \in \{\binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 2, \dots, \binom{k+1}{2}\}, \end{cases} \quad (1.2)$$

com $\sigma(k) = k$ se $k+1$ for par e $\sigma(k) = k+1$ caso contrário. Usaremos a função $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ frequentemente durante a tese.

Foi obtido o seguinte resultado evitando padrões localmente arco-íris, com s cores:

Teorema 1.10. *Sejam $k \geq 3$, $s \in \{\sigma(k), \dots, \binom{k+1}{2}\}$, com $\sigma(k) = k$ se $k+1$ for par se $\sigma(k) = k+1$ caso contrário, e $r > r_0(k, s)$ inteiros positivos, onde $r_0(k, s)$ foi definido em (1.2). Então, para cada $\delta > 0$ existe um inteiro positivo n_0 tal que, se G é um grafo com $|V(G)| = n \geq n_0$ vértices e, além disso, $c_{r, K_{k+1}^{LR}}(s)(n) \geq r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}$, então existe uma partição $V(G) = W_1 \cup \dots \cup W_k$ tal que $\sum_{i=1}^k e(W_i) < \delta n^2$.*

Combinando os Teoremas 1.9 e 1.10, obtemos imediatamente o resultado exato correspondente ao resultado de estabilidade. Consideramos que essa seja a principal contribuição do nosso trabalho.

Teorema 1.11. *Sejam $k \geq 3$, $s \in \{\sigma(k), \dots, \binom{k+1}{2}\}$, com $\sigma(k) = k$ se $k+1$ for par se $\sigma(k) = k+1$ caso contrário, e $r > r_0(k, s)$ inteiros positivos, onde $r_0(k, s)$ foi definido em (1.2). Existe n_0 de modo que todo grafo de ordem $n \geq n_0$ possui no máximo $r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}$ colorações livres de $K_{k+1}^{LR}(s)$. Além disso, o grafo $T_k(n)$ é o único grafo com n vértices que atinge a igualdade.*

Um resultado fundamental para a demonstração do Teorema 1.10 foi definir um algoritmo que fosse capaz de encontrar colorações localmente arco-íris em determinadas situações. Foram provados dois resultados nesse sentido, o Teorema 3.14 e o Teorema 3.15, que foram fundamentais para obter dois resultados auxiliares de imersão: Teorema 3.16 e Teorema 3.18. Também foi demonstrado um caso particular para as família dos padrões que são “quase localmente arco-íris”. Um padrão localmente arco-íris de K_{k+1} é dito *minimal* se for um padrão localmente arco-íris com o menor número possível de cores.

Definição 1.12. *(Padrões quase localmente arco-íris) A família de padrões quase localmente arco-íris de K_{k+1} , denotada por QK_{k+1}^{LR} , contém todos os padrões P de K_{k+1} para os quais podemos alterar a cor de no máximo uma aresta de P para obter um padrão localmente arco-íris minimal.*

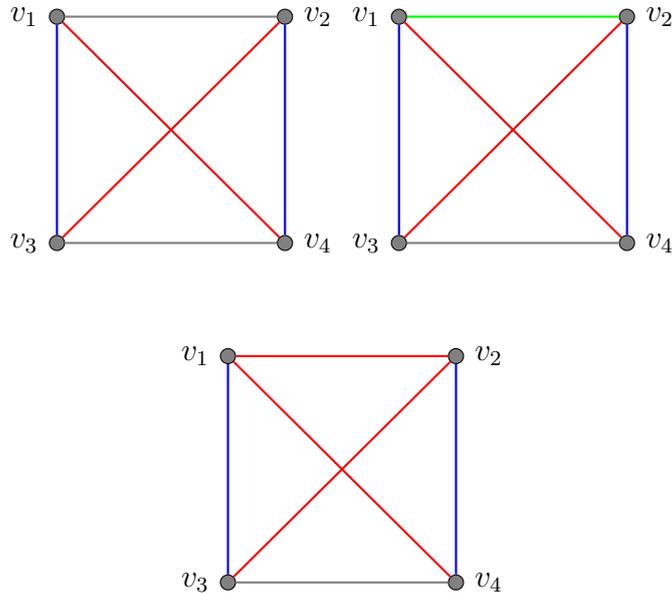


Figura 1.5: Os três padrões distintos da família QK_4 .

Esta família de padrões, cujos padrões para $k = 3$ estão exemplificados na Figura 1.5, são os padrões proibidos analisados no Teorema 5.10. Esse resultado é interessante por apresentar uma família de grafos proibidos que admitem como solução os grafos de Turán apenas quando o número de cores $r \in (r_1, r_0)$, onde $r_1 > 2$ e $r_0 \in \mathbb{N}$. Uma discussão aprofundada desse tema será abordada na Seção 5.2.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, realizaremos uma compilação de definições básicas e teoremas bem conhecidos na área. O Capítulo 3 contém parte dos resultados originais dessa tese, abordaremos os teoremas e lemas necessários relacionadas às famílias de padrões $K_{k+1}^{LR}(s)$, esses resultados serão essenciais no Capítulo 5. O Capítulo 4 apresentará técnicas específicas (ou mais robustas) utilizadas neste trabalho. O Capítulo 5 aplicará os métodos de estabilidade para resolver a proposta do texto. Por fim, no Capítulo 6, apresentaremos ideias gerais de como a proposta deste trabalho de tese pode ser ainda estendida e explorada.

2 DEFINIÇÕES E FERRAMENTAS BÁSICAS

Nesse capítulo enunciamos algumas definições básicas para grafos e também alguns resultados que são amplamente conhecidos na área de grafos. Optamos por essa abordagem para que esse texto seja, na medida do possível, auto-contido, facilitando a sua leitura não apenas para os membros da banca, mas para qualquer pessoa que venha a se interessar pelo assunto. Por isso, incluímos aqui as definições formais de conceitos básicos que serão utilizados ao longo do trabalho, bem como alguns resultados clássicos que serão úteis no que vem a seguir. O leitor experiente pode passar diretamente ao próximo capítulo e retornar caso queira esclarecer algum ponto na leitura.

Um conceito fundamental nas demonstrações desse texto é o conceito de “cópia”, que definimos formalmente em 2.3. Para tanto apresentamos a seguinte definição auxiliar

Definição 2.1. *(Isomorfismo entre grafos) Dois grafos R e S com n vértices são isomorfos se existe uma bijeção $\phi : V(R) \rightarrow V(S)$ que satisfaz a seguinte propriedade: para cada aresta $\{u, v\} \in E(R)$, temos $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E(S)$ e vice-versa.*

Também é fundamental o conceito de subgrafo.

Definição 2.2. *(Subgrafo) Um grafo S é considerado subgrafo de G , denotado por $S \subset G$, se $V(S) \subset V(G)$ e, para cada aresta $\{x, y\} \in E(S)$, temos que $\{x, y\} \in E(G)$.*

Podemos desse modo enunciar a definição de cópia.

Definição 2.3. *(Cópia) Dados os grafos G e F , dizemos que existe uma cópia de F em G se houver um subgrafo de G isomorfo a F .*

Frequentemente utilizamos a noção de “subgrafo induzido” quando desejamos que todas as arestas do grafo original para as quais existam vértices correspondentes no subgrafo também pertençam ao subgrafo.

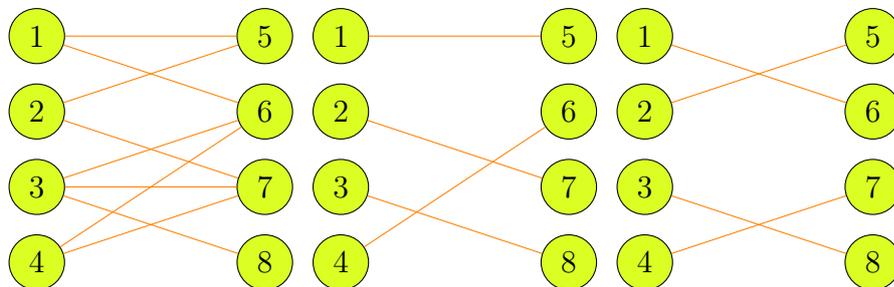
Definição 2.4. (*Subgrafo Induzido*) Dizemos que S é um subgrafo induzido de G se $S \subset G$ e, para quaisquer $x, y \in V(S)$, tal que $\{x, y\} \in E(G)$, temos que $\{x, y\} \in E(S)$.

As próximas definições são necessárias para definir o Teorema de Hall, que será aplicado nos nossos resultados.

Definição 2.5. (*Emparelhamento*) Um conjunto de arestas M em um grafo G é dito um emparelhamento, se para cada $v \in V(G)$ existe no máximo uma aresta em M incidente em v .

Definição 2.6. Dado um grafo G e um emparelhamento M de G , dizemos que M satura $x \in V(G)$ se existe uma aresta de M incidente a x . Nesse caso dizemos que x é M -saturado.

Definição 2.7. (*Emparelhamento perfeito*) Um conjunto de arestas M de um grafo G é dito um emparelhamento perfeito se todos os vértices de G são saturados por M .



As duas últimas figuras são emparelhamentos perfeitos do grafo representado na primeira imagem.

Podemos enunciar o Teorema de Hall, que é um resultado clássico na teoria dos grafos. Para uma demonstração, veja, por exemplo, [24].

Teorema 2.8. *(Teorema de Hall) Seja G um grafo com bipartição (X, Y) . Então G contém um emparelhamento que satura cada vértice de X se, e somente se,*

$$|N(S)| \geq |S|, \quad \forall S \subset X$$

onde $N(S)$ é a vizinhança de S em G .

Um outro tipo de resultado clássico que será utilizado se refere ao número de arestas em subgrafos multipartidos de um dado grafo.

Teorema 2.9. *Seja G um grafo com n vértices e $|E(G)| > 0$ arestas, então existe um subgrafo bipartido $G' \subset G$, tal que $|E(G')| > \frac{|E(G)|}{2}$.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução. Para $n = 2$, $G = K_2$ é o único caso possível e como G já é bipartido, $G' = G$ satisfaz o teorema. Considere que o resultado seja verdadeiro para $n - 1$. Seja G um grafo com n vértices. Fixe $x \in V(G)$, tal que x é um vértice com grau mínimo, isto é, $|N(x)| \leq |N(y)|$, para todo $y \in V(G)$, sendo que $N(y)$ é o conjunto de arestas incidentes a y . Seja $H = G \setminus \{x\}$, claramente $|V(H)| > 0$. Pela hipótese de indução, seja $V(H') = H_1 \cup H_2$ uma bipartição que satisfaz o teorema para H . Sejam $n_1 = |N(x) \cap E(H_1)|$ e $n_2 = |N(x) \cap E(H_2)|$. Se $n_1 \geq n_2$, então $V(G') = (H_1 \cup \{x\}) \cup H_2$ forma uma bipartição de x que satisfaz a hipótese (para frisar: ignoramos as arestas entre x e H_2 , mas iremos manter as arestas entre x e H_1 , preservando assim pelo menos metade das arestas). Caso contrário, $V(G') = H_1 \cup (H_2 \cup \{x\})$ é a bipartição que satisfaz o teorema. \square

O Teorema 2.9 pode ser generalizado para grafos multipartidos, com uma demonstração similar.

Teorema 2.10. *Seja G um grafo com n vértices e $|E(G)| > 0$ arestas, então existe um grafo k -partido G' , subgrafo de G , tal que $|E(G')| > \frac{k-1}{k}|E(G)|$.*

3 RESULTADOS DE COLORAÇÕES PARA PADRÕES LOCALMENTE ARCO-ÍRIS

Apresentaremos neste capítulo as ferramentas que foram adaptadas ou construídas para tratar o caso específico de padrões localmente arco-íris. Iniciaremos com um conjunto de resultados e definições conhecidos na literatura.

Definição 3.1. (*Vértice localmente arco-íris*) Dado um grafo colorido \hat{G} , diremos que um vértice $v \in \hat{G}$ é localmente arco-íris se todas as arestas incidentes a v têm cores distintas.

Definição 3.2. (*Coloração própria*) Dado um grafo G dizemos que uma coloração própria de G é um grafo colorido \hat{G} onde cada vértice possui todas as arestas incidentes com cores distintas.

Definição 3.3. (*Índice cromático*) O índice cromático de um grafo G é o número mínimo de cores necessárias para colorir todas as suas arestas de modo que duas arestas vizinhas não possuam a mesma cor. Denotaremos por $\chi'(G)$ o índice cromático de G .

Definição 3.4. (*Padrão localmente arco-íris de K_{k+1}*) Um padrão de cores localmente arco-íris é um padrão induzido por alguma coloração própria de K_{k+1} .

Um exemplo de padrão localmente arco-íris é dado na Figura 1.4.

Teorema 3.5. (*Teorema de Vizing [23]*) Todo grafo G tem índice cromático que satisfaz $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Definição 3.6. Seja G um grafo e $\Delta(G)$ o seu grau máximo. Se o índice cromático de G é tal que $\chi'(G) = \Delta(G)$, dizemos que G é de Classe 1. Se $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, dizemos que G é de Classe 2.

Teorema 3.7. [23] O grafo completo K_p é de Classe 1 se p é par e de Classe 2 se p é ímpar.

Nesse trabalho estaremos interessados em saber quando é possível encontrar uma determinada coloração dada uma lista de cores disponíveis em cada uma das arestas, um problema ligeiramente diferente do problema clássico. Para tanto utilizamos a noção de índice lista-cromático (“edge list coloring”).

Definição 3.8. (*Índice lista-cromático*) Se G é um grafo tal que cada aresta e tem uma lista não-vazia de cores l_e , dizemos que G admite uma coloração própria de lista se G possui uma coloração própria tal que a cor de cada aresta pertence à respectiva lista. O índice lista-cromático é o menor número t_G para o qual sempre existe uma coloração própria de lista para G , independentemente da atribuição de listas l_e com $|l_e| \geq t_G$. Denotamos esse número por $\chi'_l(G)$.

É claro que para qualquer grafo G , temos que $\chi(G) \leq \chi'_l(G)$, pois o índice cromático pode ser visto como o caso em que todas as listas são iguais. A desigualdade oposta é uma conjectura que foi proposta independentemente por diversos autores, como por exemplo [17].

Conjectura 3.1. (*Conjectura da coloração de lista*) Para todo grafo G temos que $\chi'_l(G) = \chi(G)$.

Em 1979 Jeff Dinitz [8] propôs como conjectura o caso particular apresentado abaixo, que foi demonstrado em 1994 por Frei Galvin.

Teorema 3.9. ([12]) *O índice cromático do grafo bipartido $K_{n,n}$ é igual a n para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Nesse trabalho não será necessário mais do que o resultado apresentado abaixo.

Teorema 3.10. ([18]) *Para todo n temos que $\chi'_l(K_n) \leq n$.*

3.1 Construindo colorações localmente arco-íris

Pretendemos apresentar um algoritmo de coloração para obter padrões localmente arco-íris. Para tanto começamos primeiro com o caso mais simples: o grafo completo K_4 .

Uma definição útil será o conceito de grafos multicoloridos.

Definição 3.11. (*Grafo multicolorido*) Seja G um grafo. Definimos um grafo multicolorido \mathbf{G} , cujos os conjuntos de vértices e arestas são iguais aos do grafo G , como um grafo em que cada aresta $e \in E(\mathbf{G})$ está associada a uma lista finita e não-vazia de cores L_e .



Figura 3.1: Do lado esquerdo um grafo G com dois vértices e uma aresta, do lado direito um possível grafo multicolorido \mathbf{G}

Podemos gerar uma coloração específica de G através do grafo multicolorido \mathbf{G} , a qual denotamos por \hat{G} ; fazemos isto escolhendo uma cor em cada lista associada as arestas de \mathbf{G} .

Definição 3.12. Dado um grafo multicolorido \mathbf{H} e um padrão P dizemos que \mathbf{H} é livre de P se não existe uma coloração possível das arestas de \mathbf{H} que possuam cópia de P . Analogamente, um grafo multicolorido \mathbf{H} é livre de uma família de padrões \mathbf{P} se for livre de todos os padrões na família.

O teorema abaixo é uma consequência do resultado provado por Galvin (Teorema 3.9), mas por completude do trabalho demonstraremos o resultado com técnicas que acreditamos podem ser generalizadas em um resultado mais geral.

Teorema 3.13. *Seja \mathbf{G} um grafo multicolorido com 4 vértices, e \mathbf{M} um emparelhamento em \mathbf{G} , onde cada aresta de \mathbf{M} tem uma lista de tamanho unitário e cada aresta de $\mathbf{G} \setminus \mathbf{M}$ está associada a uma lista com pelo menos 4 cores, então existe um modo de colorir \mathbf{G} onde cada vértice é localmente arco-íris.*

Demonstração. Iremos demonstrar para $\mathbf{G} = K_4$. Claramente o resultado segue para qualquer subgrafo de K_4 .

Considere que o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = V(\mathbf{G})$, e assumiremos, sem perda de generalidade, que as arestas emparelhadas são $\{v_1, v_2\}$ e $\{v_3, v_4\}$, e as cores fixadas são α_1, α_2 . Iremos denotar o conjunto de cores associados às arestas $\{v_i, v_j\}$ pelo conjunto $l'_{i,j}$. Observe que $|l'_{i,j}| \geq 4$ se $\{v_i, v_j\}$ não é uma aresta emparelhada. Encontraremos uma coloração localmente arco-íris para K_4 onde as listas associadas são $l_{i,j} = l'_{i,j} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$, onde $\{v_i, v_j\}$ é uma aresta não emparelhada, o que implica uma coloração localmente arco-íris para o problema original. Observe que $|l_{i,j}| \geq 2$. Assumiremos o pior caso possível e denotaremos $l_{1,3} = \{a, b\}, l_{1,4} = \{a_1, b_1\}, l_{2,4} = \{c, d\}$ e $l_{2,3} = \{c_1, d_1\}$.

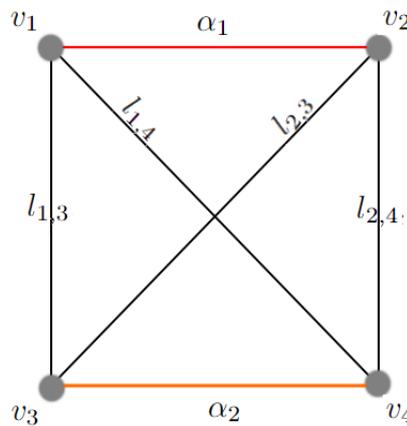


Figura 3.2: Caso em que $|l_{1,3} \cap l_{2,4}| = 1$

Assuma inicialmente que existe uma cor em comum entre os conjuntos $l_{1,3}$ e $l_{2,4}$, ou entre os conjuntos $l_{1,4}$ e $l_{2,3}$, ambos os casos são similares, como na Figura 3.2. Portanto iremos resolver o primeiro caso e o segundo irá seguir de forma análoga.

Seja c essa cor em comum. Iremos escolher essa cor para colorir as arestas $\{v_1, v_3\}$ e $\{v_2, v_4\}$. Falta colorir as arestas $\{v_1, v_4\}$ e $\{v_2, v_3\}$. Mas como inicialmente existiam 2 possibilidades de cores para cada aresta, na pior das hipóteses a cor c pertence a ambas as listas, nesse caso sobra uma opção de cor em cada lista. Desse modo podemos escolher as cores $d_1 \in l_{1,4}$ e $d_2 \in l_{2,3}$ de modo que $d_1, d_2 \notin \{\alpha_1, \alpha_2, c\}$, além disso como a escolha de d_1 não afeta a escolha de d_2 podemos concluir que existe uma coloração para o qual \mathbf{G} é localmente arco-íris.

Suponha então que $|l_{1,3} \cap l_{2,4}| = |l_{1,4} \cap l_{2,3}| = \emptyset$. Podemos particionar os casos da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad |l_{1,3} \cap l_{1,4}| = 0 & \text{(a)} \quad |l_{2,4} \cap l_{2,3}| = 0 \\
 (2) \quad |l_{1,3} \cap l_{1,4}| = 1 & \text{(b)} \quad |l_{2,4} \cap l_{2,3}| = 1 \\
 (3) \quad |l_{1,3} \cap l_{1,4}| = 2 & \text{(c)} \quad |l_{2,4} \cap l_{2,3}| = 2
 \end{array}$$

onde os casos possíveis são uma combinação entre (1-2-3) e (a-b-c). Além disso, por simetria, claramente os casos $1b$ e $2a$; $1c$ e $3a$; $2c$ e $3b$ são similares.

Caso 1a Escolha as seguintes cores: para $l_{1,3}$ tome a ; para $l_{2,4}$ tome c . Além disso, para $l_{1,4}$ tome a_1 , se $a_1 \neq c$, caso $a_1 = c$ tome b_1 ; e por fim, para $l_{2,3}$ tome c_1 , se $c_1 \neq a$ e caso $c_1 = a$ tome d_1 .

As colorações possíveis aparecem na Figura 3.3

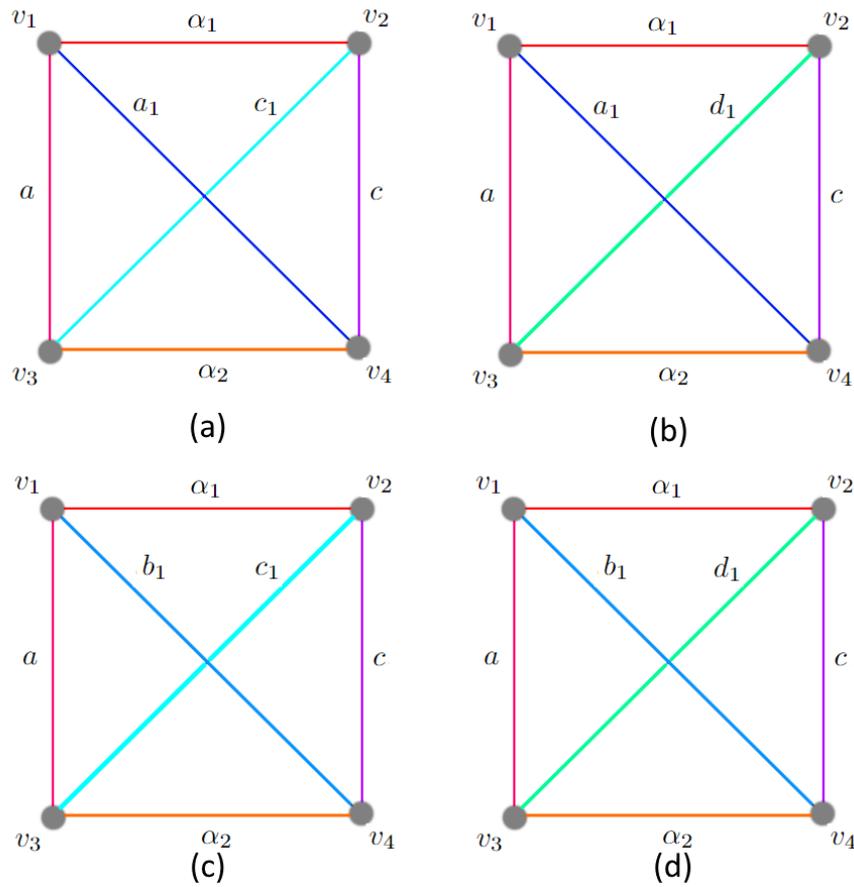


Figura 3.3: opção a: $a_1 \neq c$ e $c_1 \neq a$. Opção b: $a_1 \neq c$ e $c_1 = a$. Opção c: $a_1 = c$ e $c_1 \neq a$. Opção d: $a_1 = c$ e $c_1 = a$.

Caso 1b Vamos supor que $c_1 = c$. Portanto, escolha as seguintes cores: para $l_{1,3}$ tome a ; para $l_{2,4}$ tome d . Além disso, para $l_{1,4}$ tome a_1 , se $a_1 \neq d$, caso $a_1 = d$ tome b_1 ; para $l_{2,3}$ tome c_1 pois sabemos que $c_1 \neq a$, já que $c_1 = c$ e temos que $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$.

As colorações possíveis podem ser observadas nas Figuras 3.4 3.5.

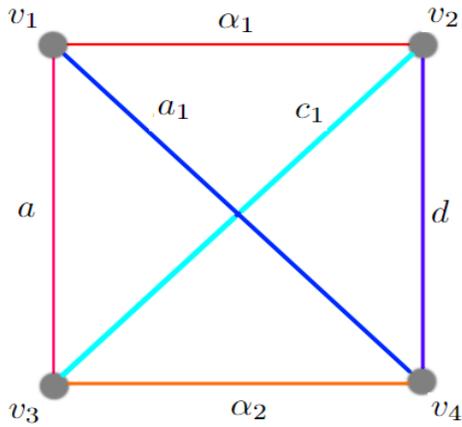


Figura 3.4: $a_1 \neq d$ e $c_1 \neq a$

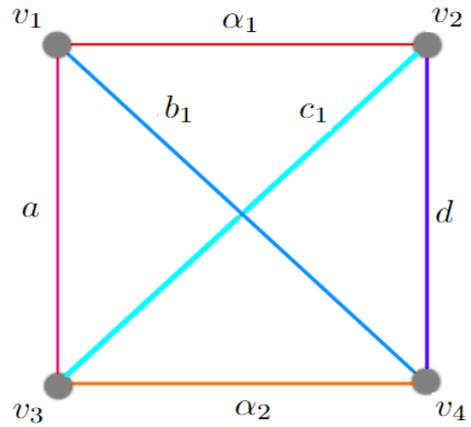


Figura 3.5: $a_1 = d$ e $c_1 \neq a$

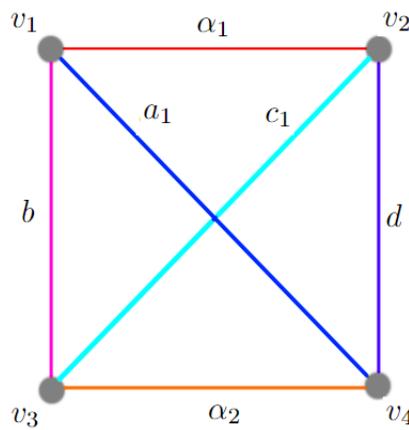


Figura 3.6: coloração possível de K_4

Caso 1c Temos nesse caso que $c_1 = c$ e $d_1 = d$. Sabemos que $a \neq c_1$, já que $c_1 = c$ e $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$. Vamos fazer a seguinte escolha de cores: escolha a para $l_{1,3}$ e d para $l_{2,4}$; escolha a_1 para $l_{1,4}$ se $a_1 \neq d$. Caso $a_1 = d$, escolha b_1 ; escolha c_1 para $l_{2,3}$. (Observe que $c_1 = c \neq d$).

Portanto as colorações válidas também são aquelas apresentadas nas Figuras 3.4 e 3.5.

Caso 2b Vamos supor que $a_1 = a$ e $c_1 = c$. Podemos fazer a seguinte escolha de cores: escolha b para $l_{1,3}$ e d para $l_{2,4}$; escolha a_1 para $l_{1,4}$ e c_1 para $l_{2,3}$. Observe que $a = a_1 \neq d$, pois $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$;

Portanto temos a configuração apresentada na Figura 3.6 é válida.

Caso 2c Suponha que $a_1 = a$. Além disso temos que $c_1 = c$ e $d_1 = d$. Temos que $c_1 \neq b$, já que $c_1 = c$ e $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$. Podemos fazer a seguinte escolha de cores: escolha b para a aresta $l_{1,3}$ e d para $l_{2,4}$; escolha c_1 para a aresta $l_{2,3}$; Escolha a_1 para $l_{1,4}$. Portanto temos a configuração apresentada na Figura 3.6.

Caso 3c Sabemos que $a_1 = a, b_1 = b$ e $c_1 = c, d_1 = d$. Além disso podemos afirmar que $c_1 \neq b$ e $d_1 \neq a_1$. Pois se $c_1 = b$ teríamos que $b = c_1 = c$, um absurdo, pois $|l_{1,3} \cap l_{2,4}| = 0$. Além disso, se $d_1 = a_1$ também teríamos um absurdo, pois $a = a_1 = d_1 = d$. Tome portanto as cores: escolha b para a aresta $l_{1,3}$ e d para a aresta $l_{2,4}$; escolha a_1 para a aresta $l_{1,4}$ e escolha c_1 para a aresta $l_{2,3}$. Novamente, a Figura 3.6 apresenta uma coloração válida.

□

Teorema 3.14. *Sejam G um grafo multicolorido com $2l$ vértices, com $l \geq 2$, e M um emparelhamento perfeito de G , tal que as arestas em M estão associadas a listas não-vazias, e cada aresta em $G \setminus M$ está associada a uma lista com $2l + 2$ cores, então existe uma coloração de G onde cada vértice é localmente arco-íris.*

Demonstração. Considere $J = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, um vetor formado por uma cor da lista de cada aresta emparelhada. Iremos encontrar uma coloração para o grafo H que será construída a partir do grafo G da seguinte forma: tome os conjuntos de arestas e vértices de H iguais aos conjuntos de arestas e vértices de G , e para as listas de cores associadas as arestas de H tome, caso a aresta pertença ao emparelhamento M uma lista qualquer de cores possíveis de tamanho $2l$, para as demais arestas considere l_e a lista de cores associadas a essa aresta em G ; iremos tomar como lista em H a lista

$l'_e = l_e \setminus \{\alpha_i, \alpha_j\}$, onde α_i, α_j são os possíveis vizinhos de l_e em relação as arestas que pertencem ao conjunto de cores fixadas J , é possível fazer essa escolha pois cada aresta fora do emparelhamento é vizinha de no máximo duas arestas em \mathbf{M} , temos assim que $|l'_e| \geq 2l$. Como cada aresta de \mathbf{H} admite pelo menos $2l$ cores nas suas arestas existe uma coloração própria de \mathbf{H} . Podemos estender essa coloração para G com o seguinte procedimento: para as arestas não emparelhadas podemos manter a mesma cor já que $l'_e \subset l_e$ e para as arestas emparelhadas iremos manter a cor inicialmente atribuída pelo vetor J , observe que a nova coloração continuará a ser própria pois as arestas emparelhadas não são vizinhas entre si e com relação as demais arestas, como $\{\alpha_i, \alpha_j\} \notin l'_e$ é impossível que alguma escolha de cor se repita. \square

Lema 3.15. *Fixe k ímpar e $s \in \{k, \dots, \binom{k+1}{2}\}$. Dados \mathbf{G} um grafo multicolorido com $k+1$ vértices e \mathbf{M} um emparelhamento perfeito de \mathbf{G} , onde cada aresta de \mathbf{M} está associada a uma lista de tamanho, pelo menos:*

$$\begin{cases} 1, & \text{se } s \in \{k, \dots, \binom{k+1}{2} - \frac{k+1}{2} + 1\} \\ s - \left(\binom{k+1}{2} - \frac{k+1}{2}\right), & \text{se } s \in \left\{\binom{k+1}{2} - \frac{k+1}{2} + 2, \dots, \binom{k+1}{2}\right\} \end{cases}$$

e as demais arestas de \mathbf{G} estão associadas a listas com tamanho pelo menos $s+2$, então existe uma coloração localmente arco-íris de \mathbf{G} com pelo menos s cores distintas.

Demonstração. Considere primeiro o caso onde $s \in \{k, \dots, \binom{k+1}{2} - \frac{k+1}{2} + 1\}$. Denotaremos o conjuntos das colorações localmente arco-íris de \mathbf{G} por $\mathcal{C}(\mathbf{G})$, sabemos, pelo Teorema 3.14 que esse conjunto é não-vazio. Seja $\hat{G} \in \mathcal{C}(\mathbf{G})$, tal que \hat{G} tenha o maior número possível de cores distintas, digamos l cores distintas. Se $l \geq s$ o resultado está provado. Suponha, por absurdo, que $l < s$.

Fixe o conjunto de arestas coloridas $J = E(\hat{G}) \setminus E(\mathbf{M})$. Seja $C(\mathbf{M})$ o conjunto de colorações distintas para o qual conseguimos colorir \mathbf{M} de modo que $I \cup J$ é uma coloração localmente arco-íris de \mathbf{G} , onde $I \in C(\mathbf{M})$. Para cada coloração em $T \in C(\mathbf{M})$ podemos considerar o número de cores distintas de T ; considere ζ a

função que associa o conjunto de coloração $C(\mathbf{M})$ com o número máximo de cores distintas alcançado por alguma coloração de $C(\mathbf{M})$.

Suponha primeiro que $\zeta(C(\mathbf{M})) = 1$. Nesse caso as arestas não emparelhadas estão coloridas com $l - 1$ cores distintas. Existem $\binom{k+1}{2} - \frac{k+1}{2}$ arestas não emparelhadas que estão coloridas com $l - 1 < s - 1 \leq \binom{k+1}{2} - \frac{k+1}{2}$ cores, desse modo alguma cor está sendo usada mais do que uma vez, no conjunto das arestas não emparelhadas. Seja e uma aresta nesse conjunto e L_e a lista de cores associadas a essa aresta; temos que, em \mathbf{G} , $|L_e| = s + 2$, logo, como o grafo \hat{G} está colorido com $l < s$ cores existe uma cor na lista L_e que não pertence a \hat{G} , portanto podemos trocar a cor da aresta por essa cor. O grafo resultado possui $l + 1$ cores distintas, um absurdo. Logo $l \geq s$.

Considere agora o caso $\zeta(C(\mathbf{M})) > 1$, fixe $\hat{T} \in C(\mathbf{M})$ a coloração que admite o número de cores distintas igual a $\zeta(C(\mathbf{M}))$. Temos duas situações agora, ou as arestas não emparelhadas estão coloridas com menos do que l cores (e nesse caso segue como anteriormente) ou elas utilizam todas as l cores, nesse caso existe alguma aresta não emparelhada que está colorida com alguma cor de \hat{T} . Seja e essa aresta e L_e a lista de cores associadas a essa aresta; temos que, em \mathbf{G} , $|L_e| = s + 2$, logo, como o grafo \hat{G} está colorido com $l < s$ cores existe uma cor na lista L_e que não pertence a \hat{G} , portanto podemos trocar a cor da aresta por essa cor. O grafo resultado possui $l + 1$ cores distintas, um absurdo. Logo $l \geq s$.

Agora iremos demonstrar o segundo caso. Fixe $s \in \{\binom{k+1}{2} - \frac{k+1}{2} + 2, \dots, \binom{k+1}{2}\}$. Iremos proceder de forma análoga a demonstração anterior, mas agora é necessário que as arestas emparelhadas tenham ao menos $s - (\binom{k+1}{2} - \frac{k+1}{2})$ cores distintas para ser possível completar a coloração.

Sabemos, pelo Teorema 3.15, que o conjunto $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ é não-vazio. Seja $\hat{G} \in \mathcal{C}(\mathbf{G})$, tal que \hat{G} tenha o maior número possível de cores distintas, digamos l cores distintas. Suponha, por absurdo, que $l < s$.

Sabemos que $\zeta(C(\mathbf{M})) \geq s - \left(\binom{k+1}{2} - \frac{k+1}{2}\right)$. Seja $\hat{T} \in C(\mathbf{M})$ qualquer coloração que admite o maior número possível de cores distintas.

Considere primeiro o caso em que não existe nenhuma cor em comum entre \hat{T} e $\hat{G} \setminus M$. Como existem $\binom{k+1}{2} - \frac{k+1}{2}$ arestas não emparelhadas que estarão coloridas com no máximo $l - \zeta(C(\mathbf{M}))$ cores distintas e $l - \zeta(C(\mathbf{M})) < s - \zeta(C(\mathbf{M})) \leq \binom{k+1}{2} - \frac{k+1}{2}$ isso implica que alguma cor está sendo usada mais de uma vez, no conjunto das arestas não emparelhadas. Seja e uma aresta nesse conjunto e L_e a lista de cores associadas a essa aresta; temos que $|L_e| = s + 2$, logo, como o grafo \hat{G} está colorido com $l < s$ cores existe uma cor na lista L_e que não pertence a \hat{G} , portanto podemos trocar a cor da aresta por essa cor. O grafo resultado possui $l + 1$ cores distintas, um absurdo. Logo $l \geq s$.

Considere agora que o conjunto de cores entre \hat{T} e $\hat{G} \setminus M$ é não-vazio.

Seja c uma cor em comum entre \hat{T} e $\hat{G} \setminus M$ e a aresta não emparelhada $e \in \hat{G}$ a aresta associada a essa cor. Seja L_e a lista de cores associada a essa aresta. Temos que $|L_e| = s + 2$. Logo, como $l < s$ existe uma cor na lista L_e que não pertence a \hat{G} portanto podemos trocar a cor da aresta e por alguma cor que não pertence a \hat{G} . O grafo resultante possui $l + 1$ cores distintas, um absurdo. Logo $l \geq s$.

□

3.2 Resultados do tipo imersão: encontrando cotas para colorações localmente arco-íris.

Os resultados nessa seção se concentram em demonstrar que, em determinadas situações, não podemos adicionar arestas demais em um grafo sem criar uma cópia de um grafo localmente arco-íris, portanto optamos por chamar de resultados do tipo “imersão”.

Teorema 3.16. *Fixe $s \in \{\sigma(k), \dots, \binom{k+1}{2}\}$, onde $\sigma(k) = k$ se $k + 1$ for par e $\sigma(k) = k + 1$ caso contrário. Seja \mathbf{H}' um grafo multicolorido com m vértices que é $K_{k+1}^{LR}(s)$ -livre e seja $\mathbf{W}' \subset \mathbf{H}'$ um grafo k -partido. Considere que as arestas em \mathbf{W}' estão associadas a listas com pelo menos $s + 2$ cores e as arestas em \mathbf{H}' estão associadas a listas com pelo menos:*

$$\begin{cases} 1 \text{ cor, se } s \in \{\sigma(k), \dots, \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1\} \\ s - \left(\binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor\right) \text{ cores, se } s \in \left\{\binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 2, \dots, \binom{k+1}{2}\right\}. \end{cases}$$

Suponha também que $e(\mathbf{W}') = \text{ex}(m, K_{k+1}) - 2\sigma m^2$, onde $0 < \sigma < \frac{1}{4m^2}(\binom{m}{2} - \text{ex}(m, K_{k+1}))$. Então $e(\mathbf{H}') - e(\mathbf{W}') \leq 6\sigma m^2$.

Demonstração. Nessa demonstração, em nome da simplicidade, iremos efetuar algumas vezes a união entre um grafo e um conjunto de arestas, entenda nesse caso essa operação como o resultado obtido com a união de um grafo com o grafo gerador daquele conjunto de arestas. Seja $D = E(\mathbf{H}') \setminus E(\mathbf{W}')$

Suponha por absurdo que $|D| > 6\sigma m^2$, portanto existe um determinado grafo $N_1 = \mathbf{W}' \cup D_1$, onde $D_1 \subset D$ e $|D_1| = 6\sigma m^2$. Precisamos checar se é possível realmente adicionar tantas arestas em D . Observe que $e(N_1) = \text{ex}(m, K_{k+1}) + 4\sigma m^2$, temos, por outro lado, $\text{ex}(m, K_{k+1}) + 4\sigma m^2 \leq \binom{m}{2} = e(K_m)$.

Como $e(\mathbf{W}') = \text{ex}(m, K_{k+1}) - 2\sigma m^2$ e \mathbf{W}' é k -partido ao se considerar a partição V_1, \dots, V_k de $V(\mathbf{W}')$, temos que apenas $2\sigma m^2$ das arestas de D_1 podem ser arestas do tipo $E(V_i, V_j)$. Portanto considere $D_2 \subset D_1$, de modo que D_2 é o conjunto de arestas de D_1 com dois vértices na mesma classe, temos $|D_2| \geq 4\sigma m^2$.

Podemos considerar o grafo obtido através das arestas de D_2 e sabemos, pelo Teorema 2.9, que existe um grafo bipartido que é subconjunto desse grafo e preserva mais do que metade das suas arestas. Seja D_3 o conjunto de arestas desse grafo. Temos assim $D_3 \subset D_2$, com $|D_3| > |D_2|/2$

Seja $N_2 = \mathbf{W}' \cup D_3$. Temos que $e(N_2) > \text{ex}(m, K_{k+1})$, portanto, pelo Teorema de Turán, existe $K_{k+1} \in N_2$.

Observe que essa cópia de K_{k+1} possui no máximo $(k+1)/2$ arestas em N_2 . Isso acontece porque em cada V_1, \dots, V_k podemos ter no máximo dois vértices dessa cópia, já que D_3 não produz triângulo. Além disso as arestas em N_2 possuem listas de cores associadas de tamanho pelo menos:

$$\begin{cases} 1 & \text{se } s \in \{\sigma(k), \dots, \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1\}, \\ s - \left(\binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor \right), & \text{se } s \in \left\{ \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 2, \dots, \binom{k+1}{2} \right\}, \end{cases}$$

e as demais arestas estão associadas a listas de tamanho pelo menos $s + 2$ cores. Portanto, se $k+1$ for par, pelo Lema 3.15, podemos colorir com um padrão localmente arco-íris com no mínimo s cores distintas, o que configura em um absurdo, já que $N_2 \subset H'$. Caso $k+1$ seja ímpar iremos aplicar o Lema 3.15 para o subgrafo $T = K_{k+1} \setminus \{v\}$, para algum vértice v . Para cada aresta $\{v, v_i\}$ fixe uma cor α_i , e para cada aresta de cores disponíveis em T podemos tomar a lista antiga excluindo a cor α_i , e aplicar o Lema 3.15, temos então que existe uma coloração localmente arco-íris com pelo menos $s - 1$ cores. Para concluir podemos completar com a coloração fixada inicialmente, já que cada α_i não pertence a vizinhança de v_i ; caso a coloração final tenha pelo menos s cores distintas temos a contradição desejada. Suponha que a coloração obtida tenha exatamente $s - 1$ cores distintas. Para $s \leq \binom{k+1}{2} - \frac{k}{2} + 1$, como existem $\binom{k+1}{2}$ e no máximo $\binom{k+1}{2} - \frac{k}{2}$ cores distintas temos que alguma cor aparece repetida em alguma aresta não emparelhada, já que existem $\frac{k}{2}$ arestas emparelhadas. Podemos trocar a cor dessa aresta por alguma cor que não aparece na coloração, já que cada aresta está associada a uma lista com $s + 2$ cores. Para quando $s > \binom{k+1}{2} - \frac{k}{2} + 1$, podemos repetir os argumentos apresentados no Lema 3.15, os quais repetiremos por questão de completude. Considere \mathbf{M} o emparelhamento perfeito do grafo T .

Fixe o conjunto de arestas coloridas $J = E(K_{k+1}) \setminus E(\mathbf{M})$. Seja $C(\mathbf{M})$ o conjunto de colorações distintas para o qual conseguimos colorir \mathbf{M} de modo que $I \cup J$ é uma coloração localmente arco-íris de K_{k+1} , onde $I \in C(\mathbf{M})$. Para cada coloração em $S \in C(\mathbf{M})$ podemos considerar o número de cores distintas de S ; considere ζ a função que associa o conjunto de coloração $C(\mathbf{M})$ com o número máximo de cores distintas alcançado por alguma coloração de $C(\mathbf{M})$. Sabemos que $\zeta(C(\mathbf{M})) \geq s - \left(\binom{k+1}{2} - \frac{k}{2}\right)$. Seja $\hat{T} \in C(\mathbf{M})$ qualquer coloração que admite o maior número possível de cores distintas.

Considere primeiro o caso em que não existe nenhuma cor em comum entre \hat{T} e $K_{k+1} \setminus M$. Como existem $\binom{k+1}{2} - \frac{k}{2}$ arestas não emparelhadas que estarão coloridas com no máximo $s-1-\zeta(C(\mathbf{M}))$ cores distintas e $s-1-\zeta(C(\mathbf{M})) < \binom{k+1}{2} - \frac{k}{2}$ isso implica que alguma cor está sendo usada mais de uma vez, no conjunto das arestas não emparelhadas. Seja e uma aresta nesse conjunto e L_e a lista de cores associadas a essa aresta; temos que $|L_e| = s+2$, logo podemos trocar a cor da aresta por essa cor. O grafo resultado possui s cores distintas, um absurdo.

Considere agora que o conjunto de cores entre \hat{T} e $K_{k+1} \setminus M$ é não-vazio.

Seja c uma cor em comum entre \hat{T} e $K_{k+1} \setminus M$ e a aresta não emparelhada $e \in \hat{G}$ a aresta associada a essa cor. Seja L_e a lista de cores associada a essa aresta. Temos que $|L_e| = s+2$. Logo existe uma cor na lista L_e que não pertence a coloração fixada inicialmente, portanto podemos trocar a cor da aresta e por alguma cor que não pertence a coloração. O grafo resultante possui s cores distintas, um absurdo. \square

Para o próximo teorema iremos precisar de um resultado auxiliar para colorações.

Lema 3.17. *Seja $k \in \mathbb{N}^*$. Considere K_{k+1} o grafo completo com $k+1$ vértices e considere que uma de suas arestas está associada a uma lista não-vazia de qualquer tamanho e as demais estão associadas a listas com pelo menos $s+3$ cores. Então*

existe uma escolha de cores nas listas correspondentes que formam uma coloração própria de K_{k+1} com pelo menos s cores.

Demonstração. Seja $e \in E(K_{k+1})$ a aresta associada a lista não-vazia e fixe α uma cor dessa lista. Para cada lista l_e associada a pelo menos $s + 3$ cores considere a lista auxiliar $l'_e = l_e \setminus \{\alpha\}$. Considere agora que $k + 1$ é par, e uma lista qualquer de cores l_f , com tamanho $s + 2$ de modo que $\alpha \notin l_f$. O grafo completo K_{k+1} onde cada aresta ao invés de estar associada a lista l_e está associada a lista l'_e e a aresta e está associada a lista l_f admite uma coloração própria pelo Lema 3.15, além disso, como $l'_e \subset l_e$ a mesma coloração a vale para o problema original, exceto para a aresta e , mas podemos tomar essa cor igual a α , pois $\alpha \notin l'_e$ para toda aresta na coloração escolhida.

Caso $k + 1$ seja ímpar escolhamos um vértice $v \in K_{k+1}$ e consideramos o grafo $T = K_{k+1} \setminus \{v\}$. Para cada aresta $\{v, v_i\}$ iremos fixar uma cor α_i , e para cada aresta de cores disponíveis em T podemos tomar a lista antiga excluindo a cor α_i , e aplicar o procedimento descrito para o caso par. Para concluir podemos completar com a coloração fixada inicialmente, o que é um absurdo. \square

Teorema 3.18. *Sejam \mathbf{H}' um grafo multicolorido com m vértices, $K_{k+1}^{LR}(s)$ -livre e $\mathbf{H}'' \subset \mathbf{H}'$, um grafo multicolorido k -partido. Considere que as arestas em \mathbf{H}'' estão associadas a listas com pelo menos $s + 3$ cores, e as arestas em \mathbf{H}' estão associadas a listas com pelo menos uma cor. Seja $e(\mathbf{H}'') \geq \text{ex}(m, K_{k+1}) - 2\sigma m^2$, onde $0 < \sigma < \frac{1}{4km^2}(\binom{m}{2} - \text{ex}(m, K_{k+1}))$, então $e(\mathbf{H}') - e(\mathbf{H}'') \leq (4k + 2)\sigma m^2$.*

Demonstração. Como no Teorema 3.16, iremos ser lenientes com a notação da união. Seja $D = E(\mathbf{H}') \setminus E(\mathbf{H}'')$. Vamos mostrar que $|D| \leq (4k + 2)\sigma m^2$. De fato, suponha por absurdo que $|D| > (4k + 2)\sigma m^2$, podemos então fixar o grafo $N_1 = H'' \cup D_1$, onde $D_1 \subset D$ e $|D_1| = (4k + 2)\sigma m^2$.

Como $e(\mathbf{H}'') \geq \text{ex}(m, K_{k+1}) - 2\sigma m^2$ e \mathbf{H}'' é k -partido, considerando uma partição V_1, \dots, V_k de $V(\mathbf{H}'')$, apenas $2\sigma m^2$ arestas de D_1 podem ser arestas do tipo $e(V_i, V_j)$ as demais $4k\sigma m^2$ arestas são internas dos conjuntos V_i de N_1 , chamaremos esse conjunto de arestas de $D_2 \subset D_1$.

Como H'' é um grafo k -partido, existe uma classe da partição, digamos V_1 tal que V_1 tem mais do que $4\sigma m^2$ arestas de D_2 . Pelo Teorema 2.9 existe um grafo N_2' bipartido de tal modo que V_1 tem mais do que $2\sigma m^2$ arestas de D_2 , chamaremos o conjunto de arestas novas restritas a V_1 de N_2 . Temos assim que $T = \mathbf{H}'' \cup N_2$ satisfaz $e(T) > \text{ex}(m, K_{k+1})$, portanto existe $K_{k+1} \in T$.

Note que no máximo uma das arestas dessa cópia de K_{k+1} pode estar em N_2 , e as demais são arestas em \mathbf{H}'' que são arestas associadas a listas com pelo menos $s+3$ cores, desse modo podemos colorir esse K_{k+1} com um padrão localmente arco-íris com pelo menos s cores, utilizando o Lema 3.17, o que configura em um absurdo, já que $T \subset \mathbf{H}'$. \square

Iremos enunciar um resultado parecido para o K_4 , mas ao invés de utilizar o Lema 3.15 para colorir a cópia proibida iremos fazer uso do Teorema 3.10, o que melhora um pouco as restrições da demonstração. A prova será suprimida por ser idêntica ao resultado já apresentado.

Teorema 3.19. *Seja \mathbf{H}' um grafo multicolorido com m vértices livre de K_4 localmente arco-íris, e seja $\mathbf{W}' \subset \mathbf{H}'$, um grafo 3-partido. Considere que as arestas em \mathbf{W}' estão associadas a listas com pelo menos 4 cores, e as arestas em \mathbf{H}' estão associadas a listas com pelo menos 2 cores. Suponha também $0 < \sigma < \frac{1}{72}$ e $e(\mathbf{W}') \geq \text{ex}(m, K_4) - 2\sigma m^2$. Então $e(\mathbf{H}') - e(\mathbf{W}') \leq 6\sigma m^2$.*

4 RESULTADOS GERAIS EM TEORIA EXTREMAL DOS GRAFOS

Nesse capítulo iremos introduzir alguns resultados clássicos dentro da área de Combinatória Extremal que serão fundamentais para desenvolver o resultado proposto por esse texto.

Definição 4.1. (*Densidade das arestas*) Sejam $A, B \subset V(G)$, onde G é um grafo e A e B são disjuntos e não vazios. Definimos a densidade entre os conjuntos pela expressão

$$d(A, B) = \frac{e(A, B)}{|A||B|},$$

onde $e(A, B) := |\{(x, y) : \{x, y\} \in E(G), x \in A \text{ e } y \in B\}|$.

Definição 4.2. (*Par ϵ -regular*) Sejam um grafo G e subconjuntos disjuntos A e B do seu conjunto de vértices. Dado $\epsilon > 0$ se, para quaisquer $X \subset A$ e $Y \subset B$, tais que $|X| > \epsilon|A|$ e $|Y| > \epsilon|B|$, temos que

$$|d(X, Y) - d(A, B)| < \epsilon,$$

diremos que o par (A, B) é ϵ -regular.

Lema 4.3. Se (A, B) é um par ϵ -regular com densidade $d > \epsilon$ e $Y \subset B$ tem tamanho $|Y| \geq \epsilon|B|$, então todos os vértices de A , a menos de no máximo $\epsilon|A|$ vértices, têm no mínimo $(d - \epsilon)|Y|$ vizinhos em Y .

Demonstração. Se existe um subconjunto $X \subset A$ de tamanho $|X| \geq \epsilon|A|$ onde cada vértice em X tem menos do que $(d - \epsilon)|Y|$ vizinhos em Y , então a densidade do par (X, Y) é

$$d(X, Y) < \frac{|X|(d - \epsilon)|Y|}{|X||Y|} = d - \epsilon,$$

o que contradiz a ϵ -regularidade do par (A, B) . □

Definição 4.4. (*Partição ϵ -regular*) Dado um grafo G , dizemos que uma partição do conjunto de vértices de G , a saber, V_1, V_2, \dots, V_m é ϵ -regular se a partição é equilibrada, e existem no máximo $\epsilon \binom{m}{2}$ pares (V_i, V_j) que não são ϵ -regulares.

Definição 4.5. (*Partição ϵ -regular multicolorida*) Dado um grafo colorido $\hat{G} = (V, E)$, a partição de $V(\hat{G}) = V_1 \cup \dots \cup V_m$ é uma partição ϵ -regular multicolorida com r cores se, para qualquer grafo $\hat{G}_i = (V, E_i)$, onde E_i é o conjunto de arestas de E com cor i , V_1, \dots, V_m é uma partição ϵ -regular em \hat{G}_i .

Definição 4.6. (*Grafo reduzido associado a uma partição regular*) Seja V_1, \dots, V_m uma partição ϵ -regular de G e seja $\eta > 0$. Dizemos que $H(\eta)$ é o grafo reduzido de G associado à partição se $H(\eta)$ tem m vértices, e existe uma aresta $\{i, j\}$ quando o par (V_i, V_j) é regular e sua densidade de arestas é maior do que η .

Definição 4.7. (*Grafo reduzido multicolorido*) Dado $\eta > 0$, podemos definir $\mathbf{H}(\eta)$ o grafo reduzido multicolorido a partir da partição ϵ -regular multicolorida V_1, \dots, V_m do grafo colorido \hat{G} , colorido com r cores. Considere para cada cor $c \in \{1, \dots, r\}$, $H_c(\eta)$ o grafo reduzido de \hat{G}_c , a restrição de \hat{G} às arestas na cor c . O conjunto das arestas de $\mathbf{H}(\eta)$ será formado pelas arestas $e \in \cap E(H_c)$, onde $e = (v_i, v_j)$, com $v_i \in V_i$ e $v_j \in V_j$, de modo que (V_i, V_j) é um par ϵ -regular para todo c , além disso iremos associar para cada aresta $e \in \mathbf{H}(\eta)$ uma lista de cores l_e , tal que $j \in l_e$ se $e \in H_j(\eta)$.

Um dos principais resultados técnicos utilizados na demonstração de resultados extremais é o Lema de Regularidade de Szemerédi, que garante a existência de partições ϵ -regulares. Apresentamos a seguir uma versão desse lema para grafos coloridos. A prova será suprimida.

Teorema 4.8. (*Lema da Regularidade*) Dados $\epsilon > 0$ e $r \in \mathbb{N}$, existe $M = M(\epsilon, r)$, tal que, se \hat{G} , grafo com $n > M$ vértices, é r -colorido, com $E(\hat{G}) = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_r$ a partição das arestas de \hat{G} por suas respectivas cores, então existe uma partição de $V(\hat{G}) = V_1 \cup \dots \cup V_m$, com $1/\epsilon \leq m \leq M$, partição ϵ -regular, com respeito a todos os subgrafos induzidos $\hat{G}_i = (V, E_i)$, para $1 \leq i \leq r$.

O número de vértices para o qual o Lema da Regularidade funciona costuma ser grande. Um exemplo que majora esse número é o seguinte teorema:

Teorema 4.9. [13] *Para $\epsilon < 1/4$ existe uma constante c tal que o limitante $M(\epsilon)$ para o número de partes obtidas pelo Lema da Regularidade é no mínimo uma torre de 2 com altura pelo menos $c\epsilon^{-2}$*

A seguir temos um lema do tipo imersão para o caso de interesse desse estudo. Os resultados de imersão são aqueles que permitem encontrar um determinado padrão em um grafo devido a alguma característica estrutural. Para enunciá-lo, utilizaremos a noção de isomorfismo de cores, que pode ser consultada na Definição 1.3.

Teorema 4.10. (Lema da Imersão) [6] *Para cada $\eta > 0$ e $k, r \in \mathbf{N}$ existem $\varepsilon = \varepsilon(r, \eta, k) > 0$ e um inteiro positivo $n_0(r, \eta, k)$ tais que, dado um grafo colorido \hat{G} , com $n \geq n_0$ vértices, com uma partição dos vértices de G dada pelos conjuntos V_1, \dots, V_m com a seguinte propriedade: Seja $\mathbf{H}(\eta)$ o grafo reduzido multicolorido obtido da partição $V(\hat{G}) = V_1 \cup \dots \cup V_m$ e \hat{F} um grafo com k vértices colorido com $t \leq r$ cores. Se existe um isomorfismo de cores ϕ de \hat{F} em um subgrafo de $\mathbf{H}(\eta)$, então o grafo colorido \hat{G} contém uma cópia do padrão de \hat{F} .*

Demonstração. Sejam u_1, \dots, u_k os vértices de \hat{F} . As arestas de \hat{F} são denotadas por $e_{i,j} = \{u_i, u_j\}$ e as cores por $c_{i,j}$. Seja $N_v(G)_c$ o conjunto de vizinhos de v que estão conectados a v através da cor c .

Iremos escolher os vértices $v_1, \dots, v_k \in V(\hat{G})$ que geram uma cópia de \hat{F} em \hat{G} indutivamente. Através do isomorfismo de cores (Definição 1.3) temos as bijeções f e g , onde f é a bijeção entre os vértices e g a bijeção de cores; podemos fixar os conjuntos $Y_i^0 = V_{f(u_i)}$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. A ideia é escolher $v_1 \in Y_i^0$ com a seguinte propriedade, para todo i , tal que $e_{1,i} \in E(\hat{F})$, o vértice v_1 tem pelo menos $(\eta - \epsilon)|Y_i^0|$ vizinhos em Y_i^0 que são conectados por uma aresta de cor $g(c_{1,j})$

ao vértice v_1 . Pela definição de \mathbf{H} , e pelo Lema 4.3, isso pode ser feito se $|Y_1^0| > (k-1)\epsilon|Y_1^0| \geq d_F(u_1)\epsilon|Y_1^0|$, onde $d_F(u_1)$ é o número de vizinhos de u_1 em \hat{F} . Para $i \geq 2$ tal que $e_{1,i} \in E(\hat{F})$ defina $Y_i^1 = Y_i^0 \cap N_{v_i}(G)_{g(c_{1,i})}$, caso contrário $Y_i^1 = Y_i^0$. Note que $|Y_i^1| \geq (\eta - \epsilon)|Y_i^0|$, para todo $i \geq 2$. Indutivamente, assuma que v_1, \dots, v_{j-1} já foram escolhidos e já foram definidos os conjuntos $Y_i^{j-1} \subset V_{f(u_i)}$, para $i \geq j$, tais que $|Y_i^{j-1}| \geq (\eta - \epsilon)^{j-1}|Y_i^0|$, e todos os vértices de Y_i^{j-1} são adjacentes a v_l com cor $g(c_{l,i})$, sempre que $l < j$ e $e_{l,i} \in E(\hat{F})$. Enquanto

$$|Y_j^{j-1}| - |\{i : i > j \text{ e } e_{i,j} \in E(F)\}| \epsilon |Y_j^0| \geq j \quad (4.1)$$

e $|Y_i^{j-1}| > \epsilon|Y_i^0|$ para todo $i > j$, podemos aplicar o Lema 4.3 para o par ϵ -regular (Y_j^0, Y_i^0) e o subconjunto $Y_i^{j-1} \subset Y_i^0$ para obter $v_j \in Y_j^{j-1} \setminus \{v_1, \dots, v_{j-1}\}$ com a seguinte propriedade:

$$|Y_i^{j-1} \cap N_{v_j}(G)_{g(c_{j,i})}| \geq (\eta - \epsilon)^j |Y_i^0|$$

para todo $i > j$ tal que $e_{j,i} \in E(\hat{F})$. Então fixe $Y_i^{j-1} \cap N_{g(c_{j,i})}(v_j)$ se $e_{j,i} \in E(F)$ e $Y_i^j = Y_i^{j-1}$ caso contrário. Esse processo permite encontrar uma cópia de \hat{F} em \hat{G} se fixarmos $\epsilon = \epsilon(\eta, k) > 0$ pequeno o suficiente para satisfazer

$$(\eta - \epsilon)^{k-1} \geq k\epsilon \quad (4.2)$$

e se escolhermos $n > n_0 \geq M \frac{k}{\epsilon}$, onde $M = M(r, \epsilon)$ é definido pelo Lema da Regularidade. A condição 4.2 implica que o processo acima satisfaz $|Y_j^{j-1}| \geq k\epsilon|Y_j^0|$ para todo $j \geq k$. Além disso, a escolha de n_0 garante que, para todo j , tenhamos $\epsilon|Y_j^0| \geq \epsilon n/M \geq k \geq j$. Então podemos garantir a validade de (4.1), já que

$$\begin{aligned} |Y_j^{j-1}| &\geq k\epsilon|Y_j^0| + (k-1)\epsilon|Y_j^0| \\ &\geq j + |\{i : i > j \text{ e } e_{i,j} \in E(F)\}| \epsilon |Y_j^0|. \end{aligned}$$

□

O teorema abaixo é uma consequência de um teorema demonstrado por Füredi.

Teorema 4.11. [11, Theorem 1] *Dados $\alpha > 0$ fixo e $k \in \mathbb{N}$. Então, existe m_1 tal que cada grafo G livre de uma cópia de K_{k+1} , $|V(G)| = m \geq m_1$, tal que $|E(G)| \geq \text{ex}(m, K_{k+1}) - \alpha m^2$, então existe uma partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ com $\sum_{i=1}^k e(V_i) \leq \alpha m^2$,*

Também faremos uso da proposição abaixo.

Proposição 4.12. [16] *Seja $G = (V, E)$ um grafo k -partido com m vértices e k -partição $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_k$. Se, para algum $t \geq k^2$, o grafo G contém pelo menos $\text{ex}(m, K_{k+1}) - t$ arestas, então para todo $i \in [k]$ temos:*

$$\left| |V_i| - \frac{m}{k} \right| < \sqrt{2t}.$$

Demonstração. Se $|V_k| = x$, então G contém no máximo

$$x(m-x) + \binom{k-1}{2} \left(\frac{m-x}{k-1} \right)^2$$

arestas. Para o segundo somatório usamos o fato que se $a_1 + \dots + a_{k-1} = M$ está fixado, então $\sum_{1 \leq i < j \leq k-1} a_i a_j$ é máximo quando $a_1 = \dots = a_{k-1} = M/(k-1)$. Desse modo,

$$x(m-x) + \binom{k-1}{2} \left(\frac{m-x}{k-1} \right)^2 \geq \text{ex}(m, K_{k+1}) - t \geq \frac{(k-1)m^2}{2k} - k - t,$$

a última desigualdade segue pela cota da Eq. (1.1). De onde podemos concluir que

$$x^2 - \frac{2}{k}mx + \frac{1}{k^2}m^2 - \frac{2(k-1)}{k}t - 2(k-1) \leq 0.$$

Portanto

$$\left| x - \frac{m}{k} \right| \leq \sqrt{\frac{2(k-1)}{k}t + 2(k-1)} \leq \sqrt{2t},$$

para $t \geq k^2$ conforme o desejado.

□

5 ESTABILIDADE E RESULTADO EXATO

Nesse capítulo iremos demonstrar os dois principais resultados desse texto. Primeiramente demonstraremos que para a família de padrões localmente arco-íris $K_{k+1}^{LR}(s)$, para s e k fixados e r suficientemente grande, se existem muitas colorações de um grafo G evitando a família $K_{k+1}^{LR}(s)$ então o grafo G deve ser “próximo” do grafo de Turán $T_k(n)$, no sentido de admitir uma partição do seu conjunto de vértices em k classes com poucas arestas internas. Esse resultado mostra que o grafo extremal para o Problema de Erdős-Rothschild e próximo do grafo extremal para o problema de Turán e é objeto da Seção 5.1. O resultado que conclui a demonstração do Teorema 5.2, no sentido que demonstra que o grafo extremal é o grafo de Turán, será abordado da Seção 5.3. Iremos abordar o caso particular $K_4(s)$ que admite cotas ligeiramente melhores na Seção 5.1.1 e apresentaremos um resultado de estabilidade para uma nova família de padrões proibidos que acreditamos ser instigantes na Seção 5.2.

5.1 Um resultado de estabilidade para colorações localmente arco-íris

Iniciamos esta seção lembrando a definição da família $K_{k+1}^{LR}(s)$.

Definição 5.1. *Considere $K_{k+1}^{LR}(s)$ a família dos padrões de K_{k+1} que são localmente arco-íris de modo que cada padrão contenha pelo menos s cores distintas, em que s satisfaz $\sigma(k) \leq s \leq \binom{k+1}{2}$, com $\sigma(k) = k$ se k é ímpar e $\sigma(k) = k+1$, caso contrário.*

Enunciamos novamente a definição da função $r_0(k, s)$:

$$r_0(k, s) = \begin{cases} (s+2)^7 & \text{se } s \in \{\sigma(k), \dots, \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1\} \\ (s+2)^{4k+3} & \text{para } s \in \{\binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 2, \dots, \binom{k+1}{2}\}, \end{cases} \quad (5.1)$$

com $\sigma(k) = k$, se $k + 1$ for par e $\sigma(k) = k + 1$ caso contrário. O teorema abaixo será fundamental para a demonstração do resultado exato enunciado no Teorema 1.11.

Teorema 5.2. *Sejam $k \geq 3$, $s \in \{\sigma(k), \dots, \binom{k+1}{2}\}$ e $r > r_0(k, s)$ inteiros positivos, em que $r_0(k, s)$ foi definido em (5.1) e $\sigma(k) = k$ se $k + 1$ for par ou $\sigma(k) = k + 1$ caso contrário. Então, para cada $\delta > 0$ existe um inteiro positivo n_0 tal que, se G é um grafo com $|V(G)| = n \geq n_0$ vértices e, além disso, existam pelo menos $r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}$ colorações livres de $K_{k+1}^{LR}(s)$ para as arestas de G , então existe uma partição $V(G) = W_1 \cup \dots \cup W_k$ tal que $\sum_{i=1}^k e(W_i) < \delta n^2$.*

Na demonstração desse resultado, utilizaremos a função entropia, que é particularmente útil para obtenção de cotas para coeficientes binomiais.

Definição 5.3. (*Função entropia*) Considere $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a função

$$f(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x) \quad 0 < x < 1,$$

com $f(0) = f(1) = 0$. Note que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Um dos motivos para considerar a função entropia é a relação

$$\binom{n}{\alpha n} \leq 2^{f(\alpha)n} \tag{5.2}$$

com $0 \leq \alpha \leq 1$. Além disso, observe que para $x \leq 1/2$

$$f(x) \leq -2x \log_2 x. \tag{5.3}$$

Demonstração do Teorema 5.2. Nessa demonstração iremos considerar dois casos: para $s \in \{\sigma(k), \sigma(k) + 1, \dots, \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1\}$ e $s \in \{\binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 2, \dots, \binom{k+1}{2}\}$.

Fixe $k \geq 3$. Tome $s \in \{\sigma(k), \dots, \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1\}$ e fixe $r \geq r_0(k, s)$.

Escolha $\eta > 0$ tal que

$$\eta < \frac{\delta}{2r}, \quad f(2r\eta) + r\eta < \min \left\{ \frac{\delta}{14(4k + 3)}, \frac{1}{56k} \right\}, \tag{5.4}$$

onde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função entropia. Pelo Lema da Imersão (Teorema 4.10), existem $n_0 = n_0(r, \eta, k)$ e $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(r, \eta, k)$ para os quais valem as propriedades do seu enunciado. Escolha $\epsilon < \min\{\eta/2, \bar{\epsilon}\}$, logo, pelo Lema da Regularidade (Teorema 4.8), existe $M = M(\epsilon, r)$ para o qual valem as propriedades do Lema da Regularidade.

Suponha que, para algum n suficientemente grande, existe um grafo G com n vértices, tal que G possui mais do que $r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}$ colorações livres de $K_{k+1}^{LR}(s)$. Seja $\mathcal{C}(G)$ o conjunto de todas as colorações de G livres de $K_{k+1}^{LR}(s)$. Pelo Teorema 4.8 cada coloração de G pode ser associada a um par $(P, \mathbf{H}(\eta))$ de forma que P é uma partição multicolorida ϵ -regular e $\mathbf{H}(\eta)$ é o grafo reduzido multicolorido associado. Para simplificar a notação iremos separar as arestas do grafo reduzido multicolorido de acordo com o tamanho das listas de cores associadas, considere portanto l_e a lista associada a aresta e , e denote

$$E_j(\mathbf{H}) = \{e \in \mathbf{H}(\eta) : |l_e| = j\}. \quad (5.5)$$

Seja $e_j(\mathbf{H}) = |E_j(\mathbf{H})|$. Temos assim

$$|\mathcal{C}(G)| \leq \sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)|, \quad (5.6)$$

onde $\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)$ representa o conjunto das colorações de G associadas ao par $(P, \mathbf{H}(\eta))$.

Podemos, portanto, encontrar uma cota para o número de colorações de G contando o número de colorações para cada par $(P, \mathbf{H}(\eta))$ fixo. Existe um conjunto de arestas que não são representadas pelo par $(P, \mathbf{H}(\eta))$, onde P é a partição V_1, \dots, V_m . São elas:

1. As arestas cujas cores são pouco densas para o par (V_i, V_j) .
2. As arestas entre os pares irregulares.

3. As arestas internas de cada V_i .

Além disso, para todas as demais arestas, podemos modificar suas cores desde que não altere a lista de cores associadas para cada aresta associada ao grafo reduzido multicolorido $\mathbf{H}(\eta)$. Para o item (i) existem no máximo

$$r\eta \binom{m}{2} \left(\frac{n}{m}\right)^2 \leq \frac{r\eta}{2} n^2$$

arestas possíveis. Para as arestas do tipo (ii), temos no máximo $\varepsilon \binom{m}{2}$ pares irregulares com respeito à partição $V_1 \cup \dots \cup V_m$ e uma determinada cor, portanto no máximo

$$r\varepsilon \binom{m}{2} \left(\frac{n}{m}\right)^2 \leq \frac{r\varepsilon}{2} n^2$$

arestas. O número de arestas do tipo (iii) é no máximo

$$m \left(\frac{n}{m}\right)^2 \leq \varepsilon n^2.$$

Portanto, existe um conjunto de até $r\eta n^2$ arestas cujas cores podem ser desprezadas, isto é, elas poderiam ser removidas do grafo sem afetar o par $(P, H(\eta))$. Para uma cota superior, suponha que essas arestas possam ser escolhidas arbitrariamente no grafo e possam ser coloridas com qualquer uma das r cores. Além disso, as demais arestas podem ser coloridas de outras formas desde que as listas de cores associadas às partes permaneçam iguais. Temos assim:

$$|\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| \leq \binom{n^2/2}{r\eta n^2} r^{r\eta n^2} \left(\prod_{j=1}^r j^{e_j(\mathbf{H})} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2}.$$

Além disso, existem no máximo M^n modos de escolher cada partição P , portanto

$$\sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| \leq M^n 2^{f(2r\eta)n^2/2} r^{r\eta n^2} \sum_{\mathbf{H}(\eta)} \left(\prod_{j=1}^r j^{e_j(\mathbf{H})} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2}.$$

Pelo lema da imersão, o grafo reduzido $\mathbf{H}(\eta)$ não pode conter cópia de K_{k+1} em que todas as arestas tenham listas de tamanho pelo menos s , nesse caso, pelo Teorema 3.10, seria sempre possível escolher as cores de modo que cada vértice é localmente arco-íris com no mínimo s cores distintas. Consequentemente, pelo Teorema de Turán temos

$$\sum_{i=s}^r e_i(\mathbf{H}) \leq \text{ex}(m, K_{k+1}) \leq \frac{k-1}{2k} m^2.$$

Nosso objetivo será mostrar que, se $\sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H})$ estiver muito longe de $\text{ex}(m, K_{k+1})$, existirão poucas colorações possíveis para G , contradizendo a escolha inicial de G . Observe que $\sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H}) \leq \sum_{i=s}^r e_i(\mathbf{H}) \leq \text{ex}(m, K_{k+1})$.

Portanto iremos supor que a cota para o número de arestas que possuem pelo menos $s+3$ cores em suas listas dista $\beta^{\mathbf{H}} m^2$ de $\text{ex}(m, K_{k+1})$, isto é, $\beta^{\mathbf{H}} m^2 = \text{ex}(m, K_{k+1}) - \sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H})$. Primeiro iremos supor que $\beta^{\mathbf{H}} \geq \frac{1}{8k}$ para todo $\mathbf{H}(\eta)$.

Claro que $e_1(\mathbf{H}) + \dots + e_r(\mathbf{H}) \leq \binom{m}{2}$. Considere $\alpha = M^n 2^{f(2r\eta)n^2/2} r^{r\eta m^2}$

$$\begin{aligned} \sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| &\leq \alpha \sum_{\mathbf{H}} \left(\prod_{j=1}^{s+2} j^{e_j(\mathbf{H})} \prod_{j=s+3}^r r^{e_j(\mathbf{H})} \right)^{\binom{n}{m}^2} \\ &\leq \alpha \sum_{\mathbf{H}} \left([(s+2)]^{\binom{m}{2} - \sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H})} \prod_{j=s+3}^r r^{e_j(\mathbf{H})} \right)^{\binom{n}{m}^2} \\ &= \alpha \sum_{\mathbf{H}} \left(r^{\text{ex}(m, K_{k+1}) - \beta^{\mathbf{H}} m^2} [s+2]^{\binom{m}{2} - (\text{ex}(m, K_{k+1}) - \beta^{\mathbf{H}} m^2)} \right)^{\binom{n}{m}^2}. \end{aligned}$$

Além disso, existem no máximo $2^{rM^2/2}$ possíveis grafos reduzidos. Iremos fixar um par $(P, \mathbf{H}(\eta))$ de modo que a cota seja maximizada

$$\sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| \leq \alpha 2^{rM^2/2} \left(r^{\text{ex}(m, K_{k+1}) - \beta m^2} [s+2]^{\binom{m}{2} - (\text{ex}(m, K_{k+1}) - \beta m^2)} \right)^{\binom{n}{m}^2}.$$

Podemos simplificar a expressão $\alpha 2^{rM^2/2} = M^n 2^{f(2r\eta)n^2/2} r^{r\eta n^2} 2^{rM^2/2}$.

Considere que, para n grande, $M^n \leq r^{f(2r\eta)n^2/2}$ e $2^{f(2r\eta)n^2/2} \leq r^{f(2r\eta)n^2/2}$.
 Portanto $\alpha 2^{rM^2/2} \leq 2^{rM^2/2} (r^{f(2r\eta)n^2/2} / 2^{r^{f(2r\eta)n^2/2}} / r^{r\eta n^2}) = 2^{rM^2/2} (r^{f(2r\eta)n^2+r\eta n^2})$.

Novamente, para simplificar a notação considere $T = f(2r\eta) + r\eta$ e $\zeta = 2^{rM^2/2}$. Lembre-se que as hipóteses iniciais estabelecem que $7T \leq \beta$. Temos assim

$$\begin{aligned} \sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, H(\eta))}(G)| &\leq \zeta r^{Tn^2} \left(r^{\text{ex}(m, K_{k+1}) - \beta m^2} [s+2]^{\binom{m}{2} - (\text{ex}(m, K_{k+1}) - \beta m^2)} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2} \\ &\stackrel{(A)}{\leq} \zeta r^{Tn^2} \left(r^{\text{ex}(m, K_{k+1}) - \beta m^2} [s+2]^{\frac{m^2}{2k} + \beta m^2} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2} \\ &\leq \zeta r^{Tn^2} \left(r^{\text{ex}(n, K_{k+1}) - \beta n^2} [s+2]^{\frac{n^2}{2k} + \beta n^2} \right). \end{aligned}$$

A desigualdade em (A) segue por:

$$\begin{aligned} \binom{m}{2} - (\text{ex}(m, K_{k+1}) - \beta m^2) &\leq \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2} - \left(\frac{k-1}{2k} m^2 - k - \beta m^2 \right) \\ &= \frac{m^2}{2k} + \beta m^2 + k - \frac{m}{2}, \end{aligned}$$

podemos majorar o termo $k - \frac{m}{2}$, já que k é fixo e m é maior do que k pela aplicação do Lema da Regularidade. Isolando $\zeta r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}$ e colocando o expoente n^2 dos termos restantes em evidência, temos

$$\sum_{(P, H(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, H(\eta))}(G)| \leq \zeta r^{\text{ex}(n, K_{k+1})} \left(\frac{(s+2)^{\frac{1}{2k} + \beta}}{r^{\beta - T}} \right)^{n^2}. \quad (5.7)$$

Observe que se o termo envolvendo parênteses for menor do que 1, a cota superior (5.7) será inferior ao número de colorações de G . Podemos observar que

$$\frac{(s+2)^{\frac{1}{2k} + \beta}}{r^{\beta - T}} < 1 \iff r > (s+2)^{\frac{(1/2k + \beta)}{(\beta - T)}}. \quad (5.8)$$

Para que essa desigualdade seja válida basta tomar

$$r \geq (s+2)^7,$$

já que $\beta \geq 7T$ e $\beta \geq \frac{1}{8k}$ temos $\frac{(1/2k+\beta)}{(\beta-T)} \leq \frac{(1/2k+\beta)}{(\beta-\frac{\beta}{7})} = \frac{7/2k+7\beta}{6\beta} = 7/(12k\beta) + 7/6$.
Portanto, se $r \geq (s+2)^7$, e pelas hipóteses iniciais temos que

$$\sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| \leq \zeta r^{\text{ex}(n, K_{k+1})} \left(\frac{[s+2]^{\frac{1}{2k}+\beta}}{r^{\beta-T}} \right)^{n^2} \ll r^{\text{ex}(n, K_{k+1})},$$

um absurdo.

Dessa forma, existe um grafo reduzido \mathbf{H} tal que $\beta^{\mathbf{H}} < \frac{1}{8k}$ com $\sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H}) = \text{ex}(m, K_{k+1}) - \beta^{\mathbf{H}} m^2$, doravante denotaremos $\beta^{\mathbf{H}}$ simplesmente por β . Considere primeiro que $7T \leq \beta$. Seja $\mathbf{W} \subset \mathbf{H}$ o subgrafo gerador com conjunto de arestas em $E_{s+3} \cup \dots \cup E_r$, temos portanto $e(\mathbf{W}) = \text{ex}(m, K_{k+1}) - (\text{ex}(m, K_{k+1}) - \sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H}))$.

Seja $\mathbf{W}' \subset \mathbf{W}$, subgrafo k -partido maximal com relação ao número de arestas, obtido pelo Teorema 4.11. Vale que

$$e(\mathbf{W}') \geq \text{ex}(m, K_{k+1}) - 2(\text{ex}(m, K_{k+1}) - \sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H})).$$

Além disso,

$$\sum_{i=1}^{s+2} e_i(\mathbf{H}) = e(\mathbf{H}) - e(\mathbf{W}),$$

em particular

$$\sum_{i=1}^{s+2} e_i(\mathbf{H}) \leq e(\mathbf{H}) - e(\mathbf{W}') \leq 6(\text{ex}(m, K_{k+1}) - \sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H})).$$

Aplicando o Teorema 3.16 para os grafos \mathbf{H} e $\mathbf{W}' \subset \mathbf{H}$ e considerando que $\sigma = \text{ex}(m, K_{k+1}) - \sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H})$.

Considere $A = \sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H})$. Temos assim

$$\sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| \leq \zeta r^{Tn^2} \left(\prod_{j=1}^{s+2} j^{e_j(\mathbf{H})} \prod_{j=s+3}^r r^{e_j(\mathbf{H})} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \zeta r^{Tn^2} \left((s+2)^{6(\text{ex}(m, K_{k+1})-A)} r^A \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2} \\
&= \zeta r^{Tn^2} \left(\left(\frac{r}{(s+2)^6} \right)^{\text{ex}(m, K_{k+1})-7Tm^2} (s+2)^{6\text{ex}(m, K_{k+1})} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2} \\
&\leq \zeta r^{\text{ex}(n, K_{k+1})} \left(\frac{(s+2)^{42}}{r^6} \right)^{Tn^2}.
\end{aligned}$$

Observe que, como $r > (s+2)^7$, vale que

$$\frac{(s+2)^{42}}{r^6} < 1,$$

portanto o número de colorações é menor do que $r^{t_k(n)}$, ou seja, isso resulta em uma contradição com o número de colorações de G .

Portanto, deve existir um grafo reduzido \mathbf{H} tal que $\beta_{\mathbf{H}} \leq 7f(2r\eta) + 7r\eta$. Podemos utilizar o Teorema 4.11 para obter uma partição $V(\mathbf{H}) = U_1 \cup \dots \cup U_k$ do conjunto de vértices de \mathbf{H} com $\sum_{i=1}^k e_{H'}(U_i) \leq \beta m^2$. Obtemos pelo Teorema 3.18 que $\sum_{i=1}^{s+2} e_i(\mathbf{H}) \leq (4k+2)\beta m^2$, podemos definir $W_i = \cup_{j \in U_i} V_j$ com $i \in [k]$, desse modo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k e_G(W_i) &\leq r\eta n^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^k e_{H'}(U_i) + \sum_{i=1}^{s+2} e_i(\mathbf{H}) \right) \\
&\leq r\eta n^2 + \beta n^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \sum_{i=1}^{s+2} e_i(\mathbf{H}) \\
&\leq r\eta n^2 + (4k+3)\beta n^2 \\
&< \frac{\delta}{2} n^2 + (4k+3)(7f(2r\eta) + 7r\eta)n^2 \\
&< \frac{\delta}{2} n^2 + \frac{\delta}{2} n^2 = \delta n^2.
\end{aligned}$$

A partição escolhida $W_1 \cup \dots \cup W_k$ satisfaz as condições desejadas.

Para provar a segunda parte iremos repetir os argumentos iniciais, mas agora fixe $k > 4$ e $s \in \left\{ \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 2, \dots, \binom{k+1}{2} \right\}$.

Escolha $\eta > 0$, tal que $\eta < \delta/(2r)$ e $(4k+3)(f(2r\eta) + r\eta) < \min\{\delta/2, (4k+5)/(8k^2)\}$, em que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função entropia, e $x > 1$ é tal

que $\frac{x}{x-1} < 1 + \frac{1}{4k}$. Pelo Lema da Imersão (Teorema 4.10), existem $n_0 = n_0(r, \eta, k)$ e $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(r, \eta, k)$ para os quais valem as propriedades do lema da imersão. Escolha $\epsilon < \min\{\eta_0/2, \bar{\epsilon}\}$, logo, pelo Lema da Regularidade (Teorema 4.8), existe $M = M(\epsilon, r)$ para os quais valem as propriedades do Lema da Regularidade.

Repetindo os mesmos argumentos iremos obter a mesma desigualdade para o número de colorações:

$$\sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| \leq M^n 2^{f(2r\eta)n^2/2} r^{r\eta m^2} \sum_{\mathbf{H}(\eta)} \left(\prod_{j=1}^r j^{e_j(\mathbf{H})} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2}.$$

Primeiro definimos $\beta_{\mathbf{H}}$ da seguinte forma: $\sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H}) = \text{ex}(m, K_{k+1}) - \beta_{\mathbf{H}} m^2$, para todo grafo reduzido $\mathbf{H}(\eta)$ de \hat{G} , em que \hat{G} é livre de $K_{k+1}^{LR}(s)$. Considere o caso em que $\beta_{\mathbf{H}} \geq \frac{1}{8k^2}$, para todo \mathbf{H} . Além disso, denote $T = f(2r\eta) + r\eta$. Para a primeira parte os argumentos seguirão da mesma forma que anteriormente. Poderíamos tomar $r \geq (s+2)^7$ e repetir os mesmos argumentos feitos na primeira parte dessa demonstração, mas como precisaremos de uma cota maior na parte final tomaremos $r \geq (s+2)^{4k+3} > (s+2)^7$. Como anteriormente, temos

$$\sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| \leq \zeta r^{\text{ex}(n, K_{k+1})} \left(\frac{[s+2]^{\frac{1}{2k} + \beta}}{r^{\beta - T}} \right)^{n^2} \ll r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}.$$

Portanto, existe um grafo reduzido \mathbf{H} tal que $\beta_{\mathbf{H}} < \frac{1}{8k^2}$ com $\sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H}) = \text{ex}(m, K_{k+1}) - \beta_{\mathbf{H}} m^2$. Considere primeiro $xT \leq \beta_{\mathbf{H}}$, para todo \mathbf{H} .

Seja $\mathbf{H}' \subset \mathbf{H}$ subgrafo gerador com conjunto de arestas em $E_{s - \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \cup \dots \cup E_r$, obtido de \mathbf{H} através da remoção das arestas que não pertencem a $E_{s - \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \cup \dots \cup E_r$.

Considere $\mathbf{W} \subset \mathbf{H}$ subgrafo gerador com conjunto de arestas em $E_{s+3} \cup \dots \cup E_r$. Observe que \mathbf{W} é livre de K_{k+1} , pois caso contrário existiria uma cópia de $K_{k+1}^{LR}(s)$. Temos $e(\mathbf{W}) = \text{ex}(m, K_{k+1}) - (\text{ex}(m, K_{k+1}) - \sum_{i=s+3}^r e_i(H))$. Seja $\mathbf{W}' \subset \mathbf{W}$, subgrafo k -partido, obtido através do Teorema 4.11. Temos

$$e(\mathbf{W}') \geq \text{ex}(m, K_{k+1}) - 2(\text{ex}(m, K_{k+1}) - \sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H})).$$

Além disso,

$$\sum_{i=s - \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{s+2} e_i(\mathbf{H}) = e(\mathbf{H}') - e(\mathbf{W}),$$

em particular

$$\sum_{i=s - \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}^{s+2} e_i(\mathbf{H}) \leq e(\mathbf{H}') - e(\mathbf{W}') \leq 6(\text{ex}(m, K_{k+1}) - \sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H})),$$

pele Teorema 3.16, considerando que as arestas em \mathbf{W}' estão associadas com listas de tamanho pelo menos $s - \binom{k+1}{2} - \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$.

Temos, pelo Teorema 3.18,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{s - \binom{k+1}{2} + \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} e_i(\mathbf{H}) &\leq \sum_{i=1}^{s+2} e_i(\mathbf{H}) \leq e(\mathbf{H}) - e(\mathbf{W}') \\ &\leq (4k+2)(\text{ex}(m, K_{k+1}) - \sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H})). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H}) = \text{ex}(m, K_{k+1}) - \beta m^2 \leq \text{ex}(m, K_{k+1}) - xTm^2. \quad (5.9)$$

Considere $A = \sum_{i=s+3}^r e_i(\mathbf{H})$ e $q(s) = s - \binom{k+1}{2} + \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$. Temos assim

$$\begin{aligned} \sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| &\leq \zeta r^{Tn^2} \left(\prod_{j=1}^{q(s)-1} j^{e_j(\mathbf{H})} \prod_{j=q(s)}^{s+2} j^{e_j(\mathbf{H})} \prod_{j=s+3}^r r^{e_j(\mathbf{H})} \right)^{\binom{n}{m}^2} \\ &\leq \zeta r^{Tn^2} \left((q(s)-1)^{(4k+2)(\text{ex}(m, K_{k+1})-A)} (s+2)^{6(\text{ex}(m, K_{k+1})-A)} r^A \right)^{\binom{n}{m}^2} \\ &= \zeta r^{Tn^2} \left(\left(\frac{r}{(q(s)-1)^{4k+2} (s+2)^6} \right)^A (q(s)-1)^{(4k+2)\text{ex}(m, K_{k+1})} (s+2)^{6\text{ex}(m, K_{k+1})} \right)^{\binom{n}{m}^2} \end{aligned}$$

$$\leq \zeta r^{\text{ex}(n, K_{k+1})} r^{Tn^2} \left(\frac{r}{(q(s) - 1)^{4k+2} (s+2)^6} \right)^{-xTn^2}.$$

Portanto, tomando

$$r > \left((q(s) - 1)^{4k+2} (s+2)^6 \right)^{\frac{x}{x-1}},$$

temos

$$\left(\frac{(q(s) - 1)^{x(4k+2)} (s+2)^{6x}}{r^{x-1}} \right) < 1,$$

que é uma contradição com o número de colorações de G . Como $q(s) < s$ e $1 < \frac{x}{x-1} < 1 + \frac{1}{4k}$, podemos majorar a cota de r pois $(s+2)^{4k+3} > \left((q(s) - 1)^{4k+2} (s+2)^6 \right)^{\frac{x}{x-1}}$.

Portanto, deve existir um grafo reduzido \mathbf{H} tal que $\beta \leq xf(2r\eta) + xr\eta$.

Pelo Teorema 4.11 obtemos uma partição $V(\mathbf{H}) = U_1 \cup \dots \cup U_k$ do conjunto de vértices de \mathbf{H} com $\sum_{i=1}^k e_{\mathbf{H}'}(U_i) \leq \beta m^2$. Para $W_i = \cup_{j \in U_i} V_j$ em que $i \in [k]$ obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k e_G(W_i) &\leq r\eta n^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^k e_{\mathbf{H}'}(U_i) + \sum_{i=1}^{s+2} e_i(H) \right) \\ &\leq r\eta n^2 + \beta n^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \sum_{i=1}^{s+2} e_i(H) \\ &\leq r\eta n^2 + (4k+3)\beta n^2 \\ &< \frac{\delta}{2} n^2 + (4k+3)(xf(2r\eta) + xr\eta)n^2 \\ &< \frac{\delta}{2} n^2 + \frac{\delta}{2} n^2 = \delta n^2. \end{aligned}$$

A partição escolhida $W_1 \cup \dots \cup W_k$ satisfaz as condições desejadas. \square

5.1.1 Um resultado de estabilidade para colorações localmente arco-íris quando $k = 3$

O Teorema 5.4 apresenta um resultado mais forte do que o Teorema 5.2 para $k = 3$, já que a cota anterior para $r_0(3, 3) = 5^7$ será melhorada para $r_0 = 3^7$. Isso se deve à possibilidade de usarmos o Teorema 3.13, que é mais eficiente na busca de uma cópia de K_4 localmente arco-íris, em vez do algoritmo descrito no Lema 3.15.

Teorema 5.4. *Seja $r > 3^7$ um inteiro positivo. Então, para todo $\delta > 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que, se G é um grafo, $|V(G)| = n \geq n_0$ e G admite pelo menos $r^{\text{ex}(n, K_4)}$ colorações distintas livres de K_4 localmente arco-íris, então existe uma partição $V(G) = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ tal que $\sum_{i=1}^3 e(W_i) < \delta n^2$*

Para provar esse teorema iremos utilizar o seguinte resultado de imersão:

Teorema 5.5. *Seja \mathbf{H}' um grafo multicolorido com m vértices livre de K_4 localmente arco-íris, e seja $\mathbf{W}' \subset \mathbf{H}'$, um grafo 3-partido. Considere que as arestas em \mathbf{W}' estão associadas a listas com pelo menos 4 cores, e as arestas em \mathbf{H}' estão associadas a listas com pelo menos 2 cores. Suponha também $0 < \sigma < \frac{1}{72}$ e $e(\mathbf{W}') \geq \text{ex}(m, K_4) - 2\sigma m^2$. Então $e(\mathbf{H}') - e(\mathbf{W}') \leq 6\sigma m^2$.*

Iremos suprimir a demonstração por ser extremamente parecida ao Teorema 5.2.

5.2 Monotonicidade de soluções de Turán

Considere o seguinte problema genérico do tipo Erdős-Rothschild:

Problema 5.1. *Dada uma família de padrões \mathbf{P} de um grafo F e r cores, desejamos maximizar o número de r -colorações livres dos padrões em \mathbf{P} para grafos com n vértices. Um grafo G ser solução extremal desse problema significa que o número de colorações de G livres de padrões em \mathbf{P} é igual a $c_{r, \mathbf{P}}(n)$.*

Classificaremos as soluções do problema 5.1 em dois tipos:

Definição 5.6. *(Solução extremal de Turán generalizada) Dizemos que uma solução extremal G do problema 5.1 é uma solução do tipo Turán generalizada se G é isomorfo a $T_k(n)$, para algum $k \in \mathbb{N}$, independente do número cromático de F .*

Definição 5.7. (*Solução extremal de Turán*) Dizemos que uma solução extremal G do problema 5.1 é uma solução do tipo Turán se G é isomorfo a $T_k(n)$ com $\chi(F) = k + 1$.

Observe que uma solução extremal de Turán é, particularmente, uma solução extremal de Turán generalizada.

Para uma ampla gama de famílias distintas \mathbf{P} os grafos de Turán são soluções extremas de Turán para o Problema 5.1, algumas dessas soluções são extremas para r pequeno, isto é, para todo $2 \leq r \leq r_1$, onde r_1 é uma constante. Existem também soluções extremas de Turán a partir de um r grande, isto é, para todo $r \geq r_1$. Nesse sentido podemos dizer que existe uma determinada monotonicidade na solução extremal: a solução extremal é uma solução de Turán para os casos iniciais (r pequeno) e, a partir do momento que a solução extremal deixa de ser a solução extremal de Turán, nunca mais a solução extremal é uma solução extremal de Turán. Temos também exemplos em que, a partir do momento que obtemos uma solução extremal de Turán, todas as soluções extremas, para r cada vez maiores, são sempre soluções extremas de Turán, como por exemplo, o Teorema 5.2. Apesar de ser uma hipótese tentadora afirmar que todos os casos são sempre um dos dois ela não é verdadeira. Apresentaremos nessa seção uma família de grafos proibidos que admitem como solução a solução extremal de Turán generalizada apenas quando o número de cores $r \in (r_1, r_0)$, onde $r_1 > 2$, acreditamos que esse seja um passo inicial importante para uma futura generalização.

O resultado abaixo foi fundamental para construir essa família com as propriedades desejadas. Sabemos que, tomando \mathbf{P} no Problema 5.1 como a família de todos os padrões de K_{k+1} exceto o padrão arco-íris, temos que o grafo extremal de n vértices que maximiza o número de colorações só pode ser um grafo isomorfo ao grafo de Turán em um intervalo $(2, r_0)$. Um resultado muito importante demonstrado também em [16] é que, considerando o Problema 5.1, quando \mathbf{P} é uma família com

um único padrão de K_{k+1} diferente do padrão arco-íris e para $r \in \mathbb{N}$ então a solução extremal não é uma solução de Turán. Por questão de completude redigiremos a demonstração abaixo.

Teorema 5.8. *Dada a família de padrões \mathbf{P} de K_{k+1} diferentes do padrão arco-íris e r cores, com r suficiente grande, o grafo que maximiza o número de r -colorações livres de \mathbf{P} para grafos com n vértices admite mais colorações do que o grafo $T_k(n)$.*

Demonstração. Por simplicidade, assuma que r seja divisível por $\binom{k+1}{2}$ e divida o conjunto $[r]$ de cores em conjuntos disjuntos dois a dois $C_1, \dots, C_{\binom{k+1}{2}}$ de igual tamanho. Associe cada conjunto C_j de cores a uma aresta de K_{k+1} . Considere o grafo $T_{k+1}(n)$ dado por uma expansão do conjunto de vértices de K_{k+1} em classes V_1, \dots, V_{k+1} de tamanho $n/(k+1)$, onde assumimos que $k+1$ divide n para evitar complicações técnicas. Observamos as colorações de $T_{k+1}(n)$ de modo que as arestas entre V_i e V_j sejam coloridas arbitrariamente com cores do conjunto associado com a aresta $\{i, j\}$ de K_{k+1} , têm a propriedade de que as cópias de K_{k+1} em $T_{k+1}(n)$ sejam coloridas com o padrão arco-íris.

O número de tais colorações de $T_{k+1}(n)$ é pelo menos

$$\left(\frac{r}{\binom{k+1}{2}} \right)^{\frac{n^2}{(k+1)^2} \cdot \binom{k+1}{2}} = \left(\frac{r}{\binom{k+1}{2}} \right)^{\frac{k}{2(k+1)} n^2} > r^{\frac{k-1}{2k} n^2} \geq r^{\text{ex}(n, K_{k+1})},$$

para $r > \binom{k+1}{2}^{k^2}$. Portanto, dada uma família de padrões \mathbf{P} , padrões de K_{k+1} diferentes do padrão arco-íris existirá um $r_0 \in \mathbb{N}$ para o qual se o número de cores disponíveis $r \geq r_0$ temos que o grafo de Turán $T_k(n)$ não é candidato a solução extremal desse problema. \square

A família de padrões que definiremos nesse capítulo é um primeiro passo para uma possível generalização das soluções extremais de Turán para intervalos disjuntos, ela também é de certo modo uma família com poucos padrões, o que talvez facilite caracterizar a solução obtida em uma futura generalização desse trabalho.

As definições abaixo foram apresentadas durante a introdução, mas para benefício do leitor transcreveremos elas novamente.

Um padrão localmente arco-íris de K_{k+1} é dito *minimal* se for o padrão localmente arco-íris associado a uma coloração que utiliza $\chi'(K_{k+1})$ cores. Podemos ver na Figura 5.1 um exemplo de um padrão *minimal*.

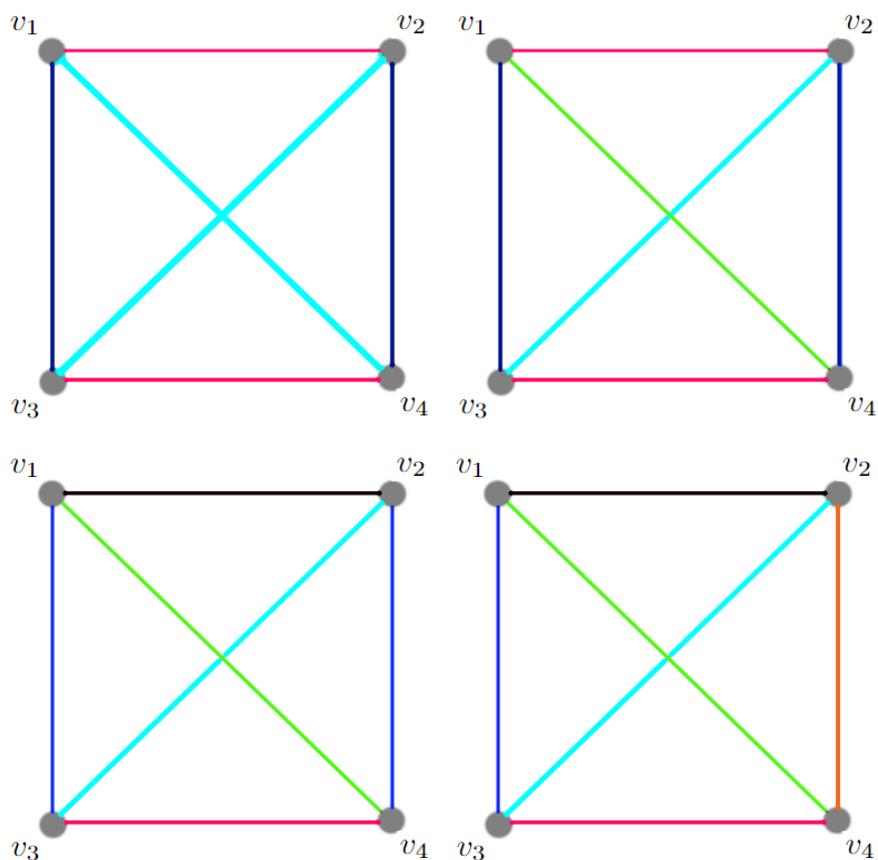


Figura 5.1: Os padrões que pertencem à família K_4^{LR} . O primeiro padrão no canto superior esquerdo é um padrão *minimal*.

Definição 5.9. (*Padrões quase localmente arco-íris*) A família de padrões quase localmente arco-íris de K_{k+1} , denotada por QK_{k+1}^{LR} , contém todos os padrões P de K_{k+1} para os quais podemos alterar a cor de no máximo uma aresta de P para obter um padrão localmente arco-íris minimal.

Citamos novamente, como exemplo para a família de padrões quase localmente arco-íris, a Figura 1.5. É interessante notar que apenas os dois padrões na parte superior da Figura 5.1 são padrões na família QK_{k+1}^{LR} , portanto essas famílias compartilham alguns padrões em comum mas uma não é subfamília da outra.

Demonstraremos um resultado do tipo imersão para a família QK_{k+1}^{LR} que permitirá restringir as arestas associadas a listas de cores de tamanho 2 do grafo extremal do Teorema 5.10.

Teorema 5.10. *Dado $\delta > 0$, existe n_0 tal que, se G é um grafo com $n > n_0$ vértices, de modo que existam pelo menos $3^{\text{ex}(n, K_4)}$ colorações livres de QK_4^{LR} , com três cores disponíveis para as arestas de G , então existe uma partição $V(G) = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ tal que $\sum_{i=1}^3 e(W_i) < \delta n^2$.*

Apresentaremos abaixo o lema de imersão mencionado.

Lema 5.11. *Considere um conjunto de cores $\{a, b, c\}$. Seja \mathbf{G} um grafo multicolorido em que cada aresta está associada com a lista de cores $\{a, b, c\}$ tal que $e(\mathbf{G}) = \text{ex}(n, K_4) - \beta n^2$, para algum $0 < \beta \leq 2\left(\binom{n}{2} - \text{ex}(n, K_4)\right)$. Além disso, considere que não existe cópia de K_4 em \mathbf{G} . Seja \mathbf{O} um grafo multicolorido com os mesmos vértices de \mathbf{G} e com conjunto de arestas associados com listas de cores de tamanho 2 satisfazendo $e(\mathbf{O}) \cap e(\mathbf{G}) = \emptyset$. Se $\mathbf{O} \cup \mathbf{G}$ é livre de QK_4^{LR} então $e(\mathbf{O}) < \frac{3}{2}\beta n^2$.*

Demonstração. Seja \mathbf{O} um grafo multicolorido como no enunciado. Suponha, por absurdo, que $e(\mathbf{O}) \geq \frac{3}{2}\beta n^2$. Então, pelo Teorema 2.10, existe um subgrafo gerador $\mathbf{O}' \subset \mathbf{O}$ 3-partido tal que $e(\mathbf{O}') > \frac{2}{3}\frac{3}{2}\beta n^2$. Portanto $e(\mathbf{O}' \cup \mathbf{G}) > \text{ex}(n, K_4)$. Logo existe um $K_4 \in \mathbf{O}' \cup \mathbf{G}$. Além disso, no máximo cinco arestas desse K_4 são arestas em \mathbf{O}' . Isso significa que podemos ter até cinco arestas com lista de tamanho dois. Resolveremos o caso em que há exatamente cinco arestas com lista de tamanho dois e uma aresta com lista de tamanho três, pois caso existam mais arestas com lista de tamanho três, basta remover algumas cores das listas até obter o caso que iremos propor a solução.

Suponha então que existam cinco arestas com lista de tamanho dois, por simetria, temos a situação da Figura 5.2:

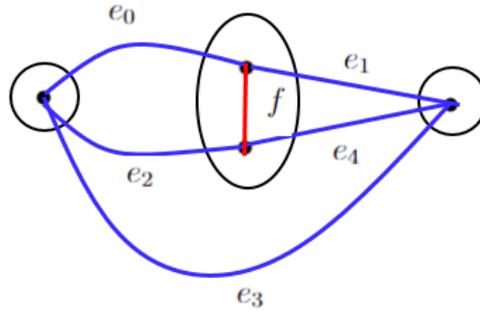


Figura 5.2: As arestas azuis têm listas de tamanho dois e a aresta vermelha tem tamanho três.

Temos que o conjunto de cores são $\{a, b, c\}$, as arestas e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 têm duas cores disponíveis e a aresta f tem três cores disponíveis. Existe uma cor em comum para as arestas e_0 e e_4 , digamos que essa cor seja **a**. Considere primeiro o caso em que existe pelo menos uma cor em comum entre as arestas e_1 e e_2 diferente de **a**; digamos que é **b**. Efetue agora a seguinte escolha de cores: para as arestas e_0 e e_4 escolha **a**; para as arestas e_1 e e_2 escolha **b**; para a aresta f escolha a cor **c**, o que é possível, já que f tem três cores disponíveis. Por fim, para a aresta e_3 escolha qualquer cor disponível, essa coloração gera o padrão proibido, já que essa coloração é arco-íris se a cor da aresta e_3 for **c** ou quase localmente arco-íris, caso contrário.

Considere agora o caso em que a única cor em comum entre as arestas e_1 e e_2 é a cor **a**. Existe uma cor para a aresta e_3 diferente de **a**, digamos **b**; temos que $c \in e_2$ ou $c \in e_1$, pois caso contrário teríamos $e_2 = \{a, b\} = e_1$, uma contradição, assumamos portanto que $c \in e_1$. Podemos agora fazer a seguinte escolha de cores: escolha para as arestas e_0 e e_4 a cor **a**; para a aresta e_3 escolha a cor **b**; escolha a cor **c** para e_1 , para a aresta f escolha **b**, por fim, para a aresta e_2 escolha qualquer cor. Essa coloração gera o padrão proibido, já que essa coloração é arco-íris caso a cor escolha

para e_2 for \mathbf{c} , e quase localmente arco-íris, caso contrário, portanto uma contradição. Dessa forma $e(\mathbf{O}) < \frac{3}{2}\beta n^2$. \square

Demonstração. (Teorema 5.10) Escolha $\eta > 0$ de forma que $\eta < \delta/6$ e

$$f(6\eta) + 3\eta < \left(1 - \frac{3}{2 \log_2(3)}\right) \frac{\delta}{30},$$

onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função entropia. Pelo Lema da Imersão (Teorema 4.10), existem $n_0 = n_0(3, \eta, 3)$ e $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(3, \eta, 3)$ com as propriedades do seu enunciado. Escolha $\epsilon < \min\{\eta_0/2, \bar{\epsilon}\}$. Pelo Lema da Regularidade (Teorema 4.8), existe $M = M(\epsilon, 3)$ para o qual valem as propriedades do Lema da Regularidade.

Tome G , um grafo com $n \geq \max\{n_0, M\}$ vértices, tal que G possua mais do que $3^{\text{ex}(n, K_4)}$ colorações livres de $QK_4^{LR}(3)$. Seja $\mathcal{C}(G)$ o conjunto de todas as colorações de G livres de $QK_4^{LR}(3)$. Cada coloração de G é associada a um par $(P, \mathbf{H}(\eta))$ em que P é a partição e $\mathbf{H}(\eta)$ o grafo reduzido associado, considere novamente a notação apresentada na equação (5.5). Temos assim

$$|\mathcal{C}(G)| \leq \sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)|, \quad (5.10)$$

onde $\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)$ representa o conjunto das colorações de G associadas ao par $(P, \mathbf{H}(\eta))$.

Procedendo de forma análoga ao Teorema 5.2 podemos concluir que:

$$\sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| \leq M^n 2^{f(6\eta)n^2/2} 3^{3\eta n^2} \sum_{\mathbf{H}(\eta)} \left(\prod_{j=1}^3 j^{e_j(\mathbf{H})} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2}.$$

Afirmamos que, pelo Lema 4.10, o grafo reduzido $\mathbf{H}(\eta)$ não pode conter K_4 de forma que todas as arestas associadas a esse K_4 tenham pelo menos 3 cores

associadas. De fato, se existisse essa cópia de K_4 , pelo Teorema 3.9 existiria uma coloração própria de K_4 utilizando cores nas listas de cada aresta, contradizendo o fato de que a coloração original é livre de K_4^{LR} . Portanto, pelo Teorema de Turán temos:

$$e_3(\mathbf{H}) \leq \text{ex}(m, K_4) \leq \frac{m^2}{3}.$$

Seja $\beta_{\mathbf{H}}$ tal que $\beta_{\mathbf{H}}m^2 = \text{ex}(m, K_4) - e_3(\mathbf{H})$. Primeiro iremos supor que, para todo grafo multicolorido \mathbf{H} , temos $f(6\eta) + 3\eta < (1 - \frac{3}{2\log_2(3)})\beta_{\mathbf{H}}$.

Considere $\alpha = M^n 2^{f(6\eta)n^2/2} 3^{\eta n^2}$

$$\begin{aligned} \sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| &\leq \alpha \sum_{\mathbf{H}} \left(3^{e_3(\mathbf{H})} \prod_{j=1}^2 j^{e_j(\mathbf{H})} \right) \\ &\leq \alpha \sum_{\mathbf{H}} \left(3^{\text{ex}(m, K_4) - \beta_{\mathbf{H}}m^2} 2^{e_2(\mathbf{H})m^2} \right) \left(\frac{n}{m} \right)^2. \end{aligned}$$

Sabemos, pelo Lema 5.11, que $e_2(\mathbf{H}) \leq 3\beta_{\mathbf{H}}/2$. Logo

$$\sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| \leq \alpha \sum_{\mathbf{H}} \left(3^{\text{ex}(m, K_4) - \beta_{\mathbf{H}}m^2} 2^{3\beta_{\mathbf{H}}m^2/2} \right) \left(\frac{n}{m} \right)^2.$$

Além disso, existem no máximo $2^{3M^2/2}$ possíveis grafos reduzidos. Iremos fixar o par $(P, \mathbf{H}(\eta))$ que maximiza o número de colorações:

$$\sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| \leq \alpha 2^{3M^2/2} \left(3^{\text{ex}(m, K_4) - \beta m^2} 2^{3\beta m^2/2} \right) \left(\frac{n}{m} \right)^2.$$

Podemos simplificar a expressão $\alpha 2^{3M^2/2} = M^n 2^{f(6\eta)n^2/2} 3^{\eta n^2} 2^{3M^2/2}$.

Considere que $M^n \leq 3^{f(6\eta)n^2/2}$ e $2^{f(6\eta)n^2/2} \leq 3^{f(6\eta)n^2/2}$. Portanto $\alpha 2^{3M^2/2} \leq 2^{3M^2/2} (3^{f(6\eta)n^2/2} 3^{\eta n^2} 2^{3M^2/2}) = 2^{3M^2/2} (3^{f(6\eta)n^2 + 3\eta n^2})$.

Novamente, para simplificar a notação, considere $T = f(6\eta) + 3\eta$ e $\zeta = 2^{3M^2/2}$. Temos assim

$$\begin{aligned}
\sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| &\leq \zeta 3^{Tn^2} \left(3^{\text{ex}(m, K_4) - \beta m^2} 2^{3m^2 \beta/2} \right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2} \\
&\leq \zeta 3^{Tn^2} \left(3^{n^2/3 - \beta n^2} 2^{3n^2 \beta/2} \right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{(P, \mathbf{H}(\eta))} |\mathcal{C}_{(P, \mathbf{H}(\eta))}(G)| &< \zeta 3^{Tn^2} 3^{\frac{n^2}{3} - \beta n^2} 2^{\frac{3\beta}{2} n^2} < \zeta 3^{(T + \frac{1}{3} - \beta + \frac{3\beta}{2 \log_2(3)}) n^2} \\
&\ll 3^{\frac{n^2}{3}}.
\end{aligned}$$

O resultado acima segue pois

$$T + \frac{1}{3} - \beta + \frac{3\beta}{2 \log_2(3)} < \left(\frac{3}{2 \log_2(3)} - 1 \right) (\beta) + \left(1 + \frac{3}{2 \log_2(3)} \right) \beta \leq 0.$$

Portanto, deve existir um grafo reduzido \mathbf{H} tal que $\beta \leq (f(6\eta) + 3\eta) / (1 - \frac{3}{2 \log_2(3)})$. Pelo Teorema 4.11 obtemos uma partição $V(H) = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ do conjunto de vértices de H com $\sum_{i=1}^3 e_{H'}(U_i) \leq \beta m^2$. Para $W_i = \cup_{j \in U_i} V_j$ com $i \in [3]$, considerando que $\sum_{i=1}^2 e_i(H) \leq 14\beta m^2$ (Teorema 3.18), obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 e_G(W_i) &\leq 3\eta n^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^3 e_{H'}(U_i) + \sum_{i=1}^2 e_i(H) \right) \\
&\leq 3\eta n^2 + 3\beta n^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \sum_{i=1}^2 e_i(H) \\
&\leq 3\eta n^2 + 15\beta n^2 \\
&< \frac{\delta}{2} n^2 + 15 \frac{f(6\eta) + 3\eta}{1 - \frac{3}{2 \log_2(3)}} n^2 \\
&< \frac{\delta}{2} n^2 + \frac{\delta}{2} n^2 = \delta n^2.
\end{aligned}$$

A partição escolhida $W_1 \cup W_2 \cup W_3$ satisfaz as condições desejadas. \square

O resultado acima demonstra que existe um potencial a ser explorado para outras famílias nas quais a solução de Turán não é a melhor para r grande,

apesar de ser um grafo extremal para alguns valores de r . Seria interessante poder determinar quando Turán deixa de ser solução extremal de Turán ou solução extremal generalizada, tema na qual não obtivemos progressos significativos.

5.3 Resultado exato: determinando o grafo extremal.

Os resultados anteriores demonstraram que os grafos extremais dos Teoremas 5.2 e 5.4, para r suficientemente grande, admitem partições com poucas arestas internas, se assemelhando ao grafo de Turán. Entretanto, é possível demonstrar um resultado mais forte: os grafos extremais dos problemas propostos devem ser isomorfos ao grafo de Turán. Chamamos esse tipo de resultado de resultado exato e dedicaremos o resto dessa seção a demonstrá-lo.

Definição 5.12. *Seja F um grafo e \mathbf{P} uma família de padrões de F . Dizemos que essa família \mathbf{P} satisfaz a propriedade de estabilidade de cores para um inteiro positivo r se, para cada $\delta > 0$, existe n_0 com a seguinte propriedade. Se $n > n_0$ é um grafo com n vértices tal que $|c_{r,\mathbf{P}}(G)| \geq r^{\text{ex}(n,F)}$, então existe uma partição $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_k$, com $k + 1 = \chi(F)$, tal que $\sum e(V_i) < \delta n^2$.*

Teorema 5.13. *Seja $k \geq 3$ e seja \mathbf{P} uma família de padrões K_{k+1} , tal que (K_{k+1}, \mathbf{P}) satisfaz a propriedade de estabilidade de cores para um inteiro positivo $r > e(k + 1)$ e existe $P \in \mathbf{P}$ um padrão localmente arco-íris. Então existe n_0 tal que cada grafo de ordem $n > n_0$ tem no máximo $r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}$ colorações \mathbf{P} -livres. Além disso, o único grafo com n vértices que possui $r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}$ colorações \mathbf{P} -livres é o grafo de Turán $T_k(n)$.*

Para demonstrar o teorema proposto será necessário demonstrar primeiro o resultado auxiliar abaixo, cuja demonstração é incluída por completude.

Lema 5.14. [22] *Sejam $r > 0$ e $k \geq 2$ inteiros positivos e seja $\widehat{K_{k+1}}$ uma r -coloração do grafo completo K_{k+1} com conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ tal que cada aresta*

$v_i v_j$ tem cor $\alpha_{i,j} \in [r]$. Seja $\omega: [k] \rightarrow (0, 1]$ uma função não-crescente, de forma que $\omega(i) \leq \frac{1}{i-1}$ para todo $1 < i \leq k$, e seja fixado $\beta \geq \frac{\omega(i)}{\omega(i-1)}$ para todo $1 < i \leq k+1$. Seja \widehat{G} um grafo colorido cujo conjunto de vértices contém conjuntos mutuamente disjuntos W_1, \dots, W_k com a seguinte propriedade: para cada par $i, j \subseteq [k]$ e todos os subconjuntos $X_i \subseteq W_i$, com $|X_i| \geq \omega(k) |W_i|$, e $X_j \subseteq W_j$, com $|X_j| \geq \omega(k) |W_j|$, há pelo menos $\beta |X_i| |X_j|$ arestas de cor $\alpha_{i,j}$ entre X_i e X_j em \widehat{G} , então \widehat{G} contém uma cópia de \widehat{K}_k com um vértice em cada conjunto W_i .

Demonstração. Fixado um inteiro $r > 0$, a prova é por indução em k . Para o caso base $k = 2$, o resultado é trivial. Para $k \geq 3$, sejam $\widehat{K}_k, \widehat{G}, \omega$ e β como no enunciado da proposição. Além disso temos que \widehat{K}_{k+1} possui um conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$, em que cada aresta $v_i v_j$ é colorida com $\alpha_{i,j} \in [r]$. Por hipótese de indução, suponha que o resultado seja válido para k .

Para cada $i \in [k]$, definimos $W_{k+1}^{\alpha_{i,k}} \subseteq W_{k+1}$ como o conjunto maximal de vértices em W_{k+1} tal que cada vértice em $W_{k+1}^{\alpha_{i,k}}$ tem menos que $\beta |W_i|$ vizinhos de cor $\alpha_{i,k+1}$ em W_i . Isso implica que há menos que $\beta |W_i| |W_{k+1}^{\alpha_{i,k+1}}|$ arestas com a cor $\alpha_{i,k+1}$ entre W_i e $W_{k+1}^{\alpha_{i,k}}$. Pela definição de \widehat{G} , temos que $|W_{k+1}^{\alpha_{i,k+1}}| < \omega(k+1) |W_{k+1}|$. Dado que $\omega(k+1) \leq 1/(k)$, segue que

$$\left| \bigcup_{i=1}^k W_{k+1}^{\alpha_{i,k+1}} \right| \leq \sum_{i=1}^k |W_{k+1}^{\alpha_{i,k+1}}| < |W_{k+1}|.$$

Portanto, existe um vértice $x_{k+1} \in W_{k+1}$ que tem pelo menos $\beta |W_i|$ vizinhos de cor $\alpha_{i,k+1}$ em W_i para cada $i \in [k]$.

Definimos o conjunto $W'_i = N(x_{k+1}) \cap W_i$. Desejamos mostrar que podemos aplicar a indução em $\widehat{G}' = \widehat{G} \left[\bigcup_{i=1}^k W'_i \right]$ e o grafo r -colorido $\widehat{K}_k = \widehat{K}_{k+1} \left[\{v_1, \dots, v_k\} \right]$ para obter vértices x_1, \dots, x_k , em que $x_i \in W_i$, tais que $\widehat{G} [x_1, \dots, x_{k+1}]$ é uma cópia r colorida de \widehat{K}_{k+1} . Primeiro, pelas definições, ω e β satisfazem as condições da proposição para k . Além disso, para qualquer $X_i \subseteq W'_i$ fixo, com $|X_i| \geq \omega(k) |W'_i|$,

temos que

$$|X_i| \geq \omega(k) |W'_i| \geq \omega(k)\beta |W_i| \geq \omega(k+1) |W_i|.$$

Assim, pela nossa escolha de \widehat{G}' , todos os pares de conjuntos $X_i \subseteq W'_i$, com $|X_i| \geq \omega(k) |W'_i|$, e $X_j \subseteq W'_j$, com $|X_j| \geq \omega(k) |W'_j|$, têm pelo menos $\beta |X_i| |X_j|$ arestas de cor $\alpha_{i,j}$ entre eles. Dessa forma, o resultado é válido para k , e então, por indução, o resultado segue para $k+1$, ou seja, \widehat{G} contém uma cópia de \widehat{K}_{k+1} com um vértice em cada conjunto W_i . \square

Podemos agora demonstrar o Teorema 5.13.

Demonstração. Para $k \geq 3$ e \mathbf{P} uma família de padrões de K_{k+1} localmente arco-íris que satisfaz a estabilidade de cores para r , fixe $\delta < 1/(5^{2k+1}r^{4k}e^4k^4)$ e seja n_0 para o qual essa propriedade é válida. Pelo Teorema 1.6 existe um grafo G multipartido completo de ordem n que é s -partido, tal que G é um grafo extremal e $V(G) = V'_1 \cup \dots \cup V'_s$ a s -partição do conjunto de vértices de G . Pelo Teorema de Turán, ou G é isomorfo a $T_k(n)$ e nesse caso não resta nada a demonstrar ou $s > k$. Por contradição suponha que $s > k$ e denote $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_k$ uma partição do conjunto de vértices de G , tal que a soma das arestas internas de cada conjunto V_i seja mínimo. Se $v \in V_i$ e $j \in \{1, \dots, k\}$, temos que

$$|N(v) \cap V_j| \geq |N(v) \cap V_i|,$$

caso contrário poderíamos reduzir o número de arestas internas transferindo v para V_j . Além disso, pela propriedade de Estabilidade de Cores temos que $\sum_{i=1}^k e(V_i) \leq \delta n^2$. Ou seja, o subgrafo $G' \subset G$ obtido através da eliminação das arestas internas de G é k -partido e tem pelo menos $|E(G)| - \delta n^2 \geq |\text{ex}(n, K_{k+1})| - \delta n^2$ arestas. Assim, pela Proposição 4.12, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

$$\left| |V_i| - \frac{n}{k} \right| \leq \sqrt{2\delta n}.$$

Afirmção: Existe um vértice x que assumiremos estar em V_1 que satisfaz

$$|N(x) \cap V_i| \geq \frac{n}{2(k+1)}$$

para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Demonstração. Como G não é k -partido existe uma aresta $\{x, y\}$ de modo que ambos os vértices pertencem à mesma classe da partição $V_1 \cup \dots \cup V_k$, digamos V_1 . Isso significa que x, y pertencem a classes diferentes pela partição $V'_1 \cup \dots \cup V'_s$. Como G é multipartido completo, para cada vértice $v \in V(G) \setminus \{x, y\}$, v deve ser adjacente a x ou y . Em particular, assumindo, sem perda de generalidade, que $|N(x) \cap V_1| \geq |N(y) \cap V_1|$ temos

$$|N(x) \cap V_1| \geq \frac{|V_1|}{2} \geq \frac{n}{2k} - \sqrt{\delta}n \geq \frac{n}{2(k+1)}.$$

já que $\delta < \frac{1}{5^{2k+1}r^4k^4e^4} \leq \frac{1}{4k^2(k+1)^2}$. A afirmação segue porque $|N(x) \cap V_i| \geq |N(x) \cap V_1|$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. \square

Seja \mathbf{C} o conjunto de todas as possíveis colorações de G que são \mathbf{P} -livres. Considere então o vértice $x \in V_1$ de modo que

$$|N_x(V_1)| > \frac{n}{2(k+1)}, \quad (5.11)$$

com $N_x(V_1) = N(x) \cap V_1$. Além disso, pela escolha de x temos que

$$|N_x(V_i)| > \frac{n}{2(k+1)}, \text{ para } i \in \{2, \dots, k\}.$$

Seja \mathbf{C}_1 o subconjunto de todas as colorações tais que existe uma escolha distinta de cores $c_1, \dots, c_k \in \{1, \dots, r\}$, de modo que existam subconjuntos $W_i \subset V_i$ com $|W_i| \geq n/(2e^2k^2)$, $i \in \{1, \dots, r\}$, de forma que para todo $v \in W_i$ a aresta $\{x, v\} \in E(G)$ e tem cor c_i . Seja $\mathbf{C}_2 = \mathbf{C} \setminus \mathbf{C}_1$.

Considere uma coloração de \hat{G} que pertence a \mathbf{C}_1 e fixe as cores c_1, \dots, c_k e conjuntos W_1, \dots, W_k como na definição de \mathbf{C}_1 . Fixe uma coloração $C(K_{k+1})$ de K_{k+1} com padrão $P \in \mathbf{P}$ de forma que as arestas incidentes com algum vértice localmente arco-íris v são coloridas com cores c_1, \dots, c_k . Em particular, v poderia ser mapeado para x em uma tentativa de construir um isomorfismo de $C(K_{k+1})$ em \hat{G} .

Como \widehat{G} é \mathbf{P} -livre, vamos aplicar a Proposição 5.14 com $\beta = 1/5r^2$ e $\omega(i) = 1/(5r^2)^i$ para cada $i \in [k]$ para fixar uma cor $h \in [r]$ e um par (X_i, X_j) que satisfaz $X_i \subseteq W_i$, com $|X_i| \geq \omega(k)|W_i|$ e $X_j \subseteq W_j$, em que $|X_j| \geq \omega(k)|W_j|$ temos que ter menos de $\beta|X_i||X_j|$ arestas de cor h entre $|X_i|$ e $|X_j|$.

Usaremos isso para limitar o tamanho de \mathbf{C}_1 . Note que existem r escolhas para a cor h e no máximo 2^{2n} escolhas para os conjuntos X_i e X_j . Uma vez que fixamos a cor h e os conjuntos X_i e X_j temos no máximo

$$\begin{aligned} & \binom{|X_i||X_j|}{\beta|X_i||X_j|} \cdot (r-1)^{|X_i||X_j|} \leq 2^{H(\beta)|X_i||X_j|} \cdot (r-1)^{|X_i||X_j|} \\ & \leq \left((5r^2)^{2/(5r^2)} \cdot (r-1) \right)^{|X_i||X_j|} \end{aligned}$$

maneiras de colorir as arestas entre X_i e X_j . Pela escolha da partição, temos no máximo $\text{ex}(n, K_{k+1}) + \delta n^2 - |X_i||X_j|$ outras arestas em G , que podem ser coloridas em no máximo $r^{\text{ex}(n, K_{k+1}) + \delta n^2 - |X_i||X_j|}$ maneiras diferentes, ou seja,

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}_1| & \leq r 2^{2n} \cdot (5r^2)^{2|X_i||X_j|/(5r^2)} \cdot (r-1)^{|X_i||X_j|} \cdot r^{\text{ex}(n, K_{k+1}) + \delta n^2 - |X_i||X_j|} \\ & \leq \left(25r^4 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{5r^2} \right)^{|X_i||X_j|/(5r^2)} \cdot r^{\text{ex}(n, K_{k+1}) + \delta n^2}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$25r^4 \cdot \left(\frac{r-1}{r} \right)^{5r^2} \leq 25r^4 \cdot e^{-5r} < \frac{(2re^{-r})^5}{r} < \frac{1}{r}.$$

Finalmente, lembrando que $\delta = \frac{1}{(5^{2k+1}r^{4k}e^4k^4)}$ e usando o limite inferior em $|W_i|$ e $|X_i|$, temos que

$$|X_i||X_j| \geq \omega(k-1)^2 |W_i||W_j| \geq \frac{n^2}{4r^2e^4k^4(5r^2)^{2k-2}} > \frac{n^2}{5^{2k-1}r^{2(2k-1)}e^4k^4},$$

concluimos que

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}_1| & < r^{\text{ex}(n, K_{k+1}) + \delta n^2 - |X_i||X_j|/(5r^2)} \\ & < r^{\text{ex}(n, K_{k+1}) + \delta n^2 - n^2/(5^{2k}r^{4k}e^4k^4)} \\ & < r^{\text{ex}(n, K_{k+1})}. \end{aligned}$$

Pelo que foi discutido acima, \mathbf{C}_2 contém $|\mathbf{C}| - |\mathbf{C}_1| \geq r^{\text{ex}(n, K_{k+1})+m-1}$ colorações de G . Considere uma dessas colorações. Pela definição de \mathbf{C}_2 não existe k -upla, digamos (W_1, \dots, W_k) , como na definição de \mathbf{C}_1 . Seja W_i^c o conjunto de todos os vértices de V_i que são adjacentes a x através de uma aresta de cor c . Considere o grafo bipartido com bipartição dada pelos conjuntos $[k]$ e $[r]$, de forma que $\{i, c\}$ é uma aresta sempre que $|W_i^c| \geq n/2e^2k^2$. Como $|N_x(V_i)| > n/2e^2k^2$, é impossível que, para algum $i \in [k]$ tenhamos $|W_i^c| < n/2e^2k^2$ para todo $c \in [r]$, ou seja, não é possível encontrar um emparelhamento perfeito, isto é, saturar os conjuntos W_1, \dots, W_k . Logo, para essa coloração fixada, aplicando o Teorema 2.8 (Teorema de Hall), concluímos que para evitar uma distribuição localmente arco-íris de cores em \mathbf{C}_1 , existe $h \in [k-1]$ e pares distintos $V_{i_1}, \dots, V_{i_{h+1}}$ tais que, para cada $j \in [h+1]$, temos $|W_{i_j}^c| \geq n/2e^2k^2$. Podemos determinar uma cota superior para as colorações de \mathbf{C}_2 iterando em h , para tanto, para cada h fixo, existe uma escolha de conjuntos $V_{i_1}, \dots, V_{i_{h+1}}$ que podem ser escolhidos de $\binom{k}{h+1}$ modos. Aplique as equações (5.2) e (5.3), então existem no máximo

$$\left(2^{\mathbf{H}(1/(2e^2k^2)n)}\right)^r \leq 2^{\frac{n \log_2(2e^2k^2)}{e^2k^2}}$$

modos de selecionar até $n/(2e^2k^2)$ arestas para cada uma das cores raras com respeito a x e para cada $V_{i_j}, j \in [h+1]$. Na equação anterior utilizamos

$$\mathbf{H}(1/(2e^2k^2)) \leq \frac{2}{2e^2k^2} \log_2(2e^2k^2).$$

As arestas restantes são coloridas com no máximo h cores abundantes. Podemos deduzir que o número de modos de colorir as arestas entre x e cada V_{i_j} é limitado por

$$2^{\frac{n \log_2(2e^2k^2)}{e^2k^2}} h^{\left(\frac{1}{k} + \sqrt{2\delta}\right)n}.$$

Para todo $l \in [k] \setminus \{i_1, \dots, i_{h+1}\}$ as arestas entre x e V_l podem ser coloridas em no máximo

$$r^{\left(\frac{1}{k} + \sqrt{2\delta}\right)n}$$

modos. Para n grande, podemos concluir que o número N_x de colorações das arestas incidentes a x que podem ser estendidas a colorações em \mathbf{C}_2 satisfaz

$$\begin{aligned} N_x &\leq \sum_{h=1}^{k-1} \binom{k}{h+1} \binom{r}{h}^{(h+1)} 2^{(h+1)\left(\frac{n \log_2(2e^2k^2)}{e^2k^2}\right)} h^{(h+1)\left(\frac{1}{k} + \sqrt{2\delta}\right)n} r^{(k-h-1)\left(\frac{1}{k} + \sqrt{2\delta}\right)n} \\ &\leq \sum_{h=1}^{k-1} 2^k 2^{kr} 2^{n \log_2(2e^2k^2)/(e^2k)} (h^{h+1} r^{k-h-1})^{\left(\frac{1}{k} + \sqrt{2\delta}\right)n}. \end{aligned}$$

Seja $f(h) = h^{h+1} r^{k-h-1}$. Considerando $k \geq 3$ e $h \leq k-2$ podemos escrever a seguinte desigualdade

$$\frac{f(h+1)}{f(h)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \frac{h+1}{h}}{r} \leq \frac{e(h+2+1/h)}{r} < 1,$$

que é válida para $r > e(k+1)$. Isso mostra que os elementos do somatório são decrescentes em h , portanto

$$N_x \leq k 2^k 2^{kr} 2^{n \log_2(2e^2k^2)/(e^2k)} r^{(k-2)\left(\frac{1}{k} + \sqrt{2\delta}\right)n} < r^{\delta_k(n) - \frac{n}{3k}}.$$

Isso é verdade pois

$$2^{\log_2(2(ek)^2)^{1/(e^2k)}} r^{\sqrt{2\delta}} \leq r^{\frac{2}{3k}},$$

já que

$$\begin{aligned} \frac{(e^2k^2)^{\frac{1}{2k}} r^{\sqrt{2\delta}}}{e^2k \log_{(ek)^2}(r)} &\leq r^{\frac{2}{3k}} \\ r^{\sqrt{2\delta} + \frac{1}{e^2k \log_{(ek)^2}(r)}} &\leq r^{\frac{2}{3k}} \\ \sqrt{2\delta} &\leq \frac{2}{3k} - \frac{1}{ke^2 \log_{(ke)^2}(r)} \leq \frac{2}{3k} - \frac{2}{ke^2} \\ \delta &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{e^2 - 3}{3ke^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Sabemos que

$$|\mathbf{C}_2| \geq r^{\text{ex}(n, K_{k+1}) + m - 1},$$

de modo que o número de colorações livres de P em $G - x$ é no mínimo

$$r^{\text{ex}(n, K_{k+1}) + m - 1 - \delta_k(n) + \frac{n}{3k}} \gg r^{\text{ex}(n-1, K_{k+1}) + m + 1}.$$

Podemos aplicar esse argumento indutivamente agora no grafo $G^{(1)} = G - x$, já que $|V(G^{(1)})| = n - 1$ até $G^{(n-n_0)}$, o que irá implicar que o grafo $G^{(n-n_0)}$ tem mais colorações do que o grafo completo em n_0 vértices, o que claramente é um absurdo.

Isso mostra que todo grafo s -partido que é (r, \mathbf{P}) -extremal é isomorfo a $T_k(n)$. □

6 CONCLUSÃO E PRÓXIMOS PASSOS

Esta tese investigou alguns problemas do tipo Erdős-Rothschild, com foco na família de padrões localmente arco-íris, expandindo resultados anteriores, citamos em especial o trabalho desenvolvido por Hoppen, Lefmann e Odermann em [16]. O principal resultado obtido foi a demonstração de que, para todo $r > r_0$ onde r_0 é uma função de k e s , o grafo de Turán $T_k(n)$ é o único grafo $(r, K_{k+1}^{LR}(s))$ -extremal para $n > n_0$, $k \geq 3$ e $s \in \{\sigma(k), \dots, \binom{k+1}{2}\}$ onde $\sigma(k) = k$ se k for ímpar, $\sigma(k) = k+1$ caso contrário. Merece ser destacado o fato que, para o caso particular de $s = \binom{k+1}{2}$, temos que a família proibida contém um único padrão, que é justamente o padrão estudado em [16] no qual foi demonstrado que o grafo extremal é o grafo de Turán $T_k(n)$, para todo $r \geq \binom{k+1}{2}^{8k+4}$. O caso particular resolvido por esta tese demonstra o mesmo resultado, mas para $r \geq \left(\binom{k+1}{2} + 2\right)^{4k+3}$.

O método utilizado para a demonstração dos resultados do parágrafo anterior foi o método da estabilidade, o qual foi abordado na Seção 1.2. A contribuição principal desta tese, entretanto, reside fundamentalmente na extensão do estudo de problemas do tipo Erdős-Rothschild para padrões motivados por colorações próprias, que são um conceito clássico em teoria dos grafos. De fato, definimos a família das colorações localmente arco-íris como o conjunto dos padrões que são induzidos por colorações próprias. Trabalhamos nessa com diversas subfamílias da família das colorações localmente arco-íris. Em particular, $K_{k+1}^{LR}(\sigma(k))$ é justamente a família das colorações localmente arco-íris para $s = \sigma(k)$.

Os métodos de estabilidade utilizados na tese se baseiam na estrutura dos grafos reduzidos multicoloridos associados as colorações de um certo grafo G que é candidato a solução extremal. Dado que as colorações não podem conter padrões proibidos, surgem restrições no número de arestas associadas com listas com um número grande de cores, que são originadas por resultados que garantem que cópias de um padrão em um grafo reduzido implicam cópias desse mesmo padrão na

coloração original. Conhecemos esses resultados como resultados do tipo Imersão. Na nossa tese, foi necessário demonstrar resultados de Imersão específicos para os nossos padrões, que foram abordados no Capítulo 3. Fazemos menção especial ao algoritmo para construção de colorações próprias (Teorema 3.14) que foi fundamental para construir as cópias proibidas em dois dos principais resultados de imersão, Teoremas 3.16 e 3.18. Esses teoremas são ingredientes importantes para a obtenção dos resultados de estabilidade.

Apesar de importantes avanços a pesquisa sobre as famílias $K_{k+1}^{LR}(s)$ deixa diversas questões em aberto, abrindo caminho para novas investigações.

Uma possibilidade é reduzir o valor da cota inferior n_0 para o número de vértices do grafo extremal no Teorema 1.11. O n_0 obtido nessa tese é um número grande por causa do Lema de Regularidade de Szemerédi utilizado na demonstração da estabilidade obtida no Teorema 1.10. Uma alternativa seria abordar esse problema com uma técnica relativamente nova em Teoria dos Grafos, conhecida como Método dos Contêineres, para obter a estabilidade. Uma redução semelhante no valor de n_0 foi obtida em trabalhos que optaram por essa abordagem. Citamos como exemplo o artigo de Balogh e Li [5] que trata de colorações de Gallai e possui uma relação próxima com o problema proposto por essa tese.

Outra possibilidade seria substituir a função r_0 que encontramos por uma função menor de modo que resultados como o Teorema 5.2 ainda sejam válidos. O trabalho de Nolibos [19] faz uma análise de cotas inferiores em um contexto muito parecido.

Um terceiro problema seria procurar subfamílias $\mathbf{T} \subset K_{k+1}^{LR}(s)$ para as quais os grafos extremais são iguais ao do Teorema 5.2 para o mesmo $r_0(k, s)$. Esse resultado nos parece natural, pois nas nossas demonstrações alguns padrões não parecem gerar restrições adicionais na resolução do problema de Erdős-Rothschild.

Por fim, uma quarta alternativa seria modificar a família $K_{k+1}^{LR}(s)$ na expectativa que possamos ganhar ferramentas que sejam posteriormente úteis para a família original. Uma família que parece natural é das colorações localmente arco-íris com no máximo t cores distintas, que denotaremos por $K_{k+1}^{LR}(\leq t)$. Essa família é interessante por não conter o padrão arco-íris sempre que $t < \binom{k+1}{2}$, o que não acontece com $K_{k+1}^{LR}(s)$ (o padrão arco-íris sempre pertence a $K_{k+1}^{LR}(s)$), esse fato é relevante pela discussão que abordamos no Teorema 5.8.

Outra possibilidade para generalizar os nossos resultados seria considerar famílias proibidas baseadas em grafos que não sejam grafos completos. Esse não foi o objetivo dessa tese, mas motiva a definição abaixo.

Definição 6.1. (*Família localmente arco-íris minimal de F*) A família localmente arco-íris minimal de F é a família \mathbf{F}^{min} dos padrões localmente arco-íris P de F associados a colorações com exatamente $\chi'(F)$ cores.

Quando F é o grafo completo, essa definição corresponde a noção anterior de grafos localmente arco-íris coloridos com o menor número de cores.

Acreditamos que seja possível encontrar uma subfamília de padrões como descritos acima para os quais existam intervalos (r_a^i, r_b^i) disjuntos, com $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ e $l \in \mathbb{N}$, onde o grafo extremal do problema de Erdős-Rothschild é uma solução extremal de Turán, mas temos alguma estrutura extremal distinta fora desses intervalos. Apresentaremos em breve um resultado que mostra que, para K_4^{min} não temos uma solução extremal de Turán para $r \in \{2, 3\}$, e também não conseguimos demonstrar que, para algum r o problema de Erdős-Rothschild para essa família admita a solução extremal de Turán como grafo extremal, portanto, apenas de ser uma generalização do problema original ela não ajudou na proposta pela qual foi proposta. Entretanto, podemos continuar generalizando a família de padrões proibidos. Na Seção 5.2 trabalhamos com padrões de colorações que eram “quase” localmente arco-íris, dessa forma desejamos uma generalização desse conceito para

um grafo F qualquer. Evidentemente tal conceito implicará na noção de distância de uma coloração minimal (nesse caso, a coloração própria) e uma outra coloração qualquer, desse modo definimos a distância entre duas colorações de F , digamos, \hat{F}_1 e \hat{F}_2 , como o número de arestas que possuem cores distintas, o qual denotaremos por $d(\hat{F}_1, \hat{F}_2)$. Um conceito um pouco menos trivial é a distância entre padrões:

Definição 6.2. (*Distância entre dois padrões*) Dados um grafo F e dois padrões de F , digamos R e S , a distância entre os dois padrões é o mínimo das distâncias entre todas as colorações possíveis associadas para cada padrão, denotada por $\hat{d}(R, S)$.

Definição 6.3. (*Padrão s -minimal*) Dado um grafo F dizemos que um padrão P de F é um padrão s -minimal se $\min_{Q \in \mathbf{F}^{min}} \hat{d}(P, Q) \leq s$.

Apresentamos assim a família s -minimal de F :

Definição 6.4. (*Família s -minimal de F*) Definimos F_s^{min} como a família de padrões P de F tais que P são os padrões s -minimal de F .

Portanto, para $F = K_4$ e $s = 1$, temos justamente a família quase localmente arco-íris, isto é QK_4 , dessa forma a família proposta é uma abordagem natural para continuar estudando sobre a monotonicidade das soluções extremais de Turán.

Uma abordagem específica da família acima para o qual temos conjecturas interessantes é para $F = K_4$ e $s = 0$: a família dos padrões de K_4 coloridas com exatamente 3 cores. Essa família é interessante já que é uma subfamília da família K_4^{LR} , mas sem o padrão arco-íris. Temos interesse em determinar os grafos que são extremais para essa família, isto é, quais grafos atingem o número de coloração de $c_{r,P}(n)$. Temos que, para $r = 2$, a solução é trivial (o grafo completo). Para r grande sabemos que a solução não pode ser uma solução extremal de Turán, pelo argumentos apresentados por Hoppen, Lefmann e Odermann [16]. Ao estudar os possíveis candidatos para grafos extremais nos deparamos com grafos parecidos

com os grafos de Turán, mas com uma propriedade de desbalanceamento. Um questionamento natural foi se aqueles grafos gerados eram realmente extremais e, caso positivo, se era possível generalizar alguma família de soluções a partir deles. Para tanto, dado um grafo G e uma família \mathbf{P} , podemos definir o conjunto $\mathcal{C}(G, \mathbf{P})$ como o conjunto das colorações de G livres de \mathbf{P} . Podemos majorar as colorações de G com um conjunto de grafos multicoloridos, com um procedimento parecido com o que fizemos no Teorema 5.2. Definimos \mathbf{G}_{max} como o grafo multicolorido que admite o maior número possível de colorações entre todos os grafos multicoloridos associados a G . Esse procedimento é útil porque é fácil calcular as colorações de um grafo multicolorido.

Apresentamos a seguinte conjectura:

Conjectura 6.1. *Dada a família K_4^{min} de padrões de K_4 que são localmente arco-íris minimais e $r = 3$. Seja G um grafo extremal desse problema, isto é, o número de colorações de G é igual a $c_{3, K_4^{min}}(n)$. Temos então que o grafo \mathbf{G}_{max} associado a G é bipartido em relação as arestas de tamanho 3.*

Podemos apresentar a construção de um candidato para o grafo multicolorido \mathbf{G}_{max} . Para $r = 3$, considere o grafo multicolorido com n vértices tal que temos uma bipartição A, B dos vértices de \mathbf{G}_{max} de modo que $|V(A)| = \alpha n$ e $|V(B)| = n - |V(A)|$, com $\alpha = \frac{\log_2(3)}{2\log_2(3)-1}$. Além disso considere que as arestas entre A e B admitem 3 cores e as arestas em A formam um grafo completo onde as arestas estão associadas a listas com as mesmas duas cores. Claramente nenhuma cópia de K_4 em \mathbf{G}_{max} pode conter o padrão localmente arco-íris, de fato, se os quatro vértices dessa cópia estão em A não é possível ter uma coloração própria, se um dos vértices está em B também não é possível obter uma coloração própria.

Podemos comparar o número de colorações obtidas pelo grafo \mathbf{G}_{max} apresentado com o número de colorações do grafo de Turán $T_3(n)$:

$$c_{3,K_4^{LR}}(\mathbf{G}_{max}) \geq 3^{\alpha n(n-\alpha n)} 2^{\binom{\alpha n}{2}} = 3^{\alpha n(n-\alpha n) + (\alpha n)(\alpha n - 1)/2 \cdot \log_2(3)} > 3^{t_3(n)}.$$

Como é possível checar o grafo apresentado admite aproximadamente $3^{0.36n^2}$ colorações, um número ligeiramente superior ao número de colorações do que o grafo de Turán, portanto é um candidato a extremal.

Por fim, começamos a estudar alguns outros trabalhos que resolviam problemas semelhantes, mas com técnicas diferentes. Um que chamou muita atenção foi o trabalho de Pikhurko e Staden [20], que utiliza métodos de otimização para encontrar um grafo reduzido ótimo e que demonstrou ser uma ferramenta com potencial para abordar os temas propostos nessa tese.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALLEN, P., KEEVASH, P., SUDAKOV, B., AND VERSTRAËTE, J. Turán numbers of bipartite graphs plus an odd cycle. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 106 (2014), 134–162.
- [2] ALON, N., BALOGH, J., KEEVASH, P., AND SUDAKOV, B. The number of edge colorings with no monochromatic cliques. *Journal of the London Mathematical Society* 70, 2 (2004), 273–288.
- [3] ALON, N., KRIVELEVICH, M., AND SUDAKOV, B. Turán numbers of bipartite graphs and related Ramsey-type questions. *Combinatorics, Probability and Computing* 12, 5-6 (2003), 477–494.
- [4] BALOGH, J. A remark on the number of edge colorings of graphs. *European Journal of Combinatorics* 27, 4 (2006), 565–573.
- [5] BALOGH, J., AND LI, L. The typical structure of Gallai colorings and their extremal graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 33, 4 (2019), 2416–2443.
- [6] BENEVIDES, F. S., HOPPEN, C., AND SAMPAIO, R. M. Edge-colorings of graphs avoiding complete graphs with a prescribed coloring. *Discrete Mathematics* 340, 9 (2017), 2143–2160.
- [7] BOTLER, F., CORSTEN, J., DANKOVICS, A., FRANKL, N., HÀN, H., JIMÉNEZ, A., AND SKOKAN, J. Maximum number of triangle-free edge colourings with five and six colours. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae* 88, 3 (2019), 495–499.
- [8] ERDŐS, P., RUBIN, A. L., AND TAYLOR, H. Choosability in graphs. *Congressus Numerantium* 26, 4 (1979), 125–157.

- [9] ERDŐS, P., AND STONE, A. H. On the structure of linear graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society* 52, 12 (1946), 1087–1091.
- [10] ERDŐS, P. *Some new applications of probability methods to combinatorial analysis and graph theory*. University of Calgary, Department of Mathematics, Statistics and Computing, 1974.
- [11] FÜREDI, Z. A proof of the stability of extremal graphs, Simonovits’ stability from Szemerédi’s regularity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 115 (2015), 66–71.
- [12] GALVIN, F. The list chromatic index of a bipartite multigraph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 63, 1 (1995), 153–158.
- [13] GOWERS, W. T. Lower bounds of tower type for Szemerédi’s uniformity lemma. *Geometric & Functional Analysis* 7, 2 (1997), 322–337.
- [14] HOPPEN, C., LEFMANN, H., AND NOLIBOS, D. An extension of the rainbow Erdős-Rothschild problem. *Discrete Mathematics* 344, 8 (2021), 112443.
- [15] HOPPEN, C., LEFMANN, H., AND ODERMANN, K. On graphs with a large number of edge-colorings avoiding a rainbow triangle. *European Journal of Combinatorics* 66 (2017), 168–190.
- [16] HOPPEN, C., LEFMANN, H., AND ODERMANN, K. A rainbow Erdős-Rothschild problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 31, 4 (2017), 2647–2674.
- [17] JENSEN, T., AND TOFT, B. *Graph coloring problems, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization*. 1995.
- [18] MISRA, J., AND GRIES, D. A constructive proof of Vizing’s theorem. *Information Processing Letters* 41, 3 (1992), 131–133.

- [19] NOLIBOS, D. A. *Uma generalização do problema de Erdős-Rothschild para padrões de grafos completos*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2021.
- [20] PIKHURKO, O., AND STADEN, K. Stability for the Erdős-Rothschild problem. *Forum of Mathematics, Sigma* 11 (2023), e23.
- [21] PIKHURKO, O., AND STADEN, K. Exact solutions to the Erdős-Rothschild problem. *Forum of Mathematics, Sigma* 12 (2024), e8.
- [22] SCHMIDT, D. R. *Problemas de coloração em grafos evitando famílias de padrões de grafos completos*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2023.
- [23] VIZING, V. G. The chromatic class of a multigraph. *Cybernetics* 1, 3 (1965), 32–41.
- [24] WEST, D. B. *Introduction to Graph Theory, vol. 2*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.
- [25] YUSTER, R. The number of edge colorings with no monochromatic triangle. *Journal of Graph Theory* 21, 4 (1996), 441–452.