UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MARA CRISTINA BALTAZAR

APRENDIZAGEM POR INVESTIGAÇÃO:

EXPLORAR E DESENVOLVER CONCEITOS MATEMÁTICOS

Porto Alegre (RS)
2024

MARA CRISTINA BALTAZAR

APRENDIZAGEM POR INVESTIGAÇÃO:

EXPLORAR E DESENVOLVER CONCEITOS MATEMÁTICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vandoir Stormowski.

Porto Alegre (RS)
2024

CIP - Catalogação na Publicação

Baltazar, Mara Cristina
Aprendizagem por investigação: Explorar e desenvolver conceitos Matemáticos / Mara Cristina Baltazar. -- 2024.
106 f.
Orientador: Vandoir Stormowski.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2024.

1. Potencialidades . 2. Papel Ativo. 3. Investigação matemática. 4. Engajamento. 5. Cenários para investigação. I. Stormowski, Vandoir, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

AGRADECIMENTOS

Agradecer…

São tantas pessoas envolvidas direta ou indiretamente na trajetória do mestrado, pessoas atenciosas, solícitas, colaborativas, amigas.

Em especial, um agradecimento à minha família: Rosimar, Matheus e Rafael, que me apoiaram e me incentivaram em todos os momentos, principalmente aqueles que por hora parecia ser impossível a concretização desse trabalho, muito obrigada!

D. Terva, minha mãe, não tenho palavras para expressar o reconhecimento merecido.

Aos estudantes, professores e equipe diretiva da escola por onde transitei, que de forma acolhedora e sem restrições me possibilitaram construir esse trabalho.

Aos colegas e professores desse Programa de Pós-Graduação, que me acolheram em suas aulas, me ouviram, me interpelaram e me fizeram aprender.

E por fim, de forma muito especial, a meu orientador, prof. Dr. Vandoir Stormowski por tantos ensinamentos compartilhados, pela constante e valiosa paciência comigo ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho.

A todos o meu sincero agradecimento.

Educar verdadeiramente não é ensinar
fatos novos ou enumerar fórmulas prontas,
mas sim preparar a mente para pensar.

Albert Einstein

RESUMO

Esta pesquisa explora formas de ensinar e de aprender, indo além dos métodos tradicionais já conhecidos. O objetivo é encontrar métodos ainda mais eficazes que possam beneficiar tanto os estudantes quanto os professores, proporcionando resultados cada vez melhores dentro da sala de aula. Essa busca contínua por novas metodologias reflete o compromisso contínuo com a melhoria da qualidade da educação, garantindo que as práticas pedagógicas estejam sempre alinhadas com as necessidades e desafios do ambiente educacional em constante evolução. Esta dissertação investiga, propõe e analisa a aplicação de oito atividades baseadas em cenários para investigação, delineados por Ole Skovsmose, sendo este um dos aportes desta pesquisa, realizadas em oito encontros com uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental. Os estudantes foram estimulados a investigar quais elementos de uma bicicleta estão relacionados com conceitos matemáticos. Esta pesquisa possui a seguinte pergunta norteadora: "Como a implementação de atividades na forma de aprendizagem investigativa pode promover um papel ativo e o engajamento dos estudantes no processo de aprendizagem?". E, para amparar este questionamento, definimos os seguintes objetivos: analisar as potencialidades de aprender matemática por investigação; identificar os fatores que possibilitam ter uma aprendizagem com conexões da realidade do estudante e interpretar os dados identificando habilidades desenvolvidas pelos estudantes durante as atividades. Metodologicamente, trata-se de uma pesquisa qualitativa, na qual se faz uso de uma abordagem observatório-descritiva para coleta de dados, que serão feitos por anotações, fotos, e relatos dos estudantes e do professor pesquisador. Nesse sentido, observamos como a aprendizagem matemática por investigação pode evidenciar conceitos e as suas relações com o cotidiano, e possibilitar aos estudantes a serem mais ativos e a pensar criticamente. Ao ter evidenciado a relação entre os conceitos matemáticos e o cotidiano, a pesquisa contribuiu para uma educação matemática mais eficaz e alinhada com a vida real dos estudantes. Os resultados destacam a importância da aprendizagem por investigação como uma estratégia pedagógica importante para promover o desenvolvimento integral dos estudantes em matemática.

Palavras-chaves: Cenários para investigação. Engajamento. Investigação matemática. Papel ativo. Potencialidades.

ABSTRACT

This study explores ways of teaching and learning, going beyond the traditional methods already known. The main objective is to find even more effective methods to benefit students and teachers, providing increasingly better results within the classroom. This continuous search for new methodologies reflects the ongoing commitment to improving the quality of education, ensuring that pedagogical practices are always aligned with the needs and challenges of the constantly evolving educational environment. This dissertation investigates, proposes, and analyzes the application of eight activities based on scenarios for investigation, outlined by Ole Skovsmose, which is one of the subsidies of this research, carried out in eight meetings with an eighth-grade elementary school class. Students were encouraged to investigate which elements of a bicycle are related to mathematical concepts. This research has the following guiding question: "How can activities based on investigative learning promote an active role and engagement of students in the learning process?" And, to support this question, we defined the following objectives: to analyze the potential of learning mathematics through investigation; to identify the factors that make learning with connections to the student's reality possible, and interpret the data by identifying skills developed by the students during the activities. Methodologically, this is a qualitative research, in which an observatory-descriptive approach is used to collect data in the form of notes, photos, and reports from students and the researcher-professor. In this sense, we observe how mathematical learning through investigation can highlight concepts and their relationships with everyday life, as well as enable students to be more active and think critically. By underlining the relationship between mathematical concepts and everyday life, the research contributed to a more effective mathematical education aligned with student's real lives. The results emphasize the importance of investigative learning as a relevant pedagogical strategy to promote the integral development of students in mathematics.

Keywords: Potentialities. Active Role. Mathematical investigation. Engagement. Landscapes of investigation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 TRAJETÓRIA PESSOAL E MOTIVAÇÕES

Sempre fui uma pessoa muito curiosa, ansiando por descobrir o novo: novos sabores, novos lugares, novas paisagens e novos conceitos. Lembro-me bem de que, mesmo antes de entrar na escola, amava o “lápis”. Este objeto usual era especial para mim pois com ele eu aprendi a escrever as primeiras letras e a escrever (espelhar) palavras dos rótulos de produtos comprados. Quanto mais eu o utilizava, mais eu me questionava e tentava interpretar aquelas letras, e com o tempo fui me familiarizando com elas.

Foi nas séries finais do Ensino Fundamental que percebi minha paixão pelos números, pelas operações matemáticas e como tudo parecia se encaixar perfeitamente. Estudar sempre foi minha melhor motivação para alcançar meus objetivos, a curiosidade sempre esteve comigo e isso me fazia explorar conhecimentos sempre além do que os professores me ensinaram em sala de aula, principalmente os de matemática.

Cursei o Ensino Médio Técnico em Contabilidade e aprendi muito sobre matemática financeira, despertando mais ainda a vontade de lecionar matemática. E, passados alguns anos sem estudar, assim que tive a oportunidade de voltar, voltei.

Quando foi implantado o campus do Instituto Federal Catarinense na cidade de Sombrio, me interessei em saber quais graduações eles ofereciam. No momento em que descobri que era ofertado o curso de Licenciatura em Matemática, entendi que essa era a oportunidade que eu estava esperando, assim que abriu o processo seletivo eu me inscrevi; logo em seguida consegui ser selecionada, e dias depois estava matriculada.

Durante minha graduação pude construir conhecimentos em todas as disciplinas, mas uma das que mais se destacou para mim foi a de tecnologias. Nesta disciplina eu conheci e aprendi a utilizar *softwares* como o *Winplot*, *GeoGebra*, *Poly*, *Winmat* e outros. Dentro dessa disciplina fizemos trabalhos voltados para o aprendizado dos estudantes e que foram aplicados em sala de aula no momento de nossos estágios. Observei que esta metodologia de ensino utilizando as tecnologias digitais encantava não só a mim, mas aos estudantes também.

Assim que comecei a lecionar, percebi que a realidade das escolas da rede pública era diferente da que conheci durante o estágio, e que muitas sequer tinham computador. Este fato me decepcionou bastante, mas continuei a buscar novas formas de diversificar as aulas, aprendendo e empregando novas metodologias.

Sobre a importância da aprendizagem de matemática, Braga e Morais (2020) declaram que esta é fundamental para o desenvolvimento das sociedades, pois engloba ideias, métodos e procedimentos necessários para o desenvolvimento do raciocínio e comunicação, bem como investigação e resolução de situações problema. Assim, enquanto professora, busco propostas de atividades em sala de aula onde eu consiga que meus discentes percebam que a matemática está presente no seu dia a dia.

Após a conclusão da licenciatura em matemática, buscando ainda aperfeiçoar minhas práticas em sala de aula, fiz três pós graduações: *Lato Sensu* em Ensino da matemática (2017); *Lato Sensu* em Educação Especial Inclusiva (2018); e *Lato Sensu* em Alfabetização Matemática (2020). Esses cursos me oportunizaram novos conhecimentos e proporcionaram melhoramentos para minhas práticas educativas.

Buscando aprender e aprender a ensinar a matemática de uma forma mais próxima da realidade do estudante, no início de 2021 participei como aluna especial da disciplina de Análise Combinatória e Probabilidade, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, em seguida, realizei o processo seletivo para a entrada deste programa. Em agosto de 2021 iniciei o mestrado, e para minha orientação da dissertação foi denominado como meu orientador, o professor Dr. Vandoir Stormowski.

Nas práticas pedagógicas às vezes encontro estudantes com dificuldades em compreender e entender a matemática, gerando desmotivação. Essa desmotivação é oriunda de definições mal fundamentadas e sem significados. Com o objetivo de mudar essa situação, e procurando possibilitar o envolvimento do aluno no seu próprio aprendizado durante as aulas, quando possível, procuro possibilitar ao aluno atividades relacionadas a sua realidade e de algum modo fazer relação com a matemática.

É importante salientar que no ano de 2020, devido à pandemia de COVID-19, foram suspensas as atividades presenciais nas escolas, e professores e estudantes tiveram que se adaptar ao ensino remoto utilizando a internet, celular e outros meios para que as aulas chegassem para o maior número possível de estudantes e ainda assim, infelizmente, nem todos os alunos conseguiram ter acesso às aulas remotas, pois muitos não possuíam os recursos necessários para isso. Este obstáculo promoveu uma grande desigualdade de aprendizagem entre os estudantes.

Já no ano de 2022, em um cenário de regresso às aulas presenciais num período pós-pandêmico, percebi logo nas primeiras aulas essas dificuldades dos estudantes tanto com as novas aprendizagens como também um distanciamento dos conhecimentos matemáticos aprendidos antes da pandemia. Em especial, observei que além disso os estudantes estavam ansiosos e apáticos com relação à escola e à sala de aula, sendo essas características resultado de tempos difíceis enfrentados por todos.

Neste período, constatei que em uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental se destacava com dificuldades de conceitos básicos de geometria: os alunos não conseguiam distinguir os conceitos de raio, diâmetro e circunferência e apresentavam noções mínimas de equações de primeiro grau. Entrementes, passei a me questionar sobre como e qual metodologia eu poderia empreender para que estes estudantes tivessem um melhor aprendizado. Essa motivação me levou então a elaborar uma proposta de atividade na qual eles deveriam investigar a matemática de forma que os engajassem para aprender e a entender, que a matemática está abundantemente presente em seu cotidiano, mesmo que muitas vezes de maneira despercebida.

Quando ingressei para o mestrado, minha proposta de dissertação abordava um tema que no momento achei interessante abordar, porém ainda não contemplava meus objetivos como pesquisadora, pois queria implementar uma abordagem que oportunizasse o aluno a investigar e a questionar, tendo ele mesmo o papel ativo do seu próprio aprendizado.

Após algumas reuniões de orientação em que se debatia entre um tema ou outro, surgiu o tema “bicicleta”. Isto não foi por acaso, já que a bike é um dos meus principais hobbies e tem presença assídua nos meus momentos de lazer. Sabendo que a maioria dos alunos utiliza a bicicleta como um meio de transporte para chegar até a escola, e que em sua estrutura podemos encontrar elementos matemáticos, tornou-se claro que este objeto poderia ser um recurso adequado para esta pesquisa. Logo, comecei a pesquisar e organizar uma proposta para implementar com a turma e como consequência esse acabou sendo o tema de pesquisa para esta dissertação; sendo utilizado a metodologia de investigação.

No capítulo a seguir apresento a introdução desta dissertação trazendo as principais noções que contextualizam esta pesquisa.

2 INTRODUÇÃO

Os problemas mais comumente encontrados nas escolas atualmente estão relacionados com dificuldades no processo de aprendizagem, particularmente com relação à construção do aprendizado matemático (Masola; Vieira; Allevato, 2016, 2019). Essas dificuldades que muitas vezes encontramos existe há muito tempo dentro da sala de aula, desde os tempos mais antigos.

Papert (2008) retrata uma realidade brusca que caracteriza dois grupos de viajantes no tempo: um de cirurgiões e um de professores, ambos vindos de ao menos um século atrás. Os primeiros, ao entrar em uma sala de cirurgia de um moderno hospital, ficariam espantados com os novos instrumentos e técnicas utilizados. Poderiam, talvez, supor qual seria o órgão operado, no entanto as incertezas seriam tantas que não saberiam o que estaria sendo feito.

Por outro lado, os professores viajantes reagiram de modo bastante diferente ao entrarem em uma sala de aula. Talvez encontrassem alguns objetos estranhos e técnicas diferentes, contudo saberiam exatamente o que estaria ocorrendo e poderiam facilmente assumir a classe. A escola e o professor vêm por anos seguindo os mesmos moldes de ensino e aprendizagem, não levando em consideração o cotidiano do aluno e o seu meio social.

Papert (2008) enfatiza que, ao contrário da medicina, que tem avançado significativamente ao longo dos anos, a educação muitas vezes permanece estagnada, presa a métodos tradicionais de ensino e aprendizagem. Esses métodos frequentemente não levam em conta a realidade cotidiana dos estudantes e o contexto social em que estão inseridos.

Assim resultando em uma desconexão entre o que é ensinado e as necessidades e experiências dos estudantes. Essa crítica aponta para a necessidade de uma reformulação educacional que considere os contextos individuais e sociais dos estudantes. Outra situação que pode as vezes dificultar o aprendizado está forma na qual a matemática é abordada pelo docente, muitas vezes tratando de realidades que não são as conhecidas pelo estudante, assim, tornando o processo de aprendizagem desinteressante.

Uma questão de relevância é a de que, em vez de sanar suas dificuldades, os estudantes vão acumulando ainda mais desajustes com os novos conceitos, que muitas vezes são importantes como pré-requisitos para a continuação da aprendizagem dos novos conteúdos matemáticos, tais dificuldades despertam nos estudantes um forte sentimento de rejeição e resistência em desenvolver os conceitos matemáticos.

Abreu (1996) discorre que havia pouco tempo, a matemática ainda era tida como uma ciência independente da conjuntura sociocultural. D'Ambrósio (1993) articula que o conceito principal considera apenas a precisão absoluta da matemática, sem considerar qualquer vínculo com o contexto sociocultural ou político. Contudo, a matemática não pode ser vista como uma ciência estagnada; muito pelo contrário, ela está em constante revisão e ampliação de seus conceitos.

A matemática está de uma forma ou de outra ligada a diversas áreas do conhecimento, abrangendo uma crescente variedade e profundidade de assuntos ao longo da história que suprem as necessidades humanas. Ela fornece as ferramentas e métodos necessários para compreender e resolver problemas complexos em campos como a ciência, a tecnologia, a engenharia, a economia e as ciências sociais.

Para os estudantes, as tecnologias disponíveis ao seu redor, como calculadoras, videogames e diversos aplicativos, são ferramentas que facilitam suas atividades cotidianas. Essas tecnologias são úteis em várias situações, como realizar cálculos ou realizar outras atividades que exigem conhecimento matemático, como medir ângulos.

Anteriormente, os professores precisavam ensinar os estudantes a usar instrumentos tradicionais como o transferidor e o compasso para medir ângulos. Hoje em dia, no entanto, existem muitos tipos de aplicativos para celulares que realizam esse tipo de medição, simplificando o processo e tornando-o mais acessível.

O professor deve proporcionar ao estudante o conhecimento necessário para que ele entenda que esses componentes tecnológicos não estão prontos e acabados, e que, por trás de tanta tecnologia, existe a matemática. Nos dias atuais, um professor precisa buscar conceitos que envolvam conhecimentos matemáticos para lidar com situações do seu meio, explorando e investigando como tais componentes foram construídos.

Mesmo com a disponibilidade de várias tecnologias, como a calculadora, o estudante sempre precisará compreender o processo, sabendo como e quando usar essas ferramentas. Essa compreensão é essencial para que ele possa fazer uso crítico e eficaz das tecnologias, valorizando o aprendizado matemático que sustenta essas inovações.

Com tantos avanços da tecnologia, por vezes, fica muito difícil apresentar para o estudante conteúdos matemáticos contextualizados na realidade do cotidiano do estudante e que realmente o estudante perceba que ali exista a matemática, ou para que aprender a matemática, pois se tem vários tipos de instrumentos tecnológicos que fazem toda a parte do cálculo, de medidas, e até desenhos geométricos. Tornando-se assim, um objetivo para o professor transformar o processo de aprendizagem de matemática para que os estudantes possibilitem fazer conexão com sua realidade, na tentativa de alterar sua opinião contrária que os mesmos têm em relação à disciplina.

Nesse contexto, surge a necessidade de uma renovação do modo de aprender matemática, buscando metodologias que incentivem a observar, investigar e argumentar por parte dos estudantes. Uma abordagem na qual a realidade do estudante é valorizada com o objetivo de aproximá-lo dos conceitos matemáticos e ajudá-lo a organizar esses pensamentos; assim, sendo uma metodologia capaz de possibilitar ao interpretar o meio no qual está inserido por meio de estratégia que leve ao raciocínio matemático, desenvolvendo o seu próprio aprendizado.

Na atualidade, o ensino por investigação pode ser encarado como facilitador da promoção do ensino da Ciência, do desenvolvimento de competências e habilidades, e das relações entre Ciência, Tecnologia, Sociedade e Ambiente (Freire, 2018). A escola e o professor têm como compromisso preparar os indivíduos para a sua convivência na sociedade, para obrigações e responsabilidades que venham a assumir no mundo do trabalho.

As atividades investigativas tendem a ser importante no processo de aprendizagem, pois permitem a oportunidade de desenvolver a exploração, argumentação, trocas de informações, debate com colegas sobre resultados, de ideias e exemplos. Tendo-se aceitação de que aquele aprendizado matemático é válido assim podendo levar os estudantes a identificar a importância da construção do conhecimento e que estes estão geralmente ligados diretamente em seu cotidiano.

Compreendendo a importância da aprendizagem por meio da investigação, e que o estudante tenha capacidade de aprender em um processo de questionamento, de descoberta, conforme suas próprias necessidades. E assim poder esclarecer e ampliar seu conhecimento de acordo com seu cotidiano, tornando-o ativo e engajado em querer aprender.

Entender a importância da aprendizagem investigativa é fundamental, pois capacita o estudante a aprender através de questionamentos e descobertas, conforme suas próprias necessidades. Esse processo facilita a clarificação e a ampliação do seu conhecimento de maneira mais eficiente.

Esta dissertação propõe uma abordagem por meio de uma sequência de atividades, aplicada para analisar como oportunizar o aprendizado da matemática por investigação. Nessa sequência é oferecido ao estudante a possibilidade de ampliar seus conhecimentos sobre os conceitos matemáticos dentre eles os de geometria.

Diante disso, o estudo da geometria foi escolhido pela sua importância, pois oferece ao indivíduo o conhecimento de formas e dimensões, permitindo a construção, exploração e reconhecimento da geometria no cotidiano do estudante. E que, no entanto, esse conteúdo muitas vezes não é abordado em sala de aula com a devida relevância.

Gravina e Conteiro (2011, p.2) destacam que "o estudo da geometria escolar se concentra na apresentação de conceitos e propriedades geométricas, sem maiores preocupações com o desenvolvimento do raciocínio geométrico [...]". Em outras palavras, é fundamental direcionar o ensino para a aprendizagem do estudante, buscando estabelecer conexões com sua realidade e com objetos concretos familiares, visando desenvolver competências de abstração relacionadas à geometria.

São diferentes as razões encontradas para justificar a ausência do aprendizado de geometria, no entanto não se tem dúvida do valor que ela possui para um indivíduo em seu cotidiano. É fato que a geometria incentiva o estudante a pensar de uma maneira específica, de tal maneira que saber aritmética ou álgebra não é suficiente para resolver problemas de geometria.

Desse modo, para o desenvolvimento deste trabalho serão fornecidas aos estudantes, alternativas de atividades para que tenham uma aprendizagem contextualizada com o seu cotidiano e que eles possam construir seus próprios conhecimentos. Para a sequência das atividades propostas, elaborou-se uma intervenção pedagógica baseada em atividades que possibilitassem ao estudante investigar elementos matemáticos relacionados a um objeto presente em seu quotidiano. E encorajando-o a explorar tópicos por conta própria, usando seus próprios pensamentos e ideias. Dando possibilidades de apresentar melhoras na sua aprendizagem e a ajudar a manter a atenção dos estudantes e motivá-los a querer aprender.

Por conseguinte, para a realização desta dissertação temos a pergunta diretriz da pesquisa formulada a partir destas condições descritas, que se expressa da seguinte maneira:

“Como a implementação de atividades na forma de aprendizagem investigativa pode promover um papel ativo e o engajamento dos estudantes no processo de aprendizagem?”.

Com base nesta pergunta norteadora, foram elaborados os objetivos de pesquisa para auxiliar no desenvolvimento das análises da pesquisa, sendo estes:

- Analisar as potencialidades de aprender matemática por investigação;
- Identificar os fatores que possibilitam ter uma aprendizagem com conexões da realidade do estudante;
- Interpretar os dados identificando habilidades desenvolvidas pelos estudantes durante as atividades.

Definiu-se também, como objetivo procedimental, o seguinte enunciado:

Aplicar uma proposta de atividade para explorar, descobrir, experimentar, interagir, e comunicar-se matematicamente.

Desta forma, a dissertação está organizada em seis capítulos ordenados de modo a contextualizar o problema, detalhar as abordagens aplicadas e apresentar o desfecho destas intervenções. Esta dissertação foi estruturada com o intuito de expor de forma clara os conceitos que embasam a pesquisa, os métodos utilizados e os resultados encontrados, bem como sua relevância em paralelo a outros trabalhos semelhantes da área.

No capítulo introdutório, o capítulo 1, foram apresentados o percurso escolar e trajetória profissional da autora. O capítulo 2 apresenta a introdução, o contexto, os objetivos da pesquisa e a metodologia a ser utilizada. Na sequência, o capítulo 3 descreve fundamentação teórica que embasa o presente trabalho. No capítulo 4, temos as metodologias utilizadas e a descrição das atividades a serem desenvolvidas pelos estudantes. No capítulo 5, estão apresentados os relados das atividades e analises de dados produzidos e por fim o capítulo 6, as considerações finais.

3 APORTE TEÓRICO

Neste capítulo que está dividido em cinco seções, serão apresentadas as teorias que darão contexto e suporte a esta pesquisa. Na primeira seção apresenta-se uma breve discussão sobre a investigação matemática embasada nos trabalhos de João Pedro da Ponte. Na segunda seção, serão apresentados os cenários para investigação embasada principalmente nos trabalhos de Ole Skovsmose e, na terceira seção descreve-se sobre a autonomia e a relação dela com a aprendizagem por investigação, e ainda na seção quatro, uma breve discussão sobre o papel do docente na investigação matemática e na última seção tem-se uma revisão de estudo de trabalhos feitos sobre o tema desta pesquisa.

3.1 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

No processo de aprendizagem da matemática, diversas abordagens podem ser escolhidas. Entre estas existe a investigação matemática, e nesta seção serão abordados aspectos e teorias para o desenvolvimento desta pesquisa.

De modo geral, é de longa data que pesquisadores e docentes procuram modos de transformar e cooperar no processo de aprendizagem em matemática. Dentro das práticas educativas de matemática, a mais comumente utilizada é a forma tradicional (aula expositiva), também definida por Paulo Freire como educação bancária. Essa abordagem tem por base a transmissão do conhecimento do mestre para o aluno, em que o estudante apenas escuta o que o professor fala (transmite) e não é convidado a refletir ou ter um pensamento crítico sobre o que está sendo transmitido (Freire, 2021).

Nos dias de hoje ainda percebemos que existe muito dessas práticas de ensino e de aprendizagem na escola, às vezes por falta de interesse do discente, falta de recursos ou por alguma regra (normas) da instituição educacional e ainda porque às vezes o novo, o diferente requer mais esforço e dedicação dos envolvidos. Esses desafios impactam o ambiente escolar, limitando o potencial de aprendizagem dos estudantes e a eficácia do ensino.

Somado a isso, a forma de avaliação se baseia na realização de atividades que muitas vezes foram estabelecidas por direção escolar, apostilas e outros. Sendo assim, cada vez mais “essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz [...]” Brasil, (1998, p. 37), já que a solução da atividade realizada pelo estudante pode apenas indicar que ele está repetindo aquilo que lhe foi apresentado pelo professor, não necessariamente apontando a compreensão dos conceitos apresentados.

Skovsmose (2014, p. 24), diz que “Problemas não devem pertencer a ‘realidades faz de contas’ sem nenhuma significação exceto como ilustração da matemática como ciência das situações hipotéticas”. Dentro deste processo, o estudante por muitas vezes fica sem encontrar significados pois não conseguiu compreender o que lhe foi ensinado e muito dificilmente será capaz de compreender e de fazer conexão com sua realidade cotidiana, assim sendo possível que o que lhe foi ensinado não tenha nenhum sentido e significado.

Além disso, por muitas vezes a matemática é vista como uma disciplina de certeza, uma ciência exata, que de certa forma já está pronta, acabada; ou seja, apresenta apenas um destino final (Lamonato; Passos, 2011). Este tipo de pensamento pode desencadear nos estudantes ideias incorretas sobre a matemática, como por exemplo a citada por Schoenfeld (2016, p. 69): “há somente um caminho correto para resolver qualquer problema matemático; matemática é uma atividade solitária feita por indivíduos em isolamento”. Aliás, este tipo de posicionamento desmerece a matemática enquanto ciência e campo de pesquisa, passando a ideia de que o conhecimento da matemática é apenas para alguns (Lamonato; Passos, 2011). Complementado Siegel e Borasi (1994, p. 205) ressaltam:

> [...] o conhecimento matemático é criado através de um processo não-linear no qual a geração de hipóteses tem um papel-chave; a produção do conhecimento matemático é um processo social que ocorre com a comunidade de prática; e o valor verdadeiro do conhecimento matemático é construído através de práticas retóricas.

O conhecimento matemático não tem apenas um caminho, ele abre um leque de possibilidades e é mutável. Assim como citado anteriormente, a geração de hipóteses, discussões e possibilidades é o que forma o conhecimento em matemática. Então é de suma importância que este paradigma seja desmistificado dentro da sala de aula, demonstrando que a matemática é criada através do levantamento de diversas possibilidades e hipóteses, ou seja, um processo não-linear.

Ao explorar essas visões da matemática, os professores podem auxiliar os estudantes a cultivar interesse e apreciação pela disciplina. Isso também capacita os estudantes a desenvolver habilidades de pensamento crítico e criativo, permitindo-lhes resolver atividades propostas de maneira eficiente.

Isso significa que os estudantes podem ser incentivados a fazer perguntas, explorar ideias e resolver problemas por conta própria. Isso pode ajudar os estudantes a desenvolver um melhor entendimento da matemática e a ver que ela é mais do que apenas uma série de regras e fórmulas.

Além disso, a metodologia investigativa da matemática pode permitir que o professor seja um mediador do conhecimento. Freire diz que o professor deve ser um ser "aberto a indagações, à curiosidade, às perguntas dos estudantes, as suas inibições; ser crítico e inquiridor" (Freire, 2018, p. 47), revelando desta forma, o comportamento inquieto que o professor deve ter diante da tarefa de ensinar.

Conforme o pensamento de Freire, as práticas educacionais que conectam os conteúdos escolares com a realidade e a experiência do estudante, devem adotar uma metodologia de aprendizagem ativa. Nesse contexto, é fundamental que o educando tenha liberdade e autonomia para ser o protagonista da sua própria aprendizagem.

Este papel que o professor passa a exercer na abordagem investigativa relaciona-se ao diálogo e trocas entre professor e o estudante. pois, para Freire "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção" (Freire, 2018, p. 47). O papel do professor na sala de aula em metodologias investigativas será melhor abordado no capítulo três.

A investigação matemática tem o intuito de instigar o interesse e a curiosidade dos estudantes, acerca disso Lamonato e Passos (2012, p. 62) apontam que:

> A exploração-investigação matemática é entendida como um meio pelo qual pode ocorrer a aprendizagem da Matemática em um processo que busca possibilitar ao estudante momentos de produção/criação de seus conhecimentos matemáticos, respeitando o nível de desenvolvimento em que ele se encontra. Investigar é procurar o que ainda não se conhece; investigar é questionar e procurar responder. Para investigar, é necessário querer saber; para investigar, é preciso estar curioso.

Muitas vezes, com metodologias de ensino tradicionais, limitadas em regras e decoração de fórmulas, os estudantes se encontram desmotivados e desinteressados. E a investigação matemática é uma aliada para que possa despertar o interesse desses estudantes para com a matemática podendo desenvolver habilidades importantes, como o pensamento crítico, trabalho em equipe, e a capacidade de identificar conceitos matemáticos. Brahier e Speer (1995, p. 67) definem a investigação matemática como um conjunto de tarefas que:

a) são adaptadas para resolver um problema multidimensional;

b) partem de um ponto bem definido, mas possuem diversas soluções;

c) precisam de investimento de um tempo maior para resolução, de uma aula ou mais;

d) tem como foco um tema específico e questionamentos relacionados a este tema.

Para Brahier e Speer (1995) a investigação matemática tem um tópico específico e questionamentos relacionados ao tema, ou seja, são atividades adaptadas para os estudantes, fazendo-os pensar e questionar. Nesse contexto, a investigação matemática é uma abordagem que pode ser promissora para o ensino da matemática e pode ajudar os estudantes a aprender de forma relevante e envolvente dentro do contexto de sua realidade.

Seguindo esses princípios de aprendizagem por investigação matemática, os professores podem auxiliar os estudantes a desenvolver e aprimorar uma compreensão com mais detalhes sobre os conceitos matemáticos. Paulo Freire afirma que "é preciso que o educando vá assumindo o papel de sujeito da produção de sua inteligência do mundo e não apenas o de recebedor da que lhe seja transferida pelo professor" (Freire, 2018, p. 121).

Para Ponte e et al (2016), a atividade é proposta pelo professor deixando claro o objetivo da tarefa, mas o professor vai ser mediador somente quando for necessário. Isso ocorre porque os estudantes são incentivados a identificar problemas, desenvolver e testar soluções, e ainda a avaliar resultados. A investigação matemática para Ponte, ocorre geralmente em 3 etapas, como se pode observar no quadro 1 (Ponte et al.,2016):

Quadro 1: Etapas de investigação matemática segundo Ponte (2016)

Primeira etapa	Introdução da tarefa, o professor é responsável por explicar a proposta ou problema aos alunos, deixando claro o objetivo da tarefa, o que pode ser feito por escrito ou via oral.
Segunda etapa	É a realização da investigação, que pode ser realizada individualmente, em duplas, em pequenos grupos ou até com toda a turma. A segunda etapa pode contar com a intervenção do professor quando necessário, além de que é incentivado o registro escrito para que posteriormente seja possível justificar conjecturas.
Terceira etapa	É a discussão dos resultados, o professor deve desempenhar um papel de mediador e os alunos expõem aos colegas suas conclusões e resultados a partir do que foi proposto. Ainda nesta etapa, assim que os alunos expõem suas conclusões individuais, as mesmas devem ser discutidas com todo o grupo.

Fonte: Elaborado pela autora com base em Ponte (2016).

Além disso, a investigação matemática realizada pelos alunos acontece por meio de diversos procedimentos, como procurar em diferentes fontes, tais como livros, websites, vídeos, observação de fenômenos naturais, experimentos, resolução de problemas, entre outros, para adquirir e recolher dados por diferentes meios, sejam eles observações, averiguações ou medições. Também existe a necessidade de que o aluno colabore com cada membro da equipe, que tem funções específicas e, finalmente, fazer o uso de diferentes estratégias para alcançar a solução (Ponte et al., 2002).

> Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado (Ponte et al, 2002, p. 9).

Tendo em vista essa afirmação de que, em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. A investigação pode ser utilizada como uma metodologia que pode ajudar os estudantes a aprender de forma que o leve a seu cotidiano, mesmo quando se trata de tópicos simples. De acordo com Skovsmose, (2008, p.38), “Referências à vida real parecem ser necessárias para estabelecer uma reflexão detalhada sobre a maneira como a matemática pode operar em nossa sociedade”.

Deste modo, a investigação matemática utiliza-se de temas que interessam aos estudantes, o que desperta a curiosidade dos mesmos. Assim, os estudantes se sentem motivados a procurar teorias em fontes externas, debater, levantar suposições e trocar ideias com os colegas, chegando a uma solução.

Corroborando com o que foi citado anteriormente, com a investigação matemática é possível demonstrar que a matemática vai muito além de seguir apenas um caminho. O trabalho com investigação matemática não tem o intuito de conduzir os alunos a uma resposta imediata. Segundo Varizo e Magalhães (2016, p. 23): "Investigar matematicamente envolve a participação do aluno num processo ativo, em que seu esforço na construção do conhecimento se faz imprescindível”. Nessa dinâmica, o estudante não recebe o conhecimento pronto, ele mesmo vai sendo o autor do processo.

Na investigação matemática o estudante recebe apenas as informações que devem ser necessárias para permitir o interesse, a curiosidade, e assim buscar respostas, formando seus próprios conhecimentos matemáticos. Por exemplo apresentar ao estudante a seguinte questão: “Qual a distância da sua casa até a escola?”, sendo assim, o estudante recebe a informação inicial necessária para explorar, criando cenários, e utilizando o raciocínio para obter resultados. Após analisar as informações recebidas, ser capaz de formar linhas de raciocínio e a partir do conhecimento que eles já possuem, poder chegar à elaboração de uma conclusão final e, assim, participar ativamente da construção do seu conhecimento.

Deste modo, é muito importante garantir que os estudantes se sintam motivados a construir uma resposta, que realizem as mais variadas articulações e desenvolvam quantas interpretações forem possíveis, de acordo com os conhecimentos matemáticos que eles detêm. “A interpretação da tarefa deve ser, por ela própria, um dos objetivos destas aulas, pelo que, gradualmente, deve esperar-se que o aluno a realize autonomamente ou com os seus colegas” (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003, p. 3). Além disso, em uma investigação matemática toda a experiência deve servir como aprendizado.

> Quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é naturalmente resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes não conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003, p. 17).

Durante a investigação matemática são levantadas diversas hipóteses, várias linhas de pensamentos são formadas, que podem, por sua vez, levar a questionamentos ou descobertas que vão além do problema inicial proposto. Logo, é possível motivar o estudante a querer explorar conceitos, já que apesar de a resolução do problema inicial não ser alcançada neste primeiro momento, outros conhecimentos foram gerados.

Então, diferente do ensino tradicional em que o objetivo principal é chegar à resolução do problema que foi proposto pelo professor, na investigação matemática, a construção do problema realizada pelo estudante é o objetivo principal. Assim, “a cada momento que se utiliza o pensamento na construção de ideias a respeito do mundo, pratica-se o exercício da estruturação do conhecimento [...]” (Mendes, 2009, p. 123).

A utilização da abordagem de investigação matemática possibilita que o estudante possa experienciar e entender as aplicações da matemática, além de aproximar a matemática de seu cotidiano. Portanto, é possível garantir que o discente não esteja apenas reproduzindo aquilo que lhe é transmitido (educação bancária), como acontece durante o ensino tradicional.

> Pode sempre programar-se o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá acabar. A variedade de percursos que os alunos seguem, os seus avanços e recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003, p. 22).

Essa abordagem ressalta que aprender matemática por investigação, é um método que pode levar estudantes a aprender por meio da descoberta, identificando e resolvendo problemas. Os estudantes são encorajados a fazer perguntas, explorar ideias e a desenvolver resoluções de problemas matemáticos.

Isso pode possibilitar aos estudantes desenvolverem suas habilidades de pensamento crítico, de sua autonomia, e do seu engajamento com outros estudantes, e também permitir que eles aprendam a aplicar a matemática a situações do mundo real, aproximando a matemática do seu cotidiano. “o processo de criação matemática surge aqui fértil em acontecimentos inesperados, de movimentos para a frente e para trás”. (Ponte, 2006).

Para que novos conhecimentos sejam produzidos nessa disciplina, isso muitas vezes envolve uma série de eventos inesperados, um vai e vem constante entre avanços e retrocessos. Essa percepção destaca a complexidade e a natureza não-linear presentes na descoberta e no desenvolvimento do conhecimento matemático.

Quando os estudantes são estimulados a utilizar a matemática em contextos reais do seu dia a dia, eles começam a reconhecer a importância e a utilidade da matemática na solução de problemas relevantes para sua vida. Isso pode aumentar seu interesse e motivação para aprender matemática.

Nesta seção vimos aspectos e conceitos importantes sobre como pode ocorrer a aprendizagem por investigação, principalmente a da investigação matemática, que permeiam o desenvolvimento desta pesquisa. Na seção seguinte serão abordados conceitos sobre os cenários para investigação, que são fundamentais para a investigação matemática.

3.2 CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO

Na seção anterior observamos aspectos importantes em relação à investigação matemática, além disso, foi mencionada a importância do interesse dos estudantes com a matemática, para que assim exista algum progresso no processo de aprendizagem. Neste sentido, essa seção será apresentada algumas discussões sobre cenários para investigação.

> [...] um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formular questões e a procurar explicações. O convite é simbolizado pelo “O que acontece se...?” do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus “Sim, o que acontece se...?”. Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O “Por que isto?” do professor representa um desafio e os “Sim, porque isto...? dos

> alunos indicam que eles estão encarando o desafio e estão procurando explicações, o cenário de investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário de investigação os alunos são responsáveis pelo processo (Skovsmose, 2000, p.6).

A aprendizagem por cenários investigativos é uma abordagem educacional que envolve os estudantes em um processo de questionamento, investigação e descoberta. Os estudantes são encorajados a explorar tópicos por conta própria, usando seus próprios pensamentos e ideias. Isso pode ajudá-los a desenvolver habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas, bem como permitir aprender a se comunicar em grupo ou em grande público.

Existem muitas maneiras diferentes de usar a aprendizagem por cenários investigativos em sala de aula. Uma abordagem comum é dar aos estudantes um problema para resolver, para que eles possam então trabalhar juntos para coletar dados, desenvolver e testar suas hipóteses.

Outra abordagem é dar aos estudantes um “tema” para explorar e investigar, em que eles terão que ler, assistir a vídeos, e pesquisar em websites para obter conhecimentos aprofundados sobre o tema. E com essas investigações conseguir identificar conceitos matemáticos que eles já conhecem, e outros, que serão suas novas descobertas, podendo assim ampliar suas aprendizagens matemáticas.

Aprendizagem por cenários investigativos pode ser um desafio para os estudantes, mas também pode ser muito gratificante. Quando os estudantes estão envolvidos em um processo de investigação, eles são mais propensos a se envolver e aprender. Eles também são mais predispostos a lembrar o que aprenderam, porque eles descobriram por conta própria.

Desde a década de 1990 entidades internacionais têm orientado a construção de um currículo escolar que envolva o desenvolvimento do raciocínio matemático a partir da formulação de conjecturas e justificações (Pires, 2015). A criação de ambientes que estimulem uma comunicação matemática e a resolução de problemas complexos que necessitem de exploração e tentativas para o alcance da resolução têm sido destacadas como essenciais para a construção do raciocínio matemático crítico (Pires, 2015).

Quando em sala de aula incentivarmos o estudante a identificar problemas e desenvolver, testar soluções e argumentar os resultados. E isso poderá possibilitar ao estudante ter um raciocínio crítico, sendo importante para sua vivência em sociedade e para o mundo do trabalho. Nesse sentido os estudantes são encorajados a questionar o *status quo*[1] e a pensar criticamente sobre o mundo ao seu redor. Eles também são encorajados a se envolver em diálogos e discussões com seus colegas, a fim de compartilhar suas ideias e perspectivas.

A Educação Matemática Crítica vem sendo discutida por Ole Skovsmose desde a década de 1980, e se baseia no diálogo e na emancipação do discente (Bennemann; Allevato, 2012; Skovsmose, 2017). Segundo o autor, a Educação Matemática Crítica não deve se basear em monólogos do professor, mas em conversas e discussões que façam com que a aprendizagem seja conduzida pelos interesses dos estudantes (Skovsmose 2017, p 16).

A matemática "dita" tradicional se apoia no paradigma do exercício, onde a prática em sala de aula é ditada pelo livro didático, os exercícios são formulados por uma entidade externa ao ambiente de aula e, portanto, não há justificativa da relevância da atividade, e a premissa principal é de que existe apenas uma solução correta para o problema (Skovsmose, 2017).

Assim podemos aqui citar como exemplo aqueles exercícios de livros didáticos que apresentam como solução uma única resposta e que levam os estudantes a repetir várias vezes e sempre buscando a mesma resposta, incentivam os estudantes a simplesmente memorizar a resposta correta e a repeti-la em diferentes contextos. Isso pode levar a uma aprendizagem superficial e a uma falta de compreensão do conceito em questão.

Neste contexto, Skovsmose (2000) determina as diferentes referências que os professores podem ter como base no ensino para fazer com que os estudantes "enxerguem" e produzam significados para conteúdos matemáticos. Skovsmose (2000) apresenta uma matriz simplificada (Quadro 2), onde ele combina a distinção entre três tipos de referências (referências à matemática pura, referências à semi-realidade, referências à realidade) e dois paradigmas de práticas na sala de aula (exercício e cenário para investigação) para descrever os possíveis ambientes ou *milieus* de aprendizagem.

Quadro 2 – *Milieus* de aprendizagem

	Exercícios	*Cenário para Investigação*
Referências à matemática pura	(1)	(2)

---

[1] *Status Quo* ou *Statu quo* é uma expressão do latim que significa "estado atual". O *status quo* está relacionado ao estado dos fatos, das situações e das coisas, independente do momento. Disponível em: <https://www.significados.com.br/status-quo/> Acesso em: 16 mai. 2023.

Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000, p.75).

Os *milieus* de aprendizagem (1), (3) e (5) se referem ao método de ensino tradicional de transmissão de conhecimento, com aulas expositivas e repetição de exercícios. O *milieu* de aprendizagem (1) tem como embasamento a matemática pura para o desenvolvimento dos exercícios (Skovsmose, 2014). O *milieu* (3) também é englobado no paradigma do exercício, porém utiliza-se da semi-realidade para formulação dos exercícios; ou seja, se baseia em situações fictícias (Skovsmose, 2014). Já o *milieu* de aprendizagem (5) refere-se às situações da vida real (Skovsmose, 2014).

Sendo entendidos como *milieus* de aprendizagem que se encaixam nos preceitos dos cenários para investigação, Skovsmose (2000) descreve mais 3 ambientes: o *milieu* de número (2) é aquele que compreende números e figuras geométricas; o *milieu* (4) é aquele que simula uma realidade e que estimula os estudantes a explorarem e fazerem especulações e, finalmente, no *milieu* (6) os estudantes são convidados a analisar uma situação real; neste tipo de ambiente, não se espera que exista apenas uma resposta correta. É importante elucidar que a principal diferença entre essas situações se dá na forma como as atividades são conduzidas em sala de aula (Skovsmose, 2014, p.56).

Assim, segundo Skovsmose (2000) não existe nenhum ambiente de aprendizagem em que o paradigma do exercício seja capaz de satisfazer as demandas e os interesses da educação matemática crítica. O autor sugere, então, que para que esses interesses possam ser alcançados, o ambiente de aprendizagem deve seguir a direção dos cenários para investigação ao invés do paradigma do exercício. Desta forma, seria possível alcançar um maior interesse e engajamento dos estudantes em uma aprendizagem mais ativa, além de levar em consideração a matemática e suas aplicações.

Ao experienciar cenários para investigação com referências que são mais voltadas à realidade em que se encontram, os estudantes poderão refletir e vivenciarão uma experiência mais consciente da educação matemática (Skovsmose, 2000). Em contrapartida, o paradigma do exercício se adversa ao método de investigação, que fornece aos discentes os recursos necessários para realizar investigações (Skovsmose, 2000; Skovsmose, 2017). E como falamos no exemplo da questão sobre a distância da casa do estudante até a escola, em que o estudante vai ter que procurar métodos de como conseguir está distância, fazendo pesquisas, questionando e explorando.

Neste exemplo de atividade investigativa ainda podem surgir levantamentos de dados e discussões entre os estudantes. Como o deslocamento da casa até a escola, os diferentes tipos de transportes que estão disponíveis, podendo comparar, contrastar levando em consideração fatores como custo, tempo, conforto e segurança. Podendo ainda explorar a viabilidade de desenvolver um plano para aprimorar o deslocamento até a escola.

Este é apenas um exemplo de como o método de investigação pode ser usado para abordar questões do mundo real. Ao usar o método de investigação, os professores podem ajudar os estudantes a desenvolver suas habilidades de pensamento crítico e social como mencionados anteriormente. Essas são algumas possibilidades que poderão surgir quando o estudante é instigado a aprender investigando.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), a sala de aula investigativa deve fornecer aos estudantes meios para se envolverem com a matemática pela formulação de problemas, interações com os colegas e discussão de descobertas. Assim, os estudantes têm a chance de desenvolver a capacidade de comunicar-se matematicamente e refletir sobre os problemas colocados, sendo incentivados pelo professor a fazer comentários e observações sobre o tema em estudo (Santos; Bellini, 2016). Podem assim os professores tornar a aprendizagem dos estudantes mais significativas e se tornando seres ativos e inovadores.

De modo relevante, Skovsmose (2000) afirma que "um cenário para investigação é aquele que convida os estudantes a formularem questões e procurarem explicações". Em adição, o autor escreve que a prática docente baseada em cenários para investigação se difere do paradigma do exercício pois oferece referências que levam os estudantes a dar significado às atividades e os conteúdos matemáticos em estudo (Skovsmose, 2017). Ao fazerem isso, os estudantes são capazes de desenvolver suas próprias habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas.

Eles também são capazes de desenvolver um interesse pelo assunto em questão, levando os estudantes a dar significados às atividades e os conteúdos matemáticos em estudo. Perante essa compreensão, os cenários para investigação podem apoiar os estudantes em um aprendizado importante de conceitos matemáticos, e ainda proporcionar a exposição à Educação Matemática Crítica e ao alcance do raciocínio matemático por meio da inquirição e argumentação (Corradi, 2013).

Nesta conjectura, a aprendizagem dos estudantes no ambiente de aula se torna diretamente atrelada ao desenvolvimento das suas capacidades investigativas e de pesquisas individuais, além de embasada nas vivências socioculturais da turma. Situações que, quando encarada pelos estudantes, podem não ser completamente compreendidas, uma vez que não fazem parte da realidade a qual os mesmos estão inseridos, como já citamos é chamada por Skovsmose (2000, p.1) de paradigma do exercício:

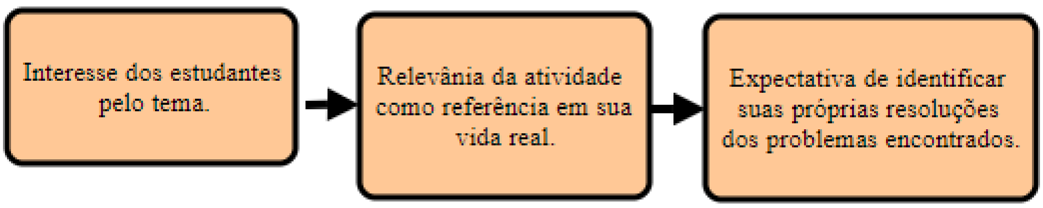
> […] a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício. Geralmente, o livro didático representa as condições tradicionais da prática de sala de aula. Os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. Isso significa que a justificativa da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma. Além disso, a premissa central do paradigma do exercício é que existe uma, e somente uma resposta correta. (Skovsmose 2000, p 1).

O paradigma do exercício é apresentado como uma abordagem na qual um professor apresenta algumas ideias e conceitos matemáticos e, em seguida, os alunos trabalham com exercícios selecionados de fixação, repetição de procedimentos ou de memorização, sem ao menos serem estimulados a pensar e questionar o que lhes foi dito. Sendo assim, este tipo de questão citado no paradigma do exercício não serve como um método de compreensão dos usos e serventias da matemática na convivência habitual (Skovsmose, 2000).

Neste sentido, ao contrário do paradigma do exercício, existem os cenários para investigação, que ainda conforme o autor "Propor cenários de aprendizagem é um jeito de convidar à reflexão. Os estudantes têm a oportunidade de refletir sobre os procedimentos matemáticos de um ponto de vista diferente do utilizado quando resolvem exercícios" (Skovsmose, 2000, p.63). E isso pode ajudar os estudantes a entender a relevância da matemática em suas vidas cotidianas e a refletir sobre seu uso prático, podendo compreender que a matemática pode estar em diferentes contextos, e isso pode levar a confiabilidade dos estudantes a terem na matemática.

É importante destacar como o autor cita a necessidade do aceite do estudante à proposta do professor, que é imprescindível para que o discente se interesse pela dinâmica investigativa. O autor ainda cita alguns fatores que podem influenciar o aceite à proposta do professor, como (Figura 1):

Figura 1 – Fatores de influência do aceite do estudante



Fonte: Elaborada pela autora com base em Skovsmose, 2000.

Destaca-se esses fatores porque é importante que o professor leve em consideração ao planejar suas atividades investigativas, observando a realidade do estudante no processo de aprendizagem o *background* (conhecimento e experiência que o estudante traz para a atividade investigativa) e o *foreground* (conhecimento e experiência que o estudante desenvolve durante a atividade investigativa). Observando o *background* e o *foreground* o professor poderá identificar áreas que o estudante precisa de auxílio ou que ele já aprimorou o seu aprendizado matemático. Nesse sentido:

> A aprendizagem é uma forma de ação, como tantas outras. Para aprender, o indivíduo precisa tomar iniciativas, ter planos, agir. É um processo repleto de intenções e motivos. Assim, quando pretendemos investigar fenômenos de aprendizagem, precisamos considerar a intencionalidade dos aprendizes. [...] Uma ação revela a intencionalidade de quem a executa e, portanto, revela o seu *foreground*. O sentido de uma atividade realizada em sala é uma construção dos alunos, e depende de como eles encaram suas próprias possibilidades na vida, ou seja, essa construção depende de seus *foreground* e intenções (Skovsmose, 2014, p. 38-42).

Ainda nesse processo de observar os *background*s e *foreground* o professor terá que trocar ideias com o estudante sobre interesses e experiências, observar como o estudante aborda a atividade investigativa, fazendo perguntas sobre seu processo de pensamento. E ainda analisar os resultados do trabalho do estudante, podendo adaptar a atividade investigativa para atender as necessidades individuais ou de grupos, possibilitando ao estudante aprender de forma mais eficaz e eficiente.

Portanto, uma situação se configura em um cenário para investigação se os estudantes aceitam o convite para participar da investigação, ou seja, um mesmo cenário pode ser um cenário investigativo para um grupo de estudantes, que aceitou o convite, e não ser para outros (Skovsmose, 2000). Isso pode ocorrer porque cada grupo de estudantes têm diferentes interesses, habilidades e experiências, sendo importante que o docente leve em consideração essas diferenças.

“Se um cenário pode ou não dar suporte a uma abordagem de investigação é uma questão empírica que tem que ser respondida por meio da prática de professores e estudantes envolvidos” (Skovsmose, 2000, p.19). Por vezes, pode ser necessário que os professores e estudantes experimentem diferentes cenários e abordagens para ver o que funciona melhor para eles. Alguns estudantes podem se dar melhor em um ambiente mais estruturado, enquanto outros podem se dar melhor em ambiente mais livre e criativo.

Além disso, no ensino tradicional o professor tem um papel de transmissor de conhecimento, enquanto que na investigação matemática o professor exerce um papel de mediador, para que o estudante avance no seu processo de aprendizagem. Neste mesmo contexto, no ensino tradicional o estudante tem um papel mais passivo, pois recebe todas as informações que o professor transmite, sem a perspectiva de autoinserção.

Com cenários para investigação o estudante abandona esse perfil passivo na sua aprendizagem e passa a ter um papel mais ativo na busca do conhecimento e das respostas sobre as investigações propostas (Mello Filho, 2016). O estudante pode ser conduzido a investigar, analisar, gerar e testar hipóteses, a se envolver de forma ativa no processo de aprendizagem, tornar-se mais crítico.

Diante disso, transformar o estudante em papel central e ativo na construção do seu aprendizado podendo propiciar o desenvolvimento de competências importantes como intuição, analogia, indução e dedução, ao invés do método engessado de memorização (Dick *et al.*, 2014). A aprendizagem fundamentada em investigação pode ser capaz de contribuir para que exista uma maior interação entre os próprios estudantes e entre estudantes e professores, contribuindo para a autonomia dos discentes no momento das atividades em um cenário para investigação.

No Brasil, as orientações curriculares têm seguido os preceitos supracitados, com enfoque voltado para as atividades não rotineiras, com um escopo mais amplo e investigativo (Pires, 2015). Esse delineamento se baseia nas noções de que os estudantes apresentam melhor aprendizado quando podem interagir espontânea e dinamicamente a cenários que lhes desperte curiosidade naturalmente (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006; Souza; Junkerfeurbom; Bassoi, 2018).

Para este propósito, autores sugerem que a apresentação de um novo conteúdo deve englobar as fases de exploração, descoberta, aplicação, interação e diálogo (Pires, 2015). O professor se encarrega do papel de valorizador da investigação dos discentes, estimulando que esta seja desenvolvida de forma clara e fundamentada (Pires, 2015).

Assim, os cenários para investigação são ambientes de aprendizagem em que algumas informações podem ser dadas ou não para o estudante, e o caminho para a resolução de um problema se torna um processo mais investigativo. Na seção seguinte será discutida como se deve apresentar a atuação do professor durante uma aula com abordagem investigativa.

3.3 DOCENTE E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

No capítulo anterior foram descritos os critérios necessários para o estabelecimento de um ambiente de investigação matemática. Contudo, outro personagem presente em todo esse processo é o docente. Portanto, nesta seção será apresentada com mais detalhes a função do professor em uma sala de aula investigativa.

Em uma aula investigativa, o professor tem a função de facilitar e guiar, em vez de ser uma fonte única de conhecimento. Eles devem incentivar os estudantes a explorar, fazer perguntas e descobrir por si mesmos. Ao explorar Cenários para Investigação como prática o professor abandona a sua zona de conforto com respostas preestabelecidas e adentra em uma zona de risco (Penteado, 2001) sem saber quais os imprevistos que podem acontecer durante o processo de investigação (Alrø, Skovsmose, 2010).

Diante dos aspectos ligados aos cenários para investigação, que sugere como prática educacional a Educação Matemática Crítica com a visão democrática em sala de aula, em que o diálogo entre professor e estudante acontece de forma autônoma sem autoritarismo, Freire (2018) refere-se ao ato de ensinar como uma possibilidade de construção do conhecimento e não somente de transferência como a prática tradicional de ensino.

Para tanto, é imprescindível que o ambiente de sala de aula seja propício para que o estudante possa ficar confortável em levantar indagações para que dessa forma "professor e estudantes saibam que a postura deles é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou enquanto ouve" (Freire, 2018, p.83).

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) o papel do professor em uma aula de investigação matemática acontece em etapas. Em um primeiro momento, o professor deve desafiar os estudantes, criando um ambiente adequado para a realização da investigação matemática. O docente deve utilizar atividades que despertem a curiosidade e que estimulem a criatividade dos estudantes.

Ao longo da atividade, o professor observa e avalia o progresso dos estudantes e, se necessário, desenvolve estratégias para a interação com os discentes. Em seguida, ao decorrer da atividade, o professor tende a apresentar seu raciocínio matemático aos estudantes, estabelecendo conexões entre os conceitos matemáticos e incentivando os estudantes a refletirem sobre tais conceitos. Finalmente, o docente recorda ou concede informações relevantes para a investigação, formula questões que podem ser mais ou menos diretas e também estimula a reflexão sobre o processo, buscando trazer à tona uma postura interrogativa (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2013).

Além disso, é fundamental que durante toda a atividade o professor fique atento aos estudantes, para garantir que os mesmos não se fixem somente em encontrar a resposta do questionamento, sem exercer o caráter investigativo que a atividade propõe (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2013). Somado a isso, é de suma importância que o professor seja capaz de convidar os estudantes a refletirem sem interferir nas resoluções dos mesmos.

É de responsabilidade e de importância que o professor proponha um ambiente positivo, confortável e seguro, onde os estudantes se sintam motivados em fazer perguntas e expressar suas ideias para a realização da atividade investigativa. E que todas as opiniões devem ser respeitadas, e a comunicação entre os componentes do grupo deve ser estimulada, e que no final a discussão das conclusões deve ser promovida (Ferreira; Zuin, 2018).

Dessa forma, os estudantes se sentem seguros e apoiados, ficando propensos a participar da atividade e aprender com ela. Em uma aula de investigação matemática, o professor evolui de transmissor de conhecimento para um mediador, instigando a curiosidade dos estudantes e incentivando-os a procurar respostas. Sendo assim, “o professor continua sendo o elemento-chave […] nestas aulas, cabendo-lhe ajudar o estudante a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo” (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003, p. 1).

Os referidos autores ressaltam também a importância da atenção sobre o trabalho dos discentes, com verificações constantes por parte do professor quanto à compreensão da tarefa e o avanço da investigação, que pode ser deixada de lado se os estudantes acabarem por se focar em encontrar a resolução do problema (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003). Ou seja, o docente é essencial para o andamento proveitoso do projeto de cenários para investigação (Ferreira; Zuin, 2018). O emprego de cenários para investigação é, ainda, um desafio ao professor, pois coloca-o numa “zona de risco”, onde este não é capaz de prever as questões dos alunos (Skovsmose, 2000). Ainda segundo o autor:

> Qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para atuar no novo ambiente. A tarefa é tornar possível que os alunos e o professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma atividade produtiva e não uma experiência ameaçadora. Isso significa, por exemplo,

> a aceitação de questões do tipo "o que acontece se...", que possam levar a investigação para um território desconhecido. (Skovsmose 2000, p.19).

Skovsmose (2000) propõe que a aprendizagem matemática deve acontecer entre a alternância entre os ambientes, sem a necessidade de abandonar a resolução de exercícios. Na verdade, o autor ressalta que é importante que estudantes e professor encontrem juntos a melhor maneira de cruzar pelos diferentes ambientes de aprendizagem, pois desta forma os estudantes podem atribuir mais significado às atividades propostas (Skovsmose, 2000).

No entanto, as atividades a serem desenvolvidas devem ser formuladas com base na vida real, abrindo espaço para questionamentos por parte dos estudantes sobre informações que não estão contidas no enunciado (Skovsmose, 2000). Dessa forma, o paradigma do exercício é superado pela realização de projetos de investigação, ou seja, a aplicação real dos cenários para investigação.

Neste contexto, outra situação encontrada é que os estudantes podem fazer questionamentos que fogem do escopo das informações fornecidas pelo exercício. Uma maneira descrita por Skovsmose (2000) para lidar com os riscos, é de o docente guiar os estudantes em vez de permitir que explorem livremente o cenário, dando instruções claras e concisas sobre o mesmo. O autor descreve um exemplo em uma passagem de seu artigo:

> […] em vez de permitir aos alunos explorarem o programa de geometria dinâmica, o professor poderia especificar cada passo a ser tornado: "Primeiro, você seleciona um ponto. Ok, todos fizeram isto! Esse ponto chamaremos de A. Então você deve selecionar um outro ponto. Este chamaremos de B…" Através da reorganização das atividades em sequência, o professor pode conduzir todos os alunos da sala de aula a terem quase a mesma figura sobre as telas dos computadores (Skovsmose, 2000, p. 19).

Se um professor especificar cada passo a ser tomado em um software de geometria, todos os estudantes de sala de aula podem ser conduzidos a ter a mesma figura sobre as telas dos computadores. Isso ocorre porque o professor está controlando o processo e garantindo que os estudantes sigam os mesmos passos.

É importante notar que essa abordagem não é necessariamente a melhor maneira de aprender matemática. Na verdade, para ser proveitosa aos estudantes, é fundamental que eles explorem o software de geometria dinâmica de forma autônoma, permitindo-se descobrir como funciona e ampliando, assim, seu entendimento sobre geometria.

Assim, a aprendizagem por investigação também pode ser um desafio para o professor, precisando o professor estar preparado para utilizar está metodologia, tendo *pontos estratégicos*[2] para organização das atividades como por exemplo:

- *Planejamento:* a aprendizagem por investigação pode exigir um planejamento significativo por parte do professor, o professor precisa escolher tópicos que sejam relevantes para os interesses dos estudantes;
- *Supervisão da turma*: A aprendizagem por investigação pode ser caótica, pois os estudantes são encorajados a explorar e aprender de forma independente. O professor precisa ser capaz de gerenciar a turma de forma eficaz e garantir que todos os estudantes estejam envolvidos na aprendizagem;
- *Avaliação*: A aprendizagem por investigação pode ser difícil de avaliar, pois os estudantes podem aprender de maneiras diferentes. O professor precisa desenvolver métodos de avaliação que sejam justos e que reflitam o aprendizado dos estudantes.

Apesar dos desafios, a aprendizagem por investigação pode proporcionar uma experiência de aprendizagem muito gratificante para estudantes e professores. Quando os estudantes estão envolvidos em um processo de investigação, eles são mais propensos a se envolver e aprender. Eles também são mais predispostos a lembrar o que aprenderam porque o descobriram por conta própria.

Concluímos nesta seção que a investigação matemática pode proporcionar aos estudantes uma nova perspectiva para desenvolver seu aprendizado de matemática. Apesar de ser um desafio, principalmente para o professor, a implantação dessa estratégia mostra benefícios para ambas as partes. Na seção seguinte interpretamos e discutimos a relação da autonomia com investigação matemática. Assim, segue a próxima seção trazendo estes significados e demais explanações.

3.4 AUTONOMIA E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

[2] Estes pontos estratégicos foram elaborados pela professora/pesquisadora para obter uma organização no desenvolvimento das atividades. Baseado em “Gestão Curricular em Matemática”, (Ponte, 2005).

Etimologicamente autonomia é um termo de origem grega cujo significado está relacionado com independência, liberdade ou autossuficiência. O antônimo de autonomia é heteronomia, palavra que indica dependência, submissão ou subordinação.

O estudo desta pesquisa utiliza uma abordagem de investigação que enfatiza a construção do aprendizado pelos estudantes e lhes dá liberdade para agir, pensar, falar e tomar decisões, promovendo a autonomia e o envolvimento ativo dos estudantes no processo de aprendizagem.

> A autonomia intelectual é caracterizada em termos da consciência e da disposição dos estudantes para recorrer às suas próprias capacidades intelectuais quando envolvidos em decisões e julgamentos matemáticos. A autonomia intelectual pode ser associada a atividades de exploração e explicação, como nos cenários para investigação (Skovsmose, 2000, p. 37).

A autonomia intelectual refere-se à capacidade e à vontade dos estudantes de utilizar suas próprias habilidades intelectuais ao enfrentar decisões e julgamentos matemáticos. Essa autonomia pode ser observada em atividades de exploração e análise, como nos cenários de investigação, particularmente na resolução de problemas matemáticos.

Entre as competências gerais da Educação Básica propostas pela BNCC, a autonomia é citada como componente na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores. Ainda buscando outros significados para autonomia dentro da educação, encontrarmos Freire (2018) que contribui:

> O respeito à autonomia e à dignidade de cada um é imperativo ético e não um favor que podemos ou não conceder uns aos outros […] é neste sentido também que a dialogicidade verdadeira, em que os sujeitos dialógicos aprendem e crescem na diferença, sobretudo, no respeito a ela […] (Freire, 2018, p. 59-60).

É importante considerar que a ligação dialógica mantida entre professor e estudantes, na educação escolar tende a buscar a autonomia do estudante em que ele possa desenvolver essa habilidade expressando suas ideias, a tomando decisões e a se tornarem mais independentes em sua aprendizagem. A autonomia e a aprendizagem por investigação são dois conceitos importantes na aprendizagem matemática. A autonomia refere-se à capacidade do estudante de aprender de forma independente, sem a necessidade de que o professor esteja constantemente presente.

A aprendizagem por investigação refere-se à capacidade de aprender por meio da investigação, ou seja, de formular hipóteses, testar hipóteses e construir conclusões. E assim podendo criar um ambiente de aprendizagem que seja ao mesmo tempo desafiador e envolvente. Os estudantes que possuem autonomia têm a oportunidade de aprender a seu próprio ritmo, e de explorar seus próprios interesses.

E a aprendizagem por investigação têm essa oportunidade de desenvolver suas habilidades de pensamento crítico e as de resolução de problemas. Na seção seguinte é apresentado um breve estudo de literatura compreendendo trabalhos que utilizam intervenções matemáticas baseadas em investigação matemática.

3.5 REVISÃO DE ESTUDOS SOBRE O TEMA

Com o objetivo de enriquecer o embasamento teórico da presente dissertação, foi realizada uma revisão de produção sobre o tema, que abordem como principal tema o uso da investigação matemática como uma estratégia de aprendizado em diferentes níveis educacionais. Serão comparados o tipo de atividade proposta e as análises descritas pelos autores.

Para escolha dos trabalhos as bases de dados escolhidas foram o Portal de Periódicos, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), o Repositório Digital Lume da UFRGS e o Google Acadêmico® Foram utilizados os seguintes termos de pesquisa: “investigação matemática”, “cenários para investigação” e “aprendizagem por investigação”. Foram considerados como critérios de inclusão a disponibilidade integral do texto, linguagem em português e data de publicação dentro dos últimos 10 anos. Foram excluídos artigos de opinião, revisões, resumos publicados em eventos e livros.

Dentre os resultados restantes, foi realizada a leitura do resumo do texto, na qual buscou-se a exposição clara do problema de pesquisa, metodologia e resultados. Adotou-se como requisitos a metodologia qualitativa e a obtenção de dados por meio de atividades realizadas pelos estudantes.

Dessa forma, 10 trabalhos que apresentavam contextos análogos ao tema dessa pesquisa foram elencados para a revisão, dos quais 7 são trabalhos de dissertação de mestrado, e 3 são teses de doutorado. A fim de organização, os trabalhos foram listados no Quadro 3, exposto abaixo, por tipo e em ordem cronológica.

Quadro 3 – Trabalhos selecionados para o estudo de literatura

Título	Autor	Ano	Tipo	Instituição
Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno: uma experiência com alunos do 2º ano do ensino médio	Corradi, DKS	2013	Dissertação	UFRGS
Quem não sonhou em ser um jogador de futebol? Trabalho com projetos para reelaborar *Foregrounds*	Biotto Filho, D	2015	Doutorado	UNESP
A inserção da Educação Matemática Crítica na escola pública: aberturas, tensões e potencialidades	Miranda, FO	2015	Doutorado	UNESP
Investigação matemática na aprendizagem da geometria: conexões entre quadriláteros, triângulos e transformações geométricas	Baur, AP	2017	Dissertação	UFRGS
Como você chegou a esse resultado?": o diálogo nas aulas de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental	Faustino, AC	2018	Doutorado	UNESP
Os *foregrounds* de estudantes quilombolas e suas intenções em aprender matemática	Diniz, AMR	2019	Dissertação	UFPE
Game para smartphones e ambientes de aprendizagem	Menezes, BS	2019	Dissertação	UFRGS
Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita por meio do uso do material *Álgebra tiles*	Meinerz, FM	2020	Dissertação	UFRGS
Aprendizagem significativa: uma contribuição do diálogo por meio de uma atividade investigativa em matemática	Costa, MA	2022	Dissertação	IFES
Sonhos de adolescentes em desvantagem social: vida, escola e educação matemática	Soares, DA	2022	Dissertação	UNESP

Fonte: A autora, 2023.

A dissertação de Corradi (2013) propõe atividades investigativas utilizando o software GeoGebra, com o intuito de melhorar a compreensão matemática de alunos do segundo ano do Ensino Médio em um ambiente de inquirição. A autora declara em seu texto que a principal motivação da pesquisa foi a percepção obtida em sala de aula da dificuldade dos estudantes de compreender conteúdo da matemática, especialmente sobre funções trigonométricas. A autora adotou o método qualitativo para análise dos dados, que foram obtidos por meio de gravação do áudio das aulas, arquivos de trabalho dos alunos gerados na utilização do GeoGebra, trabalhos escritos, um questionário e observações escritas da própria.

A pesquisadora relata, em conclusão, que a atividade matemática investigativa aplicada instigou a argumentação e a discussão, bem como melhorou o aprendizado, possibilitando aos alunos experiências de acordo com suas próprias experiências e dificuldades.

Biotto (2015) descreve sobre os *faregrounds* em ambientes escolares, o qual desenvolveu um conjunto de atividades para um grupo de jovens em idade escolar. Este cenário da coleta de dados foi configurado em uma instituição social de semi-internato e intitulado “Projeto Futebol”. Esse tema foi explorado tendo como foco o desejo de muitas crianças de se tornarem jogadores de futebol. Foram realizadas entrevistas para analisar e poder identificar possíveis reelaborações em suas perspectivas de futuro e para discutir o próprio conceito de *foreground*.

As contribuições dessa pesquisa incluem a identificação de algumas características do conceito de *foreground*, reflexões sobre as relações entre o *foreground* de uma pessoa e seu contexto social, bem como discussões sobre as possibilidades da proposta de trabalho com projetos para a reelaboração de *foregrounds* em ambientes educacionais. A pesquisa apresenta cinco contribuições sobre os *foregrounds*, A primeira contribuição é a possibilidade de entender *foreground* como uma leitura, a segunda contribuição é a apresentação do conceito de *foreground* único para discutir a necessidade de reelaborar *foregrounds*, a terceira contribuição está relacionada com a transposição para o contexto brasileiro das anteriores discussões sobre os *foregrounds* arruinados das crianças negras durante o regime apartheid na África do Sul, a quarta contribuição está relacionada com a ampliação do conceito de foreground para além do contexto econômico e social, e a quinta contribuição é a confirmação da conjectura de que *foregrounds* podem ser reelaborados.

A tese de Miranda (2015) busca compreender a inserção da Educação Matemática Crítica no ambiente da escola pública, que descreve como interpretar, explicar e compreender os fatos estudados, tendo como amparo a pesquisa-ação, na qual pesquisador e participantes buscam solução para um problema de modo cooperativo, chamado de ação. Foi utilizada como fundamentação teórica a Educação Matemática Crítica para auxiliar na criação dos projetos, e nas escolas a Modelagem Matemática, com objetivos voltados para a prática docente na escola pública e percebendo os desdobramentos em termos sociais e políticos. Analisados esses tópicos, foram encontradas respostas não definitivas para a utilização da Educação Matemática Crítica no ambiente da escola pública mineira, levando-se em conta o preparo dos atores envolvidos com a mudança e a atualização de metodologias de ensino e pesquisa, na formação de um cidadão voltado para a sociedade em transformação. Entre as dificuldades encontradas pode-se localizar justamente o processo de trabalhar de forma significativa os conteúdos tradicionais que permanecem básicos no desenvolvimento da Matemática.

Na dissertação de Baur (2017) a autora investiga o processo de aprendizagem dos conceitos de quadriláteros, triângulos e transformações geométricas em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental embasando-se nos preceitos de investigação matemática, por meio da utilização do programa *GeoGebra* e da aplicação *online Design a Tesselation*. Para avaliação do processo de aprendizagem dos discentes, a pesquisadora atribui classificações quanto aos níveis de pensamento geométrico descritos por Van Hiele. Dessa forma, o trabalho mostra por meio de análise qualitativa a evolução do pensamento geométrico, observado nas progressões dos níveis de Van Hiele, perante o emprego de atividades de investigação matemática.

A tese de Faustino (2018) tem como objetivo compreender como as professoras e os estudantes colocam o diálogo em ação nas aulas de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, buscando, assim, identificar elementos que favorecem a construção de uma aula de matemática dialógica, trazendo como referencial teórico para a pesquisa, Paulo Freire, Helle Alrø e Ole Skovsmose. O autor traz como resultados deste estudo as evidências que o diálogo pode favorecer a emersão de significados e ideias tornando-se fonte para o ensino e a aprendizagem de matemática. O autor ainda fala que, pode abrir espaço para que crianças se compreendam como seres humanos que produzem cultura e conhecimento, compartilhem diferentes perspectivas, apresentem argumentos para justificar suas perspectivas e cooperem entre si durante a aprendizagem da matemática.

Na dissertação de Diniz (2019), o objetivo foi compreender, à luz da Educação Matemática Crítica (EMC), como estão relacionados os *foregrounds* de estudantes quilombolas com as suas intenções de aprender Matemática. A autora considerou, enquanto perspectiva teórica da EMC, desenvolvida por Ole Skovsmose, a pesquisa tem cunho qualitativo e foi realizada com estudantes quilombolas do 9º ano do Ensino Fundamental. No decorrer da pesquisa o principal instrumento utilizado para a coleta dos dados foi à entrevista semiestruturada, e como complemento também realizados registros em fotografia. A análise dos resultados apontou que os participantes atribuem importância à identidade quilombola para a afirmação de suas origens, estabelecendo relações entre a Matemática e as situações da vida cotidiana. Em geral, os estudantes da escola da comunidade e os estudantes universitários têm uma perspectiva positiva em relação aos seus planos futuros e veem na educação um mecanismo de mudança e melhoria de vida.

Na pesquisa intitulada “Game para smartphones e ambientes de aprendizagem” realizada por Bernarda Souza Menezes em 2019, a autora propôs observar como acontecia o ensino-aprendizagem de Matemática, por meio de um game para smartphones. Para desenvolver a análise utilizou as perspectivas para a Modelagem Matemática, elencadas segundo Kaiser e Sriraman (2006) e Almeida e Vertuan (2010), e seus casos no currículo, descritos por Barbosa (2001), bem como a classificação de ambientes de aprendizagem descrita por Skovsmose (2000). Após realizar seus estudos Menezes (2019) conseguiu evidenciar o surgimento de um cenário para investigação cibernético de Modelagem Matemática nesta prática, o ambiente proposto, tornou-se passível de muitas oportunidades.

A pesquisa de mestrado de Meinerz (2020) consistiu na aplicação do material pedagógico *Álgebra tiles* para o ensino do conteúdo de equações de primeiro grau em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental. A autora relata que adotou uma abordagem de investigação matemática para emprego das atividades, e os dados obtidos foram avaliados qualitativamente sob fundamentação na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Em conclusão, a autora relata que o material pedagógico auxiliou os estudantes no desenvolvimento e resolução de equações de primeiro grau oportunizou uma formação do pensamento crítico matemático.

Costa (2022), realizou a sua pesquisa de mestrado com o objetivo principal de analisar as contribuições do Diálogo para a Aprendizagem Significativa, trazendo discussões sobre as formas como o Diálogo pode favorecer um ensino integral e uma aprendizagem menos mecânica. Seus principais aportes teóricos foram David Ausubel no campo da Aprendizagem Significativa, e Alrø e Skovsmose no Diálogo e na Educação Matemática Crítica.

A pesquisa de Costa foi realizada por meio de uma atividade de cooperação investigativa. Com a pandemia de COVID-19 e a necessidade do distanciamento social, a autora relata que não foi possível realizar a atividade nas escolas. Assim, a produção de dados ocorreu por meio das reuniões entre professores e alunos que participam do Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática e Educação Estatística (GEPEME). Ao longo dos estudos realizados, foram observadas muitas semelhanças entre os aportes teóricos, levando-a a criar um conceito, o Diálogo Significativo, que integra as teorias debatidas neste trabalho.

A tese de Soares (2022) teve por base as ideias e pensamentos especialmente dos autores Paulo Freire, Ole Skovsmose e Emmanuel Lévinas. A intenção da autora era investigar de que forma sonham adolescentes em desvantagem social e identificar possibilidades para que as aulas de matemática pudessem proporcionar mais espaços para o desenvolvimento dos sonhos desses adolescentes. Para isso realizou uma pesquisa qualitativa, com método de pesquisa particular, construído durante a trajetória da tese, e que possui inspiração nos métodos de estudo de caso, história oral temática e história de vida.

Como resultados, Soares (2022) destaca que os estudantes revelaram a existência de poucos espaços para aspirações na escola de forma geral, especialmente nas aulas de matemática. Identificou-se também que a maioria dos jovens tem muitos sonhos, em grande parte relacionadas ao contexto profissional, enquanto alguns poucos estudantes declararam ter apenas uma única ou nenhuma. Constatou-se uma forte relação entre as histórias de vida dos estudantes e suas aspirações; uma grande influência da escola como promotora de novas possibilidades; e a presença disso voltadas para familiares e comunidade. Por fim, destacou-se também a influência dos sistemas capitalista e liberal.

Em consenso, o que os autores pontuam quanto ao emprego de abordagens fundamentadas nos conceitos de investigação matemática é o desenvolvimento orgânico da curiosidade e maior envolvimento nas atividades por parte dos estudantes. Em todos os trabalhos supracitados, os desfechos da pesquisa se mostram benéficos tanto aos estudantes quanto aos professores.

Os autores apontam que este tipo de estratégia de ensino convida o estudante não somente o aprendizado do conteúdo em foco, mas também a lógica e a argumentação na resolução de problemas, oportuniza perceber o quanto de matemática há no cotidiano. Do mesmo modo, este tipo de abordagem faz com que o professor se desafie mais, seja na preparação da atividade ou na mediação e avaliação dos estudantes.

Além disto, outro ponto de convergência destes trabalhos é a motivação. Os autores citam como principal condição motivadora a inadequação do método tradicional de ensino, baseado na resolução de exercícios e memorização. Este modelo muitas vezes acaba distanciando a matemática da sala de aula da matemática cotidiana, e distancia também o discente do papel de protagonistas do seu próprio aprendizado. Por outro lado, o método de cenários para investigação se mostra como uma alternativa que adota uma abordagem mais instigante, e desse modo encoraja o senso crítico e argumentativo dos estudantes.

Nesta seção foram apresentados alguns trabalhos que abordam estratégias de cenários para investigação em diferentes níveis educacionais como uma estratégia de melhorar o aprendizado dos estudantes. Observou-se que a implementação de estratégias de investigação matemática trouxe benefícios para os discentes, e estes mostraram opiniões majoritariamente positivas sobre as intervenções. Contudo, alguns autores apontam também que há uma dificuldade inicial, tanto por parte dos docentes, quanto por parte dos estudantes de colocar em prática as atividades, visto que o ensino tradicional se apoia no paradigma do exercício para o processo de aprendizagem.

Esse reconhecimento de desafios iniciais é fundamental, pois ajuda a contextualizar a importância de investigar e compreender não apenas os benefícios, mas também as barreiras e os obstáculos enfrentados na adoção de novas estratégias educacionais. Busca-se neste trabalho ampliar o estudo de quais intervenções podem apoiar e ajudar a facilitar uma transição mais suave para abordagens mais inovadoras de ensino e aprendizado. No capítulo que segue serão explicadas a metodologia da pesquisa e as atividades planejadas para execução em sala de aula.

4 METODOLOGIA

Este capítulo é dedicado à caracterização da metodologia empregada neste trabalho e das atividades realizadas em sala de aula. O texto foi organizado em duas partes, onde na primeira serão descritos os critérios e especificações para escolha da metodologia; e na segunda será detalhado o planejamento da prática em sala de aula, com o intuito de clarificar o propósito da pesquisa, a maneira como será implementada e o objetivo de cada etapa.

4.1 METODOLOGIA DE PESQUISA

No presente trabalho adotou-se a metodologia de pesquisa qualitativa, uma abordagem à pesquisa que se concentra na compreensão do significado das experiências humanas. A pesquisa qualitativa é frequentemente usada em estudos sobre educação, pois permite que os pesquisadores explorem as perspectivas e experiências dos estudantes de uma forma que a pesquisa quantitativa não abrange.

A pesquisa qualitativa pode ser uma ferramenta particularmente importante para entender como as pessoas percebem, experimentam e lidam com os desafios desse tipo de aprendizagem investigativa. Pois assim permite que os pesquisadores obtenham uma compreensão da experiência humana que podem ser usados para melhorar o ensino e a aprendizagem.

Na pesquisa em questão, a produção de dados está centrada nas observações feitas pela autora sobre o desempenho e o comportamento de uma turma do oitavo ano. Essas observações são complementadas pela análise das atividades finais realizadas por cada grupo de estudantes da classe. O foco principal da pesquisa é valorizar mais o processo de aprendizagem e a evolução dos estudantes ao longo do tempo do que o produto final da intervenção.

Essa abordagem permite uma compreensão melhor de como os estudantes desenvolvem suas habilidades e conhecimentos através da investigação matemática. Destacando a importância do processo de aprendizado contínuo e das interações em sala de aula para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

A escolha desta metodologia se baseia na relação direta entre o pesquisador e os indivíduos da pesquisa, pois de acordo com os autores Ludke e André (1986), “a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra, através do trabalho intensivo de campo". A coleta de dados dessa pesquisa foi feita por meio de anotações em blocos confeccionados específicos para cada grupo, fotos e áudios. A coleta foi realizada em sala de aula, na sala de informática, e espaços abertos da escola como por exemplo o bicicletário e também o campo de futebol ao lado da escola.

Bogdan e Biklen (1994) afirmam que no âmbito da educação, a pesquisa qualitativa se mostra vantajosa pois valoriza o processo ao invés dos produtos finais, como nas pesquisas quantitativas. Além disso, o ambiente da sala de aula remete à metodologia qualitativa, já que o pesquisador está inserido no local da pesquisa e, por isso, pode desenvolver um nível maior de detalhes sobre as pessoas ou local estudados (Rossman; Rallis, 1998 *apud* Creswell, 2007, p. 186).

Ainda de acordo com Creswell (2007), na pesquisa qualitativa o pesquisador está envolvido em uma experiência sustentada e intensiva com os sujeitos, e torna-se função do pesquisador inserir questões norteadoras, e assim determinar explicitamente suas orientações, valores e interesses pessoais em relação ao tópico e ao processo de pesquisa. Ademais, o pesquisador se torna o principal mecanismo de coleta de dados (Bogdan; Biklen, 1994).

Sobre isso, Creswell (2007) descreve que os investigadores são capazes de coletar diferentes tipos de dados, o que pode despender de muito tempo no momento da obtenção de informações e, posteriormente, também na fase de análise de dados. Para o autor, os procedimentos de coleta na pesquisa qualitativa consistem em quatro tipos básicos: 1) observações: o pesquisador toma notas de comportamentos e atividades e pode ser ou não participante da pesquisa, além de poder nortear questões que deseja aferir; 2) entrevistas: são conduzidas pelo pesquisador face a face com os participantes e envolvem poucas perguntas, geralmente abertas, onde se pretende extrair opiniões e visões dos participantes; 3) documentos: envolve a coleta de documentos públicos (e.g. jornais e relatórios oficiais) ou documentos privados (e.g. registros pessoais, diários ou cartas); e 4) materiais audiovisuais: esses dados podem ter a forma de fotografia, objetos de arte, vídeos e/ou áudio.

Na atual dissertação, a coleta de dados foi realizada a partir de observações feitas pela pesquisadora e descritas em um caderno pessoal, que devem gerar alguns dos principais dados da pesquisa, pois o pesquisador fará também a análise de todos os registros fotográficos e recolhimento das atividades escritas desenvolvidas pelos estudantes. A observação se dará de forma direta, analisando todas as ações dos indivíduos pesquisados. A proposta de atividade deve ser implementada com estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental. A participação na pesquisa é voluntária e dependente da assinatura do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) dos alunos e dos seus responsáveis, como também a Carta se Anuência da escola (Apêndices A, B e C).

Por fim, o pesquisador qualitativo deve interpretar dados observados por ele, e também os dados coletados por vários instrumentos. Rossman e Rallis (1998 *apud* Creswell, 2007) afirmam que os dados coletados envolvem informações em texto e imagem. Como já mencionado, esse tipo de pesquisa vai auxiliar na metodologia de investigação matemática aplicada para esta dissertação. Essa metodologia também leva em consideração a observação, e a análise dos dados que o pesquisador tem que fazer sobre as atividades propostas desenvolvidas pelos estudantes.

Sobre a interpretação dos dados de uma pesquisa qualitativa, em uma aprendizagem por investigação matemática pode-se dizer que é totalmente dependente do pesquisador elaborar a descrição das pessoas e do cenário de pesquisa, identificar temas ou categorias, analisar os dados minuciosamente e interpretá-los ou tirar conclusões sobre seu significado, reportando as observações e questões levantadas (Wolcott, 1994 *apu*d Creswell, 2007, p. 186). Assim sendo, o mais importante quanto a abordagem a ser usada, é ser honesto e transparente sobre o processo de interpretação de dados. O pesquisador deve estar disposto a compartilhar suas suposições e motivações com os envolvidos na pesquisa, para que eles possam avaliar por si mesmos como os dados foram interpretados.

Com embasamento em todos os procedimentos descritos, cabe a professora/pesquisadora estabelecer estratégias que lhe permitam considerar as experiências e observações para que haja um desenvolvimento produtivo em relação à pesquisa. Assim, a presente pesquisa trata-se de uma investigação qualitativa. Nas seções seguintes serão apresentados os planejamentos das práticas em sala de aula.

4.2 PROCEDIMENTOS

Nas seções que seguem será descrita a escolha da turma e logo a seguir a proposta de atividade que está dividida em oito etapas. Em cada etapa foram elaboradas atividades para auxiliar e apoiar os estudantes para a exploração da bicicleta como um objeto de cenário para investigação para aprendizagem de matemática.

4.2.1 A escolha da turma

Os sujeitos da pesquisa escolhido foi uma turma de vinte e seis estudantes, do oitavo ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública na cidade de Sombrio, que fica situada no sul de Santa Catarina. Turma na qual a professora/pesquisadora atua como docente, sendo este um dos motivos da escolha dessa turma específica.

Outro motivo foi que ao decorrer da sequência de conteúdo a serem estudados, notou-se que os estudantes não conseguiam entender algumas atividades que precisavam de pré-requisitos de conceitos matemáticos, e com dificuldade de interpretar e reconhecer entes matemáticos. Foi observado que a maioria dessas dificuldades eram consequência da pandemia vivida em 2020, mas que outras já oriundas de outras fontes, como por exemplo a falta de entendimento de conceitos matemáticos anteriores.

Como parte da grade curricular escolar do município de Sombrio, a disciplina de matemática tem uma carga horária de quatro aulas semanais de quarenta e cinco minutos cada. As atividades aplicadas com a turma foram feitas nestes períodos regulares das aulas, utilizando a sala de aula, a sala de informática, a sala de vídeo e a áreas externas da escola, como o pátio e o campo de futebol.

Após a escolha da turma e as leituras feitas de alguns autores sobre a aprendizagem com investigação e o estudo de literatura, a pesquisa então estava direcionada para trabalhar com aprendizagem por investigação em sala de aula. Precisava-se de um tópico, de um tema, de algo do dia a dia dos estudantes, para que realmente este aprendizado tivesse significado e que lhe trouxesse interesse e curiosidade. Assim na seção seguinte detalha-se sobre o tópico escolhido.

4.2.2 A escolha do tópico de estudo

A escolha da bicicleta como tópico se deu ao ser observado a familiaridade que os estudantes tinham com ela, também percebeu a quantidade de bicicleta que se tinha no bicicletário, e como os estudantes a utilizam como meio de transporte, e lazer. Observou-se também a diversidade de tamanhos e modelos de bicicletas encontradas no bicicletário da escola, sendo então este o tema, o tópico para estudos (Figura 2).

Figura 2 – Bicicletário da escola

Fonte: A autora, 2023.

Para a definição do tópico de estudo, precisava-se ainda do aceite dos estudantes, pois já se sabia que esse tema seria apropriado para investigar elementos matemáticos, e que poderiam ser explorados alguns conceitos. Por exemplo, a geometria das rodas (baseada em círculos), a trigonometria das marchas (usada para calcular o ângulo das marchas da bicicleta, que determina a velocidade da bicicleta), a física do movimento (como a bicicleta se move), a estatística do uso das bicicletas (usada para estudar a quantidade de bicicletas usadas pelas pessoas). E ainda conhecer um pouco mais sobre a história da bicicleta e sobre a importância da bicicleta para a sociedade.

Observando o grande número de estudantes que utilizam a bicicleta tanto como meio de transporte quanto para lazer, decidiu-se usar esse tópico como um cenário para a investigação da matemática por meio de uma sequência de atividades. Esse enfoque será fundamental para esta pesquisa, pois permitirá que os estudantes apliquem conceitos matemáticos em situações práticas e relevantes do seu cotidiano.

A investigação matemática em sala de aula é entendida como um instrumento que colabora no aprendizado de matemática por meio da participação ativa do estudante, onde ele se encarrega por produzir os seus próprios conhecimentos matemáticos (Lamonato; Passos, 2012). Ao engajar-se nesse processo investigativo, o estudante desenvolve habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas, além de fortalecer sua autonomia e confiança em relação à matemática.

Ao escolher a bicicleta como tópico das atividades a serem desenvolvidas entendemos que por ser um objeto comum aos estudantes será um objeto que poderá despertar o interesse pelo estudante. Segundo Skovsmose (2008), a matemática pode ser vista como uma linguagem, e de introduzir uma nova linguagem significativa e de criar perspectivas e novas racionalidades com que se tomam decisões, Skovsmose (2008), ainda nos diz que quando descrevemos algo em termos matemáticos, criamos um modo de ver as coisas, sendo que as ações dependem das linguagens e modificar as linguagens implica modificar as formas de agir (Skovsmose, 2008).

Neste contexto, as atividades devem estimular a curiosidade do estudante, levando-o a questionar, procurar e gerar respostas (Lamonato; Passos, 2012). De acordo com Pirie (1987), o objetivo não deve ser que o discente chegue a uma única resposta certa determinada pelo professor, mas que explore diversas possibilidades, de acordo com suas próprias habilidades, desenvolva argumentos e seja capaz de comunicar e argumentar sobre seus achados com os demais colegas (Serrazina *et al*., 2002; Lamonato; Passos, 2012). Skovsmose (2017) destaca ainda que para a implantação de um cenário de investigação, o professor precisa obter aceitação dos estudantes.

Em decorrência, o planejamento de uma aula com atividades baseadas em cenários para investigação deve levar em consideração o ambiente (sala de aula), o contexto em que estão inseridos os estudantes e a relação entre o professor e a turma (Skovsmose, 2017). Além disso, é fundamental considerar os interesses e necessidades dos estudantes, os recursos disponíveis e as estratégias pedagógicas que incentivem a participação ativa e colaborativa dos estudantes.

Dessa forma, foram elaboradas atividades para serem desenvolvidas em 8 encontros com uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental. O primeiro momento deve ser para a apresentação do projeto de pesquisa, seu desenvolvimento, objetivos, a escolha da turma, a temática e porque a “bicicleta”. Nesse momento também devem ser esclarecidas questões sobre o termo de consentimento e de assentimento entregue aos estudantes.

Na primeira etapa, a atividade desenvolveu-se com a turma por inteiro, baseada na compreensão dos estudantes sobre dois vídeos relacionados ao tema. Para as atividades seguintes, a turma foi organizada em grupos. Para cada grupo de estudo foi disponibilizado um bloco de anotações para descrição de todas as explorações feitas nas atividades e análises coletadas pelos estudantes.

Os membros de cada grupo foram convidados a trabalhar de forma colaborativa e cooperativa, organizando tarefas a serem cumpridas por cada um. Nas seções que se seguem, as atividades de cada etapa serão descritas com maiores detalhes, apresentando os objetivos da professora para cada um dos encontros planejados.

Destaca-se aqui os objetivos propostos pela pesquisadora para todas as etapas:

- Analisar como surgem e se desenvolvem os aspectos investigativos de cada indivíduo no decorrer de uma atividade matemática na prática;
- Observar os questionamentos e curiosidades dos estudantes em cada etapa;
- Verificar o interesse de aprender por investigação, e o seu desempenho crítico, criativo e colaborativo.

Destacando ainda que, por se tratar de uma metodologia investigativa, e que os estudantes não estão familiarizados com estes procedimentos, a fim de facilitar a organização e a orientação dos estudantes. Foram elaboradas questões norteadoras dentro de cada etapa para que os estudantes possuíssem uma instrução, a fim de que a investigação sobre o tema lhe despertasse o engajamento. Em sequência apresentam-se as questões norteadoras para cada etapa, as quais serviram de base aos estudantes durante o seu processo de investigação.

4.3 APRESENTAÇÃO DAS ETAPAS DESENVOLVIDAS

As atividades desenvolvidas para nortear os estudantes foram divididas em oito etapas, elas foram realizadas em sala de aula, no bicicletário, sala de informática, biblioteca e por vezes utilizamos a pista de atletismo que fica ao lado da escola. A seguir descrevemos estas etapas e também os objetivos do professor/pesquisador para cada uma delas.

4.3.1 Etapa 1

Após apresentação e esclarecimentos de dúvidas sobre o projeto, os estudantes assistiram dois vídeos, um intitulado “Quem inventou a bicicleta” disponível no *YouTube*, com duração de 5 minutos e 12 segundos; o outro, com duração de 4 minutos e 5 segundos e também disponível no *YouTube*, trata-se de uma reportagem sobre um professor que utiliza um grupo de ciclistas como personagens para uma aula de matemática, utilizando as bicicletas para ensinar o cálculo de circunferência, além de falar do bem-estar e da perda de calorias em função do ciclismo, fazendo uma relação com a quantidades de pedaladas (Figura 3).

Figura 3 – Imagens dos vídeos da primeira etapa

Fonte: A autora com bases nos vídeos, 2023.

Objetivo da professora/pesquisadora:

- Introduzir o tema a ser trabalhado;
- Engajar e despertar o interesse em práticas investigativas sobre a matemática presente na bicicleta.

A atividade dos estudantes foi descrever quais partes dos vídeos chamou mais atenção, e se eles perceberam algum aspecto matemático na bicicleta, elencando tais itens. O intuito deste encontro é despertar a curiosidade dos estudantes e serem desafiados a fazerem um estudo sobre a bicicleta, e de que maneira que este objeto cotidiano se relaciona com diversos conceitos da matemática.

4.3.2 Etapa 2

Cada grupo deve se basear em um modelo de bicicleta para que possa explorar e responder às questões propostas.

Quadro 4 – Atividades da segunda etapa

a) De acordo com a bicicleta escolhida no bicicletário, descreva o modelo e faça uma exploração nela identificando elementos que estão relacionados com a matemática. **b)** Quais itens específicos da bicicleta fazem ela se movimentar? Descreva. **c)** Qual desses itens podem fazer variar a velocidade sendo mais rápido, ou mais lento? liste-os. **d)** Ao investigar uma bicicleta, o que você gostaria de descobrir? (resposta individual).
Objetivo da professora/pesquisadora: • Oportunizar por meio prático a compreensão dos conceitos matemáticos do círculo e circunferência, • Identificar os elementos da engrenagem que fazem a bicicleta andar.

Fonte: A autora, 2023.

Cada grupo deverá fazer anotações destes itens, nomeando cada um e registrando em seu bloco de anotações. Podendo também utilizar fotos, e descrever curiosidades e questionamentos que surgirem, para posterior discussão com o grande grupo.

Ao final do segundo encontro, espera-se que os estudantes reconheçam que o movimento da bicicleta depende de um sistema de transmissão formado pela coroa, catraca, pé de vela e correia. Além disso, através de exploração e investigação, eles devem identificar formas geométricas e outros conceitos de geometria presentes na bicicleta

4.3.3 Etapa 3

No mundo do ciclismo existem diferentes modelos e tamanhos de bicicletas. Para essa etapa, os estudantes devem fazer uma pesquisa a fim de responder às seguintes questões:

Quadro 5 – Atividades da terceira etapa

a) Qual significado de aro? b) Qual unidade de medida do aro da bicicleta? c) Qual relação entre o aro e a bicicleta? d) Existem outros tipos e tamanhos de aro? Quais? e) Quais os tamanhos de aros que tem no bicicletário da escola?
Objetivo da professora/pesquisadora: • Possibilitar a compreensão das definições que determinam o tamanho do aro da bicicleta; • Desenvolver a aprendizagem na utilização de alguns instrumentos de medida; • Aumentar o conhecimento dos estudantes com relação a medida de polegadas, e a conversão desta unidade de medida.

Fonte: A autora, 2023.

Para responder a letra “e” do Quadro 5, os estudantes fizeram medidas, identificaram e determinaram os diferentes tamanhos de bicicletas. Para essa atividade, os estudantes utilizaram o metro como ferramenta de medida. Eles também descreveram todos os dados encontrados, dúvidas, descobertas, erros e acertos, tanto as do grupo como as individuais em seus blocos de anotações. Neste momento, os estudantes notaram que essa medida está em polegadas e que para conseguir responder às questões, eles converteram as medidas para centímetros ou metros.

4.3.4 Etapa 4

Dando continuidade à investigação, nesta etapa os estudantes investigaram aros de bicicleta de diferentes tamanhos e preencheram uma tabela preestabelecida pela professora/pesquisadora.

Quadro 6 – Atividades da quarta etapa

Tamanho do aro da bicicleta	Tamanho do comprimento circunferência da roda em cm	Tamanho diâmetro da roda em cm	Tamanho do raio da roda em cm	Quantas vezes cabe a medida do diâmetro no comprimento da circunferência?
Objetivo da professora/pesquisadora: • Potencializar a capacidade de observação, organização e aprendizagem dos estudantes, para possibilitar a compreensão e identificação do número Pi.				

Fonte: A autora, 2023.

Os estudantes utilizaram o metro como instrumento de medida e seus blocos de anotações para escreverem erros, acertos, dúvidas e descobertas. Os estudantes continuaram sua investigação sobre a relação encontrada nessa etapa fazendo um aprofundamento sobre o comprimento da circunferência e o diâmetro, analisando se esse fato encontrado ocorre para qualquer circunferência.

Quadro 7 – Continuação das atividades da quarta etapa

a) Que relação ocorre entre tamanho comprimento da circunferência e o seu diâmetro? E se o tamanho mudar? b) Qual a origem do Pi? Investigue. c) Como que o Pi está ligado à bicicleta? Descreva.
Objetivo da professora/pesquisadora: • Identificar as relações matemáticas envolvidas. Interagir entre os membros do grupo e com demais grupos se comunicando matematicamente.

Fonte: A autora, 2023.

Ainda para essa investigação os estudantes utilizaram outras circunferências da própria bicicleta para obterem outras análises sobre a constante Pi, os grupos desenvolveram ideias sobre o conceito de Pi por meio da exposição de ideias com relação do comprimento da roda e o diâmetro, fazendo todas as anotações necessárias para uma discussão entre o seu grupo e o grande grupo.

4.3.5 Etapa 5

Nesta etapa os estudantes foram levados a um espaço onde puderam andar de bicicleta. Local seria na pista de corrida que fica no campo de futebol ao lado da escola, possibilitando a investigação, e ainda descrever em seu bloco de anotações os dados coletados.

Quadro 8 – Atividades da quinta etapa

Quantidade de voltas para cada roda			
Bicicleta	Percurso de 10 km	Percurso de 20 km	Percurso de 40 km
Aro 20			
Aro 26			
Aro 29			
Objetivo da professora/pesquisadora: • Desenvolver a compreensão das medidas de comprimento da circunferência; • Proporcionar a compreensão dos dados colhidos, e a verificação da unidade de medida usada.			

Fonte: A autora, 2023.

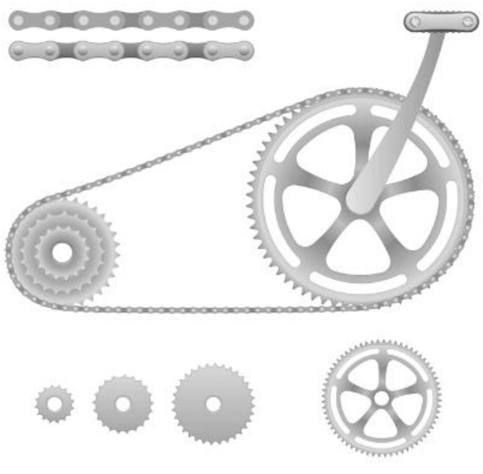
Utilizando os dados já coletados e com base nos experimentos feito na pista de corrida, os estudantes registraram na tabela representada no quadro oito a quantidade de voltas que as rodas fazem para cada percurso indicado. Em grupo, os estudantes discutiram e descreveram as soluções, e de como elas foram construídas.

Ao fim desta etapa, era esperado que os estudantes fossem capazes de identificar a circunferência, diâmetro e raio das rodas de uma bicicleta e suas relações. Além disso perceber esses conceitos matemáticos e o seu uso prático nesses objetos.

4.3.6 Etapa 6

Ao concluir a etapa anterior, esperava-se que os estudantes debatessem outros tipos de variáveis que possam interferir no desenvolvimento do percurso da bicicleta, e até mesmo com relação ao tempo utilizado por cada uma (Figura 4). Esperava-se que nessa análise eles consigam identificar o sistema de transmissão da bicicleta, pois esse é um dos fatores importantes no desempenho da bicicleta.

Figura 4 – Representação de um sistema de transmissão de uma bicicleta



Fonte: Freepik.com, 2023.

Assim, para a etapa 6 os estudantes investigaram quais componentes específicos fazem a bicicleta se locomover. Os discentes devem descrever todos esses elementos e suas funções para a locomoção da bicicleta e, a partir dessas anotações, irão tabelar a quantidade de dentes das engrenagens analisadas.

Quadro 9 – Atividades da sexta etapa

Engrenagens	1ª	2ª	3ª	4º	5º	6º
Número de dentes da coroa						
Diâmetro da coroa						
Número de dentes da catraca						
Diâmetro da catraca						
Quantidade de elos na corrente						

Fonte: A autora, 2023.

Em seguida, após fazerem estas contagens e anotações, os grupos utilizaram esses dados para responder às questões propostas, apresentadas no Quadro 10:

Quadro 10 – Questões da sexta etapa

a) O que determina a quantidade de marchas em uma bicicleta? b) Qual relação tem entre os dentes da catraca e os da coroa? Explique matematicamente. c) Uma volta na catraca corresponde a quantas voltas na roda? Descreva detalhadamente. d) Qual relação matemática existe entre a quantidade de dentes na coroa e os números elos da corrente e o que isso interfere para dar uma volta completa na corrente?
Objetivo da professora/pesquisadora: • Potencializar o desenvolvimento do raciocínio lógico para compreender as relações matemáticas existentes entre catraca, coroa e corrente.

Fonte: A autora, 2023.

Para estas questões, os estudantes utilizaram instrumentos de medidas e calculadoras. Os discentes continuaram fazendo todas as anotações necessárias em seu bloco de notas, inclusive desenhos ilustrativos. Nesta etapa, era esperado dos estudantes, um nível de argumentação e abstração maior para o desenvolvimento das conclusões que foram discutidas com o grande grupo sobre os conceitos abordados no encontro.

4.3.7 Etapa 7

Na etapa sete os grupos de estudantes analisaram os dados coletados até o momento e utilizaram a tabela do Quadro 9 para conseguir elencar a proposta desta etapa.

Quadro 11 – Atividades da sétima etapa

a) Uma volta completa na engrenagem maior da coroa corresponde a quantas voltas na engrenagem da catraca menor? Faça essa mesma simulação com outras combinações entre estas engrenagens da coroa e catraca. b) Para um evento de ciclismo onde o percurso é muito longo, quando o ciclista se depara com uma lomba muito alta, para ele economizar energia ele anda o mais devagar possível. Para que isso aconteça, como ele deve combinar as engrenagens entre a coroa e a catraca? Descreva matematicamente.

Objetivo da professora/pesquisadora:
• Verificar proporção existente entre coroa e catraca. Elaborar estratégias para a solução da questão b.

Fonte: A autora, 2023.

Nessa atividade os estudantes puderam fazer o uso de calculadoras e outros materiais para conseguirem determinar quantidades e medidas que precisassem. Todos os dados coletados foram descritos no bloco de anotações do grupo. Nesta etapa espera-se que os estudantes tenham estabelecido uma relação sólida entre o funcionamento da bicicleta e os conceitos matemáticos abordados no decorrer dos encontros.

4.3.8 Etapa 8

Para esta etapa final, cada grupo elaborou um produto final de suas investigações contendo introdução, resumo, ilustrações, descrições e resultados matemáticos encontrados em cada elemento analisado da bicicleta. Neste deveria constar também alguma curiosidade sobre o assunto e um conceito matemático envolvendo a bicicleta que não foi analisado nas atividades propostas. O trabalho final ainda deveria conter a opinião de cada estudante do grupo sobre a importância das atividades e o que este destacaria sobre como foi aprender matemática investigando uma bicicleta.

Quadro 12 – Objetivos da professora/pesquisadora para a etapa oito

Objetivo da professora/pesquisadora:
• Organizar os estudos e conteúdos matemáticos, esquematizando ideias principais abordadas no decorrer das atividades; • Envolver a identificação de padrões nos dados e quais estão consistentes com a atividade, permitindo que eles falem por si mesmo, sem tentar forçar resultados, e sendo transparente.

Fonte: A autora, 2023.

Para a última etapa, esperou-se que os estudantes fossem capazes de descrever e argumentar em grande grupo como aprenderam os conteúdos matemáticos investigando matematicamente uma bicicleta. Além disso, foi importante encorajá-los a expressar de que maneira essa investigação contribuiu para o seu entendimento mais amplo da matemática, como instigou a curiosidade, e ajudou a perceber a relevância dos conceitos aprendidos e como essa aplicação prática influenciou sua compreensão do mundo real.

Na seção seguinte apresentamos as considerações e as análises de cada etapa realizada no estudo. Os dados foram coletados através de observação da professora/pesquisadora por meio de anotações, fotos e áudios.

5 RELATOS E ANÁLISES DOS DADOS PRODUZIDOS

Para descrever os dados, foram considerados todas as anotações nos blocos que os grupos usaram, fotos vídeos e as observações da professora/pesquisadora. Esses blocos de anotações são fundamentais para os diagnósticos a serem relatados nessa sessão, pois neles constam informações sobre discussões do grupo, tarefas executadas, desafios encontrados sendo que esses registros foram importantes para que os grupos pudessem acompanhar seu progresso e identificar seus resultados. Antes de fazer estas análises retomamos a pergunta que norteia essa dissertação:

"Como a implementação de atividades na forma de aprendizagem investigativa pode promover um papel ativo e o engajamento dos estudantes no processo de aprendizagem?".

Também é preciso rever os seus objetivos da pesquisa que são:

- Analisar as potencialidades de aprender matemática por investigação;
- Identificar os fatores que possibilitam ter uma aprendizagem com conexões da realidade do estudante;
- Interpretar os dados identificando habilidades desenvolvidas pelos estudantes durante as atividades.

Assim, para esse capítulo a professora/pesquisadora descreverá as etapas e os apontamentos de cada grupo, observando e analisando as atividades feitas pelos estudantes, e se a metodologia por investigação remete à resposta da pergunta. E ainda identificar, e informar se os objetivos foram alcançados no decorrer de todas as etapas, ou seja, fazer uma análise dos dados coletados nas atividades propostas.

Ressaltamos que o desenvolvimento das atividades ocorreu durante as aulas regulares da turma no período matutino. Inicialmente, das quatro aulas semanais de quarenta e cinco minutos cada, foram programadas duas aulas por semana para a realização das atividades. No entanto, em determinadas etapas do projeto, foi necessário utilizar todas as aulas da semana devido à demanda por um tempo maior e à necessidade de cumprir o prazo estabelecido para a conclusão das atividades.

Essa adaptação no cronograma permitiu uma exploração mais aprofundada dos conceitos abordados, além de proporcionar aos estudantes a oportunidade de se engajar de maneira mais intensa e reflexiva no processo de investigação matemática. A flexibilidade no uso do tempo foi crucial para acomodar o ritmo de aprendizado dos estudantes e garantir que todos pudessem participar plenamente das atividades propostas.

Para descrever as análises de dados, agrupamos algumas etapas pois algumas atividades se complementavam no decorrer do seu desenvolvimento. Então para melhor fazer as análises elas ficaram juntas, neste formato (Etapas 1 e 2), (Etapas 3,4 e 5), (Etapas 6 e 7) e (Etapa 8). Foram utilizadas as anotações da professora/pesquisadora e a dos estudantes da turma. E para respeitar a privacidade de cada estudante, adotamos as legendas descritas no Quadro 13 abaixo para poder mencioná-los no decorrer das atividades.

Quadro 13 – Legenda dos estudantes

Grupos	**Estudantes**
Grupo 1	G1A, G1B
Grupo 2	G2A, G2B, G2C
Grupo 3	G3A, G3B, G3C
Grupo 4	G4A, G4B, G4C
Grupo 5	G5A, G5B, G5C
Grupo 6	G6A, G6B, G6C
Grupo 7	G7A, G7B, G7C
Grupo 8	G8A, G8B, G8C
Grupo 9	G9A, G9B, G9C

Fonte: A autora, 2023.

Na legenda acima temos 9 grupos, em que oito grupos são compostos por três estudantes e um grupo por dois estudantes. Sendo que o G1A, corresponde ao estudante A do Grupo 1, o G2B, corresponde ao estudante B do Grupo 2, o G3C corresponde ao estudante C do grupo 3, e assim por diante.

Os relatos destacam o progresso da participação dos estudantes em relação as atividades propostas, o engajamento, e o papel ativo do estudante. Para ilustrar esse progresso, são ressaltadas algumas das falas dos estudantes ao longo das etapas. Essas falas dos estudantes também servem como base para a análise de dados que será realizada após a descrição dos relatos.

5.1 RELATOS DAS ETAPA UM E DOIS

Para iniciar a abordagem das atividades, foi realizada uma explicação sobre o conceito de “dissertação”, uma vez que a maioria dos estudantes não estava familiarizada com esse termo. Após as explicações, foi apresentado o tema e algumas orientações de como ocorreriam as atividades. Após esse momento e com o aceite dos estudantes, eles foram direcionados para a sala de vídeo da escola para assistirem dois pequenos vídeos para servirem como base dos estudos.

5.1.1 Relatos da etapa um

Para a apresentação destes vídeos para os estudantes, houve uma pesquisa e uma seleção previa pela professora, onde foi analisado qual dos vídeos apresentar aos estudantes, para alcançar os seguintes objetivos:

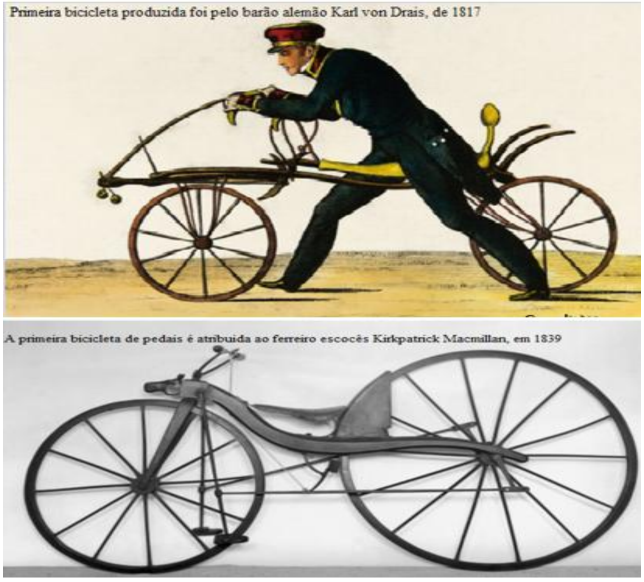
- Introduzir o tema a ser trabalhado;
- Engajar e despertar as práticas investigativas sobre a matemática presente na bicicleta.

Utilizou-se o vídeo para contribuir na aprendizagem pois com ele segundo Moran (1995):

> O vídeo parte do concreto, do visível, do imediato, do próximo, que toca todos os sentidos. Mexe com o corpo, com a pele, nos toca e “tocamos” os outros, que estão ao nosso alcance, através dos recortes visuais, do close, do sem estéreo envolvente. Pelo vídeo sentimos, experimentamos sensorialmente o outro, o mundo em nós mesmos (Moran, 1995, p. 37).

Isso se alinha com a abordagem para essa primeira etapa, que é aproximar e envolver o estudante no tópico de estudo, Moran (2019) ainda afirma que a mídia pode contribuir na aprendizagem, pelo som, pela imagem, simulações, dramatizações, e pela mídia, ele diz que “é partir de onde o aluno está ajudando-o a ir, do concreto para o abstrato, do imediato para o contexto, do vivencial para o intelectual, integrando o sensorial, o emocional e o racional”. (Moran, 1991, p146). Com base nestas afirmações escolheu-se o primeiro vídeo que retrata a história da bicicleta, desde a primeira versão até os dias atuais (Figura 5).

Figura 5 – Imagem do primeiro vídeo exibido



Fonte: Elaborado pela autora com base no vídeo, 2023.

Este primeiro ajudou os estudantes a desenvolver uma compreensão básica sobre a história, uso da bicicleta e as tecnologias existentes nela. Entre as discussões e falas entre os grupos, o estudante G3A falou "*profe não sabia que a primeira bicicleta não tinha pedal*" e ainda disse "*em casa vou pesquisar mais vídeos sobre isso*". Nesse momento observou-se que o vídeo ajudou no engajamento do estudante com sua curiosidade e interesse ainda mais pela bicicleta, mesmo ela fazendo parte de seu cotidiano, pois ficaram impressionados com a evolução das bicicletas, da tradicional até as bicicletas elétricas e as dobráveis.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), contribuem dizendo que essa fase da atividade, embora curta, é absolutamente crítica, pois dela vai depender o resto. Eles ainda citam que "o professor tem de garantir que todos os estudantes entendem o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade", Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p 23).

Portanto nesse primeiro momento observou-se que o estudante aprofundou seus conhecimentos históricos sobre o tema, isso fez com eles quisessem aprofundar seus conhecimentos e o interesse de prosseguir nas etapas seguintes. Este interesse do estudante em querer aprender, em querer ampliar seus conhecimentos faz com que o estudante tenha engajamento:

> O engajamento do aluno em relação a novas aprendizagens, pela compreensão, pela escolha e pelo interesse, é condição essencial para ampliar suas possibilidades de exercitar a liberdade e a autonomia na tomada de decisões em diferentes momentos do processo que vivência, preparando-se para o exercício profissional futuro (Bebel, 2011, p. 30).

Nesse sentido, os estudantes mostram liberdade no desejo de aprender e autonomia em suas escolhas, o que possibilita novas aprendizagens. Essas aprendizagens, por sua vez, terão mais significado em suas vivências diárias.

O segundo vídeo mostrou uma reportagem que traz como título “Na aula de matemática, o professor ensina cálculo das circunferências”. E como enredo destaca que “Além de ser um esporte prazeroso, andar de bicicleta faz muito bem para a saúde, e a bicicleta ainda pode dar uma forcinha na hora de estudar matemática”.

A reportagem fala de um professor e sua turma de estudantes fazendo um passeio de bicicleta, mas que ao mesmo tempo o professor proporciona aprendizagens de matemática para seus estudantes. Este vídeo apresentou exemplos práticos e contextualizados relacionados a conteúdos matemáticos na aplicação do mundo real. Isso ajudou os estudantes a perceberem a relevância da atividade proposta.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), ainda relatam que “o cuidado posto nesses momentos iniciais tem especial relevância quando os alunos têm pouca ou nenhuma experiência com as investigações”. E que “muitas vezes a tarefa é fornecida aos alunos por escrito, o que, sem dúvida, é vantajoso, mas não dispensa uma pequena introdução oral por parte do professor”. A condução da professora ficou focada na introdução do tema por meio de orientações e discussões pós-vídeos, levando sempre em considerações todas as reflexões dos estudantes.

O vídeo também proporcionou aos estudantes entenderem sobre importância da bicicleta na sociedade, sendo ela uma forma de transporte sustentável e acessível, que pode ajudar a melhorar a saúde e a qualidade de vida das pessoas. Durante a reportagem os estudantes conseguiram identificar conceitos matemáticos, instigando sua curiosidade e a querer explorar estes elementos em suas próprias bicicletas. Também identificaram outras conexões entre diferentes áreas do conhecimento e situações com a vida real, até mesmo fora do contexto da matemática como por exemplo: saúde (física e mental), nutrição, economia financeira, poluição e trânsito.

Ainda sobre os vídeos os estudantes observaram e relataram com o grande grupo sobre a importância da atividade física, e de como eles utilizam a bicicleta o tempo todo em seu cotidiano, mas que não imaginavam ter conceitos matemáticos envolvidos. Nesse momento pode-se perceber o olhar crítico dos estudantes com relação aos vídeos. Skovsmose (2009, p 128), fala sobre a literacia, que é a capacidade que vai além de ler e escrever ele diz que “capacidade para ler e interpretar situações sociais, culturais, políticas, econômicas e interpretar essas situações com condições para a realização de ações de transformação”.

Isto seria muito mais do que ter a capacidade de ler e escrever como ele mesmo fala, é uma habilidade que pode ser usada para fazer a diferença em seu mundo. Ao desenvolver essa capacidade, os indivíduos podem tornar sua realidade e seu cotidiano em algo melhor para seu meio social. Neste sentido, podemos ter formas de organizar a educação matemática na sala de aula que não estejam só baseadas no discurso do professor, mas sim na potencialização do estudante possibilitando o desenvolvimento de competências, de tal modo:

> […] a educação matemática pode também ter um potencial para desenvolver um forte auxílio para ideias democráticas, embora este potencial não seja compreendido por nenhuma força intrínseca à educação matemática. Como ela pode operar em relação aos ideais democráticos dependerá do contexto, da maneira como o currículo é organizado, do modo como as expectativas dos estudantes são reconhecidas etc. (Skovsmose, 2007, p. 72).

Assim, podemos concluir que os vídeos atingiram os objetivos idealizados pela professora/pesquisadora, pois estimularam a curiosidade e o interesse dos estudantes. Esse engajamento levou-os a participar ativamente das atividades propostas, promovendo um aprendizado por meio da investigação e da exploração de conceitos matemáticos.

Ao despertar a vontade de aprender, os vídeos contribuíram para um ambiente educativo mais dinâmico e interativo, reforçando a importância de metodologias que incentivem a descoberta e a autonomia dos estudantes. Ao final dessa etapa, percebe-se que o tópico escolhido também foi algo importante no desenvolvimento do interesse dos estudantes para continuarem os estudos sobre o tema.

5.1.2 Relatos da etapa dois

Para orientar os estudantes foram produzidas algumas questões para auxiliar no momento das atividades investigativas, visto que os mesmos não estão familiarizados com este tipo de metodologia. E que ainda considerando que a investigação é um método em que são os estudantes que fazem o aceite da atividade, ou seja, que o estudante realmente queira aprender estudando (investigando) aquele tópico escolhido.

Mesmo que este tópico, no caso a bicicleta ser um objeto conhecido e estar em sua realidade, o estudante precisa de algumas orientações da professora. Para melhor organização descrevemos novamente para cada etapa as questões norteadoras apresentadas para os estudantes e os objetivos da professora/pesquisadora para esta etapa.

- Oportunizar por meio prático a compreensão dos conceitos matemáticos do círculo e circunferência;
- Identificar os elementos da engrenagem que fazem a bicicleta andar.

A Seguir, temos as descrições das questões respondidas pelos grupos da etapa dois. Todas as respostas foram descritas tal como os estudantes responderam.

Quadro 14 – Respostas dos grupos da segunda etapa

	a) Descreva o modelo da bicicleta escolhida, e faça uma exploração nela identificando elementos que estão relacionados com a matemática. b) Quais itens específicos da bicicleta fazem ela se movimentar? Descreva. c) Qual desses itens pode fazer variar esse movimento sendo mais rápido, ou mais lento? liste-os. d) Ao investigar uma bicicleta, o que você gostaria de descobrir? (pode ser resposta individual)
Grupo 1	a) Uma Caloi aro 29, para adultos ou adolescentes. Foi encontrado figuras geométricas. b) Coroa, catraca, roda, corrente e pedal c) A marcha ou a força que você terá que fazer para pedalar d) G1A e G1B - "Qual velocidade uma bicicleta pode chegar?"
Grupo 2	a) Bicicleta Track aro 26, círculo, raio b) Pedal, correia, roda c) Freio e pedal d) G2A- "Como funciona a troca de macha? G2B- "Como é a montagem de uma bicicleta"? G2C- "Como funciona a física de uma bicicleta"?
Grupo 3	a) Bicicleta aro 26, MTB, Circunferência, raio, distância b) Roda, raio, correia, guidão c) Pneu, correia, quadro, marcha d) G3A, G3B, G3C- "Qual a velocidade média"?
Grupo 4	a) Colli, aro 26, círculos, retângulos, cilindros e triângulo b) Coroa movida pelos pedais, é ligada a uma engrenagem traseira (catraca), que é acoplada à roda traseira, o guidão tem a função de garantir a direção da bicicleta. c) Pedivela, coroa e catraca d) G4A- "como conseguimos nos equilibrar, frear e virar sem cair"? G4B- "como conseguimos frear e quais engrenagens que compõem o freio"? G4C- "como funciona a catraca para passar as machas"?
Grupo 5	a) Aro 29, movimento, velocidade, distância b) Correia, pedal, guidão c) As rodas e o freio d) G5A, G5B, G5C- "Porque o pneu esvazia quando fica no sol"?
Grupo 6	a) Bicicleta adulta, aro 29, as marchas, coroa e catraca b) Correia juntamente com a roda e a catraca. c) A catraca, freio, pedal d) G6A- "como a bicicleta se movimenta"? G6B- "Quantas pedaladas precisam para percorrer 40 km"? G6C- "Como se dá o grau da bicicleta"?

Grupo 7	a) Modelo BMX, elementos encontrados ângulos (quadro da bicicleta), diâmetro, raio e circunferência. b) Pedal movimenta a correia, que movimenta a coroa, que movimenta a roda e a roda faz a bicicleta se movimentar. c) A coroa d) G7A- "É possível manter uma trajetória reta"? G7B- "Como manter uma bicicleta em equilíbrio"? G7C- "Como empinar uma bicicleta"?
Grupo 8	a) Uma Caloi aro 26, elementos, circunferência, suspensão, ângulos b) Freio e pedal c) Rodas, pedal e guidão d) G8A- "Como ela se mantém equilibrada"? G8B- "Como funciona a correia"? G8C- "Como funciona a mecânica da bicicleta"?
Grupo 9	a) Bicicleta de aro 29, figuras geométricas, velocidade b) Coroa, rodas, pedal, correia e catraca c) Freio, força usada, marcha d) G9A, G9B, G9C- "Porque ela não anda para traz"?

Fonte: A autora, 2023.

Ao escolher as questões iniciais, a intenção era proporcionar aos estudantes uma introdução acessível ao tema, facilitando sua compreensão e despertando curiosidade. Através dessas questões, buscou-se estabelecer uma conexão com os estudantes, criando um ambiente acolhedor e estimulante que favorecesse o desenvolvimento do interesse e da motivação para explorar o assunto.

Essa estratégia visava não apenas engajar os estudantes desde o início, mas também construir uma base sólida para o aprofundamento subsequente dos conceitos, permitindo que os estudantes se sentissem confortáveis e confiantes para participar ativamente das atividades e discussões propostas. Pois temos que:

> Existe uma intenção e uma atitude de curiosidade que move os participantes. Eles controlam o processo e são responsáveis por conduzir as atividades; trata-se de uma propriedade compartilhada. Um cenário para investigação é planejado para fornecer significado ao que os/as alunos/as estão produzindo na atividade (Skovsmose, 2011).

Com isso podemos possibilitar uma experiência gratificante para os estudantes, pois lhes dará oportunidade de aprender de forma independente e aplicar seus conhecimentos a um tópico que é significativo para eles. A intencionalidade destas questões norteadoras que estão no decorrer de todas as etapas é justamente tentar fazer o estudante aprofundar seu aprendizado, ou seja, utilizar os seus próprios conhecimentos e utilizá-los para ampliar novos conceitos matemáticos. Isso nos faz lembrar dos *backgrounds* e *foregrounds* que fala Skovsmose (2008), referindo-se o que ela já sabe, e o que ela ainda pode aprender sobre a bicicleta.

Ainda sobre a proposta de atividade, além de explorarem a bicicleta fisicamente e fazer anotações, os estudantes podiam procurar soluções de suas questões através de livros, jornais, e utilizar a sala de informática, que ficou disponível para eles em todas as etapas. Assim questões como a “d” foram respondidas utilizando esses meios. Em seguida estão descritos alguns relatos da etapa 2.

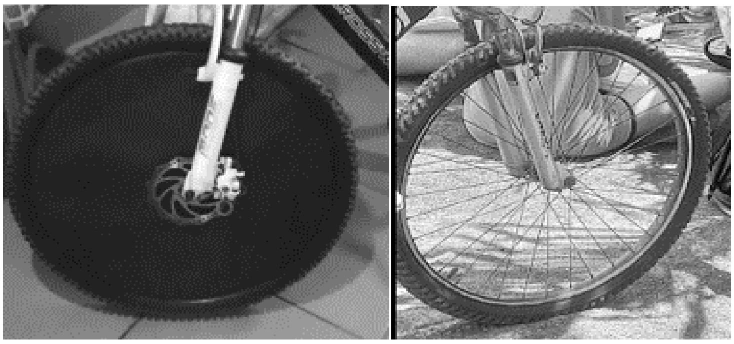
Os estudantes, estavam com expectativas e demonstraram disposição para experimentar. Reuniram-se no bicicletário da escola, organizados em grupos e munidos de blocos de anotações, com o propósito de explorar as bicicletas. Cada grupo escolheu uma bicicleta e iniciou uma investigação, buscando identificar respostas com base nas perguntas orientadoras fornecidas. Durante esse momento, exploraram ativamente a bicicleta, trocando ideias e questionando uns aos outros sobre as diversas peças que compunham o objeto de estudo.

No primeiro momento observou-se que eles perceberam as diferentes formas geométricas que compõem uma bicicleta, como o círculo das rodas, o triângulo do quadro e a forma triangular do banco. Observando as falas dos estudantes do Grupo 9 (G9A, G9B e G9C):

> G9A “consigo observar formatos de triângulos e os círculos”.
> G9B “até o banco lembra o formato de um triângulo e ainda tem as inclinações que faz lembrar dos ângulos”.
> G9C “o pedal tem um formato de um retângulo e na catraca tem várias circunferências”.
> G9C “os raios as retas”.
> G9B “mas é círculo ou circunferência?”.
> G9C “o pneu acho que é uma circunferência!”.
> G9A “o espaço que fica os raios é o círculo, seria quando coloca o tampão das rodas”.

Durante essas falas pode-se percebeu que os estudantes não conseguiam expressar claramente o que era o círculo e a circunferência, invertendo suas definições. Para o esclarecimento de suas dúvidas usaram a internet e alguns livros de matemática disponíveis na biblioteca para sua investigação. Ainda nesta atividade houve uma discussão também sobre os conceitos de raio e do diâmetro de uma circunferência. Abaixo os estudantes em colaboração entre si, conseguiram então representar o que seria os conceitos de círculo e da circunferência (Figura 6).

Figura 6 – Atividades da segunda etapa



F 1 A autora. 2023.

Na imagem um, eles deram como exemplo o “tampão da roda” que o estudante G9A falou para exemplificar o que seria o círculo, ou seja, é o espaço limitado pelo pneu. E a imagem dois então seria o pneu para mostrar a circunferência. Compreendendo que estas situações são apenas representações do círculo e da circunferência e que para os conceitos temos Dolce e Pompeo (2013) colaboram com:

> Circunferência é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o centro, e a distância dada é o raio da circunferência, e que o círculo (ou disco) é um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é menor ou igual a uma distância (não nula) dada (Dolce e Pompeo, 2013, p. 143-145).

Portando essas representações que os estudantes chegaram servem como analogias para os conceitos de círculo e circunferência, respectivamente. Essas visualizações ajudaram a elucidar esses conceitos complexos de maneira mais tangível e acessível.

No entanto, é fundamental reconhecer que essas analogias são simplificações e que os conceitos de círculo e circunferência envolvem propriedades matemáticas mais abrangentes. Essas representações visuais proporcionam um ponto de partida para uma compreensão, mas é necessário aprofundar o estudo por meio de uma análise mais detalhada e rigorosa desses conceitos na matemática.

Nessa etapa pode ser verificado o engajamento dos estudantes dos grupos, e do grupo com os outros grupos, tendo questionamentos entre a maioria deles, onde conseguiram encontrar e identificar significados para as questões propostas. Destacam-se ainda outras falas dos estudantes G4A, G7B e G4A:

> G4A- “como conseguimos nos equilibrar, frear e virar sem cair”?
> G7A- “é possível manter uma trajetória reta?
> G7B- “como manter uma bicicleta em equilíbrio”?

G8A- “como ela se mantém equilibrada”?

Após a pesquisa e algumas falas, os estudantes concordaram entre si com a resposta que o estudante G7A elaborou:

> G7A- “resumindo, podemos dizer então que para se manter a bicicleta em equilíbrio, é necessário distribuir o peso de forma adequada entre as rodas, manter uma velocidade constante e fazer ajustes suaves na direção utilizando o guidão”. “à prática regular ajuda a desenvolver a habilidade de manter o equilíbrio”.

Os estudantes encontraram outras respostas tanto para esta questão quanto para as demais que surgiram, a fim de sanar suas curiosidades em relação à questão "d". Em geral, discutiam entre si, compartilhando ideias e perspectivas diversas, até chegarem a uma conclusão que realmente permitisse identificar a resposta pretendida. Esse processo colaborativo e autônomo, não apenas reforçou o entendimento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também promoveu habilidades de comunicação, pensamento crítico e trabalho em equipe.

O manuseio da bicicleta no primeiro momento trouxe estranheza, mesmo sendo algo tão comum a eles, mas o que eles realmente achavam confuso, “diferente” era a aula de matemática ser “mexer” em uma bicicleta. No entanto, com o tempo foram se adaptando e conseguiram responder às questões propostas e ter significados para eles. Além de aprender os conceitos de matemática, observou que os estudantes também desenvolvem habilidades importantes, como trabalho em equipe, resolução de problemas e comunicação.

Conforme o que foi apresentado, abrir uma atividade para criar uma atividade ligada a um cenário para investigação está conectada a duas possíveis ações: criar outras possibilidades de encaminhamento sobre a temática proposta no exercício (Skovsmose, 2011) e legitimar e desenvolver os comentários dos estudantes a respeito do enunciado da atividade. Portanto essas práticas sugerem que podem estar relacionadas a abordagens específicas de ensino e aprendizagem.

Os grupos G1, G3, G4, apresentaram bastante interesse no desenvolvimento das atividades e das questões, e foram colaborativos com os demais grupos ajudando nas atividades. O G2 teve dificuldades de entender o que estava “acontecendo” na aula, foi preciso intervenção da professora, que conseguiu ajudar o grupo G2 a entender o que estava acontecendo na aula esclarecendo suas dúvidas e oferecendo-lhes apoio adicional.

Alguns colegas de outros grupos também foram capazes de ajudar o grupo G2, compartilhando suas próprias experiências e oferecendo dicas. No geral, o grupo G2 pode concluir a atividade com sucesso, mas eles precisaram de um pouco mais de apoio do que os outros grupos. A professora forneceu esse apoio e o grupo G2 foi capaz de aprender e crescer com a experiência.

Os grupos G6, G7 e G9 mostraram um interesse genuíno pela atividade e fizeram questionamentos para a professora. Por exemplo, eles perguntaram como a bicicleta se mantém em equilíbrio. Essa é uma pergunta interessante e complexa, e os estudantes ficaram curiosos para saber a resposta. A professora orientou os estudantes a buscar a resposta através de pesquisa na internet, que utilizaram a sala de informática, assim conseguiram resposta à pergunta de forma clara e concisa, e os estudantes ficaram satisfeitos com a resposta.

Os grupos G5 e G8 também mostraram interesse pela atividade, mas não fizeram tantas perguntas. Isso pode ser porque eles estavam mais preocupados em responder apenas às questões impostas a eles do que em aprender sobre a matemática da bicicleta. No entanto, eles ainda foram capazes de aprender sobre a bicicleta, mesmo que não tenham feito tantas perguntas (Figura 7).

Figura 7 – Atividades da segunda etapa

Fonte: A autora, 2023.

Com relação à questão "d" que dizia "ao investigar uma bicicleta, o que você gostaria de descobrir?", todos os estudantes fizerem pesquisas para buscar as respostas de seus questionamentos, utilizando a sala de informática como apoio para esclarecer suas dúvidas e curiosidades. A utilização da sala de informática por todos os grupos se mostrou de grande importância, uma vez que proporcionou aos estudantes acesso a uma diversidade de fontes de informação, englobando livros, artigos, websites e vídeos.

Essa abrangência de recursos contribuiu significativamente para a riqueza e amplitude das pesquisas realizadas pelos estudantes. De acordo com o Moran (2007), enfrentamos desafios significativos no ensino voltado para a aprendizagem, importante a exploração de novas abordagens para a integração entre elementos humanos e tecnológicos.

> As tecnologias são pontes que abrem a sala de aula para o mundo, que representam, medeiam o nosso conhecimento do mundo. São diferentes formas de representação da realidade, de forma mais abstrata ou concreta, mais estática ou dinâmica, mais linear ou paralela, mas todas elas, combinadas, integradas, possibilitam uma melhor apreensão da realidade e o desenvolvimento de todas as potencialidades do educando, dos diferentes tipos de inteligência, habilidades e atitudes (Moran, 2007, p. 164).

Ao longo de todas as etapas, os estudantes recorreram à sala de informática sempre que necessário, ressaltando a importância crucial desse recurso. Entretanto, é relevante salientar que o foco central da dissertação está na aprendizagem por meio da investigação, sendo este um breve apontamento sobre a utilização das tecnologias no contexto específico da pesquisa.

Na próxima sessão, serão examinados os resultados obtidos durante as duas primeiras etapas do projeto, visando identificar padrões e tendências que possam contribuir para o desenvolvimento e aprimoramento das etapas subsequentes.

5.1.3 Análise dos dados das etapas um e dois

A análise dos dados destas duas etapas constitui uma parte importante deste estudo, uma vez que permite uma compreensão mais aprofundada do processo de investigação realizado pelos estudantes. Dessa forma, é fundamental examinar de maneira criteriosa as atividades, as interações e as descobertas dos estudantes ao longo dessas fases iniciais, a fim de extrair a análise de dados que sejam significativas e embasar as próximas etapas da pesquisa.

Por meio de observações e anotações da professora/pesquisadora diretamente envolvida nas atividades iniciais, foi possível obter informações e observar o engajamento dos estudantes, os desafios enfrentados e as conquistas alcançadas. Essas observações permitiram uma análise detalhada do processo de aprendizagem, identificando quais estratégias foram mais eficazes e quais áreas necessitam de ajustes.

Essa perspectiva proporciona uma visão mais detalhada das dinâmicas de sala de aula, das interações entre os estudantes e do progresso individual de cada grupo. As duas primeiras etapas foram planejadas com o objetivo de auxiliar os estudantes a compreenderem e a se interessarem pelo aprendizado investigativo. Isso foi feito com o intuito de promover o papel ativo e o engajamento dos estudantes, ao mesmo tempo em que estimulava o desenvolvimento de habilidades e conhecimentos.

Durante a execução das atividades nas duas primeiras etapas, foi observado que os estudantes ficaram bastante surpresos com a abordagem diferenciada da atividade de matemática, em comparação com o que estão habituados. Logo nos primeiros momentos da atividade com os vídeos, observou o silêncio dos estudantes, indicando o interesse pelo conteúdo apresentado. Esse comportamento refletiu no interesse e curiosidade sobre o tema da bicicleta, levando-os a querer saber mais sobre o assunto.

No desenvolvimento das atividades da etapa dois os estudantes apresentaram o interesse pela busca do conhecimento participando ativamente das atividades propostas, formulando perguntas, investigando e discutindo ideias sobre o que descobriam, tornando um estudante com papel ativo em seu aprendizado. Fortalecendo este conceito, Valente (2013), afirma que:

> Na aprendizagem ativa, em oposição à aprendizagem passiva, bancária, baseada na transmissão de informação, o aluno assume uma postura mais ativa, na qual ele resolve problemas, desenvolve projetos e, com isto, cria oportunidades para a construção de conhecimento (Valente, 2013, p. 1).

Nesse contexto, o estudante não é apenas um receptor passivo de informações, mas sim um participante ativo do processo de aprendizagem, engajando-se em atividades que demandam reflexão, análise crítica e aplicação prática do conhecimento. No momento de discussão sobre círculo e circunferência, os estudantes foram incentivados a compartilhar o que tinham aprendido e de como aprendeu, destacando a importância de terem compreendido os conceitos em questão.

Esse momento evidenciou a importância do aprendizado para os estudantes, ao mostrarem um maior envolvimento em conectar o que estavam aprendendo com suas próprias experiências e interesses. Além disso, observou-se que eles estão mais engajados e motivados, contribuindo para uma experiência de aprendizagem mais duradoura.

Ao desenvolver as atividades investigativas, o estudante não apenas assimila conceitos, mas também os internaliza e os aplica em situações do mundo real promovendo a aprendizagem. Pois elas estimulam a construção ativa do conhecimento e desenvolvem habilidades cognitivas, sociais e emocionais.

5.2 RELATOS DAS ETAPAS TRÊS, QUATRO E CINCO

Nessas etapas, a professora/pesquisadora também formulou questões orientadoras para auxiliar os estudantes e criou uma tabela na qual eles pudessem registrar e analisar os valores obtidos. A razão de abordar essas três etapas em conjunto reside no fato de serem uma sequência de medições, explorações e conclusões dos dados coletados ao longo do processo.

5.2.1 Relatos da etapa três

Para melhor compreender os desenvolvimentos das atividades desta etapa trago novamente os seguintes objetivos da professa/pesquisadora

- Possibilitar a compreensão das definições que determinam o tamanho do aro da bicicleta;
- Desenvolver a aprendizagem da utilização de alguns instrumentos de medida;
- Aumentar o conhecimento dos estudantes com relação à medida de polegadas e à conversão desta unidade de medida.

Para essa etapa os estudantes utilizaram instrumentos de medidas como o metro e a trena. No quadro quinze descrevemos as respostas dos estudantes na íntegra.

Quadro 15 – Respostas dos grupos da terceira etapa

	ETAPA 3
	a) Qual significado de aro? b) Qual unidade de medida do aro da bicicleta? c) Qual relação entre o aro e a bicicleta? d) Existem outros tipos e tamanhos de aro? Quais? e) Quais tamanhos de aros tem no bicicletário da escola?
Grupo 1	a) “é a parte onde se coloca os pneus e as câmaras de ar da bicicleta”. b) “em polegadas”. c) “o aro da bicicleta pode variar de acordo com o tamanho da bicicleta que a pessoa deseja, essa prática pode ser feita pelo tamanho do quadro da bicicleta”. d) “sim, pneus de tratores, carro, moto, avião”. e) “29,26,20, “encontramos o tamanho do aro descrito no pneu”.
Grupo 2	a) “peças de metal em forma de anel”. b) “polegadas”. c) “o cálculo do aro não deve ser adequado para alterar a estrutura da bicicleta e sim em relação ao quadro”. d) “sim, 20,24,26 e 29”.
Grupo 3	a) “aresta exterior de uma roda que segura o pneu”. b) “polegadas”. c) “o aro deixa a bicicleta mais rente ou longe do chão, e também determina o tamanho da bicicleta”. d) “sim, desde 16” até acima de 26”. e) “16,20,24,26,29”.
Grupo 4	a) “aro é uma linha circular cujas as extremidades se unem formando uma circunferência, anel,

	argola”. b) “polegadas, trata-se do diâmetro total da roda”. c) “o tamanho da bicicleta dependo do tamanho do aro”. d) “sim, pneus de carro, moto e etc.”. e) “20,24,26,29, “descobrimos olhando no pneu”
Grupo 5	a) “o aro da bicicleta é a parte onde se coloca os pneus e as câmara de ar”. b) “polegadas”. c) “o tamanho da bicicleta depende do tamanho do aro”. d) “sim, em rodas de caminhão ou até mesmo no pneu do avião”. e) “24,26,29”.
Grupo 6	a) “aro é uma peça que vai o pneu compondo a roda do veículo. Uma estrutura que conecta o pneu com o eixo”. b) “medida em polegadas, trata-se do diâmetro total da roda”. c) “o tamanho da bicicleta depende do tamanho do aro”. d) “sim, de trator, carros, motos e outros”. e) “20,24,26”.
Grupo 7	a) “é a parte onde se coloca pneus e a câmara de ar da bicicleta”. b) “medida em polegada, uma polegada tem aproximadamente 2,54 cm”. c) “o tamanho da bicicleta depende do aro”. d) “existem aros nos pneus de carro, motos e etc..., variando tamanho dependendo da utilidade”. e) “29,26,24,20”.
Grupo 8	a) “peças de metal em forma de anel”. b) “polegadas, trata-se do diâmetro total da roda”. c) “o aro determina o tamanho da bicicleta, mas deve estar de acordo com o quadro”. d) “existem os de liga leve e os de raio”. e) “20,24,26,26”.
Grupo 9	a) “o aro de bicicleta é a parte onde colocam pneus e as câmaras de ar. Os três juntos formam as rodas da bicicleta. ele auxilia na tração, garante o posicionamento dos pneus e ajuda no suporte do peso do corpo do ciclista em cima da bike”. b) “medido em polegada, trata-se do diâmetro total da roda”. c) “o tamanho da bicicleta depende do tamanho do aro”. d) “sim existem, geralmente em pneus de automóveis, e até no do avião”.

Fonte: A autora, 2024.

Ao elaborar estas questões norteadoras para os estudantes, a intenção é que eles verifiquem as medidas dos itens das bicicletas utilizando os instrumentos de medidas para proporcioná-los uma aprendizagem que lhe traga uma prática destes instrumentos, lembrando que ao realizar essas medições os estudantes podem aprender a importância da precisão nas medidas, entender a relação entre diferentes partes da bicicleta e aplicar conceitos matemáticos no contexto prático da situação em que o estudante está envolvido, é o que mostra a Figura 8.

Figura 8 – Atividades da terceira etapa

Fonte; A autora, 2024.

Os estudantes verificaram na prática a utilização destes instrumentos e por muitas vezes ficaram com dúvidas de como usá-los, questionando a professora/pesquisadora. Ponte; Brocado e Oliveira (2003), descrevem que:

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo (Ponte; Brocado; Oliveira, 2003, P.15).

Essa perspectiva implica que os estudantes não apenas constroem conhecimentos sobre aqueles já existentes, mas também desenvolvem habilidades dos conceitos aprendidos anteriormente, buscando o conhecimento conceitual e também as habilidades cognitivas quando estão aplicando estes conceitos em suas práticas e aprendendo a utilizá-los em problemas do mundo real.

Além das dificuldades com os instrumentos de medida, ao longo dessas atividades surgiram vários questionamentos sobre o que os estudantes encontravam ao investigar a bicicleta. Esses questionamentos proporcionaram uma oportunidade para aprofundar a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos e para desenvolver habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas. Destacam-se algumas falas dos estudantes, que refletiram suas dúvidas G1B, G2B e G3A:

> G1B “o tamanho do quadro é o que determina o tamanho da bicicleta”.
> G2A “achava que o aro era o tamanho da bicicleta”.
> G2A “mas vejo que isso não pode ser possível, pois vejo que aqui tem bicicletas com mesmo tamanho e com aros diferentes”.
> G3A “mas quando compramos uma bicicleta pedimos pelo tamanho do aro da bicicleta?”.

Essa última questão trouxe bastante discussão pois a maioria dos estudantes entendiam que o tamanho da bicicleta era dado pelo tamanho do aro. Após muita conversa e pesquisas eles constataram algumas definições.

> G1B, respondeu pelo seu grupo que: “o tamanho do quadro da bicicleta é um fator determinante para o tamanho geral da bicicleta, e que este tamanho está frequentemente associado à altura do ciclista, por isso existem vários tamanhos de quadros”.
> G2A, “investigando melhor observamos que”: “o tamanho do aro revela uma visão inicial do tamanho da bicicleta e como não estamos familiarizados com estes detalhes técnicos acabamos cometendo erros,

> então aqui vimos que o tamanho do aro não é o único determinante do tamanho da bicicleta".
> G3A, "nosso grupo analisou e destacou que": "como se deve ter importância de esclarecer os consumidores sobre as diferentes características das bicicletas, como por exemplo o tamanho do quadro e do aro, e que como a compreensão deste conhecimento é importante para o nosso dia a dia".

Essas declarações capturam a diversidade de percepções sobre este tema, destacando a à variedade de conhecimentos mesmo sendo este tema tão comum em seu dia a dia como a bicicleta. Quando estas questões são levantadas pelos estudantes Skovsmose (2009), fala da zona de risco, e que devemos sermos capazes de explorar as possibilidades educacionais impostas nas investigações das atividades disponibilizadas aos estudantes, mesmo não sendo explicitamente no caso aqui conceitos matemáticos.

Com relação à unidade de medida do aro da bicicleta, a maioria dos grupos descobriu o tamanho ao verificar que essa informação estava descrita no pneu. Nesse momento, a professora/pesquisadora incentivou ainda mais a reflexão, perguntando: "Como essa polegada foi medida? E a que medida ela se refere? E o que significa ser aro 26" ou aro 29"?".

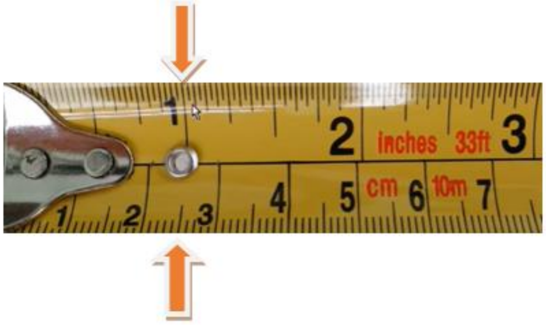
Essas questões levaram os estudantes a considerar como a medida em polegadas é aplicada ao tamanho do aro da bicicleta, incentivando uma investigação sobre os padrões de medidas utilizados nas bicicletas e em outros objetos do dia a dia como por exemplo o tamanho do celular e o da Tv. Isso não só ampliou o entendimento dos estudantes sobre a aplicação prática da matemática, mas também promoveu uma reflexão crítica sobre as convenções de medidas e suas aplicações no contexto real.

Os estudantes do grupo G1A, G3A, G4C e G5B relataram que o tamanho das polegadas é o diâmetro da roda. Mas verificaram que se quiser saber o tamanho da roda em polegadas tem que fazer uma conversão de centímetros para polegadas. Os integrantes então do G6A, G7B, G7C e G9A contribuíram com a informação dizendo que:

> G6A "encontramos que uma polegada equivale 2,54 centímetros".
> G7B e G7C "na nossa trena já mostra o tamanho em polegadas e também em centímetros".
> G9A "medimos o diâmetro da roda passando bem pelo centro, e obtemos a medida em centímetros e depois dividimos então por 2,54".

Para exemplificar, o grupo 7 ainda mostrou:

Figura 9 – Atividades da terceira etapa



Fonte: A autora, 2024.

O grupo ainda explicou que "inches" em inglês significa polegadas. Dessa forma, conseguiram estabelecer uma relação de conversão, compreendendo que uma polegada equivale a 2,54 centímetros. Além disso, identificaram que o símbolo (") ao lado do número indica que a medida está em polegadas, como por exemplo, 29".

O Grupo 9 falou que então se sabemos o valor em polegadas é fácil encontrar a medida em centímetros do diâmetro da roda, basta fazermos:

$$29 \times 2{,}54 \cong 73{,}66\ cm.$$

Ainda o grupo 9 relatou que se medirmos uma roda em centímetros podemos então apenas fazer o inverso do que foi feito,

$$66{,}05 \div 2{,}54 \cong 26''.$$

O estudante G9A ainda destacou que “temos que colocar aproximado pois medimos o diâmetro das duas bicicletas e deu alguns centímetros de diferença no total final do diâmetro tanto no aro 26” e aro 29",”.

No caso dos aros 26" e 29", os estudantes perceberam que esses números representavam o tamanho do aro em polegadas. Isso significa que o diâmetro do aro da bicicleta é de 26 polegadas no caso do aro 26" e de 29 polegadas no caso do aro 29". Essa compreensão permitiu aos estudantes relacionar as medidas encontradas nos pneus com as especificações dos aros das bicicletas.

Nesta etapa o que pode observar que com relação as atividades anteriores que os grupos participaram mais ativamente das atividades propostas. Pois eles pareciam estarem mais confortáveis e envolvidos com as atividades propostas, o que leva a uma participação mais ativa. Isso pode ser resultado de uma maior compreensão dos objetivos das atividades ou de uma crescente familiaridade com o tema.

Ao analisarmos estes desenvolvimentos dos estudantes percebeu-se os engajamentos entre os grupos para tentarem solucionarem os problemas encontrados por eles. Os grupos G6, G7 e G9 relataram que compreenderam um pouco mais os conceitos relacionados as bicicletas e aos seus componentes e que se sentiram confiantes a investigar mais e também a compartilhar suas descobertas com os outros grupos.

Os grupos G1, G2, G3 e G4 mencionaram que a atividade desta etapa apresentou uma abordagem distinta, envolvendo conceitos matemáticos e explorando temas menos comuns nas aulas regulares de matemática. Esta diversidade temática foi destacada como importante para o aprendizado, proporcionando uma experiência educacional enriquecedora e diferente do habitual.

Os grupos G5 e G8, disseram que esta etapa os fez aprenderem sobre a unidade de medidas polegadas e que entenderam até mesmo como utilizar o metro, sendo que eles tinham dúvidas de onde começava a medir se era do zero ou do um. Skovsmose, (2009, p.38) descreve: "referências à vida real parecem ser necessárias para estabelecer uma reflexão detalhada sobre a maneira como a matemática pode operar em nossa sociedade. Um sujeito crítico é também um sujeito reflexivo".

Dentro disso podemos destacar a importância de contextualizar a matemática na vida real dos estudantes para promover uma compreensão mais profunda, reflexiva e crítica dos conceitos matemáticos. Essa abordagem visa preparar os estudantes para aplicar a matemática de maneira significativa em diferentes aspectos de suas vidas e na sociedade em geral. Também observou engajamento para a realização das outras etapas propostas para investigação. No próximo capítulo segue os relatos da etapa quatro.

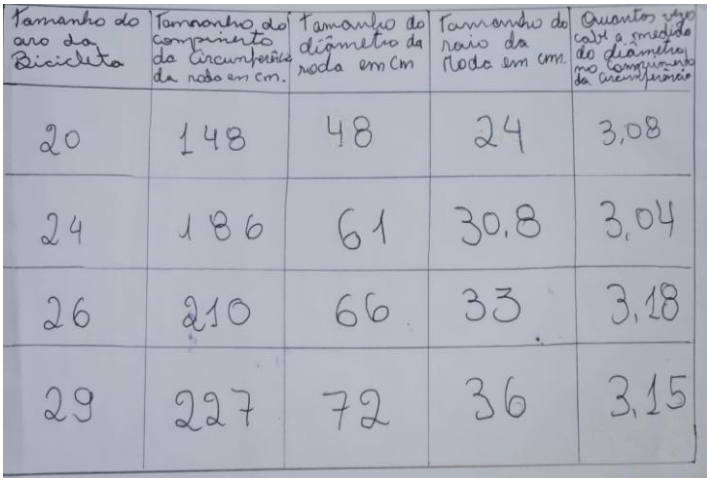
5.2.2 Relatos da etapa quatro

Para a etapa quatro, a professora/pesquisadora organizou uma tabela para que os estudantes preenchessem, conforme está descrito no quadro seis. Essa tabela solicita que alguns tamanhos relacionados a roda da bicicleta sejam medidos e registrados, como o tamanho do aro, diâmetro e raio, a fim de responder algumas questões propostas. É importante relembrar que os objetivos da professora/pesquisadora incluem:

- Potencializar a capacidade de observação, organização e aprendizagem dos estudantes, para possibilitar a compreensão e identificação do número Pi.
- Identificar as relações matemáticas envolvidas.
- Interagir entre os membros do grupo e com demais grupos se comunicando matematicamente.

No bicicletário, os estudantes realizaram as medições e fizeram suas anotações, evidenciando uma familiarização crescente com o instrumento de medida e o método adequado de medição. A imagem a seguir apresenta a descrição do grupo dois como uma representação dos demais grupos (Figura 10).

Figura 10: Anotações do Grupo 2 com relação a etapa quatro.



Tamanho do aro da Bicicleta	Tamanho do comprimento da Circunferência da roda em cm.	Tamanho do diâmetro da roda em Cm	Tamanho do raio da Roda em cm.	Quantas vezes cabe a medida do diâmetro no comprimento da circunferência
20	148	48	24	3,08
24	186	61	30.8	3,04
26	210	66	33	3,18
29	227	72	36	3,15

Fonte: A autora, 2024.

Nas anotações desta etapa, observa-se em todos os grupos que ainda ocorrem alguns erros de medição, com algumas medidas registradas apresentando variações, ora com centímetros a mais, ora com centímetros a menos. O mais relevante é que os estudantes estavam envolvidos no processo de medição, registro e descoberta de informações matemáticas. Esse engajamento ativo entre estudantes e professora foi fundamental para a aprendizagem deles e para alcançar os objetivos da professora em relação a atividade proposta.

Aqui a professora/ pesquisadora reconhece seu papel como educadora, abraçando essa função com confiança e acreditando como Freire (1996) que o ato de ensinar cria as possibilidades para a produção ou construção de conhecimentos, sendo que na relação docente / discente "Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender" (FREIRE, 1996, p.23).

Durante o desenvolvimento das atividades, surgiram algumas observações sobre o diâmetro e o raio, evidenciando que alguns estudantes tinham conhecimento limitado ou nenhum sobre esses conceitos matemáticos. Isso sugere que essa parte específica da matemática pode não ter sido amplamente abordada com essa turma anteriormente. Essa percepção destaca a importância de revisar e reforçar conceitos fundamentais, garantindo que os estudantes tenham uma compreensão sólida e consistente do aprendizado em questão, evidenciado pelas falas dos estudantes, G2A, G2B, G2C, G4B, G4C:

> G2A "o diâmetro é exatamente duas vezes o raio da bicicleta".
> G2B "acho que o raio da bicicleta é diferente do raio que a professora quer".
> G4B "o raio sempre vai ser a metade do diâmetro, acho que por isso que a bicicleta tem vários raios ligando ao centro, para ficar equilibrado".
> G4C "mas nas medidas que fizemos nem sempre deu a metade do diâmetro".
> G2C "se medir certinho dá a metade, pode medir novamente".

A maioria dos estudantes expressaram seu contentamento com as descobertas feitas, mostrando que o aprendizado está sendo internalizado e retido de forma significativa por muitos deles. Essa sensação de realização fortalece a confiança pessoal dos estudantes em suas habilidades e os motiva a continuar explorando e aprendendo.

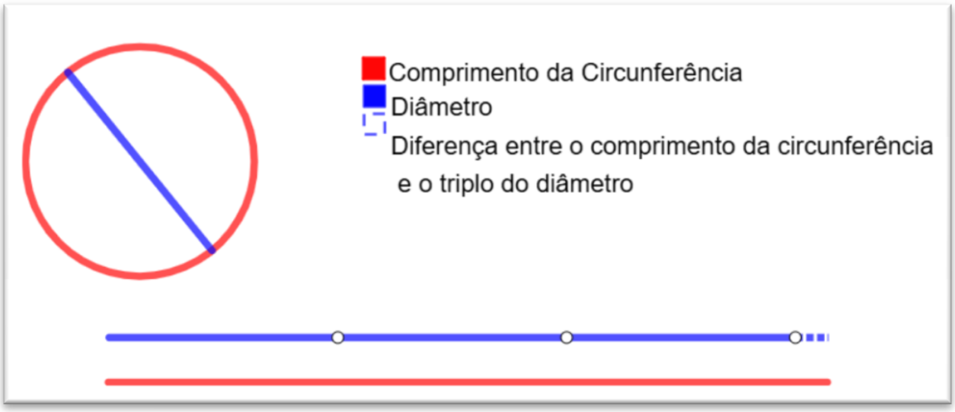
Skovsmose e Penteado (2022, p. 200), colaboram dizendo que "Uma investigação é guiada pela curiosidade, e que a comunicação dialógica ajuda a entender o problema sendo investigado e a construir novas perspectivas, isso inclui também o coletivismo e a colaboração". Os autores ainda descrevem para que a comunicação dialógica ocorra, é necessário que os estudantes estejam envolvidos na atividade para que possam visualizar um problema ou a sua solução através de suas próprias perspectivas.

Na opção que solicitava para verificar quantas vezes cabia o comprimento do diâmetro na circunferência, houve várias situações observadas, mas que quase todos os grupos encontram resultados acima do três. Destacam-se algumas falas dos estudantes como por exemplo da do estudante G5A "Sempre cabe três vezes e sobra um pedaço" e a dos estudantes do G6A, G6B e G6C que falaram “Não importa o tamanho da roda, sempre cabe três vezes e sobra um pedaço”.

O Grupo 4 marcou o chão da escola da seguinte forma: utilizando um pneu, fizeram uma marcação inicial no pneu e deslocaram o pneu em linha reta até alcançar essa marcação, medindo em seguida o comprimento do diâmetro verificando quantas vezes essa medida cabia nesta reta feita pelo pneu. Registrando todos os resultados obtidos, ao final, mediram o pedaço que sobrava, e com orientações adicionais da professora, eles compreenderam a relação entre o diâmetro e a circunferência, incluindo a definição da constate π (pi). A figura 11 apresenta a ilustração dos procedimentos.

Os demais grupos, ao observarem a estratégia do Grupo 4, decidiram adotar uma abordagem semelhante ou até mesmo igual. Com base nisso, eles também conseguiram chegar às mesmas conclusões sobre a relação entre o diâmetro e a circunferência, bem como sobre a definição da constante π. Essa troca de experiências permitiu que os grupos compreendessem e aplicassem os conceitos de forma consistente.

Figura 11: Ilustração da abordagem do Grupo 4



Fonte: A autora, 2024.

Aqui os estudantes quiseram mostrar que o diâmetro cabia uma vez, duas vezes, três vezes e sobrava um pedacinho que não cabia outra medida do diâmetro. Eles fizeram esse processo com as outras bicicletas que tinha tamanhos de circunferência diferentes, constatando que sempre cabia três vezes e sobrava um pedacinho, esta relação encontrada foi esclarecida a partir do momento em que iam avançando no desenvolvimento da atividade.

Na sequência, após eles registrarem os dados da tabela como mostra a figura dez, os estudantes responderam as questões propostas pela professora, que eram:

a) Que relação ocorre entre tamanho comprimento da circunferência e o seu diâmetro? E se o tamanho mudar?

b) Qual a origem do Pi? Investigue.

c) Como que o Pi está ligado à bicicleta? Descreva.

Na questão "a", os estudantes notaram que o diâmetro sempre se encaixa três vezes e resta um pedaço, sendo que este pedaço pode variar, às vezes sendo um pouco maior e outras vezes um pouco menor.

Para a questão que pediu para investigar a origem do Pi, e como o Pi está ligado a bicicleta, os grupos fizeram pesquisas e relataram entre si e com o grande grupo, que o Pi era uma constante representada pela letra grega (π), que tinha o valor aproximado de 3,14 sendo um número bem antigo. Os estudantes G3A, G8A, G9C relataram:

> G3A "isso era exatamente o que estávamos fazendo quando dividíamos o comprimento da circunferência pelo diâmetro".
> G8A "nosso grupo fez esses mesmos cálculos com outras circunferências menores da bicicleta e também deu um valor aproximado do 3,14".
> G9C "não importa o tamanho da circunferência, se dividir ela pelo seu diâmetro sempre vai dar um valor do Pi".
> G8A "esta é a ligação que a professora queria que encontrássemos, eu não sabia deste número, agora olho para a roda da bicicleta e vejo o Pi" (risos).

Verificou-se, nessas falas e em outras não mencionadas aqui, que a maioria dos estudantes não conhecia o Pi. Alguns tinham um breve conhecimento dele, mas não compreendiam completamente seu significado ou aplicação prática.

Na continuidade, temos os relatos da etapa cinco. Esta etapa surgiu quando os estudantes expressaram o desejo de andar de bicicleta na pista de corrida que fica ao lado da escola. Para dar continuidade às atividades, a professora propôs que os estudantes continuassem a investigar mais sobre a matemática e a bicicleta.

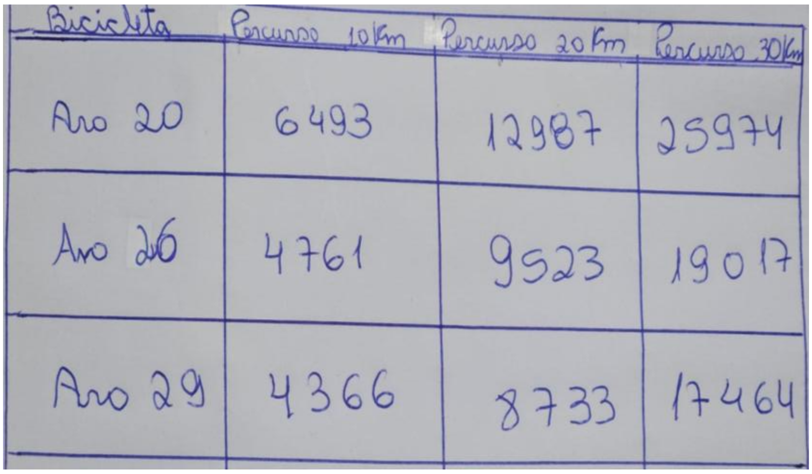
5.2.3 Relatos da etapa cinco

Ao discutir sobre andar de bicicleta na pista de corrida, surgiram questionamentos, como qual seria a quantidade de voltas que uma roda daria para completar esse percurso. Então, considerando as anotações dos estudantes possuíam das etapas três e quatro, elaborou-se uma tabela com tamanhos de rodas e percursos diferentes para verificar estas questões propostas. Os objetivos da professora/pesquisadora para esta atividade foram:

- Desenvolver a compreensão das medidas de comprimento da circunferência;
- Proporcionar a interpretação dos dados colhidos, e a verificação da unidade de medida usada.

No início, os estudantes pegaram suas bicicletas e deram algumas voltas na pista de corrida e tentaram encontrar estratégias de como poderiam resolver a atividade proposta. Mas não demorou muito para que alguns grupos percebessem que eles já possuíam a medida do comprimento do pneu anotado da atividade anterior, assim bastaria dividir a quilometragem da pista de corrida pela medida da circunferência do pneu conseguiriam quantas voltas a roda daria para completar o percurso indicado na tabela (Figura 12).

Figura 12: Ilustração da tabela preenchida do grupo 2.



Bicicleta	Percurso 10 Km	Percurso 20 Km	Percurso 30 Km
Aro 20	6493	12987	25974
Aro 26	4761	9523	19017
Aro 29	4366	8733	17464

Fonte: A autora, 2024.

Os grupos acabaram seguindo uns aos outros e quase todos fizeram da mesma forma. Quando estavam quase terminando a atividade, os estudantes do Grupo 3 alertaram os demais grupos, dizendo que haviam cometido um erro. Eles perceberam que a medida da circunferência do pneu estava em centímetros, enquanto na tabela a unidade de medida do percurso era em quilômetros. O Grupo 3, ainda orientou os colegas como proceder explicando que primeiro seria necessário converter uma das medidas, para que ambas estivessem na mesma unidade de medida, e só então realizar a divisão para descobrir quantas voltas a roda daria para fazer o determinado percurso.

Analisando essa situação, podemos refletir sobre o que Freire (2013) destaca: "a primeira condição para que um ser possa assumir um ato comprometido está em ser capaz de agir e refletir" (Freire, 2013, p. 13). Ao fazer isso, os estudantes se tornam protagonistas de seu próprio aprendizado, reconhecendo e corrigindo seus erros através da colaboração e da reflexão crítica.

Assim, todos os grupos uns ajudando os outros corrigiram seus erros e fizeram observações sobre como estavam tão envolvidos na resolução da atividade que não prestaram atenção que estavam errando. Eles relataram ainda que essa falta de atenção alterou toda a solução que haviam encontrado, mas entenderam que tem de ter bastante atenção nestes casos que envolvam medidas.

Os estudantes também discutiram sobre a correia, catraca e a coroa, percebendo como esses componentes influenciam o desenvolvimento da velocidade da bicicleta. Eles observaram que esses elementos podem tornar a bicicleta mais leve ou mais pesada, dependendo de como são configurados e usados. Essa discussão demonstra uma compreensão mais profunda do sistema de transmissão envolvidos no funcionamento da bicicleta, mostrando como os estudantes estão relacionando conceitos matemáticos com situações do mundo real.

No decorrer desta atividade, foi observado na maioria dos estudantes o empenho deles em desenvolver as atividades. E que mesmo diante dos erros, demonstraram interesse em corrigi-los e entender as razões que os levaram ao equívoco. Demonstraram também que não ficaram envergonhados e nem apresentaram medo em admitir o erro, e isso evidência como eles estavam confortáveis e confiantes com o processo de aprendizagem por investigação.

Na próxima sessão estão descritas as análises destas três etapas, pois sendo que uma estava conectada na outra. Sempre levando em consideração as observações feitas pela professora/pesquisadora, bem como as anotações dos estudantes e os resultados das atividades desenvolvidas.

5.2.4 Análise das etapas três, quatro e cinco

Nestas atividades percebeu-se como os estudantes estão engajados em descobrir conceitos matemáticos na bicicleta. Skovsmose (2008) destaca que um cenário de aprendizagem pode levar os estudantes a assumir a condução do seu próprio processo de aprendizagem, e isso ficou muito evidente observando os estudantes a desenvolverem as atividades, eles estavam entusiasmados com a aula “diferente” e mostravam interesse de desenvolver as atividades propostas.

O interesse dos estudantes também foi um indicador importante de engajamento. Pois quando os estudantes demonstram interesse e curiosidade em seu aprendizado indica que estavam participando mais ativamente e colaborando com os colegas, levando a entender que este aprendizado teve um significado mais expressivo com o seu mundo real. Freire (2013) fala que “a educação deve ser desinibidora e não restritiva. E que é necessário darmos oportunidade para que os educandos sejam eles mesmos” (Freire 2013, p.33).

O papel ativo dos estudantes observados nas atividades indicou que as abordagens empregadas proporcionaram o envolvimento no processo ativo de seu aprendizado. Ao promover esta abordagem por investigação na disciplina de matemática, os estudantes foram incentivados a explorar conceitos matemáticos e a desenvolver habilidades como resoluções problemas, o pensamento crítico e a sua criatividade.

Essa análise revela que, apesar de alguns contratempos durante o processo, a maioria dos estudantes estavam ativamente engajados na exploração de conceitos matemáticos. Embora possa ter havido desafios e obstáculos ao longo do caminho, a participação dos estudantes demonstrou interesse uma disposição para se envolverem com o conteúdo de forma ativa e investigativa. Penteado e Skovsmose (2022) descrevem que “as linhas de investigação tomam forma a partir da exploração das perspectivas dos estudantes, o que não deve ocorrer como uma forma de transmissão, mas como parte de uma colaboração”. (Penteado e Skovsmose 2022, p 54).

Skovsmose (2000) ainda relata que se deve valorizar as experiencias dos estudantes, e que ao se fazer isso, eles se sentem reconhecidos, e isso pode leva-los a ter mais autoconfiança e autoestima. Durante a atividade que explorou o conceito do número Pi, por exemplo, percebeu-se que eles se sentiram valorizados e isso não apenas os ajudou a se engajar mais ativamente no processo de aprendizagem, mas também os incentivou a confiar em suas habilidades. Na execução das etapas três, quatro e cinco houve bastante conversas, relatos, e opiniões, sobre os problemas encontrados e suas soluções.

> Para tentar eliminar alguns dos elementos disciplinadores da educação matemática, é importante para os alunos que eles possam discutir o que estão aprendendo, como estão aprendendo e a relevância do que estão aprendendo. (Skovsmose, 2000, p 64).

Portanto é importante que os estudantes discutam sobre o que estão aprendendo, como estão aprendendo, e que possam expressar suas opiniões, fazer perguntas e refletir sobre o significado e o propósito do que estão estudando. Essa abordagem promove para os estudantes um engajamento ainda maior com seus colegas e a professora.

Ao discutirem sobre o que estão aprendendo, os estudantes têm a oportunidade de expressar suas ideias, compartilhar perspectivas e explorar conceitos matemáticos de maneira mais profunda e colaborativa. Além disso, ao refletirem sobre como estão aprendendo, podem identificar estratégias mais eficazes e desenvolver habilidades cognitivas. Ao entenderem a relevância do que estão aprendendo, os estudantes se tornam mais motivados, pois percebem a aplicabilidade dos conceitos matemáticos em suas vidas cotidianas.

Em suma, pode se dizer que incentivar a discussão e reflexão dos estudantes sobre o processo de aprendizagem é fundamental para promover uma educação matemática com mais relevância para a vida real do estudante. E que isso significa que os estudantes têm mais autonomia e liberdade para explorar seus interesses, construir seu próprio conhecimento e desenvolver habilidades críticas e criativas.

A seguir temos os relatos das etapas seis e sete, estas etapas estão centradas nos componentes que fazem a bicicleta se mover, ou seja, o sistema de transmissão. Para os estudantes se aprofundarem ainda um pouco mais foi construído uma tabela, em que eles coletaram alguns dados, para então depois fazerem as questões propostas.

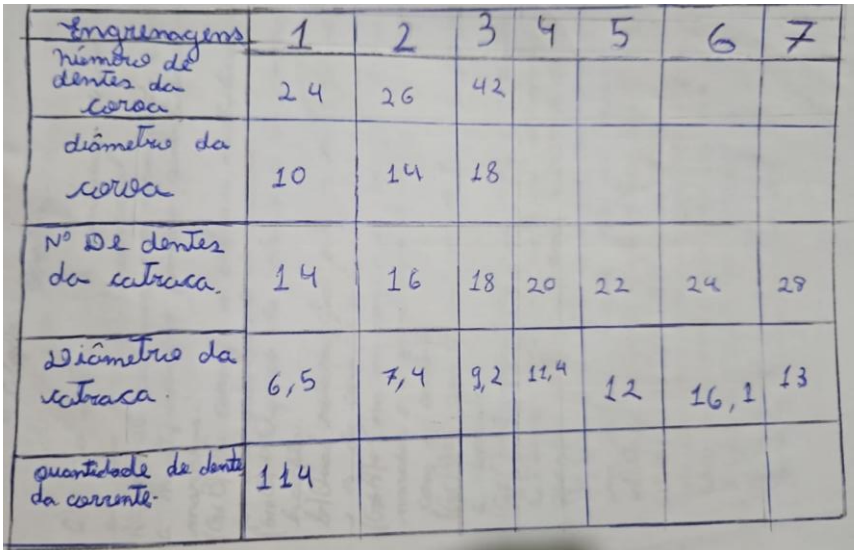
5.3 RELATOS DAS ETAPAS SEIS E SETE

As etapas seis e sete foram projetadas para os estudantes explorarem os aspectos matemáticos relacionados ao sistema de transmissão da bicicleta. Dessa forma, a realização da etapa sete dependia do que foi investigado na etapa seis. Ao longo dessas atividades, os estudantes tiveram a oportunidade de aprofundar sua compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Na sequência tem-se os relatos da etapa seis e a seguir os relatos da etapa sete.

5.3.1 Relatos da etapa seis

Para a sexta etapa os estudantes investigaram os componentes que fazem a bicicleta andar como a corrente, catraca e a coroa. Os discentes descreveram estes elementos e a função de cada um deles, e também preencheram uma tabela com as quantidades de dentes das engrenagens analisadas para em seguida responderem algumas questões, buscando o objetivo da professora/pesquisadora, que é potencializar o desenvolvimento do raciocínio lógico para compreender as relações matemáticas existentes entre catraca, coroa e corrente (Figura 13).

Figura 13: Anotações do Grupo 4 com relação a etapa seis



Engrenagens	1	2	3	4	5	6	7
número de dentes da coroa	24	26	42				
diâmetro da coroa	10	14	18				
Nº De dentes da catraca	14	16	18	20	22	24	28
Diâmetro da catraca	6,5	7,4	9,2	11,4	12	16,1	13
quantidade de dente da corrente	114						

Fonte: A autora, 2023

Esta imagem da figura 12, apresenta como os grupos preencheram a tabela, alguns valores variaram por terem diferentes tamanhos das engrenagens ou até mesmo por erro dos estudantes na hora de medir.

Na questão “a”, que solicitava identificar o que determina a quantidade de marchas em uma bicicleta, a maioria dos grupos forneceu suas respostas com base em seus próprios conhecimentos, destacando as falas dos estudantes G2B, G2C:

> G2B “basta multiplicar o número de engrenagens da coroa vezes o número de engrenagens da catraca”.
> G2C “então, a quantidade de coroas e catracas define o número total de marchas disponíveis em uma bicicleta”.
> G2B “geralmente as bicicletas mais comuns têm na catraca 7 engrenagens e na coroa 3, e fazendo a multiplicação $7 \times 3 = 21$, quer dizer que esta bicicleta tem vinte e uma marchas”.

> G2B "isso permite o ciclista ajustar a resistência e a velocidade de acordo com as condições do terreno e suas preferências pessoais, ou seja, andar na leve ou na pesada".

Portanto a quantidade de marchas em uma bicicleta é determinada pelo número de coroas (engrenagens dianteiras) e catracas (engrenagens traseiras) presentes no sistema de transmissão da bicicleta. Cada combinação de coroa dianteira e catraca traseira oferece uma relação de marcha diferente, e isso determina a quantia total de machas.

Para responder às questões "b" e "c", que buscava estabelecer a relação entre os dentes da coroa e da catraca, e determinar quantas voltas na roda correspondiam a uma volta da catraca, os estudantes recorreram à tabela de dados que haviam construído. Essa tabela continha a contagem e as medições das engrenagens que compõem o sistema de transmissão da bicicleta, conforme ilustrado na figura (Figura 14).

Figura 14: Contagem e medições do sistema de transmissão da bicicleta

Fonte: A autora, 2023.

Os estudantes relataram que a coroa e a catraca são duas partes essenciais do sistema de transmissão de uma bicicleta. Elas trabalham em conjunto para transferir a força dos pedais por meio da corrente para a roda traseira, permitindo que a bicicleta se mova. E que a coroa está ligada no pedivela (braço do pedal) na parte da frente da bicicleta e a catraca está localizada na roda traseira. Evidenciamos as falas dos estudantes do Grupo 6:

> G6A "as combinações feitas entre coroa e catraca fazem a bicicleta ter um desenvolvimento mais lento ou mais rápido".
> G6C "notamos que as combinações de tamanho da coroa e catraca determinam a velocidade da bicicleta".
> G6B "se for uma coroa pequena com uma catraca grande percebe-se que ao fazer um giro total na coroa, não temos um giro completo na catraca".

Para entender melhor a relação entre os números de dentes da coroa e os dentes da catraca, os estudantes fizeram pesquisas sobre a mecânica da bicicleta, experimentação com várias situações na prática utilizando engrenagens diferentes. Nesse momento a professora/pesquisadora também esclareceu alguns pontos sobre estas relações desses números de dentes. E descreveram as ocorrências encontradas na tabela elaborada pela professora, para facilitar a analise posteriormente.

Utilizando os dados coletados, os estudantes calculam a relação de transmissão para cada combinação de coroa e catraca (relação de transmissão = número de dentes da coroa dividido pelo número de dentes da catraca). Isso ajudou a entender como estas diferentes configurações afetam a força necessária e a velocidade a ser alcançada. vejamos alguns exemplos dos grupos (Figura 15):

Figura 15 – Exemplos dos grupos

$$\frac{N^{\underline{o}}\ de\ dentes\ coroa}{N^{\underline{o}}\ de\ dentes\ catraca} = quantia\ de\ \ voltas\ na\ roda$$

$$\frac{42}{14} = 3 \text{ voltas} \qquad \frac{42}{28} = 1{,}5\ voltas$$

$$\frac{24}{14} = 1{,}714\ voltas \qquad \frac{24}{28} = 0{,}857\ voltas$$

Fonte: A autora, 2024.

Esses valores encontrados é exatamente a quantia de voltas que a catraca vai dar, e que por consequência será a mesma da roda. Algumas falas dos estudantes, G5C e G4A:

> G5C Perguntou "mas se a coroa e a catraca tiverem a mesma quantia de dentes?".

> G4A Respondeu “se for igual, cada volta na coroa vai ser uma volta na catraca, e consequentemente uma volta na roda”.
> G4A “na bicicleta que analisamos tem uma coroa e uma catraca com vinte quatro dentes”.
> G4A “se dividirmos vinte e quatro dentes da coroa por vinte e quatro dentes da catraca, obtemos um, ou seja, será uma volta na catraca e na roda”.

Portanto, se a coroa e a catraca têm 24 dentes cada, a bicicleta terá uma relação de marcha direta, onde uma volta completa do pedal resulta em uma volta completa da roda, o que é comum em bicicletas de marcha única ou em configurações onde uma relação de marcha simples é preferida. Estas foram as conclusões durante as falas dos demais estudantes com relação as atividades feitas.

Para a questão “d”, que pedia qual seria a relação matemática existe entre a quantidade de dentes na coroa e os números elos da corrente e o que isso interfere para dar uma volta completa na corrente. Os estudantes analisaram o que tinham feito na atividade anterior e por meio disso foram testando hipóteses, uma delas era quantas voltas a coroa tinha que dar para que a corrente desse uma volta inteira, ou seja, para que ela voltasse para a posição inicial.

Os estudantes conduziram experimentos, marcaram, contaram, mediram e analisaram, buscando identificar alguma relação entre os elementos. Uma das observações que registraram foi que os valores encontrados entre o número de elos da corrente e o número de dentes da coroa geralmente eram pares, comparando com as bicicletas dos outros colegas.

Um dos experimentos realizados pelos estudantes envolveu fazer uma marcação na corrente da bicicleta e na coroa, girando o pedal até que a corrente retornasse à posição inicial. Eles contaram e anotaram quantas voltas eram necessárias na coroa para que a corrente completasse um ciclo completo. Esse procedimento foi repetido com as demais engrenagens da coroa, permitindo aos estudantes observar e registrar as diferenças no número de voltas necessárias para cada combinação de engrenagens. Observando as falas dos estudantes G2B e G2C, G3B e G3C:

> G2B “acho que a relação pode ser feita de igual a que fizemos na atividade anterior”.
> G2B “temos que fazer as contas e experimentar para ver se dá certo”
> G3B “tem que testar um a um e ir conferindo”.
> G3C “deu muito trabalho, mas quando vimos que isso acontecia em todos ficamos surpresos e achamos muito legal”.

Foi concluído que a maioria conseguiu fazer testando e fazendo as mesmas comparações conforme fizeram na etapa anterior. Por fim estas realizações de experimentos e observando a relação entre o número de elos da corrente e os dentes da coroa, os estudantes perceberam que, ao dividirem o número de elos da corrente com o número de dentes da coroa, eles podiam determinar quantas voltas a coroa precisava dar para que a corrente retornasse à sua posição inicial.

Vejamos os dados coletados do Grupo 3 como exemplo, se a corrente tiver 114 elos, e a coroa tiver 24 dentes, ao dividir 114 por 24, obteremos 2,714. Isso significa que a coroa deve dar 2,714 de volta para que a corrente retorne à sua posição inicial.

Essa observação destaca uma aplicação prática da relação entre o número de elos da corrente na bicicleta e o número de dentes da coroa. Ao fazer essa divisão, os estudantes puderam prever a periodicidade com que a corrente completa uma rotação completa em torno da coroa. Também mostra como os estudantes estão explorando e compreendendo as relações matemáticas subjacentes ao sistema de transmissão de uma bicicleta.

Durante esta atividade, foi observado que os estudantes levaram um tempo considerável para compreender o problema. No entanto, ao mesmo tempo, essa dificuldade parecia aumentar sua expectativa de encontrar a solução.

Penteado e Skovsmose (2022), descrevem que as linhas de investigação tomam forma a partir da exploração das perspectivas dos estudantes, o que não deve ocorrer como uma forma de transmissão, mas como parte de uma colaboração, portanto parece que essa atividade proporcionou uma experiência de aprendizado valioso para os estudantes. A dificuldade inicial os desafiou a se engajarem mais e a explorarem o problema de forma mais detalhada.

Ao descobrirem que os conceitos matemáticos básicos, como divisão, fração e razão, estavam envolvidos na resolução do problema, isso não só os surpreendeu, mas também os deixou satisfeitos por aplicarem conhecimentos familiares em um contexto prático e significativo. Essa abordagem também pode promover o pensamento crítico, a resolução de problemas e a colaboração entre os alunos. Vejamos agora o desenvolvimento da etapa sete, que é uma continuidade desta etapa.

5.3.2 Relatos da etapa sete

Esta etapa tem continuidade das atividades anteriores, na questão “a” pedia para os estudantes fazerem uma comparação de números de voltas da engrenagem maior da coroa com a menor da catraca. O objetivo da professora /pesquisadora foi verificar a proporção existente entre coroa e catraca. Elaborar estratégias para a solução da questão b. Os estudantes já tinham feito algumas análises neste mesmo sentido, quando fizeram a relação de números dentes entre uma e a outra, eles também observaram o tamanho do diâmetro de cada uma (Quadro 16).

Quadro 16: Número de dentes das coroas e catracas

Engrenagens	1	2	3	4	5	6	7
Número de dentes na coroa	24	26	42				
Números de dentes na Catraca	14	16	18	20	22	24	28

Fonte: A autora, 2023

A coroa maior tem quarenta e dois dentes e a catraca menor tem 14 dentes, eles fizeram esta divisão obtiveram três, então quando o sistema transmissão tem essa combinação entre coroa e catraca, a catraca dá uma volta completa como já citado anteriormente. Para completar o quadro proposto pela professora os estudantes fizeram todas as outras razões das combinações diferentes (Quadro 17).

Quadro 17: Divisões feitas entre números de dentes da coroa com os da catraca.

$\frac{n^{\underline{o}}\ de\ dentes\ da\ coroa}{n^{\underline{o}}\ de\ dentes\ da\ catraca} =$	$\frac{24}{14} = 1,71$	$\frac{24}{16} = 1,5$	$\frac{24}{18} = 1,33$	$\frac{24}{20} = 1,2$	$\frac{24}{22} = 1,09$	$\frac{24}{24} = 1$	$\frac{24}{28} = 0,58$
	$\frac{26}{14} = 1,85$	$\frac{26}{16} = 1,62$	$\frac{26}{18} = 1,44$	$\frac{26}{20} = 1,30$	$\frac{26}{22} = 1,18$	$\frac{26}{24} = 1,08$	$\frac{26}{28} = 0,92$
	$\frac{42}{14} = 3$	$\frac{42}{16} = 2,62$	$\frac{42}{18} = 2,33$	$\frac{42}{20} = 2,10$	$\frac{42}{22} = 1,9$	$\frac{42}{24} = 1,75$	$\frac{42}{28} = 1,5$

Fonte: A autora, 2023

Os estudantes trocaram ideias entre si e tiveram discussões sobre os resultados obtidos. Alguns grupos ajudaram outros grupos, lembrando que cada grupo analisou uma bicicleta diferente e, portanto, obteve valores diferentes. Algumas dessas diferenças também podem ter surgido de erros de contagem ou de medição. Os estudantes G5B, G6B, G7A, relataram:

> G5B "Eu achava que uma volta no pedal era uma volta na roda, agora aprendi que pode ser até três voltas ou até menos que uma volta".
> G6B "Achei muito estranho quando deu menos de uma volta, mas compreendi agora".
> G7A "Vejo que se quero andar mais rápido, uso a combinação 42/14, que dá as 3 voltas".
> G7A "Agora se quero andar mais lento uso a combinação 24/28 e ainda tenho a opção de 26/20, que dá quase uma volta e meia".

Estes relatos entre outros levaram os estudantes então a solução da questão "b", que falava de um evento de ciclismo onde o percurso era muito longo, e que quando o ciclista se depara com uma lomba muito alta, para ele economizar energia, ele andava o mais devagar possível. Para que isso aconteça, como ele deve combinar as engrenagens entre a coroa e a catraca?

Após analisarem os resultados obtidos, a maioria dos estudantes responderam que o ciclista deveria utilizar a combinação coroa menor com a catraca maior, tendo então um pedal mais leve, e assim não cansar o corpo. Para chegarem nesta conclusão eles andaram de bicicleta e observaram as diferentes configurações de engrenagens e registraram a sensação de esforço ao pedalar em várias situações, como em subidas, descidas e terrenos planos.

Os grupos se ajudaram entre si, e com isso tiveram uma compreensão geral do problema e promoveram um ambiente de aprendizado colaborativo. O que pode se observar é que todo esse envolvimento, alcançou o objetivo da professa/pesquisadora, que era verificar proporção existente entre coroa e catraca e elaborar estratégias para a solução da questão b.

5.3.3 Análise das etapas seis e sete

Nas etapas seis e sete pode se observar que os estudantes estavam à vontade para desenvolverem as atividades e criando um ambiente propício para investigação, envolvendo colaboração e prática. Durante essas etapas, os estudantes puderam analisar resultados, compartilhar informações e aplicar conceitos teóricos em situações reais.

Ponte, Brocado e oliveira (2003) dizem que "na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem" (2003, p 20). Na realização destas atividades observou-se que esse envolvimento ativo, contribuiu para uma compreensão da matemática utilizada nas atividades envolvidas de uma forma tranquila e prazerosa.

O cenário de investigação destacado por Skovsmose (2000) ganhou vida aqui, pois ao lidar com um objeto tão familiar quanto uma bicicleta, os estudantes se sentiram mais motivados e engajados em encontrar soluções para os problemas propostos. Eles não apenas aplicaram conceitos teóricos, mas também exploraram diferentes aspectos práticos relacionados ao funcionamento da bicicleta.

A presença da matemática na bicicleta engajou o interesse dos estudantes, pois eles puderam relacionar conceitos matemáticos com um objeto de seu cotidiano, verificando suas funcionalidades e desempenhos para utilizarem em sua vida. Mesmo que esses conhecimentos não fossem altamente complexos, a experiência os levou a aprofundar seus entendimentos básicos de alguns conceitos de matemática. Essa abordagem prática e tangível da matemática contribuiu para que os estudantes desenvolvessem uma afinidade com a disciplina, ao perceberem sua relevância e aplicabilidade em situações do dia a dia.

Os estudantes expressaram sua surpresa ao descobrirem tantos conhecimentos matemáticos durante a atividade e reconheceram que há ainda mais a ser explorado, inclusive em outras disciplinas, como quando discutiram sobre a aplicação de força. Essa experiência despertou a autonomia neles e a apreciação pela aplicabilidade da matemática em diversos aspectos da vida real. Skovsmose (2000) afirma que:

> A autonomia intelectual é caracterizada em termos da consciência e da disposição dos alunos para recorrer às suas próprias capacidades intelectuais quando envolvidos em decisões e julgamentos matemáticos. A autonomia intelectual pode ser associada a atividades de exploração e explicação, como nos cenários para investigação. (Skovsmose 2000, p 37).

Neste sentido ao desenvolverem suas habilidades para tentarem solucionarem os problemas da atividade relacionadas à bicicleta os estudantes se mostraram independentes, promovendo seu próprio aprendizado. Tiveram dificuldades e precisaram de um tempo maior para o desenvolvimento das atividades, mas os estudantes agiram, manifestando interesse em querer achar as respostas do que procuravam nas bicicletas, pedindo para poderem continuarem a explorar e investigar na aula seguinte.

Neste sentido Skovsmose (2000) colabora dizendo que “um sujeito crítico tem que ser um sujeito que age”. Essa demonstração de interesse da maioria dos estudantes mostrou sua autonomia e interesse nas atividades propostas. Na sessão seguinte temos a etapa final das atividades propostas.

5.4 RELATOS DA ETAPA OITO

Os estudantes tiveram liberdade para escolher como apresentariam sua análise final das atividades realizadas. Sete grupos optaram por fazer apresentações de slides para o grande grupo, enquanto o Grupo 7, entregou sua análise no formato de documento Word, sem realizar uma apresentação formal para os demais grupos.

Essa flexibilidade oferecida aos estudantes permitiu que eles expressassem suas preferências. Enquanto as apresentações de slides ofereceram uma forma visual e dinâmica de compartilhar informações, o documento Word ofereceu uma plataforma mais detalhada e estruturada para apresentar os resultados das atividades para a professora/pesquisadora. Ponte, Brocado e Oliveira (2019) relatam que "é fundamental que o aluno se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas" Ponte, Brocado e Oliveira (2019, p 25).

Sendo que o importante é que todos os grupos tiveram a oportunidade de comunicar suas descobertas e contribuições de maneira eficaz, permitindo que o grupo como um todo se beneficie do aprendizado coletivo. Os objetivos da professora/pesquisadora para etapa foi organizar os estudos e conteúdos matemáticos, esquematizando ideias principais abordadas no decorrer das atividades e envolver a identificação de padrões nos dados e quais estão consistentes com a atividade, permitindo que eles falem por si mesmo, sem tentar forçar resultados, e sendo transparente.

Os padrões identificados foram consistentes com as atividades realizadas, permitindo que os dados "falem por si mesmos" sem a necessidade de forçar resultados. Além disso, observou-se importância da transparência ao lidar com os dados e resultados obtidos, garantindo que a maioria dos estudantes tivessem uma compreensão clara e precisa do que foi discutido e apresentado.

Durante as discussões, os estudantes expressaram suas experiências com as atividades e reconheceram que, inicialmente, não sabiam ao certo como proceder, mas que no decorrer das etapas foram ficando mais confiantes em realizar as atividades. Os estudantes, G8A, G8B e G4C compartilharam seus relatos,

> G8A "as atividades foram bem diferentes, no começo estava difícil, mas aos poucos fui entendendo como fazer".

> G8B “a atividade que mais gostei foi a do *pi*, sempre quis saber o que era esse tal número *pi*, e a maneira como descobrimos, eu não irei esquecer”.
> G4C “investigar a bicicleta, e encontrar matemática nela, para mim foi unir coisas bem diferentes, mas que eu gostei muito”.
> G4C “penso que, se em uma bicicleta tem várias coisas para se aprender matemática, imagina outros objetos”.

Dessa maneira, observou que os estudantes compartilharam suas experiências nas atividades, descrevendo suas superações de desafios, o fascínio pela descoberta do número pi e a surpresa ao perceberem a presença da matemática na bicicleta. Além disso, reconheceram o potencial de aplicar conceitos matemáticos em vários objetos do cotidiano.

Nesta atividade, é perceptível a satisfação dos estudantes ao participarem de uma aula “diferente” na disciplina de matemática. Eles relataram que aprenderam a utilizar o metro de forma correta e ampliaram seus conhecimentos em operações básicas da matemática de modo prático, com aplicações e experimentações do objeto em estudo.

Essa abordagem contextualizada proporcionou uma experiência de aprendizado com significados ao seu mundo real. Skovsmose (2000) relata que “referências à vida real parecem ser necessárias para estabelecer uma reflexão detalhada sobre a maneira como a matemática pode operar em nossa sociedade”. Tornando assim a realização das atividades mais envolvente para os estudantes, contribuindo para o seu desenvolvimento tanto em termos de habilidades matemáticas quanto de compreensão do mundo ao seu redor.

Durante as apresentações para o grande grupo, alguns estudantes expressaram seus pontos de vista com convicção, demonstrando uma compreensão e um claro entendimento do que relataram. Essa veemência na comunicação reflete o envolvimento e o comprometimento dos estudantes com o conteúdo apresentado, além de transmitir uma sensação de confiança e segurança em suas análises e conclusões. Os estudantes G4A, G8B, G8C falaram:

> G4A “essa maneira que eu estudei matemática, que fui anotando informações, e analisando o problema e tentando encontrar a solução, com certeza eu não irei esquecer o que eu aprendi, “ficou gravado””.
> G8B “aprender assim tem mais coisas para fazer, mas aprende mais, e não apenas resolver a “*conta*” pronta que o professor passa”.
> G8C “percebi que no decorrer das atividades, a turma participou mais e houve colaboração entre colegas, e isso não acontece em outras atividades em sala de aula”.

Nestas falas dos estudantes e em suas observações sobre a maior participação da turma e a colaboração entre os colegas sugerem que esse método de ensino proporcionou um ambiente mais envolvente e motivador. Nele, os estudantes foram incentivados a participar ativamente e trabalhar em equipe. Segundo Skovsmose (2014) “investigar e explorar são atos conscientes, eles não acontecem como atividades forçadas”. Isso destacou a importância de promover uma aprendizagem ativa e centrada no estudante, que estimule a autonomia, o pensamento crítico e a resolução de problemas por meio da investigação Matemática.

Para a próxima sessão, realizaremos uma análise da etapa oito. Vale ressaltar que, nos relatos sobre esta etapa, já foram evidenciadas diversas análises. No entanto, vamos revisitar essas informações para extrair dados adicionais e consolidar nosso entendimento sobre os resultados obtidos.

5.4.1 Análise da etapa oito

Na etapa oito, foi realizado um produto final sobre todas as atividades realizadas nas etapas, os grupos fizeram apresentações, discussões sobre resultados e dificuldades encontradas. Os relatos dos estudantes revelaram uma série de observações e reflexões significativas sobre o processo de aprendizagem no formato de investigação.

Um ponto importante destacado pelos estudantes foi a satisfação em participar de uma abordagem de ensino diferente, que envolveu atividades práticas e investigativas. Eles expressaram entusiasmo ao descobrir a presença da matemática em um objeto do cotidiano, como a bicicleta, e reconheceram a importância de aplicar os conceitos matemáticos em situações reais, pois foi isso, que fez eles entenderem um pouco melhor alguns conceitos matemáticos. Conforme Skovsmose (2000):

> As práticas de sala de aula baseadas num cenário para investigação diferem fortemente daquelas baseadas em exercício. A distinção entre elas tem a ver com as “referências” que visam levar os estudantes a produzir significados para atividades e conceitos matemáticos. (Skovsmose 2000, p 19-20).

Os estudantes destacaram que resolver problemas de forma investigativa foi em alguns momentos difícil, porém, quando conseguiam encontrar as soluções do que procuravam eles entendiam o significado de suas respostas. Durante o desenvolvimento das etapas, foram observados que eles examinaram e interpretaram as informações de maneira lógica e específica para resolver problemas.

Além disso, quando tomaram decisões em consenso para entender situações um pouco mais difícil, mostrou que a maioria dos estudantes estão envolvidos na atividade com o mesmo propósito, que seria aprender e compreender de como resolver a questão. Esse engajamento coletivo demonstrou que eles estavam motivados a enfrentar desafios, colaborando para encontrar soluções e consolidar o conhecimento matemático. Skovsmose (2014) menciona que:

> Enquanto o paradigma do exercício pode ser associado em certa medida com uma zona de conforto, cenários para investigação nos colocam em uma zona de risco. Essa zona, contudo, é também a zona das possibilidades educacionais, e considero importante que tais possibilidades sejam exploradas. Skovsmose (2014, p 141).

As declarações dos estudantes refletem como a abordagem de aprender matemática por investigação, destacou pontos positivos. A maneira como os estudantes abordaram os problemas, anotaram informações e trabalharam juntos para encontrar soluções demonstrou uma compreensão da aprendizagem. Outro aspecto relevante foi a percepção dos estudantes sobre a aplicabilidade dos conceitos matemáticos em diferentes contextos e objetos do cotidiano, o que demonstra uma compreensão mais ampla e flexível dos conhecimentos adquiridos.

A análise da etapa oito revela um desenvolvimento positivo das atividades realizadas em promover uma aprendizagem significativa e engajadora, bem como o impacto positivo na compreensão e na apreciação dos conceitos matemáticos pelos estudantes.

Fazendo-se uma análise geral de todas as etapas desenvolvidas, podemos resumir de um modo geral que na primeira e segunda etapa, os estudantes ficaram sentindo-se um pouco desconfortáveis ou inseguros ao realizar as atividades por investigação. No entanto, à medida que avançaram para as etapas seguintes, começaram a se envolver mais e a apreciar o processo, desenvolvendo um interesse crescente e buscando mais oportunidades de aprendizado.

As atividades desenvolvidas durante a aula de matemática, envolvendo a investigação de conceitos matemáticos em uma bicicleta proporcionaram aos estudantes uma maneira envolvente de aprender. Ao manipularem um objeto do seu cotidiano, despertou neles a “curiosidade” e esse foi um ponto importante para as atividades terem tido um aproveitamento importante para a maioria dos estudantes.

As questões norteadoras e a sequência em que as etapas foram abordadas foram importantes para orientar os estudantes no entendimento do que fazer. No entanto, mesmo assim, surgiram questões e informações diferentes durante o desenvolvimento das atividades. Este momento motivou os estudantes ainda mais a pesquisar e investigar, para esclarecer suas dúvidas e a obterem suas conclusões das atividades.

Vale aqui apontar o que mencionam Ponte, Brocado e Oliveira (2019, p 20) que o professor não precisa limitar os estudantes somente a realização de investigação, eles dizem que há, sem dúvida, lugar para exercícios, os problemas, os projetos e as investigações. Assim, podemos verificar que o importante é permitir que os estudantes desenvolvam a aprendizagem e a compreensão da matemática. No capítulo seguinte temos as considerações finais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizarmos esta dissertação, refletimos sobre os objetivos inicialmente propostos e os resultados alcançados ao longo do estudo. Nossa pesquisa teve como título "aprendizagem por investigação: explorar e desenvolver conceitos matemáticos" um tema que ao longo de todo o processo da pesquisa demonstrou ter relevância na área da educação no momento de ensino e da aprendizagem dos estudantes.

Revisitando ainda a pergunta diretriz da pesquisa, que se expressa da seguinte maneira: *"Como a implementação de atividades na forma de aprendizagem investigativa pode promover um papel ativo e o engajamento dos estudantes no processo de aprendizagem?".*

Para facilitar a compreensão das análises feitas para estas considerações finais, descrevemos novamente os objetivos da pesquisa, sendo eles:

- Analisar as potencialidades de aprender matemática por investigação;
- Identificar os fatores que possibilitam ter uma aprendizagem com conexões da realidade do estudante;
- Interpretar os dados identificando habilidades desenvolvidas pelos estudantes durante as atividades.

A partir destes objetivos desta pesquisa foi aplicado uma sequência de atividades divididas em oito etapas para os estudantes do oitavo ano do ensino fundamental. Essas atividades serviram como suporte para os estudantes investigarem conceitos matemáticos presentes na bicicleta.

Ao longo desta dissertação, exploramos como aprender matemática por meio da investigação pode oferecer uma experiência de aprendizado mais envolvente e estimulante para os estudantes, permitindo-lhes explorar conceitos matemáticos em contextos do mundo real e desenvolver habilidades analíticas e críticas. E isso faz nos lembrar do nosso objetivo procedimental que foi aplicar atividades para os estudantes explorarem, descobrirem, experimentarem, interagirem e comunicar-se matematicamente.

No início, quando o projeto das atividades foi apresentado em sala de aula, os estudantes demonstraram estranhamento, questionamentos e dúvidas. No entanto, à medida que as atividades progrediram, observou-se que eles foram se familiarizando com o processo de desenvolvimento e passaram a apreciar esse método de aprendizagem.

Ao utilizar a bicicleta como um cenário de aprendizagem, notou-se que os estudantes ficaram encantados em explorar um objeto familiar do seu cotidiano. Eles não apenas redescobriram elementos e funcionalidades novas da bicicleta, mas também foram compreendendo conceitos matemáticos de uma maneira prática e tangível.

Nesse contexto, foi evidenciado como as experiências anteriores dos estudantes (*backgrounds*) se entrelaçaram com os novos conhecimentos apresentados (*foregrounds*), mostrando como esses conhecimentos prévios influenciaram a compreensão e a assimilação das novas informações. Skovsmose (2000) diz que estes *foregrounds* são construídos parcialmente com base em expectativas que os estudantes formam a partir de suas reflexões quando atribuem significado ao que estão fazendo.

A utilização desta metodologia ofereceu contribuições para o ensino e o aprendizado da matemática durante todas as etapas, enfatizando o papel da investigação como uma ferramenta eficaz para enriquecer a compreensão dos conceitos matemáticos. Ao considerar essa abordagem de aprendizado baseada na investigação, os estudantes e a professora criaram um ambiente de sala de aula mais dinâmico e interativo, onde os estudantes se sentiram motivados a se envolver ativamente no processo de aprendizagem.

Através de atividades práticas contextualizadas os estudantes puderam explorar conceitos matemáticos de uma maneira mais significativa e relevante para suas vidas, o que aumentou sua motivação e interesse pela disciplina. Ao longo do processo, os estudantes aplicaram conceitos matemáticos como divisão, frações e razões para calcular a relação de transmissão entre coroa e catraca. Eles também exploraram a representação desses números, como também utilizaram transformações de unidade de medida e operações matemáticas básicas com números inteiros.

A ajuda mútua entre os grupos foi fundamental para o desenvolvimento das atividades. Os estudantes trocaram ideias, discutiram resultados e compartilharam suas descobertas, enriquecendo assim a compreensão coletiva do tema. Skovsmose (2000) disserta que é importante que os estudantes possam discutir o que estão aprendendo, como estão aprendendo e a relevância do que estão aprendendo.

A diversidade de resultados obtidos pelos diferentes grupos proporcionou uma oportunidade para comparar e contrastar diferentes abordagens e perspectivas. Tendo assim a oportunidade de refletir sobre o que e como aprenderam.

A análise dos dados revelou que os estudantes, ao se envolverem nas atividades investigativas, demonstraram maior concentração em suas aprendizagens, assumindo um papel mais ativo e engajado no processo de aprendizado. Isso os incentivou a querer descobrir mais conceitos e aprender sobre diferentes assuntos, não apenas matemática.

Desta forma uma conclusão desta pesquisa é que a investigação matemática pode levar os estudantes a se tornarem aprendizes ativos, participando ativamente do processo de descoberta e construção do conhecimento. Em vez de simplesmente memorizar fórmulas e procedimentos, os estudantes foram desafiados a explorar, questionar e resolver problemas de forma criativa e autônoma.

Isso não apenas fortalece sua compreensão dos conceitos matemáticos, mas também promove o desenvolvimento de habilidades cognitivas essenciais, como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a comunicação matemática. E como diz Ponte, Brocado e Oliveira (2019), que assim é o processo de criação da matemática de modo fértil e em acontecimentos inesperados e de movimentos para a frente e para trás.

É importante ainda reconhecer que a aprendizagem matemática por meio da investigação não é apenas sobre a aquisição de conhecimento matemático, mas também sobre o desenvolvimento de cidadãos críticos e informados, capazes de aplicar seu conhecimento matemático para resolver problemas do mundo real e tomar decisões informadas em suas vidas pessoais e profissionais. Portanto, ao promover a investigação matemática na sala de aula, estamos oportunizando os estudantes não apenas como aprendizes de matemática, mas como pensadores críticos e agentes de mudança em suas comunidades e além.

Concluímos que, a questão de pesquisa desta dissertação, foi satisfatoriamente abordada e respondida ao longo dos relatos e análises apresentados nos dois últimos capítulos. Os resultados obtidos demonstraram que as atividades investigativas proporcionaram um ambiente propício para que os estudantes se tornassem participantes ativos em seu próprio aprendizado, resultando em um maior envolvimento e interesse no processo de aprendizagem.

Afirmando o que Ponte, Brocado e Oliveira (2019) nos dizem que, para aprender matemática não é apenas compreender a Matemática já feita, mas sermos capazes de fazer investigação de natureza matemática, e perceber verdadeiramente o que é a Matematica e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Este entendimento permite não apenas que o estudante adquirira conhecimento, mas também desenvolva habilidades críticas e criativas que são essenciais para enfrentar os desafios contemporâneos e inovar em diversas áreas da vida.

É notável que ao longo das atividades e durante a análise de dados, o objetivo procedimental foi plenamente alcançado. Em que quase todos os momentos, foi possível observar os estudantes explorando, descobrindo, experimentando, interagindo e comunicando-se matematicamente entre si e com a professora. Este processo evidenciou o engajamento ativo dos estudantes na construção do conhecimento matemático, cumprindo de forma eficaz o propósito estabelecido.

No entanto, é importante reconhecer que a implementação bem-sucedida da aprendizagem por investigação requer um compromisso por parte dos professores e estudantes, bem como a disponibilidade de recursos e suporte adequados. Os professores precisam estar preparados para assumir o papel de orientar e apoiar os estudantes em suas investigações matemáticas. Além disso, é importante que as atividades de investigação sejam cuidadosamente planejadas e estruturadas para garantir que os objetivos de aprendizado sejam alcançados de forma eficaz.

Em resumo, esta pesquisa ressalta o poder transformador da aprendizagem matemática por meio da investigação, oferecendo descobertas e ampliando conhecimentos tanto para professores quanto para os estudantes. Isso promove aos professores um interesse renovado em proporcionar uma Educação Matemática mais relevante para o cotidiano do estudante, com o potencial de enriquecer significativamente o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Olhando para o futuro, é essencial continuar explorando e desenvolvendo abordagens inovadoras para o ensino e aprendizado da matemática por meio da investigação. Isso pode envolver a implementação de práticas pedagógicas baseadas em projetos, estudos de caso, modelagem matemática e outras estratégias que incentivem os estudantes há aplicar conceitos matemáticos em situações do mundo real. Ao mesmo tempo, é importante garantir que essas abordagens sejam acessíveis e inclusivas, atendendo às necessidades e interesses de uma ampla gama de estudantes.

Uma outra abordagem para explorar a investigação matemática seria por meio das tecnologias pois durante esta pesquisa, observou-se uma forte tendência para esse tipo de investigação, embora não fosse o foco central deste estudo de dissertação, que se concentrou na aprendizagem por meio do cenário de aprendizagem através da investigação matemática. No entanto, este processo de integração das tecnologias no processo de investigação matemática merece ser explorado em uma pesquisa futura, abrindo novas perspectivas para investigar como as tecnologias podem potencializar ainda mais a aprendizagem matemática por meio da investigação.

Além disso, é crucial continuar pesquisando e avaliando os impactos da aprendizagem por investigação no desempenho dos estudantes, sua motivação e atitudes em relação à matemática, bem como seu desenvolvimento de habilidades cognitivas. Isso contribuirá para a melhoria da prática educacional e promoverá uma compreensão dos processos de aprendizagem envolvidos.

Este estudo trouxe à tona alguns desafios e lacunas que ainda precisam ser abordados. Por exemplo, o currículo e/ou apostilas que algumas escolas empoem aos professores, sendo que estes têm de serem cumpridos durante um determinado tempo. Essas questões indicam a necessidade de uma estruturação e discussão com a gestão pedagógica da escola, pois observamos que para desenvolver a aprendizagem por investigação ou até mesmo outro tipo de intervenção, o professor precisa ter um pouco mais de autonomia em suas aulas para então conseguir pôr em prática estas metodologias.

Por fim, sugerimos que futuras pesquisas explorem ainda mais sobre como aprender e ensinar por meio da investigação, com o objetivo de ampliar o conhecimento e fortalecer ainda mais as bases teóricas e práticas da aprendizagem Matemática. A continuidade dos estudos nesta área é essencial para garantir que as metodologias educacionais evoluam e se adaptem às necessidades dos estudantes e às demandas de uma sociedade em constante transformação.

REFERÊNCIAS

ABREU, G. **Contextos sócio-cultural e aprendizagem matemática pelas crianças**. Quadrante, v. 5, n. 2, p. 7-21, 1996.

ALRO, Helle; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Autêntica Editora, 2021.

ARAÚJO, V. R. N.; CARDOSO, E. F. M. **Interferências pedagógicas na superação de dificuldades da aprendizagem matemática**. UNIrevista, S.L., v. 1, n. 2, p. 1-14, abr. 2006.

BAUR, A. P. **Investigação matemática na aprendizagem da geometria: conexões entre quadriláteros, triângulos e transformações geométricas**. UFRGS,2017, RS.

BENNEMANN, M.; ALLEVATO, N. S. G. **Educação matemática crítica**. Revista de Produção Discente em Educação Matemática, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 103-112, maio 2012.

BERBEL, N. A. N. **As Metodologias Ativas e a Promoção da Autonomia de Estudantes.** Semina: Ciências Sociais e Humanas, Londrina, v. 32, n. 1, p. 25-40, jan./jun. 2011. Disponível em: <http://www.uel.br/uel/pbl/geral.htm>. acesso em 15 de setembro de 2023.

BICUDO, M. A. V. **A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa.** Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia. Curitiba, vol 5, n. 2, mai./ago. 2012.

BIOTTO filho, D. **Quem não sonhou em ser um jogador de futebol? Trabalho com projetos para reelaborar Foregrounds**. UNESP, 2015, SP.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação** - Uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa, Porto Editora. 1994. p. 47-74.

BRAGA, N. C. R.; MORAIS, M. B. **Desafios da Prática Docente no Ensino de Matemática nos Anos Iniciais: um estudo a partir de três narrativas**. Perspectivas da Educação Matemática, [S.L.], v. 13, n. 31, p. 1-22, 5 maio 2020.

BRAHIER, J.; SPEER, W**. Nuts about mathematics. Teaching Children Mathematics**, 2(4), 228-230, 1995.

BRASIL, Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática – ensino de quinta a oitava série. Brasília (DF): MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília, DF, 1998a. 152 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 25 fev. 2023.

BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. D. (Org.). **Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Coimbra: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2002. p. 5-24.

CARVALHO, G. S.; BAQUEIRO, G. D. S. **Os detetives da matemática: a aula de investigação matemática com alunos do projeto emapol** / the math detectives. Brazilian Journal Of Development, [S.L.], v. 6, n. 10, p. 77286-77296, 2020. Brazilian Journal of Development.

CORRADI, D. K. S. **Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno: uma experiência com alunos do 2º ano do ensino médio**. 2013. 208 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013.

COSTA, A. P. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. Recife: Universidade Federal do Pernambuco, 2016. 243 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife, 2016.

COSTA, M.A. **Aprendizagem significativa: uma contribuição do diálogo por meio de uma atividade investigativa em matemática**. IFES, 2022

CORRADI, D.K.S. **Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno: uma experiência com alunos do 2º ano do ensino médio**. Curso de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. 21º ed. Porto Alegre: Artmed/Bookman, 2007.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: Um programa. A educação matemática em revista**, v.1, p. 5-1 1, 1993.

D’AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus Editora, 2012.

DINIZ, A.M.R. **Os foregrounds de estudantes quilombolas e suas intenções em aprender matemática.** UFPE,2019, PE.

MELO, L. A.L.; MORAIS, F. B. FLORENTINO, G. R. **A utilização da investigação matemática como abordagem metodológica em sala de aula**. X Encontro Paraibano de Educação Matemática & V Encontro Cajazeirense de Matemática. Acesso em 20 mar. 2023.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana**. São Paulo; Atual, 2013.

DUVAL, R. **Como analisar a questão crucial da compreensão em matemática?** Revemat, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 1-27, 2018.

FAUSTINO, A. C. **Como você chegou a esse resultado?": o diálogo nas aulas de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental.** UNESP, 2018, SP.

FERREIRA, A. S.; ZUIN, E. S. L. **Introdução do conceito de derivada a partir da Investigação Matemática**. Boletim Online de Educação Matemática, [S.L.], v. 6, n. 10, p. 82-102, 24 ago. 2018. Universidade do Estado de Santa Catarina.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. 80. ed. São Paulo: Paz e Terra, p 253, 2021.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 57. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2018.

GRAVINA, M. A.; CONTIERO, L. O. Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? In: **Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v.9, n.1, jul. 2011.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 19, n. 2, 2011.

LORENZATO, S. **Porque não ensinar Geometria? A Educação Matemática em Revista-SBEM**, Blumenau, n. 4, p. 3-13, jan./jul. 1995.

LUCAS, P. S. **Poliminós no ensino da matemática: uma experiência baseada na investigação.** 2017. 87 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. (Org.). **Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Coimbra: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2002. p. 41-58.

MASOLA, W. J. ALLEVATO N. **Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões.** Educação Matemática Debate, [S.L.], v. 3, n. 7, p. 52-67, 2 jan. 2019.

MASOLA, W. J. VIEIRA, G. ALLEVATO, Norma**. Ingressantes na Educação superior e suas Dificuldades em Matemática**: uma Análise das Pesquisas Publicadas nos Anais dos X e XI ENEMs. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2016, SÃO Paulo. Anais do XII ENEM: Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo: SBEM/SBEM-SP, 2016, p. 1-13.

MELLO FILHO, E. T. **O uso da bicicleta em um ambiente de aprendizagem de modelagem matemática no ensino médio**. 2016.Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

MENEZES, B. S. **Game para smartphones e ambientes de aprendizagem, U**FRGS,2019, RS

MEINERZ, F.M. **Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita por meio do uso do material *Álgebra tiles***. UFRGS, 2020, 2020.
MENDES, I. A. **Matemática e Investigação em Sala de Aula**: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2009, p. 123.

MIRANDA, F. O. **A inserção da Educação Matemática Crítica na escola pública: aberturas, tensões e potencialidades**. UNESP,2015, SP

MORAN, J. M., “**O vídeo na sala de aula**”. In Revista Comunicação & Educação. São Paulo, ECA-Ed. Moderna, [2]: 27 a 35, jan./abr. de 1995.

MORAN, J. M. **As múltiplas formas de aprender**. Revista Atividades & Experiências. Julho 2005. Disponível em ttp://ucbweb.castelobranco.br/webcaf/arquivos/23855/6910/positivo.pdf Acessado em: 08/10/2023.

MORAN, J. M. E**nsino e Aprendizagem Inovadores com Tecnologias Audiovisuais e Telemáticas**. Campinas/SP. Papirus, 2000.

MORAN, J. M. **Desafios na comunicação pessoal**. 3º edição são Paulo: Paulinas, 2007.

MORAN, J. M. **Como ver televisão**. Leitura crítica dos meios de comunicação. São Paulo: Editora Paulinas, 1991.

PAPERT, S. **A Máquina das crianças:** Repensando a escola na era da informática. Trad Sandra Costa. Ed. Revisado. Porto Alegre. Artmed, 2008.

PIRES, M. V. **Investigações matemáticas: aprender matemática com compreensão**. **Saber & Educar**, [S.L.], n. 20, p. 42, 16 dez. 2015.

PIRIE, S. **Mathematical investigations in your classrooms** - a pack forteachers. University of Oxford & University of Warwick, 1987.

PONTE, J. P. **Gestão curricular em Matemática**. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J. P. *et al* (org.). **Atividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores**. Editor: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Agências de Educação, Coimbra 2002. Gráfica 2000.

PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender.** In: PROFMAT, 2003, Lisboa, Portugal. Lisboa: APM, 2003.

PONTE J. P. BROCARDO, J. OLIVEIRA H. – **Investigação matemática na sala de aula,** 4. ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

PONTE, J. P.; SOUSA, H. **Uma oportunidade de mudança na Matemática do ensino básico.** In: **GTI** (Org.), O professor e o programa de Matemática do ensino básico. (p. 11-41). Lisboa: APM. 2010.

PENTEADO, M. G.; SKOVSMOSE, Ó. **Landscapes of Investigation: Contributions to Critical Mathematics Education**. Cambridge, Reino Unido: Open Book Publishers, 2022.

PENTEADO, M. G. Computer-based learning environments: risks and uncertainties for teacher. **Ways of Knowing Journal**, Brighton, v. 1, n. 2, p. 23-35, 2001.

ROQUE, C.C.E. MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL. In: **PARANÁ.** Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense, 2008. Curitiba: SEED/PR., 2011.

ROSSMAN, G. B.; RALLIS, S. F. (1998). **Learning in the field**: An introduction to qualitative research. Thousand Oaks, CA: Sage.

SANTOS, C. H. M. dos; BELLINI, W Investigações matemáticas em sala de aula: Contribuições de uma Tarefa Investigativa no 1º ano do Ensino médio. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, jul.2016, São Paulo. SP. **Anais**, SBEM, 2016.

SOUZA, L. De; JUNKERFEURBOM, M. A; Bassoi, TS. Exploração -investigação matemática na educação infantil**. ACTIO**, Curitiba, v 3,n.3, p 399-415, 2018. Disponível https://periodicos.utfpr.edu.br/actio. Acesso em fev de 2024.

SERRAZINA, L.; VALE, I.; FONSECA, H.; PIMENTEL, T. Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.;

SOARES, D.A. **Sonhos de adolescentes em desvantagem social: vida, escola e educação matemática**. UNESP, 2022, SP.

SIEGEL, M.; BORASI, R. Demystifyng mathematics education through inquiry. In: ERNEST, P. (Ed.). **Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and mathematics education**. 2nd. ed. London: The Falmer Press, 1994. (Studies in Mathematics Education Series, v. 4). p. 201–214.

SCHOENFELD, Alan H. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). **Journal of education**, v. 196, n. 2, p. 1-38, 2016.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para Investigação**. Bolema, Rio Claro (SP), n.14, p.66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.

SKOVSMOSE, O. **Um Convite à Educação Matemática Crítica**. Campinas: Papirus, 2014.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica.** Campinas: Papirus, 2017. 155 p.

VARIZO, Z.C. M; MAGALHÃES, A.P.A.S. **Atividades investigativas como uma estratégia de ensino e aprendizagem da matemática.** Curitiba: CRV, 2016.

VALENTE, J. A. **Um modelo de sala de aula invertida aplicado na disciplina de lógica de programação.** Disponível em:https://www.abed.org.br/congresso2018/anais/trabalhos/9569.pdf. Acesso em: 06 fev. 2024.

VALENTE, J. A. **Aprendizagem Ativa no Ensino Superior: a proposta da sala de aula invertida.** p. 1- 4, 2013. Depto. de Multimeios, Nied e GGTE - Unicamp & Ced - PucSP. Disponível em: http://www.pucsp.br/sites/default/files/img/aci/27-8_agurdar_proec_textopara280814. pdf. Acesso em: 06 fev.2024.

WHARTA, E. J; LEMOS, M. M. Abordagens investigativas no ensino de Química: limites e possibilidades. **Revista de Educação em Ciências e Matemática**. v. 12, n. 24, jan-jul, 2016. p. 05-13.

APÊNDICE A - TALE DO ALUNO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS
Fone/Fax: (051) 3308.6212 mat-ppgensimat@ufrgs.br
http://www.ufrgs.br/ppgemat

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
Convite para participação em pesquisa

Prezado(a) Aluno(a). ________________________________, você, está sendo convidado(a) a participar voluntariamente da pesquisa "Análise de uma abordagem do aprendizado por investigação na educação matemática".

A pesquisa está sendo desenvolvida pela pesquisadora Mara Cristina Baltazar, estudante do curso de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Essa pesquisa é orientada pela Professor Dr. Vandoir Stormowski.

O objetivo desta pesquisa é analisar a aprendizagem matematica por meio de investigação, onde os alunos serão orientados pela professora/pesquisadora a explorar a matemática existente em uma bicicleta.

Para isto, solicitamos a sua especial colaboração na participação da pesquisa, a qual ocorrerá por meio de investigação exploratória de uma bicicleta para aprendizagem matemática. Estima-se que sejam necessários uns oito encontros para realização das atividades que ocorrerá no horário das aulas de matemática no periodo matutino, na Escola Municipal Professora Nair Alves Bratti.

O uso das informações decorridas da sua participação (transcrições de respostas, relatos) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas por um código alfanumérico. Todas as informações fornecidas por você serão armazenadas sob responsabilidade da pesquisadora principal por pelo menos cinco (5) anos após o término da investigação.

A sua participação não envolve nenhum tipo de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Sua participação é muito importante e é voluntária. Você poderá recusar a participar da pesquisa a qualquer momento, não havendo prejuízo de nenhuma forma para você se essa for sua decisão. O consentimento à participação não retira o direito à indenização devido a eventuais danos causados pela pesquisa. A sua colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por você assinado.

Caso necessite de qualquer esclarecimento, peço que entre em contato comigo, a qualquer momento, pelo telefone (48) 99051879 ou pelo e-mail maracristinabaltazar@gmail.com. Terei o prazer em prestar informações adicionais.

Obrigado pela sua colaboração.

Eu, ____________________________________, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada "Análise de uma abordagem do aprendizado por investigação na educação matemática", desenvolvida pela pesquisadora Mara Cristina Baltazar.

Porto Alegre, ____ de ____________ de ______.

Assinatura do(a) Aluno(a): ____

Assinatura do Pesquisador: ____

Assinatura do Orientador: ____

APÊNDICE B – TALE DOS PAIS

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS
Fone/Fax: (051) 3308.6212 mat-
ppgensimat@ufrgs.br http://www.ufrgs.br/ppgemat

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
Convite para participação em pesquisa

Prezado(a) Sr(a). ____,

O(a) aluno(a) ____, está sendo convidado(a) a participar voluntariamente da pesquisa "Análise de uma abordagem do aprendizado por investigação na educação matemática".

A pesquisa está sendo desenvolvida pelo pesquisador Mara Cristina Baltazar, o qual é estudante do curso de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Essa pesquisa é orientada pela Professor Dr. Vandoir Stormowski.

O objetivo desta pesquisa é é analisar a aprendizagem matematica por meio de investigação, onde os alunos serão orientados pela professora/pesquisadora a explorar a matemática existente em uma bicicleta.

Para isto, solicitamos a especial colaboração do(a) aluno(a) na participação da pesquisa, a qual ocorrerá por meio de investigação exploratória de uma bicicleta para aprendizagem matemática. Estima-se que sejam necessários uns oito encontros para realização das atividades que ocorrerá no horário das aulas de matemática no periodo matutino na Escola Municipal Professora Nair Alves Bratti.

O uso das informações decorrentes da participação do(a) aluno(a) (transcrições de respostas, relatos) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas por um código alfanumérico. Todas as informações fornecidas pelo(a) aluno(a) serão armazenadas sob responsabilidade da pesquisadora principal por pelo menos cinco (5) anos após o término da investigação.

A participação do(a) aluno(a) não envolve nenhum tipo de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Sua participação é muito importante e é voluntária. O(A) aluno(a) poderá recusar a participar da pesquisa a qualquer momento, não havendo prejuízo de nenhuma forma para ele(a) se essa for sua decisão. O consentimento à participação não retira o direito à indenização devido a eventuais danos causados pela pesquisa. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por você assinado.

Caso necessite de qualquer esclarecimento, peço que entre em contato comigo, a qualquer momento, pelo telefone (48) [redacted] ou pelo e-mail maracristinabaltazar@gmail.com. Terei o prazer em prestar informações adicionais.

Obrigado pela sua colaboração.

Eu, _______________________________, R.G. ______________, responsável pelo(a) aluno(a) _______________________________, da turma __________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada "Análise de uma abordagem do aprendizado por investigação na educação matemática". Desenvolvida pela pesquisadora Mara Cristina Baltazar.

Porto Alegre, ____ de ____________ de ____.

Assinatura do Responsável: ___________________________________

Assinatura do Pesquisador: _________________________________

Assinatura da Orientador: __________________________________

APÊNDICE C – CARTA ANUÊNCIA DA ESCOLA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
Av. Bento Gonçalves, 9500 - Agronomia - 91509-900 - Porto Alegre - RS
Fone/Fax: (051) 3308.6212
mat-ppgensimat@ufrgs.br http://www.ufrgs.br/ppgemat

CARTA DE ANUÊNCIA DA ESCOLA

Por intermédio do presente instrumento, autorizo a Mara Cristina Baltazar, atualmente mestrando regularmente matriculado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEMat) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a desenvolver sua pesquisa intitulada "aprendizagem por investigação: Explorar e desenvolver conceitos matemáticos". A referida pesquisa faz parte da Dissertação da pesquisadora, a qual é uma exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Esta pesquisa está sendo orientada pela Professor Dr. Vandoir Stormowski, docente do Instituto de Matemática e Estatística. Além disso, a direção da escola está ciente de que a pesquisa será desenvolvida com estudantes do oitavo ano matutino, que aceitarem participar de atividades investigativas para a aprendizagem matemática, pela professora/pesquisadora. As atividades serão organizadas de modo que não prejudiquem os demais conteúdos e nem as outras disciplinas da comunidade escolar.

Porto Alegre, ___ de ______________ de ____.

____
Diretora
Escola Municipal de Sombrio

____
Mara Cristina Baltazar– Pesquisador
Mestranda PPGEMat - UFRGS