

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Sobre a versão sharp da Desigualdade de  
Hausdorff-Young**

Dissertação de Mestrado

Leonardo Angelo de Oliveira

Porto Alegre, dezembro de 2023

Dissertação submetida por Leonardo Angelo de Oliveira<sup>1</sup> como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Lucas da Silva Oliveira (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:

Emanuel Augusto de Souza Carneiro (ICTP)

Felipe Ferreira Gonçalves (IMPA)

Tiago Henrique Picon (FFCLRP-USP)

Data da Apresentação: 13/12/2023.

---

<sup>1</sup>Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

# Agradecimentos

A minha família, em especial meus pais, Cleia Izidorio Angelo e Ivan de Oliveira, e minha tia Rosyclei Oliveira Monteiro, que sempre me apoiaram nos estudos. Me faltam palavras para descrever o quão grato sou pelo suporte que deles recebi. Muito obrigado.

Ao meu orientador, Lucas da Silva Oliveira, que nunca mediu esforços para me aconselhar e orientar durante a elaboração desta dissertação. Agradeço por todos os aprendizados, acadêmicos e pessoais, que levarei de nossas boas conversas.

Aos professores da UFRGS, em especial aqueles com os quais tive contato, todos excelentes.

Aos amigos gaúchos que fiz no caminho, por todos os momentos produtivos, e os improdutivos também.

Aos meus amigos roraimenses, em especial os da UFRR que sempre me incentivaram a seguir nos estudos em matemática. Agradeço especialmente a Maria Celina de Assis, que é meio que metade gaúcha e metade roraimense, pelo apoio durante meus primeiros e frios meses no Rio Grande do Sul.

A banca examinadora, por ceder um pouco do seu tempo para ler e avaliar esta dissertação.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

# Resumo

De acordo com a Desigualdade de Hausdorff-Young, temos  $\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p$  para  $f \in L^p$ , com  $1 \leq p \leq 2$  e  $1/p + 1/q = 1$ . Nesta dissertação, sob a hipótese de que  $q$  seja par, e considerando a Transformada de Fourier como sendo  $\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)e^{-ixy} dx$ , obtemos a versão ótima desta desigualdade. Neste caso, mostramos que  $\|\widehat{f}\|_q \leq (2\pi)^{\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}} p^{\frac{1}{2p}} q^{-\frac{1}{2q}} \|f\|_p$  para qualquer  $f \in L^p$ ; além disso, verificamos que vale a igualdade para funções da forma  $f(x) = e^{-ax^2+ibx}$  com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ .

# Abstract

According to the Hausdorff-Young Inequality, we have  $\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p$  for  $f \in L^p$ , with  $1 \leq p \leq 2$  and  $1/p + 1/q = 1$ . In this dissertation, under the assumption that  $q$  is even, and by considering the Fourier Transform as being  $\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)e^{-ixy}dx$ , we obtain the optimal version of this inequality. In this case, we show that  $\|\widehat{f}\|_q \leq (2\pi)^{\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}} p^{\frac{1}{2p}} q^{-\frac{1}{2q}} \|f\|_p$  for any  $f \in L^p$ ; in addition, we verify that equality holds for functions of the form  $f(x) = e^{-ax^2+ibx}$  with  $a, b \in \mathbb{R}$  and  $a > 0$ .

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Análise Complexa e Teoria de Funções Inteiras . . . . .	3
1.2 Espaços $L^p$ e Interpolação . . . . .	11
1.3 Convolução e Aproximações da Identidade . . . . .	22
<b>2 Transformada de Fourier e a Desigualdade de Hausdorff-Young</b>	<b>25</b>
2.1 Transformada de Fourier em $L^1$ . . . . .	25
2.2 Classe de Schwartz . . . . .	29
2.3 Transformada de Fourier em $L^1 + L^2$ e a Desigualdade de Hausdorff-Young	31
<b>3 Teorema de Babenko</b>	<b>33</b>
3.1 Operador auxiliar . . . . .	34
3.2 Equações integrais para os extremizantes . . . . .	40
3.3 Relação de recorrência . . . . .	57
3.4 Demonstração do Teorema de Babenko . . . . .	68
<b>Conclusão</b>	<b>74</b>
<b>Apêndice</b>	<b>75</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>78</b>

# Introdução

O objetivo desta dissertação é o estudo de uma *Desigualdade Sharp* (ou *Ótima*). Esse tipo de desigualdade consiste, de forma geral, no melhor refinamento de uma desigualdade dada. Isso pode ser entendido, por exemplo, no sentido de determinar ou classificar, se possível, as condições para que a igualdade seja válida, ou reescrevê-la com constantes melhores. A desigualdade em que estamos interessados é a seguinte:

**Teorema 1** (Desigualdade de Hausdorff-Young). Considere  $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ixy} dx$  e assumamos que  $1 \leq p \leq 2$  e  $1/p + 1/q = 1$ . Se  $f \in L^p$ , então

$$\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p. \quad (1)$$

A demonstração dessa desigualdade baseada no Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, que apresentamos na Seção 3 do Capítulo 2, utiliza a linearidade e a continuidade da aplicação  $f \in L^p \mapsto \hat{f} \in L^q$ . Essa observação abre caminho para uma abordagem via norma de operador para o problema de encontrar a desigualdade sharp associada. Suponhamos por um instante que conhecemos a melhor (isto é, a menor) constante  $K$  tal que  $\|\hat{f}\|_q \leq K\|f\|_p$ ; neste caso, nossa desigualdade sharp é  $\|\hat{f}\|_q \leq K\|f\|_p$  e as funções extremizantes são as  $g \in L^p$  tais que  $\|\hat{g}\|_q = K\|g\|_p$ .

Agora, pelo menos para o autor desta dissertação, é no mínimo surpreendente que sob a hipótese de que  $q$  seja par, a constante  $K$  descrita no parágrafo anterior possa ser exibida explicitamente. Em seu artigo publicado em 1961, K. I. Babenko [1] considerou a Transformada de Fourier normalizada  $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy} dx$  e deduziu que  $K = (2\pi)^{\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}} p^{\frac{1}{2p}} q^{-\frac{1}{2q}}$  quando  $q$  é par; além disso, ele indicou uma classe de funções extremizantes - essa é a versão sharp da Desigualdade de Hausdorff-Young:

**Teorema 2** (Babenko). Seja  $1 < p \leq 2$  e suponha que  $1/p + 1/q = 1$ , com  $q = 2l$  e  $l$  inteiro positivo. Para qualquer  $f \in L^p$ , vale a desigualdade

$$\left[ \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^q dy \right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[ \sqrt{\frac{p}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2)$$

Além disso, vale a igualdade para funções Gaussianas  $f$  da forma

$$f(x) = e^{-ax^2+ibx} \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0. \quad (3)$$

A demonstração que apresentamos segue os passos indicados no artigo [1], e serve de guia para a organização dos capítulos desta dissertação, que é a seguinte:

- No Capítulo 1, revisamos alguns tópicos de Análise Complexa e Integral em Espaços  $L^p$ ; e no Capítulo 2, apresentamos o básico da Teoria da Transformada de Fourier, com ênfase na demonstração da versão clássica da Desigualdade de Hausdorff-Young.
- O Capítulo 3 contém a demonstração do principal resultado desta dissertação, o Teorema de Babenko. Descrevemos a ideia geral da prova, cujos detalhes estão contidos nas 4 Seções deste Capítulo; além disso, na Observação 3.2.4, justificamos a necessidade da restrição de que  $q$  seja par.
- Por fim, fazemos algumas considerações sobre as generalizações do Teorema de Babenko, incluindo o caso em que  $q$  não é necessariamente par; e no Apêndice, apresentamos as funções de Hermite, que são essenciais para a demonstração de propriedades operacionais que utilizamos nesta a dissertação.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste Capítulo introdutório, apresentamos o que será utilizado durante esta dissertação. Na Seção 1, cobrimos alguns teoremas da Análise Complexa, e introduzimos o conceito de ordem de uma função inteira. Já na Seção 2, revisamos alguns resultados da Teoria da Integração, em especial o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin. Concluímos o Capítulo com a Seção 3, na qual discutimos o conceito de convolução e aproximação da identidade, e analisamos o núcleo de convolução que utilizaremos no próximo capítulo.

A primeira Seção é baseada em [9]; a segunda, em [6]; e a terceira, em [6] e [10].

### 1.1 Análise Complexa e Teoria de Funções Inteiras

Uma **função inteira** é uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa em todo o plano complexo. Uma **série de potências** em torno de  $z_0 \in \mathbb{C}$  é uma série da forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^n - z_0)$  com  $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ . Por simplicidade e sem perda de generalidade, consideraremos apenas  $z_0 = 0$ .

**Teorema 1.1.1.** *Dada a série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , existe  $0 \leq R \leq \infty$  tal que:*

1. *Se  $|z| < R$ , então a série converge absolutamente.*
2. *Se  $|z| > R$ , então a série diverge.*

Além disso, com a convenção  $1/0 = \infty$  e  $1/\infty = 0$ , o valor de  $R$  é dado pela fórmula

$$1/R = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (1.1)$$

*Demonstração.* Ver [9], página 15. □

Dizemos que o número  $R$  é o **raio de convergência** da série.

**Teorema 1.1.2.** *A função definida por uma série de potências  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  é holomorfa em  $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , sendo  $R$  o raio de convergência associado à série. Além disso, a derivada de  $f$  é  $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  e tem raio de convergência  $R$ .*

*Demonstração.* Ver [9], página 16. □

Dizemos que o conjunto  $D_R$  é o **disco de convergência** da série.

Com o fato bem conhecido de que toda função holomorfa em um ponto admite única representação em séries de potências em torno desse ponto, provamos o seguinte resultado:

**Corolário 1.1.3.** *Sejam  $\Omega$  vizinhança aberta da origem,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa na origem e  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  a representação de  $f$  em séries de potências. Então a função  $\bar{f}$  definida por  $\bar{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n$  é holomorfa no mesmo disco em que  $f$  é holomorfa.*

*Demonstração.* Com a igualdade (1.1), vemos que as séries de potências que definem  $f$  e  $\bar{f}$  têm o mesmo disco de convergência  $D$ ; logo  $\bar{f}$  é holomorfa em  $D$  pelo Teorema 1.1.2. □

Uma **região** é um subconjunto de  $\mathbb{C}$  que é aberto e simplesmente conexo.

**Teorema 1.1.4** (Teorema de Cauchy). *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa no aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (1.2)$$

para toda curva regular por partes, simples e fechada  $\gamma \subset \Omega$ .

*Demonstração.* Ver [9], página 39. □

**Teorema 1.1.5** (Fórmula Integral de Cauchy). *Sejam  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa no aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  e  $C \subset \Omega$  um círculo cujo interior está contido em  $\Omega$ . Então*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w) dw}{(w-z)^{n+1}} \text{ para todo } z \text{ no interior de } C. \quad (1.3)$$

*Demonstração.* Ver [9], página 47. □

**Teorema 1.1.6** (Estimativas de Cauchy). *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa no aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Se  $z_0 \in \Omega$  e  $r > 0$  são tais que  $\bar{D} \subset \Omega$ , sendo  $D = D(z_0, r)$ , então*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \partial D} \{|f(z)|\}. \quad (1.4)$$

*Demonstração.* Ver [9], página 48. □

**Teorema 1.1.7** (Princípio do Módulo Máximo). *Seja  $f$  holomorfa e não constante em uma região  $\Omega$ . Então  $f$  não atinge um valor máximo em  $\Omega$ . Além disso, se  $\bar{\Omega}$  é compacto e  $f$  é contínua sobre  $\bar{\Omega}$ , então  $\sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial \Omega} |f(z)|$ .*

*Demonstração.* Ver [9], página 92. □

**Teorema 1.1.8** (Propriedade do Valor Médio). *Seja  $f$  holomorfa no disco  $D(z_0, R)$ . Então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \quad \text{para } 0 < r < R. \quad (1.5)$$

*Em particular, se  $u = \operatorname{Re}\{f\}$ , então*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \quad \text{para } 0 < r < R. \quad (1.6)$$

*Demonstração.* Ver [9], página 102. □

**Teorema 1.1.9** (Teorema de Liouville). *Toda função inteira e limitada é constante.*

*Demonstração.* Seja  $f$  uma função inteira limitada e suponhamos que  $B > 0$  é uma cota superior para  $f$ . Para cada  $z_0 \in \mathbb{C}$  fixado,  $|f'(z_0)| \leq B/R$  pelas estimativas de Cauchy; logo fazendo  $R \rightarrow \infty$ , vemos que  $|f'(z_0)| = 0$ . Como  $z_0$  é arbitrário, então  $f'(z) \equiv 0$ . Agora, fixamos  $z_1 \in \mathbb{C}$  e verificamos que  $f(z) = f(z_1)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . De fato, dado  $z \in \mathbb{C}$ , existe um caminho  $\gamma \subset \mathbb{C}$  contínuo que liga  $z_1$  a  $z$ . Como  $f$  é uma primitiva para  $f'$ , então pelo Teorema Fundamental do Cálculo  $\int_\gamma f'(w) dw = f(z) - f(z_1)$ ; mas essa integral é nula, pois  $f' \equiv 0$  como verificamos inicialmente e portanto  $0 = f(z) - f(z_1)$ . □

**Teorema 1.1.10** (Teorema da Identidade). *Sejam  $f$  e  $g$  funções holomorfas definidas em uma região  $\Omega$ . Assuma que  $f(z) = g(z)$  para todo  $z$  em um conjunto que contém um ponto de acumulação em  $\Omega$ . Então  $f(z) = g(z)$  para todo  $z \in \Omega$ .*

*Demonstração.* Ver [9], página 52. □

**Teorema 1.1.11.** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa e não constante em uma região  $\Omega$ . Assuma que  $z_0 \in \Omega$  é um zero de  $f$ , isto é,  $f(z_0) = 0$ . Então existe uma vizinhança  $U_{z_0} \subseteq \Omega$  de  $z_0$ , uma função holomorfa e sem zeros  $g$  definida em  $U_{z_0}$ , e um único inteiro positivo  $n$  tal que*

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \quad \text{para todo } z \in U_{z_0}. \quad (1.7)$$

*Demonstração.* Ver [9], página 73. □

Dizemos que o número  $n$  no Teorema acima é a **multiplicidade do zero**  $z_0$  de  $f$ .

Seja  $U$  vizinhança de  $z_0$  e  $f$  holomorfa em  $U \setminus \{z_0\}$ . Dizemos que  $z_0$  é **singularidade removível** de  $f$  quando  $f$  pode ser definida em  $z_0$  de modo que  $f$  seja holomorfa em  $U$ .

**Teorema 1.1.12** (Singularidade Removível). *Seja  $f$  holomorfa no aberto  $\Omega$  exceto possivelmente em  $z_0 \in \Omega$ . Se  $f$  é limitada em  $\Omega \setminus \{z_0\}$ , então  $z_0$  é singularidade removível.*

*Demonstração.* Ver [9], página 84. □

Recordamos agora como definir a **função logaritmo** de um número complexo. Para  $z = re^{i\theta}$ , gostaríamos que tal função fosse a inversa da exponencial, isto é, que cumpra  $\ln z = \ln r + i\theta$  e, além disso, que estenda a função logaritmo usual, definida para números reais positivos. Acontece que para valores arbitrários de  $\theta$ , essa expressão para  $\ln(z)$  não representa uma função bem definida: para  $n$  inteiro vale  $re^{i\theta} = re^{i2\pi n\theta}$  mas  $\ln re^{i\theta} = \ln r + i\theta \neq \ln r + i2\pi n\theta = \ln e^{i2\pi n\theta}$ . No entanto, é possível restringirmos os valores de  $\theta$  de modo que  $\ln(z)$  seja uma função bem definida e tenha as propriedades desejadas.

Na notação do parágrafo acima, chamamos de **ramo de logaritmo** a restrição da função  $\ln(z)$  a valores de  $\theta$  para os quais ela está bem definida para todo  $z \in \Omega$ , sendo  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  um conjunto adequado. A restrição  $-\pi < \theta \leq \pi$  é chamada de **ramo principal**.

O resultado a seguir descreve os domínios da função logaritmo.

**Teorema 1.1.13.** *Seja  $\Omega$  uma região tal que  $1 \in \Omega$  e  $0 \notin \Omega$ . Então existe um ramo de logaritmo  $\ln_\Omega$  definido para todo  $z \in \Omega$  e tal que*

1.  $\ln_\Omega$  é holomorfa em  $\Omega$ .
2.  $e^{\ln_\Omega(z)} = z$  para todo  $z \in \Omega$ .
3.  $\ln_\Omega(r) = \ln(r)$  sempre que  $r$  é um número real e suficientemente próximo de 1.

*Demonstração.* Ver [9], página 98. □

**Teorema 1.1.14.** *Seja  $f$  holomorfa em uma região  $\Omega$  e assumamos que  $f$  não se anula em  $\Omega$ . Então existe uma função holomorfa  $g$  definida em  $\Omega$  tal que*

$$f(z) = e^{g(z)} \tag{1.8}$$

*Demonstração.* Ver [9], página 100. □

Com a notação do Teorema acima, a função  $g$  é denotada por  $\ln f(z)$ .

A seguir, investigamos as funções inteiras não constantes. Em virtude do Teorema de Liouville, tais funções são ilimitadas e cumprem  $\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{|z|=r} |f(z)| = \infty$ . Acontece que quanto maior uma função inteira é, mais zeros ela pode admitir - esse fenômeno é facilmente observado em polinômios de grau finito. Na realidade, existe uma relação profunda entre o crescimento de uma função inteira e seu número de zeros. Veja o Teorema 1.1.17.

Denotaremos por  $\mathbb{D}$  o disco unitário  $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

**Teorema 1.1.15** (Fórmula de Jensen). *Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  um conjunto aberto que contém o fecho do disco  $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ . Assumamos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  é holomorfa,  $f(0) \neq 0$ , e  $f$  não se anula no círculo  $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ . Se  $z_1, \dots, z_N$  são os únicos zeros de  $f$*

em  $D_r$ , contando multiplicidade (isto é, cada zero de  $f$  aparece nessa seqüência o mesmo número de vezes que sua respectiva ordem), então vale a seguinte igualdade

$$\ln |f(0)| = \sum_{k=1}^N \ln \left| \frac{z_k}{r} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta. \quad (1.9)$$

*Demonstração. Passo 1.* Suponhamos por um instante que o resultado está provado para funções  $f$  e  $g$ . Então a função  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $h(z) = f(z)g(z)$  cumpre as hipóteses estipuladas e a equação (1.9) é válida para  $h$ .

De fato,  $h$  é holomorfa,  $h(0) \neq 0$  pois  $f(0) \neq 0$  e  $g(0) \neq 0$ ; e  $h$  não se anula em  $C_r$ , pois do contrário existiria  $z' \in C_r$  tal que  $h(z') = 0$  - mas isso implicaria no absurdo  $f(z') = 0$  ou  $g(z') = 0$ . Denotando por  $z_1, \dots, z_N$  os  $N$  zeros de  $f$ , e por  $z_{N+1}, \dots, z_{N+M}$  os  $M$  zeros de  $g$ , todos em  $D_r$ ,

$$\begin{aligned} \ln |h(0)| &= \ln |f(0)g(0)| \\ &= \ln |f(0)| + \ln |g(0)| \\ &\stackrel{1.9}{=} \sum_{k=1}^N \ln \left| \frac{z_k}{r} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta + \sum_{l=N+1}^{N+M} \ln \left| \frac{z_l}{r} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(re^{i\theta})| d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{N+M} \ln \left| \frac{z_i}{r} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})g(re^{i\theta})| d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{N+M} \ln \left| \frac{z_i}{r} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |h(re^{i\theta})| d\theta. \end{aligned}$$

Note que para  $\tilde{z} \in D_r$  vale  $h(\tilde{z}) = 0$  se, e somente se  $\tilde{z}$  é um zero de  $f$  ou um zero de  $g$ . Logo o conjunto dos zeros de  $h$  é a união dos conjuntos dos zeros de  $f$  e de  $g$ . Portanto, o passo 1 está completo pois os zeros de  $h$  são  $z_1, z_2, \dots, z_{N+M}$ , contando multiplicidade.

**Passo 2.** Basta demonstrarmos o teorema para funções que nunca se anulam em  $D_r$  e para funções da forma  $g_k(z) = (z - z_k)$ , sendo  $z_k$  um zero de  $g$  em  $D_r$ .

De fato, considere a função  $h(z) = f(z)/[(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N)]$ . As hipóteses sobre  $f$  implicam *a priori* que  $h$  está definida e é holomorfa em  $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$ . Vejamos que  $h$  é holomorfa em  $\Omega$ . Para isso, em virtude do Teorema da Singularidade Removível, basta verificarmos que  $h$  é limitada em  $A_k \setminus \{z_k\}$  para alguma vizinhança  $A_k$  de  $z_k$  para todo  $k$ . Tomamos  $\epsilon > 0$  tal que  $B(z_k, \epsilon) \subseteq \Omega$  para todo  $k$  e consideramos  $A_k = B(z_k, \epsilon/2)$ . Se  $m$  é a multiplicidade de  $z_1$  como zero de  $f$ , então podemos supor sem perda de generalidade que  $z_1 = z_2 = \dots = z_m$ . Como  $z_1$  é o único zero de  $f$  em  $A_1$ , então pelo Teorema 1.1.11 existe uma vizinhança  $U_1 \subseteq A_1$  de  $z_1$  e uma função  $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa e sem zeros em  $U_1$  tal que  $f(z) = (z - z_1)^m f_1(z)$  para todo  $z \in U_1$ . Consequentemente,

$$h(z) = \frac{f_1(z)}{(z - z_{m+1})(z - z_{m+2}) \cdots (z - z_N)} \text{ para todo } z \in U_1. \quad (1.10)$$

Como  $z_j \notin U_1$  para  $j = m+1, m+2, \dots, N$  por construção, então nenhum dos fatores no denominador em (1.10) se anula em  $U_1$  e assim  $h$  é limitada em  $U_1 \setminus \{z_1\}$ , logo holomorfa em  $z_1$ . Sem dificuldades, vemos que essa conclusão é válida para cada zero de  $f$ . Portanto,

$$f(z) = h(z)[(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N)], \text{ com } h \text{ holomorfa e sem zeros em } D_r. \quad (1.11)$$

Agora, a demonstração do Teorema é reduzida à demonstração dos casos enunciados no passo 2 (que são os passos 3 e 4 a seguir) pois, em virtude do passo 1, esses casos particulares implicam no caso geral uma vez que toda função que satisfaz as hipóteses do Teorema pode ser escrita como (1.11).

**Passo 3.** Vale a igualdade (1.9) para funções que não se anulam em  $\overline{D_r}$ .

De fato, seja  $g$  uma função que não se anula em  $\overline{D_r}$  e cumpre as hipóteses estipuladas. Consideramos  $R > r$  tal que  $D_R \subseteq \Omega$ . Note que  $g$  não admite sequência de pontos que convergem para 0, pois neste caso seria  $g \equiv 0$  pelo Teorema da Identidade. Em particular,  $g$  tem um número finito de zeros em  $D_R$ ; logo ela é holomorfa em  $D_R$  pelo passo 2. Além disso, como  $g$  não se anula em  $\overline{D_r}$ , então pelo Teorema 1.1.14 podemos definir  $g : D_R \rightarrow \mathbb{C}$  por  $g(z) = e^{h(z)}$ , com  $h(z) = \ln g(z)$  holomorfa em  $D_R$ . Portanto,

$$\ln |g(0)| = \operatorname{Re}\{h(0)\} \stackrel{1.6}{=} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta}) d\theta \right\} = \int_0^{2\pi} \ln |g(re^{i\theta})| d\theta.$$

**Passo 4.** Vale a igualdade (1.9) para funções da forma  $f(z) = z - w$ , com  $w \in D_r$ .

De fato, basta mostrarmos a igualdade

$$\ln |w| = \ln \left| \frac{w}{r} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta} - w)| d\theta. \quad (1.12)$$

Como  $\ln |w/r| = \ln |w| - \ln r$  e  $\ln |re^{i\theta} - w| = \ln |r(e^{i\theta} - w/r)| = \ln |r| + \ln |e^{i\theta} - w/r|$ , então

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{w}{r} \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta} - w)| d\theta &= \ln |w| - \ln r + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |r| + \ln |e^{i\theta} - w/r| d\theta \\ &= \ln |w| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |e^{i\theta} - w/r| d\theta; \end{aligned}$$

logo, basta verificarmos que

$$\int_0^{2\pi} \ln |e^{i\theta} - a| d\theta = 0, \quad \text{com } a = w/r. \quad (1.13)$$

Fazendo a mudança de variáveis  $\theta = -\theta$ , vemos que a igualdade (1.13) é equivalente a

$$0 = - \int_{2\pi}^0 \ln |e^{-i\theta} - a| d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{1}{e^{i\theta}} - a \right| d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{1 - ae^{i\theta}}{e^{i\theta}} \right| d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \ln |1 - ae^{i\theta}| d\theta - \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \ln |1 - ae^{i\theta}| d\theta.
\end{aligned}$$

Por fim, para verificarmos que de fato vale  $0 = \int_0^{2\pi} \ln |1 - ae^{i\theta}| d\theta$ , consideramos a função auxiliar  $F(z) = 1 - az$  com  $|a| < 1$ . Claramente  $F$  não se anula em  $\overline{\mathbb{D}}$ , logo pelo Teorema 1.1.14 a função  $G(z) = \ln F(z)$  é holomorfa em algum disco aberto de raio maior do que 1, e vale  $F(z) = e^{G(z)}$  nesse disco. Assim,  $\ln |F(z)| = \operatorname{Re}\{G(z)\}$ , e como  $F(0) = 1$ , então  $0 = \operatorname{Re}\{G(0)\} \stackrel{1.6}{=} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(F(ae^{i\theta})) d\theta\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(ae^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |1 - ae^{i\theta}| d\theta$ .  $\square$

Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa no aberto  $\Omega$  e seja  $\overline{D_R} \subset \Omega$ . Para cada  $0 < r < R$ , denotaremos por  $\mathbf{n}_f(r)$  o **número de zeros** de  $f$  em  $D_r$ , contando multiplicidade.

**Teorema 1.1.16.** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa e suponha que  $\overline{D_R} \subset \Omega$ . Se  $z_1 \cdots z_N$  são os zeros de  $f$  em  $D_R$ , então para cada  $0 < r < R$  vale a igualdade*

$$\int_0^R \mathbf{n}_f(r) \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^N \ln \left| \frac{R}{z_k} \right|. \quad (1.14)$$

Em particular, se  $f(0) \neq 0$  e  $f$  não se anula em  $C_R$ , então

$$\int_0^R \mathbf{n}_f(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta - \ln |f(0)|. \quad (1.15)$$

*Demonstração.* Para cada  $k = 1, \dots, N$  seja a função característica  $\eta_k : (0, R) \rightarrow \{0, 1\}$  definida por  $\eta_k(r) = 1$  se  $r > |z_k|$ , e  $\eta_k(r) = 0$  se  $r \leq |z_k|$ . Como  $\eta_k(r) = 1$  quando  $z_k \in D_r$ , e  $\eta_k(r) = 0$  quando  $z_k \notin D_r$ , então  $\sum_{k=1}^N \eta_k(r) = \mathbf{n}_f(r)$  e portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N \ln \left| \frac{R}{z_k} \right| &= \sum_{k=1}^N \ln |R| - \ln |z_k| \\
&= \sum_{k=1}^N \int_{|z_k|}^R \frac{dr}{r} \\
&= \sum_{k=1}^N \int_0^R \eta_k(r) \frac{dr}{r} \\
&= \int_0^R \left( \sum_{k=1}^N \eta_k(r) \right) \frac{dr}{r} \\
&= \int_0^R \mathbf{n}_f(r) \frac{dr}{r}.
\end{aligned}$$

Se  $f(0) \neq 0$  e  $f$  não se anula em  $C_R$ , então a igualdade (1.15) segue da Fórmula de Jensen pois  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta - \ln |f(0)| \stackrel{1.9}{=} - \sum_{k=1}^N \ln(z_k/R) = \sum_{k=1}^N \ln(R/z_k) \stackrel{1.14}{=} \int_0^R \mathbf{n}_f(r) \frac{dr}{r}$ .  $\square$

A seguir analisamos estimativas para o crescimento da quantidade  $\mathbf{n}_f(r)$ .

Dizemos que uma função inteira  $f$  tem **ordem de crescimento**  $\leq \rho$  quando existem constantes  $A, B > 0$  tais que

$$|f(z)| \leq Ae^{B|z|^\rho} \text{ para todo } z \in \mathbb{C}. \quad (1.16)$$

Definimos a **ordem** de  $f$  por  $\rho_f = \inf\{\rho : f \text{ tem ordem de crescimento } \leq \rho\}$ .

**Teorema 1.1.17.** *Seja  $f$  uma função inteira com ordem de crescimento  $\leq \rho < \infty$ . Então*

1.  $\mathbf{n}_f(r) \leq Cr^\rho$  para algum  $C > 0$  e todo  $r$  suficientemente grande.
2. Se  $z_1, z_2, \dots$  são os zeros de  $f$ , todos não nulos, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s} < \infty \text{ para todo } s > \rho. \quad (1.17)$$

*Demonstração.* 1. Basta analisarmos o caso  $f(0) \neq 0$ , pois se  $f(0) = 0$ , então a função  $F(z) = f(z)/z^l$ , sendo  $l > 1$  a ordem de  $z = 0$  como zero de  $f$ , cumpre  $f(0) \neq 0$  e  $\mathbf{n}_F(r) = \mathbf{n}_f(r) - l \leq \mathbf{n}_f(r) \leq Cr^\rho$ . Agora, supondo que  $f(0) \neq 0$  e tomando  $R = 2r$  suficientemente grande e tal que  $f$  não se anula em  $C_R$ ,

$$\int_r^{2r} \mathbf{n}_f(x) \frac{dx}{x} \leq \int_0^{2r} \mathbf{n}_f(x) \frac{dx}{x} \stackrel{1.15}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta - \ln |f(0)|; \quad (1.18)$$

como  $\mathbf{n}_f(x)$  é crescente como função de  $x$ , então

$$\int_r^{2r} \mathbf{n}_f(x) \frac{dx}{x} \geq \mathbf{n}_f(r) \int_r^{2r} \frac{dx}{x} = \mathbf{n}_f(r) [\ln 2r - \ln r] = \mathbf{n}_f(r) \ln 2. \quad (1.19)$$

Agora, como  $f$  tem ordem de crescimento  $\leq \rho$ , então pela hipótese  $|f(Re^{i\theta})| \leq Ae^{BR\rho}$ ,

$$\int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} \ln |Ae^{BR\rho}| d\theta \leq C'r^\rho \text{ para todo } r \text{ suficientemente grande.} \quad (1.20)$$

Portanto, o item 1 segue de combinarmos as desigualdades (1.18), (1.19) e (1.20).

2. Como  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{-s} = \sum_{|z_k| < 1} |z_k|^{-s} + \sum_{|z_k| \geq 1} |z_k|^{-s}$ , então basta verificarmos que são finitas as duas parcelas à direita dessa igualdade. O número de zeros de  $f$  em  $\mathbb{D}$  é finito pois do contrário eles admitiriam uma subsequência convergente e daí  $f \equiv 0$  pelo Teorema da Identidade, logo  $\sum_{|z_k| < 1} |z_k|^{-s} < \infty$ . Aplicando o item 1 na igualdade \* a seguir, vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{|z_k| \geq 1} |z_k|^{-s} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{2^j \leq |z_k| < 2^{j+1}} |z_k|^{-s} \right) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-js} \mathbf{n}(2^{j+1}) \\
&\leq^* \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-js} c 2^{(j+1)\rho} \\
&= c 2^\rho \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\rho-s)j} \\
&< \infty, \text{ sempre que } s > \rho.
\end{aligned}$$

□

Como exemplo de aplicação dessa teoria, podemos analisar a convergência de algumas séries. A função  $f(z) = \sin(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\pi z)^{2n+1} / (2n+1)!$  cumpre  $|f(z)| \leq e^{\pi|z|}$ . Dessa forma,  $f$  é de ordem de crescimento  $\leq 1$ . Com a identidade  $f(z) = (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})/2i$ , vemos que  $f$  se anula sempre que  $z = n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . Agora, segue do item 2 do Teorema 1.1.17 que a série  $\sum_{n \neq 0} 1/|n|^s$  converge exatamente quando  $s > 1$ , e diverge caso contrário.

Outra aplicação, que utilizaremos no capítulo principal desta dissertação, é a seguinte: Se  $g$  é uma função inteira de ordem 2, então vale a diferenciação (como aplicação de  $\mathbb{R}^2$ ) sob o sinal da integral de  $F(z) := \int_{\mathbb{R}} |e^{-Cv^2} g(z+v)|^q dv$ , com  $C, q > 0$  constantes e  $q$  par. Veja a equação (3.103). Para mais detalhes da Teoria de Funções Inteiras, indicamos [9].

## 1.2 Espaços $L^p$ e Interpolação

Dizemos que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é uma **função mensurável** quando para todo  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ , o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}$  é mensurável em  $\mathbb{R}^n$ . Note que toda função contínua é mensurável, pois neste caso o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}$  é aberto, logo mensurável.

**Teorema 1.2.1.** *Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções mensuráveis. Então são mensuráveis as funções*

$$F_1(x) = \sup_n f_n(x), \quad F_2(x) = \inf_n f_n(x), \quad (1.21)$$

$$F_3(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad F_4(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \quad (1.22)$$

Além disso, se  $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  existe para cada  $x$ , então  $F$  é mensurável.

*Demonstração.* Ver [6], página 45.

□

Denotaremos por  $M$  o espaço vetorial das funções mensuráveis, e por  $M^+ \subset M$  o conjunto das **funções mensuráveis não negativas**, ou seja, que tomam valores em  $[0, \infty]$ . Lembramos que toda  $f \in M$  admite decomposição única  $f = f^+ - f^-$ , sendo

$$\begin{aligned} f^+(x) &:= \max\{f(x), 0\} \stackrel{1.21}{\in} M^+ \text{ é a parte positiva de } f, \\ f^-(x) &:= \max\{-f(x), 0\} \stackrel{1.21}{\in} M^+ \text{ é a parte negativa de } f. \end{aligned}$$

Além disso, é possível mostrar que  $f$  é mensurável se, e somente se,  $f^+$  e  $f^-$  o são. Assim, algumas demonstrações para funções em  $M$  podem ser reduzidas à funções em  $M^+$ .

Dizemos que  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  é uma **função simples** quando  $\phi$  é combinação linear finita de funções características de conjuntos mensuráveis de medida finita, ou seja, quando

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}(x), \text{ com } a_j \geq 0 \text{ e } E_j \text{ mensurável com } |E_j| < \infty. \quad (1.23)$$

**Teorema 1.2.2** (Aproximação por funções simples). *Dada  $f \in M^+$ , existe uma sequência de funções simples  $(\phi_n)$  tal que  $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq f$ ,  $\phi_n \rightarrow f$  pontualmente e  $\phi_n \rightarrow f$  uniformemente em qualquer conjunto no qual  $f$  é limitada.*

*Demonstração.* Ver [6], página 47. □

Definimos por  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = \sum_{j=1}^n a_j |E_j|$  a integral de uma função simples  $\phi$  dada por (1.23); e definimos por  $\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx = \sup_j \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x) dx$  a integral de uma função  $g \in M^+$ , sendo  $\phi_j$  uma aproximação de  $g$  tal como no Teorema 1.2.2.

A **Integral de Lebesgue** de uma função  $f \in M$  é definida por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x) dx. \quad (1.24)$$

Por simplicidade, daqui em diante escreveremos  $\int f$  ou  $\int f(x) dx$  para denotar  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ .

Dizemos que  $f \in M$  é uma **função integrável** quando  $\int f^+$  e  $\int f^-$  são ambas finitas, e denotamos por  $L$  o **conjunto de todas as funções integráveis**. É fácil mostrar que  $f \in L$  se, e somente se  $\int |f| < \infty$ , e que o conjunto  $L$  é um espaço vetorial; por outro lado, não é tão imediato munir esse conjunto com uma norma de modo a torná-lo um espaço de Banach. No entanto, pagando um pequeno preço (trabalhar em um certo conjunto quociente) podemos obter os espaços de Banach associados a funções integráveis.

**Teorema 1.2.3** (Integrabilidade absoluta). *Seja  $f \in M$ . Então  $f$  é integrável se, e somente se  $|f|$  é integrável. No caso afirmativo, vale a desigualdade*

$$\left| \int f(x) dx \right| \leq \int |f(x)| dx \quad (1.25)$$

*Demonstração.* Ver [6], página 53. □

Dizemos que uma função  $f \in M$  tem uma propriedade  $P$  em **quase todo ponto** quando existe um conjunto mensurável  $N$  de **medida nula**, ou seja,  $|N| = 0$ , tal que  $f$  tem a propriedade  $P$  em cada  $x \in N^c$ . Neste caso, é usual escrevermos *q.t.p.*

Lembramos que **convergência uniforme** implica **convergência pontual**, o que implica **convergência q.t.p.** Ainda nesta seção, discutiremos mais sobre convergência.

**Teorema 1.2.4.** *Sejam  $f, g \in L$ . Temos que  $\int_E f = \int_E g$  para todo conjunto mensurável  $E \iff \int |f - g| = 0 \iff f = g$  q.t.p.*

*Demonstração.* Ver [6], página 54. □

Dadas  $f, g \in L$ , dizemos que  $f$  está relacionada com  $g$  quando  $f = g$  q.t.p. É fácil verificar que essa é uma relação de equivalência, e que o conjunto quociente associado é um espaço vetorial. Definimos nesse conjunto quociente a aplicação

$$\|f\|_1 := \int |f(x)| dx. \quad (1.26)$$

Em virtude do Teorema 1.2.4, é possível mostrar que essa aplicação é uma norma.

Chamamos de **espaço de Lebesgue  $L^1(\mathbb{R}^n)$**  ao espaço (quociente) vetorial munido da norma dada por (1.26). Acontece que muitas propriedades de funções podem ser expressas em termos de sua integrabilidade a uma potência  $p$ . Isso leva naturalmente aos chamados **espaços de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R}^n)$**  com  $1 \leq p \leq \infty$ , os quais denotaremos por  $L^p$  por simplicidade, e descrevemos a seguir: Se  $p \neq \infty$ , o espaço  $L^p$  consta de funções  $f \in M$  tais que  $|f|^p \in L^1$  munido da **norma  $L^p$**  dada por

$$\|f\|_p = \left( \int |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.27)$$

Se  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  é o espaço das funções  $f \in M$  limitadas q.t.p. munido da **norma  $L^\infty$**

$$\|f\|_\infty = \inf_N \{ \sup \{ |f(x)| : x \in N^c \text{ e } N \text{ é mensurável e tem medida nula} \} \}. \quad (1.28)$$

A seguir, alguns resultados clássicos dos espaços  $L^p$  e a questão de dualidade.

Dizemos que os números  $p$  e  $q$  são **expoentes conjugados** quando  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  e

$$1/p + 1/q = 1. \quad (1.29)$$

Como é usual na literatura, convencionamos  $1/\infty = 0$  e reservaremos as letras  $p$  e  $q$  exclusivamente para expoentes conjugados. Para referência futura, observamos que

$$1/p + 1/q = 1 \iff pq = p + q \iff p(q - 1) = q. \quad (1.30)$$

**Teorema 1.2.5** (Desigualdade de Hölder). *Sejam  $p$  e  $q$  expoentes conjugados. Então*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \text{ para quaisquer } f, g \in M. \quad (1.31)$$

*Em particular, se  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$ , então  $fg \in L^1$ .*

*Demonstração.* Ver [6], página 182. □

**Teorema 1.2.6** (Lema de Fatou). *Seja  $(f_n)$  uma sequência em  $M^+$ . Então*

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n. \quad (1.32)$$

*Demonstração.* Ver [6], página 52. □

**Corolário 1.2.7.** *Se  $(f_n)$  é uma sequência em  $M^+$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f(x)$  q.t.p., então*

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n. \quad (1.33)$$

*Demonstração.* Se vale  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  para cada  $x$ , então  $\int f(x) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{1.32}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)$ ; se  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  q.t.p. então pelo Teorema 1.2.4,  $\int f$  não se altera quando redefinimos  $f$  em um conjunto de medida nula; logo vale (1.33). □

**Teorema 1.2.8** (Convergência Dominada). *Seja  $(f_n)$  uma sequência em  $L^1$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  q.t.p. e assumamos que existe uma função não negativa  $g$  em  $L^1$  tal que  $|f_n| \leq g$  q.t.p. para todo  $n$ . Então  $f \in L^1$  e*

$$\int f(x)dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)dx. \quad (1.34)$$

*Demonstração.* Ver [6], página 54. □

**Teorema 1.2.9** (Fubini). *Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^{m+n})$ , então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y)dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x, y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)dy \right] dx. \quad (1.35)$$

*Demonstração.* Ver [6], página 67. □

Dizemos que uma sequência  $(f_n)$  em  $L^p$  **converge em  $L^p$**  para  $f$  em  $L^p$  se  $f \in L^p$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0. \quad (1.36)$$

**Teorema 1.2.10.** *Seja  $(f_n)$  uma sequência em  $L^1$  que converge para  $f$  em  $L^1$ . Então  $(f_n)$  admite uma subsequência que converge para  $f$  q.t.p.*

*Demonstração.* Ver [6], página 62. □

Dizemos que uma família de funções  $\mathcal{D} \subseteq L^p$  é **densa** em  $L^p$  quando para toda  $f \in L^p$  e todo  $\epsilon > 0$  existe  $g \in \mathcal{D}$  tal que  $\|f - g\|_p < \epsilon$ .

**Teorema 1.2.11.** *Seja  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Então para todo  $\epsilon > 0$ , existe uma função simples  $\phi \in L^p$  tal que  $\|f - \phi\|_p < \epsilon$ , isto é, as funções simples são densas em  $L^p$ .*

*Demonstração.* Ver [6], página 183. □

**Teorema 1.2.12.** *Para  $1 \leq p \leq \infty$ , os espaços  $L^p$  são espaços Banach com a métrica induzida pela norma  $L^p$ . Além disso, se  $p < \infty$ , então  $L^p$  é separável, isto é, admite subconjunto enumerável e denso.*

*Demonstração.* Ver [6], página 183. □

O resultado a seguir nos permite simplificar diversas demonstrações para subconjuntos densos em  $L^p$ , uma vez que um argumento de densidade, ou limite, prova o caso geral.

**Teorema 1.2.13** (Princípio de Extensão). *Seja  $T : D \subseteq L^p \rightarrow L^r$  um operador linear contínuo e assumamos que  $D$  é denso em  $L^p$ . Então  $T$  pode ser estendido de maneira única a um operador linear contínuo  $\bar{T} : L^p \rightarrow L^r$  tal que  $\|T\| = \|\bar{T}\|$ .*

*Demonstração.* Ver [4], página 28. □

A questão de dualidade está relacionada com os expoentes conjugados:

**Teorema 1.2.14** (Representação de Riesz). *Sejam  $p$  e  $q$  expoentes conjugados e assumamos que  $1 \leq p < \infty$ . Então o espaço dual de  $L^p$  é isometricamente isomorfo a  $L^q$ , no sentido de que toda  $L \in (L^p)^*$  é forma*

$$L(f) = \int f(x)g(x)dx \text{ para alguma única } g \in L^q. \quad (1.37)$$

*Demonstração.* Ver [6], página 190. □

Consequentemente, os espaços  $L^p$  são **espaços reflexivos** quando  $1 < p < \infty$ .

Recordamos agora algumas noções de convergência da Análise Funcional no contexto de espaços  $L^p$ . Seja  $(f_n)$  uma sequência em  $L^p$  com  $1 \leq p < \infty$ . Dizemos que  $(f_n)$  **converge fortemente** para  $f$  em  $L^p$  quando  $f \in L^p$  e  $(f_n)$  converge para  $f$  em  $L^p$ . Por outro lado, tendo em vista o Teorema da representação de Riesz, dizemos que  $f_n$  **converge fracamente** para  $f$  em  $L^p$  quando  $f \in L^p$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n g = \int f g \text{ para toda } g \in L^q. \quad (1.38)$$

**Teorema 1.2.15.** *Seja  $(f_n)$  uma sequência em  $L^p$  com  $p < \infty$ . Se  $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ , então  $(f_n)$  admite uma subsequência que converge fracamente para alguma  $f$  em  $L^p$ .*

*Demonstração.* Em virtude do Princípio de Extensão, basta provarmos o resultado para o subconjunto denso e enumerável  $X = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots\}$  das funções simples em  $L^q$ . Exibiremos uma subsequência  $(f_{n_j})$  de  $(f_n)$  tal que  $(\int f_{n_j}(x)g(x)dx)$  seja uma sequência convergente para toda  $g \in L^q$ , e a partir disso checamos vale 1.38 para alguma  $f \in L^p$ .

Vamos aplicar o argumento da diagonal de Cantor. Considere a sequência de números  $(C_1^n) = \int f_n \phi_1$  e note ela é limitada em pela desigualdade de Hölder, pela limitação por hipótese dos números  $\|f_n\|_p$  e pelo fato das  $\phi_n \in L^q$  serem função simples. Então existe uma subsequência de  $(f_n)$ , que denotaremos por  $(f_1^j)$ , tal que a sequência  $(C_1^j)$  converge para algum número  $C_1$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Pelo mesmo argumento do caso anterior, a sequência  $(f_1^j)$  admite uma subsequência  $(f_2^j)$  tal que a sequência  $(C_2^j) = \int f_j \phi_2$  converge para algum número  $C_2$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Procedendo indutivamente, construímos uma família enumerável de subsequências  $(f_k^j)$  tal que  $C_k$  é o limite da sequência  $(C_k^j) = \int f_k^j \phi_k$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Além disso, como  $\dots \subseteq \{f_{k+1}^j\} \subseteq \{f_k^j\} \subseteq \dots \subseteq \{f_2^j\} \subseteq \{f_1^j\}$ , então cada  $f_k^j$  é igual a alguma  $f_l^j$ , com  $l \leq k$ .

Tomando  $F_k$  como sendo a  $k$ -ésima função da subsequência  $(f_k^j)$ , isto é,  $F_k = f_k^k$ , temos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int F_k \phi_l = C_l$  pois cada função  $F^k$  pertence à todas as subsequências descritas no parágrafo anterior. Agora, a aplicação  $L : L^q \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $L(g) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int F_j g$  está bem definida, é um funcional linear, e além disso ela é contínua pois  $\|F^j\|_p$  é limitado por hipótese; mas pelo Teorema da Representação de Riesz, o espaço dual de  $L^q$  é  $L^p$  e portanto existe  $f \in L^p$  tal que  $\int F_j g \rightarrow L(g) = \int f g$ .  $\square$

Dizemos que um operador linear  $T : L^p \rightarrow L^r$  é **completamente contínuo** quando  $T(A) \subset L^r$  é pré-compacto (isto é, o fecho de  $\{T(A)\}$  é compacto em  $L^r$ ) para qualquer conjunto limitado  $A \subset L^p$ . É possível mostrar que todo operador completamente contínuo leva sequências fracamente convergentes em sequências fortemente convergentes. No caso dos espaços  $L^p$  com  $p < \infty$ , estas condições são equivalentes. Ver [4], página 177.

Finalizamos esta seção demonstrando um resultado de interpolação para operadores lineares agindo nos espaços  $L^p$ . Estamos interessados em dar condições suficientes para garantir a continuidade de tais operadores - é com esse teorema que provaremos a versão clássica da desigualdade cuja versão sharp é o tema principal desta dissertação.

A seguir, um primeiro resultado do tipo interpolação. Ele diz que  $L^r \cap L^s \subset L^t$  para todo  $t \in (r, s)$ ; o caso  $s = \infty$  está incluído. Como consequência, para verificarmos que uma função pertence a todos os espaços  $L^p$ , basta checarmos que ela está em  $L^1$  e  $L^\infty$ .

**Teorema 1.2.16.** *Sejam  $1 \leq r \leq s \leq \infty$ . Então  $L^r \cap L^s \subset L^t$  para todo  $t \in (r, s)$ .*

*Demonstração.* Se  $t \in (r, s)$ , então  $1/s \leq 1/t \leq 1/r$  e existe  $0 < \theta < 1$  tal que

$$\frac{1}{t} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{s} \iff 1 = \underbrace{\frac{\theta t}{r}}_{1/p} + \underbrace{\frac{(1-\theta)t}{s}}_{1/p'}$$

Se  $f \in L^r \cap L^s$ , então pela desigualdade de Hölder para os expoentes  $p$  e  $p'$  acima,

$$\|f\|_t^t = \int |f|^{t\theta} |f|^{t(1-\theta)} \stackrel{1.31}{\leq} \left( \int |f|^{t\theta \cdot \frac{r}{\theta t}} \right)^{\frac{\theta t}{r}} \left( \int |f|^{t(1-\theta) \cdot \frac{s}{(1-\theta)t}} \right)^{\frac{(1-\theta)t}{s}} = \|f\|_r^{\theta t} \|f\|_s^{(1-\theta)t}. \quad (1.39)$$

□

Ao verificarmos que  $f$  pertence a  $L^t$ , exibimos uma estimativa para a norma  $L^t$  de  $f$  em termos das normas  $L^r$  e  $L^s$  de  $f$ :  $\|f\|_t \leq \|f\|_r^\theta \|f\|_s^{1-\theta}$ . Acontece que esse resultado pode ser generalizado de forma natural para operadores lineares agindo entre espaços  $L^p$ .

**Lema 1.2.17** (Lema das 3 linhas de Hadamard). *Considere  $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ . Seja  $\phi : S \rightarrow \mathbb{C}$  contínua e limitada e suponha que  $\phi$  é holomorfa no interior de  $S$ . Se  $|\phi(z)| \leq M_0$  quando  $\operatorname{Re}(z) = 0$ , e  $|\phi(z)| \leq M_1$  quando  $\operatorname{Re}(z) = 1$ , então vale a estimativa*

$$|\phi(z)| \leq M_0^{1-t} M_1^t \text{ quando } \operatorname{Re}(z) = t, \text{ para para todo } 0 < t < 1. \quad (1.40)$$

*Demonstração.* Dado  $\epsilon > 0$ , vemos que a função auxiliar  $\phi_\epsilon : S \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\phi_\epsilon(z) = \phi(z) M_0^{z-1} M_1^{-z} e^{\epsilon z(z-1)}$$

é contínua, limitada (pois os  $z$  em  $S$  têm parte real limitada) e holomorfa no interior de  $S$ . Dado  $z = t + iv \in S$ , vale

$$\begin{aligned} |\phi_\epsilon(z)| &\leq C |M_0^{(t+iv)-1} M_1^{-(t+iv)} e^{\epsilon(t+iv)[(t+iv)-1]}| \\ &= C M_0^{t-1} M_1^{-t} e^{\epsilon[t(t-1)-v^2]} \\ &\leq \tilde{C} e^{-\epsilon v^2}, \text{ sendo } \tilde{C} = \max_{0 \leq t \leq 1} \{C M_0^{t-1} M_1^{-t} e^{\epsilon t(t-1)}\}, \end{aligned}$$

logo  $|\phi_\epsilon(z)| \rightarrow 0$  quando  $|\operatorname{Im}(z)| = |v| \rightarrow \infty$ . Além disso, quando  $t = 0$ ,

$$|\phi_\epsilon(z)| \leq |M_0 M_0^{iv-1} M_1^{iv} e^{\epsilon iv(iv-1)}| = e^{-\epsilon v^2},$$

e quando  $t = 1$ ,

$$|\phi_\epsilon(z)| \leq |M_1 M_0^{(1+iv)-1} M_1^{-(1+iv)} e^{\epsilon(1+iv)[(1+iv)-1]}| \leq e^{-\epsilon v^2}.$$

Isso mostra que para  $|v|$  suficientemente grande, vale  $|\phi_\epsilon(z)| \leq 1$  para todo  $z$  no retângulo

$[0, 1] \times [-|v|, |v|]$ ; conseqüentemente,  $|\phi_\epsilon(z)| \leq 1$  em  $S$  pelo Princípio do Módulo Máximo. Portanto,  $|\phi(z)|M_0^{t-1}M_1^{-t} = \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(z)M_0^{(t+iv)-1}M_1^{-(t+iv)}e^{\epsilon z(z-1)} \right| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\phi_\epsilon| \leq 1$ .  $\square$

A seguir, a generalização do Teorema 1.2.16.

**Teorema 1.2.18** (Interpolação de Riesz-Thorin). *Sejam  $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ . Para cada  $0 < t < 1$ , defina  $p_t$  e  $q_t$  por*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}. \quad (1.41)$$

Seja  $T : L^{p_0} + L^{p_1} \rightarrow L^{q_0} + L^{q_1}$  um operador linear tal que

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0} \text{ quando } f \in L^{p_0}, \quad (1.42)$$

e

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1} \text{ quando } f \in L^{p_1}. \quad (1.43)$$

Então para cada  $0 < t < 1$ ,  $T$  leva  $L^{p_t}$  em  $L^{q_t}$  continuamente e vale a estimativa

$$\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t} \text{ sempre que } f \in L^{p_t}. \quad (1.44)$$

*Demonstração.* Iniciamos verificando o caso em que  $p_0 = p_1$  (passo 1). Em seguida, mostramos que basta demonstrarmos o resultado para um subespaço denso (passo 2); e para concluirmos, definimos funções auxiliares adequadas  $f_z, g_z, F$  (passo 3) que nos permitem deduzir a desigualdade (1.44) a partir do Lema das Três Linhas.

**Passo 1.** Podemos tomar  $p_0 \neq p_1$ ; em particular,  $p_t < \infty$  para  $0 < t < 1$ .

De fato, suponhamos  $p_0 = p_1$ . Quando  $f \in L^{p_0}(X)$ , temos  $Tf \stackrel{1.42}{\in} L^{q_0}$ ; e quando  $f \in L^{p_1}$ , temos  $Tf \stackrel{1.43}{\in} L^{q_1}$ . Então elevando (1.42) e (1.43) a  $1-t$  e  $t$  respectivamente,

$$\|Tf\|_{q_t} \stackrel{1.39}{\leq} \|Tf\|_{q_0}^{1-t} \|f\|_{p_0}^{1-t} \|Tf\|_{q_1}^t \|f\|_{p_1}^t \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t} \text{ com } p_t = p_0 = p_1.$$

**Passo 2.** Denotemos por  $\Sigma$  o espaço das funções simples em  $\mathbb{R}^n$ . Basta provarmos

$$\left| \int (Tf(x))g(x)dx \right| \leq M_0^{1-t} M_1^t, \quad \text{para cada } f \in \Sigma \text{ tal que } \|f\|_{p_t} = 1; \quad (1.45)$$

para quaisquer  $f, g \in \Sigma$  tais que  $\|f\|_{p_t} = 1$  e  $\|g\|_{q_t} = 1$ .

De fato, pelo Teorema 1.2.11,  $\Sigma \subset L^{p_t}$  é denso em  $L^{p_t}$  para cada  $t$ ; logo pelo Princípio de Extensão basta mostrarmos que  $T : \Sigma \subset L^{p_t} \rightarrow L^{q_t}$  é limitada e que vale (1.44) para cada  $f \in \Sigma$ . Mas pelo Teorema da Representação de Riesz,

$$\|Tf\|_{q_t} = \sup_g \left\{ \left| \int (Tf(x))g(x)dx \right| : g \in L^{q_t} \text{ e } \|g\|_{q_t} = 1 \right\}; \quad (1.46)$$

assim, o resultado segue de mostrarmos que vale (1.45) para cada  $g \in \Sigma$  com  $\|g\|_{q'_t} = 1$ , pois daí tomando o supremo sobre as  $g$  com essa propriedade, obtemos (1.44) de (1.46).

**Passo 3.** Sejam

$$f = \sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k} \in L^{p_t} \quad \text{e} \quad g = \sum_{j=1}^n b_j e^{i\beta_j} \chi_{B_j} \in L^{q'_t}; \quad (1.47)$$

com  $a_k, b_j > 0$ ;  $\alpha_k, \beta_j \in \mathbb{R}$ ; e  $A_k$  e  $B_j$  são conjuntos mensuráveis de medida finita e dois a dois disjuntos. Consideramos as funções

$$P(z) = \frac{p_t}{p_0}(1-z) + \frac{p_t}{p_1}z; \quad Q(z) = \frac{q'_t}{q'_0}(1-z) + \frac{q'_t}{q'_1}z; \quad (1.48)$$

e para cada  $z \in S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re}(z) < 1\}$ , definimos

$$f_z = \sum_k^m a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}; \quad g_z = \sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{B_j} \quad \text{e} \quad F(z) = \int T(f_z(y))g_z(y)dy. \quad (1.49)$$

Então, a função  $F$  é contínua e limitada em  $\bar{S}$ , e é holomorfa em  $S$ .

De fato, usando  $(\sum_{k=1}^m r_k)(\sum_{j=1}^n s_j) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n r_k s_j$  e a linearidade da integral e da  $T$ ,

$$\begin{aligned} F(z) &= \int T(f_z(y))g_z(y)dy \\ &= \int T\left(\sum_k^m a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y)\right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{B_j}(y)\right) dy \\ &= \int \left(\sum_k^m a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} T(\chi_{A_k}(y))\right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \chi_{B_j}(y)\right) dy \\ &= \int \sum_k^m \sum_{j=1}^n a_k^{P(z)} b_j^{Q(z)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_j} T(\chi_{A_k}(y)) \chi_{B_j}(y) dy \\ &= \sum_k^m \sum_{j=1}^n a_k^{P(z)} b_j^{Q(z)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_j} \int T(\chi_{A_k}(y)) \chi_{B_j}(y) dy, \end{aligned}$$

sendo que essa última integral é uma constante finita pois a desigualdade de Hölder para expoentes  $q_0$  e  $q'_0$  implica

$$\begin{aligned} \left| \int T(\chi_{A_k}(y)) \chi_{B_j}(y) dy \right| &\leq \int |T(\chi_{A_k}(y)) \chi_{B_j}(y)| dy \\ &\stackrel{1.31}{\leq} \|T(\chi_{A_k})\|_{q_0} \|\chi_{B_j}\|_{q'_0} \\ &\stackrel{1.42}{\leq} M_0 \|\chi_{A_k}\|_{p_0} \|\chi_{B_j}\|_{q'_0} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Agora, note que  $P$  e  $Q$  são holomorfas em todo o plano complexo, logo  $z \mapsto a_k^{P(z)} b_j^{Q(z)}$  é

holomorfa pois  $a_k, b_j > 0$ ; em particular, cada fator  $a_k^{P(z)} b_j^{Q(z)}$  é contínuo em  $S$  e holomorfo no interior de  $S$ ; além disso, esses termos são limitados pois para cada  $z \in S$ ,  $P(z)$  e  $Q(z)$  têm parte real limitada.

**Passo 4.** Para cada  $z \in S$ , valem as desigualdades

$$|F(it)| \leq M_0 \|f\|_{p_0}^{\frac{p_t}{p_0}} \|g\|_{q_0}^{\frac{q_t'}{q_0}} \quad \text{e} \quad |F(1+it)| \leq M_1 \|f\|_{p_1}^{\frac{p_t}{p_1}} \|g\|_{q_1}^{\frac{q_t'}{q_1}}. \quad (1.50)$$

De fato, como os  $A_k$ 's são disjuntos, então é fácil verificar que  $|\sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y)|^{p_t}$  é uma função simples que coincide com  $|a_k e^{i\alpha_k}|^{p_t} = a_k^{p_t}$  quando  $y \in A_k$  para cada  $k$ , e se anula quando  $y \notin (\bigcup_{k=1}^m A_k)$ ; conseqüentemente, para cada  $y \in \mathbb{R}^n$  vale

$$|\sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y)|^{p_t} = \sum_{k=1}^m a_k^{p_t} \chi_{A_k}(y). \quad (1.51)$$

Por outro lado, como

$$P(it) = \frac{p_t}{p_0}(1-it) + \frac{p_t}{p_1}it = \frac{p_t}{p_0} + i\left(-\frac{p_t}{p_0} + \frac{p_t}{p_1}\right), \quad (1.52)$$

então a função simples  $|\sum_{k=1}^m a_k^{\frac{p_t}{p_0}} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y)|^{p_0}$  coincide com  $a_k^{p_t} = |a_k^{\frac{p_t}{p_0}} e^{i\alpha_k}|^{p_0} = |a_k^{P(it)} e^{i\alpha_k}|^{p_0}$  quando  $y \in A_k$ . Logo

$$|\sum_{k=1}^m a_k^{P(it)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y)|^{p_0} = \sum_{k=1}^m a_k^{p_t} \chi_{A_k}(y) \stackrel{1.51}{=} |\sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y)|^{p_t}; \quad (1.53)$$

e assim

$$\begin{aligned} \|f_{it}\|_{p_0} &= \left( \int |f_{it}(y)|^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\stackrel{1.49}{=} \left( \int \left| \sum_{k=1}^m a_k^{P(it)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y) \right|^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\stackrel{1.53}{=} \left( \int \left| \sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y) \right|^{p_t} dx \right)^{\frac{1}{p_t} \frac{p_t}{p_0}} \\ &= \left( \int |f(y)|^{p_t} \right)^{\frac{1}{p_t} \frac{p_t}{p_0}} \\ &= \|f\|_{p_t}^{\frac{p_t}{p_0}}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|f_{it}\|_{p_0} = \|f\|_{p_t}^{\frac{p_t}{p_0}}. \quad (1.54)$$

mesmo quando  $p_0 = \infty$  pois neste caso  $\frac{p_t}{p_0} = \frac{p_t}{\infty} = 0$  e daí para cada  $y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned}
1 &= \left| \sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y) \right|^0 \\
&= \left| \sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y) \right|^{\frac{p_t}{p_0}} \\
&= \sum_{k=1}^m \left( \left| a_k e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y) \right|^{\frac{p_t}{p_0}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^m \left( |a_k|^{\frac{p_t}{p_0}} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y) \right) \\
&= \left| \sum_{k=1}^m a_k^{P(it)} e^{i\alpha_k} \chi_{A_k}(y) \right|;
\end{aligned}$$

logo tomando o supremo em  $y$  obtemos (1.54) para  $p_0 = \infty$ :  $1 = \|f_{it}\| = \|f\|_{\frac{p_0}{p_t}}$ .

Substituindo  $g$  no lugar da  $f$  e  $Q$  no lugar da  $P$ , deduzimos de modo análogo que

$$\|g_{it}\|_{q'_0} = \|g\|_{q'_t}, \quad (1.55)$$

o que implica

$$|F(it)| \leq M_0 \|f\|_{\frac{p_0}{p_t}} \|g\|_{q'_t}, \quad (1.56)$$

pois, usando a hipótese (1.42) em \*, e as igualdades (1.54) e (1.55) em \*\*,

$$|F(it)| \stackrel{1.49}{\leq} \|T(f_{it})(g_{it})\|_1 \stackrel{1.31}{\leq} \|T(f_{it})\|_{q_0} \|g_{it}\|_{q'_0} \stackrel{*}{\leq} M_0 \|f_{it}\|_{p_0} \|g_{it}\|_{q'_0} \stackrel{**}{=} M_0 \|f\|_{\frac{p_0}{p_t}} \|g\|_{q'_t}.$$

Sem dificuldade, deduzimos com os mesmo argumentos usados acima que

$$|F(1+it)| \leq M_1 \|f\|_{\frac{p_1}{p_t}} \|g\|_{q'_t}. \quad (1.57)$$

Os passos são os seguintes: primeiro, note que  $P(1+it) \stackrel{1.52}{=} i(-p_t/p_0 + p_t/p_1) + p_t/p_1$ ; logo substituindo  $1+it$  no lugar de  $it$  e  $p_1$  no lugar de  $p_0$  na igualdade (1.53), procedemos de modo inteiramente análogo ao que fizemos em (1.54) e (1.55) para deduzir que

$$\|f_{1+it}\|_{p_1} = \|f\|_{\frac{p_1}{p_t}} \quad \text{e} \quad \|g_{1+it}\|_{q'_1} = \|g\|_{q'_t}.$$

Logo a igualdade (1.57) é obtida da mesma forma que a igualdade (1.56).

**Passo 5.** Vale a igualdade (1.45).

De fato, segue dos passos 3 e 4 que podemos aplicar o Lema das três linhas para  $F$  com as desigualdades (1.50) e deduzir que

$$F(z) \leq \left( M_0 \|f\|_{p_0}^{\frac{p_t}{p_0}} \|g\|_{q_0}^{\frac{q_t}{q_0}} \right)^{1-t} \left( M_1 \|f\|_{p_1}^{\frac{p_t}{p_1}} \|g\|_{q_1}^{\frac{q_t}{q_1}} \right)^t \stackrel{1.41}{=} M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t} \quad (1.58)$$

sempre que  $t = \operatorname{Re}(z) \in (0, 1)$ , ou seja, quando  $z \in S$ ; além disso, note que  $P(t) \stackrel{1.41}{=} 1$  e  $Q(t) \stackrel{1.41}{=} 1$  logo  $\int T(f(y))g(y)dy \stackrel{1.49}{=} F(t) \stackrel{1.58}{\leq} M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$ . Isso conclui a demonstração.  $\square$

### 1.3 Convolução e Aproximações da Identidade

A **convolução** de duas funções mensuráveis  $f$  e  $g$  é definida e denotada por

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y)dy. \quad (1.59)$$

Diversas são as condições que podem ser impostas sobre  $f$  e  $g$  para que essa integral exista, pelo menos em quase todo ponto. Exemplos clássicos disso são assumir que  $g \in L^\infty$  e  $f \in L^1$ , ou que  $f, g \in L^1$ . É possível verificar que  $(f * g) = (g * f)$  e  $f * (g * h) = (f * g) * h$ .

Dada  $\phi$  uma função qualquer em  $\mathbb{R}^n$  e  $\delta > 0$ , consideraremos a função auxiliar

$$\phi_\delta(x) = \delta^{-n} \phi(\delta^{-1}x). \quad (1.60)$$

Observe que para  $\phi \in L^1$ , o valor  $\int \phi_\delta$  é independente de  $t$ , isto é,  $\int \phi = \int \phi_\delta$ .

**Teorema 1.3.1.** *Seja  $\phi \in L^1$  e suponha que  $\int \phi(x)dx = a$  constante. Então,*

1. *Se  $f \in L^p$  com  $1 \leq p < \infty$ , então  $(f * \phi_\delta) \rightarrow af$  em  $L^p$  quando  $\delta \rightarrow 0$ .*
2. *Se  $f$  é limitada e uniformemente contínua, então  $(f * \phi_\delta) \rightarrow af$  uniformemente quando  $\delta \rightarrow 0$ .*
3. *Se  $f \in L^\infty$  e  $f$  é contínua em um conjunto aberto  $U$ , então  $(f * \phi_\delta) \rightarrow af$  uniformemente em subconjuntos compactos de  $U$  quando  $\delta \rightarrow 0$ .*

*Demonstração.* Ver [6], página 242.  $\square$

**Teorema 1.3.2.** *Sejam  $p$  e  $q$  expoentes conjugados. Se  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$ , então  $(f * g)(x)$  existe para quase todo  $x$ ,  $(f * g)$  é limitada e uniformemente contínua e vale a estimativa  $\|(f * g)\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$ . Além disso,  $(f * g)$  tem suporte compacto quando  $1 < p < \infty$ .*

*Demonstração.* Ver [6], página 242.  $\square$

São de grande interesse as funções dadas por convolução da forma

$$(f * K_\delta)(x) = \int f(x-y)K_\delta(y)dy, \quad (1.61)$$

sendo  $f$  uma função em  $L^1$  fixada e  $\{K_\delta\}$  uma família adequada de funções, chamadas de **núcleos**, os quais são indexados pelo parâmetro  $\delta \in \mathbb{R}$ .

Dizemos que o núcleo  $\{K_\delta\}_{\delta>0}$  é uma **aproximação da identidade** quando cada função  $K_\delta$  pertence a  $L^1$  e existe uma constante  $B$  independente de  $\delta$  tal que

1.  $\int K_\delta(x)dx = 1$  para cada  $\delta > 0$ ,
2.  $|K_\delta(x)| \leq B\delta^{-n}$  para cada  $\delta > 0$ ,
3.  $|K_\delta(x)| \leq B\delta/|x|^{n+\epsilon}$  para cada  $\epsilon, \delta > 0$  e cada  $x \in \mathbb{R}^n$ .

É possível mostrar que o Teorema 1.3.1 se aplica para as aproximações da identidade  $\{K_\delta(x)\} = \{\phi_\delta(x)\}_{\delta>0}$ , sendo  $\phi \in L^1$ .

**Exemplo 1.3.3.** Podemos criar uma família de aproximações da identidade a partir de uma função mensurável limitada, não negativa, compactamente suportada na bola  $|x| \leq 1$  e cuja integral é igual a 1. De fato, tomamos  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma tal função e vejamos que a família de funções dada por  $\{K_\delta(x)\}_{\delta>0} = \delta^{-n}\varphi(\delta^{-1}x)$  é uma aproximação da identidade.

1. Dado  $\delta > 0$  fixo, com a mudança de variáveis  $y = \delta^{-1}x$ , temos  $dx = \delta^n dy$  e

$$\int K_\delta(x)dx = \int \delta^{-n}\varphi(\delta^{-1}x)dx = \int \delta^{-n}\varphi(y)\delta^n dy = 1.$$

2. Dado  $\delta > 0$  fixo, a hipótese sobre o suporte de  $\varphi$  implica que  $\varphi(\delta^{-1}x) = 0$  quando  $|\delta^{-1}x| > 1$ , e como  $\varphi$  é limitada em  $|\delta^{-1}x| \leq 1$ , então existe uma constante  $A > 0$  independente de  $\delta$  tal que  $|\varphi(\delta^{-1}x)| \leq A$ . Portanto  $|K_\delta(x)| = |\delta^{-n}\varphi(\delta^{-1}x)| \leq A\delta^{-n}$ .
3. Dado  $\delta > 0$  fixo, note que  $\varphi(\delta^{-1}x)$  é limitada quando  $|\delta^{-1}x| \leq 1$ . Essa condição sobre  $x$  implica que  $|x| \leq \delta$ , logo  $|x|^{n+\epsilon} \leq \delta^{n+\epsilon}$  implica  $\delta^{-n} \leq \delta^\epsilon/|x|^{n+\epsilon}$  para cada  $\epsilon > 0$  dado. Essa última desigualdade e o item 2 implicam  $|K_\delta(x)| \leq A'\delta/|x|^{n+\epsilon}$ .

Os Exemplos a seguir são núcleos bem conhecidos, os quais são casos particulares do Exemplo 1.3.3. Para maiores detalhes, ver [9], página 111.

**Exemplo 1.3.4.** O **núcleo do calor** em  $\mathbb{R}^n$  é definido por

$$\mathcal{H}_t(x) = \frac{e^{-|x|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}} \text{ com parâmetro } \delta = t/2 > 0. \quad (1.62)$$

**Exemplo 1.3.5.** O núcleo de Féjer é definido por

$$\frac{1}{2\pi}F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases} \quad (1.63)$$

**Exemplo 1.3.6.** O núcleo de Poisson para o semi-plano superior é definido por

$$\mathcal{P}_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \text{ com parâmetro } \delta = y > 0. \quad (1.64)$$

**Exemplo 1.3.7.** O núcleo de Poisson para o disco é definido por

$$\mathcal{P}_r(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x)+r^2}, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases} \quad (1.65)$$

# Capítulo 2

## Transformada de Fourier e a Desigualdade de Hausdorff-Young

Neste Capítulo revisamos alguns tópicos da Teoria da Transformada de Fourier em  $L^p$  para  $1 \leq p \leq 2$ , com ênfase no que é necessário para a demonstração da Desigualdade de Hausdorff-Young. Na Seção 1, revisamos essa teoria da perspectiva mais elementar, que é como operador em  $L^1$ . Em seguida, na Seção 2 lançamos mão da elegante teoria das funções de decaimento rápido, as funções de Schwartz, e deduzimos algumas propriedades. Por fim, na Seção 3 demonstramos a Desigualdade de Hausdorff-Young.

As principais referências para esse capítulo são os livros [5] e [6].

### 2.1 Transformada de Fourier em $L^1$

Definimos a **Transformada de Fourier** de uma função  $f \in L^1$  por

$$\widehat{f}(y) = \int f(x)e^{-2\pi ixy} dx, \quad \text{sendo } xy = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n. \quad (2.1)$$

Observamos que  $f \mapsto \widehat{f}$  é linear e contínua, em virtude da estimativa

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1. \quad (2.2)$$

Além disso, são bem conhecidas as seguintes propriedades para  $f, g \in L^1$ :

1.  $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \widehat{f}(y) = 0$ .
2.  $\widehat{f * g}(y) = \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$ .
3.  $\widehat{\tau_h f}(y) = \widehat{f}(y)e^{-2\pi ihy}$ ;  $(f(\cdot)e^{-2\pi ih(\cdot)})^\wedge(y) = \widehat{\tau_{-h} f}(y)$ , sendo  $(\tau_h f)(y) := f(y - h)$ .
4. Se  $g(x) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x)$ , então  $\widehat{g}(y) = \widehat{f}(\lambda y)$ .

5.  $\widehat{\partial_j f}(y) = 2\pi i y_j \widehat{f}(y)$ , sempre que  $\partial_j f \in L^1$ .

6.  $(-2\pi i x_j f)(y) = \partial_j \widehat{f}(y)$ , sempre que  $x_j f \in L^1$ .

O item 1 é conhecido como **Lema de Riemann-Lebesgue**; o item 2 afirma que, pontualmente, a Transformada de uma convolução é igual ao produto das Transformadas; o item 3 diz como ela interage com translação; e os itens 6 e 7 mostram como ela interage com derivação parcial. Para uma demonstração e maiores detalhes, ver [5], página 11.

Em vista das interessantes aplicações da Transformada de Fourier, por exemplo em Equações Diferenciais Parciais ou Teoria da Aproximação, diversas questões podem ser indagadas e demonstradas a respeito de suas propriedades operacionais. Uma delas é o chamado "problema de inversão", que consiste em responder a seguinte pergunta:

- Uma vez que  $\widehat{f}$  é conhecida, então sob quais condições é possível recuperar  $f$ ?

Acontece que quando  $\widehat{f}$  é integrável, então é fácil verificar que o problema admite solução

$$f(-x) = \int \widehat{f}(y) e^{2\pi i y \cdot x} dy. \quad (2.3)$$

Assumindo então que  $\widehat{f} \in L^1$ , definimos a **Transformada Inversa de Fourier** por

$$\check{f}(x) = \widehat{f}(-x). \quad (2.4)$$

Com a mudança de variáveis  $y = -y$  na equação (2.3), podemos escrever

$$f(x) = (\check{f})(x) = (\widehat{f})(x). \quad (2.5)$$

Essa relação é conhecida como **Fórmula de Inversão de Fourier**.

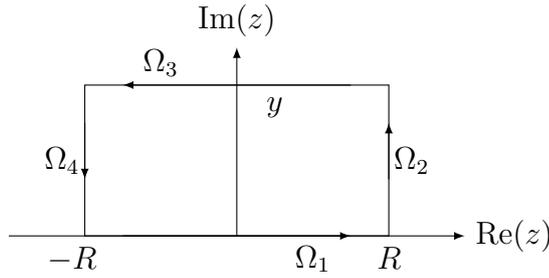
A seguir, algumas integrais que serão utilizadas no capítulo seguinte.

**Exemplo 2.1.1.** *Se  $a > 0$ , então*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (2.6)$$

**Exemplo 2.1.2.** *Se  $f(x) = e^{-\pi x^2}$ , então  $\widehat{f}(y) = e^{-\pi y^2}$ .*

Para ver isso, fixamos  $y \in \mathbb{R}$  e verificamos que  $e^{-\pi y^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y} dx$ . Se  $y = 0$ , então vale  $f(0) = 1 \stackrel{2.6}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx$ . Agora, para  $y > 0$ , fixamos  $R > 0$  e integramos a função inteira  $G(z) = e^{-\pi z^2}$  sobre o retângulo cuja base tem altura  $2R$  e está centrada na origem, e a altura é  $y$ , como indicado a seguir:



Claramente,

$$\int_{\Omega_1} G(z)dz = \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx; \quad (2.7)$$

e como  $x \in [-R, R] \mapsto x + iy$  parametriza  $\Omega_3^-$ ,

$$\int_{\Omega_3} G(z)dz = - \int_{-R}^R e^{-\pi(x+iy)^2} dx = -e^{\pi y^2} \int_{-R}^R e^{-\pi y^2 - 2\pi ixy} dx. \quad (2.8)$$

Agora, como  $u \in [0, y] \mapsto R + iu$  parametriza  $\Omega_2$  e  $v \in [0, y] \mapsto -R + iv$  parametriza  $\Omega_4^-$ ,

$$\left| \int_{\Omega_2} G(z)dz \right| = \left| i \int_0^y e^{-a(R+iu)^2} du \right| \leq C e^{-\pi R^2} \text{ para algum } C > 0, \quad (2.9)$$

e

$$\left| \int_{\Omega_4} G(z)dz \right| = \left| -i \int_0^y e^{-a(-R+iv)^2} dv \right| \leq D e^{\pi R^2} \text{ para algum } D > 0. \quad (2.10)$$

Pelo Teorema de Cauchy,

$$0 = \int_{\Omega_1} G(w)dw + \int_{\Omega_2} G(w)dw + \int_{\Omega_3} G(w)dw + \int_{\Omega_4} G(w)dw; \quad (2.11)$$

portanto o exemplo 2.1.2 segue de fazermos  $R \rightarrow \infty$  em (2.11), pois segue de (2.9) e (2.10) que as integrais sobre  $\Omega_2$  e  $\Omega_4$  se anulam para  $R$  suficientemente grande. A prova do para  $y < 0$  segue os mesmos passos, mas a curva de integração neste caso é a fronteira do retângulo  $[-R, R] \times [y, 0]$ .

**Exemplo 2.1.3.** Se  $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ , então  $\hat{f}(y) = e^{-\pi|y|^2}$ , isto é,  $f = \hat{f}$ .

De fato, como  $e^{-\pi|x|^2} = e^{-\pi(x^2 + \dots + x_n^2)} = \prod_{i=1}^n e^{-\pi x_i^2}$ , então basta verificarmos essa igualdade para dimensão  $n = 1$ , pois em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\hat{f}$  é o produto de  $n$  integrais idênticas; mas isso segue diretamente do Exemplo 2.1.2.

**Exemplo 2.1.4.** Sejam  $R$  e  $S$  números reais. Se  $R > 0$ , então

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-Rx^2 + iSx} dx = e^{\frac{-S^2}{4R}} \sqrt{\frac{\pi}{R}}. \quad (2.12)$$

De fato, como

$$-Rx^2 + iSx = -R \left\{ \left[ x - \left( \frac{iS}{2R} \right) \right]^2 + \frac{S^2}{4R^2} \right\}, \quad (2.13)$$

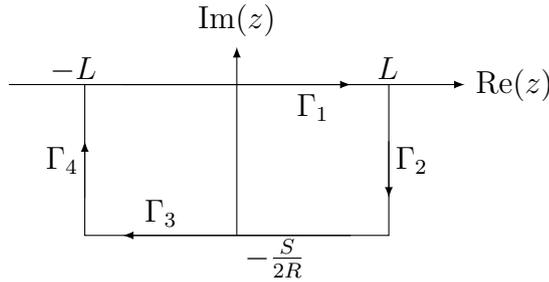
então

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-Rx^2 + iSx} dx = e^{\frac{-S^2}{4R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-R(x - \frac{iS}{2R})^2} dx. \quad (2.14)$$

Basta mostrarmos portanto que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-R(x - \frac{iS}{2R})^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{R}}. \quad (2.15)$$

Para isso, fixamos  $L > 0$  e integramos a função auxiliar  $F(z) = e^{-Rz^2}$  sobre o retângulo indicado a seguir:



Note que

$$\int_{\Gamma_1} F(z) dz = \int_{-L}^L e^{-Rx^2} dx; \quad (2.16)$$

e como  $x \in [-L, L] \rightarrow x - iS/(2R)$  parametriza  $\Gamma_3^-$ ,

$$\int_{\Gamma_3} F(z) dz = - \int_{-L}^L e^{-R(x - \frac{iS}{2R})^2} dx. \quad (2.17)$$

Agora, como  $u \in [-S/(2R), 0] \mapsto L + iu$  parametriza  $\Omega_2^-$ , e  $v \in [-S/(2R), 0] \mapsto -L + iu$  parametriza  $\Omega_4$ ,

$$\left| \int_{\Omega_2} F(z) dz \right| \leq \left| - \int_{-\frac{S}{2R}}^0 e^{-R(L + iu - \frac{iS}{2R})^2} du \right| \leq Ae^{-RL^2}, \text{ para algum } A > 0, \quad (2.18)$$

e

$$\left| \int_{\Omega_4} F(z) dz \right| \leq \left| \int_{-\frac{S}{2R}}^0 e^{-R(-L + iu - \frac{iS}{2R})^2} du \right| \leq Be^{-RL^2}, \text{ para algum } B > 0. \quad (2.19)$$

Portanto, tendo em vista as estimativas (2.18) e (2.19), segue do Teorema de Cauchy que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_1} F(z) dz + \int_{\Gamma_3} F(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-Rx^2} dx - \int_{\mathbb{R}} e^{-R(x - \frac{iS}{2R})^2} dx \\ &\stackrel{2.6}{=} \sqrt{\frac{\pi}{R}} - \int_{\mathbb{R}} e^{-R(x - \frac{iS}{2R})^2} dx. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.1.5.** *Sejam  $a$  e  $b$  números reais e suponha que  $a > 0$ . Se  $f(x) = e^{-ax^2+ibx}$ , então*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{(y-b)^2}{4a}}. \quad (2.20)$$

Isso segue do Exemplo 2.12, tomando  $R = a$  e  $S = (-y + b)$  em  $*$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} e^{-ax^2+ibx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+ix(-y+b)} dx \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{(-y+b)^2}{4a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{(y-b)^2}{4a}}. \end{aligned}$$

## 2.2 Classe de Schwartz

Apresentamos nesta Seção uma classe funções na qual a Transformada de Fourier está bem definida e valem todas as propriedades enunciadas na Seção 1 deste Capítulo.

Dizemos que uma função de classe  $\mathcal{C}^\infty$   $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  é uma **função de Schwartz** quando para qualquer inteiro  $N > 0$  e multi-índice  $\alpha$ , existe uma constante  $\rho_{N,\alpha}(f)$  tal que

$$\rho_{N,\alpha}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)| < \infty. \quad (2.21)$$

Os números  $\rho_{N,\alpha}(f)$  são chamados de **seminormas de Schwartz** de  $f$ , e o conjunto das funções de Schwartz é denotado por  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Por simplicidade, escreveremos apenas  $\mathcal{S}$ .

A seguir, uma caracterização para o conjunto  $\mathcal{S}$ .

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $f$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Então  $f \in \mathcal{S}$  se, e somente se, para quaisquer multi-índices  $\alpha$  e  $\beta$ ,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty. \quad (2.22)$$

*Demonstração.* Ver [6], página 237. □

Em vista do Teorema acima, o conjunto  $\mathcal{S}$  é fechado com respeito ao produto de funções, derivação parcial e multiplicação por polinômios; também é possível mostrar que  $\mathcal{S}$  é fechado com respeito a convolução e a Transformada de Fourier.

**Corolário 2.2.2.**  $\mathcal{S} \subset L^p$  para  $1 \leq p \leq \infty$ . *Em particular, se  $f \in \mathcal{S}$  então  $f$  e todas as suas derivadas pertencem a todos os espaços  $L^p$ .*

*Demonstração.* Seja  $f \in \mathcal{S}$ . Segue de (2.21) que para qualquer inteiro positivo  $N$ , existe uma constante  $C$  tal que  $|\partial^\alpha f(x)| \leq C(1 + |x|)^{-N}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Se for  $p = \infty$ , então

a demonstração já está concluída; assumindo então que  $1 \leq p < \infty$ , fixamos  $N > n/p$ , isto é,  $-N < -n/p$  e concluímos  $\|\partial^\alpha(x)\|_p^p < C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-n} dx < \infty$ .  $\square$

Na realidade, vale um resultado mais profundo:

**Teorema 2.2.3.**  $C_c^\infty$  e  $\mathcal{S}$  são ambos densos em  $C_c^0$  e em  $L^p$  com  $1 \leq p < \infty$ .

*Demonstração.* Ver [6], página 245.  $\square$

Em particular,  $\mathcal{S} \subset L^1$  e assim a Transformada de Fourier está bem definida para  $f \in \mathcal{S}$  via a expressão (2.1); e valem em  $\mathcal{S}$  todas as propriedades enunciadas na Seção 1 deste Capítulo.

Uma observação interessante e útil, que se aplica naturalmente para funções em  $\mathcal{S}$ , é que a convolução entre duas funções é pelo menos tão regular quanto a mais regular dentre elas. Esse fato está precisamente enunciado no resultado a seguir.

**Teorema 2.2.4.** Se  $f \in L^1$ ,  $g \in C^k$  e  $\partial^\alpha g$  é limitada sempre que  $|\alpha| \leq k$ , então  $f * g \in C^k$  e  $\partial^\alpha(f * g) = (f * \partial^\alpha g)(x)$  sempre que  $|\alpha| \leq k$ .

*Demonstração.* Ver [6], página 242.  $\square$

Concluímos esta Seção com um Exemplo no qual analisamos o núcleo que utilizaremos durante todo o capítulo principal desta dissertação.

**Exemplo 2.2.5.** Seja

$$K(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left(\frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{(x - yt)^2}{1 - t^2}\right), \quad (2.23)$$

com  $x$  e  $y$  reais arbitrários e parâmetro  $t$  tal que  $0 < t < 1$ . É fácil deduzir que

$$K(x, y, t) \stackrel{3.7}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left(\frac{-x^2(1+t^2) - y(1+t^2) + 4xyt}{2(1-t^2)}\right), \quad (2.24)$$

logo para cada  $t$  fixo,  $K$  é da forma  $K(x, y) = Ce^{-Ax^2 - By^2 + Dxy}$ , com  $A, B, C$  e  $D$  constantes positivas. Isso implica que  $K$  é uma função de Schwartz nas variáveis  $x$  e  $y$ : as derivadas de  $K$  são combinações lineares finitas de termos da forma  $p(x, y)e^{-Ax^2 - By^2 + Dxy}$ , com  $p$  é um polinômio. Mas por continuidade, estes termos são limitados para  $|(x, y)|$  limitado, e tendem a zero quando  $|(x, y)| \rightarrow \infty$  pois exponenciais crescem mais rápido que polinômios; em todo caso, as quantidades (2.22) associadas a  $K$  são finitas.

**Teorema 2.2.6.** Para qualquer multi-índice  $\alpha$  e qualquer  $a > 0$ , temos  $x^\alpha \partial(e^{-a|x|^2}) \in \mathcal{S}$ .

## 2.3 Transformada de Fourier em $L^1 + L^2$ e a Desigualdade de Hausdorff-Young

Discutimos brevemente a questão da Transformada de Fourier definida em  $L^1 + L^2$ . Nosso objetivo aqui é demonstrar a Desigualdade de Hausdorff-Young.

**Teorema 2.3.1.** *Para qualquer  $f \in \mathcal{S}$ , temos  $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ .*

*Demonstração.* Se  $h \in \mathcal{S}$ , então

$$\widehat{\overline{h(x)}} = \int \overline{h(y)} e^{-2\pi i y x} dy = \int h(y) e^{2\pi i y x} dy = \int h(y) e^{-2\pi i y(-x)} dy = \widehat{h(-x)},$$

isto é,

$$\widehat{h(x)} = \overline{\widehat{h(-x)}}; \quad (2.25)$$

logo a função auxiliar  $g(x) = \overline{\widehat{h(x)}}$  cumpre

$$\widehat{g(x)} = \overline{h(x)}, \quad (2.26)$$

pois

$$\widehat{g(x)} = \int \overline{\widehat{h(y)}} e^{-2\pi i y x} dy \stackrel{2.25}{=} \int \widehat{h(-y)} e^{2\pi i x(-y)} dy \stackrel{2.3}{=} \overline{h(x)}.$$

Agora, segue facilmente do Teorema de Fubini que

$$\int \widehat{f(x)} u(x) dx = \int f(x) \widehat{u(x)} dx \text{ para quaisquer } f, u \in \mathcal{S}; \quad (2.27)$$

logo tomando  $u(x) = g(x)$  na igualdade (2.27),

$$\int \widehat{f(x)} \overline{\widehat{h(x)}} dx = \int \widehat{f(x)} g(x) dx \stackrel{2.27}{=} \int f(x) \widehat{g(x)} dx \stackrel{2.26}{=} \int f(x) \overline{h(x)} dx, \quad (2.28)$$

isto é,

$$\int \widehat{f(x)} \overline{\widehat{h(x)}} dx = \int f(x) \overline{h(x)} dx \text{ para quaisquer } f, h \in \mathcal{S}. \quad (2.29)$$

Concluimos a demonstração tomando  $h = f$  na igualdade (2.29).  $\square$

A igualdade (2.29) é chamada **Identidade de Parseval**.

**Teorema 2.3.2** (Plancherel). *A Transformada de Fourier é uma isometria em  $L^2$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.3.1, a aplicação  $f \mapsto \widehat{f}$  é uma isometria em  $\mathcal{S}$ ; mas  $\mathcal{S}$  é denso em  $L^2$  pelo Teorema 2.2.3, portanto o resultado segue do Princípio de Extensão.  $\square$

Dada uma função  $f$  em  $L^p$  com  $1 < p < 2$ , ela pode ser decomposta como  $f = f_1 + f_2$  com  $f_1 \in L^1$  e  $f_2 \in L^2$ . Uma forma de se fazer isso é, por exemplo, tomar

$$f_1(x) = f(x) \cdot \chi_{\{x:|f(x)|>1\}}(x); \quad f_2(x) = f(x) \cdot \chi_{\{x:|f(x)|\leq 1\}}(x).$$

Observamos que essas funções tem norma  $L^p$  finita, como consequência do fato bem conhecido de que  $|f|^p$  é finito em quase todo ponto sempre que  $|f|^p \in L^1$ . Vejamos que qualquer outra decomposição de  $f$  como soma de uma função em  $L^1$  e outra em  $L^2$ , não altera o valor de  $\widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$ , que é finito, em virtude da desigualdade (2.2) e do Teorema de Plancherel. De fato, supondo que existe outra decomposição

$$f = h_1 + h_2 \quad \text{com} \quad h_1 \in L^1 \text{ e } h_2 \in L^2, \quad (2.30)$$

então  $f_1 - h_1 = h_2 - f_2 \in L^1 \cap L^2$ ; logo  $\widehat{f} = (f_1 - h_1)\widehat{\phantom{f}} = (h_2 - f_2)\widehat{\phantom{f}}$ , o que implica  $\widehat{f}_1 + \widehat{f}_2 = \widehat{h}_1 + \widehat{h}_2$ . Dessa forma,  $\widehat{f}$  está bem definida para  $f \in L^1 + L^2$  e neste caso vale  $\widehat{f} \in L^\infty + L^2$  pela desigualdade (2.2) e o Teorema de Plancherel.

**Teorema 2.3.3** (Desigualdade de Hausdorff-Young). *Para  $f \in L^p$  com  $1 \leq p \leq 2$ , vale*

$$\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p. \quad (2.31)$$

*Demonstração.* Pelas considerações acima, o operador Transformada de Fourier mapeia  $L^1 + L^2$  em  $L^\infty + L^2$  e além disso cumpre as estimativas  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$  e  $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ . Portanto, o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, com constantes  $M_0 = M_1 = 1$ , implica que  $\|\widehat{f}\|_q \leq \|f\|_p$  para  $1 < p < 2$  e  $1/p + 1/q = 1$ .  $\square$

**Observação 2.3.4.** Durante o próximo capítulo, utilizaremos a definição da Transformada de Fourier dada pela normalização

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x) e^{-ixy} dx. \quad (2.32)$$

Acontece que as propriedades operacionais que deduziremos interagem melhor com essa expressão. Note que a igualdade (2.32) é obtida da igualdade (2.1) pela mudança de variáveis  $y = y/2\pi$ . O Teorema de Plancherel não se altera quando utilizamos a normalização (2.32); por outro lado, com essa nova normalização obtemos a constante  $(2\pi)^{n/2}$  na desigualdade (2.2). A observação fundamental é que a Desigualdade de Hausdorff-Young continua válida para (2.32), a menos de uma constante que só depende de  $n$ .

# Capítulo 3

## Teorema de Babenko

Apresentamos neste Capítulo a versão sharp da desigualdade de Hausdorff-Young para o caso  $q = 2l$ , com  $l$  inteiro positivo; além disso, verificamos que as funções Gaussianas são extremizantes para essa desigualdade. Esse resultado está contido no artigo [1].

**Teorema 3.0.1** (Babenko). *Seja  $1 < p \leq 2$  e suponha que  $1/p + 1/q = 1$ ,  $q = 2l$  e  $l$  é um inteiro positivo. Para qualquer  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , vale a desigualdade*

$$\left[ \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^q dy \right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[ \sqrt{\frac{p}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (3.1)$$

*Além disso, vale a igualdade para funções Gaussianas  $f$  da forma*

$$f(x) = e^{-ax^2+ibx} \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0. \quad (3.2)$$

A demonstração proposta por Babenko em [1] é o conteúdo deste Capítulo. Assim, organizamos as seções de modo a seguirmos a linha de ideias indicadas no artigo:

- Na primeira Seção, investigamos as propriedades de um operador integral  $K_t$  do tipo convolução indexado por um parâmetro fixo  $t$  - esse operador possui boas propriedades operacionais e interage bem com a Transformada de Fourier; em seguida, provamos a existência de uma função extremizante que realiza um supremo  $\mu_t$ .
- Na segunda Seção, deduzimos equações integrais que são satisfeitas pelas funções extremizantes, e a partir disso definimos duas funções inteiras  $\xi$  e  $\eta$  com propriedades especiais de crescimento e simetria. Isso nos leva a uma relação de recorrência.
- Em seguida, na terceira Seção resolvemos essa relação de recorrência e vemos como isso implica na limitação da função  $\xi$ , a qual é constante pelo Teorema de Liouville.
- Na quarta e última Seção, exibimos o valor de  $\mu_t$  e, com um argumento de Aproximação da Identidade, mostramos como isso prova a desigualdade (3.1); concluímos a demonstração ao verificarmos que vale a igualdade para funções da forma (3.2).

### 3.1 Operador auxiliar

Iniciamos definindo um operador do tipo convolução e deduzimos algumas de suas propriedades. O principal resultado aqui é o Teorema 3.1.5 a seguir, que garante a existência de uma função com a propriedade de realizar um determinado supremo - esse fato é a base para as seções seguintes.

**Definição 3.1.1.** Seja  $1/p + 1/q = 1$  com  $1 < p < 2$ ,  $q = 2l$  e  $l$  um inteiro positivo, e seja  $t$  um número real fixado tal que  $0 < t < 1$ . Definimos o núcleo

$$K(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left(\frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{(x - yt)^2}{1 - t^2}\right), \quad \text{com } x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Para  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , definimos o operador  $K_t : L^p \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$K_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y, t) f(y) dy. \quad (3.4)$$

É possível mostrar que  $K(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \psi_n(x) \psi_n(y)$ , sendo que  $\psi_n(x)$  são funções de Hermite normalizadas convenientemente e a convergência da série é uniforme. Essas funções são especialmente úteis aqui pois são autofunções da Transformada de Fourier:  $\widehat{\psi}_n = (-i)^n \psi_n$ . Descrevemos os detalhes disso no Apêndice.

A seguir, vemos que esse operador interage bem com a Transformada de Fourier, e é simétrico em relação às variáveis  $x$  e  $y$ , isto é,  $K(x, y, t) = K(y, x, t)$ .

**Teorema 3.1.2.** *Vale a seguinte igualdade*

$$\widehat{K_t f}(y) = K_{-it} f(y). \quad (3.5)$$

*Demonstração.* Como

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{(x - yt)^2}{1 - t^2} &= \frac{(1 - t^2)(x^2 - y^2) - 2(x^2 - 2xyt + (yt)^2)}{2(1 - t^2)} \\ &= \frac{x^2 - y^2 - (xt)^2 + (yt)^2 - 2x^2 + 4xyt - 2(yt)^2}{2(1 - t^2)} \\ &= \frac{-x^2 - (xt)^2 - y^2 - (yt)^2 + 4xyt}{2(1 - t^2)}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

então  $K(x, y, t) \stackrel{3.6}{=} K(y, x, t)$  e

$$K(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left(\frac{-x^2 - (xt)^2 - y^2 - (yt)^2 + 4xyt}{2(1-t^2)}\right); \quad (3.7)$$

e como  $(1 - t^2) > 0$  para todo  $0 < t < 1$ , então  $K(x, y, t)$  tem decaído como uma exponencial em relação às variáveis  $x$  e  $y$ . A convergência uniforme da série e o Teorema de Fubini implicam

$$\begin{aligned}
\widehat{K_t f}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} [K_t f(x)] \exp(-ixy) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} K(x, y, t) f(y) dy \right] \exp(-ixy) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n \psi_n(x) \psi_n(y) \right) f(y) dy \right] \exp(-ixy) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n \psi_n(x) \psi_n(y) \right) f(y) \exp(-ixy) dy dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n \psi_n(x) \psi_n(y) f(y) \exp(-ixy) \right) dx \right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\mathbb{R}} t^n \psi_n(x) \psi_n(y) f(y) \exp(-ixy) dx \right) \right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y) f(y) t^n \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x) \exp(-ixy) dx \right) \right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y) f(y) t^n \widehat{\psi}_n(x) \right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y) f(y) (t)^n (-i)^n \psi_n(x) \right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (\psi_n(y) (-it)^n \psi_n(x)) \right] f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} [K(y, x, -it)] f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} [K(x, y, -it)] f(x) dx \\
&= K_{-it} f(y).
\end{aligned}$$

□

O operador  $K_t$  tem a propriedade adicional de ser limitado de  $L^p$  em  $L^p$ .

**Teorema 3.1.3.** Para  $p > 1$ ,  $K_t : L^p \rightarrow L^p$  é operador completamente contínuo.

*Demonstração.* **Passo 1.** O operador  $K_t : L^p \rightarrow L^p$  é linear e contínuo.

De fato, segue da identidade (3.4) que  $f \in L^p \rightarrow K_t f$  é linear; resta verificarmos que  $K_t f \in L^p$  e que  $\|K_t f\|_p$  é limitada por uma constante que só dependa de  $\|f\|_p$ .

Para  $0 < t < 1$  fixo, consideramos

$$\theta = \frac{1 - t^2}{2(1 + t^2)}. \quad (3.8)$$

Usando a relação  $1/(4\theta) = (1 + t^2)/(2(1 - t^2))$  na igualdade \* a seguir,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{(x - yt)^2}{1 - t^2} &\stackrel{3.6}{=} \frac{-x^2 - (xt)^2 - y^2 - (yt)^2 + 4xyt}{2(1 - t^2)} \\ &= -x^2 \frac{(1 + t^2)}{2(1 - t^2)} - y^2 \frac{(1 + t^2)}{2(1 - t^2)} + \frac{4xyt}{2(1 - t^2)} \frac{(1 + t^2)}{(1 + t^2)} \\ &\stackrel{*}{=} \frac{-x^2}{4\theta} + \left( \frac{-y^2}{4\theta} + \frac{4xyt}{4\theta(1 + t^2)} - \frac{4x^2t^2}{4\theta(1 + t^2)^2} \right) + \frac{4t^2x^2}{4\theta(1 + t^2)^2} \\ &= \frac{-x^2}{4\theta} - \frac{1}{4\theta} \left( y - \frac{2xt}{1 + t^2} \right)^2 + \frac{t^2x^2}{\theta(1 + t^2)^2} \\ &= -x^2 \left( \frac{1}{4\theta} - \frac{t^2}{\theta(1 + t^2)^2} \right) - \frac{1}{4\theta} \left( y - \frac{-2xt}{1 + t^2} \right)^2 \\ &\stackrel{**}{=} -x^2\theta - \frac{1}{4\theta} \left( y - \frac{-2xt}{1 + t^2} \right)^2, \end{aligned}$$

sendo a igualdade \*\* logo acima consequência de  $1/\theta = 2(1 + t^2)/(1 - t^2)$  e de

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\theta} - \frac{t^2}{\theta(1 + t^2)^2} &= \frac{(1 + t^2)}{2(1 - t^2)} - \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} \cdot \frac{2(1 + t^2)}{(1 - t^2)} \cdot \frac{2}{2} \\ &= \frac{1}{2(1 - t^2)} \left( (1 + t^2) - \frac{4t^2}{1 + t^2} \right) \\ &= \frac{1}{2(1 - t^2)} \left( \frac{(1 + t^2)^2 - 4t^2}{(1 + t^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2(1 - t^2)} \left( \frac{(1 - 2t^2 + t^4)}{1 + t^2} \right) \\ &= \frac{1}{2(1 - t^2)} \cdot \frac{(1 - t^2)^2}{1 + t^2} \\ &= \frac{1 - t^2}{2(1 + t^2)} \\ &= \theta. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$K_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1 - t^2)}} \int_{\mathbb{R}} \exp \left( -\theta x^2 - \frac{1}{4\theta} \left( y - \frac{2tx}{1 + t^2} \right)^2 \right) f(y) dy, \quad (3.9)$$

e como  $\theta \stackrel{3.8}{>} 0$ , então pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
|K_t f(x)| &\stackrel{3.9}{\leq} \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} e^{-\theta x^2} \int_{\mathbb{R}} |e^{-\frac{1}{4\theta}(y-\frac{2tx}{1+t^2})^2} f(y)| dy \\
&\stackrel{1.31}{\leq} \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} e^{-\theta x^2} \left( \int_{\mathbb{R}} |e^{-\frac{1}{4\theta}(y-\frac{2tx}{1+t^2})^2}|^q dy \right)^{1/q} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\
&\stackrel{2.6}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} e^{-\theta x^2} \left( \frac{4\pi\theta}{q} \right)^{1/(2q)} \|f\|_p \\
&= C \|f\|_p e^{-\theta x^2}, \quad \text{com } C = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \left( \frac{4\pi\theta}{q} \right)^{1/(2q)}. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Logo, se  $f \in L^p$  então  $K_t f \in L^p$  pois  $C \stackrel{3.10}{=} C(t)$  e  $\theta \stackrel{3.8}{=} \theta(t)$  são constantes para  $t$  fixo e

$$\|K_t f\|_p^p \stackrel{3.10}{\leq} C^p \|f\|_p^p \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta p x^2} dx \stackrel{2.6}{=} C^p \|f\|_p^p \sqrt{\frac{\pi}{\theta p}} < \infty. \tag{3.11}$$

**Passo 2.** O operador  $f \in L^p \mapsto K_t f \in L^p$  é completamente contínuo.

De fato, seja  $(f_n)$  uma sequência limitada em  $L^p$ . Vejamos que o conjunto  $\{K_t f_n\}$  é pré-compacto, isto é, que  $(K_t f_n)$  admite subsequência convergente em  $L^p$ . Para isso, vamos aplicar dois resultados:

- Teorema de Arzelà-Ascoli: *Toda sequência totalmente limitada e uniformemente equicontínua admite uma subsequência uniformemente convergente a uma função contínua.*
- Lema: *Toda sequência  $g_n$  de funções deriváveis tais que  $g'_n$  é totalmente limitada, é uniformemente equicontínua.*

*Prova do Lema.* Para todo  $n$ ,  $|\lim_{y \rightarrow x} (f_n(x) - f_n(y))/(x - y)| = |f'_n(x)| \leq M < \infty$ ; tomando  $\epsilon > 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$  e  $\delta := \epsilon/M > |x - y|$ , temos  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < \epsilon$ .

Voltando ao passo 2, como  $(f_n)$  é limitada em  $L^p$ , existe  $0 \leq M$  tal que  $\|f_n\|_p^p \leq M^p$  para todo  $n$ ; logo  $\|K_t f_n\|_p^p \stackrel{3.11}{\leq} C^p \|f_n\|_p^p \sqrt{\pi/(\theta p)} \leq C^p M^p \sqrt{\pi/(\theta p)}$  para todo  $n$ , isto é,  $(K_t f_n)$  é totalmente limitada.

Pelo Lema acima, basta verificarmos que cada  $K_t f_n$  tem derivada limitada por uma constante que independe de  $n$  para vermos que a sequência  $(K_t f_n)$  é uniformemente equicontínua. De fato, como a exponencial que aparece em  $K(x, y, t)$  pertence à classe de Schwartz (ver Exemplo 2.2.5), então sua derivada com respeito a variável  $x$  pertence todos os espaços  $L^p$  pelo Teorema 2.2.2. Usando  $\|f_n\|_p \leq M$  na desigualdade \*\*\* a seguir,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dx} K_t f_n(x) \right| &\stackrel{2.2.4}{=} \left| \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} \exp \left( -\theta x^2 - \frac{1}{4\theta} \left( y - \frac{2tx}{1+t^2} \right)^2 \right) f(y) dy \right| \\
&\stackrel{1.31}{\leq} \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \left\| \frac{d}{dx} \left[ \exp \left( -\theta x^2 - \frac{1}{4\theta} \left( y - \frac{2tx}{1+t^2} \right)^2 \right) \right] \right\|_q \|f_n\|_p \\
&\stackrel{***}{\leq} \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \left\| \frac{d}{dx} \left[ \exp \left( -\theta x^2 - \frac{1}{4\theta} \left( y - \frac{2tx}{1+t^2} \right)^2 \right) \right] \right\|_q M \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Agora, o Teorema de Arzelà-Ascorli implica que  $(K_t f_n)$  admite subsequência uniformemente convergente a uma função contínua, digamos  $K_t f_{n_j}(x) \rightarrow g(x)$  com  $g$  contínua; isso implica que  $\lim_{j \rightarrow \infty} |K_t f_{n_j}(x)|^p \rightarrow |g(x)|^p$ , sendo essa convergência pontual e  $|g|^p$  mensurável. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{j \rightarrow \infty} |K_t f_{n_j}(x)|^p dx \\
&\stackrel{1.33}{\leq} \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |K_t f_{n_j}(x)|^p dx \\
&= \liminf_{j \rightarrow \infty} \|K_t f_{n_j}\|_p^p \\
&\stackrel{3.11}{\leq} C^p M^p \sqrt{\pi/(\theta p)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

□

Como consequência, o operador  $\widehat{K}_t$  age de modo semelhante a um operador adjunto.

**Corolário 3.1.4.** *Para quaisquer  $f, g \in L^p$ , vale a igualdade*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{K}_t g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{K}_t f(x) g(x) dx < \infty. \quad (3.12)$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.1.3,  $K_t f, K_t g \in L^p$ ; logo  $\widehat{K}_t f, \widehat{K}_t g \in L^q$  pela desigualdade de Hausdorff-Young. A desigualdade de Hölder implica que as integrais em (3.12) são finitas, e pelo Teorema de Fubini e a simetria de  $K$  nas variáveis  $x$  e  $y$ ,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{K}_t g(x) dx &\stackrel{3.5}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) K_{-it} \{g(x)\} dx \\
&\stackrel{3.4}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left( \int_{\mathbb{R}} K(x, y, -it) g(y) dy \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left( \int_{\mathbb{R}} K(x, y, -it) f(x) dx \right) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left( \int_{\mathbb{R}} K(y, x, -it) f(x) dx \right) dy \\
&\stackrel{3.4}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) K_{-it} \{f(y)\} dy \\
&\stackrel{3.5}{=} \int_{\mathbb{R}} g(y) \widehat{K}_t f(y) dy.
\end{aligned}$$

□

A seguir, o principal resultado desta seção. Ele é a base para as seções seguintes.

**Teorema 3.1.5.** *Existe uma função  $f \in L^p$  que realiza o supremo*

$$\mu_t = \sup_{\|f\|_p=1} \{\|\widehat{K}_t f\|_q\}. \quad (3.13)$$

*Demonstração. Passo 1.* Vale a igualdade

$$\sup_{\|f\|_p=1} \{\|\widehat{K}_t f\|_q\} = \sup_{\|f\|_p \leq 1} \left\{ \frac{\|\widehat{K}_t f\|_q}{\|f\|_p} \right\} = \mu_t. \quad (3.14)$$

De fato, quando  $\|f\|_p = 1$  essa igualdade claramente é válida; se  $0 < \|f\|_p < 1$ , então a função auxiliar  $g(x) = f(x)/\|f\|_p$  cumpre  $\|g\|_p = 1$ ; logo  $\|\widehat{K}_t g\|_q = \|\widehat{K}_t g\|_q / \|g\|_p = \|\widehat{K}_t f\|_q / \|f\|_p$ , o que implica a igualdade entre os supremos em (3.14).

**Passo 2.** A quantidade  $\mu_t$  é finita.

De fato, como

$$\begin{aligned}
|\widehat{K}_t f(x)| &\stackrel{3.5}{=} K_{-it} f(x) \\
&\stackrel{3.9}{=} \int_{\mathbb{R}} K(x, y, -it) f(y) dy \\
&\stackrel{3.7}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi(1 - (-it)^2)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-x^2 - (x(-it))^2 - y^2 - (y(-it))^2 + 4xy(-it)}{2(1 - (-it)^2)}\right) f(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + t^2)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-x^2 + (xt)^2 - y^2 + (yt)^2 - i4xyt}{2(1 + t^2)}\right) f(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + t^2)}} \exp\left(\frac{-x^2(1 - t^2)}{2(1 + t^2)}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{-y^2(1 - t^2)}{2(1 + t^2)} - \frac{i4xyt}{2(1 + t^2)}\right) f(y) dy \\
&\stackrel{3.8}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + t^2)}} \exp(-\theta x^2) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\theta y^2 - \frac{i4xyt}{2(1 + t^2)}\right) f(y) dy \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + t^2)}} e^{-x^2\theta} \int_{\mathbb{R}} |e^{-y^2\theta} f(y)| dy \\
&\stackrel{1.31}{\leq} \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + t^2)}} e^{-x^2\theta} \left( \int_{\mathbb{R}} |e^{-y^2\theta}|^q dx \right)^{1/q} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \right)^{1/p} \\
&\stackrel{2.6}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + t^2)}} e^{-x^2\theta} \left( \frac{\pi}{q\theta} \right)^{1/(2q)} \|f\|_p
\end{aligned}$$

$$= L\|f\|_p e^{-\theta x^2}, \quad \text{com } L = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} \left(\frac{\pi}{q\theta}\right)^{1/(2q)} < \infty, \quad (3.15)$$

então  $\|\widehat{K_t f}\|_q^q \stackrel{3.15}{\leq} L^q \|f\|_p^q \int_{\mathbb{R}} e^{-q\theta x^2} dx \stackrel{2.6}{=} L^q \|f\|_p^q \sqrt{\pi/(\theta q)}$ . Dessa forma, dada  $\|f\|_p \leq 1$ , vale  $\|\widehat{K_t f}\|_q^q \leq L^q \sqrt{\pi/(\theta q)} < \infty$ . Tomando o supremo sobre  $\{f \in L^p : \|f\|_p \leq 1\}$ , vemos que  $\mu_t^q \leq L^q \sqrt{\pi/(\theta q)} < \infty$ .

**Passo 3.** Existe uma função  $f \in L^p$  para a qual vale a igualdade em (3.13).

De fato, por definição de supremo existe alguma sequência  $(f_n)$  em  $L^p$  com  $\|f_n\|_p = 1$  para todo  $n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{K_t f_n}\|_q = \mu_t < \infty$ . Claramente  $\sup_n \|f_n\|_p = 1 < \infty$ , logo pelo Teorema 1.2.15 a sequência  $(f_n)$  admite alguma subsequência fracamente convergente em  $L^p$ , digamos  $f_{n_j} \rightarrow F \in L^p$  fracamente em  $L^p$ . Como  $K_t : L^p \rightarrow L^p$  é operador completamente contínuo, então  $K_t f_{n_j} \rightarrow K_t F$  fortemente em  $L^p$ :  $\|K_t(f_{n_j} - F)\|_p \rightarrow 0$ . Segue daí e da desigualdade de Hausdorff-Young que  $\widehat{K_t f_{n_j}} \rightarrow \widehat{K_t F}$  fortemente em  $L^q$ , pois  $\|\widehat{K_t f_{n_j}} - \widehat{K_t F}\|_q = \|\widehat{K_t}(f_{n_j} - F)\|_q \stackrel{2.3.3}{\leq} \|K_t(f_{n_j} - F)\|_p \rightarrow 0$ . Agora, pelo Teorema 1.2.10,  $(\widehat{K_t f_{n_j}})$  admite alguma subsequência  $(\widehat{K_t f_{n_{j_r}}})$  tal que  $\widehat{K_t f_{n_{j_r}}} \rightarrow \widehat{K_t F}$  em quase todo ponto. Como  $\|f_{n_{j_r}}\|_p = 1$  por hipótese, então  $|\widehat{K_t f_{n_{j_r}}}| \stackrel{3.15}{\leq} L e^{-\theta x^2}$ ; logo  $|\widehat{K_t f_{n_{j_r}}}|^q \leq L e^{-q\theta x^2}$  pontualmente com  $L e^{-q\theta x^2} \in L^1$ ; assim, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada e concluir

$$\begin{aligned} \|\widehat{K_t F}\|_q &= \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t F}(y)|^q dy \right)^{1/q} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} \lim_{r \rightarrow \infty} |\widehat{K_t f_{n_{j_r}}}(y)|^q dy \right)^{1/q} \\ &= \left( \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f_{n_{j_r}}}(y)|^q dy \right)^{1/q} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f_{n_{j_r}}}(y)|^q dy \right)^{1/q} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \|\widehat{K_t f_{n_{j_r}}}\|_q \\ &= \mu_t. \end{aligned}$$

□

## 3.2 Equações integrais para os extremizantes

Agora deduzimos equações integrais que são satisfeitas pelas função extremizantes, isto é, funções que realizam o supremo  $\mu_t$  descrito no Teorema 3.1.5. A partir dessas equações, definimos funções auxiliares com relações especiais de simetria e crescimento.

A equação integral a seguir é fundamental para esta seção. A ideia da demonstração é baseada no método variacional das equações de Euler-Lagrange de um funcional.

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $f \in L^p$  com  $\|f\|_{L^p} = 1$  uma função que realiza o supremo (3.13). Então vale a seguinte equação integral*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} K_t \{|K_t f(y)|^{q-2} K_t f(y)\} e^{ixy} dy = \mu^q |f(x)|^{p-2} f(x). \quad (3.16)$$

*Demonstração.* Para cada  $h \in L^p$  e cada  $\epsilon \geq 0$ , consideramos a quantidade

$$\varphi(h, \epsilon) = \frac{\|\widehat{K_t f^\epsilon}\|_q}{\|f^\epsilon\|_p}, \quad \text{sendo } f^\epsilon(x) = f(x) + \epsilon h(x),$$

e observamos que a hipótese sobre  $f$  implica

$$\varphi(h, \epsilon) = \frac{\|\widehat{K_t f^\epsilon}\|_q}{\|f^\epsilon\|_p} \leq \frac{\|\widehat{K_t f}\|_q}{\|f\|_p} = \varphi(h, 0) = \mu_t.$$

Como essa estimativa independe da função  $h$ , vamos suprimir a dependência dela.

Seja agora o funcional  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\varphi(\epsilon) = \frac{\|\widehat{K_t f^\epsilon}\|_q}{\|f^\epsilon\|_p}, \quad (3.17)$$

com  $h \in L^p$  arbitrária e fixada. Claramente  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \varphi(\epsilon) = \varphi(0) = \mu_t$ ; e como  $\epsilon = 0$  é um máximo global de  $\varphi$ , então se  $\varphi$  for diferenciável em  $\epsilon = 0$  devemos ter formalmente

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'(0) \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \varphi(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{\left. \frac{d}{d\epsilon} \|\widehat{K_t f^\epsilon}\|_q \right|_{\epsilon=0} \cdot \left. \|f^\epsilon\|_p \right|_{\epsilon=0} - \|\widehat{K_t f}\|_q \left|_{\epsilon=0} \cdot \left. \frac{d}{d\epsilon} \|f^\epsilon\|_p \right|_{\epsilon=0}}{\left. \|f^\epsilon\|_p^2 \right|_{\epsilon=0}} \\ &= \frac{\left. \frac{d}{d\epsilon} \|\widehat{K_t f^\epsilon}\|_q \right|_{\epsilon=0} \cdot \|f\|_p - \|\widehat{K_t f}\|_q \cdot \left. \frac{d}{d\epsilon} \|f^\epsilon\|_p \right|_{\epsilon=0}}{\|f\|_p^2} \\ &= \frac{\left. \frac{d}{d\epsilon} \|\widehat{K_t f^\epsilon}\|_q \right|_{\epsilon=0} \cdot 1 - \mu_t \cdot \left. \frac{d}{d\epsilon} \|f^\epsilon\|_p \right|_{\epsilon=0}}{1^2} \\ &= \underbrace{\left. \frac{d}{d\epsilon} \|\widehat{K_t f^\epsilon}\|_q \right|_{\epsilon=0}}_{\text{(I)}} - \mu_t \cdot \underbrace{\left. \frac{d}{d\epsilon} \|f^\epsilon\|_p \right|_{\epsilon=0}}_{\text{(II)}}. \end{aligned}$$

Para verificarmos que  $\varphi$  é de fato diferenciável em  $\epsilon = 0$ , basta calcularmos explicitamente (I) e (II). Com o Teorema da Convergência Dominada, podemos passar a derivada com respeito à variável  $\epsilon$  para dentro da integral pois a variável de integração não é  $\epsilon$ . Assim,

$$\text{(I)} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f^\epsilon}(y)|^q dy \right)^{1/q} \right|_{\epsilon=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{q} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f^\epsilon}(y)|^q dy \right)^{1/q-1} \Big|_{\epsilon=0} \frac{d}{d\epsilon} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f^\epsilon}(y)|^q dy \Big|_{\epsilon=0} \\
&= \frac{1}{q} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f}(y)|^q dy \right)^{(1-q)/q} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\epsilon} |\widehat{K_t f^\epsilon}(y)|^q \Big|_{\epsilon=0} dy \\
&= \frac{1}{q} \|\widehat{K_t f}\|_q^{1-q} \int_{\mathbb{R}} q |\widehat{K_t f^\epsilon}(y)|^{q-1} \Big|_{\epsilon=0} \frac{d}{d\epsilon} |\widehat{K_t f^\epsilon}(y)| \Big|_{\epsilon=0} dy \\
&= \mu_t^{1-q} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f}(y)|^{q-1} \frac{d}{d\epsilon} \sqrt{\widehat{K_t f^\epsilon}(y) \overline{\widehat{K_t f^\epsilon}(y)}} \Big|_{\epsilon=0} dy \\
&= \mu_t^{1-q} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f}(y)|^{q-1} \frac{1}{2\sqrt{\widehat{K_t f^\epsilon}(y) \overline{\widehat{K_t f^\epsilon}(y)}}} \Big|_{\epsilon=0} \frac{d}{d\epsilon} \widehat{K_t f^\epsilon}(y) \overline{\widehat{K_t f^\epsilon}(y)} \Big|_{\epsilon=0} dy \\
&= \mu_t^{1-q} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f}(y)|^{q-1} \frac{1}{2|\widehat{K_t f}(y)|} [\widehat{K_t h}(y) (\overline{\widehat{K_t f}(y) + \epsilon \widehat{K_t h}(y)}) \\
&\quad + (\widehat{K_t f}(y) + \epsilon \widehat{K_t h}(y)) \overline{\widehat{K_t h}(y)}] \Big|_{\epsilon=0} dy \\
&= \mu_t^{1-q} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f}(y)|^{q-1} \frac{1}{2|\widehat{K_t f}(y)|} (\widehat{K_t h}(y) \overline{\widehat{K_t f}(y)} + \widehat{K_t f}(y) \overline{\widehat{K_t h}(y)}) dy \\
&= \mu_t^{1-q} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f}(y)|^{q-2} \operatorname{Re}(\widehat{K_t f}(y) \overline{\widehat{K_t h}(y)}) dy,
\end{aligned}$$

e de modo análogo, substituindo  $\widehat{K_t f}(y)$  e  $\widehat{K_t h}(y)$  por  $f(x)$  e  $h(x)$  respectivamente,

$$(II) = \|f\|_p^{1-p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p-2} \operatorname{Re}(f(x) \overline{h(x)}) dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p-2} \operatorname{Re}(f(x) \overline{h(x)}) dx.$$

Isso mostra que as derivadas (I) e (II) existem. Logo em  $\epsilon = 0$ , temos

$$\begin{aligned}
0 &= (I) - \mu_t(II) \\
&= \mu_t^{1-q} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f}(y)|^{q-2} \operatorname{Re}(\widehat{K_t f}(y) \overline{\widehat{K_t h}(y)}) dy - \mu_t \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p-2} \operatorname{Re}(f(x) \overline{h(x)}) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f}(y)|^{q-2} \operatorname{Re}(\widehat{K_t f}(y) \overline{\widehat{K_t h}(y)}) dy - \mu_t^q \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p-2} \operatorname{Re}(f(x) \overline{h(x)}) dx \\
&= \operatorname{Re} \left( \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f}(y)|^{q-2} \widehat{K_t f}(y) \overline{\widehat{K_t h}(y)} dy}_{(III)} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mu_t^q |f(x)|^{p-2} f(x) \overline{h(x)} dx}_{(IV)} \right).
\end{aligned}$$

Agora, a equação (3.12) implica

$$\begin{aligned}
(III) &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f}(y)|^{q-2} \widehat{K_t f}(y) \overline{\widehat{K_t h}(y)} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K_t f}(y)|^{q-2} \widehat{K_t f}(y) \widehat{K_t h}(y) dy \\
&\stackrel{3.12}{=} \int_{\mathbb{R}} \widehat{K_t} \{ |\widehat{K_t f}(x)|^{q-2} \widehat{K_t f}(x) \} h(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} K_t \{ |\widehat{K_t f}(y)|^{q-2} \widehat{K_t f}(y) \} e^{-iyx} dy \right) h(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{K_t\{|\widehat{K}_t f(y)|^{q-2} \widehat{K}_t f(y)\} e^{iyx} dy} \right) \overline{h(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} K_t\{|\widehat{K}_t f(y)|^{q-2} \widehat{K}_t f(y)\} e^{iyx} dy \right) \overline{h(x)} dx,
\end{aligned}$$

sendo que essa última igualdade segue de observar que  $K(x, y, t) \stackrel{3.3}{\in} \mathbb{R}$  e

$$\overline{K_t\{g(y)\}} = \overline{\int_{\mathbb{R}} K(x, y, t) g(x) dx} = \int_{\mathbb{R}} \overline{K(x, y, t)} g(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y, t) g(x) = K_t g(y).$$

Portanto

$$\begin{aligned}
0 &= \text{Re}(\text{III}) - (\text{IV}) \\
&= \text{Re} \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} K_t\{|\widehat{K}_t f(y)|^{q-2} \widehat{K}_t f(y)\} e^{iyx} dy \right) \overline{h(x)} dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p-2} f(x) \overline{h(x)} dx \right) \\
&= \text{Re} \left( \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} K_t\{|\widehat{K}_t f(y)|^{q-2} \widehat{K}_t f(y)\} e^{iyx} dy - \mu_t^q |f(x)|^{p-2} f(x) \right] \overline{h(x)} dx \right),
\end{aligned}$$

e como  $h$  é arbitrária, então podemos concluir que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} K_t\{|\widehat{K}_t f(y)|^{q-2} \widehat{K}_t f(y)\} e^{iyx} dy - \mu_t^q |f(x)|^{p-2} f(x) = 0.$$

□

Com essa igualdade, definimos duas funções inteiras com propriedades especiais.

**Teorema 3.2.2.** *Seja  $f \in L^p$  com  $\|f\|_p = 1$  uma função que realiza o supremo (3.13).*

*Defina*

$$\varphi(x) = |f(x)|^{p-2} f(x), \quad (3.18)$$

e

$$\psi(x) = \widehat{K}_t f(x); \quad (3.19)$$

e para  $0 < t < 1$  fixo considere

$$\tau = \frac{2t}{1+t^2}. \quad (3.20)$$

Então  $\varphi$  e  $\psi$  podem ser estendidas a funções inteiras e valem as igualdades

$$\mu_t^q \varphi(z) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\psi(u)|^{q-2} \psi(u) \exp(-\theta z^2 - \theta u^2 + i\tau zu) du, \quad (3.21)$$

e

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(u)|^{q-2} \varphi(u) \exp(-\theta z^2 - \theta u^2 - i\tau zu) du. \quad (3.22)$$

Além disso,  $\varphi$  e  $\psi$  têm ordem de crescimento  $\leq 2$  e, para cada  $z = x + iy$  fixado, valem as estimativas

$$|\varphi(x + iy)| \leq \mu_t^{-1} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t} \left(\frac{\pi}{q\theta}\right)^{1/q}} e^{-\theta x^2 + (\theta + \frac{ty}{4\theta})y^2}, \quad (3.23)$$

e

$$|\psi(x + iy)| \leq \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t} \left(\frac{\pi}{q\theta}\right)^{1/q}} e^{-\theta x^2 + (\theta + \frac{\tau^2}{4\theta})y^2}. \quad (3.24)$$

*Demonstração.* Como

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2t\pi \frac{(1+t^2)}{2t}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2t\pi}{\tau}}} = \sqrt{\frac{\tau}{2t\pi}}, \quad (3.25)$$

então

$$\begin{aligned} K(x, u, -it) &\stackrel{3.7}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi(1-(-it)^2)}} \exp\left(\frac{-x^2 - (x(-it))^2 - u^2 - (u(-it))^2 + 4xu(-it)}{2(1-(-it)^2)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} \exp\left(\frac{-x^2 + (xt)^2 - u^2 + (ut)^2 - 4xuti}{2(1+t^2)}\right) \\ &\stackrel{3.25}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2t\pi}} \exp\left(-x^2 \frac{(1-t^2)}{2(1+t^2)} - u^2 \frac{(1-t^2)}{2(1+t^2)} - i xu \frac{2t}{(1+t^2)}\right) \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{2t\pi}} \exp(-\theta x^2 - \theta u^2 - i\tau xu). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Observe também que

$$\begin{aligned} f(x) &= |f(x)|^0 f(x) \\ &\stackrel{1.30}{=} |f(x)|^{qp-q-p} f(x) \\ &= |f(x)|^{(qp-2q-2p+4)+(q-2)+(p-2)} f(x) \\ &= |f(x)|^{(q-2)(p-2)+(q-2)+(q-2)} f(x) \\ &= |f(x)|^{(q-2)(p-2)} |f(x)|^{q-2} |f(x)|^{p-2} f(x) \\ &= (|f(x)|^{p-2} |f(x)|)^{q-2} |f(x)|^{p-2} f(x) \\ &\stackrel{3.18}{=} |\varphi(x)|^{q-2} \varphi(x). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Logo vale a igualdade (3.22), pois

$$\begin{aligned} \psi(x) &\stackrel{3.19}{=} \widehat{K_t} f(x) \\ &\stackrel{3.27}{=} \widehat{K_t} \{|\varphi(x)|^{q-2} \varphi(x)\} \\ &\stackrel{3.5}{=} K_{-it} \{|\varphi(x)|^{q-2} \varphi(x)\} \\ &\stackrel{3.4}{=} \int_{\mathbb{R}} K(x, u, -it) |\varphi(u)|^{q-2} \varphi(u) du \end{aligned}$$

$$\stackrel{3.26}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2t\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(u)|^{q-2} \varphi(u) \exp\left(-\theta x^2 - \theta u^2 - i\tau x u\right) du. \quad (3.28)$$

Para verificarmos a desigualdade (3.24), fixamos  $x + iy = z \in \mathbb{C}$  e observamos que

$$\begin{aligned} \exp\left(-\theta z^2 - \theta u^2 - i\tau z u\right) &= e^{-\theta(x+iy)^2 - \theta u^2 - i\tau(x+iy)u} \\ &= e^{-\theta[(x^2-y^2+i2xy)] - \theta u^2 - i\tau(x+iy)u} \\ &= e^{-\theta(x^2-y^2) - \theta u^2 + \tau y u + i(-\theta 2xy - \tau x u)}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

assim, usando em \* a igualdade  $\|\{|\varphi|^{q-2}\varphi\}\|_p \stackrel{3.27}{=} \|f\|_p = 1$ ,

$$\begin{aligned} |\psi(z)| &\stackrel{3.28}{\leq} \sqrt{\frac{\tau}{2t\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| |\varphi(u)|^{q-2} \varphi(u) \exp\left(-\theta z^2 - \theta u^2 - i\tau z u\right) \right| du \\ &\stackrel{1.31}{\leq} \sqrt{\frac{\tau}{2t\pi}} \left\| \left\| |\varphi(u)|^{q-2} \varphi(u) \right\|_p \right\| \left\| \exp\left(-\theta z^2 - \theta u^2 - i\tau z u\right) \right\|_q \\ &\stackrel{3.29}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2t\pi}} \left\| \left\| |\varphi(u)|^{q-2} \varphi(u) \right\|_p \right\| \left\| e^{-\theta(x^2-y^2) - \theta u^2 + \tau y u + i(-\theta 2xy - \tau x u)} \right\|_q \\ &\stackrel{*}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2t\pi}} e^{-\theta(x^2-y^2)} \left\| e^{-\theta u^2 + \tau y u} \right\|_q \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{2t\pi}} e^{-\theta(x^2-y^2)} \left\| e^{(-\theta u^2 + \tau y u - \frac{(ty)^2}{4\theta}) + \frac{(ty)^2}{4\theta}} \right\|_q \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{2t\pi}} e^{-\theta(x^2-y^2) + \frac{(ty)^2}{4\theta}} \left\| e^{-(\sqrt{\theta}u - \frac{\tau y}{2\sqrt{\theta}})^2} \right\|_q \\ &\stackrel{2.6}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2t\pi}} e^{-\theta x^2 + (\theta + \frac{\tau^2}{4\theta})y^2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{q\theta}} \right)^{1/q} \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t} \left( \frac{\pi}{q\theta} \right)^{1/q}} e^{-\theta x^2 + (\theta + \frac{\tau^2}{4\theta})y^2}. \end{aligned}$$

Essa estimativa mostra que as integrais que definem a parte real e imaginária de  $\psi$  convergem, pois são majoradas por  $|\psi(z)|$ , que é finito para cada  $z \in \mathbb{C}$  fixado. Consequentemente, a função  $\psi$  está bem definida em  $\mathbb{C}$ , e além disso ela é inteira em virtude do Teorema da Convergência Dominada:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz} \psi(z) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(z+h) - \psi(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\mathbb{R}} |\varphi(u)|^{q-2} \varphi(u) e^{-\theta(z+h)^2 - \theta u^2 - i\tau(z+h)u} du - \int_{\mathbb{R}} |\varphi(u)|^{q-2} \varphi(u) e^{-\theta z^2 - \theta u^2 - i\tau z u} du \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\varphi(u)|^{q-2} \varphi(u) e^{-\theta u^2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( e^{-\theta(z+h)^2 - i\tau(z+h)u} - e^{-\theta z^2 - i\tau z u} \right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\varphi(u)|^{q-2} \varphi(u) e^{-\theta u^2} \frac{d}{dz} \left( e^{-\theta z^2 - i\tau z u} \right) du. \end{aligned}$$

Verificamos as propriedades da função  $\mu_t^q \varphi$  de modo análogo. Temos

$$\begin{aligned}
\mu_t^q \varphi(x) &\stackrel{3.18}{=} \mu_t^q |f(x)|^{p-2} f(x) \\
&\stackrel{3.16}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} K_t \{ |\widehat{K}_t f(y)|^{q-2} \widehat{K}_t f(y) \} e^{iyx} dy \\
&\stackrel{3.19}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} K_t \{ |\psi(y)|^{q-2} \psi(y) \} e^{-iy(-x)} dy \\
&= \widehat{K}_t \{ |\psi(-x)|^{q-2} \psi(-x) \} \\
&\stackrel{3.5}{=} K_{-it} \{ |\psi(-x)|^{q-2} \psi(-x) \} \\
&\stackrel{3.4}{=} \int_{\mathbb{R}} K(-x, u, -it) |\psi(u)|^{q-2} \psi(u) du \\
&\stackrel{3.26}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\psi(u)|^{q-2} \psi(u) \exp(-\theta(-x)^2 - \theta u^2 - i\tau(-x)u) du \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\psi(u)|^{q-2} \psi(u) \exp(-\theta x^2 - \theta u^2 + i\tau x u) du. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Além disso, para  $x + iy = z \in \mathbb{C}$  fixado,

$$\begin{aligned}
\exp(-\theta z^2 - \theta u^2 + i\tau z u) &= e^{-\theta(x+iy)^2 - \theta u^2 + i\tau(x+iy)u} \\
&= e^{-\theta[(x^2 - y^2) + i2xy] - \theta u^2 + i\tau x u - \tau y u} \\
&= e^{-\theta(x^2 - y^2) - \theta u^2 - \tau y u + i(-\theta 2xy + \tau x u)}, \tag{3.31}
\end{aligned}$$

logo, substituindo  $\|\psi^{q-1}\|_p^p \stackrel{3.19}{=} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K}_t f(u)|^{(q-1)p} du \stackrel{1.30}{=} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{K}_t f(u)|^q du = \|\widehat{K}_t f\|_q^q \stackrel{3.13}{=} \mu_t^q$  na igualdade \*\* a seguir, temos

$$\begin{aligned}
|\mu_t^q \varphi(x + iy)| &\stackrel{3.30}{\leq} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \left| |\psi(u)|^{q-2} \psi(u) \exp(-\theta z^2 - \theta u^2 + i\tau z u) \right| du \\
&\stackrel{1.31}{\leq} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \left\| \left\| |\psi(u)|^{q-2} \psi(u) \right\|_p \left\| \exp(-\theta z^2 - \theta u^2 + i\tau z u) \right\|_q \right\|_q \\
&\stackrel{3.31}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \left\| \left\| |\psi(u)|^{q-2} \psi(u) \right\|_p \left\| e^{-\theta(x^2 - y^2) - \theta u^2 - \tau y u + i(-\theta 2xy + \tau x u)} \right\|_q \right\|_q \\
&\stackrel{**}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \mu_t^{q/p} e^{-\theta(x^2 - y^2)} \left\| e^{-\theta u^2 - \tau y u - \frac{(ty)^2}{4\theta} + \frac{(ty)^2}{4\theta}} \right\|_q \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \mu_t^{q/p} e^{-\theta(x^2 - y^2) + \frac{(ty)^2}{4\theta}} \left\| e^{-(\sqrt{\theta}u + \frac{ty}{2\sqrt{\theta}})^2} \right\|_q \\
&\stackrel{2.6}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \mu_t^{q/p} e^{-\theta x^2 + (\theta + \frac{ty}{4\theta})y^2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{q\theta}} \right)^{1/q} \\
&= \mu_t^{q/p} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \left( \frac{\pi}{q\theta} \right)^{1/q} e^{-\theta x^2 + (\theta + \frac{ty}{4\theta})y^2},
\end{aligned}$$

que é a desigualdade (3.23), pois  $q/p - q \stackrel{1.30}{=} (q-1) - q$ . Finalmente, a função  $\varphi(z)$  está bem definida em  $\mathbb{C}$ , é inteira e vale

$$\frac{d}{dz}\varphi(z) = \mu_t^{-1} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\psi(u)|^{q-2} \psi(u) e^{\theta u^2} \frac{d}{dz} \exp(-\theta x^2 + i\tau x u) du.$$

□

Finalizamos esta Seção deduzindo duas desigualdades com propriedades especiais.

**Teorema 3.2.3.** *Assuma que  $f \in L^p$  com  $\|f\|_{L^p} = 1$  realiza o supremo (3.13). Seja  $A$  a raiz positiva da equação*

$$A^2 + \frac{p\theta}{\tau} A - \frac{p}{4q} = 0, \quad (3.32)$$

e considere

$$\tilde{A} = \tau A + \theta. \quad (3.33)$$

Defina as funções inteiras

$$\xi(z) = e^{\tilde{A}z^2} \varphi(z), \quad (3.34)$$

e

$$\eta(z) = e^{\tilde{A}z^2} \psi(z). \quad (3.35)$$

Então para cada  $z = x + iy$  fixo, valem as desigualdades

$$\mu_t^{q-1} \|e^{-\tilde{A}v^2} \xi(v+z)\|_q \leq \|e^{-\tilde{A}u^2} \eta(u+2Aiz)\|_q^{\frac{q}{2}} \|e^{-\tilde{A}u^2} \eta(u-2Ai\bar{z})\|_q^{\frac{q(2-p)}{2p}}, \quad (3.36)$$

e

$$\|e^{-\tilde{A}v^2} \eta(v+2iAz)\|_q \leq \mu_t \|e^{-\tilde{A}u^2} \xi(u+4A^2z)\|_q^{\frac{q}{2}} \|e^{-\tilde{A}u^2} \xi(u+4A^2\bar{z})\|_q^{\frac{q(2-p)}{2p}}. \quad (3.37)$$

*Demonstração.* A prova está dividida em passos. Primeiro, reescrevemos de maneira conveniente  $\xi$  e  $\eta$  em termos de  $\varphi$  e  $\psi$  (passos 1-4). Em seguida, aplicamos o Teorema de Cauchy para reescrever as equações obtidas (passo 5) e concluímos aplicando a desigualdade de Hölder e usando estimativas obtidas anteriormente (passos 6 e 7).

**Passo 1.** Valem as igualdades

$$\mu_t^q e^{-\tau Az^2} \xi(z) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\eta(u)|^{q-2} \eta(u) e^{i\tau zu} du, \quad (3.38)$$

e

$$e^{-\tau Az^2} \eta(z) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\xi(u)|^{q-2} \xi(u) e^{-i\tau zu} du. \quad (3.39)$$

De fato, comparamos

$$\mu_t^q \varphi(z) \stackrel{3.34}{=} \mu_t^q e^{-\tilde{A}z^2} \xi(z) \stackrel{3.33}{=} \mu_t^q e^{-(\tau A + \theta)z^2} \xi(z) = \mu_t^q e^{-\tau Az^2 - \theta z^2} \xi(z) \quad (3.40)$$

com

$$\begin{aligned}
\mu_t^q \varphi(z) &\stackrel{3.21}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\psi(u)|^{q-2} \psi(u) e^{-\theta z^2 - \theta u^2 + i\tau z u} du \\
&\stackrel{3.35}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\eta(u) e^{-\tilde{A}u^2}|^{q-2} \eta(u) e^{-\tilde{A}u^2} e^{-\theta z^2 - \theta u^2 + i\tau z u} du \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\eta(u)|^{q-2} \eta(u) e^{-\tilde{A}u^2(q-1)} e^{-\theta z^2 - \theta u^2 + i\tau z u} du.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Note que

$$\begin{aligned}
-\tilde{A}u^2(q-1) - \theta u^2 &= \frac{-\tau}{4A} u^2 \stackrel{3.33}{\iff} -(\tau A + \theta)(q-1) - \theta = \frac{-\tau}{4A} \\
&\stackrel{1.30}{\iff} -(\tau A + \theta) \frac{q}{p} - \theta = \frac{-\tau}{4A} \\
&\iff -\tau A \frac{q}{p} - \theta \frac{q}{p} - \theta = \frac{-\tau}{4A} \\
&\iff -\tau A \frac{q}{p} - \theta \left( \frac{q+p}{p} \right) = \frac{-\tau}{4A} \\
&\stackrel{3.33}{\iff} -\tau A \frac{q}{p} - \theta \left( \frac{qp}{p} \right) = \frac{-\tau}{4A} \\
&\iff \frac{Ap}{\tau q} \left[ -\tau A \frac{q}{p} - \theta q \right] = \frac{Ap}{\tau q} \left[ \frac{-\tau}{4A} \right] \\
&\iff -A^2 - \frac{p\theta}{\tau} A = \frac{-p}{4q},
\end{aligned} \tag{3.42}$$

o que é válido pela hipótese sobre  $A$  em (3.32). Assim, a equação (3.38) segue de igualarmos as expressões para  $\mu_t \varphi$  em (3.40) e (3.41), e eliminarmos o fator comum  $e^{-\theta z^2}$ :

$$\begin{aligned}
\mu_t^q e^{-\tau A z^2} \xi(z) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\eta(u)|^{q-2} \eta(u) e^{-\tilde{A}u^2(q-1)} e^{-\theta u^2 + i\tau z u} du \\
&\stackrel{3.42}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\eta(u)|^{q-2} \eta(u) e^{-\frac{\tau}{4A} u^2 + i\tau z u} du.
\end{aligned}$$

Deduzimos a equação (3.39) de modo análogo, comparando

$$\psi(z) \stackrel{3.35}{=} e^{-\tilde{A}z^2} \eta(z) \stackrel{3.33}{=} e^{-(\tau A + \theta)z^2} \eta(z) = e^{-\tau A z^2 - \theta z^2} \eta(z)$$

com

$$\begin{aligned}
\psi(z) &\stackrel{3.22}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(u)|^{q-2} \varphi(u) e^{-\theta z^2 - \theta u^2 - i\tau z u} du \\
&\stackrel{3.34}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\xi(u) e^{-\tilde{A}u^2}|^{q-2} \xi(u) e^{-\tilde{A}u^2} e^{-\theta z^2 - \theta u^2 - i\tau z u} du \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |\xi(u)|^{q-2} \xi(u) e^{-\tilde{A}u^2(q-1)} e^{-\theta z^2 - \theta u^2 - i\tau z u} du,
\end{aligned}$$

eliminando o fator comum  $e^{\theta z^2}$  de ambos os lados e observando a relação (3.42).

**Passo 2.** Valem as desigualdades

$$|\xi(x + iy)| \leq C_1 \exp \left\{ \tau Ax^2 + \left( \frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A \right) y^2 \right\}, \text{ com } C_1 = \mu_t^{-1} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t} \left( \frac{\pi}{\theta p} \right)^{1/p}}, \quad (3.43)$$

e

$$|\eta(x + iy)| \leq C_2 \exp \left\{ \tau Ax^2 + \left( \frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A \right) y^2 \right\}, \text{ com } C_2 = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t} \left( \frac{\pi}{\theta q} \right)^{1/q}}. \quad (3.44)$$

De fato, a desigualdade (3.43) segue de

$$\begin{aligned} |\xi(x + iy)| &\stackrel{3.34}{=} |e^{\tilde{A}(x+iy)^2} \varphi(x + iy)| \\ &\stackrel{3.33}{=} |e^{(\tau A + \theta)[x^2 - y^2 + i2xy]} \varphi(x + iy)| \\ &\stackrel{3.23}{\leq} \left| e^{(\tau A + \theta)[(x^2 - y^2) + i2xy]} \mu_t^{-1} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t} \left( \frac{\pi}{q\theta} \right)^{1/q}} e^{-\theta x^2 + (\theta + \frac{\tau^2}{4\theta})y^2} \right| \\ &= \mu_t^{-1} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t} \left( \frac{\pi}{q\theta} \right)^{1/q}} e^{\tau Ax^2 + (\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A)y^2}, \end{aligned}$$

e a desigualdade (3.44) segue de

$$\begin{aligned} |\eta(x + iy)| &\stackrel{3.35}{=} |e^{\tilde{A}(x+iy)^2} \psi(x + iy)| \\ &\stackrel{3.33}{=} |e^{(\tau A + \theta)[x^2 - y^2 + i2xy]} \psi(x + iy)| \\ &\stackrel{3.24}{\leq} \left| e^{(\tau A + \theta)[(x^2 - y^2) + i2xy]} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t} \left( \frac{\pi}{q\theta} \right)^{1/q}} e^{-\theta x^2 + (\theta + \frac{\tau^2}{4\theta})y^2} \right| \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t} \left( \frac{\pi}{q\theta} \right)^{1/q}} e^{\tau Ax^2 + (\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A)y^2}. \end{aligned}$$

**Passo 3.** Valem as igualdades

$$\mu_t^q e^{-\tau Ax^2} \xi(x + iy) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\eta(u - 2Ay)|^{q-2} \eta(u - 2Ay) e^{i\tau xu} du, \quad (3.45)$$

e

$$e^{-\tau Ax^2} \eta(x + iy) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\xi(u + 2Ay)|^{q-2} \xi(u + 2Ay) e^{-i\tau xu} du. \quad (3.46)$$

De fato, como

$$\begin{aligned} \mu_t^q e^{-\tau A(x+iy)^2} \xi(x + iy) &\stackrel{3.38}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\eta(u)|^{q-2} \eta(u) e^{i\tau(x+iy)u} du \\ \implies \mu_t^q e^{-\tau A[(x^2 - y^2) + i2xy]} \xi(x + iy) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\eta(u)|^{q-2} \eta(u) e^{i\tau xu - \tau y u} du \\ \implies \mu_t^q e^{-\tau Ax^2} \xi(x + iy) e^{\tau Ay^2 - i\tau A2xy} &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\eta(u)|^{q-2} \eta(u) e^{i\tau xu - \tau y u} du, \quad (3.47) \end{aligned}$$

então a substituição  $u = u - 2Ay$  implica que a integral do lado direito de (3.47) é

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}(u-2Ay)^2} |\eta(u-2Ay)|^{q-2} \eta(u-2Ay) e^{i\tau x(u-2Ay) - \tau y(u-2Ay)} du \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}[u^2 - 4uAy + 4A^2y^2]} |\eta(u-2Ay)|^{q-2} \eta(u-2Ay) e^{i\tau xu - i\tau x2Ay - \tau yu + \tau 2Ay^2} du \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\eta(u-2Ay)|^{q-2} \eta(u-2Ay) e^{i\tau xu} e^{\frac{-\tau}{4A}[-4uAy + 4A^2y^2] - i\tau x2Ay - \tau yu + \tau 2Ay^2} du \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\eta(u-2Ay)|^{q-2} \eta(u-2Ay) e^{i\tau xu} e^{\tau yu - \tau Ay^2 - i\tau x2Ay - \tau yu + \tau 2Ay^2} du \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\eta(u-2Ay)|^{q-2} \eta(u-2Ay) e^{i\tau xu} e^{\tau Ay^2 - i\tau A2xy} du. \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Logo a igualdade (3.45) segue de igualarmos (3.47) com (3.48) e eliminarmos o fator em comum  $e^{\tau Ay^2 - i\tau A2xy}$  de ambos os lados. Deduzimos a igualdade (3.46) de modo análogo:

$$\begin{aligned}
&e^{-\tau A(x+iy)^2} \eta(x+iy) \stackrel{3.39}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\xi(u)|^{q-2} \xi(u) e^{-i\tau(x+iy)u} du \\
\implies e^{-\tau A[x^2 - y^2 + i2xy]} \eta(x+iy) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\xi(u)|^{q-2} \xi(u) e^{-i\tau xu + \tau yu} du \\
\implies e^{-\tau Ax^2} \eta(x+iy) e^{\tau Ay^2 - i\tau A2xy} &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\xi(u)|^{q-2} \xi(u) e^{-i\tau xu + \tau yu} du, \tag{3.49}
\end{aligned}$$

mas com a mudança de variáveis  $u = u + 2Ay$ , a integral do lado direito de (3.49) é

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}(u+2Ay)^2} |\xi(u+2Ay)|^{q-2} \xi(u+2Ay) e^{-i\tau x(u+2Ay) + \tau y(u+2Ay)} du \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}[u^2 + 4Auy + 4A^2y^2]} |\xi(u+2Ay)|^{q-2} \xi(u+2Ay) e^{-i\tau xu - i\tau 2Axy + \tau yu + 2\tau Ay^2} du \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\xi(u+2Ay)|^{q-2} \xi(u+2Ay) e^{-i\tau xu} e^{-\tau yu - \tau Ay^2 - i\tau 2Axy + \tau yu + 2\tau Ay^2} du \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\xi(u+2Ay)|^{q-2} \xi(u+2Ay) e^{-i\tau xu} e^{\tau Ay^2 - i\tau A2xy} du; \tag{3.50}
\end{aligned}$$

e a igualdade (3.46) segue de igualarmos (3.49) com (3.50) e eliminarmos  $e^{\tau Ay^2 - i\tau A2xy}$ .

**Passo 4.** Valem as igualdades

$$\mu_t^q e^{-\tau Av^2} \xi(v+z) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}(u-2Aix)^2} |\eta(u-2Ay)|^{q-2} \eta(u-2Ay) e^{i\tau v(u-2Aix)} du, \tag{3.51}$$

e

$$e^{-\tau Av^2} \eta(v+z) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}(u+2iAx)^2} |\xi(u+2Ay)|^{q-2} \xi(u+2Ay) e^{-i\tau v(u+2iAx)} du; \tag{3.52}$$

De fato, a igualdade (3.51) segue de substituirmos  $z$  por  $v+z = (v+x) + iy$  em (3.45):

$$\mu_t^q e^{-\tau A(v+x)^2} \xi(v+z) \stackrel{3.45}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\eta(u-2Ay)|^{q-2} \eta(u-2Ay) e^{i\tau(v+x)u} du$$

$$\begin{aligned}
\implies \mu_t^q e^{-\tau A[v^2+2vx+x^2]} \xi(v+z) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2+i\tau xu} |\eta(u-2Ay)|^{q-2} \eta(u-2Ay) e^{i\tau vu} du \\
\implies \mu_t^q e^{-\tau Av^2} \xi(v+z) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2+i\tau xu+\tau Ax^2} |\eta(u-2Ay)|^{q-2} \eta(u-2Ay) e^{i\tau vu+2\tau Avx} du \\
\implies \mu_t^q e^{-\tau Av^2} \xi(v+z) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}(u-2Aix)^2} |\eta(u-2Ay)|^{q-2} \eta(u-2Ay) e^{i\tau v(u-2Aix)} du,
\end{aligned}$$

e a igualdade (3.54) segue de substituirmos  $z$  por  $v+z=(v+x)+iy$  em (3.46):

$$\begin{aligned}
e^{-\tau A(v+x)^2} \eta(v+z) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\xi(u+2Ay)|^{q-2} \xi(u+2Ay) e^{-i\tau(v+x)u} du \\
\implies e^{-\tau A[v^2+2vx+x^2]} \eta(v+z) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2-i\tau xu} |\xi(u+2Ay)|^{q-2} \xi(u+2Ay) e^{-i\tau vu} du \\
\implies e^{-\tau Av^2} \eta(v+z) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2-i\tau xu+\tau Ax^2} |\xi(u+2Ay)|^{q-2} \xi(u+2Ay) e^{-i\tau vu+2\tau Avx} du \\
\implies e^{-\tau Av^2} \eta(v+z) &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}(u+2iAx)^2} |\xi(u+2Ay)|^{q-2} \xi(u+2Ay) e^{-i\tau v(u+2iAx)} du.
\end{aligned}$$

**Passo 5.** Considere as funções inteiras (pelo Corolário 1.1.3)  $\bar{\xi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n$  e  $\bar{\eta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n z^n$ , sendo  $\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  e  $\eta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  as representações em série de potências, respectivamente, de  $\xi$  e  $\eta$  em torno da origem. Então valem as igualdades

$$\mu_t^q e^{-\tau Av^2} \xi(v+z) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} [\eta(u+2Aiz)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\eta}(u+2Aiz)]^{\frac{q}{2}-1} e^{i\tau vu} du, \quad (3.53)$$

e

$$e^{-\tau Av^2} \eta(v+z) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} [\xi(u-2Aiz)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\xi}(u-2Aiz)]^{\frac{q}{2}-1} e^{-i\tau vu} du. \quad (3.54)$$

De fato, observamos primeiro que  $\bar{\xi}$  cumpre a desigualdade (3.43) pois

$$|\bar{\xi}(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\bar{z})^n \right| = |\eta(\bar{z})| \stackrel{3.43}{\leq} C_1 \exp \left\{ \tau Ax^2 + \left( \frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A \right) (-y)^2 \right\}, \quad (3.55)$$

e  $\bar{\eta}$  cumpre a desigualdade (3.44) pois

$$|\bar{\eta}(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n z^n \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\bar{z})^n \right| = |\eta(\bar{z})| \stackrel{3.44}{\leq} C_2 \exp \left\{ \tau Ax^2 + \left( \frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A \right) (-y)^2 \right\}. \quad (3.56)$$

Além disso, quando  $z = u$  é real,

$$\bar{\xi}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n u^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n u^n} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n} = \overline{\eta(u)}, \quad (3.57)$$

logo

$$[\xi(u)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\xi}(u)]^{\frac{q}{2}-1} \stackrel{3.57}{=} [\xi(u)]^{\frac{q}{2}} [\overline{\xi(u)}]^{\frac{q}{2}-1} = \frac{|\xi(u)|^q \xi(u)}{\xi(u)} = |\xi(u)|^{q-2} \xi(u), \quad u \in \mathbb{R}; \quad (3.58)$$

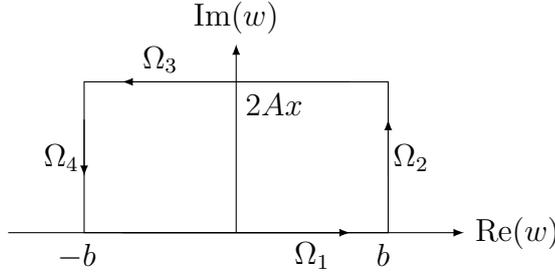
e pelo mesmo argumento,

$$[\eta(u)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\eta}(u)]^{\frac{q}{2}-1} = |\eta(u)|^{q-2} \eta(u), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (3.59)$$

Agora, vamos aplicar o Teorema de Cauchy para reescrever o lado direito de (3.51) e assim obter (3.53). Para isso, consideramos a função inteira

$$G(w) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} e^{-\frac{\tau}{4A}(w-2Aix)^2} [\eta(w-2Aiy)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\eta}(w-2Aiy)]^{\frac{q}{2}-1} e^{i\tau v(w-2Aix)}, \quad (3.60)$$

fixamos  $b > 0$  e integramos  $G$  sobre a curva  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$  indicada a seguir.



Como  $u \in [0, 1] \mapsto \alpha_2(u) = b + 2Aixu$  parametriza  $\Omega_2$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_2} G(w) dw \right| \\ & \leq 2iA|x| \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_0^1 \left| e^{-\frac{\tau}{4A}[b+2iAx(u-1)]^2} [\eta(b+2iAxu-2Aiy)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\eta}(b+2iAxu-2Aiy)]^{\frac{q}{2}-1} \right| du \\ & \leq 2A|x| \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{4A}[b^2-4A^2x^2(u-1)^2]} [C_2 e^{\tau A(b-2Aiy)^2 + (\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A)(2Aixu)^2}]^{q-1} du \quad (3.61) \\ & \stackrel{1.30}{=} 2A|x| \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{4A}[b^2-4A^2x^2(u^2-2u+1)]} [C_2 e^{\tau A(b-2Aiy)^2 + (\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A)4A^2x^2u^2}]^{\frac{q}{p}} du \\ & = \left( 2A|x| \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} C_2^{\frac{q}{p}} e^{\frac{\tau}{4A}4A^2x^2} \int_0^1 e^{u^2[\frac{\tau}{4A}4A^2x^2 + \frac{q}{p}(\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A)4A^2x^2] + u[-\frac{\tau}{4A}8A^2x]} du \right) e^{-b^2\frac{\tau}{4A} + \frac{q\tau}{p}A(b-2Aiy)^2}, \end{aligned}$$

sendo que (3.61) segue de usarmos (3.44) com  $x = b - 2Aiy$  e (3.56) com  $y = 2Aixu$ . Note que o termo entre parênteses nessa última igualdade é limitado por um constante  $R > 0$ , pois é da forma  $P_0 \int_0^1 e^{u^2P_1+uP_2} du$  com  $P_0, P_1, P_2$  constantes; além disso, a exponencial fora do parênteses é limitada pois

$$S := \left\{ \frac{\tau}{4A} \right\} - \tau A \frac{q}{p} \stackrel{3.42}{=} \left\{ (\tau A + \theta) \frac{q}{p} + \theta \right\} - \tau A \frac{q}{p} = \theta \frac{q}{p} + \theta \stackrel{3.8}{>} 0,$$

o que implica

$$e^{-b^2 \frac{\tau}{4A} + \frac{q\tau}{p} A(b-2Ay)^2} = e^{-b^2 \frac{\tau}{4A} + \frac{q\tau}{p} Ab^2 + Lb + M} = e^{-b^2 \left\{ \frac{\tau}{4A} \right\} - \tau A \frac{q}{p}} + bL + M} = e^{-b^2 S + bL + M}, \quad (3.62)$$

com  $L$  e  $M$  constantes. Isso mostra que

$$\left| \int_{\Omega_2} G(w) dw \right| < Re^{-b^2 S}, \quad \text{para } b \text{ suficientemente grande.} \quad (3.63)$$

Como  $u \in [0, 1] \mapsto \alpha_4(u) = -b + 2iAxu$  parametriza  $\Omega_4^-$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_4} G(w) dw \right| \\ &= \left| - \int_{\Omega_4^-} G(w) dw \right| \\ &\leq 2iA|x| \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_0^1 \left| e^{-\frac{\tau}{4A}[-b+2iAx(u-1)]^2} [\eta(-b+2iAxu-2Ay)]^{\frac{q}{2}} [\eta(-b+2iAxu-2Ay)]^{\frac{q}{2}-1} \right| du \\ &\stackrel{3.44}{\leq} 2A|x| \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{4A}[b^2-4A^2x^2(u-1)^2]} [C_2 e^{\tau A(-b-2Ay)^2 + (\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A)(2Axu)^2}]^{q-1} du \\ &\stackrel{1.30}{\equiv} 2A|x| \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{4A}[b^2-4A^2x^2(u^2-2u+1)]} [C_2 e^{\tau A(-b-2Ay)^2 + (\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A)4A^2x^2u^2}]^{\frac{q}{p}} du \\ &= \left( 2A|x| \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} C_2^{\frac{q}{p}} e^{\frac{\tau}{4A}4A^2x^2} \int_0^1 e^{u^2[\frac{\tau}{4A}4A^2x^2 + \frac{q}{p}(\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A)4A^2x^2] + u[-\frac{\tau}{4A}8A^2x]} du \right) e^{-b^2 \frac{\tau}{4A} + \frac{q\tau}{p} A(-b-2Ay)^2}; \end{aligned}$$

e de modo análogo à estimativa anterior, vemos que o termo em parênteses é limitado por  $R$  e a exponencial fora do parênteses é da forma (3.62). Logo

$$\left| \int_{\Omega_2} G(w) dw \right| < Re^{-b^2 S}, \quad \text{para } b \text{ suficientemente grande.} \quad (3.64)$$

Agora, como  $u \in \alpha_1 : [-b, b] \mapsto \alpha_1(u) = u$  parametriza  $\Omega_1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} G(w) dw &\stackrel{3.60}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int e^{-\frac{\tau}{4A}(u-2Aix)^2} [\eta(u-2Ay)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\eta}(u-2Ay)]^{\frac{q}{2}-1} e^{i\tau v(u-2Aix)} du \\ &\stackrel{3.59}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-b}^b e^{-\frac{\tau}{4A}(u-2Aix)^2} |\eta(u-2Ay)|^{q-2} \eta(u-2Ay) e^{i\tau v(u-2Aix)} du; \quad (3.65) \end{aligned}$$

e como  $u \in [-b, b] \mapsto \alpha_3(u) = u + 2Aix$  parametriza  $\Omega_3^-$ , então observando a relação  $(u + 2Aix) - 2Ay = u + 2iAz$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_3} G(w) dw &= - \int_{\Omega_3^-} G(w) dw \\ &\stackrel{3.60}{=} - \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-b}^b e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} [\eta(u+2Aiz)]^{\frac{q}{2}} [\eta(u+2Aiz)]^{\frac{q}{2}-1} e^{i\tau v u} du. \quad (3.66) \end{aligned}$$

Em vista das estimativas (3.63) e (3.64),

$$0 = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} G(w)dw = \int_{\Omega_4} G(w)dw,$$

logo pelo Teorema de Cauchy,

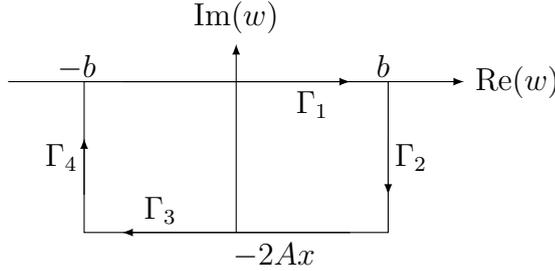
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} G(w)dw + \int_{\Omega_2} G(w)dw + \int_{\Omega_3} G(w)dw + \int_{\Omega_4} G(w)dw \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} G(w)dw + \int_{\Omega_4} G(w)dw. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Assim, a equação (3.53) segue de substituirmos (3.65) e (3.66) em (3.67).

Verificamos (3.54) de modo análogo, reescrevendo o lado direito de (3.52) e daí obtendo (3.54). Para isso, consideramos a função inteira

$$H(w) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} e^{-\frac{\tau}{4A}(w+2iAx)^2} [\xi(w+2Ay)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\xi}(w+2Ay)]^{\frac{q}{2}-1} e^{-i\tau v(w+2iAx)}, \quad (3.68)$$

fixamos  $b > 0$  e integramos  $H$  sobre a curva  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$  indicada a seguir.



Como  $u \in [0, 1] \mapsto \beta_2(u) = b - 2Aixu$  parametriza  $\Gamma_2$ ,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Gamma_2} H(w)dw \right| \\ &\leq 2iA|x| \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_0^1 \left| e^{-\frac{\tau}{4A}[b+2iAx(1-u)]^2} [\xi(b-2iAxu+2Ay)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\xi}(b-2iAxu+2Ay)]^{\frac{q}{2}-1} \right| du \\ &\stackrel{3.43}{\leq} 2A|x| \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{4A}[b^2-4A^2x^2(1-u)^2]} [C_1 e^{\tau A(b+2Ay)^2 + (\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A)(-2Axu)^2}]^{q-1} du \\ &\stackrel{1.30}{=} 2A|x| \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{4A}[b^2-4A^2x^2(u^2-2u+1)]} [C_1 e^{\tau A(b+2Ay)^2 + (\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A)4A^2x^2u^2}]^{\frac{q}{p}} du \\ &= \left( 2A|x| \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} C_1^{\frac{q}{p}} e^{\frac{\tau}{4A}4A^2x^2} \int_0^1 e^{u^2[\frac{\tau}{4A}4A^2x^2 + \frac{q}{p}(\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A)4A^2x^2] + u[-\frac{\tau}{4A}8A^2x]} du \right) e^{-b^2\frac{\tau}{4A} + \frac{q\tau}{p}A(b+2Ay)^2}, \end{aligned}$$

e de modo semelhante a  $G$ , deduzimos daí que existem constantes  $J, K > 0$  tais que

$$\left| \int_{\Gamma_2} H(w)dw \right| < J e^{-b^2K} \text{ e } \left| \int_{\Gamma_4} H(w)dw \right| < J e^{-b^2K} \text{ para } b \text{ suficientemente grande.} \quad (3.69)$$

Agora, como  $u \in [-b, b] \mapsto \beta_1(u) = u$  parametriza  $\Gamma_1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} H(w)dw &\stackrel{3.68}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-b}^b e^{-\frac{\tau}{4A}(u+2iAx)^2} [\xi(u+2Ay)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\xi}(u+2Ay)]^{\frac{q}{2}-1} e^{-i\tau v(u+2iAx)} du \\ &\stackrel{3.58}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-b}^b e^{-\frac{\tau}{4A}(u+2iAx)^2} \xi(u+2Ay)^{q-2} [\xi(u+2Ay)e^{-i\tau v(u+2iAx)}] du, \end{aligned} \quad (3.70)$$

e como  $u \in [-b, b] \mapsto \beta_3(u) = u - 2iAx$  parametriza  $\Gamma_3^-$  e  $(u - 2iAx) + 2Ay = u - 2iAz$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} H(w)dw &= - \int_{\Gamma_3^-} H(w)dw \\ &\stackrel{3.68}{=} - \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-b}^b e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} [\xi(u-2Aiz)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\xi}(u-2Aiz)]^{\frac{q}{2}-1} e^{-i\tau v u} du. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Logo (3.54) segue do Teorema de Cauchy, de observar (3.69), e de igualar (3.70) e (3.71).

**Passo 6.** Vale a desigualdade (3.36).

De fato, note que

$$\begin{aligned} \mu_t^q e^{-\tilde{A}v^2} \xi(v+z) &\stackrel{3.33}{=} \mu_t^q e^{-(\tau A + \theta)v^2} \xi(v+z) \\ &\stackrel{3.53}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} e^{-\theta v^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2 + \theta u^2} [\eta(u+2Aiz)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\eta}(u+2Aiz)]^{\frac{q}{2}-1} e^{-\theta u^2 + i\tau v u} du \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\frac{\tau}{4A} - \theta)u^2} [\eta(u+2Aiz)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\eta}(u+2Aiz)]^{\frac{q}{2}-1} e^{-\theta v^2 - \theta u^2 + i\tau v u} du \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\frac{\tau}{4A} - \theta)u^2} [\eta(u+2Aiz)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\eta}(u+2Aiz)]^{\frac{q}{2}-1} e^{-\theta(-v)^2 - \theta u^2 - i\tau(-v)u} du \\ &\stackrel{3.26}{=} \int_{\mathbb{R}} K(-v, u, -it) \{e^{-(\frac{\tau}{4A} - \theta)u^2} [\eta(u+2Aiz)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\eta}(u+2Aiz)]^{\frac{q}{2}-1}\} du \\ &\stackrel{3.4}{=} K_{-it} \{e^{-(\frac{\tau}{4A} - \theta)(-v)^2} [\eta(-v+2Aiz)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\eta}(-v+2Aiz)]^{\frac{q}{2}-1}\} \\ &\stackrel{3.5}{=} \underbrace{\widehat{K}_t \{e^{-(\frac{\tau}{4A} - \theta)(-v)^2} [\eta(-v+2Aiz)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\eta}(-v+2Aiz)]^{\frac{q-2}{2}}\}}_{r(v)}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

logo usando a desigualdade  $\|\widehat{K}_t r\|_q \stackrel{3.14}{\leq} \mu_t \|r\|_p$  para a função  $r(v)$  acima,

$$\begin{aligned} \mu_t^{q-1} \|e^{-\tilde{A}v^2} \xi(v+z)\|_q &\stackrel{3.72}{\leq} \left( \int_{\mathbb{R}} |e^{-(\frac{\tau}{4A} - \theta)v^2} [\eta(v+2Aiz)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\eta}(v+2Aiz)]^{\frac{q-2}{2}}|^p dv \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-p(\frac{\tau}{4A} - \theta)v^2} |\eta(v+2Aiz)|^{\frac{qp}{2}} |\bar{\eta}(v+2Aiz)|^{\frac{(q-2)p}{2}} dv \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-q\tilde{A}v^2} |\eta(v+2Aiz)|^{\frac{qp}{2}} |\eta(v-2Aiz)|^{\frac{(q-2)p}{2}} dv \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

sendo que a igualdade (3.73) segue de

$$\begin{aligned} p\left(\frac{\tau}{4A} - \theta\right) = q\tilde{A} &\stackrel{3.33}{\iff} p\left(\frac{\tau}{4A} - \theta\right) = q(\tau A + \theta) \\ &\iff 0 = qA\tau + \theta(q+p) - \frac{p\tau}{4A} \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{1.30}{\iff} 0 = qA\tau + \theta qp - \frac{p\tau}{4A} \\
&\iff 0 = \frac{q\tau}{A} \left[ A^2 + \frac{p\theta}{\tau}A - \frac{p}{4q} \right] \\
&\stackrel{3.32}{\iff} 0 = A^2 + \frac{p\theta}{\tau}A - \frac{p}{4q},
\end{aligned}$$

e

$$\left| \overline{\eta}(v + 2Aiz) \right| = \left| \overline{\overline{\eta}(v + 2Aiz)} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n}(v + 2Aiz)^n \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n(v - 2Ai\bar{z})^n \right| = \left| \eta(v - 2Ai\bar{z}) \right|. \quad (3.75)$$

Portanto, (3.36) segue da desigualdade de Hölder com expoentes  $r = 2/p$  e  $r' = 2/(2-p)$ :

$$\begin{aligned}
&\mu_t^{q-1} \|e^{-\tilde{A}v^2} \xi(v+z)\|_q \\
&\stackrel{3.73}{\leq} \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-q\tilde{A}v^2} |\eta(v+2Aiz)|^{\frac{qp}{2}} |\eta(v-2Ai\bar{z})|^{\frac{(q-2)p}{2}} dv \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (3.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-q\tilde{A}v^2(\frac{p}{2} + \frac{2-p}{2})} |\eta(v+2Aiz)|^{\frac{qp}{2}} |\eta(v-2Ai\bar{z})|^{\frac{(q-2)p}{2}} |dv \right\}^{1/p} \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}} [e^{-\frac{qp}{2}\tilde{A}v^2} |\eta(v+2Aiz)|^{\frac{qp}{2}}] [e^{-\frac{q(2-p)}{2}\tilde{A}v^2} |\eta(v-2Ai\bar{z})|^{\frac{(q-2)p}{2}}] dv \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\stackrel{1.31}{\leq} \left\{ \left[ \int_{\mathbb{R}} |e^{-\frac{qp}{2}\tilde{A}v^2} |\eta(v+2Aiz)|^{\frac{qp}{2}} |^{\frac{2}{p}} dv \right]^{\frac{p}{2}} \left[ \int_{\mathbb{R}} |e^{-\frac{q(2-p)}{2}\tilde{A}v^2} |\eta(v-2Ai\bar{z})|^{\frac{(q-2)p}{2}} |^{\frac{2}{2-p}} dv \right]^{\frac{2-p}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\{ \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{-q\tilde{A}v^2} |\eta(v+2Aiz)|^q dv \right]^{\frac{1}{q} \frac{qp}{2}} \left[ \int_{\mathbb{R}} e^{-q\tilde{A}v^2} |\eta(v-2Ai\bar{z})|^{\frac{(q-2)p}{2-p} \frac{q}{q}} dv \right]^{\frac{1}{q} \frac{q(2-p)}{2}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[ \int_{\mathbb{R}} |e^{-\tilde{A}v^2} [\eta(v+2Aiz)]|^q dv \right]^{\frac{1}{q} \frac{q}{2}} \left[ \int_{\mathbb{R}} |e^{-\tilde{A}v^2} [\eta(v-2Ai\bar{z})]|^q dv \right]^{\frac{1}{q} \frac{q(2-p)}{2p}} \quad (3.77)
\end{aligned}$$

$$= \|e^{-\tilde{A}v^2} \eta(v+2Aiz)\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \|e^{-\tilde{A}v^2} \eta(v-2Ai\bar{z})\|_q^{\frac{q(2-p)}{2p}}, \quad (3.78)$$

sendo que (3.77) segue de

$$\begin{aligned}
\frac{(q-2)p}{(2-p)q} = 1 &\iff (q-2)p = (2-p)q \\
&\iff qp - 2p = 2q - pq \\
&\iff p + q - 2p = 2q - p - q \\
&\iff -p + q = q - p.
\end{aligned}$$

**Passo 7.** Vale a desigualdade (3.37).

De fato, isso segue de modo análogo ao passo 5. Temos

$$e^{-\tilde{A}v^2} \eta(v+2iAz) \stackrel{3.33}{=} e^{-(\tau A + \theta)v^2} \eta(v+2iAz)$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{3.54}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} e^{-\theta v^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2 + \theta u^2} [\xi(u + 4A^2z)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\xi}(u + 2A^2z)]^{\frac{q}{2}-1} e^{-\theta u^2 - i\tau v u} du \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\frac{\tau}{4A}-\theta)u^2} [\xi(u + 4A^2z)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\xi}(u + 2A^2z)]^{\frac{q}{2}-1} e^{-\theta v^2 - \theta u^2 - i\tau v u} du \\
&\stackrel{3.26}{=} \int_{\mathbb{R}} K(v, u, -it) e^{-(\frac{\tau}{4A}-\theta)u^2} [\xi(u + 4A^2z)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\xi}(u + 2A^2z)]^{\frac{q}{2}-1} du \\
&\stackrel{3.4}{=} K_{-it} \{ e^{-(\frac{\tau}{4A}-\theta)v^2} [\xi(v + 4A^2z)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\xi}(v + 4A^2z)]^{\frac{q}{2}-1} \} \\
&\stackrel{3.5}{=} \underbrace{\widehat{K}_t \{ e^{-(\frac{\tau}{4A}-\theta)v^2} [\xi(v + 4A^2z)]^{\frac{q}{2}} [\bar{\xi}(v + 4A^2z)]^{\frac{q-2}{2}} \}}_{s(v)}, \tag{3.79}
\end{aligned}$$

e, de modo análogo a (3.75), temos que

$$|\bar{\xi}(u + 4A^2z)| = |\xi(u + 4A^2\bar{z})|. \tag{3.80}$$

Agora, usando a desigualdade  $\|\widehat{K}_t s\|_q \stackrel{3.14}{\leq} \mu_t \|s\|_p$  para a função  $s(v)$  em (3.79),

$$\begin{aligned}
\|e^{-\tilde{A}v^2} \eta(v + 2iAz)\|_q &\stackrel{3.79}{\leq} \mu_t \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-p(\frac{\tau}{4A}-\theta)u^2} |\xi(v + 4A^2z)|^{\frac{qp}{2}} |\bar{\xi}(v + 4A^2z)|^{\frac{(q-2)p}{2}} dv \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\stackrel{3.80}{=} \mu_t \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-p(\frac{\tau}{4A}-\theta)u^2} |\xi(v + 4A^2z)|^{\frac{qp}{2}} |\xi(v + 4A^2\bar{z})|^{\frac{(q-2)p}{2}} dv \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\stackrel{3.74}{=} \mu_t \left\{ \int_{\mathbb{R}} e^{-q\tilde{A}u^2} |\xi(v + 4A^2z)|^{\frac{qp}{2}} |\xi(v + 4A^2\bar{z})|^{\frac{(q-2)p}{2}} dv \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mu_t \|e^{-\tilde{A}v^2} \xi(v + 4A^2z)\|_q^{\frac{q}{2}} \|e^{-\tilde{A}v^2} \xi(v + 4A^2\bar{z})\|_q^{\frac{q(2-p)}{2p}},
\end{aligned}$$

sendo essa última igualdade deduzida pelos mesmos passos entre (3.76) e (3.78).

Isso conclui a demonstração do Teorema 3.2.3.  $\square$

**Observação 3.2.4.** No passo 4 da demonstração acima surge a necessidade de que  $q$  seja par. Para ver isso, analisamos a função auxiliar  $G$  definida em (3.60). Um dos fatores de  $\frac{d}{dw}G(w)$  em  $w = 2Ay \in \mathbb{R}$  é dado pela derivada  $\frac{d}{d\rho}[\eta(\rho)]^{\frac{q}{2}}[\bar{\eta}(\rho)]^{\frac{q}{2}-1}$  em  $\rho = w - 2Ay = 0$ ; e como  $y$  é arbitrário e  $A$  fixo, então  $w$  pode ser qualquer número real. Agora, se  $2 \leq q$  é ímpar ou irracional, então  $\frac{d}{d\rho}[\eta(\rho)]^{\frac{q}{2}}[\bar{\eta}(\rho)]^{\frac{q}{2}-1} \stackrel{3.59}{=} |\eta(\rho)|^{q-2}\eta(\rho)$  não é holomorfa nos pontos  $\rho'$  tais que  $\eta(\rho') = 0$ . Em resumo: se  $q$  não for par e  $\eta$  possuir ao menos um zero, então  $G$  não é função inteira e o argumento proposto por Babenko falharia.

### 3.3 Relação de recorrência

Nessa penúltima seção, veremos como o Teorema 3.2.3 nos leva naturalmente a uma desigualdade cujas iteradas geram uma relação de recorrência. Deduzir propriedades desta relação de recorrência é o objetivo dessa seção. Esse é o último ingrediente de que precisamos para, na seção seguinte, concluirmos a demonstração do Teorema de Babenko.

**Teorema 3.3.1.** *Seja*

$$m(z) = \ln(\|e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)\|_q), \quad (3.81)$$

e considere

$$\delta = 4A^2. \quad (3.82)$$

Então vale a seguinte desigualdade

$$m(z) \leq \frac{q^2}{p^2} \left\{ \frac{p^2}{4} m(\delta z) + \frac{(2-p)p}{4} m(\delta \bar{z}) + \frac{(2-p)p}{4} m(-\delta \bar{z}) + \frac{(2-p)^2}{4} m(-\delta z) \right\}. \quad (3.83)$$

*Demonstração.* Como

$$\frac{q}{2} + \frac{q(2-p)}{2p} = \frac{qp + q(2-p)}{2p} = \frac{qp + 2q - qp}{2p} = \frac{q}{p} \stackrel{1.30}{=} q - 1, \quad (3.84)$$

e

$$\begin{cases} \mu_t^{q-1} \|e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)\|_q \stackrel{3.36}{\leq} \|e^{-\tilde{A}u^2}\eta(u+2Aiz)\|_q^{\frac{q}{2}} \|e^{-\tilde{A}u^2}\eta(u-2Ai\bar{z})\|_q^{\frac{q(2-p)}{2p}} \\ \|e^{-\tilde{A}v^2}\eta(v-2Ai\bar{z})\|_q \stackrel{3.37}{\leq} \|e^{-\tilde{A}u^2}\xi(u-4A^2\bar{z})\|_q^{\frac{q}{2}} \|e^{-\tilde{A}u^2}\xi(u-4A^2z)\|_q^{\frac{q(2-p)}{2p}} \end{cases}, \quad (3.85)$$

então

$$\begin{aligned} m(z) &\stackrel{3.83}{=} \ln(\mu_t^{1-q} \mu_t^{q-1} \|e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)\|_q) \\ &= \ln(\mu_t^{1-q}) + \ln(\mu_t^{q-1} \|e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)\|_q) \\ &\stackrel{3.85}{\leq} \ln(\mu_t^{1-q}) + \ln(\|e^{-\tilde{A}v^2}\eta(v+2Aiz)\|_q^{\frac{q}{2}} \|e^{-\tilde{A}v^2}\eta(v-2Ai\bar{z})\|_q^{\frac{q(2-p)}{2p}}) \\ &= \ln(\mu_t^{1-q}) + \frac{q}{2} \ln(\|e^{-\tilde{A}v^2}\eta(v+2Aiz)\|_q) + \frac{q(2-p)}{2p} \ln(\|e^{-\tilde{A}v^2}\eta(v-2Ai\bar{z})\|_q) \\ &\stackrel{3.85}{\leq} \ln(\mu_t^{1-q}) + \frac{q}{2} \ln(\mu_t \|e^{-\tilde{A}u^2}\xi(u+4A^2z)\|_q^{\frac{q}{2}} \|e^{-\tilde{A}u^2}\xi(u+4A^2\bar{z})\|_q^{\frac{q(2-p)}{2p}}) \\ &\quad + \frac{q(2-p)}{2p} \ln(\mu_t \|e^{-\tilde{A}u^2}\xi(u-4A^2\bar{z})\|_q^{\frac{q}{2}} \|e^{-\tilde{A}u^2}\xi(u-4A^2z)\|_q^{\frac{q(2-p)}{2p}}) \\ &= \ln(\mu_t^{1-q}) + \frac{q}{2} \left( \frac{q}{2} \ln(\mu_t \|e^{-\tilde{A}u^2}\xi(u+4A^2z)\|_q) + \frac{q(2-p)}{2p} \ln(\|e^{-\tilde{A}u^2}\xi(u+4A^2\bar{z})\|_q) \right) \\ &\quad + \frac{q(2-p)}{2p} \left( \frac{q}{2} \ln(\mu_t \|e^{-\tilde{A}u^2}\xi(u-4A^2\bar{z})\|_q) + \frac{q(2-p)}{2p} \ln(\|e^{-\tilde{A}u^2}\xi(u-4A^2z)\|_q) \right) \\ &\stackrel{3.81}{=} \ln(\mu_t^{1-q}) + \frac{q}{2} \left( \ln(\mu_t) + \frac{q}{2} m(\delta z) + \frac{q(2-p)}{2p} m(\delta \bar{z}) \right) \\ &\quad + \frac{q(2-p)}{2p} \left( \ln(\mu_t) + \frac{q}{2} m(-\delta \bar{z}) + \frac{q(2-p)}{2p} m(-\delta z) \right) \\ &= \ln(\mu_t^{1-q}) + \left( \frac{q}{2} + \frac{q(p-2)}{2p} \right) \ln(\mu_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{q}{2} \left( \frac{qp^2}{2p^2} m(\delta z) + \frac{q(2-p)p}{2p^2} m(\delta \bar{z}) \right) + \frac{q(2-p)}{2p} \left( \frac{qp^2}{2p^2} m(-\delta \bar{z}) + \frac{q(2-p)p}{2p^2} m(-\delta z) \right) \\
& \stackrel{3.84}{=} (1-q) \ln(\mu_t) + (q-1) \ln(\mu_t) \\
& + \frac{q^2}{p^2} \left\{ \frac{p^2}{4} m(\delta z) + \frac{(2-p)p}{4} m(\delta \bar{z}) + \frac{(2-p)p}{4} m(-\delta \bar{z}) + \frac{(2-p)^2}{4} m(-\delta z) \right\} \\
& = \frac{q^2}{p^2} \left\{ \frac{p^2}{4} m(\delta z) + \frac{(2-p)p}{4} m(\delta \bar{z}) + \frac{(2-p)p}{4} m(-\delta \bar{z}) + \frac{(2-p)^2}{4} m(-\delta z) \right\}.
\end{aligned}$$

□

Denotando por  $a_n$  o coeficiente de  $\frac{q^{2n}}{p^{2n}} m(\delta^n z)$ ,  $b_n$  o coeficiente de  $\frac{q^{2n}}{p^{2n}} m(\delta^n \bar{z})$ ,  $c_n$  o coeficiente de  $\frac{q^{2n}}{p^{2n}} m(-\delta^n \bar{z})$  e  $d_n$  o coeficiente de  $\frac{q^{2n}}{p^{2n}} m(-\delta^n z)$ , reescrevemos (3.83) como

$$m(z) \leq \frac{q^2}{p^2} \{a_1 m(\delta z) + b_1 m(\delta \bar{z}) + c_1 m(-\delta \bar{z}) + d_1 m(-\delta z)\}, \quad (3.86)$$

com

$$\begin{cases} a_1 = \frac{p^2}{4} \\ b_1 = \frac{(2-p)p}{4} \\ c_1 = \frac{(2-p)p}{4} \\ d_1 = \frac{(2-p)^2}{4} \end{cases}. \quad (3.87)$$

Trivialmente,

$$b_1 = c_1, \quad (3.88)$$

e

$$a_1 - d_1 \stackrel{3.87}{=} \frac{p^2}{4} - \frac{(2-p)^2}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4p - 4}{4} = (p-1)^1. \quad (3.89)$$

Além disso,

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 \stackrel{3.87}{=} \frac{1}{4} [p^2 + (2-p)(p+p+2-p)] = \frac{1}{4} [p^2 + 4 - p^2] = 1. \quad (3.90)$$

Essa é a base da relação de recorrência, o caso  $n = 1$ . A seguir, o caso  $n = 2$ .

Substituindo  $z$  por  $\delta z, \delta \bar{z}, -\delta \bar{z}, -\delta z$  em (3.86),

$$\begin{cases} m(\delta z) \leq \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(\delta^2 z) + b_1 m(\delta^2 \bar{z}) + c_1 m(-\delta^2 \bar{z}) + d_1 m(-\delta^2 z)] \\ m(\delta \bar{z}) \leq \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(\delta^2 \bar{z}) + b_1 m(\delta^2 z) + c_1 m(-\delta^2 z) + d_1 m(-\delta^2 \bar{z})] \\ m(-\delta \bar{z}) \leq \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(-\delta^2 \bar{z}) + b_1 m(-\delta^2 z) + c_1 m(\delta^2 z) + d_1 m(\delta^2 \bar{z})] \\ m(-\delta z) \leq \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(-\delta^2 z) + b_1 m(-\delta^2 \bar{z}) + c_1 m(\delta^2 \bar{z}) + d_1 m(\delta^2 z)] \end{cases}, \quad (3.91)$$

o que implica

$$\begin{aligned}
m(z) &\stackrel{3.86}{\leq} \frac{q^2}{p^2} \{a_1 m(\delta z) + b_1 m(\delta \bar{z}) + c_1 m(-\delta \bar{z}) + d_1 m(-\delta z)\} \\
&\stackrel{3.91}{\leq} \frac{q^2}{p^2} \left\{ a_1 \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(\delta^2 z) + b_1 m(\delta^2 \bar{z}) + c_1 m(-\delta^2 \bar{z}) + d_1 m(-\delta^2 z)] + \right. \\
&\quad b_1 \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(\delta^2 \bar{z}) + b_1 m(\delta^2 z) + c_1 m(-\delta^2 z) + d_1 m(-\delta^2 \bar{z})] + \\
&\quad c_1 \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(-\delta^2 \bar{z}) + b_1 m(-\delta^2 z) + c_1 m(\delta^2 z) + d_1 m(\delta^2 \bar{z})] + \\
&\quad \left. d_1 \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(-\delta^2 z) + b_1 m(-\delta^2 \bar{z}) + c_1 m(\delta^2 \bar{z}) + d_1 m(\delta^2 z)] \right\} \\
&= \frac{q^4}{p^4} \{ m(\delta^2 z) [a_1 a_1 + b_1 b_1 + c_1 c_1 + d_1 d_1] + \\
&\quad m(\delta^2 \bar{z}) [a_1 b_1 + b_1 a_1 + c_1 d_1 + d_1 c_1] + \\
&\quad m(-\delta^2 \bar{z}) [a_1 c_1 + b_1 d_1 + c_1 a_1 + d_1 b_1] + \\
&\quad m(-\delta^2 z) [a_1 d_1 + b_1 c_1 + c_1 b_1 + d_1 a_1] \},
\end{aligned}$$

isto é,

$$m(z) \leq \frac{q^{2 \cdot 2}}{p^{2 \cdot 2}} \{ a_2 m(\delta^2 z) + b_2 m(\delta^2 \bar{z}) + c_2 m(-\delta^2 \bar{z}) + d_2 m(-\delta^2 z) \}, \quad (3.92)$$

com

$$\begin{cases} a_2 = a_1 a_1 + b_1 b_1 + c_1 c_1 + d_1 d_1 \\ b_2 = a_1 b_1 + b_1 a_1 + c_1 d_1 + d_1 c_1 \\ c_2 = a_1 c_1 + b_1 d_1 + c_1 a_1 + d_1 b_1 \\ d_2 = a_1 d_1 + b_1 c_1 + c_1 b_1 + d_1 a_1 \end{cases}. \quad (3.93)$$

Logo

$$b_2 \stackrel{3.93}{=} a_1 b_1 + b_1 a_1 + c_1 d_1 + d_1 c_1 \stackrel{3.88}{=} a_1 c_1 + c_1 a_1 + b_1 d_1 + d_1 b_1 \stackrel{3.93}{=} c_2, \quad (3.94)$$

e

$$\begin{aligned}
a_2 - d_2 &\stackrel{3.93}{=} (a_1 a_1 + b_1 b_1 + c_1 c_1 + d_1 d_1) - (a_1 d_1 + b_1 c_1 + c_1 b_1 + d_1 a_1) \\
&\stackrel{3.88}{=} (a_1 a_1 + b_1 b_1 + b_1 b_1 + d_1 d_1) - (a_1 d_1 + b_1 b_1 + b_1 b_1 + d_1 a_1) \\
&= a_1 a_1 + d_1 d_1 - a_1 d_1 - d_1 a_1 \\
&= a_1 (a_1 - d_1) - d_1 (a_1 - d_1) \\
&\stackrel{3.89}{=} (a_1 - d_1)(p - 1) \\
&\stackrel{3.89}{=} (p - 1)^2.
\end{aligned} \quad (3.95)$$

Além disso, somando os termos de (3.93) e colocando  $a_1, b_1, c_1$  e  $d_1$  em evidência,

$$\begin{aligned}
& a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \stackrel{3.93}{=} a_1(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) \\
& \quad b_1(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) \\
& \quad c_1(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) \\
& \quad d_1(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) \\
& = (a_1 + b_1 + c_1 + d_1)(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) \\
& \stackrel{3.90}{=} 1.
\end{aligned}$$

Isso conclui o caso  $n = 2$ . Vejamos agora o caso  $n = 3$ . Substituindo  $\delta$  por  $\delta^2$  em (3.91),

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\delta^2 z) \leq \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(\delta^3 z) + b_1 m(\delta^3 \bar{z}) + c_1 m(-\delta^3 \bar{z}) + d_1 m(-\delta^3 z)] \\ m(\delta^2 \bar{z}) \leq \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(\delta^3 \bar{z}) + b_1 m(\delta^3 z) + c_1 m(-\delta^3 z) + d_1 m(-\delta^3 \bar{z})] \\ m(-\delta^2 \bar{z}) \leq \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(-\delta^3 \bar{z}) + b_1 m(-\delta^3 z) + c_1 m(\delta^3 z) + d_1 m(\delta^3 \bar{z})] \\ m(-\delta^2 z) \leq \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(-\delta^3 z) + b_1 m(-\delta^3 \bar{z}) + c_1 m(\delta^3 \bar{z}) + d_1 m(\delta^3 z)]; \end{array} \right. , \quad (3.96)$$

o que implica

$$\begin{aligned}
m(z) & \stackrel{3.92}{\leq} \frac{q^4}{p^4} \left\{ a_2 m(\delta^2 z) + b_1 m(\delta^2 \bar{z}) + c_1 m(-\delta^2 \bar{z}) + d_1 m(-\delta^2 z) \right\} \\
& \stackrel{3.96}{=} \frac{q^4}{p^4} \left\{ a_2 \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(\delta^3 z) + b_1 m(\delta^3 \bar{z}) + c_1 m(-\delta^3 \bar{z}) + d_1 m(-\delta^3 z)] + \right. \\
& \quad b_2 \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(\delta^3 \bar{z}) + b_1 m(\delta^3 z) + c_1 m(-\delta^3 z) + d_1 m(-\delta^3 \bar{z})] + \\
& \quad c_2 \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(-\delta^3 \bar{z}) + b_1 m(-\delta^3 z) + c_1 m(\delta^3 z) + d_1 m(\delta^3 \bar{z})] + \\
& \quad \left. d_2 \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(-\delta^3 z) + b_1 m(-\delta^3 \bar{z}) + c_1 m(\delta^3 \bar{z}) + d_1 m(\delta^3 z)] \right\} \\
& = \frac{q^6}{p^6} \left\{ m(\delta^3 z) [a_2 a_1 + b_2 b_1 + c_2 c_1 + d_2 d_1] + \right. \\
& \quad m(\delta^2 \bar{z}) [a_2 b_1 + b_2 a_1 + c_2 d_1 + d_2 c_1] + \\
& \quad m(-\delta^2 \bar{z}) [a_2 c_1 + b_2 d_1 + c_2 a_1 + d_2 b_1] + \\
& \quad \left. m(-\delta^2 z) [a_2 d_1 + b_2 c_1 + c_2 b_1 + d_2 a_1] \right\},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$m(z) \leq \frac{q^{3-2}}{p^{3-2}} \left\{ a_3 m(\delta^3 z) + b_3 m(\delta^3 \bar{z}) + c_3 m(-\delta^3 \bar{z}) + d_3 m(-\delta^3 z) \right\}, \quad (3.97)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} a_3 = a_2a_1 + b_2b_1 + c_2c_1 + d_2d_1 \\ b_3 = a_2b_1 + b_2a_1 + c_2d_1 + d_2c_1 \\ c_3 = a_2c_1 + b_2d_1 + c_2a_1 + d_2b_1 \\ d_3 = a_2d_1 + b_2c_1 + c_2b_1 + d_2a_1 \end{array} \right. . \quad (3.98)$$

Assim,

$$\begin{aligned} b_3 &\stackrel{3.98}{=} a_2b_1 + b_2a_1 + c_2d_1 + d_2c_1 \\ &\stackrel{3.94}{=} a_2b_1 + c_2a_1 + b_2d_1 + d_2c_1 \\ &\stackrel{3.88}{=} a_2c_1 + c_2a_1 + b_2d_1 + d_2b_1 \\ &\stackrel{3.98}{=} c_3, \end{aligned}$$

e, usando  $(a_1 - d_1) \stackrel{3.89}{=} (p-1)$  e  $(a_2 - d_2) \stackrel{3.95}{=} (p-1)^2$  na igualdade \* a seguir,

$$\begin{aligned} a_3 - d_3 &\stackrel{3.98}{=} (a_2a_1 + b_2b_1 + c_2c_1 + d_2d_1) - (a_2d_1 + b_2c_1 + c_2b_1 + d_2a_1) \\ &\stackrel{3.88}{=} (a_2a_1 + b_2b_1 + c_2b_1 + d_2d_1) - (a_2d_1 + b_2b_1 + c_2b_1 + d_2a_1) \\ &= a_2a_1 + d_2d_1 - a_2d_1 - d_2a_1 \\ &= a_2(a_1 - d_1) - d_2(a_1 - d_1) \\ &= (a_2 - d_2)(a_1 - d_1) \\ &\stackrel{*}{=} (p-1)^3. \end{aligned}$$

Além disso, somando os termos em (3.98) e colocando  $a_3, b_3, c_3$  e  $d_3$  em evidência,

$$\begin{aligned} a_3 + b_3 + c_3 + d_3 &\stackrel{3.98}{=} a_2(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) \\ &\quad b_3(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) \\ &\quad c_3(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) \\ &\quad d_3(a_1 + b_1 + c_1 + d_1). \end{aligned}$$

**Teorema 3.3.2.** *Sejam  $a_n, b_n, c_n$  e  $d_n$  os coeficientes de  $\frac{q^{2n}}{p^{2n}}m(\delta^n z)$ ,  $\frac{q^{2n}}{p^{2n}}m(\delta^n \bar{z})$ ,  $\frac{q^{2n}}{p^{2n}}m(-\delta^n \bar{z})$  e  $\frac{q^{2n}}{p^{2n}}m(-\delta^n z)$  respectivamente, obtidos das iterações de (3.86) como indicado acima, ou seja,*

$$m(z) \leq \frac{q^{2n}}{p^{2n}} \{a_n m(\delta^n z) + b_n m(\delta^n \bar{z}) + c_n m(-\delta^n \bar{z}) + d_n m(-\delta^n z)\}. \quad (3.99)$$

Então  $b_n = c_n$ ,  $a_n - d_n = (q-1)^n$  e  $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$  para todo  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Procedemos por indução. Os casos  $n = 1, 2, 3$  já estão indicados acima. Supondo que o resultado é válido para algum  $n > 3$ , vamos prová-lo para  $n + 1$ .

A demonstração consta de passos análogos aos da passagem de  $n = 2$  para  $n = 3$ .

Substituindo  $\delta$  por  $\delta^n$  em (3.91),

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\delta^n z) \leq \frac{q^2}{p^2} \{a_1 m(\delta^{n+1} z) + b_1 m(\delta^{n+1} \bar{z}) + c_1 m(-\delta^{n+1} \bar{z}) + d_1 m(-\delta^{n+1} z)\} \\ m(\delta^n \bar{z}) \leq \frac{q^2}{p^2} \{a_1 m(\delta^{n+1} \bar{z}) + b_1 m(\delta^{n+1} z) + c_1 m(-\delta^{n+1} z) + d_1 m(-\delta^{n+1} \bar{z})\} \\ m(-\delta^n \bar{z}) \leq \frac{q^2}{p^2} \{a_1 m(-\delta^{n+1} \bar{z}) + b_1 m(-\delta^{n+1} z) + c_1 m(\delta^{n+1} z) + d_1 m(\delta^{n+1} \bar{z})\} \\ m(-\delta^n z) \leq \frac{q^2}{p^2} \{a_1 m(-\delta^{n+1} z) + b_1 m(-\delta^{n+1} \bar{z}) + c_1 m(\delta^{n+1} \bar{z}) + d_1 m(\delta^{n+1} z)\} \end{array} \right. , \quad (3.100)$$

e tendo em vista que (3.99) é válida para  $n$  por hipótese de indução,

$$\begin{aligned} m(z) &\stackrel{3.99}{\leq} \frac{q^{2n}}{p^{2n}} \{a_n m(\delta^n z) + b_n m(\delta^n \bar{z}) + c_n m(-\delta^n \bar{z}) + d_n m(-\delta^n z)\} \\ &\stackrel{3.100}{\leq} \frac{q^{2n}}{p^{2n}} \{a_n \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(\delta^{n+1} z) + b_1 m(\delta^{n+1} \bar{z}) + c_1 m(-\delta^{n+1} \bar{z}) + d_1 m(-\delta^{n+1} z)] + \\ &\quad b_n \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(\delta^{n+1} \bar{z}) + b_1 m(\delta^{n+1} z) + c_1 m(-\delta^{n+1} z) + d_1 m(-\delta^{n+1} \bar{z})] + \\ &\quad c_n \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(-\delta^{n+1} \bar{z}) + b_1 m(-\delta^{n+1} z) + c_1 m(\delta^{n+1} z) + d_1 m(\delta^{n+1} \bar{z})] + \\ &\quad d_n \frac{q^2}{p^2} [a_1 m(-\delta^{n+1} z) + b_1 m(-\delta^{n+1} \bar{z}) + c_1 m(\delta^{n+1} \bar{z}) + d_1 m(\delta^{n+1} z)]\} \\ &= \frac{q^{2n+2}}{p^{2n+2}} \{m(\delta^{n+1} z)[a_n a_1 + b_n b_1 + c_n c_1 + d_n d_1] + \\ &\quad m(\delta^{n+1} \bar{z})[a_n b_1 + b_n a_1 + c_n d_1 + d_n c_1] + \\ &\quad m(-\delta^{n+1} \bar{z})[a_n c_1 + b_n d_1 + c_n a_1 + d_n b_1] + \\ &\quad m(-\delta^{n+1} z)[a_n d_1 + b_n c_1 + c_n b_1 + d_n a_1]\}, \end{aligned}$$

isto é,

$$m(z) \leq \frac{q^{2(n+1)}}{p^{2(n+1)}} \{a_{n+1} m(\delta^{n+1} z) + b_{n+1} m(\delta^{n+1} \bar{z}) + c_{n+1} m(-\delta^{n+1} \bar{z}) + d_{n+1} m(-\delta^{n+1} z)\}, \quad (3.101)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = a_n a_1 + b_n b_1 + c_n c_1 + d_n d_1 \\ b_{n+1} = a_n b_1 + b_n a_1 + c_n d_1 + d_n c_1 \\ c_{n+1} = a_n c_1 + b_n d_1 + c_n a_1 + d_n b_1 \\ d_{n+1} = a_n d_1 + b_n c_1 + c_n b_1 + d_n a_1 \end{array} \right. . \quad (3.102)$$

Usando em \* a hipótese  $b_n = c_n$ , e em \*\* a hipótese  $a_n - d_n = (p-1)^n$ ,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &\stackrel{3.102}{=} a_n b_1 + b_n a_1 + c_n d_1 + d_n c_1 \\ &\stackrel{*}{=} a_n b_1 + c_n a_1 + b_n d_1 + d_n c_1 \\ &\stackrel{3.88}{=} a_n c_1 + c_n a_1 + b_n d_1 + d_n b_1 \end{aligned}$$

$$\stackrel{3.102}{=} c_{n+1},$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - d_{n+1} &\stackrel{3.102}{=} (a_n a_1 + b_n b_1 + c_n c_1 + d_n d_1) - (a_n d_1 + b_n c_1 + c_n b_1 + d_n a_1) \\ &\stackrel{3.88}{=} (a_n a_1 + b_n b_1 + c_n b_1 + d_n d_1) - (a_n d_1 + b_n b_1 + c_n b_1 + d_n a_1) \\ &= a_n a_1 + d_n d_1 - (a_n d_1 + d_n a_1) \\ &= a_n(a_1 - d_1) - d_n(a_1 - d_1) \\ &\stackrel{3.89}{=} (a_n - d_n)(p - 1) \\ &\stackrel{**}{=} (p - 1)^n (p - 1) \\ &= (p - 1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Somando os termos em (3.102), colocando  $a_n, b_n, c_n$  e  $d_n$  em evidência, e usando a hipótese  $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$  na igualdade \*\*\* a seguir,

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1} &= a_n(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + \\ &\quad b_n(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + \\ &\quad c_n(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + \\ &\quad d_n(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) \\ &= (a_n + b_n + c_n + d_n)(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) \\ &\stackrel{3.90}{=} (a_n + b_n + c_n + d_n)1 \\ &\stackrel{***}{=} 1. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.3.3.** *A função  $m(z)$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$  e cumpre  $m(0) = 0$ .*

*Demonstração.* Como  $f$  cumpre  $\|f\|_p = 1$ , então  $\ln(\|f\|_p) = 0$  e assim

$$\begin{aligned} m(0) &= \ln(\|e^{-\tilde{A}v^2} \xi(v)\|_q) \\ &\stackrel{3.34}{=} \ln(\|e^{-\tilde{A}v^2} e^{\tilde{A}v^2} \varphi(v)\|_q) \\ &\stackrel{3.18}{=} \ln(\|\{|f(v)|^{p-2} f(v)\}\|_q) \\ &= \ln\left(\left\{\int_{\mathbb{R}} |f(v)|^{(p-1)q} dv\right\}^{\frac{1}{q}}\right) \\ &\stackrel{1.30}{=} \ln\left(\left\{\int_{\mathbb{R}} |f(v)|^p dv\right\}^{\frac{1}{p} \frac{p}{q}}\right) \\ &= \frac{p}{q} \ln(\|f\|_p) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, vejamos que  $m$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Para isso, fixamos  $z \in \mathbb{C}$ , e denotamos por  $D^{(k)}m(z)$  e  $D^{(k)}\xi(v+z)$  a  $k$ -ésima derivada  $m(z)$  e de  $\xi(v+z)$  em  $z$ , no sentido de aplicação de  $\mathbb{R}^2$ . Formalmente, como

$$\begin{aligned} Dm(z) &= \ln(\|e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)\|_q) \\ &= \frac{1}{\|e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)\|_q} D\|e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)\|_q \\ &= \frac{1}{\|e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)\|_q} \frac{\|e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)\|_q^{1-q}}{q} D \int_{\mathbb{R}} |e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)|^q dv \\ &= \frac{\|e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)\|_q^{-q}}{q} D \int_{\mathbb{R}} |e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)|^q dv, \end{aligned}$$

então para verificarmos rigorosamente que  $m$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$  e concluir esta demonstração, basta garantirmos que é de classe  $\mathcal{C}^\infty$  a integral

$$g(z) := \int_{\mathbb{R}} |e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)|^q dv, \quad (3.103)$$

pois as derivadas de ordem superior de  $m$  são da forma

$$D^{(k)}m(z) = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} D^{(k-n)} \left( \frac{\|e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)\|_q^{-q}}{q} \right) D^{(k)} \left( \int_{\mathbb{R}} |e^{-\tilde{A}v^2}\xi(v+z)|^q dv \right), \quad k \geq 2.$$

Como  $\xi(v+z)$  é função inteira, então pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\xi^{(k)}(v+z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|v+z-\zeta|=1} \frac{\xi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - v - z)^{k+1}},$$

logo denotando  $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ ,  $T = \tau A$  e  $U = \tau^2/4\theta - \tau A$ , vale para cada  $v$  a estimativa

$$\begin{aligned} |\xi^{(k)}(v+z)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \int_{|v+z-\zeta|=1} \frac{|\xi(\zeta)| |d\zeta|}{|\zeta - v - z|^{k+1}} \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \left\{ 2\pi \sup_{|v+z-\zeta|=1} \frac{|\xi(\zeta)|}{|\zeta - v - z|^{k+1}} \right\} \\ &\stackrel{3.43}{\leq} k! \sup_{\{\zeta: |v+z-\zeta|=1\}} \left\{ C_1 \exp(\tau A \zeta_1^2 + (\tau^2/4\theta - \tau A) \zeta_2^2) \right\} \\ &= k! \sup_{\{\xi: |v+z-\zeta|=1\}} \left\{ C_1 \exp(T \zeta_1^2 + U \zeta_2^2) \right\} \\ &\leq k! \sup_{\{\xi: |v+z-\zeta|=1\}} \left\{ C_1 \exp(T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2) \right\} \\ &= k! C_1 \exp(T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Essa desigualdade implica que a integral (3.103) converge, pois  $v^2 + T(|x+v|+1)^2 > 0$  e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}qv^2} |\xi(v+z)|^q dv &\stackrel{3.104}{\leq} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}qv^2} (C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2})^q dv \\ &= C_1^q e^{Uq(|y|+1)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}q(v^2 + T(|x+v|+1)^2)} dv \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Isso mostra a existência da derivada de ordem  $k = 0$  de (3.103). Vejamos agora o caso  $k = 1$ . Como  $\xi$  é inteira, então ela é diferenciável no sentido de  $\mathbb{R}^2$  e daí  $D^1 \xi(v+z)$  cumpre a estimativa (3.104). Logo,

$$\begin{aligned} |D|\xi(v+z)|^q| &= |q|\xi(v+z)|^{q-1} D(|\xi(v+z)|)| \\ &= |q|\xi(v+z)|^{q-1} \frac{\xi(v+z)}{|\xi(v+z)|} D\xi(v+z)| \\ &= q|\xi(v+z)|^{q-1} |D\xi(v+z)| \\ &\stackrel{3.104}{\leq} q \left\{ C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2} \right\}^{q-1} \left\{ C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2} \right\} \\ &= q \left\{ C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2} \right\}^q, \end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}qv^2} D|\xi(v+z)|^q dv &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}qv^2} q \left\{ C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2} \right\}^q dv \\ &= q C_1^q e^{Uq(|y|+1)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}q(v^2 + T(|x+v|+1)^2)} dv \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Agora, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\begin{aligned} Dm(z) &= \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} (m(z+h) - m(z)) \\ &= \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} \left( \int_{\mathbb{R}} |e^{-\tilde{A}v^2} \xi(v+z+h)|^q dv - \int_{\mathbb{R}} |e^{-\tilde{A}v^2} \xi(v+z)|^q dv \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{|h| \rightarrow 0} e^{-\tilde{A}qv^2} \frac{|\xi(v+z+h)|^q - |\xi(v+z)|^q}{|h|} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}qv^2} D|\xi(v+z)|^q dv \\ &\stackrel{3.105}{<} \infty. \end{aligned}$$

Para verificarmos que  $g$  é duas vezes diferenciável, basta checarmos que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}qv^2} D^{(2)}|\xi(v+z)|^q dv < \infty \tag{3.106}$$

pois daí, como nos casos  $k = 0$  e  $k = 1$ , o Teorema da Convergência dominada implica

$$D^{(2)}g(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}qv^2} D^{(2)}|\xi(v+z)|^q dv < \infty. \quad (3.107)$$

De fato, (3.106) converge, pois para cada  $v$ ,

$$\begin{aligned} D^{(2)}|\xi(v+z)|^q &= D\{q|\xi(v+z)|^{q-2}\xi(v+z)D\xi(v+z)\} \\ &= D\{q|\xi(v+z)|^{q-2}\}\xi(v+z)D\xi(v+z) + q|\xi(v+z)|^{q-2}D\{\xi(v+z)D\xi(v+z)\} \\ &= q(q-2)|\xi(v+z)|^{q-3}D|\xi(v+z)|\xi(v+z)D\xi(v+z) + \\ &\quad q|\xi(v+z)|^{q-2}\{[D\xi(v+z)]^2 + \xi(v+z)D^{(2)}\xi(v+z)\} \\ &= q(q-2)|\xi(v+z)|^{q-4}[\xi(v+z)]^2[D\xi(v+z)]^2 + \\ &\quad q|\xi(v+z)|^{q-2}[D\xi(v+z)]^2 + q|\xi(v+z)|^{q-2}\xi(v+z)D^{(2)}\xi(v+z), \end{aligned}$$

logo (3.104) implica

$$\begin{aligned} |D^{(2)}|\xi(v+z)|^q| &\leq q(q-2) \left\{ C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2} \right\}^q + \\ &\quad q \left\{ C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2} \right\}^q + \\ &\quad \left\{ C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2} \right\}^{q-1} \left\{ 2! C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2} \right\} \\ &= q(q-2) \left\{ C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2} \right\}^q + \\ &\quad q \left\{ C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2} \right\}^q + \\ &\quad 2 \left\{ C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2} \right\}^q \\ &= [q(q-2) + q + 2] \left\{ C_1 e^{T(|x+v|+1)^2 + U(|y|+1)^2} \right\}^q, \end{aligned} \quad (3.108)$$

e daí vemos que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}qv^2} D^{(2)}\xi(v+z)dv \stackrel{3.108}{\leq} L \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}q(v^2 + T(|x+v|+1)^2)} dv \stackrel{3.105}{<} \infty$  para alguma constante  $L$ . Para  $k > 1$ , esse argumento de indução nos permite concluir sem dificuldades

$$D^{(k)}g(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}qv^2} D^{(k)}|\xi(v+z)|^q dv < \infty.$$

□

**Corolário 3.3.4.** *Vale a desigualdade*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}qv^2} |\xi(v+z)|^q \leq 1 \quad (3.109)$$

*Demonstração.* Em vista do Teorema 3.3.3, escrevemos  $m(z)$  como série de Taylor em torno da origem

$$m(z) = \alpha x + \beta y + O(|z|^2). \quad (3.110)$$

Agora, vemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\delta^n z) = \alpha x \delta^n + \beta y \delta^n + O(\delta^{2n} |z|^2) \\ m(\delta^{2\bar{z}}) = \alpha x \delta^n - \beta y \delta^n + O(\delta^{2n} |z|^2) \\ m(-\delta^2 \bar{z}) = -\alpha x \delta^n + \beta y \delta^n + O(\delta^{2n} |z|^2) \\ m(-\delta^2 z) = -\alpha x \delta^n - \beta y \delta^n + O(\delta^{2n} |z|^2) \end{array} \right. , \quad (3.111)$$

logo, usando em \* as propriedades da relação de recorrência provadas no Teorema 3.3.2,

$$\begin{aligned} m(z) &\stackrel{3.99}{\leq} \frac{q^{2n}}{p^{2n}} \{a_n m(\delta^n z) + b_n m(\delta^n \bar{z}) + c_n m(-\delta^n \bar{z}) + d_n m(-\delta^n z)\} \\ &\stackrel{3.111}{\leq} \frac{q^{2n}}{p^{2n}} \{a_n [\alpha x \delta^n + \beta y \delta^n + O(\delta^{2n} |z|^2)] + \\ &\quad b_n [\alpha x \delta^n - \beta y \delta^n + O(\delta^{2n} |z|^2)] + \\ &\quad c_n [-\alpha x \delta^n + \beta y \delta^n + O(\delta^{2n} |z|^2)] + \\ &\quad d_n [-\alpha x \delta^n - \beta y \delta^n + O(\delta^{2n} |z|^2)]\} \\ &= \frac{q^{2n}}{p^{2n}} [\alpha x \delta^n (a_n + b_n - c_n - d_n) + \\ &\quad \beta y \delta^n (a_n - b_n + c_n - d_n) + \\ &\quad (a_n + b_n + c_n + d_n) O(\delta^{2n} |z|^2)] \\ &\stackrel{*}{=} \frac{q^{2n}}{p^{2n}} [\alpha x (\delta(p-1))^n + \beta y (\delta(p-1))^n + O(\delta^{2n} |z|^2)] \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\stackrel{1.30}{=} \frac{q^{2n}}{p^{2n}} \left[ \alpha x \left( \delta \frac{p}{q} \right)^n + \beta y \left( \delta \frac{p}{q} \right)^n + O(\delta^{2n} |z|^2) \right]. \quad (3.113)$$

Como  $1 < p \leq 2$ , então  $2 \leq q < \infty$  e daí  $\delta^n < 1$  pois

$$\theta > 0, \tau > 0 \stackrel{3.8}{\implies} -4 \frac{p\theta}{\tau} A + \frac{p}{q} < \frac{p}{q} \iff 4 \left[ \frac{-p\theta}{\tau} A + \frac{p}{4q} \right] < \frac{p}{q} \stackrel{3.32}{\iff} \delta \stackrel{3.82}{=} 4A^2 < \frac{p}{q} < 1.$$

Assim, (3.113) implica  $m(z) \leq 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo,  $m(z) \stackrel{3.81}{\leq} \|e^{\tilde{A}v^2} \xi(v+z)\|_q \leq 1$ , o que implica  $(\int_{\mathbb{R}} |e^{\tilde{A}v^2} \xi(v+z)|^q dv)^{1/q} \leq 1$ , que é a desigualdade 3.109.  $\square$

### 3.4 Demonstração do Teorema de Babenko

Neste seção final, calculamos o valor de  $\mu_t$  para cada  $t$ , e exibimos explicitamente as funções extremizantes. Em seguida, concluiremos a demonstração do Teorema de Babenko com um argumento de aproximação da identidade. A observação fundamental aqui é que as funções auxiliares que definimos no decorrer deste capítulo são constantes.

**Teorema 3.4.1.** *A função  $\xi(z)$  é identicamente constante com*

$$\xi(z) = \left( \frac{\tilde{A}q}{\pi} \right)^{\frac{1}{2q}}. \quad (3.114)$$

*Demonstração.* Consideramos a função auxiliar

$$\tilde{\xi}(z) = \int_0^h e^{-q\tilde{A}v^2} [\xi(v+z)]^q dv. \quad (3.115)$$

Como  $q$  é par e  $\xi$  é função inteira, então  $[\xi(v+z)]^q$  é função inteira para cada  $v$ . Como (3.103) converge, então pelo Teorema da Convergência Dominada  $\tilde{\xi}(z)$  é uma função inteira, a qual é limitada pela desigualdade (3.109) e logo é constante pelo Teorema de Liouville. Assim,  $\tilde{\xi}(z) = \int_0^h e^{-q\tilde{A}v^2} [\xi(v+z)]^q dv = \int_0^h e^{-q\tilde{A}v^2} [\xi(v)]^q dv = \tilde{\xi}(0)$  e, dividindo essa igualdade por  $h$  em ambos os lados e fazendo  $h \rightarrow 0^+$ , temos

$$[\xi(z)]^q = [\xi(0)]^q \text{ para todo } z. \quad (3.116)$$

Consequentemente,  $\xi(z)$  é constante, e para determinar seu valor, observamos que

$$\begin{aligned} \|e^{-\tilde{A}v^2} \xi(v)\|_q &\stackrel{3.34}{=} \|e^{-\tilde{A}v^2} \varphi(v)\|_q \\ &\stackrel{3.18}{=} \|\{|f(v)|^{p-2} f(v)\}\|_q \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} |f(v)|^{(p-1)q} dv \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\stackrel{1.30}{=} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(v)|^p dv \right)^{\frac{1}{p} \frac{p}{q}} \\ &= \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

portanto  $1 = \|e^{-\tilde{A}v^2} \xi(v)\|_q \stackrel{3.116}{=} \xi(0) \|e^{-\tilde{A}v^2}\|_q = \xi(0) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{\tilde{A}qv} dv \right)^{\frac{1}{q}} \stackrel{2.6}{=} \xi(0) \left( \frac{\pi}{\tilde{A}q} \right)^{\frac{1}{2q}}. \quad \square$

Agora, exibimos a função extremizante e o valor de  $\mu_t$  para cada  $t$  fixado.

**Teorema 3.4.2.** *A função extremizante  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é da forma*

$$f(x) = \left( \frac{\tilde{A}q}{\pi} \right)^{\frac{1}{2p}} e^{-(\frac{\tau}{4\tilde{A}} - \theta)x^2}, \quad (3.117)$$

*e vale a igualdade*

$$\mu_t = \left( \frac{2A}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{q\tilde{A}}{\pi} \right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}}. \quad (3.118)$$

*Demonstração.* Como

$$\varphi(z) \stackrel{3.34}{=} \xi(z)e^{-\tilde{A}z^2} \stackrel{3.114}{=} \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2q}} e^{-\tilde{A}z^2},$$

então  $f$  é da forma (3.117) pois

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{3.27}{=} |\varphi(x)|^{q-2}\varphi(x) \\ &\stackrel{3.116}{=} \left|\left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2q}} e^{-\tilde{A}x^2}\right|^{q-2} \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2q}} e^{-\tilde{A}x^2} \\ &= \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2q}(q-1)} e^{-\tilde{A}(q-1)x^2} \\ &\stackrel{3.42}{=} \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2q}(q-1)} e^{-(\frac{\tau}{4A}-\theta)x^2} \\ &\stackrel{1.30}{=} \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}} e^{-(\frac{\tau}{4A}-\theta)x^2}. \end{aligned}$$

Usando em \* a identidade  $\int_{\mathbb{R}} e^{-Ru^2+isu} du \stackrel{2.12}{=} e^{-S^2/4R} \sqrt{\pi/R}$  com  $R = \frac{\tau}{4A} \stackrel{3.20}{>} 0$  e  $S = \tau x$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2+i\tau xu} du \stackrel{*}{=} e^{\frac{-(\tau x)^2}{4\tau/(4A)}} \sqrt{\frac{\pi}{\tau/(4A)}} = e^{-\tau Ax^2} \sqrt{\frac{4A\pi}{\tau}}. \quad (3.119)$$

Fazendo em \*\* a mudança de variáveis  $u = -u$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{K}_t f(x) &\stackrel{3.19}{=} \psi(x) \\ &\stackrel{3.22}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}} e^{-(\frac{\tau}{4A}-\theta)u^2} e^{-\theta x^2-\theta u^2-i\tau xu} du \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}} e^{-\theta x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2-i\tau xu} du \\ &\stackrel{**}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}} e^{-\theta x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2+i\tau xu} du \\ &\stackrel{3.119}{=} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}} e^{-\theta x^2} e^{-\tau Ax^2} \sqrt{\frac{4A\pi}{\tau}} \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t} \frac{4A\pi}{\tau}} \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}} e^{-(\theta+\tau A)x^2} \\ &\stackrel{3.33}{=} \sqrt{\frac{2A}{t}} \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}} e^{-\tilde{A}x^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu_t = \frac{\|\widehat{K_t f}\|_q}{\|f\|_p} = \sqrt{\frac{2A}{t}} \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{A}qx^2} dx\right)^{\frac{1}{q}} \stackrel{2.6}{=} \sqrt{\frac{2A}{t}} \left(\frac{\tilde{A}q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}} \left(\frac{\pi}{\tilde{A}q}\right)^{\frac{1}{2q}}.$$

□

**Corolário 3.4.3.** *Vale*

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \mu_t = \frac{p^{\frac{1}{2p}} q^{-\frac{1}{2q}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}}}. \quad (3.120)$$

*Demonstração.* Sendo  $\theta \stackrel{3.8}{=} (1-t^2)/(2(1+t^2))$  e  $\tau \stackrel{3.33}{=} 2t/(1+t^2)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\theta}{\tau} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{(1-t^2)(1+t^2)}{2(1+t^2)2t} = 0,$$

logo

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} A \stackrel{3.32}{=} \lim_{t \rightarrow 1^-} -\frac{p\theta}{2\tau} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^2\theta^2}{\tau^2} + \frac{p}{q}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{q}}. \quad (3.121)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} \mu_t &\stackrel{3.118}{=} \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(\frac{2A}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q\tilde{A}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} \\ &\stackrel{3.33}{=} \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(\frac{2A}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q}{\pi}[\tau A + \theta]\right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(\frac{2A}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q}{\pi} \left[\frac{2t}{1+t^2}A + \frac{1-t^2}{2(1+t^2)}\right]\right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} \\ &\stackrel{3.121}{=} \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q}{2\pi} \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} \\ &= \left(p^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} \\ &= (2\pi)^{\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}} (p^{\frac{1}{2}})^{\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} (q^{\frac{1}{2}})^{-\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} \\ &\stackrel{1.29}{=} (2\pi)^{\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}} (p^{\frac{1}{2}})^{\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q}\right) + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} (q^{\frac{1}{2}})^{-\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q}\right) + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} \\ &= (2\pi)^{\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}} p^{\frac{1}{2p}} q^{-\frac{1}{2q}}. \end{aligned}$$

□

Podemos agora concluir a demonstração do principal resultado desta dissertação.

**Teorema 3.4.4** (Babenko). *Seja  $1 < p \leq 2$  e suponha que  $1/p + 1/q = 1$ , com  $q = 2l$  com  $l$  inteiro positivo. Para qualquer  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , vale a desigualdade*

$$\left[ \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^q dy \right]^{1/q} \leq \left[ \sqrt{\frac{p}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}. \quad (3.122)$$

Além disso, vale a igualdade para funções Gaussianas  $f$  da forma

$$f(x) = e^{-ax^2+ibx} \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a > 0. \quad (3.123)$$

*Demonstração.* Seja  $f \in L^p$  com  $\|f\|_p = 1$ . Para cada  $t \in (0, 1)$ , o supremo  $\mu_t$  cumpre

$$\|\widehat{K_t f}\|_q \stackrel{3.14}{\leq} \mu_t \|f\|_p. \quad (3.124)$$

Pelo Teorema 3.4.9 do Apêndice,  $\widehat{K_t f} \rightarrow f$  fortemente em  $L^p$  quando  $t \rightarrow 1^-$ , logo

$$\|\hat{f}\|_p \stackrel{3.4.9}{=} \lim_{t \rightarrow 1^-} \|\widehat{K_t f}\|_p \stackrel{3.124}{\leq} \lim_{t \rightarrow 1^-} \mu_t \|f\|_p \stackrel{3.120}{=} \frac{p^{\frac{1}{2p}} q^{-\frac{1}{2q}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}}} \|f\|_p,$$

que é equivalente à desigualdade (3.122).

Agora, se  $f$  é da forma (3.123), então pelo Exemplo 2.1.5 vale

$$\hat{f}(y) \stackrel{2.1.5}{=} \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{(y-b)^2}{4a}}, \quad (3.125)$$

e assim

$$\|\hat{f}\|_q \stackrel{3.125}{=} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{(\sqrt{2a})} e^{-\frac{(y-b)^2}{4a}} \right|^q dy \right)^{1/q} = \frac{1}{\sqrt{2a}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-b)^2}{4a} q} dy \right)^{1/q} \stackrel{2.6}{=} \left( \frac{1}{2a} \right)^{1/2} \left( \frac{4\pi a}{q} \right)^{1/(2q)}. \quad (3.126)$$

Por outro lado,

$$\|f\|_p \stackrel{3.123}{=} \left( \int_{\mathbb{R}} |e^{-ax^2+ibx}|^p dx \right)^{1/p} = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-apx^2} dx \right)^{1/p} \stackrel{2.6}{=} \left( \frac{\pi}{ap} \right)^{1/(2p)}. \quad (3.127)$$

Portanto

$$\begin{aligned} (\sqrt{2a})^{1/p+1/q} \stackrel{1.29}{=} \sqrt{2a} &\iff (\sqrt{2a})^{-1} (\sqrt{2a})^{1/q} = (\sqrt{2a})^{-1/p} \\ &\iff \left( \frac{1}{2a} \right)^{1/2} (2a)^{1/(2q)} = \left( \frac{1}{2a} \right)^{1/(2p)} \\ &\iff \left( \frac{1}{2a} \right)^{1/2} \left( \frac{4\pi a q}{q 2\pi} \right)^{1/(2q)} = \left( \frac{p\pi}{2\pi a p} \right)^{1/(2p)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \left(\frac{1}{2a}\right)^{1/2} \left(\frac{4\pi a}{q}\right)^{1/(2q)} \left(\frac{q}{2\pi}\right)^{1/(2q)} = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^{1/(2p)} \left(\frac{\pi}{ap}\right)^{1/(2p)} \\
&\stackrel{3.127}{\iff} \|\hat{f}\|_q \left(\frac{q}{2\pi}\right)^{1/(2q)} = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^{1/(2p)} \|f\|_p \\
&\iff \left[\sqrt{\frac{q}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^q dy\right]^{1/q} = \left[\sqrt{\frac{p}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right]^{1/p},
\end{aligned}$$

que é a igualdade em (3.122). Isso conclui a demonstração do Teorema de Babenko.  $\square$

# Conclusão

Algumas décadas após o resultado de Babenko, Beckner [2] obteve a solução completa do problema de caracterização da melhor constante na desigualdade de Hausdorff-Young.

**Teorema 3** (Beckner-1975). Seja  $A_p = \sqrt{p^{1/p}q^{1/q}}$ , com  $1/q + 1/p = 1$  e  $1 < p < 2$ . Se  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , então

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A_p^n \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

A conexão entre a Transformada de Fourier e as funções de Hermite é explorada em um outro nível nesse trabalho, com ideias provenientes de trabalhos de mecânica quântica para abordar o problema via certos operadores agindo em espaços de funções com respeito a medida gaussiana. Esse trabalho deixou em aberto um outro problema proposto no artigo de Babenko: que os únicos extremizantes da desigualdade de Hausdorff-Young são, de fato, apenas as gaussianas.

Lembramos que  $G(x, y)$  é um **núcleo Gaussiano** em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  quando  $G$  é a exponencial de uma forma quadrática em  $x$  e em  $y$ . Assim, o núcleo que define a transformada de Fourier é um caso particular de um núcleo Gaussiano.

No artigo [8] de 1990, Lieb investigou a generalização do que estudamos nesta dissertação. Ele resolveu o problema geral de encontrar a constante ótima para operadores de convolução de  $L^p$  em  $L^q$ , com  $p$  e  $q$  expoentes conjugados, cujo núcleo é Gaussiano, e verificou que as funções em  $L^p$  que realizam essa constante são necessariamente Gaussianas. Isso acontece em geral para  $1 \leq p \leq q < \infty$ , e para  $p > q$  em alguns casos especiais.

Fica em aberto a possibilidade de adaptar o método de Babenko para abordar outros problemas relacionados a famílias de funções ortogonais, como as funções de Hermite. No entanto, não tivemos tempo para investigar mais profundamente essa linha de ideias.

Outra demonstração da versão sharp da Desigualdade de Hausdorff-Young pode ser encontrada no artigo [7] de 2019 de P. Ivanisvili e A. Volberg. Eles utilizaram técnicas distintas para mostrar que um resultado de monotonicidade discreta, devido a Beckner, implica na monotonicidade contínua de um fluxo associado a transformada de Fourier.

Vale a pena citar ainda que existe uma lista de referências mais modernas que exploram resultados sobre quase-extremizantes, como o trabalho de 2019 de Christ [3]. Isso mostra que problemas relacionados a questões de extremizantes ainda estão sendo investigados.

# Apêndice

Apresentamos brevemente as funções  $\psi_n$  que cumprem as propriedades  $\widehat{\psi}_n = (-i)^n \psi_n$ ,  $K(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \psi_n(x) \psi_n(y)$  e  $\widehat{K}(t) \rightarrow \widehat{f}$  fortemente em  $L^p$  quando  $t \rightarrow 1^-$ . A referência aqui é o livro [11].

O **polinômio de Hermite** de ordem  $n$  é definido por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad (3.128)$$

e a **função de Hermite** de ordem  $n$  é definida por

$$\phi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (3.129)$$

**Teorema 3.4.5.** *Se  $|t| < 1$ , então vale a convergência no sentido uniforme*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{2^n n!} t^n H_n(x) H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left(\frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2}\right). \quad (3.130)$$

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Tomando  $R = 1$  e  $S = 2x$  no exemplo 2.1.4,

$$e^{-x^2} \stackrel{2.12}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2+i2xu} du. \quad (3.131)$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, podemos derivar sob o sinal da integral em \*, e usando que  $\frac{d^n}{du^n} e^{au} = a^n e^{au}$  ( $a$  constante) em \*\*,

$$\begin{aligned} H_n(x) &\stackrel{3.128}{=} (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \\ &\stackrel{3.131}{=} (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2+i2xu} du \\ &\stackrel{*}{=} (-1)^n e^{x^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-u^2+i2xu} du \\ &\stackrel{**}{=} (-1)^n e^{x^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (i2u)^n e^{-u^2+i2xu} du \\ &= \frac{(-2i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} u^n e^{-u^2+i2xu} du. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Agora, note que para  $|t| < 1$ , a série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y)$  é convergente pois vale

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) &\stackrel{3.132}{=} \frac{e^{x^2+y^2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{(-2tuv)^n}{n!} e^{-u^2-v^2+i2xu+i2yv} dudv \\ &= \frac{e^{x^2+y^2}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2-v^2+i2xu+i2yv-2tuv} dudv. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Portanto podemos aplicar o Teorema de Fubini para ver que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{2^n n!} t^n H_n(x) H_n(y) &\stackrel{3.133}{=} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \frac{e^{x^2+y^2}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2-v^2+i2xu+i2yv-2tuv} dudv \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2-v^2+i2xu+i2yv-2tuv} dudv \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2+i2xu} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2+i2yv-2tuv} dv \right) du \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2+i2xu} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-(v+tu)^2+(tu)^2+i2yv} dv \right) du \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2+i2xu+(tu)^2} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-(v+tu)^2+i2yv} dv \right) du \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2+2ixu+(tu)^2} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2+i2y(v-tu)} dv \right) du \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2+2ixu+(tu)^2-i2ytu} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2+i2yv} dv \right) du \\ &\stackrel{3.131}{=} \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2+2ixu+(tu)^2-i2ytu} \left( \sqrt{\pi} e^{-y^2} \right) du \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)-y^2}}{\pi} \sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2+2ixu+(tu)^2-i2ytu} du \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2(1-t^2)+iu2(x-yt)} du \\ &\stackrel{2.12}{=} \frac{e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{1-t^2}} e^{\frac{(x-yt)^2}{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp \left( \frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2} \right). \end{aligned}$$

□

Podemos enunciar as funções de Hermite  $\psi_n$  normalizadas de modo conveniente.

**Corolário 3.4.6.** *Considere*

$$\psi_n(x) = \frac{\phi_n(x)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}}. \quad (3.134)$$

Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \psi_n(x) \psi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp \left( \frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2} \right). \quad (3.135)$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} t^n \psi_n(x) \psi_n(y) &\stackrel{3.134}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \phi_n(x) \phi_n(y) \\
&\stackrel{3.129}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n!} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} H_n(x) H_n(y) \\
&\stackrel{3.130}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left(\frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2}\right).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.4.7.** *Vale a igualdade*

$$\widehat{\phi}_n(x) = (-i)^n \phi_n(x). \quad (3.136)$$

*Demonstração.* Ver [11], página 81.

□

**Corolário 3.4.8.** *Vale a igualdade  $\widehat{\psi}_n(x) = (-i)^n \psi_n(x)$ .*

*Demonstração.*

$$\widehat{\psi}_n(x) \stackrel{3.134}{=} \frac{\widehat{\phi}_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \stackrel{3.136}{=} \frac{(-i)^n \phi_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} = (-i)^n \psi_n(x). \quad (3.137)$$

□

**Teorema 3.4.9.** *Para qualquer  $f \in L^p$  com  $1 \leq p \leq 2$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \|\widehat{K}_t f\|_q = \|\widehat{f}\|_q. \quad (3.138)$$

*Demonstração.* Usando o Teorema da Convergência Dominada em \* a seguir,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 1^-} \|\widehat{K}_t f - \widehat{f}\|_q^q &\stackrel{3.5}{=} \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{R}} |K_{-it}(x) - \widehat{f}(x)|^q dx \\
&\stackrel{3.4}{=} \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_{\mathbb{R}} \left| \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\pi(1+t^2))}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x+ity)^2}{1+t^2}\right) f(y) dy \right\} - \widehat{f}(x) \right| dx \\
&\stackrel{*}{=} \int_{\mathbb{R}} \left| \lim_{t \rightarrow 1^-} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\pi(1+t^2))}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x+ity)^2}{1+t^2}\right) f(y) dy \right\} - \widehat{f}(x) \right|^q dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y) dy \right\} - \widehat{f}(x) \right|^q dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x) - \widehat{f}(x)|^q dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

# Referências Bibliográficas

- [1] K. I. Babenko. An inequality in the theory of Fourier integrals. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 25:531–542, 1961. 1, 2, 33
- [2] W. Beckner. Inequalities in Fourier analysis. *Ann. of Math. (2)*, 102(1):159–182, 1975. 74
- [3] M. Christ. Near-extremizers of Young’s inequality for Euclidean groups. *Rev. Mat. Iberoam.*, 35(7):1925–1972, 2019. 74
- [4] C. R. de Oliveira. *Introdução à análise funcional*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001. 15, 16
- [5] J. Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Urbe. 25, 26
- [6] G. B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. 3, 11, 12, 13, 14, 15, 22, 25, 29, 30
- [7] P. Ivanisvili and A. Volberg. From discrete flow of beckner to continuous flow of janson in complex hypercontractivity. *Journal of Functional Analysis*, 276(9):2716–2730, May 2019. 74
- [8] E. H. Lieb. Gaussian kernels have only Gaussian maximizers. *Invent. Math.*, 102(1):179–208, 1990. 74
- [9] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. 3, 4, 5, 6, 11, 23
- [10] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Real analysis*, volume 3 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. Measure theory, integration, and Hilbert spaces. 3

- [11] E. C. Titchmarsh. *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Chelsea Publishing Co., New York, third edition, 1986. 75, 77