Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Física

Programa de Pós-graduação em Ensino de Física

Mestrado em Ensino de Física

Edgard Kretschmann

# Um Estudo da Transposição Didática e das Hipóteses da Equação de Schrödinger Pautada na Análise de Livros Didáticos e de Textos Históricos

Porto Alegre

2024

Edgard Kretschmann

# Um Estudo da Transposição Didática e das Hipóteses da Equação de Schrödinger Pautada na Análise de Livros Didáticos e de Textos Históricos

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ensino de Física pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Nathan Willig Lima

Coorientador: Leonardo Albuquerque Heidemann

Porto Alegre

2024

Edgard Kretschmann

Um Estudo da Transposição Didática e das Hipóteses da Equação de Schrödinger Pautada na Análise de Livros Didáticos e de Textos Históricos

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ensino de Física pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Física do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Nathan Willig Lima

Co-orientador: Leonardo Albuquerque Heidemann

Porto Alegre, 20 de Junho de 2024

BANCA EXAMINADORA:

---

Nathan Willig Lima – Doutor em Ensino de Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

Ives Solano Araujo – Doutor em Ensino de Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

Cilaine Teixeira – Doutora em Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

Glauco Cohen Pantoja – Doutor em Ensino de Física
Universidade Federal do Oeste do Pará

## DEDICATÓRIA

Para todos aqueles que veem a relação especial que guardo com o conhecimento.

**RESUMO**

A difusão de um conhecimento requer que esse passe por processos de transformação para que ele seja apreendido e compreendido por um estudante. O ensino de Mecânica Quântica enfrenta dificuldades por conta da sua natureza, da nova forma de interpretar o comportamento de um sistema microscópico e da forma como se deve tratar as grandezas físicas medidas. Por conta disso, essa dissertação se propõe a construir e a realizar uma comparação dos Modelos Epistemológicos de Referência subjacentes à Equação de Schrödinger no contexto dos textos originais, escrito pelo próprio Schrödinger, e dos livros didáticos, para oferecer, sob um ponto de vista da Teoria Antropológica do Didático e da discussão de hipóteses científicas, subsídios para o exercício da Vigilância Epistemológica, de forma que professores e pesquisadores da área possam refletir e propor metodologias de ensino para um processo de ensino-aprendizagem que faça sentido no contexto dos estudantes. Para realizar esta comparação, foi feito um estudo sobre as organizações praxeológicas e sobre as estruturas das hipóteses subjacentes à derivação da Equação de Schrödinger nos textos originais escritos por Schrödinger e nos textos de oito livros didáticos utilizados em cursos de graduação no Brasil. Com esse estudo, foi possível identificar quatro pontos importantes para Schrödinger deduzir a sua equação de onda que descreve o comportamento de "partículas quânticas": A Equação de Hamilton-Jacobi, a comparação entre os princípios de Fermat e de Maupertuis/Hamilton, a relação entre energia e frequência ($E = h\nu$) como uma lei de dispersão, e a equação de onda como um ponto de partida. A partir disso, é possível notar como muitos livros didáticos se afastam desses pontos a partir de processos de descontextualização e de dessincretização do conhecimento, revelando diferenças entre os Modelos Epistemológicos de Referência construídos dos originais e dos livros didáticos. Este tipo de comparação nos permite repensar a forma como se ensina e porque se ensina a Equação de Schrödinger, enfrentando, assim, obstáculos no ensino da Mecânica Quântica.

**Palavras-chave:** Equação de Schrödinger. Vigilância Epistemológica. Modelo Epistemológico. Organização Praxeológica. Estrutura de Hipóteses.

## ABSTRACT

The dissemination of knowledge requires that it goes through transformation processes so that it can be grasped and understood by a student. The teaching of Quantum Mechanics faces difficulties due to its nature, the new way of interpreting the behavior of a microscopic system and the way in which measured physical quantities must be treated. Because of this, this dissertation proposes to construct and to carry out a comparison of the Reference Epistemological Models underlying Schrödinger's Equation in the context of the original texts, written by Schrödinger himself, and textbooks, to offer, from a point of view of the Anthropological Theory of Didactic and discussion of scientific hypotheses, subsidies for the exercise of Epistemological Surveillance, so that teachers and researchers in the area can reflect and propose teaching methodologies for a teaching-learning process that makes sense in the students' context. To carry out this comparison, a study was carried out on praxeological organizations and on the structures of the hypotheses underlying the derivation of the Schrödinger Equation in the original texts written by Schrödinger and in the texts of eight textbooks used in undergraduate courses in Brazil. With this study, it was possible to identify four important points for Schrödinger to deduce his wave equation that describes the behavior of “quantum particles”: The Hamilton-Jacobi Equation, the comparison between the principles of Fermat and Maupertuis/Hamilton, the relationship between energy and frequency ($E = h\nu$) as a dispersion law, and the wave equation as a starting point. From this, it is possible to notice how many textbooks move away from these points through processes of decontextualization and desyncretization of knowledge, revealing differences between the Epistemological Reference Models constructed of the originals and textbooks. This type of comparison allows us to rethink how the Schrödinger Equation is taught and why it is taught, thus facing obstacles in the teaching of Quantum Mechanics.

**Keywords:** Schrödinger equation. Epistemological Surveillance. Epistemological Model. Praxeological Organization. Structure of Hypotheses.

## LISTA DE TABELAS

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Quando nos deparamos com um conhecimento disposto em um livro didático ou apresentado por meio do discurso de um professor em sala de aula aos seus estudantes, o encontramos em uma forma didatizada, reconstruído pelo autor ou professor com o objetivo de que ele seja difundido, ou seja, que ele seja compreendido e apreendido pelos seus leitores ou estudantes. É natural, portanto, que esse conhecimento seja diferente daquele que o deu origem, pois os processos de didatização demandam transformações no conhecimento intimamente relacionadas com o contexto no qual se pretende que ele seja difundido, que é usualmente o contexto das instituições de ensino (Chevallard, 1991).

Contudo, as transformações impostas no conhecimento durante a didatização podem provocar um processo de esvaziamento de sentido desse conhecimento, uma perda da razão de ser daquele objeto de conhecimento. Este esvaziamento pode incorrer em um obstáculo para o processo de ensino-aprendizagem do estudante, dificultando a atribuição de sentido aos conceitos e teorias, uma dimensão fundamental da aprendizagem (Moreira, 2011). Assume-se, nesta dissertação, que o resgate da razão de ser dos conhecimentos é imprescindível para o ensino de Física.

Considerando o exposto, voltamo-nos para o ensino da Mecânica Quântica. Os desafios relacionados com o ensino dessa teoria estão, segundo Kaiser (2007, 2014), relacionados com o final da Segunda Guerra Mundial e a Guerra Fria, em que a corrida pelo poder científico-tecnológico demandava um ensino de física pragmático e instrumentalista em detrimento das discussões filosóficas e fenomenológicas que a Mecânica Quântica desperta. Atualmente, muitos trabalhos são publicados para discutir os desafios e dificuldades no ensino de Mecânica Quântica. Em uma revisão sistemática, Souza *et al* (2021) destacam, entre outras coisas, a dificuldade dos alunos para: i. compreender conceitos fundamentais, como probabilidade, incerteza e superposição, que são conceitos que conflitam com o determinismo da Física Clássica; ii. associar os novos conceitos com experiências do cotidiano; iii. entender os limites de validade da Física Clássica e da Mecânica Quântica. Além disso, os autores argumentam que os livros didáticos trazem informações equivocadas dos fenômenos, assim como apresentam frequentemente a teoria de forma axiomática e, às vezes, como *quasi*-histórica, impondo obstáculos para a compreensão.

Singh (2007), Singh e Zhu (2009) e Singh e Marshmann (2015, 2016) apresentam artigos que exploram dificuldades de estudantes de graduação e pós-graduação sobre diversos tópicos de Mecânica Quântica como, por exemplo, o formalismo matemático da teoria, a interpretação da função de onda, operadores, autovalores, autoestados e valores esperados. Com intuito de mitigar essas dificuldades, pesquisadores da área de Ensino de Física têm proposto diferentes formas de introduzir a Mecânica Quântica em unidades didáticas para diferentes públicos, como Ostermann e Ricci (2004), que advogam por uma introdução conceitual.

Frente a esse cenário, é notória a necessidade de se investigar a transposição didática da Mecânica Quântica com o objetivo de promover um resgate da razão de ser dos conhecimentos envolvidos. A investigação histórica, por meio da análise da transposição dos trabalhos originais para os livros didáticos, é uma alternativa para esse tipo de estudo (Pietrocola *et al.*, 2020). Karam e Lima (2022) reconhecem o valor pedagógico do uso de fontes primárias em sequências didáticas. Os autores levantam quatro exemplos de vantagens pedagógicas dessa abordagem didática, são elas: i. encontrar novas formas (geralmente menos abstratas) de explicar conceitos; ii. aproximar-se dos problemas originais que motivaram a sua gênese; iii. refletir criticamente sobre a forma como os ensinamos; e iv. apreciar como se leva tempo e esforço para que os conhecimentos sejam desenvolvidos. Ao encontro disso, Pietrocola (2003) entende que as discussões sobre os processos que levaram à formulação dos conceitos são evitadas no ensino por serem muitas vezes rotuladas de metafísicas ou sem importância, e por não possuírem nenhuma função específica no ensino. Nesse sentido, o autor argumenta que elas são cruciais na formação das estruturas de entendimento que permitem transformar o mundo real em um mundo inteligível.

Inserido neste contexto, este trabalho é um estudo sobre a transposição didática da Equação de Schrödinger para o ensino de Física, visto que esse costuma ser um dos mais importantes tópicos no ensino de Mecânica Quântica. Assumindo que a Mecânica Clássica costuma ser um campo bem desenvolvido pelos/as estudantes de graduação quando tomam contato com a Equação de Schrödinger, entendemos que a compreensão sobre como Schrödinger se ampara em fundamentos clássicos no seu trabalho poderá contribuir para o aperfeiçoamento da transposição didática da sua equação, proporcionando situações para que os/as estudantes deem sentido aos conceitos envolvidos.

Schrödinger (1926a, 1926b), ao desenvolver uma equação que resolve problemas quânticos emergentes à época, lança mão, para fundamentar o que ele chama de Mecânica Ondulatória, da Equação de Hamilton-Jacobi, da qual se pode obter a conservação de energia, a trajetória das partículas do sistema mecânico tanto no espaço de configuração quanto no espaço de fase, além de conter o princípio de mínima ação, se tornando, assim, uma equação importante para a Mecânica Clássica. Pesquisadores como Masoliver e Ros (2010) e Small e Lam (2011) resgatam, em uma notação mais moderna, os passos seguidos por Schrödinger, mostrando a importância da Mecânica Clássica e da Óptica Geométrica na dedução da Equação de Schrödinger. Field (2011) resgata, também, a importância da Equação de Hamilton-Jacobi para fundamentar a Equação de Schrödinger, se valendo da formulação de Feynman e as suas integrais de caminho.

Nessa linha, o objetivo desta dissertação é investigar como a Equação de Schrödinger foi originalmente derivada e como ela é introduzida e explorada nos livros didáticos, de forma a proporcionar um recurso importante para quem deseja refletir e readequar a transposição didática desse conhecimento. Sob um ponto de vista chevallardiano, pretendemos gerar subsídios para professores e pesquisadores para exercerem a vigilância epistemológica, ou seja, para analisarem condições e restrições que definem o processo da transposição didática da Equação de Schrödinger, proporcionando o distanciamento adequado entre o saber de referência e o saber a ser ensinado. Nesse sentido, serão construídos os Modelos Epistemológicos de Referência do contexto que originou a Equação de Schrödinger e do contexto institucional de cursos de graduação.

Para isso, utilizamos a noção de praxeologia de Chevallard (2019), mostrando como os discursos que geram ou justificam as técnicas utilizadas para a resolução de problemas com a Equação de Schrödinger podem se modificar em diferentes contextos, incluindo no contexto original de proposição da equação e em diferentes livros didáticos. Os discursos que justificarão as técnicas analisadas pela organização praxeológica apresentarão uma estrutura de hipóteses que embasam o processo lógico-dedutivo subjacente à Equação de Schrödinger e que também é suscetível ao contexto. Para que seja uma feita análise de como as estruturas de hipóteses variam de texto para texto, será mobilizado a Categorização de Hipóteses de Lima e Heidemann (2023).

Com essas ferramentas em mãos e as análises dos originais e livros didáticos, esperamos proporcionar o exercício da vigilância epistemológica vinculada à Equação de Schrödinger. Pretende-se responder, com essa dissertação a três perguntas de pesquisa: como se estabelecem as hipóteses e a praxeologia subjacentes à Equação de Schrödinger nos seus trabalhos originais? Como os livros didáticos estruturam as hipóteses e a praxeologia subjacente à Equação de Schrödinger? Como estas estruturas de hipóteses e as praxeologias se afastam ou se aproximam entre si?

A dissertação está estruturada da seguinte forma, no capítulo 2 está descrito o referencial teórico no qual a dissertação se fundamenta, onde é apresentada a Transposição Didática do conhecimento segundo Chevallard (1991, 2019) e a sua Teoria Praxeológica, a Estrutura de Hipóteses Científicas de Lima e Heidemann (2023) e, também, uma discussão sobre a historiografia no ensino de Física; no capítulo 3 está descrita a metodologia com a qual pretende-se construir e comparar os Modelos Epistemológicos de Referência; no capítulo 4 estão apresentados os resultados obtidos nas fontes originais e nos livros didáticos selecionados e contém uma discussão sobre as diferenças e semelhanças entre estes Modelos Epistemológicos de Referência; por fim, no capítulo 5 temos as considerações finais que encerram a dissertação.

# 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção, são apresentados os referenciais teóricos utilizados nesta dissertação. Especificamente, será abordada a noção de transposição didática, segundo a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard (2019), e a proposta de Estrutura de Hipóteses elaborada por Nathan Lima e Leonardo Heidemann (2023). Será ainda debatido como a historiografia da física se vincula ao ensino de Física.

## 2.1 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO CONHECIMENTO

O estudo da transposição didática se mostra importante para trazermos à consciência as transformações que um saber de referência sofre do momento em que é desenvolvido até o momento em que ele se transforma em um saber a ser ensinado. Focado no estudo da difusão do conhecimento, ou seja, na didática, Yves Chevallard (1991, 2019), importante pesquisador da área de ensino de Matemática, propõe a Teoria Antropológica do Didático (TAD), teoria que estabelece instrumentos para se compreender as relações das pessoas com os objetos de conhecimento.

Na TAD, argumenta-se que as pessoas, quando conhecem um objeto, possuem uma relação com ele (esses objetos podem ser tanto materiais quanto imateriais) que engloba tudo aquilo que ela sabe sobre o objeto. Se uma pessoa assume uma posição em uma instituição (um professor em uma escola, por exemplo), precisará construir uma relação específica com alguns objetos (com, por exemplo, a noção de ensinar ou com o conceito de energia) de modo a adequá-la com as relações esperadas pela instituição para a posição que ela ocupa. Por exemplo, a relação de uma pessoa com a noção de ensinar pode ser modificada quando ela assume a posição de professor/a em uma escola, para que ela se adeque às condições e restrições que o contexto que a escola impõe.

A relação pessoal nunca é perfeitamente igual à relação da posição que a pessoa ocupa com o objeto, contudo, espera-se, pela instituição, que um bom sujeito que ocupa uma posição institucional tenha uma relação pessoal em boa conformidade com a relação esperada por ela para a posição que a pessoa ocupa. Em um sistema educacional, por exemplo, construímos, implícita ou explicitamente, uma relação desejada com o conceito de energia para a posição de aluno/a. Com base nisso, avaliamos se uma pessoa, na posição de aluno/a, construiu, durante as atividades de ensino, a relação desejada, ou seja, avaliamos, na posição de professor/a, se a relação construída pela pessoa está em conformidade com a relação esperada para quem está na posição de aluno/a.

Para exemplificar a conformidade das relações, podemos pensar na relação de um/a astrofísico/a com o conhecimento sobre estrelas. As relações que ele/a tem com o conhecimento sobre as estrelas são construídas ao longo da sua vida pessoal, escolar e acadêmica. Se ele/a se sujeita à posição de pesquisador/a em uma universidade (sujeitar-se, na TAD, é assumir uma posição em uma instituição), espera-se que a sua relação pessoal com as estrelas esteja em conformidade com a relação que se espera de um/a pesquisador/a em uma universidade com as estrelas, que é diferente, por exemplo, da relação esperada para quem se sujeita à posição de um/a instrutor/a em um curso de astrologia. É importante notar que é possível que uma mesma pessoa assuma duas posições em instituições divergentes (universidade e curso de astrologia, por exemplo), mas essa pessoa, quando se sujeita nessas duas instituições, assume relações distintas com os objetos, ou seja, toma uma relação em conformidade com a sua posição institucional.

Destaca-se aqui que as relações com os objetos também mudam ao transitar entre instituições e posições: espera-se uma relação diferente com um objeto de conhecimento para diferentes posições em diferentes instituições. Dessa forma, podemos classificar, de acordo com a TAD, o conhecimento, ou o saber como originalmente proposto, de quatro formas: i. *o conhecimento de referência* (originalmente proposto como *saber sábio*), é aquele que, no caso da Física, é produzido pela ciência e geralmente se apresenta em artigos e revistas científicas; ii. *o conhecimento a ser ensinado* (saber a ser ensinado), é aquele que sofre modificações pela sociedade e instituições de ensino de forma a ser legitimado pelo sistema educacional para se encontrar em componentes curriculares e livros didáticos; iii. *o conhecimento ensinado* (saber ensinado), é aquele que sofre modificações por parte do professor no processo de ensino-aprendizagem, para que ele se adeque às suas metodologias de ensino; e, apesar de não ser foco de estudos e investigação da TAD, ainda é possível classificar o conhecimento em iv. *conhecimento aprendido* (saber aprendido), que é a relação que o estudante assume com o conhecimento.

Essas modificações que um conhecimento pode sofrer são produto das transposições didáticas do conhecimento de referência para o conhecimento ensinado. Chevallard (2019) argumenta que essa transposição do conhecimento inevitavelmente demandará transformações, mas essas transformações não devem deturpar o conhecimento, promovendo a perda do seu sentido. Ainda assim, o conhecimento transposto não deve ser igual ao conhecimento de referência, uma vez que a sua complexidade e extensão podem torná-lo inapreensível.

Dessa forma, Chevallard (1991) elenca algumas transformações pelas quais o conhecimento de referência passa para alcançar o *status* de conhecimento a ser ensinado. A primeira é a *descontextualização*, que ocorre quando há um desligamento do conhecimento ensinado dos problemas originais que deram sentido à criação do conhecimento de referência, como, por exemplo, as leis de movimento de Newton, que surgem para fundamentar o movimento de corpos celestes no *Principia*, de Newton, e, costumeiramente, não são apresentadas nesse contexto. A segunda é a *despersonalização*, que ocorre quando há um desvinculamento do conhecimento ensinado dos sujeitos que geraram o conhecimento de referência como, por exemplo, a equação da segunda lei de Newton que é proposta, na verdade, por Euler. A *dessincretização* ocorre quando o conhecimento de referência é fragmentado em unidades delimitadas para a organização sistemática do conhecimento como, por exemplo, a Quantidade de Movimento, que geralmente é apresentada aos estudantes algumas unidades didáticas posteriores após as leis de Newton, sendo que estas, originalmente, se sustentam neste conceito.

Essas transformações, que ocorrem durante o processo de transposição didática, são sujeitas às condições e às restrições impostas pelo que Chevallard (2019) chama de níveis de co-determinação didática. No nível mais inferior temos o *sistema didático*, que engloba uma tríade composta por quem ensina, quem aprende e pelo objeto de conhecimento estudado. Este sistema é aberto, suscetível ao meio em que se encontra. A consciência sobre as transformações que ocorrem no conhecimento é chamada de *consciência didática*, e esta se fecha subjetivamente conforme a autonomia relativa do sistema didático (Chevallard, 1991). Logo acima do sistema didático, temos o nível de co-determinação da *pedagogia* empregada no sistema didático, e, um nível acima, temos a *escola* como instituição. Pode-se estender esses níveis para níveis mais elevados, pois as escolas estão sob o guardachuva do nível da *sociedade*, que está sob o nível da *civilização*, que está abaixo do nível da *humanidade* (Chevlallard, 2019).

Neste trabalho, temos a intenção de mapear essas transformações e quais desses processos ocorrem no conhecimento. Para tal, nos voltamos a uma subteoria da TAD, a teoria praxeológica, que descreve como se dá a relação de uma pessoa com o conhecimento.

### 2.1.1 Teoria Praxeológica

Qualquer atividade que uma pessoa tenha que realizar estará intimamente conectada com o seu universo cognitivo, ou seja, pelas suas relações com os objetos mobilizadas para realização da sua tarefa. Este é um dos princípios da Teoria Praxeológica proposta por Chevallard (2019). Para o autor, essas relações podem ser representadas pelo que ele chama de Organização Praxeológica, que são estruturas constituídas por um bloco prático – constituído de tarefas e técnicas – e um bloco teórico – constituído de tecnologias e teorias.

Uma atividade é realizada por uma *pessoa* que ocupa uma *posição* em uma *instituição* através de uma sequência de tarefas – como um passo-a-passo – as quais pertencem a um *Tipo de Tarefa*, ou simplesmente, *Tarefa*, que usualmente são expressas por meio de verbos, como, por exemplo, “resolver uma equação de segundo grau”, que envolverá uma série de tarefas para alcançar o resultado. A sequência de tarefas para atingirmos nosso objetivo de resolver uma equação de segundo grau através da fórmula quadrática pode ser determinada como “identificar os coeficientes”, “substituí-los na fórmula”, “fazer as operações matemáticas de potência, multiplicação e soma”, e assim por diante.

A realização regular de um tipo de tarefa em uma instituição culmina em “uma forma de realizá-lo”, a qual é denominada *Técnica*, que eventualmente será institucionalizada. Ela também, costumeiramente, inicia por um verbo. No nosso exemplo, pode-se identificar a Técnica como “aplicar a fórmula quadrática”, ou ainda, “aplicar o método de completar quadrados”. O Tipo de Tarefa e a Técnica formam um par que fundamenta o Bloco da Prática (ou *Praxis)*, que corresponde ao “know-how” de um objeto de conhecimento, o qual, se for dominado, pode ser chamado de habilidade.

Para que uma atividade seja realizada por meio de uma tarefa e uma técnica associada, existe uma razão, uma justificativa para que essa *Praxis* seja aplicada. A justificativa em questão está ancorada em um discurso, que pode variar nas diferentes posições de diferentes instituições. Este é denominado *Tecnologia*, ou Justificativa Tecnológica ou Discurso Tecnológico. Ela irá explicar as razões pela qual a Técnica empregada consegue realizar um determinado Tipo de Tarefa. No exemplo explorado, existe um discurso que justifica o uso da fórmula quadrática $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ para obter os valores para *x* que satisfazem a equação quadrática na forma geral $Ax^2 + Bx + C = 0$; em um texto, o discurso pode descrever a dedução a qual leva essa equação a chegar naquela.

Por fim, o conjunto de noções comuns que modelam os discursos tecnológicos é conhecido como *Teoria*, o maior nível de organização da atividade humana. No nosso exemplo, a Teoria utilizada é a Álgebra. A Teoria, na praxeologia, é um discurso que pode gerar, controlar, justificar e tornar compreensível um dado conjunto de discursos tecnológicos. O par Tecnologia e Teoria formam o *Bloco Teórico*, o qual corresponde ao que “se sabe” sobre. Todo Bloco Prático está associado a um Bloco Teórico; quando os associamos, formamos, então, a *Estrutura Praxeológica* ou *Organização Praxeológica* de uma atividade humana. Dessa forma, é possível descrever em detalhes a relação de uma pessoa com um objeto (Chevallard, 2019).

É importante observar que essa estrutura praxeológica é suscetível às transformações que acontecem durante uma transposição didática em um sistema didático. A falta de consciência dessas transformações pode causar uma monumentalização do conhecimento, isto é, um conhecimento desvinculado da sua razão de ser. Esse processo é natural na transposição didática, pois:

> “O sistema didático não existe exceto para ser compatível com seu entorno; e esta compatibilização passa por uma diminuição da consciência do entorno por parte dos agentes do sistema. [...] O saber que a transposição didática produz será, assim, um saber exilado das suas origens e cortado de sua produção histórica na esfera do saber acadêmico; legitimando-se como saber ensinado pelo fato de não ser de nenhum tempo, nem de nenhum lugar, e de não se legitimar pelo recurso da autoridade de um produtor, seja ele qual for” (Chevallard, 1991. p. 18).

Por isso, se faz necessário o exercício da vigilância epistemológica na transposição didática, ou seja, é preciso adequar os processos de transposição, questionar-se porque algo é ensinado ou não, e ainda identificar restrições e condições, pois a vigilância epistemológica:

> "[...] é uma ferramenta que permite reconsiderar, distanciar-se, interrogar as evidências, questionar ideias simples e livrar-se da familiaridade enganosa do objeto de estudo. [...] É um dos instrumentos da ruptura que a didática deve exercer para constituir seu próprio domínio" (Chevallard, 1991. p. 16).

Uma forma de realizar esse exercício com base na TAD é analisar a estrutura praxeológica das atividades relacionadas a um domínio de uma disciplina. Durante esta análise, inevitavelmente descreveremos um conhecimento sobre aspectos do mundo e como esse conhecimento é produzido e validado. Na TAD, esta descrição é conhecida como Modelo Epistemológico (Gáscon; Nicolas, 2022). Um Modelo Epistemológico é dependente das Instituições onde aquele conhecimento é difundido. É por essa razão que ele integrará um Paradigma Didático de uma Instituição. Nesta linha, há dois tipos de Modelos Epistemológicos: o Modelo Epistemológico de Referência, que representa o conjunto de princípios fundamentais de uma disciplina, incluindo seus conceitos, metodologias e formas de raciocínio; e o Modelo Epistemológico Vigente, que representa uma interpretação e aplicação na prática educacional, influenciada pelos contextos sociais, culturais e institucionais que aquele conhecimento está inserido.

Em nosso trabalho, delinearemos um Modelo Epistemológico de Referência em torno da Equação de Schrödinger e as suas praxeologias no contexto dos originais de Schrödinger. Delinearemos, também, Modelos Epistemológicos de Referência no contexto de livros didáticos e como estes dois Modelos Epistemológicos se afastam ou se aproximam entre si a partir da análise das estruturas praxeológicas.[1]

## 2.2 A NOÇÃO DE HIPÓTESE CIENTÍFICA

Em cada Bloco Teórico de um saber científico existe uma estrutura de hipóteses subjacente, pois os discursos que justificam um Bloco Prático vêm

---

[1] Na literatura, costuma-se investigar os Modelos Epistemológicos de Referências pela exploração das praxeologias subjacentes ou por perguntas e respostas que seguem o esquema herbartiano. Optou-se pela primeira opção, pois deseja-se evidenciar os discursos tecnológicos que sustentam as práticas subjacentes à Equação de Schrödinger.

carregados de afirmações a respeito da realidade, que se relacionam diretamente com o contexto em que aquele objeto de conhecimento é difundido. Como o conceito de *hipótese* é polissêmico na literatura e depende das visões de Natureza da Ciência dos pesquisadores e filósofos da Ciência, tomaremos como base a noção proposta por Lima e Heidemann (2023).

Os autores procuram contribuir para um ensino de Física que promova concepções não ingênuas, por parte dos estudantes, sobre a Natureza da Ciência, em que questões epistêmicas e sociais sejam mobilizadas sem perder o foco de aspectos conceituais e matemáticos subjacentes às teorias e objetos de conhecimento que são caros ao desenvolvimento do pensamento científico. Com essa perspectiva, Lima e Heidemann (2023), cientes de outras propostas de classificação de hipóteses, propõem uma forma de analisar a estrutura de hipóteses em um texto ou discurso com fins didáticos, a qual pode possuir um valor em um processo de investigação histórica. Em virtude da natureza desse trabalho, essa proposta se mostra adequada para amparar a análise das organizações praxeológicas, em especial, os blocos teóricos de um conhecimento.

Lima e Heidemann (2023) se inspiram nas definições de hipótese de Poincaré (2024), Giere (1987), Abbagnano (2007) e de Bunge (2005), afirmando que todas as afirmações científicas gerais, ou seja, afirmações que vão além do conteúdo empírico da Ciência, são hipóteses. As hipóteses, portanto, abarcam mais do que os dados sugerem ou confirmam. A afirmação, por exemplo, de que “a luz se comporta como uma onda” é uma hipótese na medida que envolve uma assunção sobre qualquer luz (é uma afirmação geral) e sobre uma relação teórica que vai além dos dados empíricos (a relação da luz com seu comportamento ondulatório). Na Ciência, portanto, se contrastam empiricamente as instanciações das hipóteses, e não elas propriamente. Por exemplo, se a luz se comporta como uma onda, os experimentos que evidenciam a interferência da luz (um evento tipicamente ondulatório) dão suporte empírico à hipótese de que ela possui comportamento ondulatório, ou seja, esses experimentos são instanciações (“consequências”) da hipótese de que a luz se comporta como uma onda.

Ao encontro dessa concepção, pode-se afirmar que um cientista cria hipóteses no processo da construção, uso e validação de modelos científicos, que são representações carregadas de idealizações e simplificações dos objetos/eventos representados. A categorização de hipóteses de Lima e Heidemann (2023) busca explorar o processo de criação científica, evidenciando o caráter social do fazer científico.

Segundo essa categorização, as hipóteses são classificadas de acordo com a sua *natureza* e de acordo com o seu *papel lógico* na organização da teoria. Quanto à natureza, ela se divide em três grupos: as hipóteses *cosmovisivas*, *ontológicas* e *representacionais.* As hipóteses *cosmovisivas* se pronunciam com afirmações metafísicas e epistemológicas, descrevendo, assim, como a realidade deve ser e qual a relação do indivíduo com essa realidade. As teorias científicas englobam concepções a respeito do conhecimento e da realidade que se comprometem com valores éticos, políticos e estéticos. Um exemplo de hipótese cosmovisiva é “Existe uma realidade objetiva” ou “A Matemática é a fonte mais confiável de conhecimento” (Lima; Heidemann, 2023). Hipóteses *ontológicas* fazem afirmações a respeito da natureza e do comportamento dos entes físicos descritos pelo modelo ou teoria, como, por exemplo, o já citado exemplo de que “a luz se comporta como uma onda” ou “a Terra é o centro do Universo”. As hipóteses *representacionais* fazem traduções dos entes físicos para que estess sejam modelados dentro da teoria; são as simplificações e idealizações do objeto/evento investigado, são considerações sobre o que será considerado ou desprezado na modelagem, para que os resultados possam ser mais frutíferos no estudo realizado. Exemplos de hipóteses representacionais são “a massa é pontual”, pois, apesar de sabermos que um corpo que possui massa também possui dimensões, entende-se que, em um dado modelo, poderíamos desprezar estas dimensões, representando-o como um corpo pontual, ou massa pontual.

Quanto ao papel lógico, uma hipótese também pode ser de três tipos. A forma como a classificamos depende de como ela se encontra na estrutura da produção do conhecimento, em que momento da derivação das ideias essa hipótese se encontra. Se a hipótese é assumida no início da descrição de uma teoria, ela é classificada como uma hipótese *a priori*; quando a hipótese é adicionada ao longo do trabalho para sustentar a resolução de problemas, a classificamos como uma *hipótese posterior*. Os autores sugerem que essas hipóteses podem ser classificadas como de segunda ordem, terceira ordem ou ordens mais elevadas. Neste trabalho, não iremos diferenciar as *hipóteses posteriores* dessa forma, uma vez que não nos trará vantagens adicionais para descrever as hipóteses na organização praxeológica. Por fim, as hipóteses finais, que são derivadas das iniciais e das posteriores, são classificadas como *hipóteses derivadas*.

Lima e Heidemann (2023) alertam para o fato de que uma hipótese que se encontra em mais de um texto e/ou discurso pode ser classificada de forma diferente em cada contexto. Neste trabalho, prestar atenção nestes detalhes se faz necessário para o seu objetivo, pois se pode notar como o conhecimento é transformado conforme os processos de transposição didática ocorrem, favorecendo, assim, o exercício da vigilância epistemológica.

## 2.3 HISTORIOGRAFIA E O ENSINO DE FÍSICA

Compreender o funcionamento da atividade científica e reconhecer a Ciência como um empreendimento complexo e social, e não como um produto finalizado e imutável, integram parte de uma noção adequada da Natureza da Ciência (NdC). Um ensino de física voltado para discussões de História e Filosofia da Ciência tem se mostrado uma abordagem importante para a adequação de noções sobre a NdC (McComas, Almazroa, Clough, 1998 e McComas, 2008), visto que, por este viés, há um questionamento constante sobre a importância e desenvolvimento de um objeto de conhecimento.

Tendo em vista que a historiografia é um estudo importante para favorecer a adequação de noções da NdC, e que toda a historiografia é feita a partir de um ponto de vista particular e que produz, portanto, interpretações características do ponto de vista assumido (Pietrocola *et al*, 2020), Lima e Karam (2022) propõem categorias baseadas na literatura para utilizar a História da Física em propostas didáticas. A primeira proposta é uma perspectiva internalista à Ciência, onde são trabalhados a construção e evolução de conceitos científicos como parte de um processo histórico; a segunda proposta é uma abordagem historiográfica que enfatiza a ciência como uma prática social e evidencia como ela afeta a esfera social e tecnológica; enquanto o terceiro grupo é uma visão não-estruturalista, a qual discute o papel de instrumentos materiais, comunidades, personagens esquecidos e práticas no desenvolvimento da Ciência. Dada a natureza desta dissertação, ela se aproxima da primeira proposta, dado que iremos focar nos conceitos subjacentes à Mecânica Quântica e como eles se transformam em uma transposição didática, ainda que tenhamos explorado, em alguns momentos, o contexto de produção das hipóteses nas quais Schrödinger se inseria.

Pietrocola *et al* (2020) advertem alguns cuidados que se deve ter ao inserir, em um contexto educacional, uma abordagem baseada na História da Ciência. Neste sentido, existem dois compromissos importantes que eles chamam atenção: a historiografia e a transposição didática. O compromisso com a historiografia se dá com os cuidados com distorções históricas, cuja principal distorção que destacamos é o anacronismo, quando ocorre o julgamento de eventos históricos se dá por valores, ideias e crenças de outras épocas. Abordagens anacrônicas em narrativas históricas podem levar à linearidade e à despersonalização de cientistas antecessores, levando a uma crença de infalibilidade da Ciência desconectada de qualquer influência humana e social. O compromisso com a transposição didática se faz importante também, pois é nos processos de transposição didática que podem ocorrer a dessincretização, a despersonalização e a descontextualização de um conhecimento para que ele possa se tornar um conhecimento a ser ensinado, e, assim, se encontrar em livros didáticos. Neste sentido, para que ambos os compromissos sejam atendidos, os autores propõem o exercício da Vigilância Epistemológica do conhecimento, focando nos riscos e buscando soluções para maximizar os ganhos educacionais.

Para Pietrocola *et al* (2020), é impossível produzir um conteúdo de aprendizagem que atenda completamente os determinantes historiográficos e didáticos, se fazendo necessário o exercício da vigilância epistemológica voltada para uma análise histórica, a qual pode revelar aspectos escondidos e adulterados pelos processos de transposições didáticas. Os autores acreditam que trabalhos que realizem estas análises podem preparar professores menos ingênuos e mais vigilantes sobre os componentes curriculares que deve ser ensinado. Nesta dissertação, tem-se a intenção de ir ao encontro disso.

# 3 METODOLOGIA

Com a intenção de favorecer o exercício da vigilância epistemológica por meio de uma análise histórica focada no desenvolvimento de conceitos da Mecânica Quântica, a metodologia utilizada nesta dissertação é delinear Modelos Epistemológicos de Referência no contexto dos originais de Schrödinger e em livros didáticos de Mecânica Quântica utilizados em cursos de graduação. Para delinear estes Modelos Epistemológicos de Referência em torno da Equação de Schrödinger, o trabalho se vale do uso da análise das organizações praxeológicas (Chevallard, 2019) que levam à dedução de sua equação em diferentes textos. Assim, durante a análise do texto, são identificados os tipos de tarefas, as técnicas empregadas, os discursos tecnológicos e as teorias envolvidas, de acordo com os objetivos finais para deduzir a Equação de Schrödinger.

Como o bloco teórico se fundamenta em hipóteses, e elas podem sofrer transformações de acordo com o contexto em que elas se inserem, é utilizado a categorização de Heidemann e Lima (2023) para estruturar as hipóteses dentro do texto. Elas são identificadas e classificadas tanto por sua natureza (Cosmovisiva, Ontológica e Representacional), quanto por seu papel lógico (*A priori*, Posterior e Derivada).

Para cada texto, será confeccionada uma tabela que descreve a estrutura praxeológica das atividades presentes no texto e uma outra tabela que descreve as estruturas de hipóteses presentes no bloco teórico. Com estas tabelas, teremos um recurso que será utilizado para comparar as estruturas praxeológicas entre os textos originais e os textos dos livros didáticos, e, assim, podemos analisar os processos de transposição didática (Dessincretização, Descontextualização e Despersonalização) que ocorreram entre o saber referência e o saber a ser ensinado. A dessincretização é identificada quando o conhecimento é fragmentado para uma organização lógica dentro do texto, enquanto que a descontextualização é identificada quando as motivações que geraram aquele conhecimento são diferentes dos originais, e, por fim, a despersonalização é quando os personagens são desvinculados do conhecimento ao qual eles deram origem.

Duas das fontes primárias analisadas são *Quantisation as a Problem of Proper Values (Part I)* (Schrödinger, 1926a) e *Quantisation as a Problem of Proper Values (Part II)* (Schrödinger, 1926b), em que, pela primeira vez, é proposta uma equação que generaliza a obtenção de níveis de energia de sistemas quânticos, como o átomo de hidrogênio, e onde há, também, uma discussão do desenvolvimento da Mecânica Ondulatória, a qual justifica a origem da equação de Schrödinger. Outro texto analisado é o primeiro capítulo das *Four Lectures on Wave Mechanics* (Schrödinger, 1928), onde ele faz uma transposição para instruir sobre os novos conceitos da Mecânica Ondulatória. Também analisamos livros didáticos utilizados em cursos de Mecânica Quântica de graduação nos limitando aos capítulos que introduzem a Equação de Schrödinger e os conceitos que a fundamentam. A escolha dos livros se baseia no trabalho de Vazata *et al* (no prelo) que, ao buscar livros didáticos para analisar em seu estudo, se depara com oito títulos amplamente utilizados em cursos de Mecânica Quântica de graduação e pós-graduação de Física em algumas importantes universidades de cada uma das cinco regiões do Brasil: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Universidade de São Paulo, Universidade Federal do Pará, Universidade Brasília e Universidade do Cariri. Os livros didáticos são: *Quantum Mechanics* (Cohen-Tannoudji, 1991), *Física Moderna* (Caruso; Oguri, 2006), *Quantum Physics* (Eisberg; Resnick, 1985), *Introduction to Quantum Mechanics* (Griffiths, 2005), *Quantum Physics* (Gasiorowicz, 2003), *Quantum Mechanics* (Merzbacher, 1998), *Quantum Mechanics* (Messiah, 1961), *Modern Quantum Mechanics* (Sakurai, 1994). Na análise, os livros didáticos são organizados em ordem cronológica de publicação.

# 4 RESULTADOS

Nesta seção, são apresentadas as tabelas das estruturas praxeológicas e das estruturas de hipóteses presentes nos textos selecionados para análise das fontes primárias e dos livros didáticos, juntamente com os textos que discutem ambas estruturas. Na última subseção, é discutido os processos da transposição didática que acontecem nos livros didáticos com base nas tabelas das estruturas.

## 4.1 FONTES PRIMÁRIAS

Nesta seção, são apresentadas as análises das fontes primárias escritas por Schrödinger (1926a e 1926b), especificamente de dois artigos, *Quantisation as a Problem of Proper Values (Part I)* e *Quantisation as a Problem of Proper Values (Part II)*, contidos em uma coletânea de artigos conhecida como *Collected Papers*; e de um texto de aula de Schrödinger (1928), no qual o conhecimento já passou por um processo de didatização.

### 4.1.1 Collected Papers – Quantisation as a Problem of Proper Values Part I – Schrödinger (1926a)

Para organizar a análise do artigo, as tabelas 1 e 2 apresentam, respectivamente, a organização praxeológica identificada pelo autor desta dissertação e a estrutura de hipóteses mobilizada no texto. Em seguida, expomos os elementos que dirigiram a construção dessas tabelas.

Tabela 1 – Organização praxeológica do texto Quantisation as Problem of Proper Values Part I – Schrödinger (1926a)

| Tipo de Tarefa | Técnica | Tecnologia | Teoria |
|---|---|---|---|
| Obter uma equação que generalize as regras de quantização | Submeter a Equação de Hamilton-Jacobi (EHJ) correspondente ao sistema a um princípio variacional, com a mudança de variável $S = K.ln(\psi)$ | A aplicação de um princípio variacional na EHJ retorna uma equação semelhante à equação de onda | Mecânica Analítica; Ondulatória |

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 2 – Estrutura de Hipóteses do texto Quantisation as Problem of Proper Values Part I – Schrödinger (1926a)

| Hipóteses | Cosmovisivas | Ontológicas | Representacionais |
|---|---|---|---|
| A priori | Esta nova concepção, capaz de generalização, atinge profundamente a verdadeira natureza das regras quânticas | | As condições quânticas são substituídas por um problema variacional |
| Posteriores | | A equação diferencial retorna uma função $\psi$ para qualquer valor positivo de energia, mas retorna a função $\psi$ apenas para valores discretos de energia | A função-ação *S* deve ser tal que $S = K.ln(\psi)$ |
| | | | A função $\psi$ é obtida de forma que a integral em todo espaço da expressão $H\left(q,\frac{K}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - E$ seja estacionária |
| Derivadas | | A função $\psi$ sugere fortemente que está conectada a um processo vibracional no átomo. É mais agradável imaginar que absorções e emissões decorrem de uma mudança de padrão de vibração do que de um salto de órbita | A constante K deve ser igual a constante de Planck reduzida ($\frac{h}{2\pi}$), para que os níveis de energia sejam iguais aos obtidos por Bohr e para que tenha a unidade de medida de ação |

Fonte: elaborada pelo autor

No artigo *Quantisation as a Problem of Proper Values (Part I)*, Schrödinger (1926a) se debruça sobre a tarefa de obter uma descrição generalizada de sistemas microscópicos de forma que a quantização das grandezas físicas do sistema, como energia e *momentum*, apareça naturalmente. Com essa descrição, ele pode se debruçar em sua próxima tarefa, que é obter os níveis de energia do elétron no átomo de

Hidrogênio. Para alcançar o objetivo traçado, o autor, inicialmente, preocupa-se em substituir as condições quânticas (vale ressaltar que Schrödinger não menciona o que são as condições quânticas; supomos, assim, que ele se refere à regra de quantização de Bohr da “velha” Mecânica Quântica, onde as variáveis de ação são iguais a um múltiplo da constante de Planck reduzida $J = \oint p_i dq_i = n\hbar$), por uma equação de onda em que essas regras já estejam incluídas em sua solução, como fica claro no que segue:

> “Neste artigo, desejo considerar, primeiro, o caso simples do átomo de hidrogênio (não-relativístico e não-perturbado), e mostrar que as condições quânticas habituais possam ser substituídas por outro postulado, no qual a noção de “números inteiros”, meramente tal qual, não é introduzida. Em vez disso, quando a integralidade aparece, eles surgem da mesma forma natural que no caso dos modos de uma corda vibrante" (Schrödinger, 1926a, p. 1. Tradução nossa).

A técnica utilizada por ele para realizar a primeira tarefa, neste artigo, é aplicar a Equação de Hamilton-Jacobi (EHJ) correspondente do sistema em um problema variacional, para que, dessa forma, ele possa obter uma equação semelhante à equação de onda, pois, nessa última, podemos obter modos normais de vibração de uma corda unidimensional, com as condições de contorno adequadas.

O discurso tecnológico que justifica essa técnica pode ser controverso, como o próprio autor admite em artigo posterior, pois se utiliza de justificativas matemáticas ininteligíveis:

> “Até agora, nós apenas descrevemos brevemente esta correspondência [entre a Equação de Hamilton-Jacobi e a Equação de onda “aliada”] pelo lado analítico externo pela transformação [$S = K.\, ln(\psi)$], que é por si só ininteligível e pela igualmente incompreensível transição de uma igualdade a zero de uma certa expressão a um postulado que a integral espacial de tal expressão seja estacionária" (Schrödinger, 1926b, p. 13. Tradução nossa).

Apesar disso, como uma hipótese cosmovisiva *a priori*, Schrödinger (1926a) acredita que esta generalização seja capaz de atingir profundamente a verdadeira natureza das regras quânticas. A sua tecnologia está ancorada na hipótese representacional *a priori* de que um problema variacional da EHJ do sistema irá substituir as condições quânticas de Bohr-Sommerfeld (Schrödinger, 1926a). Considerando que a Equação de Hamilton-Jacobi é dada por:

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)=E \quad ,$$

onde *H* é a hamiltoniana do sistema, *q* é o conjunto de coordenadas generalizadas, *S* é a função-ação do sistema, *E* é a energia do sistema e $\frac{\partial S}{\partial q}$ retorna o *momentum* generalizado, ele lança mão, então, de uma hipótese representacional posterior, $S = K.ln(\psi)$, onde K é uma constante com unidade de medida de ação, para que a EHJ possa ser escrita por separação de variáveis através da multiplicação ($\psi(q_1,q_2,\ldots,t) = \psi_1(q_1).\psi_2(q_2).\ldots.\phi(t)$), como costumamos resolver uma equação de onda, ao invés da soma ($S(q_1,q_2,\ldots,t)=S_1(q_1)+S_2(q_2)+\cdots+T(t)$), como usualmente é feito para resolvermos a Equação de Hamilton-Jacobi. Uma hipótese representacional posterior presente em seu texto é que a função $\psi$ é obtida para que a integral em todo espaço da nova EHJ ($H\left(q,\frac{K}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)-E=0$) seja estacionária para variações arbitrárias de $\psi$ (Schrödinger, 1926a). É neste ponto que Schrödinger admite que a sua formulação de submeter uma equação diferencial de $\psi$ a um problema variacional não é completamente inequívoca, pois ele já poderia resolvê-la para obter essa função na forma quadrática.

> “Nós, agora, buscamos por uma função ψ de forma que, para qualquer variação arbitrária da integral da referida forma quadrática, tomada por todo o espaço de coordenadas (estou ciente de que esta formulação não é completamente inequívoca), seja estacionário [...]. As condições quânticas são substituídas por esse problema variacional" (Schrödinger, 1926a, p.2. Tradução nossa).

Contudo, a equação na forma quadrática, i.e., $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2-\frac{2m}{K^2}(E-V)\psi^2=0$, não retornaria as grandezas físicas quantizadas que Schrödinger busca. Ele entende que a equação diferencial deve retornar uma função $\psi$ para qualquer valor positivo de E, enquanto que, para valores negativos de E, a função $\psi$ deve ser obtida apenas para um conjunto discreto, que consideramos como uma hipótese ontológica posterior, pois essas soluções devem concordar com os espectros discretos:

> "O problema variacional acima possui um espectro contínuo e discreto de autovalores. O espectro discreto corresponde aos termos de Balmer e o contínuo, às energias das órbitas hiperbólicas" (Schrödinger, 1926a, p.2. Tradução nossa).

O autor, então, desenvolve a nova EHJ, utilizando o potencial kepleriano para a força eletrostática $V(r) = \frac{-e^2}{r}$, já visando a sua próxima tarefa, que é obter os níveis de energia do elétron no átomo de Hidrogênio:

> "Sendo arbitrária a escolha de coordenadas na formação da equação variacional, tomamos as coordenadas cartesianas. Então $H\left(q, \frac{K}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right) = E$ se torna, no nosso caso,
>
> $$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi^2 = 0$$
>
> e = carga, m = massa de um elétron. $r^2=x^2+y^2+z^2$
>
> Nosso problema variacional então se torna
>
> $$\delta J = \delta \iiint dxdydz \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi^2 = 0$$
>
> Com a integral sendo tomada em todo o espaço. Disso obtemos na forma usual:
>
> $$\frac{1}{2}\delta J = \int df \frac{\partial\psi}{\partial n}\delta\psi = \iiint dxdydz\delta\psi\left[\nabla^2\psi + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\right] = 0\text{"}$$
>
> (Schrödinger, 1926a, p.2. Tradução nossa).

Schrödinger, sendo pragmático na resolução do problema, omite alguns passos para obter a equação que resolverá o problema das energias possíveis de um elétron no átomo de Hidrogênio. Esses passos são desenvolvidos no Apêndice A. Em seu texto, Schrödinger não detalha este formalismo do Cálculo Variacional e da Teoria de Campos; apenas introduz a equação:

$$\frac{1}{2}\delta J = \int df \frac{\partial\psi}{\partial n}\delta\psi - \iiint dxdydz\left[\nabla^2\psi + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\right]\delta\psi = 0\ ,$$

onde $df$ é um elemento infinitesimal da superfície fechada infinita, e $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ é a componente do gradiente normal a esse elemento. Finalmente, Schrödinger obtém duas equações para que a integral J seja estacionária:

$$\int df \frac{\partial\psi}{\partial n}\delta\psi = 0 \ ,$$

e

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right) = 0 \ .$$

A primeira equação remete a uma condição do que deve ocorrer no infinito para a função $\psi$, segundo o próprio autor, que será útil para garantir a existência da função para o caso das energias positivas (estados não-ligados). A segunda equação é a utilizada para a próxima tarefa e técnica contida no artigo, que é resolver a equação diferencial para obter os níveis de energia do hidrogênio para o estado ligado, as quais Schrödinger encontra como sendo:

$$E_l = \frac{-me^4}{2K^2l^2} \ ,$$

onde $E_l$ é a energia do nível discreto *l*, *m,* a massa do elétron, e *e,* a carga elementar.

A tecnologia que justifica essa técnica é que a equação diferencial obtida, $\nabla^2\psi + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right) = 0$, retorna valores discretos para energias negativas (estados ligados), além de retornar os mesmos resultados conhecidos e bem estabelecidos pelo modelo de Bohr.

Para que esta energia seja a mesma encontrada por Bohr, Schrödinger postula, como hipótese representacional derivada, que a constante K deve ser igual a $\frac{h}{2\pi}$, onde *h* é a constante de Planck. Dessa forma, a energia do nível discreto *l* é dada por:

$$E_l = \frac{-2\pi^2me^4}{h^2l^2} \ .$$

Ao final do artigo, o autor entende que a função $\psi$ deve estar fortemente relacionada com algum *processo vibracional* dentro do átomo. Esta é uma hipótese ontológica derivada a respeito do comportamento do átomo, pois

> "É indispensável enfatizar o quanto mais agradável seria imaginar que uma transição quântica de energia decorre de uma mudança na forma de vibrar para outra, do que um elétron que salta. A mudança na forma vibracional

> pode ocorrer continuamente no espaço e tempo, e pode facilmente durar tanto quanto um processo de emissão” (Schrödinger, 1926a, p.10-11. Tradução nossa).

Este texto desenvolve muito pouco as razões pela qual a Equação de Schrödinger se adequa ao problema de partículas quânticas e o autor é muito direto na dedução da equação. Por esta razão, identificamos uma organização praxeológica pouco desenvolvida, diferente do que ocorre na parte 2, continuação deste artigo, como será analisado na próxima subseção.

#### 4.1.2 Collected Papers – Quantisation as a Problem of Proper Values Part II – Schrödinger (1926b)

Assim como nas outras subseções de resultados, para organizar a análise do artigo, as tabelas 3 e 4 apresentam, respectivamente, a organização praxeológica identificada e a estrutura de hipóteses presentes no texto.

Tabela 3 - Organização praxeológica do texto Quantisation as Problem of Proper Values Part II – Schrödinger (1926b)

| Tipo de Tarefa | Técnica | Tecnologia | Teoria |
|---|---|---|---|
| Descrever com maior detalhamento a relação entre a EHJ de um problema mecânico e a equação de onda “aliada” | Comparar a trajetória de um raio de luz e as ondas que a descrevem com a trajetória de uma partícula em um sistema mecânico | Existe uma semelhança matemática entre o princípio de Fermat e o princípio de Hamilton e entre o princípio de Huygens e a EHJ | Mecânica Analítica; Ondulatória e Óptica Geométrica |
| Mostrar que a solução da EHJ é uma família de superfícies que se move com o movimento da partícula | Igualar a solução da EHJ que pode ser dada como $W = -E.t + S(q_k)$ a uma constante $W_0$ | A superfície $W = W_0$ depende do tempo, portanto ela se move com velocidade $u = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}}$, e o *momentum* generalizado da partícula é perpendicular à superfície | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Representar a família de superfícies como fases de onda, tal qual no Princípio de Huygens | Calcular o comprimento de onda associado a essa família a partir das equações da ondulatória | A relação entre energia da partícula e a frequência do processo ondulatório permite associar um comprimento de onda às frentes de onda | |
| Relacionar o movimento da partícula com o movimento das superfícies | Utilizar uma lei de dispersão | Se a velocidade de fase depende da frequência da onda, então a velocidade de grupo é igual à velocidade da partícula | |
| Obter uma equação que descreva uma função que contenha os *verdadeiros* processos mecânicos | Utilizar as hipóteses sobre a velocidade de fase da família de superfícies na equação de onda | Deve-se descrever as características ondulatórias da partícula, ao invés de sua trajetória, assim como a ondulatória descreve fenômenos com maior sucesso em comparação à óptica geométrica | |

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 4 – Estrutura de Hipóteses do texto Quantisation as Problem of Proper Values Part II – Schrödinger (1926b)

| Hipóteses | Cosmovisivas | Ontológicas | Representacionais |
|---|---|---|---|
| A priori | Talvez a mecânica clássica esteja em completa analogia com a óptica geométrica, e tal qual não está de acordo com a realidade, pois falha quando as dimensões de caminho e de curvatura são comparáveis em grandeza com certo comprimento de onda | | O princípio variacional de Hamilton possui uma correspondência ao princípio de Fermat, enquanto a Equação de Hamilton-Jacobi expressa o princípio de Huygens para a propagação de frentes de onda |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Posteriores | Devemos proceder da equação de onda e não das formas das equações fundamentais da mecânica | O verdadeiro processo mecânico é representado por um processo ondulatório no espaço de configuração, e não pela trajetória da partícula no espaço | A solução da EHJ é a fase de um sistema de ondas |
| | | | O sistema de ondas se move com velocidade $u = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}}$ (considerada a velocidade de fase) |
| | | | A frequência do sistema de ondas pode ser obtida por E/h, onde E é a energia da partícula |
| Derivadas | | | O módulo do *momentum* pode ser obtido por $\frac{h}{\sqrt{2(E-V)}}$ |
| | | | A velocidade da partícula é inversamente proporcional à velocidade de fase e coincide com a velocidade de grupo da dispersão das ondas |
| | | | A equação de onda $div\ grad\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E-V)\psi = 0$ descreve os *verdadeiros* processos mecânicos |

Fonte: elaborada pelo autor

No artigo *Quantisation as Problem of Proper Values (Part II)*, a primeira tarefa identificada neste artigo é descrever com maior aprofundamento as relações existentes entre a EHJ e a equação de onda “aliada” (que conhecemos hoje como a Equação de Schrödinger), como é explicitado na introdução do artigo:

> “Antes de considerarmos problemas de autovalores para demais sistemas especiais, deixe-nos lançar mais luz sobre a correspondência geral que existe

> entre a equação diferencial de Hamilton-Jacobi de um problema mecânico e a equação de onda 'aliada'" (Schrödinger, 1926b, p. 13. Tradução nossa).

Ele admite que certas transições presentes em seu artigo anterior poderiam ser incompreensíveis, assim como pudemos notar na análise da seção anterior, mas que ainda assim, existe uma razão para que essas transições levassem a uma descrição correta, como evidenciado em nota de rodapé:

> "Este procedimento não será discutido mais no presente artigo. A intenção era apenas entregar um mapeamento rápido e provisório da conexão externa entre a equação de onda e a equação de Hamilton-Jacobi. [...] Por outro lado, a conexão entre a equação de onda e o problema variacional é, certamente, muito real; o integrando da integral estacionária é a função lagrangiana do processo ondulatório" (Schrödinger, 1926b, p. 13. Tradução nossa).

Schrödinger entende que existe uma comparação a ser feita entre a Mecânica Ondulatória e a Mecânica Clássica, da mesma forma que podemos fazer entre a Ondulatória e a Óptica Geométrica. Essa ideia se apresenta a ele pelas semelhanças matemáticas entre os Princípios de Fermat e de Hamilton: enquanto a primeira descreve a trajetória de um raio de luz, a segunda descreve a trajetória de uma partícula em um sistema mecânico. Outra razão, também, está calcada em uma hipótese cosmovisiva *a priori*, que diz respeito à falha da Mecânica Clássica ao tratar de trajetórias cujas dimensões e curvaturas sejam comparáveis a um certo comprimento de onda associado ao movimento, identificada na seguinte passagem:

> "Talvez esta falha seja uma analogia estrita com a falha da óptica geométrica, i.e. 'a óptica de comprimentos de onda infinitamente pequenos', que se torna evidente assim que os obstáculos ou fendas não são tão grandes comparados com o comprimento de onda finito e real. Talvez a nossa mecânica clássica seja a completa analogia com a óptica geométrica, e tal qual, está errada e em desacordo com a realidade; ela falha sempre que o raio da curvatura e as dimensões do caminho não são tão grandes quando comparados com certo comprimento de onda, o qual, no espaço de configuração, possui um real significado conectado" (Schrödinger, 1926b, p.18. Tradução nossa).

A técnica para poder se aprofundar nas relações entre a Mecânica Clássica e a Mecânica Ondulatória é comparar as trajetórias e as semelhanças matemáticas que elas guardam. O discurso tecnológico para tal comparação é que existe uma correspondência entre os princípios, por meio da correspondência entre a EHJ e o Princípio de Huygens para a propagação de uma onda. Esta é uma hipótese que classificamos como representacional *a priori* na estrutura do seu texto. A proposta fica evidenciada no seu segundo parágrafo:

> “A conexão interna entre a teoria de Hamilton e o processo de propagação de uma onda não é nada mais que uma ideia nova. Não era bem conhecida por Hamilton, mas serviu de ponto de partida da sua teoria da mecânica, na qual surgiu o seu Óptica de meios não-homogêneos. O princípio variacional de Hamilton pode ser apresentado como correspondente ao Princípio de Fermat para a propagação de uma onda no espaço de configuração (espaço q), e a equação de Hamilton-Jacobi expressa o Princípio de Huygens para a propagação de onda” (Schrödinger, 1926b, p. 13. Tradução Nossa).

Para iniciar o seu aprofundamento, Schrödinger realiza uma tarefa que é mostrar que a solução da EHJ é uma família de superfícies que se move com o movimento da partícula. A EHJ guarda, em sua estrutura, uma vantagem matemática para a Mecânica Clássica, uma vez que se pode obter as equações de movimento a partir da derivação em relação a termos de constantes do movimento de integrais completas. Uma forma de expressá-la é

$$\frac{\partial W}{\partial t} + T\left(q; \frac{\partial W}{\partial q}; t\right) + V(q) = 0 \ ,$$

onde W é a função-ação (usualmente denotada por S, mas Schrödinger a denota por W) tal que $W = W(q, \alpha, t)$, onde q são as coordenadas generalizadas, $\alpha$ , constantes de movimento, T, a energia cinética do sistema, e $\frac{\partial W}{\partial q}$ retorna o *momentum* generalizado. Importante notar que o princípio de Hamilton diz que $\delta W = \delta \int T - V dt$, expressão essa que busca extremar W.

A técnica para mostrar isso foi igualar a solução da EHJ, que pode ser dada ,de forma mais geral, como $W = -E.t + S(q_k)$, a uma constante $W_0$, onde S é uma função com dimensões de ação que dependa apenas das coordenadas generalizadas. Esta solução é obtida por separação de variáveis por meio de uma soma, onde E é, antes da energia do sistema, uma constante de integração da EHJ, neste formalismo. Dado que $\nabla W(q, \alpha, t)$ é o vetor *momentum* da partícula, podemos escrever a energia cinética em termos de W, para assim, chegarmos à conclusão que:

$$\nabla W = \sqrt{2(E-V)}$$ [2].

O discurso tecnológico subjacente a esse bloco prático é que, com essas duas características em mãos, podemos representar, para qualquer tempo t, uma família de superfícies na forma $W = W_0$, onde $W_0$ é uma constante, onde podemos classificar tal hipótese como representacional posterior. Essa construção se destaca geometricamente, pois, em qualquer ponto dessa curva, o vetor *momentum* é perpendicular a ela. Além do mais, a superfície $W = W_0$ depende do tempo. Isso significa que é uma família de curvas que se move no espaço de configuração q. Para Schrödinger, essa construção se assemelha muito à propagação das frentes de onda, descritas pelo Princípio de Huygens. A velocidade *u* com as quais as superfícies W se movem podem ser obtidas a partir da equação:

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}} .$$

Este é o módulo da velocidade das superfícies e a sua direção é normal à superfície $W_0$ devido à construção geométrica e relação com o *momentum* da partícula. Esta hipótese classificamos como uma hipótese representacional do movimento da partícula posterior na estrutura do texto. A trajetória dessa partícula, por essa razão, é ortogonal à superfície em que ela se encontra em um instante *t*. Essa trajetória é responsável por extremar a integral 2Tdt; esse é o princípio de Hamilton, na forma do princípio de Maupertuis. Ora, o princípio de Huygens e o princípio de Fermat guardam uma relação semelhante, e agora que conhecemos a velocidade das superfícies, pode-se mostrar que o princípio de Fermat e o princípio de Hamilton são equivalentes, pois:

$$\int \frac{ds}{u} = \int ds \frac{\sqrt{2(E-V)}}{E} = \frac{1}{E} \int 2T dt .$$

Neste ponto, Schrödinger lança mão de sua analogia e discute porque essa relação é importante, conforme segue:

> "Pois a ideia dos 'raios', os quais são o aspecto essencial na analogia mecânica, pertence à óptica geométrica [...]. E o sistema das superfícies-W,

---

[2] É importante notar que Schrödinger não se preocupa em explicitar a dependência da massa da partícula durante o desenvolvimento de sua equação. Supõe-se, assim, que a dependência da massa *m* esteja já inserida nas expressões de energia total, cinética e potencial.

> considerada superfícies de onda, mantém uma relação pouco relacionada com o movimento mecânico, na medida que o ponto imagem do sistema mecânico de forma alguma se move ao longo do raio com a velocidade da onda u, mas, ao contrário, com velocidade proporcional a 1/u, dado diretamente por
>
> $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2T} = \sqrt{2(E-V)}$" (Schrödinger, 1926b. p.17. Tradução nossa).

E ele explora mais profundamente essa relação, uma vez que a óptica geométrica falha em resolver problemas que a ondulatória consegue cobrir, como, por exemplo, o fenômeno da difração. Além disso, a óptica geométrica pode ser tratada como um caso específico da ondulatória, para quando os comprimentos de onda não são consideráveis próximo aos comprimentos característicos do problema. Ele levanta a questão que a analogia poderia ser levada para o caso da Mecânica Quântica e da Mecânica Clássica, como fica explícito na seguinte passagem:

> "Nós sabemos atualmente, de fato, que a nossa mecânica clássica falha para dimensões muito pequenas da trajetória e para curvaturas muito grandes. Talvez esta falha esteja em estrita analogia com a falha da óptica geométrica, i.e. 'a óptica de comprimentos de onda infinitamente pequenos. [...], talvez a nossa mecânica clássica seja a analogia completa da óptica geométrica e tal qual não está em concordância com a realidade. [...] Então se torna uma questão de buscar por uma mecânica ondulatória, e o caminho mais óbvio é trabalhar em cima da analogia Hamiltoniana nas linhas da óptica ondulatória." (Schrödinger, 1926. p.18. Tradução nossa)

Com o objetivo de tornar essa relação cada vez mais estreita, Schrödinger lança mão de mais uma técnica que identificamos como representar a família de superfícies como fases de onda, tal qual no Princípio de Huygens. A técnica para tal é calcular o comprimento de onda associado a essa família a partir das equações da ondulatória, pois para Schrödinger, fica claro que a superfície W se comporta tal qual a fase de uma onda. O discurso tecnológico, por sua vez, se apresenta nas relações entre energia e frequência ($E = h\nu$) e de comprimento de onda e *momentum* ($p = \frac{h}{\lambda}$), que relacionam características mecânicas a características ondulatórias. Por essas razões, a função W deve ser parte do argumento de uma função senoidal - solução usual para funções de onda. E para que isso esteja em acordo com a relação $\nu = \frac{E}{h}$, a qual identificamos como uma hipótese representacional posterior para Schrödinger, e que o argumento seja adimensional, o argumento da função senoidal deve ser tal que:

$$sin\left(\frac{2\pi W}{h} + cte\right) = sin\left(\frac{-2\pi Et}{h} + \frac{2\pi S(q)}{h} + cte\right).$$

Utilizando a relação $\nu = \frac{E}{h}$ e a velocidade de fase das superfícies W, o autor obtém a dependência do comprimento de onda em função do potencial:

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{h}{\sqrt{2(E-V)}}.$$

Apesar do autor não mencionar, reconhecemos aqui a hipótese de De Broglie, $\lambda = \frac{h}{p}$. Para Schrödinger, este é um resultado notável, uma vez que não é necessário utilizar argumentos relativísticos para obter a relação entre comprimento de onda e *momentum* da partícula.

Por fim, para relacionar o movimento da partícula com o movimento das superfícies, que se torna mais uma tarefa para Schrödinger, ele lança mão da técnica de utilizar de uma lei de dispersão, com o discurso tecnológico de que, a partir da hipótese de Planck, temos que a velocidade de fase depende da frequência, tal que $u(\nu) = \frac{h\nu}{\sqrt{2(h\nu-V)}}$. Essa lei de dispersão, prende muito bem a relação do movimento da partícula com o movimento das superfícies, pois,

> “Mostramos que as superfícies de onda móveis estão somente relacionadas vagamente com o movimento do sistema-ponto, uma vez que as suas velocidades não são iguais e não podem ser iguais. De acordo com (9), (11) e (6’) a velocidade do sistema v tem uma significância concreta para a onda. Verificamos imediatamente que
>
> $$v = \frac{d\nu}{d\left(\frac{\nu}{u}\right)}$$
>
> i.e. a velocidade do sistema-ponto é a velocidade de grupo, incluído dentro de uma faixa estreita de frequências (velocidade-sinal). Podemos notar que o teorema [sobre as fases de onda do elétron de De Broglie] em questão é de larga generalidade, uma vez que não surge unicamente da teoria da relatividade, mas é válida para todo sistema conservativo na mecânica comum” (Schrödinger, 1926. p.20. Tradução nossa).

O fato de termos uma lei de dispersão para a velocidade de fase, a qual é inversamente proporcional à velocidade da partícula, leva o autor a derivar a relação entre a partícula e as ondas que acompanham o seu movimento. Portanto, essa relação entre a velocidade da partícula com a velocidade de grupo, é classificada como uma hipótese representacional derivada em seu texto.

Schrödinger então encaminha a sua análise para uma descrição apenas das fases de onda, ou mais precisamente, da função de onda em si, uma vez que estas são capazes de descrever o movimento da partícula. Contudo, surge uma necessidade de explicar o que são essas ondas que acompanham o movimento da partícula. Schrödinger escreve o seguinte sobre a sua interpretação das fases de onda:

> “Nesse sentido, eu interpreto as ‘fases de onda’ as quais, de acordo com De Broglie, acompanham a trajetória do elétron; nesse sentido, portanto, nenhum significado especial é atribuído ao caminho do elétron [...], e menos ainda à posição do elétron no seu caminho. E nesse sentido, eu explico com a convicção, hoje cada vez mais evidente, primeiro, que o real significado deve ser negado à fase dos movimentos eletrônicos no átomo; segundo, que nunca podemos afirmar que o elétron em um instante definido está para ser encontrado em qualquer um dos caminhos quânticos, limitado às condições quânticas; terceiro, que as verdadeiras leis da mecânica quântica não consistem em regras definidas para um único caminho, mas nestas leis os elementos de múltiplos caminhos de um sistema estão ligados juntos por equações, de forma que aparentemente uma certa ação recíproca exista entre diferentes caminhos” (Schrödinger, 1926. p.26. Tradução nossa).

Identificamos como uma hipótese ontológica posterior em seu texto o abandono do estudo da trajetória da partícula, pois são as ondas quem descrevem o *“verdadeiro processo mecânico”.* Com isso em vista, Schrödinger pretende explorar o tratamento matemático em torno dessas ondas que regem o movimento da partícula, o que nos leva a uma tarefa que é obter uma equação diferencial que descreve o comportamento desta função de onda, cuja técnica é utilizar as hipóteses sobre a velocidade de fase da família de superfícies na equação de onda. O discurso tecnológico que abarca este bloco prático é que, nesta analogia proposta, realizar a tarefa de buscar a trajetória do elétron está fadada ao fracasso da mesma forma que quem busca descrever a difração por meio da óptica geométrica. Como uma hipótese cosmovisiva derivada, então, o autor entende que as equações fundamentais da mecânica não terão sucesso ao descrever a partícula, mas sim devemos descrevê-la com uma equação de onda. Portanto, ele evoca a equação de onda:

$$div\ grad\ \psi + \frac{1}{u}\ddot{\psi} = 0\ .$$

Se a fase da onda é proporcional à forma $\frac{W}{h} = \frac{S}{h} - \frac{Et}{h}$, então podemos assumir que a solução de $\psi$ deve possuir um fator $e^{2\pi i v t}$, já que a energia é uma quantidade conservada. Assim, utilizando as outras hipóteses acima, obtemos uma hipótese representacional derivada, onde a equação de onda abaixo que descreve os *verdadeiros* processos mecânicos é:

$$div\ grad\ \psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\psi = 0\ .$$

Esta é a equação de onda apresentada por Schrödinger que permitirá obter os níveis de energia quânticos a partir dos valores próprios da função de onda. Como podemos notar, neste texto, Schrödinger detalha com argumentos mais robustos o porquê desta equação de onda descrever a mecânica de partículas quânticas. Desta forma, a organização praxeológica identificada encontra-se mais detalhada.

### 4.1.3 Four Lectures – Schrödinger (1928)

Novamente, começamos apresentando, nas tabelas 5 e 6, a organização praxeológica e a estrutura de hipóteses presentes no texto.

Tabela 5 - Organização praxeológica do texto da primeira aula das Four Lectures – Schrödinger (1928)

| Tarefa | Técnica | Discurso Tecnológico | Teoria |
|---|---|---|---|
| Derivar as ideias fundamentais da mecânica ondulatória | Comparar o Princípio de Maupertuis com o Princípio de Fermat | Existe uma analogia entre os Princípios de Maupertuis e de Fermat, de forma que a velocidade de fase do sinal depende da energia e do potencial e que a velocidade de grupo do sinal seja a velocidade da partícula | Mecânica Analítica; Óptica Geométrica e Ondulatória |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Fundamentar o tratamento mecânico-ondulatório a partir de uma equação | Comparar com a resolução de uma equação de onda, utilizando as hipóteses que relacionam o movimento da partícula com o movimento ondulatório associado | Pela analogia óptica-ondulatória, o movimento da partícula deve ser descrito por um movimento ondulatório | |

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 6 – Estrutura de Hipóteses do texto da primeira aula das Four Lectures de Schrödinger (1928)

<table>
<tr><th>Hipóteses</th><th>Cosmovisivas</th><th>Ontológicas</th><th>Representacionais</th></tr>
<tr><td>A priori</td><td></td><td>Os princípios de Fermat e de Hamilton são equivalentes, isto é, o movimento da partícula é acompanhado de um processo ondulatório.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Posteriores</td><td rowspan="3">O movimento da partícula deve ser descrito com uma equação diferencial parcial tal qual a equação de onda.</td><td rowspan="3">O movimento ondulatório, não é o que realmente existe, mas ele é o que descreve corretamente o que realmente acontece.</td><td>A energia da partícula se relaciona com a frequência dos processos ondulatórios por $E = h\nu$</td></tr>
<tr><td>A velocidade da partícula é igual à velocidade de grupo dos processos ondulatórios</td></tr>
<tr><td>Os raios de luz correspondem à trajetória da partícula e o sinal move-se como a massa pontual</td></tr>
<tr><td>Derivadas</td><td></td><td>A equação diferencial da mecânica ondulatória inclui, em sua estrutura, hipóteses em alta na sua época e as condições quânticas</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: elaborada pelo autor

Este é um texto que sofre um processo de didatização pelo próprio Schrödinger ao transformá-lo em um texto para aulas. A primeira das quatro aulas, cujo texto iremos analisar aqui, é um texto onde ele discute brevemente as relações entre a mecânica ondulatória e a mecânica clássica, e como elas são análogas com a relação entre a ondulatória e a óptica geométrica, respectivamente. Diferente dos seus artigos, a tarefa que se pode identificar no texto da primeira aula é derivar as ideias fundamentais da mecânica ondulatória e como ela culmina na Equação de Schrödinger. A sua intenção final é obter uma teoria que abraça tanto a mecânica clássica quanto as condições quânticas, como fica claro no trecho abaixo:

> "Em substituindo a descrição da mecânica habitual por uma descrição mecânica-ondulatória, nosso objetivo é obter uma teoria que inclui fenômenos da mecânica habitual, onde as condições quânticas não desempenham um papel apreciável, e, por outro lado, fenômenos quânticos típicos" (Schrödinger, 1928. p.6. Tradução nossa).

A técnica usada por Schrödinger para essa finalidade é comparar os princípios de Maupertuis e de Fermat. O discurso tecnológico que lhe permite realizar tal comparação fica explícito em seu texto:

> "Hamilton achou útil comparar a equação (2) [princípio de minimização do movimento de uma partícula] com o princípio de Fermat, o qual nos diz que em um meio óptico não-homogêneo, os raios de luz, i.e., os caminhos no qual a energia é propagada, são determinadas pela 'lei do mínimo tempo' (como usualmente é chamado)" (Schrödinger, 1928. p.2. Tradução nossa).

Essa comparação, para Schrödinger, tem um alto valor, pois ela levanta uma analogia entre a trajetória dos raios de luz e a trajetória de uma partícula, assim como justificado no trecho seguinte:

> "Por isso nós fizemos uma imagem mental de um meio óptico, no qual o conjunto de possíveis raios de luz coincidem com o conjunto de possíveis órbitas dinâmicas de uma massa pontual m movendo-se com uma dada energia E em um campo de força V(x,y,z)" (Schrödinger, 1928. p.2. Tradução nossa).

Esta comparação necessita de um postulado cujo resultado é uma hipótese ontológica *a priori*, uma vez que associamos ao movimento da partícula um processo ondulatório que o acompanha. Para realizar tal comparação, então, ele evoca o princípio de Maupertuis:

$$\delta \int 2Tdt = 0 \ ,$$

onde T é a energia cinética da partícula. Esse princípio define qual é a órbita (ou caminho) que minimiza (ou maximiza) a integral 2Tdt. Essa integral pode ser escrita não pelo diferencial de tempo, mas pelo diferencial do caminho percorrido ds se tomarmos $2Tdt = \sqrt{2m(E-V)}ds$, assim o princípio de Hamilton fica em uma forma puramente geométrica, sem a dependência do tempo.

$$\delta \int \sqrt{2m(E-V)}ds = 0$$

Essa estrutura matemática é muito semelhante ao princípio de Fermat que descreve a trajetória de um raio de luz minimizando (ou maximizando) o tempo do caminho óptico:

$$\delta \int \frac{ds}{u} = 0 \ ,$$

onde u é a velocidade da luz. Schrödinger, então, postula que, para que ambas as leis sejam idênticas, podemos igualar os integrandos por uma constante C, de forma que essa constante não possa depender da posição, mas somente da energia da partícula.

$$u = \frac{C}{\sqrt{2m(E-V)}}$$

Schrödinger associa uma frequência que se relaciona com a energia da partícula ao processo ondulatório segundo uma relação bem estabelecida entre físicos de sua época:

> “O fato de u, a velocidade da luz, depender não somente das coordenadas, mas também de E, energia total da massa pontual, é de grande importância. Este fato nos permite empurrar a analogia um passo adiante retratando a dependência de E de uma dispersão, i.e., como uma dependência da frequência. Para este propósito, devemos atribuir aos nossos raios de luz uma frequência definida $\nu$, dependendo de E. Nós (arbitrariamente) colocaremos $E = h\nu$, sem deliberar muito nessa suposição, a qual é bem sugestiva para físicos modernos” (Schrödinger, 1928. p.3. Tradução nossa).

Essa suposição é uma hipótese representacional posterior dentro da estrutura da sua teoria, uma vez que a energia da partícula é modelada pela frequência do processo ondulatório que acompanha o movimento da partícula. Esta suposição é importante, pois, em seguida, Schrödinger pretende relacionar o movimento da partícula com o movimento dos processos ondulatórios. Primeiro, a velocidade da partícula w não pode ser igual à velocidade u, pois a primeira é tal que $w = \frac{1}{m}\sqrt{2m(E-V)}$, enquanto a última é inversamente proporcional a w, pois $u = \frac{C}{\sqrt{2m(E-V)}}$. O autor identifica u como uma velocidade de fase dos processos ondulatórios.

Para obter o valor da constante C, Schrödinger postula que a velocidade de grupo deve ser igual à velocidade da partícula, pois, dessa forma, essa pode se sincronizar àquela para que a partícula se mova tal qual um sinal de luz pontual. A isso classificamos também como uma hipótese representacional posterior, já que ele modela a velocidade da partícula junto ao movimento ondulatório. Se a velocidade de grupo $g$ pode ser calculada por:

$$\frac{1}{g} = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu}{u}\right) = \frac{d}{dE}\left(\frac{E}{u}\right),$$

essa última igualdade é dada por conta da relação $E = h\nu$. Se tomarmos a igualdade $g = w$ (ou $\frac{1}{g} = \frac{1}{w}$), então temos:

$$\frac{d}{dE}\left(\frac{E\sqrt{2m(E-V)}}{C}\right) = \frac{1}{m}\sqrt{2m(E-V)}\ .$$

Esta igualdade se torna verdadeira se tomarmos que $C = E$. Portanto temos:

$$u = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} = \frac{energia}{momentum}$$

O autor advoga, então, pelo estudo dos processos ondulatórios para descrever o movimento da partícula, uma vez que a velha mecânica falha em fazê-lo, que:

> "A ideia fundamental da mecânica ondulatória é a seguinte. O fenômeno [...] é para ser descrito corretamente - em acordo com as novas ideias - pela descrição de um movimento ondulatório definido, o qual toma lugar entre as ondas do tipo considerado, i.e., de velocidade e frequência definidos" (Schrödinger, 1928. p.5. Tradução nossa).

Como uma hipótese cosmovisiva posterior, Schrödinger acredita que esse movimento ondulatório deve ser descrito por equação diferencial parcial, tal qual a equação de onda. Contudo, como uma hipótese ontológica posterior, ele entende que essa onda não pode ser tomada como algo que existe, como discutido no parágrafo:

> "A afirmação que o que realmente ocorre é corretamente descrito por um movimento ondulatório não necessariamente significa exatamente o mesmo

> que: o que realmente existe é o movimento ondulatório. [...] Apesar de o [espaço de configuração] possuir um significado físico bem definido, não pode-se dizer que ele 'exista'; consequentemente, o movimento ondulatório neste espaço não pode-se dizer que 'exista' também, no sentido habitual da palavra. É meramente uma descrição matemática adequada do que ocorre" (Schrödinger, 1928. p.6. Tradução nossa).

A analogia entre a óptica e a ondulatória se mostra, mais uma vez, imprescindível para Schrödinger poder conduzir o desenvolvimento da sua teoria, uma vez que partir de um caso específico (mecânica clássica) para um caso geral (mecânica ondulatória) deve vir acompanhado de muitas arbitrariedades, de forma que a analogia com a óptica e a ondulatória as suavizam, tornando-as aceitáveis. Assim, Schrödinger tem como hipótese representacional posterior que "[...] os raios de luz correspondem às trajetórias [da partícula] e os sinais movem-se como a massa-pontual" *(*Schrödinger, 1928. p.6. Tradução nossa).

A óptica geométrica falha ao descrever fenômenos onde o comprimento de onda é comparável aos comprimentos característicos do problema, se faz necessário o uso da ondulatória. Da mesma forma, Schrödinger propõe a mecânica ondulatória para que ela consiga descrever fenômenos onde o comprimento de onda associado ao movimento da partícula seja comparável aos comprimentos característicos do problema.

Como tarefa, Schrödinger deseja fundamentar a mecânica ondulatória com um tratamento matemático. Ele realiza esta tarefa através da técnica de comparar com a solução de uma equação de onda de um fenômeno puramente ondulatório, no caso, a pressão em um fluido elástico confinado. Podemos identificar isto nesta passagem:

> "Vamos considerar agora o tratamento mecânico-ondulatório do caso que é inacessível para a mecânica usual; digamos, para fixar nossas ideias, o tratamento mecânico-ondulatório do que a mecânica usual chama de movimento do elétron no átomo de hidrogênio.
>
> De que forma atacaremos esse problema?
>
> Bem, de uma forma muito semelhante que atacaríamos o problema de encontrar possíveis movimentos (vibrações) de um corpo elástico. Só que, neste caso, o problema se complica pela existência de dois tipos de ondas, longitu-

dinais e transversais. Para evitar esta complicação, vamos considerar um fluido elástico retido em um certo confinamento" (Schrödinger, 1928. p.9. Tradução nossa).

O discurso tecnológico para essa técnica reside em sua analogia da relação da óptica-ondulatória. Para tanto, evoca a equação de onda para a pressão de um fluido elástico confinado:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{u^2}\frac{d^2 p}{dt^2} = 0 \ .$$

Uma parte da solução dessa equação é dada por :

$$p(x, y, z, t) = \psi(x, y, z).\, e^{2\pi i \nu t} \ .$$

Assim, para a parte espacial da equação de onda temos que resolver a equação:

$$\nabla^2 \psi + \frac{4\pi^2 \nu^2}{u^2}\psi = 0 \ .$$

Resgatando a hipótese cosmovisiva posterior, a qual supõe que o movimento da partícula deve ser descrito com uma equação diferencial parcial tal qual a equação de onda, o autor entende que podemos fazer algo semelhante, então, para o movimento ondulatório que descreve o movimento da partícula.

Evocando as hipóteses já estabelecidas anteriormente como $E = h\nu$, $u = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}}$, ele obtém uma equação para a parte temporal:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{-4\pi^2 E^2}{h^2} p \ .$$

E uma para a parte espacial:

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\psi = 0 \ .$$

O autor, neste ponto, discute um problema sobre o qual se deparou em seus estudos, que remetem às condições de contorno e a quantização:

> "Achei que esta última simplificação [que consiste na ausência das condições de contorno] fatal quando primeiro ataquei estas questões. Sendo insuficientemente versado em matemática, eu não podia imaginar como frequências dos modos normais poderiam aparecer sem as condições de contorno. Mais tarde, reconheci que quanto mais complicada a forma os coeficientes (i.e., a

> aparência de V(x,y,z)) assumem, por assim dizer, aquilo que seria determinado pelas condições de contorno, a saber, a seleção de valores definidos de E" (Schrödinger, 1928. p.12. Tradução nossa) .

Conclui-se, então, que pela Mecânica Analítica e pela Ondulatória, temos uma equação que se apresenta com hipóteses que estavam em alta à sua época e que atinge o seu objetivo de obter uma equação que inclua em sua estrutura as condições quânticas, a partir do próprio potencial, sem necessitar de condições de contorno. A isto, podemos chamar de uma hipótese representacional derivada dentro deste texto.

É importante notar como este texto passa por um processo de didatização em relação ao seu artigo de 1926. Primeiro, podemos notar que toda a discussão em torno da EHJ está ausente, em que ele apenas introduz a ideia da comparação entre os princípios de Fermat e de Hamilton, obtendo uma expressão para a velocidade de um movimento ondulatório equivalente, que vem a ser a velocidade de fase. Por conta disso, é necessário que, aqui, ele tenha que assumir a velocidade de grupo igual à velocidade da partícula como uma hipótese posterior, enquanto em Schrödinger (1926b), esse fato se torna uma hipótese derivada, pois ela é obtida a partir da lei de dispersão dessas ondas.

## 4.2 LIVROS DIDÁTICOS

Nesta seção, são apresentadas as análises dos livros didáticos selecionados, os quais costumam ser muito utilizados em diversas universidades no Brasil, segundo Vazata *et al* (no prelo). Os livros foram organizados nas seções de acordo com a ordem cronológica de publicação.

### 4.2.1 Quantum Mechanics – Messiah (1961)

As tabelas 7 e 8 apresentam, respectivamente, a organização praxeológica e a estrutura de hipóteses presentes no texto.

Tabela 7 - Organização Praxeológica de Messiah (1961)

| Tipo de Tarefa | Técnica | Tecnologia | Teoria |
|---|---|---|---|
| Descrever a correspondência do movimento de uma partícula livre e da sua onda associada | Explorar as características de um pacote de ondas formado por uma sobreposição de ondas planas | O pacote de ondas possui um domínio restrito, e, a partir da hipótese de Planck e De Broglie, é possível relacioná-la com o movimento da partícula | Ondulatória |
| Mostrar que as hipóteses de Planck e de De Broglie se mantêm válidas para o caso de uma partícula em um potencial que varia lentamente | Comparar os princípios de Mínima Ação e de Fermat | A partícula clássica se move tal qual um raio de luz, onde a velocidade do primeiro é igual à velocidade de grupo ao longo do último | |
| Determinar a evolução da função de onda $\psi$, a partir de uma equação de propagação | Utilizar-se de operadores sobre um pacote de ondas | Como o pacote de ondas relaciona-se com o movimento da partícula, podemos realizar uma igualdade entre operadores na representação de um pacote de ondas de forma que ela retorne um resultado clássico | Mecânica Clássica |

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 8 - Estrutura de Hipóteses de Messiah (1961)

| Hipóteses | Cosmovisivas | Ontológicas | Representacionais |
|---|---|---|---|
| A priori | | A partícula é melhor localizada quanto mais restrito for o domínio ocupado pela onda | A matéria possui, tal qual o fóton, um caráter dual: corpuscular e ondulatório |
| | | A intensidade da onda associada a uma partícula em um dado ponto e instante nos dá a probabilidade de encontrar a partícula naquele ponto e naquele instante | A energia da partícula se relaciona com a frequência angular por $E = \hbar\omega$ |
| Posteriores | Como todas as equações da física matemática, deve ser postulada e a sua justificação encontra-se no sucesso da sua comparação com suas predições de resultados experimentais | Os raios correspondentes à frequência angular $\omega$ devem ser idênticos às trajetórias clássicas com energia $E = \hbar\omega$ | Um pacote de ondas formado por ondas planas monocromáticas é uma forma de descrever uma partícula livre |
| | | A velocidade de grupo ao longo de cada raio seja igual à velocidade da partícula clássica correspondente | Um pacote de ondas formado por ondas planas monocromáticas é uma forma de descrever aproximadamente uma partícula em um potencial V(r) que varie lentamente |
| Derivadas | | | A partir de um caso específico, a Equação de Schrödinger é postulada como válida para qualquer tipo de potencial |

Fonte: elaborada pelo autor

Messiah abre o seu Capítulo II, onde discute Ondas de Matéria e a Equação de Schrödinger, com um breve histórico dos dois formalismos criados para descrever fenômenos quânticos: A Mecânica Matricial de Heisenberg e a Mecânica Ondulatória de Schrödinger. O autor identifica um valor na introdução à Mecânica Quântica através da Mecânica Ondulatória, pois:

> "Das várias formas de introduzir a Teoria Quântica, a que utiliza o formalismo geral é, sem dúvida, a mais elegante e a mais satisfatória. Contudo, requer o manuseio de um simbolismo matemático cujo caráter abstrato incorre no risco de mascarar a realidade física subjacente. A Mecânica Ondulatória, a qual utiliza a linguagem mais familiar das ondas e equações diferenciais parciais, presta-se melhor para um primeiro contato." (Messiah, 1961, p. 48. Tradução nossa)

Em um primeiro momento, Messiah, procura realizar uma tarefa em que pretende descrever o movimento de uma partícula livre a partir de um pacote de ondas formado por ondas planas e monocromáticas, sob a luz da teoria de De Broglie. A técnica associada a esta tarefa é explorar as características desse referido pacote de ondas. O discurso tecnológico que permite tal comparação vem de uma hipótese representacional *a priori* que, segundo Messiah:

> "Vamos supor que a matéria também possui esse caráter dual; tal qual uma onda eletromagnética é associada a cada fóton, nós associamos, assim, para cada partícula material, uma onda cuja frequência angular $\omega$ está conectada com a energia da partícula E pela relação $E = \hbar\omega$" (Messiah, 1961, p.49. Tradução nossa).

Nesse texto, a intensidade da onda associada ao movimento da partícula material possui a interpretação de Born, onde ela representa a probabilidade de encontrar a partícula em um dado ponto em um dado instante, a qual classificamos aqui como uma hipótese ontológica *a priori*. A função de onda mais simples para descrever o movimento da partícula livre é a onda plana e monocromática:

$$e^{i(k \cdot r - \omega t)} \,,$$

cuja velocidade, conhecida como velocidade de fase é dada por:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \,.$$

A função de onda associada à partícula deve possuir uma extensão limitada, pois, quanto mais limitado for o seu domínio, melhor localizada é a partícula, tendendo ao caso clássico. Classificamos isso como uma hipótese ontológica *a priori*. Portanto, a onda plana monocromática, sozinha, não satisfaz a condição de limitação, se fazendo necessário construir um pacote de ondas tal que:

$$\psi(r,t) = \int f(k')e^{i(k'\cdot r-\omega' t)}dk' \ .$$

Onde f(k') é uma função de distribuição que deve ter valores apreciáveis somente em torno do vetor de onda k. Com isso, é possível mostrar que a velocidade de grupo desse pacote de ondas é dado por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \ .$$

Se a velocidade da partícula é dada por:

$v = \frac{dE}{dp}$ (aproximadamente $\frac{p}{m}$ para a aproximação não-relativística) .

Pode-se, então, pela hipótese de Planck e pela estrutura matemática de ambas velocidades, que a velocidade de grupo corresponde à velocidade da partícula. Dessa igualdade, $v_g = v$, naturalmente podemos obter a hipótese de De Broglie ($p = \hbar k$).

Para o caso em que temos um potencial que varia lentamente, temos uma nova tarefa associada, pois Messiah tem a intenção de mostrar que as hipóteses de Planck e de De Broglie se mantêm válidas. Como técnica, o autor compara, então, os princípios variacionais de mínima ação e de Fermat, se aproximando da praxeologia de Schrödinger. O discurso tecnológico se fundamenta, então com as hipóteses ontológicas posteriores:

> "(a) que os raios correspondentes à frequência (angular) $\omega$ seja idêntico à trajetória clássica de energia E = ħ$\omega$;
>
> (b) que a velocidade de grupo ao longo de cada raio seja igual à velocidade da partícula clássica correspondente" (Messiah, 1961, p. 53. Tradução nossa).

O princípio variacional de mínima ação para um sistema mecânico $\delta I_{12} = \delta \int_{M_1}^{M_2} Ldt = 0$, Messiah escreve como

$$\delta I_{12} = \delta \int_{M_1}^{M_2} p \cdot dr = 0 \ .$$

Uma vez que a Lagrangiana pode ser escrita como $p \cdot \frac{dr}{dt} - E$. Enquanto o princípio de Fermat é escrito:

$$\delta J_{12} = \delta \int_{M_1}^{M_2} k \cdot dr = 0 \ .$$

Se a energia depende da frequência angular (condição (a)), então é suficiente que o *momentum* seja proporcional ao número de onda de forma que:

$$p = \alpha k \ .$$

Para que a condição (b) seja válida, necessitamos que $\alpha = \hbar$, pois:

$$v_g = grad_k \omega = \frac{1}{\hbar} grad_k E = \frac{\alpha}{\hbar} grad_p E = \frac{\alpha}{\hbar} v \ .$$

Dessa forma, Messiah mostra, então, amparado pelos princípios variacionais, que as hipóteses de Planck e de De Broglie se mantêm para potenciais que variam, de forma que o próprio comprimento de onda não seja constante no espaço, podendo ser calculado por:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m(E - V(\boldsymbol{r})}} \ .$$

Como última tarefa identificada aqui em torno da dedução da Equação de Schrödinger, o autor pretende determinar a evolução da função de onda ψ, a partir de uma equação de propagação. A técnica que ele utiliza para tal é utilizar-se de operadores sobre um pacote de ondas, pois para o autor, a obtenção desta equação possui um empecilho subjacente como fica claro nesta passagem:

> “É bastante claro que nenhum raciocínio dedutivo pode nos levar a esta equação. Como todas as equações da física matemática, deve ser postulada e a sua justificação encontra-se no sucesso da sua comparação com suas predições de resultados experimentais. Não obstante, a escolha da equação de onda deve ser restrita a um certo número de condições a priori se deseja-se manter a interpretação definida anteriormente para $\psi$” (Messiah, 1961, p. 61. Tradução nossa)

A este pensamento do autor, classificamos como uma hipótese cosmovisiva posterior, pois o autor, a partir de agora, deve assumir algumas arbitrariedades para poder obter a Equação de Schrödinger da forma mais geral, e, portanto, ele se afasta das ideias originais. As condições a que Messiah se refere é que a equação deve ser linear e homogênea, enquanto que deve ser uma equação diferencial de primeira ordem com relação ao tempo.

O discurso tecnológico que fundamenta essa técnica é que como o pacote de ondas se relaciona com o movimento da partícula. Podemos realizar uma igualdade entre operadores (como derivadas parciais temporais, gradientes e laplacianos) na representação de um pacote de ondas de forma que ela retorne um resultado clássico.

Inicialmente, ele busca pela Equação de Schrödinger a partir de um pacote de ondas para uma partícula livre que pode ser escrito por:

$$\psi(r,t) = \int F(p).e^{i(p.r-Et)/\hbar}dp \ .$$

Se a relação entre *momentum* e energia para a partícula livre é tal que :

$$E = \frac{p^2}{2m} \ ,$$

então é válido que as operações sobre $\psi(r,t)$ sejam tais que:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\psi(r,t) \ ,$$

onde $\Delta\psi$ é o laplaciano da função de onda e o *momentum* pode ser obtido pela operação $\frac{\hbar}{i}\nabla\psi(r,t)$.

Para um potencial que depende da posição e do tempo e que varie lentamente, Messiah assume que o mesmo pacote de onda seja a solução desta equação, também. Assim, ele postula que a Equação de Schrödinger pode ser obtida, a partir deste pacote, realizando as mesmas operações feitas anteriormente para uma partícula livre. Esta hipótese classificamos como uma hipótese representacional posterior, em seu texto. Na intenção de obter, então, a relação:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \ ,$$

ele postula a Equação de Schrödinger, uma hipótese representacional derivada, como:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)\right)\psi(r,t) \ .$$

O texto de Messiah reconhece os passos de Schrödinger através da analogia entre óptica e a mecânica clássica. Contudo, em seu texto, a dedução da equação de Schrödinger se afasta da proposta inicial, utilizando-se do formato do pacote de ondas para obter a Equação de Schrödinger para o caso da partícula livre, fazendo necessário, por meio de aproximações, postular a Equação de Schrödinger para qualquer potencial. A comparação entre os princípios de Fermat e de mínima ação aparecem no texto, mas de uma forma secundária apenas para justificar que as hipóteses de Planck e de De Broglie se mantêm válidas para qualquer potencial.

### 4.2.2 Quantum Physics – Eisberg e Resnick (1985)

As tabelas 9 e 10 apresentam a organização praxeológicas a estrutura de hipóteses presentes no texto.

Tabela 9 - Organização Praxeológica de Eisberg e Resnick (1985)

| Tipo de Tarefa | Técnica | Tecnologia | Teoria |
|---|---|---|---|
| Postular uma equação que descreve o comportamento para a onda associada ao movimento de uma partícula | Explorar as características de uma onda senoidal para um potencial constante | Se relacionarmos as operações sobre uma onda senoidal para um potencial constante, podemos postular o mesmo comportamento para qualquer potencial | Ondulatória; Mecânica Clássica |

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 10 - Estrutura de Hipóteses de Eisberg e Resnick

| Hipóteses | Cosmovisivas | Ontológicas | Representacionais |
|---|---|---|---|
| A priori | A plausibilidade de um argumento não constitui uma derivação. Na análise final, a equação de onda da mecânica quântica será obtida por um postulado | Pelo postulado de De Broglie, há uma onda associada ao movimento de uma partícula | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Posteriores | | | A equação deve ser consistente com os postulados de De Broglie-Einstein |
| | | | A equação deve ser consistente com conservação de energia $E = \frac{p^2}{2m} + V$ |
| | | | A equação deve ser linear para a função de onda |
| | | | A equação deve retornar uma solução senoidal para um potencial constante |
| Derivadas | | | A partir de um caso específico, a Equação de Schrödinger é postulada como válida para qualquer tipo de potencial |

Fonte: elaborada pelo autor

Eisberg e Resnick (1985), após descreverem fenômenos em capítulos anteriores que motivaram a criação de uma nova teoria para descrever partículas microscópicas, como o problema de emissão de radiação de um corpo negro, fóton como uma partícula, o postulado de De Broglie e o modelo atômico de Bohr, introduzem a necessidade de descrever a onda associada ao movimento de uma partícula:

> “A teoria especifica as leis do movimento ondulatório que as partículas de qualquer sistema microscópico obedecem. Isto é feito especificando, para cada sistema, a equação que controla o comportamento da função de onda, e, também, especificando a conexão entre o comportamento da função de onda e o comportamento da partícula” (Eisberg; Resnick, 1985, p. 125. Tradução nossa).

Identificamos neste texto que a tarefa a ser realizada é postular uma equação que descreve o comportamento para a onda associada ao movimento de uma partícula. Para realizá-la, os autores pretendem explorar as características de uma função de onda senoidal para um potencial constante pois

> “Podemos avaliar alguns problemas relativos à aplicabilidade do postulado de De Broglie [...] considerando o caso da partícula livre. [...] Quando [...] foi necessário ter uma expressão matemática para uma função de onda, utilizamos uma simples onda progressiva senoidal como
>
> $$\psi(x,t) = sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)\right)$$
>
> Ou uma função formada pela adição de várias senoidais simples. Esta forma foi obtida essencialmente pela suposição, baseada no fato que partícula livre possui momentum p de módulo constante, já que nenhuma força age sobre ele, e, portanto, possui o comprimento de onda de De Broglie associado $\lambda = h/p$ de módulo constante” (Eisberg; Resnick, 1985, p. 126. Tradução nossa).

O discurso tecnológico vem permeado de uma hipótese cosmovisiva *a priori*, onde os autores defendem que a plausibilidade de um argumento não constitui uma derivação, pois na análise final, a equação de onda da mecânica quântica será obtida por um postulado (Eisberg; Resnick, 1985). Os autores pretendem obter a equação para um potencial constante e então postulá-lo para qualquer potencial, e a isto, eles classificam como um argumento plausível.

Os autores então identificam quatro hipóteses, que classificamos como representacionais posteriores, as quais devemos nos ater para obter essa equação:

> “1. Deve ser consistente com os postulados de De Broglie-Einstein [...]
>
> 2. Deve ser consistente com a equação $E = p^2/2\,m + V$, relacionando a energia E da partícula de massa m com a energia cinética $p^2/2\,m$ e a energia potencial V.
>
> 3. Deve ser linear para $\psi(x,t)$ [...] Esta exigência pela linearidade garante que devemos poder adicionar funções de onda para produzir interferências construtivas e destrutivas que são tão características para as ondas. [...]
>
> 4. [...] Portanto, assumimos que, para este caso [potencial constante e momentum constante], a equação diferencial desejada deve possuir uma solução senoidal” (Eisberg; Resnick, 1985, p. 129. Tradução nossa).

A partir da conservação de energia, os autores inserem nesta equação, as hipóteses de De Broglie) e de Einstein ($E = \hbar\omega$) temos que:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x,t) = \hbar\omega\ .$$

Os fatores $k^2$e $\omega$ na equação acima sugerem que a equação de Schrödinger deve possuir uma derivada segunda espacial e uma derivada primeira temporal. Então, uma forma de escrever a equação acima é tal que:

$$\alpha\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\psi(x,t) = \beta\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \text{ .}$$

Onde as constantes $\alpha$ e $\beta$ serão determinadas a partir do caso de potencial constante, onde a solução de $\psi(x,t)$ deve ser uma soma de um seno com um cosseno escrito para termos a forma mais geral possível de forma que:

$$\psi(x,t) = cos(kx - \omega t) + \gamma sin(kx - \omega t) \text{ .}$$

Onde $\gamma$ é uma constante. Colocando essa proposta de solução na equação suposta, podemos obter as três constantes inseridas. A partir da álgebra, e relacionando com a expressão de conservação de energia, obtemos que:

$$\gamma = \pm i; \alpha = \frac{-\hbar^2}{2m}; \beta = \pm i\hbar \text{ .}$$

Dessa forma os autores obtém, então, a equação de Schrödinger, escolhendo-se, arbitrariamente, a solução positiva para $\beta$:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \text{ .}$$

Esta equação é deduzida a partir de uma solução específica. Para os casos em que temos um potencial qualquer, os autores devem postular que essa equação é válida também. Eles reconhecem que a forma de se obter essa equação difere da de Schrödinger:

> “Schrödinger foi levado a esta equação por uma argumentação diferente da nossa (e mais esotérica). [...] Contudo, ele foi fortemente influenciado pelo postulado de De Broglie em seu trabalho, assim como nós fomos influenciados” (Eisberg; Resnick, 1985, p. 129. Tradução nossa).

Podemos identificar um certo afastamento consciente dos autores em relação às ideias que deram origem à Mecânica Ondulatória de Schrödinger, se valendo de uma solução para um caso específico para ter que postular a Equação de Schrödinger como válida para qualquer caso. A isso classificamos como uma hipótese representacional derivada a respeito do comportamento da evolução das ondas associadas. Além disso, os autores qualificam as ideias que dão origem como mais esotéricas.

### 4.2.3 Quantum Mechanics – Cohen-Tannoudji (1991)

As tabelas 11 e 12 apresentam, respectivamente, a organização praxeológica e a estrutura de hipóteses presentes no texto.

Tabela 11 - Organização Praxeológica de Cohen-Tannoudji (1991)

| Tipo de Tarefa | Técnica | Tecnologia | Teoria |
|---|---|---|---|
| Descrever tudo o que se sabe sobre a função de onda associada ao movimento da partícula quântica | Comparar com a discussão feita previamente sobre a dualidade do fóton | Pela hipótese de De Broglie, podemos descrever a onda associada ao movimento de uma partícula a partir de uma comparação com o que ocorre com o fóton | Mecânica Quântica |

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 12 - Estrutura de Hipóteses de Cohen-Tannoudji (1991)

| Hipóteses | Cosmovisivas | Ontológicas | Representacionais |
|---|---|---|---|
| A priori | | Partículas materiais, tais quais os fótons, podem possuir um aspecto ondulatório | Associa-se a uma partícula material de energia E e *momentum* p, uma onda de frequência $\omega$ e um vetor de onda k de forma que $E = \hbar\omega$ e $p = \hbar k$ |
| Posteriores | | | Assumimos que a Equação de Schrödinger descreve a evolução temporal da função de onda. A verificação experimental prova sua validade |

Fonte: elaborada pelo autor

O texto de Cohen-Tannoudji (1991) não se preocupa em resgatar as razões de ser da Equação de Schrödinger, e tampouco em justificar a razão pela qual ela descreve a evolução temporal para a função de onda. Sendo pragmático a tarefa identificada no texto é descrever o que é a função de onda, a sua importância para a medida de grandezas físicas e como devemos trabalhar matematicamente com ela. A técnica dessa descrição é comparar com as discussões prévias feitas acerca da dualidade do fóton; contudo, para o exercício da Vigilância Epistemológica, há um cuidado quanto a essa comparação, pois, apesar do *momentum* do fóton e do *momentum* da partícula massiva estarem relacionados da mesma forma com o comprimento de onda associado $p = \frac{h}{\lambda}$, as justificativas e hipóteses que levam a esta equação não são as mesmas, conforme podemos analisar em De Broglie (1924).

Enquanto que o discurso tecnológico que a justifica está ancorado nas ideias de De Broglie, que associa o movimento de uma partícula a uma onda:

> “Em 1923, contudo, De Broglie apresentou a seguinte hipótese: partículas materiais, assim como os fótons, podem assumir um aspecto ondulatório. [...] experimentos de difração eletrônica [...] surpreendentemente confirmaram a existência de um aspecto ondulatório da matéria mostrando padrões de interferência que poderiam ser obtidos com partículas materiais como os elétrons.
>
> Associa-se, então, a uma partícula material de energia E e momentum p, uma onda cuja frequência angular e vetor de onda k são dados pelas mesmas relações entre os fótons:
>
> $E = \hbar\omega \ e \ p = \hbar k$” (Cohen-Tannoudji, 1991, p.18. Tradução nossa).

Podemos notar em seu discurso duas hipóteses *a priori*, uma ontológica que descreve como a partícula possui um caráter ondulatório e uma representacional que descreve como as características mecânicas, energia e *momentum,* devem se relacionar com as características ondulatórias. Além do mais, a importância da validação experimental como justifica se faz muito presente em seu texto. A formulação que os autores propõem acerca da função de onda da partícula material, inspirados no comportamento do fóton, são quatro pontos importantes:

> “(i) Para o conceito clássico de trajetória, devemos substituir pelo conceito de estado variável no tempo. O estado quântico [...] é caracterizado pela função de onda $\psi(r, t)$ que contém toda informação possível de se obter sobre a partícula

> (ii) $\psi(r,t)$ é interpretada como a amplitude de probabilidade da presença da partícula. [...]
>
> (iii) O princípio da decomposição espectral aplicada a medição de uma grandeza física arbitrária:
>
> O resultado obtido pertence a um conjunto de auto-valores {a}
>
> Para cada autovalor a está associado um autoestado, isto é, uma autofunção $\psi_a(r)$ [...]
>
> Para qualquer $\psi(r,t)$, a probabilidade $P_a$ de encontrar o autovalor a em uma medição em um tempo $t_0$ é obtido pela decomposição de $\psi(r,t_0)$ em termos de funções de $\psi_a(r)$ [...]
>
> Se a medição incorre em a, a função de onda da partícula após a medição é tal que $\psi(r,t_0) = \psi_a(r)$.
>
> (iv) É possível introduzir [a equação que descreve a evolução de $\psi(r,t)$de forma bem natural, usando as relações de Planck e de De Broglie. No entanto, não temos a intenção de provar esta equação fundamental, a qual é conhecida como Equação de Schrödinger. Iremos simplesmente assumi-la. [...]" (Cohen-Tannoudji, 1991, p.19-20. Tradução nossa).

Dessa forma, os autores apresentam a fórmula em sua forma dependente do tempo, assumindo-a como uma equação fundamental que atende as relações de Planck e De De Broglie, comentando a importância de ela ser linear e homogênea para ψ:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\psi(r,t) + V(r)\psi(r,t) \ ,$$

onde $\Delta\psi(r,t)$ é o laplaciano da função de onda. Entende-se essa proposição como uma hipótese representacional da partícula quântica posterior no texto, visto que ela não é derivada. Essa é uma abordagem pragmática e que se afasta demasiadamente das propostas que deram origem à Equação de Schrödinger.

### 4.2.4 Modern Quantum Mechanics – Sakurai (1994)

As tabelas 13 e 14 apresentam, respectivamente, a organização praxeológica e a estrutura de hipóteses presentes no texto.

Tabela 13 - Organização Praxeológica de Sakurai (1994)

| Tipo de Tarefa | Técnica | Tecnologia | Teoria |
|---|---|---|---|
| Deduzir a equação diferencial que descreverá a evolução temporal de um estado ket | Aplicar um operador sobre um estado em um instante $t_0$ para obter o estado em um instante t | Juntando o formalismo de operadores com o conceitos da mecânica clássica e da velha mecânica quântica, podemos descrever essa equação diferencial | Mecânica Clássica;<br>Mecânica Quântica |

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 14 - Estrutura Praxeológica de Sakurai (1994)

| Hipóteses | Cosmovisivas | Ontológicas | Representacionais |
|---|---|---|---|
| A priori | | | O tempo é um parâmetro e não um operador |
| Posteriores | | | O operador Hamiltoniano na mecânica clássica descreve a evolução temporal |
| | | | Um operador que tem dimensões de frequência pode ser relacionado ao Hamiltoniano, pela hipótese de Planck |

Fonte: elaborada pelo autor

O livro didático de Sakurai (1994) se propõe a ser um livro que trabalhe com o formalismo do espaço de Hilbert e a notação de brakets de Dirac desde o primeiro capítulo. No início do segundo capítulo, ele pretende, então, deduzir a equação diferencial que descreverá a evolução temporal de um estado ket, ação essa que consideramos como uma tarefa em seu texto. A técnica para tal dedução, é aplicar operadores sobre um estado para obter o estado em um próximo instante de tempo. O bloco prático fica evidente neste parágrafo:

> “Nossa principal preocupação nessa seção é: Como um estado ket muda com o tempo? Suponha que temos um sistema físico cujo estado em um tempo $t_0$ é representado por $\alpha\rangle$. Em tempos futuros, não esperamos que, no geral, o sistema se mantenha no mesmo estado $|\alpha\rangle$” (Sakurai, 1994, p.69. Tradução nossa).

A tecnologia subjacente a utilização desse bloco prático é a utilização de argumentos através do formalismo de Dirac para a Mecânica Quântica, utilizando-se, em alguns momentos, de forma secundária, conceitos da “Velha” Mecânica Quântica, a hipótese de Planck, como ficará evidente na descrição a seguir. O seu discurso tecnológico está completamente baseado em argumentos acerca da natureza de um operador e como ele deve agir sobre um estado. Apenas em dois momentos Sakurai toma argumentos físicos para obter a Equação de Schrödinger.

Para iniciar a busca de uma equação diferencial, primeiro, Sakurai impõe uma hipótese representacional *a priori* sobre o tempo na Mecânica Quântica, afirmando que:

> “O primeiro ponto importante que devemos manter em mente é que o tempo é apenas um parâmetro na mecânica quântica, não um operador. Em particular, o tempo não é um observável na linguagem do capítulo anterior. Não há sentido em falar sobre um operador do tempo da mesma forma que falamos de um operador do espaço. Ironicamente, na história do desenvolvimento da mecânica ondulatória, L. De Broglie e E. Schrödinger foram guiados para uma espécie de analogia covariante entre energia e tempo de um lado, e *momentum* e posição de outro.” (Sakurai, 1994, p.68. Tradução nossa)

É interessante notar como ele resgata aquilo que foi desenvolvido por Schrödinger e De Broglie e como ele destaca as diferenças entre como a Mecânica Quântica é atualmente tratada e como ela era tratada no início de seu desenvolvimento. Sakurai, então, inicia o seu desenvolvimento supondo um operador temporal $U(t, t_0)$ – o autor utiliza a letra U estilizada, por simplicidade utilizaremos o U maiúsculo - a ser aplicado em um estado em um instante $t_0$ $|\alpha, t_0\rangle$ para obter o estado em um instante t $|\alpha, t\rangle$, representado matematicamente por:

$$|\alpha, t\rangle = U(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle \; .$$

Para garantir a conservação de probabilidades do estado $|\alpha\rangle$ durante a sua evolução temporal, o operador $U$ deve ser unitário, isto é, o seu produto pelo seu operador adjunto $U^{\dagger}$, deve ser igual a 1. Se o instante t tal que $t = t_0 + dt$ (uma vez que o tempo é um parâmetro contínuo), então:

$$|\alpha, t + dt\rangle = U(t + dt, t)|\alpha, t\rangle \ .$$

É razoável, então, para atender a todas estas condições que $U(t + dt, t) = 1 - i\Omega dt$ dt, onde $\Omega$ deve ser um operador hermitiano, isto é, $\Omega^{\dagger} = \Omega$. Com isso em vista, o operador $\Omega$ deve possuir dimensões de frequência ou inverso do tempo. O autor propõe duas argumentações para descrever $\Omega$:

> “Lembramos que na velha teoria quântica, a frequência angular é postulada sendo relacionada com a energia pela relação de Planck-Einstein
>
> $$E = \hbar\omega$$
>
> Vamos tomar emprestado da mecânica clássica a ideia que a Hamiltoniana é o gerador da evolução temporal (Goldstein 1980, 407-8). É, então, natural relacionar $\Omega$ ao operador Hamiltoniano H:
>
> $\Omega = \frac{H}{\hbar}$”. (Sakurai, 1994, p.71. Tradução nossa)

Podemos observar como ele se afasta das propostas iniciais de Schrödinger, resumindo a sua analogia óptica-mecânica em duas hipóteses posteriores representacionais. Utilizando a propriedade de composição do operador $U$ (i.e., $U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)U(t_1, t_0)$), Sakurai propõe, então, $t_2 = t + dt$ e $t_1 = t$. Assim, ele mostra que:

$$U(t + dt, t_0) = U(t + dt, t)U(t, t_0) = \left(1 - \frac{iHdt}{\hbar}\right) U(t, t_0) \ .$$

E portanto:

$$U(t + dt, t_0) - U(t, t_0) = \frac{-iHdt}{\hbar} U(t, t_0) \ .$$

Aplicando para o limite $dt \to 0$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = HU(t, t_0) \ .$$

Aplicando o estado ket $|\alpha, t_0\rangle$ em ambos lados da equação, temos, então, a equação diferencial que descreve a evolução do estado $|\alpha, t\rangle$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t\rangle = H|\alpha, t\rangle \ .$$

Sakurai reconhece esta como sendo a equação de Schrödinger. Em algumas seções mais adiante, o autor recupera a equação de Schrödinger como usualmente é introduzida em livros didáticos, tomando por base o Hamiltoniano dado como $H = p^2/2\,m + V$ e o operador *momentum* dado como $\langle x'|p|\alpha\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\langle x'|\alpha\rangle$:

> “[...] reconhecemos como sendo a celebrada equação de onda dependente do tempo de E. Schrödinger, comumente escrita como
>
> $$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\psi(x,t)$$
>
> A mecânica quântica baseada na equação de onda é conhecida como **mecânica ondulatória**. Esta equação é, na verdade, o ponto de partida de muitos livros didáticos de Mecânica Quântica. Em nosso formalismo, contudo, esta é apenas a equação de Schrödinger para um estado ket escrita explicitamente na base-x [...]” (Sakurai, 1994, p.98. Tradução nossa)

Apesar de o autor analisado se utilizar de um formalismo mais atual na mecânica quântica e se afastar das propostas originais de Schrödinger, ele resgata em seu texto uma breve descrição daquilo proposto por Schrödinger e como isso se encontra próximo à mecânica matricial:

> “Ainda quando a mecânica matricial nasceu no verão de 1925, não havia imediatamente ocorrido em físicos teóricos e matemáticos de reformulá-la em forma de equações diferenciais parciais. Seis meses após o artigo pioneiro de Heisenberg, a mecânica ondulatória havia sido proposta por Schrödinger. Contudo, uma inspeção minuciosa em seus artigos mostra que ele não foi influenciado pelos trabalhos prévios de Heisenberg, Born e Jordan. Ao invés, a linha de raciocínio que levou Schrödinger a formular a mecânica ondulatória tem raízes na analogia de Hamilton entre a óptica e a mecânica [...] e a hipótese da partícula-onda de De Broglie. Uma vez que a Mecânica Ondulatória foi formulada, muitas pessoas, inclusive Schrödinger, mostraram a equivalência entre a mecânica ondulatória e a mecânica matricial” (Sakurai, 1994, p. 100. Tradução nossa) .

### 4.2.5 Quantum Mechanics – Merzbacher (1998)

As tabelas 15 e 16 apresentam, respectivamente, a organização praxeológica e a estrutura de hipóteses presentes no texto.

Tabela 15 - Organização Praxeológica de Merzbacher (1998)

| Tipo de Tarefa | Técnica | Tecnologia | Teoria |
|---|---|---|---|
| Postular uma equação que descreve o comportamento de uma função de onda que representa uma amplitude de probabilidade | Explorar as características de um pacote de ondas para um potencial constante | Um pacote de ondas em um potencial constante é gerado a partir de uma equação que pode ser postulada para qualquer tipo de potencial | Ondulatória |

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 16 - Estrutura de Hipóteses de Merzbacher (1998)

| Hipóteses | Cosmovisivas | Ontológicas | Representacionais |
|---|---|---|---|
| A priori | | A função de onda representa uma amplitude de probabilidade | A hipótese de De Broglie relaciona o *momentum* de uma partícula ao comprimento de onda de uma onda plana e harmônica |
| Posteriores | | | A velocidade de grupo do pacote de ondas é igual à velocidade da partícula |
| Derivadas | | | A hipótese de Planck é uma consequência da conservação de energia e da hipótese de De Broglie |
| | | | A equação de Schrödinger retorna a EHJ a menos de um termo que depende do laplaciano da função-ação S |

Fonte: elaborada pelo autor

O livro didático de Merzbacher inicia o Capítulo 3 introduzindo a equação de Schrödinger como um postulado a partir de uma generalização do comportamento de uma partícula livre, a isto classificamos como uma tarefa:

"Uma generalização direta da equação de onda da partícula livre para o caso do movimento de uma partícula de massa m em um campo de força representado por uma função de energia potencial V(x,y,z,t), a qual depende da posição r e possivelmente do tempo t é a equação

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r,t) + V(x,y,z,t)\psi(r,t)$$

Schrödinger avançou nesta equação alegando que o mesmo raciocínio levou de $[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r,t) + V\psi(r,t)]$ para $[\frac{\partial S(r,t)}{\partial t} + \frac{[\nabla S(r,t)]^2}{2m} - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S(r,t) + V = 0]$ em um potencial constante, impondo $\psi = e^{iS/\hbar}$[...]" (Merzbacher, 1998, p. 25. Tradução nossa).

Merzbacher comete um equívoco histórico ao afirmar que Schrödinger parte da nossa conhecida Equação de Schrödinger para mostrar que em sua estrutura, ao assumirmos $\psi = e^{iS/\hbar}$, está presente a EHJ a menos de um termo que depende do laplaciano da função ação S. Pela análise de Schrödinger (1926), podemos notar que Schrödinger faz o oposto, saindo de uma interpretação geométrica da EHJ para servir de base para a justificativa de uma construção ondulatória para o comportamento da partícula. Entendemos que o autor afirma isso para sustentar o seu postulado que a equação de onda também descreve potenciais não constantes.

Como técnica para essa tarefa, o autor explora as características de um pacote de ondas, no capítulo anterior à introdução da Equação de Schrödinger. Primeiro, para relacionar o movimento da partícula à propagação de uma onda plana e harmônica, ele admite a hipótese de Planck ($p = \hbar k$), classificada aqui como uma hipótese representacional *a priori*.

Para formar um pacote de ondas, Marzbacher garante a superposição das funções de onda e deduz relações de incerteza entre *momentum* e posição. Então, ele explora o movimento do pacote de ondas e a velocidade de grupo, a qual:

"[em] Nossa interpretação, baseada na correspondência entre a mecânica clássica e a mecânica quântica, nos leva a identificar a velocidade de grupo da onda $\psi$ com partícula de velocidade média $\hbar k/m$, onde m é a massa da partícula e o movimento não relativístico da partícula foi assumido." (Merzbacher, 1998, p.19-20. Tradução nossa)

Esta é uma hipótese representacional posterior em seu texto. De forma muito curiosa, partindo desse pressuposto e que a conservação de energia é válida para esta partícula, Merzbacher obtém a hipótese de Planck como algo derivado dessas outras hipóteses, e não como uma hipótese *a priori* ou posterior como visto em outros textos.

Se a velocidade de grupo é dada por $\nabla_k \omega$, então é possível escrever o *momentum* da partícula de duas formas, e igualá-las:

$$m\nabla_k \omega = \hbar k \ .$$

Integrando esta equação, temos que:

$$\omega(k) = \frac{\hbar}{2m}|k|^2 + constante \ .$$

Multiplicando toda equação por ħ e assumindo essa nova constante como o potencial constante ao qual o pacote de ondas está submetido, temos que:

$$\hbar\omega(k) = \frac{\hbar^2}{2m}|k|^2 + V = \frac{p^2}{2m} + V \ .$$

Mostrando que $\hbar\omega$ é a energia da partícula.

Uma outra forma de representar o pacote de ondas, segundo Merzbacher, é através de uma equação diferencial:

> “Apesar da representação (de Fourier) da onda plana dar uma forma geral para uma função de onda de uma partícula livre, outras representações são úteis. Estas são convenientemente obtidas através de uma equação de onda para este movimento. Devemos obter uma equação diferencial parcial que admita [um pacote de ondas] como solução geral, desde que a relação entre $\omega$ e k seja dada pela fórmula de dispersão [$\hbar\omega(k) = \frac{\hbar^2}{2m}|k|^2 + V$]” (Merzbacher, 1998, p. 22. Tradução nossa).

Assumindo então que a solução deva ser uma superposição de ondas planas $e^{i(k\cdot r-\omega.t)}$, a equação diferencial que atende essas características é:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r,t) + V\psi(r,t) \ .$$

Esta equação atende apenas partículas livres, ou seja, potencial constante. Contudo, Merzbacher postula esta equação como o caso geral, ou seja, um potencial que depende da posição e do tempo.

### 4.2.6 Quantum Physics – Gasiorowicz (2003)

As tabelas 17 e 18 apresentam, respectivamente, a organização praxeológica e a estrutura de hipóteses presentes no texto.

Tabela 17 - Organização Praxeológica de Gasiorowicz (2003)

| Tipo de Tarefa | Técnica | Tecnologia | Teoria |
|---|---|---|---|
| Obter uma função de onda, cujo módulo representa a probabilidade de encontrar o elétron em um dado instante e posição | Obter a equação diferencial que retorna como solução um pacote de ondas de uma partícula livre | Sabendo a equação diferencial para uma partícula livre, é possível postulá-la como válida para um potencial qualquer | Ondulatória |

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 18 - Estrutura de Hipóteses de Gasiorowicz (2003)

| Hipóteses | Cosmovisivas | Ontológicas | Representacionais |
|---|---|---|---|
| A priori | | O módulo da função de onda representa a probabilidade de encontrar o elétron | O *momentum* e a energia da partícula se relacionam com a função de onda pelas relações de De Broglie e de Planck |
| Posteriores | | A energia se conserva pela relação $E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ | A velocidade de grupo do pacote de ondas é a velocidade da partícula |
| Derivadas | | | A Equação de Schrödinger é obtida a partir de um caso específico. |

Fonte: elaborada pelo autor

Gasiorowicz (2003), primeiramente, no capítulo que introduz a Equação de Schrödinger, descreve um pacote de ondas em termos de sua frequência angular e de seu número de onda. Após, ele discute a interpretação dada para a função de onda, cujo módulo descreve a probabilidade de encontrar o elétron, que aqui encontramos como uma hipótese ontológica *a priori*, em seu texto. Então, ele pretende, identificado aqui como uma tarefa, obter uma função de onda de uma partícula que se move em um potencial qualquer. A técnica que o autor utiliza é obter a equação diferencial que retorna como uma solução o pacote de ondas já estudado, o qual descreve o movimento de uma partícula livre, isto é, em um potencial constante:

> "Nós construímos a função de onda que pode ser usada para descrever satisfatoriamente a probabilidade de encontrar um elétron movendo-se livremente em x, em um instante t. Nós fazemos esta conexão com a física lembrando primeiro que de acordo com De Broglie $k = p/\hbar$, e como sugerido pela relação de Planck, $\omega = E/\hbar$." (Gasiorowicz, 2003, p. 30. Tradução nossa)

O discurso tecnológico que permeia a discussão sobre a Equação de Schrödinger se baseia em uma ideia de generalização da equação diferencial para uma partícula livre para uma partícula submetida a qualquer potencial. Estas hipóteses representacionais *a priori* que se referem às relações de De Broglie e de Planck, apresentadas no trecho acima, se justificam para o autor, pois para uma partícula livre a energia é dada por $E = \frac{p^2}{2m}$, assim, é possível mostrar que a velocidade de grupo do pacote de ondas é igual a $\frac{p}{m}$, que é a velocidade da partícula. Isto é uma hipótese representacional posterior na estrutura do seu texto.

Se o pacote de onda é escrito como:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\phi(p) e^{\frac{i(px-Et)}{\hbar}} ,$$

é possível aplicar derivadas temporais e espaciais sobre o pacote de ondas, e observar uma igualdade entre as operações a partir da relação entre energia e *momentum*, pois:

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\phi(p) E(p) e^{\frac{i(px-Et)}{\hbar}} ,$$

e:

$$\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\phi(p) p^2 e^{\frac{i(px-Et)}{\hbar}} .$$

Então, é possível escrever para um potencial nulo – partícula livre – que:

$$i\hbar \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} .$$

Para o autor,

> “Esta é a **Equação de Schrödinger** para uma partícula livre. Apesar de começarmos com a solução desta equação, a equação tem precedência sobre a solução. [...] podemos generalizar a equação da energia com a presença do potencial V(x)
>
> $$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$
>
> para Equação de Schrödinger geral
>
> $$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$$
>
> ” (Gasiorowicz, 2003, p. 31. Tradução nossa).

O texto de Gasiorowicz, assim como outros publicados anteriormente, segue o padrão de obter a equação de Schrödinger para uma partícula livre e generalizá-la para uma partícula submetida a qualquer potencial, isto é uma hipótese representacional derivada e caracteriza um afastamento do texto daquilo proposto inicialmente por Schrödinger.

### 4.2.7 Introduction to Quantum Mechanics – Griffths (2005)

As tabelas 19 e 20 apresentam, respectivamente, a organização praxeológica e a estrutura de hipóteses presentes no texto.

Tabela 19 - Organização Praxeológica de Griffths (2005)

| Tipo de Tarefa | Técnica | Tecnologia | Teoria |
|---|---|---|---|
| Obter a função de onda ψ (x,t) de uma partícula | Resolver a Equação de Schrödinger | A solução da equação nos retorna uma informação básica de onde podemos tirar outras informações do sistema quântico | Mecânica Quântica |

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 20 - Estrutura de Hipóteses de Griffths (2005)

| Hipóteses | Cosmovisivas |
|---|---|
| A priori | A equação de Schrödinger tem um papel logicamente análogo à segunda lei de Newton para a Mecânica Clássica |

Fonte: elaborada pelo autor

Griffths (2005) apresenta a Equação de Schrödinger simplesmente postulando-a, como se ela fosse a equação mais fundamental da Mecânica Quântica, da mesma forma que a Segunda Lei de Newton é a equação mais fundamental para a Mecânica Clássica, uma vez que

> "O programa da mecânica clássica é determinar a posição da partícula para um dado tempo: x(t). Uma vez que a conhecemos, podemos determinar a velocidade, momentum, energia cinética e outras variáveis dinâmicas de interesse. E como determinamos x(t)? Aplicamos a segunda lei de Newton." (Griffths, 2005, p.1. Tradução nossa)

Para Griffths, então, existe uma equação análoga, cuja solução nos informa todas as variáveis que deseja-se saber a respeito do sistema quântico. Classificamos como tarefa, neste texto, obter a função de onda $\Psi(x,t)$ de uma partícula, pois é ela o ente físico que nos informará essas variáveis. Para realizar isso, a técnica identificada é resolver a Equação de Schrödinger:

> "A Mecânica Quântica aborda este problema um pouco diferente. Neste caso olhamos para a função de onda da partícula $\psi(x,t)$, e a obtemos resolvendo a Equação de Schrödinger
>
> $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+V\Psi$" (Griffths, 2005, p.1. Tradução nossa).

A justificativa tecnológica empregada nesse bloco prático é simplesmente a ideia de resolver uma equação diferencial para obter uma função que nos fornecerá informações sobre o sistema quântico. A única hipótese dentro desse bloco lógico que podemos identificar é uma hipótese cosmovisiva *a priori* a respeito das equações fundamentais em ambas teorias:

> "A equação de Schrödinger assume o papel logicamente análogo à Segunda Lei de Newton: dado condições iniciais adequadas (tipicamente $\Psi(x,0)$), a Equação de Schrödinger determina $\Psi(x,t)$ para todos os instantes futuros, assim como, na mecânica clássica, a lei de Newton determina x(t) para todos os instantes futuros." (Griffths, 2005, p.2. Tradução nossa)

Em nota de rodapé, Griffths indica ao leitor um artigo publicado por Felix Bloch, no *Physics Today,* em dezembro de 1976, onde ele poderá apreciar as origens da equação de Schrödinger. Analisando o texto de Griffths, notamos um grande distanciamento das razões que originaram a Equação de Schrödinger, sendo apresentada apenas como uma ferramenta fundamental para o entendimento da Mecânica Quântica.

### 4.2.8 Física Moderna – Caruso & Oguri (2006)

As tabelas 21 e 22 apresentam, respectivamente, a organização praxeológica e a estrutura de hipóteses presentes no texto.

Tabela 21 - Organização Praxeológica de Caruso e Oguri (2006)

| Tipo de Tarefa | Técnica | Tecnologia | Teoria |
|---|---|---|---|
| Derivar a equação de Schrödinger independente do tempo | Utilizar a analogia de Hamilton entre a óptica geométrica e a mecânica analítica | Schrödinger explorou a analogia proposta por Hamilton, para obter a equação geral de propagação de uma onda associada a um corpúsculo em um dado campo | Ondulatória; Mecânica Analítica |

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 22 - Estrutura de Hipóteses de Caruso e Oguri (2006)

| Hipóteses | Cosmovisivas | Ontológicas | Representacionais |
|---|---|---|---|
| A priori | As equações de ondas não podem ser deduzidas a partir de uma teoria ou de princípios básicos da Física | | |
| Posteriores | | A função de onda é uma quantidade auxiliar, a partir da qual podemos determinar as distribuições de probabilidade para a ocorrência dos valores das grandezas físicas associadas a uma partícula | A analogia entre a ópitca geométrica e a mecânica analítica permite descrever a equação fundamental da mecânica quântica, assim como a equação de onda descreve os raios luminosos |
| | | | A onda-piloto de De Broglie obedece à equação diferencial $$-\nabla^2\psi = \frac{p^2}{\hbar^2}\psi(r)$$ |
| Derivadas | | | A equação de Schrödinger descreve o comportamento dinâmico de uma partícula não-relativística de massa m e energia E, em uma dada região do espaço, sujeita à ação de um campo de forças cuja energia potencial de interação é V(r), por meio de um campo escalar, representado por uma função de onda ψ(r) |

Fonte: elaborada pelo autor

Caruso e Oguri (2006) abrem a seção na qual introduzem a Equação de Schrödinger discutindo uma hipótese cosmovisiva *a priori* a respeito de como as equações fundamentais na Física Clássica e na Física Quântica são estabelecidas de formas diferentes:

> "Na Física Clássica, as leis e as equações fundamentais, como as leis de Newton e as equações de Maxwell, são utilizadas para a dedução de outras equações de caráter geral que cobrem uma ampla gama de fenômenos [...].
>
> Na Física Quântica, no entanto, as chamadas equações de ondas, que descrevem o comportamento de partículas materiais [...] não podem ser deduzidas a partir de uma teoria ou de princípios básicos da Física. As equações de ondas quânticas são propostas e aceitas a partir de suas consistências teóricas e da compatibilidade de suas consequências com os resultados experimentais" (Caruso e Oguri, 2006, p. 442).

A Física Quântica deverá se valer, então, de proposições que sejam consistentes teoricamente, cujas equações fundamentais não podem ser deduzidas a partir de uma teoria ou de princípios básicos da Física. Os autores, portanto, têm a intenção de deduzir a Equação de Schrödinger por um caminho semelhante que ele mesmo tomou através da analogia de Hamilton:

> "[Schrödinger] aprofundando a analogia assinalada (...) por Hamilton, entre a Óptica Geométrica e a Mecânica Analítica, conseguiu escrever a equação geral de propagação, válida na aproximação não-relativística, para uma onda associada a um corpúsculo em um dado campo (...)" (De Broglie, apud Caruso e Oguri, 2006, p. 443).

Esta é a técnica - utilizar a analogia de Hamilton - na qual os autores irão se fundamentar para realizar a sua tarefa. Há uma aproximação daquilo que Schrödinger se utilizou para obter a sua equação. Contudo, os autores não mencionam os princípios de Hamilton e de Fermat. Ao invés, das equações integrais contidas nesses princípios, trazem equações diferenciais equivalentes. Para os raios luminosos, que viajam em um meio óptico de índice de refração n(r) que varia ponto a ponto, temos que:

$$\vec{\nabla} n = \frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) ,$$

onde ds é um arco infinitesimal da trajetória do raio luminoso. É possível obter uma equação semelhante para o movimento de uma partícula sujeita a um potencial V(r). Pela segunda lei de Newton, escrita em termos do *momentum* p e do potencial V, temos:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla} V(r) ,$$

onde o módulo do *momentum* é tal que $p = [2m(E - V)]^{½}$. Na intenção de obter uma equação equivalente para o movimento da partícula, sem explicitar o tempo t, os autores reescrevem $\vec{\nabla}V$ a partir do gradiente do módulo do *momentum*, que pode ser escrito como:

$$\vec{\nabla}p = \frac{\partial p}{\partial V}\vec{\nabla}V = \frac{-m}{p}\vec{\nabla}V \ .$$

Logo, $\vec{\nabla}V = \frac{-p}{m}\vec{\nabla}p$ .

Os autores reescrevem dp/dt em termos do arco infinitesimal da trajetória da partícula ds como:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{p}}{ds} = \frac{p}{m}\frac{d}{ds}\left(m\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{p}{m}\frac{d}{ds}\left(m\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{p}{m}\frac{d}{ds}\left(p\frac{d\vec{r}}{ds}\right) .$$

Então, pela segunda lei de Newton, é válido que:

$$\vec{\nabla}p = \frac{d}{ds}\left(p\frac{d\vec{r}}{ds}\right) .$$

Vale ressaltar que o módulo do *momentum* é escrito como $p = [2m(E - V)]^{½}$ .

O discurso tecnológico que permitirá a realização dessa analogia está fundamentado nos discursos do próprio Schrödinger e na hipótese cosmovisiva dos autores discutida inicialmente. Os autores se utilizarão da equivalência e semelhança entre as equações que descrevem a trajetória de um raio luminoso e de uma partícula. A partir dessa analogia, podemos observar que o módulo do *momentum* e o índice de refração desempenham papéis semelhantes para as trajetórias. Assim, segundo os autores:

> "[...] a trajetória de uma partícula de massa m e energia e, em uma região onde sua energia potencial é dada por $V(\vec{r})$, é idêntica à trajetória de um raio de luz, em um meio de índice de refração $n(\vec{r})$ proporcional a $[E - V(\vec{r})]^{½}$" (Caruso e Oguri, 2006, p. 444).

Esta relação entre ambas descrições é considerada por nós como uma hipótese representacional posterior na estrutura do texto dos autores, pois esta comparação entre as teorias é uma forma de representar o movimento da partícula. O raio luminoso pode ter a sua trajetória descrita por uma onda eletromagnética, que se propaga em um meio não-homogêneo segundo a equação de Helmholtz, que trata o operador laplaciano como um problema de autovalor ($\nabla^2 f = -k^2 f$). Assim:

$$-\nabla^2\psi = n^2(\vec{r})\psi \ .$$

Como a analogia diz que $n^2 \sim p^2$, supõe-se que a onda-piloto de De Broglie obedece à equação diferencial, $-\nabla^2\psi = \frac{p^2}{\hbar^2}\psi(r)$. Esta é uma hipótese representacional posterior para descrever o comportamento da função de onda $\psi$. Os autores definem uma onda-piloto em seções anteriores como um pacote de ondas monocromáticas, cuja velocidade de grupo é a velocidade da partícula. Se o módulo do *momentum* é tal que 2m(E-V), então a equação de onda quântica é tal que:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \ .$$

Onde ħ tem dimensões de *momentum* angular. Para os autores essa equação de onda:

> "[...] descreve o comportamento dinâmico de uma partícula não-relativística de massa m e energia E, em uma dada região do espaço, sujeita à ação de um campo de forças cuja energia potencial de interação é $V(r)$, por meio de um campo escalar, representado por uma função de onda $\psi(r)$" (Caruso e Oguri, 2006, p. 445).

Esta descrição é uma hipótese representacional derivada no texto. Os autores admitem, como uma hipótese ontológica posterior, a interpretação para a função de onda estabelecida por Max Born em 1926, que, segundo os autores:

> "Essa interpretação da função de onda, como uma quantidade auxiliar a partir da qual pode-se determinar as distribuições de probabilidade para a ocorrência dos valores das grandezas físicas associadas a uma partícula, só foi estabelecida por Max Born, em 1926 [...]" (Caruso e Oguri, 2006, p. 445)

É notável no texto dos autores como eles se aproximam do discurso tecnológico de Schrödinger, isto é, relacionar os movimentos da trajetória de um raio luminoso com a trajetória de uma partícula. Por outro lado, podemos notar um afastamento já que se utilizam de outros princípios, que equivalem ao princípio de Fermat e de Maupertuis, para realizar a analogia entre Óptica e Mecânica Clássica. E, apesar de estar implícito em seu texto, e discutido em outros momentos ao longo do livro didático, não há comentários sobre a importância das hipóteses de Planck e de De Broglie.

## 4.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nas fontes primárias escritas por Schrödinger (1926a,1926b,1928), podemos notar que a equação de onda “aliada”, conhecida hoje como a Equação de Schrödinger, é obtida de três formas distintas que não se distanciam entre si. Nos livros didáticos selecionados para análise, podemos observar que cada autor faz a sua própria dedução conforme as suas próprias concepções de didatização deste conhecimento. Ainda assim, há uma certa aproximação entre estes textos também em suas estruturas de hipóteses, evidenciando um certo paradigma didático. Vale destacar também que o nível de especificidade de cada organização praxeológica é dependente do autor que a analisa, dessa forma, identificamos textos com níveis diferentes de especificidade de praxeologias, pois estes níveis foram sendo identificados conforme o texto elabora a sua derivação da Equação de Schrödinger. Esta seção tem por objetivo discutir as transformações didáticas pelas quais a Equação de Schrödinger passou nestes livros, utilizando como base as tabelas geradas nas duas seções anteriores.

Analisando as tabelas praxeológicas e de estruturas de hipóteses das fontes primárias, podemos constatar que alguns aspectos são importantes para Schrödinger ao descrever o movimento de uma partícula quântica por meio de uma equação. Dessa forma, podemos delinear um Modelo Epistemológico de Referência para Schrödinger calcado em quatro pontos destacados aqui. *Primeiro ponto:* é necessário utilizar um formalismo da Mecânica, pois trata-se do movimento de uma partícula. Desse modo, a equação que melhor se adequa para Schrödinger é a Equação de Hamilton-Jacobi, uma vez que é possível obter, a partir dela, a trajetória da partícula, a conservação de energia, o princípio de minimização da ação, os *momenta* generalizados, e superfícies que possuem movimento sincronizado com o movimento da partícula, cuja velocidade corresponde à velocidade de fase de uma onda. *Segundo:* a comparação entre o Princípio de Fermat e o princípio de Hamilton/Maupertuis se mostra importante também, uma vez que estes princípios possuem estrutura semelhante, descrevem trajetórias da luz e da partícula clássica, respectivamente, e falham ao descrever fenômenos cujos comprimentos característicos se assemelham a um parâmetro chamado comprimento de onda. *Terceiro:* existe a necessidade de uma relação entre energia e frequência, pois dessa forma a velocidade de fase da onda depende da frequência gerando uma lei de dispersão, cujas consequências são a relação entre a velocidade de grupo e a velocidade da partícula, e a relação entre *momentum* e comprimento de onda é obtida tal qual a hipótese de De Broglie, mas sem utilizar de argumentos relativísticos. *Quarto:* a partícula deve ser descrita por uma equação diferencial tal qual a equação de onda, e se deve partir dela para que se possa obter uma equação generalizada.

Antes de explorarmos esses quatro pontos e como os livros didáticos se aproximam ou se afastam deles, é importante nos atentarmos à questão de que todos os livros analisados, com exceção de Caruso e Oguri (2006), apresentam, inicialmente, a Equação de Schrödinger dependente do tempo, que seria a sua forma mais geral, enquanto os problemas que motivam Schrödinger, inicialmente, o levam ao correspondente da Equação de Schrödinger independente do tempo. Schrödinger (1926c) generalizou a sua equação quando necessitou trabalhar com campos potenciais dependentes do tempo, para dar conta de explicar problemas de perturbação. Por si só, esse fato já evidencia uma descontextualização e dessincretização dos livros didáticos. Contudo, para Schrödinger (1926c), obter a equação dependente do tempo é, de fato, simples:

> “Portanto, nas discussões seguintes, eu tomei uma rota diferente que se torna muito simples para os cálculos, e a qual considero é justificado em princípio. [...] A dependência de $\psi$ no tempo, que deve existir se $\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E-V)\psi = 0$ é válido, pode ser expresso por
>
> $$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \pm\frac{2\pi i}{h}E\psi$$
>
> [...] Chegamos, então, em uma das duas equações
>
> $\nabla^2\psi - \frac{8\pi^2}{h^2}V\psi \mp \frac{4\pi i}{h}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$” (Schrödinger, 1926c, p.104. Tradução nossa).

Portanto, não teremos perda substancial quando estivermos voltados para a análise e comparação das praxeologias e hipóteses subjacentes que fundamentam a dedução e o uso dessa equação. Na sequência, discutimos os quatro pontos identificados nas derivações originais de Schrödinger e como os livros se aproximam e se afastam desses elementos.

A Tabela 23 sintetiza os afastamentos e aproximações do texto didatizado de cada autor em relação aos originais de Schrödinger. O uso de X nas células indica que a referência analisada mobiliza o aspecto presente nas fontes originais para expor e/ou deduzir a Equação de Schrödinger.

Tabela 23 – Síntese das aproximações e afastamentos dos livros didáticos analisados em relação aos conhecimento de referência da Equação de Schrödinger.

| | Messiah (1961) | Eisberg e Resnick (1985) | Cohen-Tannoudji (1991) | Sakurai (1994) | Merzbacher (1998) | Gasiorowicz (2003) | Griffths (2005) | Caruso e Oguri (2006) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Uso da Equação de Hamilton-Jacobi | | | | | | | | |
| Comparação entre os Princípios de Fermat e de Hamilton | X | | | | | | | X |
| Uso da Lei de dispersão por $E = h\nu$ | X | | | | | | | |
| Partícula descrita como uma Equação de Onda | | | | | | | | X |

Fonte: elaborada pelo autor

### 4.3.1 Equação de Hamilton-Jacobi

Podemos identificar que a intenção inicial de Schrödinger é descrever a partícula quântica através da Mecânica Clássica, teoria bem estabelecida na comunidade científica, diferente da descrição concorrente da Mecânica Matricial de Heisenberg. O ponto de partida para Schrödinger (1926a, 1926b) é a Equação de Hamilton-Jacobi, pois a partir dela podemos descrever a conservação de energia, a trajetória da partícula e os *momenta* generalizados. Além disso, ela descreve superfícies no espaço de configuração cujos movimentos se assemelham à frente de ondas, o que permite a Schrödinger relacionar diretamente com o Princípio de Huygens e obter a velocidade de fase dessas frentes de ondas. Dessa forma, é possível conectar o movimento da onda ao movimento da partícula.

Todos os livros analisados se distanciam dessa perspectiva ao deduzir a Equação de Schrödinger. Porém, todos utilizam apenas a conservação da energia mecânica da partícula, o que seria um recorte da Equação de Hamilton-Jacobi, com exceção de Griffths (2005), que apenas postula a Equação de Schrödinger. O próprio Schrödinger (1928), no Four Lectures, abandona a análise pela Equação de Hamilton-Jacobi, fazendo necessária a obtenção da velocidade de fase por uma comparação entre os princípios de Fermat e de Maupertuis, enquanto que, no primeiro artigo, Schrödinger (1926a) utiliza a Equação de Hamilton-Jacobi para gerar um princípio variacional, utilizando a função $\psi$ como um campo.

Podemos observar, então, uma descontextualização entre os Modelos Epistemológicos traçados de Schrödinger e dos livros originais, que ocorre na didatização desse conhecimento.

Vale ressaltar que existe uma equivalência entre a Equação de Schrödinger e a Equação de Hamilton-Jacobi. Quando levamos a primeira para o limite clássico, isto é, $\hbar \rightarrow 0$, podemos obter a segunda, utilizando uma substituição do tipo $\psi = e^{\frac{iS}{\hbar}}$. A equação de Schrödinger $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r,t) + V\psi(r,t)$, após a substituição, se torna $\frac{1}{2m}|\nabla S|^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S = 0$, onde, no limite clássico $\hbar \rightarrow 0$, esta equação se torna a Equação de Hamilton-Jacobi. Essa equivalência é discutida, em algum momento, nos livros didáticos analisados dos autores Messiah (1961) e Sakurai (1994).

### 4.3.2 Princípios de Fermat e de Hamilton/Maupertuis

Schrödinger (1926b, 1928) entende que há uma analogia a ser feita entre a mecânica clássica e a óptica geométrica, pois a última não descreve a trajetória da luz para fenômenos em que os comprimentos característicos são comparáveis à ordem de grandeza do comprimento de onda, como a difração, por exemplo. Ao encontro disso, a mecânica clássica também falha para dimensões muito pequenas (que serão comparáveis ao comprimento de onda de De Broglie), e ambas são descritas por princípios variacionais, como Princípio de Fermat para a Óptica Geométrica e o Princípio de Hamilton ou Princípio de Maupertuis (que se mostram equivalentes em condições específicas) para a Mecânica Clássica. Essa analogia permite a Schrödinger obter um comportamento ondulatório associado à trajetória da partícula, assim como é feito para a trajetória da luz. Para Schrödinger (1926a), esta analogia não se faz presente.

Nos livros analisados Eisberg e Resnick (1985), Cohen-Tannoudji (1991), Sakurai (1994), Merzbacher (1998), Gasiorowicz (2003) e Griffths (2005) não mencionam essa analogia, indicando uma descontextualização das ideias que originaram a Equação de Schrödinger. Messiah (1961) utiliza os princípios de Fermat e de Hamilton (chamado no livro didático como princípio de mínima ação), contudo, utiliza a correspondência entre ambos para obter a relação entre o número de onda e o *momentum*, e não para obter a velocidade de fase. Portanto, ele utiliza os princípios nas formas $\delta \int_{M_1}^{M_2} k \cdot dr = 0$ (Fermat) e $\delta \int_{M_1}^{M_2} p \cdot dr = 0$ (Mínima ação), diferentemente das formas utilizadas por Schrödinger (1926b, 1928), $\delta \int_A^B \frac{ds}{u} = 0$ e $\delta \int_A^B \sqrt{2m(E-V)}ds = 0$, apresentando uma dessincretização no processo de didatização. De forma semelhante, Caruso e Oguri (2006) também partem de uma analogia entre a óptica e a mecânica clássica, porém a sua intenção é mostrar a equivalência entre o módulo do *momentum* da partícula e o índice de refração do meio por onde a luz se propaga, também indicando uma dessincretização do conhecimento. Os princípios são apresentados na forma diferencial, ao invés da forma do princípio variacional, $\vec{\nabla} n = \frac{d}{ds}\left(n \frac{d\vec{r}}{ds}\right)$ (trajetória para o raio de luz) e $\vec{\nabla} p = \frac{d}{ds}\left(p \frac{d\vec{r}}{ds}\right)$ (trajetória para a partícula).

Apesar dessa dessincretização, consideramos importante a aproximação feita pelos autores. Ainda que se valham de um formalismo diferente, a concepção original de Schrödinger é evocada. O motivo da variação no formalismo pode se dever ao fato de, atualmente, não ser tão usual tratar a Equação de Hamilton-Jacobi na graduação. Assim, os livros conseguem, usando um formalismo mais usual, sustentar a proposta original.

### 4.3.3 Lei de Dispersão por $\boldsymbol{E = h\nu}$

Uma das principais características da Mecânica Ondulatória de Schrödinger é associar o movimento de uma partícula a um processo ondulatório. Para tanto, Schrödinger (1926b, 1928) necessita não só relacionar características ondulatórias e características mecânicas, mas também mostrar que é possível descrever o movimento da partícula através do movimento do processo ondulatório. Tendo em mãos a dependência da velocidade de fase com o *momentum* da partícula, é possível notar que ambos são inversamente proporcionais, $u = \frac{E}{p}$. A forma encontrada por Schrödinger de relacionar fortemente ambos movimentos é através da velocidade grupo de um pacote de ondas em um meio dispersivo, a qual deve ser igual à velocidade da partícula. Para que isso ocorra, ele propõe a relação mais simples entre energia e frequência, $E = h\nu$, a qual estava em voga na comunidade científica. Em seus textos, Schrödinger (1926b, 1928) não chama esta relação como hipótese ou relação de Planck, como a conhecemos atualmente.

Interessante notar que, para Schrödinger (1926a), essa relação não se faz necessária, uma razão é que a aplicação da Equação de Hamilton-Jacobi em um problema variacional. Utilizando $S = K.ln\psi$, leva-se diretamente à Equação de Schrödinger. Outra razão é que o autor não estava tentando relacionar o movimento da partícula a um processo ondulatório para deduzir a sua equação, mas ao fim do artigo ele postula que $K = \frac{h}{2\pi}$ para que os níveis de energia do elétron do átomo de Hidrogênio estejam de acordo com os níveis de energia de Bohr.

A relação entre energia e frequência nos leva a identificarmos, também, uma relação entre *momentum* e comprimento de onda, que é conhecida como hipótese de De Broglie. Originalmente, De Broglie (1924) obtém esta relação por argumentos relativísticos; Schrödinger obtém esta relação com argumentos dentro da própria Mecânica Ondulatória. Se a velocidade de fase é tal que $u = \frac{E}{p}$, e é válida a relação $E = h\nu$, então o comprimento de onda é dado por $\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{\frac{E}{p}}{\frac{E}{h}} = \frac{h}{p}$. No texto de Schrödinger (1926b), a hipótese de De Broglie é, dentro da Mecânica Ondulatória, uma consequência da hipótese de Planck (ou da relação de dispersão entre energia e frequência) e da relação obtida da analogia entre óptica e mecânica clássica.

Messiah (1961) relaciona os princípios de mínima ação e de Fermat para obter a relação de De Broglie através da relação entre a velocidade de grupo e a velocidade da partícula, se aproximando da praxeologia de Schrödinger. Contudo, a falta do tratamento da velocidade de fase na sua praxeologia demonstra indícios de uma certa descontextualização.

Caruso e Oguri (2006) não utilizam esta relação em sua estrutura praxeológica, no capítulo da dedução da Equação de Schrödinger. O que fundamenta a sua dedução no capítulo a respeito dela é a hipótese de De Broglie. A velocidade de grupo e a relação entre energia e frequência são discutidas em capítulos anteriores, que discutem a hipótese de De Broglie, através do formalismo relativístico que De Broglie mobiliza em seu original. Isso demonstra, de certa forma, uma dessincretização e descontextualização em torno da Equação de Schrödinger.

Eisberg e Resnick (1985) e Gasiorowicz (2003) possuem uma praxeologia semelhante e colocam a hipótese de Planck e de De Broglie no mesmo nível, isto é, como se uma não fosse derivável da outra, para poder justificar a construção de um pacote de ondas monocromáticas (ondas planas) em um meio de potencial constante, onde o *momentum* da partícula é constante, portanto. Cohen-Tannoudji (1991) também coloca essas hipóteses a nível de igualdade em sua estrutura de hipóteses, contudo, diferentemente dos outros autores, postula a Equação de Schrödinger como sendo consistente com ambas as hipóteses. Griffths (2005) não discute esta relação no capítulo que introduz a Equação de Schrödinger.

É identificado neste trabalho que Merzbacher (1998) curiosamente coloca, em sua estrutura de hipóteses, a hipótese de De Broglie como uma hipótese *a priori* e a igualdade entre velocidade de grupo e velocidade de partícula como posterior, e com elas em mãos, é deduzida a relação de Planck.

Sakurai (1994) utiliza a relação $E = h\nu$ para justificar como um operador hermitiano $\Omega$ que será aplicado sobre uma função de onda para descrever a sua evolução temporal deve se comportar. A justificativa para seu uso é que o operador em questão possui dimensão de inverso do tempo, e como o hamiltoniano descreve, na mecânica clássica, a evolução temporal de uma variável ($\frac{dA}{dt} = [A, H]_{q_k, p_k} + \frac{\partial A}{\partial t}$), há uma forte sugestão para que esse operador seja tal que $\Omega = \frac{H}{h}$.

### 4.3.4 Equação de Onda

Influenciado pelas ideias de De Broglie, é natural que nos trabalhos de Schrödinger (1926a, 1926b, 1928) busque-se uma equação de onda para descrever o movimento da partícula. Como a ondulatória é uma teoria que descreve com maior sucesso o fenômeno da luz do que a óptica geométrica, sendo essa um caso específico daquela para quando temos comprimentos de onda pequenos em comparação aos comprimentos característicos do problema, a sua analogia entre óptica e mecânica clássica o leva a postular a equação de onda $\nabla^2\psi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$ como uma base para a mecânica ondulatória.

Em Schrödinger (1926a), isto está implícito em seu texto de duas formas. Primeiramente, ele busca uma equação que tenha estrutura semelhante à equação da onda, é transparecido no texto que ele já sabe em qual resultado ele pretende chegar, e isso o faz aplicar a Equação de Hamilton-Jacobi em um problema variacional. Em segundo lugar, como é natural utilizarmos separação de variáveis pelo produto $\psi(r,t) = F(r).G(t)$ para resolver tal equação, ele impõe uma troca de variáveis na Equação de Hamilton-Jacobi para atingir este objetivo: $S = K.ln\psi$.

Em Schrödinger (1926b), após fundamentar a sua analogia entre óptica e mecânica clássica e seus respectivos domínios de validade, a partir da equação de onda, da velocidade de fase obtida pela Equação de Hamilton-Jacobi e da suposição que função $\psi$ deva depender de um fator $e^{i2\pi\nu t}$ – uma vez que a energia se conserva – Schrödinger obtém a sua equação. Em Schrödinger (1928), esta praxeologia é muito semelhante, a diferença é que ele contextualiza a função de onda para descrever a pressão de um fluido elástico confinado.

Podemos identificar indícios de uma descontextualização e dessincretização desse conhecimento nos textos analisados de Messiah (1961), Merzbacher (1998), Eisberg e Resnick (1985) e Gasiorowicz (2003), pois os autores partem de uma solução conhecida para um potencial constante, onde o *momentum* é constante – um pacote de ondas ou sobreposição de ondas planas monocromáticas – e aplicando operadores sobre essa solução, e fundamentados pela conservação de energia, os autores encontram uma equação válida que retornaria tal solução: $\nabla^2\psi(r,t) + V\psi(r,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t}$. A descontextualização aparece no momento em que eles devem postular essa equação para qualquer potencial $V = V(r,t)$. Schrödinger não faz o uso de pacotes de ondas em potencial constante e tampouco da ideia de operadores, sendo esta uma evidencia de dessincretização no processo de didatização.

No texto de Sakurai (1994), a equação de onda não se faz necessária, pois o autor obtém a evolução de um estado por argumentos através de operadores, obtendo a Equação de Schrödinger na forma $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha,t\rangle = H|\alpha,t\rangle$, onde H, o hamiltoniano, é descrito por $\frac{p^2}{2m} + V$. Em sua estrutura de hipóteses, o *momentum* é descrito como um operador que atua sobre a função de onda. Esta abordagem pela qual o autor opta, mostra um processo de dessincretização e descontextualização.

Caruso e Oguri (2006), mais uma vez, se aproximam da praxeologia de Schrödinger, optando pelo caminho da analogia entre óptica e mecânica clássica. Os autores evocam a equação de onda para descrever os raios luminosos através da equação de Helmholtz, $-\nabla^2\psi n(r)^2\psi$, e a analogia mostra que o índice de refração n, faz o mesmo papel do *momentum* da partícula. Portanto, com essa fundamentação os autores podem equacionar $-\nabla^2\psi = \frac{p^2}{\hbar^2}\psi$, e a partir dela obter a Equação de Schrödinger pela relação $p^2 = 2m(E - V)$. É notável que, dentre todos os autores analisados, estes são os únicos a obter, primeiramente, a Equação de Schrödinger dependente do tempo. Existe, aqui, um leve indício de dessincretização e descontextualização, pois os autores relacionam os papéis entre o índice de refração e do *momentum* em ambas teorias, enquanto que Schrödinger não faz essa relação. Este relaciona apenas *momentum* e velocidade de fase das ondas, o que seria, de certa forma, equivalente ao tratamento daqueles.

Cohen-Tannoudji (1991) e Griffths (2005) são autores que postulam a Equação de Schrödinger como a equação fundamental para descrever o comportamento de partículas quânticas. Portanto, a discussão em torno da equação de onda fica apagada, mostrando uma descontextualização das razões que originaram a Equação de Schrödinger.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O processo de didatização de um conhecimento é importante para a sua difusão, principalmente em um sistema didático. Retomando as questões de pesquisa propostas nesta dissertação, que se baseiam na elaboração de Modelos Epistemológicos de Referência, através da análise das organizações praxeológicas e das estruturas de hipóteses estabelecidas nestes modelos, propostos originalmente por Erwin Schrödingere pelos livros didáticos e como estes se afastam ou se aproximam entre si, podemos responder que pelo estudo realizado nessa dissertaçãoexiste um afastamento entre estes Modelos Epistemológicos de Referência dos originais de Schrödinger e dos capítulos dos livros didáticos sobre a Equação de Schrödinger. Esse afastamento se dá, principalmente, por processos de descontextualização e dessincretização do conhecimento. Os processos de despersonalização não são evidenciados ou acontecem muito pouco, pois pela natureza dos textos analisados, não é possível obter com clareza do ocultamento ou não de personagens históricos.

Levantou-se quatro pontos importantes, que descrevem um Modelo Epistemológico de Referência nos originais de Schrödinger, a partir das organizações praxeológicas e estruturas de hipóteses dos blocos teóricos analisadas, para que Schrödinger realize a dedução de uma equação que descreve o comportamento de partículas quânticas, as quais são: i. A Equação de Hamilton-Jacobi; ii. A comparação entre os princípios de Fermat e de Hamilton/Maupertuis; iii. A lei de dispersão através da relação $E = h\nu$; iv. A equação de onda $\nabla^2 u = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Esses quatro pontos são necessários para Schrödinger para justificar a conexão do movimento da partícula com o seu comportamento ondulatório.

Com isso em mãos, podemos observar, a partir das organizações praxeológicas e estruturas de hipóteses dos livros didáticos, como acontecem os processos de didatização. Para muitos autores de livros didáticos estudados aqui, a partir dos Modelos Epistemológicos de Referência traçados nesta dissertação, acontece um distanciamento desses quatro pontos, pois, em sua maioria, justifica-se a Equação de Schrödinger pela descrição da fenomenologia ou por simplesmente postula-la como a descrição do comportamento ondulatório de uma partícula submetida a um potencial. Isto evidencia processos de descontextualização e, de certa forma, de dessincretização da Equação de Schrödinger.

Outros pontos que evidenciam a dessincretização e a descontextualização do conhecimento nos textos dos autores ocorrem quando eles descrevem a função de onda conforme a interpretação de Born, sendo que para Schrödinger a função de onda é apenas um processo ondulatório que acompanha o movimento da partícula e quando eles descrevem os observáveis como operadores que atuam sobre a função de onda. Apesar de não ser o foco da dissertação, a hipótese de De Broglie também se mostra descontextualizada quando mobilizada juntamente com a Equação de Schrödinger, pois De Broglie relaciona o *momentum* da partícula com um comprimento de onda do processo ondulatório através de argumentos relativísticos, enquanto Schrödinger obtém a mesma relação através da sua analogia entre Mecânica Clássica e Óptica Geométrica.

A comparação entre estes Modelos Epistemológicos de Referência aqui apresentados dos originais e dos livros didáticos através das praxeologias e das estruturas de hipóteses nos permite realizar a vigilância epistemológica em torno da Equação de Schrödinger, isto é, podemos nos questionar e analisar como e porque este é conhecimento é difundido. Para este objetivo, a estrutura de hipóteses científicas de Lima e Heidemann (2023) se mostra uma ferramenta frutífera para este tipo de análise, uma vez que podemos identificar como uma hipótese se estrutura em um texto e, assim, compará-la com o seu papel em outro texto, favorecendo também a vigilância epistemológica.

É importante ressaltar que esta dissertação não possui uma abordagem historiográfica que explora as relações entre Ciência, Tecnologia e Sociedade. Pela perspectiva adotada, não foi possível avaliar os processos de despersonalização decorrentes da didatização, assim como raramente foi possível identificar as relações dos personagens históricos envolvidos com o conhecimento. Sugerimos que trabalhos futuros sejam realizados com o objetivo de identificar essas relações com a perspectiva da transposição didática e da noção de hipótese científica. Além disso, é possível explorar, também, as relações entre as hipóteses cosmovisivas com o contexto histórico na qual elas são propostas. Outra sugestão levantada para trabalhos futuros é estudar, planejar e aplicar outras formas de introduzir a Equação de Schrödinger para formação de professores de Física. Apesar de muitos conceitos elaborados por Schrödinger já estarem superados no paradigma atual, entendemos que o olhar historiográfico gera noções adequadas sobre a Natureza da Ciência e gera confiança e significado ao futuro professor sobre os conceitos envolvidos na Equação de Schrödinger.

Esta dissertação tem intenção de contribuir para a pesquisa em Ensino de Física através da apresentação de uma forma de resgatar as razões de ser de um conhecimento, além de questionar e ressignificar as razões pelas quais este conhecimento é ensinado em uma instituição. Ela também pretende fornecer subsídios para professores e pesquisadores para estudar, planejar e aplicar outras formas de introduzir a Equação de Schrödinger para estudantes para que este conhecimento seja apresentado enriquecido com significados, favorecendo uma adequação às noções de Natureza da Ciência e, também, uma aprendizagem significativa, para que o estudante atinja uma relação em conformidade com a qual a instituição e a sociedade esperam de um estudante de graduação de uma universidade.

## REFERÊNCIAS


ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia.** São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BROGLIE, Louis de. **Recherches sur la théorie des Quanta**. Université em cours d'affectation, França, 1924.

BUNGE, Mario. **Dicionário de Filosofía**. São Paulo: Martins Fontes, 2005.
CARUSO, F.; OGURI, V. **Física Moderna:** Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos, 2ª reimpressão. São Paulo: Elsevier Editora, 2006.

COHEN-TANNOUDJI, Claude. **Quantum Mechanics.** v.1, 1ª ed. New Jersey: Wiley, 1991.

CHEVALLARD, Yves. **La Transposición Didáctica**: Del saber sabio al saber enseñado. Argentina: La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Yves. Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach. **Hiroshima Journal of Mathematics Education.** n. 12: 71 - 114, 2019.

EISBERG, R.; RESNICK, R. **Quantum Physics of atoms, molecules, solids, nuclei and particles.** 2ª ed. New York: John Wiley & Sons, 1985.

FIELD, J. H. Derivation of the Schrödinger equation form the Hamilton-Jacobi equation in Feynman's path integral formulation of quantum mechanics. **European Journal Physics.** v. 32, p. 63-87.

GÁSCON, J.; NICOLAS, P. Paradigm crisis in the step form tertiary to secondary mathematics education **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology.** v. 54, n. 5, p. 1153 - 1169, 2022.

GASIOROWICZ, S. **Quantum Physics.** 3ª ed. New York: John Wiley & Sons, 2003.

GIERE, Ronald. **Understanding Scientific Reasoning** 3ª ed. Forth Worth: Holt, Rinehart and Winston, 2011.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A.; HERSCOVITZ, V. E. Uma Proposta para o Ensino de Mecânica Quântica. **Revista Brasileira de Ensino de Física.** v. 23, 2001.

GRIFFTHS, David. **Introduction to Quantum Mechanics**, 2ª ed. London: Pearson Education, 2005.

KAISER, David. Turning physicists into quantum mechanics. **Physics World** v. 20, n. 5, May 2007.

KAISER, David. Shut up and Calculate! **Nature** v.505, p. 153-155, 2014.

KARAM, R; LIMA, N. W. Using history of physics to teach physics? **Connecting Research in Physics Education with Teacher Education.** v. 3, p. 22-38, 2022.

LIMA, N. W.; HEIDEMANN, L. A. Diferentes níveis de hipóteses científicas: uma proposta para discutir fatores epistêmicos e sociais das Ciências na formação de professores de Física a partir de fontes históricas. **Revista Brasileira de Ensino de Física.** v. 45, 2023.

MASOLIVER, J.; ROS, A. From classical to quantum mechanics through optics. **European Journal Physics.** v. 31, p. 171-192, 2010.

McCOMAS, W. F., ALMAZROA, H.; CLOUGH, M. P. The Nature of Science in Science Education: an Introduction. **Science & Education** v. 7, p. 511-532, 1998.

McCOMAS, William F. Seeking historical examples to illustrate key aspects of the nature of science. **Science & Education** v. 17, p. 249-263, 2008.

MERZABACHER, E. **Quantum Mechanics.** 3ª ed. New York: John Wiley & Sons, 1998.

MESSIAH, Albert. **Quantum Mechanics.** v. 1. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1961.

MOREIRA, Marco Antonio. **Metodologias de Pesquisa em Ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

OSTERMANN, F.; RICCI, T. S. F. Construindo uma Unidade Didática Conceitual sobre Mecânica Quântica: Um Estudo na Formação de Professores de Física. **Ciência & Educação.** v. 10, n. 2, p. 235-257, 2004.

PIETROCOLA, Maurício. A História e a Epistemologia no Ensino das Ciências: dos Processos aos Modelos de Realidade na Educação Científica. **A Ciência em perspectiva. Estudos, ensaios e debates.** Rio de Janeiro: MAST: SBHC, 2002

PIETROCOLA, M.; RICARDO, E. C.; FORATO, T. C. M. History, Didactics, and the Transformation of Scientific Content: Epistemological Surveillance and Science education Commitments. **Science Education Research in Latin America.** p.367-393. Rotterdam: Sense Publishers - Springers. 2020

POINCARÉ, Henri. **A ciência e a hipótese**. São Paulo: Associação Filosófica Scientiae Studia, 2024.

SAKURAI, Jun John **Modern Quantum Mechanics.** Edição Revisada. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

SCHRÖDINGER, Erwin. Quantisation as a Problem of Proper Values (Part I). **Annalen der Physik.** v. 79 (4), 1926a.

SCHRÖDINGER, Erwin. Quantisation as a Problem of Proper Values (Part II). **Annalen der Physik.** v. 79 (4), 1926b.

SCHRÖDINGER, Erwin. Quantisation as a Problem of Proper Values (Part III). **Annalen der Physik.** v. 80 (4), 1926c.

SCHRÖDINGER, Erwin. **Four Lectures on Wave Mechanics.** London and Glasgow: Blackie & Son Limited, 1928.

SINGH, Chandralekha. Student Difficulties with Quantum Mechanics Formalism **AIP Conference Proceedings** 883, p. 185-188, 2007.

SINGH, C.; ZHU, G. Cognitive Issues in Learning Advanced Physics: An Example from Quantum Mechanics **AIP Conf. Proc.** 1179, p. 63-66, 2009.

SINGH, C., MARSHMAN, E. Review of student difficulties in upper-level quantum mechanics. **Physical Review Physics Education Research.** v. 11. 2015.

SINGH, C., MARSHMAN, E. Students difficulties with determining expectation values in quantum mechanics. **Physics Education Research Conference Proceedings** 2016

SMALL, A.; LAM, K. S. Simple derivations of the Hamilton-Jacobi equation and the eikonal equation without the use of canonical transformations. **American Journal Physics.** v. 79, n. 6, p. 678-681, 2011.

SOUZA, R. S.; GRECA, I. M.; SILVA, I.; TEIXEIRA, E. S. Reflexões sobre o Ensino de Mecânica Quântica nos Cursos de Graduação em Física a partir de Revisão Sistemática. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências.** v. 20, p. 1363-1391, 2021.

VAZATA, P. A.V.; TREIN, P, M.; LIMA, N. W.; OSTERMANN, F. The photon is Naked: the role of textbook in the building of a common world. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências.** no prelo.

## APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTO DA INTEGRAL ESTACIONÁRIA DE SCHRÖDINGER

Se temos uma integral do tipo $J\left[y(t);\dot{y(t)}\right] = \int_a^b g(y,\dot{y},t)dt$, então, para obtermos J como uma integral estacionária para variações pequenas e arbitrárias, precisamos que $\delta J = 0$, onde

$$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial g}{\partial y}.\delta y + \frac{\partial g}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\right)dt = 0$$

No caso do texto de Schrödinger, temos que a integral é do tipo

$$J\left[\psi(q_i);\frac{\partial \psi}{\partial q_j}(q_i)\right] = \iiint dxdydz.\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi^2$$

Utilizando das propriedades do cálculo variacional $\delta J = \iiint dxdydz\left(\frac{\partial g}{\partial \psi}\delta\psi + \sum_{j=1,2,3}\frac{\partial g}{\partial\left\{\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right\}}\delta\left\{\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right\}\right)$, temos que a primeira parcela é

$$\frac{\partial g}{\partial \psi}\delta\psi = \frac{-2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right).2\psi\delta\psi$$

E a segunda parcela

$$\frac{\partial g}{\partial\left\{\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right\}}\delta\left\{\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right\} = 2\frac{\partial \psi}{\partial q_j}.\delta\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right)$$

Usando a regra do produto, $\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\delta\psi\right) = \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\delta\psi + \frac{\partial \psi}{\partial q}\frac{\partial(\delta\psi)}{\partial q}$ e utilizando, também, a propriedade que $\delta\left(\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = \frac{\partial(\delta\psi)}{\partial q}$, temos que

$$\frac{\partial g}{\partial\left\{\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right\}}\delta\left\{\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right\} = 2\frac{\partial \psi}{\partial q_j}.\delta\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right) = 2\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\delta\psi\right) - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial q_j^2}\delta\psi$$

Dessa forma, $\delta J$ fica com a seguinte expressão

$$\delta J = \iiint dxdydz \left( \frac{-2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right).2\psi\delta\psi - 2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\delta\psi \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta\psi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\delta\psi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\delta\psi\right)\right)\right) = 0$$

Dividindo toda a expressão por 2, e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo no último termo, vem que

$$\frac{\delta J}{2} = -\iiint dxdydz \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right).\psi\delta\psi + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\delta\psi$$

$$+ \iint \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta\psi\right)_{x\to\pm\infty} dydz + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\delta\psi\right)_{y\to\pm\infty} dxdz + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\delta\psi\right)_{z\to\pm\infty} dydx = 0$$

A última integral possui integrandos na forma $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta\psi\right)_{x\to\pm\infty} dydz$. Este integrando é tomado para quando x tende a ambos os infinitos, positivo e negativo. Dessa forma, a integral é interpretada como uma integral de área, cuja área infinitesimal é perpendicular à componente x do gradiente da função $\psi$.. Podemos reescrever, esse último termo, para qualquer conjunto de coordenadas na seguinte forma $\oiint(\delta\psi\nabla\psi)\cdot dA$, onde $\delta\psi\nabla\psi$ é tomado no infinito. Assim, teríamos em nossa notação:

$$\frac{\delta J}{2} = \oiint(\delta\psi\nabla\psi)\cdot dA - \iiint dxdydz\left(\nabla^2\psi + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right).\psi\right)\delta\psi = 0$$

Esse desenvolvimento é o que fundamenta a Teoria de Campos da Mecânica Analítica.