

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS DE TALUDES EM
PRESENÇA DE FORÇAS DE PERCOLAÇÃO CONSIDERANDO A
VARIABILIDADE ESPACIAL DAS PROPRIEDADES MATERIAIS**

Mário Vargas Ceron

Porto Alegre
2024

MÁRIO VARGAS CERON

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS DE TALUDES
EM PRESENÇA DE FORÇAS DE PERCOLAÇÃO
CONSIDERANDO A VARIABILIDADE ESPACIAL DAS
PROPRIEDADES MATERIAIS**

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Porto Alegre
2024

CIP - Catalogação na Publicação

Vargas Ceron, Mário

Análise de estabilidade de estruturas de taludes em presença de forças de percolação considerando a variabilidade espacial das propriedades materiais / Mário Vargas Ceron. -- 2024.

204 f.

Orientador: Samir Maghous.

Coorientador: Diogo Lira Cecílio.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2024.

1. Estabilidade de estruturas. 2. Forças de percolação. 3. Análise Limite. 4. Campos Estocásticos. I. Maghous, Samir, orient. II. Lira Cecílio, Diogo, coorient. III. Título.

MÁRIO VARGAS CERON

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS DE
TALUDES EM PRESENÇA DE FORÇAS DE
PERCOLAÇÃO CONSIDERANDO A VARIABILIDADE
ESPACIAL DAS PROPRIEDADES MATERIAIS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na área de concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 15 de abril de 2024

Prof. Samir Maghous
Dr. pela École Nationale des Ponts et Chaussées
Orientador

Prof. Diogo Lira Cecílio
Dr. pela Universidade Estadual de Campinas
Coorientador

Nilo Cesar Consoli
Ph.D. pela Concordia University, Canadá
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Nilo Cesar Consoli (UFRGS)
Ph.D. pela Concordia University, Canadá

Prof. Mauro de Vasconcellos Real (FURG)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques (UFAL)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Inez e Itacir, pelo suporte incondicional e exemplo de dedicação.

À minha irmã Natália, pelo incentivo, torcida e amizade, desde que me lembro.

Aos Professores Samir Maghous e Diogo Cecílio, por aceitarem orientar este trabalho. Suas contribuições foram fundamentais para o êxito desta dissertação.

A todos os professores que, ao longo de minha vida, contribuíram com minha formação.

Aos colegas do CEMACOM, em especial, Augusto, Daniel, Daniele, Lucas, Luciene, Marcos, Matheus e Felipe, pelos momentos de descontração e por estarem sempre dispostos a ajudar.

Aos colegas Eric, Ígor, José e Gabriel, pela parceria ao longo do mestrado.

A todos os amigos, pela torcida e compreensão durante estes dois anos.

À CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

CERON, M. V. **Análise de estabilidade de estruturas de taludes em presença de forças de percolação considerando a variabilidade espacial das propriedades materiais.** 2024. 204p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

A análise de estabilidade é um problema fundamental da Mecânica dos Solos cujo objetivo consiste em avaliar a possibilidade de falha de uma estrutura com base em sua geometria, resistência do material e modo de carregamento. Em estruturas de terra, a presença de água saturando o solo tende a reduzir sua resistência ao cisalhamento e, em situações não hidrostáticas, resultar em forças de percolação que comprometem a segurança de estruturas previamente estáveis. No contexto desse estudo, a abordagem cinemática da Análise Limite é utilizada para obter limites superiores para o problema de estabilidade de estruturas saturadas. Do ponto de vista mecânico, o solo é tratado como um meio poroso saturado, sendo a teoria da Análise Limite formulada em termos de tensões efetivas. O acoplamento entre a deformação do esqueleto e a propressão é desconsiderado e o problema hidráulico tratado separadamente a partir de uma abordagem variacional, validada por análises de elementos finitos. A metodologia descrita é aplicada à análise determinística de taludes saturados em deformação plana, sujeitos a uma rápida redução do nível da água. A estabilidade do talude é avaliada considerando mecanismos de ruptura rotacionais que envolvem superfícies de descontinuidades definidas por espirais logarítmicas. Comparando os resultados com estudos disponíveis na literatura, destaca-se a precisão da metodologia proposta. Um estudo paramétrico demonstrou, em particular, o impacto crucial de parâmetros relacionados ao problema hidráulico. Na segunda parte deste trabalho, para incorporar a variabilidade espacial dos parâmetros do solo, são considerados campos estocásticos para a coesão, ângulo de atrito e permeabilidade discretizados por meio da Expansão de Karhunen-Loève com autofunções numericamente computadas. O Método de Monte Carlo é utilizado para determinar a probabilidade de falha da estrutura. A comparação com exemplos específicos disponíveis na literatura mostrou que a metodologia estocástica desenvolvida é capaz de avaliar a segurança de taludes no contexto das deformações planas. Análises realizadas em um talude referência revelaram que a variabilidade mais importante a ser considerada está relacionada ao parâmetro de coesão, seguido do ângulo de atrito. Comparações com resultados obtidos a partir de premissas determinísticas indicam que, apesar do baixo impacto, a variabilidade espacial do tensor permeabilidade não deve ser desconsiderada.

Palavras-chave: *estabilidade de estruturas, forças de percolação, análise limite, campos estocásticos.*

ABSTRACT

CERON, M. V. **Stability analysis of slope structures submitted to seepage forces with account for spacial variability of material properties**. 2024. 204p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Stability analysis of slopes is a fundamental problem of Soil Mechanics. Its main objective consists in evaluating the potential of failure of a structure, given its geometry, material strength and loading mode. In ground structures, the presence of water saturating the soil reduces its shear strength and, in non-hydrostatic situations, results in seepage forces that endanger the safety of previously stable structures. In this contribution, a kinematic approach of limit analysis theory is employed to obtain upper bounds solutions to the problem of stability in water saturated structures. From a mechanical viewpoint, the soil is modeled as a saturated porous medium and the limit analysis approach is formulated in terms of effective stresses in saturated soil. Disregarding the coupling between the local skeleton strain and pore pressure, the uncoupled hydraulic problem is addressed separately by means of a variational approach, being validated by a Finite Element Analysis. The described framework is applied to the deterministic analysis of saturated slopes, in plane strain, subjected to a rapid drawdown of the water level. The stability of the considered slope is assessed exploring the class of rotational failure mechanisms involving velocity discontinuity along logarithmic spiral lines. First comparisons with results available in the literature show the accuracy of the developed methodology. In particular, a parametric study showed the critical influence of the parameters related to the hydraulic problem. In the second part of this work, to account for the spatial variability inherent to the soil parameters, stochastic fields modeling cohesion, friction angle, and permeability are discretized via the Karhunen-Loève expansion with numerically computed eigenfunctions. Monte Carlo simulations are used to determine the failure probability of the structure. Comparisons with specific examples available in the literature showed the ability of the developed stochastic methodology to characterize the safety of slopes in the context of the plane strain. The analysis applied to a reference slope showed that the main variability to be considered is related to the cohesion parameter, followed by the friction angle. Regarding the variability of the permeability tensor, despite its minor overall impact, results obtained based on deterministic assumptions led to decreased probabilities of failure. This observation suggests that the spatial variability of the referred parameter cannot be neglected.

Keywords: *Stability analysis. Seepage forces. Limit analysis. Random fields.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Colapso do túnel do metrô, Munique, Alemanha.	28
Figura 2.2 – Local do deslizamento no aeroporto de Nice (COURBOULEX et al., 2020)	29
Figura 2.3 – Círculo de Mohr e critério de Coulomb	30
Figura 2.4 – Excesso de poropressão durante à consolidação de argilas moles (adaptado de: Terzaghi (1943))	32
Figura 2.5 – Assentamentos pós-liquefação do solo, Chile 2010 (VERDUGO; GONZÁLEZ, 2015)	33
Figura 2.6 – Alteração nas condições hidráulicas após a construção da barragem (LUCANUS et al., 2021)	34
Figura 2.7 – Resposta de um talude para casos de rápida redução no nível da água (adaptado de: Lambe e Whitman (1991))	35
Figura 2.8 – Estabilidade de estruturas (POTTS et al., 2001)	36
Figura 2.9 – Modos de colapso (adaptado de: Varnes (1978))	36
Figura 2.10 – Formas de colapso de túneis. (ANAGNOSTOU, 2006)	37
Figura 2.11 – Abordagem dos estudos (adaptado de: Mestat et al. (2004))	38
Figura 2.12 – Malha em elementos finitos no momento da não convergência computacional (adaptado de: Griffiths e Lane (1999))	39
Figura 2.13 – Evolução no tempo dos deslocamentos nos pontos A, B e D (adaptado de: Anagnostou et al. (2016))	40
Figura 2.14 – Acoplamento completo e desacoplamento parcial	41
Figura 2.15 – Linhas de fluxo para talude com dreno interno (TAYLOR, 1948)	43
Figura 2.16 – Distribuição do coeficiente r_p para o caso de percolação estacionária. (BISHOP; MORGENSTERN, 1960)	43
Figura 2.17 – Linhas equipotenciais no talude (MOREGENSTERN, 1963)	44
Figura 2.18 – Método do equilíbrio limite aplicado à estabilidade de taludes (MICHALOWSKI, 1995b)	45
Figura 2.19 – Mecanismo de ruptura por espiral logarítmica. (SAADA et al., 2012)	47
Figura 2.20 – Mecanismo de ruptura por chifre. (PAN et al., 2017)	47
Figura 2.21 – Mecanismo de ruptura cônico (LECA; DORMIEUX, 1990)	47
Figura 2.22 – Mecanismos de colapso para faces de túneis (MOLLON et al., 2009)	48

Figura 2.23 – Aplicação do método LAS para o caso unidimensional (FENTON et al., 2008)	50
Figura 2.24 – Configuração típica e resposta via RFEM (FENTON et al., 2008)	51
Figura 2.25 – Configuração típica e resposta via RLEM (CHO, 2010)	52
Figura 3.1 – Diagramas dos Ensaios. (GALILEI, 1638)	53
Figura 3.2 – Estabilidade muro de contenção (HEYMAN; COULOMB, 1972)	54
Figura 3.3 – Linhas de ruptura em um material puramente coesivo (HABIB, 1984)	54
Figura 3.4 – Forças externas atuando sobre estrutura Ω	56
Figura 3.5 – Convexidade de K	57
Figura 3.6 – Propriedades de \underline{Q}^*	58
Figura 3.7 – Aproximação de K pela abordagem estática.	58
Figura 3.8 – Carregamento com um parâmetro.	59
Figura 3.9 – Aproximação de K pela abordagem estática	61
Figura 3.10 – Aproximação de K pelas abordagens estática e cinemática	61
Figura 3.11 – Superfície $f = 0$, critério de Tresca	62
Figura 3.12 – (a) Plano desviador (b) Plano $\rho - \xi$	63
Figura 3.13 – Descontinuidades de velocidades relevantes	64
Figura 3.14 – Superfície $f = 0$, critério de von Mises	64
Figura 3.15 – (a) Plano desviador (b) Plano $\rho - \xi$	65
Figura 3.16 – Superfície $f = 0$, critério de Mohr-Coulomb	65
Figura 3.17 – (a) Plano desviador (b) Plano $\rho - \xi$	66
Figura 3.18 – Descontinuidades de velocidades relevantes	66
Figura 4.1 – Descrição do meio contínuo como a superposição de dois meios contínuos (adaptado de: Coussy (2004))	68
Figura 4.2 – Transformação do meio contínuo sobreposto	68
Figura 4.3 – Experimento de Henry Darcy (adaptado de: Bear (2013))	72
Figura 5.1 – Caracterização do problema hidráulico em taludes	81
Figura 5.2 – Caracterização das condições de contorno	81
Figura 5.3 – Problema hidráulico em coordenadas polares	82
Figura 5.4 – Caracterização do problema hidráulico em taludes, com escoamento ascen- dente em abaixo do pé do talude	88

Figura 5.5 – Definição do parâmetro L_m	89
Figura 5.6 – Comparação entre as Famílias 1 e 2	90
Figura 5.7 – Comparação entre as Famílias 3.1 e 3.2	91
Figura 5.8 – Comparação entre as Famílias 2 e 3.2	91
Figura 5.9 – Combinação das condições de contorno sobre as paredes laterais e base . .	93
Figura 5.10 – Malhas utilizadas na análise	94
Figura 5.11 – Linhas equipotenciais obtidas para as combinações de Condição de Contorno	95
Figura 5.12 – Linhas equipotenciais próximas ao talude, das quatro condições de contorno	95
Figura 5.13 – Comparação entre os campos gradientes da variação de poropressão para o problema hidráulico em taludes	96
Figura 5.14 – Comparação entre as soluções analítica e numérica para o problema hidráu- lico em taludes	97
Figura 5.15 – Comparação entre as soluções analítica e numérica para o problema hidráu- lico em taludes	103
Figura 6.1 – Descrição geométrica do talude e suas propriedades.	104
Figura 6.2 – Mecanismo de ruptura por espiral logarítmica.	105
Figura 6.3 – Descrição geométrica da espiral logarítmica do Mecanismo I.	105
Figura 6.4 – Descrição geométrica da espiral logarítmica do Mecanismo II.	108
Figura 6.5 – Calculo da potência resistente máxima.	109
Figura 6.6 – Divisão regiões do Mecanismo I.	110
Figura 6.7 – Divisão regiões do Mecanismo II.	111
Figura 6.8 – Ilustração do método de <i>Grid Search</i>	114
Figura 6.9 – Ilustração do método PSO	115
Figura 6.10 – Aumento da discretização no método de <i>Grid Search</i>	115
Figura 6.11 – Aumento do número de partículas e iterações no método PSO	116
Figura 6.12 – Verificação dos resultados obtidos com os valores referência de Chen (1975)	117
Figura 6.13 – Valores críticos para cada Mecanismo de Ruptura	117
Figura 6.14 – Comparação dos Mecanismos de Ruptura para baixos ϕ	118
Figura 6.15 – Malha de pontos da integração numérica.	120
Figura 6.16 – Aproximação do Mecanismo de ruptura na malha de pontos	120

Figura 6.17 – Potência das Forças de Percolação por Integral de Linha	121
Figura 6.18 – Integração numérica da potência das forças de percolação	123
Figura 6.19 – Definição da pressão definida pelo coeficiente r_p	124
Figura 6.20 – Impacto de r_p sobre $\underline{grad} u$	125
Figura 6.21 – Interpretação geométrica dos ângulos θ_c , $\theta_{c'}$ e $\theta_{c''}$	127
Figura 6.22 – Comparação com os resultados de Maghous (1995)	128
Figura 6.23 – Fator de Estabilidade para diferentes β , φ , H e r_p	130
Figura 6.24 – Fator de Estabilidade para diferentes β e r_p	131
Figura 6.25 – Comparação entre as abordagens ($\varphi = 10^\circ, 30^\circ$) (MICHALOWSKI, 1995a)	132
Figura 6.26 – Comparação entre as abordagens ($\varphi = 20^\circ, 40^\circ$) (MICHALOWSKI, 1995a)	132
Figura 6.27 – Comparação entre as abordagens, caso referência 1 (WU et al., 2024) . . .	134
Figura 6.28 – Comparação entre as abordagens, caso referência 2 (WU et al., 2024) . . .	134
Figura 6.29 – Fator de Estabilidade para diferentes α , com $\varphi = 10^\circ$	136
Figura 6.30 – Fator de Estabilidade para diferentes α , com $\varphi = 30^\circ$	136
Figura 6.31 – Fator de Estabilidade para diferentes α , β e φ	137
Figura 7.1 – Variabilidade inerente dos solos (PHOON; KULHAWY, 1999).	139
Figura 7.2 – Efeito da covariância sobre um campo aleatório.	144
Figura 7.3 – Escolha do conjunto de funções h_i em uma malha de Elementos Finitos. .	147
Figura 7.4 – Malha de Elementos Finitos Utilizada na Aplicação.	148
Figura 7.5 – Autofunções e autovalores associados.	149
Figura 7.6 – Campos aleatórios típicos de permeabilidade e respectivos histogramas. . .	151
Figura 7.7 – Distribuição do Excesso de poropressão u nos Nós A e B.	152
Figura 7.8 – Histograma do Fator de Estabilidade em função do CdV de k	153
Figura 7.9 – Convergência dos Fatores de Estabilidade médios, em função do CdV . . .	153
Figura 7.10 – Histograma dos Fatores de Segurança Obtidos.	154
Figura 7.11 – Convergência de P_f e $CdV P_f$	155
Figura 7.12 – Convergência da Média e Desvio padrão do Fator de Estabilidade.	155
Figura 7.13 – Mecanismos de ruptura encontrados.	156
Figura 7.14 – Procedimento para encontrar mecanismos com descontinuidade de veloci- dades relevantes.	158

Figura 7.15 – Impacto do parâmetro ΔL na obtenção de Mecanismos relevantes.	160
Figura 7.16 – Funções Densidade de probabilidade para diferentes ΔL	161
Figura 7.17 – Convergência da Probabilidade de Falha e da média do Fator de Estabilidade para diferentes ΔL	162
Figura 8.1 – Talude Exemplo 1 - Cho (2010).	165
Figura 8.2 – Superfícies críticas e centros de rotação encontrados em cada campo estocástico.	166
Figura 8.3 – Comparação entre as densidades de probabilidade obtidas por Cho (2010) e via Análise Limite.	166
Figura 8.4 – Comparação entre as convergências de probabilidade de falha P_f obtidas por Cho (2010) e via Análise Limite.	167
Figura 8.5 – Comparação entre as probabilidades acumuladas obtidas por Cho (2010) e via Análise Limite.	167
Figura 8.6 – Talude Exemplo 2 - Cho (2010).	168
Figura 8.7 – Fator de Estabilidade Γ^+ em função do Coeficiente de Segurança F_s	168
Figura 8.8 – Superfícies críticas e centros de rotação encontrados em cada campo estocástico.	169
Figura 8.9 – Densidades de probabilidade obtidas por Cho (2010) e via Análise Limite.	170
Figura 8.10 – Convergências de probabilidade de falha P_f obtidas por Cho (2010) e via Análise Limite.	170
Figura 8.11 – Probabilidades acumuladas obtidas por Cho (2010) e via Análise Limite.	171
Figura 8.12 – Fluxograma da metodologia estocástica implementada.	171
Figura 8.13 – Definição do talude de referência ($\Gamma^+ = 1.336$).	172
Figura 8.14 – a) Histograma e FDP para o caso referência. b) Convergência da Probabilidade de Falha.	173
Figura 8.15 – Função Densidade de Probabilidade para a) CdV da Permeabilidade Vertical, b) CdV da Coesão e c) CdV do Ângulo de Atrito	175
Figura 8.16 – Probabilidade de falha em função do Coeficiente de Variação da a) Permeabilidade Vertical, b) da Coesão e c) do Ângulo de Atrito.	175
Figura 8.17 – Coeficiente de Variação do Fator de Estabilidade em função do Coeficiente de Variação da a) Permeabilidade Vertical, b) da Coesão e c) do Ângulo de Atrito.	176

Figura 8.18 – Valor Médio do Fator de Estabilidade em função do Coeficiente de Variação da a) Permeabilidade Vertical, b) da Coesão e c) do Ângulo de Atrito. . . .	177
Figura 8.19 – a) FDP do fator de estabilidade, b) Probabilidade de falha, c) Coeficiente de Variação do fator de estabilidade e d) Valor médio do fator de estabilidade, em função do fator de escala.	179
Figura 8.20 – a) FDP do fator de estabilidade, b) Probabilidade de falha, c) Coeficiente de Variação do fator de estabilidade e d) Valor médio do fator de estabilidade em função do Fator de anisotropia.	180
Figura 8.21 – a) FDP do fator de estabilidade, b) Probabilidade de falha, c) Coeficiente de Variação do fator de estabilidade e d) Valor médio do fator de estabilidade em função do nível de rebaixamento de água.	182
Figura A.1 – Talude vertical com altura H	197
Figura A.2 – Campo de tensões proposto (adaptado de: Drucker e Prager (1952))	198
Figura A.3 – Talude vertical com superfície de ruptura assumida	199
Figura B.1 – Domínio considerado para a verificação.	201
Figura B.2 – Malhas para verificação do problema.	202
Figura B.3 – Verificação dos Autovalores obtidos numericamente.	203
Figura B.4 – Verificação das Autofunções obtidas numericamente.	204

LISTA DE SÍMBOLOS

Latino minúsculo:

$\underline{a}^s, \underline{a}^f$	Vetores aceleração das partículas do esqueleto e do fluido
c	Coesão
c_u	Coesão não-drenada
c_f	Coesão crítica para ruptura
\underline{d}	Campo de taxa de deformações associado com \underline{U}
d_1, d_2, d_3	Taxas de deformação principais
$\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$	Base do sistema cartesiano
$\underline{e}_r, \underline{e}_\theta$	Base do sistema polar
\underline{f}	Forças de corpo
$f(\cdot)$	Função que define o critério de resistência
$f(\cdot)$	Funções utilizadas na minimização via métodos variacionais
f_1, f_2, f_3	Variáveis auxiliares para calcular a potência das forças gravitacionais
f'_1, f'_2, f'_3, f'_4	Variáveis auxiliares para calcular a potência das forças gravitacionais
$f_n(\cdot)$	Autofunções da equação de Fredholm de segundo tipo
$g(\cdot)$	Funções utilizadas na minimização via métodos variacionais
h	Distância de um ponto até a superfície do solo
$h_1(\cdot), h_2(\cdot), h_3(\cdot)$	Funções utilizadas na minimização via métodos variacionais
h_w	Altura da redução do nível da água
k	Resistência em cisalhamento puro
k, k_v, k_h	Permeabilidade, permeabilidade vertical e horizontal
m_t^f	Massa atual de fluido
m_0^s	Massa inicial do esqueleto
m_t^s	Massa atual do esqueleto
n	Porosidade Euleriana
n_0	Porosidade Euleriana inicial
\underline{n}	Vetor normal
n_f	Número de configurações de falha
p	Poropressão
$p(\cdot)$	Funções utilizadas na minimização via métodos variacionais
p_a	Poropressão exercida pelo ar
p_w	Pressão hidrostática
$\dot{q}(\underline{U})$	Velocidade generalizada da estrutura
r_p	Coefficiente de poropressão
r, θ	Coordenadas do sistema polar
$r_0, r_h, r_O, r_{O'}$	Parâmetros utilizados na descrição geométrica dos mecanismos de ruptura
r_c, r_c', r_c''	Parâmetros utilizados na descrição geométrica dos mecanismos de ruptura
\underline{s}	Tensor tensão desviatório
t	Tempo
u	Excesso de poropressão
u^d	Excesso de poropressão prescrito sobre superfície $\partial\Omega_u$
\underline{u}^e	Excesso de poropressões nodais
v^d	Velocidade de filtração prescrita sobre superfície $\partial\Omega_v$

x, y, z	Coordenadas do sistema cartesiano
\underline{x}	Posição da partícula de um Domínio

Latino maiúsculo:

A_e	Área de influência da integração numérica
\underline{B}	Matriz auxiliar Método dos Elementos Finitos
\mathbb{B}	Matriz auxiliar Campos estocásticos
C	Centro de rotação do mecanismo de ruptura
$C(\cdot)$	Função de Covariância
\mathbb{C}	Matriz de Covariância
C_1	Classe de funções com primeira derivada contínua
C_x, C_y	Componentes do centro de rotação do mecanismo de ruptura
\mathbb{D}	Matriz auxiliar de autofunções
F_s	Coefficiente de Segurança
$\mathbb{F}^e, \mathbb{F}^g$	Vetor de Forças a nível de elemento e global
$G(\cdot)$	Subespaço admissível do espaço de tensões
H	Resistência em tração isotrópica
H	Altura
$H(\cdot)$	Campo estocástico
\mathbb{H}	Matriz de Campos estocásticos
H_c	Altura Crítica
I_1, I_2, I_3	Invariantes do tensor de tensões
J	Jacobiano da transformação $\underline{\Phi}^s$
$J^*(\underline{v})$	Funcional em termos da velocidade de filtração
$J(u)$	Funcional em termos do excesso de poropressão
J_1, J_2, J_3	Invariantes do tensor de tensões desviatório \underline{s}
K	Conjunto de cargas \underline{Q} sob quais uma estrutura é estável
\underline{K}	Tensor permeabilidade
∂K	Fronteira do domínio de cargas admissíveis K
$\mathbb{K}^e, \mathbb{K}^g$	Matriz de rigidez a nível de elemento e global
K_s	Aproximação interior do conjunto de cargas suportáveis
L	Parâmetro utilizados na descrição geométrica dos mecanismos de ruptura
$L^2(\Omega)$	Espaço de funções quadrado integráveis no domínio Ω
L_m	Distância de simetria geométrica
L_x, L_y, L_z	Distância de autocorrelação
N	Quantidade utilizados na malha de ponto, integração numérica
N_i	Funções de Interpolação
NP	Parâmetro de refinamento do mecanismo de ruptura adaptado
\mathcal{P}	Conjunto de excesso de poropressões admissíveis
\mathcal{P}_{Par}	Espaço de parâmetros dos mecanismos de ruptura
P_γ, P'_γ	Potência das forças gravitacionais
P_{def}	Potência virtual de deformação
$P_{ext}, \mathcal{P}_e(\underline{Q}, \dot{q}(\underline{U}))$	Potência das forças externas
P_{int}	Potência das forças internas
P_{rm}	Potência resistente máxima
P_f	Probabilidade de falha

P_u	Potência das forças de percolação
\underline{Q}	Vetor de Cargas
\mathbb{R}	Conjunto dos Número Reais
\mathbb{R}^n	Conjunto formado pelo produto cartesiano de n conjuntos \mathbb{R}
R, R_w, R_e, R_{max}	Limite das soluções analíticas para o problema hidráulico
Re	Número de Reynolds
R_N	Resíduo associado ao Truncamento em N
S	Número de amostras consideradas no método de Monte Carlo
dS	Elemento de comprimento
\underline{T}	Vetor Tensão
\underline{T}'	Vetor Tensão efetivo
\underline{T}^d	Vetor tensão imposto na fronteira $\partial\Omega_T$
\underline{U}	Campo de velocidades
\underline{U}^d	Campo de velocidades imposto sobre a região $\partial\Omega_v$
\mathcal{V}	Conjunto de excesso de velocidades de filtração admissíveis
$\underline{V}^s, \underline{V}^f$	Velocidade da partícula do esqueleto e do fluido, respectivamente
\underline{X}	Vetor posição
\underline{X}	Vetor de variáveis aleatórias que descreve a incerteza a respeito de um problema de estabilidade

Grego minúsculo:

α	Ângulo de inclinação da superfície de ruptura
α	Fator de anisotropia
α_1, α_2	Constantes auxiliares na minimização via métodos variacionais
β'	Parâmetro utilizados na descrição geométrica dos mecanismos de ruptura
$\beta, \bar{\beta}$	Ângulo de inclinação de um talude e seu suplementar
β_R	Índice de confiabilidade
γ	Peso específico do solo
γ'	Peso específico efetivo do solo
γ_w	Peso específico da água
δ_v	Escala de flutuação
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tensor linearizado de deformação
$\theta_1, \theta_2, \theta_O, \theta_{O'}$	Parâmetros descrição geométrica dos mecanismos de ruptura
$\theta_c, \theta_{c'}, \theta_{c''}$	Parâmetros utilizados na descrição geométrica dos mecanismos de ruptura
λ_n	Autovalores da equação de Fredholm de segundo tipo
μ	Média
μ_{ln}	Média do logaritmo natural da distribuição Log-Normal
(ξ, ρ, θ)	Sistema de coordenadas de Haig-Westergard
$\underline{\xi}$	Vetor de deslocamentos
$\pi(\cdot)$	Funções suporte do convexo $G(\underline{x})$
ρ	Massa específica de um corpo
ρ^f, ρ^s	Densidades do fluido e da partícula sólida
σ	Desvio padrão
σ	Tensão normal
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tensor de tensões
$\underline{\underline{\sigma}}'$	Tensão efetiva normal

σ_{ln}	Desvio padrão do logaritmo natural da distribuição Log-Normal
σ_m, σ_M	Tensões mínima e máxima
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensão nas direções x, y e z
τ_{max}	Cisalhamento resistente máximo
ϕ	Porosidade Lagrangiana
ϕ_{max}	Ângulo de atrito máximo encontrado localmente em um solo
φ	Ângulo de atrito
φ_f	Ângulo de atrito crítico para ruptura
φ_g	Ângulo de atrito geométrico
χ	Parâmetro adimensional utilizado em solos parcialmente saturados
$\underline{\chi}$	Vetor de propriedades que definem um problema de estabilidade
ω	Velocidade angular
ω, ω_0	Constantes auxiliares na minimização via métodos variacionais

Grego maiúsculo:

Γ	Fator de Estabilidade
Γ^+	Limite superior para o Fator de Estabilidade
Θ	Espaço de eventos aleatórios
Σ_σ	Superfície de descontinuidade de $\underline{\sigma}$
Σ_U	Superfície de descontinuidade de \underline{U}
Φ	Função acumulada da distribuição Normal
Ω	Domínio de uma estrutura
Ω_0	Configuração inicial do domínio Ω
Ω_t	Configuração atual do domínio Ω
$\partial\Omega$	Fronteira do Domínio de uma estrutura
$\partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \partial\Omega_3$	Superfícies do domínio Ω com excesso de poropressão prescrito
$\partial\Omega_T$	Região da fronteira $\partial\Omega$ com condição de carregamento imposto
$\partial\Omega_u$	Região da fronteira $\partial\Omega$ com excesso de poropressão prescrito
$\partial\Omega_v$	Região da fronteira $\partial\Omega$ com condição de velocidade imposta
$\partial\Omega_w$	Região da fronteira $\partial\Omega$ com velocidade de filtração prescrita
Δ	Matriz de autovalores

Numéricos, operadores e funções matemáticas:

π	Constante $\pi \approx 3,141592653589793$
$det(\cdot)$	Operador determinante
$div(\cdot)$	Operador divergente
$grad(\cdot)$	Operador gradiente
$tr(\cdot)$	Função Traço
$(\cdot)^T$	Operador Transposto
$\ \cdot\ $	Operador norma
$\delta\cdot$	Operador variação
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$\underline{1}$	Tensor unitário
\in	Pertence
\notin	Não pertence
∞	Infinito
\exists	Existe
\forall	Para todo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	22
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	22
1.2	OBJETIVOS	24
1.3	METODOLOGIA	25
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	25
1.5	HIPÓTESES FUNDAMENTAIS DA FORMULAÇÃO	27
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA: ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM ESTRUTURAS SATURADAS	28
2.1	GENERALIDADES	28
2.2	PROBLEMÁTICA DA ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM MEIOS POROSOS	29
2.2.1	Mecanismos desencadeadores	32
2.2.2	Mecanismos de colapso de estruturas	35
2.3	MÉTODOS USUAIS DA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS EM MEIOS POROSOS	37
2.3.1	Abordagem poromecânica acoplada	38
2.3.2	Abordagem com desacoplamento fraco (<i>One-way coupling</i>)	41
2.4	MÉTODOS DE ANÁLISE ESTOCÁSTICA	48
2.4.1	Função de estado limite e probabilidade de falha	48
2.4.2	Método de Monte Carlo e campos estocásticos	49
3	FUNDAMENTOS DA TEORIA DE ANÁLISE LIMITE	53
3.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	55
3.2	DOMÍNIO DE CARGAS ADMISSÍVEIS (K)	56

3.3	ABORDAGEM ESTÁTICA (LIMITE INFERIOR)	58
3.4	ABORDAGEM CINEMÁTICA (LIMITE SUPERIOR)	59
3.5	FUNÇÕES DE SUPORTE π E CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA	61
3.5.1	Critério de Tresca	62
3.5.2	Material de von Mises	64
3.5.3	Material de Mohr-Coulomb	65
4	ELEMENTOS DA POROMECÂNICA	67
4.1	ABORDAGEM CONTÍNUA DO MEIO POROSO	67
4.2	CINEMÁTICA DO MEIO POROSO	67
4.3	BALANÇO DE MASSA DE FLUIDO	68
4.4	VELOCIDADE DE FILTRAÇÃO E LEI DE TRANSPORTE DE FLUIDO (DARCY)	71
4.5	CONSERVAÇÃO DAS QUANTIDADES DE MOVIMENTO . .	73
4.5.1	Tensores de tensões parciais de Cauchy	74
4.6	O RACIOCÍNIO DA ANÁLISE LIMITE NO CONTEXTO DA POROMECÂNICA	75
4.6.1	Princípio das tensões efetivas	75
4.6.2	Análise limite no meio poroso	76
5	O PROBLEMA HIDRÁULICO	78
5.1	ABORDAGEM VARIACIONAL	78
5.1.1	Funcional em termos do excesso de poropressão (u) . . .	79
5.1.2	Funcional em termos da velocidade de filtração (\underline{v})	80
5.1.3	Comparação entre as abordagens	81
5.2	SOLUÇÕES DO PROBLEMA HIDRÁULICO	81
5.2.1	Solução Analítica	82
5.2.2	Método dos Elementos Finitos (MEF)	91

5.2.3	Comparação entre as abordagens Analítica e Numérica . . .	95
5.2.4	Caso Ortotrópico	97
6	ANÁLISE DETERMINÍSTICA DA ESTABILIDADE DE TALUDES EM DEFORMAÇÃO PLANA	104
6.1	MECANISMOS DE RUPTURA ROTACIONAIS	105
6.1.1	Descrição geométrica Mecanismo I	105
6.1.2	Descrição geométrica Mecanismo II	107
6.1.3	Potência resistente máxima P_{rm}	109
6.1.4	Potência forças gravitacionais P_{γ}	110
6.2	ANÁLISE DE ESTABILIDADE — SOLO SECO	112
6.2.1	Otimização	113
6.2.2	Verificação	116
6.2.3	Mecanismo I vs Mecanismo II	117
6.3	ANÁLISE DE ESTABILIDADE — SOLO SATURADO EM TENSÕES EFETIVAS	118
6.3.1	Potência das forças de percolação P_u	119
6.4	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	128
6.4.1	Resultados de Maghous (1995)	128
6.4.2	Validade abordagem via coeficiente de poropressão r_p	129
6.4.3	Resultados de Michalowski (1995a)	131
6.4.4	Resultados de Wu et al. (2024)	133
6.4.5	Efeito da ortotropia da permeabilidade sobre a estabilidade	135
7	VARIABILIDADE DAS PROPRIEDADES DO SOLO NA ANÁLISE DE ESTABILIDADE	138
7.1	VARIABILIDADE ESPACIAL DAS PROPRIEDADES INERENTE DOS SOLOS	138
7.2	DESCRIÇÃO PROBABILÍSTICA DO PROBLEMA DE ESTABILIDADE	141

7.3	GERAÇÃO DE CAMPOS ALEATÓRIOS	143
7.3.1	Aproximação Numérica via Elementos Finitos	145
7.3.2	Campos aleatórios não-Gaussianos	147
7.4	EXEMPLO ILUSTRATIVO: O PROBLEMA DE ESTABILIDADE DE TALUDE CONSIDERANDO VARIABILIDADE DA PERMEABILIDADE	148
7.5	ADAPTAÇÃO DOS MECANISMOS DE RUPTURA ROTACIONAIS	156
7.5.1	Critério de Relevância	156
7.5.2	Descrição geométrica do Mecanismo de Ruptura Adaptado	158
8	IMPACTO DA VARIABILIDADE DAS PROPRIEDADES DO SOLO NA ANÁLISE DE ESTABILIDADE	163
8.1	COMPARAÇÃO COM RESULTADOS APRESENTADOS POR CHO (2010)	163
8.1.1	Exemplo 1 - Talude em solo Argiloso sob condição não-drenada ($\varphi = 0$)	164
8.1.2	Exemplo 2 - Talude em solo $c - \varphi$	167
8.2	INFLUÊNCIA DA VARIABILIDADE ESPACIAL DOS PARÂMETROS MATERIAIS	171
8.2.1	Efeito do coeficiente de variação das propriedades materiais do solo	173
8.2.2	Distâncias de Autocorrelação	178
8.2.3	Fator de Anisotropia	179
8.2.4	Altura de redução do Nível de Água	181
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	183
9.1	CONCLUSÕES	183
9.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	185

REFERÊNCIAS 186

APÊNDICES 196

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A análise de estabilidade é um problema fundamental da Mecânica dos Solos cujo objetivo consiste em avaliar a possibilidade de falha de uma estrutura, dada a sua geometria, resistência material e modo de carregamento. Identificar corretamente a estabilidade de uma estrutura é uma tarefa crucial para o engenheiro projetista, visto que falhas causam prejuízos financeiros e, em casos extremos, até mesmo na perda de vidas humanas. Conforme apresentado por Bromhead (1992), estima-se que falhas de talude, somente na Califórnia, causam um prejuízo anual de cerca de 330 milhões de dólares, além de uma média de 25 fatalidades em todo o país.

No caso de estruturas de terra, a presença de água nos poros intersticiais reduz a resistência ao cisalhamento e, em situações não hidrostáticas, resulta em forças de percolação agindo no solo. Na análise de estabilidade de taludes, por exemplo, as forças de percolação associadas a uma rápida redução do nível da água agem como forças desestabilizantes, podendo causar o colapso de estruturas previamente estáveis (VIRATJANDR; MICHALOWSKI, 2006). A rápida redução no nível da água, usualmente decorrente de ciclos de cheias e secas, é responsável por uma parcela de falhas de taludes, conforme apresentado por Morengstern (1963).

O surgimento da análise racional de estabilidade é geralmente atribuído aos trabalhos de Galilei (1638) e, posteriormente, no contexto da Mecânica dos Solos, à Coulomb (1773). Em seu livro de memórias são descritos alguns dos primeiros métodos para avaliar a estabilidade de estruturas como cortes verticais e muros de contenção. Atualmente problemas de estabilidade complexos podem ser resolvidos numericamente através do Método dos Elementos Finitos (MEF) com uma lei constitutiva elastoplástica. Dada a consideração da plasticidade, os carregamentos são introduzidos de forma incremental até que não mais ocorra a convergência do processo iterativo, indicando assim o colapso da estrutura. Buhan e Maghous (1995) alertam que as cargas de colapso encontradas por tais métodos podem ultrapassar o limite teórico, visto que campos de tensões obtidos via Elementos Finitos baseados em deslocamentos não satisfazem rigorosamente as condições de equilíbrio, além dos campos de deslocamento não apresentarem descontinuidades propriamente ditas.

Com a presença de fluido saturando um meio poroso, seu comportamento pode ser descrito pela teoria da poroelasticidade, formulada por Terzaghi (1943), no caso unidimensional, e generalizado posteriormente por Biot (1941) para o caso tridimensional. A poroelasticidade apresenta as

equações constitutivas descrevendo acoplamento entre sólido e fluido. O acoplamento pode ser dividido em dois fenômenos básicos: acoplamento sólido-fluido, na qual uma deformação na matriz sólida expulsa parte do fluido ou aumenta sua pressão; e o acoplamento fluido-sólido, na qual uma mudança em pressão ou massa do fluido causa deformações na matriz sólida (WANG, 2000). Em um acoplamento completo, ambos os fenômenos ocorrem simultaneamente.

No entanto, a solução de problemas poroplásticos pelo MEF, em alguns casos, pode ser custosa no que se refere a recursos computacionais. Na prática, costumam ser empregados métodos simplificados mais adequados para este propósito. As teorias da Análise Limite e Equilíbrio Limite são exemplos de abordagens que estimam diretamente a carga de colapso da estrutura, sem a necessidade de utilização de análises incrementais. A Análise Limite, em particular, destaca-se como uma alternativa rigorosa e de menor custo computacional.

Em oposição ao método do Equilíbrio Limite, na Análise Limite são utilizados campos de tensões estaticamente admissíveis (abordagem inferior) e campos de velocidade cinematicamente admissíveis (abordagem superior), dessa forma as condições de equilíbrio são satisfeitas em todos os pontos, sendo uma abordagem rigorosa do ponto de vista mecânico. Além disso, enquanto a abordagem pelo Equilíbrio Limite resulta em valores aproximados sem interpretação clara para a estabilidade da estrutura, a Análise Limite oferece fronteiras que delimitam efetivamente seu valor crítico. Pode-se citar como exemplos da utilização dessa abordagem os trabalhos desenvolvidos por: Arévalos (2015) e Arévalos e Maghous (2017), aplicado à capacidade de carga de fundações; Pasquali (2008), implementando a teoria da Análise Limite via uma formulação em elasticidade não-linear; Chen e Giger (1971), na análise de estabilidade de taludes; Maghous et al. (2014), na estabilidade de túneis escavados em rochas fraturadas; e Saada et al. (2013), na estabilidade sísmica de túneis.

No contexto de estruturas em meios porosos saturados, adota-se usualmente uma formulação da Análise Limite baseada no princípio das tensões efetivas (TERZAGHI, 1943). A partir das hipóteses de incompressibilidade das fases sólida e fluida, e da existência de uma configuração deformável e estabilizada para o meio poroso, pode-se tomar o *framework* de análise em desacoplamento fraco, no qual é desconsiderado o acoplamento no sentido sólido-fluido. Dessa forma, as forças de percolação podem ser incorporadas à abordagem cinemática da Análise Limite de modo relativamente simples, sendo explorada em trabalhos como: Viratjandr e Michalowski (2006) e Saada et al. (2012), na análise de taludes submersos; e Buhan et al. (1999), na estabilidade de face de túneis escavados abaixo do lençol freático. Evidentemente a validade de tais hipóteses deve ser verificada e será debatida ao longo do presente trabalho.

Embora análises baseadas na abordagem estática sejam possíveis, Yu et al. (1998) ressaltam que as dificuldades em construir campos de tensões estaticamente admissíveis, especialmente para estruturas saturadas, levam à preferência pelo uso exclusivo da abordagem cinemática.

Kim et al. (1999) apresentam uma implementação de ambas as abordagens da Análise Limite em programação linear, porém, novamente a dificuldade em tal implementação reside na não existência de descontinuidades no campo de velocidades.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal do presente trabalho é avaliar a possibilidade de falha de estruturas de taludes submetidas a forças de percolação induzidas por distribuições não uniformes de excesso de poropressão no meio poroso, considerando a variabilidade espacial das propriedades materiais.

Para atingir este objetivo, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- a) Determinar soluções numéricas para o problema hidráulico, implementando o princípio de mínimo em termos do excesso de poropressão em elementos finitos.
- b) Determinar soluções analíticas para o problema hidráulico, aplicando o princípio de mínimo em termos da velocidade de filtração.
- c) Verificar a qualidade das soluções obtidas por meio da comparação das energias funcionais resultantes.
- d) Implementar um procedimento para a caracterização da segurança de taludes, baseado na abordagem cinemática da análise limite formulada em tensões efetivas, utilizando o algoritmo *Particle Swarm Optimization*.
- e) Realizar uma análise comparativa do procedimento implementado com resultados específicos disponíveis na literatura.
- f) Implementar um procedimento para a geração de campos estocásticos, utilizando a expansão de Karhunen-Loève com autofunções calculadas numericamente.
- g) Implementar um procedimento para a avaliação da probabilidade de falha de taludes, utilizando o Método de Monte Carlo.
- h) Verificar o procedimento de avaliação da probabilidade de falha por meio da comparação com resultados específicos disponíveis na literatura.
- i) Utilizar a metodologia desenvolvida para avaliar o impacto da variabilidade das propriedades do solo na análise de estabilidade de taludes em deformação plana.

1.3 METODOLOGIA

Em termos de metodologia, a análise de estabilidade das estruturas consideradas será avaliada via a abordagem cinemática da Análise Limite formulada em termos de tensões efetivas. Dessa forma, as forças de percolação podem ser consideradas como forças de volume, sendo a distribuição do gradiente de excesso de poropressão obtida a partir de uma aproximação numérica da equação de conservação de massa fluida.

Dentro das hipóteses do *framework* de desacoplamento parcial, desconsidera-se o fluxo induzido pela deformação do esqueleto sólido do meio poroso, dessa forma o problema hidráulico, que consiste em encontrar a velocidade de filtração, é resolvido separadamente a partir de abordagem variacional analítica, a qual será validada numericamente pelo MEF. Uma vez que a distribuição das forças de percolação é conhecida, a estabilidade das estruturas é avaliada a partir de mecanismos de falha representados por campos de velocidades da partícula do esqueleto.

Após validação da análise determinística por comparação com resultados disponíveis na literatura, uma análise estocástica será proposta para avaliar o impacto da variabilidade espacial das propriedades materiais. Para considerar as incertezas inerentes no processo de avaliação geotécnica do solo, a distribuição espacial dos coeficientes de coesão, ângulo de atrito e permeabilidade serão discretizadas através da expansão de Karhunen-Loève com autofunções numericamente calculadas. O objetivo da análise é avaliar a probabilidade de falha combinando a distribuição estocástica das propriedades materiais e o método de Monte Carlo.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Esta dissertação será organizada como descrito a seguir:

No presente capítulo, uma breve descrição da temática geral da dissertação é apresentada. Os objetivos principais e específicos são discutidos, bem como a metodologia a qual será utilizada para alcançá-los. Por fim, descreve-se a organização do trabalho e apresenta-se um resumo com as hipóteses básicas.

No Capítulo 2, a problemática geral do problema de estabilidade de estruturas com a presença de poropressão é apresentado. Por fim, apresenta-se uma breve revisão bibliográfica dos principais métodos utilizados para a análise pela academia.

No Capítulo 3 apresentam-se os fundamentos da Teoria de Análise Limite, em particular os teoremas fundamentais na base do raciocínio mecânico da análise de estabilidade. Este capítulo

baseia-se, principalmente, na formulação apresentada por Salençon em seu livro “*Yield design*” (2013) e artigo “*Introduction to the yield design theory and its applications to soil mechanics*” (1990). Além disso, são apresentados os critérios de ruptura utilizados e, para ilustrar o raciocínio da Análise Limite, um exemplo prático de análise de estabilidade.

Os elementos da poromecânica são expostos no Capítulo 4, a partir das deduções apresentadas por Coussy (2004) e Dormieux et al. (2006). Também são apresentadas as hipóteses para o problema desacoplado; a lei de condução de Darcy (BEAR, 2013); e a teoria de Análise Limite aplicado à poromecânica, baseando-se no conceito de tensões efetivas, e abordagem proposta em Saada et al. (2012).

No contexto do *framework* permitindo o desacoplamento entre o problema de fluxo hidráulico e as deformações do esqueleto sólido, o Capítulo 5 apresenta a dedução da abordagem variacional para o problema hidráulico desacoplado, bem como algumas soluções analíticas e numéricas para a distribuição da velocidade de percolação no problema de estabilidade de taludes saturados.

No Capítulo 6 apresenta-se a análise de estabilidade de taludes em deformação plana. Partindo da abordagem cinemática da Análise Limite, e considerando mecanismos de ruptura rotacionais com descontinuidades dados por espirais logarítmicas, deduz-se a função que deverá ser minimizada para encontrar o limite superior do Fator de Estabilidade. Por fim, após verificação da implementação em Python para o caso seco, apresentam-se soluções para o caso saturado após a rápida redução do nível da água.

O caráter probabilístico inerente às propriedades de solos passa a ser incorporada à análise no Capítulo 7. Após uma descrição geral das incertezas atreladas a esse tipo de análise, descreve-se como o Método de Monte Carlo será utilizado em conjunto com campos estocásticos para obter probabilidades de falha e densidade de probabilidade para o Fator de Estabilidade Γ^+ . Baseado na metodologia apresentada por (GHANEM; SPANOS, 2003), descreve-se como campos estocásticos são gerados numericamente via uma aproximação em Elementos Finitos da expansão de Karhunen-Loève. Apresenta-se uma primeira verificação da metodologia para o caso de taludes saturados com incerteza a respeito do parâmetro de permeabilidade.

No Capítulo 8, compara-se inicialmente a metodologia desenvolvida com resultados apresentados por (CHO, 2010) para dois exemplos de talude. Na sequência, avalia-se o efeito da variabilidade dos parâmetros de coesão c , ângulo de atrito ϕ e permeabilidade \underline{K} sobre um talude referência, dada uma rápida redução do nível da água.

Por fim, apresentam-se no Capítulo 9 as principais conclusões tomadas no trabalho e algumas sugestões de melhorias em trabalhos futuros.

1.5 HIPÓTESES FUNDAMENTAIS DA FORMULAÇÃO

A análise de estabilidade desenvolvida neste trabalho assume as seguintes hipóteses:

- O solo é saturado por um único fluido (água). Desse modo, desconsideram-se os efeitos de capilaridade e infiltração do solo;
- As capacidades de resistência do meio poroso são controladas por um critério em tensões efetivas (hipótese da validade do conceito das tensões efetivas).
- Os efeitos dinâmicos são desprezíveis e podem ser desconsiderados;
- Fluxos de fluido apresentam comportamento não turbulento, de modo que é válida a Lei de Darcy.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA: ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM ESTRUTURAS SATURADAS

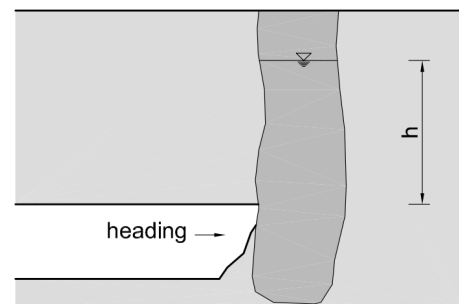
2.1 GENERALIDADES

A presença de água no solo tem impacto significativo na estabilidade e ruptura de estruturas em meios porosos. Estudos como de Saada et al. (2012) e Buhan et al. (1999) destacam os efeitos prejudiciais que as forças de percolação e empuxo resultam em taludes e em túneis escavados abaixo do lençol freático. Nesses casos, o Fator de Estabilidade (Γ^+) reduz em até 70% quando comparado a casos não saturados (SAADA et al., 2012), ressaltando a importância de corretamente quantificar seu impacto. Mesmo com o desenvolvimento significativo da área em anos recentes, falhas e acidentes ainda são frequentes. Dadas as graves consequências desses desastres, acidentes causados pelo efeito de poropressão costumam ser amplamente registrados e documentados na literatura acadêmica (SHANMUGAM, 2010; COURBOULEX et al., 2020; DAN et al., 2007; CAYRO, 2020; KOLYMBAS, 2005).

No contexto de túneis em meios urbanos, é frequentemente relatado (CAYRO, 2020; KOLYMBAS, 2005) o colapso ocorrido em 20 de setembro de 1994 durante as construções do metrô de Munique, Alemanha (Figura 2.1a). Kolymbas (2005) atribui o colapso ao fluxo de água resultante da travessia de um poço formado por material saturado de alta permeabilidade (Figura 2.1b), o qual diminuiu as tensões efetivas na face, ocasionando seu colapso por mecanismo de chaminé. Segundo Schroeter (2014), 3 pessoas morreram e 36 ficaram feridas quando o ônibus caiu na cratera de 8 metros de profundidade.



(a) Cratera resultante (SCHROETER, 2014)



(b) Zona de falha (KOLYMBAS, 2005)

Figura 2.1 – Colapso do túnel do metrô, Munique, Alemanha.

Outro caso também largamente documentado (SHANMUGAM, 2010; COURBOULEX et al., 2020; DAN et al., 2007) ocorreu em outubro de 1979 no aterro onde se construía o novo aeroporto de Nice, França (Figura 2.2). Nesse incidente, um deslizamento de terra resultou na formação de um tsunami, causando a perda de 10 vidas (COURBOULEX et al., 2020). Dan et al.

(2007) descreve o aumento de poropressão como fator contribuinte (mas não exclusivo) para o acidente. Esse aumento de poropressão ocorreu após um período de intensa precipitação. Uma lista abrangente de deslizamentos de taludes devido à presença de forças de percolação pode ser encontrada em Morengstern (1963).

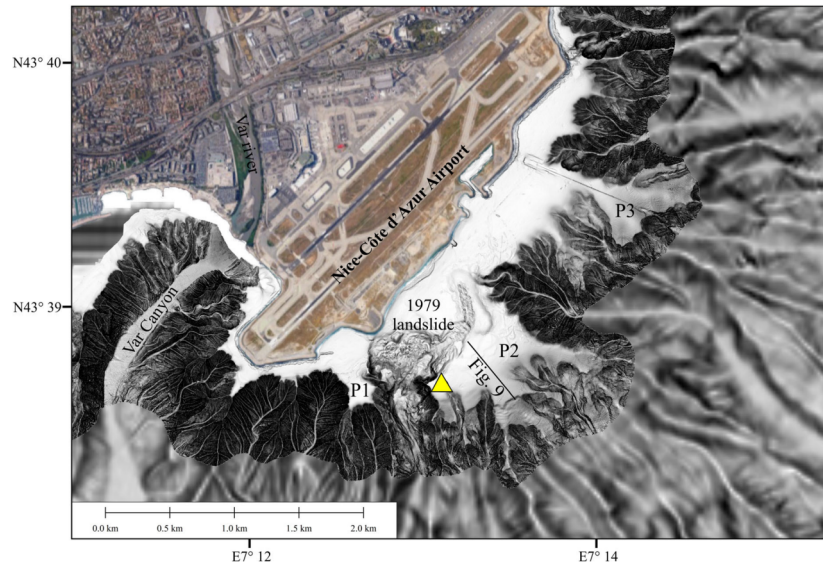


Figura 2.2 – Local do deslizamento no aeroporto de Nice (COURBOULEX et al., 2020)

Dessa forma, como pode-se observar, o efeito de poropressão na estabilidade de estruturas permanece um campo relevante de estudo. No presente capítulo, aborda-se a problemática geral da análise de estabilidade de estruturas sujeitas ao efeito de poropressão. Adicionalmente, faz-se uma breve revisão dos principais métodos utilizados nos estudos de análise de tais estruturas.

2.2 PROBLEMÁTICA DA ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM MEIOS POROSOS

Terzaghi (1943) divide os problemas da mecânica dos solos em dois grupos principais, os problemas de elasticidade e os problemas de estabilidade. Enquanto os problemas de elasticidade lidam com as deformações do solo, na análise de estabilidade, buscam-se as condições de equilíbrio de solos idealizados imediatamente anteriores à falha por fluxo plástico.

A análise de estabilidade de estruturas visa verificar se uma estrutura estará estável sob um modo de carregamento, considerando a sua geometria e as capacidades de resistência de seu material constitutivo. Na prática de Engenharia, a estabilidade é descrita em termos de um Coeficiente de Segurança F_s , usualmente definido como a razão entre a resistência disponível e o carregamento atuante, ou em termos de Fator de Estabilidade/Ruptura Γ , definido como a razão

entre potências externas e resistentes no Método da Análise Limite (COUSSY; SALENCON, 1979). Em contextos particulares, como a análise de estabilidade em taludes, o coeficiente de segurança pode tomar formas mais convenientes, com definições a partir de alturas críticas H_c ou do coeficiente $N = \gamma H/c$ (CHEN, 1975).

Em estruturas não niveladas, como em cortes verticais, a instabilidade ocorre devido às forças que atuam para deslocar o solo de uma posição elevada para uma posição mais baixa. A principal força contribuinte é a componente gravitacional que age na direção do provável movimento. Essas forças geram tensões de cisalhamento no solo, de modo que deslizamentos ocorrem a menos que elas sejam inferiores em magnitude ao cisalhamento resistente em todas as superfícies possíveis (TAYLOR, 1948).

Em condições de plasticidade perfeita, Taylor (1948) descreve a magnitude do cisalhamento resistente, a partir do critério de Coulomb, como dependente da coesão c do solo, da tensão normal σ e do ângulo de atrito interno ϕ ,

$$\tau_{max} = c - \sigma \tan \phi \quad (2.1)$$

onde por convenção as tensões de tração são positivas. Tal critério pode ser representado em conjunto com o círculo de Mohr, ilustrado na Figura 2.3.

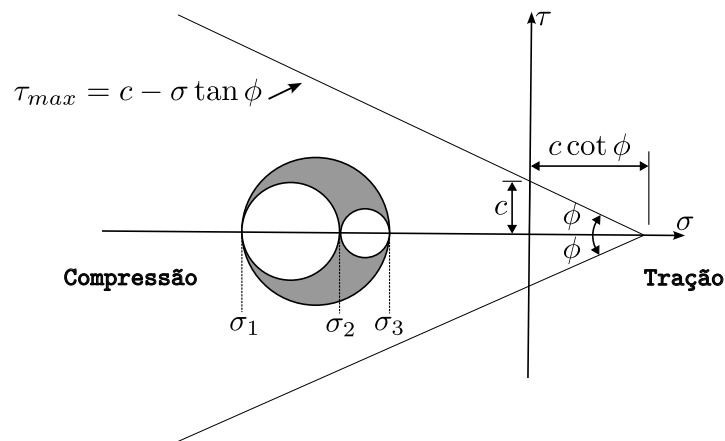


Figura 2.3 – Círculo de Mohr e critério de Coulomb

Conforme descrito por Terzaghi (1943), solos são materiais compostos por partículas sólidas separadas por vazios interconectados, os quais são preenchidos apenas por ar (no caso seco), apenas por água (no caso saturado) ou por água e ar (no caso não saturado). Como é natural supor, a presença de água aumenta a complexidade do problema de estabilidade, visto que o fluido exerce uma pressão (dita poropressão) sobre a matriz porosa. Além disso, em casos não hidrostáticos, existem forças de percolação que possuem papel fundamental na ocorrência de movimentos de solo (TAYLOR, 1948).

Nos casos não hidrostáticos, tem-se uma variação da carga hidráulica, representada por um gradiente hidráulico, que induz um fluxo de água de uma região de maior para uma de menor potencial. A partir de observações experimentais em fluxos não turbulentos, Darcy (1856) concluiu que a velocidade da água pode ser aproximada como uma função linear do gradiente hidráulico e da permeabilidade do meio. Portanto, mesmo que existam materiais com diferentes níveis de permeabilidade, como areias (mais permeáveis) e argilas (menos permeáveis), a diferença entre o efeito da água é apenas em sua escala.

Quando o solo está em condição não saturada, há também a presença de forças de capilaridade que elevam o nível da água acima do nível freático (TERZAGHI, 1943), ocorrendo especialmente em solos com partículas finas. Essas forças de sucção podem gerar poropressões negativas, elevando a resistência aparente do solo. Além disso, existem forças de infiltração que ocorrem, por exemplo, em casos de precipitação sobre solos secos. No entanto, para fins deste trabalho, assume-se como hipótese que as estruturas analisadas estarão completamente saturadas abaixo do nível piezométrico e, dessa forma, as particularidades relacionadas à condição não saturada não serão abordadas.

A complexidade do problema hidráulico surge quando se aplicam as leis de continuidade do fluido (BIOT, 1941; COUSSY, 2004), envolvendo o acoplamento do fluxo com a deformação do esqueleto. Em processos de consolidação de solos, por exemplo, a compactação do material reduz a sua porosidade, resultando na expulsão de parte do fluido que o saturava, de forma que existe um fluxo induzido por deformações do esqueleto mesmo em casos hidrostáticos. Vale ressaltar que o escoamento do fluido não é instantâneo, existindo um aumento de poropressão imediatamente após a aplicação da carga, a qual é dissipada a medida que a água é escoada (TERZAGHI, 1943). A expulsão desse fluido tem escala de tempo distintas, a Figura 2.4 ilustra esse problema em uma camada de argila mole, onde se verifica que o aumento de poropressão demora dias para ser completamente dissipado.

Conforme descrito em Bernaud et al. (2002), Bernaud et al. (2006) e Brüch (2012), outro ponto de atenção está relacionado ao acoplamento entre as deformações e a porosidade do solo. O processo de compactação de solos, por exemplo, reduz a porosidade do meio, impactando sua permeabilidade.

Em relação ao solo, além das novas forças de percolação e empuxo como agentes instabilizantes, a presença de fluido também reduz a sua resistência ao cisalhamento. A poropressão, através do princípio das tensões efetivas (TERZAGHI, 1943), reduz a força existente entre as partículas, de modo que o cisalhamento máximo pode ser reescrito como:

$$\tau_{max} = c - \sigma' \tan \varphi \quad (2.2)$$

onde $\sigma' = \sigma + p$ representa a tensão efetiva normal aplicada às partículas do solo, sendo p a

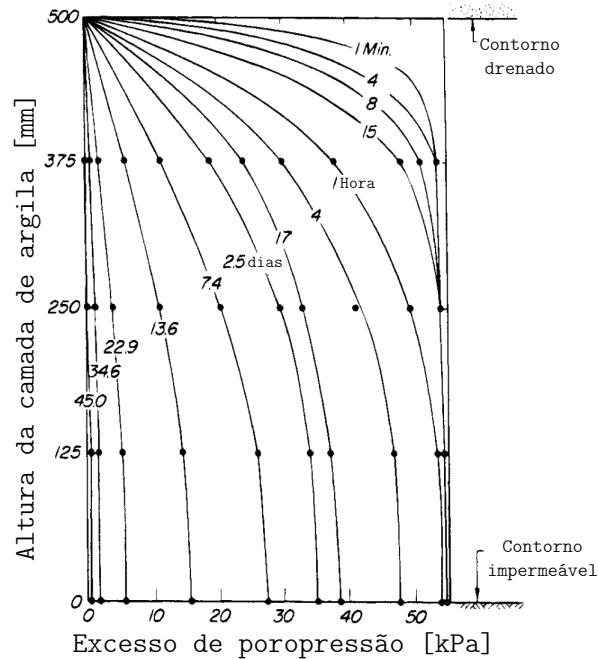


Figura 2.4 – Excesso de poropressão durante à consolidação de argilas moles (adaptado de: Terzaghi (1943))

poropressão.

Esse comportamento, no entanto, tem como condição limitante que a deformação seja suficientemente pequena, ou um tempo de análise suficientemente grande, para que possa haver o escoamento do fluido (caso drenado). Tal hipótese não pode ser utilizada, por exemplo, para verificar o comportamento argilas moles quando há aplicação rápida de carga (caso não drenado). Para o caso indicado, abordagens baseadas em tensões totais são preferíveis (TERZAGHI, 1943), onde se considera que a resistência é determinada diretamente pelo coeficiente de coesão não drenada (c_u).

Do ponto de vista físico-químico, outro aspecto da problemática de solos saturados, é a ocorrência de solos compostos por minerais expansivos quando na presença de água. Embora ocorrências de materiais com altas variações volumétricas sejam raras, expansões de apenas 5% dos minerais que compõe o solo são suficientes para que estruturas sejam danificadas (CAYRO, 2020). A expansão de rochas é um fenômeno particularmente relevante para análise de túneis.

2.2.1 Mecanismos desencadeadores

Um bom entendimento dos possíveis mecanismos que levam uma estrutura à falha é de extrema importância para análises de estabilidade. Shanmugam (2010) define um mecanismo desencadeador como “O processo principal que causa as alterações necessárias nas propriedades físicas, químicas e geotécnicas do solo, resultando na perda de resistência ao cisalhamento que

inicia a falha e o movimento do sedimento”. Nota-se que em diversas situações não é possível identificar apenas um fator desencadeador, de modo que esses mecanismos podem agir de forma concomitante.

O principal mecanismo de gatilho citado na literatura é o terremoto. Esses tremores, resultantes do movimento das placas tectônicas, afetam as estruturas de duas formas: exercendo forças inerciais devido à aceleração do solo, aumentando as solicitações nas estruturas; e reduzindo a resistência ao cisalhamento, devido a efeitos de carregamento cíclico (SHANMUGAM, 2010). Esse último mecanismo pode levar ao fenômeno da liquefação, estado o qual o solo perde completamente a resistência ao cisalhamento, apresentando comportamento líquido. Tal fenômeno destrutivo foi observado durante o terremoto ocorrido no ano de 2010 no Chile (Figura 2.5). Os terremotos, no entanto, têm um impacto mais significativo em estruturas superficiais, sendo menos prejudiciais a túneis profundos (KOLYMBAS, 2005), por exemplo. No mesmo contexto podem-se mencionar mecanismos associados (ou com mesma origem), como tsunamis e erupções vulcânicas.



Figura 2.5 – Assentamentos pós-liquefação do solo, Chile 2010 (VERDUGO; GONZÁLEZ, 2015)

Em regiões onde tais fenômenos naturais não são comuns, tem-se como principal desencadeador de falhas mecanismos antropogênicos. O aumento de solicitações devido à construção de edifícios ou aterros sobre estruturas existentes é um dos gatilhos mais comuns relacionados à ação humana. No deslizamento de Nice (Figura 2.2), por exemplo, outro fator contribuinte descrito por Courboulex et al. (2020) foi o aterramento do terreno em que seria construído o aeroporto. Outros exemplos podem estar relacionados as alterações nas condições hidrológicas de rios e bacias hidrográficas devido à construção de barragens. A Figura 2.6 ilustra as alterações ao nível da água causadas pelo início da operação da hidrelétrica de Sinop, Mato Grosso.

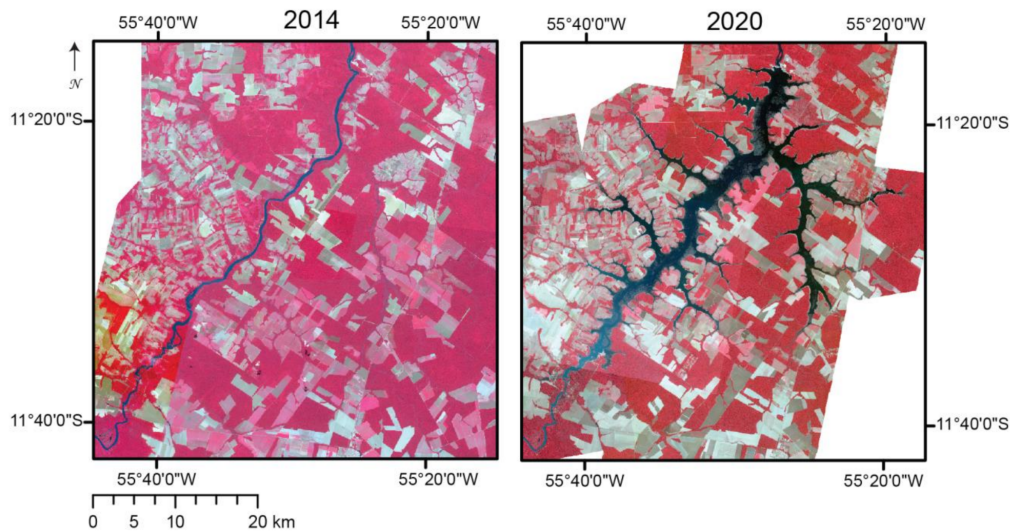


Figura 2.6 – Alteração nas condições hidráulicas após a construção da barragem (LUCANUS et al., 2021)

No contexto da Hidrogeologia, Brönnimann (2011) descreve mecanismos desencadeadores relativos à presença de água no solo, dos quais, dadas as hipóteses do presente trabalho, destaca-se o aumento de poropressão e as forças de percolação. Conforme apresentado anteriormente, o aumento da poropressão reduz a resistência ao cisalhamento, enquanto as forças de percolação aumentam a sollicitação da estrutura. Ambos os efeitos atuam conjuntamente, em favor da falha. Shanmugam (2010) descreve tais agentes instabilizantes não como gatilhos, mas sim efeitos de mecanismos que causam a mudança das condições de contorno hidráulicas.

Esses mecanismos podem ter escalas de tempo distintas, sendo a velocidade em que alterações ocorrem um fator relevante para o impacto na estrutura. O mecanismo pode ter uma escala de tempo de milênios (como na elevação do nível dos oceanos), de anos (como na flutuação do nível de rios devido aos ciclos anuais de cheia e estiagem) e até horas (como em fortes chuvas localizadas). Em específico, a rápida redução do nível de corpos d'água, seja pelos motivos citados ou não, é amplamente reconhecida como fator impactante para análise de estabilidade de taludes, sendo estudada classicamente por Moregenstern (1963), Michalowski (1995b), Michalowski e Nadukuru (2013), Viratjandr e Michalowski (2006) e outros autores.

Salienta-se que “rápida redução” não é uma definição absoluta, sendo dependente do contexto da estrutura, permeabilidade do solo e tempos característicos de consolidação. Conforme ilustrado pela Figura 2.7, o processo de redução do nível da água dividi-se em 4 etapas: equilíbrio inicial (a); após a redução do nível da água, porém antes dos ajustes de consolidação (b); após os ajustes de consolidação (c); e o equilíbrio final (d).

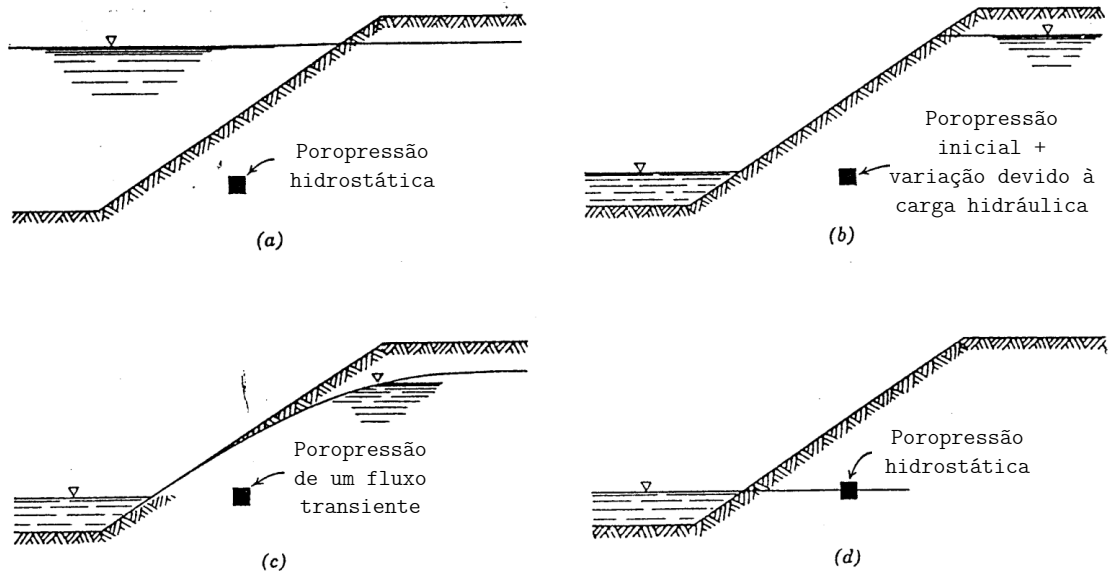


Figura 2.7 – Resposta de um talude para casos de rápida redução no nível da água (adaptado de: Lambe e Whitman (1991))

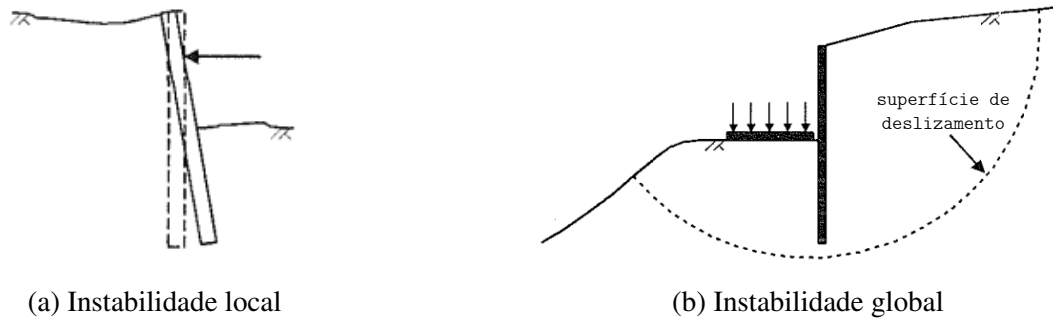
Segundo Lambe e Whitman (1991), a condição (b) é particularmente relevante para casos nos quais o tempo característico de consolidação é muito superior ao da redução da água (como em materiais argilosos), enquanto a condição (c) é relevante para materiais com tempos de consolidações mais rápidos (como em areias). Em reduções lentas do nível da água, tem-se que o equilíbrio hidrostático é mantido ao longo do processo, não existindo as etapas b) e c).

Em taludes não saturados, outro mecanismo desencadeador de grande impacto são as chuvas, especialmente após períodos com secas prolongadas. A infiltração da água eleva gradualmente a saturação do solo, podendo levar um talude previamente estável ao colapso. Particularidades sobre deslizamento de taludes devido a efeitos de chuva podem ser encontradas em Collins e Znidarcic (2004) e Cai e Ugai (2004).

2.2.2 Mecanismos de colapso de estruturas

Como consequência de eventos desencadeadores, o colapso propriamente dito toma a forma de mecanismos de ruptura. O estudo desses mecanismos tem papel importante no entendimento da natureza do colapso, sendo particularmente útil na construção da intuição necessária para implementação de métodos de Análise Limite, visto que procura-se emular de forma realista as superfícies de descontinuidade.

Potts et al. (2001) descrevem duas principais formas de instabilidade: a local (Figura 2.8a), dada por rotações ou translações entre a estrutura e os sistemas de suporte; e a global (Figura 2.8b), no qual a falha independente do sistema de suporte.



(a) Instabilidade local (b) Instabilidade global
 Figura 2.8 – Estabilidade de estruturas (POTTS et al., 2001)

Em taludes, colapsos são classicamente descritos por deslizamentos, os quais caracterizam-se por falhas de cisalhamento em uma superfície bem definida (TERZAGHI, 1943). Tal condição é sempre satisfeita em solos ideais, de modo que a distinção entre colapsos é dada apenas pelo formato da superfície. Gao et al. (2013) dividem deslizamentos em 3 casos gerais: colapso da base; colapso da face; e colapso no pé do talude. Embora sejam estruturas tridimensionais, dada a larga extensão de taludes, podem ser observados casos de falha com superfícies bidimensionais (Figura 2.9).

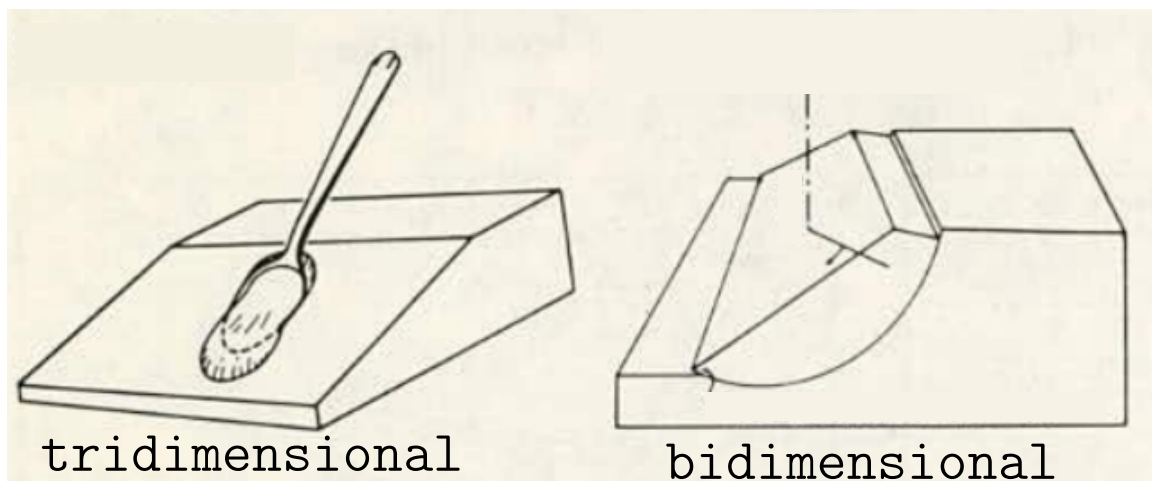


Figura 2.9 – Modos de colapso (adaptado de: Varnes (1978))

Em casos de solos não homogêneos, as superfícies de falhas formam-se naturalmente sobre o caminho de menor resistência, ainda podendo ser facilitadas por rachaduras por tração pre-existent. Quando o talude é composto por material rochoso, além de deslizamentos, novos mecanismos são introduzidos como ruptura por tombamentos (BEKAERT; MAGHOUS, 1996; MAGHOUS et al., 1998; BUHAN et al., 2002; MAGHOUS et al., 2014).

Em estruturas complexas como túneis, em especial os escavados abaixo do nível freático, muitos podem ser os focos de instabilidade que resultam em colapso. Anagnostou (2006) descreve 6 principais formas (Figura 2.10): colapso de face por mecanismo de chaminé; falha da casca aberta de cobertura do túnel; subsidência; altas tensões no concreto em regiões de falha geológica;

convergência; e levantamento de piso devido à expansão do solo. Em especial, produções acadêmicas tem por foco de atenção a estabilidade de face, visto que em boa parte do tempo de construção do túnel a frente deve permanecer livre para escavação, sendo um ponto crítico de atenção.

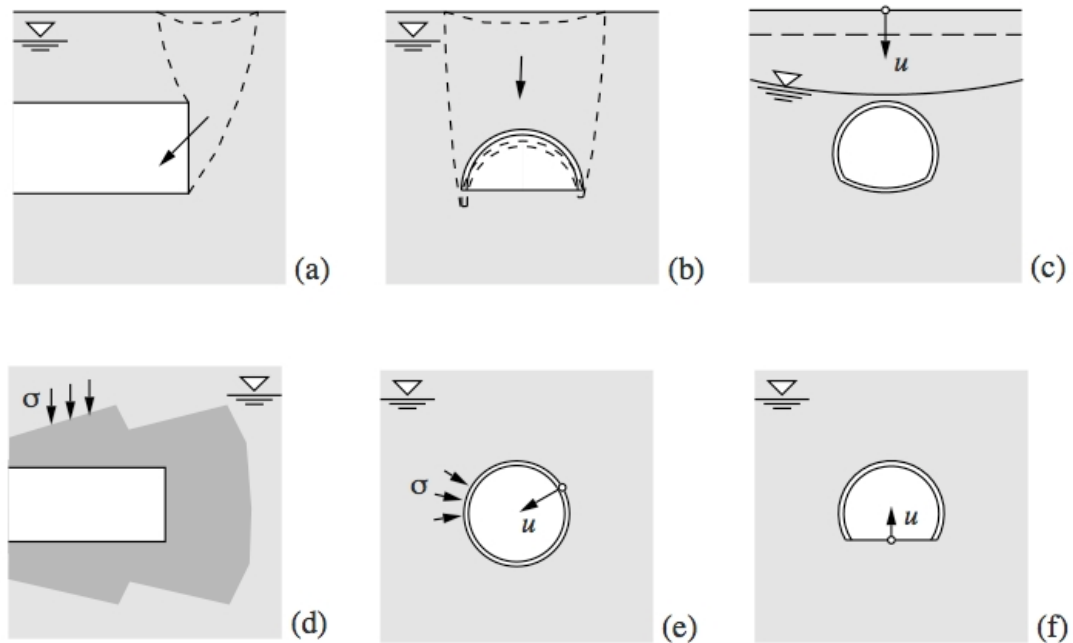


Figura 2.10 – Formas de colapso de túneis. (ANAGNOSTOU, 2006)

Evidentemente, a segurança da estrutura é definida, em última análise, pelo colapso mais provável de ocorrer. Dessa forma, cada caso deve ser avaliado individualmente, considerando as características específicas da estrutura em questão.

2.3 MÉTODOS USUAIS DA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS EM MEIOS POROSOS

O métodos de análise adotados pela bibliografia podem ser catalogados, de maneira geral, em duas categorias: o modelo desacoplado, no qual a distribuição de poropressão é obtida de forma independente das tensões e deformações do solo; e o modelo acoplado, onde o efeito da consolidação é considerado durante a análise, usualmente via abordagens em Elementos Finitos. Embora a primeira consideração seja simplificada, existem contextos nas quais ela pode ser utilizada sem prejuízos ao resultado obtido (BUHAN et al., 1999).

Griffiths e Lane (1999) destacam que, na prática, o desafio do engenheiro é identificar quais problemas de fato se beneficiam de abordagens acopladas. Embora tal método seja uma ferramenta precisa para estudos dessa natureza, o aumento significativo da complexidade e tempo compu-

tacional (mesmo em tempos recentes) pode não compensar em comparação com abordagens diretas baseadas no método da Análise Limite.

2.3.1 Abordagem poromecânica acoplada

Para casos nos quais as hipóteses simplificantes são inválidas, como quando o tempo da mudança das condições de contorno são comparáveis ao tempo característico de consolidação dos solos, isto é, em casos onde a ruptura ocorre em regime transitório intermediário aos regimes drenado e não drenado, torna-se necessário a utilização de modelos que considerem o acoplamento entre o fluido e a matriz sólida que compõe o meio poroso (POTTS et al., 2001). Tal consideração é pertinente particularmente para casos de análise de estabilidade em taludes onde a redução do nível da água é progressiva e não “instantânea”, e para análise da estabilidade da face de túneis, quando o tempo característico de consolidação é comparável à velocidade de avanço.

Segundo Mestat et al. (2004), existe uma tendência de crescimento de estudos com abordagens acopladas. Embora apenas 15% dos estudos das modelagens numéricas em túneis em meios saturados utilizam uma abordagem acoplada, nos anos mais recentes esse número aumenta para 84% no caso de análises em taludes (Figura 2.11). Evidentemente estes dados precisam ser atualizados, mas a tendência mostrada pelas publicações recentes parecem indicar o mesmo cenário: apesar do crescimento da utilização de abordagens acopladas, análises drenadas ainda são privilegiadas para avaliar a ruptura de geoestruturas.

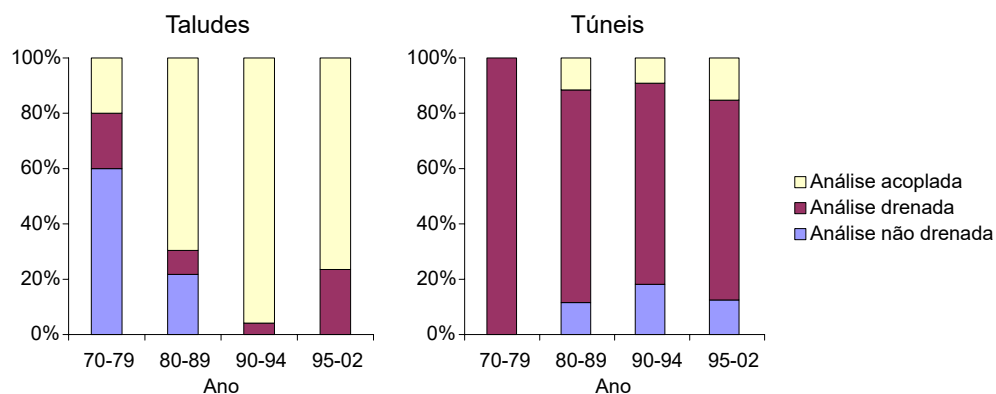


Figura 2.11 – Abordagem dos estudos (adaptado de: Mestat et al. (2004))

Modelos para meios saturados são implementados de modo a combinar as equações governantes do fluxo intersticial pelo esqueleto sólido com suas equações governantes de deformação devido ao carregamento. Atribui-se à Terzaghi (1943) os primeiros modelos poroelásticos que descreve o comportamento unidimensional da consolidação de estruturas, sendo seu modelo generalizado por Biot (1941) para o caso de consolidação tridimensional, ainda restrita à elasticidade linear. Posteriormente, partindo da base estabelecida pela Teoria de Biot, desenvolveram-se modelos poroelastoplasticos para representar o comportamento de estruturas (COUSSY, 2004). No contexto de resoluções numéricas, Zienkiewicz e Shiomi (1984) além de apresentar a dedução

completa da teoria de Biot para uma formulação em Elementos Finitos, também apresenta a aproximação $u - p$, utilizada para problemas quasi-estáticos, nos quais os termos referentes a acelerações podem ser omitidos com confiança.

Usualmente tais implementações têm por objetivo análises em termos de tensões e deformações, sendo possível citar o trabalho desenvolvido por Cayro (2020), onde o autor avalia o processo de escavação em túneis saturados a partir de um modelo poroelástico implementado em Elementos Finitos. No caso de análises de estabilidade, onde se busca apenas a determinação da carga de colapso da estrutura, tal implementação é tradicionalmente realizada por meio de análises poroelastoplásticas evolutivas. Neste tipo de análise, as tensões e deformações são encontradas a partir de um processo incremental-iterativo até que seja detectado a ocorrência de fluxo plástico livre (Colapso) dado pela não convergência do modelo numérico. Problemas práticos de deformação costumam apresentar configurações de equilíbrio instáveis, de modo a evitar tais problemas em implementações numéricas incrementais, costumam-se empregar técnicas de continuação, como o *arc-length method* (NETO et al., 2011). Atualmente, softwares comerciais como *FLAC^{3D}* (Diferenças Finitas) e *ABAQUS* (Elementos Finitos) possuem suporte para tal abordagem.

Embora tais análises possam representar o problema de estabilidade de forma mais realista (fornecidos valores adequados aos modelos materiais utilizados), a obtenção de resultados mais precisos pode não justificar o aumento em custo computacional, especialmente em aplicações práticas e em modelos com geometrias complexas. A vantagem do método, quando comparado à Análise Limite ou Equilíbrio Limite, é que não são necessárias superfícies de ruptura pré-definidas, visto que são obtidas naturalmente na não convergência do modelo. A título de ilustração, na Figura 2.12 pode-se visualizar a malha deformada no momento de não convergência computacional e a correspondente superfície de falha encontrada pelo método do equilíbrio limite.

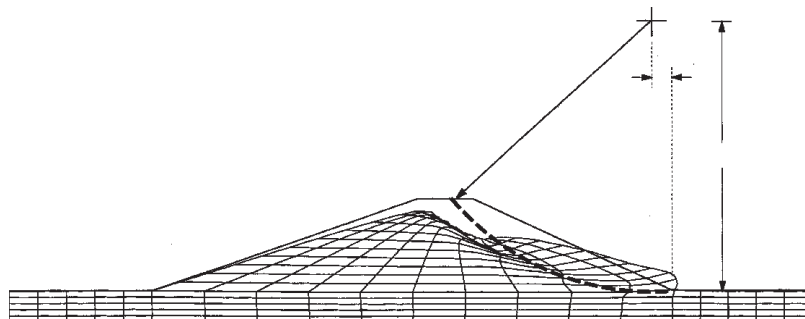


Figura 2.12 – Malha em elementos finitos no momento da não convergência computacional (adaptado de: Griffiths e Lane (1999))

Dentro dessa metodologia, Anagnostou et al. (2016) examinam a estabilidade da face de túneis

em solos com média-baixa permeabilidade. Nesses casos a face do túnel pode manter-se estável por um tempo limitado, e apresentar uma falha (dita “falha atrasada”) após alterações nas condições hidrostáticas e consolidação. Na análise, a perda de estabilidade é constatada a partir da ocorrência de grandes deslocamentos em um passo de tempo, conforme ilustrado pela Figura 2.13. No entanto, essa análise não fornece fatores de segurança explícitos no caso da convergência da solução.

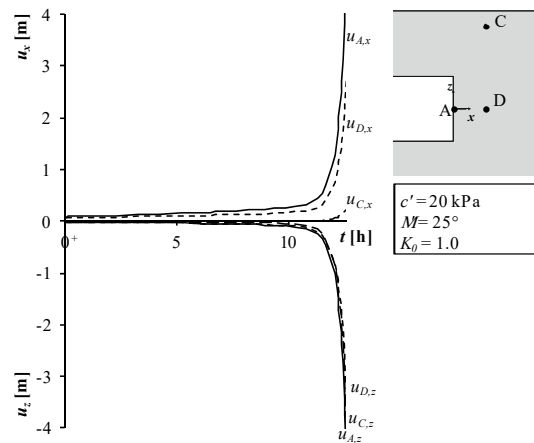


Figura 2.13 – Evolução no tempo dos deslocamentos nos pontos A, B e D (adaptado de: Anagnostou et al. (2016))

Como forma de obtenção do Coeficiente de Segurança F_s da estrutura, a análise pode ser replicada para diversos casos de carregamento de modo a encontrar configurações estáveis e instáveis que delimitem a carga de colapso. Tradicionalmente, ao invés de alterar a intensidade do carregamento da estrutura, utiliza-se o método da redução da resistência ao cisalhamento (ou redução $c - \phi$). Tal método, apresentado originalmente por Zienkiewicz et al. (1975), propõe a redução sucessiva da coesão e/ou do ângulo de atrito do solo até que seja constatado a ocorrência de fluxo plástico livre na estrutura. Griffiths e Lane (1999) descrevem o Coeficiente de Segurança como o número o qual os parâmetros de resistência devem ser divididos de modo a levar a estrutura ao ponto de falha. Sendo c e ϕ a coesão e o ângulo de atrito originais da estrutura, tem-se que:

$$c_f = \frac{c}{F_s}; \quad \phi_f = \arctan\left(\frac{\tan \phi}{F_s}\right) \quad (2.3)$$

onde o subscrito f representa os fatores últimos na não convergência, e F_s o Coeficiente de Segurança da estrutura. Tal conceito de estabilidade de estruturas é utilizada por Berilgen (2007) em seu estudo sobre taludes saturados. Mediante uma abordagem por elastoplástica implementada no software de Elementos Finitos PLAXIS, o autor investiga o impacto da velocidade da redução da água e permeabilidade do solo no Coeficiente de Segurança da estrutura.

Reafirma-se que tais implementações possuem alta complexidade e custo computacional, sendo uma boa prática utilizar apenas em casos nos quais são indispensáveis. Tanto Anagnostou et al.

(2016) como Berilgen (2007), apresentam limites de aplicabilidade dentro dos quais análises simplificadas como a drenada e não drenada podem ser utilizadas sem prejuízos à confiança do resultado obtido.

2.3.2 Abordagem com desacoplamento fraco (*One-way coupling*)

O modelo parcialmente desacoplado (*one-way coupling*) é construído a partir das hipóteses de incompressibilidade das fases sólidas e fluidas, e da existência de uma configuração deformável estabilizada para o meio poroso. O termo “*one-way coupling*” refere-se ao acoplamento do problema em apenas um sentido (Figura 2.14), isto é, a distribuição de poropressões no solo (e consequentemente as forças de percolação e empuxo) são obtidas diretamente pela combinação da conservação da massa fluida com a Lei de Darcy, sem considerar as tensões e deformações do solo. No entanto, a distribuição de poropressões, que permanece inalterada devido ao desacoplamento parcial, entra como um dado no problema mecânico do esqueleto sólido. Evidentemente, a validade das hipóteses e a aplicabilidade do modelo deve ser verificada caso a caso.

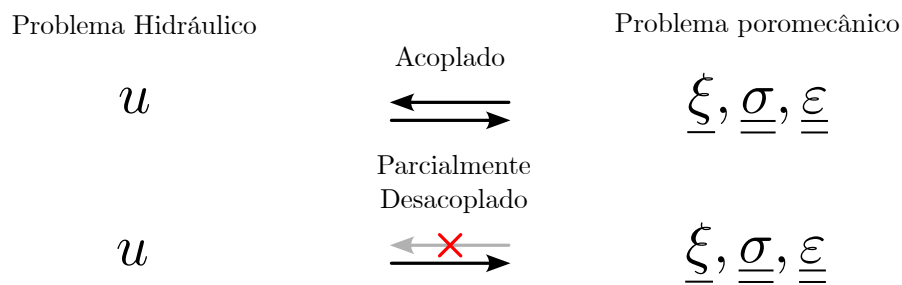


Figura 2.14 – Acoplamento completo e desacoplamento parcial

A abordagem mencionada é classicamente utilizada para o estudo de taludes saturados após uma rápida redução no nível da água (MOREGENSTERN, 1963; MICHALOWSKI, 1995a; MICHALOWSKI; NADUKURU, 2013; VIRATJANDR; MICHALOWSKI, 2006; SAADA et al., 2012). Na consideração de uma redução instantânea do nível da água (comparadas ao tempo característico de percolação no material), pode-se desconsiderar as deformações do esqueleto e solucionar apenas a distribuição de poropressão no momento crítico para a estabilidade.

A abordagem desacoplada também é aplicável ao estudo da estabilidade de túneis escavados abaixo do lençol freático, em particular em análises referentes à face de escavação (BUHAN et al., 1999; ANAGNOSTOU et al., 2016; CUVILLIER, 2001; PAN; DIAS, 2016). Buhan et al. (1999) e Cuvillier (2001) demonstram que, a partir de hipóteses sobre os tempos característicos de consolidação da face do túnel e evolução do nível de água subterrâneo, o solo pode ser considerado como estando em uma configuração estabilizada e o nível de água constante, sendo possível adotar a hipótese desacoplada sem prejuízos à solução.

Uma vez conhecida a distribuição de poropressão, ela pode ser incorporadas como carregamento

externo (forças de corpo) em uma abordagem baseada em tensões efetivas. Embora tal consideração possa ser utilizada novamente em uma implementação elastoplástica em Elementos Finitos (GRIFFITHS; LANE, 1999) (agora sem efeitos de consolidação), o modelo desacoplado é favorecido por abordagens de análise de estabilidade via método de Equilíbrio Limite ou Análise Limite.

Os estudos que utilizam o modelo desacoplado para análise de estabilidade de estruturas saturadas geralmente podem ser distinguidos baseando-se em dois principais aspectos: a estratégia adotada para resolver o problema hidráulico; e a seleção do método de avaliação da estabilidade.

2.3.2.1 Problema Hidráulico

Conforme apresentado anteriormente, para uma descrição precisa da distribuição de poropressão deve-se solucionar a equação de conservação de massa fluida. O problema diferencial é usualmente solucionado a partir de abordagens numéricas baseada no MEF. Viratjandr e Michalowski (2006) argumentam que, dada a natureza temporal das condições de contorno e da permeabilidade do solo, um resultado exato somente pode ser obtida por meio de uma solução transiente para o problema de percolação. Entretanto, em casos onde se verificam condições de contorno estáticas e tempos característicos de percolação adequados, soluções estacionárias representam a situação com maior gradiente hidráulico, sendo o pior caso em termos de estabilidade.

Em seu estudo sobre a estabilidade da face de túneis Buhan et al. (1999) desenvolvem uma formulação dita híbrida para solucionar o problema hidráulico. Nessa formulação, baseado em métodos variacionais, obtêm-se diretamente os gradientes hidráulicos, os quais relacionam-se às forças de percolação. Baseado no mesmo método, Cu villier (2001) apresenta soluções analíticas que aproximam a solução da equação de conservação de massa fluida para a percolação em túneis saturados. Saada et al. (2012), em seu estudo sobre estabilidade de taludes rochosos, também utiliza uma formulação numérica para a resolução do problema hidráulico.

Ainda no contexto de soluções numéricas, alguns autores como Pan e Dias (2016) e Pan et al. (2017), optam por utilizar diretamente *softwares* comerciais, como o *FLAC^{3D}*, para a solução dos problemas hidráulicos. Esses estudos incluem tanto a análise de estabilidade da face de túneis como análise tridimensional da estabilidade de taludes.

Dada a dificuldade de implementação e custo computacional, principalmente para o caso tridimensional, o problema hidráulico é classicamente resolvido de modo aproximado através de linhas de fluxo (TERZAGHI et al., 1996) ou pelo coeficiente de poropressão r_p (BISHOP; MORGENSTERN, 1960). As linhas de fluxo, conforme ilustrados pela Figura 2.15, representam através de uma malha as linhas equipotenciais percorridas pelo fluido em duas dimensões. Neste método a malha é traçada graficamente através de exemplos conhecidos, diretrizes de construção

(CASAGRANDE, 1937) ou até mesmo experimentos em escala reduzida. Em geral, tal método possui aplicabilidade reduzida, visto que depende de condições e materiais regulares, além de que, em última instância, as linhas de fluxo são um subproduto de análises por métodos numéricos.

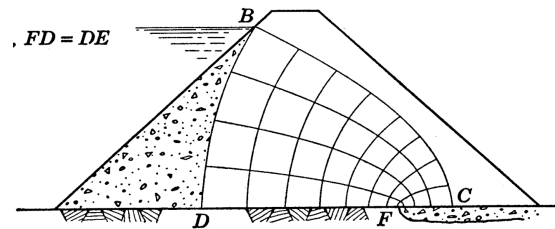


Figura 2.15 – Linhas de fluxo para talude com drenagem interna (TAYLOR, 1948)

Em contrapartida, o coeficiente de poropressão r_p , proposto originalmente por Bishop e Morgenstern (1960) e definido como:

$$r_p = \frac{p}{\gamma h} \quad (2.4)$$

onde p representa a poro pressão, h a distância do ponto até a superfície do solo e γ o peso específico do solo, representa uma forma conveniente de definir a poropressão em qualquer ponto da estrutura. Evidentemente, conforme apresentado na Figura 2.16 o valor de r_p varia ao longo da estrutura, dependendo de parâmetros geométricos e da permeabilidade. Do ponto de vista da estabilidade global, no entanto, costuma-se tomar um único valor médio de r_p para toda estrutura. Essa consideração permite, em alguns casos simples, encontrar expressões fechadas para problema de estabilidade.

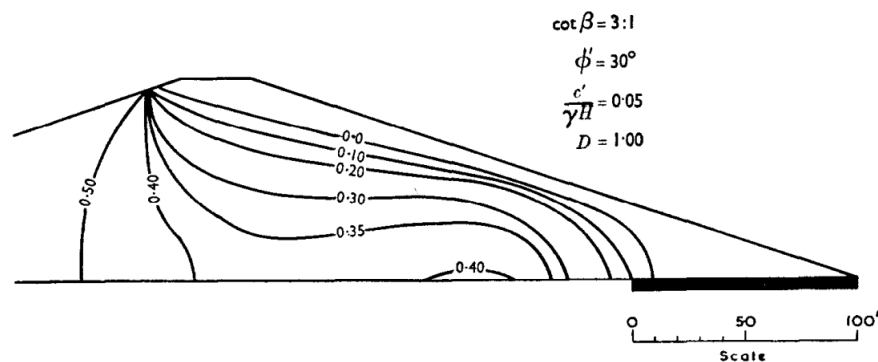


Figura 2.16 – Distribuição do coeficiente r_p para o caso de percolação estacionária. (BISHOP; MORGENSTERN, 1960)

Tal abordagem é frequentemente utilizada no problema de estabilidade de taludes, como em Bishop e Morgenstern (1960), Michalowski (1995a), Michalowski e Nadukuru (2013) e Gao et al. (2014). A simplificação de um único valor para o coeficiente de poropressão permite a Michalowski (1995a) apresentar uma expressão fechada para o problema de estabilidade de taludes.

Embora tenha sido proposto originalmente para problemas em taludes, o coeficiente de poropressão é aplicável para outras estruturas. Huang e Yang (2011), por exemplo, utiliza o coeficiente para encontrar a distribuição de poropressões na análise de colapso de túneis circulares.

Saada et al. (2012) comparam os resultados de estabilidade global de taludes rochosos obtidos a partir do método numérico com a abordagem simplificada de Bishop e Morgenstern (1960). Embora a utilização de valores r_p médios específicos resultem em valores razoáveis do ponto de vista da estabilidade global, a maior limitação do método reside no fato de que esses valores médios não são conhecidos *a priori*.

Outra abordagem proposta por Morgenstern (1963) e Viratjandr e Michalowski (2006) pode ser considerada para análise de estabilidade de taludes. De forma semelhante ao coeficiente de poropressão, considera-se que as linhas equipotenciais permanecem verticais após o rebaixo do nível da água, conforme ilustrado pela Figura 2.17. Segundo Morgenstern (1963), tal consideração resulta em fluxos horizontais os quais superestimam o verdadeiro gradiente hidráulico, sendo conservativo do ponto de vista da segurança.

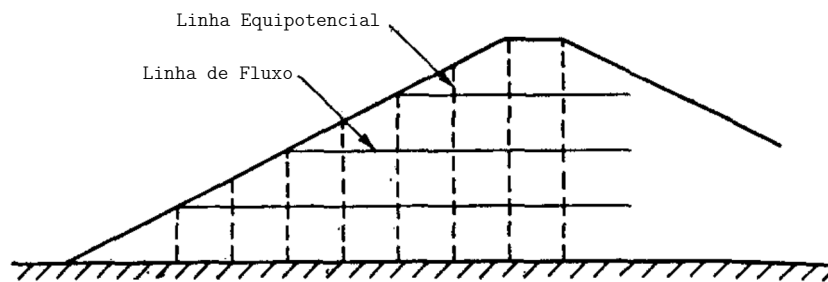


Figura 2.17 – Linhas equipotenciais no talude (MORGENSTERN, 1963)

No presente trabalho, opta-se pela utilização da formulação variacional para encontrar soluções aproximadas para a equação da conservação de massa fluida. A solução em termos de gradiente hidráulico apresenta vantagens em relação a soluções numéricas clássicas, como a obtenção de uma expressão analítica fechada. Tal solução também é validada posteriormente a partir de métodos numéricos.

2.3.2.2 Avaliação da Estabilidade

Resolvido o problema hidráulico, seja de forma simplificada ou não, deve-se considerar de que modo ele será incorporado à análise de estabilidade da estrutura. Usualmente, na abordagem desacoplada, o efeito da poropressão é considerado através da inserção das forças de percolação e de empuxo como forças externas na formulação baseada em tensões efetivas. Miller e Hamilton (1989) propõe a consideração da poropressão como forças internas, no entanto, a validade de tal

hipótese é contestada por Michalowski (MILLER; HAMILTON, 1990).

O problema de estabilidade pode ser novamente avaliado através do MEF com redução da resistência ao cisalhamento ou com o incremento gradual do carregamento (NETO et al., 2011). Considerado o desacoplamento parcial do problema, o modelo pode ser resolvido em duas etapas: inicialmente solucionando o problema hidráulico; e segundo, aplicando as forças encontradas em um modelo elastoplástico drenado, baseado no princípio de tensões efetivas. Novamente, constata-se a falha a partir da ocorrência de fluxo plástico livre, caracterizada pela não convergência do modelo. Griffiths e Lane (1999) utilizam tal abordagem para avaliar a estabilidade de taludes submetidos a cargas decorrentes da rápida redução do nível da água.

Embora uma abordagem em Elementos Finitos tenha vantagens, a simplicidade de métodos clássicos da análise estabilidade, como o método do Equilíbrio Limite e a abordagem cinemática da Análise Limite, favorece sua utilização. De modo geral, ambos os métodos baseiam-se na procura de mecanismos de ruptura críticos que minimizem a estabilidade da estrutura, e consequentemente, o seu Coeficiente de Segurança/Fator de Estabilidade.

No Equilíbrio Limite, o solo mobilizado sobre uma superfície de falha arbitrária é discretizado em fatias, as quais são consideradas individualmente como blocos deslizantes. Dada a indeterminação estática do problema (MICHALOWSKI, 1995a), métodos como de Bishop (1955), Janbu (1957) e Spencer (1967), são construídos a partir de hipóteses sobre aplicações de forças e interação entre as fatias.

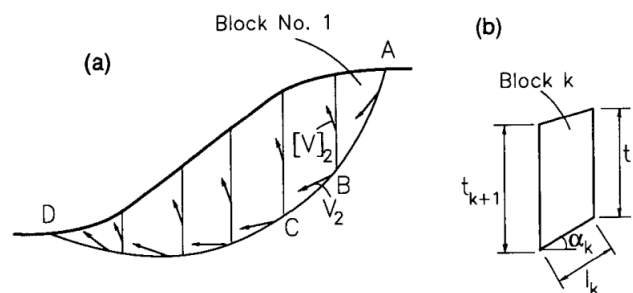


Figura 2.18 – Método do equilíbrio limite aplicado à estabilidade de taludes (MICHALOWSKI, 1995b)

Na Análise Limite, considera-se que o solo é um material cuja resistência é definida por um critério de resistência representando o estado último do material após sua fase de evolução elastoplástica local. A partir dessas hipóteses, podem ser provados os teoremas limites que delimitam inferiormente (pela abordagem estática) e superiormente (pela abordagem cinemática) o carregamento crítico da estrutura (DRUCKER; PRAGER, 1952). Posteriormente, tal teoria teve seu desenvolvimento formalizado e aperfeiçoado por Chen (1975) e Salençon (1983). Em geral, os teoremas da análise limite foram estabelecidos no caso de um critério elastoplástico

obedecendo à lei de normalidade. Extensões ao caso de plasticidade não associada podem ser encontrados em Salençon (1983), Bousshine et al. (2001), Saxcé e Bousshine (1998) e Maghous et al. (2009).

Ao contrário do método do Equilíbrio Limite, a Análise Limite não requer suposições a respeito da interação do solo para que as condições de equilíbrio sejam satisfeitas em todos os pontos, sendo uma abordagem rigorosa do ponto de vista mecânico. Na abordagem cinemática, dado um mecanismo de ruptura qualquer, um limite superior é obtido quando se verifica que a taxa de trabalho aplicada pelas forças externas é superior (ou igual) ao trabalho resistente do material que compõe a estrutura.

Michalowski (1995b) apresenta uma análise comparativa entre os métodos de Bishop (1955), Spencer (1967) e o método do limite superior no contexto da análise de estabilidade de taludes. A partir da consideração de mecanismos de ruptura rotacionais, tem-se que os resultados possuem pouca variabilidade. Ambos os métodos propõem-se a determinar a carga crítica da estrutura sem determinar seu estado prévio à falha, dessa forma são altamente dependentes da qualidade e complexidade dos mecanismos de ruptura propostos. Ressalta-se que os mecanismos de ruptura não são dados de forma arbitrária, mas sim através da observação de casos de falhas reais, ou até mesmo experimentos em escala real.

No problema de estabilidade de taludes, Taylor (1948) propõe superfícies de ruptura circulares e, posteriormente, superfícies definidas através do método do círculo de atrito, a qual descreve uma espiral logarítmica (CHEN, 1975). Embora grande parte dos mecanismos de ruptura sejam referentes a deslocamentos de corpo rígido associadas a superfícies de descontinuidade, deformações podem ser consideradas. Buhan et al. (1993) apresenta um valor referência do limite superior de estabilidade de taludes baseado em mecanismos de rotação e deformação contínuos.

Mecanismos de rotação descritos por uma espiral logarítmica (Figura 2.19) são utilizados nos trabalhos desenvolvidos por Saada et al. (2012) e Michalowski (1995a), Viratjandr e Michalowski (2006). Michalowski e Nadukuru (2013) argumentam que uma abordagem no estado plano de deformações é conservadora em relação à segurança, sendo propostas análises tridimensionais, na qual superfície de ruptura correspondente é descrita por um mecanismo de chifre, conforme ilustrado pela Figura 2.20. Tal mecanismo é utilizado pelos autores Michalowski e Nadukuru (2013) e Pan et al. (2017).

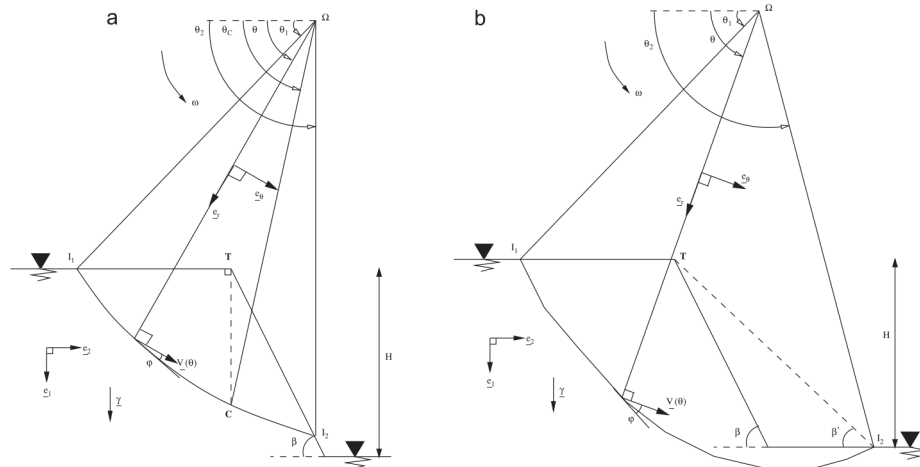


Figura 2.19 – Mecanismo de ruptura por espiral logarítmica. (SAADA et al., 2012)

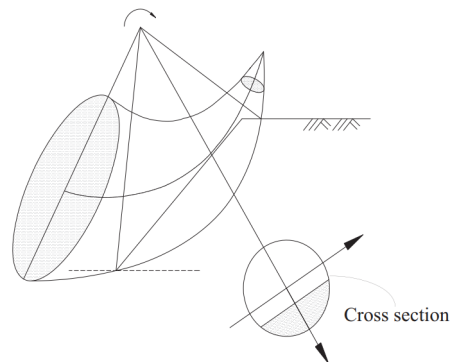


Figura 2.20 – Mecanismo de ruptura por chifre. (PAN et al., 2017)

No contexto da estabilidade de túneis, para a análise de face submetidas a forças de percolação, Buhan et al. (1999) utiliza um mecanismo de ruptura cônico (Figura 2.21) proposta por Leca e Dormieux (1990). Posteriormente, Mollon et al. (2009) generaliza esse mecanismo para casos de deslocamento de múltiplos blocos rígidos, além de apresentar uma superfície correspondente para o caso tridimensional. Tal superfície é utilizada por Cuvillier (2001) e Pan e Dias (2016) em suas análises dos efeitos da propressão na estabilidade da face de túneis.

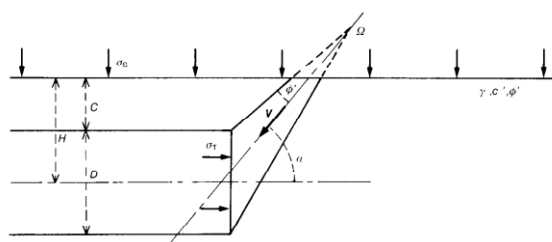


Figura 2.21 – Mecanismo de ruptura cônico (LECA; DORMIEUX, 1990)

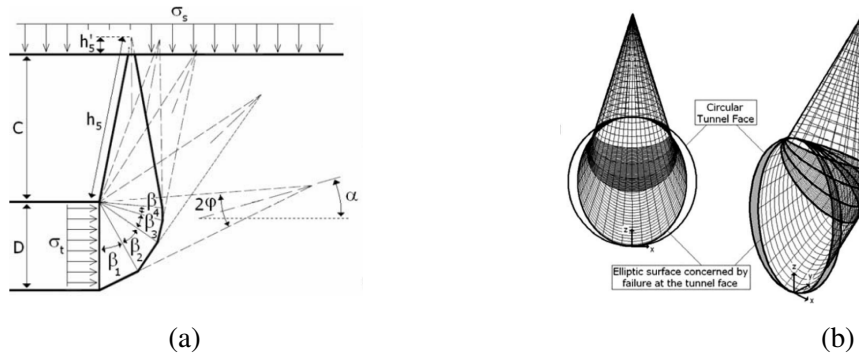


Figura 2.22 – Mecanismos de colapso para faces de túneis (MOLLON et al., 2009)

2.4 MÉTODOS DE ANÁLISE ESTOCÁSTICA

Até então, apresentam-se metodologias determinísticas de avaliação de estabilidade de estruturas. Nessas abordagens considera-se que o solo se comporta conforme ditado por valores únicos que caracterizam as propriedades mecânicas e hidráulicas em todo um domínio (ou porções de um domínio). No entanto, como descrito por Terzaghi, essas propriedades variam de ponto a ponto no solo. Taylor, em seu livro “*Fundamentals of Soil Mechanics*” afirma ainda: “Dois espécimes de solo retirados em pontos a poucos metros de distância podem ter propriedades que diferem em muitas vezes, mesmo que provenientes de um estrato de solo descrito como relativamente homogêneo”. Dessa forma, nesta seção consideram-se alguns métodos usuais de análise estocástica de estruturas de terra.

2.4.1 Função de estado limite e probabilidade de falha

Uma função estado limite, de forma ampla, representa o desempenho/estabilidade de estruturas. É por vezes denotada como $g(\underline{\chi})$, onde o vetor $\underline{\chi}$ representa o agrupamento de todas as variáveis do problema de estabilidade. Habitualmente aplica-se um deslocamento à função $g(\underline{\chi})$, de modo que

$$g(\underline{\chi}) \geq 0 \implies \text{Estabilidade}; \quad g(\underline{\chi}) < 0 \implies \text{Falha} \quad (2.5)$$

ao invés da caracterização clássica em termos do valor 1.

Em um sentido determinístico, $g(\underline{\chi})$ resulta em um único valor para cada $\underline{\chi}$ considerado. Incorporando o aspecto probabilístico à análise, o vetor $\underline{\chi}$ passa a ser representado por um vetor de variáveis aleatórias \underline{X} , de modo que $g(\underline{X})$ passa a ter uma distribuição estatística associada ao desempenho. Dessa forma, a Probabilidade de falha P_f de uma estrutura pode ser calculada como (BAECHER; CHRISTIAN, 2005):

$$P_f = P[g(\underline{X}) < 0] = \int_{g(\underline{X}) \leq 0} f_{\underline{X}}(\underline{X}) d\underline{X} \quad (2.6)$$

onde $f_{\underline{X}}(\underline{X})$ representa a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias de \underline{X} , sendo a integração realizada sobre o domínio de falha do espaço \underline{X} .

Na prática, a função densidade de probabilidade conjunta é desconhecida, de modo que a integral definida na Equação 2.6 não pode ser calculada analiticamente. Dessa forma, consideram-se procedimentos alternativos de avaliação. Chakraborty e Dey (2022) dividem as abordagens de solução do problema em duas categorias: métodos aproximados, os quais incluem o Método FORM (*First Order Reliability Method*), o método FOSM (*First Order Second Moment*) e o método SORM (*Second Order Reliability Method*); e Simulações de Monte Carlo.

O método FORM, em particular, consiste em estimar a probabilidade de falha de estruturas a partir de um índice de confiabilidade β_R . Esse índice, por sua vez, é definido como a distância da origem até o ponto mais provável de falha no espaço de variáveis normais equivalentes. Mostyn e Li (2020), em sua categorização a respeito do rigor das análises de estabilidade, classificam o método descrito como nível dois, sendo o nível três o mais rigoroso. Como aplicação da metodologia descrita, pode-se citar o trabalho desenvolvido por Hong e Roh (2008), com respeito a análise de confiabilidade de taludes de terra.

O Método de Monte Carlo, classificado como nível três em termos de rigor, consiste em construir uma distribuição estatística para $g(\underline{X})$ a partir da solução, em um sentido determinístico, de vários casos amostrais (MOSTYN; LI, 2020). Embora o método seja simples e versátil, tem-se, em contrapartida, uma demanda computacional substancial. No presente trabalho, optou-se por utilizar o método de Monte Carlo para as análises estocásticas realizadas.

2.4.2 Método de Monte Carlo e campos estocásticos

Fenton et al. (2008) define uma simulação de Monte Carlo como um procedimento executado em cinco etapas:

1. Partindo de observações de “mundo real” das propriedades do solo, estimar os parâmetros estatísticos pertinentes como média, desvio padrão, distâncias de correlação, dentre outros. . .
2. Definir variáveis/campos estocásticos que respeitam as observações tomadas na etapa anterior.
3. Gerar uma amostra da variável/campo estocástico definido, seja baseado em geradores de números pseudoaleatórios ou em geradores de campos aleatórios propriamente ditos.
4. Utilizando métodos determinísticos, avaliar a resposta do sistema à configuração aleatória particular considerada.

5. Repetir as etapas 3 e 4 quantas vezes for possível, gravando as respostas obtidas.

Encerrada a simulação, a probabilidade de um determinado evento (usualmente a falha) pode ser aproximada dividindo o número de vezes em que o evento ocorre pelo número total de configurações consideradas. Embora na simulação descrita as propriedades do solo possam ser consideradas também variáveis aleatórias, aplicável a problemas de estabilidade de fundações rasas via equação de capacidade de suporte de Terzaghi (SHAKIR, 2019), no presente trabalho será dado enfoque a métodos nos quais a variabilidade dos parâmetros do solo é modelada via campos estocásticos.

Vanmarcke (2010) descreve Campos aleatórios (ou estocásticos) simplesmente como uma família indexada de variáveis aleatórias. Estas podem ou não ser relacionadas através de uma estrutura de correlação, isto é, da consideração que dois pontos no espaço podem ter valores mais ou menos semelhantes a depender de seu afastamento. Embora diversos métodos de geração de malhas possam ser considerados, cita-se duas abordagens particulares: o método de Subdivisão da Média Local (LAS) (FENTON; VANMARCKE, 1990); e métodos de expansão em séries em geral, como o método da representação espectral (SHINOZUKA; DEODATIS, 1991) e a Expansão de Karhunen-Loève (GHANEM; SPANOS, 2003).

O método LAS consiste em um processo iterativo de subdivisão de domínios. Cada iteração é realizada de modo a preservar a média local existente na etapa anterior, obtendo por fim uma malha discreta de valores. Uma visualização do processo para o caso unidimensional é apresentada na Figura 2.23. Dada a aproximação discreta do campo estocástico, é frequentemente utilizada em associação a análises via Elementos Finitos (FENTON et al., 2008).

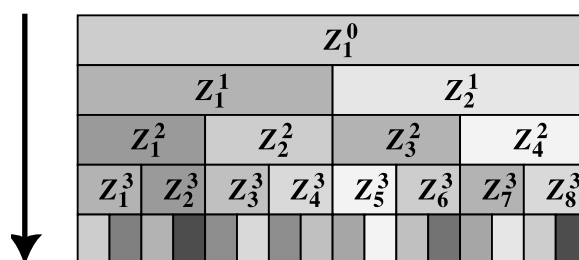


Figura 2.23 – Aplicação do método LAS para o caso unidimensional (FENTON et al., 2008)

Em outra perspectiva, campos estocásticos podem ser discretizados a partir do truncamento de série de funções, ou no caso da expansão de Karhunen-Loève, autofunções obtidas a partir da solução da equação integral de Fredholm de segundo tipo. Cho (2010) aponta para uma maior eficiência da abordagem em comparação a outros métodos de expansão, sendo necessários menos termos para obter convergência. Maiores detalhes a respeito do método podem ser encontrados em livros como de Ghanem e Spanos (2003).

Uma vez definido o método utilizado para gerar campos estocásticos dada uma descrição estatística de uma propriedade do solo, pode-se prosseguir para a quarta etapa da simulação de Monte Carlo. Conforme descrito anteriormente, a etapa consiste em escolher um método de avaliação da resposta da estrutura, em um sentido determinístico, dada uma configuração particular do campo estocástico. Dentre as abordagens possíveis, destacam-se os métodos clássicos de equilíbrio e análise limites, bem como implementações de modelos constitutivos elastoplásticos via Elementos Finitos.

Novamente pode-se utilizar o método de redução $c - \phi$ para avaliar a estabilidade de estruturas via Elementos Finitos. No contexto da modelagem da variabilidade espacial de propriedades via campos estocásticos, o método passa a ser denominado Elementos Finitos Aleatórios (RFEM) (FENTON et al., 2008) ou Elementos Finitos Estocásticos (SFEM) (GHANEM; SPANOS, 2003). O método consiste primeiro em atribuir valores do campo estocástico a elementos de uma malha, e segundo, prosseguir com a avaliação de estabilidade de forma determinística. A Figura 2.24 ilustra a resposta via RFEM para uma amostra típica de um campo estocástico. Apesar de ter um desenvolvimento relativamente recente, é um método frequentemente utilizado em diversos trabalhos, sendo notoriamente alvo de publicações de autores como Griffiths e Fenton (2004), na avaliação de estabilidade de taludes, e Fenton e Griffiths (2003), na capacidade de suporte de solos. Em anos recentes a foi utilizada por Huang et al. (2010), novamente na avaliação de estabilidade de taludes, e por Calderón (2020), analisando o problema de interação solo-estaca. Detalhes a respeito da abordagem podem ser encontrados em (FENTON et al., 2008).

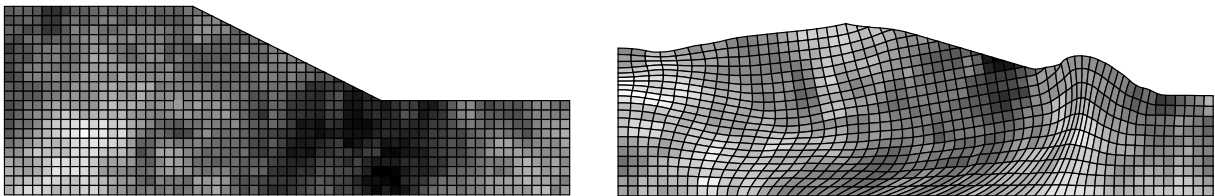


Figura 2.24 – Configuração típica e resposta via RFEM (FENTON et al., 2008)

A utilização de métodos clássicos de avaliação de estabilidade é especialmente vantajosa no contexto de simulações de Monte Carlo. Seu baixo custo computacional associado a simplicidade de aplicação permite considerar uma maior quantidade de amostras em um mesmo intervalo de tempo. Métodos como Análise Limite e Equilíbrio Limite (nesse contexto Método do Equilíbrio Limite Aleatório (RLEM) (JAVANKHOSHDEL et al., 2017)) podem ser aplicados diretamente a abordagem de campos estocásticos, sendo utilizado sobretudo na avaliação de estabilidade de taludes em situações hidrostáticas. Nesse cenário, pode-se citar os trabalhos desenvolvidos por Cho (2007) e (2010) e Javankhoshdel et al. (2017). A Figura 2.25 ilustra a resposta via equilíbrio limite uma amostra típica de um campo estocástico.

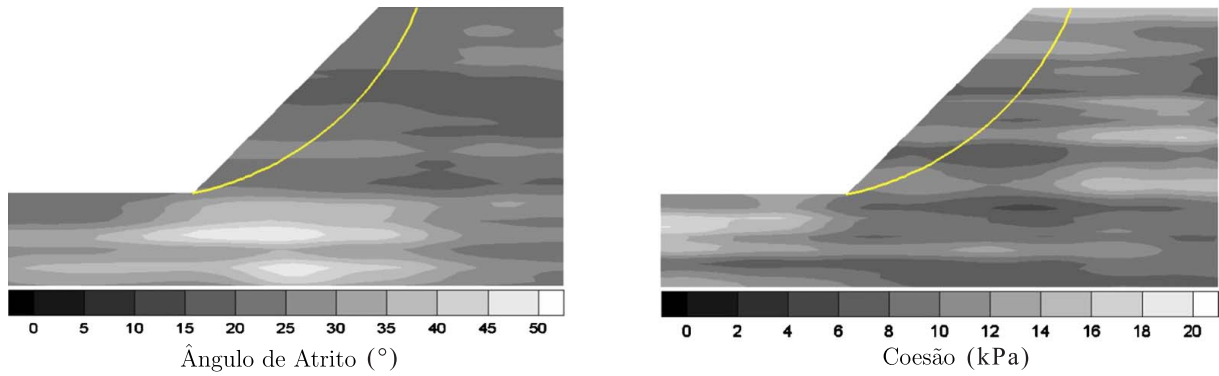
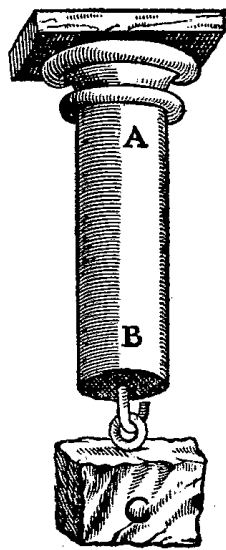


Figura 2.25 – Configuração típica e resposta via RLEM (CHO, 2010)

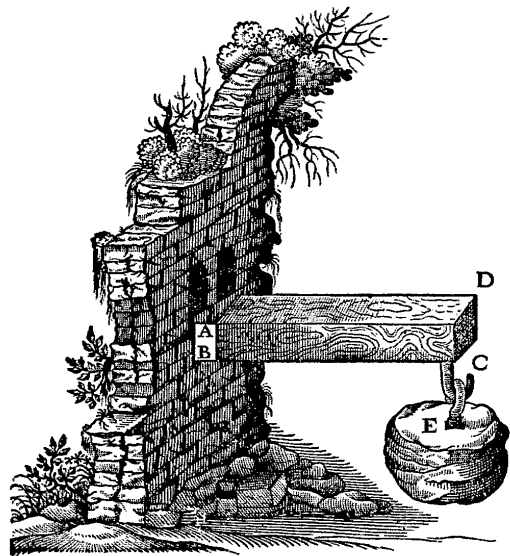
No contexto de estruturas de terra saturadas, a metodologia descrita também pode ser utilizada para considerar a variabilidade espacial do tensor de permeabilidade, resultando em distribuições estocásticas de propressão. Uma abordagem do tipo foi utilizada por Bergado e Anderson (1985). No presente trabalho, de forma semelhante, o problema descrito é abordado via simulações de Monte Carlo, sendo a variabilidade do solo modelada como campos estocásticos discretizados via Expansão de Karhunen-Loève com autofunções numericamente computadas.

3 FUNDAMENTOS DA TEORIA DE ANÁLISE LIMITE

Segundo Salençon (2013), uma das primeiras menções ao método pode ser atribuída à Galileu (1638) em seu livro intitulado “*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*”. Neste livro, inicialmente introduz-se o conceito de tensão de falha, conforme o ensaio de tração pura, ilustrado pela Figura 3.1a. Galileu buscava explicar o motivo de uma haste/viga apresentar uma alta resistência quando submetida a cargas longitudinais, porém romper facilmente quando submetidas a cargas transversais. Considerando uma viga engastada com um peso em sua extremidade, conforme ilustrado pela Figura 3.1b, buscava-se relacionar sua ruptura com a tensão de falha dada pelo ensaio de tração longitudinal. A partir de uma abordagem estática, Galileu obtém o resultado considerando que as fibras longitudinais da madeira localizada em (AB) equilibram o peso na extremidade da viga.



(a) Ensaio de tração pura



(b) Carga transversal em viga engastada

Figura 3.1 – Diagramas dos Ensaios. (GALILEI, 1638)

Avançando no tempo para 1773, Coulomb em sua publicação “*Essai sur une application des regles de maximis et minimis quelques problemes de statique, relatits a l’architecture*”, descreve os problemas que encontrou durante a construção de “*Fort Bourbon*”, na Martinica. São abordados tanto problemas em pilares e arcos como o cálculo de pressão exercida pelo solo em muros de contenção (Figura 3.2a), sendo considerado um marco no surgimento da Mecânica dos Solos como uma ciência (SALENÇON, 1990).

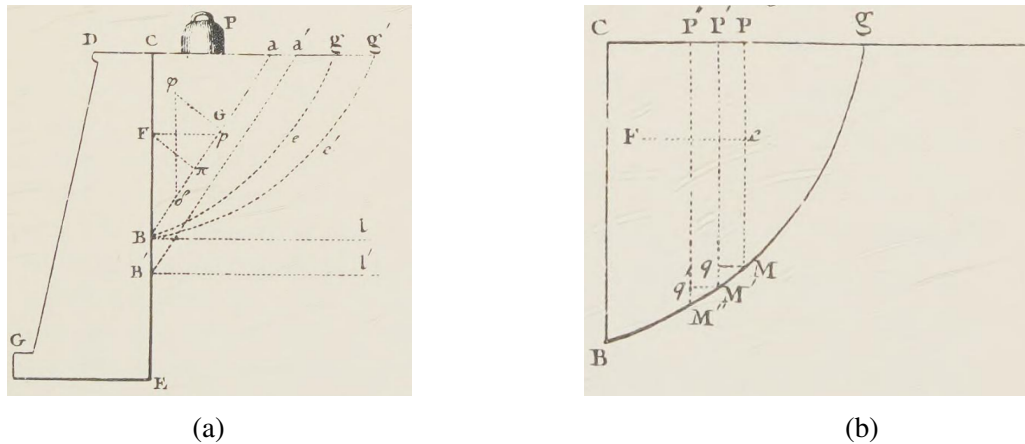


Figura 3.2 – Estabilidade muro de contenção (HEYMAN; COULOMB, 1972)

O método de Coulomb baseava-se primeiro na distinção entre as cargas prescritas agindo sobre a estrutura (forças ativas), de forças coercitivas resistentes, limitadas pela característica de resistência dos materiais; e na ideia de que essas forças resistentes são mobilizadas localmente ao longo de superfícies de rupturas arbitrárias. Dessa forma, para existir estabilidade, as forças ativas devem ser equilibradas pelas forças coercitivas, as quais são limitadas pelas características do material. Por meio de métodos de minimização e maximização, Coulomb encontra limites que os carregamentos externos devem satisfazer para manter a estrutura estável (SALENÇON, 2013).

Cabe salientar que raciocínio apresentado por Coulomb precede o conceito de forças internas. Segundo Salençon (1990), tal processo de pensamento surgiu da observação de padrões de falha encontrados na prática da engenharia civil ou até mesmo em ensaios em laboratório. Na Figura 3.3, por exemplo, observam-se rupturas localizadas sobre linhas (ou superfícies).

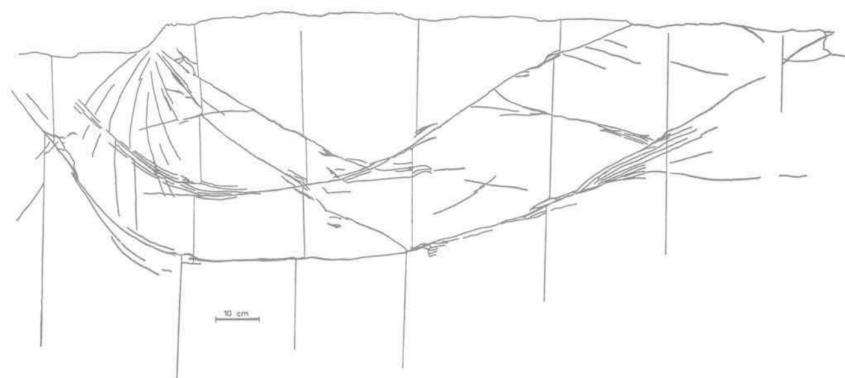


Figura 3.3 – Linhas de ruptura em um material puramente coesivo (HABIB, 1984)

A Análise Limite ou “Cálculo à ruptura” (*Yield Design*) teve sua teoria desenvolvida nos anos 50 inicialmente associada à plasticidade de metais (CHEN, 1975). Da mesma forma que outros

métodos de análise de estabilidade, propõe-se a responder se um sistema, dada sua geometria e composição de materiais, estará estável quando submetido a um modo de carregamento qualquer. A carga última é estimada por meio de limites inferiores (abordagem estática), nos quais se sabe que a estrutura está estável, e limites superiores (abordagem cinemática), nos quais se sabe que a estrutura definitivamente não suportará o carregamento aplicado.

A análise limite, baseia-se nos teoremas da plasticidade clássica (DRUCKER; PRAGER, 1952), considerando o solo como um material com comportamento elastoplástico com uma regra de fluxo associada, o critério de resistência representando o estado último do material. Esse raciocínio pode ser utilizado para encontrar cargas limites tanto para estruturas como lajes, vigas e pilares, como para fundações, túneis e problemas de estabilidade de taludes.

3.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Seguindo a notação utilizada por Salençon (1990), denota-se:

- $\underline{\underline{\sigma}}$ o campo de tensões e $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$ o valor local em um ponto \underline{x} ;
- \underline{U} o campo de velocidades e $\underline{U}(\underline{x})$ o valor local em um ponto \underline{x} ;
- \underline{d} o campo de taxa de deformações associado com \underline{U} ;
- $\llbracket \underline{U}(\underline{x}) \rrbracket$ como a diferença do campo $\underline{U}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$ quando atravessando uma superfície de descontinuidade de velocidade Σ , onde $\underline{n}(\underline{x})$ denota a normal em \underline{x} .

Considere uma estrutura qualquer Ω com fronteira $\partial\Omega$. Para a estrutura, podem ser prescritos dados sobre o volume, como forças de corpo $\rho \underline{f}$ em Ω , onde ρ representa a massa específica de Ω , e sobre a superfície, onde podem atuar forças de superfícies \underline{T}^d sobre $\partial\Omega_T$ ou velocidades \underline{U}^d em $\partial\Omega_v$, conforme ilustrado pela Figura 3.4. Note que $\{\partial\Omega_T, \partial\Omega_v\}$ é uma partição da fronteira $\partial\Omega$, de modo que não existem forças e velocidades prescritas simultaneamente sobre um mesmo ponto. O modo de carregamento do sistema é descrito pelo vetor de cargas $\underline{Q} \in \mathbb{R}^n$, que depende linearmente de n parâmetros de solitação Q_i .

Para cada ponto $\underline{x} \in \Omega$, $G(\underline{x}) \subset \mathbb{R}^6$ representa o domínio de resistência no espaço de tensões. Quando para algum \underline{x} , tem-se $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x})$, diz-se que $\underline{\underline{\sigma}}$ é admissível nesse ponto. O domínio $G(\underline{x})$ costuma ser definido a partir de um critério de resistência $f(\underline{x}, \underline{\underline{\sigma}})$ qualquer (SALENÇON, 1990), de forma que

$$f(\underline{x}, \underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \iff \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \iff \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \text{ é admissível em } \underline{x} \quad (3.1)$$

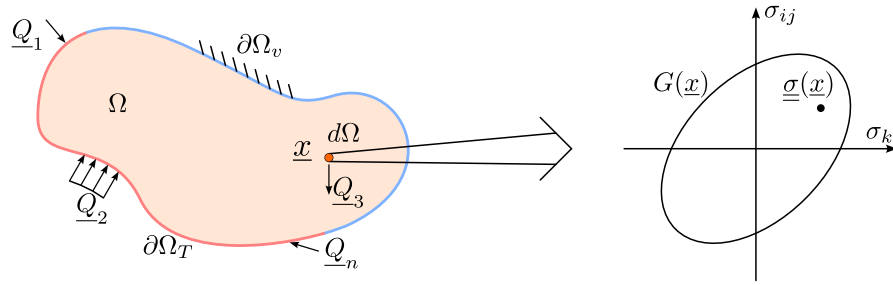


Figura 3.4 – Forças externas atuando sobre estrutura Ω

A partir das propriedades de f , tem-se que $G(\underline{x})$ é convexo e contém $\underline{\sigma} = 0$.

Um campo de tensões $\underline{\sigma}$ é dito Estaticamente Admissível (E.A.) com relação a um carregamento prescrito $\rho \underline{f}$ em Ω e \underline{T}^d em $\partial\Omega_T$, se $\underline{\sigma}$ é contínuo por partes, diferenciável continuamente, e satisfaz as equações de equilíbrio (SALENÇON, 2013):

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma}(\underline{x}) + \rho \underline{f}(\underline{x}) = 0 & \text{em } \Omega \\ \llbracket \underline{\sigma}(\underline{x}) \rrbracket \cdot \underline{n}(\underline{x}) = 0 & \text{em } \Sigma_\sigma \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d & \text{em } \partial\Omega_T \end{cases} \quad (3.2)$$

onde Σ_σ representa uma possível superfície de descontinuidade de $\underline{\sigma}$.

Um campo de velocidades \underline{U} é dito Cinematicamente Admissível (C.A.) com relação a um carregamento prescrito \underline{U}^d em $\partial\Omega_v$, se \underline{U} é contínuo por partes, diferenciável continuamente, e satisfaz (SALENÇON, 2013):

$$\underline{U} = \underline{U}^d \quad \text{em } \partial\Omega_v \quad (3.3)$$

Definido a problemática geral, a teoria da Análise Limite visa responder se um sistema, dada sua geometria e critérios de resistência, estará estável quando submetido a um modo de carregamento \underline{Q} .

3.2 DOMÍNIO DE CARGAS ADMISSÍVEIS (K)

Uma estrutura é dita estável sob um carregamento \underline{Q} se, e somente se, existe compatibilidade entre o equilíbrio da Estrutura e a resistência dos materiais que a compõe. Isso ocorre quando, para um carregamento \underline{Q} , existe um campo de tensões $\underline{\sigma}$ estaticamente admissível (E.A.) que respeita o critério de resistência sobre todos os pontos de Ω (SALENÇON, 1990). Dessa forma:

$$\underline{Q} \in K \iff \exists \underline{\sigma} \text{ tal que } \begin{cases} \underline{\sigma} \text{ E.A. com } \underline{Q} \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \forall \underline{x} \in \Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

onde K é definido como o conjunto de cargas sob as quais a estrutura é estável.

Repare que K é um subconjunto do espaço de carregamentos possíveis. A construção de K tem por objetivo determinar as cargas extremas \underline{Q}^* do sistema. Segundo Salençon (2013), as propriedades de K podem obtidas a partir do domínio de resistência $G(\underline{x})$, de modo que:

1. $\underline{Q} \equiv 0 \in K$, visto que $0 \in G(\underline{x})$;
2. K convexo, visto que $G(\underline{x})$ é convexo para todo $\underline{x} \in \Omega$;
3. ∂K caracteriza as cargas limites \underline{Q}^* .

Note que, pela propriedade (2.), tem-se:

$$\underline{Q}_1, \underline{Q}_2 \in K \implies \underline{Q}(t) = (1-t)\underline{Q}_1 + t\underline{Q}_2 \in K, \quad \forall t \in]0, 1[\quad (3.5)$$

isto é, dadas duas cargas suportáveis, todas as combinações intermediárias entre as duas cargas também são suportáveis, conforme ilustrado pela Figura 3.5.

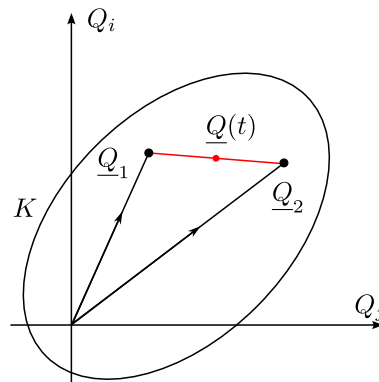


Figura 3.5 – Convexidade de K

Conforme salientado por Salençon (2013), a convexidade do domínio K é de suma importância na implementação prática do método. Em casos em que $G(\underline{x})$ é apenas um domínio estrelado com relação à $\underline{\sigma} \equiv 0$, como pode ocorrer em casos de anisotropia, pode-se provar que K também é um domínio estrelado com respeito à \underline{Q} , de modo que Equação 3.5 não é satisfeito, reduzindo a eficiência da abordagem pelo limite inferior. Ainda, em relação ao carregamento limite (SALENÇON, 1983), vale que \underline{Q}^* :

- é independente do estado de tensões iniciais;
- é independente das características elásticas dos materiais constitutivos do sistema;
- é independente da trajetória de carregamento (Figura 3.6).

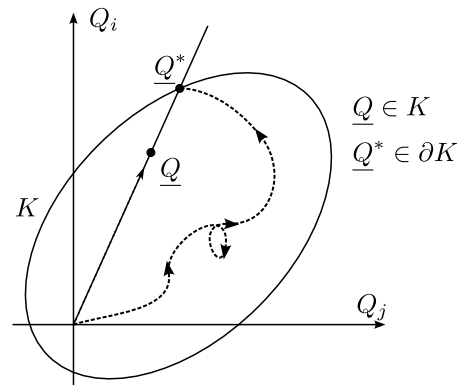


Figura 3.6 – Propriedades de \underline{Q}^*

Considerando que a determinação analítica de ∂K é geralmente difícil ou mesmo impossível, busca-se delimitá-lo em uma região no espaço de configurações utilizando os teoremas do limite inferior e o teorema cinemático.

3.3 ABORDAGEM ESTÁTICA (LIMITE INFERIOR)

Como uma aplicação direta da Equação 3.4, tem-se o teorema do limite inferior, onde se afirma que se existe uma distribuição de tensões que equilibra uma carga \underline{Q} e respeita o critério de resistência do material, então $\underline{Q} \in K$. Tomando proveito da convexidade, conforme enunciado na Equação 3.5, após encontrados $\underline{Q}_i \in K$, a envoltória convexa do conjunto de pontos \underline{Q}_i (K_s) é um conjunto tal que $K_s \subset K$ (SALENÇON, 2013). O procedimento é ilustrado na Figura 3.7.

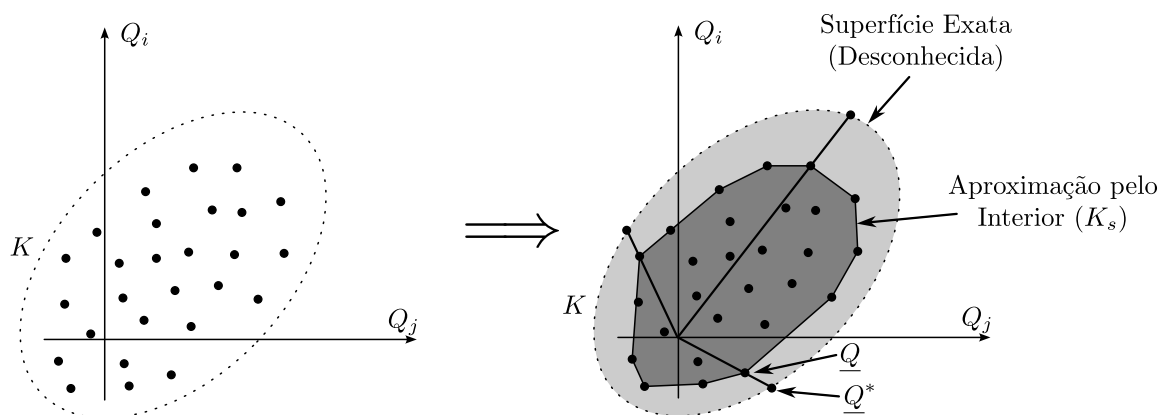


Figura 3.7 – Aproximação de K pela abordagem estática.

De forma semelhante, para um modo de carregamento unidimensional, como ocorre em estruturas submetidas exclusivamente ao peso próprio ($\underline{Q} = (\gamma)$) por exemplo,



Figura 3.8 – Carregamento com um parâmetro.

Nesse caso, tem-se que

$$Q \leq Q^* \iff \exists \underline{\underline{\sigma}} \text{ tal que } \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} \text{ E.A. com } \underline{Q} \\ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \forall \underline{x} \in \Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

A dificuldade do método, no entanto, depende da aptidão do engenheiro calculista de encontrar distribuições de tensões estaticamente admissíveis, sendo necessários critérios subjetivos como a experiência, intuição e criatividade.

3.4 ABORDAGEM CINEMÁTICA (LIMITE SUPERIOR)

A abordagem cinemática tem por objetivo estabelecer um limite a partir do qual a estrutura certamente está instável. Apesar do método levar a resultados menos cautelosos do que a abordagem estática, dada a própria natureza do limite, é usualmente preferido por sua simplicidade. No método, dada uma estrutura, supõem-se mecanismos de deformação e/ou translação que a levarão à ruptura. Tais mecanismos são representados por campos de velocidade.

Considere campos de velocidade virtual \hat{U} C.A. sobre Ω , possivelmente com superfícies de descontinuidade Σ_U e um campo de tensões $\underline{\underline{\sigma}}$ E.A. com \underline{Q} . Pela Equação 3.4, vale que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}) \cdot \hat{U} \, d\Omega \\ 0 &= \int_{\Omega} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{U} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \hat{U} \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aplicando o Teorema de Green ao primeiro termo da Equação 3.7, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \hat{U} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \hat{U} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \, dS - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{d}} \, d\Omega + \int_{\Sigma_U} [[\hat{U}]] \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \, dS \quad (3.8)$$

onde $\hat{\underline{d}}$ é a taxa de deformação virtual associada à \hat{U} .

Sendo assim, substituindo (3.8) em (3.7) tem-se, para todo \hat{U} C.A.:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{d}} \, d\Omega + \int_{\Sigma_U} [[\hat{U}]] \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \, dS}_{P_{def}} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \hat{U} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \, dS + \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \hat{U} \, d\Omega}_{P_{ext}} \quad (3.9)$$

onde P_{def} representa a potência virtual de deformação (i.e., o oposto da potência dos esforços internos, $P_{def} = -P_{int}$) enquanto P_{ext} representa a potência virtual das forças externas.

Usualmente, a parcela P_{ext} é descrita em termos de $\mathcal{P}_e(\underline{Q}, \dot{q}(\hat{U}))$, de forma que

$$P_{ext} = \mathcal{P}_e(\underline{Q}, \dot{q}(\hat{U})) = \underline{Q} \cdot \dot{q}(\hat{U}) = \sum_i Q_i \dot{q}_i \quad (3.10)$$

onde $\dot{q}(\hat{U})$ denota a velocidade generalizada da estrutura.

A Equação 3.9 representa o equilíbrio a partir do teorema de potências virtuais. Dessa forma, a abordagem parte de

$$\underline{Q} \in K \iff \exists \underline{\sigma} \text{ tal que } \begin{cases} \forall \hat{U} \text{ C.A.}, \underline{Q} \cdot \dot{q} = P_{def} \\ \underline{\sigma}(x) \in G(x), \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (3.11)$$

Para encontrar um limite superior para o trabalho das forças externas, partindo dos critérios de resistência, introduzem-se as funções suporte do convexo $G(x)$:

$$\pi(\underline{d}) = \sup\{\underline{\sigma} : \underline{d} \mid \underline{\sigma} \in G(x)\} \quad (3.12)$$

$$\pi(\underline{n}; \llbracket \hat{U} \rrbracket) = \sup\{\llbracket \hat{U} \rrbracket \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \mid \underline{\sigma} \in G(x)\} \quad (3.13)$$

Partindo das funções suporte, define-se a potência resistente máxima como

$$P_{def} \leq P_{rm} = \int_{\Omega} \pi(\underline{d}) d\Omega + \int_{\Sigma_U} \pi(\underline{n}; \llbracket \hat{U} \rrbracket) dS \quad (3.14)$$

Observa-se que P_{rm} independe de $\underline{\sigma}$, e, além disso, como o supremo é tomado sobre G , o critério de resistência é automaticamente satisfeito. Dessa forma, reescrevendo a Equação 3.11, obtém-se a relação:

$$\underline{Q} \in K \iff \forall \hat{U} \text{ C.A.}, \underline{Q} \cdot \dot{q}(\hat{U}) = P_{ext} \leq P_{rm} \quad (3.15)$$

Por fim, toma-se a contrapositiva da Equação 3.15, obtendo o Teorema Cinemático:

$$\exists \hat{U} \text{ C.A. tal que } P_{ext} > P_{rm} \implies \underline{Q} \notin K. \quad (3.16)$$

Dessa forma, se o trabalho desenvolvido pelo mecanismo de ruptura, dado por um campo de velocidades \hat{U} , for superior à resistência máxima que pode ser desenvolvida pela estrutura, então \underline{Q} não será suportável. Nota-se ainda que, para que a desigualdade não seja trivial, é necessário:

- $\underline{Q} \cdot \dot{q} > 0$;
- $P_{rm} < +\infty$

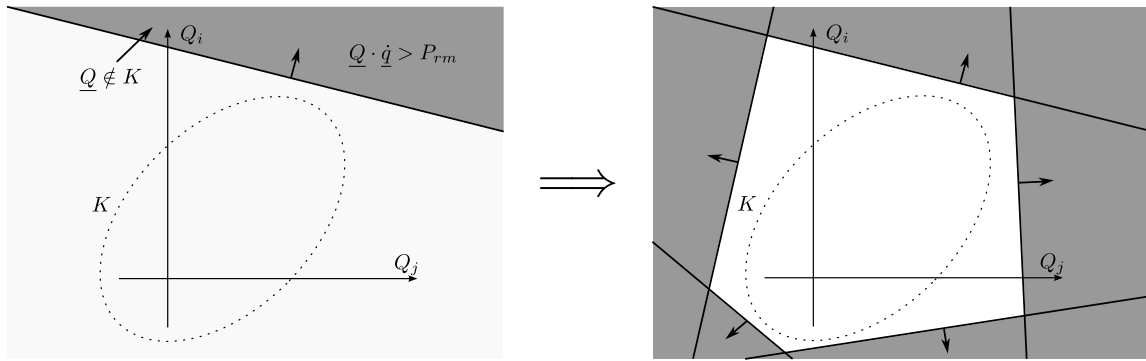


Figura 3.9 – Aproximação de K pela abordagem estática

Conforme ilustrado pela Figura 3.9, procuram-se mecanismos de ruptura de modo a limitar exteriormente o conjunto K . Cada mecanismo de ruptura resulta em um hiperplano que separa o espaço de configurações em duas regiões.

Logo, utilizando ambos os limites encontrados, pelos métodos estático e cinemático, conforme ilustrado pela Figura 3.10, limita-se uma região dentro da qual está localizado ∂K . Os limites podem ser melhorados a depender da qualidade dos campos de tensões encontrados ou mecanismos de ruptura considerados. No entanto, conforme salienta Salençon (1990), na prática da engenharia, costumam-se buscar limites significativos para as cargas máximas, e não valores matematicamente exatos.

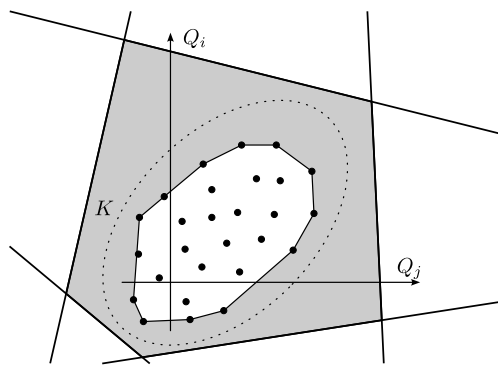


Figura 3.10 – Aproximação de K pelas abordagens estática e cinemática

O Apêndice A apresenta um exemplo ilustrativo no qual a Teoria da Análise Limite é utilizada para avaliar a estabilidade de um talude vertical em deformação plana.

3.5 FUNÇÕES DE SUPORTE π E CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA

Conforme apresentado na seção 3.4, as funções π são definidas a partir de um critério de resistência, tendo por objetivo avaliar o trabalho máximo de resistência de uma estrutura. Com

base nas formulações genéricas apresentadas nas Equações 3.12 e 3.13, algumas propriedades ficam evidentes:

- $\pi(\underline{d}) \geq 0$ e $\pi(\underline{n}; \llbracket \hat{U} \rrbracket) \geq 0$. Dado que $\underline{0} \in G$, tem-se que o supremo das funções deve ser não-negativo.
- Para encontrar desigualdades não triviais, pelo item anterior, $\pi(\underline{d})$ e $\pi(\underline{n}; \llbracket \hat{U} \rrbracket)$ também devem ser finitos em seus domínios de definição.

Neste item serão apresentados alguns critérios de resistência isotropos e suas respectivas funções suporte π .

3.5.1 Critério de Tresca

O critério de Tresca, também chamado de critério de máxima tensão cisalhante, foi originalmente proposto por Henri Tresca em 1864. O critério afirma que as tensões de corte máximas em um corpo não podem ultrapassar as máximas tensões de corte do ensaio de tração simples. Dessa forma, f é dado, em termo de tensões principais, por:

$$f(\underline{\sigma}) = \max(\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_0, \quad \text{com } i, j = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (3.17)$$

onde σ_0 representa a resistência em tração-compressão. Para solos, a resistência costuma ser descrita pelo parâmetro de coesão c , relacionando-se com σ_0 de forma que $c = \sigma_0/2$.

O critério costuma ser utilizado para modelar solos puramente coesivos, isto é, sem atrito. A Figura 3.11 ilustra a superfície $f = 0$ no espaço de tensões principais.

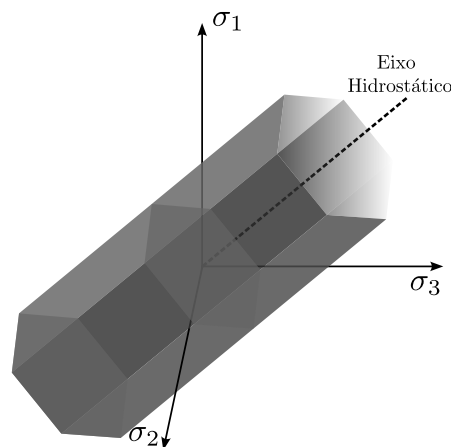


Figura 3.11 – Superfície $f = 0$, critério de Tresca

Alternativamente, costuma-se representar o critério através do sistema de coordenadas Haig-Westergard (H-W), em termos de, Pressão Hidrostática ξ , módulo do tensor desviador ρ e ângulo

medido a partir de um eixo principal positivo θ . Os parâmetros ξ e ρ são definidos como:

$$\xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}}; \quad \rho = \sqrt{2J_2} \quad (3.18)$$

onde I_1 e J_2 representam o primeiro invariante do tensor tensão $\underline{\underline{\sigma}}$ e o segundo invariante do tensor tensão desviatório $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}$ são dados por:

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}); \quad J_2 = \frac{1}{2}\text{tr}(\underline{\underline{s}}^2) \quad (3.19)$$

A Figura 3.12 apresenta o plano desviador e o plano $\rho - \xi$.

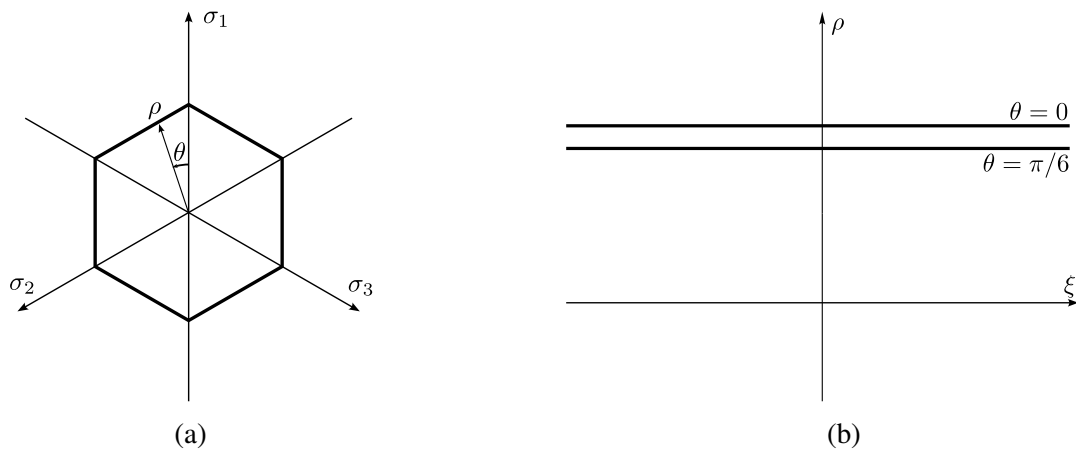


Figura 3.12 – (a) Plano desviador (b) Plano $\rho - \xi$

Por fim, as funções de suporte π são dadas por:

$$\begin{cases} \pi(\underline{\underline{d}}) = c(|d_1| + |d_2| + |d_3|) & \text{se } \text{tr}(\underline{\underline{d}}) = 0 \\ \pi(\underline{\underline{d}}) = +\infty & \text{se } \text{tr}(\underline{\underline{d}}) \neq 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} \pi(\underline{\underline{n}}; [\underline{\underline{U}}]) = c \|[\underline{\underline{U}}]\| & \text{se } [\underline{\underline{U}}] \cdot \underline{\underline{n}} = 0 \\ \pi(\underline{\underline{n}}; [\underline{\underline{U}}]) = +\infty & \text{se } [\underline{\underline{U}}] \cdot \underline{\underline{n}} \neq 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

onde d_i representa as taxas de deformação principais.

A condição de relevância $[\underline{\underline{U}}] \cdot \underline{\underline{n}} = 0$ expressa que o campo de velocidade que leva a uma abordagem cinemática efetiva devem envolver descontinuidades puramente tangenciais (Figura 3.13).

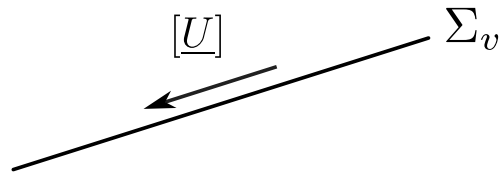


Figura 3.13 – Descontinuidades de velocidades relevantes

3.5.2 Material de von Mises

O critério de von Mises, proposto em 1913, relaciona o escoamento do material ao segundo invariante desviatório. Dessa forma, f é dado, em termo de tensões principais, por:

$$f(\underline{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} - k \quad (3.22)$$

ou, equivalentemente, em termos de invariantes:

$$f(\underline{\sigma}) = \sqrt{J_2} - k \quad (3.23)$$

onde k representa a resistência em cisalhamento puro. k relaciona-se com a resistência em tração-compressão de forma que $\sigma_0 = \sqrt{3}k$.

A Figura 3.14 ilustra a superfície $f = 0$ no espaço de tensões principais e a Figura 3.15 o plano desviador (a) e o plano $\rho - \xi$ do sistema $H - W$ (b).

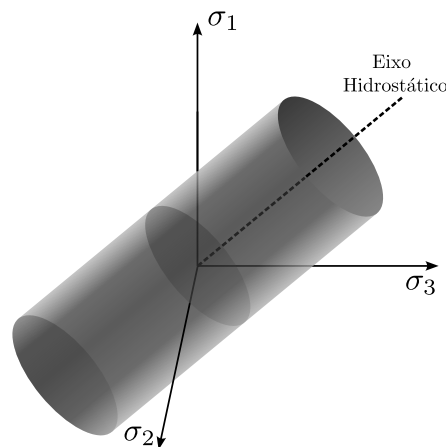


Figura 3.14 – Superfície $f = 0$, critério de von Mises

Por fim, as funções de suporte π são dadas por:

$$\begin{cases} \pi(\underline{d}) = k\sqrt{2 \operatorname{tr}(\underline{d}^2)} & \text{se } \operatorname{tr}(\underline{d}) = 0 \\ \pi(\underline{d}) = +\infty & \text{se } \operatorname{tr}(\underline{d}) \neq 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} \pi(\underline{n}; [\underline{\hat{U}}]) = k \|\underline{\hat{U}}\| & \text{se } [\underline{\hat{U}}] \cdot \underline{n} = 0 \\ \pi(\underline{n}; [\underline{\hat{U}}]) = +\infty & \text{se } [\underline{\hat{U}}] \cdot \underline{n} \neq 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

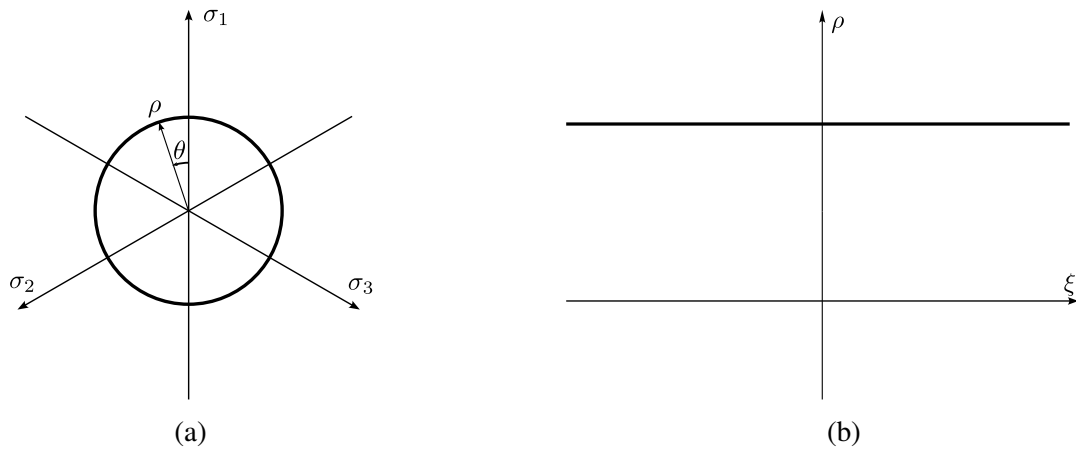


Figura 3.15 – (a) Plano desviador (b) Plano $\rho - \xi$

As discontinuidades de velocidades relevantes para este critério devem ser puramente tangenciais, como no material de Tresca.

3.5.3 Material de Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb generaliza o critério de Tresca para materiais dependentes de pressão hidrostática, sendo considerados além dos efeitos coesivos, os efeitos friccionais. O critério pode ser descrito, em termos de tensões máxima e mínima, por:

$$f(\underline{\sigma}) = \max(|\sigma_i - \sigma_j| + (\sigma_i + \sigma_j) \sin \varphi) - 2c \cos \varphi, \quad i, j = 1, 2 \text{ e } 3 \quad (3.26)$$

onde φ representa o ângulo de atrito do material.

A Figura 3.16 ilustra a superfície $f = 0$ no espaço de tensões principais e a Figura 3.17 o plano desviador (a) e o plano $\rho - \xi$ do sistema $H - W$ (b).

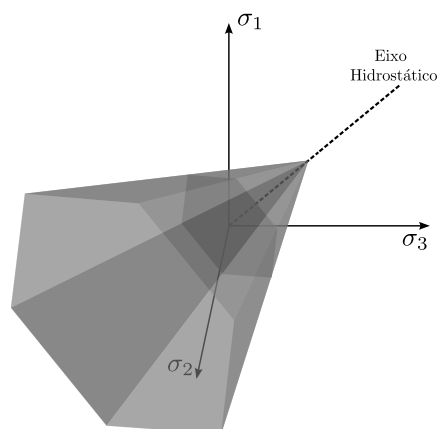


Figura 3.16 – Superfície $f = 0$, critério de Mohr-Coulomb

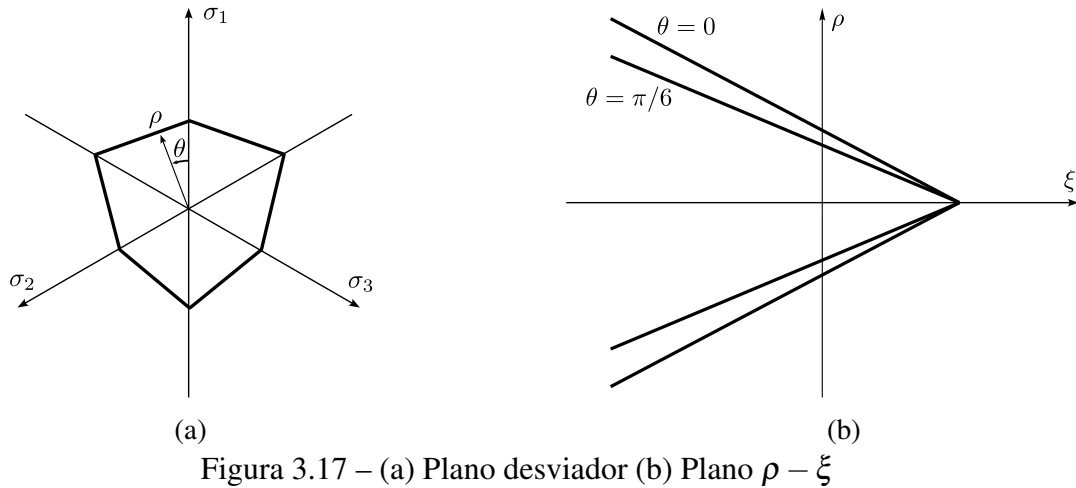


Figura 3.17 – (a) Plano desviador (b) Plano $\rho - \xi$

Por fim, as funções de suporte π são dadas por:

$$\begin{cases} \pi(\underline{d}) = H \operatorname{tr}(\underline{d}) & \text{se } \operatorname{tr}(\underline{d}) \geq (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \varphi \\ \pi(\underline{d}) = +\infty & \text{se } \operatorname{tr}(\underline{d}) < (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \varphi \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\begin{cases} \pi(\underline{n}; [\hat{U}]) = H [\hat{U}] \cdot \underline{n} & \text{se } [\hat{U}] \cdot \underline{n} \geq |[\hat{U}]| \sin \varphi \\ \pi(\underline{n}; [\hat{U}]) = +\infty & \text{se } [\hat{U}] \cdot \underline{n} < |[\hat{U}]| \sin \varphi \end{cases} \quad (3.28)$$

onde $H = c / \tan \varphi$ representa a resistência em tração isótropa.

Para o material de Mohr-Coulomb, os campos de velocidade relevantes devem satisfazer a condição $[\underline{U}] \cdot \underline{n} \geq |[\hat{U}]| \sin \varphi$. Esta condição significa que $[\underline{U}]$ deve deslocar com um ângulo $\beta \in [\varphi, \pi - \varphi]$ em relação à superfície Σ_v (Figura 3.18).

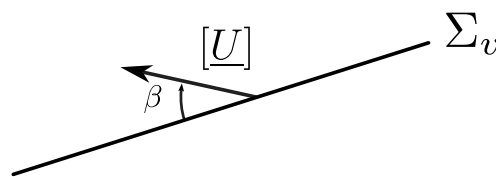


Figura 3.18 – Descontinuidades de velocidades relevantes

4 ELEMENTOS DA POROMECÂNICA

Na escala macroscópica (COUSSY, 2004; DORMIEUX et al., 2006), o meio poroso saturado é composto por uma matriz (esqueleto sólido) e por um espaço poroso conectado preenchido com fluido. A matriz é composta tanto por partículas sólidas como por porosidade oclusa, onde não existe escoamento do fluido. O espaço poroso refere-se apenas aos poros interconectados, de modo que existam caminhos contínuos de um lado do meio para o outro.

4.1 ABORDAGEM CONTÍNUA DO MEIO POROSO

O meio poroso em escala microscópica é um material heterogêneo. A impossibilidade de descrever a geometria e configuração das partículas sólidas e dos poros interconectados faz necessário tomar uma descrição contínua “fictícia” do meio poroso. Nessa abordagem, escolhe-se uma escala macroscópica onde a constituição interna da matéria deixa de ser relevante para a análise dos fenômenos físicos globais.

Na Hipótese do meio contínuo tridimensional assume-se a existência de volume elementar representativo, o qual inclui material suficiente para representar o processo de filtração (COUSSY, 2004). Nota-se, para ser válida a hipótese, esse volume representativo deve ser grande o suficiente para que as propriedades do meio variem continuamente, porém pequenos o suficiente para serem relevantes na escala do problema em estudo. Dessa forma, o meio poroso será tratado como a superposição de dois meios contínuos, o esqueleto (composto pelas partículas sólidas e pelos poros vazios), e pelo fluido que satura os poros interconectados, conforme ilustrado pela Figura 4.1.

4.2 CINEMÁTICA DO MEIO POROSO

Seguindo a notação utilizada por Coussy (2004) e Dormieux et al. (2006), serão utilizados sobrescritos f e s , simbolizando fluido e esqueleto, respectivamente, para identificar o meio contínuo em questão. Seja Ω_0 uma configuração inicial do meio poroso contínuo. Uma partícula desse meio é identificada pelo vetor posição $\underline{X} = X_i \underline{e}_i \in \Omega_0$, onde \underline{e}_i formam a base canônica. Considere a transformação $\underline{\Phi}^s$ sobre as partículas do esqueleto dada por:

$$\underline{x} = \underline{\Phi}^s(\underline{X}, t) \quad (4.1)$$

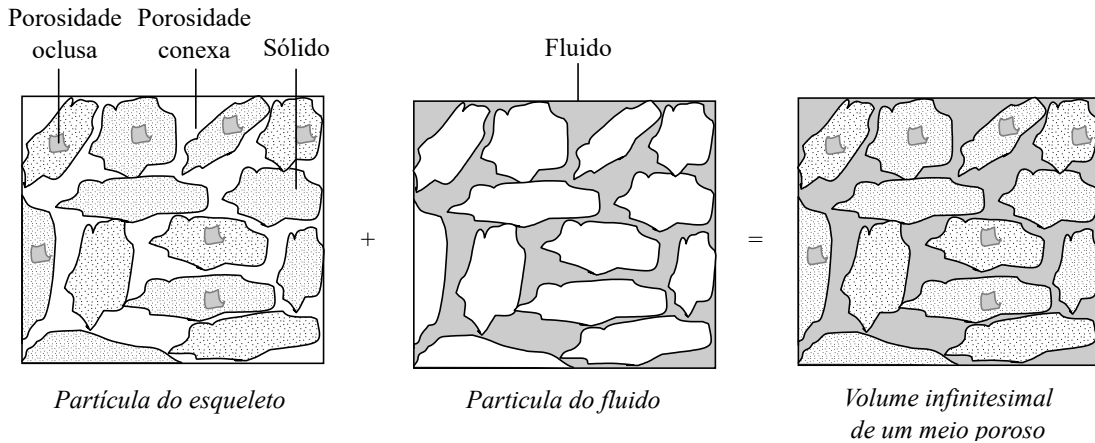


Figura 4.1 – Descrição do meio contínuo como a superposição de dois meios contínuos (adaptado de: Coussy (2004))

onde \underline{x} representa o vetor posição na configuração atual da partícula do esqueleto.

Essa transformação é ilustrada pela Figura 4.2. Observa-se que como $\underline{\Phi}^s$ atua apenas sobre o esqueleto, a partícula de fluido na configuração atual não é necessariamente a mesma na configuração inicial.

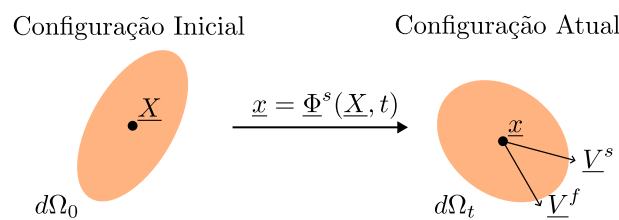


Figura 4.2 – Transformação do meio contínuo sobreposto

Na Figura 4.2, \underline{V}^s e \underline{V}^f representam as velocidades da partícula do esqueleto e do fluido que coincidem no instante t em \underline{x} . Dessa forma tem-se que $\underline{V}^f - \underline{V}^s$ representa o movimento relativo da partícula de fluido em relação ao esqueleto.

4.3 BALANÇO DE MASSA DE FLUIDO

O balanço de massa, acrescido de algumas hipóteses, permite a obtenção de uma descrição Lagrangiana da equação de continuidade de massa fluida. Inicialmente é conveniente introduzir os conceitos de porosidade Lagrangiana ϕ e Euleriana n , definidos por:

$$\phi = \frac{d\Omega_t^f}{d\Omega_0}; \quad n = \frac{d\Omega_t^f}{d\Omega_t}, \quad (4.2)$$

isto é, ϕ e n representam a porcentagem do volume ocupado pela partícula de fluido em relação à configuração inicial e atual, respectivamente. É fácil ver que ϕ e n se relacionam de modo:

$$\phi = Jn, \quad (4.3)$$

onde $J = \det(\text{grad } \underline{\Phi}^s)$ representa o Jacobiano da transformação $\underline{\Phi}^s$ do esqueleto.

A partir das densidades do fluido ρ^f e partícula sólida ρ^s e da porosidade Euleriana n , encontram-se as densidades aparentes $\rho^f n$ e $\rho^s(1 - n)$ do meio poroso. Assim, pode-se obter para cada volume infinitesimal $d\Omega_t$ uma massa de fluido e esqueleto dados por:

$$dm_t^f = \rho^f n d\Omega_t \quad (4.4)$$

$$dm_t^s = \rho^s (1 - n) d\Omega_t \quad (4.5)$$

Observa-se que, dada a transformação aplicada $\underline{\Phi}^s$, não há variação de massa do esqueleto entre $d\Omega_t$ e $d\Omega_0$, de modo que:

$$dm_t^s = dm_0^s, \quad \forall t. \quad (4.6)$$

Agora, na hipótese que não existe variação de massa no fluido contido em um volume Ω_t , tem-se:

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\Omega_t} \rho^f n d\Omega_t = 0 \quad (4.7)$$

A Equação 4.7 que pode ser expandida de modo a obter a equação de continuidade Euleriana (COUSSY, 2004):

$$\frac{\partial(\rho^f n)}{\partial t} + \text{div}(\rho^f n \underline{V}^f) = 0 \quad (4.8)$$

onde $\text{div } \underline{a}$ representa a divergência de \underline{a} em relação ao sistema de coordenadas atual.

Manipula-se a equação de conservação de massa de fluido (4.8) adicionando um termo referente à velocidade do esqueleto \underline{V}^s , de forma que seja considerado o acoplamento esqueleto-fluido. Tal consideração é relevante, visto que transformações no esqueleto podem alterar a porosidade do meio, aumentando ou reduzindo o volume de água comportado pelos poros interconectados.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial(\rho^f n)}{\partial t} + \text{div}(\rho^f n \underline{V}^s) + \text{div}(\rho^f n \underline{V}^f - \rho^f n \underline{V}^s) \\ &= \frac{\partial(\rho^f n)}{\partial t} + \text{div}(\rho^f n) \cdot \underline{V}^s + \rho^f n (\text{div } \underline{V}^s) + \text{div}(\rho^f n (\underline{V}^f - \underline{V}^s)) \\ &= \frac{d^s(\rho^f n)}{dt} + \rho^f n (\text{div } \underline{V}^s) + \text{div}(\rho^f \underline{v}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $\underline{v} = n(\underline{V}^f - \underline{V}^s)$ é definido como o vetor de filtração.

A abordagem Lagrangiana pode ser obtida introduzindo a relação entre a massa de fluido Euleriano atual contida em $d\Omega_t$ com a mesma massa de fluido Lagrangiano m^f por volume inicial:

$$\rho^f n d\Omega_t = m^f d\Omega_0 \implies \rho^f n = m^f \frac{d\Omega_0}{d\Omega_t} \implies m^f = \rho^f \phi. \quad (4.10)$$

Substituindo as relações dadas pela Equação 4.10 na Equação 4.9 pré-multiplicada por $d\Omega_t$, obtém-se:

$$\frac{d^s \left(m^f \frac{d\Omega_0}{d\Omega_t} \right)}{dt} d\Omega_t + \rho^f n \operatorname{div} \underline{V}^s d\Omega_t + \operatorname{div}(\rho^f \underline{v}) d\Omega_t = 0 \quad (4.11)$$

Aplicando a regra do quociente e eliminando as derivadas temporais sobre a configuração inicial, a Equação 4.11 é expandida de modo que:

$$\frac{d^s}{dt} (m^f) d\Omega_0 - \frac{d\Omega_0}{d\Omega_t} m^f \frac{d^s}{dt} (d\Omega_t) + \rho^f n \operatorname{div} \underline{V}^s d\Omega_t + \operatorname{div}(\rho^f \underline{v}) d\Omega_t = 0 \quad (4.12)$$

Observe que, substituindo a derivada temporal do volume infinitesimal atual $d\Omega_t$ no segundo termo da Equação 4.12, obtém-se (COUSSY, 2004):

$$-\frac{d\Omega_0}{d\Omega_t} m^f \frac{d^s}{dt} (d\Omega_t) = -d\Omega_0 m^f \operatorname{div} \underline{V}^s = -\rho^f n d\Omega_t \operatorname{div} \underline{V}^s \quad (4.13)$$

anulando assim o termo dependente de \underline{V}^s . Fatorando os termos restantes por $d\Omega_0$ e substituindo m^f pela relação dada na Equação 4.10 obtém-se, por fim, a equação de continuidade da massa fluida:

$$\frac{d^s}{dt} (\rho^f \phi) = -J \operatorname{div}(\rho^f \underline{v}) \quad (4.14)$$

Considerando a hipótese usualmente adotada para geomateriais, referente à incompressibilidade das fases sólidas e fluidas, tem-se que a variação volumétrica da partícula sólida é nula, e assim:

$$\begin{aligned} 0 &= d\Omega_t^s - d\Omega_0^s \\ 0 &= (1 - n)d\Omega_t - (1 - n_0)d\Omega_0 \\ 0 &= (1 - n)Jd\Omega_0 - (1 - n_0)d\Omega_0 \\ 0 &= (J - \phi - 1 - n_0)d\Omega_0 \\ 0 &= J - \phi - 1 - n_0 \\ \phi &= J - 1 - n_0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ainda, considerando a incompressibilidade da água, tem-se $\rho^f = \rho_0^f$. Assim, a Equação 4.14 resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{d^s}{dt}(\rho^f \phi) &= -J \operatorname{div}(\rho^f \underline{v}) \\ \rho_0^f \frac{d^s}{dt}(J - 1 - n_0) &= -\rho_0^f J \operatorname{div} \underline{v} \\ \frac{d^s}{dt}(J - 1) &= -J \operatorname{div} \underline{v} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Adotando a hipótese de transformações infinitesimais, isto é, $\|\operatorname{grad} \underline{\xi}\| \ll 1$ onde $\underline{\xi}(X, t) = \underline{X} - \underline{x}$ é o vetor deslocamento de uma partícula \underline{X} , tem-se

$$\operatorname{tr}(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) = -\operatorname{div} \underline{v} \quad (4.17)$$

onde $\underline{\underline{\varepsilon}}$ é o tensor linearizado de deformação.

Por fim, considerando que o meio poroso já atingiu uma configuração estável e sem acréscimo de deformação volumétrica, isto é, estacionária, pode-se tomar $\operatorname{tr}(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) = 0$, obtendo:

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad (4.18)$$

Em particular, esta situação é automaticamente verificada se as deformações volumétricas do esqueleto são desprezadas (incompressibilidade do esqueleto). Portanto, o comportamento dos meios contínuos de fluido e esqueleto, nas hipóteses consideradas, podem ser tratados de forma desacoplados.

4.4 VELOCIDADE DE FILTRAÇÃO E LEI DE TRANSPORTE DE FLUIDO (DARCY)

Em 1856, em seus estudos sobre as fontes da cidade de Dijon na França, Henry Darcy descobre experimentalmente uma relação linear entre a velocidade de filtração e o gradiente hidráulico. Conforme ilustrado pela 4.3, observava-se um fluxo constante Q aplicado sobre um filtro vertical homogêneo de areia, de modo que fosse possível observar a variação de carga hidráulica, dada por $(h_1 - h_2)$.

A partir desse experimento observou-se que Q é proporcional à área do filtro A e a variação da carga hidráulica $(h_1 - h_2)$, porém inversamente proporcional ao comprimento do filtro L , de modo que: (DARCY, 1856)

$$Q = \frac{KA(h_1 - h_2)}{L} \quad (4.19)$$

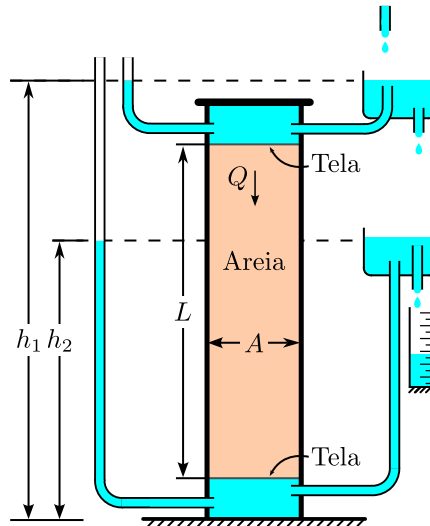


Figura 4.3 – Experimento de Henry Darcy (adaptado de: Bear (2013))

onde K é o coeficiente de proporcionalidade, dependente apenas da permeabilidade da areia.

Embora a formulação adotada por Darcy seja propriamente empírica, e, dado seus objetivos, apenas válida para o caso unidimensional com escoamento vertical, com o passar dos anos a Lei de transporte de Fluido (ou Lei de Darcy, como ficou conhecida) foi generalizada tanto empiricamente como analiticamente (BEAR, 2013) para o caso tridimensional, isotrópico ou anisotrópico, e até mesmo para o caso não homogêneo, onde existe dependência espacial. A equação 4.20 relaciona \underline{v} com o gradiente hidráulico (BEAR, 2013).

$$\underline{v} = -\underline{K} \cdot \underline{\text{grad}} u \quad (4.20)$$

onde $u = p - p_w$ (p = poropressão e p_w = pressão hidrostática) representa o excesso de poropressão e \underline{K} é chamado de tensor de permeabilidade do fluido, positivo definido e simétrico, com unidade $\left[\frac{m^3}{N} \cdot \frac{m}{s} \right]$.

Salienta-se que o domínio de validade da lei de Darcy, onde a relação entre \underline{v} e $\underline{\text{grad}} u$ é linear, limita-se a números de Reynolds relativamente baixos. No caso de fluxo no meio poroso, o número de Reynolds é dado por $Re = |\underline{v}|d/\nu$, onde ν é a viscosidade cinemática do fluido e d é comumente utilizado como o diâmetro representativo dos grãos do meio poroso. Em praticamente todos os casos, a Lei de Darcy é válida contanto que o número de Reynolds baseado na média do diâmetro dos grãos não exceda um valor entre 1 e 10 (BEAR, 2013). Dentro do escopo do presente trabalho, considera-se que esses valores não serão ultrapassados, apresentando um fluxo suficientemente laminar. Sendo assim, a conservação da massa fluida (4.18) toma a seguinte forma:

$$\text{div}(-\underline{K} \cdot \underline{\text{grad}} u) = 0. \quad (4.21)$$

4.5 CONSERVAÇÃO DAS QUANTIDADES DE MOVIMENTO

A equação de equilíbrio da superposição dos meios contínuos será construída a partir da conservação da quantidade de movimento. Existem dois tipos de forças externas que agem sobre um corpo Ω_t : forças de corpo, dada usualmente pelas forças gravitacionais; e forças de superfície. Usualmente, forças de gravidade são as mesmas para ambos os meios contínuos. Coussy (2004) define a força de corpo infinitesimal $\delta \underline{f}$ agindo sobre um volume elementar $d\Omega_t$ como:

$$\delta \underline{f} = (\rho^s(1-n) + \rho^f n) \underline{f}(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (4.22)$$

onde $\underline{f}(\underline{x}, t)$ define uma densidade de força de corpo, supondo a mesma atuando sobre as partículas de esqueleto e fluido.

Já, as forças infinitesimais $\delta \underline{F}$ agindo sobre uma superfície infinitesimal da de $\partial\Omega_t$ são definidas como

$$\delta \underline{F} = \underline{T}(\underline{x}, t, \underline{n}) da \quad (4.23)$$

onde $\underline{T}(\underline{x}, t, \underline{n})$ define uma densidade de forças de superfície e \underline{n} é o vetor normal à superfície da .

A partir da definição das forças, o balanço das quantidades de movimento se escreve (COUSSY, 2004):

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\Omega_t} \rho^s(1-n) \underline{V}^s d\Omega_t + \frac{d^f}{dt} \int_{\Omega_t} \rho^f n \underline{V}^f d\Omega_t = \int_{\Omega_t} (\rho^s(1-n) + \rho^f n) \underline{f} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T} da \quad (4.24)$$

Expandindo as derivadas temporais relacionadas aos materiais, a Equação 4.24 pode ser reescrita de forma que:

$$\int_{\Omega_t} (\rho^s(1-n) \underline{a}^s + \rho^f n \underline{a}^f) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} (\rho^s(1-n) + \rho^f n) \underline{f} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T} da \quad (4.25)$$

onde \underline{a}^s e \underline{a}^f são os vetores aceleração das partículas do esqueleto e do fluido, respectivamente.

Introduzindo o tensor tensão de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$, definido de forma que $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$ em Ω_t , e agrupando os termos integrais, tem-se que a Equação 4.25 é da forma:

$$\int_{\Omega_t} (\rho^s(1-n)(\underline{a}^s - \underline{f}) + \rho^f n(\underline{a}^f - \underline{f})) d\Omega_t = \int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} da \quad (4.26)$$

Aplicando o Teorema da Divergência sobre a integral de superfície, tem-se

$$\int_{\Omega_t} (\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho^s(1-n)(\underline{f} - \underline{a}^s) + \rho^f n(\underline{f} - \underline{a}^f)) d\Omega_t = 0 \quad (4.27)$$

Como a Equação 4.27 vale para qualquer definição de Ω_t , tem-se a equação local de equilíbrio em um volume elementar $d\Omega_t$:

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho^s(1-n)(\underline{f} - \underline{a}^s) + \rho^f n(\underline{f} - \underline{a}^f) = 0 \quad (4.28)$$

Dentro da consideração de uma evolução quase-estática, pode-se desconsiderar a aceleração das partículas de fluido e do esqueleto. Dessa forma, reduz-se a equação de equilíbrio para:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + (\rho^s(1-n) + \rho^f n) \underline{\underline{f}} = 0 \quad (4.29)$$

4.5.1 Tensores de tensões parciais de Cauchy

Observe que a Equação 4.29 está escrita em termos de $\underline{\underline{\sigma}}$, o qual não considera separadamente as tensões relacionadas ao esqueleto e ao fluido. De modo a identificar as contribuições individuais, estende-se a hipótese de forças de contato de forma: (COUSSY, 2004)

$$\delta \underline{\underline{F}}^s = \underline{\underline{T}}^s(\underline{x}, t, \underline{n}) da; \quad \delta \underline{\underline{F}}^f = \underline{\underline{T}}^f(\underline{x}, t, \underline{n}) da; \quad (4.30)$$

onde $\underline{\underline{T}}^s(\underline{x}, t, \underline{n})$ e $\underline{\underline{T}}^f(\underline{x}, t, \underline{n})$ definem uma densidade de forças de superfície sobre o esqueleto e sobre o fluido, respectivamente.

Repetindo o raciocínio das equações (4.24) à (4.27) para o fluido e o esqueleto, tem-se a definição individual de dois tensores de tensões parciais, $\underline{\underline{\sigma}}^s$ e $\underline{\underline{\sigma}}^f$, relacionados ao esqueleto e ao fluido, respectivamente, de forma que (COUSSY, 2004):

$$\underline{\underline{T}}^s = (1-n) \underline{\underline{\sigma}}^s \cdot \underline{n}; \quad \underline{\underline{T}}^f = n \underline{\underline{\sigma}}^f \cdot \underline{n}; \quad (4.31)$$

Observe que $\underline{\underline{\sigma}}^s$ e $\underline{\underline{\sigma}}^f$ devem ser simétricos e satisfazer as equações de movimento locais:

$$\operatorname{div}((1-n) \underline{\underline{\sigma}}^s) + \rho^s(1-n)(\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{a}}^s) + \underline{\underline{f}}_{int}^{\rightarrow s} = 0 \quad (4.32)$$

$$\operatorname{div}(n \underline{\underline{\sigma}}^f) + \rho^f n(\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{a}}^f) + \underline{\underline{f}}_{int}^{\rightarrow f} = 0 \quad (4.33)$$

onde $\underline{\underline{f}}_{int}^{\rightarrow f}$ e $\underline{\underline{f}}_{int}^{\rightarrow s}$ representam as forças de volume dadas pela interação macroscópica exercida por um contínuo no outro. Pela lei de ação e reação, tem-se

$$\underline{\underline{f}}_{int}^{\rightarrow f} + \underline{\underline{f}}_{int}^{\rightarrow s} = 0 \quad (4.34)$$

Dessa forma, ao somar as equações (4.32) e (4.33) obtém-se a Equação 4.29, de modo que

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1-n) \underline{\underline{\sigma}}^s + n \underline{\underline{\sigma}}^f; \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^s + \underline{\underline{T}}^f \quad (4.35)$$

Desprezando os efeitos de viscosidade, mostra-se que $\underline{\underline{\sigma}}^f$ é um tensor esférico dado por

$$\underline{\underline{\sigma}}^f = -p \underline{\underline{1}} \quad (4.36)$$

Assim, a Equação 4.35 é reescrita de forma que:

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1-n) \underline{\underline{\sigma}}^s - np \underline{\underline{1}} \quad (4.37)$$

4.6 O RACIOCÍNIO DA ANÁLISE LIMITE NO CONTEXTO DA PORO-MECÂNICA

Esta seção apresentará o raciocínio envolvido na consideração de estabilidade de estruturas porosas com a presença de poropressão. Tal problema é usualmente abordado a partir do princípio de tensões efetivas (TERZAGHI, 1943).

4.6.1 Princípio das tensões efetivas

Conforme apresentado neste capítulo, solos são matérias multifásicos, compostos por um esqueleto de partículas sólidas. O princípio das tensões efetivas, proposto por Terzaghi (1943), relaciona, para um solo saturado, as tensões totais $\underline{\underline{\sigma}}$ atuantes no meio poroso, tensões efetivas $\underline{\underline{\sigma'}}$ atuantes apenas no esqueleto de partículas sólidas e a poropressão p de forma que:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma'}} - p\underline{\underline{1}} \quad (4.38)$$

onde $\underline{\underline{1}}$ é o tensor unitário.

Tal relação também pode ser descrita em solos parcialmente saturados (BISHOP; BLIGHT, 1963), no qual também existe a presença de ar nos espaços intersticiais.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma'}} - [p_a - \chi(p_a - p_w)]\underline{\underline{1}} \quad (4.39)$$

onde p_a e p_w representam as poropressões exercidas pelo ar e pela água, respectivamente, e χ é um parâmetro adimensional a ser determinado experimentalmente.

Em geral, critérios de resistência podem ser tomados sob duas abordagens, a análise em tensões totais ou em tensões efetivas. A análise em tensões totais é adequada principalmente para materiais com comportamento independente da poropressão, como solos argilosos saturados avaliados em um curto prazo. Nesses casos utilizam-se critérios de resistência em tensões totais, em que $f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = f(\underline{\underline{\sigma}})$. Para análises de estabilidade envolvendo materiais granulares a longo prazo tal abordagem é insuficiente, sendo necessários critérios que sejam dependentes da poropressão, como Mohr-Coulomb, Hoek-Brown e Drucker-Prager, sendo apropriado a utilização de uma abordagem baseada no princípio das tensões efetivas.

Dessa forma, adota-se a hipótese na qual o critério de resistência depende apenas das tensões efetivas $f(\underline{\underline{\sigma}}, p) = f(\underline{\underline{\sigma'}} = \underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{1}})$. Tal consideração deve, evidentemente, ser validada pela experiência. Uma análise teórica sobre a validade do conceito das tensões efetivas é proposta em Buhan e Dormieux (1996). Assim, substituindo $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma'}} - p\underline{\underline{1}}$ na equação de equilíbrio (4.29), tem-se que em Ω :

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma'}}(\underline{x}) - \underline{\text{grad}} p + (\rho^s(1-n) + \rho^f n)\underline{f} = 0 \quad (4.40)$$

Considerando que a única força de corpo atuante é a gravitacional ($\underline{f} = \underline{g}$), definindo o eixo \underline{e}_y dirigido no mesmo sentido de \underline{g} e substituindo $p = u + p_w$ onde $p_w = \gamma\gamma_w$, tem-se:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}' + (\gamma - \gamma_w)\underline{e}_y - \underline{\operatorname{grad}} u = 0 \quad (4.41)$$

Além disso, a força de superfície efetivas \underline{T}' , definidas em uma direção arbitrária, \underline{n} é dada por

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T} \implies \underline{T}' = \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n} = \underline{T} + p\underline{n} \quad (4.42)$$

Dessa forma, baseado na Equação 3.2, um campo de tensões efetivas $\underline{\underline{\sigma}}'$ é dito Estaticamente Admissível (E.A.) com relação a um carregamento prescrito $\rho \underline{f}$ em Ω e \underline{T}'^d em $\partial\Omega_d$, se $\underline{\underline{\sigma}}'$ é contínuo por partes, diferenciável continuamente, e satisfaz as equações de equilíbrio:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}' + (\gamma - \gamma_w)\underline{e}_y - \underline{\operatorname{grad}} u = 0 & \text{em } \Omega \\ [\underline{\underline{\sigma}}'(x)] \cdot \underline{n}(x) = 0 & \text{em } \Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}'} \\ \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n} = \underline{T}'^d & \text{em } \partial\Omega_d \end{cases} \quad (4.43)$$

onde $\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}'}$ representa uma possível superfície de descontinuidade de $\underline{\underline{\sigma}}'$.

Para a formulação em termos do Teorema dos Trabalhos Virtuais, repete-se o procedimento realizado nas Equações (3.7) à (3.9), obtendo

$$\underbrace{\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}' : \hat{\underline{d}} \, d\Omega + \int_{\Sigma_{\underline{\underline{\sigma}}'}} [\hat{\underline{U}}] \cdot \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n} \, dS}_{P_{def}} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \hat{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n} \, dS + \int_{\Omega} (\gamma - \gamma_w)\underline{e}_y \cdot \hat{\underline{U}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\operatorname{grad}} u \cdot \hat{\underline{U}} \, d\Omega}_{P_{ext}} \quad (4.44)$$

onde P_{def} representa a potência virtual de deformação enquanto P_{ext} representa a potência das forças externas. Em casos nos quais não existem cargas externas aplicadas à fronteira do domínio que define a estrutura, a potência das forças externas pode ser convenientemente separada em dois termos $P_{ext} = P_{\gamma'} + P_u$, onde

$$P_{\gamma'} = \int_{\Omega} (\gamma - \gamma_w)\underline{e}_y \cdot \hat{\underline{U}} \quad (4.45)$$

$$P_u = - \int_{\Omega} \underline{\operatorname{grad}} u \cdot \hat{\underline{U}}. \quad (4.46)$$

sendo $P_{\gamma'}$ a potência das forças gravitacionais e P_u a potência das forças de percolação.

4.6.2 Análise limite no meio poroso

Nesta seção serão apresentadas as abordagens estáticas e cinemática para problemas de estabilidade no meio poroso saturado. Tal dedução será semelhante às apresentadas no Capítulo 3, porém partindo das equações dadas pela poromecânica e pelo princípio das tensões efetivas. Considere um modo de carregamento \underline{Q} atuando sobre uma estrutura saturada de domínio Ω . Busca-se o domínio de cargas admissíveis K .

4.6.2.1 Abordagem Estática (Limite inferior)

Dado um modo de carregamento \underline{Q} , um limite inferior para a estabilidade da estrutura é obtido caso exista $\underline{\underline{\sigma}}'$ que equilibre o carregamento e não ultrapasse os critérios de resistência definidos. Sendo assim:

$$\underline{Q} \in K \iff \exists \underline{\underline{\sigma}}' \text{ tal que } \begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}' \text{ é E.A. com } \underline{Q} \\ \underline{\underline{\sigma}}'(x) \in G(x), \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (4.47)$$

Observe que a presença de gradiente hidráulico, mesmo em uma abordagem desacoplada, dificulta imensamente a obtenção de campos admissíveis. Dessa forma, usualmente a abordagem estática não é utilizada em análises simplificadas.

4.6.2.2 Abordagem Cinemática (Limite Superior)

A abordagem cinemática no meio poroso é feita de modo semelhante ao apresentado na seção 3.4. Conforme a Equação 4.44, no entanto, deve ser considerado o termo adicional P_u relativo à potência externa devido ao gradiente hidráulico. Além disso, agora as funções suporte π são definidas em termos de tensões efetivas $\underline{\underline{\sigma}}'$, dessa forma tem-se que:

$$\pi(\underline{d}) = \sup\{\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{d} \mid \underline{\underline{\sigma}}' \in G(x)\} \quad (4.48)$$

$$\pi(\underline{n}; [\underline{\hat{U}}]) = \sup\{[\underline{\hat{U}}] \cdot \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n} \mid \underline{\underline{\sigma}}' \in G(x)\} \quad (4.49)$$

Portanto, em um contexto onde a potência das forças externas é positiva, o Teorema cinemática pode ser reescrito como:

$$\exists \underline{\hat{U}} \text{ C.A. tal que } \Gamma = \frac{P_{rm}}{P_{\gamma'} + P_u} < 1 \implies \underline{Q} \notin K. \quad (4.50)$$

onde Γ representa o Fator de Estabilidade e P_{rm} é definido novamente em termos das funções suporte

$$P_{rm} = \int_{\Omega} \pi(\underline{d}) d\Omega + \int_{\Sigma_U} \pi(\underline{n}; [\underline{\hat{U}}]) dS \geq P_{def} \quad (4.51)$$

5 O PROBLEMA HIDRÁULICO

No Capítulo 4 demonstrou-se que, considerando algumas hipóteses, o problema de estabilidade no sentido da análise limite pode ser tratado a partir da análise desacoplada do problema hidráulico seguida pela análise do problema de estabilidade formulado em tensões efetivas. Dessa forma o presente capítulo será dedicado a enunciar e expor as formas de resolução do problema hidráulico.

O problema hidráulico pode ser tratado de forma simplificada pelo problema de valor inicial dado por:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-\underline{K} \cdot \underline{\operatorname{grad}} u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = u^d & \text{em } \partial\Omega_u \\ \underline{n} \cdot (-\underline{K} \cdot \underline{\operatorname{grad}} u) = v^d & \text{em } \partial\Omega_v \end{cases} \quad (5.1)$$

onde \underline{K} é o tensor de permeabilidade do fluido, u^d e v^d são os valores de excesso de poropressão e fluxo prescritos nas fronteiras $\partial\Omega_u$ e $\partial\Omega_v$, respectivamente. \underline{n} é o vetor unitário normal em $\partial\Omega_v$. Observe que o conjunto $\{\partial\Omega_v, \partial\Omega_u\}$ é uma partição de $\partial\Omega$.

5.1 ABORDAGEM VARIACIONAL

O Cálculo das Variações é um ramo da matemática que, assim como o Cálculo Diferencial, tem por objetivo estudar o efeito que pequenas variações em elementos de seu domínio causam na imagem. Ao contrário do Cálculo Diferencial, no entanto, ao invés de estudar funções do tipo, $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o cálculo de variações estuda funções (denotadas funcionais), $F(y) : V \rightarrow \mathbb{R}$, onde V é chamado de espaço de funções. Através dessas variações é possível encontrar pontos (funções) que minimizam funcionais. Um problema clássico do cálculo de variações pode ser descrito como encontrar uma função $y \in V$ que minimize (dentro de seu espaço de funções) um funcional $J(y) : V \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), v'_i(x)) dx \quad (5.2)$$

Tal mínimo pode ser encontrado igualando a variação total do funcional igual à zero ($\delta J = 0$). Em verdade, de forma análoga ao Cálculo Diferencial, encontra-se uma função que extremiza o funcional, no entanto, para os propósitos do presente trabalho, considera-se que todos os funcionais estudados são convexos, de modo que v é extremo $\iff v$ é mínimo.

Através da abordagem variacional, pode-se reduzir o problema hidráulico de sua forma “forte” (Equação diferencial), para sua forma “fraca” (Extremização de Funcional), enfraquecendo o grau de exigência em relação à diferenciabilidade da solução do problema de valor inicial 5.1. Além disso, uma vez que o problema é descrito de forma equivalente por um Funcional, tem-se a disposição uma nova gama de ferramentas matemáticas para sua solução, como, por exemplo, as equações de Euler-Lagrange.

5.1.1 Funcional em termos do excesso de poropressão (u)

Considere uma função teste δu (também chamada de variação de u), tal que $\delta u = 0$ em $\partial\Omega_u$, isto é, a função $(u + \delta u)$ continua satisfazendo as condições de contorno da Equação 5.1. Multiplicando a forma “forte” do problema hidráulico por δu e integrando sobre Ω obtém-se:

$$\int_{\Omega} \delta u \operatorname{div}(\underline{K} \cdot \underline{\operatorname{grad}} u) d\Omega = 0 \quad (5.3)$$

Integrando por partes e aplicando o Teorema da divergência, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \underline{\operatorname{grad}}(\delta u) \cdot \underline{K} \cdot \underline{\operatorname{grad}} u d\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta u \underline{n} \cdot \underline{K} \cdot \underline{\operatorname{grad}} u dS = 0 \quad (5.4)$$

Pelas condições de contorno em $\partial\Omega$, a função pode ser simplificada para:

$$\int_{\Omega} \underline{\operatorname{grad}}(\delta u) \cdot \underline{K} \cdot \underline{\operatorname{grad}} u d\Omega + \int_{\partial\Omega_v} \delta u v^d dS = 0 \quad (5.5)$$

Observe que $\underline{\operatorname{grad}}(\delta u) = \delta \underline{\operatorname{grad}} u$. Além disso, dada a simetria de \underline{K} (FINLAYSON, 2013), tem-se por fim,

$$\delta \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\operatorname{grad}} u \cdot \underline{K} \cdot \underline{\operatorname{grad}} u d\Omega + \int_{\partial\Omega_v} u v^d dS \right) = 0 \quad (5.6)$$

Portanto, u é solução de 5.1 $\implies u$ é ponto extremo (mínimo) do funcional $J(u')$, definido como:

$$J(u') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\operatorname{grad}} u' \cdot \underline{K} \cdot \underline{\operatorname{grad}} u' d\Omega + \int_{\partial\Omega_v} u' v^d dS \quad (5.7)$$

onde u' pertencente ao conjunto de pressões admissíveis \mathcal{P} , definido como:

$$\mathcal{P} = \{u', \text{ tal que } u' \text{ é contínua, diferenciável por parte e } u' = u^d \text{ em } \partial\Omega_u\} \quad (5.8)$$

Logo, o problema 5.1 foi reduzido a encontrar o campo de pressões admissíveis que minimizam o funcional $J(u)$. Essa formulação é utilizada na resolução numérica dos problemas hidráulicos. No entanto, conforme observado por Buhan et al. (1999), dada a sua utilização na análise limite, é conveniente utilizar uma formulação que resulte diretamente em $\underline{\operatorname{grad}} u$ ou \underline{v} .

5.1.2 Funcional em termos da velocidade de filtração (\underline{v})

Conforme observado por Buhan et al. (1999), é conveniente para o método da análise limite obter a solução de 5.1 diretamente em termos de $\underline{v} = -\underline{K} \cdot \underline{\text{grad}} u$. Embora tal consideração não seja implementada numericamente, é facilitada a obtenção de resultados analíticos, sendo intuitivo pensar em soluções para o problema em termos do gradiente do campo potencial, ao invés do potencial em si.

Considere o conjunto \mathcal{V} de velocidades de filtração admissíveis \underline{v}' . Defina-se \mathcal{V} de forma que, para todo $\underline{v}' \in \mathcal{V}$, tem-se:

- \underline{v}' é diferenciável e contínuo por partes;
- $\text{div } \underline{v}' = 0$;
- $\underline{v}' \cdot \underline{n}$ é contínua sobre possíveis superfícies de descontinuidade Σ com normal \underline{n} .
- $\underline{v}' \cdot \underline{n} = v^d$ em $\partial\Omega_v$.

Afirma-se que, se $\underline{v} = -\underline{K} \cdot \underline{\text{grad}} u \in \mathcal{V}$ é solução do problema 5.1 então \underline{v} minimiza o funcional $J^*(\underline{v}')$, definido como:

$$J^*(\underline{v}') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{v}' \cdot \underline{K}^{-1} \cdot \underline{v}' d\Omega + \int_{\partial\Omega_u} u^d \underline{v}' \cdot \underline{n} dS \quad (5.9)$$

Observe que, como \underline{K} é positiva definida e simétrica, \underline{K}^{-1} existe e $J^*(\underline{v}')$ está bem definido.

Tomando a primeira variação de $J^*(\underline{v})$ tem-se:

$$\delta J^*(\underline{v}) = \int_{\Omega} \delta \underline{v} \cdot \underline{K}^{-1} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_u} u^d \delta \underline{v} \cdot \underline{n} dS \quad (5.10)$$

Substituindo $\underline{v} = -\underline{K} \cdot (\underline{\text{grad}} u)$ no primeiro termo, integrando por partes e aplicando o teorema de Gauss, tem-se:

$$\delta J^*(\underline{v}) = \int_{\Omega} u \text{div}(\delta \underline{v}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_v} u \delta \underline{v} \cdot \underline{n} dS + \int_{\partial\Omega_u} u^d \delta \underline{v} \cdot \underline{n} dS \quad (5.11)$$

Lembrando que, por hipótese, $\text{div}(\delta \underline{v}) = \delta \text{div } \underline{v} = 0$ em Ω , e que $\delta \underline{v} = 0$ em $\partial\Omega_v$, obtém-se:

$$\delta J^*(\underline{v}) = \int_{\partial\Omega_u} (u^d - u) \delta \underline{v} \cdot \underline{n} dS \quad (5.12)$$

Por fim, sendo $u^d = u$ em $\partial\Omega_u$, tem-se a condição de estacionariedade $\delta J^*(\underline{v}) = 0$. Portanto,

$$\underline{v} \text{ é solução de 5.1} \implies \delta J^*(\underline{v}) = 0 \quad (5.13)$$

5.1.3 Comparação entre as abordagens

No presente trabalho, conforme apresentado nos Itens 5.1.1 e 5.1.2, a abordagem em termos de velocidade de filtração \underline{v} será utilizada para encontrar soluções analíticas, enquanto a abordagem em termos de u será utilizada para encontrar soluções numéricas. Sendo assim, é conveniente utilizar relações que permitam avaliar a qualidade das soluções encontradas. Dados u e \underline{v} soluções do problema (5.1), vale que (CUVILLIER, 2001):

$$\forall u' \in \mathcal{P}, \underline{v}' \in \mathcal{V}, \quad -J(u') \leq -J(u) = J^*(\underline{v}) \leq J^*(\underline{v}'). \quad (5.14)$$

Tal relação fornece, efetivamente, limites inferior e superior para a solução real do problema hidráulico.

5.2 SOLUÇÕES DO PROBLEMA HIDRÁULICO

O primeiro caso a ser abordado será o problema hidráulico em taludes, o qual será utilizado posteriormente na análise de estabilidade. O problema é caracterizado pelo escoamento induzido por uma redução repentina no nível de água.

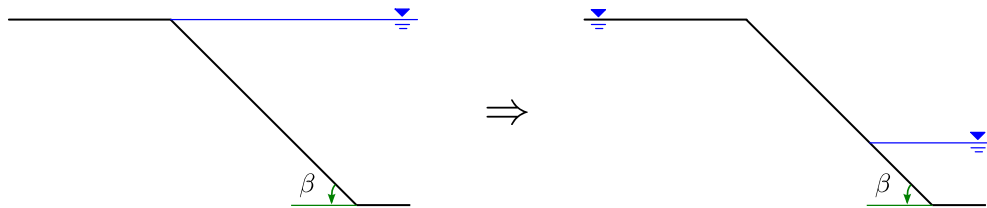


Figura 5.1 – Caracterização do problema hidráulico em taludes

Sendo assim, em um sistema cartesiano, o problema pode ser descrito conforme a Figura 5.3

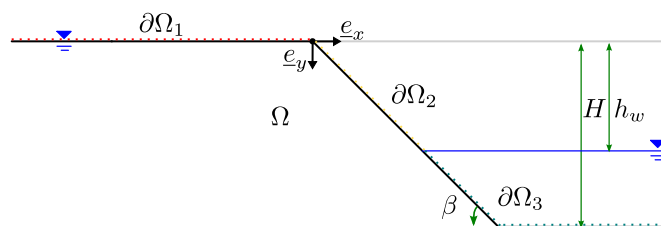


Figura 5.2 – Caracterização das condições de contorno

Na hipótese de mudança repentina, considera-se a pressão total sobre $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ igual a zero, e sobre $\partial\Omega_3$ igual ao peso da água sobre a superfície, obtendo, em termos de excesso de poropressão (u) as condições de contorno:

$$\begin{cases} u = 0 & \text{em } \partial\Omega_1 \\ u = -y\gamma_w & \text{em } \partial\Omega_2 \\ u = -h_w\gamma_w & \text{em } \partial\Omega_3 \end{cases} \quad (5.15)$$

Baseado na dedução presente na seção 5.1, serão apresentadas quatro soluções analíticas e uma solução numérica para o problema hidráulico em taludes. De modo a avaliar as soluções encontradas, estas serão comparadas conforme a relação (5.14).

5.2.1 Solução Analítica

Para a solução do problema hidráulico em taludes, em virtude de sua geometria, é conveniente utilizar o sistema de coordenadas polares, conforme apresentado na Figura 5.3. Dada a dificuldade de encontrar uma única solução analítica para todo o domínio, inicialmente propõe-se encontrar campos restritos à região com raio inferior à R .

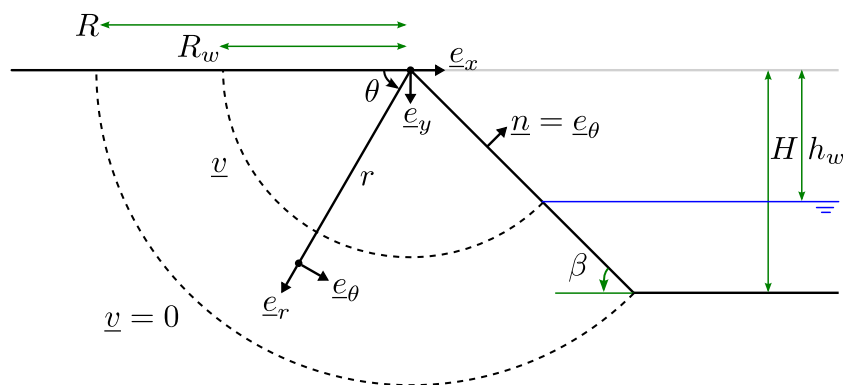


Figura 5.3 – Problema hidráulico em coordenadas polares

onde $R_w = h_w / \sin \beta$ e $R = H / \sin \beta$.

Neste item são propostas três famílias para a velocidade de filtração que satisfazem as condições de \mathcal{V} , inicialmente uma família onde \underline{v} tem apenas a componente transversal; uma segunda família onde \underline{v} também possui componentes radiais; e uma terceira família onde o fluxo ascendente abaixo do pé do talude é considerado. Utilizando o cálculo de variações juntamente com o funcional encontrado na Equação 5.9, minimiza-se \underline{v} para encontrar a solução ótima dentro de cada família.

5.2.1.1 Família 1

Inicialmente propõe-se um campo vetorial, puramente tangencial, função de r , isto é,

$$\underline{v}^1 = \begin{cases} h(r)\underline{e}_\theta & \text{se } 0 \leq r \leq R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases} \quad (5.16)$$

O índice sobrescrito será empregado para referir-se a família em questão. Observe que $\underline{v}^1 \in \mathcal{V}$, visto que

- Assumindo $h_i \in C_1$, \underline{v} é diferenciável e contínuo por partes;
- $\text{div}(\underline{v}) = 0$;
- $\underline{v} \cdot \underline{e}_r = 0$ na superfície de descontinuidade $r = R$;
- Dada a ausência de v^d , \underline{v} satisfaz essa condição trivialmente.

Substituindo \underline{v}^1 em 5.9, e assumindo $\underline{K} = k\underline{1}$, com $k \in \mathbb{R}$ obtém-se:

$$J^{*1}(\underline{v}^1) = \frac{1}{2k} \int_0^R \int_0^\gamma h^2(r) r d\theta dr - \left(\int_0^{R_w} \gamma_w h(r) r \sin \beta dr + \int_{R_w}^R \gamma_w h_w h(r) dr \right) \Big|_{\theta=\bar{\beta}} \quad (5.17)$$

onde $\bar{\beta}$ é o angulo suplementar de β , isto é $\bar{\beta} = \pi - \beta$.

Para obter o minimizante do funcional J^1 , toma-se a sua primeira variação igual à zero. Manipulando o resultado obtido e agrupando as integrais de forma apropriada, obtém-se

$$\delta J^{*1}(\underline{v}^1) = \int_0^{R_w} \left[\frac{\bar{\beta}}{k} h(r) r - \gamma_w r \sin \beta \right] \delta h dr + \int_{R_w}^R \left[\frac{\bar{\beta}}{k} h(r) r - \gamma_w h_w \right] \delta h dr \quad (5.18)$$

Aplicando o Lema Fundamental do Cálculo Variacional, encontra-se $h(r)$ definido por partes:

$$h(r) = \begin{cases} \frac{k\gamma_w \sin \beta}{\bar{\beta}} & 0 < r < R_w \\ \frac{k\gamma_w h_w}{\bar{\beta}} \frac{1}{r} & R_w \leq r < R \end{cases} \quad (5.19)$$

Dessa forma,

$$\underline{v}^1 = \begin{cases} \frac{k\gamma_w \sin \beta}{\bar{\beta}} \underline{e}_\theta & \text{se } 0 \leq r < R_w \\ \frac{k\gamma_w h_w}{\bar{\beta}} \frac{1}{r} \underline{e}_\theta & \text{se } R_w \leq r < R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases} \quad (5.20)$$

e, substituindo $h(r)$ na Equação 5.17:

$$J^{*1}(\underline{v}) = -\frac{k\gamma_w^2 h_w^2}{2\bar{\beta}} \left[\frac{1}{2} - \ln \left(\frac{h_w}{H} \right) \right] \quad (5.21)$$

5.2.1.2 Família 2

Aumentando a complexidade, propõe-se uma segunda família de forma

$$\underline{v}^2 = \begin{cases} \underline{v}_1^2 = -g(r) \frac{d}{d\theta} f(\theta) \underline{e}_r + \frac{d}{dr} (r g(r)) f(\theta) \underline{e}_\theta & \text{se } 0 \leq r < R_w \\ \underline{v}_2^2 = h_2(r) \underline{e}_\theta & \text{se } R_w \leq r < R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases} \quad (5.22)$$

Neste caso, para que $\underline{v}^2 \cdot \underline{e}_r = 0$ em $r = R_w$, é suficiente tomar $g(R_w) = 0$. Sendo assim, novamente tem-se $\underline{v} \in \mathcal{V}$, visto que

- Assumindo $g, f \in C_1$, \underline{v} é diferenciável e contínuo por partes;
- $\text{div}(\underline{v}) = 0$ em ambos os domínios de definição de \underline{v} ;
- $\underline{v} \cdot \underline{e}_r = 0$ em $r = R_w, r = R$;
- Dada a ausência de v^d , \underline{v} satisfaz essa condição trivialmente.

Por simplicidade, as minimizações serão executadas separadamente para ambos os domínios de definição de \underline{v}^2 . Substituindo \underline{v}^2 em 5.9, e assumindo $\underline{K} = k\underline{1}$, com $k \in \mathbb{R}$ obtém-se:

$$J^{*2}(\underline{v}^2) = J_1^{*2}(\underline{v}^2) + J_2^{*2}(\underline{v}^2) \quad (5.23)$$

onde J_1^{*2} e J_2^{*2} são dados respectivamente por:

$$J_1^{*2}(\underline{v}) = \frac{1}{2k} \int_0^{R_w} \int_0^{\bar{\beta}} (g^2 f_\theta^2 + (g + r g_r)^2 f^2) r d\theta dr - f(\bar{\beta}) \gamma_w \sin \beta \int_0^{R_w} (g + r g_r) r dr \quad (5.24)$$

$$J_2^{*2}(\underline{v}) = \frac{1}{2k} \int_{R_w}^R \int_0^{\bar{\beta}} h_2(r)^2 r d\theta dr - \int_{R_w}^R \gamma_w h_w h_2(r) dr \Big|_{\theta=\bar{\beta}} \quad (5.25)$$

Por conveniência, ao longo deste capítulo, a dependência da variável independente das funções g e f serão omitidas, além disso, suas derivadas serão representadas por g_r e f_θ , respectivamente. Dados as funções dependentes e os domínios de definição de J_1^{*2} e J_2^{*2} , pode-se considerá-los independentes. Dessa forma a minimização do funcional J^* será feita individualmente.

Para obter o minimizante do funcional $J_1^{*2}(\underline{v}^2)$, toma-se a sua primeira variação igual à zero. Como neste caso f e g possuem variáveis independentes distintas, a minimização será feita de forma independente. Considerando a variação de $J_1^{*2}(\underline{v}^2)$ com respeito à $f(\theta)$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta J_1^{*2}(\underline{v}^2) &= \frac{1}{k} \int_0^{R_w} \int_0^{\bar{\beta}} (g^2 f_\theta \delta f_\theta + (g + r g_r)^2 f \delta f) r d\theta dr - \\ &\delta f(\bar{\beta}) \gamma_w \sin \beta \int_0^{R_w} (g + r g_r) r dr = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Utilizando integração por partes, manipulando o resultado obtido e agrupando as integrais de forma apropriada, obtém-se

$$\delta J_1^{*2}(\underline{v}^2) = \frac{1}{k} \int_0^{\bar{\beta}} (Bf - Af_{\theta\theta}) \delta f d\theta + \left(\frac{1}{k} Af_{\theta} - \gamma_w C \sin \beta \right) \delta f \Big|_{\theta=\bar{\beta}} + \frac{1}{k} Af_{\theta} \delta f \Big|_{\theta=0} = 0 \quad (5.27)$$

onde $A = \int_0^{R_w} g^2 r dr$, $B = \int_0^{R_w} (g + rg_r)^2 r dr$ e $C = \int_0^{R_w} (g + rg_r) r dr$.

Pelo Lema fundamental do cálculo das variações, f deve satisfazer

$$Bf(\theta) = Af_{\theta\theta}(\theta), \quad \forall \theta \in (0, \bar{\beta}) \quad (5.28)$$

respeitando as condições de contorno:

- (i) $f_{\theta} = \frac{k\gamma_w C \sin \beta}{A}$ em $\theta = \bar{\beta}$;
- (ii) $f_{\theta} = 0$ em $\theta = 0$.

Desse modo, a forma geral de f é dado por:

$$f(\theta) = \lambda \cdot \cosh \omega \theta \quad (5.29)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\omega = \sqrt{\frac{B}{A}}$.

Na sequência, tomando a variação de $J^*(\underline{v})$ com respeito à $g(r)$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta J_1^{*2}(\underline{v}^2) &= \frac{1}{k} \int_0^{R_w} \int_0^{\bar{\beta}} (gf_{\theta}^2 \delta g + f^2(g + rg_r)(\delta g + r\delta g_r)) r d\theta dr - \\ &f(\bar{\beta})\gamma_w \sin \beta \int_0^{R_w} (\delta g + r\delta g_r) r dr = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Utilizando integração por partes, manipulando o resultado obtido e agrupando as integrais de forma apropriada, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta J_1^{*2}(\underline{v}^2) &= \int_0^{R_w} \left[\frac{1}{k} (g(D - E) - 3Eg_r r - Eg_{rr} r^2) + f(\bar{\beta})\gamma_w \sin \beta \right] \delta g r dr \\ &+ \left(\frac{1}{k} E(g + rg_r) + f(\bar{\beta})\gamma_w \sin \beta \right) r^2 \delta g \Big|_{r=0}^{r=R_w} = 0 \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde $D = \int_0^{\bar{\beta}} f_{\theta}^2 d\theta$ e $E = \int_0^{\bar{\beta}} f^2 d\theta$.

Pelo Lema fundamental do cálculo das variações, tem-se que g deve satisfazer

$$g(D - E) - 3Eg_r r - Eg_{rr} r^2 + f(\bar{\beta})k\gamma_w \sin \beta = 0, \quad \forall r \in (0, R_w) \quad (5.32)$$

respeitando as condições de contorno:

- (i) $\left(\frac{1}{k}E(g + rg_r) + f(\bar{\beta})\gamma_w \sin \beta\right) r^2 = 0$ em $r = 0$;
- (ii) $\left(\frac{1}{k}E(g + rg_r) + f(\bar{\beta})\gamma_w \sin \beta\right) r^2 = 0$ em $r = R_w$.

Observe que, dada a condição imposta à $g(R_w)$, $\delta g = 0$ em $r = R_w$, dessa forma ambas as condições de contorno são satisfeitas trivialmente. Desse modo, $g(r)$ tem a forma:

$$g(r) = \alpha_1 r^{-1+\sqrt{\frac{D}{E}}} + \alpha_2 r^{-1-\sqrt{\frac{D}{E}}} - \frac{f(\bar{\beta})}{D-E} k \gamma_w \sin \beta, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad (5.33)$$

Para que a integral definida em A seja finita, é necessário que $\alpha_2 = 0$ e $\sqrt{D/E} > 0$. Por fim, impondo $g(R_w) = 0$, obtém-se

$$g(r) = \frac{f(\bar{\beta})}{E-D} k \gamma_w \sin \beta \left[1 - \frac{r^{-1+\sqrt{\frac{D}{E}}}}{R_w^{-1+\sqrt{\frac{D}{E}}}} \right] \quad (5.34)$$

Dadas as definições de D e E , bem como a forma encontrada para f em 5.29, tem-se que $g(r) \propto \lambda^{-1}$. Sendo assim, substituindo g e f em \underline{v}_1^2 , dada por Equação 5.22, obtém-se que \underline{v}_1^2 é independente de λ , sendo possível escolher de forma arbitrária $\lambda = 1$.

Pela função $g(r)$ encontrada, conforme definido em 5.29, tem-se que $\omega = \sqrt[4]{D/E}$. Ainda, considerando a condição 2 sobre g , obtém-se em função de ω :

$$g(r) = \frac{\omega}{(1-\omega^2) \sinh \omega \bar{\beta}} k \gamma_w \sin \beta \left[1 - \frac{r^{-1+\omega^2}}{R_w^{-1+\omega^2}} \right] \quad (5.35)$$

Assim, pode-se escrever $J_1^{*2}(\underline{v}^2)$ apenas como função de ω , conforme Equação 5.9,

$$J_1^{*2}(\underline{v}^2) = -\frac{kh_w^2 \gamma_w^2}{4} p(\omega), \quad p(\omega) = \frac{\omega \coth \omega \bar{\beta}}{\omega^2 + 1} \quad (5.36)$$

Por fim, executando a maximização da função auxiliar $p(\omega)$, pode-se encontrar ω_0 , a partir de γ , numericamente pela expressão:

$$p'(\omega_0) = 0 \implies (\omega_0^2 + 1)(\coth \omega_0 \bar{\beta} + \omega_0 \bar{\beta}(1 - \coth^2 \omega_0 \bar{\beta})) - 2\omega_0^2 \coth \omega_0 \bar{\beta} = 0 \quad (5.37)$$

Portanto \underline{v}_1^2 é dado em coordenadas polares por

$$\underline{v}_1^2 = \frac{\omega_0 k \gamma_w \sin \beta}{(\omega_0^2 - 1) \sinh \omega_0 \bar{\beta}} \left[\begin{array}{l} \omega_0 \left(1 - (r/R_w)^{\omega_0^2-1}\right) \sinh \omega_0 \theta \\ - \left(1 - (r/R_w)^{\omega_0^2-1} \omega_0^2\right) \cosh \omega_0 \theta \end{array} \right] \quad (5.38)$$

Dessa forma $J_1^{*2}(\underline{v}^2)$ é dado por:

$$J_1^{*2}(\underline{v}^2) = -\frac{kh_w^2\gamma_w^2}{2} \left[\frac{p(\omega_0)}{2} \right], \quad p(\omega) = \frac{\omega \coth \omega \bar{\beta}}{\omega^2 + 1} \quad (5.39)$$

sendo ω_0 obtido pela Equação 5.37.

De forma análoga, para encontrar $h_2(r)$ toma-se a primeira variação de J_2^2 , obtendo:

$$\delta J_2^{*2}(\underline{v}^2) = \int_{R_w}^R \left[\frac{\bar{\beta}}{k} h(r) r - \gamma_w h_w \right] \delta h dr = 0 \quad (5.40)$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional, encontra-se $h_2(r)$:

$$h_2(r) = \frac{k\gamma_w h_w}{\bar{\beta}} \frac{1}{r} \quad (5.41)$$

Dessa forma,

$$\underline{v}_2^2 = \frac{k\gamma_w h_w}{\bar{\beta}} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

e, substituindo $h_2(r)$ na Equação 5.25,

$$J_2^{*2}(\underline{v}) = \frac{k\gamma_w^2 h_w^2}{2\bar{\beta}} \ln \left(\frac{h_w}{H} \right) \quad (5.43)$$

Por fim, tem-se que

$$\underline{v}^2 = \begin{cases} \frac{\omega_0 k \gamma_w \sin \beta}{(\omega_0^2 - 1) \sinh \omega_0 \bar{\beta}} \begin{bmatrix} \omega_0 \left(1 - (r/R_w)^{\omega_0^2 - 1} \right) \sinh \omega_0 \theta \\ - \left(1 - (r/R_w)^{\omega_0^2 - 1} \right) \omega_0^2 \cosh \omega_0 \theta \end{bmatrix} & \text{se } 0 \leq r < R_w \\ \frac{k\gamma_w h_w}{\bar{\beta}} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{se } R_w \leq r < R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases} \quad (5.44)$$

e

$$J^{*2}(\underline{v}) = -\frac{k\gamma_w^2 h_w^2}{2} \left[\frac{p(\omega_0)}{2} - \frac{1}{\bar{\beta}} \ln \left(\frac{h_w}{H} \right) \right], \quad p(\omega) = \frac{\omega \coth \omega \bar{\beta}}{\omega^2 + 1} \quad (5.45)$$

onde ω_0 é obtido pela Equação 5.37.

5.2.1.3 Família 3

O escoamento hidráulico em taludes não é restrito apenas ao raio R , conforme apresentado nas Famílias 1 e 2, sendo assim, para a Família 3, propõe-se expandir o domínio não nulo de \underline{v} utilizando uma nova função $\underline{v}_3 = h_3(r)\underline{e}_\theta$ definida entre os raios R e R_e , onde R_e é definido conforme

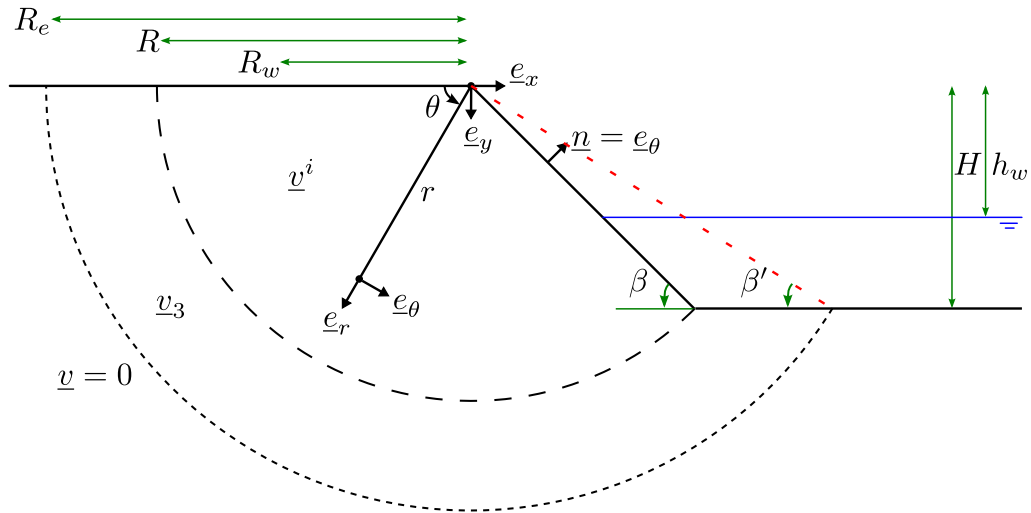


Figura 5.4 – Caracterização do problema hidráulico em taludes, com escoamento ascendente em abaixo do pé do talude

a Figura 5.4. A partir dessa Família, torna-se possível representar o escoamento ascendente que emana abaixo do pé do talude, consideração relevante para a análise de estabilidade e obtenção de superfícies de ruptura.

Observe que \underline{v}_3 apenas estende as definições das Famílias 1 e 2, de modo que seu comportamento é independente da definição dada para o fluxo em raio inferior à R . Dessa forma considera-se um campo genérico, que pode ser substituído posteriormente para ambos os casos.

$$\underline{v}^3 = \begin{cases} \underline{v}^1 \text{ ou } \underline{v}^2 & \text{se } 0 \leq r < R \\ h_3(r)\underline{e}_\theta & \text{se } R \leq r < R_e \\ 0 & \text{se } r > R_e \end{cases} \quad (5.46)$$

Novamente tem-se $\underline{v} \in \mathcal{V}$, visto que

- Assumindo $h_3(r) \in C_1$, \underline{v} é diferenciável e contínuo por partes;
- $\text{div } \underline{v} = 0$ em todos os domínios de definição de \underline{v} ;
- $\underline{v} \cdot \underline{e}_r = 0$ em $r = R_w$, $r = R$ e $r = R_e$;
- Dada a ausência de v^d , \underline{v} satisfaz essa condição trivialmente.

Substituindo \underline{v}^3 em 5.9, e assumindo $\underline{K} = k\underline{1}$, com $k \in \mathbb{R}$ obtém-se:

$$J^{*3}(\underline{v}^3) = J^{*i}(\underline{v}^3) + J_3^{*3}(\underline{v}^3), \quad \text{com } i = 1 \text{ ou } 2 \quad (5.47)$$

onde $J^{*i}(\underline{v}^3)$ é dado por 5.21 ou 5.45 e J_3^{*3} é dado por

$$J_3^{*3}(\underline{v}) = \frac{1}{2k} \int_R^{R_e} \int_0^{\pi-\beta_r} h_3^2(r) r d\theta dr - \gamma_w h_w \int_R^{R_e} h_3(r) \cos \beta_r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - H^2}} dr \quad (5.48)$$

onde β_r é definido de modo que

$$\beta_r = \arcsin\left(\frac{H}{r}\right). \quad (5.49)$$

Embora matematicamente o valor de R_e possa ser ilimitado, fisicamente, dada a geometria do problema, é necessário estipular um limite máximo sobre o qual a redução do nível de água perde efeito, ou tem apenas uma componente. Em domínios hídricos como rios, por exemplo, dada a simetria geométrica, considera-se que no eixo de simetria existe apenas fluxo vertical, sendo fixada uma distância L_m , a qual limitará R_e conforme ilustrado pela Figura 5.5.

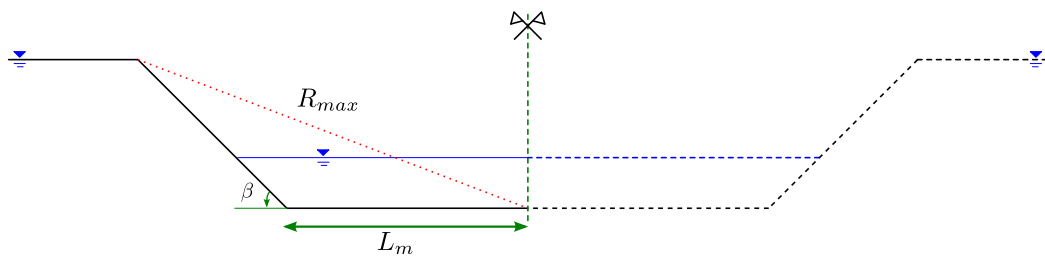


Figura 5.5 – Definição do parâmetro L_m

Sendo L_m um dado de entrada, calcula-se R_{max} de forma que

$$R_{max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{H}{\tan \beta} + L_m\right)^2} \quad (5.50)$$

Dessa forma, no processo de minimização, considera-se $R < R_e < R_{max}$.

Como \underline{v}_3 independe do campo dado em $r < R$, para encontrar $h_3(r)$, pode-se considerar diretamente a variação de J_3^{*3} igual à zero, obtendo após simplificação:

$$\delta J_3^{*3}(\underline{v}) = \int_R^{R_e} \left[\frac{1}{k} (\pi - \beta_r) h_3(r) r - \gamma_w h_w \right] \delta h_3 dr = 0 \quad (5.51)$$

Pelo lema fundamental do Cálculo Variacional, obtém-se:

$$h_3(r) = \frac{k \gamma_w h_w}{\pi - \beta_r} \frac{1}{r} \quad (5.52)$$

Dessa forma,

$$\underline{v}^3 = \begin{cases} \underline{v}^i & \text{se } 0 \leq r < R \\ \frac{k\gamma_w h_w}{\pi - \beta_r} \frac{1}{r} e^{-\theta} & \text{se } R \leq r < R_e \\ 0 & \text{se } r > R_e \end{cases} \quad (5.53)$$

e

$$J^{*3}(\underline{v}) = J^{*i} - \frac{k\gamma_w^2 h_w^2}{2} \left[\int_R^{R_e} \frac{1}{\pi - \beta_r(r)} \frac{1}{r} dr \right], \quad \text{com } i = 1 \text{ ou } 2 \quad (5.54)$$

onde o termo integral deve ser resolvido numericamente.

Analisando a integral, observa-se que $\frac{1}{\pi - \beta_r(r)} \frac{1}{r}$ é positivo no domínio de definição. Dessa forma, tem-se que o mínimo do funcional é obtido na fronteira de R_e , isto é, $R_e = R_{max}$.

Por simplicidade, ao longo desse capítulo, para clareza de comparação de resultados, será denotado Família 3.1 quando é utilizada o campo \underline{v}^1 para $r < R$ e Família 3.2 quando utilizado o campo \underline{v}^2 .

5.2.1.4 Qualidade das soluções

Avaliando inicialmente as duas primeiras soluções quanto à energia de seu funcional, verifica-se que a Família 2 apresenta maior qualidade, em especial para inclinações baixas do talude. A Figura 5.6 apresenta a comparação entre as soluções para diferentes reduções do nível de água.

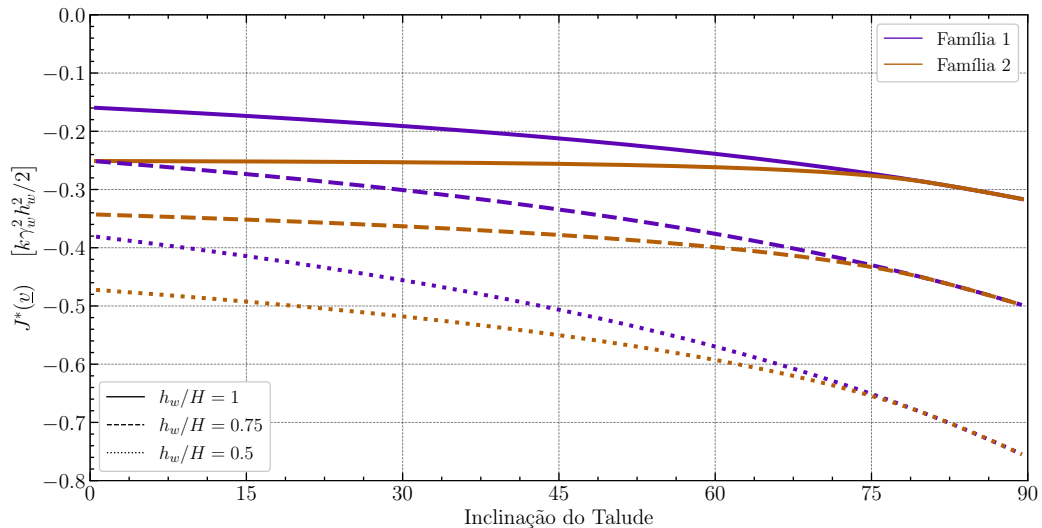


Figura 5.6 – Comparação entre as Famílias 1 e 2

Para avaliar as Famílias 3.1 e 3.2, varia-se o parâmetro L_m entre 0 e $10H$, a Figura 5.7 apresenta a comparação entre as soluções para o caso de seca total $h_w/H = 1$. Comparando a energia dos funcionais, verifica-se novamente que a extensão da Família 2 é a solução com melhor qualidade. Além disso, verifica-se não haver convergência a medida que L_m aumenta. Por fim, de modo a

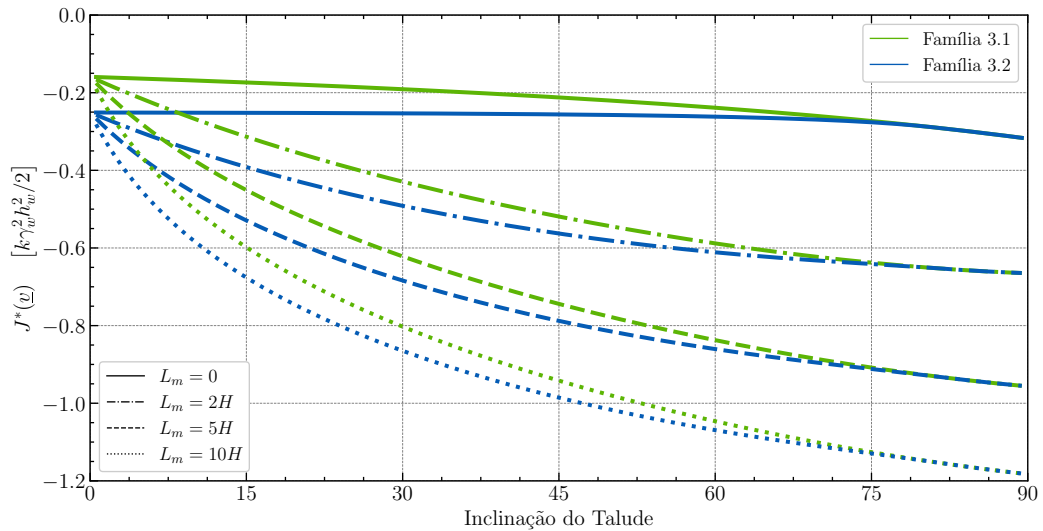


Figura 5.7 – Comparação entre as Famílias 3.1 e 3.2

explicitar a diferença entre as Famílias 2 e 3.2, a Figura 5.8 apresenta a energia do funcional para o caso $L_m = 10 \cdot H$.

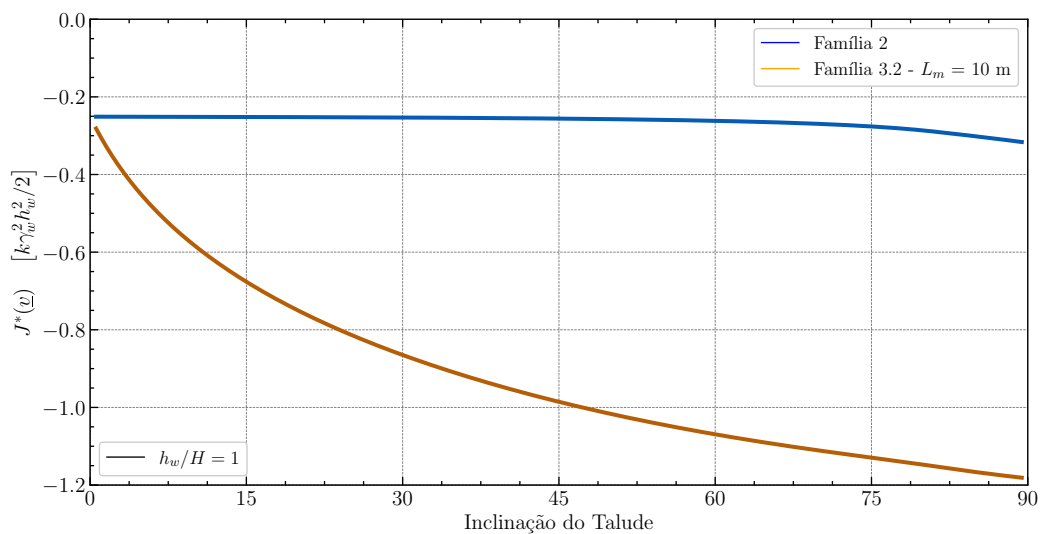


Figura 5.8 – Comparação entre as Famílias 2 e 3.2

5.2.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)

Com o aumento da complexidade das estruturas em estudo, dificulta-se a obtenção de campos de filtração admissíveis, sendo relevante para uma boa solução do problema uma abordagem pelo MEF. Tal abordagem será particularmente interessante em análises com distribuição estocásticas das propriedades dos materiais.

No Método dos Elementos Finitos, ao invés de propor soluções aproximadas globais, subdivide-se o domínio contínuo em subdomínios e propõem-se soluções aproximadas locais, válidas para o interior do elemento. Seja Ω_e um elemento finito composto por K nós, a partir do modelo

compatível aproxima-se o campo de pressões $u(\underline{x})$ no seu interior por

$$u(\underline{x}) = \sum_{i=1}^k N_i u_i^e = \underline{N} \underline{u}^e \quad \text{em } \Omega_e \quad (5.55)$$

onde $\underline{N} = [N_1 \dots N_k]$ são as funções de interpolação e $\underline{u}^e = [u_1 \dots u_k]^T$ são as pressões nodais no elemento.

Dessa forma, aproxima-se o gradiente de u de modo que

$$\underline{\text{grad}} u(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \cdot u \approx \underline{B} \cdot \underline{u}^e \quad \text{em } \Omega_e \quad (5.56)$$

onde a matriz \underline{B} é definida por

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \partial N/\partial x \\ \partial N/\partial y \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Substituindo as aproximações encontradas na forma fraca do problema hidráulico, conforme definido na Equação 5.7, tem-se no nível do elemento:

$$J^e(\underline{u}) \approx \frac{1}{2} (\underline{u}^e)^T \mathbb{K}^e \underline{u}^e + (\underline{u}^e)^T \mathbb{F}^e \quad (5.58)$$

onde \mathbb{K}^e e \mathbb{F}^e são definidos por

$$\mathbb{K}^e = \int_{\Omega_e} \underline{B}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{B} d\Omega; \quad \mathbb{F}^e = - \int_{\partial\Omega_e} \underline{N}^T \cdot \underline{v}^d dS. \quad (5.59)$$

Aplicando a condição de estacionariedade sobre o elemento, obtém-se:

$$\mathbb{K}^e \underline{u}^e = \mathbb{F}^e. \quad (5.60)$$

Por fim, de forma análoga ao método de análise matricial, monta-se o sistema global a partir das contribuições de rigidez e forças nodais de elementos com graus de liberdade comuns, obtendo:

$$\mathbb{K}^g \underline{u}^g = \mathbb{F}^g. \quad (5.61)$$

5.2.2.1 Solução Numérica

Para a resolução do problema hidráulico, o método apresentado foi implementado em linguagem *Python* utilizando elementos triangulares isoparamétricos de ordem 2. No problema em questão, além das condições dadas pela Equação 5.15, dada ao tamanho finito da malha, é necessário avaliar os limites laterais e inferiores de Ω . Pela consideração física do parâmetro L_m , estipula-se sobre a parede lateral direita que o fluxo tem componente apenas vertical, ou, equivalentemente, $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$.

Para uma distância suficientemente grande, a redução de nível de água perde efeito sobre u e, portanto, buscam-se condições de contorno sobre a lateral esquerda e a base que reproduzam, ao menos aproximadamente, esse comportamento. A Figura 5.9, apresenta quatro possibilidades que preservam a continuidade de u sobre $\partial\Omega$.

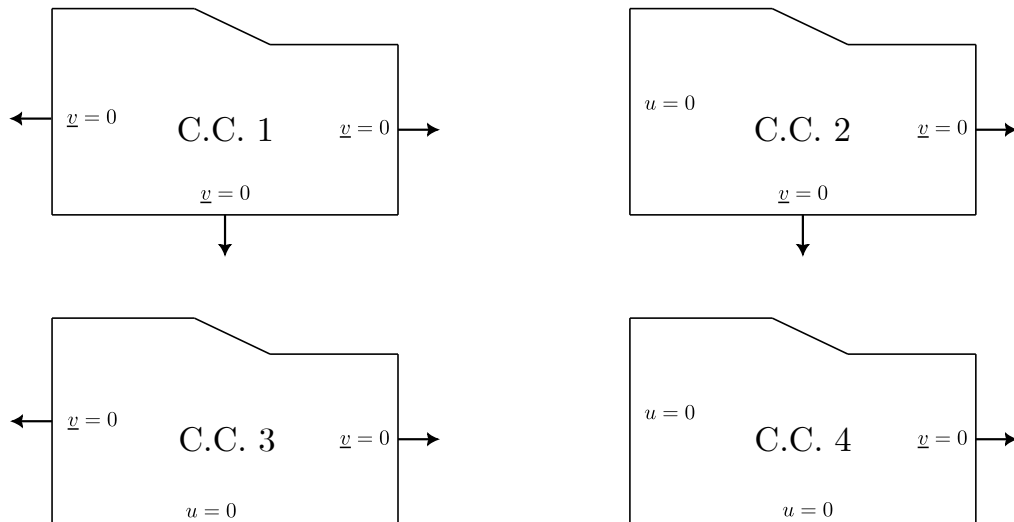


Figura 5.9 – Combinação das condições de contorno sobre as paredes laterais e base

Para a verificação, serão fixados $L_m = 10 \cdot H$, $h_w = H$ m e $\beta = 45^\circ$. Para cada uma das quatro combinações de condições de contorno, também serão verificados a qualidade de duas malhas distintas. Embora o problema implementado não tenha alto custo computacional, essa análise também visa avaliar a possibilidade de uma economia no número de elementos. A Figura 5.10 apresenta as duas malhas utilizadas.

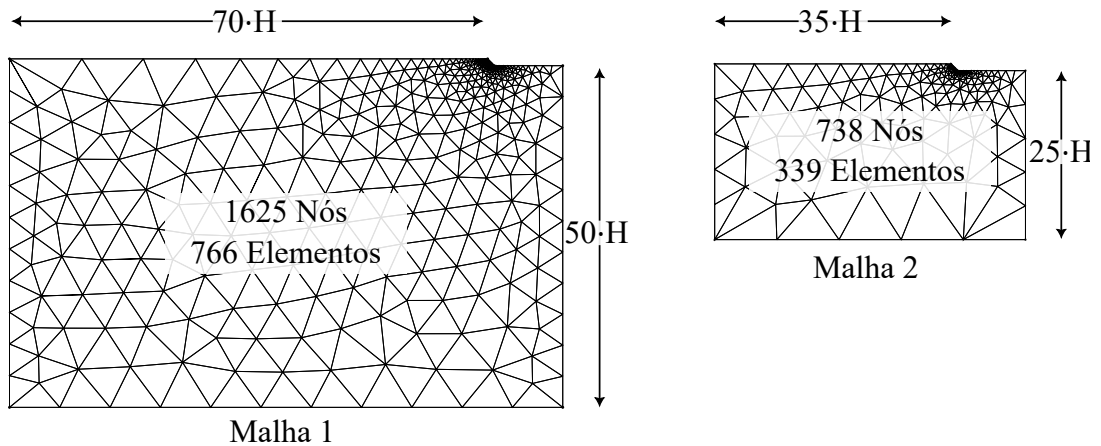


Figura 5.10 – Malhas utilizadas na análise

A Tabela 5.1 apresenta os valores de $J(u)$ para cada um dos casos considerados. Avalia-se que a utilização da Malha 1 reduz a variabilidade dos resultados pela mudança das condições de contorno, e, portanto, será utilizada nas análises posteriores. Além disso, verifica-se que a condição de contorno sobre a parede lateral esquerda da malha tem pouco efeito no resultado.

Tabela 5.1 – Valores de $J(u)$ para as combinações de condição de contorno e malha.

C.C.	Malha 1	Malha 2
1	0,70773	0,68819
2	0,71015	0,69404
3	0,72999	0,76767
4	0,73003	0,76775

A Figura 5.11 apresenta os gráficos isopotenciais das combinações de condição de contorno aplicadas à Malha 1.

Salienta-se que o comportamento global do fluxo hidráulico não é por si só relevante na solução do problema de estabilidade, mas especialmente o comportamento localizado na região próxima ao talude. Avaliando as linhas equipotenciais próximas à região do talude, conforme ilustrado pela Figura 5.12, conclui-se que as quatro condições de contorno consideradas possuem um comportamento semelhante na análise de estabilidade de taludes. Dessa forma, optou-se de forma arbitrária por utilizar as Condições de Contorno 4 em conjunto com a Malha 1, para as demais análises.

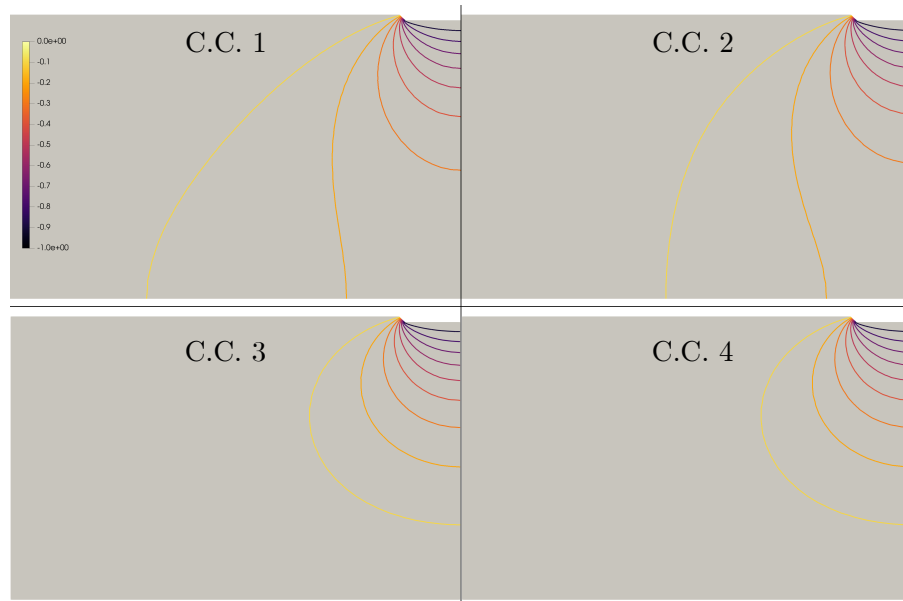


Figura 5.11 – Linhas equipotenciais obtidas para as combinações de Condição de Contorno

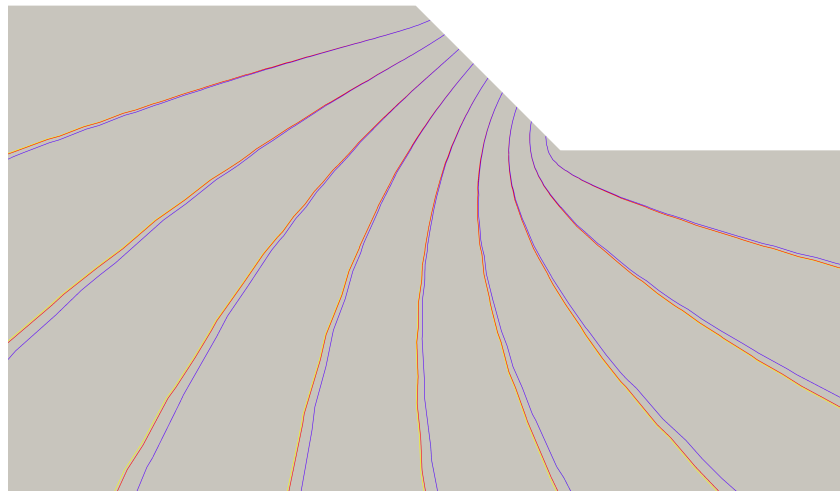


Figura 5.12 – Linhas equipotenciais próximas ao talude, das quatro condições de contorno

5.2.3 Comparação entre as abordagens Analítica e Numérica

Inicialmente, com o intuito de ilustrar o comportamento local das soluções na região próxima ao talude, serão apresentados as linhas de fluxo para cada caso, considerando a redução total do nível da água. Fixados $\beta = 45^\circ$, $h_w = H$ e $L_m = 10 \cdot H$, a Figura 5.13 ilustra a direção e intensidade dos campos gradientes da variação de poropressão. A partir da análise dos campos apresentados, avalia-se que as soluções referentes às Famílias 2 e 3.2 apresentam maior intensidade nas regiões próximas ao talude, sendo mais próximas à solução numérica do que as Famílias 1 e 3.1, corroborando com as comparações apresentadas na subseção 5.2.1.4. Em particular, as Famílias

3.1 e 3.2 conseguem representar aproximadamente o comportamento obtido abaixo do pé do talude.

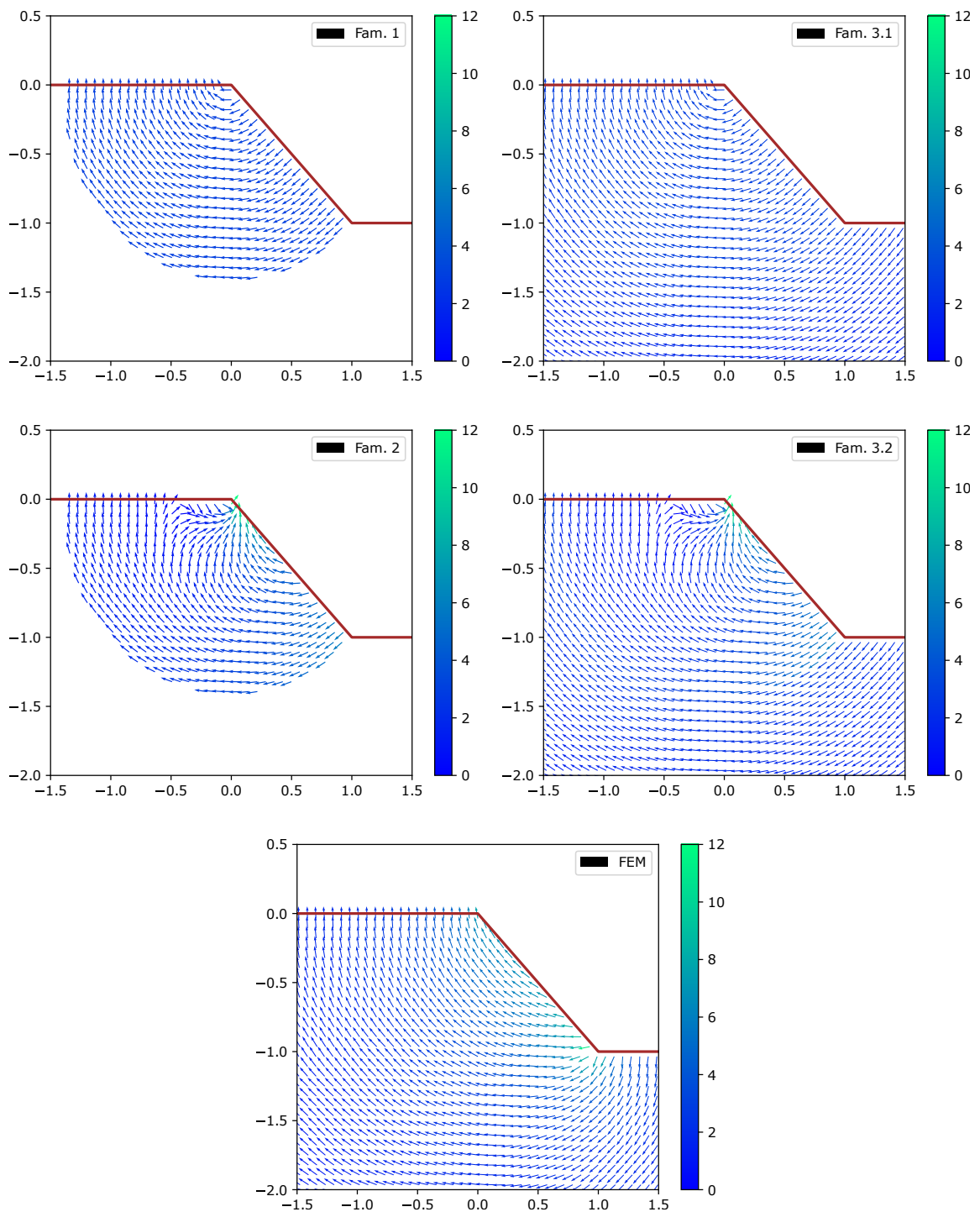


Figura 5.13 – Comparação entre os campos gradientes da variação de poropressão para o problema hidráulico em taludes

Pela relação apresentada na Equação 5.14, pode-se obter uma estimativa do valor de $J(u)$ que é de fato solução do problema hidráulico. As soluções analíticas encontradas representam um limite superior, enquanto as soluções numéricas formam um limite inferior. A Figura 5.14 ilustra,

em função da inclinação do talude, os valores de $J(u)$ e $J^*(v)$ encontrados para as soluções numéricas e analíticas, fixados $H = 1 \text{ m}$, $h_w = H$ e $L_m = 10 \cdot H$.

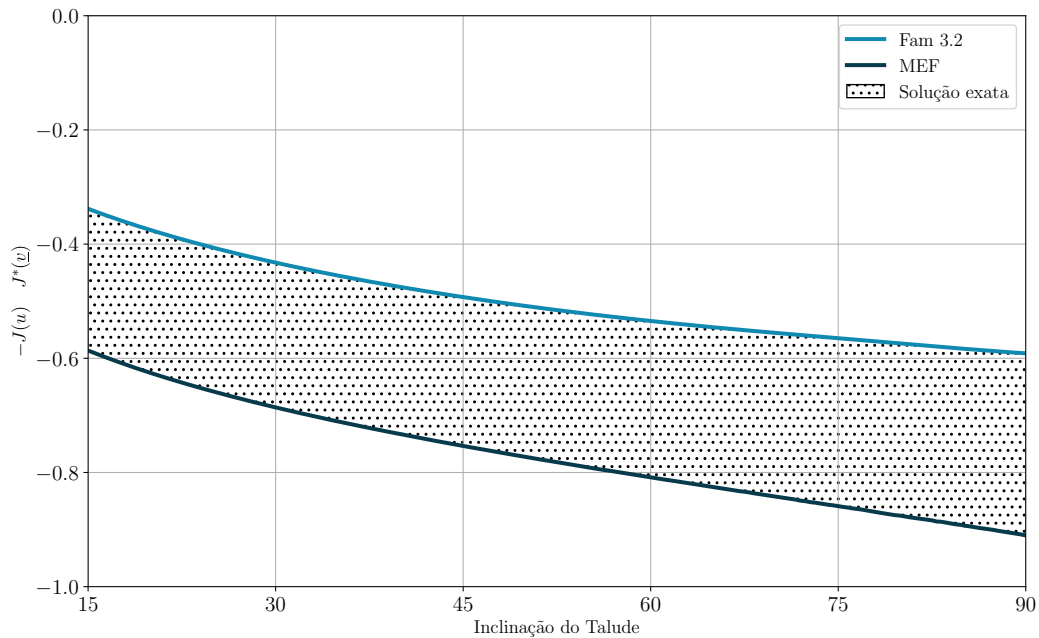


Figura 5.14 – Comparação entre as soluções analítica e numérica para o problema hidráulico em taludes

A partir da análise do gráfico apresentado, avalia-se que as soluções referentes à Família 3.2 aproximam-se das soluções numéricas, no entanto, não representam precisamente o comportamento esperado do fluxo hidráulico globalmente. Em análises posteriores, a validade de tais soluções será avaliada no contexto geral da análise da estabilidade da estrutura.

5.2.4 Caso Ortotrópico

Na subseção 5.2.1 foram encontradas soluções analíticas para o problema hidráulico. Essas soluções, no entanto, emergem a partir da hipótese de permeabilidade isotrópica, isto é, $\underline{\underline{K}} = k \underline{\underline{1}}$ com $k \in \mathbb{R}$. Conforme apresentado por Buhan et al. (1999), a consideração de anisotropia sobre a permeabilidade $\underline{\underline{K}}$ possui efeito sobre a estabilidade de estruturas. Dessa forma, na presente seção, serão encontradas novas soluções analíticas para as Famílias 1, 2, 3.1 e 3.2 agora considerando um tensor de permeabilidade dado por:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_v \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

onde k_h e k_v representam a permeabilidade horizontal e vertical, respectivamente.

Dentro da abordagem analítica em termos de velocidade de filtração \underline{v} e do referencial estabelecido na Figura 5.3, \underline{K}^{-1} é dado, em coordenadas polares, por:

$$\underline{K}^{-1} = \frac{1}{k_h} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta (\alpha - 1) \\ \sin \theta \cos \theta (\alpha - 1) & \sin^2 \theta + \alpha \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

onde se introduz o fator de anisotropia $\alpha = k_h/k_v$, sendo $\alpha \in]0, +\infty[$.

Novamente, de forma análoga à dedução apresentada na subseção 5.2.1, utiliza-se o cálculo de variações juntamente com o funcional encontrado na Equação 5.9 para minimizar \underline{v} dentro de cada família. Agora, é claro, será considerado o tensor permeabilidade dado pela Equação 5.63, considerando um α fixo.

5.2.4.1 Família 1

Considere o campo vetorial, puramente tangencial:

$$\underline{v}^1 = \begin{cases} h(r)\underline{e}_\theta & \text{se } 0 \leq r \leq R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases} \quad (5.64)$$

Como demonstrado anteriormente, $\underline{v}^1 \in \mathcal{V}$. Substituindo \underline{v}^1 em 5.9, e assumindo \underline{K}^{-1} dado pela Equação 5.63, com α fixo, obtém-se:

$$k_h J^{*1}(\underline{v}^1) = \frac{A}{2} \int_0^R h^2(r) r dr - \int_0^{R_w} k_h \gamma_w h(r) \sin \beta r dr - \int_{R_w}^R k_h \gamma_w h_w h(r) dr \quad (5.65)$$

onde $A(\alpha)$ é dado por

$$A(\alpha) = (\alpha + 1) \frac{\bar{\beta}}{2} - (\alpha - 1) \frac{\sin 2\beta}{4} \quad (5.66)$$

e, novamente, $\bar{\beta} = \pi - \beta$.

Para obter o minimizante do funcional J^1 , toma-se a sua primeira variação igual à zero. Manipulando o resultado obtido e agrupando as integrais de forma apropriada, obtém-se

$$\delta J^{*1}(\underline{v}^1) = \int_0^{R_w} [A(\alpha)h(r)r - k_h \gamma_w r \sin \beta] \delta h dr + \int_{R_w}^R [A(\alpha)h(r)r - k_h \gamma_w h_w] \delta h dr \quad (5.67)$$

Aplicando o Lema Fundamental do Cálculo Variacional, encontra-se $h(r)$ definido por partes:

$$h(r) = \begin{cases} \frac{k_h \gamma_w \sin \beta}{A(\alpha)} & 0 < r < R_w \\ \frac{k_h \gamma_w h_w}{A(\alpha)} \frac{1}{r} & R_w \leq r < R \end{cases} \quad (5.68)$$

Dessa forma,

$$\underline{v}^1 = \begin{cases} \frac{k_h \gamma_w \sin \beta}{A(\alpha)} \underline{e}_\theta & \text{se } 0 \leq r < R_w \\ \frac{k_h \gamma_w h_w}{A(\alpha)} \frac{1}{r} \underline{e}_\theta & \text{se } R_w \leq r < R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases} \quad (5.69)$$

e, substituindo $h(r)$ na Equação 5.17:

$$J^{*1}(\underline{v}) = -\frac{k_h \gamma_w^2 h_w^2}{4A(\alpha)} \left[1 - 2 \ln \left(\frac{h_w}{H} \right) \right] \quad (5.70)$$

5.2.4.2 Família 2

Aumentando a complexidade, propõe-se uma segunda família de forma:

$$\underline{v}^2 = \begin{cases} \underline{v}_1^2 = -g(r) \frac{d}{d\theta} f(\theta) \underline{e}_r + \frac{d}{dr} (r g(r)) f(\theta) \underline{e}_\theta & \text{se } 0 \leq r < R_w \\ \underline{v}_2^2 = h_2(r) \underline{e}_\theta & \text{se } R_w \leq r < R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases} \quad (5.71)$$

Neste caso, para que $\underline{v} \in \mathcal{V}$, é suficiente tomar $g(R_w) = 0$. Novamente as minimizações serão executadas separadamente para ambos os domínios de definição de \underline{v}^2 . Substituindo \underline{v}^2 em 5.9, e assumindo \underline{K}^{-1} dado pela Equação 5.63, com α fixo, obtém-se:

$$J^{*2}(\underline{v}^2) = J_1^{*2}(\underline{v}^2) + J_2^{*2}(\underline{v}^2) \quad (5.72)$$

onde J_1^{*2} e J_2^{*2} são dados respectivamente por:

$$k_h J_1^{*2}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \int_0^{R_w} \int_0^{\bar{\beta}} \left[g^2 f_\theta^2 (\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta) + (g + r g_r)^2 f^2 (\sin^2 \theta + \alpha \cos^2 \theta) \right. \\ \left. - g(g + r g_r) f f_\theta (\alpha - 1) \sin(2\theta) \right] r d\theta dr - k_h f(\bar{\beta}) \gamma_w \sin \beta \int_0^{R_w} (g + r g_r) r dr \quad (5.73)$$

$$k_h J_2^{*2}(\underline{v}) = \int_{R_w}^R \left[\frac{A(\alpha)}{2} h_2^2(r) - k_h \gamma_w h_w h_2(r) \right] r dr \quad (5.74)$$

onde $A(\alpha)$ é definido da mesma forma que na subsecção 5.2.4.1.

Dados as funções dependentes e os domínios de definição de J_1^{*2} e J_2^{*2} , pode-se considerá-los independente. Dessa forma a minimização do funcional J^* será feita individualmente. Nesse caso, como um resultado análogo já foi deduzido anteriormente, será dado menos enfoque a passos matemáticos intermediários.

Iniciando pela parcela mais simples, toma-se a primeira variação de J_2^{*2} , e, pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional obtém-se:

$$\delta J_2^{*2}(\underline{v}^2) = \int_{R_w}^R [A(\alpha) h(r) r - k_h \gamma_w h_w] \delta h dr = 0 \implies h_2(r) = \frac{k_h \gamma_w h_w}{A(\alpha)} \frac{1}{r} \quad (5.75)$$

Dessa forma,

$$v_2^2 = \frac{k_h \gamma_w h_w}{A(\alpha)} \frac{1}{r} e^\theta \quad (5.76)$$

e,

$$J_2^{*2}(v) = \frac{k_h \gamma_w^2 h_w^2}{2A(\alpha)} \ln \left(\frac{h_w}{H} \right) \quad (5.77)$$

Agora, para obter o minimizante do funcional $J_1^{*2}(v^2)$, toma-se a sua primeira variação igual à zero. Como f e g possuem variáveis independentes distintas, a minimização será feita de forma independente, como no caso isotrópico. Considerando a variação de $J_1^{*2}(v^2)$ com respeito à $g(r)$, integrando por partes e manipulando o resultado obtido, tem-se:

$$\delta J_1^{*2}(v^2) = \int_0^{R_w} [g(E - F)r + g_r(-3F)r^2 + g_{rr}(-F)r^3 + Hr] \delta g \, dr \quad (5.78)$$

onde $E = \int_0^{\bar{\beta}} f_\theta^2(\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta) d\theta$, $F = \int_0^{\bar{\beta}} f^2(\sin^2 \theta + \alpha \cos^2 \theta) d\theta$ e $H = k_h f(\bar{\beta}) \gamma_w \sin \beta$.

Salvo as definições das variáveis dependentes de $f(\theta)$, tem-se um caso idêntico ao isotrópico. Dessa forma, $g(r)$ é dado novamente por:

$$g(r) = \frac{H}{F - E} \left[1 - \frac{r^{-1 + \sqrt{\frac{E}{F}}}}{R_w} \right] \quad (5.79)$$

Note que a partir dessa definição, o termo referente à integral de $g(g + g_r)r$ é anulado. Assim, a equação Equação 5.73 é reduzida para:

$$\begin{aligned} k_h J_1^{*2}(v) &= \frac{1}{2} \int_0^{R_w} \int_0^{\bar{\beta}} \left[g^2 f_\theta^2(\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta) + (g + rg_r)^2 f^2(\sin^2 \theta + \alpha \cos^2 \theta) \right] r d\theta dr \\ &\quad - k_h f(\bar{\beta}) \gamma_w \sin \beta \int_0^{R_w} (g + rg_r) r \, dr \end{aligned} \quad (5.80)$$

Considerando agora a variação da Equação 5.80 em relação à $f(\theta)$, integrando por partes e manipulando o resultado obtido, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta J_1^{*2}(v) &= \int_0^{\bar{\beta}} \left[Bf(\sin^2 \theta + \alpha \cos^2 \theta) - Af_{\theta\theta}(\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta) \right. \\ &\quad \left. - Af_\theta(\alpha - 1) \sin 2\theta \right] \delta f d\theta - Af_\theta \delta f \Big|_{\theta=0} \\ &\quad + (Af_\theta(\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta) - k_h \gamma_w D \sin \beta) \delta f \Big|_{\theta=\bar{\beta}} = 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

onde $A = \int_0^{R_w} g^2 r dr$, $B = \int_0^{R_w} (g + rg_r)^2 r dr$ e $D = \int_0^{R_w} (g + rg_r) r dr$. As expressões de A , B e D são obtidas analiticamente para a função $g(r)$ definida em 5.79. Através do Lema Fundamental

do Cálculo Variacional, tem-se a condição minimizante na forma da EDO:

$$-Af_{\theta\theta}(\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta) - Af_{\theta}(\alpha - 1) \sin(2\theta) + Bf(\sin^2 \theta + \alpha \cos^2 \theta) = 0, \quad \forall \theta \in (0, \bar{\beta}) \quad (5.82)$$

com condições de contorno:

$$(i) f_{\theta}(0) = 0$$

$$(ii) f_{\theta}(\bar{\beta}) = \frac{k_h \gamma_w \sin \beta}{A(\cos^2 \theta + \alpha \sin^2 \theta)}$$

A EDO apresentada não possui resposta analítica explícita, e, portanto, deve ser resolvida numericamente. No presente trabalho optou-se por uma abordagem em linguagem *Python*, utilizando a biblioteca *SciPy*. Uma vez encontrada a solução para o problema específico (Fixados α e β), g e f são substituídos na Equação 5.80, obtendo:

$$J_1^{*2}(\underline{v}) = -\frac{k_h h_w^2 \gamma_w^2}{4} \left[\frac{f(\bar{\beta})}{\sqrt{E} + \sqrt{F}} \right]^2 \quad (5.83)$$

Por fim, considerando ambos os domínios de definição, tem-se:

$$J^{*2}(\underline{v}) = -\frac{k_h h_w^2 \gamma_w^2}{4} \left[\left(\frac{f(\bar{\beta})}{\sqrt{E} + \sqrt{F}} \right)^2 - \frac{2}{A(\alpha)} \ln \left(\frac{h_w}{H} \right) \right] \quad (5.84)$$

e,

$$\underline{v}^2 = \begin{cases} \frac{k_h f(\bar{\beta}) \gamma_w \sin \beta}{F - E} \begin{bmatrix} - \left(1 - (r/R_w) \sqrt{\frac{E}{F} - 1} \right) f_{\theta}(\theta) \\ \left(1 - (r/R_w) \frac{E}{F} - 1 \frac{E}{F} \right) f(\theta) \end{bmatrix} & \text{se } 0 \leq r < R_w \\ \frac{k_h \gamma_w h_w}{\gamma} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{se } R_w \leq r < R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases} \quad (5.85)$$

onde f é obtido numericamente através da solução da EDO, e as variáveis E e F obtidas a partir de sua definição em função de f .

5.2.4.3 Família 3

Por fim, propõe-se uma extensão para as Famílias 1 e 2 no caso ortotrópico:

$$\underline{v}^3 = \begin{cases} \underline{v}^1 \text{ ou } \underline{v}^2 & \text{se } 0 \leq r < R \\ h_3(r) \underline{e}_{\theta} & \text{se } R \leq r < R_e \\ 0 & \text{se } r > R_e \end{cases} \quad (5.86)$$

Novamente tem-se $\underline{v} \in \mathcal{V}$. Substituindo \underline{v}^3 em 5.9, e assumindo \underline{K}^{-1} dado pela Equação 5.63, com α fixo, obtém-se:

$$J^{*3}(\underline{v}^3) = J^{*i}(\underline{v}^3) + J_3^{*3}(\underline{v}^3), \quad \text{com } i = 1 \text{ ou } 2 \quad (5.87)$$

onde $J^{*i}(\underline{v}^3)$ é dado por 5.70 ou 5.45 e J_3^{*3} é dado por

$$k_h J_3^{*3}(\underline{v}) = \frac{1}{2} \int_R^{R_e} \left[\frac{h_3^2(r)}{2} r B(r, \alpha) - 2k_h \gamma_w h_w h_3(r) \right] dr \quad (5.88)$$

onde $B(r, \alpha)$ é definido como:

$$B(r, \alpha) = (\alpha + 1)(\pi - \beta_r) - (\alpha - 1) \frac{H \sqrt{r^2 - H^2}}{r^2} \quad (5.89)$$

e β_r é definido, novamente, de modo que

$$\beta_r = \arcsin\left(\frac{H}{r}\right). \quad (5.90)$$

Como \underline{v}_3 independe do campo dado em $r < R$, para encontrar $h_3(r)$, pode-se considerar diretamente a variação de J_3^{*3} igual à zero, obtendo após simplificação:

$$\delta J^{*3}(\underline{v}) = \int_R^{R_e} \left[\frac{1}{2} h_3(r) r B(r, \alpha) - k_h \gamma_w h_w \right] \delta h_3 dr = 0 \quad (5.91)$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional, obtém-se:

$$h_3(r) = \frac{2k_h \gamma_w h_w}{B(r, \alpha)} \frac{1}{r} \quad (5.92)$$

Dessa forma,

$$\underline{v}^3 = \begin{cases} \underline{v}^i & \text{se } 0 \leq r < R \\ \frac{2k_h \gamma_w h_w}{B(r, \alpha)} \frac{1}{r} e_\theta & \text{se } R \leq r < R_e \\ 0 & \text{se } r > R_e \end{cases} \quad (5.93)$$

e

$$J^{*3}(\underline{v}) = J^{*i} - k_h \gamma_w^2 h_w^2 \left[\int_R^{R_e} \frac{1}{B(r, \alpha)} \frac{1}{r} dr \right], \quad \text{com } i = 1 \text{ ou } 2 \quad (5.94)$$

onde o termo integral deve ser resolvido numericamente.

5.2.4.4 Comparação entre as abordagens Analítica e Numérica

Assim como no caso isotrópico, nesta seção serão apresentados alguns resultados referentes à qualidade de minimização das soluções analíticas e numéricas. Inicialmente para as Famílias obtidas, serão comparados cinco casos de seca completa com $\alpha = \{0,5; 1; 2; 5; 10\}$ fixado

$L_m = 5H$ e $H = 1$ m. Além disso, também serão apresentados valores de energia do funcional da abordagem em elementos finitos. Note que o modelo em elementos finitos apresentados na subseção 5.2.2 já incorpora a ortotropia no termo tensorial \underline{K} . Conforme apresentado na Equação 5.14, as soluções $-J(u)$ e $J^*(v)$ representam um limite superior e inferior, respectivamente, para a solução exata do problema de minimização.

A Figura 5.15 ilustra, em função da inclinação do talude, os valores de $J(u)$ e $J^*(v)$ encontrados para as soluções numéricas e analíticas, fixados $H = 1$ m, $h_w = H$, $L_m = 10H$.

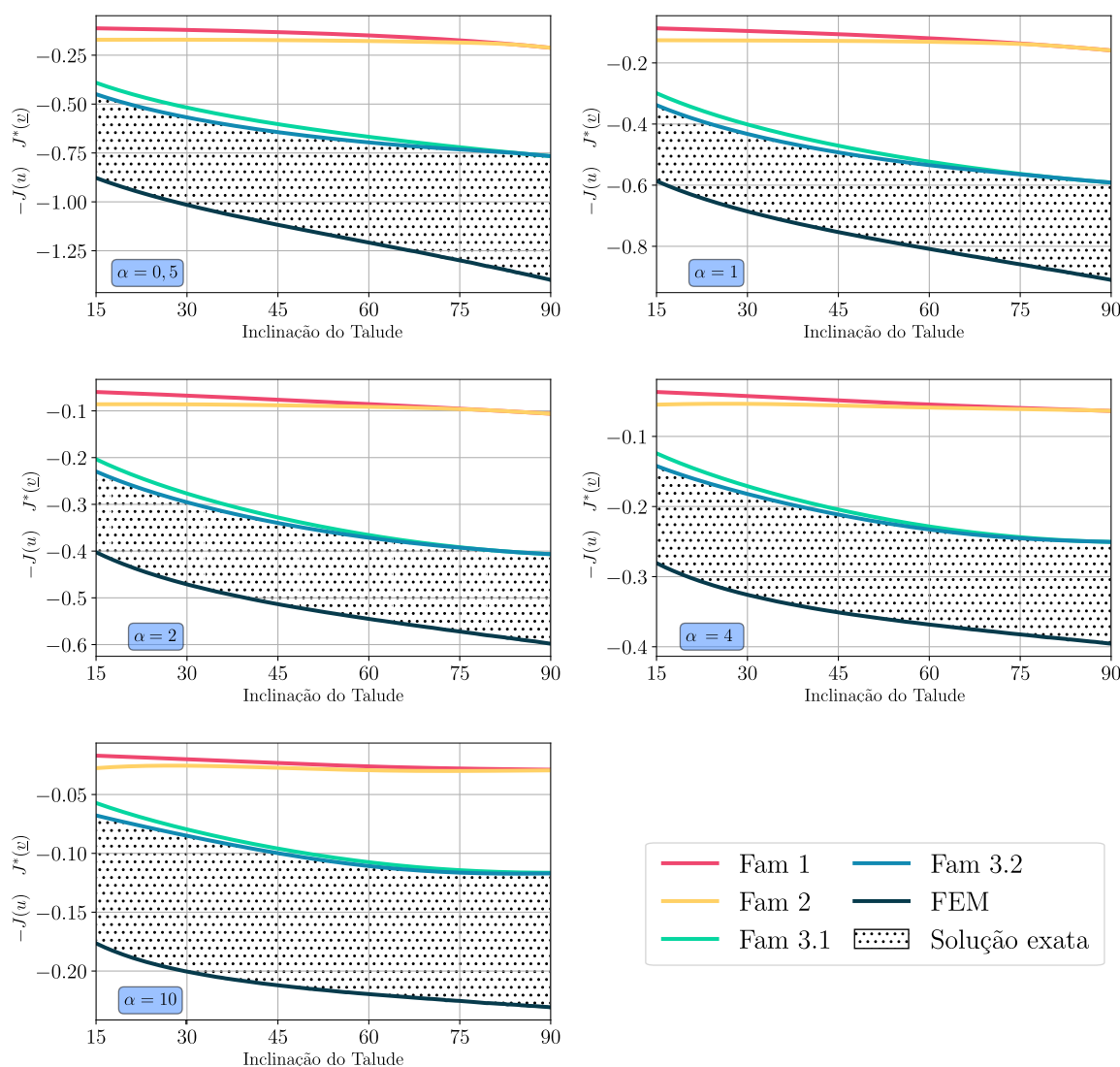


Figura 5.15 – Comparação entre as soluções analítica e numérica para o problema hidráulico em taludes

A partir da análise do gráfico apresentado avalia-se que, assim como no caso isotrópico ($\alpha = 1$), as soluções referentes à Família 3.2 aproximam-se das soluções numéricas, no entanto, não representam precisamente o comportamento esperado do fluxo hidráulico globalmente, principalmente para α elevado.

6 ANÁLISE DETERMINÍSTICA DA ESTABILIDADE DE TALUDES EM DEFORMAÇÃO PLANA

No presente capítulo é abordado o problema determinístico de estabilidade de taludes. Considera-se o solo como um material homogêneo, isotrópico e com resistência determinada pelos parâmetros de coesão c e ângulo de atrito φ do critério de Mohr-Coulomb. Geometricamente o talude e suas condições de contorno são descritos pelos parâmetros de inclinação β , altura H e altura de redução do nível de água h_w (Figura 6.1).

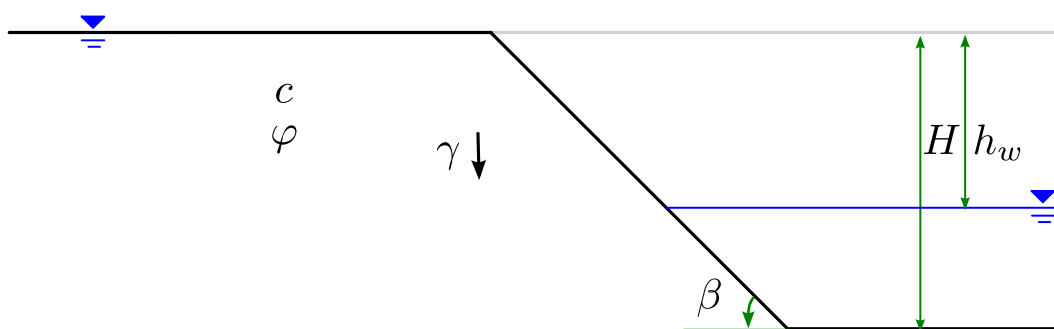


Figura 6.1 – Descrição geométrica do talude e suas propriedades.

Partindo da abordagem cinemática da análise limite, avaliam-se dois modos de carregamento: o caso seco, apenas com forças gravitacionais; e o caso saturado, no qual também são incluídos as forças de percolação induzidas pela redução do nível da água. A abordagem cinemática, conforme apresentado em Saada et al. (2012), é construída a partir de um mecanismo de falha rotacional (Figura 6.2). Em tal mecanismo, um bloco rígido de solo apresenta uma rotação de centro C e velocidade angular ω . A superfície de descontinuidade do campo de velocidades é dada por uma espiral logarítmica com ângulo φ .

Consideram-se dois possíveis mecanismos, um passando acima do pé do talude, e outro abaixo do pé do talude. Na análise, minimiza-se a superfície de descontinuidade a fim de obter o menor limite superior possível. Naturalmente, toma-se como mecanismos de ruptura o que apresentar o menor limite superior.

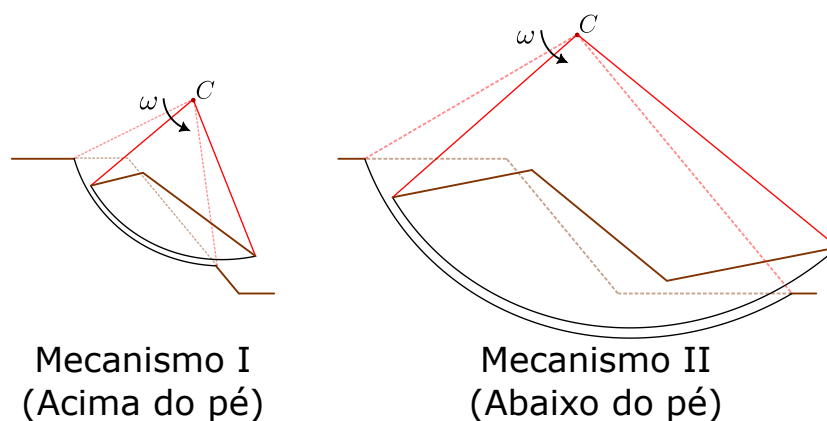


Figura 6.2 – Mecanismo de ruptura por espiral logarítmica.

6.1 MECANISMOS DE RUPTURA ROTACIONAIS

Nesta seção são apresentadas as descrições geométricas das superfícies de descontinuidades bem como a particularização da abordagem cinemática da análise limite para os mecanismos I e II. De modo a encontrar os limites superiores para o Fator de Estabilidade Γ , conforme definido na Equação 4.50, serão deduzidas as formas particulares para P_{rm} , P_γ .

6.1.1 Descrição geométrica Mecanismo I

Conforme apresentado em Saada et al. (2012), em caso de solos homogêneos, a espiral logarítmica pode ser completamente descrita utilizando-se de três parâmetros. Para o Mecanismo I, conforme ilustrado pela Figura 6.3, optou-se pela utilização dos parâmetros θ_1, θ_2 e η , sendo φ uma propriedade dada do solo.

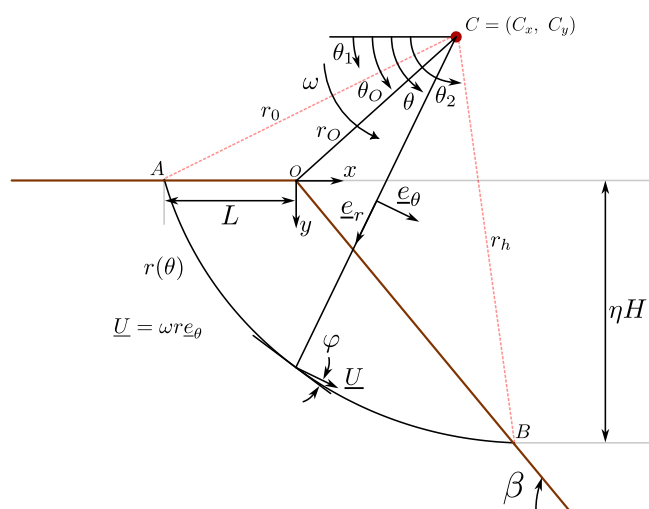


Figura 6.3 – Descrição geométrica da espiral logarítmica do Mecanismo I.

Considerando um sistema de coordenadas polares centrado em C , a equação da curva da espiral

logarítmica é dada por

$$r(\theta) = r_0 \exp((\theta - \theta_1) \tan \varphi) \quad (6.1)$$

Nota-se que a equação é construída de modo que para $\theta = \theta_1$, tem-se que $r = r_0$, sendo r_0 a distância \overline{PA} . Em particular, em solos puramente coesivos, onde $\varphi = 0$, $r(\theta) = r_0, \forall \theta$.

Para encontrar as relações entre $(\theta_1, \theta_2, \eta)$ e os demais parâmetros que definem a espiral (r_0, r_h, L, C_x, C_y) , considera-se a transformação entre os sistemas de coordenadas (O, x, y) e (C, r, θ) :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \cos \theta + C_x \\ +r \sin \theta - C_y \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Inicialmente toma-se as coordenadas do ponto A. No sistema cartesiano $A = (-L, 0)$ enquanto no sistema polar $A = (r_0, \theta_1)$. Dessa forma, tem-se

$$\begin{bmatrix} -L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_0 \cos \theta_1 + C_x \\ +r_0 \sin \theta_1 - C_y \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Obtendo as relações:

$$C_y = r_0 \sin \theta_1 \quad (6.4)$$

$$L = r_0 \cos \theta_1 - C_x \quad (6.5)$$

Para o ponto B, tem-se no sistema cartesiano $B = (\eta H / \tan \beta, \eta H)$ e no polar $B = (r_h, \theta_2)$. Portanto:

$$\begin{bmatrix} \frac{\eta H}{\tan \beta} \\ \eta H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_h \cos \theta_2 + C_x \\ +r_h \sin \theta_2 - C_y \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Obtendo as relações:

$$\frac{\eta H}{\tan \beta} = C_x - r_h \cos \theta_2 \quad (6.7)$$

$$\eta H = r_h \sin \theta_2 - C_y \quad (6.8)$$

O parâmetro r_h pode ser obtido diretamente da equação da espiral logarítmica, de modo que:

$$r_h = r_0 \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \quad (6.9)$$

Por fim, através das relações apresentadas busca-se descrever os parâmetros em função de $(\theta_1, \theta_2, \eta)$. Substituindo (6.4) e (6.9) em (6.8) obtém-se:

$$r_0 = \frac{\eta H}{\exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \sin \theta_2 - \sin \theta_1} \quad (6.10)$$

Sendo r_0 definido em função de $(\theta_1, \theta_2, \eta)$, C_y e r_h , definidos pelas relações (6.4) e (6.9), também são definidos pelos três parâmetros iniciais. Substituindo (6.9) em (6.7):

$$C_x = r_0 \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \cos \theta_2 + \frac{\eta H}{\tan \beta} \quad (6.11)$$

Por fim, substituindo (6.11) em (6.5):

$$L = r_0 (\cos \theta_1 - \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \cos \theta_2) + \frac{\eta H}{\tan \beta} \quad (6.12)$$

ou de forma equivalente:

$$L = r_0 \frac{\sin(\theta_1 + \beta) - \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \sin(\theta_2 + \beta)}{\sin \beta} \quad (6.13)$$

Em resumo, fixados θ_1 , θ_2 e η , encontra-se os demais parâmetros pelas relações:

- $r_0 = \frac{\eta H}{\exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \sin \theta_2 - \sin \theta_1}$
- $r_h = r_0 \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi)$
- $C_y = r_0 \sin \theta_1$
- $C_x = r_0 \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \cos \theta_2 + \frac{\eta H}{\tan \beta}$
- $L = r_0 \frac{\sin(\theta_1 + \beta) - \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \sin(\theta_2 + \beta)}{\sin \beta}$

Evidentemente, não são todos os valores de θ_1 , θ_2 e η que resultam em descontinuidades admissíveis, sendo necessário que:

1. $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi - \beta$
2. $0 < \eta \leq 1$
3. $L > 0$ ou equivalentemente $\sin(\theta_1 + \beta) - \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \sin(\theta_2 + \beta) > 0$

6.1.2 Descrição geométrica Mecanismo II

Analogamente ao primeiro mecanismo, o Mecanismo II pode ser descrito completamente por três parâmetros. Conforme ilustrado pela Figura 6.4, utilizam-se θ_1, θ_2 e β' , sendo $0 < \beta' < \beta$ e novamente φ uma propriedade dada do solo. O ponto O' representa o pé do talude.

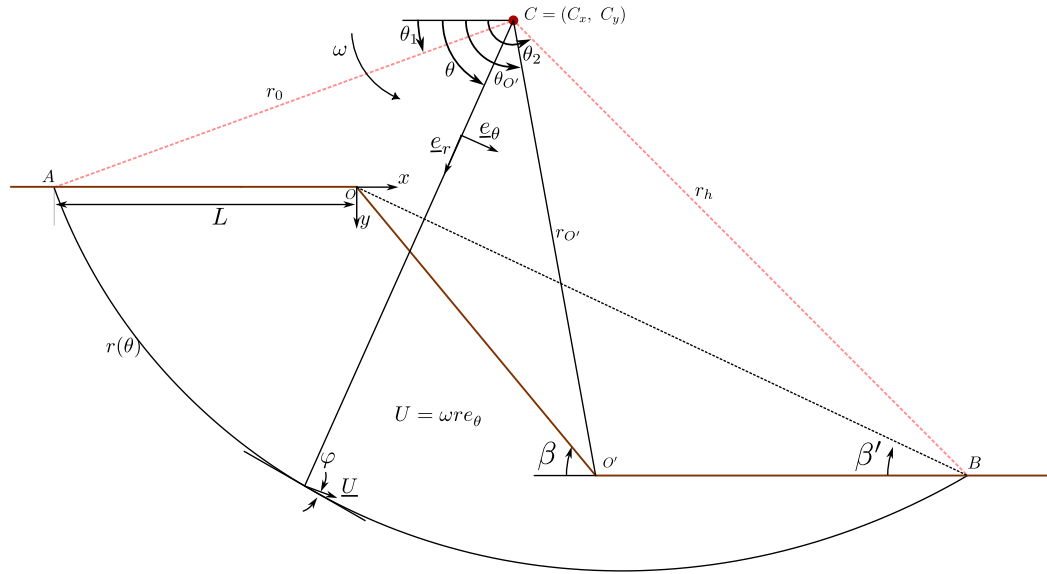


Figura 6.4 – Descrição geométrica da espiral logarítmica do Mecanismo II.

Geometricamente, o Mecanismo II pode ser interpretado como um caso particular do Mecanismo I. Fixado β' , os parâmetros do Mecanismo II são equivalentes aos do Mecanismo I quando $\eta = 1$ e $\beta = \beta'$. Evidentemente essa equivalência é válida apenas para os parâmetros geométricos. Novas considerações devem ser tomadas para obter P_{rm} , P_γ e P_u . Sendo assim, fixados θ_1 , θ_2 e β' , encontram-se os demais parâmetros pelas relações:

- $r_0 = \frac{H}{\exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \sin \theta_2 - \sin \theta_1}$
- $r_h = r_0 \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi)$
- $C_y = r_0 \sin \theta_1$
- $C_x = r_0 \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \cos \theta_2 + \frac{H}{\tan \beta'}$
- $L = r_0 \frac{\sin(\theta_1 + \beta') - \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \sin(\theta_2 + \beta')}{\sin \beta'}$

Novamente, tem-se que as condições para descontinuidades admissíveis são dadas por:

1. $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi - \beta$
2. $0 < \beta' \leq \beta$
3. $L > 0$ ou equivalentemente $\sin(\theta_1 + \beta) - \exp((\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) \sin(\theta_2 + \beta) > 0$
4. $r^2(\theta_{O'}) > \left(C_x - \frac{H}{\tan \beta}\right)^2 + (C_y + H)^2$

sendo $\theta_{O'}$, o ângulo que define a posição do ponto O' (Figura 6.4), obtido a partir da relação:

$$\theta_{O'} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{C_y + H}{C_x - H/\tan\beta}\right) & \text{se } C_x > \frac{H}{\tan\beta} \\ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{H/\tan\beta - C_x}{C_y + H}\right) & \text{se } C_x \leq \frac{H}{\tan\beta} \end{cases} \quad (6.14)$$

A última condição para descontinuidades admissíveis refere-se a não intersecção com o pé do talude.

6.1.3 Potência resistente máxima P_{rm}

Conforme apresentado no Capítulo 3, a potência resistente máxima é definido de forma que:

$$P_{rm} = \int_{\Omega} \pi(\underline{d}) d\Omega + \int_{\Sigma_U} \pi(\underline{n}; [\underline{\hat{U}}]) dS \quad (6.15)$$

Neste caso, dado o mecanismo puramente rotacional, e considerando o critério de Mohr-Coulomb com campos de velocidades relevantes, P_{rm} pode ser reduzido para:

$$P_{rm} = \int_{\Sigma_U} \frac{c}{\tan\varphi} [\underline{\hat{U}}] \cdot \underline{n} dS \quad (6.16)$$

sendo o elemento de comprimento, neste caso, dado por:

$$dS = \frac{rd\theta}{\cos\varphi} \quad (6.17)$$

Observa-se que a potência máxima resistente depende apenas da variação de velocidades na superfície de descontinuidade, dessa forma P_{rm} é igual para os Mecanismos I e II. A integral pode então ser realizada sobre $r(\theta)$ entre θ_1 e θ_2 , conforme ilustrado pela Figura 6.5.

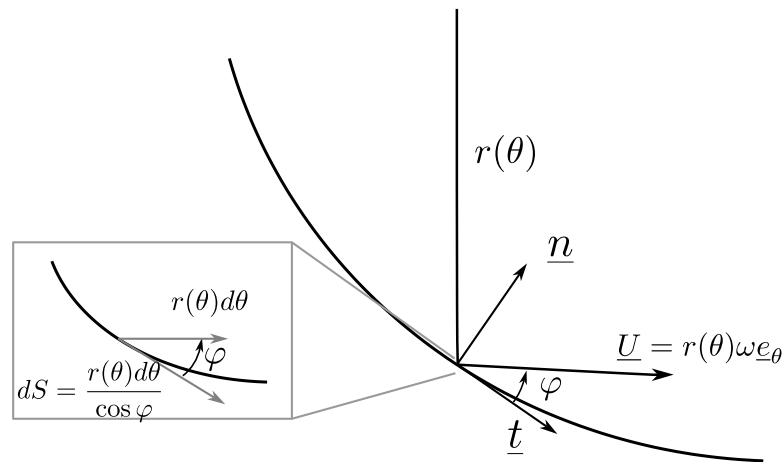


Figura 6.5 – Cálculo da potência resistente máxima.

Nota-se que, dado o mecanismo rotacional com apenas um bloco, $[\underline{U}] = \underline{U}$. Ainda, considerando o ângulo entre \underline{U} e \underline{n} , tem-se $\underline{U} \cdot \underline{n} = |\underline{U}||\underline{n}| \cos(\pi/2 - \varphi) = r(\theta)\omega \sin\varphi$. Portanto:

$$P_{rm} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{c}{\tan\varphi}\right) (r(\theta)\omega \sin\varphi) \left(\frac{r(\theta)d\theta}{\cos\varphi}\right) = c\omega \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta)^2 d\theta \quad (6.18)$$

Substituindo $r(\theta)$ conforme a definição (6.1), tem-se

$$P_{rm} = c\omega \int_{\theta_1}^{\theta_2} (r_0 \exp((\theta - \theta_1) \tan \varphi))^2 d\theta = \frac{\omega c r_0^2}{2 \tan \varphi} (\exp(2(\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) - 1) \quad (6.19)$$

No caso particular de solo puramente coesivo, o critério de Mohr-Coulomb reduz-se ao critério de Tresca. Dessa forma, P_{rm} é dado por:

$$P_{rm} = \int_{\Sigma_{\underline{U}}} c |[\hat{\underline{U}}]| dS = c \int_{\theta_1}^{\theta_2} r(\theta) \omega d\theta = \omega c r_0 (\theta_2 - \theta_1) \quad (6.20)$$

6.1.4 Potência forças gravitacionais P_γ

Conforme descrito no Capítulo 4, a potência das forças gravitacionais é dado por:

$$P_\gamma = \int_{\Omega} (\gamma - \gamma_w) (-\underline{e}_y) \cdot \underline{U} d\Omega \quad (6.21)$$

No caso seco, considera-se apenas o peso do solo:

$$P_\gamma = \int_{\Omega} -\gamma \underline{e}_y \cdot \underline{U} d\Omega \quad (6.22)$$

A potência das forças gravitacionais pode ser obtida de forma analítica. Para o Mecanismo I, por simplicidade, costuma-se dividir a integral em três regiões, conforme ilustrado pela Figura 6.6.

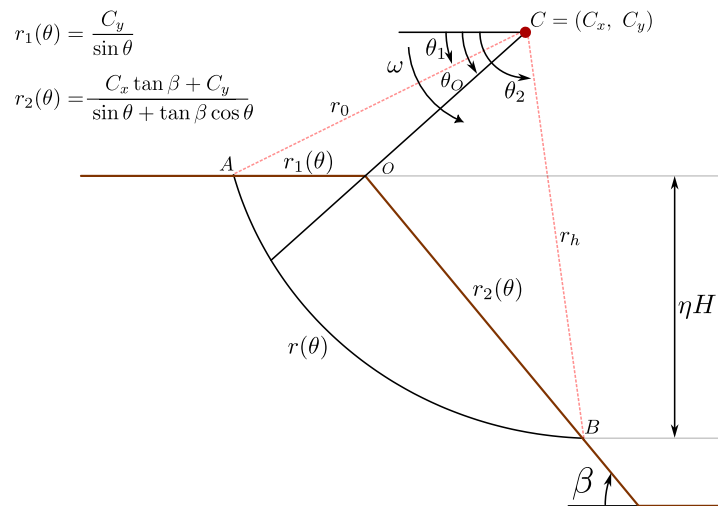


Figura 6.6 – Divisão regiões do Mecanismo I.

O ângulo θ_0 define a posição angular do ponto O (Figura 6.3), sendo obtido através da equação:

$$\theta_0 = \begin{cases} \arctan\left(\frac{C_y}{C_x}\right) & \text{se } C_x > 0 \\ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(-\frac{C_x}{C_y}\right) & \text{se } C_x \leq 0 \end{cases} \quad (6.23)$$

Dessa forma a Equação 6.22 é escrita como:

$$P_\gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{r(\theta)} -\gamma \underline{e}_y \cdot \underline{U} r dr d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_0} \int_0^{r_1(\theta)} -\gamma \underline{e}_y \cdot \underline{U} r dr d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta_2} \int_0^{r_2(\theta)} -\gamma \underline{e}_y \cdot \underline{U} r dr d\theta \quad (6.24)$$

Como $-\gamma \underline{e}_y \cdot \underline{U} = \gamma |U| |-\underline{e}_y| \cos \theta = \gamma \omega r \cos \theta$, tem-se que

$$P_\gamma = \gamma \omega \left[\underbrace{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{r(\theta)} r^2 \cos \theta dr d\theta}_{f_1} - \underbrace{\int_{\theta_1}^{\theta_0} \int_0^{r_1(\theta)} r^2 \cos \theta dr d\theta}_{f_2} - \underbrace{\int_{\theta_0}^{\theta_2} \int_0^{r_2(\theta)} r^2 \cos \theta dr d\theta}_{f_3} \right] \quad (6.25)$$

Por fim, f_1 , f_2 e f_3 são dadas por:

$$f_1 = \frac{r_h^3 (3 \tan \varphi \cos \theta_2 + \sin \theta_2) - r_0^3 (3 \tan \varphi \cos \theta_1 + \sin \theta_1)}{3(9 \tan^2 \varphi + 1)} \quad (6.26)$$

$$f_2 = \frac{r_0^3 \sin \theta_1}{6} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_0} \right] \quad (6.27)$$

$$f_3 = \frac{(C_y + \tan \beta C_x)^3}{6} \left[\frac{1}{(\tan \theta_0 + \tan \beta)^2} - \frac{1}{(\tan \theta_2 + \tan \beta)^2} \right] \quad (6.28)$$

De forma análoga, para o Mecanismo II, divide-se a integral em quatro regiões, conforme apresentado na Figura 6.7.

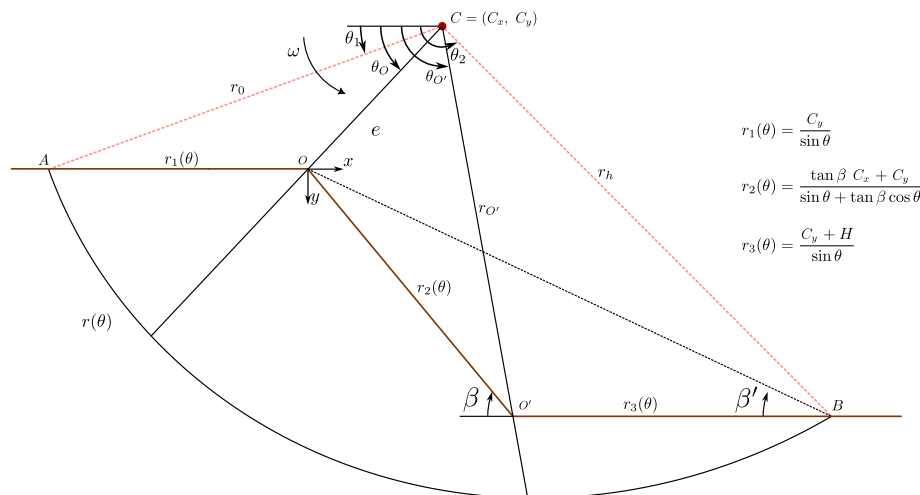


Figura 6.7 – Divisão regiões do Mecanismo II.

Dessa forma a Equação 6.22 é escrita como:

$$\begin{aligned}
 P_\gamma = & \underbrace{\gamma\omega \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{r(\theta)} r^2 \cos \theta \, dr d\theta}_{f'_1} - \underbrace{\gamma\omega \int_{\theta_1}^{\theta_0} \int_0^{r_1(\theta)} r^2 \cos \theta \, dr d\theta}_{f'_2} - \\
 & \underbrace{\gamma\omega \int_{\theta_0}^{\theta_{O'}} \int_0^{r_2(\theta)} r^2 \cos \theta \, dr d\theta}_{f'_3} - \underbrace{\gamma\omega \int_{\theta_{O'}}^{\theta_2} \int_0^{r_3(\theta)} r^2 \cos \theta \, dr d\theta}_{f'_4}
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Por fim, f'_1 , f'_2 , f'_3 e f'_4 são dadas por:

$$f'_1 = \frac{r_h^3(3 \tan \varphi \cos \theta_2 + \sin \theta_2) - r_0^3(3 \tan \varphi \cos \theta_1 + \sin \theta_1)}{3(9 \tan^2 \varphi + 1)} \tag{6.30}$$

$$f'_2 = \frac{r_0^3 \sin \theta_1}{6} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_0} \right] \tag{6.31}$$

$$f'_3 = \frac{(C_y + \tan \beta C_x)^3}{6} \left[\frac{1}{(\tan \theta_0 + \tan \beta)^2} - \frac{1}{(\tan \theta_2 + \tan \theta_{O'})^2} \right] \tag{6.32}$$

$$f'_4 = \frac{(C_y + H)^3}{6} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta_{O'}} - \frac{1}{\sin^2 \theta_2} \right] \tag{6.33}$$

6.2 ANÁLISE DE ESTABILIDADE — SOLO SECO

Para o caso do talude de solo seco submetido apenas a forças gravitacionais, o limite superior Γ^+ para o Fator de Estabilidade é dado diretamente por:

$$\Gamma^+ \leq \frac{P_{rm}}{P_\gamma} \tag{6.34}$$

Para o Mecanismo I apresentado, tem-se que, para toda combinação admissível de parâmetros $(\theta_1, \theta_2, \eta)$:

$$\Gamma^+ \leq \Gamma_{Mec I} = \frac{cr_0^2 \exp(2(\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) - 1}{2\gamma \tan \varphi (f_1 - f_2 - f_3)} \tag{6.35}$$

Dessa forma, também vale para o mínimo:

$$\Gamma^+ \leq \Gamma_{Mec I}^+ = \min_{(\theta_1, \theta_2, \eta)} \Gamma_{Mec I}, \quad (\theta_1, \theta_2, \eta) \text{ admissíveis} \tag{6.36}$$

Analogamente, para o Mecanismo II, dados $(\theta_1, \theta_2, \beta')$ admissível, tem-se

$$\Gamma^+ \leq \Gamma_{Mec II} = \frac{cr_0^2 \exp(2(\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) - 1}{2\gamma \tan \varphi (f'_1 - f'_2 - f'_3 - f'_4)} \tag{6.37}$$

Da mesma forma, tomando o mínimo no domínio de configurações admissíveis dos parâmetros $(\theta_1, \theta_2, \beta')$:

$$\Gamma^+ \leq \Gamma_{Mec II}^+ = \min_{(\theta_1, \theta_2, \beta')} \Gamma_{Mec II}, \quad (\theta_1, \theta_2, \beta') \text{ admissíveis} \quad (6.38)$$

Em última análise, $\Gamma^+ \leq \min\{\Gamma_{Mec I}^+, \Gamma_{Mec II}^+\}$. Dessa forma, para encontrar o menor limite superior, para cada caso, é necessário realizar um procedimento de minimização de parâmetros para ambos os mecanismos.

6.2.1 Otimização

Para encontrar Γ^+ , são propostas duas abordagens de otimização de parâmetros: inicialmente um método direto de *grid search*; e posteriormente uma abordagem Meta-heurística baseada em *Particle Swarm Optimization* (PSO) (KENNEDY; EBERHART, 1995). Ambas as abordagens são implementadas em linguagem Python. Considerações sobre precisão e redução de custo computacional são discutidas na sequência.

6.2.1.1 Grid Search

Grid Search é um dos métodos mais tradicionais para otimização de parâmetros, consistindo em simplesmente avaliar as funções objetivo $\Gamma_{Mec I}$ e $\Gamma_{Mec II}$ em uma discretização do espaço de parâmetros, de modo a obter o menor valor possível. Na presente análise, o espaço de parâmetros é definido, no caso do Mecanismo I, como exemplo, de forma que:

$$\mathcal{P}_{Par} = \{(\theta_1, \theta_2, \varphi) \mid \theta_1 \in [0, \pi - \beta], \theta_2 \in [0, \pi - \beta], \varphi \in [0, \pi/2]\} \quad (6.39)$$

Observa-se que, por definição, \mathcal{P}_{Par} também contém parâmetros não admissíveis, de modo que $\mathcal{P}_{Par_{adm}} \subset \mathcal{P}_{Par}$. Dessa forma, após a discretização, uma etapa é realizada onde são descartados os pontos que configuram Mecanismos não admissíveis. O procedimento de análise é ilustrado pela Figura 6.8, para o caso onde se fixa $\eta = 1$.

Observa-se que o subespaço $\mathcal{P}_{Par_{adm}}$ é dependente dos parâmetros β , φ e H , apresentando difícil generalização. Além disso, tem-se que a qualidade da solução obtida é diretamente dependente do parâmetro de discretização d . Sendo o espaço de parâmetros tridimensional, o tempo de execução do algoritmo apresenta dependência cúbica do parâmetro d , impactando sua eficiência.

6.2.1.2 Particle Swarm Optimization (PSO)

Particle Swarm Optimization é um algoritmo meta-heurístico de otimização proposto por Kennedy e Eberhart (1995). O algoritmo surgiu originalmente como forma de simular comportamen-

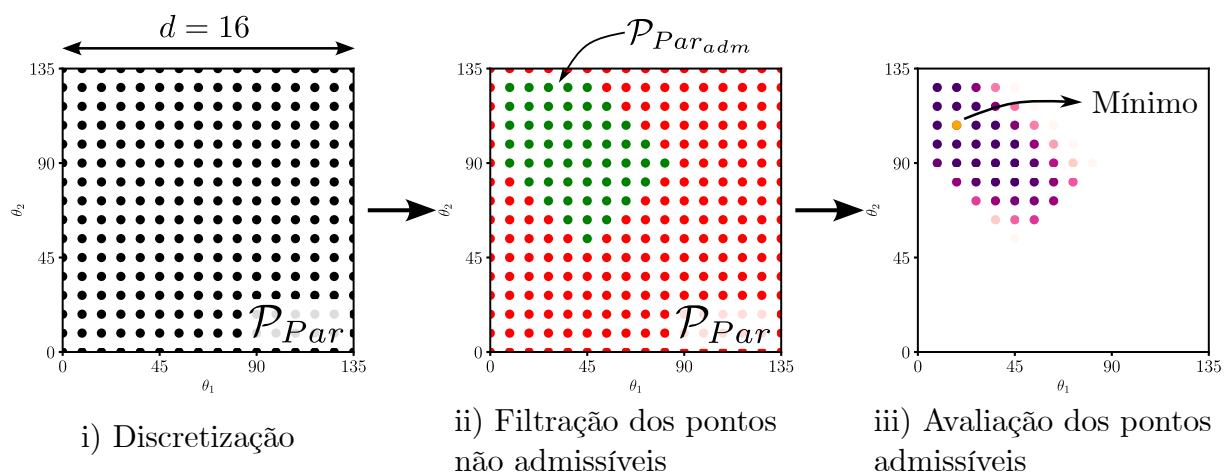


Figura 6.8 – Ilustração do método de *Grid Search*

tos sociais como observados em cardumes ou em bandos, sendo posteriormente observada sua aplicação em problemas de otimização (KENNEDY; EBERHART, 1995).

No método, inicialmente um conjunto de partículas com velocidades iniciais aleatórias é gerado dentro do espaço de parâmetros. Em cada iteração, atualizam-se a posição e velocidade das partículas. A posição é atualizada conforme a velocidade, enquanto a velocidade é atualizada como uma função da posição da melhor solução local (obtida pela partícula) e da posição da melhor solução global (obtida por qualquer partícula). O peso que as soluções globais e locais exercem sobre a velocidade é determinado, respectivamente, pela constante social ($c_1 = 1,8$) e cognitiva ($c_2 = 2$). Ao final do número de iterações desejado, apresenta-se a melhor solução obtida. De forma geral, o método é dependente do número de partículas utilizadas, da posição inicial dessas partículas, e do número de iterações realizadas (MATOS, 2021).

Para utilizar o algoritmo no problema de otimização em questão, algumas modificações são propostas na implementação de Matos (2021). Inicialmente, de forma semelhante ao método de *Grid Search*, faz-se a discretização do espaço de parâmetros e toma-se uma lista dos pontos admissíveis. Esses pontos não serão avaliados diretamente, mas sim tomados como pontos iniciais das partículas do método PSO. Tal consideração evita que partículas sejam inicializadas fora do domínio admissível, o que prejudicaria o método. Além disso, de modo a evitar que partícula encontrem soluções fora do domínio admissível, penalidades são aplicadas diretamente na função Fator de Estabilidade Γ , desse modo as restrições não fixas são respeitadas. A implementação do método é ilustrada na Figura 6.9.

Observa-se que a aplicação do método após a discretização permite relaxar a necessidade de uma malha de pontos densa, visto que as partículas irão transladar dentro do espaço admissível, reduzindo sensivelmente o número de avaliações e conseqüentemente o tempo de processamento. Como ponto negativo, destaca-se que, embora resultados precisos sejam obtidos, a aleatoriedade

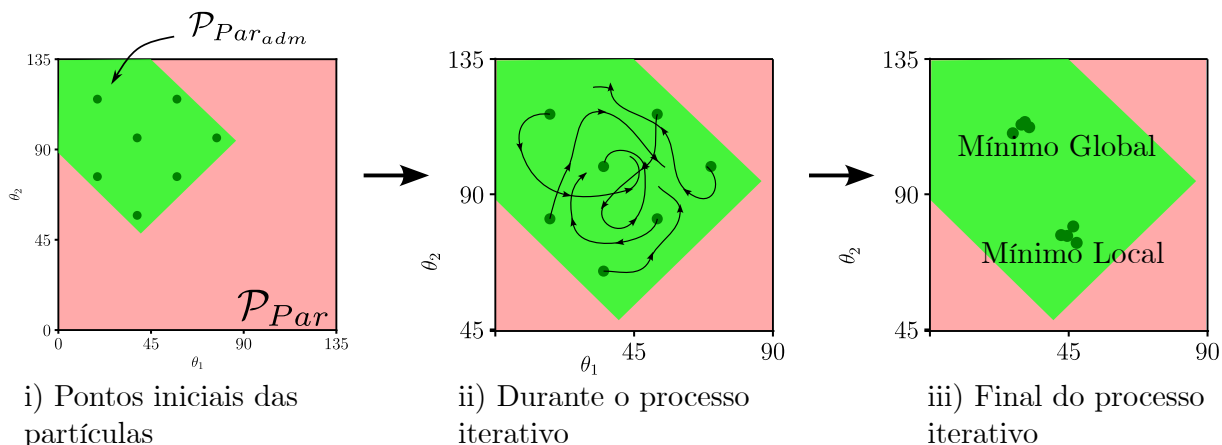


Figura 6.9 – Ilustração do método PSO

do algoritmo podem resultar em valores diferentes em cada execução.

6.2.1.3 Avaliação das abordagens de otimização

De modo a avaliar a eficiência e qualidade de solução, ambos os algoritmos serão empregados para o caso de talude seco em deformação plana com $\beta = 45^\circ$, $H = 1\text{ m}$ e $\varphi = 15$. Inicialmente, para o método de *Grid Search*, o impacto do aumento do parâmetro de discretização d na precisão do Fator de Estabilidade e no aumento do tempo computacional é ilustrado pela Figura 6.10.

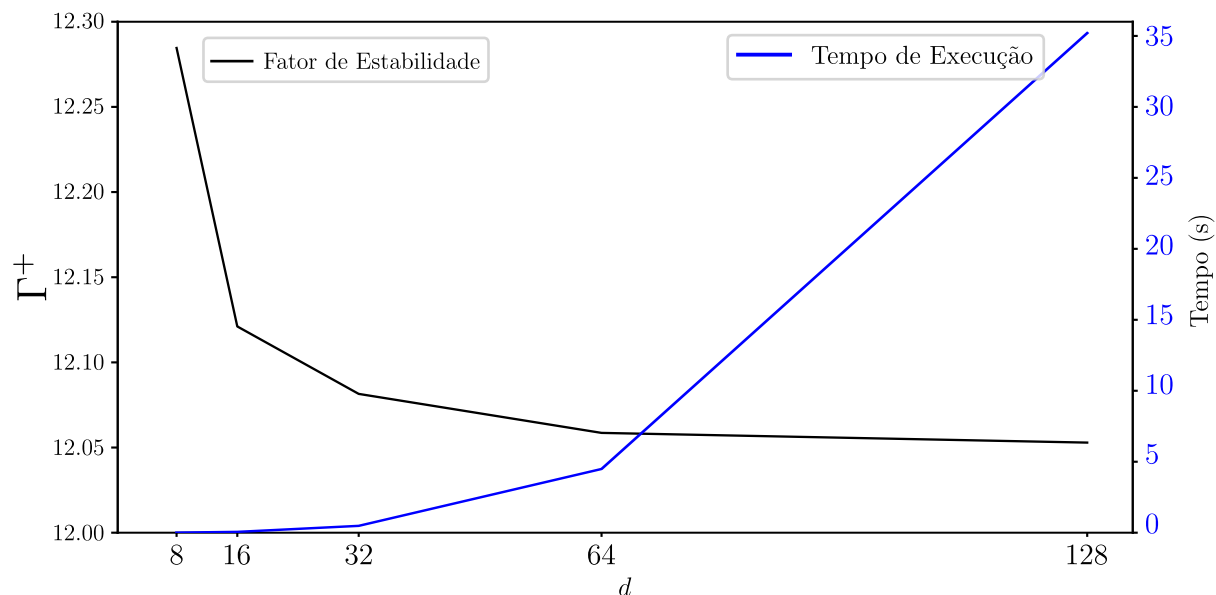


Figura 6.10 – Aumento da discretização no método de *Grid Search*

Como esperado, a cada vez que a discretização é multiplicada por 2, tem-se em média um aumento de 8 vezes no tempo de execução do algoritmo. No entanto, observa-se que, neste caso específico, uma discretização $d = 32$ já seria suficiente para obter um resultado com erro inferior à 1% quando comparado com o resultado obtido com $d = 128$. Embora as análises já apresentem um baixo tempo de execução, considera-se o tempo computacional proporcional ao número de

avaliações realizadas. Tal consideração ganha relevância a partir da introdução de processos de integração numérica dentro da função de avaliação, especialmente na aplicação do método de Monte Carlo.

Repetindo o mesmo caso, agora utilizando o algoritmo PSO, tem-se uma melhora tanto em qualidade de solução, quanto em tempo computacional. Fixando o número de iterações igual ao número de partículas, o resultado é apresentado na Figura 6.11.

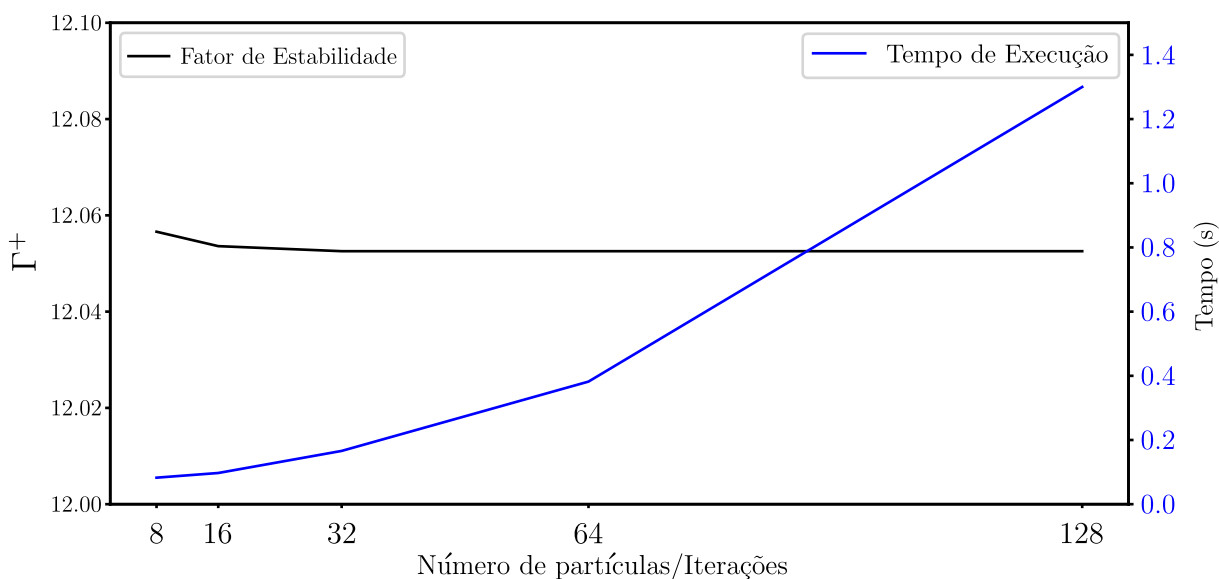


Figura 6.11 – Aumento do número de partículas e iterações no método PSO

Nota-se que os resultados a partir de 16 são essencialmente idênticos. Dessa forma, considera-se o método PSO para as análises seguintes.

6.2.2 Verificação

Para verificar a implantação em linguagem Python, comparam-se os resultados com os valores referência apresentados por Chen (1975). Como tais valores também são obtidos a partir de uma abordagem cinemática da Análise Limite, espera-se que exista pouca ou nenhuma variação entre os resultados. A comparação entre os valores é apresentado na Figura 6.12 já considerando, para cada caso, a menor resposta entre os dois mecanismos apresentados. Como critério para a análise, consideram-se que as estruturas estão infinitamente estáveis a partir de um teto igual à $\Gamma^+ = 1000$. Nesses casos, considera-se que não foi possível encontrar mecanismos de ruptura admissíveis dentro do espaço de parâmetros.

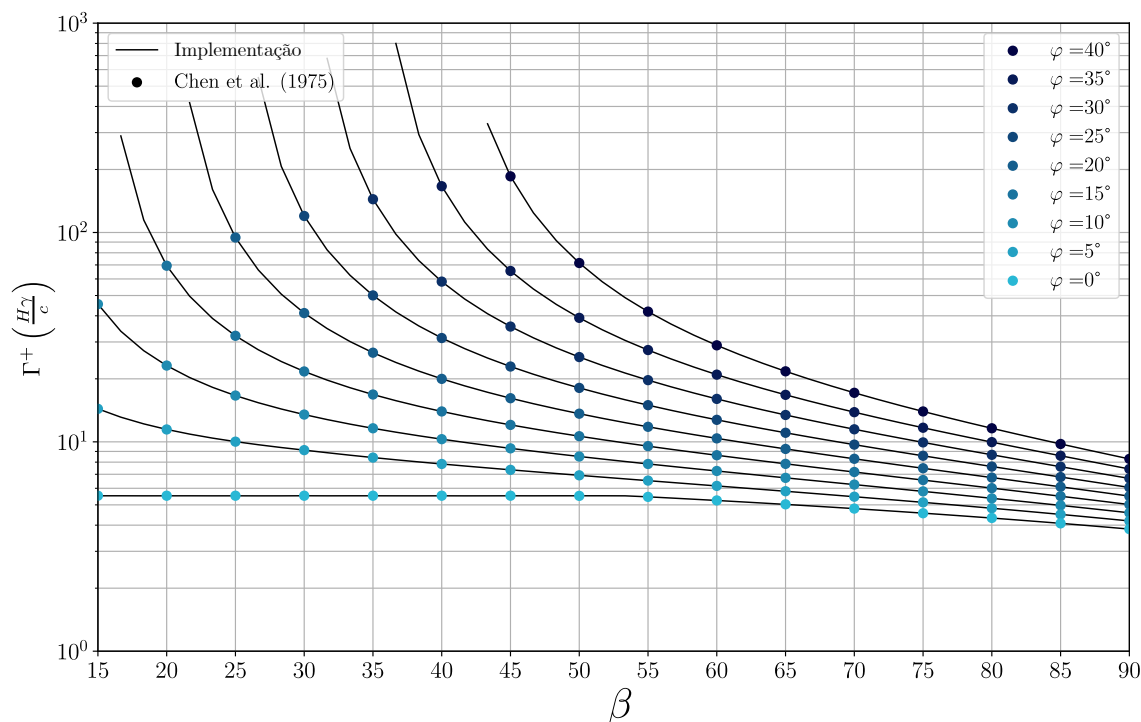


Figura 6.12 – Verificação dos resultados obtidos com os valores referências de Chen (1975)

A partir dos resultados apresentados, considera-se que implementação caracteriza precisamente o Fator de Estabilidade esperado para taludes secos homogêneos em deformação plana. Dentre todos os pontos considerados, o maior erro obtido foi apenas 0,15%, sendo considerado adequado.

6.2.3 Mecanismo I vs Mecanismo II

Para cada uma das análises do item anterior, verificaram-se os Fatores de Estabilidade mínimos de cada mecanismo de ruptura. Nas análises, no entanto, observa-se que o Mecanismo II, tem prevalência apenas em casos específicos de baixa inclinação e ângulo de atrito. A Figura 6.13 ilustra o resultado obtido para o caso $\beta = 20^\circ$ e $\varphi = 5^\circ$.

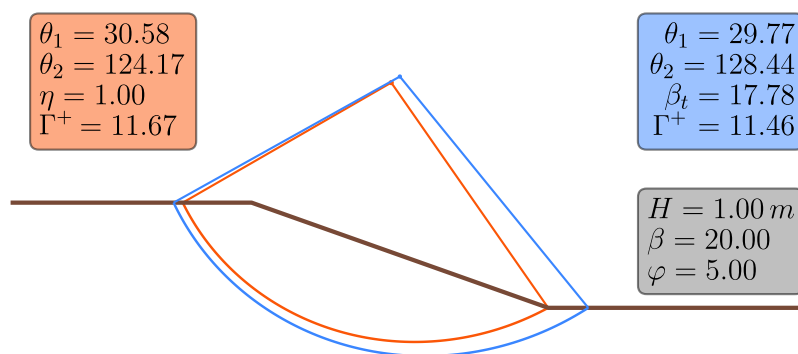


Figura 6.13 – Valores críticos para cada Mecanismo de Ruptura

Embora os valores encontrados para esse caso apresentem uma diferença de apenas 2%, esses valores podem apresentar diferenças significativas em solos puramente coesivos, por exemplo. A Figura 6.14 ilustra a diferença de segurança entre os mecanismos para alguns casos de φ .

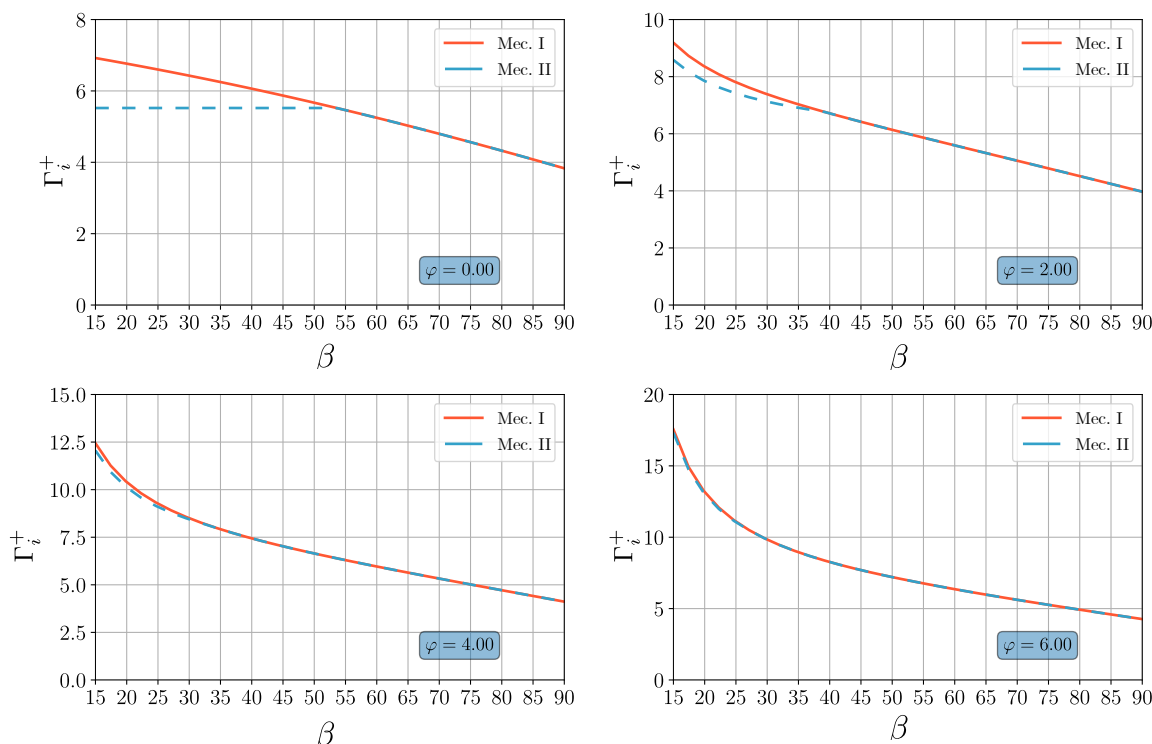


Figura 6.14 – Comparação dos Mecanismos de Ruptura para baixos φ

Nota-se que a partir de $\varphi > 6^\circ$ ambos os mecanismos apresentam o mesmo valor de segurança. Nesses casos, a ruptura do talude é dada por mecanismos que passam diretamente pelo pé do talude, sendo um caso presente tanto no Mecanismo I (quando $\eta = 1$) como no Mecanismo II (quando $\beta' = \beta$). Além disso, para um φ fixo, observa-se que o Mecanismo II é predominante para inclinações próximas à 15° , enquanto o Mecanismo I prevalece para inclinações superiores à 50° .

6.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE — SOLO SATURADO EM TENSÕES EFETIVAS

Para o caso do talude de solo saturado submetido a forças de percolação, além das forças gravitacionais, o limite superior Γ^+ para o Fator de Estabilidade é dado diretamente por:

$$\Gamma^+ \leq \frac{P_{rm}}{P_{\gamma'} + P_u} \quad (6.40)$$

sendo P_{rm} calculado em termos das propriedades efetivas do material.

Novamente, considerando os Mecanismos apresentados, tem-se que:

$$\Gamma^+ \leq \min\{\Gamma_{Mec I}^+, \Gamma_{Mec II}^+\} \quad (6.41)$$

onde agora $\Gamma_{Mec I}^+$ e $\Gamma_{Mec II}^+$ são definidos de modo que

$$\Gamma_{Mec I}^+ = \min_{(\theta_1, \theta_2, \eta)} \frac{cr_0^2 \exp(2(\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) - 1}{2\gamma' \tan \varphi (f_1 - f_2 - f_3 + \frac{1}{\gamma' \omega} P_u)}, \quad (\theta_1, \theta_2, \eta) \text{ admissíveis} \quad (6.42)$$

$$\Gamma_{Mec II}^+ = \min_{(\theta_1, \theta_2, \beta')} \frac{cr_0^2 \exp(2(\theta_2 - \theta_1) \tan \varphi) - 1}{2\gamma' \tan \varphi (f'_1 - f'_2 - f'_3 - f'_4 + \frac{1}{\gamma' \omega} P_u)}, \quad (\theta_1, \theta_2, \beta') \text{ admissíveis} \quad (6.43)$$

onde, conforme apresentado no Capítulo 4, a potência das forças de percolação é dada pela integral:

$$P_u = - \int_{\Omega} \underline{\text{grad}} u \cdot \underline{\hat{U}} d\Omega. \quad (6.44)$$

6.3.1 Potência das forças de percolação P_u

Nesta subseção são apresentadas as deduções e metodologias empregadas no cálculo da potência das forças de Percolação P_u . Inicialmente consideram-se as soluções para o problema hidráulico obtidas via métodos variacionais no Capítulo 5. Posteriormente apresenta-se a abordagem via coeficiente de poropressão r_p .

6.3.1.1 Soluções do Problema Hidráulico

Dada a dificuldade, ou até mesmo impossibilidade, de descrever as soluções analíticas encontradas no Capítulo 5 a partir do sistema de coordenadas (C, r, θ) , opta-se por uma abordagem por integração numérica. Para aproximar a integral definida em (6.44), inicialmente gera-se uma malha de $N \times N$ pontos ao lado do talude. Dado a extensão dos campos de velocidade de filtração, tal malha é replicada ao redor do talude de modo a respeitar os domínios de definição, sendo o número de repetições uma função direta de R_{max} . Tal procedimento é ilustrado na Figura 6.15. Posteriormente, investiga-se a sensibilidade do parâmetro N na precisão dos resultados obtidos.

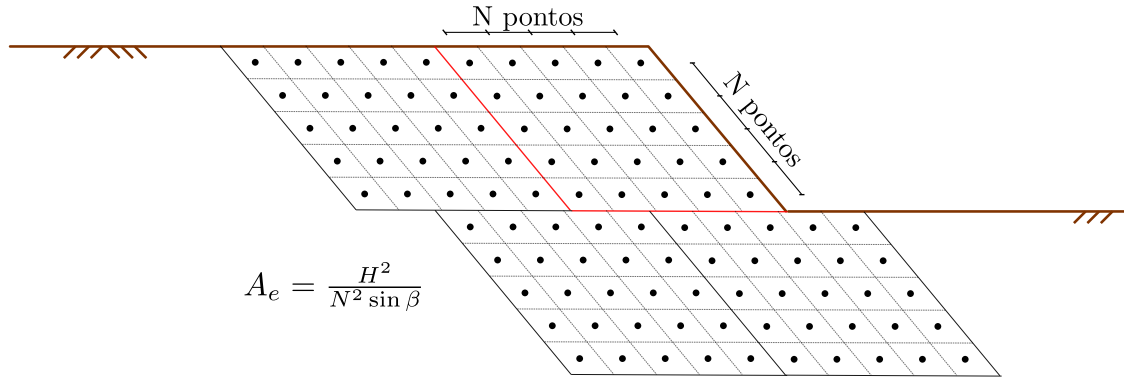


Figura 6.15 – Malha de pontos da integração numérica.

onde A_e representa a área de influência de cada ponto.

Fixado os parâmetros de um Mecanismo de ruptura qualquer, verificam-se os pontos que estão no domínio de integração. Para cada ponto do domínio calcula-se \underline{U} e \underline{v} pela transformação do sistema (O, x, y) para (C, r, θ) e (O, r, θ) respectivamente, conforme ilustrado na Figura 6.16.

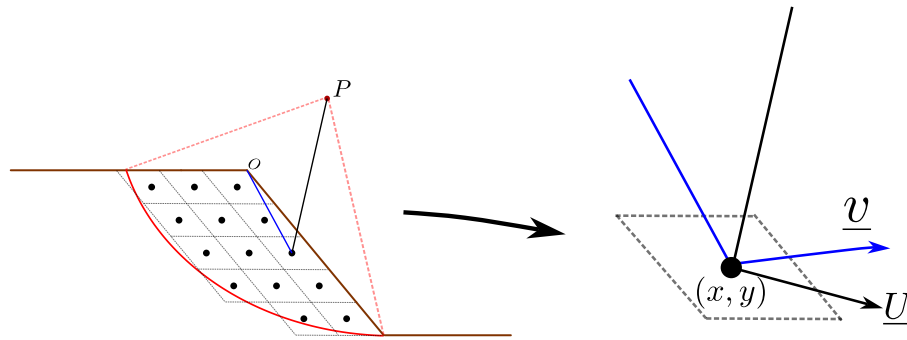


Figura 6.16 – Aproximação do Mecanismo de ruptura na malha de pontos

Por fim, considerando que \underline{U} e \underline{v} são constantes dentro da área de influência A_e do ponto, a aproximação da integral é dada por:

$$P_u \approx \sum_{p_i} A_e (\underline{K}^{-1} \cdot \underline{v}(x, y)) \cdot \underline{U}(x, y), \quad p_i \in \text{Dom}(\text{Mecanismo}) \quad (6.45)$$

onde se substitui $\underline{\text{grad}} u$ pela relação sobre \underline{v} .

Para a solução do problema hidráulico via MEF, pode-se tomar uma abordagem alternativa. Considere a relação dada pela Equação 6.46:

$$\int_{\Omega} \text{div}(u \hat{U}) d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\text{grad}} u \cdot \hat{U} d\Omega + \int_{\Omega} u \text{div} \hat{U} d\Omega \quad (6.46)$$

Substituindo a definição de P_u dada em 6.44, tem-se:

$$P_u = - \int_{\Omega} \text{div}(u \hat{U}) d\Omega + \int_{\Omega} u \text{div} \hat{U} d\Omega \quad (6.47)$$

Tal definição torna-se particularmente conveniente em ruptura por movimento de corpo rígido ($\text{div} \hat{\underline{U}} = 0$), como o ocorrido nos Mecanismos I e II. Adicionalmente, utilizando o Teorema da divergência, obtém-se:

$$P_u = - \int_{\partial\Omega} u \hat{\underline{U}} \cdot \underline{n} d\Sigma \quad (6.48)$$

onde \underline{n} representa o vetor normal à fronteira do domínio Ω .

A integral de linha resultante sobre a fronteira do domínio pode ser dividida em três partes, para o Mecanismo I, e quatro partes, para o Mecanismo II, conforme ilustrado pela Figura 6.17. Dado o sinal negativo da integral, considera-se diretamente o sentido horário para integração. Nota-se ainda que, por conta das condições de contorno sobre o excesso de poropressão u , a parcela referente à fronteira no topo do domínio nula. As demais parcelas são calculadas numericamente através do Método dos Trapézios.

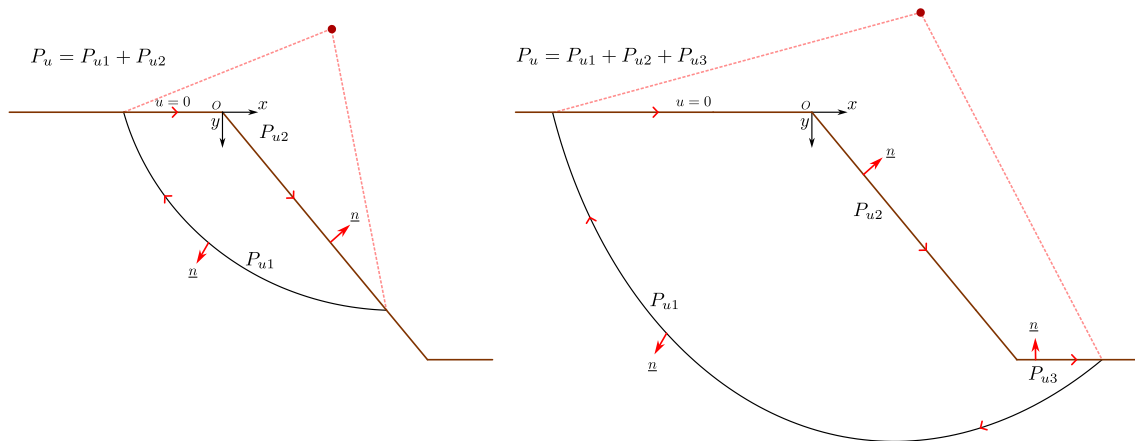


Figura 6.17 – Potência das Forças de Percolação por Integral de Linha

Inicialmente para a parcela P_{u1} . Como $\underline{U} \cdot \underline{n} = -\omega r \sin \varphi$, e considerando o elemento de comprimento $d\Sigma$ dado em 6.17, tem-se:

$$P_{u1} = \int_{\theta_2}^{\theta_1} u(\theta) (-\omega r(\theta) \sin \varphi) \frac{r(\theta) d\theta}{\cos \varphi} = \omega \tan \varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} u(\theta) r(\theta)^2 d\theta \quad (6.49)$$

Pelo Método dos trapézios, considerando N pontos:

$$P_{u1} \approx \omega \Delta\theta \tan \varphi \sum_{i=1}^{N-1} \frac{u(\theta_i) r(\theta_i)^2 + u(\theta_{i+1}) r(\theta_{i+1})^2}{2} \quad (6.50)$$

onde $\Delta\theta = \theta_{i+1} - \theta_i$ e $u(\theta_i)$ é obtido por interpolação a partir dos resultados nodais do excesso de poropressão.

Para a parcela P_{u2} , tem-se que $\underline{U} \cdot \underline{n} = \omega r \cos(\theta + \beta)$, e $d\Sigma = dx / \cos \beta$. Portanto, pode-se integrar sobre x :

$$P_{u2} = \int_0^{\eta H / \tan \beta} u(x) (\omega r(x) \cos(\theta(x) + \beta)) \frac{dx}{\cos \beta} = \frac{\omega}{\cos \beta} \int_0^{\eta H / \tan \beta} u(x) (r(x) \cos(\theta(x) + \beta)) dx \quad (6.51)$$

Nesse caso, dada as condições de contorno sobre o problema hidráulico, $u(x) = -x\gamma_w \tan \beta$. Assim, pelo Método dos Trapézios, considerando N pontos:

$$P_{u2} \approx -\frac{\Delta x \omega}{\cos \beta} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{u(x_i) r(x_i) \cos(\theta(x_i) + \beta) + u(x_{i+1}) r(x_{i+1}) \cos(\theta(x_{i+1}) + \beta)}{2} \quad (6.52)$$

onde $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, dada as condições de contorno:

$$u(x) = \begin{cases} -x\gamma_w \tan \beta & 0 \leq x < h_w / \tan \beta \\ -h_w \gamma_w & h_w / \tan \beta \leq x < H / \tan \beta \end{cases} \quad (6.53)$$

Note que, considerando $\eta = 1$, tem-se que P_{u1} e P_{u2} são os mesmos para os Mecanismos I e II. Por fim, considera-se a parcela P_{u3} do Mecanismo II. Nesse caso $\underline{U} \cdot \underline{n} = -\omega r \cos(\theta)$, $d\Sigma = dx$ e, por conta das condições de contorno, $u = -h_w \gamma_w$. Portanto:

$$P_{u3} = \int_{H/\tan \beta}^{H/\tan \beta} (-h_w \gamma_w) (-\omega r(\theta(x)) \cos \theta(x)) dx = \omega h_w \gamma_w \int_{H/\tan \beta}^{H/\tan \beta} r(\theta(x)) \cos \theta(x) dx \quad (6.54)$$

Pelo Método dos trapézios, considerando N pontos, tem-se:

$$P_{u3} \approx \Delta x \omega h_w \gamma_w \sum_{i=1}^{N-1} \frac{r(\theta(x_i)) \cos \theta(x_i) + r(\theta(x_{i+1})) \cos \theta(x_{i+1})}{2} \quad (6.55)$$

6.3.1.2 Análise da integração numérica

Com o intuito de avaliar a validade da integração numérica da potência das forças de percolação, bem como estudar a sensibilidade e convergência da solução em função do parâmetro N , propõe-se avaliar a aproximação para um caso fixo. Considera-se dois casos de seca completa ($h_w = H$) de um talude saturado com altura $H = 1 \text{ m}$ e $L_m = 5 \text{ m}$, sendo L_m dado conforme definido na subseção 5.2.1.3. Primeiro, com $\beta = 40^\circ$ e $\varphi = 0$, e segundo, com $\beta = 90^\circ$ e $\varphi = 25^\circ$, conforme ilustrado pela Figura 6.22.

Em ambos os casos verifica-se que o aumento do parâmetro N leva à convergência do Fator de Estabilidade em todos os campos considerados. Ainda, considera-se que um valor igual à 30 seja suficiente para as análises posteriores.

Embora sejam considerados todos os campos de velocidade de filtração na presente análise de convergência, para as análises posteriores considera-se apenas a Família 3.2., sendo a melhor solução encontrada no Capítulo 5. O problema hidráulico independe da Análise Limite, dessa forma utiliza-se a solução ótima em termos de minimização do funcional $J(\underline{y})$, e não em termos da estabilidade.

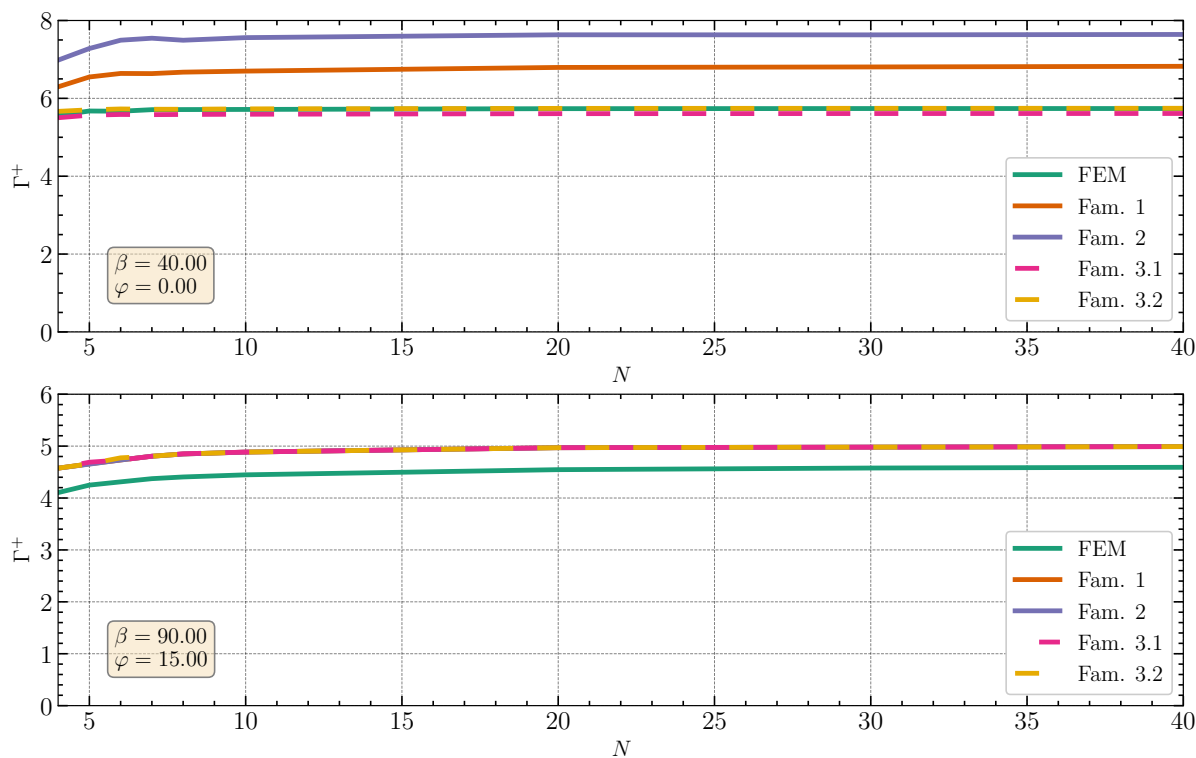


Figura 6.18 – Integração numérica da potência das forças de percolação

6.3.1.3 Coeficiente de poropressão r_p

Conforme descrito no Capítulo 2, o Coeficiente de Poropressão r_p é definido como:

$$r_p = \frac{p}{\gamma h} \quad (6.56)$$

onde p representa a poro pressão, h a distância do ponto até a superfície da água e γ a densidade do solo.

O valor exato de r_p varia em função de sua posição, sendo a obtenção de um valor exato possível a partir de soluções analíticas e numéricas, conforme apresentado no presente capítulo. A título de simplificação, autores como Bishop e Morgenstern (1960) e Michalowski (1995a) optam por considerar um coeficiente constante, substituindo o processo de solução das equações diferenciais do problema hidráulico. Esse procedimento também permite obter expressões analíticas para a potência das forças de percolação. Para o problema de estabilidade, inicialmente calcula-se a variação de poropressão u :

$$u = p - p_w = r_p \gamma h - p_w \quad (6.57)$$

No caso em questão, conforme ilustrado pela Figura 6.19, h é uma função de (x, y) definida em três zonas, e p_w é função apenas de y . Além disso, partindo do referencial estabelecido, p_w é definido como $p_w = \gamma_w y$.

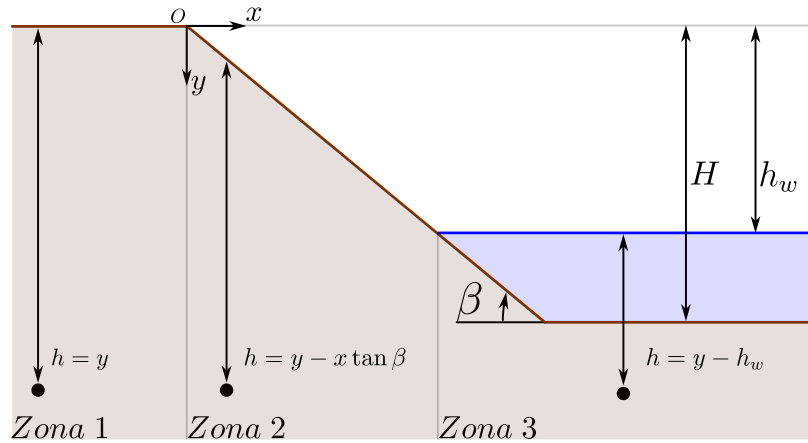


Figura 6.19 – Definição da pressão definida pelo coeficiente r_p .

Dessa forma u é uma função linear por partes e, conseqüentemente, $\underline{grad} u$ é constante por partes, facilitando os procedimentos de integração.

$$u(x,y) = \begin{cases} y(r_p\gamma - \gamma_w) & \text{se } x \leq 0 \\ y(r_p\gamma - \gamma_w) - xr_p\gamma\tan\beta & \text{se } 0 \leq x \leq h_w/\tan\beta \\ y(r_p\gamma - \gamma_w) + r_p\gamma h_w & \text{se } x \geq h_w/\tan\beta \end{cases} \quad (6.58)$$

E assim:

$$\underline{grad}u = \begin{cases} (r_p\gamma - \gamma_w)\underline{e}_y & \text{se } x \leq 0 \\ (r_p\gamma - \gamma_w)\underline{e}_y - r_p\gamma\tan\beta\underline{e}_x & \text{se } 0 \leq x \leq h_w/\tan\beta \\ (r_p\gamma - \gamma_w)\underline{e}_y & \text{se } x \geq h_w/\tan\beta \end{cases} \quad (6.59)$$

A Figura 6.20 ilustra o impacto do valor de r_p possui sobre o campo gradiente de u . Note que, dada a definição de r_p , o fator é dependente também do peso específico considerado, no caso ilustrativo, considera-se $\gamma = 20kN/m^3$ e $\gamma_w = 9,8kN/m^3$. A medida que o valor aumenta, é privilegiado a componente x do gradiente, até que este seja completamente horizontal, configurando o pior caso em termos de estabilidade.

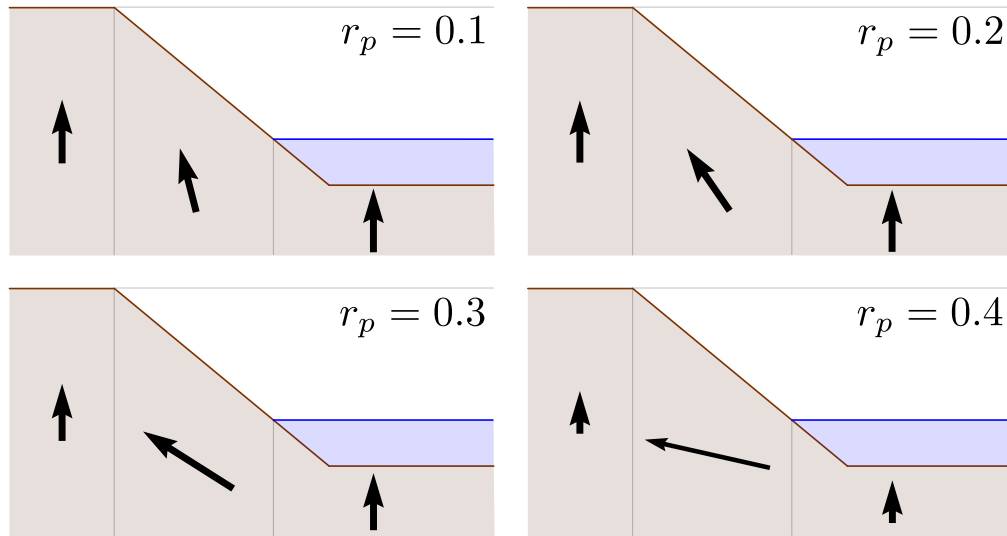


Figura 6.20 – Impacto de r_p sobre $\underline{\text{grad}} u$

Considerando os mesmos Mecanismos I e II definidos, de forma análoga à dedução feita em subseção 6.1.4, a potência das forças de percolação tem a forma:

$$\frac{P_u}{\omega} = - \int_{\Omega} \underline{\text{grad}} u \cdot \hat{U} d\Omega = (\gamma_w - r_p \gamma) \int_{\Omega} r^2 \cos \theta dr d\theta + r_p \gamma \tan \beta \int_{Z_{\text{Zona 2}}} r^2 \sin \theta dr d\theta \quad (6.60)$$

Inicialmente, para o Mecanismo I, a integral é dada analiticamente por:

$$\frac{P_u}{\omega} = (\gamma_w - r_p \gamma)(f_1 - f_2 - f_3) + r_p \gamma \tan \beta (f_4 + f_5 - f_6 - f_7) \quad (6.61)$$

onde f_1 , f_2 e f_3 são os mesmos calculados em subseção 6.1.4 e f_4 é dado por:

$$f_4 = \frac{C_x^3}{6} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta_c} - \frac{1}{\cos^2 \theta_O} \right) \quad (6.62)$$

As funções auxiliares f_5 , f_6 e f_7 são definidas em dois casos. Para $\eta \leq h_w/H$:

$$f_5 = \frac{r_h^3 (3 \tan \varphi \sin \theta_2 - \cos \theta_2) - r_c^3 (3 \tan \varphi \sin \theta_c - \cos \theta_c)}{3(9 \tan^2 \varphi + 1)} \quad (6.63)$$

$$f_6 = \frac{(C_y + \tan \beta C_x)^3 \cos \beta}{12} \left[\cos \theta_2 \frac{\sin(\beta - \theta_2) - 3 \sin(\beta + \theta_2)}{\sin(\beta + \theta_2)^2} - \cos \theta_O \frac{\sin(\beta - \theta_O) - 3 \sin(\beta + \theta_O)}{\sin(\beta + \theta_O)^2} \right] \quad (6.64)$$

onde $r_c = r_0 \exp((\theta_c - \theta_1) \tan \varphi)$ e θ_c é a única solução no intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ da equação:

$$r_0 \exp((\theta_c - \theta_1) \tan \varphi) \cos \theta_c = C_x \quad (6.65)$$

e $f_7 \equiv 0$. Para o caso no qual $\eta > h_w/H$:

$$f_5 = \frac{r_{c'}^3 (3 \tan \varphi \sin \theta_{c'} - \cos \theta_{c'}) - r_c^3 (3 \tan \varphi \sin \theta_c - \cos \theta_c)}{3(9 \tan^2 \varphi + 1)} \quad (6.66)$$

onde $r_{c'} = r_0 \exp((\theta_{c'} - \theta_1) \tan \varphi)$ e $\theta_{c'}$ é a única solução no intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ da equação:

$$r_0 \exp((\theta_{c'} - \theta_1) \tan \varphi) \cos \theta_{c'} = C_x - \frac{h_w}{\tan \beta} \quad (6.67)$$

$$f_6 = \frac{(C_y + \tan \beta C_x)^3 \cos \beta}{12} \left[\cos \theta_{c''} \frac{\sin(\beta - \theta_{c''}) - 3 \sin(\beta + \theta_{c''})}{\sin(\beta + \theta_{c''})^2} - \cos \theta_O \frac{\sin(\beta - \theta_O) - 3 \sin(\beta + \theta_O)}{\sin(\beta + \theta_O)^2} \right] \quad (6.68)$$

onde $r_{c''} = r_0 \exp((\theta_{c''} - \theta_1) \tan \varphi)$ e $\theta_{c''}$ é definido como

$$\theta_{c''} = \begin{cases} \arctan \left(\frac{C_y + h_w}{C_x - h_w / \tan \beta} \right) & \text{se } C_x > \frac{h_w}{\tan \beta} \\ \frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{h_w / \tan \beta - C_x}{C_y + h_w} \right) & \text{se } C_x \leq \frac{h_w}{\tan \beta} \end{cases} \quad (6.69)$$

e, por fim,

$$f_7 = \frac{\left(C_x - \frac{h_w}{\tan \beta} \right)^3}{6} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta_{c'}} - \frac{1}{\cos^2 \theta_{c''}} \right) \quad (6.70)$$

A Figura 6.21 ilustra, dada uma descontinuidade de velocidades qualquer com centro em C , a interpretação geométrica dos ângulos θ_c , $\theta_{c'}$ e $\theta_{c''}$. Os três ângulos, junto de θ_O , tem como função definir os limites de integração que definem a Zona 2.

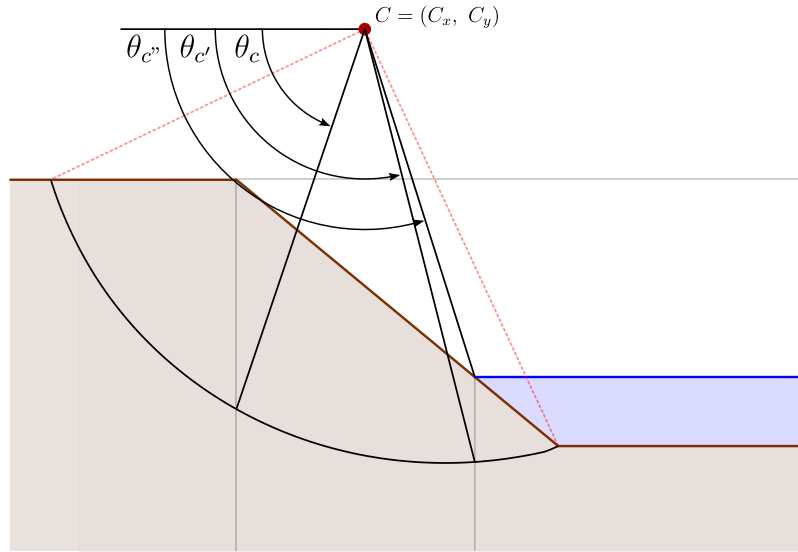


Figura 6.21 – Interpretação geométrica dos ângulos θ_c , θ_c' e θ_c'' .

Para o Mecanismo II, de forma análoga, a integral é dada analiticamente por:

$$\frac{P_u}{\omega} = (\gamma_w - r_p \gamma)(f'_1 - f'_2 - f'_3 - f'_4) + r_p \gamma \tan \beta (f'_5 + f'_6 - f'_7 - f'_8) \quad (6.71)$$

onde f'_1, f'_2, f'_3 e f'_4 são os mesmos calculados em subseção 6.1.4 e f'_5, f'_6, f'_7 e f'_8 são dados por:

$$f'_5 = \frac{C_x^3}{6} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta_c} - \frac{1}{\cos^2 \theta_O} \right) \quad (6.72)$$

$$f'_6 = \frac{r_c^3 (3 \tan \varphi \sin \theta_{c'} - \cos \theta_{c'}) - r_c^3 (3 \tan \varphi \sin \theta_c - \cos \theta_c)}{3(9 \tan^2 \varphi + 1)} \quad (6.73)$$

$$f'_7 = \frac{(C_y + \tan \beta C_x)^3 \cos \beta}{12} \left[\cos \theta_{c''} \frac{\sin(\beta - \theta_{c''}) - 3 \sin(\beta + \theta_{c''})}{\sin(\beta + \theta_{c''})^2} - \cos \theta_O \frac{\sin(\beta - \theta_O) - 3 \sin(\beta + \theta_O)}{\sin(\beta + \theta_O)^2} \right] \quad (6.74)$$

$$f'_8 = \frac{\left(C_x - \frac{h_w}{\tan \beta} \right)^3}{6} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta_{c'}} - \frac{1}{\cos^2 \theta_{c''}} \right) \quad (6.75)$$

6.4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste item serão apresentados resultados para o problema de estabilidade de taludes saturados em tensões efetivas. Inicialmente é feita a verificação da implementação a partir dos valores apresentados por Maghous (1995). Na sequência, comparam-se os resultados obtidos a partir das diferentes aproximações para o problema hidráulico e comenta-se a respeito da validade da abordagem via coeficiente de poropressão r_p .

Novos resultados são comparados com valores de estabilidade apresentados por Michalowski (1995a), e Wu et al. (2024). Ambos os artigos citados apresentam resultados obtidos via o método cinemático da Análise Limite, utilizando o coeficiente de poropressão r_p para o cálculo das Potências de Percolação. Por fim estuda-se o efeito do fator de anisotropia α em termos de estabilidade.

6.4.1 Resultados de Maghous (1995)

O gráfico presente na Figura 6.22 apresenta a verificação da implementação computacional a partir dos valores referência de (MAGHOUS, 1995). Ambos os resultados são obtidos a partir do campo de velocidades de filtração dado pela Família 2 e consideram $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$, $c = 10 \text{ kPa}$ e $\varphi = 30^\circ$, sendo Γ_0 o Fator de Estabilidade para o caso $h_w = 0$.

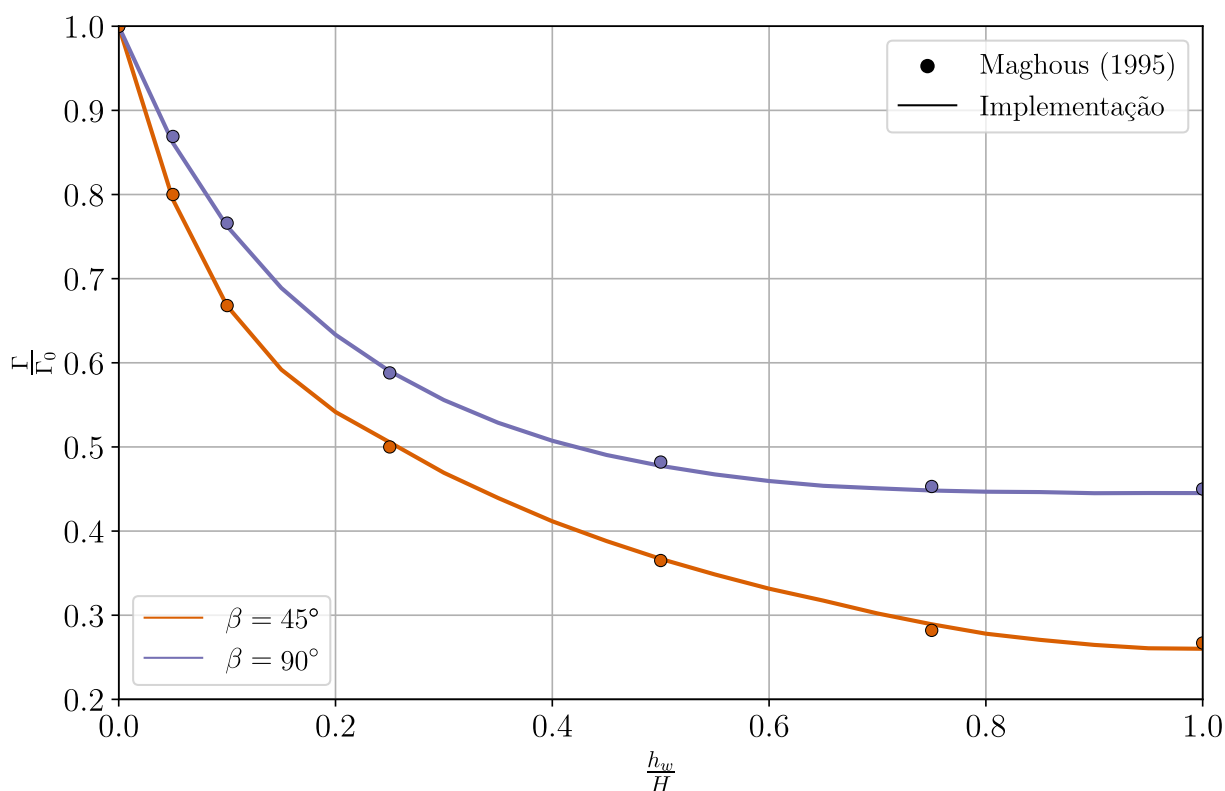


Figura 6.22 – Comparação com os resultados de Maghous (1995)

A partir dos resultados apresentados, avalia-se que a implementação caracteriza corretamente a estabilidade de taludes saturados, quando considerado o campo de velocidades de filtração dado pela Família 2. Os valores dados pela implementação apresentam um erro máximo inferior a 2%, quando comparados aos resultados de Maghous (1995).

Em uma segunda análise, os resultados obtidos ilustram o impacto da rápida redução do nível da água em estruturas saturadas. Em particular, o Fator de Estabilidade para a inclinação $\beta = 90^\circ$ apresenta uma redução de 74% para o caso de seca total, quando comparado com o caso $h_w = 0$.

6.4.2 Validade abordagem via coeficiente de poropressão r_p

Embora um resultado analítico para o problema de estabilidade pareça promissor a primeira vista, a limitação do método reside no próprio coeficiente r_p . Conforme descrito por Saada et al. (2012) o coeficiente r_p utilizado para um determinado problema não é conhecido *a priori*, sendo usualmente adotado um valor entre 0,1 e 0,5.

A Figura 6.23 ilustra como tal consideração pode superestimar a segurança da estrutura no contexto do presente trabalho. São apresentados seis gráficos de estabilidade de taludes saturados, quando há uma rápida redução completa do nível da água. São fixados $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $\gamma_w = 9,8 \text{ kN/m}^3$ e $c = 20 \text{ kPa}$. Resultados obtidos com diferentes valores de r_p são comparados com valores de Fator de Estabilidade obtidos através da integração de campos de percolação gerados via MEF e via Família 3.2.

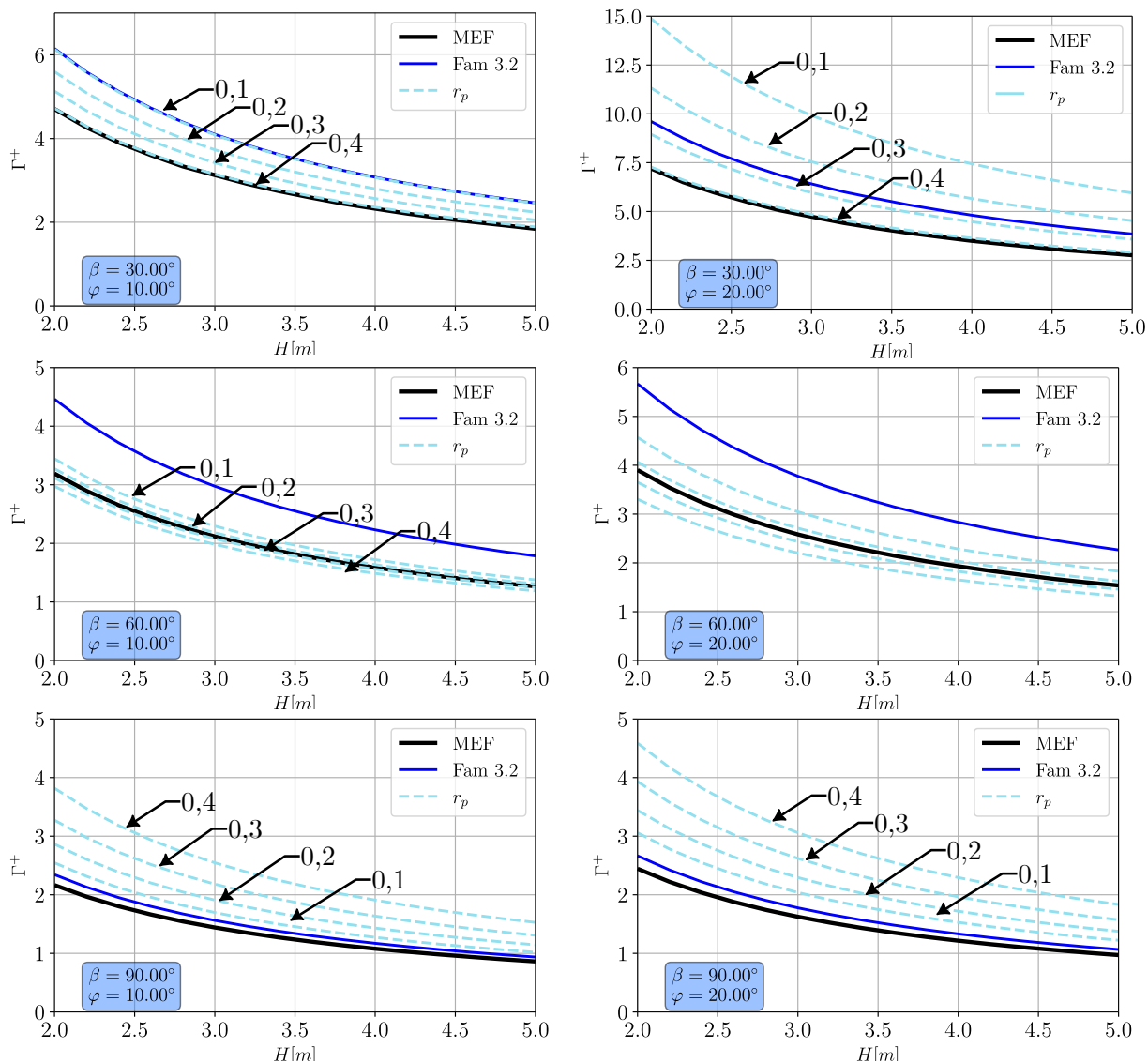


Figura 6.23 – Fator de Estabilidade para diferentes β , φ , H e r_p .

Inicialmente, verifica-se que, como esperado, há uma redução do Fator de Estabilidade Γ a medida que a altura é aumentada. Como descrito anteriormente, observa-se que, embora a abordagem analítica em termos de r_p possa levar a resultados próximos, são necessários valores distintos para diferentes condições geométricas e materiais. Na sua essência, este coeficiente não deveria depender *a priori* das propriedades de resistência do material, no caso φ , mas apenas da propriedade de condutividade hidráulica, isto é, \underline{K} . No gráfico, pode-se observar que um valor de $r_p = 0,4$ seria adequado para taludes com inclinação de $\beta = 30^\circ$, no entanto, um valor próximo de 0,25 seria mais adequado para $\beta = 60^\circ$. Já, quando comparados com a solução via Família 3.2, um valor de r_p entre 0,1 e 0,3 seria mais adequando para baixas inclinações, enquanto para β entre 60° e 75° , todos os valores de r_p levam a caracterização da estrutura como menos segura.

Para $\beta = 90^\circ$, particularmente, o método simplificado perde eficiência, visto que a região abaixo da inclinação (Zona 2) deixa de existir, resultando em um campo gradiente puramente vertical.

A comparação entre valores de r_p e as demais soluções é destacada novamente na Figura 6.24. Fixa-se agora $H = 1\text{ m}$, $\varphi = 15^\circ$ e toma-se β variados.

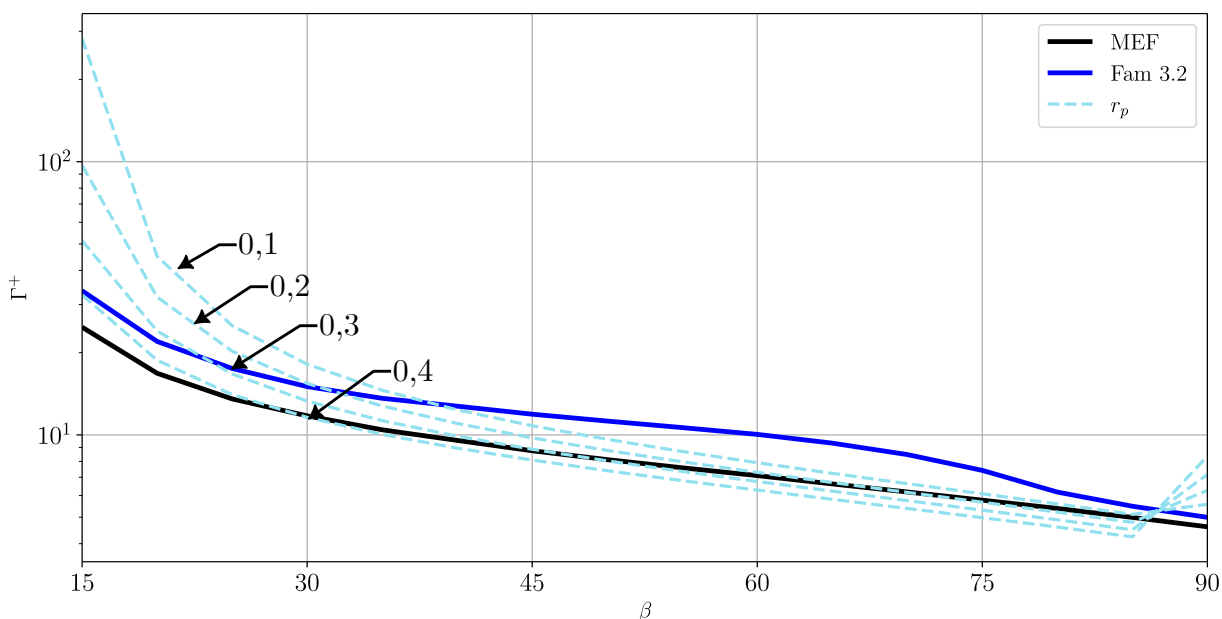


Figura 6.24 – Fator de Estabilidade para diferentes β e r_p .

No gráfico da Figura 6.24 é novamente evidenciado que um único valor de r_p (homogêneo no maciço) não é suficiente para avaliar a estabilidade de taludes saturados. Mesmo valores elevados do coeficiente superestimam a segurança da estrutura para baixas elevações. Em altas inclinações, no entanto, valores entre 0,1 e 0,2 mostram-se adequados para caracterizar a estrutura.

6.4.3 Resultados de Michalowski (1995a)

Em seu estudo, Michalowski (1995a) avalia o caso de seca completa em taludes em deformação plana partindo da abordagem da Análise Limite considerando o campo gradiente hidráulico dado por coeficientes de poropressão $r_p = 0,25$. Os gráficos presente nas Figuras 6.25 e 6.26 apresentam a comparação entre os resultados da implementação proposta e os Fatores de Estabilidade apresentados por Michalowski (1995a).

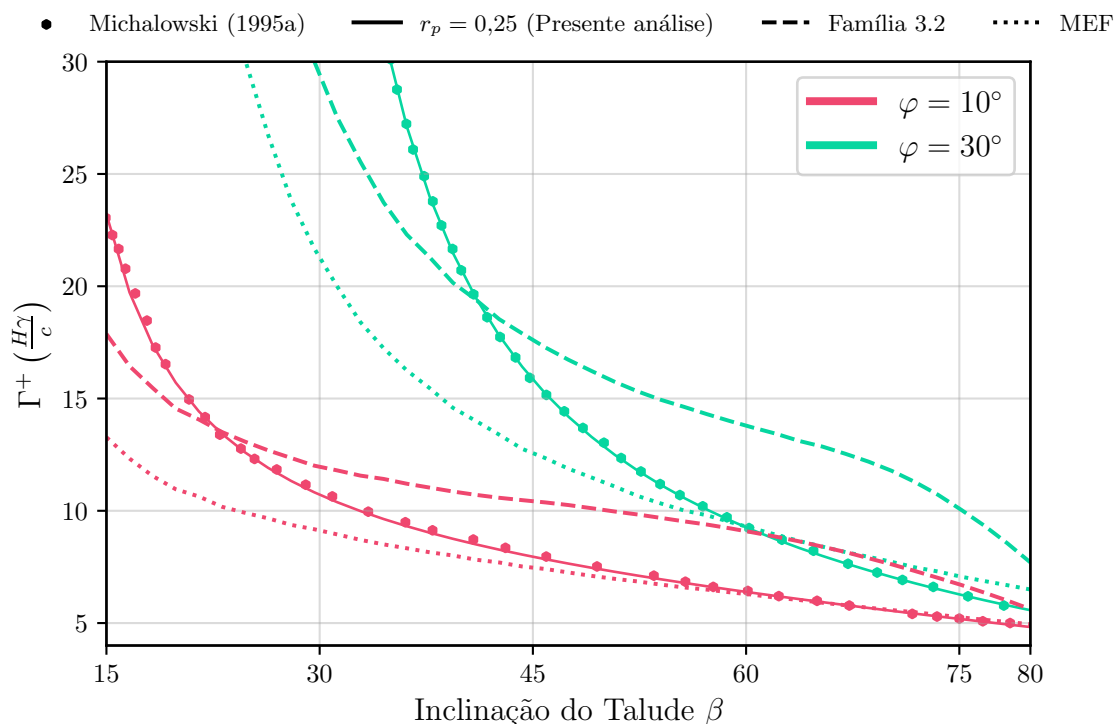


Figura 6.25 – Comparação entre as abordagens ($\varphi = 10^\circ, 30^\circ$) (MICHALOWSKI, 1995a)

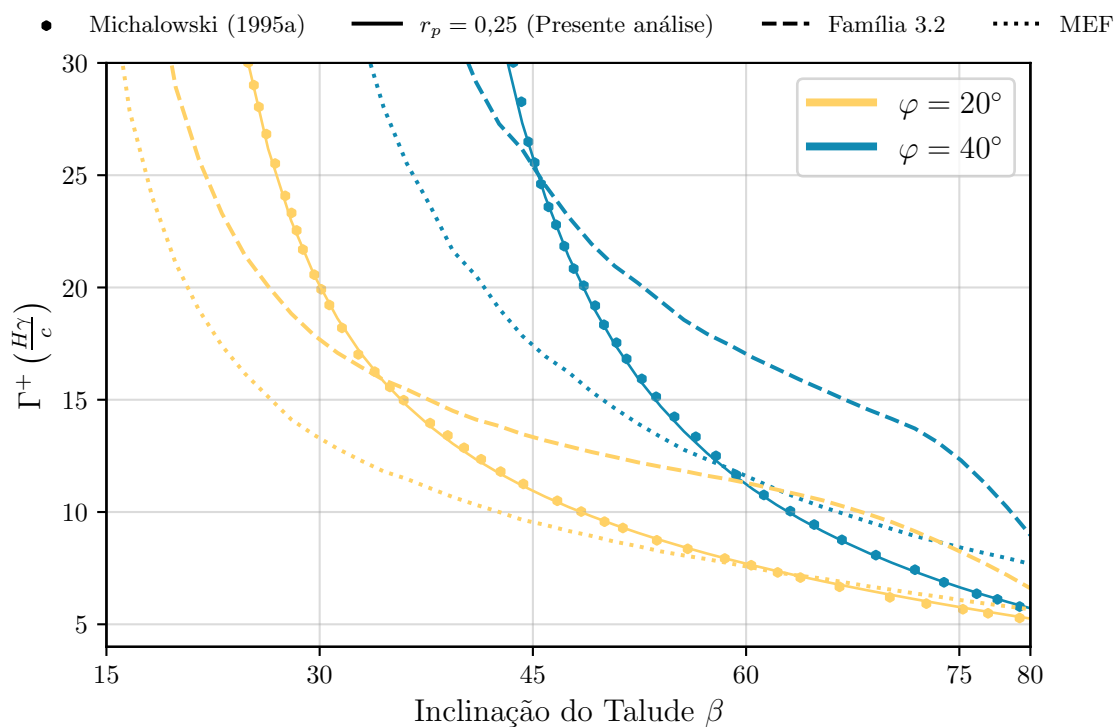


Figura 6.26 – Comparação entre as abordagens ($\varphi = 20^\circ, 40^\circ$) (MICHALOWSKI, 1995a)

Inicialmente verifica-se que os resultados obtidos pela presente implementação utilizando $r_p = 0,25$ são coincidentes com os valores apresentados por Michalowski (1995a). Avaliando o caso particular $\varphi = 10^\circ$ com inclinação $\beta = 70^\circ$, os Fatores de Estabilidade pela abordagem via r_p apresentam uma diferença de 1% quando comparados com a abordagem via MEF e 37% quando comparados com a abordagem via Família 3.2. Considerando um ângulo de atrito $\varphi = 40^\circ$ essa diferença aumenta para 20% para a abordagem via MEF e 82% para a abordagem via Família 3.2. Esses resultados demonstram que, ao menos nos casos referência apresentados, as abordagens consideradas não resultam em avaliações de estabilidade equivalentes.

A respeito do valor utilizado para o coeficiente de poropressão r_p , verifica-se a ocorrência de Fatores de Estabilidade inferiores as demais abordagens para inclinações elevadas, atuando em favor da segurança. No entanto, em inclinações inferiores a 45° para um ângulo de atrito 40° e a inclinações inferiores a 20° para $\varphi = 10^\circ$, os Fatores encontrados superestimam a segurança de estrutura, indicando a necessidade de um r_p mais elevado. Essa condição reforça a limitação do método em questão, visto a utilização de um mesmo r_p para casos variados.

6.4.4 Resultados de Wu et al. (2024)

Wu et al. (2024) avaliam casos de seca completas e intermediárias em taludes. Assim como em (MICHALOWSKI, 1995a), utiliza-se uma abordagem baseada em análise limite, considerando o coeficiente de poropressão r_p como aproximação para o problema hidráulico. Embora mecanismos de falha tridimensionais tenham sido utilizados, consideram-se apenas resultados com mecanismos de falha com largura suficientemente grande, de modo que são comparáveis com o caso bidimensional.

O gráfico presente na Figura 6.27 apresenta os resultados obtidos para o caso referência com $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$, $c = 11,7 \text{ kPa}$ e $\varphi = 24,7^\circ$. O gráfico presente na Figura 6.28 apresenta os resultados obtidos para o caso referência com $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$, $c = 6,0 \text{ kPa}$ e $\varphi = 32,0^\circ$. Em ambos os casos Wu et al. (2024) descreve a estabilidade em termos de uma altura crítica H_{crit} , consideram um coeficiente de poropressão $r_p = 0,25$.

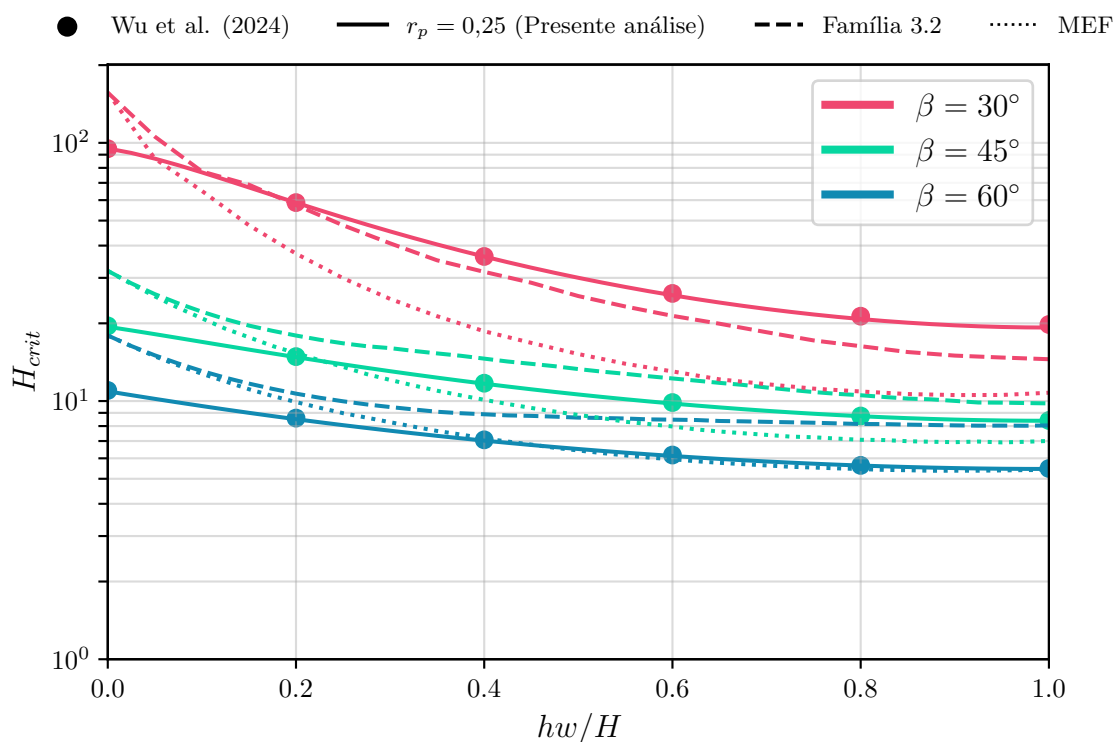


Figura 6.27 – Comparação entre as abordagens, caso referência 1 (WU et al., 2024)

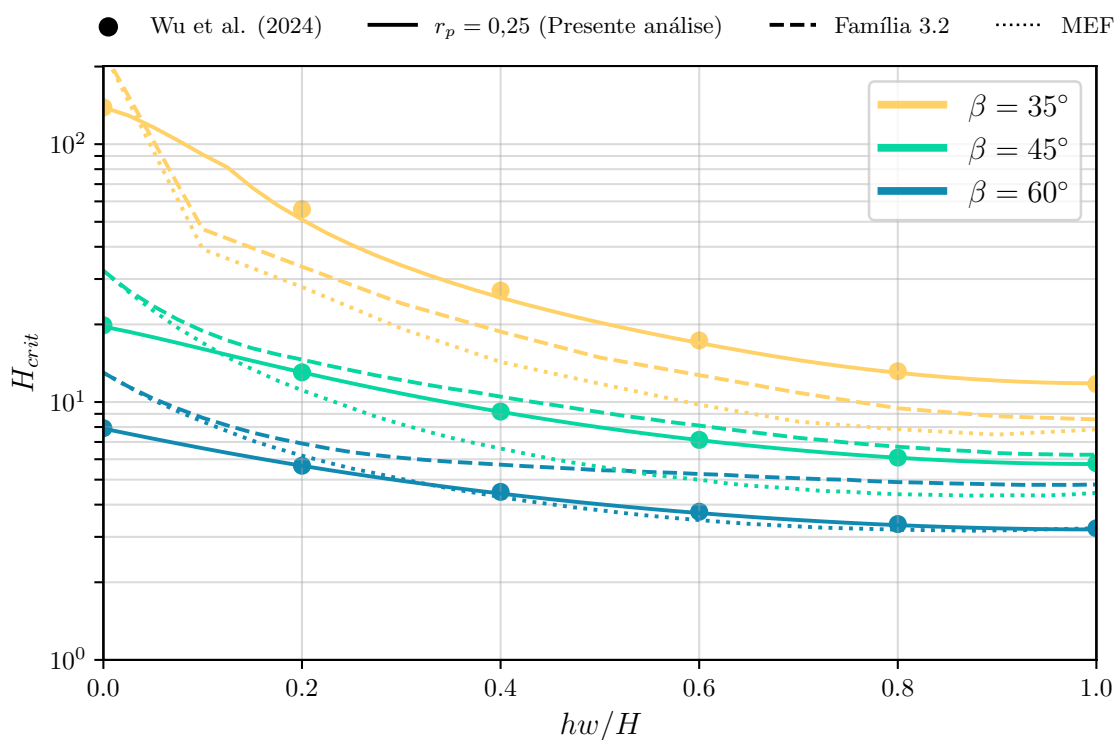


Figura 6.28 – Comparação entre as abordagens, caso referência 2 (WU et al., 2024)

Inicialmente verifica-se que os resultados obtidos via coeficiente de poropressão r_p são coincidentes com os valores apresentados por Wu et al. (2024) em ambos os casos referência, reforçando que a abordagem foi implementada corretamente. Continuando a avaliação dos resultados pelo Caso Referência 1, verifica-se que, embora apresentem boa convergência para $\beta = 60^\circ$, a utilização da abordagem via MEF resulta em valores 17% inferiores para $\beta = 45^\circ$ e 44% inferiores para $\beta = 30^\circ$ quando comparados com a abordagem via r_p no caso extremo $h_w = H$. Uma tendência semelhante é observada para os resultados via Família 3.2, embora apresente boa convergência com os resultados via r_p para $\beta = 45^\circ$, são encontrados valores 47% superiores para $\beta = 60^\circ$ e 25% inferiores para $\beta = 30^\circ$.

Seguindo para o Caso Referência 2, observa-se que a mesma tendência é encontrada. A utilização da abordagem via MEF resulta agora em valores 23% inferiores para $\beta = 45^\circ$ e 33% inferiores para $\beta = 30^\circ$ quando comparados com a abordagem via r_p no caso extremo $h_w = H$. Já, para a abordagem via Família 3.2, são encontrados valores 49% superiores para $\beta = 60^\circ$ e 28% inferiores para $\beta = 30^\circ$.

Avaliando a utilização da abordagem simplificada, verifica-se que quando comparados com os resultados obtidos via MEF, os valores obtidos via coeficiente de poropressão r_p superestimam a estabilidade dos taludes em todos os casos com seca superior à 20%. Isso indica que, ao menos para os casos referência em questão, um valor superior à $r_p = 0,25$ deveria ser utilizado, ressaltando a problemática de utilização do método.

Em relação ao impacto de uma seca completa sobre a estabilidade de estruturas pode-se utilizar como exemplo o caso referência 2. Comparando uma condição hidráulica de seca completa $h_w = H$ com a condição imediatamente anterior $h_w = 0$, verifica-se uma redução de 86% na altura crítica em taludes com inclinação $\beta = 45^\circ$ e 75% em taludes com inclinação $\beta = 60^\circ$. No caso particular do talude de inclinação $\beta = 35^\circ$ a consideração de seca completa é suficiente para reduzir um talude infinitamente estável para uma altura crítica $H_{crit} = 7,8$.

6.4.5 Efeito da ortotropia da permeabilidade sobre a estabilidade

Nesta seção será analisado o efeito da anisotropia do tensor \underline{K} sobre a estabilidade da estrutura. A anisotropia será introduzido por meio de um fator $\alpha = k_h/k_v$, como definido na subseção 5.2.4. Para todos os casos, serão consideradas tanto os campos de percolação obtidos analiticamente, através das Famílias 3.1 e 3.2, como numericamente, através do Método dos Elementos Finitos.

Inicialmente, considera-se uma seca completa, e fixa-se $H = 5 \text{ m}$, $\beta = 40^\circ$, $L_m = 4H$, $c = 10 \text{ kPa}$, $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ e $\gamma_w = 9,8 \text{ kN/m}^3$. Figuras 6.29 e 6.30 apresentam os fatores de estabilidade para α variando entre 1 e 10, considerando $\varphi = 10^\circ$ e $\varphi = 30^\circ$, respectivamente.

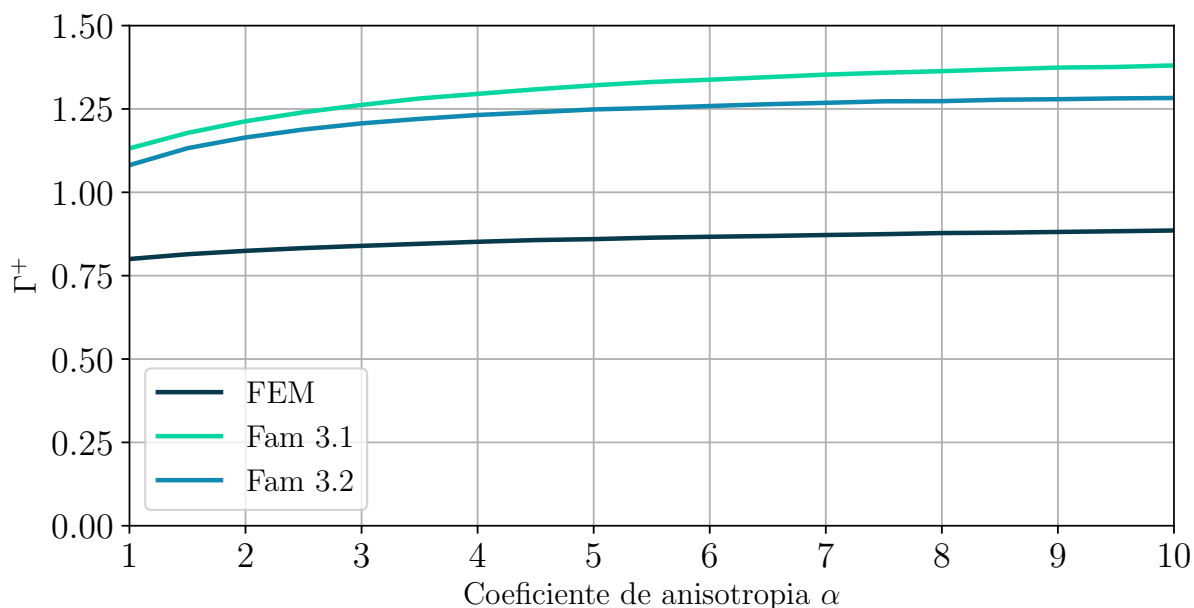


Figura 6.29 – Fator de Estabilidade para diferentes α , com $\varphi = 10^\circ$.

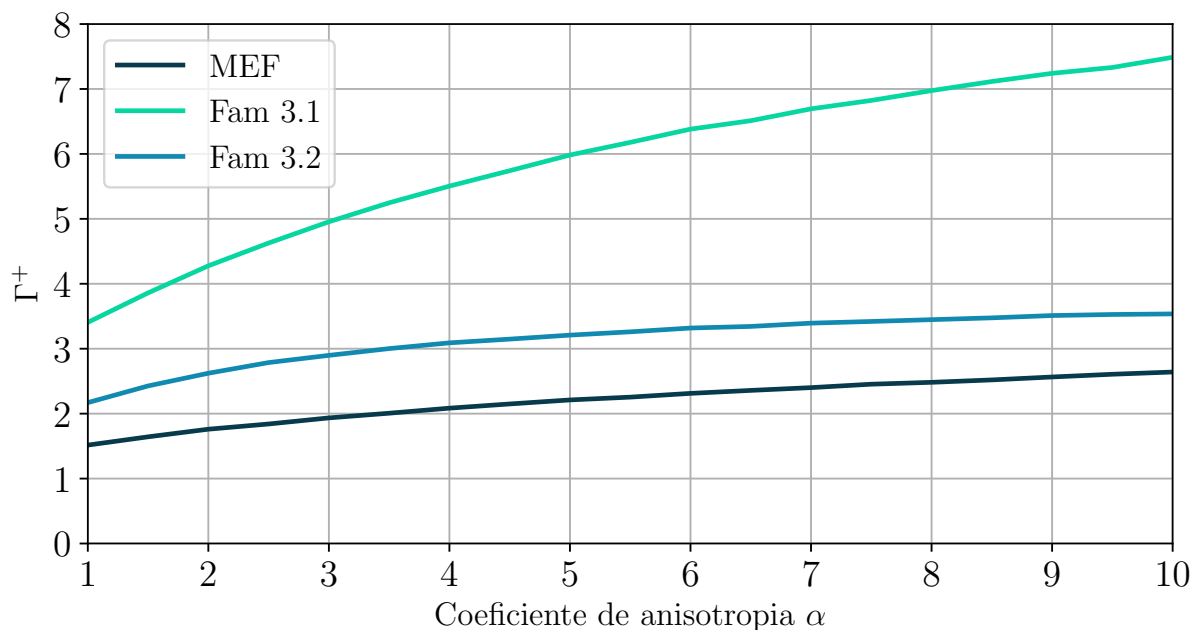


Figura 6.30 – Fator de Estabilidade para diferentes α , com $\varphi = 30^\circ$.

Analisando os gráficos observa-se que os resultados referentes as soluções analíticas avaliam a estrutura como mais segura quando comparados à solução via MEF. Comparando as soluções referentes as Famílias 3.1 e 3.2, verifica-se um maior distanciamento para α e φ elevados. Em termos do fator de anisotropia, observa-se um aumento em segurança quando considerado $\alpha > 1$, isto é, uma permeabilidade horizontal superior à permeabilidade vertical, sendo mais perceptível para $\varphi = 30^\circ$.

Em uma segunda análise, varia-se a inclinação do talude, considerando os mesmo valores fixados anteriormente. A Figura 6.31 apresenta o Fator de Estabilidade para $\alpha = 1; 5; 10$.

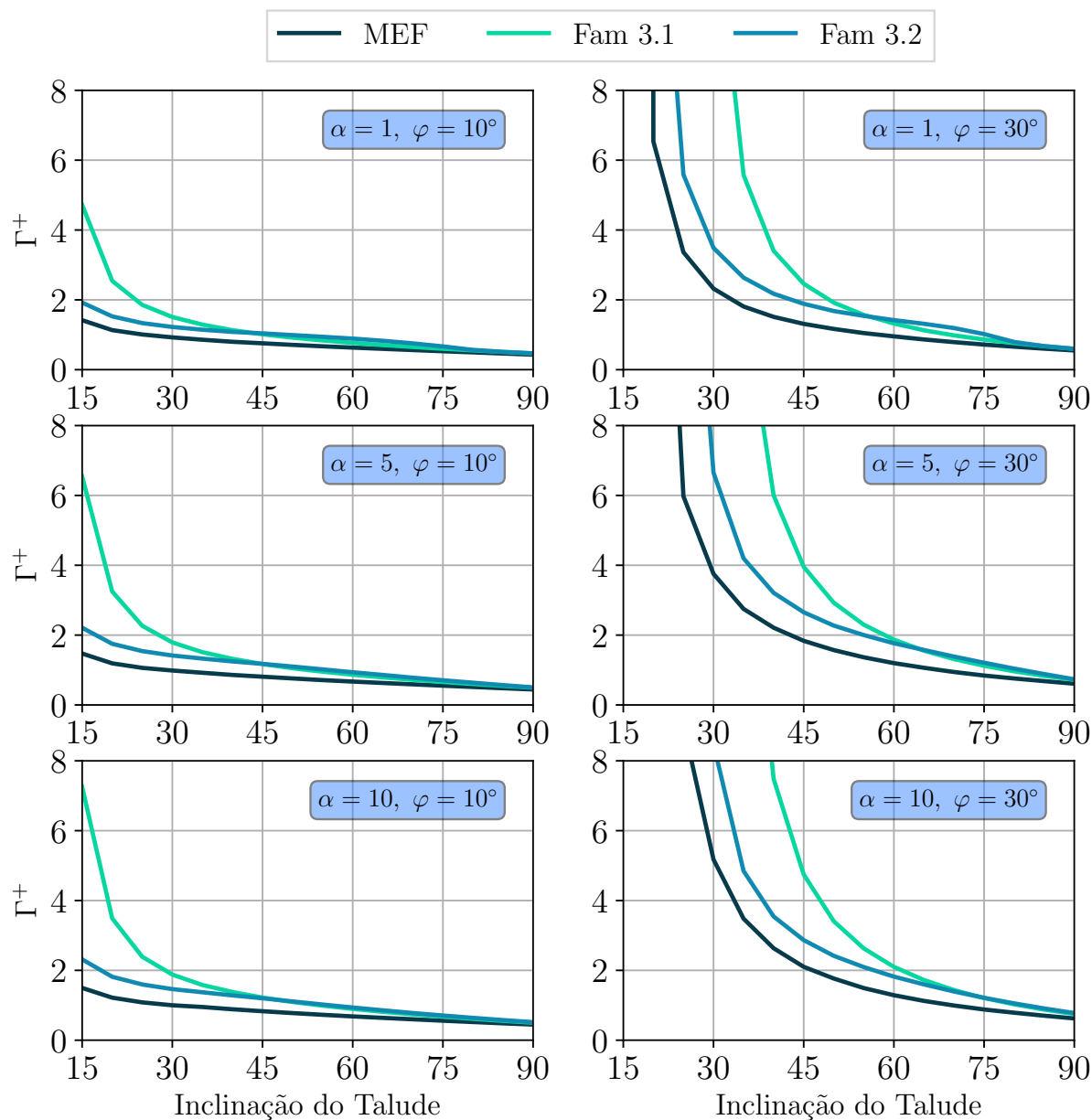


Figura 6.31 – Fator de Estabilidade para diferentes α , β e φ .

A tendência do gráfico anterior é novamente observada. A consideração da anisotropia, quando $k_h > k_v$, eleva a segurança da estrutura. Em relação às soluções analíticas, estas apresentam boa convergência com os resultados via MEF, para inclinações altas. Já para inclinações baixas, apenas a solução da Família 3.2 parece se adequar melhor à solução numérica, mesmo que superestimando a segurança da estrutura.

7 VARIABILIDADE DAS PROPRIEDADES DO SOLO NA ANÁLISE DE ESTABILIDADE

No Capítulo 6, apresentou-se uma primeira abordagem para o problema de estabilidade de taludes em presença de forças de percolação. As formulações foram deduzidas a partir de premissas determinísticas, isto é, da consideração que o solo, ou cada camada de solo do sistema material, se comporta conforme a média da distribuição espacial de suas propriedades.

Neste capítulo, a análise incorpora o caráter probabilístico inerente às propriedades de solos. Inicialmente, será apresentada uma descrição da variabilidade dessas propriedades. Em seguida, desenvolve-se a formulação para gerar campos aleatórios, baseada em processos estocásticos e na Expansão de Karhunen–Loève. Posteriormente, é apresentada uma primeira aplicação da metodologia: a obtenção da probabilidade de falha de taludes, considerando as incertezas relativas à permeabilidade do solo. Por fim, são discutidas as adaptações necessárias aos Mecanismos de Ruptura I e II.

7.1 VARIABILIDADE ESPACIAL DAS PROPRIEDADES INERENTE DOS SOLOS

Conforme descrito nos Capítulos 2 e 4, solos são materiais heterogêneos a diferentes escalas. Elkateb et al. (2003) classifica essa heterogeneidade em duas categorias: litológica, referindo-se a mistura de diferentes tipos de solos em um mesmo domínio; e a variabilidade espacial inerente dos solos, referindo-se a flutuações existentes entre um ponto e outro de um mesmo material. Phoon e Kulhawy (1999) atribuem essas flutuações a processos geológicos naturais que, continuamente, modificam a massa de solo em um local, resultando em propriedades que variam tanto horizontalmente como verticalmente. Mesmo em análises determinísticas, conforme destacado por Elkateb et al. (2003), tais incertezas a respeito do valor médio utilizado devem ser levadas em conta, qualitativamente, através do uso de coeficientes de segurança e bom julgamento técnico.

Ghanem e Spanos (2003) descrevem a aleatoriedade das propriedades como uma consequência da falta de informação a respeito do solo, visto que estas propriedades poderiam ser definidas em cada ponto, de forma determinística, através de ensaios. Evidentemente, na prática da engenharia, realizar uma quantidade substancial de ensaios é impraticável, sendo usual a caracterização do solo a partir de um número baixo de observações. Além da variabilidade espacial das

propriedades do solo, e da quantidade de ensaios realizados, Phoon e Kulhawy (1999) citam duas fontes primárias adicionais de incerteza: erros de medição, causadas por equipamentos ou operadores; e erros de transformação, devidos a utilização de modelos empíricos para obter propriedades indiretamente. No presente trabalho, no entanto, tais incertezas são desconsideradas.

Conforme ilustrado na Figura 7.1, a variação espacial de uma propriedade do solo $H(\underline{x})$ pode ser decomposta em duas parcelas (PHOON; KULHAWY, 1999):

$$H(\underline{x}) = t(\underline{x}) + w(\underline{x}) \quad (7.1)$$

onde t representa uma média local que varia suavemente no espaço, e w a componente flutuante em relação à média local. Em geral, t é simplesmente tomado como constante, representando o valor médio da propriedade do solo, ou como função da coordenada espacial. Esta última escolha é empregada, por exemplo, para representar a elevação da rigidez de um solo em maiores profundidades devido às tensões de confinamento.

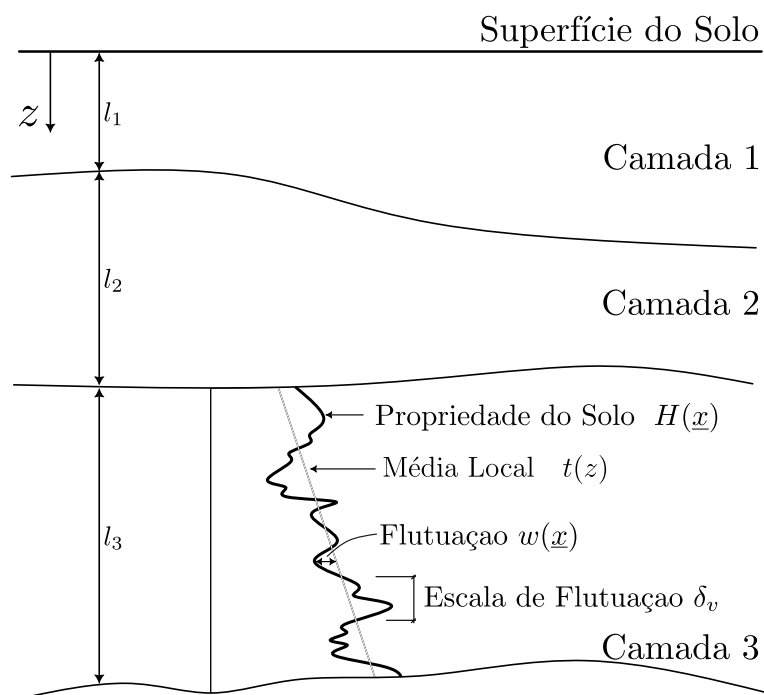


Figura 7.1 – Variabilidade inerente dos solos (PHOON; KULHAWY, 1999).

Evidentemente, as propriedades do solo não variam de forma aleatória de ponto a ponto, mas sim gradualmente, seguindo um padrão quantificado por uma estrutura de correlação (ELKATEB et al., 2003). Na Figura 7.1, por exemplo, a escala de flutuação δ_v caracteriza a correlação entre as propriedades de dois pontos no solo. Valores de δ_v baixos, indicam uma alta frequência da função w , enquanto funções com δ_v elevados, indicam propriedades semelhantes para pontos próximos. Alternativamente, pode-se caracterizar a correlação a partir de uma função de Covariância

$C(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ e distâncias de autocorrelação verticais e horizontais L_x, L_y, L_z (ou simplesmente L_x e L_y em problemas analisados em deformação plana), que indicam, de forma semelhante, o grau de variação das propriedades existente entre dois pontos.

Devido a essa estrutura de correlação, parâmetros estatísticos clássicos como a média μ e Desvio Padrão σ são insuficientes para descrever a distribuição espacial das propriedades do solo (CHO, 2010). Uma forma racional de modelar a variabilidade espacial dos solos (PHOON; KULHAWY, 1999) é a utilização de campos estocásticos ditos homogêneos, isto é, tomando μ e σ constantes em toda camada do solo, e a covariância $C(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ apenas função das distâncias entre os pontos \underline{x}_1 e \underline{x}_2 . A abordagem descrita é utilizada por autores como: Cho (2010), na caracterização da coesão c e do ângulo de atrito φ ; Srivastava et al. (2010) e Griffiths e Fenton (1993) na caracterização da permeabilidade do solo; Ghanem e Spanos (2003), para caracterizar o módulo de elasticidade E de sistemas materiais.

Uma vez definida a abordagem através de campos estocásticos homogêneos, cada camada de solo pode ser totalmente caracterizado por uma função de covariância $C(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$, uma média μ e um desvio padrão σ . A partir destas grandezas, define-se o Coeficiente de Variação (CdV), ou Desvio Padrão Relativo, como:

$$CdV = \frac{\sigma}{\mu}, \quad \mu \neq 0 \quad (7.2)$$

expressando, convenientemente, o Desvio Padrão em termos da média. Na falta de ensaios específicos em casos aplicados, a caracterização estatística para cada propriedade do solo pode ser encontrada em compilações apresentadas, por exemplo, em Baecher e Christian (2005), Phoon e Kulhawy (1999) e Duncan (2000).

Em relação à utilização de compilações de resultados, destacam-se dois pontos de atenção (PHOON; KULHAWY, 1999): de maneira geral, devido a outras fontes de incerteza, caracterizações em termos de CdV disponíveis na literatura resultam em variabilidades superiores as de fato existentes *in loco*; e segundo, mesmo tratando-se de um único tipo de solo, tanto o CdV como as distâncias de autocorrelação podem apresentar valores distintos para diferentes regiões geológicas. Dessa forma, recomenda-se cautela ao utilizar definições genéricas, especialmente em casos com pouca (ou nenhuma) informação experimental.

No presente trabalho, considera-se a variabilidade espacial de três propriedades em particular: a Coesão c , o ângulo de atrito φ e a permeabilidade \underline{K} . Valores típicos de CdV são (BAECHER; CHRISTIAN, 2005; DUNCAN, 2000; CHERUBINI, 2000): 10 – 70%, para a coesão efetiva; 5 – 20% para o ângulo de atrito efetivo; 60 – 100% para a permeabilidade saturada.

Em relação às distâncias de correlação e referindo-se a configuração em Deformação Plana paralelamente ao eixo O_{xy} , El-Ramly et al. (2003) descrevem que, tipicamente, L_x está no

intervalo de 10 – 40 m enquanto L_y está no intervalo de 1 – 3 m . Outros trabalhos (CHO, 2010; GRIFFITHS; FENTON, 2004) estudam o efeito da distância de correlação sobre a estabilidade de taludes. No presente estudo, são fixados valores típicos $L_x = 20 m$ e $L_y = 2 m$, conforme utilizado em Cho (2010).

7.2 DESCRIÇÃO PROBABILÍSTICA DO PROBLEMA DE ESTABILIDADE

No Capítulo 4, demonstrou-se como a segurança de uma estrutura saturada pode ser avaliada através da abordagem cinemática da Análise Limite formulada em tensões efetivas. No Capítulo 6, partindo desse conceito, a segurança de taludes foi caracterizada a partir da minimização da função Γ , explorando uma classe de campos de velocidades (Mecanismo de Ruptura) relevantes. Explicitamente, Γ pode ser expressa como a função de um vetor com todas as propriedades geométricas e distribuição espacial das propriedades do solo necessárias para avaliar a estabilidade de estruturas $\underline{\chi} = (c, \varphi, \underline{K}, \beta, H, h_w, \dots)$, e de um campo de velocidades \underline{v} na classe considerada:

$$\Gamma(\underline{\chi}, \underline{v}) = \frac{P_{rm}(\underline{\chi}, \underline{v})}{P_{\gamma}(\underline{\chi}, \underline{v}) + P_u(\underline{\chi}, \underline{v})} \quad (7.3)$$

Nessa formulação, o Fator de Estabilidade de um talude caracterizado por $\underline{\chi}$ passa a ter a forma:

$$\Gamma^+(\underline{\chi}) = \min_{\underline{v}} \Gamma(\underline{\chi}, \underline{v}) \quad (7.4)$$

Para incorporar o aspecto probabilístico à avaliação de estabilidade, segue-se a formulação apresentada em Hong e Roh (2008). Cada parâmetro de $\underline{\chi}$ passa a ser descrito por uma variável aleatória, ou como um conjunto correlacionado de variáveis aleatórias, no caso de campos estocásticos, resultando um vetor de variáveis aleatórias \underline{X} representando c , φ e \underline{K} . $\Gamma^+(\underline{X})$ agora descreve a função de estado limite no espaço de parâmetros \underline{X} , $\Gamma^+(\underline{X}) = 1$ representando a fronteira entre as regiões de falha e estabilidade.

Dessa forma, a Probabilidade de falha P_f é calculada como (BAECHER; CHRISTIAN, 2005):

$$P_f = P[\Gamma^+(\underline{X}) \leq 1] = \int_{\Gamma^+(\underline{X}) \leq 1} f_{\underline{X}}(\underline{X}) d\underline{X} \quad (7.5)$$

onde $f_{\underline{X}}(\underline{X})$ representa a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias de \underline{X} , sendo a integração realizada sobre o domínio de falha do espaço \underline{X} .

Devido à dificuldade de calcular a expressão exata de P_f definida na Equação 7.5, em especial em razão do desconhecimento *a priori* do domínio de integração em casos complexos (GHANEM; SPANOS, 2003), algumas técnicas alternativas de aproximação podem ser utilizadas. Hong e

Roh (2008) optam por uma abordagem baseada no Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM). Nesse método, calcula-se um índice de confiabilidade β_R , sendo a probabilidade de falha estimada diretamente por $P_f = \Phi(-\beta_R)$, onde Φ é a função acumulada da distribuição Normal padrão. Particularidades e dificuldades a respeito da obtenção do parâmetro β_R não serão abordadas aqui.

No presente trabalho, a Equação 7.5 será avaliada via o Método de Monte Carlo. Ghanem e Spanos (2003) descrevem o Método de Monte Carlo como uma ferramenta matemática versátil e eficiente, pontuando que a melhor alternativa disponível a uma função de distribuição de probabilidade explícita, é possuir uma população suficientemente grande com comportamento correspondente às variáveis aleatórias. Nesse contexto, considerando as incertezas a respeito de c , φ e \underline{K} , o método de Monte Carlo consiste em duas etapas: primeiro gerar um conjunto discreto de amostras de campos aleatórios condizentes com a distribuição de probabilidade das propriedades estudadas; e segundo, avaliar Γ^+ , de forma determinística, em cada um dos campos simulados. Ao final do processo obtém-se toda uma distribuição estatística que pode ser utilizada para estudar outros fatores além da probabilidade de falha.

Uma vez avaliado uma quantidade de amostras S suficientemente grande, a estimativa da probabilidade de falha P_f é calculada simplesmente por:

$$P_f = \frac{n_f}{S} \quad (7.6)$$

onde n_f é o número de configurações de falha ($\Gamma^+ < 1$) encontradas.

A precisão da estimativa da probabilidade de falha resultante pode ser avaliada através do seu Coeficiente de Variação. Supondo que cada ciclo de simulações de Monte Carlo constitua um ensaio de Bernoulli e que o número de falhas n_f para um dado S segue a distribuição binomial, Haldar e Mahadevan (2000) apresentam a seguinte equação:

$$\text{CdV } P_f = \sqrt{\frac{1 - P_f}{S \cdot P_f}} \quad (7.7)$$

Note que, como $\text{CdV } P_f$ é inversamente proporcional ao número de amostras consideradas, então $S \rightarrow \infty \Rightarrow \text{CdV } P_f \rightarrow 0$, indicando que um maior número de amostras reduz a incerteza relacionada à probabilidade de falha. Valores de $\text{CdV } P_f$ abaixo de 5% ou 2,5% são geralmente tomados como padrão em problemas de confiabilidade.

Na seção 7.3, discutem-se os métodos utilizados para a obtenção de campos aleatórios referentes a descrição estatística das propriedades do solo, conforme descrito na seção 7.1.

7.3 GERAÇÃO DE CAMPOS ALEATÓRIOS

Um campo aleatório $H(\underline{x}, \theta)$, também dito campo estocástico, é definido por Ghanem e Spanos (2003) como um conjunto de variáveis aleatórias relacionadas. Na definição de H , \underline{x} representa um ponto do domínio Ω e θ um evento do espaço de eventos aleatórios Θ . Embora a formulação apresentada seja concentrada em Campos Estocásticos (Domínio espacial) é em essência a mesma utilizada para simular Processos Estocásticos (Domínio temporal).

Uma forma conveniente de abordar a geração de campos estocásticos consiste na utilização de métodos de expansão em séries. Embora existam diversos métodos com esta finalidade, dos quais cita-se o método de Subdivisão da Média Local (LAS) (FENTON; VANMARCKE, 1990), o método da representação espectral (SHINOZUKA; DEODATIS, 1991) e o método das bandas giratórias (STEFANOU, 2009), optou-se no presente trabalho por uma abordagem baseado na expansão de Karhunen-Loève (GHANEM; SPANOS, 2003). A escolha do método deu-se por dois motivos principais (LIU et al., 2019): a quantidade de variáveis aleatórias discretas necessárias para uma dada precisão é relativamente baixa, apresentando maior eficiência; o campo estocástico resultante é uma função contínua, a qual pode ser facilmente utilizada para calcular as propriedades em qualquer ponto do domínio.

Na expansão de Karhunen-Loève, de maneira similar ao procedimento de tipo Fourier, busca-se uma base ortonormal de funções determinísticas $\{f_n(\underline{x})\}$ definidas no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, de modo que H possa ser escrito como:

$$H(\underline{x}, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) f_n(\underline{x}) \quad (7.8)$$

sendo λ_n um escalar positivo e $\{\xi_n(\theta)\}$ um conjunto de variáveis aleatórias a ser determinado. Na sequência, demonstra-se como $\{f_n(\underline{x})\}$ podem ser encontradas a partir de propriedades-chave da função de Covariância.

Conforme descrito na seção 7.1, dada uma distribuição espacial de variáveis, além de parâmetros como a média μ e o coeficiente de variação CdV , é necessário definir uma função de Covariância (ou autocorrelação) $C(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$. De forma geral, a função C descreve a influência que duas variáveis aleatórias definidas em dois pontos $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \Omega$ possuem uma sobre a outra. A Figura 7.2, a título de ilustração, apresenta a comparação entre dois campos com propriedades μ e σ semelhantes, porém Covariâncias distintas. Em específico, os pontos do primeiro campo não são correlacionados, enquanto os pontos do segundo possuem correlação exponencial, apresentando uma variação suave de ponto a ponto.

Ao longo das análises desenvolvidas neste trabalho, restringe-se a problemas formuladas no contexto da condição das deformações planas paralelamente ao plano O_{xy} . Neste contexto e,

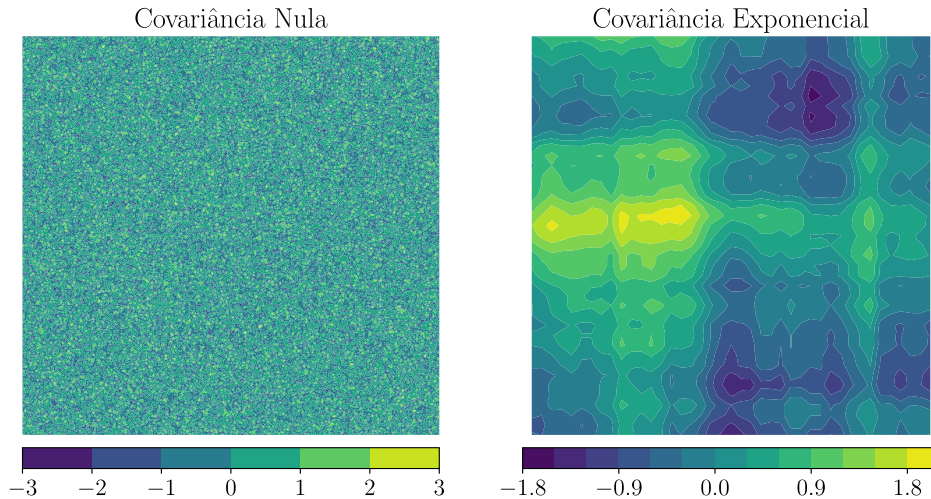


Figura 7.2 – Efeito da covariância sobre um campo aleatório.

embora tratada de forma genérica ao longo desta Seção, fixa-se para o restante do trabalho uma função de covariância exponencial, conforme a Equação 7.9:

$$C(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{L_x} - \frac{|y_1 - y_2|}{L_y}\right) \quad (7.9)$$

sendo $\underline{x}_i = (x_i, y_i)$ e L_x e L_y as distâncias de autocorrelação paralelas à O_x e O_y , respectivamente.

A ideia por trás da expansão de Karhunen-Loève é tomar proveito de algumas propriedades-chave da função de Covariância C . Por definição, (GHANEM; SPANOS, 2003):

- $C(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ exibe valores limitados. Em particular, a máxima correlação deve ocorrer entre dois pontos $\underline{x}_1 = \underline{x}_2$, correspondendo a $C(\underline{x}_1, \underline{x}_1) = 1$.
- $C(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ possui a propriedade de simetria em relação às variáveis $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$. Como a correlação é função da distância entre dois pontos, evidentemente $C(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = C(\underline{x}_2, \underline{x}_1)$.
- $C(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ é positiva definida. A correlação, conforme definida na Equação 7.9, varia entre 0 (para pontos infinitamente distantes) e 1 (para pontos coincidentes).

Dessa forma, $C(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ admite uma decomposição espectral (GHANEM; SPANOS, 2003):

$$C(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(\underline{x}_1) f_n(\underline{x}_2) \quad (7.10)$$

sendo λ_n e $f_n(\underline{x})$ respectivamente os autovalores e autofunções do núcleo de covariância, isto é, são soluções da equação integral de Fredholm de segundo tipo:

$$\int_{\Omega} C(\underline{x}_1, \underline{x}_2) f_n(\underline{x}_1) d\underline{x}_1 = \lambda_n f_n(\underline{x}_2) \quad (7.11)$$

Como consequência das propriedades de $C(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$, pode-se demonstrar ainda que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forma uma base ortogonal de $L^2(\Omega)$ (quadrado integrável). Sem perda de generalidade, pode-se normalizar as funções conforme o critério:

$$\int_{\Omega} f_n(\underline{x}) f_m(\underline{x}) d\underline{x} = \delta_{nm} \quad (7.12)$$

onde δ_{nm} representa o Delta de Kronecker ($\delta_{nm} = 1$ se $n = m$ e $\delta_{nm} = 0$ se $n \neq m$). Sendo $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um espaço completo, pode-se afirmar que a série definida em Equação 7.8 é quadrado integrável, e, portanto, bem definida.

Na prática, é conveniente assumir que $\{\xi_n(\theta)\}$ possui distribuição normal $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma = 1)$ e construir um novo campo aleatório associado com H , tendo as propriedades μ e σ desejadas:

$$\hat{H}(\underline{x}, \theta) = \mu + \sigma H(\underline{x}, \theta) = \mu + \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) f_n(\underline{x}) \quad (7.13)$$

onde μ e σ são, respectivamente, a média e o desvio padrão de \hat{H} , e $\{\xi_n(\theta)\}$ é um conjunto de variáveis aleatórias não correlacionadas com distribuição Normal padrão.

Por fim, considera-se a aproximação do campo aleatório truncando a série infinita em um $M \in \mathbb{N}$ adequado.

$$\hat{H}(\underline{x}, \theta) \approx \mu + \sigma \sum_{n=1}^M \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\theta) f_n(\underline{x}) \quad (7.14)$$

A escolha de um M adequado depende de fatores como a precisão desejada, e a função de covariância escolhida (CHO, 2010).

7.3.1 Aproximação Numérica via Elementos Finitos

Conforme descrito na seção anterior, o método resume-se a encontrar uma base de funções $\{f_n\}$ e seus autovalores $\{\lambda_n\}$ associados. A Equação 7.11, no entanto, possui solução analítica apenas para casos simples, em domínios regulares como retângulos ou círculos. Dessa forma, no presente trabalho, optou-se por uma abordagem numérica em Elementos Finitos. Seguindo a formulação de Ghanem e Spanos (2003), cada autofunção f_k do núcleo de covariância $C(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ é descrita como:

$$f_k(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N d_i^{(k)} h_i(\underline{x}) \quad (7.15)$$

sendo $N \in \mathbb{N}$, o número de elementos considerados na aproximação, $d_i^{(k)}$ um escalar, e $\{h_i\}$ um conjunto de funções quadrado integrável fixadas.

Substituindo 7.15 em 7.11, o resíduo associado ao truncamento do somatório em N é dado por:

$$R_N = \sum_{i=1}^N d_i^{(k)} \left[\int_{\Omega} C(\underline{x}_1, \underline{x}_2) h_i(\underline{x}_2) d\underline{x}_2 - \lambda_k h_i(\underline{x}_1) \right] \quad (7.16)$$

Através de um procedimento semelhante ao Método de Galerkin, determina-se que o resíduo seja ortogonal ao espaço de funções h_j , isto é:

$$\langle R_N, h_j(\underline{x}) \rangle = \int_{\Omega} R_N h_j(\underline{x}) d\underline{x} = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (7.17)$$

Dessa forma obtêm-se as equações:

$$\sum_{i=1}^N d_i^{(k)} [C_{ij} - \lambda_k B_{ij}] = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (7.18)$$

onde,

$$C_{ij} = \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} C(x_1, x_2) h_i(x_2) dx_2 \right] h_j(x_1) dx_1 \quad (7.19)$$

$$B_{ij} = \int_{\Omega} h_i(x_1) h_j(x_1) dx_1 \quad (7.20)$$

As N equações em questão podem ser convenientemente reescritas em uma única equação de matrizes de ordem N :

$$C \underline{D} = \underline{\lambda} B \underline{D} \quad (7.21)$$

onde

$$D_{ij} = d_i^{(j)} \quad (7.22)$$

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i \quad (7.23)$$

Resolvendo o problema de Autovalores dado pela Equação 7.21, obtêm-se para cada n um autovalor λ_n e um autovetor $\underline{d}^{(n)} = [d_i^{(n)}]_{i=1, \dots, N}$ associado. Multiplicando $\underline{d}^{(n)}$ pelo conjunto de funções $\{h_i\}_{i=1, \dots, N}$, conforme a Equação 7.15, obtêm-se por fim a autofunção $f_n(\underline{x})$, que pode ser normalizada pelo critério definido. Destaca-se ainda algumas propriedades de C e B . Como são matrizes simétricas e positiva definidas, têm-se possíveis simplificações na implementação e solução do problema.

Em termos do Método de Elementos Finitos (GHANEM; SPANOS, 2003), cada função do conjunto $\{h_i\}$ pode ser definida como a soma das funções de interpolação em cada nó da malha, resultando em funções polinomiais definidas por parte, em cada elemento concorrente. Nessa escolha particular de funções h_i , cada autovetor $\underline{d}^{(k)}$ passa a representar a forma da autofunção f_n nos nós da malha. A Figura 7.3, a título de ilustração, exemplifica tal consideração em um caso bidimensional, com elementos triangulares de primeira ordem.

No presente trabalho, o problema de autovalores dado pela Equação 7.21 (e o problema hidráulico referente) será resolvido utilizando elementos quadriláteros isoparamétricos de segunda ordem, compostos por nove nós. Para a integração numérica por Gauss-Legendre, optou-se pela utilização

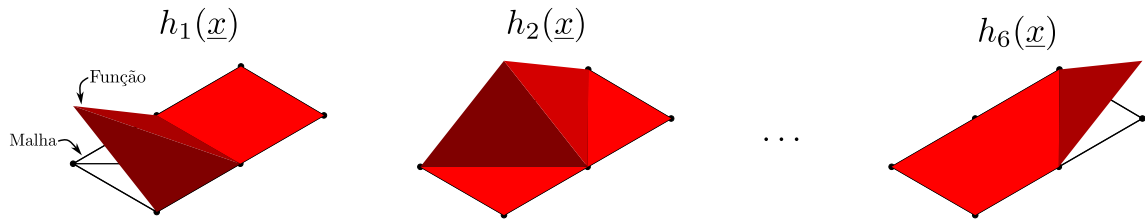


Figura 7.3 – Escolha do conjunto de funções h_i em uma malha de Elementos Finitos.

de 9 pontos de integração. Tal consideração justifica-se pela escolha de $C(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ exponencial, transformando as componentes a serem integradas em \mathbb{C}_{ij} em funções não polinomiais.

Visando verificar a implementação em Elementos Finitos desenvolvida em linguagem Python, uma comparação com casos simples cujas soluções analíticas são disponíveis é apresentado no Apêndice B.

7.3.2 Campos aleatórios não-Gaussianos

A formulação apresentada até então descreve a geração de campos aleatórios baseado em uma distribuição Normal. Embora tal consideração seja apropriada e suficiente para a maioria dos casos, acaba por não ser adequada para descrever campos aleatórios com valores exclusivamente positivos. Os campos a serem gerados no presente trabalho possuem sentido físico, representando as propriedades do solo como permeabilidade, coesão e ângulo de atrito, as quais não apresentam valores negativos.

Segundo Cho (2010), uma forma de evitar esse problema é considerar campos aleatórios com distribuições Log-Normal. Para tal, pode-se simplesmente exponenciar o campo Gaussiano apresentado em Equação 7.14, obtendo:

$$H(\underline{x}, \theta) = \exp \left[\mu_{ln} + \sigma_{ln} \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_n} f_n(\underline{x}) \xi_n(\theta) \right] \quad (7.24)$$

Embora agora H apresente uma distribuição Log-Normal, os parâmetros μ_{ln} e σ_{ln} descrevem, respectivamente, a média e desvio padrão de seu logaritmo natural. Para obter uma distribuição que resulte efetivamente em um campo aleatório com média μ e desvio padrão σ , é necessário efetuar a transformação:

$$\mu_{ln} = \ln \left(\frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}} \right) \quad (7.25)$$

$$\sigma_{ln} = \sqrt{\ln \left(1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2} \right)} \quad (7.26)$$

7.4 EXEMPLO ILUSTRATIVO: O PROBLEMA DE ESTABILIDADE DE TALUDE CONSIDERANDO VARIABILIDADE DA PERMEABILIDADE

Uma vez verificada a implementação numérica do procedimento de geração de campos estocásticos, propõe-se uma primeira aplicação da metodologia no contexto do problema de estabilidade de taludes. Na presente seção será descrito em detalhes o processo de avaliação da probabilidade de falha de um talude em deformação plana, considerando a distribuição estocástica da permeabilidade do solo. O problema será dividido em cinco etapas: geração da malha de elementos finitos; solução do problema de autovalores; geração de campos aleatórios de permeabilidade; solução do problema hidráulico no caso particular $h_w = H$ considerando os campos aleatórios; e por fim, obtenção dos fatores de segurança associados a cada campo aleatório a partir do processo de minimização dos Mecanismos I e II.

Inicialmente, para a geração da Malha em Elemento Finitos, alguns parâmetros precisam ser fixados. Neste caso de exemplo, considera-se um talude com altura $H = 5\text{ m}$, inclinação $\beta = 45^\circ$ e $L_m = 15\text{ m}$. Além disso, será considerado que a malha estende-se 50 m horizontalmente partindo do topo do talude, e 30 m verticalmente a partir do pé do talude. A malha, gerada a partir do *Software Gmsh*, é apresentada na Figura 7.4.

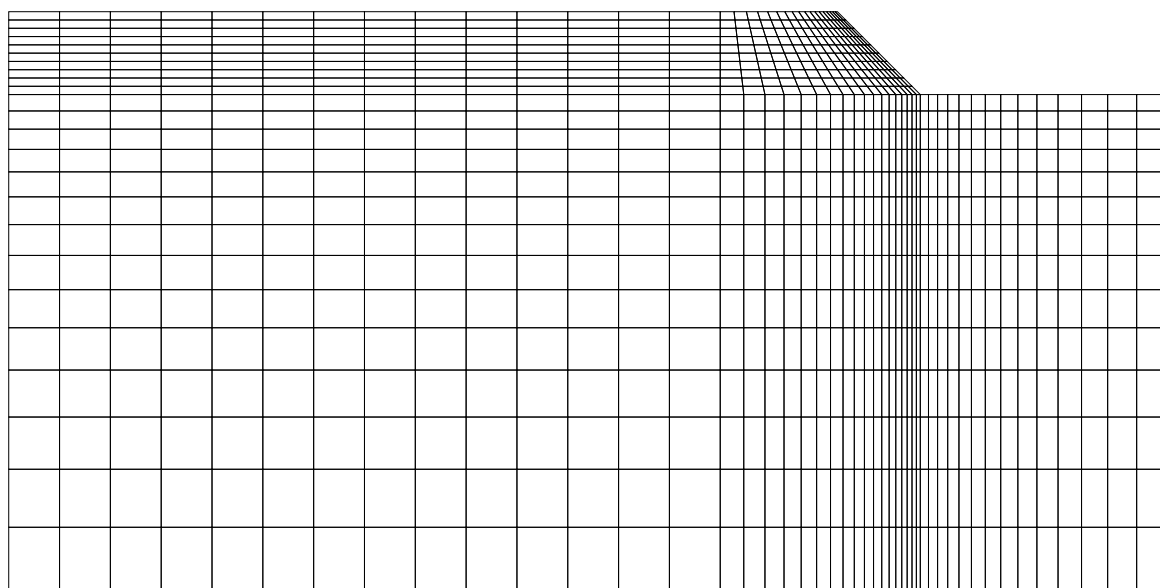


Figura 7.4 – Malha de Elementos Finitos Utilizada na Aplicação.

Após a geração da malha, utiliza-se uma implementação em linguagem Python para solucionar o problema de autovalores dado pela equação de Fredholm. Nesta etapa fixam-se as distâncias de correlação $L_x = 20\text{ m}$ e $L_y = 2\text{ m}$. Após a montagem das matrizes \mathbb{C} e \mathbb{B} , obtém-se \mathbb{A} e \mathbb{D} . Como critério de truncamento, descartam-se todos os autovalores inferiores a uma tolerância de 0,01, resultando em um $M = 1736$. O erro de truncamento associado à M , calculado a partir da Equação 7.27 (ALLAIX; CARBONE, 2009), foi estimado em 5,5%, sendo considerado

satisfatório.

$$\varepsilon_M = 1 - \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i}{A} \quad (7.27)$$

onde A é a área total da malha.

Na sequência, todas as autofunções $f_n(\underline{x})$, $1 \leq n \leq M$ são normalizadas. A Figura 7.5 apresenta as duas primeiras autofunções e seus respectivos autovalores.

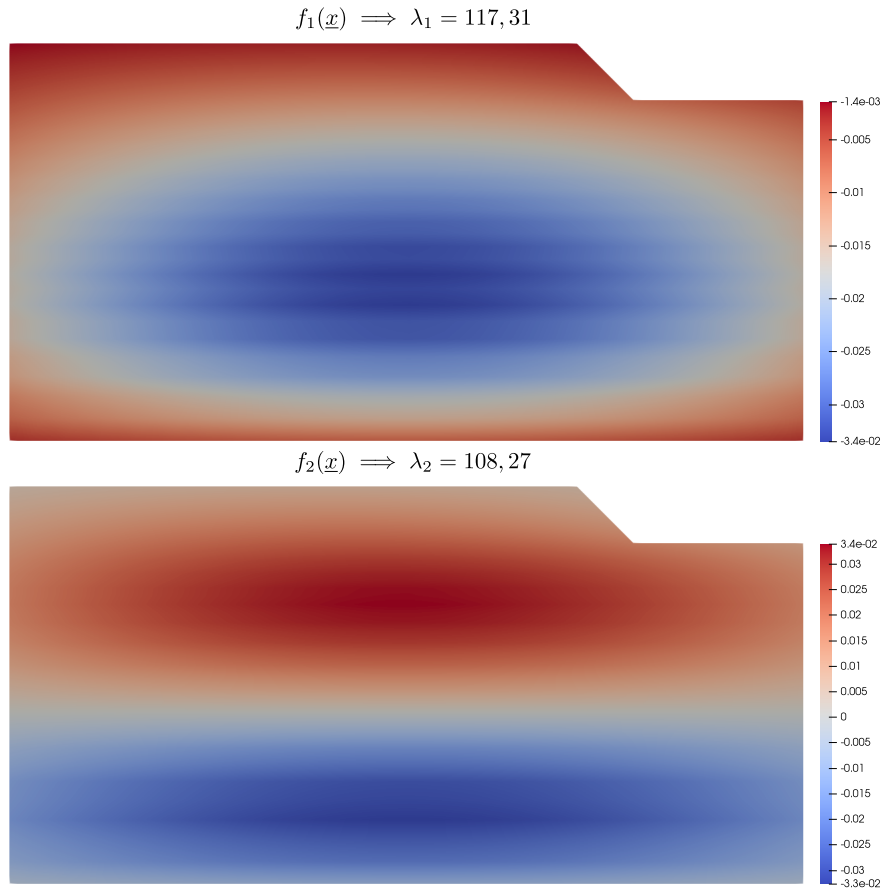


Figura 7.5 – Autofunções e autovalores associados.

A partir dos autovalores e autofunções obtidas, constroem-se um número de amostras de campos aleatórios desejados para a permeabilidade. Neste caso, considerando $\underline{K} = \mu_k \underline{1}$, estipula-se uma média $\mu_k = 10^{-8} m^2 Pa^{-1} s^{-1}$ e um coeficiente de variação $CdV = 50\%$, resultando em um desvio padrão $\sigma_k = 5 \cdot 10^{-9} m^2 Pa^{-1} s^{-1}$. Efetuando a transformação para uma distribuição Log-Normal, encontram-se então μ_{ln} e σ_{ln} . Embora seja possível descrever individualmente cada campo estocástico utilizando a expansão dada pela Equação 7.24, ao lidar com uma grande quantidade de amostras é boa prática tomar uma abordagem matricial.

Inicialmente, geram-se os coeficientes $\xi(\theta)$. Em cada amostra, são necessários M coeficientes ξ_i que multiplicam cada autofunção $f_i(\underline{x})$. Considerando que serão tomadas S amostras de campos aleatórios, tem-se, de forma matricial:

$$\Xi_{M \times S} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (7.28)$$

onde $\mathcal{N}(0, 1)$ representa que os coeficientes da matriz são gerados de forma aleatória a partir de uma distribuição Normal com média 0 e desvio padrão 1.

Na expansão de Karhunen-Loève cada autofunção normalizada é multiplicada pela raiz do autovalor associado. Esse procedimento é antecipado considerando uma matriz Φ definida de forma:

$$\Phi_{ij} = \sqrt{\lambda_j} \mathbb{D}_{ij} \quad (7.29)$$

onde $i \in \{1, 2, \dots, NNOS\}$ representa o índice nodal, sendo $NNOS$ o número total de nós da malha, e $j \in \{1, 2, \dots, M\}$, representa o índice referente às autofunções truncadas em M . Dessa forma tem-se uma matriz $\Phi_{NNOS \times M}$.

A definição das duas matrizes permite substituir o somatório da expansão em cada nó da malha, e em cada Amostra, por uma única multiplicação matricial:

$$\mathbb{A}_{NNOS \times S} = \Phi \cdot \Xi \quad (7.30)$$

onde $\Phi = \Phi_{NNOS \times M}$ e $\Xi = \Xi_{M \times S}$ contém todos os coeficientes $\xi(\theta)$ necessários na geração das amostras.

Por fim, a matriz auxiliar \mathbb{A} pode ser utilizada para obtenção da (agora matriz) $\mathbb{H}(\underline{x}, \theta)$:

$$\mathbb{H}_{ij} = \exp(\mu_{ln} + \sigma_{ln} \mathbb{A}_{ij}) \quad (7.31)$$

onde $i \in \{1, 2, \dots, NNOS\}$ representa o índice nodal e $j \in \{1, 2, \dots, S\}$ o índice da amostra.

Observe que cada coluna da matriz $\mathbb{H}_{NNOS \times S}$ corresponde a um campo aleatório de permeabilidade $H(\underline{x}, \theta)$ distinto, mas com as mesmas propriedades estatísticas gerais. A Figura 7.6 apresente dois campos aleatórios típicos gerados para a análise, juntamente com seus respectivos histogramas dos valores nodais de permeabilidade.

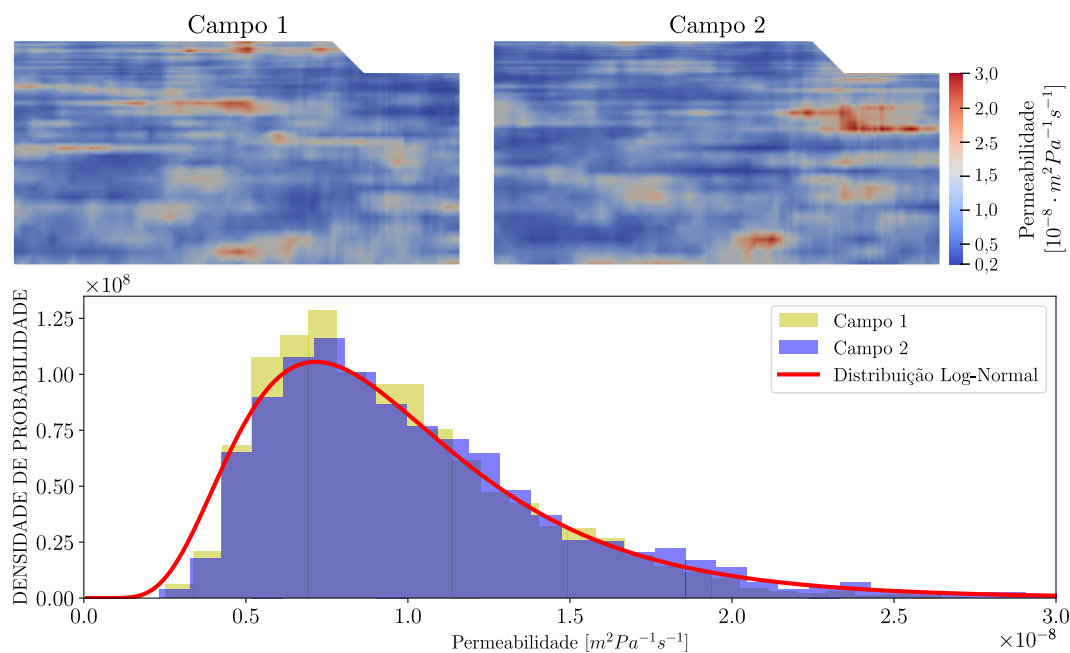


Figura 7.6 – Campos aleatórios típicos de permeabilidade e respectivos histogramas.

Observando os histogramas referentes à cada campo, considera-se que estes se aproximam satisfatoriamente da distribuição Log-Normal desejada. Em relação ao parâmetro de autocorrelação, pode-se observar longas linhas com valores de permeabilidade semelhante, como se o solo estivesse depositado em camadas horizontais. Isso indica que, de fato, $L_x > L_y$, conforme desejado.

Para avaliar a estabilidade do talude em deformação plana é necessário o conhecimento da distribuição do excesso de poropressões u (e seu gradiente) no domínio, e não do campo de permeabilidade aleatório propriamente dito. Dessa forma, em cada campo de permeabilidade, deve-se resolver o problema hidráulico, obtendo agora uma distribuição aleatória de excesso de poropressões. O problema será resolvido a partir do Método dos Elementos Finitos, de forma semelhante ao descrito na subseção 5.2.2, utilizando a malha dada na Figura 7.4. Observa-se que a ilustração se limita ao caso particular de seca total, isto é, $h_w = H$.

Como \underline{K} é variável ao longo do domínio, e consequentemente de cada elemento, deve-se considerar um novo procedimento para avaliar a contribuição de rigidez \mathbb{K}_e . No presente trabalho, em cada ponto de integração do elemento, considera-se um valor \underline{K} obtido via interpolação dos valores nodais de permeabilidade aleatório do elemento. Neste caso, como a mesma malha é utilizada tanto para geração dos campos aleatórios como para solução do problema hidráulico, pode-se empregar diretamente as funções de forma para realizar a interpolação no elemento.

Como forma de comparação dos resultados do problema hidráulico obtidos a partir de cada campo de permeabilidade aleatório, avalia-se o excesso de poropressão u em dois nós da malha de

elementos finitos, conforme ilustrado na Figura 7.7. O histograma apresentado em 7.7 foi obtido a partir da solução do problema hidráulico em uma amostra de 30.000 campos de permeabilidade aleatórios.

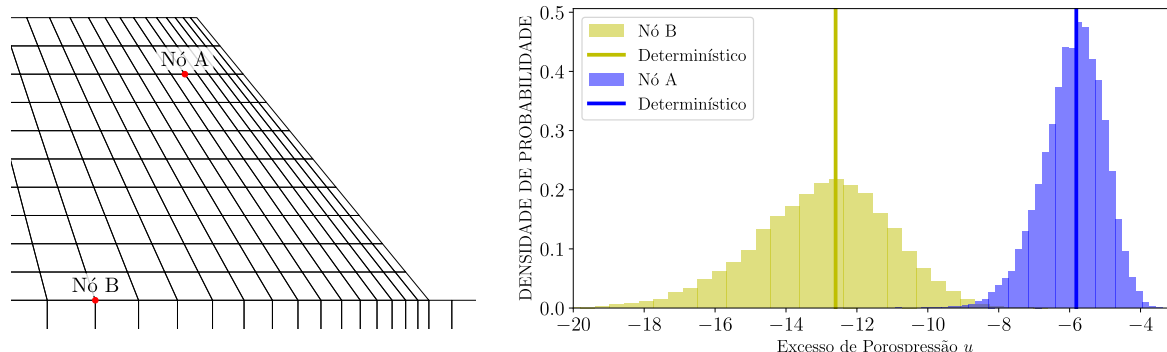


Figura 7.7 – Distribuição do Excesso de poropressão u nos Nós A e B.

Analisando o gráfico apresentado observa-se que o pico de ambos os histogramas estão próximos ao resultado determinístico ($CdV = 0$). Além disso, verifica-se que, para os dois nós destacados, tem-se um CdV de 14,65%. Dessa forma, embora um CdV de 50% tenha sido utilizado para gerar campo de permeabilidade aleatórios, em termos de distribuição de excesso de poropressão, tem-se uma variabilidade inferior na região próxima ao talude, indicando uma baixa sensibilidade do problema hidráulico em relação à aleatoriedade desse parâmetro.

Para avaliar a segurança da estrutura, executa-se o procedimento de otimização de parâmetros descrito no Capítulo 6. Novamente, são considerados os Mecanismos de Ruptura I e II para avaliar via abordagem cinemática a segurança do Talude em deformação Plana, sendo fixados os parâmetros $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $c = 8 \text{ kN/m}^2$ e $\varphi = 32^\circ$. Em uma consideração determinística, onde $\underline{K} = \underline{\mu}_k \underline{1}$ em todo domínio ($CdV=0$), encontra-se um Fator de Estabilidade igual à 1,139.

Antes de prosseguir para a avaliação final, propõe-se uma verificação preliminar da implementação. Nessa análise, gera-se uma pequena amostra de campos estocásticos com CdV progressivamente próximos de 0. Evidentemente, em uma implementação operante, espera-se que, a medida que $CdV \rightarrow 0$, a Função Densidade de Probabilidade obtida via Monte Carlo tenda a uma distribuição degenerada com suporte sobre o Fator de Estabilidade Determinista 1,139. A Figura 7.8 apresenta a comparação entre as distribuições obtidas a partir de um $CdV = 10\%$, 5% , 1% e $0,1\%$. A Figura 7.9 apresenta a evolução do Fator de Estabilidade Médio em função do Número de Amostras consideradas.

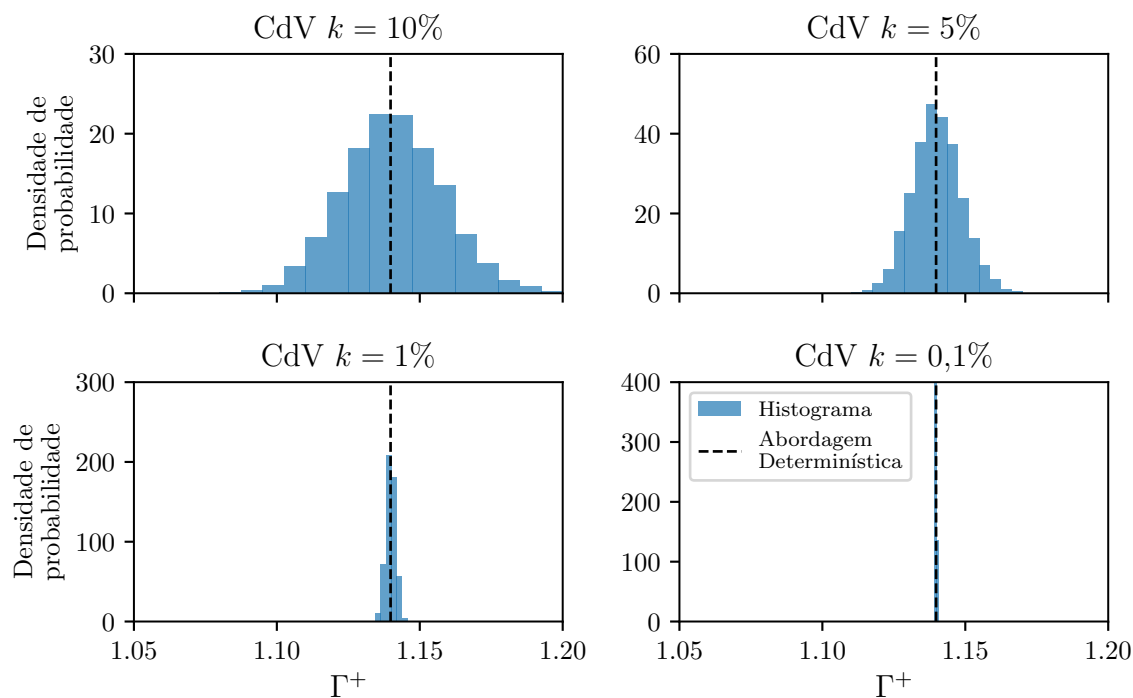


Figura 7.8 – Histograma do Fator de Estabilidade em função do CdV de k .

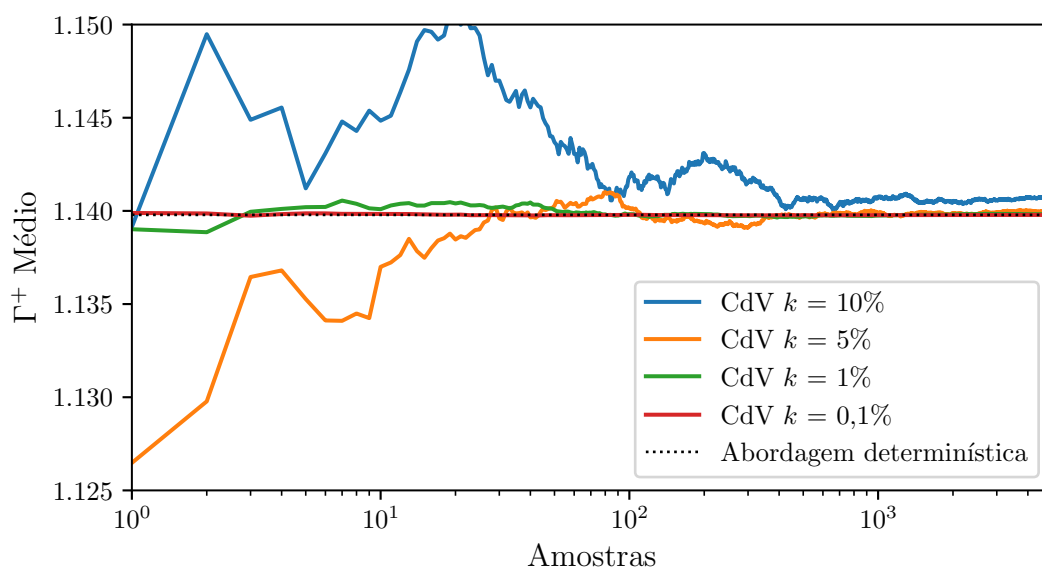


Figura 7.9 – Convergência dos Fatores de Estabilidade médios, em função do CdV .

Embora 5.000 amostras sejam insuficientes para uma caracterização efetiva da distribuição de probabilidade, e, portanto, nada se possa afirmar sobre a probabilidade de falha, a tendência apresentada pelos gráficos corrobora o resultado esperado. De fato, com um $CdV = 0,1\%$, pode-se observar uma distribuição com baixa variabilidade, que se aproxima da abordagem determinística. Dessa forma, tem-se confiança que o método foi implementado corretamente.

Nessa etapa, procura-se também estudar o efeito da quantidade de amostras a ser consideradas no Método de Monte Carlo. A Figura 7.10 apresenta o histograma dos valores encontrados para o Fator de Estabilidade para as primeiras 1.000, 5.000, 50.000 e 200.000 amostras.

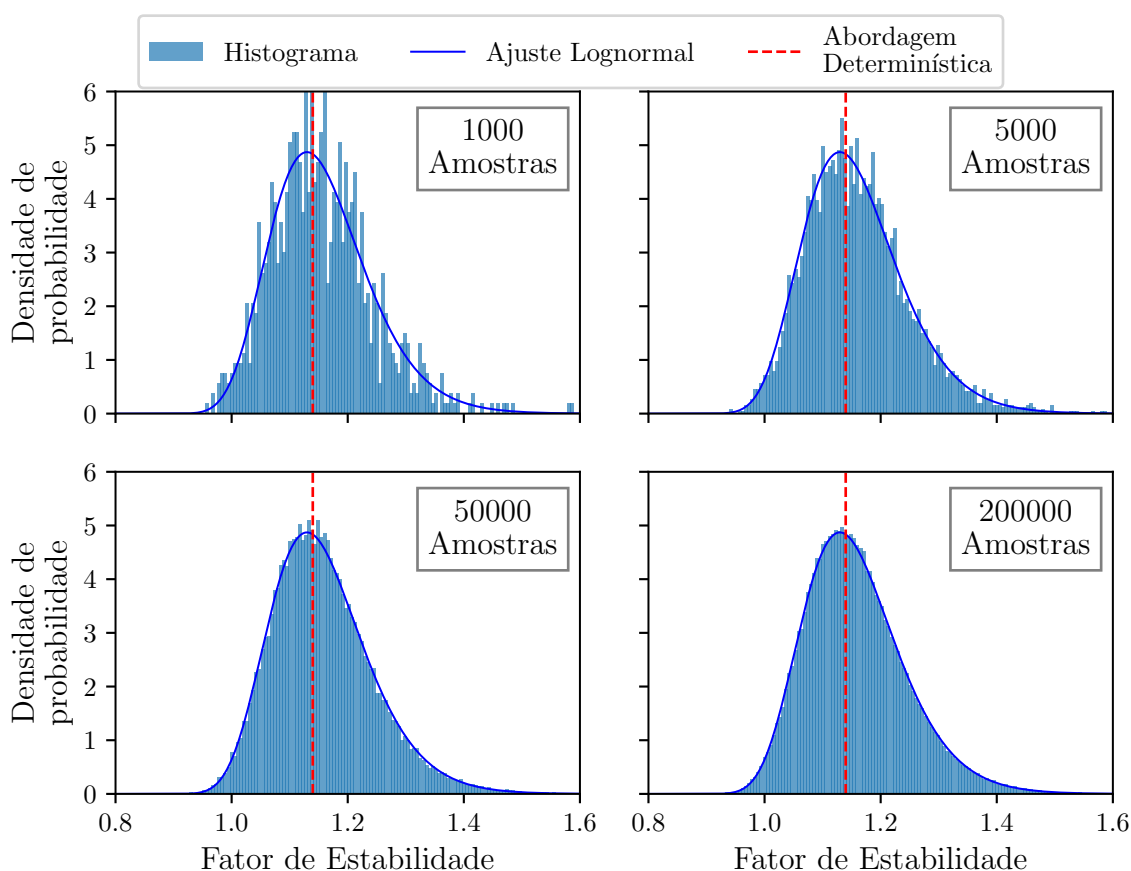


Figura 7.10 – Histograma dos Fatores de Segurança Obtidos.

A sequência de gráficos apresentada indica uma convergência dos histogramas para uma distribuição log-normal. A partir da consideração da incerteza quanto à permeabilidade do solo, e da análise das 200.000 amostras, o Fator de Estabilidade passa a variar de 0,889 até 1,875, com $CdV = 7,55\%$. No total foram encontradas 2.640 configurações de falha ($\Gamma^+ < 1$), resultando em $P_f = 1,32\%$, com $CdV P_f = 1,93\%$. A convergência da probabilidade de falha e de seu coeficiente de variação é apresentada na Figura 7.11.

No gráfico é destacado o número de amostras necessárias para atingir um Coeficiente de variação de 10, 5 e 2,5%. Conforme sugerido pela Equação 7.7, uma redução de 50% em $CdV P_f$

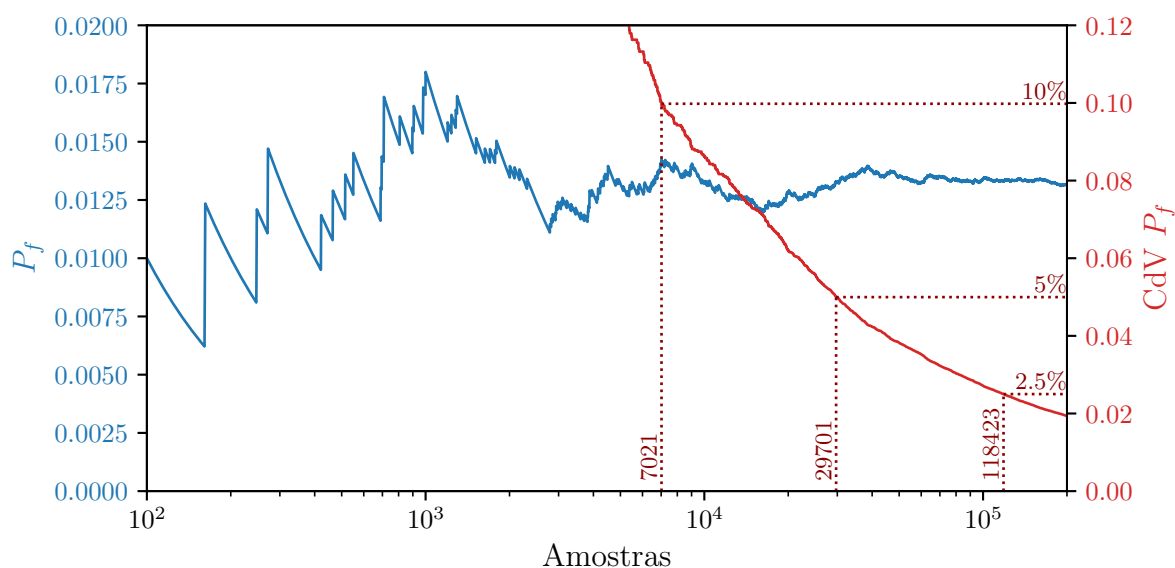


Figura 7.11 – Convergência de P_f e $CdV P_f$.

implica em uma quantidade necessárias de amostras, em média, quatro vezes maior. Avaliando a convergência entende-se que um Coeficiente de Variação $CdV P_f = 5\%$ resulta em um bom equilíbrio entre custo computacional e qualidade da probabilidade de falha resultante, sendo este o valor tomado como referência para as demais análises apresentadas neste trabalho. A Figura 7.12 apresenta a convergência da média e desvio padrão do fator de estabilidade Γ^+ .

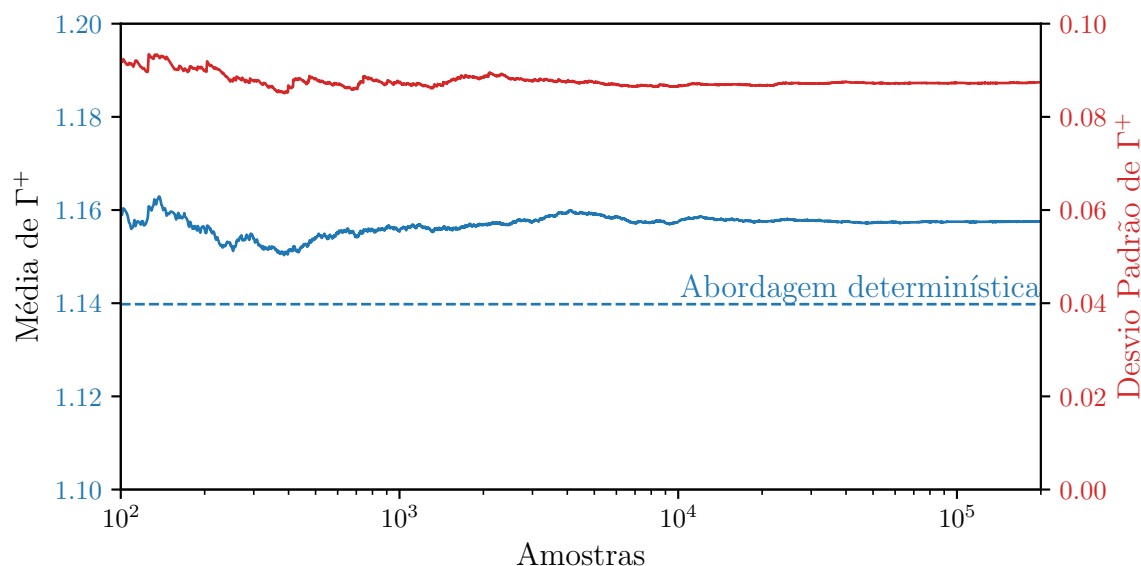


Figura 7.12 – Convergência da Média e Desvio padrão do Fator de Estabilidade.

Analisando o gráfico apresentado, observa-se que o Fator de Estabilidade médio converge para $\Gamma^+ = 1,158$, valor acima do resultado obtido na abordagem determinística. Além disso, verifica-se que o desvio padrão de Γ^+ converge para 0,087, resultando em $CdV \Gamma^+ = 7,55\%$. Dessa

forma, apesar do parâmetro de entrada k_v possuir uma variação $CdV k_v = 50\%$, tem-se um efeito reduzido no Fator de Estabilidade, ao menos para o caso exemplo estudado. Esse fato pode ser visualizado explicitamente na Figura 7.13, onde são sobrepostas todas as superfícies de ruptura encontradas. Todos os Mecanismos apresentam pouca diferença quando comparados ao Mecanismo obtido na abordagem determinística.

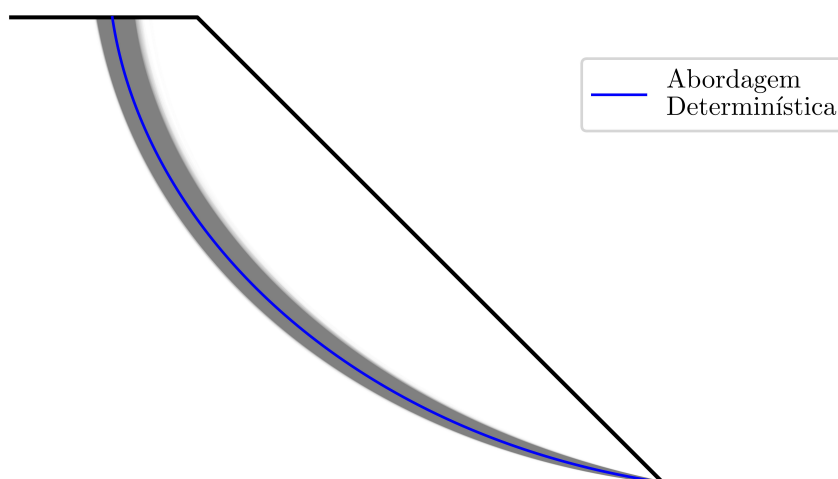


Figura 7.13 – Mecanismos de ruptura encontrados.

7.5 ADAPTAÇÃO DOS MECANISMOS DE RUPTURA ROTACIONAIS

Os casos abordados até então baseiam-se em premissas determinísticas a respeito dos parâmetros c e φ . A variabilidade espacial dessas propriedades, em especial do ângulo de atrito, impõe duas dificuldades principais na avaliação do fator de estabilidade Γ^+ . A primeira refere-se à avaliação das integrais que definem as potências P_{rm} e $P_{\gamma'}$, que agora devem ser calculadas numericamente. A segunda dificuldade refere-se aos critérios de relevância das funções de suporte de P_{rm} , os quais devem ser verificados em cada ponto do domínio de definição do mecanismo de ruptura.

Nesta seção, são detalhadas as adaptações necessárias para aplicar os Mecanismos de Ruptura Rotacionais I e II (seção 6.1) na avaliação da estabilidade de taludes com propriedades de coesão e ângulo de atrito variando espacialmente.

7.5.1 Critério de Relevância

Conforme descrito na seção 6.1, as linhas de descontinuidade dos mecanismos de ruptura rotacionais utilizados dependem explicitamente do parâmetro φ . Embora tal dependência não tenha apresentado problemas para ângulos de atrito φ constantes, conforme visto nos casos

anteriores, a representação de φ como um campo estocástico interroga sobre qual valor deve ser utilizado.

Inicialmente deve-se distinguir o ângulo de atrito $\varphi(x, y)$ propriedade do solo com variabilidade espacial do parâmetro φ a ser utilizado na obtenção dos mecanismos de ruptura. Este último não possui sentido físico, e, sendo apenas utilizado para obtenção da geometria das descontinuidades de velocidade, será referenciado como ângulo de atrito geométrico φ_g . Destaca-se que até o momento tal distinção não foi necessária, visto que em casos com ângulo de atrito φ constante, $\varphi_g \equiv \varphi$ já representam a descontinuidade de velocidade crítica.

Uma vez definido o ângulo de atrito geométrico φ_g , a porção de espiral logarítmica que caracteriza a descontinuidade de velocidades passa a ser dada por:

$$r(\theta) = r_0 \exp((\theta - \theta_1) \tan \varphi_g) \quad (7.32)$$

onde r_0 e θ_1 são parâmetros específicos de cada Mecanismo.

Embora qualquer valor de φ_g resulte em descontinuidades de velocidades, nem todas resultam em uma Potência resistente máxima P_{rm} finita. Conforme descrito na subseção 3.5.3, para que o mecanismo tenha $P_{rm} < +\infty$, deve-se satisfazer a condição de relevância expressa por, no caso de Mohr-Coulomb (SALENÇON, 1983):

$$\llbracket \underline{U}(x, y) \rrbracket \cdot \underline{n}(x, y) \geq \llbracket \underline{U}(x, y) \rrbracket \sin \varphi(x, y), \quad \forall x, y \in \Sigma_U \quad (7.33)$$

onde Σ_U representa a superfície de descontinuidade de velocidades, \underline{n} denota a normal da superfície de descontinuidade em (x, y) e $\llbracket \underline{U}(x, y) \rrbracket$ representa a descontinuidade do campo \underline{U} quando atravessa a superfície de descontinuidade. No caso em questão, tal condição pode ser simplificada para:

$$\varphi_g \geq \varphi(x, y), \quad \forall x, y \in \Sigma_U \quad (7.34)$$

Dessa forma, dado um campo de ângulo de atrito $\varphi(x, y)$ com variabilidade espacial, verifica-se que simplesmente tomar a sua média como o ângulo de atrito geométrico φ_g pode resultar em configurações infinitamente estáveis, dado não haver garantia sobre a condição de relevância da abordagem. Nesse contexto, uma alternativa possível seria considerar φ_g como $\max_{x, y}(\varphi(x, y))$. No entanto, embora resulte em Potências resistentes máximas não triviais, esta escolha superestima a segurança de taludes. Sendo assim, optou-se por adaptar os Mecanismos I e II previamente apresentados de modo a respeitar a condição de relevância e preservar a característica original da variabilidade espacial do ângulo de atrito no solo.

7.5.2 Descrição geométrica do Mecanismo de Ruptura Adaptado

Neste item será descrito o procedimento utilizado para obter superfícies de falha crítica para taludes com variabilidade espacial do ângulo de atrito φ . Embora apresentada apenas a dedução para o Mecanismo I (subseção 6.1.1), pode ser obtido de forma análoga para o Mecanismo II (subseção 6.1.2) a partir de pequenas modificações. O procedimento, ilustrado na Figura 7.14, é descrito na sequência.

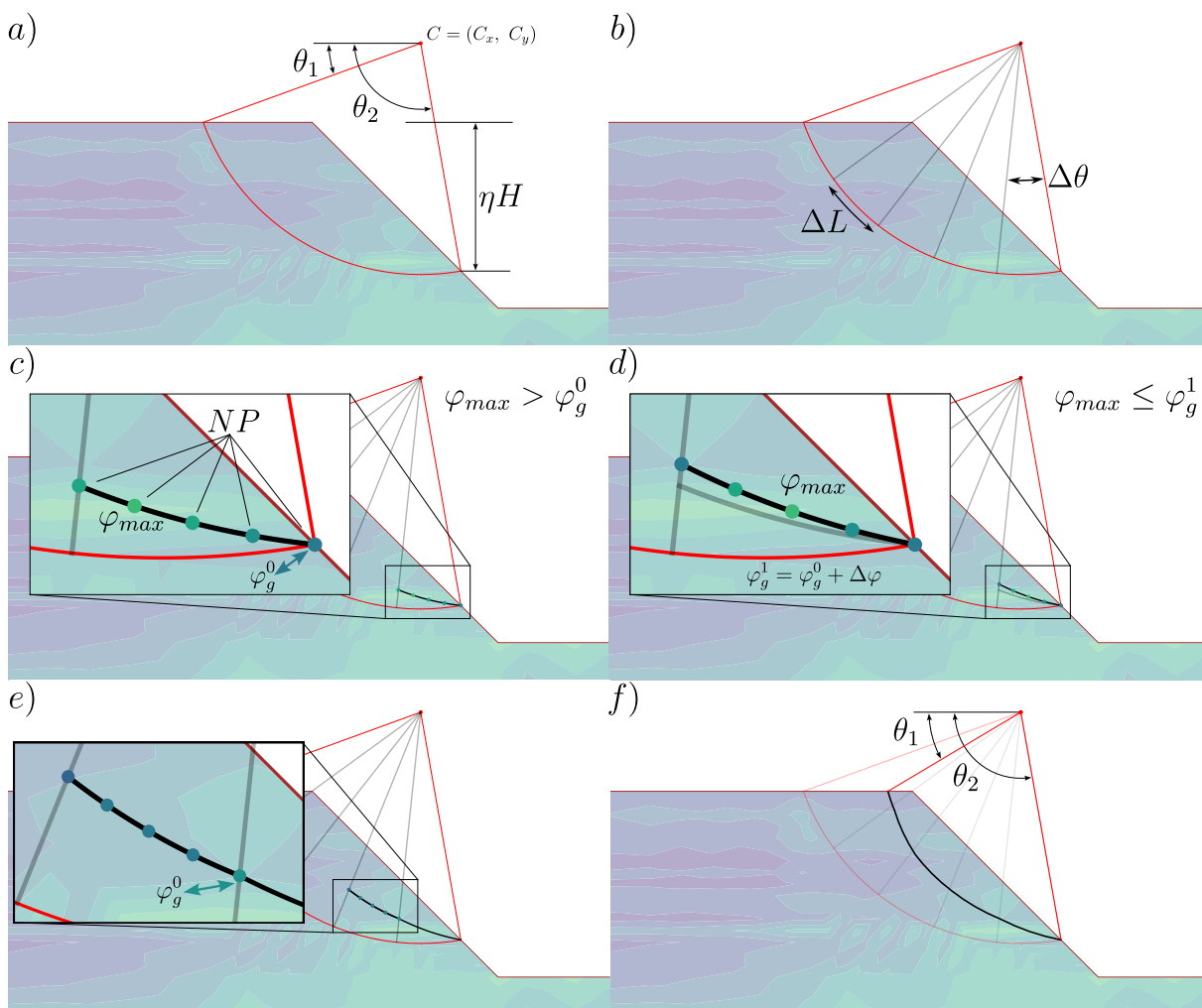


Figura 7.14 – Procedimento para encontrar mecanismos com descontinuidade de velocidades relevantes.

Inicialmente, dado um campo de ângulo de atrito $\varphi(x, y)$ qualquer, considera-se o Mecanismo I com um ângulo de atrito geométrico constante $\varphi_g \equiv 0$. Embora a descontinuidade resultante não satisfaça a condição de relevância para todo caso de φ , permite encontrar para cada combinação válida de parâmetros θ_1 , θ_2 e η um par de coordenadas $C = (C_x, C_y)$ correspondente ao centro de rotação e do sistema polar (r, θ) (Fig. 7.14a). O novo sistema servirá como base para encontrar uma nova descontinuidade de velocidades relevante. Essa etapa preliminar permite preservar os três parâmetros utilizados originalmente para definir os Mecanismos I e II e consequentemente a própria estrutura de otimização empregada até então.

Na sequência, divide-se o setor circular definido entre θ_1 e θ_2 de forma que cada segmento de arco da descontinuidade original tenha comprimento inferior a um valor fixado ΔL (Fig. 7.14b). Seguindo as definições do Mecanismo I, procura-se para cada setor $\Delta\theta$ um valor de φ_g , satisfazendo por partes a condição de relevância para uma espiral logarítmica centrada em (C_x, C_y) . Tomando o referencial da Figura 7.14, cada mecanismo será construído no sentido horário, tomando como ponto de partida a intersecção de ηH com a inclinação do talude.

Inicialmente define-se φ_g^0 como o valor do campo $\varphi(x, y)$ encontrado no ponto de partida. Em seguida, constrói-se a descontinuidade correspondente e toma-se uma quantidade NP de pontos intermediários (x_i, y_i) (Fig. 7.14c). Uma vez encontrados os pontos intermediários, define-se o maior valor de $\varphi(x, y)$ encontrado no segmento como:

$$\varphi_{\max} = \max_{1 \leq i \leq NP} \varphi(x_i, y_i) \quad (7.35)$$

Caso $\varphi_{\max} \leq \varphi_g^0$, a condição de relevância é satisfeita. Em caso negativo, aplica-se um incremento $\Delta\varphi$ à φ_g^0 obtendo $\varphi_g^1 = \varphi_g^0 + \Delta\varphi$, e redefine-se φ_{\max} baseada na posição atualizada dos NP pontos (Fig. 7.14d). De forma iterativa, repete-se o procedimento $\varphi_g^{i+1} = \varphi_g^i + \Delta\varphi$ até ser encontrado $\varphi_g^i \leq \varphi_{\max}$, satisfazendo a condição de relevância.

Após verificar a condição de relevância em um segmento, repete-se o processo para o novo setor, iniciando do último ponto atingido pela descontinuidade (Fig. 7.14e). Finalmente, quando a linha de descontinuidade intersecta a superfície do topo do talude, encerra-se o processo e recalcula-se θ_1 de acordo (Fig. 7.14f). De posse de um mecanismo com descontinuidade relevante, pode-se calcular a potência resistente máxima P_{rm} , a potência das forças de percolação P_u e a potência do peso específico P_γ por partes em cada setor, utilizando abordagens numéricas como o Método dos Trapézios.

7.5.2.1 Discretização do Mecanismo

Embora o procedimento descrito garanta a obtenção de Mecanismos críticos não triviais, a qualidade da solução é completamente dependente dos parâmetros ΔL , NP e $\Delta\varphi$ utilizados. Para ilustrar tal dependência, em um campo ângulo de atrito $\varphi(x, y)$ qualquer fixam-se os parâmetros θ_1 , θ_2 e η , e varia-se ΔL entre H e $H/1000$, NP entre 10 e 20 e $\Delta\varphi$ entre 1° e $0,1^\circ$. Em cada caso, toma-se nota tanto do Fator de Estabilidade Γ (Tabela 7.1) obtido, quanto do tempo computacional (Tabela 7.2) necessário para tomar 300 avaliações (quantidade média utilizada no processo de otimização). Em relação ao tempo necessário, salienta-se a dependência da máquina utilizada, de modo que os resultados devem ser lidos apenas como um indicativo de ordem de grandeza.

Tabela 7.1 – Fator de Estabilidade Γ^+

$\Delta\phi = 1^\circ$				$\Delta\phi = 0,5^\circ$				$\Delta\phi = 0,1^\circ$						
ΔL	NP	10	15	20	ΔL	NP	10	15	20	ΔL	NP	10	15	20
$H/1$		2,58	2,58	2,62	$H/1$		2,55	2,53	2,55	$H/1$		2,51	2,51	2,54
$H/10$		2,18	2,18	2,18	$H/10$		2,14	2,14	2,14	$H/10$		2,12	2,12	2,12
$H/100$		2,11	2,11	2,11	$H/100$		2,05	2,05	2,05	$H/100$		2,02	2,02	2,02
$H/1000$		2,10	2,10	2,10	$H/1000$		2,05	2,05	2,05	$H/1000$		2,01	2,01	2,01

Tabela 7.2 – Tempo de Execução de 300 Avaliações [s]

$\Delta\phi = 1^\circ$				$\Delta\phi = 0,5^\circ$				$\Delta\phi = 0,1^\circ$						
ΔL	NP	10	15	20	ΔL	NP	10	15	20	ΔL	NP	10	15	20
$H/1$		0,5	0,5	0,4	$H/1$		0,6	0,4	0,5	$H/1$		1,4	1,5	1,6
$H/10$		2,3	2,3	2,2	$H/10$		2,5	2,0	2,4	$H/10$		4,0	4,4	4,3
$H/100$		18,6	18,6	21,1	$H/100$		19,0	19,5	19,4	$H/100$		19,7	20,7	20,1
$H/1000$		183	185	182	$H/1000$		185	179	183	$H/1000$		183	186	188

Apesar de tratar-se de um caso ilustrativo com apenas um campo estocástico empregado, os resultados apresentados sugerem um impacto significativo do parâmetro ΔL tanto em qualidade de mecanismo crítico como em custo computacional. A utilização de um parâmetro ΔL mais refinado, resulta em uma minoração de até 26% do Fator de Estabilidade Γ , apresentando como contrapartida um aumento de até 100 vezes na ordem de grandeza do tempo de execução da minimização. Para complementar a análise, a Figura 7.15 apresenta para um novo campo $\phi(x, y)$ o impacto do parâmetro ΔL sobre a forma do mecanismo resultante. São fixados $\Delta\phi = 0,5^\circ$ e $NP = 15$.

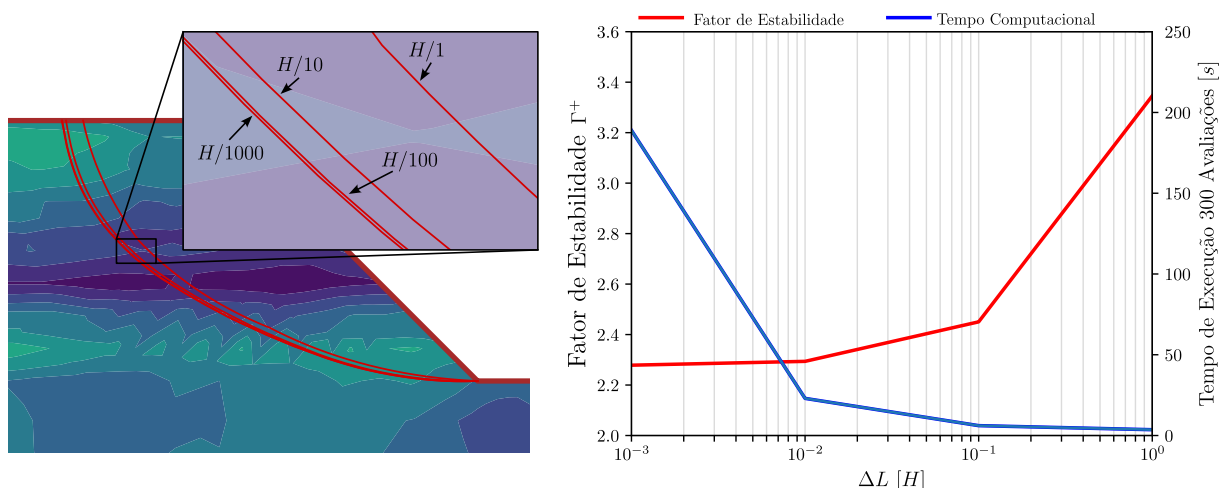


Figura 7.15 – Impacto do parâmetro ΔL na obtenção de Mecanismos relevantes.

Uma redução no comprimento ΔL permite encontrar, para cada segmento, um valor ϕ_g que satisfaz a condição de relevância sem superestimar o ângulo de atrito $\phi(x, y)$ que ocorre localmente no solo. Essa melhoria na estimativa do ângulo de atrito pode ser visualizada nos

mecanismos apresentados na Figura 7.15. Um aumento no refinamento produz mecanismos com um valor de φ_g inferior em cada segmento, resultando em descontinuidades mais afastadas da inclinação do talude. Observa-se também uma tendência de convergência do mecanismo, visto não haver melhoras significativas a partir de um valor $\Delta L = H/100$.

Por fim, para verificar o efeito do parâmetro ΔL na prática da avaliação da probabilidade de falha P_f pelo Método de Monte Carlo, considera-se um caso de talude hipotético com altura $H = 5\text{ m}$, inclinação $\beta = 75^\circ$, submetido à rápida redução de $h_w = 2,5\text{ m}$ no nível da água. Como parâmetros constantes define-se $c = 10\text{ kPa}$, $k_v = 10^{-6}\text{ m}^2/\text{kPa}/a$, $\alpha = 5$, $\gamma_w = 9,8\text{ kN}/\text{m}^3$ e $\gamma = 20\text{ kN}/\text{m}^3$. Para cada ΔL variando entre H e $H/100$, geram-se para o ângulo de atrito 30.000 campos estocásticos com média $\bar{\varphi} = 30^\circ$ e Coeficiente de Variação $CdV = 15\%$. Os gráficos presentes nas Figuras 7.16 e 7.17 apresentam as funções de densidade de probabilidade resultantes e a convergência da probabilidade de falha p_f e Fator de Estabilidade Γ^+ médio, respectivamente. É salientado que as 30.000 amostras consideradas foram suficientes para obter um Coeficiente de Variação da Probabilidade de falha inferior à 5%.

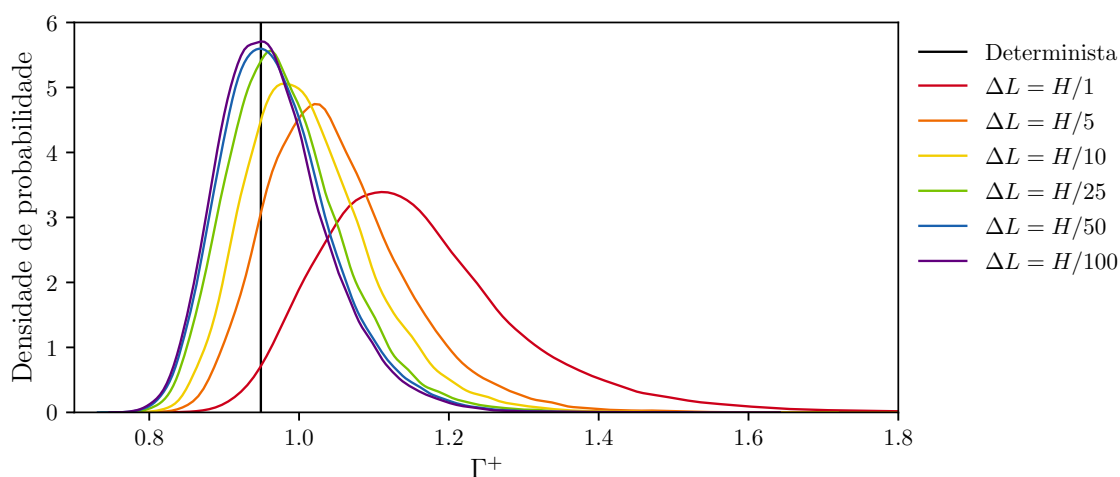


Figura 7.16 – Funções Densidade de probabilidade para diferentes ΔL .

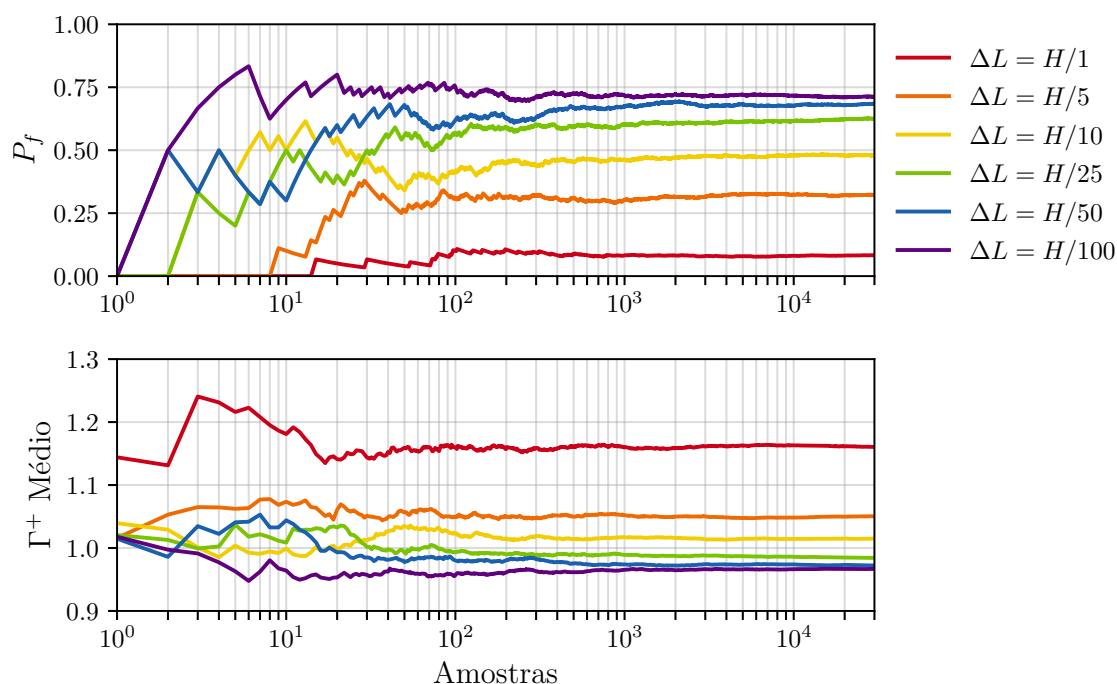


Figura 7.17 – Convergência da Probabilidade de Falha e da média do Fator de Estabilidade para diferentes ΔL .

Avaliando os gráficos em questão, verifica-se que um valor de ΔL mais refinado provoca um deslocamento da função densidade de probabilidade em direção ao Γ^+ determinístico, além de reduzir o desvio padrão. No caso em específico, o deslocamento de Γ^+ médio teve como efeito prático a elevação da probabilidade de falha de 9%, no caso menos refinado, para 72%, no caso mais refinado.

Considerando o gráfico apresentado na Figura 7.17, entende-se que uma baixa discretização de ΔL resulta em probabilidades de falha que superestimam a segurança da estrutura estudada. Sendo assim, apesar do aumento em tempo computacional, entende-se que um valor igual ou superior à $\Delta L = H/100$ é fundamental para obter resultados relevantes.

8 IMPACTO DA VARIABILIDADE DAS PROPRIEDADES DO SOLO NA ANÁLISE DE ESTABILIDADE

No Capítulo 7, apresentou-se a abordagem probabilística para a análise de estabilidade de estruturas. Em um primeiro exemplo, a variabilidade da permeabilidade do solo foi caracterizada a partir da geração de campos estocásticos, sendo a distribuição estatística do Fator de Estabilidade Γ^+ obtida através do Método de Monte Carlo.

No presente Capítulo, propõe-se inicialmente aplicar a metodologia desenvolvida no contexto da abordagem cinemática da análise limite, aos exemplos apresentados por Cho (2010). Na sequência, investiga-se o efeito e a sensibilidade da variabilidade da permeabilidade, coesão e ângulo de atrito na distribuição do Fator de Estabilidade Γ^+ e, conseqüentemente, na probabilidade de falha P_f de taludes em deformação plana.

8.1 COMPARAÇÃO COM RESULTADOS APRESENTADOS POR CHO (2010)

Na presente seção propõe-se aplicar a metodologia desenvolvida aos dois exemplos apresentados por Cho (2010). Em um primeiro exemplo, tem-se um talude em solo não-drenado puramente coesivo ($\varphi = 0$). No segundo exemplo, considera-se um talude seco localizado em solo coesivo com ângulo de atrito φ . Nota-se que em nenhum dos exemplos é necessário considerar a distribuição de excesso de poropressão do problema hidráulico e conseqüentemente o tensor permeabilidade.

Da mesma forma como apresentada no Capítulo 7, Cho (2010) utiliza o Método de Monte Carlo e campos estocásticos para caracterizar a probabilidade de falha P_f de taludes. Salienta-se que nenhum critério de convergência da probabilidade de falha foi definido, sendo o número de amostras fixado *a priori*. Em termos da abordagem determinística utilizada, ao invés de utilizar a abordagem via análise limite descrita, as superfícies críticas são encontradas através do método simplificado de Bishop (Equilíbrio Limite), de modo a obter uma distribuição de Coeficiente de Segurança F_s e não de Fatores de Estabilidade Γ^+ .

O Coeficiente de Segurança F_s nesse contexto é definido como a razão entre a tensão de cisalhamento máxima suportada e a tensão de cisalhamento de fato mobilizada. Já o Fator de Estabilidade, conforme visto no Capítulo 6, é a razão entre a potência resistente máxima P_{rm} e a

potência das forças externas P_{ext} . Embora F_s e Γ^+ sejam equivalentes quanto à caracterização da estabilidade ou falha de uma estrutura, no sentido que

$$\Gamma^+ \leq 1 \iff F_s \leq 1 \quad (8.1)$$

seus valores numéricos não podem ser comparados diretamente (MAGHOUS et al., 2014).

Anthoine (1990) descreve F_s como o maior valor que reduz os valores de resistência do solo

$$c_f = \frac{c}{F_s}; \quad \varphi_f = \arctan\left(\frac{\tan \varphi}{F_s}\right) \quad (8.2)$$

antes de atingir a ruptura, isto é $\Gamma^+ = 1$.

Sendo assim, o procedimento para determinar F_s a partir do valor de Γ^+ é de natureza iterativa, variando a coesão e ângulo de atrito a partir dos valores $(c_0, \varphi_0) = (c, \varphi)$, isto é, $F_s^0 = 1$. Em cada iteração Γ^+ é avaliado para valores reduzidos de coesão e ângulo de atrito (c_{i+1}, φ_{i+1}) , calculados a partir de um novo coeficiente $F_s^{i+1} = F_s^i + \Delta F_s$. Realiza-se a redução até que seja satisfeita a igualdade

$$\Gamma^+ \left(c_i = \frac{c}{F_s^i}; \varphi_i = \arctan \frac{\tan \varphi}{F_s^i} \right) = 1 \quad (8.3)$$

momento no qual tem-se simplesmente o coeficiente de segurança equivalente $F_s = F_s^i$.

Partindo da discussão apresentada, duas afirmações podem ser feitas. Primeiro, sendo F_s e Γ^+ equivalentes na avaliação de estabilidade/falha de estruturas, tem-se:

$$P_f = P[\Gamma^+(\underline{\mathbf{X}}) \leq 1] = P[F_s(\underline{\mathbf{X}}) \leq 1] \quad (8.4)$$

Desse modo, as probabilidades de falha P_f obtidas podem ser comparadas. E segundo, sendo Γ^+ proporcional à c e $\tan(\varphi = 0^\circ) = 0$, tem-se $F_s \equiv \Gamma^+$ em solos puramente coesivos.

8.1.1 Exemplo 1 - Talude em solo Argiloso sob condição não-drenada ($\varphi = 0$)

No primeiro exemplo Cho (2010) avalia a probabilidade de falha de um talude localizado em solo puramente coesivo ($\varphi = 0$). Conforme ilustrado na Figura 8.1, o talude possui altura $H = 5 \text{ m}$, uma inclinação de 1 : 2 ($\beta \approx 26,5^\circ$), um peso saturado $\gamma_{sat} = 20 \text{ kN/m}^3$ e uma coesão não-drenada com média $\bar{c}_u = 23 \text{ kPa}$ e coeficiente de variação $CdV = 30\%$. Considera-se como distância de autocorrelação $L_x = 20 \text{ m}$ e $L_y = 2 \text{ m}$. Além disso, considera-se um substrato intransponível localizado em uma profundidade de 10 m.

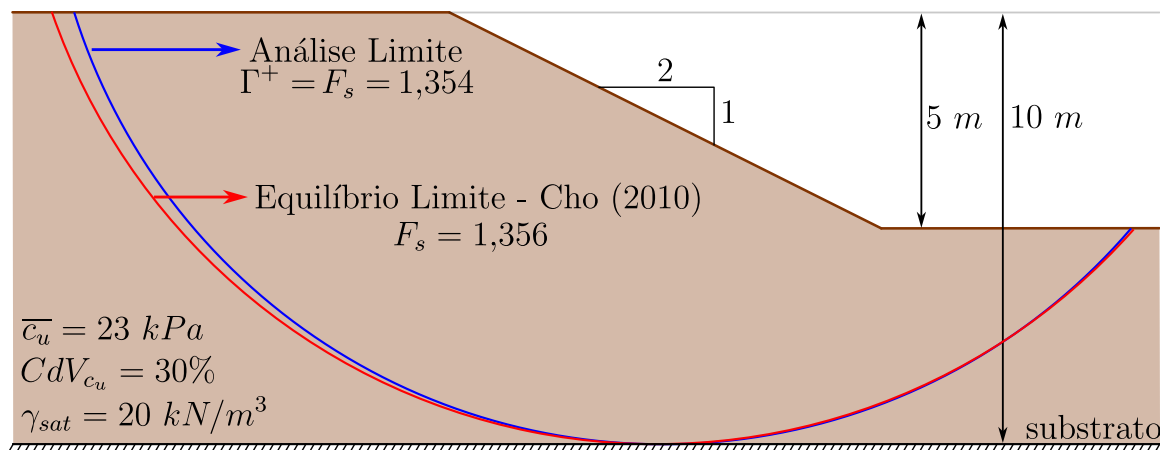


Figura 8.1 – Talude Exemplo 1 - Cho (2010).

Conforme descrito anteriormente, dado $\varphi = 0$, tem-se uma equivalência direta entre o Fator de Estabilidade F_s e o Fator de Estabilidade Γ^+ , de modo que os resultados obtidos podem ser comparados diretamente. Partindo de uma avaliação determinística, considerando $c_u = \bar{c}_u$ e utilizando a metodologia baseado na abordagem cinemática da Análise Limite, obtém-se um Fator de Estabilidade $\Gamma^+ = 1,354$. Cho (2010), utilizando o método simplificado de Bishop encontra um Fator de Estabilidade $F_s = 1,356$. Comparando os resultados encontrados verifica-se uma diferença relativa igual à 0,15%, dessa forma considera-se ambas as abordagens equivalentes em uma análise determinística do talude em questão. Uma comparação entre a geometria dos mecanismos críticos pode ser encontrada na Figura 8.1.

Considerando a variabilidade espacial da coesão não drenada c_u , a probabilidade de falha p_f do talude é avaliada utilizando o método de Monte Carlo, conforme descrito no Capítulo 7. Considerando o valor fixado *a priori*, são gerados 100.000 campos para a coesão não-drenada, com média $\bar{c}_u = 23 \text{ kPa}$ e Coeficiente de Variação $CdV = 30\%$. Em cada campo, utilizando os Mecanismos I e II com $\varphi = 0$, encontra-se uma superfície crítica e um Fator de Estabilidade associado, resultando em uma distribuição de probabilidade para Γ^+ .

Na Figura 8.2 pode-se visualizar as superfícies críticas encontradas em cada campo aleatório bem como o centro de rotação dos campos de velocidade associados. Embora a variabilidade do parâmetro de coesão não-drenada disperse a localização das superfícies de descontinuidades e dos centros de rotação, percebe-se que estes permanecem razoavelmente próximos ao caso determinístico.

Os gráficos presentes nas Figuras 8.3, 8.4 e 8.5 apresentam, respectivamente, a comparação entre as densidades de probabilidade, convergência das probabilidades de falha P_f e Probabilidade acumulada.

Avaliando os dados apresentados e considerando as diferenças inerentes entre as abordagens

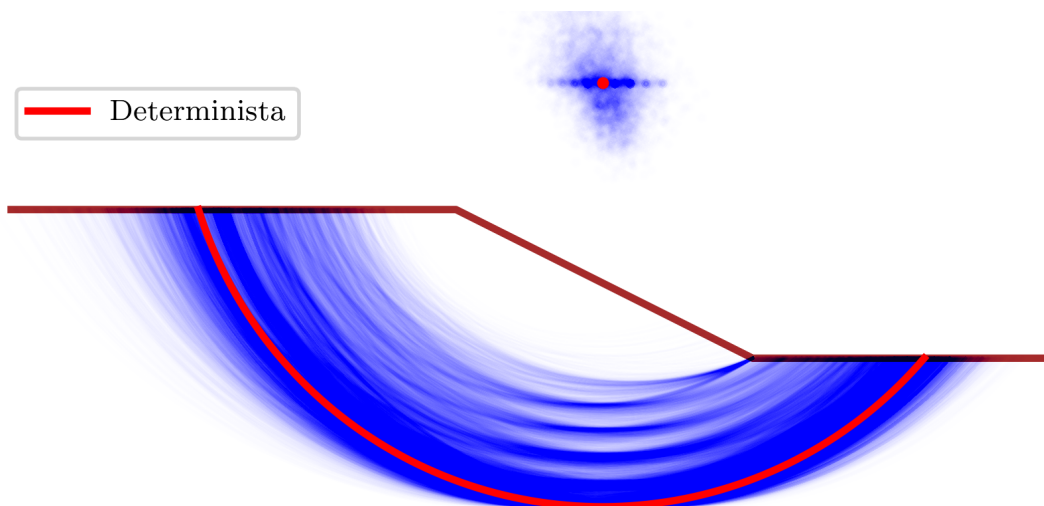


Figura 8.2 – Superfícies críticas e centros de rotação encontrados em cada campo estocástico.

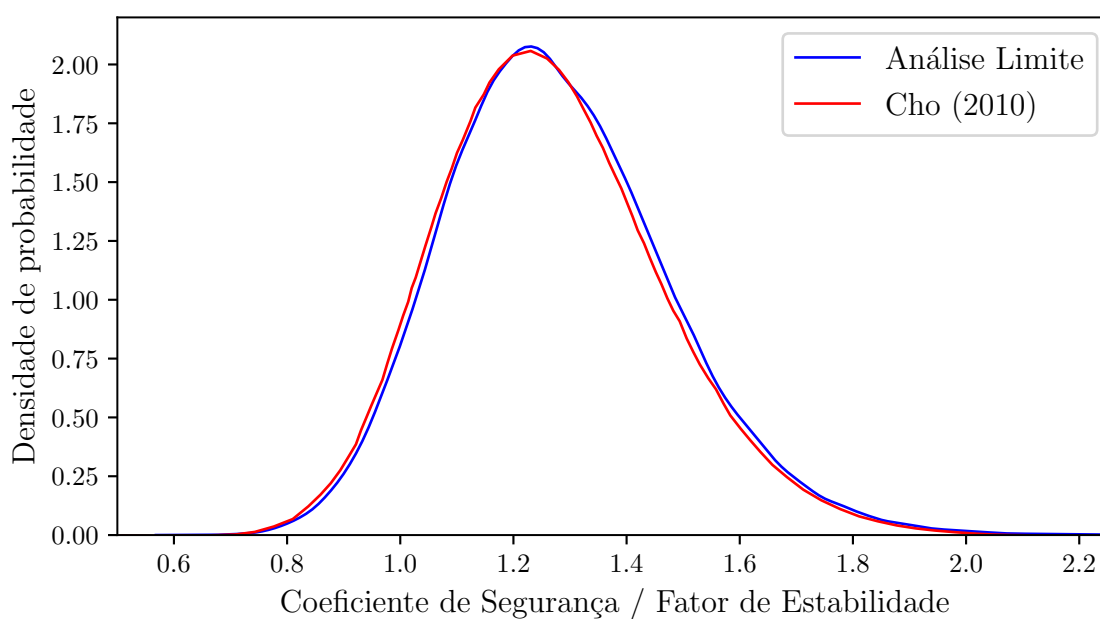


Figura 8.3 – Comparação entre as densidades de probabilidade obtidas por Cho (2010) e via Análise Limite.

utilizadas, a divergência relativa de 21% encontrada em termos de probabilidade de falha P_f foi considerada aceitável. Dessa forma, verifica-se que tanto a abordagem via análise limite como a abordagem via equilíbrio limites resultam em estimativas semelhantes para a estabilidade do talude em questão. Em relação à convergência da probabilidade de falha, obteve-se um Coeficiente de Variação $CdV P_f = 1,20\%$, indicando um número adequado de amostras consideradas.

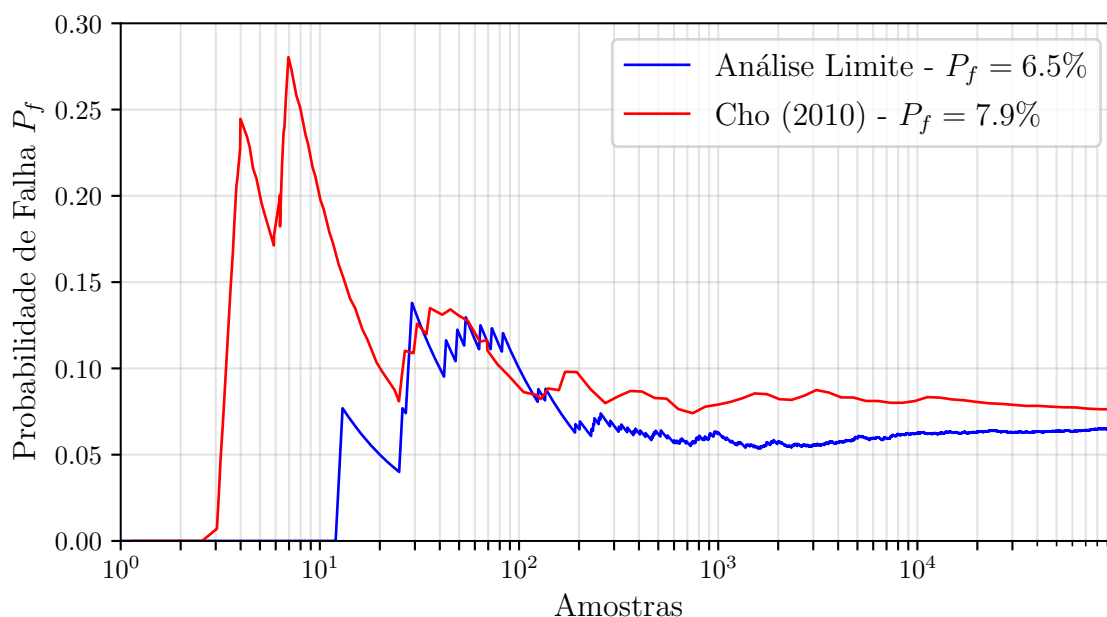


Figura 8.4 – Comparação entre as convergências de probabilidade de falha P_f obtidas por Cho (2010) e via Análise Limite.

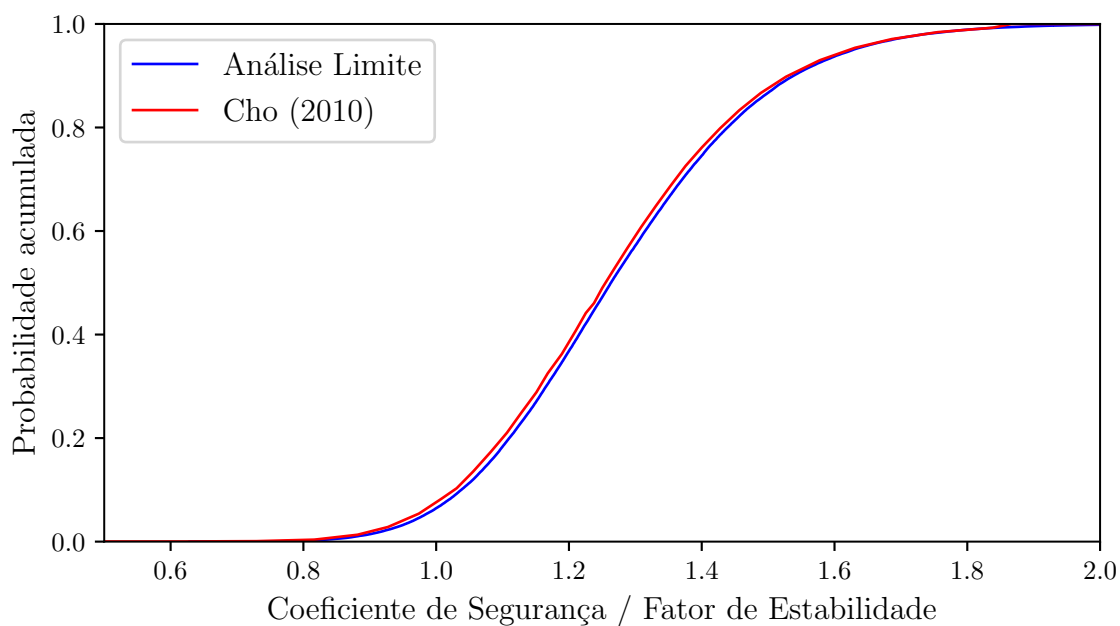


Figura 8.5 – Comparação entre as probabilidades acumuladas obtidas por Cho (2010) e via Análise Limite.

8.1.2 Exemplo 2 - Talude em solo $c - \varphi$

No segundo exemplo Cho (2010) avalia a probabilidade de falha de um talude localizado em solo seco com coesão média $\bar{c} = 10 \text{ kPa}$ e $CdV_c = 30\%$, com ângulo de atrito médio $\bar{\varphi} = 30^\circ$ e $CdV_\varphi = 20\%$, e peso específico $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$. Conforme ilustrado na Figura 8.6, o talude possui altura $H = 10 \text{ m}$, uma inclinação de 1 : 1 ($\beta = 45^\circ$). Considera-se como distância de

autocorrelação $L_x = 20 \text{ m}$ e $L_y = 2 \text{ m}$.

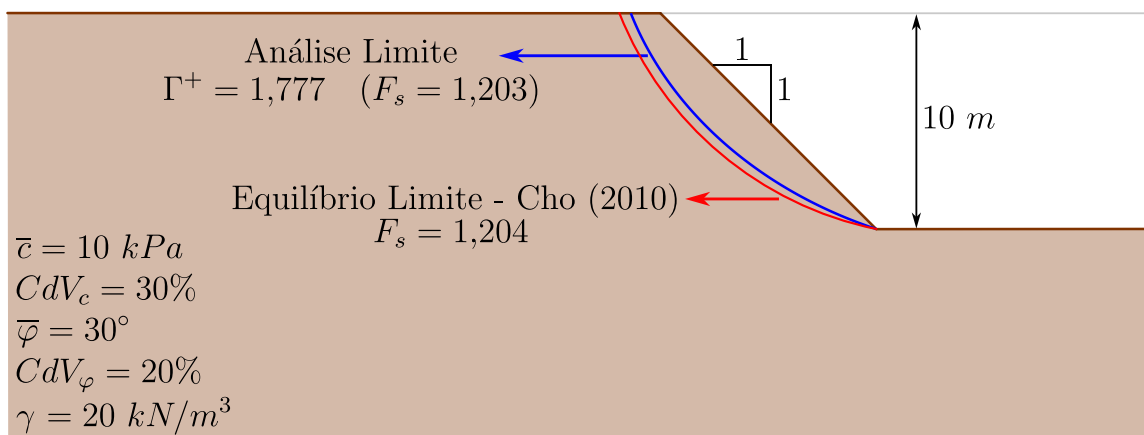


Figura 8.6 – Talude Exemplo 2 - Cho (2010).

Neste caso, como $\varphi \neq 0$, a equivalência entre as abordagens não é direta. Dessa forma os valores encontrados para a distribuição do Fator de Estabilidade Γ^+ e do Coeficiente de Segurança F_s não podem ser comparados, apenas suas probabilidades de falha. No entanto, como forma de exemplificar o método iterativo, optou-se por apresentar os resultados equivalentes para o caso determinístico. A Figura 8.7 apresenta os valores de Γ^+ encontrados para cada fator de redução F_s utilizado. Considera-se $c = \bar{c}$ e $\varphi = \bar{\varphi}$.

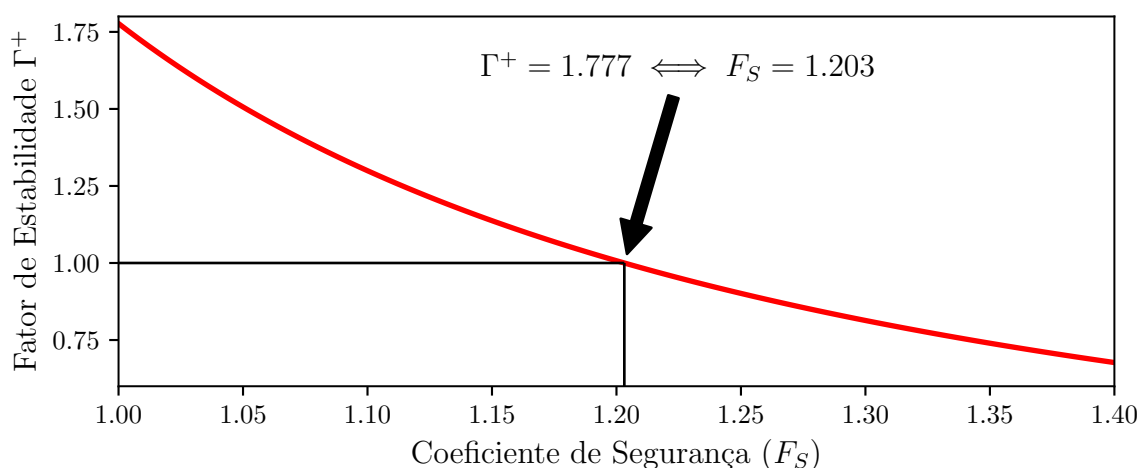


Figura 8.7 – Fator de Estabilidade Γ^+ em função do Coeficiente de Segurança F_s .

Na equivalência, têm-se que $\Gamma^+ = 1,777 \equiv F_s = 1,203$. Cho (2010), utilizando o método simplificado de Bishop encontra um Fator de Estabilidade $F_s = 1,204$. Comparando os resultados encontrados verifica-se uma diferença relativa igual à 0,08%, dessa forma considera-se ambas as abordagens equivalentes em uma análise determinística do talude em questão. Uma comparação entre a geometria dos mecanismos críticos pode ser encontrada na Figura 8.6.

Considerando a variabilidade espacial dos parâmetros c e φ , a probabilidade de falha p_f do talude é avaliada utilizando o método de Monte Carlo, conforme descrito no Capítulo 7. Geram-se individualmente 50.000 campos estocásticos para a coesão e ângulo de atrito, desconsiderando a sua correlação. Em cada par de campos, utilizando os Mecanismos modificados I e II com $\Delta L = H/100$, $\Delta\varphi = 0,1^\circ$ e $NP = 15$, encontra-se uma superfície crítica e um Fator de Estabilidade associado, resultando em uma distribuição de probabilidade para Γ^+ . Na Figura 8.8 pode-se visualizar as superfícies críticas encontradas em cada campo aleatório bem como o centro de rotação dos campos de velocidade associados. Novamente observa-se pouca variabilidade entre as superfícies críticas, indicando uma ruptura localizada.

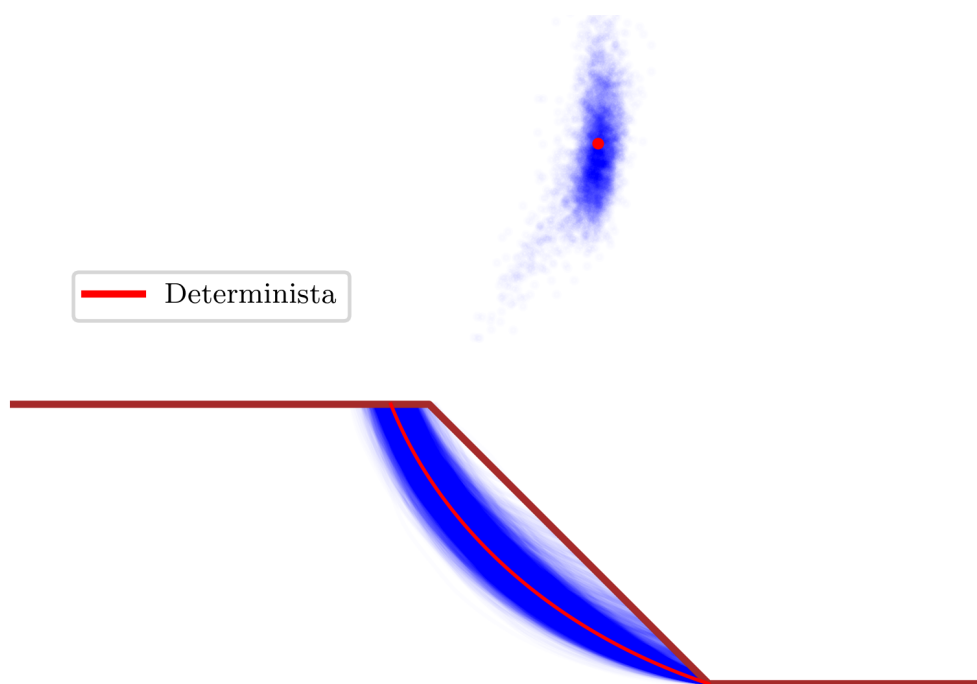


Figura 8.8 – Superfícies críticas e centros de rotação encontrados em cada campo estocástico.

Os gráficos presentes nas Figuras 8.9, 8.10 e 8.11 apresentam, respectivamente, a comparação entre as densidades de probabilidade, convergência das probabilidades de falha P_f e Probabilidade acumulada. Nesse caso, como os valores encontrados não são equivalentes, são apresentados separadamente.

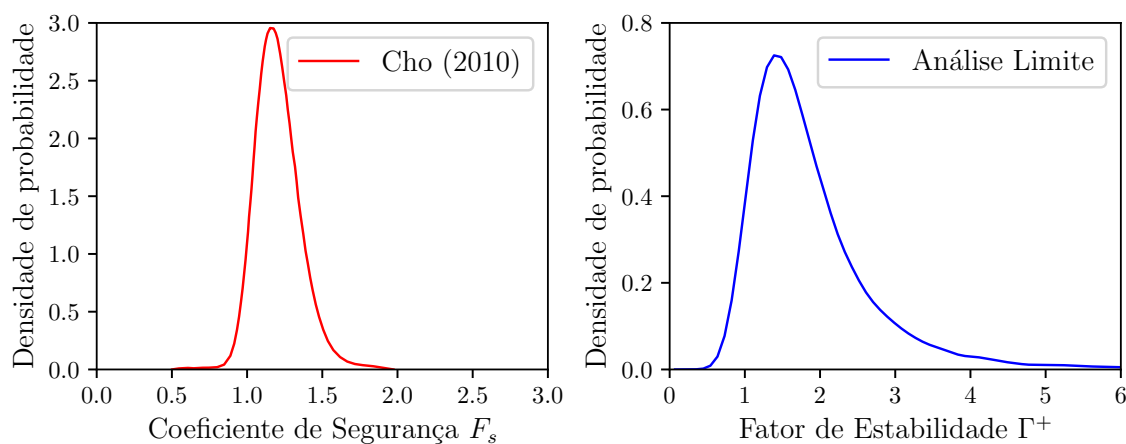


Figura 8.9 – Densidades de probabilidade obtidas por Cho (2010) e via Análise Limite.

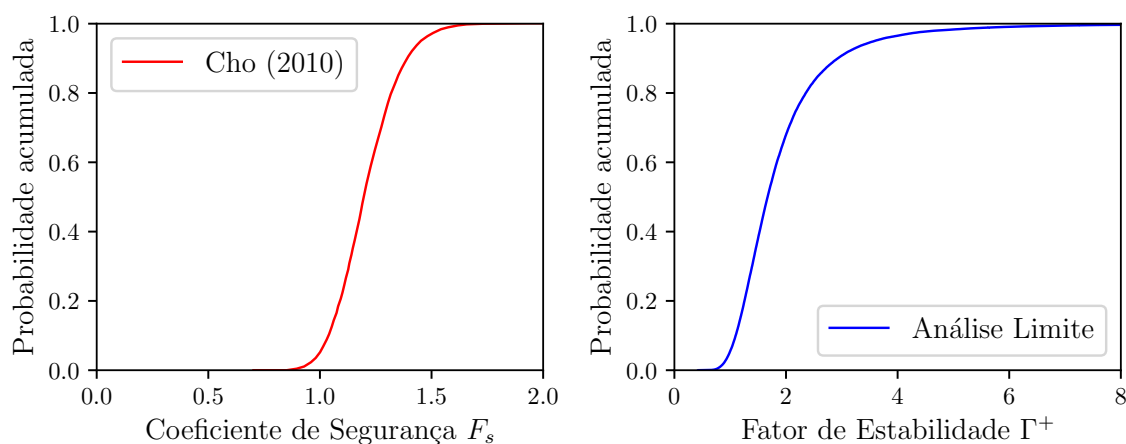


Figura 8.10 – Convergências de probabilidade de falha P_f obtidas por Cho (2010) e via Análise Limite.

Avaliando os dados apresentados e considerando as diferenças inerentes entre as abordagens utilizadas, a divergência de 16% encontrada em termos de probabilidade P_f foi considerada aceitável. Dessa forma, verifica-se que tanto a abordagem via análise limite como a abordagem via equilíbrio limites resultam em estimativas semelhantes para a estabilidade do talude em questão. Em relação à convergência da probabilidade de falha, obteve-se um Coeficiente de Variação $CdV P_f = 1,85\%$, indicando um número de amostras adequado. Salienta-se, por fim, que a abordagem via análise limite resultou em probabilidades de falha inferiores em ambos os casos exemplo.

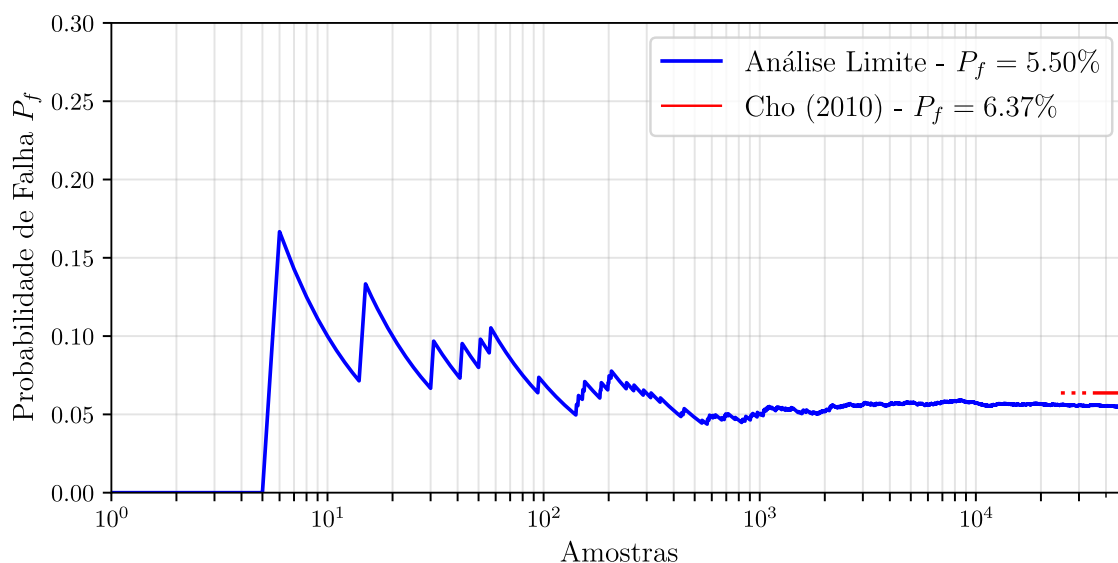


Figura 8.11 – Probabilidades acumuladas obtidas por Cho (2010) e via Análise Limite.

8.2 INFLUÊNCIA DA VARIABILIDADE ESPACIAL DOS PARÂMETROS MATERIAIS

Nesta seção examina-se como a variabilidade espacial da permeabilidade, coesão e ângulo de atrito afetam a distribuição de probabilidade do Fator de Estabilidade, consequentemente influenciando na probabilidade de falha de taludes submetidos a deformação plana. Em uma aplicação direta da metodologia descrita no Capítulo 7, as simulações de Monte Carlo serão realizadas conforme Fluxograma apresentado na Figura 8.12.

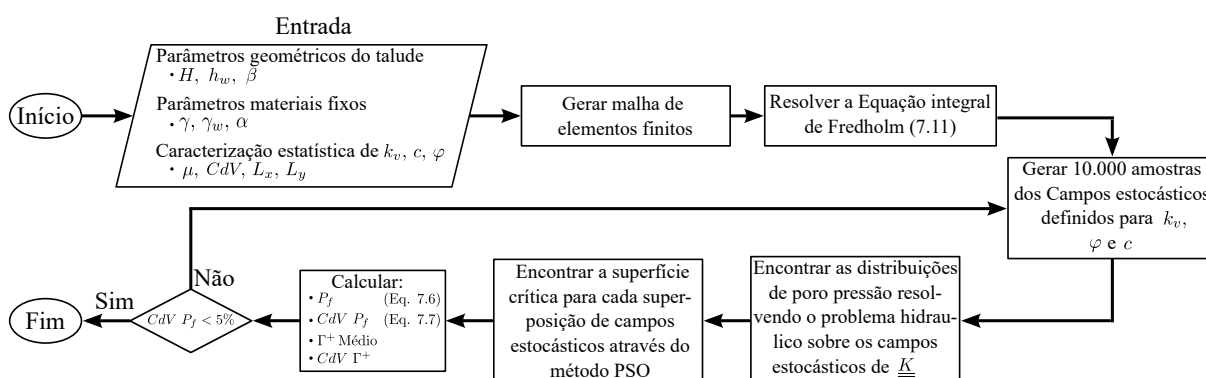


Figura 8.12 – Fluxograma da metodologia estocástica implementada.

Para que os resultados obtidos sejam comparáveis, é conveniente definir um caso referência. Neste trabalho considera-se um talude hipotético com altura $H = 5 \text{ m}$ e inclinação $\beta = 45^\circ$, submetido a uma rápida redução completa do nível da água ($h_w = H$). A Tabela 8.1 apresenta as propriedades do material e os parâmetros estatísticos considerados. As propriedades foram escolhidas de modo a representar o comportamento típico do solo, conforme apresentado em

(PHOON; KULHAWY, 1999; CHERUBINI, 2000; DUNCAN, 2000; BAECHER; CHRISTIAN, 2005; CHO, 2010).

Tabela 8.1 – Parâmetros estatísticos das propriedades materiais

Parâmetros	Valor Médio	CdV	Distância de Autocorrelação	
			$L_x[m]$	$L_y[m]$
c Coesão Efetiva	10 kPa	30%	20	2
φ Ângulo de Atrito Efetivo	30°	10%	20	2
k_v Permeabilidade Vertical do Fluido	$10^{-6} m^4/kN/s$	60%	20	2
α Coeficiente de Anisotropia	1	-	-	-
γ Peso específico do Solo	20 kN/m ³	-	-	-
γ_w Peso específico da Água	9.8 kN/m ³	-	-	-

A Figura 8.13 ilustra a geometria do talude de referência. A superfície crítica e o fator de estabilidade relacionado ($\Gamma^+ = 1.336$) são obtidos por meio de uma abordagem determinística, na qual a variabilidade espacial é desconsiderada, sendo o solo considerado homogêneo com propriedades materiais constantes ($CdV = 0$) iguais ao seu valor médio.

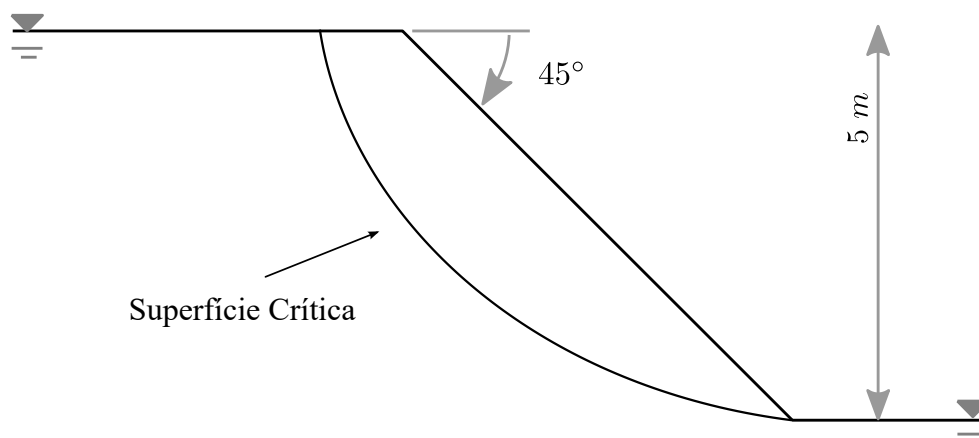


Figura 8.13 – Definição do talude de referência ($\Gamma^+ = 1.336$).

Seguindo o procedimento probabilístico apresentado na Figura 8.12, um conjunto de 10.000 amostras de campos aleatórios é gerado para cada propriedade material: permeabilidade vertical, coesão e ângulo de atrito. Após resolver o problema hidráulico e obter o fator de estabilidade crítico para cada amostra, foram encontradas 1150 configurações com $\Gamma^+ < 1$, resultando em uma probabilidade de falha $P_f = 11,50\%$. Aplicando a Equação 7.7, o Coeficiente de Variação da probabilidade de falha é avaliado em $CdV P_f = 2,77\% < 5\%$. Portanto, não são necessárias amostras adicionais. A Figura 8.14a apresenta o histograma dos fatores de estabilidade resultante e a Função de Densidade de Probabilidade (FDP) associada, dada pelo ajuste de uma Distribuição Log-Normal. A Figura 8.14b apresenta a Probabilidade de falha em função do número de amostras utilizadas na análise. Além do critério $CdV P_f$, o gráfico de convergência da probabilidade de falha indica uma estabilização após 5.000 avaliações, sugerindo que o número de amostras considerado é suficiente para os propósitos do presente estudo.

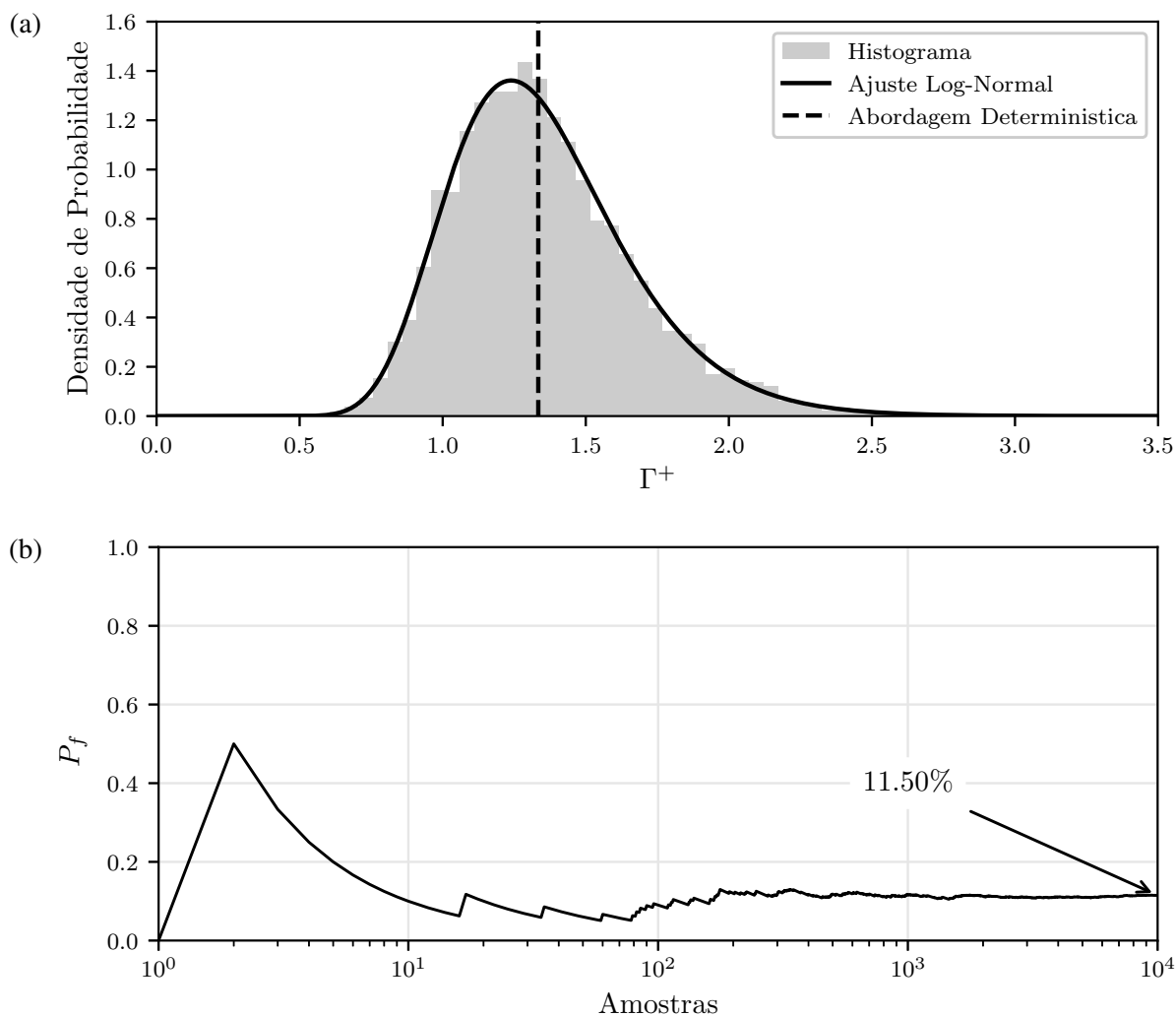


Figura 8.14 – a) Histograma e FDP para o caso referência. b) Convergência da Probabilidade de Falha.

A análise resultou em um conjunto de Fatores de Estabilidade Γ^+ com Média 1,353, Mediana 1,313 e CdV 23,54%. Apesar do aumento de 1,3% no valor médio quando comparado com a solução determinística, a redução de 1,7% no valor da mediana indica que mais de 50% das configurações do talude resultaram em uma caracterização de segurança abaixo de $\Gamma^+ = 1,336$. Na sequência deste estudo, o impacto individual de cada coeficiente de variação dos parâmetros materiais e da distância de autocorrelação é analisado. Por fim, o efeito dos parâmetros relacionados ao problema hidráulico, como a altura da redução do nível da água e o fator de anisotropia, é explorado.

8.2.1 Efeito do coeficiente de variação das propriedades materiais do solo

Nesta seção estuda-se a influência do Coeficiente de Variação das propriedades materiais na avaliação probabilística da segurança do talude referência. De forma similar a Gu et al. (2023), um intervalo de valores típicos é considerado para cada parâmetro de interesse: para a permeabilidade

vertical k_v o Coeficiente de Variação é definido entre 60-100%, sendo 60% o caso referência; para a coesão c o Coeficiente de Variação é escolhido dentro do intervalo 10-70%, onde 30% representa o caso referência; e, por fim, o coeficiente de variação do ângulo de atrito φ é escolhido dentro do intervalo de 5-20%, onde 10% representa o caso referência.

A Tabela 8.2 apresenta um resumo com todas as Simulações de Monte Carlo realizadas. Na maioria dos casos, um único bloco de 10.000 amostras mostrou-se suficiente para alcançar um $CdV P_f$ abaixo de 5%. Particularmente para a simulação na qual $CdV c = 10\%$, 90.000 amostras foram necessárias para satisfazer o mesmo critério de convergência.

Tabela 8.2 – Resumo das Simulações de Monte Carlo - Coeficiente de Variação das propriedades do solo

CdV [%]			Fator de Estabilidade Γ^+			P_f [%]	CdV P_f [%]
k_v	c	φ	μ	σ	CdV [%]		
60	30	10	1,353	0,318	23,5	11,50	2,77
0	30	10	1,329	0,288	21,7	11,21	2,81
75	30	10	1,375	0,341	24,8	11,41	2,79
90	30	10	1,378	0,354	25,7	11,63	2,76
100	30	10	1,391	0,360	25,9	11,44	2,78
60	10	10	1,367	0,180	13,2	0,45	4,97
60	50	10	1,324	0,472	35,7	25,78	1,70
60	70	10	1,296	0,620	47,9	36,34	1,32
60	30	5	1,351	0,300	22,2	10,20	2,97
60	30	15	1,357	0,346	25,5	12,71	2,62
60	30	20	1,361	0,384	28,2	15,18	2,36

Os gráficos na Figura 8.15 apresentam a Função Densidade de Probabilidade para diferentes Coeficientes de Variação da permeabilidade vertical (a), coesão (b) e ângulo de atrito (c). Em todos os gráficos, o caso referência é indicado por uma linha contínua de cor preta. Apesar da dificuldade em extrair valores numéricos específicos, a comparação das Funções densidade de probabilidade permite uma percepção inicial do efeito das propriedades do material na distribuição do fator de estabilidade.

Os gráficos apresentados sugerem que valores superiores para o coeficiente de variação do parâmetro considerado resultam em uma maior incerteza quanto ao fator de estabilidade, caracterizado por um achatamento da FDP. Nas propriedades materiais resistentes c e φ , esse aumento está associado a um deslocamento do valor de pico em direção a fatores de estabilidade mais baixos, sendo mais perceptível quando associado à coesão, conforme apresentado na Figura 8.15b. A probabilidade de falha em função do Coeficiente de Variação das propriedades materiais é apresentada na Figura 8.16, o caso referência é indicado por um asterisco.

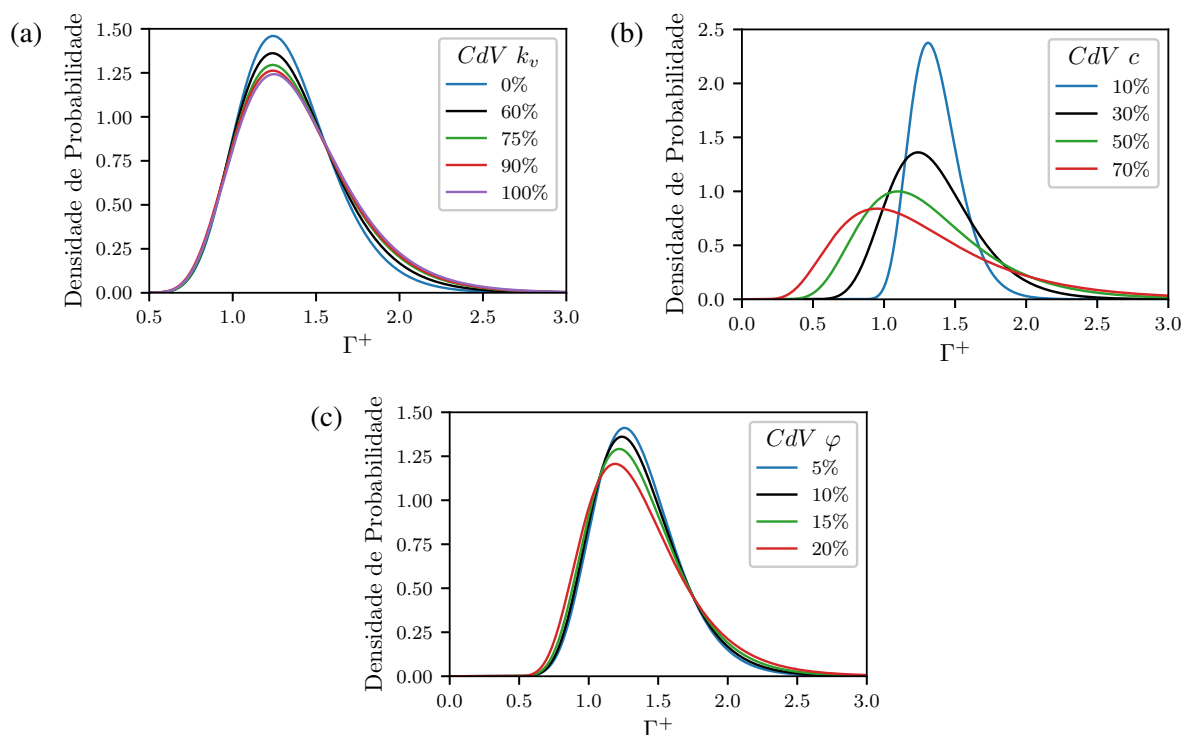


Figura 8.15 – Função Densidade de Probabilidade para a) CdV da Permeabilidade Vertical, b) CdV da Coesão e c) CdV do Ângulo de Atrito

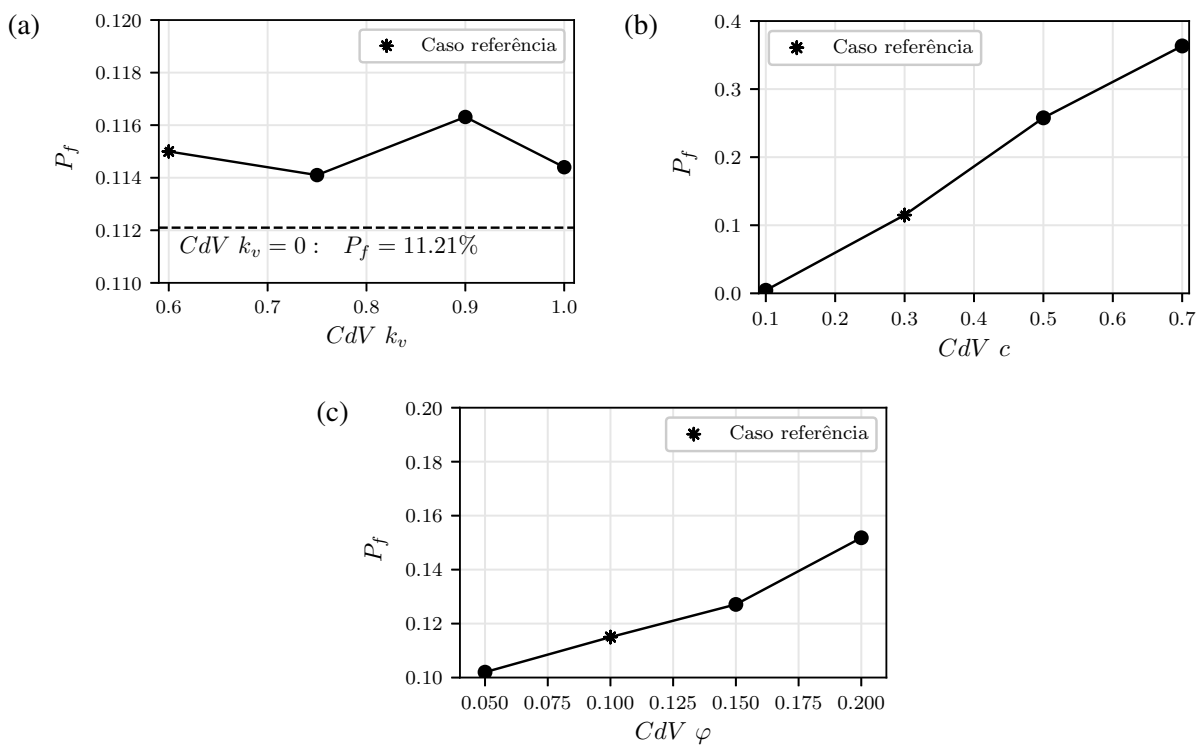


Figura 8.16 – Probabilidade de falha em função do Coeficiente de Variação da a) Permeabilidade Vertical, b) da Coesão e c) do Ângulo de Atrito.

Um aumento no Coeficiente de Variação resultou em maiores probabilidades de falha para os parâmetros de coesão e ângulo de atrito. Essa tendência é evidenciada pela Figura 8.16c, na qual a consideração de $CdV_c = 70\%$ resultou em um aumento absoluto de 24,84% na probabilidade de falha quando comparado ao caso referência. Quanto ao coeficiente de variação da permeabilidade vertical, nenhuma tendência relacionada a probabilidade de falha foi observada, indicando uma baixa influência na segurança do talude.

Os resultados sugerem que o principal impacto na probabilidade de falha se deve à variabilidade espacial da coesão e do ângulo de atrito, sendo o último em menor escala. Apesar de não apresentar um efeito significativo, a comparação com abordagens determinísticas ($CdV = 0$) para o parâmetro de permeabilidade vertical resultou em uma probabilidade de falha inferior, demonstrando que a sua variabilidade espacial não deve ser desconsiderada.

Os gráficos apresentados nas Figuras 8.17 e 8.18 comparam o Coeficiente de Variação e o valor médio da distribuição do fator de estabilidade obtidos para diferentes Coeficientes de Variação das propriedades materiais.

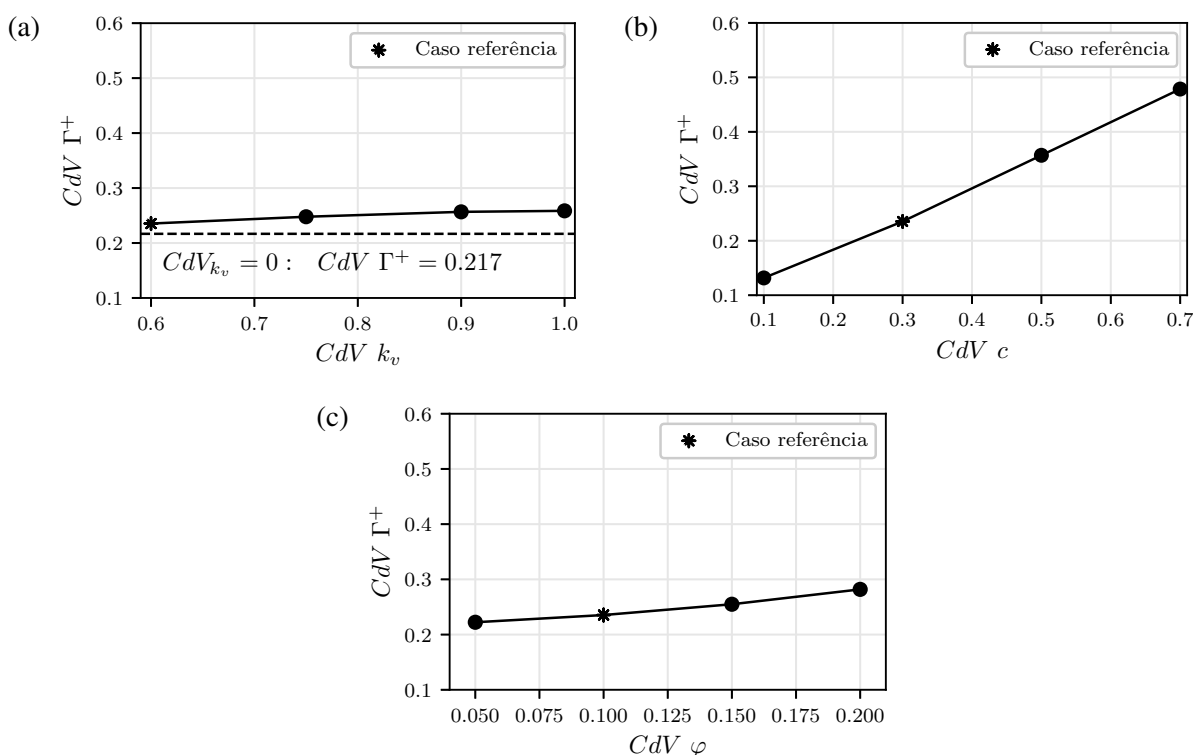


Figura 8.17 – Coeficiente de Variação do Fator de Estabilidade em função do Coeficiente de Variação da a) Permeabilidade Vertical, b) da Coesão e c) do Ângulo de Atrito.

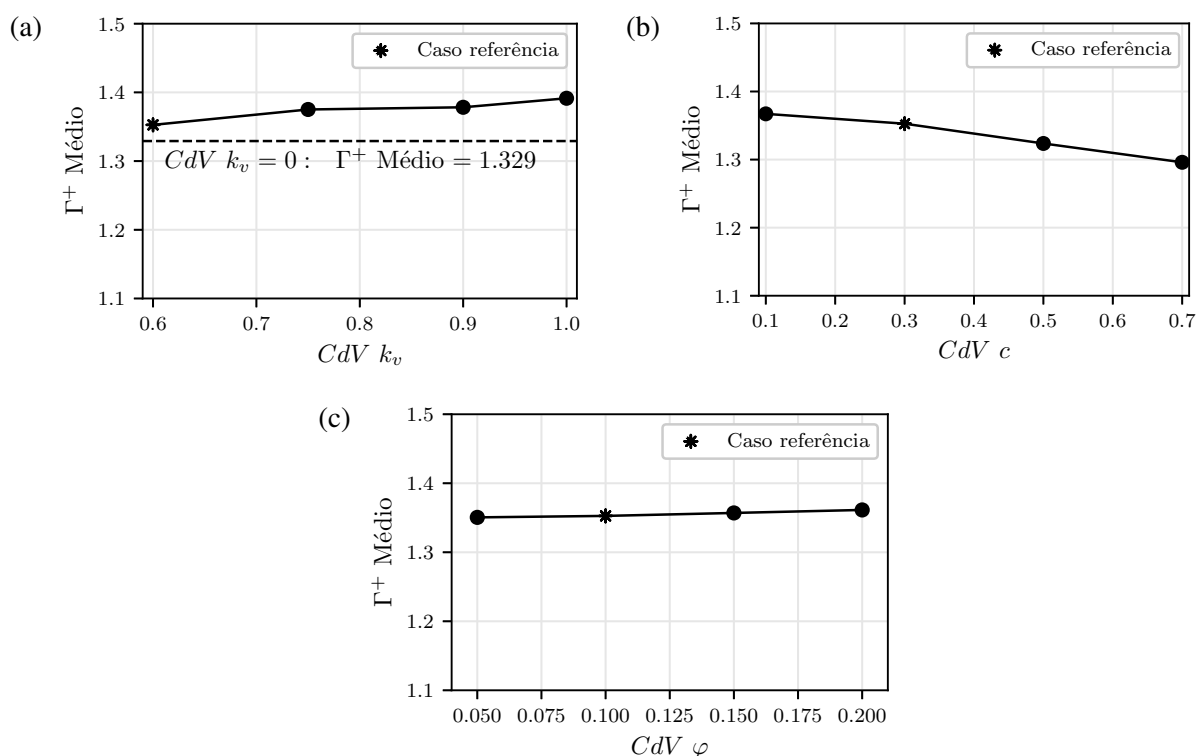


Figura 8.18 – Valor Médio do Fator de Estabilidade em função do Coeficiente de Variação da a) Permeabilidade Vertical, b) da Coesão e c) do Ângulo de Atrito.

A visualização alternativa dos dados apresentada na Figura 8.18 revela algumas percepções interessantes. Torna-se evidente que o Coeficiente de Variação do fator de estabilidade é aproximadamente uma função linear do coeficiente de variação das propriedades materiais. Além disso, apesar dos gráficos referentes ao ângulo de atrito e coesão apresentarem uma tendência semelhante, o intervalo de Coeficientes de Variação considerado para a coesão resulta em uma maior incerteza a respeito do fator de estabilidade e, conseqüentemente, uma maior probabilidade de falha.

Os gráficos referentes ao valor médio do fator de estabilidade apresentados na Figura 8.17 exibem comportamentos distintos com base na propriedade material considerada. Enquanto maiores Coeficientes de Variação da coesão resultam em menores valores médios do fator de estabilidade, a tendência oposta é observada na Figura 8.17a. A tendência de aumento no valor médio do fator de estabilidade explica o baixo impacto da variabilidade da permeabilidade na avaliação da probabilidade de falha, apesar do aumento nos valores de $CdV \Gamma^+$. Esta interpretação é consistente com os resultados apresentados nas Figuras 8.15 e 8.16.

8.2.2 Distâncias de Autocorrelação

As distâncias de autocorrelação são parâmetros significativos em análises probabilísticas em que considera-se a variabilidade espacial das propriedades materiais. Nesta seção estuda-se o efeito de diferentes (L_x, L_y) na distribuição do Fator de Estabilidade Γ^+ . Em vez de tomar configurações com razões L_x/L_y distintas, optou-se por definir um fator de escala s , de modo que as distâncias horizontais e verticais são tomadas relativamente ao caso referência, conforme apresentado na Equação 8.5:

$$(L_x, L_y) = s \cdot (20 \text{ m}, 2 \text{ m}) \quad (8.5)$$

Note que para $s = 1$ as distâncias de autocorrelação são dadas diretamente pelo caso referência. À medida que o fator de escala aumenta, os valores das propriedades materiais no domínio do talude variam espacialmente com menor frequência, resultando em campos aleatórios mais suaves. Para um fator de escala suficientemente grande, o campo estocástico resultante assume um único valor aleatório em todo o domínio, emulando o caso em que a variabilidade espacial das propriedades materiais é desconsiderada. A Tabela 8.3 apresenta o resumo de todas as Simulações de Monte Carlo realizadas. Para todos os fatores de escala considerados, um único bloco de 10.000 amostras foi suficiente para alcançar um $CdV P_f$ abaixo de 5%.

Tabela 8.3 – Resumo das Simulações de Monte Carlo – Fator de Escala das Distâncias de Autocorrelação

Fator de Escala s	Fator de Estabilidade Γ^+			P_f [%]	CdV P_f [%]
	μ	σ	CdV [%]		
1,0	1,353	0,318	23,5	11,50	2,77
1,5	1,356	0,352	25,9	13,94	2,48
2,0	1,361	0,372	27,3	14,99	2,38
5,0	1,350	0,404	29,9	18,93	2,07
10,0	1,348	0,419	31,1	19,85	2,01
20,0	1,355	0,430	31,7	20,23	1,99
400,0	1,348	0,432	32,1	21,93	1,89

A Figura 8.19 apresenta os quatro gráficos resultantes das Simulações de Monte Carlo: uma comparação entre a FDP dos fatores de escala considerados (a), a probabilidade de falha (b), o Coeficiente de Variação do fator de estabilidade (c) e o valor médio do fator de estabilidade (d) para valores crescentes de s . No gráfico 8.19a, o caso referência é indicado por uma linha contínua de cor preta. Nos gráficos 8.19b, 8.19c e 8.19d, um asterisco indica o caso referência, e a linha tracejada horizontal indica os resultados para $s = 400$.

A comparação das FDPs indica que um aumento no fator de escala achata a distribuição do fator de estabilidade e desloca o valor mais provável para caracterizações de segurança mais baixas, resultando em um aumento na probabilidade de falha. Essa tendência é confirmada pelo gráfico apresentado na Figura 8.19b. Após um aumento inicial acentuado em fatores de escala baixos,

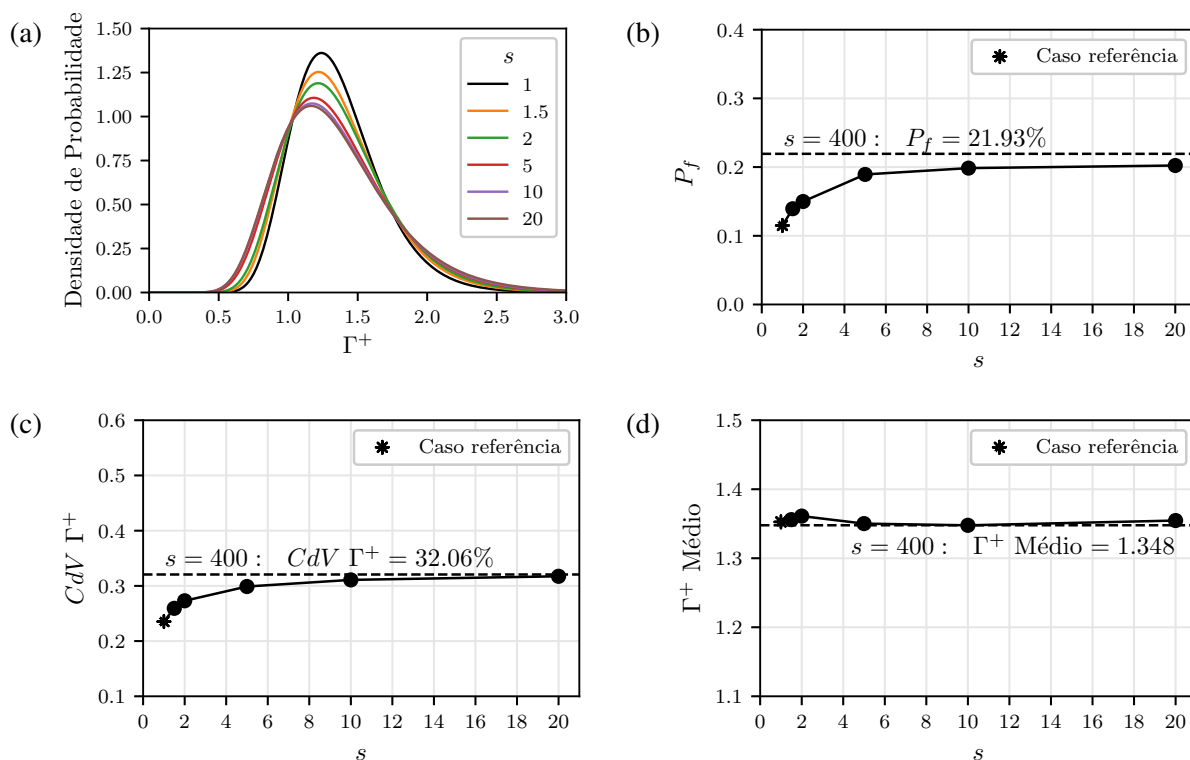


Figura 8.19 – a) FDP do fator de estabilidade, b) Probabilidade de falha, c) Coeficiente de Variação do fator de estabilidade e d) Valor médio do fator de estabilidade, em função do fator de escala.

a probabilidade de falha tende lentamente a 21,93% para $s = 400$, representando um aumento absoluto de 10,43% quando comparado ao caso referência. O mesmo comportamento é observado em termos do Coeficiente de Variação do fator de estabilidade, conforme apresentado na Figura 8.19c. Nenhuma tendência foi observada em termos de valor médio do fator de estabilidade.

Os resultados apresentados sugerem que levar em conta a variabilidade espacial das propriedades dos materiais reduz significativamente a probabilidade de falha de taludes. Além disso, distâncias de autocorrelação mais curtas (fatores de escala menores) resultam em um Coeficiente de Variação mais baixo para o fator de estabilidade e uma probabilidade de falha geral mais baixa.

8.2.3 Fator de Anisotropia

Esta seção apresenta a análise do efeito do fator de anisotropia α na avaliação probabilística da segurança de taludes. É importante notar que, conforme apresentado na Seção 6.4.5 em um contexto de análise determinística, um aumento em fator de anisotropia resulta em maiores fatores de estabilidade. Portanto, espera-se uma tendência de aumento do fator de estabilidade médio e consequentemente a diminuição da probabilidade de falha. A Tabela 8.4 apresenta o resumo de todas as Simulações de Monte Carlo realizadas. Devido à diminuição na probabilidade de falha, foram necessários progressivamente mais blocos de amostras para atingir o critério de

convergência. Por exemplo, foram necessárias 70.000 amostras para obter $CdV P_f < 5\%$ para um Fator de anisotropia $\alpha = 5$.

Tabela 8.4 – Resumo das Simulações de Monte Carlo - Fator de Anisotropia

α	Fator de Estabilidade Γ^+				$P_f[\%]$	CdV $P_f[\%]$
	Análise Determ.	μ	σ	CdV[%]		
1	1.336	1.353	0.318	23.5	11.5	2.77
2	1.533	1.562	0.390	24.9	3.90	3.51
3	1.674	1.704	0.432	25.3	1.83	4.23
4	1.783	1.821	0.474	26.0	1.00	4.98
5	1.872	1.910	0.504	26.4	0.63	4.74

A Figura 8.20 apresenta quatro gráficos resultantes das Simulações de Monte Carlo: uma comparação entre a função densidade de probabilidade para os Fatores de anisotropia considerados (a), a evolução da probabilidade de falha (b), Coeficiente de Variação do fator de estabilidade (c), e o valor médio do fator de estabilidade (d) para Fatores de anisotropia crescentes. No gráfico 8.20a, o caso referência é indicado por uma linha contínua de cor preta. Nas Figuras 8.20b, 8.20c e 8.20d, o caso referência é indicado por um asterisco.

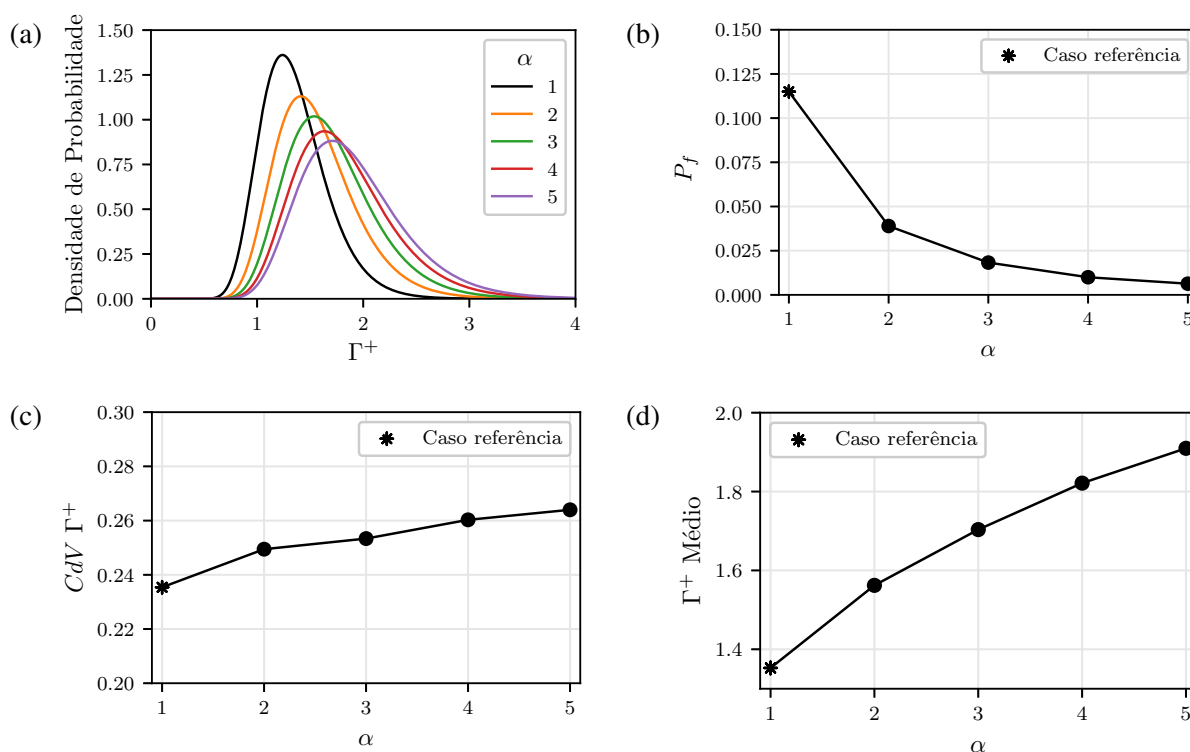


Figura 8.20 – a) FDP do fator de estabilidade, b) Probabilidade de falha, c) Coeficiente de Variação do fator de estabilidade e d) Valor médio do fator de estabilidade em função do Fator de anisotropia.

Conforme sugerido pelos resultados determinísticos da Tabela 8.4, Fatores de Anisotropia elevados resultam em médias maiores para o fatores de estabilidade, como apresentado no gráfico

da Figura 8.20d. A Figura 8.20a ilustra que a tendência descrita achata a curva da FDP e desloca seus valores de pico para fatores de estabilidade elevados, diminuindo a probabilidade de falha. A Figura 8.20b indica uma tendência decrescente exponencial, resultando em uma redução absoluta de 10,87% na probabilidade de falha em comparação ao caso referência.

Outra observação relaciona-se ao gráfico da Figura 8.20c. Apesar do efeito, em geral, favorável da elevação do fator de anisotropia, é observado um aumento no Coeficiente de Variação do Fator de Estabilidade. Este resultado sugere que solos com α elevado apresentam uma maior sensibilidade na análise probabilística, sendo um ponto de atenção em taludes com características de estabilidade semelhantes.

8.2.4 Altura de redução do Nível de Água

Por fim, este segmento estuda o efeito de diferentes alturas de redução do nível de água sobre a avaliação probabilística da segurança de taludes. Como demonstrado na Capítulo 4, o efeito de um regime hidráulico arbitrário pode ser estimado através da consideração do peso submerso do solo e das forças de percolação como forças volumétricas externas na equação de equilíbrio formulada em termos de tensões efetivas. Neste contexto, a altura de redução do nível de água h_w é considerada um parâmetro de carregamento e, portanto, afeta o fator de estabilidade resultante. Resultados preliminares mostrados na Seção 6.4.4 indicam que o caso crítico pode não estar relacionado a uma redução completa do nível de água, apesar de menores razões de rebaixamento geralmente resultarem em maiores fatores de estabilidade. A Tabela 8.5 apresenta o resumo de todas as Simulações de Monte Carlo realizadas. A análise exigiu até 30.000 amostras para atingir um valor de $CdV P_f < 5\%$.

Tabela 8.5 – Resumo das Simulações de Monte Carlo - Altura de Rebaixamento do Nível de Água

h_w/H	Fator de Estabilidade Γ^+				$P_f[\%]$	CdV $P_f[\%]$
	Análise Determ.	μ	σ	CdV[%]		
0,5	1,671	1,670	0,378	22,6	1,38	4,88
0,6	1,494	1,502	0,345	22,9	4,20	4,78
0,7	1,383	1,393	0,314	22,5	8,54	3,27
0,8	1,322	1,338	0,309	23,1	11,99	2,71
0,9	1,307	1,325	0,306	23,1	12,58	2,64
1,0	1,336	1,353	0,318	23,5	11,5	2,77

A Figura 8.21 apresenta quatro gráficos resultantes das Simulações de Monte Carlo: uma comparação entre a função densidade de probabilidade para as razões de rebaixamento do nível de água consideradas (a), a evolução da probabilidade de falha (b), Coeficiente de Variação do fator de estabilidade (c), e o valor médio do fator de estabilidade (d) para razões crescentes de rebaixamento do nível de água. No gráfico 8.21a, o caso referência é indicado por uma linha contínua de cor preta. Nas Figuras 8.21b, 8.21c e 8.21d, o caso referência é indicado por um

asterisco.

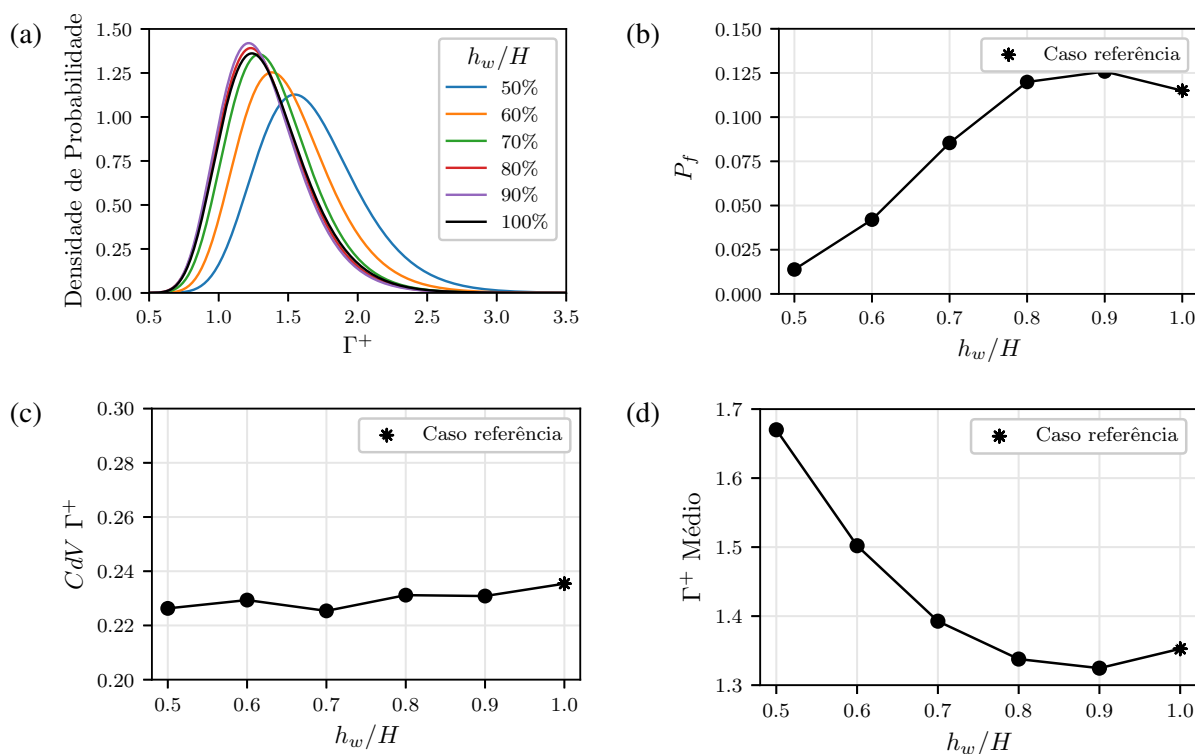


Figura 8.21 – a) FDP do fator de estabilidade, b) Probabilidade de falha, c) Coeficiente de Variação do fator de estabilidade e d) Valor médio do fator de estabilidade em função do nível de rebaixamento de água.

De maneira semelhante à seção anterior, mudanças nos fatores de estabilidade determinísticos impactam diretamente o valor médio obtido da análise probabilística, como observado na Figura 8.21d. Razões intermediárias de rebaixamento do nível de água estão associadas a maiores fatores de estabilidade e menores probabilidades de falha em geral. A Figura 8.21c indica uma pequena tendência de aumento no coeficiente de variação do fator de estabilidade, sugerindo que condições de maior rebaixamento do nível de água são ligeiramente mais sensíveis à variabilidade espacial dos parâmetros do material.

A comparação da probabilidade de falha na Figura 8.21b indica que o pior cenário não está associado a um rebaixamento completo. Uma redução de 90% no nível de água resultou em um aumento absoluto de 1,08% em comparação ao caso referência, provando ser o caso mais preocupante nesta situação. Embora este resultado possa parecer contraintuitivo, uma redução parcial do nível de água apresenta um gradiente hidráulico global ligeiramente mais horizontal quando comparado a um rebaixamento completo. Portanto, apesar de sua menor intensidade, pode resultar em maiores forças de percolação em direção ao movimento de falha em algumas configurações de taludes, como o caso referência.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No final deste trabalho, convém apresentar as principais conclusões sugeridas pelas análises realizadas, assim como formular algumas perspectivas e pistas de pesquisa futuras.

9.1 CONCLUSÕES

Um dos aspectos cruciais deste estudo é a análise do impacto da presença de fluido (água) pressurizado saturando o espaço poroso de um geomaterial, juntamente com as forças de percolação associadas, na avaliação da estabilidade de taludes em meios saturados. Após uma breve introdução sobre a questão geral relacionada a esse tipo de análise, no capítulo de revisão bibliográfica e estado da arte são discutidos os principais métodos classicamente empregados para abordar a estabilidade de estruturas em meios porosos saturados. Pesquisas recentes sugerem que abordagens que desacoplam os problemas hidráulico e de análise limite são relevantes para investigar os efeitos causados pelos gradientes de poropressão na estabilidade de geoestruturas. Os fundamentos gerais da teoria da análise limite e os princípios da poromecânica que fundamentam as análises desenvolvidas no trabalho são apresentados. Particular ênfase é dada à discussão sobre a validade e relevância da hipótese de desacoplamento entre a pressão de fluido e a deformação de esqueleto sólido no contexto da análise de estabilidade.

Adotando o *framework* regido pelo desacoplamento fraco (*one-way coupling*) entre a pressão do fluido e a deformação do esqueleto, são propostas duas abordagens variacionais distintas para abordar o problema de contorno hidráulico que governa a distribuição de poropressão e de fluxo de fluido no meio poroso. Estas abordagens variacionais são referentes respectivamente aos princípios de mínimo em pressão e velocidade de filtração do fluido do funcional energia hidráulica. Este último princípio é implementado para obter soluções analíticas aproximadas para a distribuição das forças de percolação induzidas por uma redução rápida do nível da água adjacentes a taludes. A comparação das energias funcionais associadas respectivamente às soluções analíticas e às soluções numéricas obtidas pelo MEF indicam a relevância da abordagem variacional desenvolvido para avaliar as forças de percolação em meios porosos homogêneos.

A abordagem de análise limite, formulada no contexto da validade do conceito das tensões efetivas, foi adotada para a análise determinística de estabilidades em taludes em deformação plana, considerando o efeito das forças de percolação associadas ao gradiente de poropressão induzido por variações nas condições hidráulicas. Implementando o método cinemático da

análise limite, limites superiores do fator de estabilidade são avaliados via consideração de mecanismos rotacionais envolvendo linhas de ruptura descritas por arcos de espirais logarítmicas. Os mecanismos críticos são determinados através do processo de minimização em relação aos parâmetros geométricos que definem a superfície de descontinuidade. As primeiras comparações com resultados de abordagens disponíveis na literatura, em particular aquelas empregando coeficientes empíricos para modelar o efeito da poropressão, salientam a precisão da metodologia desenvolvida neste trabalho. Um estudo paramétrico permitiu avaliar o efeito de alguns parâmetros relevantes (geométricos, de resistência, permeabilidade ou de carregamento) do problema de estabilidade. Em particular, esta análise demonstra o impacto crucial de parâmetros controlando o problema hidráulico, tal como a magnitude da seca definida pela altura do nível da água $0 \leq h_w \leq H$, cuja variação induz reduções significativas na condição de estabilidade da estrutura de talude, ou a magnitude da anisotropia de permeabilidade, caracterizada pelo fator $\alpha = k_h/k_v \geq 1$, cujo aumento se traduz por uma atenuação das forças de percolação e consequentemente um aumento da estabilidade.

A segunda parte deste trabalho envolveu uma abordagem estocástica para avaliar o impacto da variabilidade das características dos materiais sobre a estabilidade de taludes. Seguindo uma metodologia semelhante à utilizada na análise determinística, as incertezas relacionadas à variabilidade espacial das propriedades materiais são consideradas através de campos aleatórios. Em especial, a coesão, ângulo de atrito e tensor permeabilidade são discretizados via Expansão de Karhunen-Loève com autofunções numericamente computadas, sendo o Método de Monte Carlo utilizado para encontrar a probabilidade de falha da estrutura, além de demais parâmetros estatísticos do Fator de Estabilidade Γ^+ . Após a verificação da implementação, uma comparação com exemplos particulares disponíveis na literatura evidencia a capacidade da metodologia estocástica desenvolvida em caracterizar a segurança de taludes no contexto da hipótese das deformações planas. Por fim, um estudo envolvendo um talude referência permitiu avaliar a sensibilidade da variabilidade espacial dos parâmetros materiais na resposta da estrutura. A análise revela que, para os casos estudados, a variabilidade mais significativa está relacionada à coesão, seguido do ângulo de atrito. Em relação ao tensor permeabilidade, comparações com resultados obtidos a partir de premissas determinísticas indicam que, apesar do baixo impacto, sua variabilidade espacial não deve ser desconsiderada. Uma análise das distâncias de autocorrelação indicou que campos estocásticos com variações mais suaves resultaram em maiores probabilidades de falha, sendo o pior caso está associado à ausência de variabilidade espacial. Por fim, o efeito do fator de anisotropia e da altura de rebaixamento da água foram novamente investigados. Além da influência sobre os resultados médios, afetando diretamente a probabilidade de falha, observou-se um aumento no Coeficiente de variação do fator de estabilidade para valores mais altos de α e de razões de seca, sendo um ponto de atenção em diferentes configurações de taludes.

9.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta Subseção são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

- Estender a análise de estabilidade de taludes submetidos a forças de percolação a configurações 3D, nas quais a dimensão transversal é da mesma ordem de magnitude que a altura do talude, sendo a hipótese de deformação plana questionável.
- No contexto da implementação do método cinemático da análise limite, considerar critérios de ruptura não-lineares mais realistas para representar as capacidades de resistência de solos, tais como os adotados Saada et al. (2012) ou Wu et al. (2024).
- Na análise estocástica, considerar uma estrutura de correlação entre as características materiais de resistência e de condutividade hidráulica. Na mesma ideia apresentada em Cho (2010), que considerou correlação entre os campos de coesão c e de ângulo de atrito ϕ , uma pista natural para futura investigação consistiria em considerar também correlação com o tensor permeabilidade \underline{K} .
- Extensão da análise ao caso de solo não saturado para avaliar, entre outros, o problema de estabilidade de taludes submetidos à evolução progressiva no tempo do nível da água. A ideia seria raciocinar no contexto da tensão efetiva em solos parcialmente saturados, tal como a tensão efetiva de Bishop.
- Uma sequência natural do presente trabalho seria aplicar o mesmo *framework* de análise em tensão efetiva para avaliar a probabilidade de falha de outras estruturas tridimensionais, tal como o problema de estabilidade da face de túneis escavados em solos saturados.

REFERÊNCIAS

- ALLAIX, D. L.; CARBONE, V. I. Discretization of 2d random fields: A genetic algorithm approach. **Engineering Structures**, v. 31, n. 5, p. 1111–1119, 2009. ISSN 0141-0296. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S014102960900011X>>. Citado na página 148.
- ANAGNOSTOU, G. Tunnel stability and deformations in water-bearing ground. In: **Proceedings of the international symposium of the international society for rock mechanics**. Taylor & Francis, London. [S.l.: s.n.], 2006. p. 3–13. Citado 3 vezes nas páginas 7, 36 e 37.
- ANAGNOSTOU, G.; SCHUERCH, R.; PERAZZELLI, P.; VRAKAS, A.; MASPOLI, P.; POGGIATI, R. Tunnel face stability and tunnelling induced settlements under transient conditions. **Eidgenössisches Departement für Umwelt, Verkehr, Energie und Kommunikation UVEK, Bundesamt für Strassen**, Eidgenössisches Departement für Umwelt, Verkehr, Energie und Kommunikation . . . , v. 1592, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 7, 39, 40 e 41.
- ANTHOINE, A. Une méthode pour le dimensionnement à la rupture des ouvrages en sols renforcés. **Revue française de Géotechnique**, EDP Sciences, n. 50, p. 5–21, 1990. Citado na página 164.
- ARÉVALOS, M.; MAGHOUS, S. A plane strain yield design approach to stability analysis of a column-reinforced soil foundation under inclined loading. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, Wiley Online Library, v. 41, n. 5, p. 740–770, 2017. Citado na página 23.
- ARÉVALOS, M. A. **Capacidade de carga de fundações sobre solos reforçados por colunas submetidas a solicitações inclinadas**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Citado na página 23.
- BAECHER, G. B.; CHRISTIAN, J. T. **Reliability and statistics in geotechnical engineering**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 48, 140, 141 e 172.
- BEAR, J. **Dynamics of fluids in porous media**. [S.l.]: Courier Corporation, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 8, 26 e 72.
- BEKAERT, A.; MAGHOUS, S. Three-dimensional yield strength properties of jointed rock mass as a homogenized medium. **Mechanics of Cohesive-frictional Materials: An International Journal on Experiments, Modelling and Computation of Materials and Structures**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 1–24, 1996. Citado na página 36.
- BERGADO, D. T.; ANDERSON, L. R. Stochastic analysis of pore pressure uncertainty for the probabilistic assessment of the safety of earth slopes. **Soils and foundations**, The Japanese Geotechnical Society, v. 25, n. 2, p. 87–105, 1985. Citado na página 52.
- BERILGEN, M. M. Investigation of stability of slopes under drawdown conditions. **Computers and Geotechnics**, Elsevier, v. 34, n. 2, p. 81–91, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

BERNAUD, D.; DEUDE, V.; DORMIEUX, L.; MAGHOUS, S.; SCHMITT, D. Evolution of elastic properties in finite poroplasticity and finite element analysis. **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS IN GEOMECHANICS**, v. 26, n. 9, p. 845–871, AUG 10 2002. ISSN 0363-9061. Citado na página 31.

BERNAUD, D.; DORMIEUX, L.; MAGHOUS, S. A constitutive and numerical model for mechanical compaction in sedimentary basins. **COMPUTERS AND GEOTECHNICS**, v. 33, n. 6-7, p. 316–329, 2006. ISSN 0266-352X. Citado na página 31.

BIOT, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. **Journal of applied physics**, American Institute of Physics, v. 12, n. 2, p. 155–164, 1941. Citado 3 vezes nas páginas 22, 31 e 38.

BISHOP, A. W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 5, n. 1, p. 7–17, 1955. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

BISHOP, A. W.; BLIGHT, G. Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 13, n. 3, p. 177–197, 1963. Citado na página 75.

BISHOP, A. W.; MORGENSTERN, N. Stability coefficients for earth slopes. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 10, n. 4, p. 129–153, 1960. Citado 5 vezes nas páginas 7, 42, 43, 44 e 123.

BOUSSHINE, L.; CHAABA, A.; De Saxcé, G. Softening in stress–strain curve for drucker–prager non-associated plasticity. **International Journal of Plasticity**, v. 17, n. 1, p. 21–46, 2001. ISSN 0749-6419. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641900000176>>. Citado na página 46.

BROMHEAD, E. **The stability of slopes**. [S.l.]: CRC Press, 1992. Citado na página 22.

BRÖNNIMANN, C. S. **Effect of groundwater on landslide triggering**. Dissertação (Mestrado) — ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE, 2011. Citado na página 34.

BRÜCH, A. R. **Simulação numérica das deformações induzidas por sequências tectônicas em bacias sedimentares**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Citado na página 31.

BUHAN, P. D.; CUVILLIER, A.; DORMIEUX, L.; MAGHOUS, S. Face stability of shallow circular tunnels driven under the water table: a numerical analysis. **International journal for numerical and analytical methods in geomechanics**, Wiley Online Library, v. 23, n. 1, p. 79–95, 1999. Citado 9 vezes nas páginas 23, 28, 37, 41, 42, 47, 79, 80 e 97.

BUHAN, P. D.; DORMIEUX, L. On the validity of the effective stress concept for assessing the strength of saturated porous materials: a homogenization approach. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier, v. 44, n. 10, p. 1649–1667, 1996. Citado na página 75.

BUHAN, P. D.; FRÉARD, J.; GARNIER, D.; MAGHOUS, S. Failure properties of fractured rock masses as anisotropic homogenized media. **Journal of engineering mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 128, n. 8, p. 869–875, 2002. Citado na página 36.

BUHAN, P. de; DORMIEUX, L.; MAGHOUS, S. Stabilité d'un talus vertical : amélioration de la borne cinématique. **C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317(Série II) :**, v. 10, n. 2, p. 131–136, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 200.

BUHAN, P. de; MAGHOUS, S. A straightforward numerical-method for evaluating the ultimate loads of structures. **EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS A-SOLIDS**, v. 14, n. 2, p. 309–328, 1995. ISSN 0997-7538. Citado na página 22.

CAI, F.; UGAI, K. Numerical analysis of rainfall effects on slope stability. **International Journal of Geomechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 4, n. 2, p. 69–78, 2004. Citado na página 35.

CALDERÓN, W. R. **Análise de confiabilidade em problemas de interação solo-estaca incluindo campos estocásticos**. 163 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020. Citado na página 51.

CASAGRANDE, A. Seepage through dams. Harvard Univ., Graduate School of Engineering, 1937. Citado na página 43.

CAYRO, E. E. P. Simulação tridimensional de túneis escavados em meios poroelásticos. 2020. Citado 3 vezes nas páginas 28, 32 e 39.

CHAKRABORTY, R.; DEY, A. Probabilistic slope stability analysis: state-of-the-art review and future prospects. **Innovative Infrastructure Solutions**, Springer, v. 7, n. 2, p. 177, 2022. Citado na página 49.

CHEN, W.-F. **Limit analysis and soil plasticity**. [S.l.]: Elsevier, 1975. Citado 7 vezes nas páginas 9, 30, 45, 46, 54, 116 e 117.

CHEN, W. F.; GIGER, M. Limit analysis of stability of slopes. **Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division**, American Society of Civil Engineers, v. 97, n. 1, p. 19–26, 1971. Citado na página 23.

CHERUBINI, C. Reliability evaluation of shallow foundation bearing capacity on c' ϕ' soils. **Canadian Geotechnical Journal**, v. 37, n. 1, p. 264–269, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1139/t99-096>>. Citado 2 vezes nas páginas 140 e 172.

CHO, S. E. Effects of spatial variability of soil properties on slope stability. **Engineering Geology**, Elsevier, v. 92, n. 3-4, p. 97–109, 2007. Citado na página 51.

_____. Probabilistic assessment of slope stability that considers the spatial variability of soil properties. **Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 136, n. 7, p. 975–984, 2010. Citado 16 vezes nas páginas 8, 26, 50, 51, 52, 140, 141, 145, 147, 163, 164, 165, 167, 168, 172 e 185.

COLLINS, B. D.; ZNIDARCIC, D. Stability analyses of rainfall induced landslides. **Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 130, n. 4, p. 362–372, 2004. Citado na página 35.

COULOMB, C. A. Essai sur une application des regles de maximis et minimis a quelques problemes de statique relatifs a l'architecture. **Mem. Div. Sav. Acad.**, 1773. Citado na página 22.

COURBOULEX, F.; MERCERAT, E. D.; DESCHAMPS, A.; MIGEON, S.; BAQUES, M.; LARROQUE, C.; RIVET, D.; HELLO, Y. Strong site effect revealed by a new broadband seismometer on the continental shelf offshore nice airport (southeastern france). **Pure and**

Applied Geophysics, Springer, v. 177, p. 3205–3224, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 7, 28, 29 e 33.

COUSSY, O. **Poromechanics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. Citado 10 vezes nas páginas 8, 26, 31, 38, 67, 68, 69, 70, 73 e 74.

COUSSY, O.; SALENCON, J. Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul à la rupture. **Annales des ponts et chaussées. Mémoires et documents relatifs à l'art des constructions et au service de l'ingénieur**, n. 12, p. 7–35, 1979. Citado na página 30.

CUVILLIER, A. **Aspects mécaniques du creusement d'un tunnel en milieu poreux saturé**. Tese (Doutorado) — Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 41, 42, 47 e 81.

DAN, G.; SULTAN, N.; SAVOYE, B. The 1979 nice harbour catastrophe revisited: trigger mechanism inferred from geotechnical measurements and numerical modelling. **Marine Geology**, Elsevier, v. 245, n. 1-4, p. 40–64, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

DARCY, H. **Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau... un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes au filtrage des eaux**. [S.l.]: Victor Dalmont, éditeur, 1856. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 71.

DORMIEUX, L.; KONDO, D.; ULM, F.-J. **Microporomechanics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 67.

DRUCKER, D. C.; PRAGER, W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. **Quarterly of applied mathematics**, v. 10, n. 2, p. 157–165, 1952. Citado 4 vezes nas páginas 12, 45, 55 e 198.

DUNCAN, J. M. Factors of safety and reliability in geotechnical engineering. **Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 126, n. 4, p. 307–316, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 140 e 172.

EL-RAMLY, H.; MORGENSTERN, N. R.; CRUDEN, D. M. Probabilistic stability analysis of a tailings dyke on presheared clayshale. **Canadian Geotechnical Journal**, v. 40, n. 1, p. 192–208, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1139/t02-095>>. Citado na página 140.

ELKATEB, T.; CHALATURNYK, R.; ROBERTSON, P. K. An overview of soil heterogeneity: quantification and implications on geotechnical field problems. **Canadian Geotechnical Journal**, NRC Research Press Ottawa, Canada, v. 40, n. 1, p. 1–15, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 138 e 139.

FENTON, G. A.; GRIFFITHS, D. Bearing-capacity prediction of spatially random c ϕ soils. **Canadian geotechnical journal**, NRC Research Press Ottawa, Canada, v. 40, n. 1, p. 54–65, 2003. Citado na página 51.

FENTON, G. A.; GRIFFITHS, D. V. et al. **Risk assessment in geotechnical engineering**. [S.l.]: John Wiley & Sons New York, 2008. v. 461. Citado 4 vezes nas páginas 8, 49, 50 e 51.

FENTON, G. A.; VANMARCKE, E. H. Simulation of random fields via local average subdivision. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 116, n. 8, p. 1733–1749, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 143.

- FINLAYSON, B. A. **The method of weighted residuals and variational principles**. [S.l.]: SIAM, 2013. Citado na página 79.
- GALILEI, G. **Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze**. [S.l.]: Elsevier, Leiden, 1638. Citado 3 vezes nas páginas 8, 22 e 53.
- GAO, Y.; ZHANG, F.; LEI, G.-H.; LI, D. An extended limit analysis of three-dimensional slope stability. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 63, n. 6, p. 518–524, 2013. Citado na página 36.
- GAO, Y.; ZHU, D.; ZHANG, F.; LEI, G.; QIN, H. Stability analysis of three-dimensional slopes under water drawdown conditions. **Canadian Geotechnical Journal**, NRC Research Press, v. 51, n. 11, p. 1355–1364, 2014. Citado na página 43.
- GHANEM, R. G.; SPANOS, P. D. **Stochastic finite elements: a spectral approach**. [S.l.]: Courier Corporation, 2003. Citado 12 vezes nas páginas 26, 50, 51, 138, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146 e 201.
- GRIFFITHS, D.; FENTON, G. A. Seepage beneath water retaining structures founded on spatially random soil. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 43, n. 4, p. 577–587, 1993. Citado na página 140.
- _____. Probabilistic slope stability analysis by finite elements. **Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 130, n. 5, p. 507–518, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 141.
- GRIFFITHS, D.; LANE, P. Slope stability analysis by finite elements. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 49, n. 3, p. 387–403, 1999. Citado 6 vezes nas páginas 7, 37, 39, 40, 42 e 45.
- GU, X.; WANG, L.; OU, Q.; ZHANG, W. Efficient stochastic analysis of unsaturated slopes subjected to various rainfall intensities and patterns. **Geoscience Frontiers**, v. 14(1), n. 1, p. 101490, 2023. ISSN 1674-9871. Citado na página 173.
- HABIB, P. Les surfaces de glissement en mécanique des sols. **Revue française de géotechnique**, EDP Sciences, n. 27, p. 7–21, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 54.
- HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Probability, reliability and statistical methods in engineering design**. Wiley, 2000. Disponível em: <<https://cir.nii.ac.jp/crid/1130282272608504576>>. Citado na página 142.
- HEYMAN, J. The stability of a vertical cut. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 15, n. 10, p. 845–854, 1973. Citado na página 199.
- HEYMAN, J.; COULOMB de. **Coulomb's memoir on statics: an essay in the history of civil engineering**. [S.l.]: CUP Archive, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 54.
- HONG, H.; ROH, G. Reliability evaluation of earth slopes. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 134, n. 12, p. 1700–1705, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 49, 141 e 142.
- HUANG, F.; YANG, X. Upper bound limit analysis of collapse shape for circular tunnel subjected to pore pressure based on the hoek–brown failure criterion. **Tunnelling and Underground Space Technology**, Elsevier, v. 26, n. 5, p. 614–618, 2011. Citado na página 44.

HUANG, J.; GRIFFITHS, D.; FENTON, G. A. System reliability of slopes by rfem. **Soils and Foundations**, The Japanese Geotechnical Society, v. 50, n. 3, p. 343–353, 2010. Citado na página 51.

JANBU, N. Earth pressures and bearing capacity calculations. In: **Proc., 4th ICSMFE**. [S.l.: s.n.], 1957. v. 2, p. 207–212. Citado na página 45.

JAVANKHOSHDDEL, S.; LUO, N.; BATHURST, R. J. Probabilistic analysis of simple slopes with cohesive soil strength using rlem and rfem. **Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards**, Taylor & Francis, v. 11, n. 3, p. 231–246, 2017. Citado na página 51.

JONG, G. D. J. D. Improvement of the lowerbound solution for the vertical cut off in a cohesive, frictionless soil. **Géotechnique**, v. 28, n. 2, p. 197–201, 1978. Citado na página 200.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: IEEE. **Proceedings of ICNN'95-international conference on neural networks**. [S.l.], 1995. v. 4, p. 1942–1948. Citado 2 vezes nas páginas 113 e 114.

KIM, J.; SALGADO, R.; YU, H. Limit analysis of soil slopes subjected to pore-water pressures. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 125, n. 1, p. 49–58, 1999. Citado na página 24.

KOLYMBAS, D. **Tunnelling and tunnel mechanics: A rational approach to tunnelling**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 33.

LAMBE, T. W.; WHITMAN, R. V. **Soil mechanics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. v. 10. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 35.

LECA, E.; DORMIEUX, L. Upper and lower bound solutions for the face stability of shallow circular tunnels in frictional material. **Géotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 40, n. 4, p. 581–606, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 47.

LIU, L.; ZHANG, S.; CHENG, Y.-M.; LIANG, L. Advanced reliability analysis of slopes in spatially variable soils using multivariate adaptive regression splines. **Geoscience Frontiers**, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 671–682, 2019. Citado na página 143.

LUCANUS, O.; KALACSKA, M.; ARROYO-MORA, J. P.; SOUSA, L.; CARVALHO, L. N. Before and after: A multiscale remote sensing assessment of the sinop dam, mato grosso, brazil. **Earth**, MDPI, v. 2, n. 2, p. 303–330, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 34.

MAGHOUS, S. **Aplicação dos métodos de análise de estabilidade de taludes em ambiente submarino - Relatório Técnico**. [S.l.]: ENPC-STCPMVN, 1995. Private communication. Citado 4 vezes nas páginas 10, 19, 128 e 129.

MAGHOUS, S.; BUHAN, P. de; BEKAERT, A. Failure design of jointed rock structures by means of a homogenization approach. **Mechanics of Cohesive-frictional Materials: An International Journal on Experiments, Modelling and Computation of Materials and Structures**, Wiley Online Library, v. 3, n. 3, p. 207–228, 1998. Citado na página 36.

MAGHOUS, S.; DORMIEUX, L.; BARTHÉLÉMY, J. Micromechanical approach to the strength properties of frictional geomaterials. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v. 28, n. 1, p. 179–188, 2009. ISSN 0997-7538. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753808000314>>. Citado na página 46.

MAGHOUS, S.; WINIAWER, J. E.; DUTRA, V. F. P. Stability analysis of tunnels driven in jointed rocks by means of a homogenized limit analysis approach. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, Wiley Online Library, v. 38, n. 18, p. 2009–2032, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 23, 36 e 164.

MATOS, D. B. M. **Otimização do posicionamento da alvenaria estrutural de vedação para minimização de deslocamentos laterais em edifícios submetidos a excitações sísmicas**. 106 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021. Citado na página 114.

MESTAT, P.; BOURGEOIS, E.; RIOU, Y. Numerical modelling of embankments and underground works. **Computers and Geotechnics**, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 227–236, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 38.

MICHALOWSKI, R. Slope stability analysis: a kinematical approach. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 45, n. 2, p. 283–293, 1995. Citado 11 vezes nas páginas 10, 19, 41, 43, 45, 46, 123, 128, 131, 132 e 133.

MICHALOWSKI, R. L. Stability of slopes: limit analysis approach. **Reviews in Engineering Geology**, Geological Society of America, v. 10, p. 51–62, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 7, 34, 45 e 46.

MICHALOWSKI, R. L.; NADUKURU, S. S. Three-dimensional limit analysis of slopes with pore pressure. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 139, n. 9, p. 1604–1610, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 34, 41, 43 e 46.

MILLER, T.; HAMILTON, J. A new analysis procedure to explain a slope failure at the martin lake mine. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 39, n. 1, p. 107–123, 1989. Citado na página 44.

_____. Discussion: A new analysis procedure to explain a slope failure at the martin lake mine. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 40, n. 1, p. 145–147, 1990. Citado na página 45.

MOLLON, G.; DIAS, D.; SOUBRA, A.-H. Probabilistic analysis and design of circular tunnels against face stability. **International Journal of Geomechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 9, n. 6, p. 237–249, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 7, 47 e 48.

MOREGENSTERN, N. Stability charts for earth slopes during rapid drawdown. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 13, n. 2, p. 121–131, 1963. Citado 6 vezes nas páginas 7, 22, 29, 34, 41 e 44.

MOSTYN, G.; LI, K. S. Probabilistic slope analysis—state-of-play. In: **Probabilistic methods in geotechnical engineering**. [S.l.]: CRC Press, 2020. p. 89–109. Citado na página 49.

NETO, E. A. de S.; PERIC, D.; OWEN, D. R. **Computational methods for plasticity: theory and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 45.

PAN, Q.; DIAS, D. The effect of pore water pressure on tunnel face stability. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, Wiley Online Library, v. 40, n. 15, p. 2123–2136, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 47.

PAN, Q.; XU, J.; DIAS, D. Three-dimensional stability of a slope subjected to seepage forces. **International Journal of Geomechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 17, n. 8, p. 04017035, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 7, 42, 46 e 47.

PASQUALI, P. R. Z. **Análise limite de estruturas através de uma formulação em elasticidade não-linear**. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Citado na página 23.

PASTOR, J. Analyse limit determination numerique de solutions statistique completes, application au talus vertical. **J. de Mécanique Appliquée**, v. 2, p. 167–196, 1978. Citado na página 200.

PHOON, K.-K.; KULHAWY, F. H. Characterization of geotechnical variability. **Canadian geotechnical journal**, NRC Research Press Ottawa, Canada, v. 36, n. 4, p. 612–624, 1999. Citado 5 vezes nas páginas 10, 138, 139, 140 e 172.

POTTS, D. M.; ZDRAVKOVIĆ, L.; ADDENBROOKE, T. I.; HIGGINS, K. G.; KOVAČEVIĆ, N. **Finite element analysis in geotechnical engineering: application**. [S.l.]: Thomas Telford London, 2001. v. 2. Citado 4 vezes nas páginas 7, 35, 36 e 38.

SAADA, Z.; MAGHOUS, S.; GARNIER, D. Stability analysis of rock slopes subjected to seepage forces using the modified hoek–brown criterion. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 55, p. 45–54, 2012. ISSN 1365-1609. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S136516091200127X>>. Citado 13 vezes nas páginas 7, 23, 26, 28, 41, 42, 44, 46, 47, 104, 105, 129 e 185.

_____. Pseudo-static analysis of tunnel face stability using the generalized hoek-brown strength criterion. **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL AND ANALYTICAL METHODS IN GEOMECHANICS**, v. 37, n. 18, p. 3194–3212, DEC 25 2013. ISSN 0363-9061. Citado na página 23.

SALENÇON, J. **Calcul à la rupture et analyse limite**. [S.l.]: Presses de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées., 1983. Citado 4 vezes nas páginas 45, 46, 57 e 157.

_____. Introduction to the yield design theory and its applications to soil mechanics. **European Journal of Mechanics, A/Solids**, Elsevier Masson, v. 9, n. 5, p. 477–500, 1990. Citado 6 vezes nas páginas 26, 53, 54, 55, 56 e 61.

_____. **Yield design**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 26, 53, 54, 56, 57 e 58.

SAXCÉ, G. D.; BOUSSHINE, L. Limit analysis theorems for implicit standard materials: application to the unilateral contact with dry friction and the non-associated flow rules in soils and rocks. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 40, n. 4, p. 387–398, 1998. Citado na página 46.

SCHROETER, T. 20. jahrestag des truderinger busunglücks - plötzlich tut sich die erde auf. **Süddeutsche Zeitung**, 20 Set 2014. Disponível em: <<https://www.sueddeutsche.de/muenchen/20-jahrestag-des-truderinger-busungluecks-ploetzlich-tut-sich-die-erde-auf-1.2137634>> (Acessado: 13 de Junho de 2023). Citado na página 28.

SHAKIR, R. R. Probabilistic-based analysis of a shallow square footing using monte carlo simulation. **Engineering Science and Technology, an International Journal**, Elsevier, v. 22, n. 1, p. 313–333, 2019. Citado na página 50.

SHANMUGAM, G. Slides, slumps, debris flow, and turbidity currents. **Ocean Currents: A Derivative of the Encyclopedia of Ocean Sciences**, Elsevier Academic Press Boston, Heidelberg, London, v. 20, p. 418, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 28, 32, 33 e 34.

SHINOZUKA, M.; DEODATIS, G. Simulation of Stochastic Processes by Spectral Representation. **Applied Mechanics Reviews**, v. 44, n. 4, p. 191–204, 04 1991. ISSN 0003-6900. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3119501>>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 143.

SPENCER, E. A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 17, n. 1, p. 11–26, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

SRIVASTAVA, A.; BABU, G. S.; HALDAR, S. Influence of spatial variability of permeability property on steady state seepage flow and slope stability analysis. **Engineering Geology**, Elsevier, v. 110, n. 3-4, p. 93–101, 2010. Citado na página 140.

STEFANOOU, G. The stochastic finite element method: past, present and future. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 198, n. 9-12, p. 1031–1051, 2009. Citado na página 143.

TAYLOR, D. W. **Fundamentals of soil mechanics**. [S.l.]: LWW, 1948. v. 66. Citado 5 vezes nas páginas 7, 30, 43, 46 e 200.

TERZAGHI, K. **Theoretical Soil Mechanics**. [S.l.]: Wiley, New York, 1943. Citado 10 vezes nas páginas 7, 22, 23, 29, 30, 31, 32, 36, 38 e 75.

TERZAGHI, K.; PECK, R. B.; MESRI, G. **Soil mechanics in engineering practice**. [S.l.]: John wiley & sons, 1996. Citado na página 42.

VANMARCKE, E. **Random fields: analysis and synthesis**. [S.l.]: World Scientific, 2010. Citado na página 50.

VARNES, D. J. Slope movement types and processes. **Special report**, v. 176, p. 11–33, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 36.

VERDUGO, R.; GONZÁLEZ, J. Liquefaction-induced ground damages during the 2010 chile earthquake. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, Elsevier, v. 79, p. 280–295, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 33.

VIRATJANDR, C.; MICHALOWSKI, R. L. Limit analysis of submerged slopes subjected to water drawdown. **Canadian Geotechnical Journal**, NRC Research Press Ottawa, Canada, v. 43, n. 8, p. 802–814, 2006. Citado 7 vezes nas páginas 22, 23, 34, 41, 42, 44 e 46.

WANG, H. **Theory of linear poroelasticity with applications to geomechanics and hydrogeology**. [S.l.]: Princeton university press, 2000. v. 2. Citado na página 23.

WU, D.; CHEN, X.; ZHANG, J. Effect of sea level drawdown on coastal clay slope stability considering two strength criteria. **Marine Georesources & Geotechnology**, Taylor & Francis, p. 1–19, 2024. Citado 7 vezes nas páginas 10, 19, 128, 133, 134, 135 e 185.

YU, H.; SALGADO, R.; SLOAN, S.; KIM, J. Limit analysis versus limit equilibrium for slope stability. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 124, n. 1, p. 1–11, 1998. Citado na página 23.

ZIENKIEWICZ, O.; SHIOMI, T. Dynamic behaviour of saturated porous media; the generalized biot formulation and its numerical solution. **International journal for numerical and analytical methods in geomechanics**, Wiley Online Library, v. 8, n. 1, p. 71–96, 1984. Citado na página 38.

ZIENKIEWICZ, O. C.; HUMPHESON, C.; LEWIS, R. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics. **Geotechnique**, Thomas Telford Ltd, v. 25, n. 4, p. 671–689, 1975. Citado na página 40.

APÊNDICES

APÊNDICE A – EXEMPLO ILUSTRATIVO — TALUDE VERTICAL EM DEFORMAÇÃO PLANA

Para ilustrar o método de análise limite, apresenta-se o exemplo clássico da análise de estabilidade em deformação plana de um talude vertical de altura H submetido apenas ao peso próprio $\underline{Q} = \underline{\gamma}$, conforme ilustrado na Figura A.1. Considera-se o critério de Tresca com coesão c para descrever as propriedades de resistência do solo.

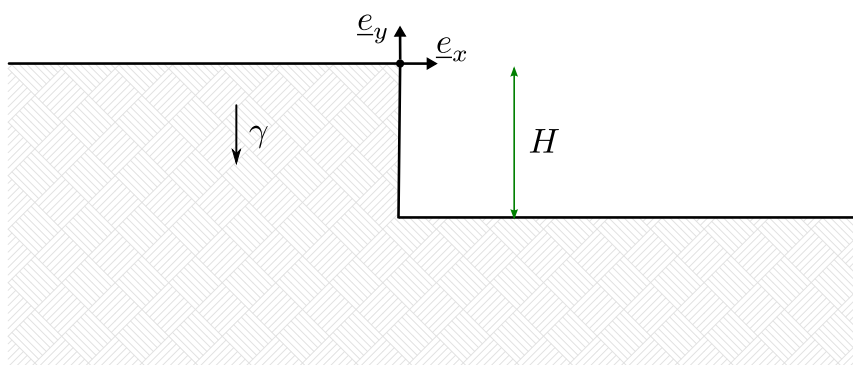


Figura A.1 – Talude vertical com altura H

Pela análise dimensional, sabe-se que a estabilidade do problema em questão é dependente apenas do parâmetro adimensional $(H\gamma/c)$. Dessa forma, buscam-se limites inferiores e superiores para o valor crítico $(H\gamma/c)^+$.

A.1 ABORDAGEM ESTÁTICA

Para verificar a estabilidade pela abordagem estática, conforme apresentado pela Equação 3.4, deve-se construir um campo de tensões que seja E.A. e verifique o critério de resistência em todos os pontos. A Figura A.2 apresenta o campo de tensões descontínuo que satisfaz o equilíbrio. Observa-se que, apesar da descontinuidade, o campo proposto satisfaz as condições da Equação 3.2 e, portanto, é E.A.

Para encontrar o limite inferior, basta tomar o maior valor de $(H\gamma/c)$ que satisfaça o critério de resistência. Neste caso, a maior tensão cisalhante é encontrada na parte inferior do talude, desta

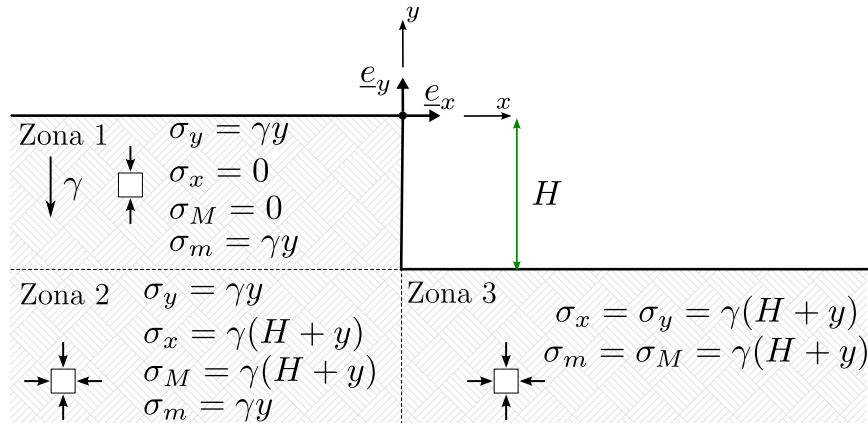


Figura A.2 – Campo de tensões proposto (adaptado de: Drucker e Prager (1952))

forma tem-se que:

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad \forall(x,y) \implies \begin{cases} \gamma H - 2c \leq 0 & \text{na Zona 1} \\ \gamma H - 2c \leq 0 & \text{na Zona 2} \\ 0 - 2c \leq 0 & \text{na Zona 3} \end{cases} \implies \left(\frac{H\gamma}{c}\right) \leq 2 \quad (\text{A.1})$$

Assim, a abordagem estática resulta em um limite inferior para o valor crítico.

$$2 \leq \left(\frac{H\gamma}{c}\right)^+ \quad (\text{A.2})$$

A.2 ABORDAGEM CINEMÁTICA

Inicialmente estudam-se os critérios que devem ser satisfeitos pelo campo de velocidades para que as funções suporte π não sejam infinitas, e, por consequência, a desigualdade do teorema cinético seja trivial. No caso do critério de Tresca, basta que: $\text{tr}(\underline{\underline{d}}) = 0$, isto é, a taxa de deformação associada ao campo de velocidades não deve causar mudanças volumétricas; e $[[\hat{U}]] \cdot \underline{\underline{n}} = 0$ sobre Σ , isto é, há apenas descontinuidades de velocidades tangenciais.

Dessa forma, propõe-se um mecanismo de ruptura dada pelo simples deslizamento de um bloco rígido, definido pela reta com inclinação α . A Figura A.3 apresenta o mecanismo de ruptura bem como o campo de velocidades associado.

Observe que para cada $\alpha \in (0, \pi \setminus 2)$, tem-se um campo de velocidades diferentes, e por consequência, apresentará trabalho de forças externas e resistentes distintos. Sendo assim, para todo α , tem-se que o trabalho das forças externas é dado por:

$$P_{ext} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\dot{q}}}(\hat{U}) = \frac{1}{2} \gamma H^2 \hat{U} \sin \alpha \quad (\text{A.3})$$

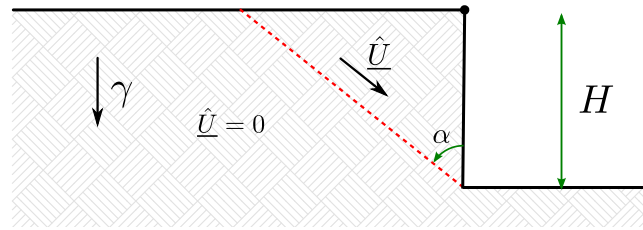


Figura A.3 – Talude vertical com superfície de ruptura assumida

Como se optou por um mecanismo de ruptura de bloco em translação, a taxa de deformações associada ao campo é nula ($\underline{\underline{d}} \equiv 0$), dessa forma considera-se apenas a parcela de resistência dada sobre a superfície de descontinuidade Σ , resultando em:

$$P_{rm} = \int_{\Sigma} \pi(\underline{n}; \llbracket \hat{U} \rrbracket) dS = \hat{U} c H \frac{1}{\cos \alpha} \quad (\text{A.4})$$

Portanto, pela desigualdade dada na Equação 3.16, tem-se que

$$\left(\frac{\gamma H}{c} \right) \leq \frac{4}{\sin 2\alpha} \quad \forall \alpha \in (0, \pi/2) \quad (\text{A.5})$$

Como a desigualdade é válida para todo α , toma-se o menor limite superior, neste caso dado por $\alpha = \pi/4$, obtendo por fim:

$$\left(\frac{\gamma H}{c} \right)^+ \leq 4 \quad (\text{A.6})$$

Dessa forma, para qualquer combinação de H , γ , c , que resulte em um valor superior a 4, certamente o talude estará instável. Para combinações inferiores à 4, nada se pode afirmar a partir da abordagem cinemática.

A.3 DELIMITAÇÃO DA CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE

Através dos campos de tensões e velocidades propostos, foi possível obter limites para o parâmetro crítico da estabilidade do talude.

$$2 \leq \left(\frac{\gamma H}{c} \right)^+ \leq 4 \quad (\text{A.7})$$

Apesar da simplicidade aparente do problema, não existem valores exatos para o parâmetro de estabilidade $(H\gamma/c)^+$. Os limites inferiores e superiores foram progressivamente aperfeiçoados ao longo dos anos, resultando pela abordagem estática em 2,73 (HEYMAN, 1973), 3,39 (JONG,

1978) e 3,635 (PASTOR, 1978); e pela abordagem cinemática em 3,831 (TAYLOR, 1948) e 3,817 (BUHAN et al., 1993), a partir de mecanismos de ruptura baseado em rotações e deformações contínuas.

APÊNDICE B – CAMPOS ESTOCÁSTICOS — VERIFICAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Visando verificar a implementação em Elementos Finitos desenvolvida em linguagem Python, buscam-se casos simples com soluções analíticas disponíveis. Restringindo a implementação ao caso bidimensional paralelamente ao plano O_{xy} , considera-se a configuração acadêmica na qual a geometria do domínio considerado é definido por uma superfície quadrada. Conforme apresentado na Figura B.1, o domínio em questão está centrado na origem do sistema e possui lado unitário. A distância de correlação é fixada igual a 1 em ambas as direções de tal maneira que a Covariância exponencial é dada por:

$$C(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \exp(-|x_1 - x_2| - |y_1 - y_2|) \quad (\text{B.1})$$

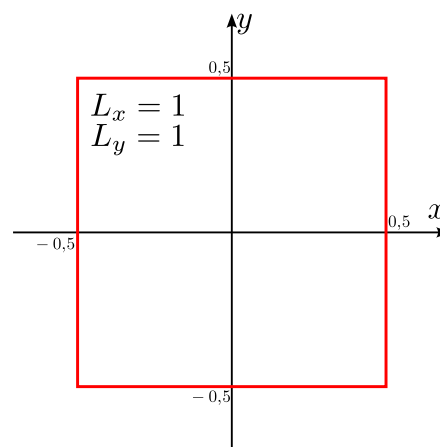


Figura B.1 – Domínio considerado para a verificação.

A solução analítica do problema matemático definido pela equação integral de Fredholm de segundo tipo é apresentada por Ghanem e Spanos (2003). Em particular, dada a simetria do problema ($L_x = L_y$), as autofunções já normalizadas possuem a forma:

$$f_n(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} [f'_i(x)f'_j(y) + f'_j(x)f'_i(y)], & \text{se } i \neq j \\ f'_i(x)f'_j(y), & \text{se } i = j \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

sendo f_n obtida a partir da permutação do subíndices i e j . Cada função f'_k é definida como

$$f'_k(z) = \frac{\cos \omega_k z}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sin \omega_k}{2\omega_k}}}, \quad \text{para } k \text{ ímpar} \quad (\text{B.3})$$

$$f'_k(z) = \frac{\sin \omega_k z}{\sqrt{1 - \frac{\sin \omega_k}{2\omega_k}}}, \quad \text{para } k \text{ par} \quad (\text{B.4})$$

onde cada ω_k é dado pelas equações transcendentais:

$$1 - \omega_k \tan \frac{\omega_k}{2} = 0, \quad \text{para } k \text{ ímpar} \quad (\text{B.5})$$

$$\omega_k + \tan \frac{\omega_k}{2} = 0, \quad \text{para } k \text{ par} \quad (\text{B.6})$$

Os autovalores associados à cada f_n , por sua vez, são dados por:

$$\lambda_n = \lambda'_i \lambda'_j \quad (\text{B.7})$$

sendo

$$\lambda'_k = \frac{2}{\omega_k^2 + 1} \quad (\text{B.8})$$

Uma vez encontrados todas as autofunções desejadas, estas são ordenadas em ordem decrescente de magnitude do autovalor associado.

Para a verificação da implementação em Elementos Finitos, são propostas duas malhas distintas, uma com 4 elementos e outra com 16 elementos, conforme ilustrado pela Figura B.2. Em cada malha, serão comparados apenas os 10 primeiros autovalores e as autofunções $n = 1, 2$ e 5. Por conveniência e facilidade de visualização de funções unidimensionais, será observada a forma das autofunções sobre a Linha $\overline{AA'}$, ilustrada na Figura B.2 sobre a Malha 2.

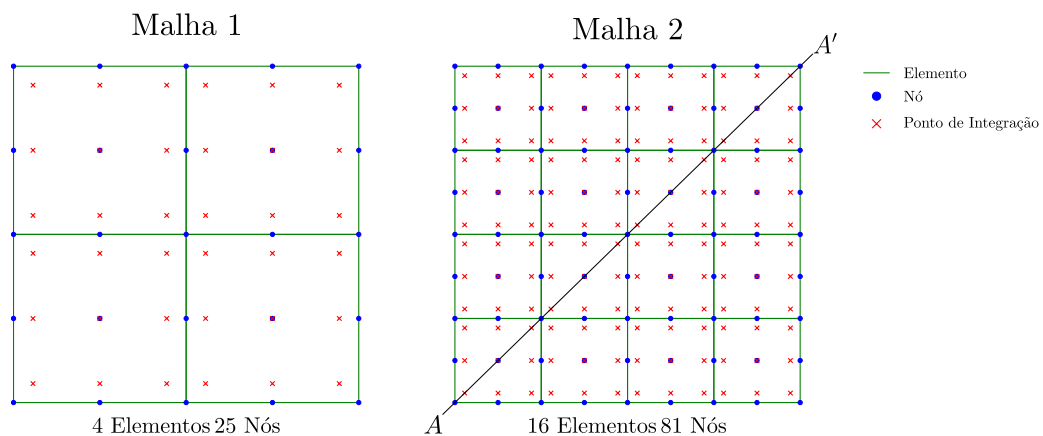


Figura B.2 – Malhas para verificação do problema.

A Figura B.3 apresenta os autovalores obtidos numérica e analiticamente. Para $n = 1$, tem-se que as Malhas 1 e 2 apresentaram um erro relativo de 1,5% e 0,4%, respectivamente, indicando uma boa precisão, mesmo para a malha menos refinada. Já para $n = 10$, o erro relativo das Malhas 1 e 2 aumenta para 91% e 6,5%, ilustrando a necessidade de refinamento, em particular para representar autofunções de maior ordem.

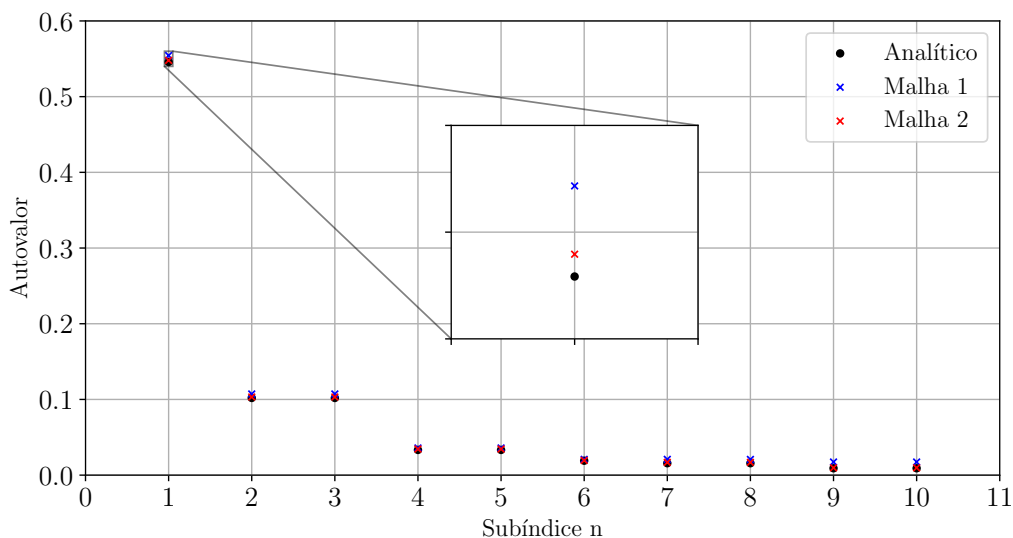


Figura B.3 – Verificação dos Autovalores obtidos numericamente.

Um ponto a ser destacado é o rápido decaimento dos autovalores. A título de ilustração, $\lambda_{10} \approx 0.017\lambda_1$, indicando que as autofunções rapidamente perdem influência sobre os campos aleatórios. Em relação as autofunções, mantém-se a tendência observada entre as Malhas 1 e 2. A Figura B.4 apresenta a comparação para $n = 1, 2$ e 5. Para $n = 1$, ambas as malhas aproximam-se razoavelmente da solução analítica. Já para $n = 5$, a Malha 1 passa a perder precisão, evidenciando novamente a necessidade de refinamento para representar autofunções de ordem superior.

A partir dos resultados apresentados, esta comparação preliminar referente ao caso acadêmico do domínio quadrado sugere que a abordagem em Elementos Finitos foi implementada corretamente.

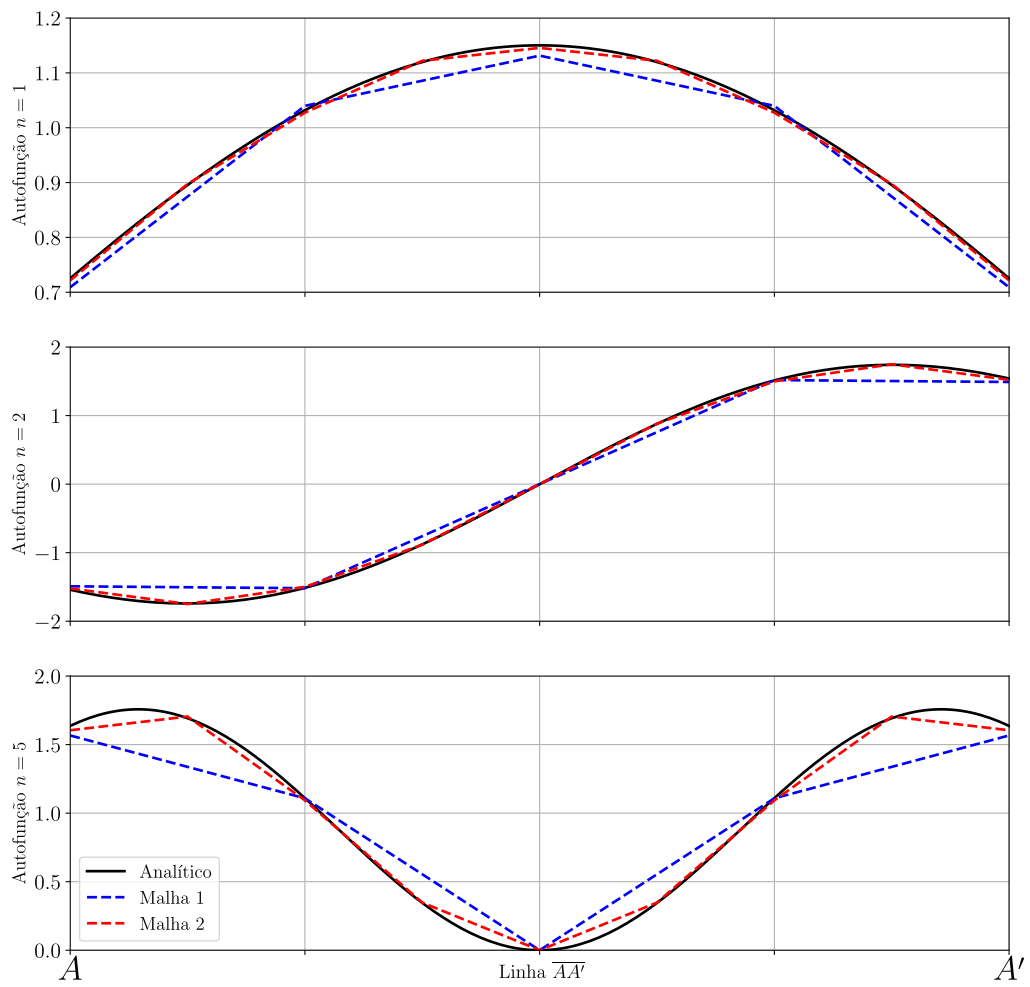


Figura B.4 – Verificação das Autofunções obtidas numericamente.