

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE APLICADA A SEÇÕES DE  
CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À FLEXÃO SIMPLES**

**Gabriel Martinez Machado**

Porto Alegre  
2024

GABRIEL MARTINEZ MACHADO

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE APLICADA A SEÇÕES DE  
CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À FLEXÃO SIMPLES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para obtenção do  
título de Mestre em Engenharia.

Porto Alegre  
2024

### CIP - Catalogação na Publicação

Machado, Gabriel Martinez

Análise de confiabilidade aplicada a seções de concreto armado submetidas à flexão simples / Gabriel Martinez Machado. -- 2024.

169 f.

Orientadores: Américo Campos Filho, Mauro de Vasconcellos Real.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-RS, 2024.

1. confiabilidade. 2. flexão simples. 3. concreto armado. 4. NBR 6118:2023. 5. Eurocode 2. I. Campos Filho, Américo, orient. II. Real, Mauro de Vasconcellos, orient. III. Título.

**GABRIEL MARTINEZ MACHADO**

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE APLICADA A SEÇÕES DE  
CONCRETO ARMADO SUBMETIDAS À FLEXÃO SIMPLES**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na área de concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelos professores orientadores e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 15 de Abril de 2024

Prof. Américo Campos Filho  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade  
de São Paulo  
Orientador

Prof. Mauro de Vasconcellos Real  
Dr. pela Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul  
Orientador

Prof. Nilo Cesar Consoli  
Dr. pela Concordia University-Canadá  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Herbert Martins Gomes (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Sofia Maria Carrato Diniz (UFMG)**  
Ph.D. pela University of Colorado at Boulder-Estados Unidos

**Prof. Sergio Hampshire de Carvalho Santos (UFRJ)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aos meus pais Marcia e Lauro pela educação,  
apoio e incentivo, imprescindíveis  
para alcançar mais esse objetivo.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus orientadores, professores Américo e Mauro, pelos ensinamentos, direcionamentos e parceria ao longo dos momentos de dificuldade e das incontáveis reuniões *on-line* necessárias à elaboração deste trabalho.

Aos meus pais Lauro e Marcia, demais familiares e amigos, por todo carinho, suporte e compreensão prestados durante mais este ciclo da minha formação educacional.

Agradeço, também, aos demais professores e colaboradores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela dedicação em manterem o nível altamente qualificado de ensino desta instituição, mesmo em um cenário tão adverso como o causado pela pandemia da COVID-19.

## RESUMO

MACHADO, G. M. **Análise de confiabilidade aplicada a seções de concreto armado submetidas à flexão simples**. 2024. 169p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

No âmbito da engenharia de estruturas, a análise de confiabilidade apresenta-se como uma ferramenta crucial na busca pela otimização de custos e materiais, assim como na prevenção de acidentes e falhas de elementos e sistemas. Neste contexto, o presente estudo concentra-se na avaliação da confiabilidade de seções de concreto armado submetidas à flexão simples em estado-limite último, por aplicação do método FORM, de forma a avaliar as variações resultantes da aplicação de quatro normas distintas: as versões de 2014 e 2023 da NBR 6118, Eurocode 2:2004 e seu respectivo projeto de revisão FprEN 1992-1-1:2022. Para tal, realizou-se o desenvolvimento de rotinas computacionais em linguagem *Python* para o dimensionamento de seções retangulares, de acordo com as normativas mencionadas, concomitantemente a uma rotina para verificação das seções segundo o modelo mecânico realístico apresentado pelo Código Modelo *fib* 2010. O trabalho apresenta o processo de validação e estimativa dos erros associados ao modelo de capacidade resistente implementado, comparando-os com resultados provenientes de um banco de dados de 53 ensaios de ruptura. Foram ainda avaliadas as respostas dos índices de confiabilidade em um estudo de caso de uma viga exemplo. Posteriormente, permitiu-se chegar ao conjunto de análises comparativas propostas pelo estudo, onde determinaram-se as confiabilidades de três diferentes seções retangulares, com momentos fletores adimensionais fixados e cinco diferentes classes resistentes para o concreto (no intervalo entre 30 e 90 MPa), em função de múltiplas composições de carregamento. Ao término do trabalho, verificou-se que variações nas alturas das seções não influenciaram os índices de confiabilidade. A comparação direta entre as versões recentes das normas brasileira e europeia demonstrou menor variabilidade do índice de confiabilidade segundo proporções maiores de cargas variáveis para os elementos dimensionados segundo o Eurocode 2. Alerta-se, também, para as disparidades na implementação do coeficiente de fragilidade ( $\eta_c$ ) pela NBR 6118:2023, que impactam consideravelmente no consumo de aço em concretos de alta resistência, sem melhorias substanciais da confiabilidade.

**Palavras-chave:** *confiabilidade, flexão simples, vigas de concreto armado, NBR 6118:2023, Eurocode 2, FORM, coeficiente de fragilidade.*

## ABSTRACT

MACHADO, G. M. **Análise de confiabilidade aplicada a seções de concreto armado submetidas à flexão simples**. 2024. 169p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

In structural engineering, reliability analysis stands out as a crucial tool in the pursuit of cost and material optimization, as well as in the prevention of accidents and failures of elements and structural systems. In this context, this study focuses on evaluating the reliability of reinforced concrete cross-sections subjected to simple bending at the ultimate limit state, using the FORM method, in order to assess the variations resulting from the application of four different standards: the 2014 and 2023 versions of NBR 6118, Eurocode 2:2004, and its revision project FprEN 1992-1-1:2022. For this purpose, computational routines were developed in Python for the design of rectangular cross-sections according to the mentioned standards, concurrently with a routine for cross-section verification according to the realistic mechanical model presented by the *fib* Model Code 2010. The paper presents the process of validating and estimating the errors associated with the implemented strength model, in comparison with results from a database of 53 rupture tests. The responses of the reliability indices were also evaluated in a case study of an example beam. Subsequently, it was possible to accomplish the set of comparative analyses proposed by the study, in which the determination of the reliability of three different rectangular cross-sections was made, considering fixed dimensionless bending moments and five different concrete strength classes (in the range between 30 and 90 MPa), as a function of multiple loading compositions. At the end of the work, it was found that variations in the cross-section heights did not influence the reliability indices. The direct comparison between the recent versions of the Brazilian and European standards showed less variability in the reliability index according to higher proportions of variable loads for elements designed according to Eurocode 2. The disparities in the implementation of the fragility factor ( $\eta_c$ ) by NBR 6118:2023 are also worth noting, as they have a considerable impact on steel consumption for high-strength concrete elements, without substantial improvements in reliability.

**Keywords:** *reliability. simple bending. reinforced concrete beams. NBR 6118:2023. Eurocode 2. FORM. fragility factor.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto à compressão, segundo a NBR 6118:2014 . . . . .	30
Figura 2.2 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas, segundo a NBR 6118:2014 . . . . .	31
Figura 2.3 – Domínios de deformação de uma seção transversal em ELU . . . . .	35
Figura 2.4 – Diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto à compressão, segundo a NBR 6118:2023 . . . . .	37
Figura 2.5 – Diagrama tensão-deformação idealizado para análise não linear, segundo a NBR 6118:2023 . . . . .	38
Figura 2.6 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas (Eurocode 2)	40
Figura 2.7 – Domínios de deformação de uma seção transversal em ELU . . . . .	43
Figura 2.8 – Modelo de tensão-deformação não linear do concreto sob compressão . . .	45
Figura 2.9 – Domínios de deformação em ELU segundo o FprEN:2022 . . . . .	46
Figura 2.10 – Diagrama tensão-deformação do concreto para compressão uniaxial de curta duração . . . . .	47
Figura 2.11 – Representação esquemática das relações tensão-deformação e tensão-abertura de fissuras do concreto tracionado . . . . .	49
Figura 2.12 – Estado de formação de fissuras e tensão de aderência . . . . .	50
Figura 2.13 – Área efetiva de concreto na zona tracionada de vigas . . . . .	51
Figura 3.1 – Representação do domínio de falha . . . . .	58
Figura 3.2 – Representação da integral de convolução . . . . .	58
Figura 3.3 – Processo de aproximação do método FORM e o índice de confiabilidade .	64
Figura 3.4 – Processo de transformação das variáveis $x_1$ e $x_2$ em variáveis normais padrão independentes . . . . .	66
Figura 4.1 – Definição da seção poligonal . . . . .	73

Figura 4.2 – Definição do sistema $\xi, \eta$ . . . . .	74
Figura 4.3 – Fluxograma de etapas para verificação de seções segundo o Código Modelo <i>fib</i> 2010 . . . . .	78
Figura 4.4 – Deformação e altura da linha neutra da seção . . . . .	79
Figura 4.5 – Regiões para integração do concreto . . . . .	81
Figura 4.6 – Diagrama tensão-deformação de abertura de fissuras segundo o Código Modelo <i>fib</i> 2010 . . . . .	82
Figura 4.7 – Ajuste das curvas tensão-deformação para diferentes faixas de $f_{ck}$ . . . . .	85
Figura 4.8 – Diagramas tensão-deformação utilizados pela sub-rotina ACO . . . . .	87
Figura 4.9 – Fluxograma de etapas para dimensionamento de seções à flexão simples no ELU . . . . .	89
Figura 6.1 – Ensaio de flexão - representação esquemática . . . . .	101
Figura 6.2 – Ajuste de distribuição normal para o conjunto de resultados . . . . .	105
Figura 6.3 – Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias empregadas no artigo de referência. . . . .	107
Figura 6.4 – Índices de confiabilidade para viga 20x50 - valores publicados. . . . .	108
Figura 6.5 – Índices de confiabilidade viga 20x50 - Modelo simplificado. . . . .	108
Figura 6.6 – Índices de confiabilidade viga 20x50 - Modelo FIB MC 2010. . . . .	109
Figura 6.7 – Índices de confiabilidade com novos parâmetros estatísticos - Modelo FIB MC 2010. . . . .	111
Figura 6.8 – Processo de convergência da $P_f$ por Monte Carlo . . . . .	112
Figura 6.9 – Processo de convergência do Coeficiente de Variação da $P_f$ por Monte Carlo	113
Figura 7.1 – Seção transversal das vigas analisadas . . . . .	115
Figura 7.2 – Curva $\beta$ x $\chi$ para viga $h = 40\text{cm}$ - NBR 6118:2014. . . . .	119
Figura 7.3 – Curva $\beta$ x $\chi$ para viga $h = 50\text{cm}$ - NBR 6118:2014. . . . .	120
Figura 7.4 – Curva $\beta$ x $\chi$ para viga $h = 60\text{cm}$ - NBR 6118:2014. . . . .	120

Figura 7.5 – Curva $\beta$ x $\chi$ para viga H=40cm - NBR 6118:2023. . . . .	123
Figura 7.6 – Curva $\beta$ x $\chi$ para viga H=50cm - NBR 6118:2023. . . . .	124
Figura 7.7 – Curva $\beta$ x $\chi$ para viga H=60cm - NBR 6118:2023. . . . .	124
Figura 7.8 – Índices de confiabilidade viga H=40cm (C50) - comparação entre versões da NBR 6118. . . . .	125
Figura 7.9 – Índices de confiabilidade viga H=40cm (C70) - comparação entre versões da NBR 6118. . . . .	126
Figura 7.10 – Índices de confiabilidade viga H=40cm (C90) - comparação entre versões da NBR 6118. . . . .	126
Figura 7.11 – Curva $\beta$ x $\chi$ para viga H=40cm - EC2:2004. . . . .	129
Figura 7.12 – Curva $\beta$ x $\chi$ para viga H=50cm - EC2:2004. . . . .	130
Figura 7.13 – Curva $\beta$ x $\chi$ para viga H=60cm - EC2:2004. . . . .	130
Figura 7.14 – Curva $\beta$ x $\chi$ para viga H=40cm - Projeto EC2:2022. . . . .	133
Figura 7.15 – Curva $\beta$ x $\chi$ para viga H=50cm - Projeto EC2:2022. . . . .	134
Figura 7.16 – Curva $\beta$ x $\chi$ para viga H=60cm - Projeto EC2:2022. . . . .	134
Figura 7.17 – Índices de confiabilidade viga H=40cm (C50) - comparação entre versões do Eurocode 2. . . . .	135
Figura 7.18 – Índices de confiabilidade viga H=40cm (C70) - comparação entre versões do Eurocode 2. . . . .	136
Figura 7.19 – Índices de confiabilidade viga H=40cm (C90) - comparação entre versões do Eurocode 2. . . . .	136
Figura 7.20 – Índices de confiabilidade viga H=40 (C30) - comparação entre NBR 6118:2023 e EC2:2022. . . . .	137
Figura 7.21 – Índices de confiabilidade viga H=40 (C40) - comparação entre NBR 6118:2023 e EC2:2022. . . . .	138
Figura 7.22 – Índices de confiabilidade viga H=40 (C50) - comparação entre NBR 6118:2023 e EC2:2022. . . . .	138

Figura 7.23 – Índices de confiabilidade viga H=40 (C70) - comparação entre NBR 6118:2023 e EC2:2022. . . . .	139
Figura 7.24 – Índices de confiabilidade viga H=40 (C90) - comparação entre NBR 6118:2023 e EC2:2022. . . . .	139
Figura 7.25 – Comparação normativa do diagrama retangular idealizado . . . . .	140

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Coeficientes $\gamma_f$ . . . . .	32
Tabela 2.2 – Coeficientes $\psi_0$ . . . . .	33
Tabela 2.3 – Coeficientes $\gamma_c$ e $\gamma_s$ . . . . .	34
Tabela 2.4 – Coeficientes $\psi_0$ . . . . .	42
Tabela 2.5 – Coeficientes $\gamma_c$ e $\gamma_s$ (Eurocode 2) . . . . .	42
Tabela 2.6 – Deformações $\varepsilon_{c1}$ , $\varepsilon_{c,lim}$ , módulo $E_{c1}$ e número de plasticidade $k$ do concreto	48
Tabela 3.1 – Relação entre probabilidade de falha e índice de confiabilidade . . . . .	60
Tabela 3.2 – Índices de confiabilidade alvo de períodos de referência de um ano em ELU (JCSS, 2001a) . . . . .	60
Tabela 3.3 – Índices de confiabilidade $\beta$ em ELU segundo <i>fib</i> (2013) . . . . .	61
Tabela 3.4 – Confiabilidade alvo (probabilidades de falha anuais, $P_f$ ) e índices de confiabilidade associados segundo ASCE/SEI 7-22 . . . . .	61
Tabela 4.1 – Relações entre profundidade $X$ da linha neutra e deformações $\varepsilon_S$ e $\varepsilon_I$ . . .	80
Tabela 4.2 – Parâmetros de dimensionamento - NBR 6118 . . . . .	90
Tabela 4.3 – Parâmetros de dimensionamento - Eurocode 2 . . . . .	92
Tabela 5.1 – Valores recomendados de média e coeficiente de variação para a variável $f_c$	97
Tabela 5.2 – Propriedades das dimensões das vigas . . . . .	98
Tabela 6.1 – Resumo dos experimentos de literatura . . . . .	101
Tabela 6.2 – Resultado de validação . . . . .	102
Tabela 6.2 – Resultado de validação (continuação) . . . . .	103
Tabela 6.3 – Teste de aderência para o modelo resistente de momento de flexão . . . . .	104
Tabela 6.4 – Dados e configurações da viga exemplo . . . . .	106
Tabela 6.5 – Resumo das alterações nos modelos probabilísticos das variáveis aleatórias	110

Tabela 6.6 – Simulação de Monte Carlo com amostragem por importância adaptativa (Viga 20x50 - $A_s = 5,00 \text{ cm}^2$ ) . . . . .	113
Tabela 6.7 – Avaliação comparativa entre Monte Carlo e FORM . . . . .	114
Tabela 7.1 – Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias . . . . .	116
Tabela 7.2 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo a NBR 6118:2014 . . . . .	117
Tabela 7.2 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo a NBR 6118:2014 (continuação) . . . . .	118
Tabela 7.2 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo a NBR 6118:2014 (continuação) . . . . .	119
Tabela 7.3 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo a NBR 6118:2023 . . . . .	121
Tabela 7.3 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo a NBR 6118:2023 (continuação) . . . . .	122
Tabela 7.3 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo a NBR 6118:2023 (continuação) . . . . .	123
Tabela 7.4 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo Eurocode 2:2004 . . . . .	128
Tabela 7.4 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo Eurocode 2:2004 (continuação) . . . . .	129
Tabela 7.5 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo FprEN 1992-1-1:2022 . . . . .	131
Tabela 7.5 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo FprEN 1992-1-1:2022 (continuação) . . . . .	132
Tabela 7.5 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo FprEN 1992-1-1:2022 (continuação) . . . . .	133
Tabela AP-D.1– Parâmetros mecânicos e geométricos das vigas utilizadas na etapa de validação deste estudo . . . . .	165
Tabela AP-D.1– Parâmetros mecânicos e geométricos das vigas utilizadas na etapa de validação deste estudo (continuação) . . . . .	166
Tabela AN-A.1– Sumário de distribuições contínuas de probabilidades . . . . .	168
Tabela AN-B.1– Tabela para determinação dos fatores $F_{X_{ij}}$ . . . . .	169

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	<i>American Concrete Institute</i>
CEB	<i>Comité Euro-International du Béton</i>
CEN	<i>European Committee for Standardization</i>
EC2	Eurocode 2
ELS	Estado-Limite de Serviço
ELU	Estado-Limite Último
FDA	Função de distribuição acumulada
FDP	Função densidade de probabilidade
<i>fib</i>	<i>Fédération Internationale du Béton</i>
FORM	<i>First Order Reliability Method</i>
FOSM	<i>First Order Second Moment</i>
GPa	Gigapascal
HLRF	<i>Hasofer-Lind Rackwitz-Fiessler</i>
iHLRF	<i>improved Hasofer-Lind Rackwitz-Fiessler</i>
JCSS	<i>Joint Committee on Structural Safety</i>
K-S	<i>Kolmogorov-Smirnov</i>
MPa	Megapascal
NBR	Norma Brasileira
PPGEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
RIA	<i>Reliability Index Approach</i>
SORM	<i>Second Order Reliability Method</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras Maiúsculas

$A$	Área da seção transversal
$A_{c,ef}$	Área efetiva de concreto sob tração
$A_s$	Área de aço tracionado da seção transversal
$A'_s$	Área de aço comprimido da seção transversal
$A_{s,min}$	Área de aço longitudinal mínima
<b>B</b>	Matriz de transformação
$C$	Confiabilidade
<b>C</b>	Matriz de covariância
$COV$	Coefficiente de variação
<b>D</b>	Matriz diagonal dos desvios padrões normais equivalentes
$D_n$	Polinômios da expressão $\sigma_c(y)$ relativos à variável de ordem $y^n$
$E_{ci}$	Módulo de elasticidade tangente inicial do concreto
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço
$F_X(x)$	Função de distribuição acumulada
$F_d$	Ação de cálculo
$F_f$	Ações de cálculo para ações permanentes diretas, ações indiretas e ações variáveis diretas.
$G_F$	Energia de fratura em N/mm
$G_{km}$	Polinômios para integral de linha discreta
$H_0$	Hipótese nula
$I_X, I_Y$	Momentos de inércia em relação aos eixos globais X e Y
$I_{XY}$	Produto de inércia dos eixos globais X e Y
$I_x, I_y$	Momentos de inércia em relação aos eixos locais x e y

$I_{xy}$	Produto de inércia dos eixos locais x e y
$\mathbf{J}_{xy}, \mathbf{J}_{yx}$	Matrizes Jacobianas
$M$	Representação da equação de Estado-Limite $g()$ .
$M_{Gk}, M_{Qk}$	Momentos de flexão característicos das parcelas permanente e variável, respectivamente
$M_{Rx}$	Momento resistente em relação ao eixo x
$M_{d,min}$	Momento mínimo de projeto
$N_R$	Esforço normal resistente
$R$	Vetor de variáveis resistentes
$\mathbf{R}$	Matriz de correlação
$S$	Vetor de variáveis solicitantes
$S_X$	Momentos estáticos em relação aos eixos X e Y
$Var(X_i)$	Variância de uma variável $X_i$
$W_0$	Módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto em relação à fibra mais tracionada
$X$	Posição da linha neutra a partir do bordo comprimido
$X_g$	Coordenadas do centroide da seção transversal
$X_i$	Variáveis de projeto generalizadas
$Z_i$	Variáveis de projeto equivalentes, padronizadas, estatisticamente independentes
$(X, Y)$	Sistema de coordenadas global
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{X}$	Espaço físico das variáveis
$\mathbb{Y}$	Espaço das variáveis normais padronizadas
$\mathbb{Z}$	Espaço das variáveis normais correlacionadas

## Letras Minúsculas

$a_i$	Coeficientes de ajuste da equação tensão-deformação
$b, c$	Coeficientes angular e escalar da reta de deformação da seção
$c$	Cobrimento de concreto das armaduras
$d$	Altura útil da seção transversal
$d'$	Distância entre o centroide das armaduras longitudinais superiores e o bordo comprimido da seção
$d''$	Distância entre o centroide das armaduras longitudinais inferiores e o bordo tracionado da seção
$f_X(x)$	Função densidade de probabilidade
$f_{cd}$	Resistência à compressão de projeto do concreto
$f_{ck}$	Resistência à compressão característica do concreto
$f_{cm}$	Resistência à compressão média do concreto
$f_{ctk,sup}$	Resistência característica superior do concreto à tração
$f_{ctm}$	Resistência à tração média do concreto
$f_{tk}$	Tensão característica máxima do aço
$f_{yd}$	Tensão de escoamento de projeto do aço
$g$	Ações permanentes
$g()$	Função de Estado-Limite
$h$	Altura da seção transversal
$k$	Coeficiente/fator do Eurocode 2
$k_i$	Coeficientes das retas de ajuste de regiões tracionadas de concreto
$k_{tc}$	Constante de consideração do efeito de cargas de longa duração à resistência à compressão do concreto pelo Eurocode
$l_{s,max}$	Distância máxima de descontinuidade no concreto fissurado
$n_c, n_s$	Variáveis geométricas para o número de vértices e número de armaduras de uma seção, respectivamente

$p_f$	Probabilidade de falha
$q$	Ações variáveis
$w$	Abertura de fissura, em milímetros
$y_I, y_S$	Ordenadas das fibras extremas da seção
$y_{ij}$	Ordenadas que delimitam as regiões de integração de tensões
$(x, y)$	Sistema de coordenadas local

### Letras Gregas

$\alpha$	Nível de significância de uma análise estatística
$\alpha_E$	Parâmetro de natureza do agregado que influencia o módulo de elasticidade
$\alpha_c$	Parâmetro de redução da resistência do concreto na compressão
$\alpha_k$	Vetor unitário dos cossenos diretores, que aponta o crescimento da função de estado-limite
$\beta$	Índice de confiabilidade
$\beta_T$	Índice de confiabilidade alvo
$\gamma_i$	Coefficientes de ponderação das solicitações
$\gamma_f$	Coefficientes de ponderação de ações
$\delta_M$	Proporção de redistribuição de momentos de flexão da seção transversal
$\varepsilon_c$	Deformação específica do concreto
$\eta$	Coefficiente de deformação do Código Modelo <i>fib</i> 2010
$\eta_c, \eta_{cc}$	Coefficiente de fragilidade do diagrama tensão-deformação do concreto
$\theta_R, \theta_S$	Incertezas dos modelos de resistência e solicitação, respectivamente
$\lambda$	Parâmetro do modelo retangular equivalente de tensões
$\mu$	Momento fletor reduzido ou adimensionalizado da seção transversal
$\mu_{x,i}$	Valores médios do conjunto de variáveis independentes $X_i$
$\xi$	Posição relativa da linha neutra

$(\xi, \eta)$	Sistema de coordenadas genérico localizado sobre o centroide da seção transversal
$\rho_{X_{ij}}$	Coefficientes de correlação
$\rho_j$	Taxa de armadura unitária de uma barra $j$
$\rho_{s,ef}$	Taxa de armadura efetiva
$\sigma_{X,i}$	Desvio padrão amostral do conjunto de variáveis independentes $X_i$
$\sigma_c$	Tensão à compressão do concreto
$\sigma_{ct}$	Tensão à tração do concreto
$\sigma_s$	Tensão na armadura de aço
$\tau_{bms}$	Força de aderência média entre aço e concreto
$\Phi$	Função de distribuição normal padrão acumulada
$\varphi_s$	Diâmetro da armadura longitudinal
$\phi_i$	Coefficientes de ponderação dos parâmetros resistentes
$\chi$	Razão entre carregamentos variáveis e totais
$\psi_0$	Coefficientes de ponderação para minoração de ações variáveis secundárias

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>24</b>
1.1	PROBLEMATIZAÇÃO E JUSTIFICATIVAS	25
1.2	OBJETIVOS	25
1.2.1	Geral	25
1.2.2	Específicos	26
1.3	METODOLOGIA	26
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	27
<b>2</b>	<b>CRITÉRIOS NORMATIVOS PARA PROJETO E VERIFICAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO</b>	<b>29</b>
2.1	DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO A SOLICITAÇÕES NORMAIS SEGUNDO A NBR 6118:2014	29
2.1.1	Diagramas tensão-deformação	29
2.1.1.1	Concreto	29
2.1.1.2	Aço de armadura passiva	31
2.1.2	Coeficientes de ponderação	31
2.1.2.1	Majoração de ações	32
2.1.2.2	Minoração de resistências	33
2.1.3	Domínios de deformação em ELU, hipóteses básicas e parâmetros de projeto	34
2.2	DIMENSIONAMENTO E ANÁLISE DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO A SOLICITAÇÕES NORMAIS SEGUNDO A NBR 6118:2023	37
2.3	DIMENSIONAMENTO E ANÁLISE DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO A SOLICITAÇÕES NORMAIS SEGUNDO O EUROCODE 2 EN 1992-1-1 (CEN, 2004)	38
2.3.1	Diagramas tensão-deformação	39

2.3.1.1	Concreto . . . . .	39
2.3.1.2	Aço de armadura passiva . . . . .	40
2.3.2	Coefficientes de ponderação . . . . .	41
2.3.2.1	Majoração de ações . . . . .	41
2.3.2.2	Minoração de resistências . . . . .	42
2.3.3	Domínios de deformação em ELU e parâmetros de projeto	43
2.4	PROJETO DE REVISÃO DO EUROCODE 2:2022 . . . . .	43
2.4.1	Diagramas tensão-deformação do concreto à compressão	44
2.4.2	Domínios de deformação em ELU e prescrições em projeto	45
2.5	MODELOS MECÂNICOS E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS SEGUNDO O CÓDIGO MODELO FIB 2010 . . . . .	46
2.5.1	Estado de compressão uniaxial . . . . .	47
2.5.2	Estado de tração uniaxial . . . . .	48
2.5.3	Aço de armadura passiva . . . . .	51
<b>3</b>	<b>CONFIABILIDADE ESTRUTURAL . . . . .</b>	<b>53</b>
3.1	CONCEITOS BÁSICOS . . . . .	54
3.1.1	Variáveis aleatórias . . . . .	54
3.1.1.1	Função de distribuição acumulada (FDA) . . . . .	55
3.1.1.2	Função densidade de probabilidade (FDP) . . . . .	55
3.1.1.3	Média e variância . . . . .	55
3.1.2	Funções de estado limite . . . . .	56
3.1.3	Probabilidade de falha . . . . .	57
3.1.4	Índice de confiabilidade . . . . .	59
3.2	MÉTODOS PARA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE . . . . .	61
3.2.1	First-Order Reliability Method (FORM) . . . . .	63
3.2.1.1	Transformação de Nataf . . . . .	65
3.2.1.2	Otimização da busca pelo ponto de projeto . . . . .	70
<b>4</b>	<b>MODELOS MECÂNICOS PARA DIMENSIONAMENTO E VE- RIFICAÇÃO DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO EM ELU</b>	<b>72</b>

4.1	VERIFICAÇÃO DE SEÇÕES SEGUNDO O CÓDIGO MODELO FIB 2010 . . . . .	72
4.1.1	Formulação básica e definição das propriedades geométricas	73
4.1.2	Desenvolvimento do algoritmo . . . . .	76
4.1.2.1	Sub-rotina SISTEMA . . . . .	78
4.1.2.2	Sub-rotina ESFOR . . . . .	78
4.1.2.3	Sub-rotinas POLI e POLIT . . . . .	81
4.1.2.4	Sub-rotina REGC . . . . .	82
4.1.2.5	Sub-rotina REGT . . . . .	85
4.1.2.6	Sub-rotina ACO . . . . .	86
4.2	DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES RETANGULARES SUBMETIDAS À FLEXÃO SIMPLES . . . . .	88
4.2.1	Rotina para a Norma Brasileira . . . . .	89
4.2.2	Rotina para o Eurocode 2 . . . . .	92
<b>5</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO FORM</b>	<b>94</b>
5.1	MODELO NUMÉRICO COMPUTACIONAL . . . . .	94
5.2	CONJUNTO DE VARIÁVEIS DETERMINÍSTICAS . . . . .	95
5.3	MODELOS PROBABILÍSTICOS DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS . . . . .	96
5.3.1	Resistência do concreto à compressão ( $f_c$ ) . . . . .	96
5.3.2	Resistência ao escoamento do aço ( $f_y$ ) . . . . .	97
5.3.3	Propriedades geométricas da seção transversal . . . . .	97
5.3.4	Carregamento permanente ( $g$ ) . . . . .	98
5.3.5	Carregamento variável ( $q$ ) . . . . .	98
5.3.6	Incertezas dos modelos de solicitação e resistência . . . . .	99
<b>6</b>	<b>VALIDAÇÃO E ERROS DE MODELO</b> . . . . .	<b>100</b>
6.1	VALIDAÇÃO DO MODELO RESISTENTE . . . . .	100
6.2	ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE UMA VIGA EXEMPLO	105

6.2.1	Avaliação segundo modelo de capacidade resistente simplificado . . . . .	106
6.2.2	Avaliação segundo modelo de capacidade resistente proposto . . . . .	109
6.2.3	Avaliação por aplicação do Método de Monte Carlo . . . . .	111
<b>7</b>	<b>ANÁLISES . . . . .</b>	<b>115</b>
7.1	ABNT NBR 6118 . . . . .	117
7.1.1	NBR 6118:2014 . . . . .	117
7.1.2	Revisão NBR 6118:2023 . . . . .	121
7.1.3	Comparação entre versões da norma brasileira . . . . .	125
7.2	EN 1992-1-1 - EUROCODE 2 . . . . .	127
7.2.1	Eurocode 2:2004 . . . . .	127
7.2.2	Projeto de revisão Eurocode 2:2022 . . . . .	131
7.2.3	Comparação entre versões do Eurocode 2 . . . . .	135
7.3	ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE AS VERSÕES RECENTES DE AMBAS AS NORMAS (NBR 6118 E EC2) . . . . .	137
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>141</b>
8.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	144
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>145</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>149</b>
	<b>ANEXOS . . . . .</b>	<b>167</b>

# 1 INTRODUÇÃO

A garantia de segurança quanto ao desempenho de elementos e sistemas estruturais, ainda que projetados em conformidade aos critérios normativos vigentes e melhores técnicas de cálculo para determinação das capacidades resistentes, consiste de um processo que não pode ser quantificado de forma determinística, em razão do caráter aleatório e imprevisível de muitas das variáveis associadas a problemas de engenharia. Em razão disto, normas de projeto de estruturas de concreto armado, em especial a norma brasileira NBR 6118, propõem uma abordagem baseada no estabelecimento de coeficientes parciais de ponderação em análises de estados-limite, como forma de estabelecer condições mínimas de segurança contra falhas estruturais e suas consequências.

A perspectiva da confiabilidade estrutural emerge como um elemento central nesse contexto, tendo sido amplamente exercitada no cenário internacional nas últimas cinco décadas, como forma de estimar a segurança de estruturas a curto e longo prazo e, adicionalmente, auxiliar no desenvolvimento de códigos normativos visando a mitigação de falhas potenciais (HALDAR; MAHADEVAN, 2000). O estabelecimento de uma uniformidade das condições de confiabilidade para todos os elementos compreendidos por uma mesma normativa, entretanto, pode acabar tornando-se uma tarefa complexa e inviável, dadas as variações inerentes às características próprias dos componentes estruturais, natureza das solicitações e outros processos estocásticos.

Logo, a teoria de confiabilidade apresenta-se como uma ferramenta para levantamento dessas incertezas e suas respectivas significâncias, onde determinam-se as distribuições de probabilidade que levam um sistema a cumprir (ou não) suas especificações de projeto, em um dado tempo de vida útil e condições de utilização. Neste contexto, admitem-se duas formas de abordagem distintas: a aplicação de métodos probabilísticos baseados na simulação integrada de múltiplas probabilidades e variáveis aleatórias, onde avalia-se a relação direta entre a probabilidade de falha e a confiabilidade (exemplo do Método de Monte Carlo); ou métodos probabilísticos de transformação, caso do método FORM (*First-Order Reliability Method*), onde a confiabilidade está associada à determinação de um parâmetro fixado definido como índice de confiabilidade ( $\beta$ ) (SANTOS; STUCCHI; BECK, 2014).

No âmbito das estruturas de concreto armado, a avaliação do nível de segurança de estruturas por meio do índice de confiabilidade (*Reliability Index Approach*) tem sido utilizada para nortear e otimizar as recomendações de códigos, caso das normativas americana (ACI 318:2022) e europeia (Eurocode 2), por exemplo. No Brasil, trabalhos como os apresentados por Stucchi e

Santos (2007), Beck et al. (2009), Santos, Stucchi e Beck (2014), Scherer, Morsch e Real (2019), Leite e Gomes (2021), entre outros, trouxeram importantes contribuições na tentativa de elucidar o desempenho de vigas, pilares e lajes, dimensionados segundo os códigos nacionais, sob a ótica da confiabilidade. Recentemente, o estudo de Santiago (2019) também apresentou uma proposição inicial para calibração dos coeficientes parciais de segurança da NBR 6118:2014, além de novas informações no que tange às características resistentes dos materiais encontrados no país.

## 1.1 PROBLEMATIZAÇÃO E JUSTIFICATIVAS

Com a atualização vigente da NBR 6118:2023, o cenário do dimensionamento de estruturas no estado-limite último passou por importantes modificações, incorporando adaptações notáveis inspiradas em recomendações do Eurocode 2:2004, bem como do projeto de revisão do respectivo código europeu FprEN 1992-1-1:2022. Grande parte dos efeitos promovidos por estas alterações, sejam do ponto de vista prático de projeto ou da confiabilidade, são ainda desconhecidos ou pouco explorados. Diante dessa lacuna, justifica-se a necessidade de maiores investigações comparativas e aprofundamentos, como forma de destacar possíveis variações atreladas às diferentes edições normativas.

Paralelamente, identifica-se a necessidade de se implementarem modelos mecânicos mais refinados na determinação dos esforços de elementos de concreto armado, que considerem os efeitos de tração e fissuração das seções, bem como a não-linearidade física dos materiais. O Código Modelo *fib* 2010 apresenta-se como uma referência fundamental na proposição de modelos resistentes para as funções de estado limite, proporcionando uma visão mais sofisticada e alinhada com o comportamento real das estruturas de concreto armado. A adoção de modelos mais complexos permite o aprimoramento na precisão das análises estruturais, ao aproximar os resultados das simulações computacionais daqueles obtidos em ensaios de ruptura.

## 1.2 OBJETIVOS

Apresentam-se, a seguir, o conjunto de objetivos, de caráter geral e também específicos, que darão norte ao conjunto de processos desenvolvidos neste estudo.

### 1.2.1 Geral

O objetivo geral do trabalho consiste em propor uma análise da confiabilidade de estruturas projetadas segundo a norma brasileira ABNT NBR 6118 no que tange ao projeto e dimensionamento

de elementos de concreto armado solicitados à flexão simples em situação de Estado-Limite Último (ELU). Ainda, busca-se avaliar as influências trazidas pela última revisão da normativa brasileira no ano de 2023 a este aspecto, de modo a traçar um paralelo com os modelos equivalentes apresentados nas normatizações europeias, os Eurocodes, e seu também recente projeto de atualização.

### 1.2.2 Específicos

Como parte do processo necessário ao alcance do objetivo geral proposto, lista-se o seguinte conjunto de objetivos específicos definidos neste trabalho:

- a) Construir um modelo numérico computacional que permita o dimensionamento de seções de concreto armado sob esforços de flexão normal, segundo as diretrizes de projeto propostas pelas normas NBR 6118:2014 e 2023 e o Eurocode 2 (2004 e projeto de revisão 2023). Ainda, elaborar uma segunda proposta de cálculo para verificação de seções, com base nos modelos mecânicos realísticos apresentados pelo Código Modelo *fib* 2010, definidos a partir dos parâmetros de resistência médios do concreto;
- b) Uma vez elaboradas as rotinas de cálculo, efetuar o processo de validação do código de verificação conforme as disposições do Código Modelo *fib* 2010, de modo a se obter os parâmetros de erro de modelo, a partir da comparação direta com resultados publicados de ensaios de vigas em condição de ruptura por flexão, disponíveis na literatura;
- c) Sob posse dos parâmetros de erro de modelo, constituir a análise da confiabilidade para um conjunto de vigas, com diferentes condições de carregamento e taxas de armadura, dimensionadas conforme a normativa nacional em suas duas últimas versões, assim como em relação ao Eurocode 2 (2004) e seu atual projeto de revisão.

## 1.3 METODOLOGIA

Previamente ao desenvolvimento dos pontos principais deste estudo, surge a necessidade de se avaliarem as definições normativas, tanto nacionais quanto internacionais, aplicáveis a projetos de seções de concreto armado sob flexão normal. Ainda, torna-se importante ressaltar os pontos sob discussão que trazem as recentes atualizações e revisões dos códigos normativos nacional e europeu, que interferem e alteram pontos relevantes ao dimensionamento destes elementos. De forma semelhante, será necessário estabelecer os parâmetros teóricos aliados ao entendimento

dos conceitos e métodos de análise de confiabilidade em estruturas. Este processo desenvolve-se a partir da revisão bibliográfica e normativa, de textos técnicos e literatura, que comporão as referências deste trabalho.

Em um segundo momento, busca-se estabelecer o desenvolvimento de rotinas computacionais tanto à verificação e dimensionamento de seções de concreto armado, quanto para as consequentes análises de confiabilidade. Neste ponto, será utilizada a linguagem de programação *Python*, conhecida por ser uma linguagem de alto nível, orientada a objeto e que, associada ao seu conjunto de pacotes e módulos, possui licença de uso livre.

Assim, uma vez construídos os respectivos modelos de análise, busca-se validá-los a partir da comparação com os resultados de ensaios de vigas cujo modo de ruptura tenha ocorrido por esforços de flexão excessivos, amplamente disponíveis na literatura internacional e nacional.

Finalmente, ao passo em que são obtidos os erros de modelo dos códigos correspondentes, pretende-se construir a etapa de análise da confiabilidade estrutural de vigas à flexão simples, a partir da definição de estruturas com materiais, dimensões e taxas de armadura representativas da realidade encontrada no âmbito dos projetos estruturais no Brasil. Este processo será constituído a partir da avaliação dos índices de confiabilidade calculados para estruturas com diferentes proporções entre carregamentos permanentes e acidentais, mediante a aplicação numérica do método FORM.

## 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Após a etapa de introdução do tema proposto, o segundo capítulo apresenta uma revisão detalhada dos critérios e definições das normas de projeto NBR 6118:2014 e Eurocode 2 (2004), voltados à construção de modelos constitutivos, coeficientes de segurança e determinação de esforços resistentes no projeto de vigas de concreto armado em estado-limite último. Os aspectos em questão são confrontados com a recente revisão da normativa brasileira, NBR 6118:2023, assim como em relação ao projeto de atualização do Eurocode 2:2022. Além disso, apresentam-se os modelos de análise não-linear segundo o Código Modelo *fib* 2010.

O Capítulo 3 faz uma abordagem geral a respeito dos conceitos fundamentais, parâmetros estatísticos e explicitação teórica do método FORM, visando sua implementação nos estudos de confiabilidade estrutural.

O quarto capítulo dedica-se à descrição das etapas de cálculo que compõem os programas de dimensionamento e verificação de seções de concreto armado desenvolvidos em linguagem

*Python.*

O ponto seguinte, a ser tratado no capítulo 5, refere-se ao modelo numérico empregado nas análises de confiabilidade, assim como da definição de variáveis determinísticas e parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias consideradas no estudo.

O sexto capítulo dispõe da etapa de validação dos códigos elaborados e definição dos parâmetros de erro de modelo.

Em seguida, no capítulo 7, apresentam-se o conjunto de procedimentos e parâmetros que compõem as referidas análises, os resultados obtidos e consequentes discussões quanto a confiabilidade das vigas simuladas em estado-limite último, para os diferentes códigos normativos e suas respectivas versões.

Por fim, apresentam-se as considerações e ponderações finais sobre as atividades desenvolvidas neste trabalho, de modo a construir um panorama a respeito da situação atual da NBR 6118 nos aspectos aqui abrangidos, assim como do conjunto de investigações que ainda fazem-se necessárias nesta área de estudo.

Quanto aos elementos pós-textuais, acrescentam-se os Apêndices A, B e C, que constam os códigos do programa de verificação de seções e dos programas de dimensionamento, detalhados no Capítulo 4. Além destes, soma-se o Apêndice D, onde são dispostos os resultados e dados detalhados dos elementos verificados no processo de validação da metodologia. Ademais, disponibilizam-se os Anexos A e B, que complementam as informações apresentadas no Capítulo 3 sobre os parâmetros estatísticos de diferentes modelos de distribuição de probabilidades encontrados na literatura.

## 2 CRITÉRIOS NORMATIVOS PARA PROJETO E VERIFICAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO

O primeiro passo para se viabilizar a avaliação da segurança de estruturas no Estado-Limite Último consiste em estabelecer os critérios e disposições normativas que norteiam o projeto destes elementos. Assim sendo, o capítulo em questão discorrerá sobre os principais métodos e recomendações, relacionadas, sobretudo, ao dimensionamento e verificação de vigas de concreto armado sujeitas a esforços de flexão, presentes nas recentes versões da Norma brasileira ABNT NBR 6118, da normativa europeia Eurocode 2 EN 1992-1-1, assim como do Código Modelo *fib* 2010.

### 2.1 DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO A SOLICITAÇÕES NORMAIS SEGUNDO A NBR 6118:2014

A Norma brasileira NBR 6118 - *Projeto de estruturas de concreto - Procedimento* (ABNT, 2014) é o documento que estabelece as diretrizes e requisitos básicos ao projeto de estruturas de concreto armado e protendido em território nacional. A partir da mesma, apresentam-se as definições quanto às propriedades dos materiais (comportamento do diagrama tensão-deformação para concreto e aço), coeficientes de ponderação para majoração de ações e minoração de resistências, assim como os critérios para determinação dos esforços resistentes em seções de elementos submetidos a momentos de flexão e força normal, em função dos domínios de deformação em estado-limite último.

#### 2.1.1 Diagramas tensão-deformação

A seguir são apresentados os diagramas tensão-deformação de ambos materiais, concreto e aço, segundo a NBR 6118, como forma de representação do comportamento mecânico destes materiais quanto a aplicação de carregamentos.

##### 2.1.1.1 Concreto

A seção 8.2.10.1 da ABNT NBR 6118:2014 define os critérios para estabelecimento do diagrama tensão-deformação idealizado para o material concreto sob compressão em estado-limite último (Figura 2.1). Neste, observam-se dois trechos distintos, sendo o primeiro de comportamento curvo e, em sequência, uma reta de tensão constante compreendida até um valor máximo de

deformação da seção.

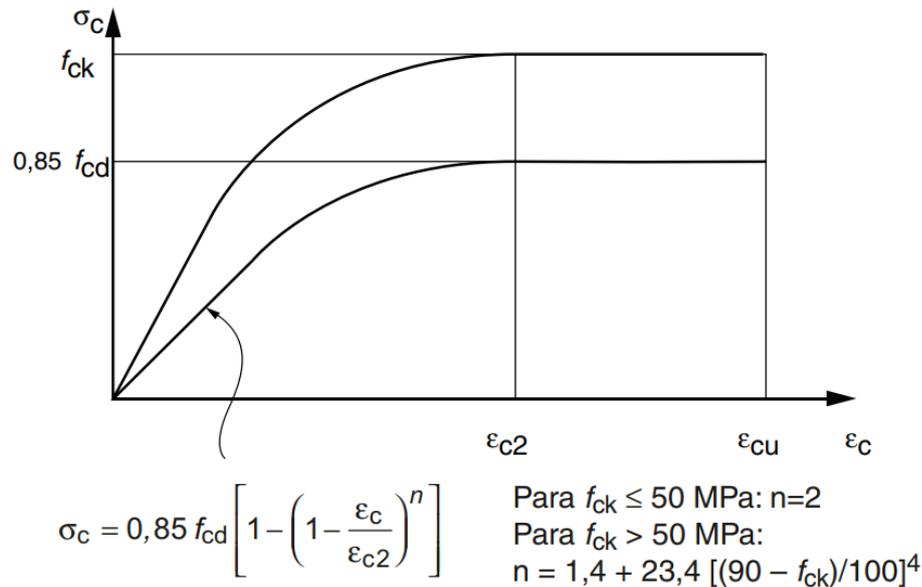


Figura 2.1 – Diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto à compressão, segundo a NBR 6118:2014

Fonte: ABNT (2014, p. 26)

Assim sendo, a tensão atuante no concreto  $\sigma_c$  no trecho curvo é definida conforme a equação apresentada, dada em função da tensão limite de compressão no material (limitada à 85% da resistência à compressão de projeto,  $f_{cd}$ , como consideração à redução de resistência frente à cargas de longa duração, conhecida por efeito Rüschi), o expoente de ajuste  $n$  (variável para diferentes classes de resistência à compressão característica,  $f_{ck}$ ) e para as deformações específicas de encurtamento do concreto no início do patamar plástico e na ruptura,  $\epsilon_{c2}$  e  $\epsilon_{cu}$ , respectivamente. Neste caso,  $\epsilon_{c2}$  e  $\epsilon_{cu}$  assumem valores distintos para concretos do Grupo I (classes até C50) e Grupo II (concretos de classes C55 à C90), conforme disposto a seguir:

Grupo I:

$$\epsilon_{c2} = 2,0 \text{ ‰} \quad (2.1)$$

$$\epsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰} \quad (2.2)$$

Grupo II:

$$\epsilon_{c2} = 2,0 \text{ ‰} + 0,085 \text{ ‰} \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (2.3)$$

$$\epsilon_{cu} = 2,6 \text{ ‰} + 35 \text{ ‰} \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4 \quad (2.4)$$

### 2.1.1.2 Aço de armadura passiva

No que tange ao diagrama tensão-deformação para o aço utilizado como armadura passiva, a seção 8.3.6 da Norma estabelece que é permitida a utilização do diagrama simplificado da Figura 2.2, quando da aplicação ao cálculo em estados-limite de serviço e último. O mesmo divide-se, portanto, em um trecho ascendente, cuja inclinação corresponde ao módulo de elasticidade do aço ( $E_s$ ), igual a 210 GPa, e um segundo intervalo de deformação constante, correspondente ao patamar de escoamento.

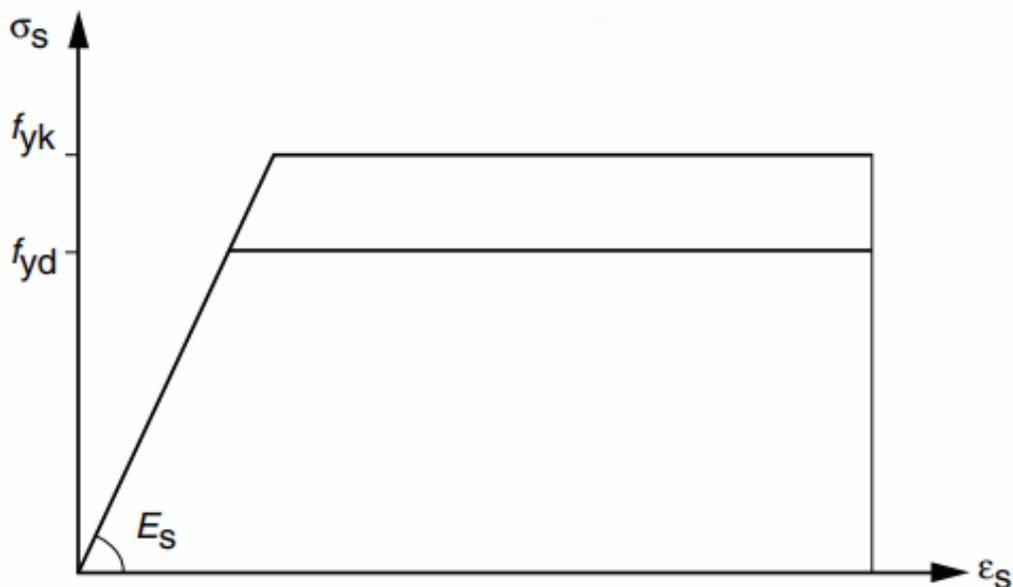


Figura 2.2 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas, segundo a NBR 6118:2014

Fonte: ABNT (2014, p. 29)

### 2.1.2 Coeficientes de ponderação

A Norma brasileira baseia-se na utilização de coeficientes parciais de segurança, cujo foco consiste na majoração das ações impostas sobre as estruturas e na minoração de resistências dos materiais envolvidos. Deste modo, permite-se garantir, simultaneamente, a segurança quanto a variabilidades em intensidade e natureza das ações (sejam elas de aplicação permanente, como o caso do peso próprio dos elementos estruturais e não estruturais, ou variáveis, como cargas móveis, ação do vento, sobrecargas de utilização, entre outros), possíveis erros nas simplificações de modelos físicos e de comportamento dos materiais, tal qual as variações inerentes dos próprios processos construtivos. Assim, dispõem-se as prescrições normativas quanto à definição dos coeficientes de ponderação de resistências e ações em estado-limite último.

### 2.1.2.1 Majoração de ações

As combinações últimas (ELU) usuais são apresentadas pela ABNT NBR 6118:2014 em sua Tabela 11.3 e divididas em duas diferentes categorias: combinações normais / especiais ou de construção (Equação 2.5) e combinações últimas excepcionais (Equação 2.6), conforme mostrado a seguir.

$$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{\varepsilon g} F_{\varepsilon gk} + \gamma_q (F_{q1k} + \sum \psi_{0j} F_{qjk}) + \gamma_{\varepsilon q} \psi_{0\varepsilon} F_{\varepsilon qk} \quad (2.5)$$

$$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{\varepsilon g} F_{\varepsilon gk} + F_{q1exc} + \gamma_q \sum \psi_{0j} F_{qjk} + \gamma_{\varepsilon q} \psi_{0\varepsilon} F_{\varepsilon qk} \quad (2.6)$$

Onde:  $F_d$  é a ação de cálculo para combinação última;  $F_{gk}$  representa as ações permanentes diretas;  $F_{\varepsilon k}$  representa ações indiretas permanentes ( $F_{\varepsilon gk}$ ) e variáveis ( $F_{\varepsilon qk}$ ),  $F_{qk}$  representa as ações variáveis diretas das quais  $F_{q1k}$  é considerada como principal.

No que tange aos termos  $\gamma_g$ ,  $\gamma_{\varepsilon g}$ ,  $\gamma_q$  e  $\gamma_{\varepsilon q}$ , tratam-se dos coeficientes de ponderação de ações, dispostos na Tabela 11.1 da mesma normativa e apresentados abaixo (Tabela 2.1).

Tabela 2.1 – Coeficientes  $\gamma_f$

Comb. de ações	Ações			
	Permanentes (g)		Variáveis (q)	
	D	F	G	T
Normais	1,4	1,0	1,4	1,2
Esp. ou de construção	1,3	1,0	1,2	1,0
Excepcionais	1,2	1,0	1,0	0

Fonte: ABNT NBR 6118:2014 (p. 65)

Para tal, as colunas “D” e “F” tratam-se dos coeficientes de segurança para ações permanentes desfavoráveis e favoráveis à segurança, respectivamente. Analogamente, as colunas “G” e “T” referem-se a ações variáveis em geral e aquelas relacionadas a temperatura.

Novamente, a partir das equações 2.5 e 2.6, surgem os termos  $\psi_{0j}$  e  $\psi_{0\varepsilon}$ , coeficientes de ponderação para minoração de ações variáveis diretas ou indiretas consideradas secundárias. Seus valores são expostos na Tabela 2.2, obtidos diretamente da Tabela 11.2 da Norma brasileira.

Tabela 2.2 – Coeficientes  $\psi_0$ 

Ações	$\psi_0$
	a
	0,5
Cargas acidentais de edifícios	b
	0,7
	c
	0,8
Vento	0,6
Temperatura	0,6

Fonte: ABNT NBR 6118:2014 (p. 65)

- a) Locais sem predominância de equipamentos fixos por longos períodos de tempo ou elevada concentração de pessoas, *i.e.*, edifícios residenciais.
- b) Locais com predominância de equipamentos fixos por longos períodos de tempo ou elevada concentração de pessoas, *i.e.*, edifícios comerciais, de escritórios, estações.
- c) Bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens.

#### 2.1.2.2 Minoração de resistências

Conforme previamente apresentado, a abordagem utilizada pela normativa brasileira quanto ao projeto de estruturas de concreto armado toma como base a definição de duas categorias distintas: valores característicos e valores de cálculo, ou de projeto.

Tendo em vista a análise de resistências, o ponto de partida consiste dos valores de resistências consideradas características dos materiais ( $f_k$ ), ou seja, onde há probabilidade de se superestimar a capacidade resistente frente à uma situação real. A partir desta, conforme abordado pela NBR 6118 (ABNT, 2014), torna-se necessária a implementação de coeficientes parciais de segurança com o objetivo de promover a minoração das resistências dos elementos estruturais em cálculo, visando o atendimento dos seguintes tópicos:

1. Considerar a diferença observada quando da análise das capacidades resistentes em laboratório e da estrutura *in loco*;
2. Considerar a variabilidade existente na resistência dos materiais constituintes da estrutura;
3. Considerar as diferenças provenientes das aproximações feitas em projeto, tais quais aquelas originadas durante a execução da construção, em termos de resistências.

Dessa forma, a resistência de cálculo do concreto ( $f_{cd}$ ) a partir dos 28 dias é descrita segundo a Equação 2.7. De maneira análoga, a resistência de cálculo para o material aço ( $f_{yd}$ ) é conhecida

conforme a Equação 2.8.

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.7)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (2.8)$$

Portanto, os coeficientes de segurança para o caso dos materiais concreto e aço,  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$ , são estabelecidos na Tabela 2.3, originada da Tabela 12.1 da Norma.

Tabela 2.3 – Coeficientes  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$

Combinações	Concreto	Aço
	$\gamma_c$	$\gamma_s$
Normais	1,4	1,15
Esp. ou de construção	1,2	1,15
Excepcionais	1,2	1,0

Fonte: ABNT NBR 6118:2014 (p. 71)

### 2.1.3 Domínios de deformação em ELU, hipóteses básicas e parâmetros de projeto

A aplicação dos conceitos e critérios acima ilustrados, em vista da determinação de esforços resistentes de elementos lineares (vigas, pilares e tirantes) sujeitos a solicitações normais em condição de estado-limite último, somente poderá ser firmada quando do atendimento a um conjunto determinado de hipóteses básicas, estabelecidos na normativa brasileira, seção 17.2.

Elencam-se, abaixo, os pontos relevantes às análises de seções de vigas em concreto armado.

- a) O princípio das seções planas deve ser mantido para as seções transversais, mesmo após o processo de deformação;
- b) Considera-se a condição de perfeita aderência na interface entre as armaduras passivas e o concreto ao seu entorno, permitindo a compatibilidade das deformações em ambos os materiais;
- c) Desprezam-se as tensões de tração no concreto, normais à seção transversal sob análise, no estado-limite último;
- d) A distribuição das tensões no concreto segue o comportamento apresentado no diagrama da Figura 2.1, de modo que a máxima tensão admitida seja  $0,85 \cdot f_{cd}$ . Ainda, como forma de simplificar o trabalho de cálculo, permite-se substituir o



De acordo com Araújo (2014), o diagrama descreve os domínios de deformação para três diferentes tipos de ruína:

1. Ruína por deformação excessiva da armadura: quando a deformação na armadura mais tracionada (ponto A) atinge o alongamento no valor de 10‰ (domínios 1 e 2);
2. Ruína por esmagamento do concreto em seções parcialmente comprimidas: ocorre quando a deformação na altura da fibra mais comprimida (ponto B) atinge o valor de  $\epsilon_{cu}$  (domínios 3, 4 e 4a);
3. Ruína por esmagamento do concreto em seções totalmente comprimidas: ocorre quando a deformação na fibra no ponto C (distante  $(\epsilon_{cu} - \epsilon_{c2}) \cdot h / \epsilon_{cu}$  da borda mais comprimida) atinge o valor  $\epsilon_{c2}$ .

Sendo assim, os domínios representados graficamente correspondem aos seguintes tipos de solicitação:

- reta a: tração uniforme.
- domínio 1: tração não uniforme (flexo-tração), sem zona comprimida.
- domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto ( $\epsilon_c \leq \epsilon_{cu}$ ) e com máximo alongamento permitido ( $\epsilon_s = 10‰$ ).
- domínio 3: flexão simples (seção subarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço ( $\epsilon_s \geq \epsilon_{yd}$ ).
- domínio 4: flexão simples (seção superarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ( $\epsilon_s < \epsilon_{yd}$ ).
- domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas.
- domínio 5: compressão não uniforme (flexo-compressão), sem zonas de tração.
- reta b: compressão uniforme.

Assim sendo, como forma de garantir o comportamento dúctil das vigas e lajes projetadas e, por consequência, evitar a ruptura frágil dos elementos (domínio 4), a Norma estabelece um limite para a altura relativa da linha neutra ( $x/d$ ) em seções sem redistribuição. Os valores para os respectivos grupos de concretos são dispostos abaixo.

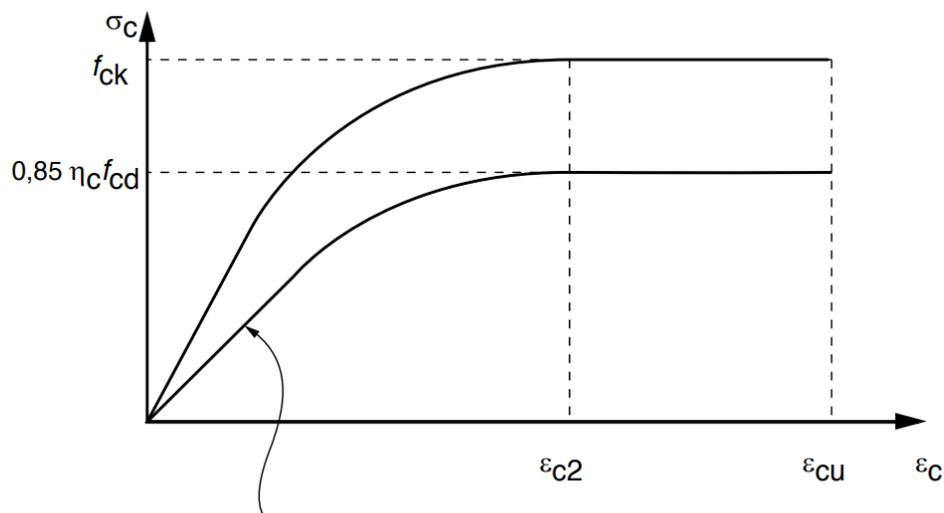
$$x/d \leq 0,45, \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa};$$

$$x/d \leq 0,35, \text{ para concretos com } 50 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}.$$

## 2.2 DIMENSIONAMENTO E ANÁLISE DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO A SOLICITAÇÕES NORMAIS SEGUNDO A NBR 6118:2023

A revisão da NBR 6118 publicada no ano de 2023 trouxe, no geral, poucas mudanças em relação ao que já estava estabelecido e consolidado em sua versão do ano de 2014. Contudo, tratando-se de análise e dimensionamento de elementos de concreto armado, a versão da NBR 6118:2023 trouxe uma importante e relevante modificação: a inserção do coeficiente de fragilidade ao diagrama tensão-deformação do concreto.

Representado matematicamente por  $\eta_c$ , o coeficiente em questão surge originalmente no projeto de revisão do Eurocode 2 (FprEN 1992-1-1:2022, a ser abordado na sequência) e visa implementar uma redução crescente das tensões atuantes no concreto para elementos com resistência característica à compressão acima de 40 MPa. A definição do novo diagrama, em conjunto com a formulação para determinação do coeficiente  $\eta_c$  segundo a Norma brasileira, está disponível na Figura 2.4.



$$\sigma_c = 0,85\eta_c f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \begin{cases} \text{Para } f_{ck} \leq 40 \text{ MPa: } \eta_c = 1,0 \\ \text{Para } f_{ck} > 40 \text{ MPa: } \eta_c = (40/f_{ck})^{1/3} \\ \text{Para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa: } n = 2 \\ \text{Para } f_{ck} > 50 \text{ MPa: } n = 1,4 + 23,4[(90 - f_{ck})/100]^4 \end{cases}$$

Figura 2.4 – Diagrama tensão-deformação idealizado para o concreto à compressão, segundo a NBR 6118:2023

Fonte: ABNT (2023, p. 26)

Paralelamente, a atualização também inseriu um diagrama alternativo, voltado para a utilização em análises não lineares em casos de compressão simples de curta duração, conforme disposto na Figura 2.5.

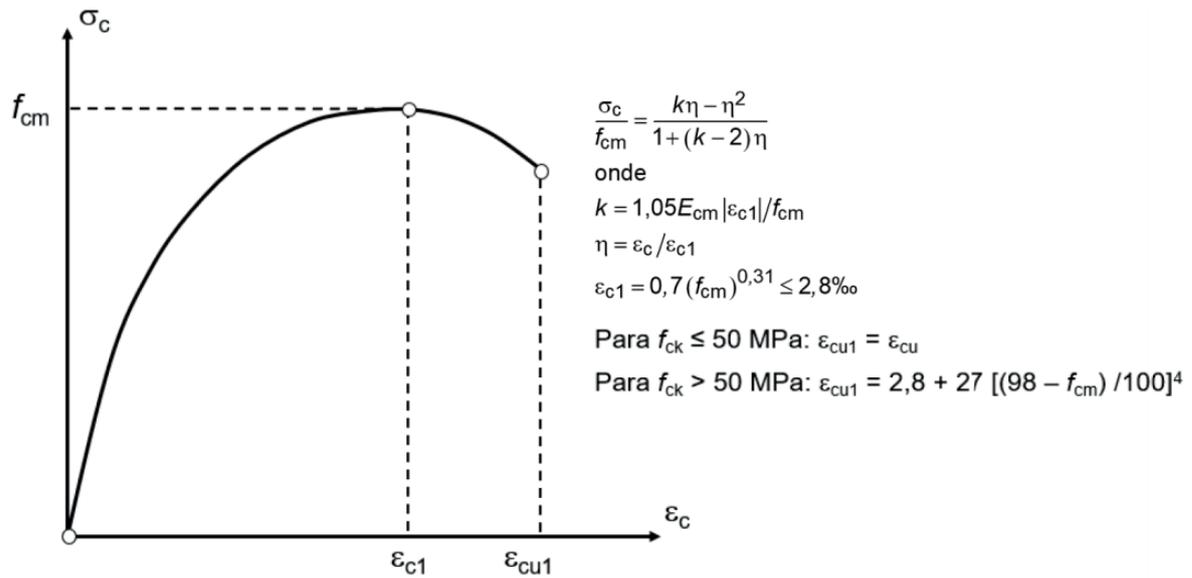


Figura 2.5 – Diagrama tensão-deformação idealizado para análise não linear, segundo a NBR 6118:2023

Fonte: ABNT (2023, p. 27)

Em termos de projeto, contudo, a consideração do comportamento do concreto à compressão ainda pode ser efetuada segundo o diagrama retangular equivalente, atuante até a profundidade  $y = \lambda x$ , sem alterações ao cálculo do parâmetro  $\lambda$ . A tensão do diagrama simplificado, entretanto, será definida como:

- $\alpha_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd}$ , em seções de largura constante;
- $0,9 \cdot \alpha_c \cdot \eta_c \cdot f_{cd}$ , em caso contrário.

Sendo  $\alpha_c = 0,85$  para classes até C50 ou, para concretos C50 à C90,  $\alpha_c = 0,85 \cdot [1,0 - (f_{ck} - 50)/200]$ , sem modificações em relação à versão anterior da Norma.

### 2.3 DIMENSIONAMENTO E ANÁLISE DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO A SOLICITAÇÕES NORMAIS SEGUNDO O EUROCODE 2 EN 1992-1-1 (CEN, 2004)

No âmbito das normativas internacionais, o Eurocode 2 EN 1992-1-1, de responsabilidade do Comitê Europeu de Normatização (EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, 2004), trata-se da normativa padrão implementada em uma extensa lista de países do continente europeu, sendo, também, uma referência técnica de diversas outras normas ao redor do mundo.

Conforme disposto anteriormente para o caso da NBR 6118, serão abordados a seguir os pontos de interesse ao dimensionamento e verificação de elementos de concreto armado sujeitos à flexão-simples em ELU.

### 2.3.1 Diagramas tensão-deformação

Os comportamentos mecânicos dos materiais aço e concreto admitidos pelo Eurocode 2:2004 para dimensionamento e verificação de elementos em estado-limite último são introduzidos nas seções a seguir.

#### 2.3.1.1 Concreto

Tal qual a normativa brasileira, o Eurocode 2 também apresenta o diagrama parábola-retângulo (Figura 2.1) como a relação tensão-deformação a ser utilizada ao concreto no projeto de seções transversais. As diferenças, portanto, concentram-se nos limites máximos de tensões do concreto, conforme apresentado a seguir.

$$\sigma_c = f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right], \text{ para } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \quad (2.12)$$

$$\sigma_c = f_{cd}, \text{ para } \epsilon_{c2} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \quad (2.13)$$

Onde  $f_{cd} = \alpha_c f_{ck} / \gamma_c$ , de modo que  $\alpha_c$  é definido nos anexos nacionais entre 0,8 e 1,0, sendo 1,0 o valor recomendado. Observa-se, então, que a constante de redução de 0,85, aplicada por consideração do efeito Rüsçh, não é aplicada neste caso, em contraponto à NBR 6118. Os valores de  $\epsilon_{c2}$  e  $\epsilon_{cu}$  para concretos até C90 são definidos tal qual disposto na normativa brasileira (equações 2.1 a 2.4), repetido a seguir.

Grupo I:

$$\epsilon_{c2} = 2,0 \text{ ‰}$$

$$\epsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$$

Grupo II:

$$\epsilon_{c2} = 2,0 \text{ ‰} + 0,085 \text{ ‰} \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53}$$

$$\epsilon_{cu} = 2,6 \text{ ‰} + 35 \text{ ‰} \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$$

De forma similar ao abordado na normativa brasileira, uma distribuição retangular de tensões também pode ser assumida. A tensão de compressão se aplica a uma região de altura igual a

$\lambda x$ , com intensidade igual a  $\sigma = \eta f_{cd}$ , de modo que os parâmetros  $\lambda$  e  $\eta$  são definidos como mostrado nas equações 2.14 a 2.17 ( $\alpha_{c(NBR\ 6118)} = 0,85 \cdot \eta_{(EC2:2004)}$ , para fins de comparação).

$$\lambda = 0,8, \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}; \quad (2.14)$$

$$\lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400, \text{ para } 50 \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}. \quad (2.15)$$

$$\eta = 1,0, \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}; \quad (2.16)$$

$$\eta = 1,0 - (f_{ck} - 50)/200, \text{ para } 50 \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}. \quad (2.17)$$

Em caso de seções em que a largura diminui na direção das fibras mais comprimidas, os valores de  $\eta$  apresentados devem ser reduzidos em 10%.

Ainda, para análises não-lineares, permite-se a utilização de um diagrama contínuo, com trechos acendente e descendente. Este trecho foi utilizado como base para a introdução do diagrama de análise não-linear na versão da NBR 6118:2023 e, portanto, apresenta a mesma formulação vista na Figura 2.5.

### 2.3.1.2 Aço de armadura passiva

A respeito do comportamento das armaduras em aço, apresenta-se o diagrama da Figura 2.6.

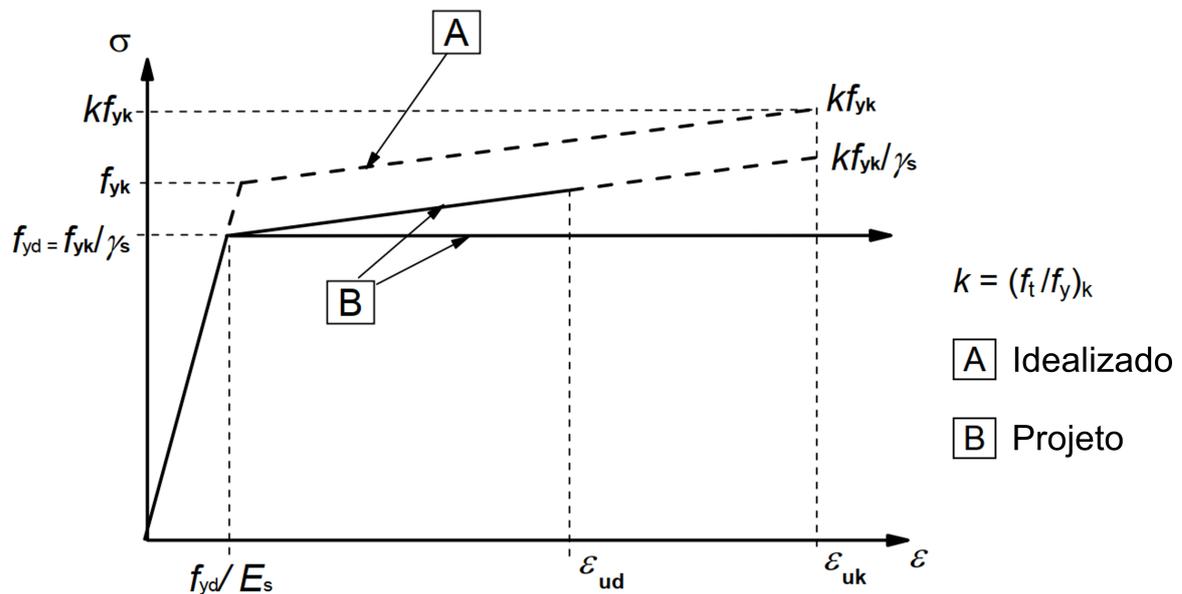


Figura 2.6 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas (Eurocode 2)

Fonte: CEN (2004, p. 40).

São apresentadas duas opções distintas, ambas com trecho inicial composto por uma reta de inclinação igual ao módulo de elasticidade  $E_s = 200$  GPa. As alternativas quanto ao segundo trecho consistem:

- a) Ramo inclinado com deformação limite de  $\epsilon_{ud}$  e tensão máxima de  $k f_{yk} / \gamma_s$  em  $\epsilon_{uk}$  ( $\epsilon_{ud}$  recomendado de  $0,9\epsilon_{uk}$  e  $k \geq 1,08$ ).
- b) Ramo horizontal sem a necessidade de verificação para deformação limite, no patamar de tensão de cálculo  $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$ .

Os valores determinados de  $\epsilon_{uk}$ , deformação específica última característica, são apresentados no anexo C da norma, em função de três classes A, B e C para vergalhões de armadura. Aços CA-50 de fabricação laminado à quente, mais usuais entre os aços comercializados pela indústria nacional, correspondem à classe B, cujo valor encontrado para a deformação característica é de  $\epsilon_{uk} = 50 \text{ ‰}$ .

### 2.3.2 Coeficientes de ponderação

A seguir, são apresentados os coeficientes de ponderação aplicados sobre ações e parâmetros de resistência, segundo a normativa europeia.

#### 2.3.2.1 Majoração de ações

O Eurocode 2 não trata diretamente sobre combinação de ações para análises nos estados-limite último e de serviço em seu texto vigente. Entretanto, remete diretamente à normativa EN 1990: *Eurocode: Basis of Structural Design* (CEN, 2005), também conhecida como Eurocódigo 0, onde estas informações encontram-se detalhadas.

Nesse caso, permite-se observar a aplicação da mesma Equação 2.5 quando da combinação normal de ações, de modo que: os coeficientes  $\gamma_{g,sup}$  e  $\gamma_{g,inf}$ , aplicáveis às ações permanentes desfavoráveis e favoráveis à segurança, respectivamente, são definidos em 1,35 e 1,00; o coeficiente  $\gamma_q$ , destinado às ações variáveis em geral, é estabelecido em 1,50 (quando desfavoráveis) ou 0 (quando favoráveis).

Os valores para o coeficiente  $\psi_0$ , aplicável às ações variáveis não principais, são apresentados na Tabela 2.4 (obtidos como referência à Tabela A1.1 da normativa), ainda que sob possibilidade de alterações conforme as especificidades locais de cada país.

Tabela 2.4 – Coeficientes  $\psi_0$ 

Ações		$\psi_0$
Cargas acidentais de edifícios	A, B, C, D	0,7
	E	1,0
	F	0,7
	G	0,7
	H	0
Vento		0,6
Temperatura		0,6

Fonte: adaptado de EN 1990 (2005, p. 52)

Onde:

Categoria A: áreas residenciais, domésticas;

Categoria B: escritórios;

Categoria C: áreas com concentração de pessoas;

Categoria D: centros comerciais;

Categoria E: depósitos;

Categoria F: trânsito de veículos com peso  $\leq 30\text{kN}$ ;

Categoria G: trânsito de veículos com peso entre  $30\text{kN}$  e  $160\text{kN}$ ;

Categoria H: telhados.

### 2.3.2.2 Minoração de resistências

A minoração das resistências do concreto e do aço, segundo o Eurocode 2 (2004), é feita através da aplicação dos coeficientes  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$ . A seção 2.4.2.4 da norma apresenta os valores voltados aos diferentes tipos de carregamentos, dispostos na Tabela 2.5.

Tabela 2.5 – Coeficientes  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  (Eurocode 2)

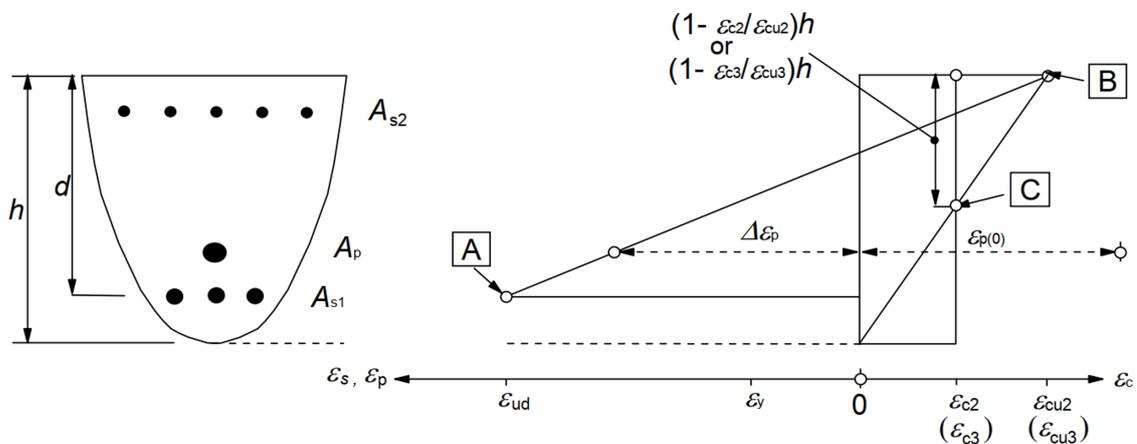
Carreg. de projeto	$\gamma_c$ do concreto	$\gamma_s$ da armadura
Permanente e transiente	1,5	1,15
Excepcional	1,2	1,0

adaptado de Eurocode 2 (2004, p. 24)

### 2.3.3 Domínios de deformação em ELU e parâmetros de projeto

Tal qual detalhado no capítulo referente às hipóteses básicas e domínios de deformação para a ABNT NBR 6118:2014, os conceitos mantêm-se válidos e encontram-se também presentes no texto da norma europeia.

Como forma de ilustração, apresenta-se o diagrama para os domínios de deformação segundo esta norma na Figura 2.7. A diferença principal entre ambas as normas citadas está para o ponto A, determinado pela deformação específica última de projeto para o aço, definido aqui como  $0,9\epsilon_{uk}$ , previamente explicitado na subseção 2.3.1. Assim sendo, a máxima deformação específica em projeto corresponderá a 45‰, frente ao valor de 10‰ presente na norma brasileira.



- A** - Deformação limite do aço tracionado
- B** - Deformação limite do concreto comprimido
- C** - Deformação limite do concreto em compressão pura

Figura 2.7 – Domínios de deformação de uma seção transversal em ELU

Fonte: Eurocode 2 (CEN (2004), p. 84).

Em projeto, o Eurocode apresenta uma formulação direta para a determinação da área mínima de aço longitudinal em vigas (Equação 2.18), que não deve resultar em taxa de armadura inferior a 0,13%.

$$A_{s,min} = 0,26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b \cdot d \quad (2.18)$$

## 2.4 PROJETO DE REVISÃO DO EUROCODE 2:2022

No ano de 2022, o comitê técnico normativo CEN/TC 250 apresentou o projeto de revisão do Eurocode 2 (FprEN 1992-1-1:2022), como substituição futura dos códigos normativos EN

1992-1-1:2004, EN 1992-1-1:2005 e EN 1992-1-1:2006. Esta versão atualizada introduz uma reestruturação significativa em diferentes aspectos na comparação com a versão anterior, como organização dos itens e capítulos, redação, ilustrações e recomendações. Ainda assim, grande parte do disposto no Eurocode 2:2004 em termos de projeto de vigas de concreto armado mantém-se válido.

Desta forma, elenca-se a seguir os pontos divergentes do projeto de revisão FprEN 1992-1-1:2022 ao dimensionamento e verificação de seções de concreto armado sob flexão normal simples.

### 2.4.1 Diagramas tensão-deformação do concreto à compressão

O projeto de revisão do Eurocode 2 (2022) admite a utilização de três diferentes modelos de diagrama tensão-deformação para o concreto, de forma semelhante aos códigos normativos anteriormente abordados. Para determinação da resistência à flexão de seções transversais em ELU é permitida a utilização do modelo simplificado de diagrama parábola-retângulo, assim como de distribuição retangular de tensões.

O diagrama parábola-retângulo dispõe da mesma formulação apresentada para o Eurocode 2:2004 (Equações 2.4.1 e 2.4.1, replicadas abaixo).

$$\sigma_c = f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right], \text{ para } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$$

$$\sigma_c = f_{cd}, \text{ para } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$$

Os resultados obtidos segundo esta revisão, entretanto, deverão ser distintos, uma vez que: há a introdução do parâmetro  $\eta_{cc}$ , chamado coeficiente de fragilidade, ao cálculo de  $f_{cd}$  (Equações 2.19 a 2.21); as deformações específicas  $\varepsilon_{c2}$  e  $\varepsilon_{cu}$  são fixados em 2‰ e 3,5‰, respectivamente, independentemente do valor de  $f_{ck}$  do concreto.

$$f_{cd} = \eta_{cc} \cdot k_{tc} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (2.19)$$

Onde:

$$\eta_{cc} = \left( \frac{40 \text{ MPa}}{f_{ck}} \right)^{\frac{1}{3}} < 1,0 \quad (2.20)$$

$$k_{tc} = 1,00^* \quad (2.21)$$

Quanto ao modelo de distribuição retangular de tensões, a tensão  $\sigma_c$  passa a ser definida apenas por  $f_{cd}$  no intervalo  $\lambda_x$ , portanto, sem o multiplicador  $\eta$ .

\* Valor sugerido (sujeito a modificações em função dos respectivos anexos nacionais), para concretos com endurecimento rápido ou normal e  $t_{ref} \leq 28$  dias, ou de endurecimento lento, desde que  $t_{ref} \leq 56$  dias e aplicação das cargas de projeto somente após 3 meses da data de concretagem.

Finalmente, visando uma representação mais realista, a normativa europeia apresenta as formulações das equações 2.22 a 2.26, que descrevem uma relação tensão-deformação não linear e contínua, com algumas modificações em relação à sua versão anterior (não aplicável em dimensionamento).

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \quad (2.22)$$

$$k = 1,05 E_{cm} \cdot \epsilon_{c1} / f_{cm} \quad (2.23)$$

$$\eta = \epsilon_c / \epsilon_{c1} \quad (2.24)$$

$$\epsilon_{c1} [\text{‰}] = 0,7 f_{cm}^{1/3} \leq 2,8 \text{‰} \quad (2.25)$$

$$\epsilon_c < \epsilon_{cu1} [\text{‰}] = 2,8 + 14 \cdot (1 - f_{cm}/108)^4 \leq 3,5 \text{‰} \quad (2.26)$$

A relação apresentada segue a forma da Figura 2.8.

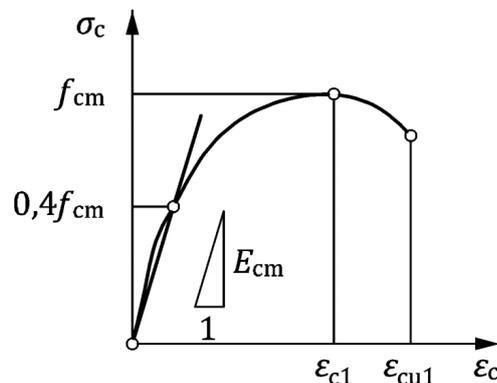
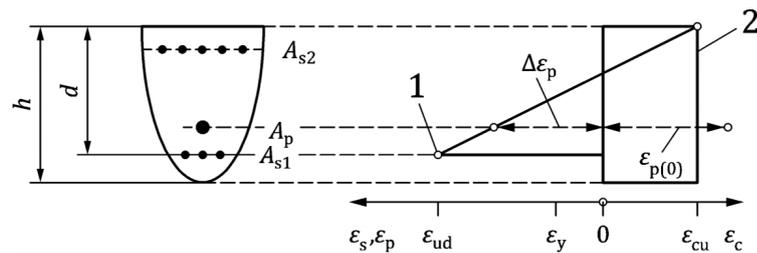


Figura 2.8 – Modelo de tensão-deformação não linear do concreto sob compressão

Fonte: CEN (2022, p. 77)

#### 2.4.2 Domínios de deformação em ELU e prescrições em projeto

A análise de flexão de seções em estado-limite último sofreu alterações do ponto de vista conceitual ao que vinha sendo implementado até então pelo CEN e ainda hoje pela norma brasileira de projeto de estruturas. Como mostrado na seção anterior, a deformação última do concreto, denominada  $\epsilon_{cu}$ , passa a adotar o valor definido de 3,5‰, sem variações decorrentes do modelo ou da classe de resistência do concreto. Deste modo, tal qual ilustrado na Figura 2.9 a seguir, o ponto pivô em  $\epsilon_{c2}$  que anteriormente se fazia presente e limitava as tensões no domínio 5 (Figura 2.7) não mais existe, e, portanto,  $\epsilon_{cu}$  é também a máxima deformação neste domínio.



#### Pontos

- 1 Deformação limite da armadura tracionada
- 2 Deformação de compressão limite do concreto

Figura 2.9 – Domínios de deformação em ELU segundo o FprEN:2022

Fonte: adaptado de CEN (2022)

Outra mudança significativa às análises elásticas lineares destes elementos foi a introdução de uma nova formulação no que diz respeito ao limite da relação  $x/d$  em projeto. Esta relação está relacionada com o coeficiente de redistribuição de momentos, que leva em conta as propriedades do aço utilizado e a deformação limite do concreto, conforme a Equação 2.27.

$$\delta_M \geq \frac{1}{1 + 0,7 \cdot \epsilon_{cu} \cdot E_s / f_{yd}} + \frac{x_u}{d} \quad (2.27)$$

Desta forma, em análises onde a redistribuição não é considerada ( $\delta_M = 1,0$ ), a profundidade relativa limite da linha neutra deve ser calculada pela seguinte relação.

$$\frac{x_u}{d} \leq 1 - \frac{1}{1 + 0,7 \cdot \epsilon_{cu} \cdot E_s / f_{yd}} \quad (2.28)$$

Logo, para efeito de comparação, assume-se que a profundidade limite da linha neutra de uma seção com aço longitudinal de  $E_s = 200$  GPa e  $f_{yk} = 500$  MPa será  $x_u/d \approx 0,53$ .

## 2.5 MODELOS MECÂNICOS E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS SEGUNDO O CÓDIGO MODELO FIB 2010

O Código Modelo para estruturas de concreto (2013), apresentado pela *Fédération Internationale du Béton (fib)*, trata da atualização mais recente do documento “pré-normativo” anteriormente publicado como código modelo CEB-FIP, nas versões de 1978 e 1990. Seu objetivo é servir como base ao desenvolvimento futuro de códigos para estruturas de concreto, a partir das concepções mais atuais a respeito de metodologias de projeto, otimização e comportamento dos materiais, seja no ramo da inovação, quanto dos materiais de conhecimento já consolidado.

Assim, é apresentado através do Código Modelo um conjunto de informações, na forma de diagramas e formulações, que permite a representação realística do desempenho mecânico do

concreto, de sua não linearidade física, assim como dos efeitos decorrentes da tração e fissuração. Estes modelos não são aplicáveis para dimensionamentos no ELU, entretanto possuem grande utilidade no âmbito das análises estruturais, para simulação computacional de resultados de ensaio e estimativa precisa da capacidade resistente dos elementos.

### 2.5.1 Estado de compressão uniaxial

O comportamento do concreto frente a solicitação de compressão uniaxial, em ensaio de carga de curta duração, confere ao apresentado na Figura 2.10, obtido a partir da Equação 2.29.

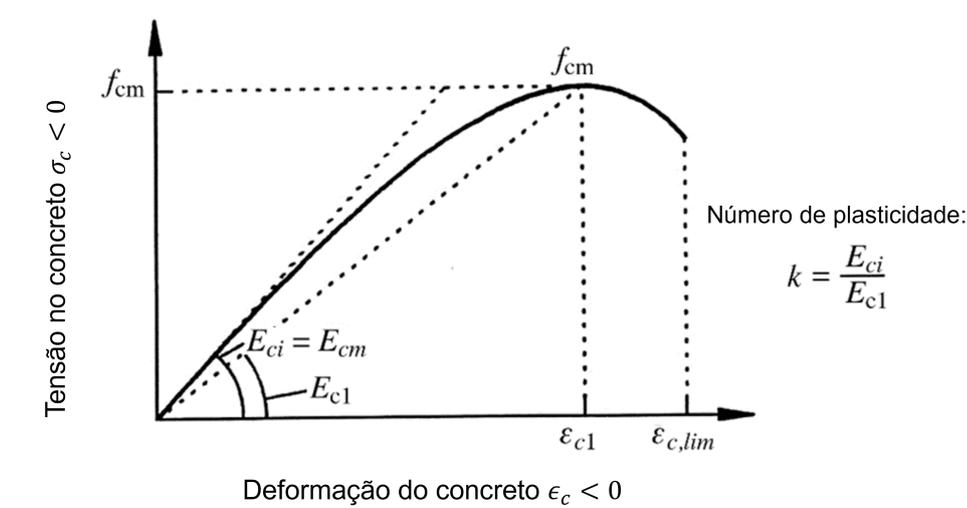


Figura 2.10 – Diagrama tensão-deformação do concreto para compressão uniaxial de curta duração

Fonte: FIB (2013, p. 82)

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = - \left( \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k-2) \cdot \eta} \right) \text{ para } |\epsilon_c| < |\epsilon_{c,lim}| \quad (2.29)$$

Onde:

$$\eta = \epsilon_c / \epsilon_{c1};$$

$$k = E_{ci} / E_{c1};$$

$\epsilon_{c1}$  é a deformação no ponto de máxima tensão de compressão;

$E_{c1}$  é o módulo secante da origem até o pico de tensão de compressão;

$k$  é o número de plasticidade.

Como pode-se observar, a relação tensão-deformação atinge um valor máximo de pico na configuração deformada  $\epsilon_{c1}$  e resistência  $f_{cm}$ , apresentando, em sequência, um trecho de resistência descendente. Esta máxima resistência  $f_{cm}$ , também dita resistência à compressão média do concreto, é definida por:

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f \quad (2.30)$$

Onde  $\Delta f = 8$  MPa.

Ainda quanto à definição do número de plasticidade  $k$ , apresentada anteriormente, o módulo de elasticidade  $E_{ci}$  do concreto aos 28 dias de idade, em MPa, é estimado da seguinte forma:

$$E_{ci} = E_{c0} \cdot \alpha_E \cdot \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3} \quad (2.31)$$

Sendo:  $E_{c0} = 21,5 \cdot 10^3$  MPa e  $\alpha_E$  a constante do agregado, sendo comumente atribuído o valor 1,0 para agregados do tipo granito e gnaisse.

Logo, os valores publicados pelo Código Modelo para as deformações específicas  $\varepsilon_{c1}$  e  $\varepsilon_{c,lim}$ , assim como do módulo  $E_{c1}$  e número de plasticidade  $k$  do concreto, são dispostos na Tabela 2.6.

Tabela 2.6 – Deformações  $\varepsilon_{c1}$ ,  $\varepsilon_{c,lim}$ , módulo  $E_{c1}$  e número de plasticidade  $k$  do concreto

	Classes do concreto								
	C12	C16	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50
$E_{c1}$ (GPa)	11,1	12,2	13,3	14,9	16,5	18,2	20,0	21,3	23,2
$\varepsilon_{c1}$ (‰)	-1,9	-2,0	-2,1	-2,2	-2,3	-2,3	-2,4	-2,5	-2,6
$\varepsilon_{c,lim}$ (‰)	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,5	-3,4
$k$	2,44	2,36	2,28	2,15	2,04	1,92	1,82	1,74	1,66

	Classes do concreto							
	C55	C60	C70	C80	C90	C100	C110	C120
$E_{c1}$ (GPa)	24,7	26,2	28,9	31,4	33,8	36,0	39,3	42,7
$\varepsilon_{c1}$ (‰)	-2,6	-2,7	-2,7	-2,8	-2,9	-3,0	-3,0	-3,0
$\varepsilon_{c,lim}$ (‰)	-3,4	-3,3	-3,2	-3,1	-3,0	-3,0	-3,0	-3,0
$k$	1,61	1,55	1,47	1,41	1,36	1,32	1,24	1,18

Fonte: adaptado de FIB (2013, p. 83)

## 2.5.2 Estado de tração uniaxial

Tratando-se do estado de tensões no concreto quando da ocorrência de solicitações de tração uniaxial, o Código Modelo *fib* 2010 (2013) apresenta dois diagramas distintos (Figura 2.11), que

dispõem a relação tensão-deformação para o caso do concreto não fissurado (à esquerda) e a relação tensão-abertura de fissuras (à direita).

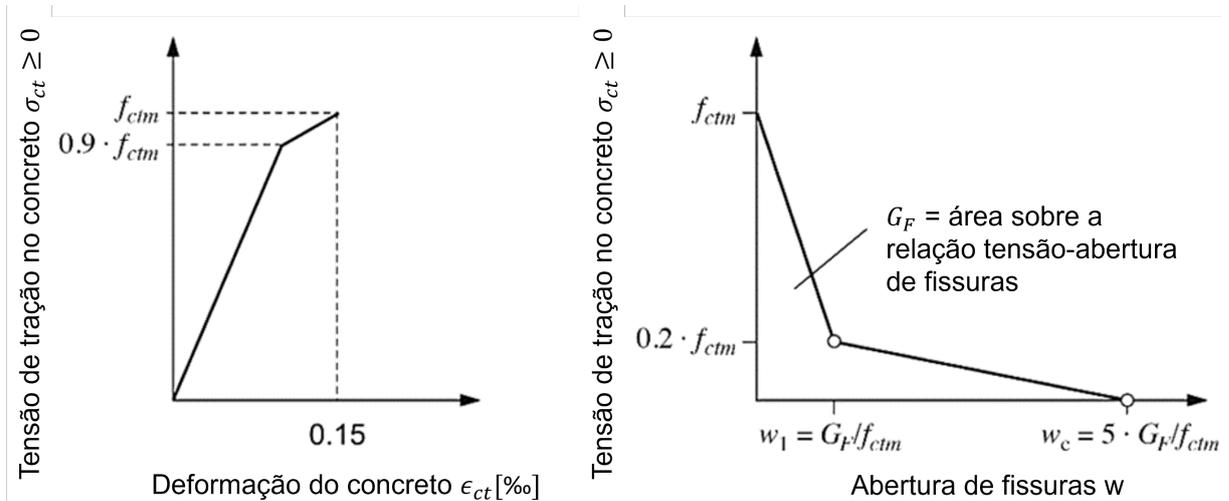


Figura 2.11 – Representação esquemática das relações tensão-deformação e tensão-abertura de fissuras do concreto tracionado

Fonte: FIB (2013, p. 83)

As formulações para obtenção de ambos os trechos do diagrama tensão-deformação do concreto em estado não fissurado são apresentadas abaixo.

$$\sigma_{ct} = E_{ci} \cdot \epsilon_{ct} \quad \text{para } \sigma_{ct} \leq 0,9 \cdot f_{ctm} \quad (2.32)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} \cdot \left( 1 - 0,1 \frac{0,15\% - \epsilon_{ct}}{0,15\% - 0,9 \cdot f_{ctm} / E_{ci}} \right) \quad \text{para } 0,9 \cdot f_{ctm} < \sigma_{ct} \leq f_{ctm} \quad (2.33)$$

De modo que:

$\epsilon_{ct}$  é a deformação de tração;

$\sigma_{ct}$  é a tensão de tração em MPa;

$f_{ctm}$  é a resistência à tração do concreto em MPa, dada pelas Equações 2.34 e 2.35.

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{2/3} \quad , \text{ classes } \leq \text{C50} \quad (2.34)$$

$$f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,1 \cdot f_{cm}) \quad , \text{ classes } > \text{C50} \quad (2.35)$$

Quanto ao diagrama à direita da Figura 2.11, as equações das retas que descrevem os trechos compreendidos até as aberturas de fissuras  $w_1$  e  $w_c$ , onde o processo torna-se estabilizado, são

apresentadas em 2.36 e 2.37.

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} \cdot \left( 1,0 - 0,8 \cdot \frac{w}{w_1} \right) , \text{ para } w \leq w_1 \quad (2.36)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ctm} \cdot \left( 0,25 - 0,05 \cdot \frac{w}{w_1} \right) , \text{ para } w_1 < w \leq w_c \quad (2.37)$$

Neste caso, têm-se:

$w$  é a abertura de fissura em milímetros (mm);

$w_1 = G_F / f_{ctm}$  em milímetros, no ponto  $\sigma_{ct} = 0,2 \cdot f_{ctm}$ ;

$w_c = 5 \cdot G_F / f_{ctm}$  em milímetros, quando  $\sigma_{ct} = 0$ ;

$G_F$  é a energia de fratura em N/mm, estimada em  $G_F = 73 \cdot f_{cm}^{0,18}$ .

Uma vez que o parâmetro abertura de fissuras individualmente é incapaz de estabelecer uma relação com o estado de deformação da seção, o documento faz, também, um paralelo entre o estado de formação de fissuras, e conseqüente processo de estabilização, com a região de descontinuidade imposta ao concreto através deste (Figura 2.12). Neste caso, torna-se visível a variação no nível de tensões ao concreto, aço e na aderência de interface entre ambos, para uma região ao redor da fissura compreendida a uma distância  $l_{s,max}$ , cuja estimativa é dada pela Equação 2.38.

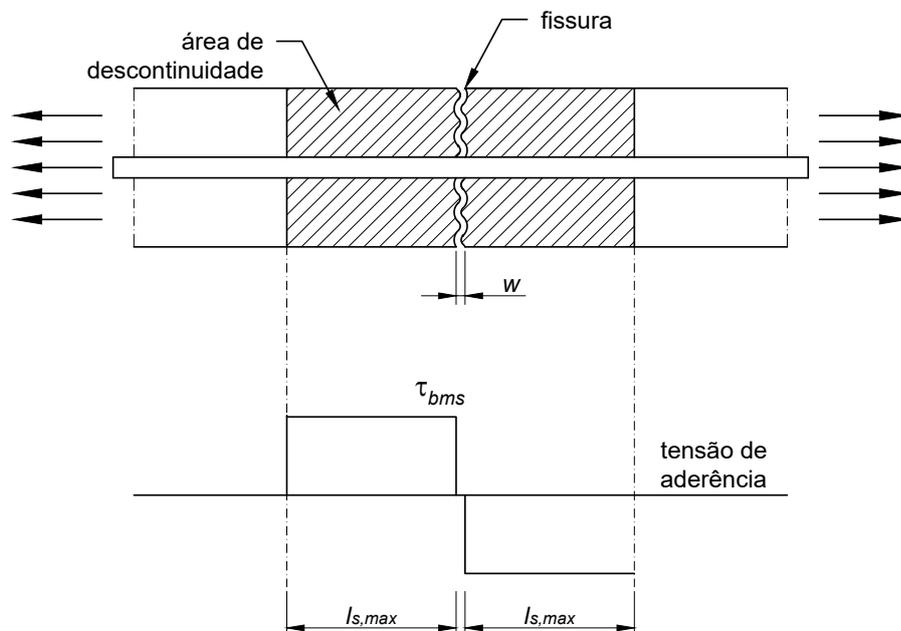


Figura 2.12 – Estado de formação de fissuras e tensão de aderência

Fonte: adaptado de FIB (2013)

$$l_{s,max} = k \cdot c + \frac{1}{4} \cdot \frac{f_{ctm}}{\tau_{bms}} \cdot \frac{\varphi_s}{\rho_{s,ef}} \quad (2.38)$$

Onde:

$k$  consiste de um parâmetro empírico para levar em conta a influência do cobrimento de concreto, sendo  $k = 1,0$  um valor aceitável;

$c$  é o cobrimento de concreto;

$\tau_{bms}$  trata-se da tensão de aderência média entre aço e concreto. Em um estágio de fissuração estabilizada, conforme a Tabela 7.6-2 do Código Modelo, este valor será  $\tau_{bms} = 1,8 \cdot f_{ctm}$ ;

$\varphi_s$  é o diâmetro da barra de aço;

$\rho_{s,ef}$  é a taxa de armadura efetiva, igual ao quociente entre  $A_s/A_{c,ef}$ . Esta última, também denominada área efetiva de concreto tracionado, é estabelecida para o menor valor compreendido entre os dois valores na ilustração da Figura 2.13.

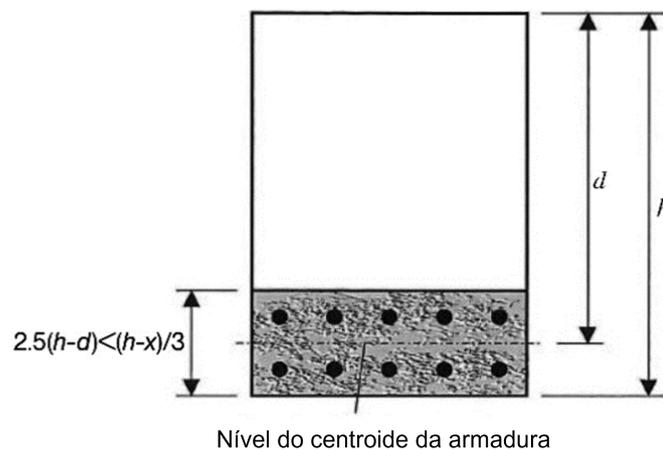


Figura 2.13 – Área efetiva de concreto na zona tracionada de vigas

Fonte: FIB (2013, p. 285)

### 2.5.3 Aço de armadura passiva

Dada a variabilidade e evolução dos processos de fabricação de barras com fins estruturais, o Código Modelo *fib* 2010 (2013) não estabelece um modelo fixo de representação do diagrama tensão-deformação do aço de armadura passiva. Entretanto, o texto referencia a formulação proposta por Menegotto-Pinto como uma idealização possível da relação tensão-deformação, construída em conformidade com a Equação 2.39.

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \left\{ b \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) + \frac{(1-b) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)}{\left[ 1 + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^n \right]^{1/n}} \right\} \quad (2.39)$$

Onde: as tensões e deformações com subíndice "0" relacionam-se ao ponto de inflexão do diagrama, caso do início do patamar de escoamento nos aços com esta característica;  $b$  é a razão entre as inclinações dos trechos, a partir do modelo bilinear, e  $n$  é a constante de curvatura na interface de transição entre os trechos elástico e pós escoamento.

Tal qual observado nas versões do Eurocode 2, o módulo de elasticidade é novamente estabelecido de forma preliminar como  $E_s = 200$  GPa. Para as barras de aço classe B, laminadas à quente, os critérios de ductilidade permanecem idênticos, de modo que a deformação característica em situação de máxima tensão ( $f_{tk} \geq 1,08 \cdot f_{yk}$ ) encontra-se na ordem de  $\epsilon_{uk} \geq 50$  ‰.

### 3 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

O estudo sobre confiabilidade aplicada a sistemas estruturais tem sido, desde um passado recente, amplamente exercitado como alternativa à forma empírica historicamente observada na evolução dos processos que buscam estabelecer requisitos mínimos de segurança no âmbito da engenharia de estruturas. Sua introdução, tanto aliada ao desenvolvimento dos códigos normativos, como em estudos de caso isolados, visa a minimização da ocorrência de falhas e desastres, assim como a elevação do nível de otimização dos elementos em projeto.

Em engenharia, a garantia plena da segurança e do desempenho dos sistemas projetados é inevitavelmente insustentável, seja por razões de viabilidade prática ou econômica. Isto ocorre, sobretudo, em razão do cenário de incertezas e imprevisibilidades impostas ao longo da cadeia produtiva, que podem surgir tanto pela impossibilidade de acesso completo às informações e condições às quais os elementos estarão sujeitos, como pela natureza aleatória de muitos dos eventos envolvidos.

Neste sentido, a confiabilidade estrutural surge com a função de mensurar o grau de confiança de um sistema (ou estrutura individualmente) em atender às suas especificações, condições de operação e vida útil determinadas em projeto, frente às incertezas associadas aos modelos de simplificação adotados (físicos e/ ou matemáticos), variabilidade de propriedades físicas, mecânicas e geométricas dos elementos e seus materiais, ações externas, erros humanos, entre outros (BECK, 2019).

Conforme tratado por Ang e Tang (2007), o problema da confiabilidade em sistemas de engenharia consiste essencialmente em um problema de capacidade (ou resistência,  $R$ ) *versus* demanda (ou solicitação,  $S$ ). Na prática, a determinação destas grandezas é impossível de ser realizada de forma determinística e, portanto, em vista das incertezas anteriormente elencadas, utiliza-se a modelagem por meio de variáveis aleatórias. Assim sendo, configura-se um problema probabilístico, em que a confiabilidade,  $C$ , representará a probabilidade em que as capacidades resistentes superem as demandas das solicitações,  $P(R > S)$ . O cenário complementar, quando as solicitações superam as capacidades resistentes ( $P(S > R)$ ), por sua vez, é denominado probabilidade de falha ( $p_f$ ). Esta relação é apresentada na equação 3.1.

$$C = 1 - p_f \quad (3.1)$$

Como forma de reduzir as probabilidades de falha, grande parte das normas voltadas ao projeto de estruturas civis fazem uso do conceito de coeficientes parciais de segurança, nas quais a adoção de modelos e suposições conservadoras, como mecanismo para o estabelecimento de uma

margem diante da conjunção hipotética mais crítica (ANG; TANG, 2007). Os maiores desafios a serem superados estão na estimativa adequada destes parâmetros e das condições extremas de demanda, nas especificidades de ambientes e materiais disponíveis em cada localidade, e para diferentes classes representativas de sistemas estruturais. Neste caso, a introdução do estudo da confiabilidade e das análises estatísticas é de fundamental importância ao desenvolvimento e aprimoramento dos códigos normativos.

A seção 3.1, a seguir, reúne brevemente alguns dos conceitos fundamentais que embasam as análises de confiabilidade, de forma que, em uma segunda instância (seção 3.2) permita-se dar ênfase às formulações do método de análise aplicado neste estudo.

## 3.1 CONCEITOS BÁSICOS

Os tópicos a seguir abordam algumas definições e conceitos que constituem pontos chave à construção teórica dos métodos para análises de confiabilidade. Esses conceitos incluem desde a introdução de ferramentas estatísticas, suas propriedades e formulações, até as formalizações para determinação de variáveis aleatórias, funções de estado limite, probabilidades de falha e índices de confiabilidade.

### 3.1.1 Variáveis aleatórias

Uma classe de experimentos, ditos experimentos aleatórios, é conhecida por apresentar certa variabilidade e imprevisibilidade nos resultados produzidos. A depender da natureza do experimento, os resultados gerados podem ou não estarem definidos numericamente e, neste último caso, pode-se fazer necessário realizar esta representação artificialmente. Para tal, chama-se variável aleatória toda função capaz de associar um dado valor numérico ao resultado de um experimento aleatório (MONTGOMERY; RUNGER, 2009).

Uma variável aleatória é, portanto, uma função que mapeia os eventos  $\omega$  do espaço amostral  $\Omega$  para a reta dos números reais  $\mathbb{R}$ , sendo representada usualmente através da letra  $X$  maiúscula (THOFT-CRISTENSEN; BAKER, 1982). O valor produzido pela variável, associado a um dos eventos do experimento, pode ser representado por  $x$ .

Denota-se variável aleatória discreta aquela capaz de produzir uma faixa finita (ou infinita contável) de valores, ao passo que uma variável aleatória contínua é uma variável aleatória com um intervalo (tanto finito como infinito) de números reais para sua faixa (MONTGOMERY; RUNGER, 2009).

### 3.1.1.1 Função de distribuição acumulada (FDA)

Sendo  $X$  uma variável aleatória, sua distribuição de probabilidade, ou seja, a lei que descreve as probabilidades associadas a todos os valores  $x$  possíveis desta, pode sempre ser descrita por sua Função de Distribuição Acumulada (FDA), através da seguinte relação.

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (3.2)$$

para qualquer valor de  $x$  no intervalo  $(-\infty \leq x \leq +\infty)$ .

Assim sendo, em termos práticos, "a  $F_X(x)$  corresponde à probabilidade de que a variável aleatória assumira qualquer valor menor do que  $x$ " (BECK, 2019).

### 3.1.1.2 Função densidade de probabilidade (FDP)

Para Montgomery e Runger (2009), o conceito de função densidade de probabilidade  $f_X(x)$  pode ser usado para descrever a distribuição da probabilidade de uma variável aleatória contínua  $X$  apresentar certo valor ou estar contida em certo intervalo. Diante disso, a probabilidade de  $X$  estar contida em um dado intervalo  $[a, b]$  corresponde à integral de  $f_X(x)$  entre  $a$  e  $b$ , conforme a Equação 3.3.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (3.3)$$

Para uma avaliação de distribuição de probabilidade acumulada, ou seja  $a \rightarrow -\infty$  e  $b = x$ , obtém-se:

$$\int_{-\infty}^x f_X(x) dx = P(X \leq x) = F_X(x) \quad (3.4)$$

Logo, a função densidade de probabilidade será a primeira derivada da função de distribuição acumulada em relação a  $x$  (Equação 3.5).

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (3.5)$$

Neste caso, torna-se relevante diferenciar o tratamento entre variáveis contínuas e discretas, uma vez que  $F_X(x)$  pode não ter derivadas para todo  $x$ . Portanto, ao tratar-se de variáveis aleatórias discretas, a FDP será uma função do tipo pulso, onde as descontinuidades ocorrerão em cada ponto  $x_i$  dentre os valores possíveis (BECK, 2019).

### 3.1.1.3 Média e variância

O presente trabalho fará proveito de algumas características destacáveis das variáveis aleatórias. Uma dessas características é o valor esperado, ou média, que utiliza os modelos probabilísticos para equalizar os possíveis valores de  $X$ , conforme apresentado nas equações 3.6 e 3.7 para variáveis discretas e contínuas, respectivamente.

1. Variável aleatória discreta:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{\forall x_i} x_i p_X(x_i) \quad (3.6)$$

Onde  $p_X(x_i)$  é a probabilidade  $P(X = x_i)$ .

2. Variável aleatória contínua:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (3.7)$$

Onde  $f_X(x)$  é a probabilidade  $P(x \leq X \leq x + dx)$ .

Por outro lado, além do valor médio de uma variável aleatória, há também o interesse de se conhecer qual a dispersão dos seus valores em torno da média. Esta propriedade chama-se variância e pode ser determinada pelas equações 3.8 e 3.9.

1. Variável aleatória discreta:

$$Var(X) = \sum_{\forall x_i} (x_i - \mu_X)^2 p_X(x_i) \quad (3.8)$$

2. Variável aleatória contínua:

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad (3.9)$$

Onde  $E(X^2)$  é a média quadrada de  $X$ .

A variância também está relacionada ao desvio padrão, de modo que  $Var(X) = \sigma_X^2$ .

Para o caso de variáveis contínuas com distribuições de probabilidades conhecidas, o resultado do desenvolvimento das equações acima apresentadas já é conhecido e pode ser facilmente encontrado na literatura especializada. O Anexo A traz um resumo das fórmulas de média e variância para os principais tipos de distribuição de probabilidades.

### 3.1.2 Funções de estado limite

Em problemas de estado-limite, a quantificação e qualificação das variáveis relevantes à análise de confiabilidade é de extrema importância. Por simplicidade, admite-se que tais variáveis (oriundas ou não de processos aleatórios) sejam agregadas através de um vetor  $X = \{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ , que contenha as variáveis de projeto do problema. Isto posto, entende-se que as equações de estado limite ( $g(X)$ ) devem ser descritas como função das variáveis de projeto  $X_i$ , conforme a Equação 3.10.

$$g(X) = g(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \quad (3.10)$$

Portanto, visando análises de confiabilidade de sistemas estruturais, a equação proposta pode ser reduzida à seguinte relação genérica de equilíbrio fundamental (Equação 3.11), também denominada função performance (NOWAK; COLLINS, 2000) para variáveis aleatórias normais.

$$g(R, S) = R - S = 0 \quad (3.11)$$

Onde  $R$  consiste do conjunto de variáveis a conferir as características resistentes do sistema estrutural e seus componentes materiais,  $R = R(f_{ck}, f_y, I_x, I_y, J, h, b, d, \dots)$ ; e  $S$  o conjunto de solicitações atuantes sobre a estrutura,  $S = S(g, q)$ , sendo  $g$  e  $q$  as frações permanentes e variáveis (transientes ou acidentais) das ações impostas, nesta ordem.

Ao observar a relação descrita pela função de estado, fica então evidente que o interesse fundamental do problema da confiabilidade é o estabelecimento de uma condição onde  $R - S > 0$ , com certa margem de segurança, uma vez que a condição complementar,  $R - S < 0$ , descreve o estado de falha estrutural.

### 3.1.3 Probabilidade de falha

Conforme introduzido previamente, a probabilidade de falha é uma função probabilística onde a condição de estado limite é excedida. Desta forma, sendo  $R$  e  $S$  as variáveis aleatórias de resistência e solicitação, define-se:

$$P_f = P(R \leq S) = P(R - S \leq 0) \quad (3.12)$$

A condição apresentada resulta em uma função conjunta de densidade de probabilidade,  $f_{R,S}(r, s)$ , das variáveis de resistência e solicitação, de tal sorte que  $P_f$  pode ser expressa por:

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^s f_{R,S}(r, s) dr ds \quad (3.13)$$

Uma representação gráfica do modelo apresentado pode ser vista na Figura 3.1.

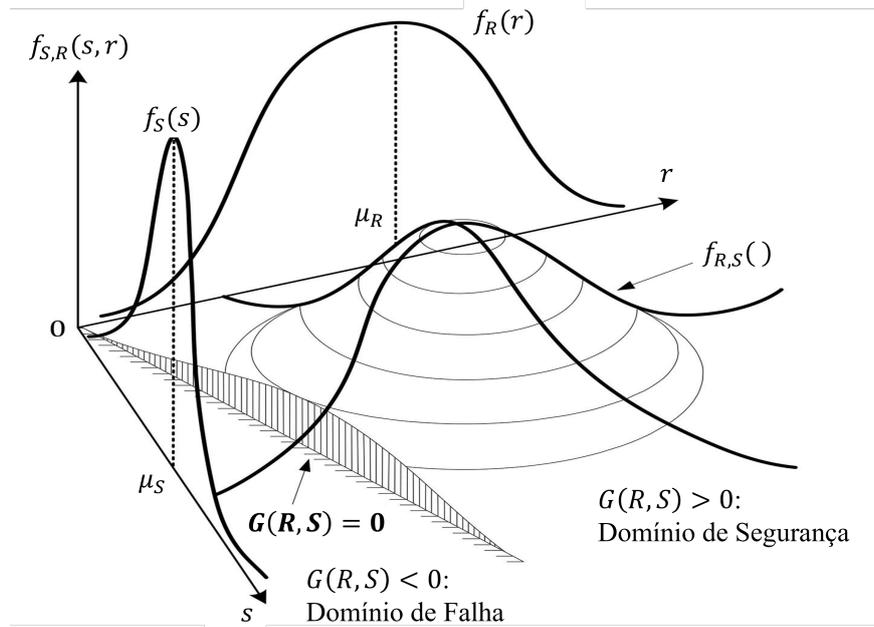


Figura 3.1 – Representação do domínio de falha  
 Fonte: adaptado de Ansari Esfeh (2022) e Melchers e Beck (2018)

Ainda, é factível que  $R$  e  $S$  sejam admitidas (para grande parte dos casos) variáveis independentes, ou seja,  $f_{R,S}(r,s) = f_R(r)f_S(s)$ . Neste caso, surge na Equação 3.13 um termo de distribuição acumulada de probabilidade, na forma  $\int_{-\infty}^s f_R(r)dr$ , também conhecido como  $F_R(r)$ . Logo, a probabilidade de falha deve ser escrita como uma integral simples, tal qual a Equação 3.14.

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(s)f_S(s)ds \tag{3.14}$$

Esta integral é conhecida como integral de convolução para um problema básico de confiabilidade, onde se determina a região de interferência entre ambos grupos de variáveis, tal qual a ilustração da Figura 3.2.

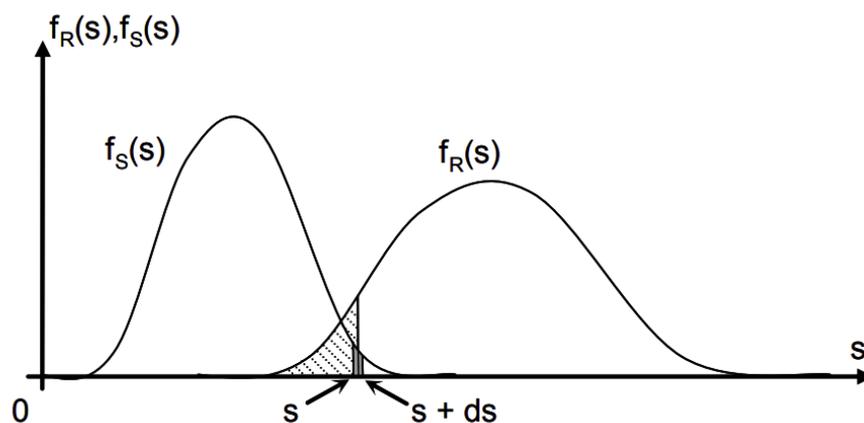


Figura 3.2 – Representação da integral de convolução  
 Fonte: Lopes (2007, p. 76)

### 3.1.4 Índice de confiabilidade

De acordo com Beck (2019), a equação geral de equilíbrio (3.11), que caracteriza a função de estado limite, representa a margem de segurança do problema, e, portanto, pode ser reduzida simplificadamente à letra  $M$ . Assumindo que  $R$  e  $S$  sejam variáveis normais e estatisticamente independentes, as propriedades de média e variância de  $M$  seguirão o modelo de distribuição normal e serão expressas pelas equações 3.15 e 3.16.

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S \quad (3.15)$$

$$Var[M] = \sigma_M^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \quad (3.16)$$

De forma prática, é recomendável a utilização de variáveis padronizadas (média zero e desvio padrão unitário) durante a determinação da probabilidade de falha. A variável padronizada  $Y$  pode ser calculada como segue.

$$Y = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (3.17)$$

Uma vez que a condição buscada é em geral para o ponto de falha, onde  $M = 0$ , têm-se  $Y = -(\mu_M/\sigma_M) \equiv -\beta$ . Neste caso, o parâmetro  $\beta$  (generalizado na Equação 3.18), conhecido como índice de confiabilidade de Cornell, mensura a menor distância entre o valor médio da margem de segurança (origem do sistema padronizado) e o ponto de ruína.

$$\beta = \frac{E[g(X)]}{\sqrt{Var[g(X)]}} \quad (3.18)$$

Conforme abordado por Beck (2019), porém, as variáveis observadas em problemas de engenharia raramente seguirão distribuições normais. De forma semelhante, as funções de estado limite do problema não serão necessariamente lineares, tal como fora assumido inicialmente. Para estes casos, a aplicação direta da Equação 3.18 pode gerar resultados consideravelmente distintos dos esperados, uma vez que a influência de outros modelos de distribuição e definições das funções de estado pode não estar sendo devidamente considerada. Neste cenário, o uso de métodos para transformação de variáveis quaisquer em variáveis normais equivalentes será de suma importância, sendo objeto de maior enfoque na sequência.

Invariavelmente, a probabilidade de falha estará relacionada ao índice de confiabilidade através da seguinte equação:

$$P_f = \int_{-\infty}^Y f_Y(y) dy = \Phi(-\beta) \quad (3.19)$$

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (3.20)$$

Onde  $\Phi$  é a função de distribuição normal padrão acumulada.

Em razão da relação apresentada na Equação 3.20, onde o índice de confiabilidade relaciona-se de forma inversamente proporcional à probabilidade de falha,  $\beta$  acaba por se tornar um excelente parâmetro para avaliação da segurança de um elemento ou sistema. A partir deste ponto, permite-se traçar um paralelo entre a  $P_f$  calculada e os respectivos valores do índice de confiabilidade  $\beta$ . A Tabela 3.1 dispõe valores comparativos para probabilidades de falha em diferentes ordens de grandeza, entre  $10^{-1}$  e  $10^{-7}$ .

Tabela 3.1 – Relação entre probabilidade de falha e índice de confiabilidade

$P_f$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
$\beta$	1,28	2,32	3,09	3,72	4,27	4,75	5,20

Fonte: Eurocode 0 (CEN, 2005)

Tal qual abordado na etapa introdutória deste capítulo, é impossível eliminar por completo as chances de ocorrência de falhas de segurança em estruturas civis. Entretanto, é plenamente possível, a partir dos conceitos aqui discorridos, estabelecer critérios limites de tolerância ao risco estrutural, seja em termos de probabilidade máxima admissível de falha ou índice de confiabilidade limite, ditos índices alvo ( $\beta_T$ ), como requisitos mínimos necessários à mitigação de eventos adversos. O Código Modelo Probabilístico do *Joint Committee on Structural Safety* (JCSS, 2001a), assim como Código Modelo da *fib* (2013), estabelecem valores de referência aos índices alvo, a partir de níveis de confiabilidade que consideram as possíveis consequências humanas e econômicas de uma falha, dentro de períodos de referência fixados, conforme as tabelas 3.2 e 3.3.

Tabela 3.2 – Índices de confiabilidade alvo de períodos de referência de um ano em ELU (JCSS, 2001a)

Custo relativo das medidas de segurança	Consequências de falha		
	Baixas	Moderadas	Altas
Alto	$\beta = 3,1$	$\beta = 3,3$	$\beta = 3,7$
Médio	$\beta = 3,7$	$\beta = 4,2$	$\beta = 4,4$
Baixo	$\beta = 4,2$	$\beta = 4,4$	$\beta = 4,7$

Tabela 3.3 – Índices de confiabilidade  $\beta$  em ELU segundo *fib* (2013)

Consequências de falha em ELU	Índice de confiabilidade alvo $\beta$	Período de referência
Baixas	3,1	50 anos
	4,1	1 ano
Moderadas	3,8	50 anos
	4,7	1 ano
Altas	4,3	50 anos
	5,1	1 ano

Paralelamente, a Sociedade Americana de Engenheiros Civis (ASCE) e o Instituto de Engenharia Estrutural (SEI), pertencente à esta, também fazem recomendações quanto aos requisitos básicos de confiabilidade em estruturas civis. Para casos de carregamento que excluem a presença de eventos extraordinários (como terremotos, tsunamis e similares), a Tabela 3.4 apresenta os valores de confiabilidade alvo (probabilidades de falha para períodos anuais) e índices de confiabilidade (em períodos de 50 anos), variáveis em função dos respectivos modos de falha, segundo uma categoria de Risco II (intermediária), extraídos da normativa de “Cargas Mínimas de Projeto e Critérios Associados para Edifícios e Outras Estruturas”, ASCE/SEI 7-2022.

Tabela 3.4 – Confiabilidade alvo (probabilidades de falha anuais,  $P_f$ ) e índices de confiabilidade associados segundo ASCE/SEI 7-22

Princípio	Categoria de Risco II
Falhas não repentinas e sem progressão generalizada de danos (ex. Flexão)	$P_f = 3,0 \times 10^{-5}/\text{ano}$ $\beta = 3,0$ (50 anos)
Falhas repentinas ou que geram progressão generalizada de danos (ex. Cisalhamento)	$P_f = 5,0 \times 10^{-6}/\text{ano}$ $\beta = 3,5$ (50 anos)
Falhas repentinas e que geram progressão generalizada de danos (ex. Compressão)	$P_f = 7,0 \times 10^{-7}/\text{ano}$ $\beta = 4,0$ (50 anos)

### 3.2 MÉTODOS PARA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

A solução do problema de confiabilidade por meio da solução analítica da equação de probabilidade de falha (apresentada genericamente pela Equação 3.13) é raramente viável. Conforme explicitado por Haldar e Mahadevan (2000), é praticamente impossível se obter a função densi-

dade injunta de probabilidade de variáveis aleatórias e, mesmo se possível, a solução de múltiplas integrais ainda é um processo difícil. Em outros casos, também é possível que a função performance  $g(X)$  não seja definida de forma fechada em função das variáveis de entrada. Portanto, o uso de métodos aproximados com abordagens numéricas ou estatísticas, atrelado ao avanço das aplicações computacionais, tornou-se fundamental às estimativas de confiabilidade em diferentes ramos da engenharia.

Uma das técnicas utilizadas para resolução do problema de confiabilidade é o método de simulação de Monte Carlo. O método consiste em estimar o índice de confiabilidade, ou a probabilidade de falha, de um sistema por meio da realização de múltiplas e sistemáticas experimentações numéricas, de modo a testar a maior quantidade possível de combinações das incertezas associadas às resistências e solicitações, dentro dos respectivos modelos de distribuição das variáveis aleatórias que as representam (HALDAR; MAHADEVAN, 2000). Deste modo, após uma quantidade significativa de simulações, permite-se aferir de forma amostral o requerido grau de confiabilidade do sistema.

A aplicação do método de Monte Carlo Direto, como descrito anteriormente, pode não ser recomendada para sistemas complexos, ou quando as probabilidades de falha são muito pequenas, em virtude da quantidade elevada de simulações e esforço computacional necessários. Por isso, a utilização de técnicas de redução de variância, como a simulação de Monte Carlo com Amostragem por Importância Adaptativa, pode-se fazer necessária como forma de viabilizar a aplicação deste método.

Por outro lado, uma abordagem alternativa à técnica de simulação de Monte Carlo consiste da implementação de aproximações analíticas da equação integral de  $P_f$ , que são mais facilmente calculadas. Neste contexto, observam-se dois modelos distintos: (1) aproximação linear (primeira ordem) da função de estado limite, encontrada fundamentalmente no Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM), Método de Primeira Ordem e Segundo Momento (FOSM) e variações; e (2) aproximação da função performance por equações de segunda ordem, caso do Método de Confiabilidade de Segunda Ordem (SORM). Ambos modelos utilizam-se de técnicas numéricas de solução iterativa para redução dos erros associados e para otimização da convergência nas análises.

Sendo assim, a seção a seguir introduzirá as definições, procedimentos e formulações necessárias à implementação do modelo de aproximação numérica do método FORM, que será utilizado para avaliação da confiabilidade das estruturas propostas neste estudo.

### 3.2.1 First-Order Reliability Method (FORM)

O Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (*First Order Reliability Method*), FORM, trata-se de um procedimento para resolução do problema de confiabilidade por meio de solução numérica, com grandes vantagens de implementação computacional. Segundo Beck (2019), tal qual observado no método FOSM, é realizada uma aproximação da função performance  $g(X)$  por expansão em Série de Taylor até o termo de primeira ordem. Entretanto, diferentemente do primeiro, o método FORM permite a estimativa da probabilidade de falha ainda que as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias não correspondam a uma distribuição normal, ou que as variáveis apresentem correlações internas. De forma complementar, o autor traz também a seguinte definição:

O método de confiabilidade de primeira ordem ou FORM consiste na construção de uma função conjunta de distribuição de probabilidades  $f_X(x)$  e na transformação desta em uma distribuição normal padrão multi-variada  $f_Y(y)$ . Esta transformação representa um mapeamento um-a-um, que leva pontos do espaço original  $\mathbb{X}$  para o espaço  $\mathbb{Y}$ . (BECK, 2019)

Neste caso, impõe-se uma modificação no cálculo do índice de confiabilidade que permita resolver a equação de estado-limite a partir de um determinado “ponto de projeto”, como alternativa ao uso dos parâmetros médios, sendo esta técnica introduzida inicialmente por Hasofer e Lind (NOWAK; COLLINS, 2000). Para isto, efetua-se a transformação do conjunto de variáveis  $X_i$ , que podem (ou não) estarem normalizadas e correlacionadas, de forma a resultar um novo conjunto de variáveis equivalentes normais-padronizadas e estatisticamente independentes,  $Y_i$  (Equação 3.21).

$$X_i = \mu_{X_i}^N + Y_i \cdot \sigma_{X_i}^N \quad (3.21)$$

Na literatura, costuma-se indicar os cálculos realizados no ponto de projeto pelo símbolo  $*$ , enquanto o superíndice  $N$  refere-se aos parâmetros da distribuição normal equivalente. Logo, no espaço normal padrão, a distância entre a origem deste sistema e o ponto de projeto corresponderá ao índice de confiabilidade  $\beta$  da Equação 3.18, que poderá ser reescrito como:

$$\beta = \|\mathbf{y}^*\| = \sqrt{Y^{*T}Y^*} \quad (3.22)$$

Geometricamente, permite-se representar este processo através da ilustração da Figura 3.3.

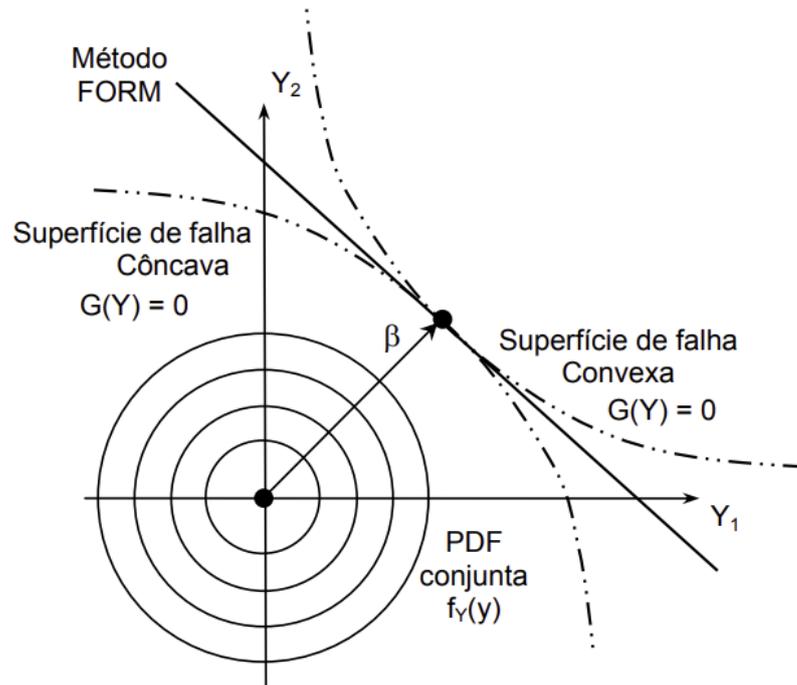


Figura 3.3 – Processo de aproximação do método FORM e o índice de confiabilidade

Fonte: Lopes (2007, p. 79)

A aproximação até o ponto sobre a superfície de falha mais próximo da origem do espaço normal padrão é, de fato, um problema de otimização, cujo objetivo consiste em:

1. Minimizar:

$$\beta = \|\mathbf{y}^*\| \quad (3.23)$$

2. Sujeito à restrição:

$$g(Y) = 0 \quad (3.24)$$

A partir destas condições, a solução de problemas de confiabilidade através do método FORM deverá elencar o seguinte conjunto de etapas.

1. Deve-se obter como entrada de dados as informações iniciais sobre as variáveis do problema, seus parâmetros estatísticos (modelo de distribuição, média e desvio padrão, por exemplo) e a definição matemática da função de estado limite  $g(X)$ . Toma-se como ponto de partida ao processo de minimização, comumente, os valores médios destas variáveis.
2. Aplicação da transformação composta das variáveis por meio da transformação de Nataf, que pode ser dividida em três partes (BECK, 2019):

- a) Transformação das variáveis originais  $X_i$  em variáveis normais equivalentes  $Z_i$ , por satisfação das duas seguintes condições: (1) as funções de distribuição acumulada (FDA) das variáveis normais equivalentes devem ser iguais às das variáveis não-normais no ponto  $x^*$ ; (2) o valor da função densidade de probabilidade (FDP) da distribuição normal equivalente deve ser igual à densidade de probabilidade da distribuição não normal no ponto  $x^*$
  - b) Determinação dos coeficientes de correlação equivalentes para as distribuições normais, utilizando, para esta finalidade, o modelo de Nataf.
  - c) Eliminação da correlação entre as variáveis aleatórias por avaliação das matrizes Jacobianas ( $J_{xy}$  e  $J_{yx}$ ), seja através da decomposição ortogonal ou da fatoração de Cholesky da matriz de correlação.
3. Determinação dos gradientes da função de estado limite no espaço normal padronizado.
  4. Otimização da distância entre a origem do espaço reduzido e a função de estado limite para a obtenção do novo ponto  $y_{k+1}$ , por meio da aplicação de algum algoritmo de otimização, como o HLRF.
  5. Verificação do critério de parada, que normalmente é definido pelas equações a seguir, em que  $\varepsilon$  é o valor admitido para o erro associado:

$$|g(\mathbf{y}_k)| < \varepsilon \quad \text{e} \quad 1 - \frac{|\nabla g(\mathbf{y}_k)^T \mathbf{y}_k|}{\|\nabla g(\mathbf{y}_k)\| \|\mathbf{y}_k\|} < \varepsilon \quad (3.25)$$

6. Caso atingida a convergência, determina-se o índice de confiabilidade no ponto de projeto  $\beta = \|\mathbf{y}^*\|$ ; do contrário, atualizam-se os parâmetros das distribuições normais equivalentes e das matrizes Jacobianas  $J_{xy}$  e  $J_{yx}$  para nova avaliação iterativa no ponto de falha atualizado  $y_{k+1}$ .

As seguintes seções darão ênfase aos processos que envolvem a transformação composta de Nataf (passo 2) e a busca pelo ponto de projeto, através do algoritmo HLRF, respectivamente.

### 3.2.1.1 Transformação de Nataf

Conforme introduzido na lista de etapas de aplicação do Método de Confiabilidade de Primeira Ordem, a transformação de Nataf surge com o objetivo de converter as variáveis iniciais  $X_i$  com suas distribuições marginais, no espaço  $\mathbb{X}$ , através de um processo de normalização que gera variáveis intermediárias  $Z_i$  (no espaço  $\mathbb{Z}$  correlacionado), para, finalmente, obter um conjunto de variáveis normais padronizadas (espaço  $\mathbb{Y}$ ). A Figura 3.4 traz uma representação gráfica ilustrativa dos procedimentos citados na transformação de duas variáveis correlacionadas  $x_1$  e  $x_2$  em variáveis independentes  $y_1$  e  $y_2$  do espaço normal padrão.

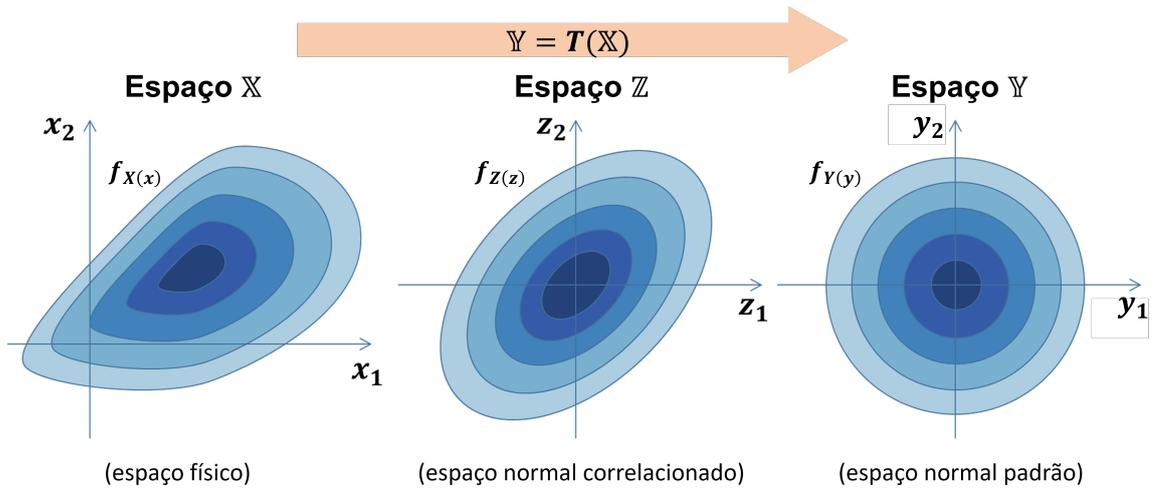


Figura 3.4 – Processo de transformação das variáveis  $x_1$  e  $x_2$  em variáveis normais padrão independentes

Fonte: adaptado de SimCenter <sup>1</sup>

Como visto, o processo de transformação pode ser então dividido em três diferentes fases, que são detalhadas a seguir.

### 3.2.1.1.1 Distribuição normal equivalente

A geração de variáveis normais equivalentes às variáveis gerais de um dado problema exige a observância de duas condições fundamentais no ponto  $x^*$ , referente à manutenção do estado de distribuição de probabilidades acumuladas neste ponto,  $F_{X_i}(x_i^*) = F_{X_i}^N(x_i^*)$  e  $f_{X_i}(x_i^*) = f_{X_i}^N(x_i^*)$ .

A igualdade das funções de distribuição acumulada no ponto de falha gera a seguinte conjuntura:

$$F_{X_i}(x_i^*) = \Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) \quad (3.26)$$

De onde permite-se organizar a seguinte definição para a média da distribuição normal equivalente.

$$\mu_{X_i}^N = x_i^* - \sigma_{X_i}^N \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i^*)) \quad (3.27)$$

Neste caso, o termo inverso da função de distribuição normal acumulada equivale ao próprio conjunto de variáveis normais e possivelmente não correlacionadas  $z_i^*$ , conforme a Equação 3.28

$$z_i^* = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i^*)) \quad (3.28)$$

<sup>1</sup> Disponível em: <[https://nheri-simcenter.github.io/quoFEM-Documentation/\\_images/SimCenterNataf1.png](https://nheri-simcenter.github.io/quoFEM-Documentation/_images/SimCenterNataf1.png)>, acesso em 11 de outubro de 2023.

Por outro lado, ao se igualar a segunda condição fundamental entre as densidades de probabilidade da distribuição normal padrão, obtém-se a relação da Equação 3.29.

$$\frac{1}{\sigma_{X_i}^N} \phi \left( \frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N} \right) = f_{X_i}(x_i^*) \quad (3.29)$$

Portanto, ao organizar ambas equações 3.27 e 3.29, tendo em vista a equivalência apontada em 3.28, ficam definidas as formulações para média e desvio padrão da distribuição normal equivalente (Equações 3.30 e 3.31).

$$\mu_{X_i}^N = x_i^* - \sigma_{X_i}^N z_i^* \quad (3.30)$$

$$\sigma_{X_i}^N = \frac{\phi(z_i^*)}{f_{X_i}(x_i^*)} \quad (3.31)$$

### 3.2.1.1.2 Modelo de Nataf

O processo para obtenção do conjunto das variáveis normais padrão equivalentes  $Z$ , conforme observado anteriormente, não impede que as variáveis ainda apresentem correlações internas. Inicialmente, permite-se atribuir às variáveis correspondentes uma distribuição conjunta, de  $n$  dimensões, na forma de  $f_Z(z) = \phi_n(z, \mathbf{R}_Z)$ , sendo  $\mathbf{R}_Z$  a matriz de correlação equivalente a ser determinada (Equação 3.32).

$$\mathbf{R}_Z = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{z_{12}} & \cdots & \rho_{z_{1n}} \\ \rho_{z_{21}} & 1 & \cdots & \rho_{z_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{z_{n1}} & \rho_{z_{n2}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

O modelo proposto por Nataf busca determinar uma aproximação à função densidade de probabilidades das variáveis marginais originais  $f_X(x)$  a partir da distribuição normal padrão  $n$ -dimensional e da matriz de correlação  $\mathbf{R}_Z$ , conforme a Equação 3.33.

$$f_X(x) = \phi_n(z, \mathbf{R}_Z) \frac{f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)}{\phi(z_1) \phi(z_2) \cdots \phi(z_n)} \quad (3.33)$$

Esta equação, quando adaptada à correlação entre duas variáveis quaisquer  $X_i, X_j$ , toma a forma da Equação 3.34.

$$f_{X_i X_j}(x_i, x_j) = \phi_2(z_i, z_j, \rho_{Z_{ij}}) \frac{f_{X_i}(x_i) f_{X_j}(x_j)}{\phi(z_i) \phi(z_j)} \quad (3.34)$$

Assim sendo, busca-se não somente determinar as componentes de correlação das variáveis não-normais, mas também mapeá-las ao espaço normal padrão (BECK, 2019). Logo, torna-se

necessário encontrar um coeficiente de correlação  $\rho_{Z_{ij}}$  entre as variáveis do espaço normalizado que gere a mesma tendência de distribuição conjunta que  $\rho_{X_{ij}}$  impõe à distribuição conjunta das variáveis originais correlacionadas. A formulação para determinação desta correlação no espaço das variáveis marginais é disposta a seguir.

$$\rho_{X_{ij}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_i z_j f_{X_i X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (3.35)$$

Deste modo, a solução para  $\rho_{Z_{ij}}$  pode ser expressa conforme a Equação 3.36.

$$\rho_{Z_{ij}} = \rho_{X_{ij}} F_{X_{ij}} \quad (3.36)$$

Neste caso, o fator  $F_{X_{ij}}$  é uma função do coeficiente de variação que relaciona as correlações entre as variáveis marginais com as mesmas propriedades das variáveis normais padrão. Os valores para o fator  $F_{X_{ij}}$  entre modelos de distribuição conhecidos e a distribuição normal são encontrados em literatura especializada. O Anexo B apresenta uma tabela destes valores, obtidos de Liu e Kiureghian (1986).

### 3.2.1.1.3 Decomposição da matriz de correlação

Uma vez conhecidas as componentes de correlação interna entre as variáveis do espaço normal, torna-se relevante eliminar as possíveis correlações entre as variáveis  $Z$  por meio da decomposição da matriz de correlação ( $R_Z$ ). Em problemas de confiabilidade estrutural, cujas matrizes de correlação são definidas positivas, pode-se utilizar a decomposição de Cholesky para este fim, com certa vantagem computacional em relação ao método de transformação ortogonal.

A decomposição de Cholesky, portanto, efetua a seguinte transformação linear, como meio para geração do conjunto de variáveis  $\mathbf{Y}$  independentes, onde  $\mathbf{B}$  é a matriz de transformação.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}^T \mathbf{Z} \quad (3.37)$$

Portanto, a matriz de covariância será descrita por:

$$\mathbf{C}_Y = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_Z \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad (3.38)$$

$\mathbf{I}$  refere-se à matriz identidade. Efetuando-se os arranjos necessários para isolar a equação de  $\mathbf{C}_Z$  (pré multiplicação por  $(\mathbf{B}^T)^{-1}$  e pós multiplicação por  $(\mathbf{B})^{-1}$ ), obtém-se o seguinte.

$$\mathbf{C}_Z = (\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}^{-1} \quad (3.39)$$

Sabendo que  $(\mathbf{B}^T)^{-1} = (\mathbf{B}^{-1})^T$ , e que a inversa da matriz de transformação transposta é uma matriz triangular inferior com diagonal positiva ( $(\mathbf{B}^T)^{-1} = \mathbf{L}$ ), então:

$$\mathbf{C}_Z = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (3.40)$$

Que caracteriza a forma conhecida da decomposição de Cholesky. Finalmente, podem ser determinadas as chamadas matrizes Jacobianas entre os espaços  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Y}$ , que descrevem como as derivadas de ambas variáveis de transformação estão relacionadas.

$$\mathbf{J}_{yz} = \mathbf{L}^{-1} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{J}_{zy} = \mathbf{L} \quad (3.42)$$

#### 3.2.1.1.4 Resultado da transformação composta

A partir dos procedimentos apresentados, observou-se a transformação dos espaços das variáveis aleatórias na sequência  $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$ . Neste ponto, permite-se relacioná-los através das consequentes matrizes jacobianas, conforme apresentado nas equações 3.43 e 3.44.

$$\mathbf{J}_{yx} = \mathbf{J}_{yz} \cdot \mathbf{J}_{zx} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{J}_{xy} = \mathbf{J}_{xz} \cdot \mathbf{J}_{zy} \quad (3.44)$$

No que tange à abordagem matricial, por definição, sabe-se que as matrizes jacobianas de transformação entre o espaço original e o espaço normal equivalente correlacionado referem-se diretamente à matriz diagonal dos desvios padrões normais equivalentes ( $\mathbf{D}^N = \text{diag}(\sigma_{x_i}^N)$ ), e, portanto,  $\mathbf{J}_{zx} = \mathbf{D}^N$  e  $\mathbf{J}_{xz} = (\mathbf{D}^N)^{-1}$ . Logo, ao aplicar a transformação de Cholesky, tal qual visto na seção anterior, obtém-se:

$$\mathbf{J}_{yx} = \mathbf{L}^{-1} \cdot (\mathbf{D}^N)^{-1} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{J}_{xy} = \mathbf{D}^N \cdot \mathbf{L} \quad (3.46)$$

Finalmente, com base nas equações propostas, permite-se construir os equacionamentos da transformação resultante que interligam as variáveis  $x$  do espaço marginal às variáveis normais padrão independentes  $y$  (equações 3.47 e 3.48).

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}_{yx} \{ \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}^N \} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{J}_{xy} \cdot \mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}^N \quad (3.48)$$

### 3.2.1.2 Otimização da busca pelo ponto de projeto

Conforme disposto previamente, a solução do problema de confiabilidade através do método FORM envolve a busca pelo ponto de projeto  $\mathbf{y}^*$  por meio de um processo iterativo de otimização. Para tal, existem diferentes proposições, sendo o algoritmo desenvolvido a partir das contribuições de Hasofer e Lind (1974) e Rackwitz e Fiessler (1978), denominado HLRF, o mais difundido.

O primeiro passo proposto pelo algoritmo na busca pela minimização da distância entre a origem e a superfície formada pela função performance no espaço padronizado consiste em linearizar a função de estado limite e igualá-la a zero. Deste modo, utiliza-se uma expansão por série de Taylor de  $g(\mathbf{y}^*)$  até o termo das derivadas de primeira ordem, como segue.

$$\tilde{g}(\mathbf{y}_{k+1}) = g(\mathbf{y}_k) + \nabla g(\mathbf{y}_k)^T (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k) = 0 \quad (3.49)$$

Cujo termo  $\nabla g(\mathbf{y}_k)$  refere-se ao gradiente da função de estado limite no espaço normal padronizado, definido segundo a Equação 3.50.

$$\nabla g(\mathbf{y}_k) = \left\{ \frac{\partial g}{\partial y_1}, \frac{\partial g}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial y_n} \right\}^T \quad (3.50)$$

Onde:

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dy_i} = \sigma_{x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad (3.51)$$

Portanto, pode-se rearranjar a Equação 3.49 na forma abaixo.

$$\nabla g(\mathbf{y}_k)^T \mathbf{y}_{k+1} = \nabla g(\mathbf{y}_k)^T \mathbf{y}_k - g(\mathbf{y}_k) \quad (3.52)$$

Neste ponto, permite-se utilizar o conceito de cossenos diretores,  $\alpha_k$ , que direcionam-se para o ponto mais provável de falha (Equação 3.53).

$$\alpha_k = \frac{\nabla g(\mathbf{y}_k)}{\|\nabla g(\mathbf{y}_k)\|} \quad (3.53)$$

Uma vez que o mesmo consiste de um vetor unitário, a soma dos quadrados dos cossenos diretores sempre será igual a um ( $\alpha_k^T \alpha_k = 1$ ). Ainda, as componentes do vetor unitário, referentes às variáveis aleatórias, fornecem uma medida sobre o nível de influência, ou sensibilidade, dessas variáveis no cálculo da probabilidade de falha.

Assim sendo, possibilita-se desenvolver a Equação 3.54.

$$\nabla g(\mathbf{y}_k)^T \mathbf{y}_{k+1} = [\nabla g(\mathbf{y}_k)^T \mathbf{y}_k - g(\mathbf{y}_k)] \alpha_k^T \alpha_k \quad (3.54)$$

Ao substituir a definição da Equação 3.53:

$$\nabla g(\mathbf{y}_k)^t \mathbf{y}_{k+1} = \frac{[\nabla g(\mathbf{y}_k)^t \mathbf{y}_k - g(\mathbf{y}_k)]}{\|\nabla g(\mathbf{y}_k)\|^2} \nabla g(\mathbf{y}_k)^t \nabla g(\mathbf{y}_k) \quad (3.55)$$

Por fim, através da simplificação dos termos existentes em ambos lados da igualdade, encontra-se a formulação recursiva do algoritmo HLRF (Equação 3.56).

$$\mathbf{y}_{k+1} = \frac{[\nabla g(\mathbf{y}_k)^t \mathbf{y}_k - g(\mathbf{y}_k)]}{\|\nabla g(\mathbf{y}_k)\|^2} \nabla g(\mathbf{y}_k) \quad (3.56)$$

## 4 MODELOS MECÂNICOS PARA DIMENSIONAMENTO E VERIFICAÇÃO DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO EM ELU

O primeiro passo a ser tomado, tendo em vista os objetivos gerais propostos neste trabalho, consiste da construção de um modelo numérico computacional que possibilite o cálculo de verificação de seções de concreto armado sujeitas à flexão simples no estado-limite último, a partir das formulações para idealização do comportamento real do concreto segundo o Código Modelo *fib* (2013), dispostas no Capítulo 2. A partir deste modelo, será possível obter os esforços resistentes dos elementos estruturais, que servirão de parâmetro às análises seguintes de confiabilidade.

Em um segundo momento, este capítulo também deverá apresentar os passos para a construção de uma rotina computacional visando o dimensionamento de seções retangulares de concreto armado, segundo as recomendações da NBR 6118 (versões 2014 e 2023) e Eurocode 2 (versão 2004 e projeto de revisão de 2022).

### 4.1 VERIFICAÇÃO DE SEÇÕES SEGUNDO O CÓDIGO MODELO FIB 2010

As seções a seguir apresentarão os processos necessários à elaboração do código em linguagem *Python*, adaptado das proposições de Campos Filho (2014), Musso Junior (1987) e Werner (1974), que permitirá a verificação de seções poligonais de concreto armado e implementação de diagramas tensão-deformação não lineares, sob solicitações generalizadas de flexo-compressão simples. Uma vez que as referências citadas relacionam-se à verificação de elementos com base em códigos normativos e do modelo de coeficientes de segurança, serão necessárias algumas modificações, de modo a introduzir o uso de parâmetros resistentes médios, a resistência à tração do concreto, entre outros aspectos. O código de verificação é disponibilizado em sua integralidade no Apêndice A deste documento.

Em sequência, na subseção 4.1.1, são definidos alguns dos parâmetros e propriedades básicos ao desenvolvimento do algoritmo.

#### 4.1.1 Formulação básica e definição das propriedades geométricas

A caracterização da geometria da seção de concreto a ser avaliada pelo programa de verificação seguirá a metodologia de construção de uma poligonal fechada, definida *a priori* a partir de um sistema de coordenadas globais  $X, Y$ . O processo de construção da seção deve seguir o sentido anti-horário na numeração dos vértices, exceto quando da criação de orifícios no interior da seção, onde o sentido horário deve ser utilizado (Figura 4.1). Elencam-se, também, as coordenadas individuais das barras de armadura e suas respectivas taxas de aço, em relação à área total de armadura na seção ( $A_s$ ).

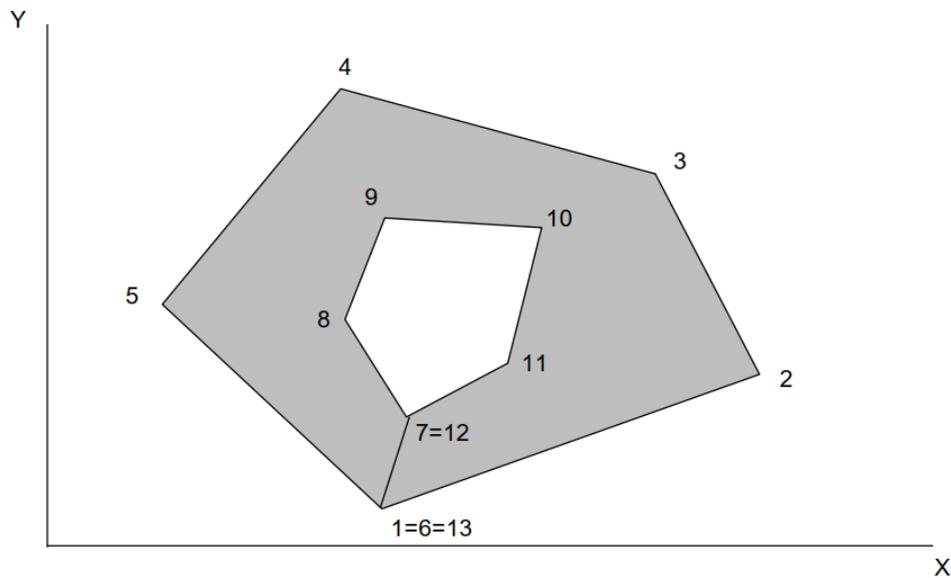


Figura 4.1 – Definição da seção poligonal

Fonte: Campos Filho (2014, p. 3)

Em vista das etapas de cálculo seguintes, será necessário transladar o sistema de coordenadas do atual sistema de referência global  $X, Y$  para um sistema local  $x, y$ , que deve estar com a origem posicionada no centro geométrico da seção. Deste modo, é de fundamental importância a determinação das propriedades geométricas da seção poligonal, como área, momento estático, momento de inércia e coordenadas do centroide, por exemplo, que desenvolvem-se diretamente da solução de integrais de superfície. Essas integrais, quando aplicáveis a domínios planos delimitados por poligonais fechadas, podem ser inicialmente substituídas por integrais de linha ao longo do contorno e, finalmente, por um somatório dos  $n$  segmentos de reta desta poligonal, por efeito da aplicação do teorema de Green. Considerando um sistema de coordenadas genérico  $\xi, \eta$ , obtém-se a Equação 4.1.

$$\int_A \xi^k \eta^m dA = \oint_C \frac{\xi^{k+1} \eta^m}{k+1} d\eta = \sum_{i=1}^n G_{km} \quad (4.1)$$

Onde:

$$G_{km} = \frac{1}{k+1} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \xi^{k+1} \eta^m d\eta \quad (4.2)$$

O sistema de coordenadas  $\xi, \eta$  possui origem localizada sobre o centro de gravidade da seção de concreto e pode ser definido em função de uma variável independente,  $w$ , que varia entre 0 a  $\Delta\eta$ , cuja representação geométrica pode ser observada na Figura 4.2. A definição matemática desta relação é disposta pelas equações 4.3 e 4.4.

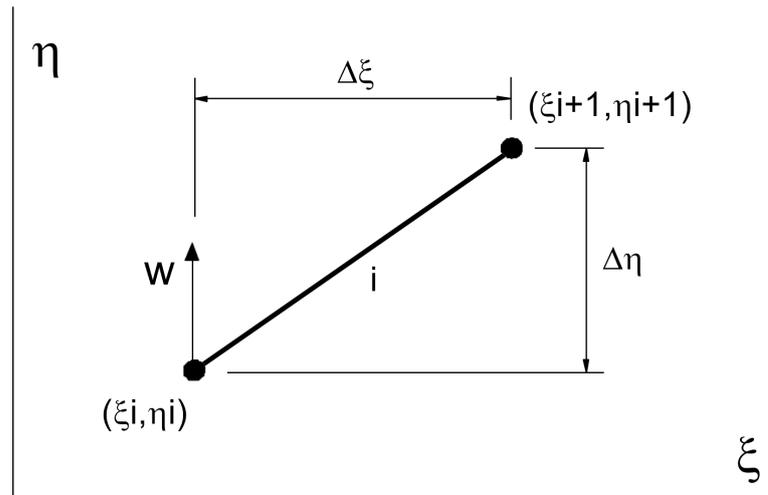


Figura 4.2 – Definição do sistema  $\xi, \eta$   
Fonte: adaptado de Campos Filho (2014).

$$\eta = \eta_i + w \quad (4.3)$$

$$\xi = \xi_i + \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} w \quad (4.4)$$

Logo, ao realizar as devidas substituições, resulta-se a expressão da Equação 4.5, que dá origem aos seguintes polinômios de interesse (Equações 4.6 a 4.14).

$$G_{km} = \frac{1}{k+1} \int_0^{\Delta\eta} \left[ \xi_i + \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} w \right]^{k+1} [\eta_i + w]^m dw \quad (4.5)$$

$$G_{00} = \left( \xi_i + \frac{\Delta\xi}{2} \right) \Delta\eta \quad (4.6)$$

$$G_{01} = \left[ \xi_i \left( \eta_i + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \Delta\xi \left( \frac{\eta_i}{2} + \frac{\Delta\eta}{3} \right) \right] \Delta\eta \quad (4.7)$$

$$G_{02} = \left\{ \xi_i \left[ \eta_i (\Delta\eta + \eta_i) + \frac{\Delta\eta^2}{3} \right] + \Delta\xi \left[ \eta_i \left( \frac{\eta_i}{2} + \frac{2\Delta\eta}{3} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{4} \right] \right\} \Delta\eta \quad (4.8)$$

$$G_{03} = \left\{ \xi_i \left[ \eta_i \left( \Delta\eta^2 + \eta_i \left( \frac{3\Delta\eta}{2} + \eta_i \right) \right) + \frac{\Delta\eta^3}{4} \right] + \Delta\xi \left[ \eta_i \left( \frac{3\Delta\eta^2}{4} + \eta_i \left( \Delta\eta + \frac{\eta_i}{2} \right) \right) + \frac{\Delta\eta^3}{5} \right] \right\} \Delta\eta \quad (4.9)$$

$$G_{04} = \left\{ \xi_i \left[ \eta_i \left( \eta_i^3 + 2\eta_i^2\Delta\eta + 2\eta_i\Delta\eta^2 + \Delta\eta^3 \right) + \frac{\Delta\eta^4}{5} \right] + \Delta\xi \left[ \eta_i \left( \frac{\eta_i^3}{2} + \frac{4}{3}\eta_i^2\Delta\eta + \frac{6}{4}\eta_i\Delta\eta^2 + \frac{4}{5}\Delta\eta^3 \right) + \frac{\Delta\eta^4}{6} \right] \right\} \Delta\eta \quad (4.10)$$

$$G_{05} = \left\{ \xi_i \left[ \eta_i^5 + \eta_i\Delta\eta^4 + \frac{5}{2}\eta_i^2\Delta\eta^3 + \frac{10}{3}\eta_i^3\Delta\eta^2 + \frac{5}{2}\eta_i^4\Delta\eta + \frac{\Delta\eta^5}{6} \right] + \Delta\xi \left[ \frac{\eta_i^5}{2} + \frac{5}{6}\eta_i\Delta\eta^4 + 2\eta_i\Delta\eta^3 + \frac{5}{2}\eta_i^3\Delta\eta^2 + \frac{5}{3}\eta_i^4\Delta\eta + \frac{\Delta\eta^5}{7} \right] \right\} \Delta\eta \quad (4.11)$$

$$G_{10} = \left[ \xi_i(\xi_i + \Delta\xi) + \frac{\Delta\xi^2}{3} \right] \frac{\Delta\eta}{2} \quad (4.12)$$

$$G_{11} = \left\{ \xi_i \left[ \xi_i \left( \eta_i + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \Delta\xi \left( \eta_i + \frac{2\Delta\eta}{3} \right) \right] + \Delta\xi^2 \left[ \frac{\eta_i}{3} + \frac{\Delta\eta}{4} \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{2} \quad (4.13)$$

$$G_{20} = \left\{ \frac{\Delta\xi^3}{4} + \xi_i \left[ \Delta\xi^2 + \xi_i \left( \frac{3\Delta\xi}{2} + \xi_i \right) \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{3} \quad (4.14)$$

Portanto, definem-se as propriedades geométricas da seção em relação ao sistema global  $X, Y$ , como somatórios dos  $n$  segmentos de reta da região poligonal, como segue.

a) Área da seção transversal (Equação 4.15).

$$A = \int_A dA = \sum_{i=1}^n G_{00} \quad (4.15)$$

b) Momentos estáticos em relação aos eixo  $X$  e  $Y$  (Equações 4.16 e 4.17).

$$S_X = \int_A Y dA = \sum_{i=1}^n G_{01} \quad (4.16)$$

$$S_Y = \int_A X dA = \sum_{i=1}^n G_{10} \quad (4.17)$$

c) Momentos de inércia em relação aos eixos globais  $X$  e  $Y$  (Equações 4.18 e 4.19).

$$I_X = \int_A Y^2 dA = \sum_{i=1}^n G_{02} \quad (4.18)$$

$$I_Y = \int_A X^2 dA = \sum_{i=1}^n G_{20} \quad (4.19)$$

d) Produto de inércia dos eixos  $X$  e  $Y$  (Equação 4.20).

$$I_{XY} = \int_A XY dA = \sum_{i=1}^n G_{11} \quad (4.20)$$

- e) Coordenadas  $X_g$  e  $Y_g$  do centroide da seção em relação ao sistema global (Equações 4.21 e 4.22).

$$X_g = S_y/A \quad (4.21)$$

$$Y_g = S_x/A \quad (4.22)$$

Por fim, efetua-se a translação de eixos das propriedades definidas acima ao sistema local  $x, y$ , definido por:  $x = X - X_g$  e  $y = Y - Y_g$ .

- a) Momentos de inércia em relação aos eixos locais  $x$  e  $y$  (Equações 4.23 e 4.24).

$$I_x = I_X - A \cdot Y_g^2 \quad (4.23)$$

$$I_y = I_Y - A \cdot X_g^2 \quad (4.24)$$

- b) Produto de inércia dos eixos locais  $x$  e  $y$  (Equação 4.25).

$$I_{xy} = I_{XY} - A \cdot X_g \cdot Y_g \quad (4.25)$$

#### 4.1.2 Desenvolvimento do algoritmo

Uma vez estabelecidos os dados iniciais à solução do problema, como as propriedades físicas dos materiais, parâmetros geométricos, área de aço e esforços solicitantes, prossegue-se às etapas consequentes, que devem solucionar o problema de equilíbrio da peça.

Em um processo de verificação de elementos sob flexo-compressão simples, faz-se: (1) uma estimativa inicial do fator de proporcionalidade  $\lambda$ , proveniente da relação entre os esforços atuantes e resistentes na seção, e da altura da linha neutra, denotada pela letra  $X$  (medida a partir da máxima ordenada entre os vértices da seção). Em seguida, (2) as rotinas de cálculo devem determinar o estado de deformação da seção a partir das definições do Código Modelo *fib* 2010 e, como consequência, os respectivos esforços resistentes, dados através das relações constitutivas dos materiais e da integração das tensões. Então, (3) o algoritmo deve avaliar a condição de convergência para as equações de desequilíbrio (4.26), de modo que: observada não convergência, retorna-se novamente à determinação das variáveis  $\lambda$  e  $X$  (etapa 1); ou encerra-se a verificação, com os valores finais de  $\lambda$ ,  $X$ , e os correspondentes esforços resistentes, então conhecidos.

$$\begin{cases} f(x, \lambda) = \Delta M_x = \lambda \cdot M_{Rxd} - M_{Axd} \\ g(x, \lambda) = \Delta N = \lambda \cdot N_{Rd} - N_{Ad} \end{cases} \quad (4.26)$$

De acordo com os pontos elencados na seção 2.5, o Código Modelo *fib* 2010 apresenta um conjunto de modelos mecânicos que buscam representar de maneira realista o comportamento

do concreto, tanto no estado de compressão uniaxial, quanto à tração. Desta forma, entende-se que a construção de um código para análise computacional de seções transversais a partir das diretrizes do Código Modelo deve apresentar pontos estruturais ligeiramente particulares, que o diferencia de modelos baseados em normativas de projeto. Elencam-se os seguintes aspectos:

- a) A estrutura do programa deve ser elaborada visando a verificação de seções a partir de valores de resistência médios, sem aplicação de coeficientes de segurança;
- b) O diagrama tensão-deformação do concreto à compressão deve contemplar uma única curva, caracterizada por dois trechos (ascendente e descendente) e máxima tensão  $f_{cm}$  em  $\varepsilon_{c1}$ ;
- c) Além da consideração dos esforços de compressão, deve-se incluir os trechos de integração das tensões nas regiões sob tração, tanto em níveis inferiores à capacidade resistente do concreto, quanto no caso do concreto já fissurado;
- d) O diagrama tensão-deformação das armaduras deve permitir a análise de aços que apresentem ou não endurecimento após a tensão de escoamento, como forma de englobar ambos modelos existentes.

Então, dispõe-se o fluxograma representativo das etapas e sub-rotinas de cálculo da Figura 4.3, conforme as diretrizes anteriormente estabelecidas.

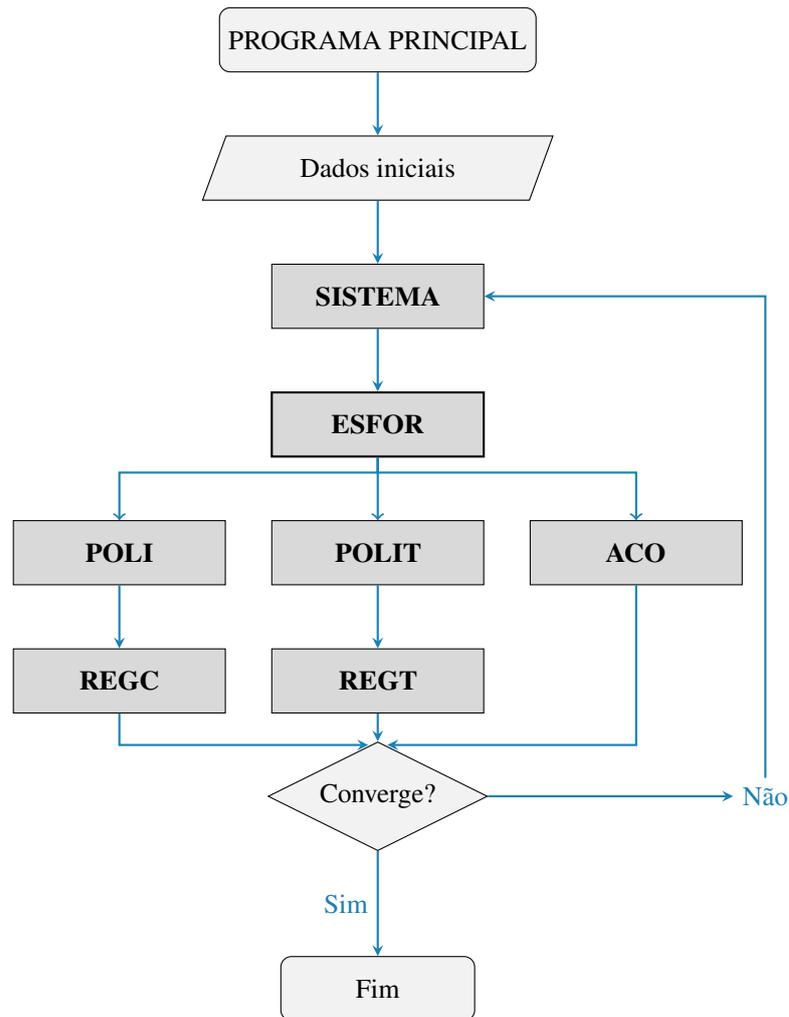


Figura 4.3 – Fluxograma de etapas para verificação de seções segundo o Código Modelo *fib* 2010

Fonte: do autor

São especificadas, portanto, as tarefas relacionadas a cada uma das sub-rotinas elencadas na Figura 4.3.

#### 4.1.2.1 Sub-rotina SISTEMA

Sub-rotina principal de otimização, que visa minimizar as equações apresentadas em (4.26). Em linguagem *Python*, pode-se utilizar a função `fsolve`, proveniente do pacote *SciPy* em seu módulo `Optimize`, voltado à otimização e ajuste de sistemas lineares e não lineares.

#### 4.1.2.2 Sub-rotina ESFOR

É a função responsável pela determinação das deformações específicas ao longo da seção transversal (delimitadas pelos domínios de deformação), bem como a determinação dos esforços resistentes da mesma, seja para o concreto comprimido (sub-rotinas *POLI* e *REGC*), tracionado

(sub-rotinas POLIT e REGT) ou armaduras longitudinais (sub-rotina ACO).

Inicialmente, presume-se o cálculo das deformações específicas, conforme explicitado no Capítulo 2, admitindo-se a coincidência entre o sistema genérico ( $\xi, \eta$ ) e o sistema local ( $x, y$ ) para uma distribuição linear das deformações compreendidas entre  $\epsilon_S$  e  $\epsilon_I$  (deformações das fibras extremas superior e inferior da seção) (Figura 4.4).

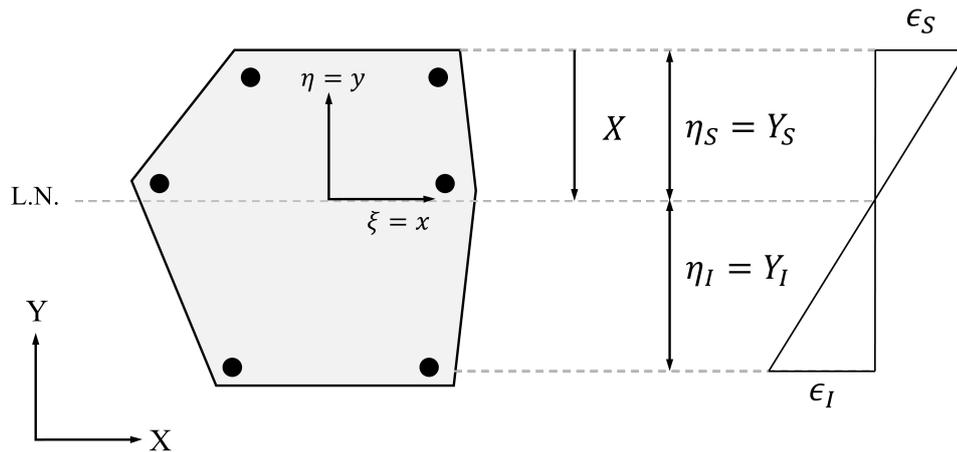


Figura 4.4 – Deformação e altura da linha neutra da seção  
Fonte: adaptado de Campos Filho (2014).

Prossegue-se então para a definição dos limites aos domínios de deformação. Para isso, ressaltam-se os seguintes pontos, conforme apresentado previamente: a deformação específica de alongamento máximo das armaduras segundo o Código Modelo corresponde ao valor de 50‰; as deformações  $\epsilon_{c1}$  e  $\epsilon_{c,lim}$ , referentes ao ponto de máxima tensão e à deformação limite do concreto, respectivamente, são calculadas segundo os valores da Tabela 2.6. Assim, aplicam-se as relações apresentadas na Tabela 4.1, que indicam os valores limites das deformações  $\epsilon_S$  e  $\epsilon_I$  em função dos domínios de deformação observados, através da estimativa inicial para a profundidade da linha neutra  $X$ .

Tabela 4.1 – Relações entre profundidade  $X$  da linha neutra e deformações  $\varepsilon_S$  e  $\varepsilon_I$

Domínios	$X$	$\varepsilon_S$	$\varepsilon_I$
1 e 2	$-\infty < X \leq \frac{\varepsilon_{c,lim}}{50\text{‰} + \varepsilon_{c,lim}} \cdot d$	$-50\text{‰} \frac{X}{d-X}$	$50\text{‰}$
3 e 4	$\frac{\varepsilon_{c,lim}}{50\text{‰} + \varepsilon_{c,lim}} \cdot d \leq X \leq d$	$\varepsilon_{c,lim}$	$-\varepsilon_{c,lim} \frac{d-X}{X}$
4a	$d \leq X \leq h$	$-\varepsilon_{c,lim}$	$0$
5	$h \leq X < +\infty$	$-\varepsilon_{c1} \frac{X}{X - \frac{\varepsilon_{c,lim} - \varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c,lim}} \cdot h}$	$-\varepsilon_{c1} \frac{X-h}{X - \frac{\varepsilon_{c,lim} - \varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c,lim}} \cdot h}$

Fonte: do autor

Neste caso,  $h$  e  $d$  referem-se à altura total e altura útil da seção de concreto, respectivamente. Sendo considerado o sistema local de coordenadas, a deformação  $\varepsilon(y)$  em um ponto qualquer da seção será dada por:

$$\varepsilon(y) = b \cdot y + c \quad (4.27)$$

Onde:

$$b = \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_I}{y_S - y_I} \quad (4.28)$$

$$c = \varepsilon_S - b \cdot y_S \quad (4.29)$$

$y_S$  e  $y_I$  são as ordenadas das fibras extremas da seção, coincidentes com o ponto mais comprimido e a primeira camada de armadura na zona de tração, nesta ordem.

Os passos subsequentes tratam da determinação do momentos fletores e forças normais resistentes da seção. Estes esforços, assim como os esforços solicitantes fornecidos, devem estar de acordo com uma convenção de sinais estabelecida, sendo positivos para: esforços normais do tipo tração e momentos de flexão tomados na direção e sentido do eixo local  $x$ . Isto posto, a obtenção dos esforços resistentes ocorrerá sob a contribuição das parcelas relacionadas à integração das regiões de concreto comprimido (REGC), concreto tracionado (REGT) e das armaduras (ACO), conforme mostrado a seguir:

$$M_{Rxd} = M_{Rx,C} + M_{Rx,T} + M_{Rx,As} \quad (4.30)$$

$$N_{Rd} = N_{R,C} + N_{R,T} + N_{R,As} \quad (4.31)$$

De tal sorte que:  $M_{R_x,C}$  e  $N_{R,C}$  são os esforços da regiões de compressão;  $M_{R_x,T}$  e  $N_{R,T}$  são os momentos e forças normais de tração, subdivididos em quatro regiões (equações 4.32 e 4.33), a serem explicitadas detalhadamente na sequência; e  $M_{R_x,As}$  e  $N_{R,As}$  os respectivos esforços oriundos das barras de aço comprimidas ou tracionadas.

$$M_{R_x,T} = M_{R_{xt},1} + M_{R_{xt},2} + M_{R_{xt},3} + M_{R_{xt},4} \quad (4.32)$$

$$N_{R,T} = N_{R_{t1}} + N_{R_{t2}} + N_{R_{t3}} + N_{R_{t4}} \quad (4.33)$$

#### 4.1.2.3 Sub-rotinas POLI e POLIT

Estas funções possuem o ofício de obter as coordenadas das poligonais fechadas da seção de concreto, compreendidas pelos trechos de região comprimida (POLI) e tracionada (POLIT) dos diagramas tensão-deformação segundo o Código Modelo, onde se darão os processos de integração de tensões (representação esquemática na Figura 4.5).

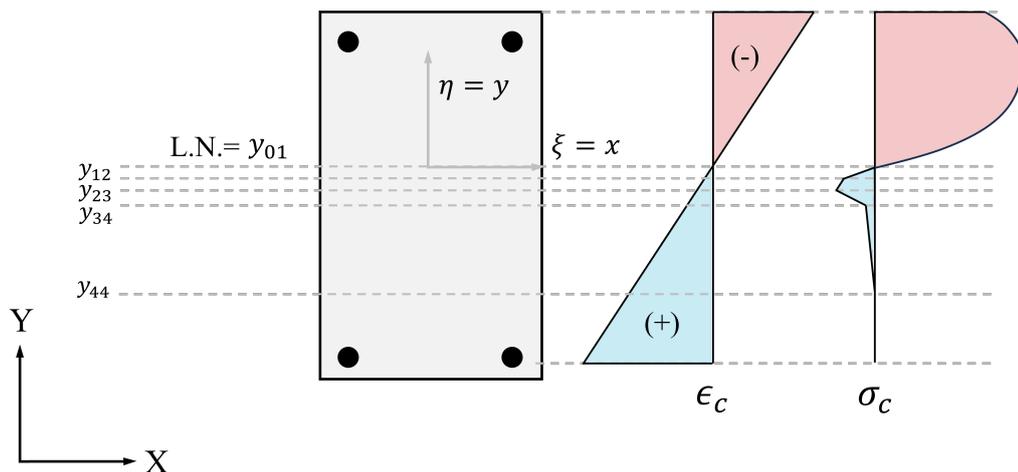


Figura 4.5 – Regiões para integração do concreto

Fonte: do autor

Logo, a região de compressão estará compreendida entre a fibra mais comprimida e a posição da linha neutra (equivalente a  $y_{01}$ ). Especificamente ao caso da tração, são delimitadas quatro regiões, originadas nos dois diagramas da Figura 2.11, que tratam das tensões quando inferiores ao limite de fissuração do concreto e superiores a este.

Como pode ser observado, o diagrama apresentado pelo Código Modelo faz uma relação direta entre as tensões no concreto e o parâmetro abertura de fissuras. Em vista dos objetivos aqui elencados, torna-se necessária a transformação do respectivo diagrama ao modelo tensão-deformação específica, assim como as demais regiões de integração. Para isso, consideram-se as disposições apresentadas na Figura 2.12 e na Equação 2.38, que indicam uma região de descontinuidade ao redor da fissura estabilizada de extensão  $2 \cdot l_{s,max}$ . Logo, subentende-se que a

deformação específica causada pelo processo de fissuração consiste de  $w/(2 \cdot l_{s,max})$ , de tal sorte que o diagrama da figura em questão pode ser redefinido como disposto na Figura 4.6.

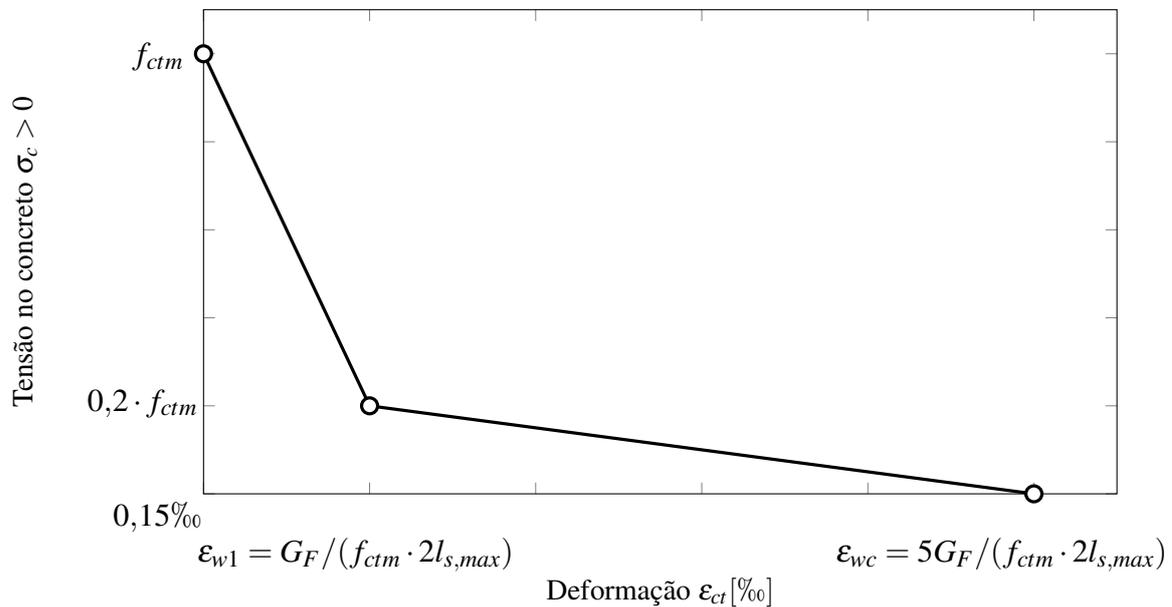


Figura 4.6 – Diagrama tensão-deformação de abertura de fissuras segundo o Código Modelo *fib* 2010

Fonte: do autor

Portanto, as ordenadas que caracterizam os pontos de fronteira entre as diferentes regiões de tração sob integração podem ser definidas pelas equações 4.34 a 4.38.

$$y_{01} = -\frac{c}{b} \quad (4.34)$$

$$y_{12} = \frac{\epsilon_{ct0} - c}{b} \quad (4.35)$$

$$y_{23} = \frac{0,15\% - c}{b} \quad (4.36)$$

$$y_{34} = \frac{\epsilon_{w1} - c}{b} \quad (4.37)$$

$$y_{44} = \frac{\epsilon_{wc} - c}{b} \quad (4.38)$$

Onde  $\epsilon_{ct0}$  consiste da deformação específica do trecho não fissurado em tensão  $0,9 \cdot f_{ctm}$ , dado pela expressão  $\epsilon_{ct0} = 0,9 \cdot f_{ctm} / E_{ci}$ .

#### 4.1.2.4 Sub-rotina REGC

Nesta etapa, objetiva-se efetuar a integração das tensões segundo o diagrama não-linear apresentado pela *fib* na Equação 2.29.

O primeiro passo consiste do cálculo das variáveis  $k$ ,  $\varepsilon_{c1}$  e  $\varepsilon_{c,lim}$ , visando a implementação computacional. O Boletim 42 da *fib* “Constitutive modelling for high strength/high performance concrete” (FIB, 2008) faz a determinação das seguintes equações.

$$\varepsilon_{c1} = -1,60\% \cdot \left( \frac{f_{cm}}{10 \text{ MPa}} \right)^{0.25} \quad (4.39)$$

$$E_{c1} = \frac{f_{cm}}{\varepsilon_{c1}} \quad (4.40)$$

$$E_{ci} = 21,5 \cdot 10^3 \text{ MPa} \cdot \alpha_E \left( \frac{f_{cm}}{10 \text{ MPa}} \right)^{1/3} \quad (4.41)$$

$$k = \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \quad (4.42)$$

Tratando-se da deformação última  $\varepsilon_{c,lim}$ , verifica-se uma variação linear com o aumento do  $f_{ck}$ , de modo que se observam dois comportamentos distintos nas faixas de resistências correspondentes aos Grupos I e II, como segue.

$$\begin{cases} \varepsilon_{c,lim} = -3,5\% & \text{para } f_{ck} < 50 \text{ MPa} \\ \varepsilon_{c,lim} = \frac{f_{ck}}{100} - 3,9\% & \text{para } 50 \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4.43)$$

Logo, em vias de se promover maior simplicidade ao processo e tornar o equacionamento uma função das variáveis de interesse, propõe-se a aproximação da equação original por uma equação polinomial do quarto grau com a forma da Equação 4.44, cujo conjunto de coeficientes  $a_i = (a_0 = 0, a_1, a_2, a_3, a_4)$  sofrerá influência direta do  $f_{ck}$  e das variáveis previamente ajustadas.

$$\sigma_c(\varepsilon) = f_{cm}(a_4\varepsilon^4 + a_3\varepsilon^3 + a_2\varepsilon^2 + a_1\varepsilon) \quad (4.44)$$

Desta forma, permite-se reescrever a Equação 4.44, a partir da substituição dos termos de deformação específica pela relação  $\varepsilon = b \cdot y + c$ . O resultado deste processo são os polinômios apresentados em sequência, organizados conforme a Equação 4.45.

$$\sigma_c(y) = f_{cm}(D0 + D1 \cdot y + D2 \cdot y^2 + D3 \cdot y^3 + D4 \cdot y^4) \quad (4.45)$$

Os coeficientes  $D0$ ,  $D1$ ,  $D2$ ,  $D3$  e  $D4$  representam, resumidamente, o conjunto de polinômios disposto abaixo, dados em função dos termos  $b$ ,  $c$  e dos coeficientes de ajuste  $a_i$ .

$$D0 = a_1c + a_2c^2 + a_3c^3 + a_4c^4 \quad (4.46)$$

$$D1 = a_1b + 2a_2bc + 3a_3bc^2 + 4a_4bc^3 \quad (4.47)$$

$$D2 = a_2b^2 + 3a_3b^2c + 6a_4b^2c^2 \quad (4.48)$$

$$D3 = a_3b^3 + 4a_4b^3c \quad (4.49)$$

$$D4 = a_4b^4 \quad (4.50)$$

A partir de então, a sub-rotina possui os requisitos necessários à integração da região correspondente. A formulação básica para integração de momentos e força normal é apresentada a seguir.

$$M_{Rx,C} = \int_{Ac} \sigma_c(\varepsilon)y dA \quad (4.51)$$

$$N_{R,C} = \int_{Ac} \sigma_c(\varepsilon)dA \quad (4.52)$$

Ao substituir os termos de  $\sigma_c$  pelas expansões polinomiais dispostas anteriormente, juntamente à aplicação do teorema de Green (conforme apresentado na Seção 4.1.1), têm-se o conjunto de expressões para os esforços resistentes da região de concreto comprimido.

$$M_{Rx} = f_{cm} \sum_{i=1}^n (D0 \cdot G01 + D1 \cdot G02 + D2 \cdot G03 + D3 \cdot G04 + D4 \cdot G05) \quad (4.53)$$

$$N_R = f_{cm} \sum_{i=1}^n (D0 \cdot G00 + D1 \cdot G01 + D2 \cdot G02 + D3 \cdot G03 + D4 \cdot G04) \quad (4.54)$$

A seguir, são mostrados os resultados do processo de ajuste para concretos em diferentes faixas de resistência característica (Figura 4.7). Verifica-se, portanto, a perfeita convergência entre as curvas geradas por ambos os modelos (equação do código modelo e ajuste polinomial de quarto grau, com coeficiente de determinação calculado  $R^2 \approx 1,0$ ), de modo que o processo de integração da equação ajustada garante resultados suficientemente compatíveis à formulação original do Código Modelo.

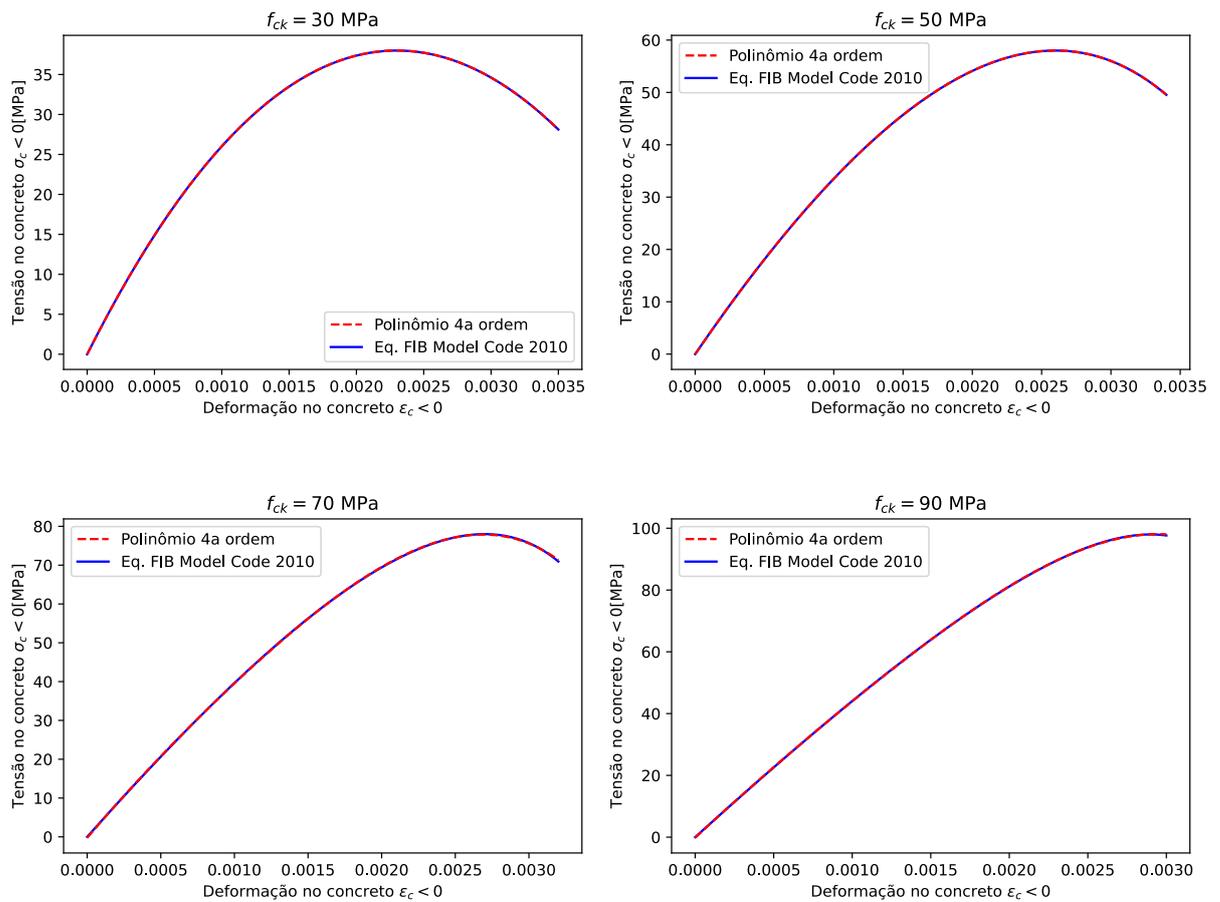


Figura 4.7 – Ajuste das curvas tensão-deformação para diferentes faixas de  $f_{ck}$

Fonte: do autor

#### 4.1.2.5 Sub-rotina REGT

A integração das quatro regiões de tração da seção de concreto consiste em uma tarefa bastante simples, uma vez que as curvas correspondem à retas de inclinações constantes. A formulação dos esforços é apresentada abaixo.

$$M_{Rxt,i} = D0_i \cdot G01 + D1_i \cdot G02 \quad (4.55)$$

$$N_{Rt,i} = D0_i \cdot G00 + D1_i \cdot G01 \quad (4.56)$$

Sendo:

$$D0 = k_1 \cdot c + k_0 \quad (4.57)$$

$$D1 = k_1 \cdot b \quad (4.58)$$

Os coeficientes  $k_1$  e  $k_0$  para os trechos em questão são obtidos a partir dos equacionamentos introduzidos na subseção 2.5.2.

Trecho 1:

$$k_1 = E_{ci} = E_{c0} \cdot \alpha_E \left( \frac{f_{ctm}}{10} \right)^{1/3} \quad (4.59)$$

$$k_0 = 0 \quad (4.60)$$

Trecho 2:

$$k_1 = \frac{0,1 f_{ctm} \varepsilon_{ct}}{0,15\%_0 - 0,9 f_{ctm} / E_{ci}} \quad (4.61)$$

$$k_0 = f_{ctm} \left( 0,9 - \frac{0,1 \cdot 0,9 f_{ctm} / E_{ci}}{0,15\%_0 - 0,9 f_{ctm} / E_{ci}} \right) \quad (4.62)$$

Trecho 3:

$$k_1 = \frac{0,8 f_{ctm}}{0,15\%_0 - \frac{G_F}{f_{ctm} \cdot 2 \cdot l_{s,max}}} \quad (4.63)$$

$$k_0 = f_{ctm} - 0,15\%_0 \cdot k_1 \quad (4.64)$$

Trecho 4:

$$k_1 = - \frac{0,2 f_{ctm}}{4 \frac{G_F}{f_{ctm} \cdot 2 \cdot l_{s,max}}} \quad (4.65)$$

$$k_0 = - \frac{5 \cdot k_1 \cdot G_F}{f_{ctm} \cdot 2 \cdot l_{s,max}} \quad (4.66)$$

#### 4.1.2.6 Sub-rotina ACO

A sub-rotina ACO é a responsável pela determinação dos esforços  $M_{R_x,As}$  e  $N_{R,As}$ , oriundos da integração das tensões nas armaduras. Por se tratarem de integrações discretas, são propostos os somatórios dispostos nas equações 4.67 e 4.68.

$$M_{R_x,As} = \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot \sigma_s(\varepsilon_j) \cdot y_j \quad (4.67)$$

$$N_{R,As} = \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot \sigma_s(\varepsilon_j) \quad (4.68)$$

As tensões  $\sigma_s$  são obtidas conforme o diagrama tensão-deformação do aço utilizado. Inicialmente, o Código Modelo recomenda a utilização da formulação de Menegotto-Pinto, apresentada na

Equação 2.39, que permite a consideração de aços com endurecimento e sem patamar de escoamento definido. Neste caso, têm-se para o ponto "0" os valores de  $\sigma_0 = f_{yk}$  e  $\epsilon_0 = f_{yd}/E_s$ . Tratando-se do trecho pós escoamento, definiu-se para o módulo de endurecimento por deformação do aço ( $E_{sh}$ ) um valor equivalente a 2,5% do módulo elástico, portanto,  $E_{sh} = 500$  kN/cm<sup>2</sup>. Logo,  $b$  será equivalente à razão  $E_s/E_{sh}$ . A constante de curvatura foi estabelecida  $n = 15$ , valor limite para o início de um comportamento bilinear.

Paralelamente, implementou-se também o modelo de comportamento elastoplástico perfeito, visando a consideração de aços com patamar de escoamento definido e sem endurecimento considerável. Este é o comportamento idealizado por grande parte dos códigos normativos, incluindo a NBR 6118. O gráfico da Figura 4.8 apresenta as distribuições citadas para valores de deformação até o limite  $\epsilon_{tk} = 50\%$ .

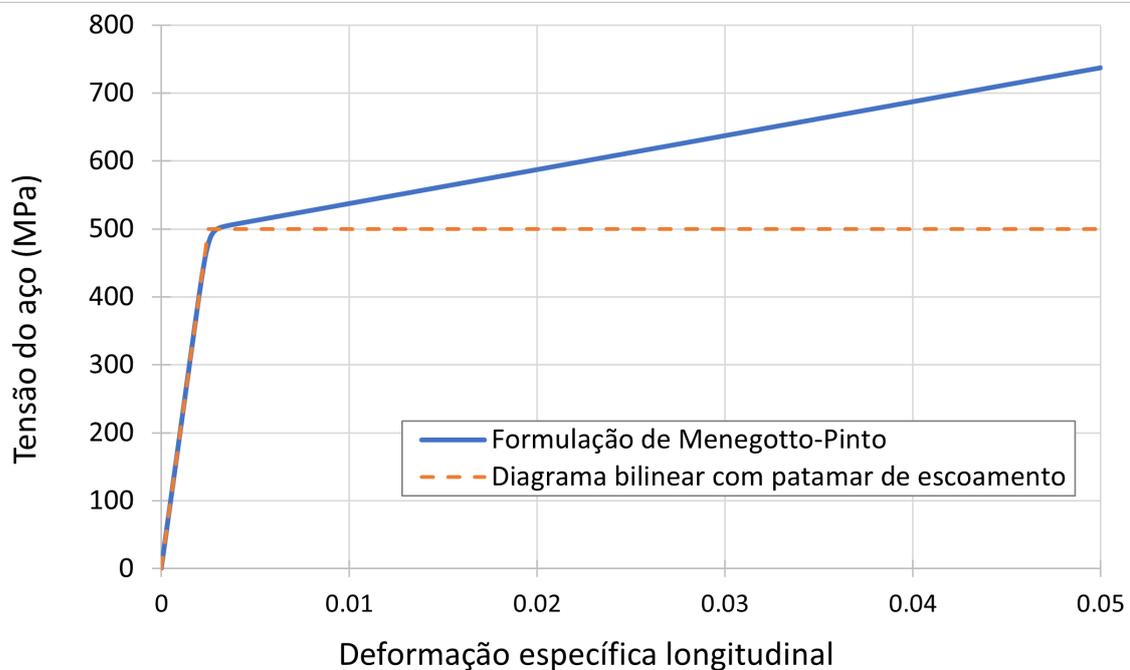


Figura 4.8 – Diagramas tensão-deformação utilizados pela sub-rotina ACO

Fonte: do autor

No caso de tensões de compressão no aço ( $\sigma_s < 0$ ), utilizam-se os mesmos diagramas com sinais invertidos, com a diferença para os máximos valores de deformação, que passam a ser os limites do próprio concreto  $\epsilon_{c,lim}$ .

## 4.2 DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES RETANGULARES SUBMETIDAS À FLEXÃO SIMPLES

Além das rotinas apresentadas de verificação da capacidade resistente de seções de concreto armado, as análises propostas neste trabalho demandam a elaboração de rotinas para o dimensionamento dessas seções, como forma de estabelecer as condições iniciais das análises de confiabilidade dos capítulos subsequentes. Os programas em questão devem contemplar a possibilidade de dimensionar seções à flexão simples seguindo as recomendações da NBR 6118, nas versões de 2014 e 2023 (disponível no Apêndice B), assim como do Eurocode 2:2004 e FprEN 1992-1-1:2022 (Apêndice C).

Deste modo, são tomadas como referência as disposições para dimensionamento de armaduras longitudinais de vigas segundo Araújo (2014), cujas etapas são elencadas a seguir.

1. Dados de entrada: devem ser fornecidas as informações de dimensões da seção transversal (como  $b$ ,  $h$ , altura útil  $d$  e  $d'$ ), dados de propriedade dos materiais ( $f_{ck}$ ,  $f_{yk}$ ,  $E_s$ ) e coeficientes de minoração das resistências ( $\gamma_c$ ,  $\gamma_s$ ). Ainda, deve-se informar o tipo de entrada (*input type*) para o esforço solicitante, que pode ser tanto o momento fletor de projeto ( $M_d$ ), proveniente das combinações de ações, como o momento fletor adimensionalizado ( $\mu$ ), de interesse às análises. Indica-se, também, a versão da norma utilizada.
2. Em posse das informações iniciais, permite-se calcular alguns parâmetros de fundamental importância ao procedimento de cálculo:  $f_{cd}$ ,  $f_{yd}$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha_c$  e  $\epsilon_{cu}$ , os valores limites da razão  $x/d$  (aqui representados por  $\xi_{lim}$ ), o coeficiente de fragilidade  $\eta_c$  e, finalmente, a tensão de compressão do concreto em projeto  $\sigma_{cd}$ .
3. Sob posse das informações citadas, calculam-se  $\mu$  e  $\mu_{lim}$ , que modo que se permita avaliar a necessidade (ou não) de armadura dupla na seção.
4. Cálculo das áreas de aço inferiores ( $A_s$ ) e superiores ( $A'_s$ ), se necessária.
5. Dadas as devidas recomendações normativas, garantir que a área de aço calculada atenda aos requisitos de armadura mínima, que permite à seção resistir ao momento de fissuração do concreto.
6. Retorno da rotina com as áreas de armadura dimensionadas.

A partir dos processos acima descritos, permite-se construir o fluxograma de etapas do algoritmo de dimensionamento de seções transversais à flexão simples, conforme a Figura 4.9.

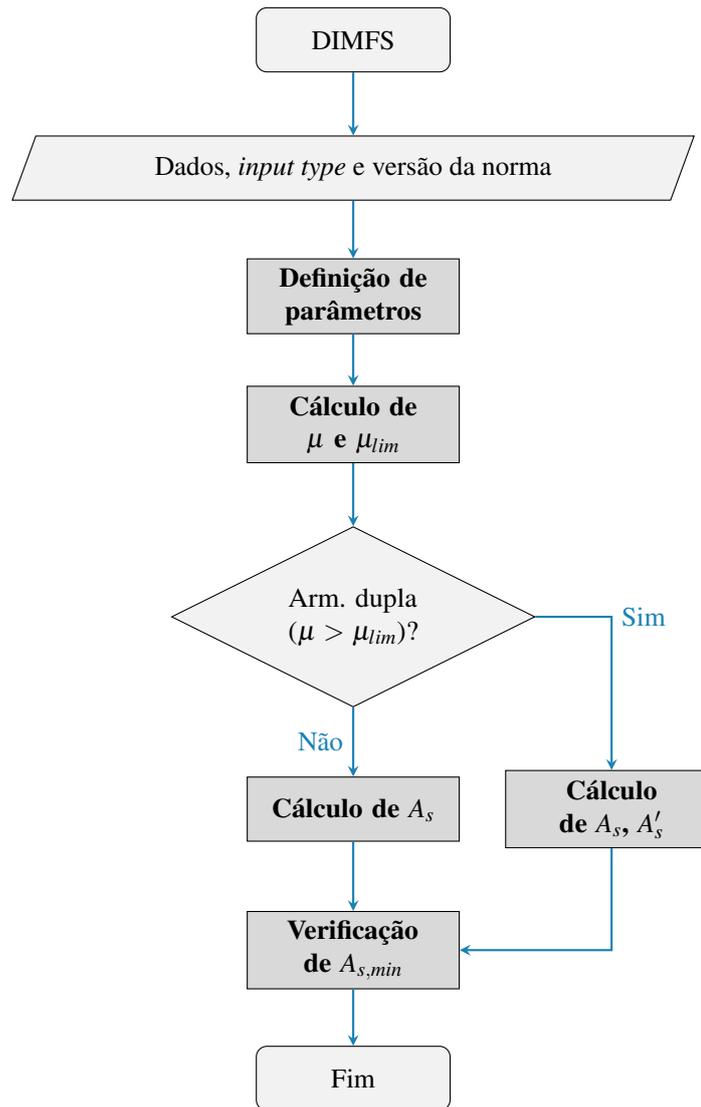


Figura 4.9 – Fluxograma de etapas para dimensionamento de seções à flexão simples no ELU

Fonte: do autor

As sessões seguintes descrevem algumas das particularidades que envolvem as adequações do algoritmo às normas de interesse e suas respectivas versões.

#### 4.2.1 Rotina para a Norma Brasileira

O desenvolvimento do algoritmo proposto teve como objetivo unificar os processos de dimensionamento, de forma que fosse possível atender ambas versões da normativa a partir da mesma rotina de cálculo, com o menor número possível de passos. Como visto, uma vez obtidos os dados de entrada, necessita-se determinar alguns dos parâmetros iniciais ao processo de dimensionamento, introduzidos no Capítulo 2, como por exemplo: resistências de projeto, coeficientes  $\lambda$  e  $\alpha_c$ ,  $\xi_{lim}$ , deformação última do concreto ( $\epsilon_{cu}$ ), taxa mínima de armadura ( $\rho_{min}$ ) e coeficiente de fragilidade ( $\eta_c$ ). A Tabela 4.2 apresenta resumidamente os equacionamentos e valores dos

respectivos parâmetros, conforme a revisão bibliográfica e normativa.

Tabela 4.2 – Parâmetros de dimensionamento - NBR 6118

Parâmetros iniciais	$f_{ck} \leq 50$ MPa	$f_{ck} > 50$ MPa
$f_{cd}$		$f_{ck}/\gamma_c$
$f_{yd}$		$f_{yk}/\gamma_s$
$\lambda$	0,8	$0,8 - (f_{ck} - 50 \text{ MPa})/400$
$\alpha_c$	0,85	$0,85 (1 - (f_{ck} - 50 \text{ MPa})/200)$
$\xi_{lim}$	0,45	0,35
$\epsilon_{cu}$	3,5‰	$2,6‰ + 35‰((90 - f_{ck})/100)^4$
$f_{ctm}$	$0,3f_{ck}^{2/3}$	$2,12\ln(1 + 0,11f_{ck})$
$\rho_{min}$	$0,26f_{ctm}/f_{yd} \geq 0,15‰$	
	$f_{ck} \leq 40$ MPa	$f_{ck} > 40$ MPa
$\eta_c$	NBR 6118:2014	1,0
	NBR 6118:2023	$(40/f_{ck})^{1/3}$

Com isso, permite-se calcular a tensão de compressão do concreto (Equação 4.69) em projeto, com base no diagrama retangular equivalente que apresenta a normativa brasileira.

$$\sigma_{cd} = \alpha_c \eta_c f_{cd} \quad (4.69)$$

Neste ponto, definidos os parâmetros iniciais, são admitidas duas abordagens distintas. A primeira refere-se ao caso onde a entrada de dados fornece diretamente o momento fletor de cálculo ( $M_d$ ) como esforço solicitante. Para tal, faz-se diretamente o cálculo do momento adimensionalizado da seção, segundo a Equação 4.71. A segunda possibilidade consiste da entrada do esforço solicitante já na forma de um momento adimensionalizado inicial ( $\mu_0$ ), que, apesar de incomum em situações práticas de projeto, será de extrema relevância ao conjunto de análises comparativas do presente estudo. Nos capítulos posteriores,  $\mu_0$  estará sempre relacionado ao momento reduzido segundo a versão da NBR 6118:2014, tida como "referência comparativa", de tal sorte que se mostrará necessário determinar o momento de cálculo a partir deste (Equação 4.70) e, somente

então, calcular o momento reduzido real da seção.

$$M_d = \mu_0 b d^2 \frac{\sigma_{cd}}{\eta_c} \quad (4.70)$$

$$\mu = \frac{M_d}{b d^2 \sigma_{cd}} \quad (4.71)$$

O momento fletor adimensionalizado poderá, então, ser confrontado com o momento limite de dimensionamento,  $\mu_{lim}$ , para atendimento dos critérios de ductilidade, determinado segundo a Equação 4.72.

$$\mu_{lim} = \lambda \xi_{lim} (1 - 0.5 \lambda \xi_{lim}) \quad (4.72)$$

Sendo  $\mu \leq \mu_{lim}$ , não há necessidade de armadura dupla, de modo que a posição relativa da linha neutra,  $\xi$ , e a área de aço serão calculadas pelas equações 4.73 e 4.74.

$$\xi = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\mu}}{\lambda} \quad (4.73)$$

$$A_s = \lambda \xi b d \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}} \quad (4.74)$$

Do contrário, quando  $\mu > \mu_{lim}$ , têm-se a configuração de armadura dupla. Neste caso, o problema não apresenta uma solução única, uma vez que o número de incógnitas supera o número de equações. A solução, por sua vez, é dada através da fixação da profundidade da linha neutra em  $x = x_{lim}$  (ARAÚJO, 2014). Logo, ao avaliar o diagrama de deformações e de esforços da seção, permite-se definir a deformação na armadura de compressão e a respectiva tensão na armadura de seções sem redistribuição, tal qual apresentado nas equações 4.75 e 4.76.

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \frac{(\xi_{lim} - d'/d)}{\xi_{lim}} \quad (4.75)$$

$$\sigma'_{sd} = E_s \varepsilon'_s \leq f_{yd} \quad (4.76)$$

Por equilíbrio de momentos e forças na seção transversal, define-se as áreas de aço das porções superior ( $A'_s$ ) e inferior ( $A_s$ ), respectivamente, do elemento estrutural, conforme as equações 4.77, 4.78 e 4.79.

$$M_{d,lim} = \mu_{lim} b d^2 \sigma_{cd} \quad (4.77)$$

$$A'_s = \frac{M_d - M_{d,lim}}{(d - d') \sigma'_{sd}} \quad (4.78)$$

$$A_s = \frac{A'_s \sigma'_{sd} + \lambda \xi_{lim} b d \sigma_{cd}}{f_{yd}} \quad (4.79)$$

De qualquer forma, a área de aço da armadura tracionada deverá respeitar a armadura mínima especificada em norma, calculada segundo a relação da Equação 4.80.

$$A_s \geq A_{s,min} = \rho_{min} b h \quad (4.80)$$

#### 4.2.2 Rotina para o Eurocode 2

De maneira semelhante ao mostrado para a rotina de dimensionamento à flexão segundo a NBR 6118, o código de dimensionamento segundo o Eurocode 2 foi construído com o objetivo de contemplar tanto a versão da normativa europeia do ano de 2004, quanto as diretrizes do projeto de revisão FprEN 1992-1-1:2022. A tabela a seguir dispõe dos equacionamentos necessários à definição dos parâmetros iniciais da rotina.

Tabela 4.3 – Parâmetros de dimensionamento - Eurocode 2

Parâmetros iniciais		$f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$	$f_{ck} > 50 \text{ MPa}$
	$f_{yd}$		$f_{yk}/\gamma_s$
$\lambda$	Eurocode 2:2004	0,8	$0,8 - (f_{ck} - 50 \text{ MPa})/400$
	fprEN-1992-1-1:2022		0,8
	$k_{tc}$		1,0
$\xi_{lim}$	Eurocode 2:2004	0,45	0,35
	fprEN-1992-1-1:2022		$1 - 1/(1 + 0,7\epsilon_{cu}E_s/f_{yd})$
$\epsilon_{cu}$	Eurocode 2:2004	3,5‰	$2,6‰ + 35‰((90 - f_{ck})/100)^4$
	fprEN-1992-1-1:2022		3,5‰
$f_{ctm}$	Eurocode 2:2004	$0,3f_{ck}^{2/3}$	$2,12\ln(1 + (f_{cm}/10))$
	fprEN-1992-1-1:2022	$0,3f_{ck}^{2/3}$	$1,1f_{ck}^{1/3}$
	$\rho_{min}$	$0,26f_{ctm}/f_{yk} \geq 0,13‰$	
$\eta$	Eurocode 2:2004	1,0	$1 - (f_{ck} - 50 \text{ MPa})/200$
		$f_{ck} \leq 40 \text{ MPa}$	$f_{ck} > 40 \text{ MPa}$
$\eta_{cc}$	fprEN-1992-1-1:2022	1,0	$(40/f_{ck})^{1/3}$
$f_{cd}$	Eurocode 2:2004	$k_{tc}f_{ck}/\gamma_c$	
	fprEN-1992-1-1:2022	$k_{tc}\eta_{cc}f_{ck}/\gamma_c$	
$\sigma_{cd}$	Eurocode 2:2004	$\eta f_{cd}$	
	fprEN-1992-1-1:2022	$f_{cd}$	

Em função das avaliações comparativas objetivadas neste estudo, a implementação da solicitação somente na forma de momento fletor de cálculo será plenamente suficiente. Logo, bastará determinar o momento adimensionalizado do problema, conforme apresentado na Equação 4.71, com os devidos ajustes na determinação da tensão  $\sigma_{cd}$ , tal qual visto na Tabela 4.3.

Os passos subsequentes não sofrem alterações em função da adequação normativa, de modo que as Equações 4.72 a 4.79 permanecem válidas. Por fim, uma vez determinadas as áreas de aço, efetua-se a verificação de armadura mínima, segundo o modelo do Eurocode 2 (Equação 4.81).

$$A_s \geq A_{s,min} = \rho_{min}bd \quad (4.81)$$

## 5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO FORM

Posteriormente à construção do modelo de cálculo da capacidade resistente de seções à flexão, torna-se indispensável introduzir a definição do modelo numérico para avaliação da confiabilidade desses elementos, assim como os respectivos parâmetros de entrada requeridos por este. Com este intuito, o presente capítulo fará uma apresentação concisa do algoritmo de solução computacional do problema de confiabilidade através do método FORM (detalhado no Capítulo 3), das variáveis aleatórias assumidas neste estudo e seus respectivos modelos probabilísticos, as variáveis determinísticas e, finalmente, a função de estado limite.

### 5.1 MODELO NUMÉRICO COMPUTACIONAL

Este trabalho utilizará nas seguintes análises o modelo numérico computacional nomeado *RealPy*, desenvolvido por Real (2021), que consiste em um módulo escrito em linguagem Python, capaz de efetuar análises de confiabilidade segundo métodos como FORM e Monte Carlo. O módulo desenvolve análises a partir da classe *Reliability*, responsável por receber e classificar os dados de entrada (variáveis e função de estado limite) e acionar as sub-rotinas que implementam a transformação de Nataf e o método FORM propriamente dito.

Inicialmente, como requisito ao funcionamento da rotina, são fornecidos os dados iniciais ao procedimento de análise. Parte destes dados é composta por variáveis determinísticas, necessárias à etapa de verificação de capacidade resistente e com valores constantes ao longo de todo processo. Juntamente, indica-se o conjunto de variáveis aleatórias utilizadas na avaliação da confiabilidade estrutural e seus respectivos modelos de distribuição de probabilidades. As definições e explicitações a respeito das variáveis determinísticas e aleatórias admitidas neste estudo são dispostas nas seções seguintes deste capítulo.

Posteriormente, de posse do conjunto de variáveis aleatórias, implementa-se a transformação de Nataf. Deste modo, são definidas as distribuições normais equivalentes de acordo com o Anexo B, a matriz de correlação e matrizes Jacobianas, conforme explicitado no Capítulo 3.

Com isso, permite-se aplicar o algoritmo do método de confiabilidade de primeira ordem, conforme apresentado a seguir.

## Algoritmo de implementação computacional do método FORM

---

Dados:  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  (geralmente tomado pelo ponto médio), a matriz de correlação equivalente  $\mathbf{R}_z$  e as matrizes jacobianas  $\mathbf{J}_{yz}$  e  $\mathbf{J}_{zy}$  em  $\mathbf{x}_0$ .

$k = 0$  (Repetição do bloco até satisfazer o critério de parada)

1. Determinação dos parâmetros de média e desvio padrão das distribuições normais equivalentes em  $\mathbf{x}_k$ , conforme as Equações 3.30 e 3.31.
  2. Atualização das matrizes Jacobianas  $\mathbf{J}_{yx}$  e  $\mathbf{J}_{xy}$ , por meio das Equações 3.43 e 3.44.
  3. Transformação do ponto  $\mathbf{x}_k$  em  $\mathbf{y}_k$  no espaço  $\mathbb{Y}$ , utilizando-se a Equação 3.47.
  4. Cálculo da função  $g(\mathbf{x}_k)$  e seu gradiente, transformação para o espaço padrão normalizado e determinação dos cossenos diretores  $\alpha(\mathbf{y}_k)$ .
  5. Cálculo do novo ponto  $\mathbf{y}_{k+1}$ , por meio do algoritmo HLRF ou iHLRF (variação com intuito de aprimorar a busca pelo ponto de projeto).
  6. Retorno ao espaço  $\mathbb{X}$  transformando o ponto  $\mathbf{y}_{k+1}$  em  $\mathbf{x}_{k+1}$  (Equação 3.48).
  7. Cálculo do índice de confiabilidade  $\beta = \|\mathbf{y}_{k+1}\|$ .
- $k = k + 1$

Fim

---

Fonte: adaptado de Real (2023)

## 5.2 CONJUNTO DE VARIÁVEIS DETERMINÍSTICAS

As variáveis ditas determinísticas são aquelas que podem ser definidas através de um valor único exato, imutável e sem variabilidades oriundas de distribuições probabilísticas. Em virtude das análises aqui propostas, são elencadas a seguir as variáveis de entrada do algoritmo admitidas como determinísticas.

- a)  $A_{s,total}$  – Área de aço total da seção;
- b)  $\rho_j$  – Taxa de armadura unitária para cada barra  $j$ ;
- c)  $n_c, n_s$  – Variáveis geométricas, que indicam a quantidade de vértices da seção poligonal e o número de barras de aço longitudinais da seção, respectivamente;
- d)  $E_s$  – Módulo de deformação longitudinal do aço;
- e)  $d'$  – distância das armaduras superiores ao bordo mais comprimido da seção.

## 5.3 MODELOS PROBABILÍSTICOS DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

As variáveis aleatórias ou estocásticas, por outro lado, estão associadas diretamente a modelos de distribuição de probabilidades, podendo assumir um conjunto distinto de valores, ainda que de natureza contínua ou discreta. Conforme visto no Capítulo 3, as definições a respeito da quantidade e das características relacionadas às variáveis aleatórias estão entre os pontos mais importantes ao processo de determinação das probabilidades de falha de uma estrutura ou sistema.

Portanto, as seções a seguir darão cargo de explicitar alguns destes parâmetros essenciais à consolidação das análises de confiabilidade. Ademais, uma tabela com resumo das variáveis aleatórias consideradas neste capítulo, suas respectivas distribuições, valores médios e coeficientes de variação será devidamente apresentada no Capítulo 7.

### 5.3.1 Resistência do concreto à compressão ( $f_c$ )

A resistência à compressão ( $f_c$ ) é a principal variável aleatória relacionada ao concreto e ao cálculo dos momentos resistentes da seção, segundo o modelo de verificação utilizado. Seu valor refere-se à resistência obtida em testes de compressão axial de corpos de prova, para tempos de referência de 28 dias, cujas variabilidades decorrem tanto do controle de qualidade empregado durante o processo de moldagem das peças, como da heterogeneidade dos componentes do concreto, umidade ambiente, processos de fissuração, retração, entre outros.

Visando utilizar uma base de dados adequada à realidade brasileira, o trabalho em questão utilizará os resultados apresentados por Santiago (2019), consolidados a partir de mais de 39 mil resultados de ensaios de corpo de prova cilíndricos moldados *in loco* de obras das cinco regiões do país entre os anos de 2011 e 2016. Os valores de média e coeficiente de variação obtidos e ajustados segundo a referência seguem uma distribuição normal de probabilidades e são apresentados na Tabela 5.1, onde se observa uma minimização das variabilidades em conformidade com o aumento das resistências, que relacionam-se diretamente ao aumento do controle de qualidade do concreto.

Tabela 5.1 – Valores recomendados de média e coeficiente de variação para a variável  $f_c$

Classe	$\mu$	$COV$
C20	$1,30 \cdot f_{ck}$	0,20
C25	$1,25 \cdot f_{ck}$	0,17
C30	$1,22 \cdot f_{ck}$	0,15
C35	$1,19 \cdot f_{ck}$	0,13
C40	$1,16 \cdot f_{ck}$	0,11
C45	$1,13 \cdot f_{ck}$	0,10
C50	$1,11 \cdot f_{ck}$	0,10
C55	$1,10 \cdot f_{ck}$	0,09
C60	$1,10 \cdot f_{ck}$	0,09

Fonte: adaptado de Santiago (2019)

Em virtude da tendência de estabilização dos valores apresentados entre as classes resistentes após 50 MPa e a necessidade de se obterem os parâmetros para resistências superiores, decidiu-se pela manutenção dos valores de média e coeficiente de variação encontrados entre C55 e C60 para as classes superiores até C90 ( $\mu = 1,10f_{ck}$  e  $COV = 0,09$ ).

### 5.3.2 Resistência ao escoamento do aço ( $f_y$ )

A tensão de escoamento do aço também configura uma importante variável aleatória do problema. Santiago (2019) apresenta um resumo de resultados de ensaios de tração de mais de 8,7 mil barras de aço CA-50, com diâmetros entre 8 e 25 milímetros, fabricados pela empresa ArcelorMittal Brasil no ano de 2016. Os parâmetros obtidos foram ajustados para uma distribuição normal, com média equivalente a 1,22 vezes a tensão de escoamento característica do aço e coeficiente de variação de 4%.

### 5.3.3 Propriedades geométricas da seção transversal

As propriedades geométricas de seções transversais de peças de concreto, como largura, altura e posição do centro de gravidade da linha de armaduras, por exemplo, sofrem inevitavelmente de variações como consequência às imperfeições de execução e erros humanos. Em virtude disso, Coelho (2011) apresenta uma síntese destes parâmetros, extraídos do Código Modelo

Probabilístico JCSS parte III (2001b) e de Stewart (1996), cujos valores médios são comumente dispostos em função de valores nominais somados à fatores de viés (*bias factor*). A Tabela 5.2 faz referência a estes dados, voltados ao dimensionamento de vigas, onde  $d''$  consiste da distância entre o bordo inferior da seção transversal e o centro de gravidade da linha inferior de armaduras.

Tabela 5.2 – Propriedades das dimensões das vigas

Propriedade	$\mu$ (cm)	$COV$	Distribuição
$b$	$b_{nom} + 0,4$	0,045	Normal
$h$	$h_{nom} + 0,16$	0,045	Normal
$d''$	$d''_{nom} + 0,2$	0,045	Normal

Fonte: adaptado de Coelho (2011)

#### 5.3.4 Carregamento permanente ( $g$ )

Os carregamentos e solicitações permanentes de uma estrutura referem-se não somente aos esforços de peso próprio, mas também das sobrecargas de equipamentos fixos que estarão presentes durante boa parte da vida útil da estrutura. O Código Probabilístico do JCSS traz um modelo interpretativo baseado na composição das cargas permanentes em função das variabilidades do peso próprio e volume dos materiais, que podem ser sobrepostos como forma de se determinar o modelo distributivo para carregamento permanente total do problema. Este modelo é corroborado por Santos, Stucchi e Beck (2014) e resulta em uma distribuição normal de probabilidades, cuja média é considerada equivalente ao valor nominal da solicitação permanente (ainda que exista certa variação) e, de forma compensatória, atribui-se ao coeficiente de variação o valor de  $COV = 0,10$ .

#### 5.3.5 Carregamento variável ( $q$ )

Os carregamentos variáveis idealizados para os sistemas estruturais correspondem, por exemplo, à carga proveniente do peso de seus ocupantes, equipamentos móveis ou de baixa incidência ao longo da vida útil da estrutura, mobílias, vento, atividades sísmicas, entre outros. Deste modo, em vias de se considerar a incidência de ações variáveis em análises probabilísticas, torna-se fundamental o estabelecimento sobre o tempo de referência utilizado como forma de estimar o valor médio destas ações. Stucchi, Santos e Franco (2011) adotam uma probabilidade de 30% para que os valores característicos das ações variáveis sejam ultrapassados em um período de 50 anos (coerentes com análises de ELU), por meio de distribuição Tipo I (Gumbel), de tal sorte que o valor médio da variável pode ser determinado pela Equação 5.1.

$$\mu_q = \frac{q_k}{(1 + 0,35COV)} \quad (5.1)$$

Como pôde ser observado, o estabelecimento a respeito do coeficiente de variação das cargas variáveis está diretamente relacionado às considerações de cada autor. Galambos et al. (1982) indicam, por exemplo, variações de 25% em torno de valores médios equivalentes aos próprios valores nominais, enquanto Stucchi, Santos e Franco (2011) adotam variações ligeiramente inferiores, na ordem de 20%. O trabalho em questão implementará a configuração proposta por este último, de modo que, a partir de um coeficiente de variação  $COV = 0,20$  para os carregamentos acidentais, o resultado de aplicação da Equação 5.1 retorna valores médios  $\mu_q \approx 0,93q_k$ .

### 5.3.6 Incertezas dos modelos de solicitação e resistência

Às análises de confiabilidade, mostra-se prudente acrescentar externamente coeficientes multiplicadores ao equilíbrio dos esforços resistentes e solicitantes,  $\theta_R$  e  $\theta_S$ , respectivamente. Estas variáveis representam as variações referentes às incertezas, simplificações e efeitos de aleatoriedade relacionados aos modelos de consideração das solicitações e capacidade resistente dos sistemas e/ou elementos.

Torna-se razoável, segundo Santos, Stucchi e Beck (2014), assumir uma distribuição do tipo Lognormal para a variável aleatória  $\theta_S$ , cujos valores médios serão equivalentes aos valores nominais, a partir de uma variação típica  $COV = 0,05$ . Quanto às incertezas no modelo resistente, será apresentado no Capítulo 6 o estudo de sensibilidade e de validação do modelo segundo a rotina de cálculo proposta, que deve resultar em um modelo de distribuição adequado para a variável  $\theta_R$  utilizada no estudo.

## 6 VALIDAÇÃO E ERROS DE MODELO

Uma vez estabelecidos os modelos numéricos apresentados na Seção 4, para dimensionamento e verificação de seções submetidas à flexão simples, assim como as rotinas para obtenção dos índices de confiabilidade através do método FORM, torna-se essencial avaliar e validar as respostas de aplicação destes códigos. Assim sendo, este processo pode ser subdividido em duas diferentes etapas, descritas a seguir:

1. Inicialmente, obtém-se um conjunto de vigas de concreto armado e suas características, cujos resultados de ensaio estejam disponíveis na literatura e que apresentem ruptura oriundas de falha por flexão. A partir destes dados, são obtidos os momentos últimos resistentes para cada uma das peças, que acabarão sendo confrontados com os momentos últimos calculados conforme o algoritmo do Código Modelo *fib* 2010. Dessa forma, calculam-se os parâmetros estatísticos da amostra como forma de estimar o erro associado às incertezas do modelo de capacidade resistente.
2. Ainda, previamente ao desenvolvimento das análises de confiabilidade comparativas sugeridas neste estudo, é relevante validar os algoritmos de resistência e sua aplicação conjunta ao módulo *RealPy*, que realiza a implementação numérica do método FORM. Portanto, os resultados aqui obtidos serão diretamente confrontados com um exemplo de aplicação validado, disponível na literatura.

### 6.1 VALIDAÇÃO DO MODELO RESISTENTE

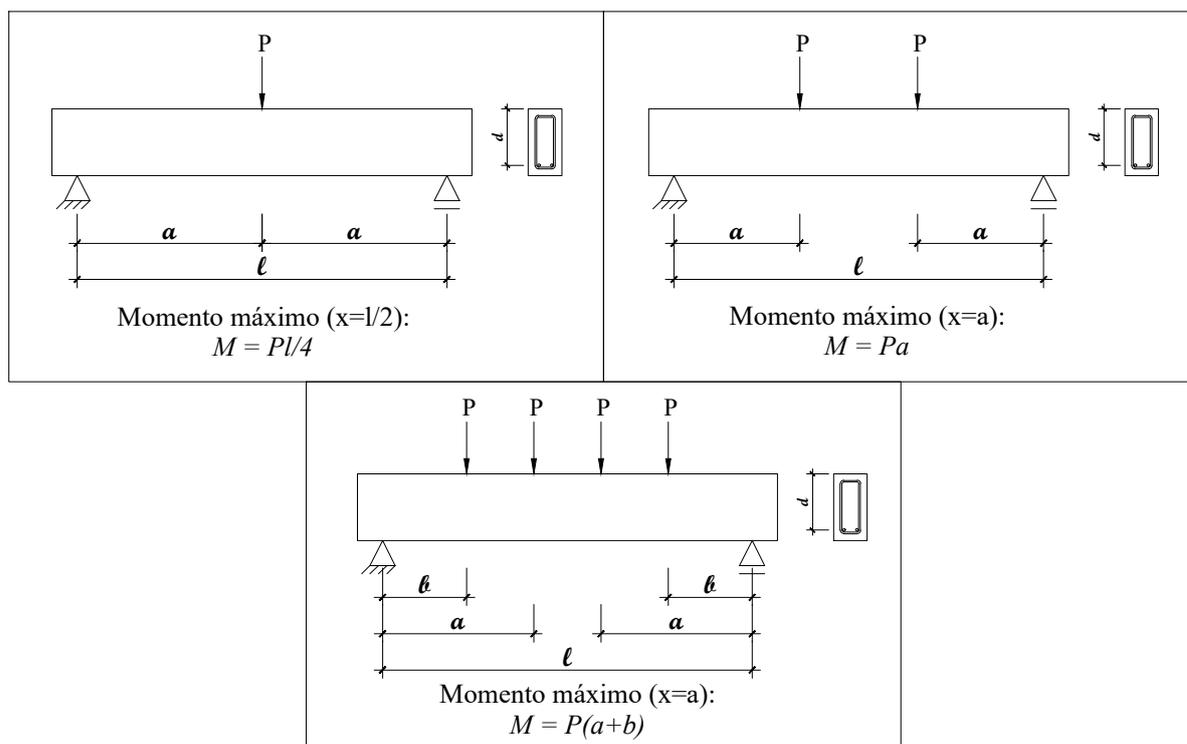
A Tabela 6.1, apresentada a seguir, dispõe o conjunto de referências utilizadas para obtenção de um banco de dados com total de 53 vigas de concreto armado, ensaiadas à flexão simples, em que a ruptura deu-se por meio de falha à flexão. São dispostas, de forma resumida, as respectivas faixas de resistências à compressão do concreto ( $f_c$ ) e taxas de armadura tracionada, conforme as fontes em questão. As informações detalhadas de geometria das seções transversais, resistências individuais de concreto e aço, assim como as áreas de aço longitudinais, estão disponíveis no Apêndice D.

Tabela 6.1 – Resumo dos experimentos de literatura

Fonte	Nº de vigas	$f_c$ (MPa)	Taxa de armadura (%)
Janney et al. (1956)	5	36,2 - 42,7	0,8 - 3,3
Bresler & Scordelis (1963)	3	35 - 38,7	2 - 2,5
Base & Read (1965)	5	28,3 - 41,4	1,2 - 2,7
Kong & Rangan (1998)	5	68,9 - 89,4	1,4 - 2,4
Garcia (2002)	2	37,5 - 70,3	1,8 - 2,3
Prieto Rabade & Tamer (2008)	8	32,6 - 49,9	0,5 - 1,5
Arezoumandi et al. (2015)	8	26,2 - 37,2	0,4 - 0,6
Ning et al. (2015)	3	63,3 - 75,6	0,7 - 1
Canaval (2016)	5	22,8	0,9
Kulkarni & Shah (1998)	9	41,5 - 46,2	1,2
TOTAL DE VIGAS	53		

Efetua-se, em sequência, a consolidação dos dados de resistência e geometria das vigas citadas. Os momentos resistentes de ensaio ( $M_R$ ), referentes à sequência das análises, em caso de não serem diretamente informados nos artigos de referência, podem ser obtidos conforme a natureza de cada ensaio de flexão (três, quatro ou seis pontos), exemplificados na figura a seguir.

Figura 6.1 – Ensaios de flexão - representação esquemática



Fonte: adaptado de Füst 2020.

A partir de então, as vigas são verificadas numericamente de modo a comparar seus momentos resistentes de ensaio com os respectivos momentos de cálculo segundo o Código Modelo *fib* 2010 ( $M_{R,calc}$ ). O código proposto levou em consideração o comportamento mais adequado ao aço das armaduras longitudinais, conforme a disposição de cada trabalho, de modo que: para aços sem escoamento definido adotou-se o diagrama de Menegotto-Pinto (Figura 4.8), tal qual o diagrama bilinear sem endurecimento (comportamento elastoplástico perfeito), para representação de aços com patamar de escoamento definido.

Os resultados são consolidados na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 – Resultado de validação

<i>Artigo/ID</i>	<i>FIB MC 2010</i> $M_{R,calc}$ (kN.cm)	$M_R$ (kN.cm)	$M_R/M_{R,calc}$
<b><i>Janney et al. (1956)</i></b>			
janney-01	-2842,29	-2530,86	0,89
janney-02	-4207,79	-4169,14	0,99
janney-03	-5449,50	-4880,94	0,90
janney-04	-6532,86	-6451,43	0,99
janney-05	-8974,21	-8937,10	1,00
<b><i>Bresler &amp; Scordelis (1963)</i></b>			
bresler-a3	-78731,84	-77161,82	0,98
bresler-b3	-64130,87	-58572,40	0,91
bresler-c3	-53990,10	-45058,70	0,83
<b><i>Base &amp; Read (1965)</i></b>			
base-01	-3973,16	-3310,45	0,83
base-02	-3959,30	-3446,04	0,87
base-03	-3741,05	-3954,47	1,06
base-04	-6754,46	-6858,18	1,02
base-05	-7236,78	-6824,28	0,94
<b><i>Kong &amp; Rangan (1998)</i></b>			
kong-s2-6	-26090,69	-26312,04	1,01
kong-s4-5	-18453,67	-19011,05	1,03
kong-s5-6	-26760,98	-28550,87	1,07
kong-s6-1	-17577,72	-19050,68	1,08
kong-s6-2	-17577,72	-19014,08	1,08
<b><i>Garcia (2002)</i></b>			
garcia-2	-32507,51	-32977,50	1,01
garcia-10	-23403,77	-22177,50	0,95
<b><i>Prieto Rabade &amp; Tamer (2008)</i></b>			
prieto-5-1	-1113,07	-1172,84	1,05

*Continua na página seguinte*

Tabela 6.2 – Resultado de validação (continuação)

<i>Artigo/ID</i>	<i>FIB MC 2010</i>	$M_R$	$M_R/M_{R,calc}$
	$M_{R,calc}$ (kN.cm)	(kN.cm)	
prieto-5-2	-1113,07	-1266,59	1,14
prieto-11-1	-1726,26	-1689,50	0,98
prieto-11-2	-1726,26	-1761,50	1,02
prieto-12-1	-4091,00	-3993,50	0,98
prieto-12-2	-4091,00	-4233,50	1,03
prieto-21-1	-4155,88	-4249,50	1,02
prieto-21-2	-4155,88	-4357,50	1,05
<b><i>Arezoumandi et al. (2015)</i></b>			
arez-cc-1	-14823,41	-15358,00	1,04
arez-cc-2	-14584,17	-15808,00	1,08
arez-cc-3	-17599,73	-17023,00	0,97
arez-cc-4	-17308,74	-16393,00	0,95
arez-rca-1	-14335,63	-13783,00	0,96
arez-rca-2	-14391,95	-15538,00	1,08
arez-rca-3	-17599,73	-17158,00	0,97
arez-rca-4	-16559,73	-16888,00	1,02
<b><i>Ning et al. (2015)</i></b>			
ning-bs-a-pc	-6234,34	-6762,69	1,08
ning-bs-b-pc	-7450,76	-7882,69	1,06
ning-bs-c-pc	-8411,76	-9162,69	1,09
<b><i>Canaval (2016)</i></b>			
canaval-vref-1	-2257,05	-2257,53	1,00
canaval-vref-2	-2257,05	-2182,83	0,97
canaval-vref-3	-2257,05	-2226,93	0,99
canaval-vref-4	-2257,05	-2129,13	0,94
canaval-vref-5	-2257,05	-2160,33	0,96
<b><i>Kulkarni &amp; Shah (1998)</i></b>			
shah-b4jl25s	-1624,13	-1603,00	0,99
shah-b4jl25h	-1624,13	-1801,00	1,11
shah-b3oc25s	-1654,46	-1580,00	0,95
shah-b3oc25h	-1654,46	-1758,00	1,06
shah-b4jl20h	-1626,87	-1709,00	1,05
shah-b3se03h	-1647,09	-1771,00	1,08
shah-b3de03s	-1634,25	-1585,00	0,97
shah-b3de03h	-1634,25	-1814,00	1,11
shah-b3no15h	-1634,25	-1817,00	1,11

Uma vez obtidas as razões  $M_R/M_{R,calc}$ , deve-se buscar estabelecer os parâmetros estatísticos da amostra em questão, tomados em função de uma distribuição apropriada. Para isso, dois métodos são comumente empregados no auxílio da escolha da melhor distribuição para uma determinada amostra: são eles o teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S) e o teste Qui-Quadrado ( $\chi^2$ ). No teste K-S, avalia-se a distância máxima absoluta entre a função de distribuição acumulada dos dados observados e da distribuição teórica sob análise. Por outro lado, o teste Qui-Quadrado avalia a probabilidade de aderência entre as frequências dispostas no histograma de dados e aquelas da distribuição em ajuste. Ambos podem ser tomados como métrica para obtenção do melhor ajuste e a conseguinte aceitação da hipótese nula (dados seguem o modelo proposto), embora o teste Qui-Quadrado necessite de um tamanho amostral mais significativo, enquanto o teste K-S permite amostras menores.

A tabela em sequência resume os resultados do teste de aderência para os modelos de distribuição mais corriqueiros em análises desta natureza, onde o nível de significância dos testes ( $\alpha$ ) foi definido em 0,05 e a aceitação da hipótese nula ( $H_0$ ) é dada para resultados inferiores aos valores críticos apresentados.

Tabela 6.3 – Teste de aderência para o modelo resistente de momento de flexão

Distribuição	Testes de aderência ( $\alpha = 0,05$ )			
	K-S		$\chi^2$	
	<i>Valor crítico = 0,18311</i>		<i>Valor crítico = 11,07</i>	
	Estatística	Aceita $H_0$ ?	Estatística	Aceita $H_0$ ?
Normal	0,07547	Sim	2,3651	Sim
Lognormal	0,07985	Sim	2,6212	Sim
Gamma	0,08008	Sim	2,2277	Sim
Weibull	0,08023	Sim	2,8519	Sim
Gumbel	0,10859	Sim	6,6755	Sim
Frechet	0,14756	Sim	2,9955	Sim

Desta forma, entende-se que a distribuição normal apresentou melhores indicadores para representar o modelo resistente elaborado. A função densidade de probabilidades para a distribuição normal, também conhecida como Gaussiana, está representada na Figura 6.2.

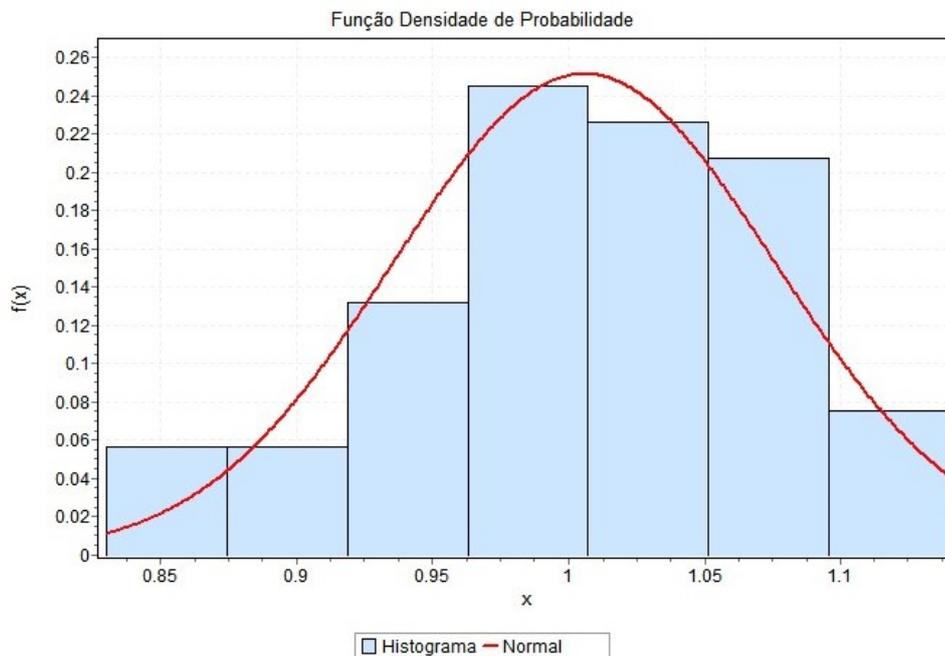


Figura 6.2 – Ajuste de distribuição normal para o conjunto de resultados  
Fonte: do autor

A partir da distribuição normal, verifica-se uma média amostral  $\mu = 1,01$  e desvio padrão  $\sigma = 0,07$ , ou seja, o valor para o coeficiente de variação do modelo resistente ( $COV_{res}$ , razão entre o desvio padrão e a média) também corresponderá a aproximadamente 0,07. Em análises de confiabilidade, porém, o coeficiente de variação do modelo refere-se a apenas uma das variáveis que compõem o coeficiente de variação médio ( $COV_m$ ), de interesse. De acordo com Nowak & Szerszen (2003), há ainda a existência de mais dois fatores:  $COV_{test}$ , correspondente às incertezas atreladas aos carregamentos e imprecisões dos ensaios; e  $COV_{spec}$ , que inclui as variabilidades da resistência real da estrutura, dos corpos de prova, variações geométricas, entre outras. Segundo os autores, estes valores podem ser estimados em aproximadamente 4%. Assim, o valor de  $COV_m$  pode ser calculado como segue.

$$COV_m = \sqrt{COV_{res}^2 - COV_{test}^2 - COV_{spec}^2} \quad (6.1)$$

O que resulta em  $COV_m = 0,041 = 4,1\%$

## 6.2 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE UMA VIGA EXEMPLO

A avaliação a respeito do funcionamento do modelo numérico não-linear de resistência à flexão simples em ELU em concordância com o modelo para cálculo dos índices de confiabilidade

( $\beta$ ), segundo o método FORM, é de suma importância tendo em vista a consolidação dos procedimentos propostos neste estudo.

Santos, Stucchi e Beck (2014) apresentam um interessante exemplo de aplicação, onde determinam-se os índices de confiabilidade de uma viga de seção retangular de concreto armado, apenas com barras longitudinais inferiores à tração, diferentes composições de carga e cinco taxas de armadura. A tabela a seguir reúne os dados das configurações para a seção de concreto analisada, todas com resistência à compressão do concreto  $f_{ck} = 25$  MPa, aço CA-50 ( $f_{yk} = 500$  MPa) e coeficientes de segurança  $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ , conforme a NBR 6118:2014.

Tabela 6.4 – Dados e configurações da viga exemplo

Armadura	$A_s$ ( $cm^2$ )	b (cm)	h (cm)	$\rho$ (%)	$d''$ (cm)	$R_d = M_{rd}$ (kN.cm)
3 $\phi$ 8mm	1,5	20	50	0,15	3,9	2936
4 $\phi$ 10mm	3,2	20	50	0,32	4,0	6081
4 $\phi$ 12,5mm	5,0	20	50	0,50	4,1	9200
4 $\phi$ 16mm	8,0	20	50	0,80	4,3	13903
3 $\phi$ 20mm	9,45	20	50	0,95	1,5	15914

Fonte: SANTOS, STUCCHI E BECK (2014)

### 6.2.1 Avaliação segundo modelo de capacidade resistente simplificado

Conforme apresentado no artigo, os momentos resistentes são calculados segundo a equação apresentada abaixo, deduzida a partir dos modelos simplificados de distribuição de tensões do concreto, permitidos pela ABNT NBR 6118.

$$M_{rd} = A_s \cdot \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \left( h - d'' - 0,5 \cdot \frac{A_s \cdot f_{yk} / \gamma_s}{0,85 \cdot b \cdot f_{ck} / \gamma_c} \right) \quad (6.2)$$

Os esforços solicitantes, por outro lado, são definidos em um intervalo determinado pela taxa  $\chi$ , relação entre os carregamentos acidentais (Q) e totais (S). Ou seja, para valores de  $\chi = 0$ , a solicitação apresenta-se inteiramente composta por esforços de carregamentos permanentes (G), enquanto  $\chi = 1$  representa uma situação hipotética onde 100% do carregamento origina-se de ações variáveis. Se as máximas solicitações ocorrem quando o momentos solicitantes e resistentes são equivalentes ( $S_d = R_d = M_{rd}$ ), têm-se:

$$M_{Gk} = \frac{M_d}{\gamma_g + \gamma_q \cdot (\chi / (1 - \chi))} \quad (6.3)$$

$$M_{Qk} = \frac{M_d}{\gamma_q + \gamma_g \cdot ((1 - \chi)/\chi)} \quad (6.4)$$

Neste caso, a análise de confiabilidade será expressa por meio do índice de confiabilidade  $\beta$ , correspondente a probabilidade de ruptura do elemento estrutural durante sua vida útil, de modo que a condição de estado limite (Equação 6.5) seja satisfeita.

$$g(X) = R(X) - S(X) = \theta_R \cdot M_R - \theta_S \cdot M_S$$

$$g(X) = \theta_R \cdot A_s \cdot \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \left( h - d'' - 0,5 \cdot \frac{A_s \cdot f_y}{0,85 \cdot b \cdot f_c} \right) - \theta_S \cdot (M_G + M_Q) \quad (6.5)$$

A imagem a seguir dispõe os modelos probabilísticos empregados pelos autores para determinação das variáveis aleatórias utilizadas nas análises de confiabilidade. Outras variáveis de potencial utilidade às simulações, tais como área de aço transversal ( $A_s$ ), módulo de elasticidade longitudinal do aço ( $E_s = 210$  GPa) e diâmetro das barras, por exemplo, são admitidas determinísticas e constantes.

Categoria das variáveis	Nome das variáveis básicas	Símb.	Dimensão	Distribuição	$\mu_x$	$\sigma_x$
Ações	Permanente	G	kN.m	Normal	$G_k$	$0,1 \mu_x$
	Ação variável - 50 anos	Q	kN.m	Gumbel	$0,93 Q_k$	$0,2 \mu_x$
Resistência dos materiais	Concreto	$f_c$	MPa	Normal	$1,17 f_{ck}$	$0,15 \mu_x$
	Aço passivo para concreto	$f_y$	MPa	Normal	$1,08 f_{yk}$	$0,05 \mu_x$
	Aço estrutural para perfil	$f_y$	MPa	Normal	$1,08 f_y$	$0,08 \mu_x$
	Altura da viga de concreto	h	cm	Normal	50	2,25
Dados geométricos	Largura da viga de concreto	b	cm	Normal	20	1,20
	Dist. CG das barras (fibra inferior - viga)	$d'$	cm	LN	$d'_{nom}$	1,10
	Dist. CG das barras (fibra inferior - laje)	$d'$	cm	LN	4	0,60
	Dist. CG das barras (fibra superior - laje)	$d'$	cm	LN	4	1,10
	Altura da laje de concreto	$h_c$	cm	Normal	10	0,60
Incerteza - ações	Incertezas de modelo das solicitações	$\theta_s$	-	LN	1,00	0,05
	Viga de concreto - Flexão	$\theta_R$	-	LN	1,00	0,05
Incertezas de modelo da resistência	Laje de concreto - Flexão	$\theta_R$	-	LN	1,00	0,05
	Viga metálica - Flexão	$\theta_R$	-	LN	1,00	0,03
	Viga mista - Flexão	$\theta_R$	-	LN	1,00	0,05

Figura 6.3 – Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias empregadas no artigo de referência.

Fonte: SANTOS, STUCCHI E BECK (2014, p. 741)

Os resultados encontrados e publicados pelos autores para as cinco diferentes taxas de armaduras propostas, no intervalo entre 0 e 1 para a proporção  $\chi$ , podem ser vistos na Figura 6.4.

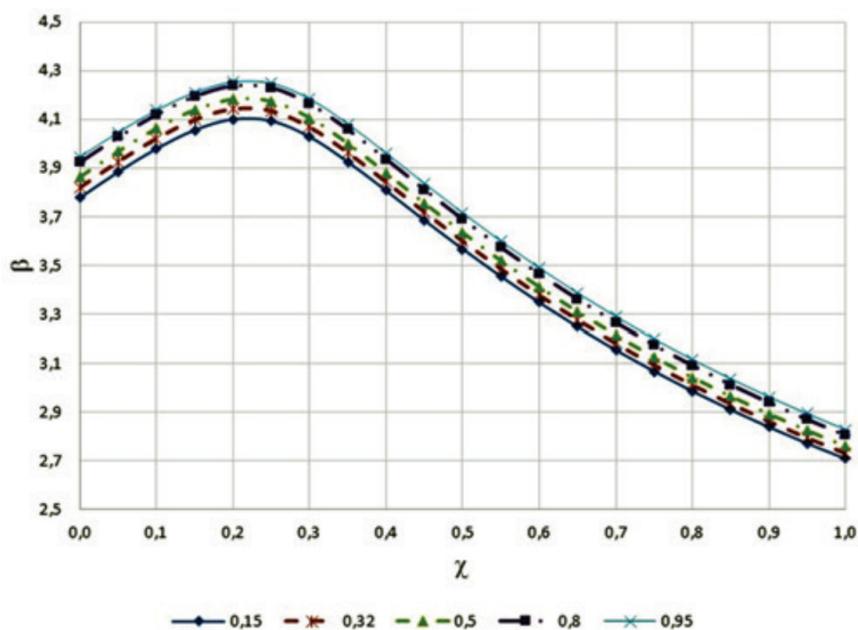


Figura 6.4 – Índices de confiabilidade para viga 20x50 - valores publicados.

Fonte: SANTOS, STUCCHI E BECK (2014, p. 741)

Assim, os mesmos dados de entrada foram devidamente impostos, segundo implementação da função `form` da classe `Reliability` da `RealPy` (algoritmo `iHRLF`, tolerância máxima de  $1 \times 10^{-3}$ ), com o objetivo de reproduzir os resultados originalmente publicados. Utilizando-se do modelo de capacidade resistente simplificado da Equação 6.2, obtém-se o conjunto de curvas para a relação  $\beta \times \chi$  da Figura 6.5

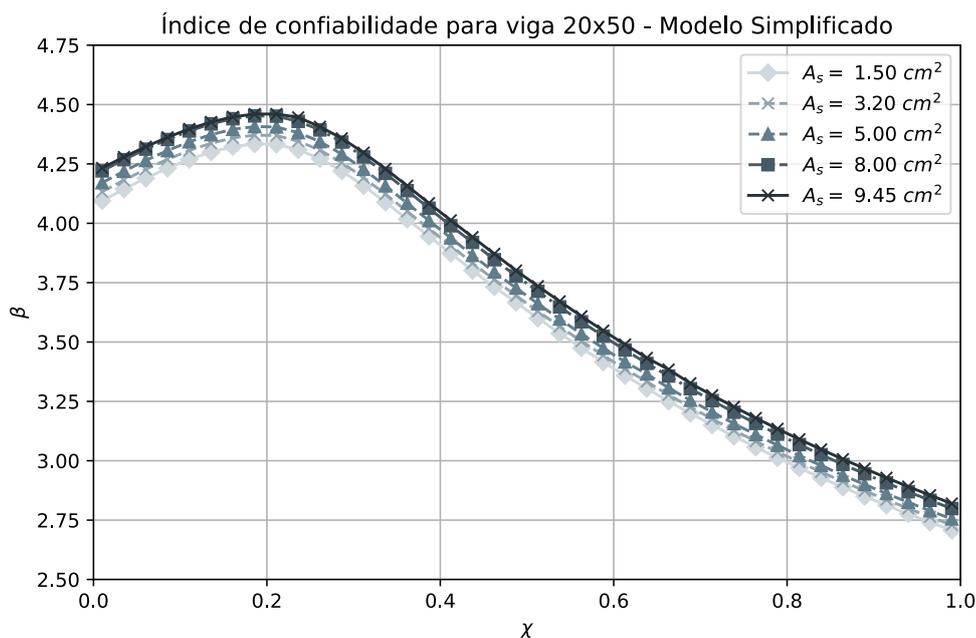


Figura 6.5 – Índices de confiabilidade viga 20x50 - Modelo simplificado.

Fonte: do autor

Conforme pode-se observar, os resultados calculados encontram-se bastante semelhantes àqueles publicados no estudo original. O índice de confiabilidade  $\beta$  atinge um ponto de máximo em uma região próxima a  $\chi = 0,2$ , com valores entre 4,30 e 4,45, aproximadamente. Deste modo, são observados acréscimos nos valores dos índices de confiabilidade de aproximadamente 5% em comparação àqueles do gráfico representado pela Figura 6.4, extraídos da referência original.

## 6.2.2 Avaliação segundo modelo de capacidade resistente proposto

Em sequência, decidiu-se efetuar um novo conjunto de simulações através do FORM, agora com a utilização do modelo resistente de verificação de seções, elaborado em conformidade com a disposição do Código Modelo *fib* 2010, tal qual apresentado no Capítulo 4. O modelo utiliza um diagrama não-linear para representar a região comprimida de concreto, além de levar em consideração as contribuições das regiões de tração (zonas íntegras e fissuradas) da seção. Admitiu-se, também, um comportamento elastoplástico perfeito para as barras de aço CA-50, a partir de um diagrama bilinear, com segundo trecho (após escoamento) de tensão constante.

As variáveis aleatórias e seus respectivos modelos probabilísticos não sofreram alterações na comparação direta com o primeiro caso simulado, com exceção no que diz respeito às incertezas inerentes ao modelo resistente ( $\theta_R$ ), atualizadas para os valores determinados  $\mu = 1,01$  e  $COV_m = 0,041$ , conforme avaliação do erro de modelo (seção 6.1). A Figura 6.6 dispõe o gráfico obtido segundo estes novos parâmetros de avaliação.

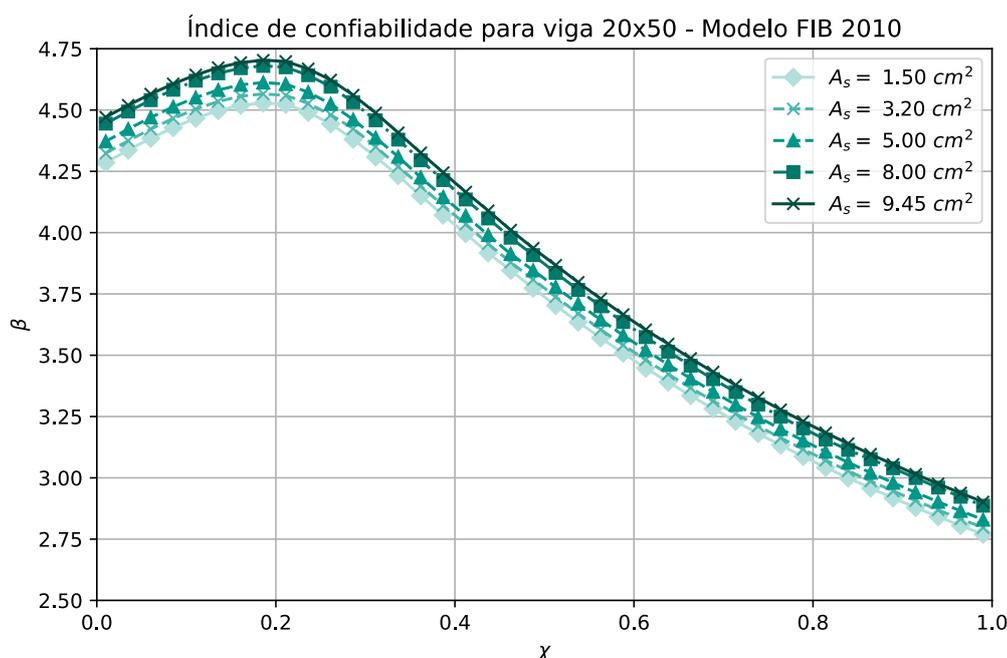


Figura 6.6 – Índices de confiabilidade viga 20x50 - Modelo FIB MC 2010.

Fonte: do autor

O modelo baseado nas proposições de capacidade resistente segundo o Código Modelo seguiu a mesma distribuição vista nos demais gráficos, com ponto  $\beta_{max}$  na região ao redor de onde 20% das solicitações totais são oriundas de esforços de ações variáveis. Na comparação ao modelo simplificado, apresentado na Figura 6.5, as máximas discrepâncias giram em torno de 5% e, por conseguinte, aproximadamente 10% acima dos valores publicados na referência. Esta diferença ainda mantém os resultados em mesma ordem de grandeza e justifica-se primordialmente em razão das diferenças deste novo modelo (anteriormente elencadas), de forma coerente com o esperado, uma vez que os modelos mais simplificados tendem a fornecer resultados levemente mais conservadores no que tange à estimativa da capacidade resistente da seção.

Como complemento às análises, decidiu-se também simular os mesmos casos às condições e modelos probabilísticos das variáveis aleatórias abordados no Capítulo 5. Neste caso, os valores médios das variáveis geométricas passam a levar em conta um fator de viés (*bias*) acrescido aos seus valores nominais. Além disso, como forma de aproximar os referidos exemplos à realidade dos materiais disponíveis em território nacional, os modelos probabilísticos das variáveis de resistência de ambos materiais, aço e concreto, são atualizados de acordo com os dados apresentados por Santiago (2019). A Tabela 6.5, a seguir, dispõe um resumo das alterações efetuadas.

Tabela 6.5 – Resumo das alterações nos modelos probabilísticos das variáveis aleatórias

Variável	$\mu_x$	$\sigma_x$	COV.	Distribuição
Base da seção ( $b$ - cm)	$20 + 0,4$	1,22	0,06	Normal
Altura da seção ( $h$ - cm)	$50 + 0,16$	2,56	0,045	Normal
Dist. CG das barras - fibra inferior ( $d''$ - cm)	$d'' + 0,2$	$0,045(d'' + 0,2)$	0,045	Normal
Resistência à compressão - concreto ( $f_c$ )	$1,25 \cdot f_{ck}$	$0,21 \cdot f_{ck}$	0,17	Normal
Resistência ao escoamento - aço ( $f_y$ )	$1,22 \cdot f_{yk}$	$0,05 \cdot f_{yk}$	0,04	Normal

Assim, apresenta-se a Figura 6.7, com os índices de confiabilidade recalculados, conforme o novo conjunto de parâmetros proposto.

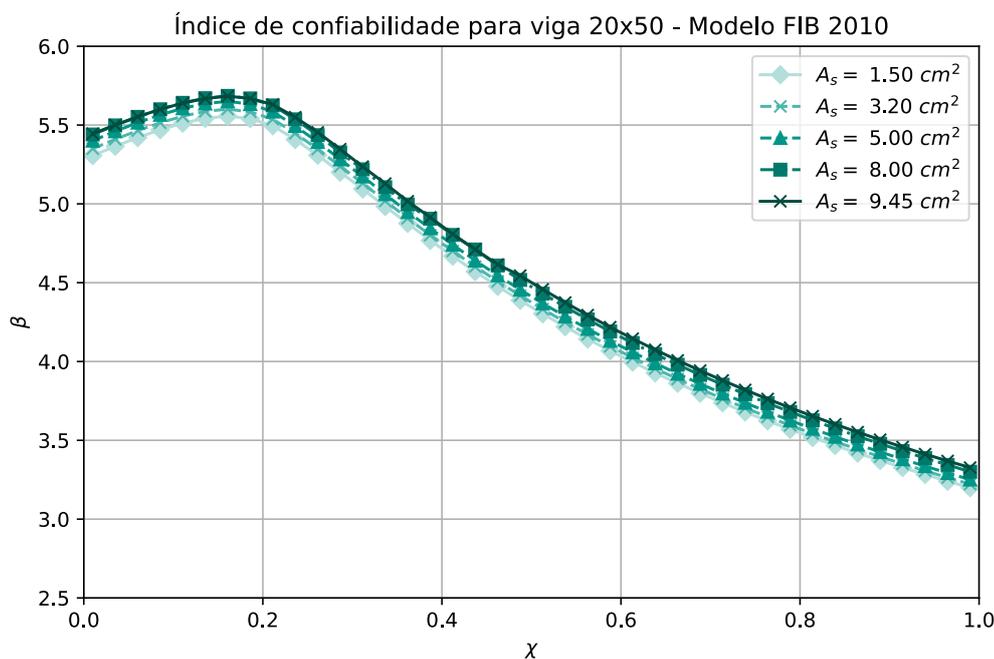


Figura 6.7 – Índices de confiabilidade com novos parâmetros estatísticos - Modelo FIB MC 2010.

Fonte: do autor

Nota-se, portanto, um aumento significativo dos índices de confiabilidade para as cinco vigas em análise, de modo que as curvas encontram-se ainda mais deslocadas para cima. Tratando-se dos valores máximos, houve um aumento de aproximadamente 22% em relação à análise anterior, onde o modelo resistente conforme o Código Modelo *fib* 2010 fora inicialmente implementado, e 35% em comparação aos resultados da referência. Tais mudanças foram impulsionadas majoritariamente pelos acréscimos em resistência dos materiais conforme apontado nos levantamentos de Santiago (2019), embasados nos testes de mais de 39 mil corpos de prova de concreto e quase 9 mil barras de aço de diferentes lotes produzidos no Brasil. Estes resultados, ainda que iniciais, demonstram uma tendência para capacidade de reserva de segurança ainda maior em comparação ao utilizado por referências internacionais, onde a resistência média ao escoamento das armaduras é vista com variações entre 1,12 e 1,18 de seu valor nominal (SANTIAGO, 2019).

### 6.2.3 Avaliação por aplicação do Método de Monte Carlo

Finalmente, em vias de atestar o nível de acurácia das simulações realizadas quando da aplicação do Método de Confiabilidade de Primeira Ordem, FORM, resolveu-se efetuar algumas análises pontuais da confiabilidade por intermédio do Método de Monte Carlo. Para isso, o algoritmo utilizado foi o da função `bucher` do módulo *RealPy*, que consiste da aplicação computacional do Método de Monte Carlo com amostragem por técnica de importância adaptativa (MC-IC), proposto inicialmente por Bucher (1988). A opção pelo uso da simulação adaptativa em

contraposição ao método de Monte Carlo direto é motivada por sua maior eficiência em realizar simulações com a ocorrência de pontos próximos do domínio de falha, sobretudo diante de valores de índices de confiabilidade elevados (como os observados nas simulações anteriores), que estão correlacionados à probabilidades de falha muito pequenas e, portanto, à necessidade de uma quantidade muito significativa de simulações.

Mesmo com a utilização de técnicas de otimização, os custos computacionais envolvidos são ainda superiores em comparação ao método FORM, de forma que foram selecionadas apenas três diferentes razões da carregamento  $\chi$ , equivalentes a 0,20, 0,50 e 0,80, utilizando-se como referência a viga de seção 20x50 centímetros com área de aço  $A_s = 5,00 \text{ cm}^2$ . As configurações para os modelos probabilísticos das variáveis aleatórias são aquelas utilizadas para o último exemplo de aplicação (Tabela 6.5), cujos resultados são observados na Figura 6.7.

Para o conjunto de análises, definiu-se um valor “alvo” para o coeficiente de variação das probabilidades de falha de 5%. O método de Bucher (1988) propõe que a distribuição da amostragem esteja centralizada sobre o centro de massa dos eventos de falha, de forma que o cálculo deste ponto deve ocorrer a cada “ciclo” de adaptações, mesmo momento em que é realizada a verificação das condições de convergência e avaliação do erro na estimativa da  $P_f$ . Sendo assim, admitiu-se um número máximo de 100 ciclos para cada um dos casos, com 5.000 simulações cada, de modo que o desenvolvimento do processo de convergência das análises pode ser observado nos gráficos dispostos nas figuras 6.8 e 6.9.

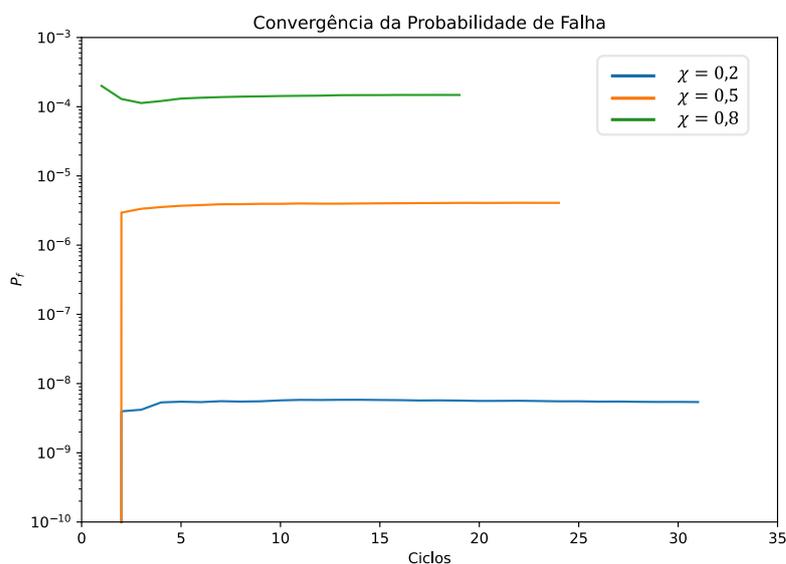


Figura 6.8 – Processo de convergência da  $P_f$  por Monte Carlo

Fonte: do autor

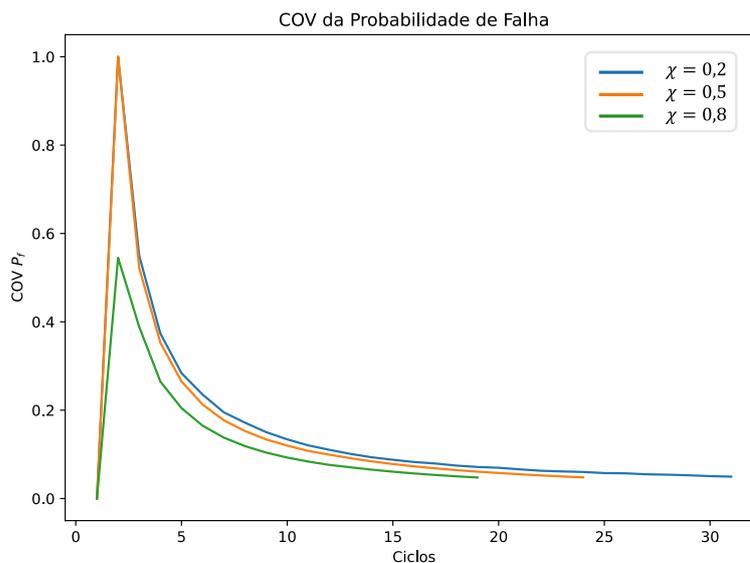


Figura 6.9 – Processo de convergência do Coeficiente de Variação da  $P_f$  por Monte Carlo

Fonte: do autor

As configurações testadas ( $\chi = 0,20$ ,  $\chi = 0,50$  e  $\chi = 0,80$ ) atingiram o requisito de convergência em 31, 24 e 19 ciclos, respectivamente. A consolidação dos resultados das análises, incluindo as probabilidades de falha, coeficientes de variação da  $P_f$ , índice de confiabilidade  $\beta$  e valores finais de tempo e número total de simulações, é apresentada na Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Simulação de Monte Carlo com amostragem por importância adaptativa (Viga 20x50 -  $A_s = 5,00 \text{ cm}^2$ )

$\chi$	$P_f$	$COV P_f$	$\beta$	Nº Simulações	Tempo decorrido (s)
0,2	$5,411 \times 10^{-9}$	4,96%	5,72	155000	1264
0,5	$4,082 \times 10^{-6}$	4,80%	4,46	120000	3174
0,8	$1,479 \times 10^{-4}$	4,76%	3,62	95000	2787

Logo, permite-se comparar diretamente os resultados dos índices de confiabilidade dos três respectivos pontos, obtidos por ambos os métodos FORM e simulação de Monte Carlo, conforme disposto na Tabela 6.7. Observa-se, portanto, uma grande compatibilidade nos valores de  $\beta$  encontrados por ambos algoritmos de avaliação da confiabilidade, cujas diferenças máximas foram inferiores a 2%. Deste modo, permite-se atestar não somente o correto funcionamento dos algoritmos computacionais, como também a capacidade do método FORM em fornecer resultados convergentes com técnicas de simulação como o Método de Monte Carlo com amostragem por importância adaptativa.

Tabela 6.7 – Avaliação comparativa entre Monte Carlo e FORM

$\chi$	$\beta$ (Monte Carlo)	$\beta$ (FORM)	Diferença (%)
0,2	5,72	5,61	1,87%
0,5	4,46	4,41	1,10%
0,8	3,62	3,60	0,45%

## 7 ANÁLISES

O presente capítulo trará o conjunto de análises para avaliação do índice de confiabilidade de vigas de concreto armado, sob condição de flexão simples no estado-limite último, em certas configurações, de modo que seja possível examinar as diferenças quanto às versões da ABNT NBR 6118: 2014 e 2023, assim como do dimensionamento conforme o Eurocode 2:2004 e seu projeto de revisão FprEN 1992-1-1:2022. Ao final, será realizada também uma comparação a respeito da variação da confiabilidade entre as duas versões normativas mais atuais: NBR 6118:2023 e projeto de revisão Eurocode 2:2022.

A seção transversal das vigas analisadas terá forma retangular, com largura  $b$  fixa em 20 centímetros e altura  $h$  variável entre 40, 50 e 60 centímetros, conforme indicado na figura abaixo. As alturas úteis ( $d$ ) das vigas serão de 36,2, 45,5 e 54,5 centímetros, respectivamente, de tal sorte que o parâmetro geométrico  $\delta$  (razão entre  $d'$  e  $d$ ) mantenha-se fixado em 0,10. Como instrumento de padronização, visando as análises comparativas futuras, as vigas serão dimensionadas para valores específicos de momento fletor adimensionalizado ( $\mu$ ), na ordem de 0,15, 0,25 e 0,30, tomando-se como referência o dimensionamento conforme a NBR 6118:2014. Desta forma, as diferentes simulações segundo os códigos normativos elencados apresentarão mesmo momento característico de serviço entre si ( $M_k$ ). Ainda, serão contempladas cinco diferentes classes de concreto, nas resistências à compressão características de 30, 40, 50, 70 e 90 MPa.

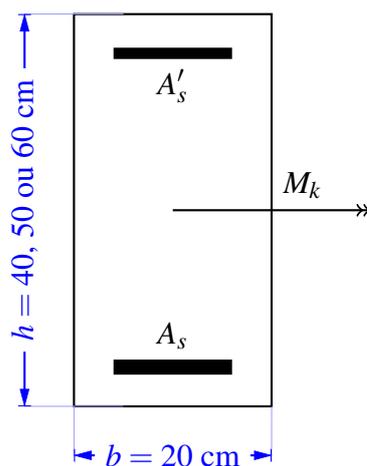


Figura 7.1 – Seção transversal das vigas analisadas

Fonte: do autor

As análises de confiabilidade seguem as definições do Capítulo 5, a partir da utilização da classe *RealPy*, que efetua a implementação numérica computacional do método FORM (*First-order Reliability Method*) a partir do algoritmo iHRLF, que objetiva acelerar o processo de minimização

da distância entre a função de estado limite no ponto de projeto e a origem do espaço padronizado. Estabeleceu-se, também, uma tolerância máxima igual a  $1 \times 10^{-3}$  para as imprecisões numéricas entre processos iterativos. A respeito do modelo resistente, as verificações foram efetuadas segundo o modelo de comportamento elastoplástico perfeito para o aço CA-50 ( $f_{yk} = 500$  MPa), onde a tensão máxima coincide com a própria tensão de escoamento do material. A tabela a seguir apresenta os modelos probabilísticos, explicitados no Capítulo 5, e utilizados para as nove variáveis aleatórias consideradas.

Tabela 7.1 – Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias

Variável	$\mu_x$	$\sigma_x$	COV.	Distribuição
Base da seção ( $b$ - cm)	$20 + 0,4$	1,22	0,06	Normal
Altura da seção ( $h$ - cm)	$50 + 0,16$	2,56	0,045	Normal
Dist. CG das barras - fibra inferior ( $d''$ - cm)	$d'' + 0,2$	$0,045(d'' + 0,2)$	0,045	Normal
Resist. à compressão - concreto ( $f_c$ ) <sup>1</sup>	$(1,1 \text{ à } 1,22) \cdot f_{ck}$	$(0,1 \text{ à } 0,18) \cdot f_{ck}$	0,09 à 0,15	Normal
Resist. ao escoamento - aço ( $f_y$ )	$1,22 \cdot f_{yk}$	$0,05 \cdot f_{yk}$	0,04	Normal
Parcela permanente das ações ( $g$ )	$g_k$	$0,1 \cdot \mu_x$	0,10	Normal
Parcela variável das ações ( $q$ )	$0,93 \cdot q_k$	$0,2 \cdot \mu_x$	0,20	Gumbel
Incertezas do modelo resistente ( $\theta_R$ )	1,01	$0,041 \cdot \mu_x$	0,041	Normal
Incertezas das solicitações ( $\theta_S$ )	1,00	$0,05 \cdot \mu_x$	0,05	Lognormal

Tal qual apresentado na avaliação de confiabilidade de uma viga exemplo (seção 6.2), de acordo com o trabalho de Santos, Stucchi e Beck (2014), o índice de confiabilidade  $\beta$  será calculado para um ponto de projeto que satisfaça a condição de equilíbrio da equação de estado limite  $g(X)$ , expandida na Equação 7.1. Os momentos solicitantes ( $M_S$ ), por sua vez, serão constituídos pela adição entre parcelas de carregamentos acidentais e permanentes, calculados pelas equações 6.3 e 6.4 (replicadas a seguir), onde  $\chi$  é a razão entre cargas acidentais e totais sobre o elemento.

$$g(X) = R(X) - S(X) = \theta_R \cdot M_R - \theta_S \cdot M_S \quad (7.1)$$

$$M_{Gk} = \frac{M_d}{\gamma_g + \gamma_q \cdot (\chi / (1 - \chi))}$$

$$M_{Qk} = \frac{M_d}{\gamma_q + \gamma_g \cdot ((1 - \chi) / \chi)}$$

<sup>1</sup> Valores extraídos de acordo com a Tabela 5.1.

## 7.1 ABNT NBR 6118

Esta seção irá abordar os resultados e discussões a respeito das simulações, mostradas na forma de gráficos, quanto aos elementos dimensionados conforme a norma brasileira NBR 6118. A sequência das etapas será dada conforme descrito: inicialmente, serão apresentadas as respostas segundo a versão normativa de 2014; em sequência, serão dispostos os gráficos para avaliação da confiabilidade das vigas dimensionadas conforme a NBR 6118:2023; por fim, uma comparação entre as diferenças obtidas será posta em discussão, com especial destaque aos elementos com concreto de alta resistência.

Quanto às especificidades empregadas na norma brasileira, cabe destacar a utilização das seguintes: coeficientes de majoração de ações permanentes e variáveis ( $\gamma_g$  e  $\gamma_q$ ) iguais a 1,4; coeficientes de minoração das resistências de concreto e aço ( $\gamma_c$  e  $\gamma_s$ ) equivalentes a 1,4 e 1,15, respectivamente; e módulo de elasticidade do aço ( $E_s$ ) de 210 GPa.

### 7.1.1 NBR 6118:2014

Primeiramente, torna-se necessário efetuar a etapa de dimensionamento das vigas propostas, conforme o algoritmo de dimensionamento abordado no Capítulo 4. São verificadas as condições de armaduras mínima e altura limite da linha neutra, como forma de manter as condições ideais de ductilidade dos elementos. Em casos onde percebeu-se a necessidade de armadura dupla, definiu-se como valor mínimo a área de aço correspondente a  $2\phi 6.3\text{mm}$ , equivalente a  $0,62\text{ cm}^2$ . Os resultados para as 45 vigas (15 diferentes configurações para cada altura  $h$  estabelecida) são apresentados na Tabela 7.2.

Tabela 7.2 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo a NBR 6118:2014

Nome	$A_s$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_s'$ ( $\text{cm}^2$ )	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	$M_k$ (kN.cm)
$H40, \mu = 0,15, C30$	4,95	-	0,62	-	-5114,7
$H40, \mu = 0,15, C40$	6,61	-	0,83	-	-6819,6
$H40, \mu = 0,15, C50$	8,26	-	1,03	-	-8524,5
$H40, \mu = 0,15, C70$	10,40	-	1,30	-	-10740,9
$H40, \mu = 0,15, C90$	11,89	-	1,49	-	-12275,3
$H40, \mu = 0,25, C30$	8,88	-	1,11	-	-8524,5
$H40, \mu = 0,25, C40$	11,84	-	1,48	-	-11366,1
$H40, \mu = 0,25, C50$	14,81	-	1,85	-	-14207,6
$H40, \mu = 0,25, C70$	18,28	1,74	2,29	0,22	-17901,5

*Continua na página seguinte*

Tabela 7.2 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo a NBR 6118:2014 (continuação)

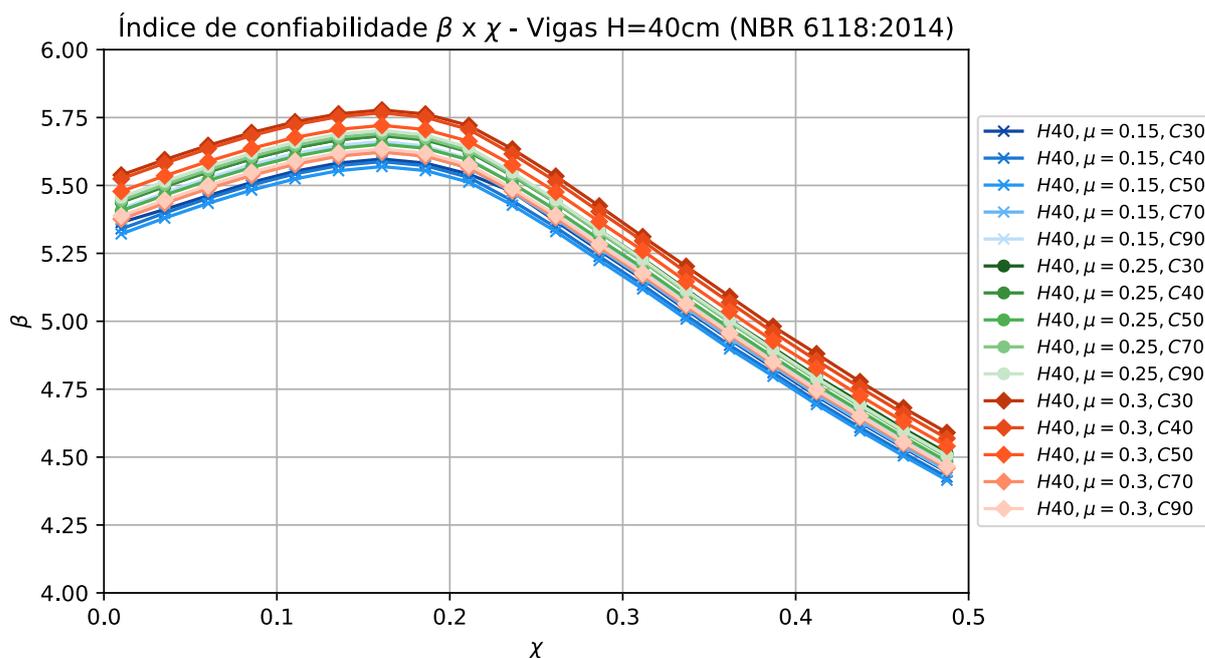
Nome	As (cm <sup>2</sup> )	As' (cm <sup>2</sup> )	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	M <sub>k</sub> (kN.cm)
H40, $\mu = 0,25, C90$	20,68	3,24	2,59	0,40	-20458,9
H40, $\mu = 0,3, C30$	11,08	0,62	1,39	0,08	-10229,5
H40, $\mu = 0,3, C40$	14,78	0,62	1,85	0,08	-13639,3
H40, $\mu = 0,3, C50$	18,47	0,62	2,31	0,08	-17049,1
H40, $\mu = 0,3, C70$	21,84	5,70	2,73	0,71	-21481,9
H40, $\mu = 0,3, C90$	24,75	7,86	3,09	0,98	-24550,7
H50, $\mu = 0,15, C30$	6,23	-	0,62	-	-8080,3
H50, $\mu = 0,15, C40$	8,30	-	0,83	-	-10773,8
H50, $\mu = 0,15, C50$	10,38	-	1,04	-	-13467,2
H50, $\mu = 0,15, C70$	13,08	-	1,31	-	-16968,7
H50, $\mu = 0,15, C90$	14,94	-	1,49	-	-19392,8
H50, $\mu = 0,25, C30$	11,17	-	1,12	-	-13467,2
H50, $\mu = 0,25, C40$	14,89	-	1,49	-	-17956,3
H50, $\mu = 0,25, C50$	18,61	-	1,86	-	-22445,3
H50, $\mu = 0,25, C70$	22,97	2,12	2,30	0,21	-28281,1
H50, $\mu = 0,25, C90$	25,97	3,95	2,60	0,39	-32321,3
H50, $\mu = 0,3, C30$	13,93	0,62	1,39	0,06	-16160,6
H50, $\mu = 0,3, C40$	18,57	0,62	1,86	0,06	-21547,5
H50, $\mu = 0,3, C50$	23,21	0,62	2,32	0,06	-26934,4
H50, $\mu = 0,3, C70$	27,41	6,95	2,74	0,69	-33937,3
H50, $\mu = 0,3, C90$	31,05	9,58	3,10	0,96	-38785,5
H60, $\mu = 0,15, C30$	7,46	-	0,62	-	-11593,1
H60, $\mu = 0,15, C40$	9,94	-	0,83	-	-15457,4
H60, $\mu = 0,15, C50$	12,43	-	1,04	-	-19321,8
H60, $\mu = 0,15, C70$	15,66	-	1,31	-	-24345,4
H60, $\mu = 0,15, C90$	17,90	-	1,49	-	-27823,4
H60, $\mu = 0,25, C30$	13,37	-	1,11	-	-19321,8
H60, $\mu = 0,25, C40$	17,83	-	1,49	-	-25762,4
H60, $\mu = 0,25, C50$	22,29	-	1,86	-	-32203,0
H60, $\mu = 0,25, C70$	27,51	2,56	2,29	0,21	-40575,7
H60, $\mu = 0,25, C90$	31,12	4,78	2,59	0,40	-46372,3
H60, $\mu = 0,3, C30$	16,68	0,62	1,39	0,05	-23186,1
H60, $\mu = 0,3, C40$	22,24	0,62	1,85	0,05	-30914,8

*Continua na página seguinte*

Tabela 7.2 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo a NBR 6118:2014 (continuação)

Nome	As (cm <sup>2</sup> )	As' (cm <sup>2</sup> )	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	M <sub>k</sub> (kN.cm)
H60, $\mu = 0,3, C50$	27,80	0,62	2,32	0,05	-38643,6
H60, $\mu = 0,3, C70$	32,85	8,41	2,74	0,70	-48690,9
H60, $\mu = 0,3, C90$	37,21	11,59	3,10	0,97	-55646,7

Uma vez dimensionadas, permite-se prosseguir para a determinação dos índices de confiabilidade. Definiu-se um intervalo de  $\chi$  (relação entre carregamentos acidentais e totais) entre 0 e 0,5 (dividido em 20 pontos), como forma de contemplar as proporções efetivamente existentes em situações reais de projeto, além de poder avaliar mais precisamente o comportamento dos gráficos. As figuras 7.2, 7.3 e 7.4 reúnem os conjuntos de dados obtidos, individualmente para cada seção de viga escolhida.

Figura 7.2 – Curva  $\beta \times \chi$  para viga  $h = 40\text{cm}$  - NBR 6118:2014.

Fonte: do autor

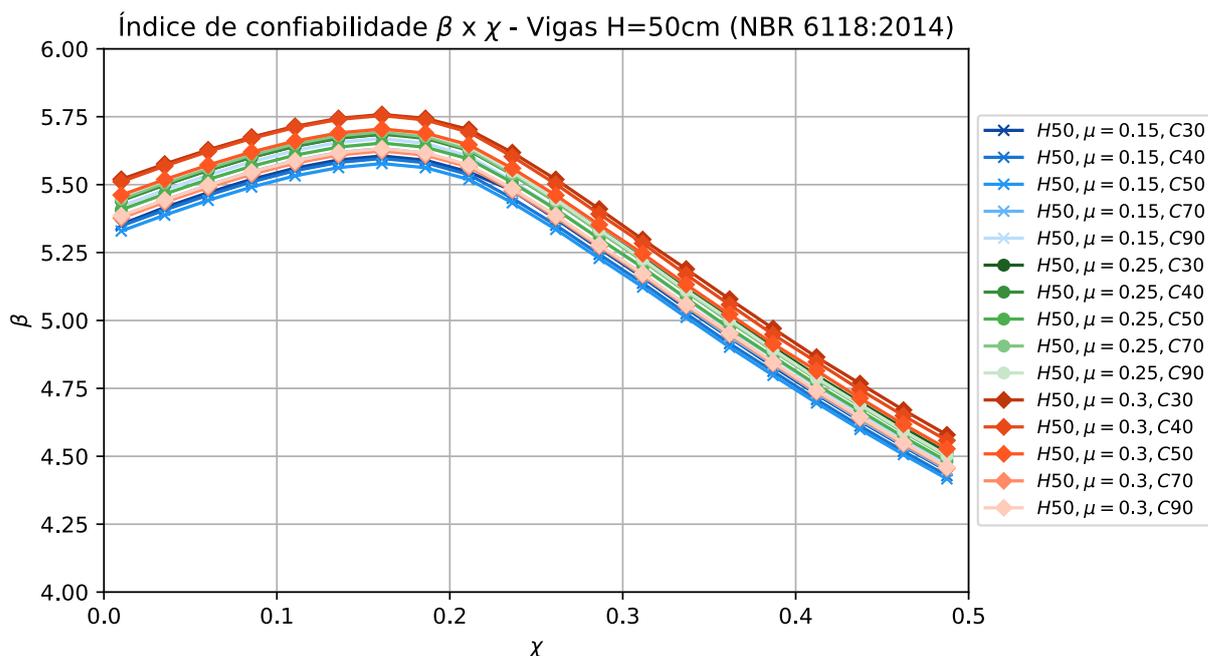


Figura 7.3 – Curva  $\beta$  x  $\chi$  para viga  $h = 50\text{cm}$  - NBR 6118:2014.  
Fonte: do autor

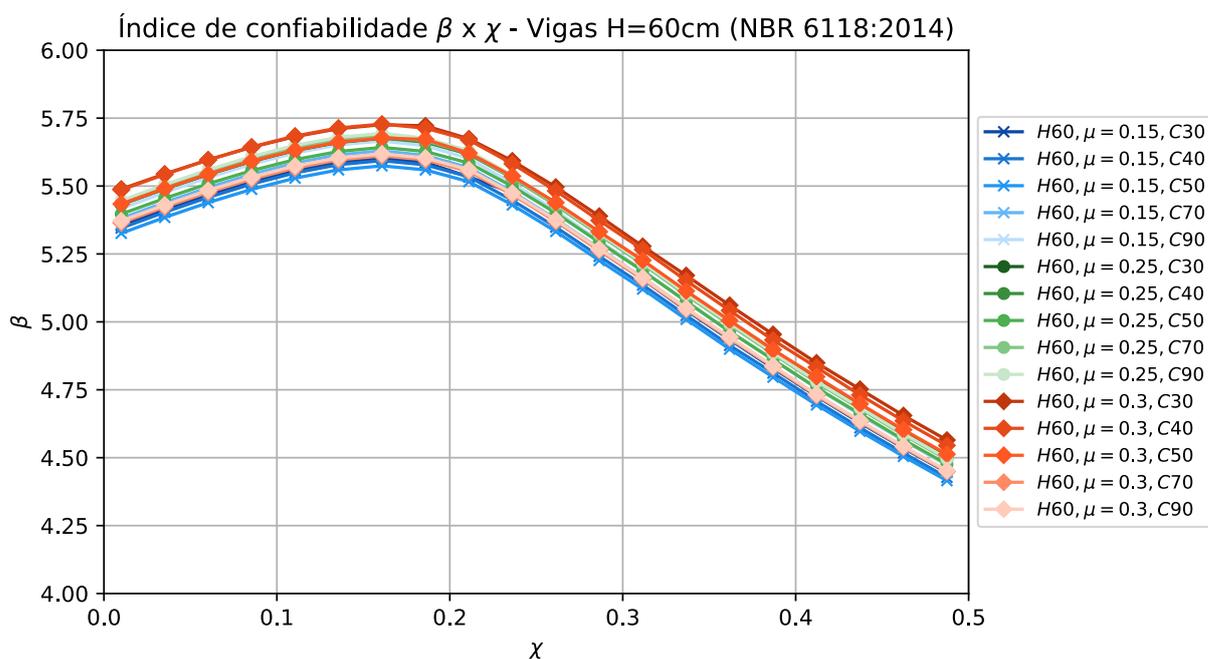


Figura 7.4 – Curva  $\beta$  x  $\chi$  para viga  $h = 60\text{cm}$  - NBR 6118:2014.  
Fonte: do autor

Os três conjuntos de gráficos, das vigas com seções de 40, 50 e 60 centímetros de altura, apresentaram essencialmente o mesmo comportamento quanto à variação do índice de confiabilidade ( $\beta$ ) em função da variação de carregamento acidental incidente sobre a estrutura. Conforme eleva-se o valor de  $\chi$ , observa-se a tendência ao decaimento dos índices de confiabilidade, explicado

pelo aumento das incertezas deste tipo de ação. Ainda assim, percebe-se uma região inicial com crescimento do índice  $\beta$ , com ponto de máximo localizado aproximadamente em  $\chi = 0,17$ .

Conforme apresentado na etapa introdutória, os exemplos foram dimensionados para uma proporção fixa entre  $d$  e  $d'$  igual a 0,10, de modo que os resultados para vigas com equivalentes classes de concreto e momentos fletores adimensionalizados apresentaram uma mesma variação no índice de confiabilidade, independentemente da altura  $h$  adotada na seção. Nota-se, também, que as variações decorrentes do aumento das solicitações (variação de  $\mu$ ), entre os diferentes valores de  $f_{ck}$ , ocorreram em uma estreita faixa, com diferenças percentuais inferiores a 3%.

### 7.1.2 Revisão NBR 6118:2023

Tal qual apresentado na seção anterior, referente à versão da NBR 6118 do ano de 2014, as vigas deverão ser dimensionadas de acordo com a atualização da norma publicada no ano de 2023. Conforme abordado no Capítulo 2, a principal diferença a ser notada deve-se à introdução de um novo coeficiente de fragilidade  $\eta_c$ , que contribuirá na redução das tensões de compressão para concretos com  $f_{ck} > 40$  MPa.

Neste momento, de modo a propiciar a uniformização necessária à adequada comparação entre códigos normativos, o dimensionamento é efetuado para o mesmo momento de serviço ( $M_k$ ) encontrado no dimensionamento segundo a versão da NBR 6118:2014, tida como referência. Portanto, o momento fletor reduzido real, ou adimensionalizado ( $\mu$ ), não será mais aquele estabelecido inicialmente e, por conseguinte, deverá ser recalculado segundo este novo código (para facilitar o acompanhamento dos resultados, a identificação de cada seção manterá o valor de  $\mu$  inicial segundo a versão da NBR 6118:2014).

Logo, apresentam-se os resultados do dimensionamento das seções na Tabela 7.3, com especial atenção aos elementos afetados pela incidência do coeficiente de fragilidade, que devem exibir maior consumo de aço.

Tabela 7.3 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo a NBR 6118:2023

Nome	As (cm <sup>2</sup> )	As' (cm <sup>2</sup> )	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	$M_k$ (kN.cm)
H40, $\mu = 0,15, C30$	4,95	-	0,62	-	-5114,7
H40, $\mu = 0,15, C40$	6,61	-	0,83	-	-6819,6
H40, $\mu = 0,15, C50$	8,32	-	1,04	-	-8524,5
H40, $\mu = 0,15, C70$	10,62	-	1,33	-	-10740,9
H40, $\mu = 0,15, C90$	12,28	-	1,53	-	-12275,3
H40, $\mu = 0,25, C30$	8,88	-	1,11	-	-8524,5

*Continua na página seguinte*

Tabela 7.3 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo a NBR 6118:2023 (continuação)

Nome	As ( $cm^2$ )	As' ( $cm^2$ )	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	$M_k$ (kN.cm)
H40, $\mu = 0,25, C40$	11,84	-	1,48	-	-11366,1
H40, $\mu = 0,25, C50$	15,05	-	1,88	-	-14207,6
H40, $\mu = 0,25, C70$	18,20	4,81	2,27	0,60	-17901,5
H40, $\mu = 0,25, C90$	20,60	7,95	2,57	0,99	-20458,9
H40, $\mu = 0,3, C30$	11,08	0,62	1,39	0,08	-10229,5
H40, $\mu = 0,3, C40$	14,78	0,62	1,85	0,08	-13639,3
H40, $\mu = 0,3, C50$	18,36	1,47	2,30	0,18	-17049,1
H40, $\mu = 0,3, C70$	21,76	8,78	2,72	1,10	-21481,9
H40, $\mu = 0,3, C90$	24,67	12,58	3,08	1,57	-24550,7
H50, $\mu = 0,15, C30$	6,23	-	0,62	-	-8080,3
H50, $\mu = 0,15, C40$	8,30	-	0,83	-	-10773,8
H50, $\mu = 0,15, C50$	10,46	-	1,05	-	-13467,2
H50, $\mu = 0,15, C70$	13,35	-	1,33	-	-16968,7
H50, $\mu = 0,15, C90$	15,43	-	1,54	-	-19392,8
H50, $\mu = 0,25, C30$	11,17	-	1,12	-	-13467,2
H50, $\mu = 0,25, C40$	14,89	-	1,49	-	-17956,3
H50, $\mu = 0,25, C50$	18,92	-	1,89	-	-22445,3
H50, $\mu = 0,25, C70$	22,84	5,87	2,28	0,59	-28281,1
H50, $\mu = 0,25, C90$	25,83	9,68	2,58	0,97	-32321,3
H50, $\mu = 0,3, C30$	13,93	0,62	1,39	0,06	-16160,6
H50, $\mu = 0,3, C40$	18,57	0,62	1,86	0,06	-21547,5
H50, $\mu = 0,3, C50$	23,06	1,83	2,31	0,18	-26934,4
H50, $\mu = 0,3, C70$	27,28	10,69	2,73	1,07	-33937,3
H50, $\mu = 0,3, C90$	30,91	15,32	3,09	1,53	-38785,5
H60, $\mu = 0,15, C30$	7,46	-	0,62	-	-11593,1
H60, $\mu = 0,15, C40$	9,94	-	0,83	-	-15457,4
H60, $\mu = 0,15, C50$	12,53	-	1,04	-	-19321,8
H60, $\mu = 0,15, C70$	15,99	-	1,33	-	-24345,4
H60, $\mu = 0,15, C90$	18,48	-	1,54	-	-27823,4
H60, $\mu = 0,25, C30$	13,37	-	1,11	-	-19321,8
H60, $\mu = 0,25, C40$	17,83	-	1,49	-	-25762,4
H60, $\mu = 0,25, C50$	22,66	-	1,89	-	-32203,0
H60, $\mu = 0,25, C70$	27,37	7,10	2,28	0,59	-40575,7

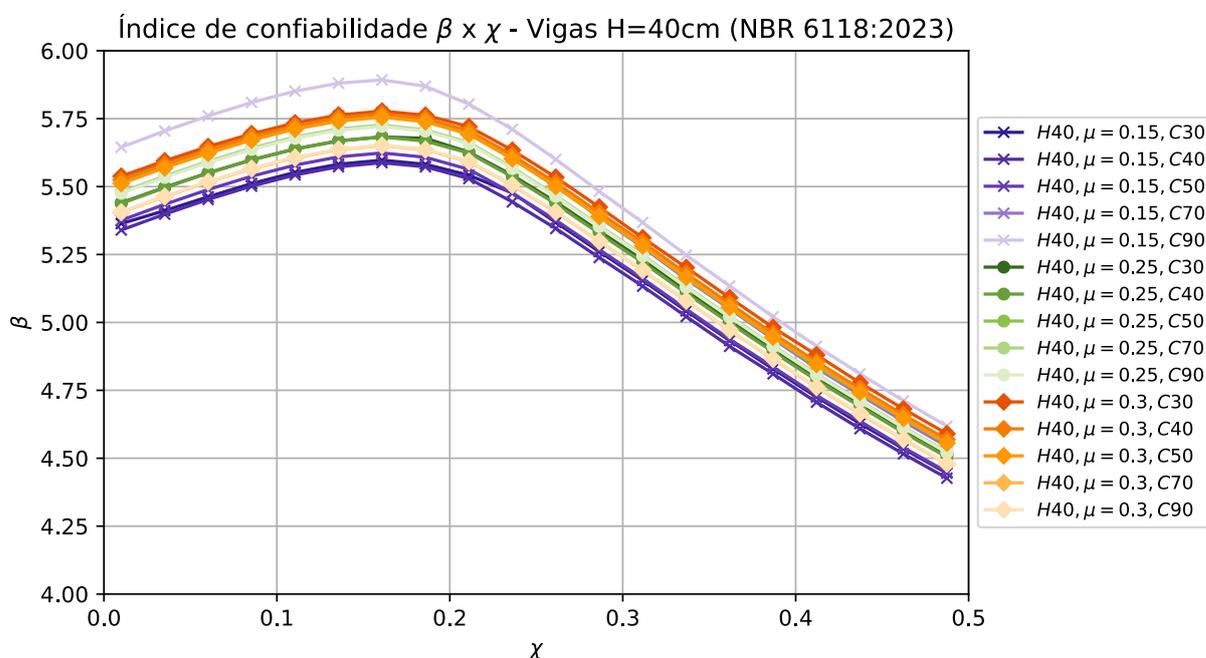
Continua na página seguinte

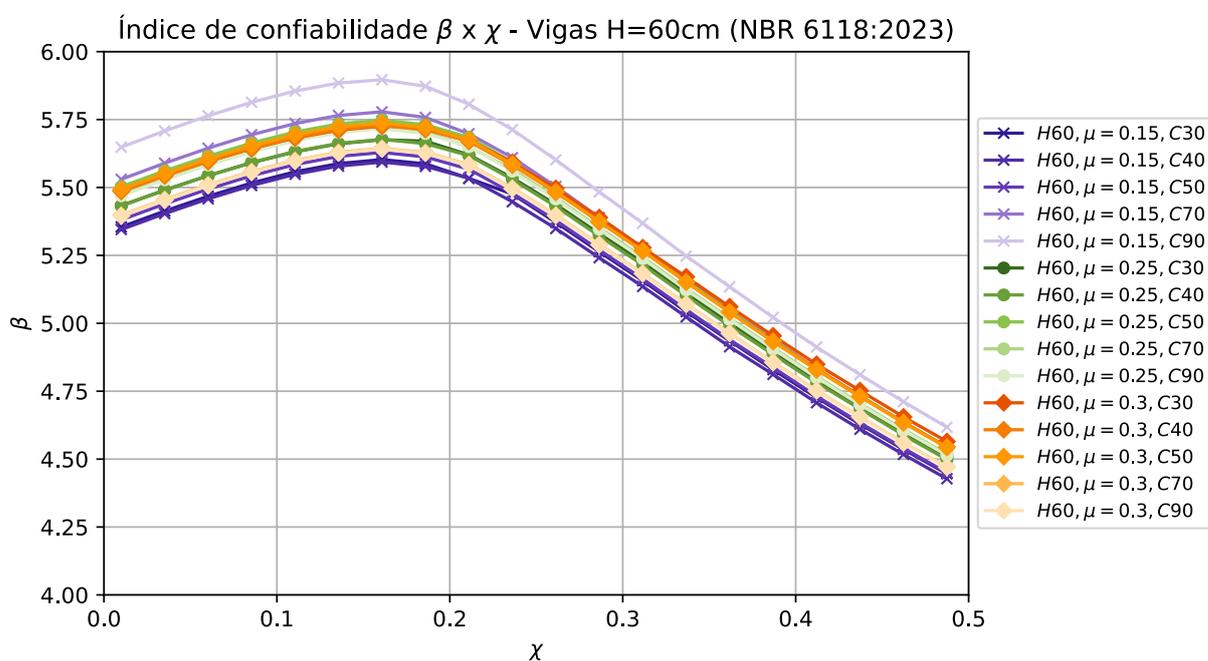
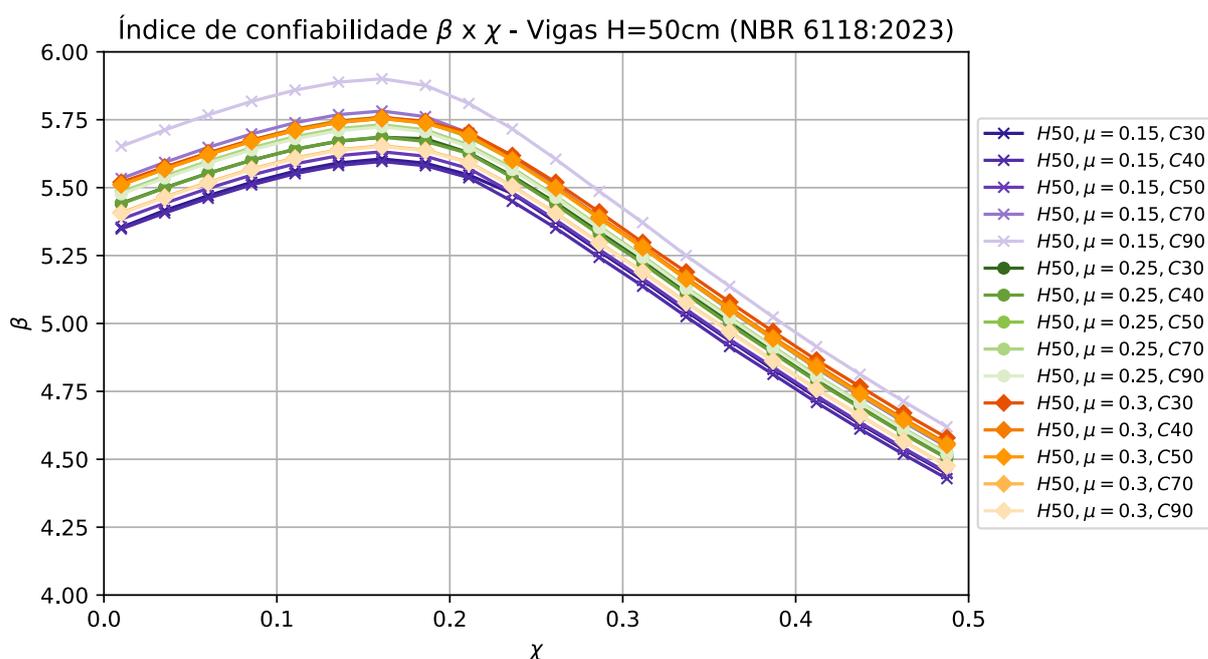
Tabela 7.3 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo a NBR 6118:2023 (continuação)

Nome	As (cm <sup>2</sup> )	As' (cm <sup>2</sup> )	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	M <sub>k</sub> (kN.cm)
H60, $\mu = 0,25, C90$	30,97	11,72	2,58	0,98	-46372,3
H60, $\mu = 0,3, C30$	16,68	0,62	1,39	0,05	-23186,1
H60, $\mu = 0,3, C40$	22,24	0,62	1,85	0,05	-30914,8
H60, $\mu = 0,3, C50$	27,63	2,20	2,30	0,18	-38643,6
H60, $\mu = 0,3, C70$	32,70	12,94	2,73	1,08	-48690,9
H60, $\mu = 0,3, C90$	37,06	18,54	3,09	1,55	-55646,7

Assim como esperado, observa-se um aumento da armadura calculada em relação à versão anterior da norma, conforme a evolução da resistência à compressão do concreto. No ponto máximo, onde o  $f_{ck}$  é de 90 MPa, os dimensionamentos apontaram acréscimos de 3% à 19% ao valor de área de aço total calculada (em valores aproximados) em comparação à versão anterior da normativa brasileira, segundo as mesmas solicitações.

Apresentam-se, então, os gráficos de avaliação do índice de confiabilidade para as vigas dimensionadas conforme a NBR 6118:2023.





Assim como o bloco de resultados comentado anteriormente, os índices de confiabilidade apresentaram o mesmo comportamento para vigas com diferentes seções transversais. Nas três diferentes alturas de viga, percebeu-se um destaque com aumento da confiabilidade nos

elementos com  $\mu = 0,15$  e C90, de forma isolada. Em uma comparação direta com os demais elementos da classe resistente  $f_{ck} = 90$  MPa, o caso destacado apresentou os maiores índices de confiabilidade para valores ligeiramente inferiores de profundidade da linha neutra, sendo o único cujo dimensionamento resultou em armadura simples. Ademais, não foram observadas variações relevantes dos cossenos diretores das variáveis aleatórias para os elementos em questão.

### 7.1.3 Comparação entre versões da norma brasileira

Uma vez obtidos os índices de confiabilidade para os elementos dimensionados de acordo com ambas versões da norma brasileira para projeto de estruturas de concreto, permite-se avaliar detalhadamente as alterações promovidas pela atualização normativa.

Conforme observou-se nas subseções anteriores, a confiabilidade calculada para diferentes seções transversais de viga mostrou-se essencialmente igual, de tal sorte que a comparação entre os resultados de apenas uma das seções já será suficiente para representar o comportamento observado em todo o conjunto. Além disso, só serão observadas mudanças nos elementos com  $f_{ck}$  acima de 40 MPa, em razão da incidência do coeficiente de fragilidade apenas nesta faixa de resistência, como já abordado. Desta forma, dispõem-se os gráficos das figuras 7.8, 7.9 e 7.10, relacionados aos elementos com  $f_{ck}$  igual a 50, 70 e 90 MPa, respectivamente.

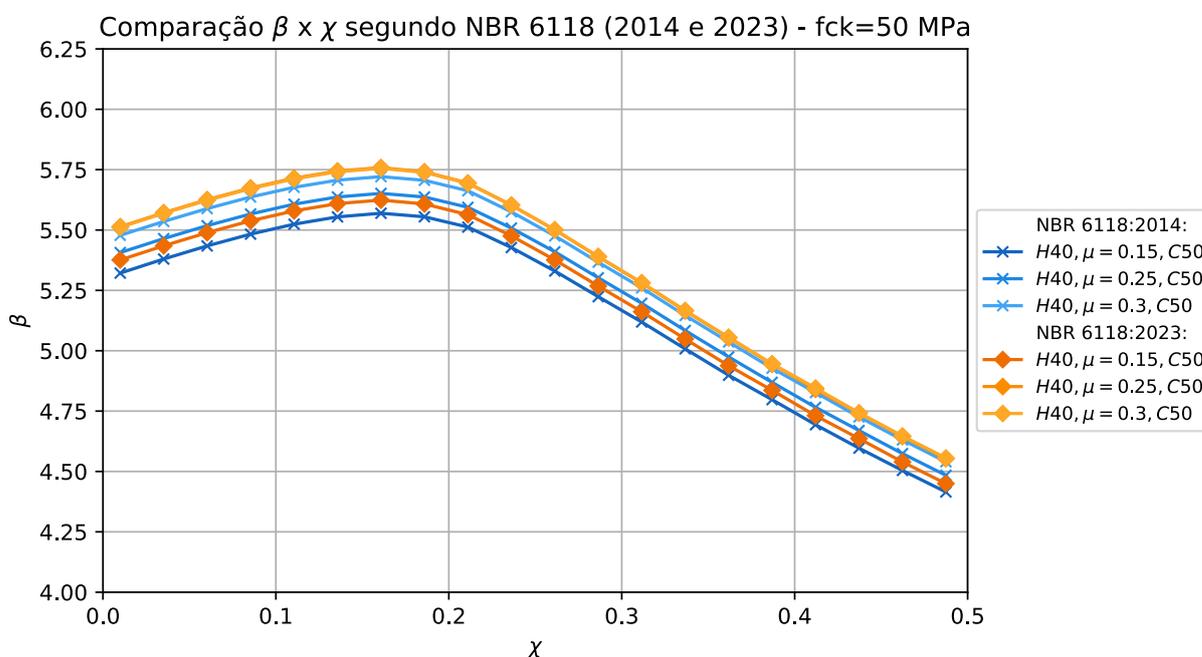


Figura 7.8 – Índices de confiabilidade viga H=40cm (C50) - comparação entre versões da NBR 6118.

Fonte: do autor

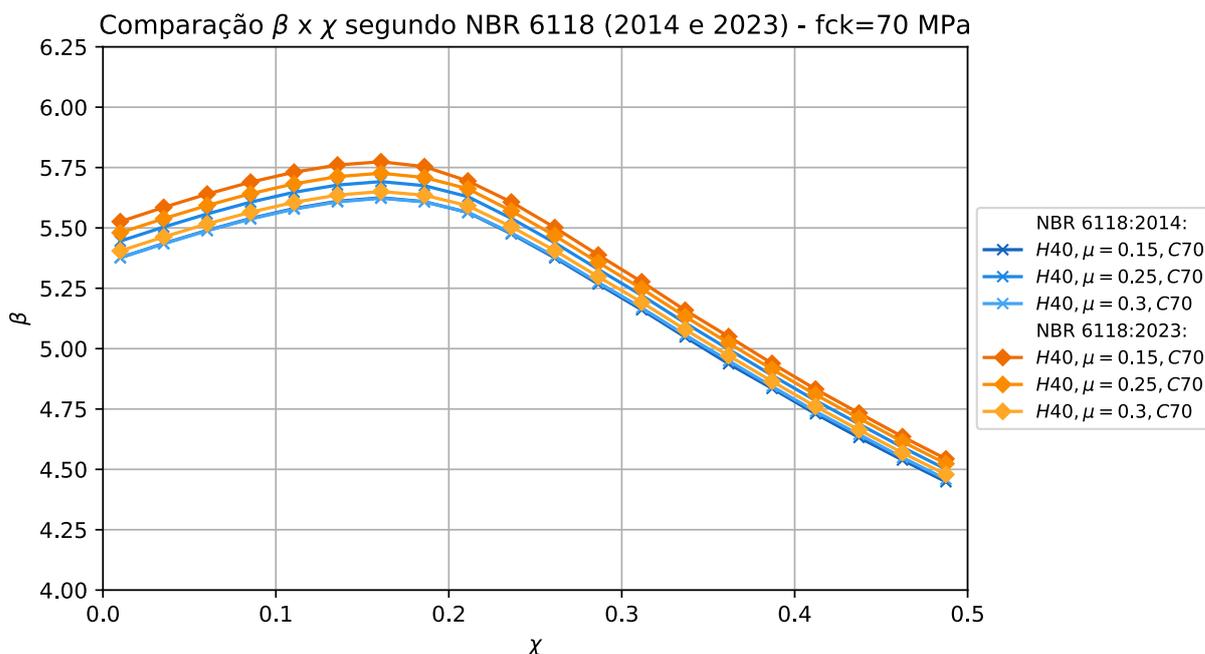


Figura 7.9 – Índices de confiabilidade viga H=40cm (C70) - comparação entre versões da NBR 6118.

Fonte: do autor

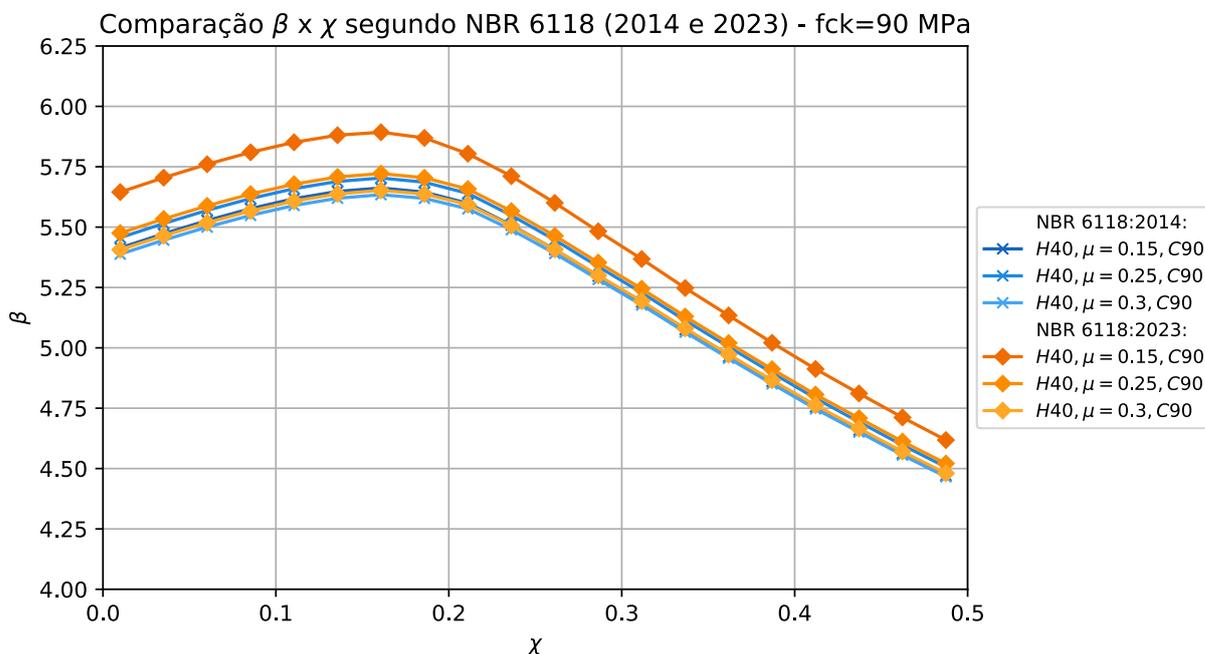


Figura 7.10 – Índices de confiabilidade viga H=40cm (C90) - comparação entre versões da NBR 6118.

Fonte: do autor

Os presentes diagramas de distribuição dos índices de confiabilidade demonstram que, ainda que as áreas de aço calculadas pela atualização de 2023 da NBR 6118 superem em até 19% o cálculo segundo a versão anterior da norma, os valores de  $\beta$  não acompanham tal crescimento. Salvo no caso específico de  $\mu = 0,15$  e C90, onde nota-se um crescimento máximo de cerca de 5% do

índice, em todas as demais situações as variações podem ser consideradas desprezáveis no que tange à confiabilidade de vigas sujeitas à flexão simples. Invariavelmente, os casos simulados por ambas versões da norma excederam com certa margem os valores limites recomendados de  $\beta_T$ , trazidos no Capítulo 3, seja pelas recomendações gerais trazidas pelo JCSS (2001a) e *fib* (2013) ( $\beta_T$  entre 3,8 e 4,2), como pela abordagem específica do ASCE/SEI 7-22, de  $\beta_T = 3,0$  para rupturas por flexão.

## 7.2 EN 1992-1-1 - EUROCODE 2

Outro ponto de interessante destaque e relevância, sob o ponto de vista da comparação direta, trata-se da avaliação do comportamento de elementos com idênticas propriedades físicas, geométricas e de solitação àqueles vistos até então, porém dimensionados a partir das diretrizes do Eurocode 2: *Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings*. Serão apresentados, essencialmente, dois conjuntos de análises: inicialmente, considerando-se as disposições da versão EN 1992-1-1:2004, atualmente vigente; e, em segunda instância, a análise de confiabilidade para elementos dimensionados conforme o FprEN 1992-1-1:2022, que trata-se do projeto de revisão mais recente da normativa europeia (não vigente de forma oficial, até o momento do presente estudo), que inspirou algumas mudanças vistas e implementadas na versão da NBR 6118:2023.

Um importante aspecto referente aos estudos que consideram a aplicação do código europeu para dimensionamento de estruturas de concreto refere-se aos dimensionamentos das áreas de aço das seções, que não serão únicos a uma estrutura caso as proporções de carregamentos acidentais sejam distintas. Isso se dá em razão dos coeficientes de ponderação de esforços para cargas permanentes e acidentais principais serem diferentes entre si ( $\gamma_g = 1,35$  e  $\gamma_q = 1,50$ ), diferente do que é observado na norma brasileira. Logo, ao acompanhar diferentes valores de  $\chi$ , deverá ser observada uma ligeira alteração nos valores de  $A_s$  e/ou  $A'_s$ .

### 7.2.1 Eurocode 2:2004

O primeiro passo consiste do dimensionamento dos elementos, assim como efetuado na seção anterior. Novamente, os momentos de serviço serão mantidos iguais entre as análises, de forma que se atendam aos mesmos casos de solitações. Os momentos adimensionalizados são recalculados conforme o código em questão, mas manter-se-ão iguais nas identificações das vigas, para efeito de comparação.

A seguir, são exibidos os resultados resumidos de dimensionamento segundo o Eurocode 2:2004, cujos valores apresentados referem-se às situações de extremidade ( $\chi = 0,01$  à  $\chi = 0,49$ ), de modo que deve-se observar o aumento da área de aço calculada a partir do crescimento das parcelas acidentais na proporção total das solitações.

Tabela 7.4 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo Euro-code 2:2004

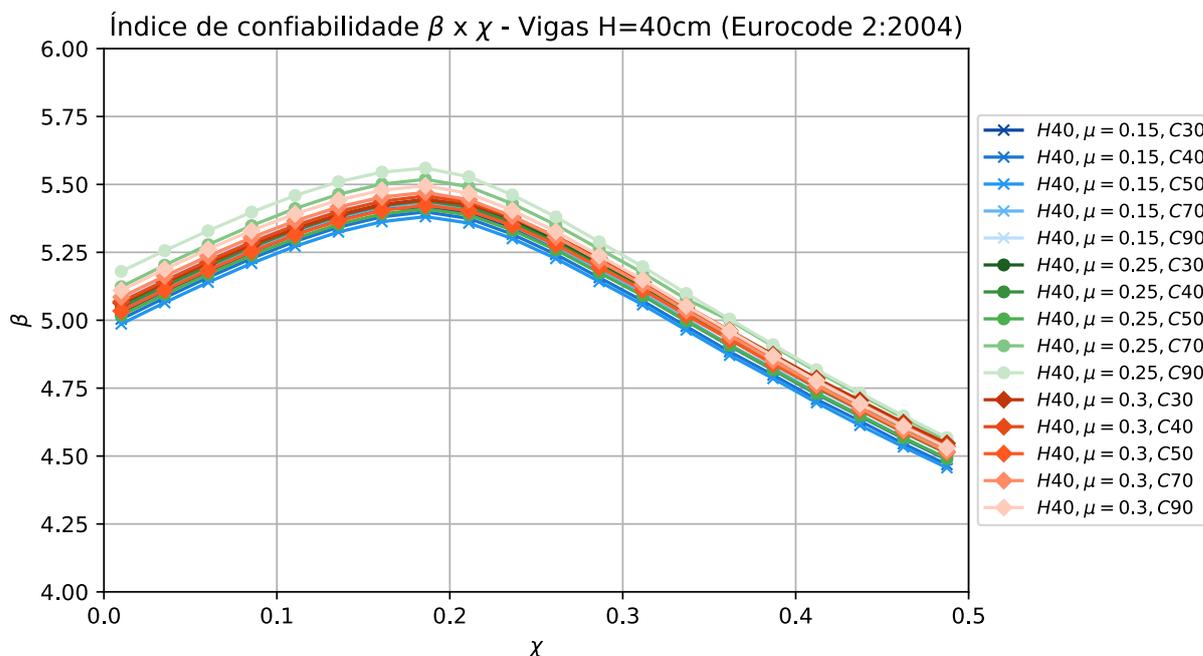
Nome	As (cm <sup>2</sup> )	As' (cm <sup>2</sup> )	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	$M_k$ (kN.cm)
H40, $\mu = 0,15, C30$	4,7 - 5,0	-	0,59 - 0,63	-	-5114,7
H40, $\mu = 0,15, C40$	6,3 - 6,7	-	0,79 - 0,83	-	-6819,6
H40, $\mu = 0,15, C50$	7,9 - 8,3	-	0,98 - 1,04	-	-8524,5
H40, $\mu = 0,15, C70$	9,9 - 10,5	-	1,24 - 1,31	-	-10740,9
H40, $\mu = 0,15, C90$	11,3 - 12,0	-	1,42 - 1,50	-	-12275,3
H40, $\mu = 0,25, C30$	8,4 - 8,9	-	1,05 - 1,11	-	-8524,5
H40, $\mu = 0,25, C40$	11,2 - 11,9	-	1,40 - 1,48	-	-11366,1
H40, $\mu = 0,25, C50$	14,0 - 14,8	-	1,74 - 1,85	-	-14207,6
H40, $\mu = 0,25, C70$	17,6 - 18,6	0,0 - 0,6	2,20 - 2,33	0,00 - 0,08	-17901,5
H40, $\mu = 0,25, C90$	20,0 - 21,1	0,6 - 1,8	2,50 - 2,63	0,08 - 0,22	-20458,9
H40, $\mu = 0,3, C30$	10,4 - 11,1	-	1,30 - 1,39	-	-10229,5
H40, $\mu = 0,3, C40$	13,9 - 14,8	-	1,74 - 1,85	-	-13639,3
H40, $\mu = 0,3, C50$	17,4 - 18,5	-	2,17 - 2,31	-	-17049,1
H40, $\mu = 0,3, C70$	21,1 - 22,2	3,3 - 4,5	2,64 - 2,78	0,41 - 0,57	-21481,9
H40, $\mu = 0,3, C90$	23,9 - 25,2	5,2 - 6,7	2,99 - 3,15	0,65 - 0,84	-24550,7
H50, $\mu = 0,15, C30$	5,9 - 6,3	-	0,59 - 0,63	-	-8080,3
H50, $\mu = 0,15, C40$	7,9 - 8,4	-	0,79 - 0,84	-	-10773,8
H50, $\mu = 0,15, C50$	9,9 - 10,5	-	0,99 - 1,05	-	-13467,2
H50, $\mu = 0,15, C70$	12,5 - 13,2	-	1,25 - 1,32	-	-16968,7
H50, $\mu = 0,15, C90$	14,3 - 15,1	-	1,43 - 1,51	-	-19392,8
H50, $\mu = 0,25, C30$	10,5 - 11,2	-	1,05 - 1,12	-	-13467,2
H50, $\mu = 0,25, C40$	14,0 - 14,9	-	1,40 - 1,49	-	-17956,3
H50, $\mu = 0,25, C50$	17,5 - 18,6	-	1,75 - 1,86	-	-22445,3
H50, $\mu = 0,25, C70$	22,1 - 23,4	0,0 - 0,6	2,21 - 2,34	0,00 - 0,06	-28281,1
H50, $\mu = 0,25, C90$	25,1 - 26,4	0,6 - 2,1	2,51 - 2,64	0,06 - 0,21	-32321,3
H50, $\mu = 0,3, C30$	13,1 - 14,0	-	1,31 - 1,40	-	-16160,6
H50, $\mu = 0,3, C40$	17,4 - 18,6	-	1,74 - 1,86	-	-21547,5
H50, $\mu = 0,3, C50$	21,8 - 23,3	-	2,18 - 2,33	-	-26934,4
H50, $\mu = 0,3, C70$	26,6 - 27,9	4,0 - 5,5	2,66 - 2,79	0,40 - 0,55	-33937,3
H50, $\mu = 0,3, C90$	30,1 - 31,6	6,3 - 8,2	3,01 - 3,16	0,63 - 0,82	-38785,5
H60, $\mu = 0,15, C30$	7,1 - 7,5	-	0,59 - 0,63	-	-11593,1
H60, $\mu = 0,15, C40$	9,5 - 10,0	-	0,79 - 0,84	-	-15457,4
H60, $\mu = 0,15, C50$	11,9 - 12,5	-	0,99 - 1,05	-	-19321,8

*Continua na página seguinte*

Tabela 7.4 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo Eurocode 2:2004 (continuação)

Nome	As (cm <sup>2</sup> )	As' (cm <sup>2</sup> )	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	$M_k$ (kN.cm)
H60, $\mu = 0,15, C70$	14,9 - 15,8	-	1,25 - 1,32	-	-24345,4
H60, $\mu = 0,15, C90$	17,1 - 18,1	-	1,42 - 1,51	-	-27823,4
H60, $\mu = 0,25, C30$	12,6 - 13,4	-	1,05 - 1,12	-	-19321,8
H60, $\mu = 0,25, C40$	16,8 - 17,9	-	1,40 - 1,49	-	-25762,4
H60, $\mu = 0,25, C50$	21,0 - 22,3	-	1,75 - 1,86	-	-32203,0
H60, $\mu = 0,25, C70$	26,5 - 28,0	0,0 - 0,6	2,21 - 2,34	0,00 - 0,05	-40575,7
H60, $\mu = 0,25, C90$	30,1 - 31,7	0,8 - 2,6	2,51 - 2,64	0,06 - 0,22	-46372,3
H60, $\mu = 0,3, C30$	15,7 - 16,7	-	1,31 - 1,39	-	-23186,1
H60, $\mu = 0,3, C40$	20,9 - 22,3	-	1,74 - 1,86	-	-30914,8
H60, $\mu = 0,3, C50$	26,1 - 27,8	-	2,18 - 2,32	-	-38643,6
H60, $\mu = 0,3, C70$	31,8 - 33,5	4,8 - 6,7	2,65 - 2,79	0,40 - 0,56	-48690,9
H60, $\mu = 0,3, C90$	36,0 - 37,9	7,7 - 9,9	3,00 - 3,16	0,64 - 0,82	-55646,7

A partir da implementação do método FORM, são obtidos os gráficos das figuras 7.11, 7.12 e 7.13. Além dos coeficientes de ponderação de ações já abordados, destaca-se a utilização de  $\gamma_c = 1,50$  e  $E_s = 200$  GPa.



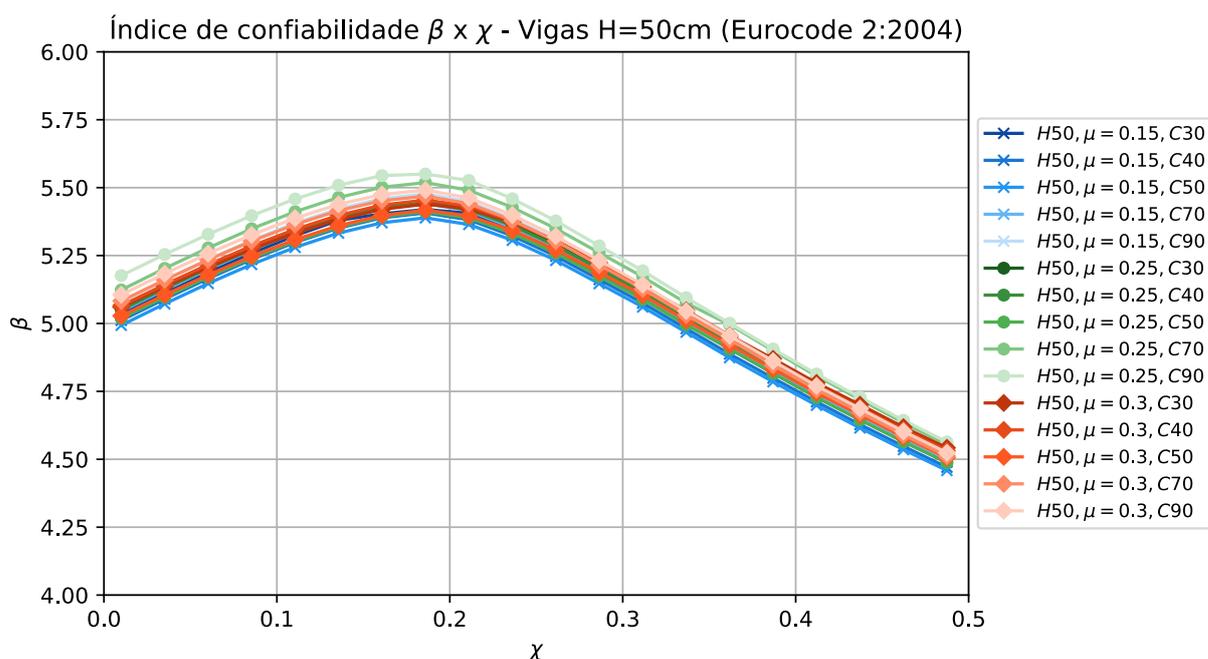


Figura 7.12 – Curva  $\beta \times \chi$  para viga H=50cm - EC2:2004.

Fonte: do autor

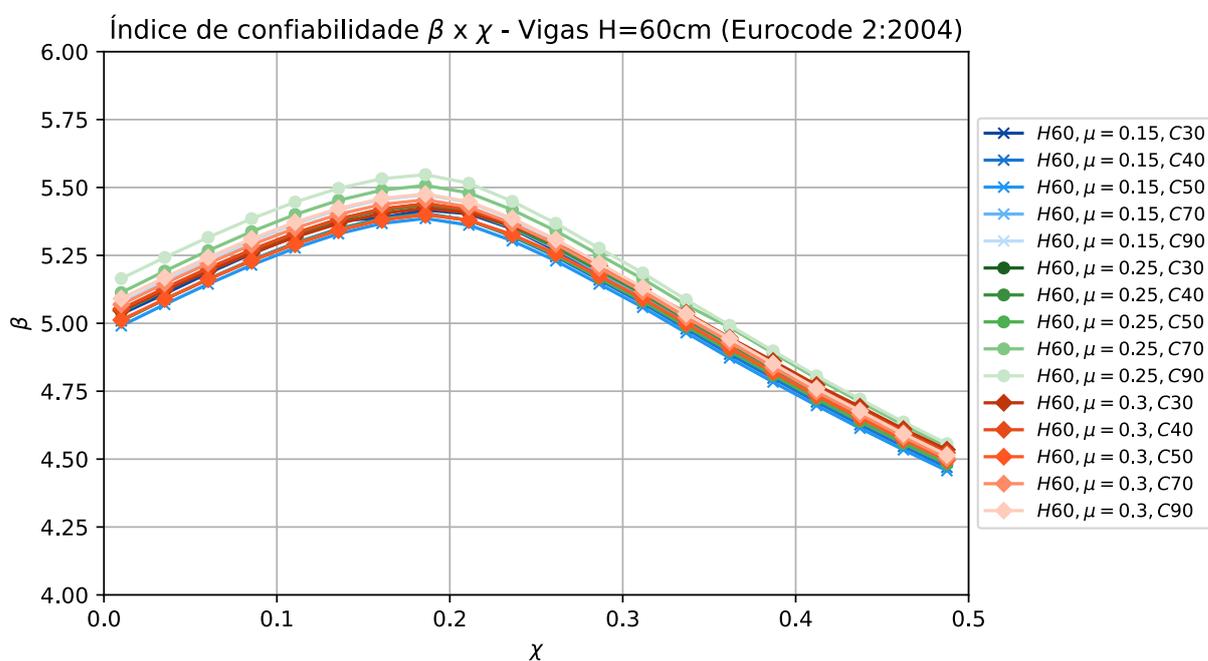


Figura 7.13 – Curva  $\beta \times \chi$  para viga H=60cm - EC2:2004.

Fonte: do autor

Assim como observado nos elementos dimensionados pela NBR 6118, as curvas dos índices de confiabilidade mantiveram-se iguais para as diferentes alturas de seção transversal. Em todos os casos, observa-se uma certa uniformização para a distribuição de  $\beta \times \chi$ , independente do  $f_{ck}$

ou da solicitação atribuída, de forma que os resultados consolidam-se em uma estreita faixa de variação.

Ainda que seja aplicado um valor maior ao coeficiente de majoração  $\gamma_q$  como forma de contrapor as incertezas decorrentes do acréscimo de cargas acidentais, o valor mínimo encontrado para o índice de confiabilidade convergiu com a maior relação utilizada entre cargas variáveis e cargas totais ( $\chi \approx 0,50$ ), com valores próximos de  $\beta = 4,50$ . Estes valores, entretanto, superam os índices alvo trazidos no Capítulo 3, que variam entre  $\beta_T = 3,0$  e  $\beta_T = 4,2$ , para ruptura por flexão com consequências moderadas de falha em um tempo de referência de 50 anos.

## 7.2.2 Projeto de revisão Eurocode 2:2022

O projeto de revisão do Eurocode 2 apresentado no ano de 2022 surge com algumas importantes modificações em relação à versão publicada no ano de 2004. Dentre elas, destacam-se: a deformação última do concreto ( $\epsilon_{cu}$ ) é fixada em 3,5‰, independente da resistência característica do concreto; uma nova formulação para a determinação da relação  $x_u/d$ , denominada por alguns autores de  $\xi_{lim}$ ; e a inserção do coeficiente de fragilidade  $\eta_{cc}$ , incidente à formulação de  $f_{cd}$ , em substituição ao antigo coeficiente  $\eta$ , que encontrava-se presente no cálculo das tensões segundo o diagrama retangular equivalente.

Em razão destas modificações, torna-se relevante avaliar a confiabilidade dos elementos aqui propostos segundo este projeto de revisão da normativa europeia.

A Tabela 7.5, disposta abaixo, apresenta os resultados deste novo dimensionamento.

Tabela 7.5 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo FprEN 1992-1-1:2022

Nome	$A_s$ ( $cm^2$ )	$A_s'$ ( $cm^2$ )	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	$M_k$ (kN.cm)
$H40, \mu = 0,15, C30$	4,7 - 5,0	-	0,59 - 0,63	-	-5114,7
$H40, \mu = 0,15, C40$	6,3 - 6,7	-	0,79 - 0,83	-	-6819,6
$H40, \mu = 0,15, C50$	7,9 - 8,4	-	0,99 - 1,05	-	-8524,5
$H40, \mu = 0,15, C70$	10,0 - 10,6	-	1,25 - 1,32	-	-10740,9
$H40, \mu = 0,15, C90$	11,4 - 12,1	-	1,42 - 1,51	-	-12275,3
$H40, \mu = 0,25, C30$	8,4 - 8,9	-	1,05 - 1,11	-	-8524,5
$H40, \mu = 0,25, C40$	11,2 - 11,9	-	1,40 - 1,48	-	-11366,1
$H40, \mu = 0,25, C50$	14,1 - 15,0	-	1,77 - 1,88	-	-14207,6
$H40, \mu = 0,25, C70$	17,8 - 19,0	-	2,23 - 2,37	-	-17901,5
$H40, \mu = 0,25, C90$	20,3 - 21,5	-	2,53 - 2,69	-	-20458,9
$H40, \mu = 0,3, C30$	10,4 - 11,1	-	1,30 - 1,39	-	-10229,5

*Continua na página seguinte*

Tabela 7.5 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo FprEN 1992-1-1:2022 (continuação)

Nome	As (cm <sup>2</sup> )	As' (cm <sup>2</sup> )	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	$M_k$ (kN.cm)
H40, $\mu = 0,3, C40$	13,9 - 14,8	-	1,74 - 1,85	-	-13639,3
H40, $\mu = 0,3, C50$	17,7 - 18,9	-	2,21 - 2,36	-	-17049,1
H40, $\mu = 0,3, C70$	22,3 - 23,8	-	2,79 - 2,98	-	-21481,9
H40, $\mu = 0,3, C90$	25,3 - 27,0	-	3,16 - 3,37	-	-24550,7
H50, $\mu = 0,15, C30$	5,9 - 6,3	-	0,59 - 0,63	-	-8080,3
H50, $\mu = 0,15, C40$	7,9 - 8,4	-	0,79 - 0,84	-	-10773,8
H50, $\mu = 0,15, C50$	10,0 - 10,5	-	1,00 - 1,05	-	-13467,2
H50, $\mu = 0,15, C70$	12,6 - 13,3	-	1,26 - 1,33	-	-16968,7
H50, $\mu = 0,15, C90$	14,3 - 15,1	-	1,43 - 1,51	-	-19392,8
H50, $\mu = 0,25, C30$	10,5 - 11,2	-	1,05 - 1,12	-	-13467,2
H50, $\mu = 0,25, C40$	14,0 - 14,9	-	1,40 - 1,49	-	-17956,3
H50, $\mu = 0,25, C50$	17,8 - 18,9	-	1,78 - 1,89	-	-22445,3
H50, $\mu = 0,25, C70$	22,4 - 23,9	-	2,24 - 2,39	-	-28281,1
H50, $\mu = 0,25, C90$	25,5 - 27,1	-	2,55 - 2,71	-	-32321,3
H50, $\mu = 0,3, C30$	13,1 - 14,0	-	1,31 - 1,40	-	-16160,6
H50, $\mu = 0,3, C40$	17,4 - 18,6	-	1,74 - 1,86	-	-21547,5
H50, $\mu = 0,3, C50$	22,2 - 23,7	-	2,22 - 2,37	-	-26934,4
H50, $\mu = 0,3, C70$	28,0 - 29,9	-	2,80 - 2,99	-	-33937,3
H50, $\mu = 0,3, C90$	31,8 - 33,9	-	3,18 - 3,39	-	-38785,5
H60, $\mu = 0,15, C30$	7,1 - 7,5	-	0,59 - 0,63	-	-11593,1
H60, $\mu = 0,15, C40$	9,5 - 10,0	-	0,79 - 0,84	-	-15457,4
H60, $\mu = 0,15, C50$	11,9 - 12,6	-	0,99 - 1,05	-	-19321,8
H60, $\mu = 0,15, C70$	15,1 - 15,9	-	1,25 - 1,33	-	-24345,4
H60, $\mu = 0,15, C90$	17,2 - 18,1	-	1,43 - 1,51	-	-27823,4
H60, $\mu = 0,25, C30$	12,6 - 13,4	-	1,05 - 1,12	-	-19321,8
H60, $\mu = 0,25, C40$	16,8 - 17,9	-	1,40 - 1,49	-	-25762,4
H60, $\mu = 0,25, C50$	21,3 - 22,6	-	1,77 - 1,89	-	-32203,0
H60, $\mu = 0,25, C70$	26,9 - 28,6	-	2,24 - 2,38	-	-40575,7
H60, $\mu = 0,25, C90$	30,5 - 32,4	-	2,54 - 2,70	-	-46372,3
H60, $\mu = 0,3, C30$	15,7 - 16,7	-	1,31 - 1,39	-	-23186,1
H60, $\mu = 0,3, C40$	20,9 - 22,3	-	1,74 - 1,86	-	-30914,8
H60, $\mu = 0,3, C50$	26,6 - 28,4	-	2,22 - 2,37	-	-38643,6
H60, $\mu = 0,3, C70$	33,6 - 35,9	-	2,80 - 2,99	-	-48690,9

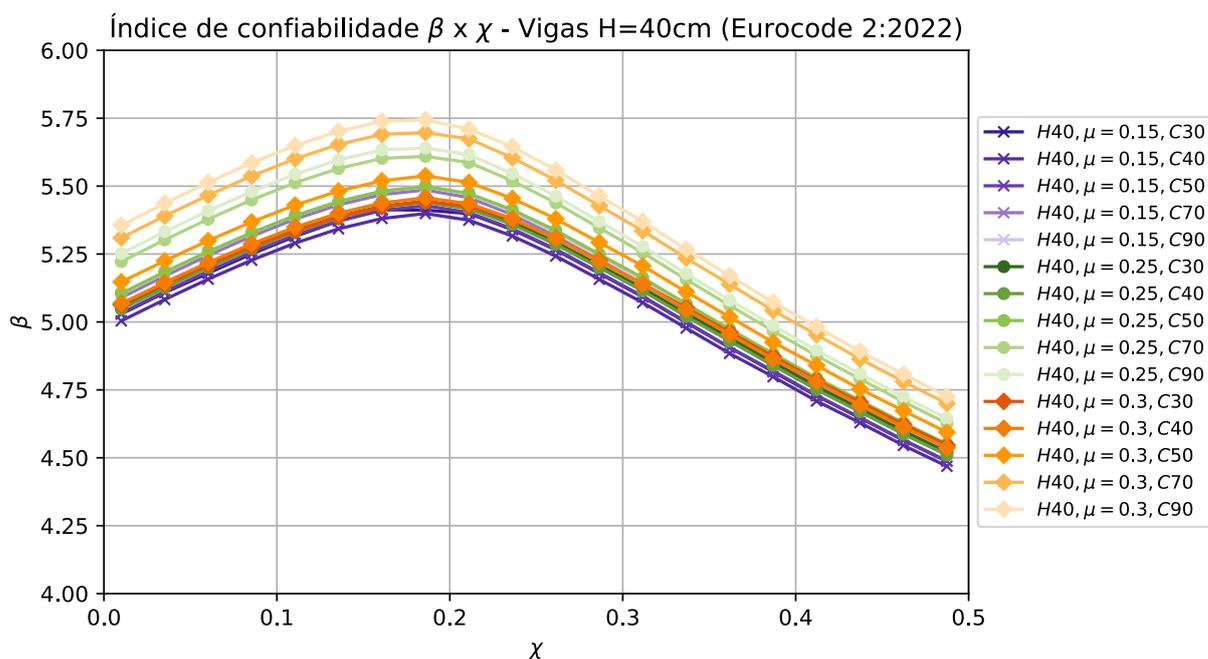
Continua na página seguinte

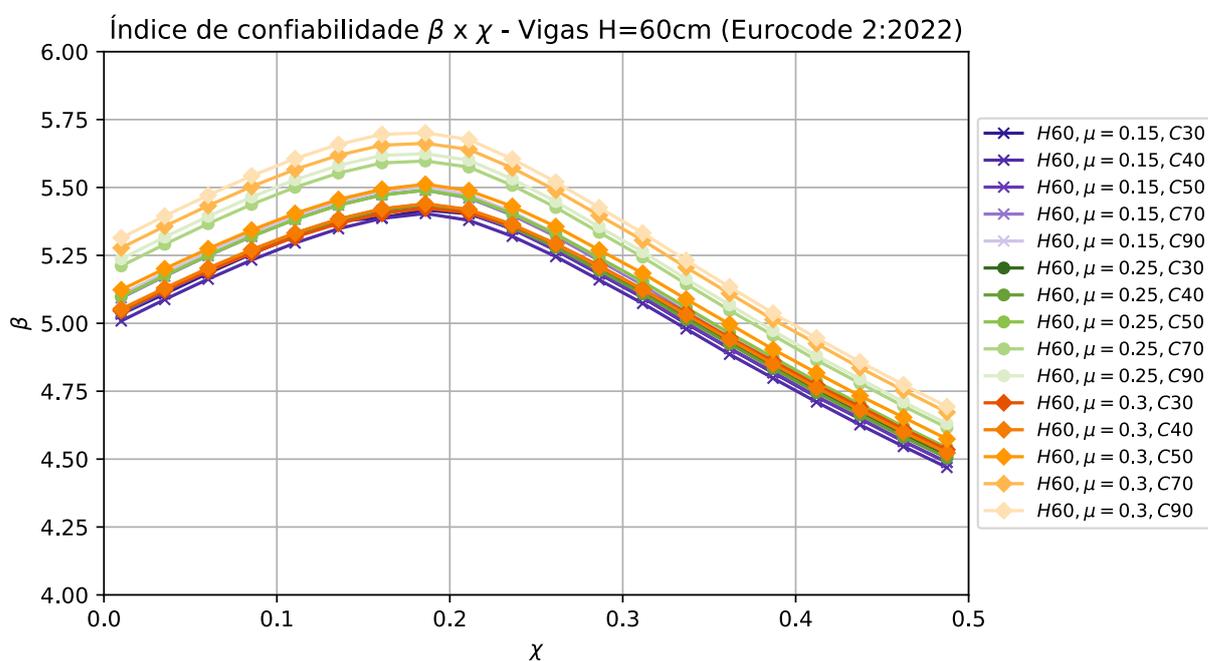
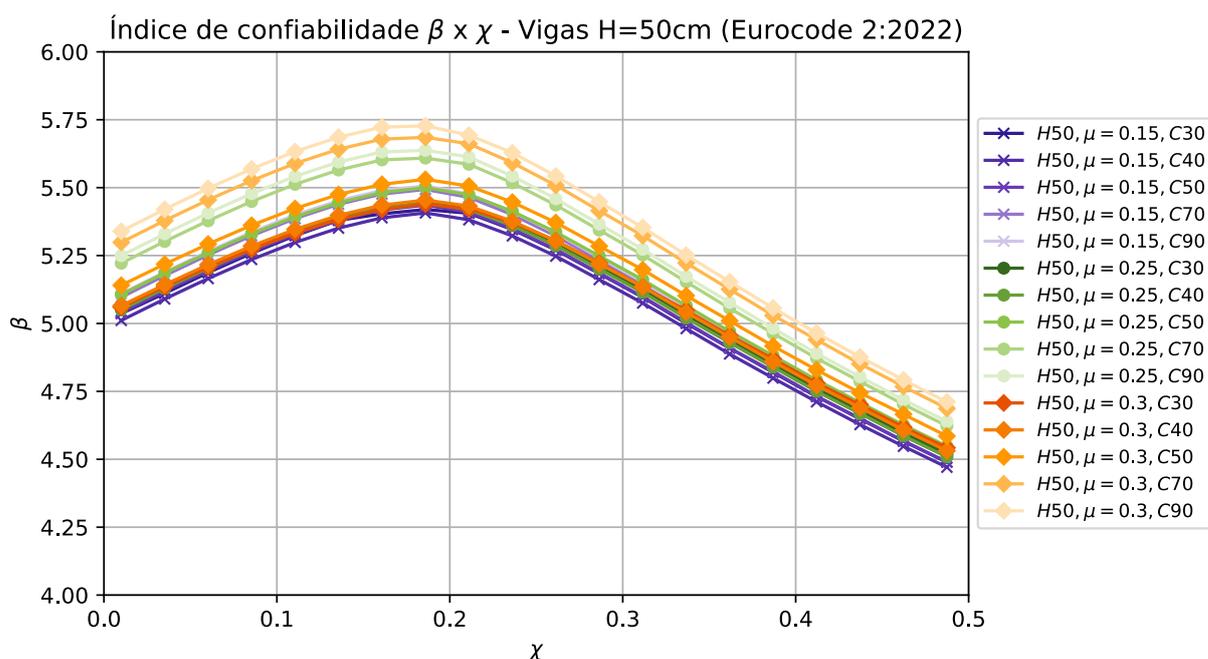
Tabela 7.5 – Resultados de dimensionamento das vigas segundo FprEN 1992-1-1:2022 (continuação)

Nome	As (cm <sup>2</sup> )	As' (cm <sup>2</sup> )	$\rho$ (%)	$\rho'$ (%)	M <sub>k</sub> (kN.cm)
H60, $\mu = 0,3, C90$	38,0 - 40,6	-	3,17 - 3,38	-	-55646,7

Nota-se, diante dos valores calculados para as áreas de aço das vigas, que nenhum dos elementos passou a apresentar armadura dupla em seu dimensionamento. Isto se deve majoritariamente ao valor de  $\varepsilon_{cu}$  fixado em 3,5‰ para todos os valores de  $f_{ck}$ , que incorre em  $\xi_{lim} = 0,53$ , diante dos valores de  $\xi_{lim} = 0,45$  ( $f_{ck} \leq 50$  MPa) e  $\xi_{lim} = 0,35$  ( $50 < f_{ck} \leq 90$  MPa) do EC2:2004. Ainda, em razão dos pontos elencados, percebe-se uma tendência à redução da área total de armaduras dos elementos com  $f_{ck}$  superiores a 40 MPa, onde aplica-se o novo coeficiente  $\eta_{cc}$ , em comparação aos parâmetros de dimensionamento do EC2:2004.

As figuras a seguir apresentam as simulações para o cálculo dos índices de confiabilidade segundo o projeto de revisão do Eurocode 2.





As figuras 7.14, 7.15 e 7.16 exibem, portanto, uma tendência uniforme ao crescimento dos índices de confiabilidade de elementos com concretos de mais alta resistência (na prática,  $f_{ck} > 40$  MPa). Isto se explica pois, a partir da perda da camada de armaduras junto ao bordo superior da viga,

têm-se um deslocamento mais abaixo da linha neutra da seção, que acarreta em uma região maior das tensões de compressão do concreto e, conseqüentemente, o aumento da capacidade resistente.

Aos elementos de resistência iguais ou inferiores a 40 MPa, nota-se pouca (ou nenhuma) variação dos índices  $\beta$  em comparação à versão anterior do código normativo.

### 7.2.3 Comparação entre versões do Eurocode 2

Como forma de destacar as diferenças entre os resultados de ambas versões do Eurocode 2, são extraídas as curvas individuais referentes aos elementos das três maiores classes de resistência (50, 70 e 90 MPa) e plotadas separadamente nas figuras a seguir.

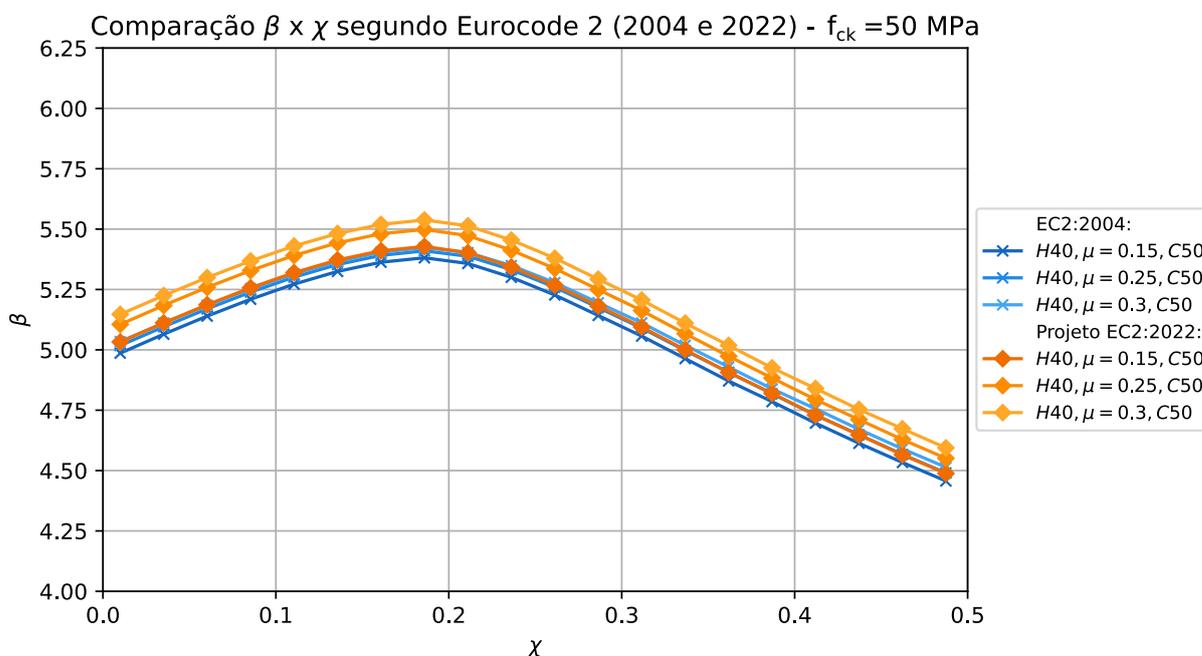


Figura 7.17 – Índices de confiabilidade viga H=40cm (C50) - comparação entre versões do Eurocode 2.

Fonte: do autor

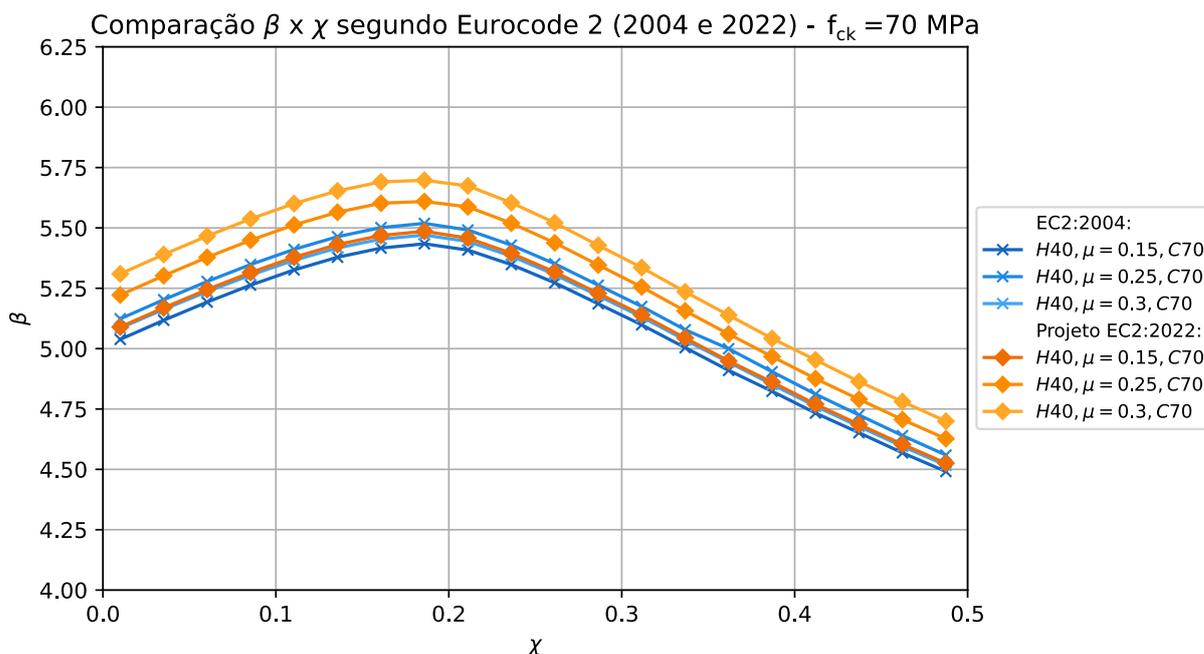


Figura 7.18 – Índices de confiabilidade viga H=40cm (C70) - comparação entre versões do Eurocode 2.

Fonte: do autor

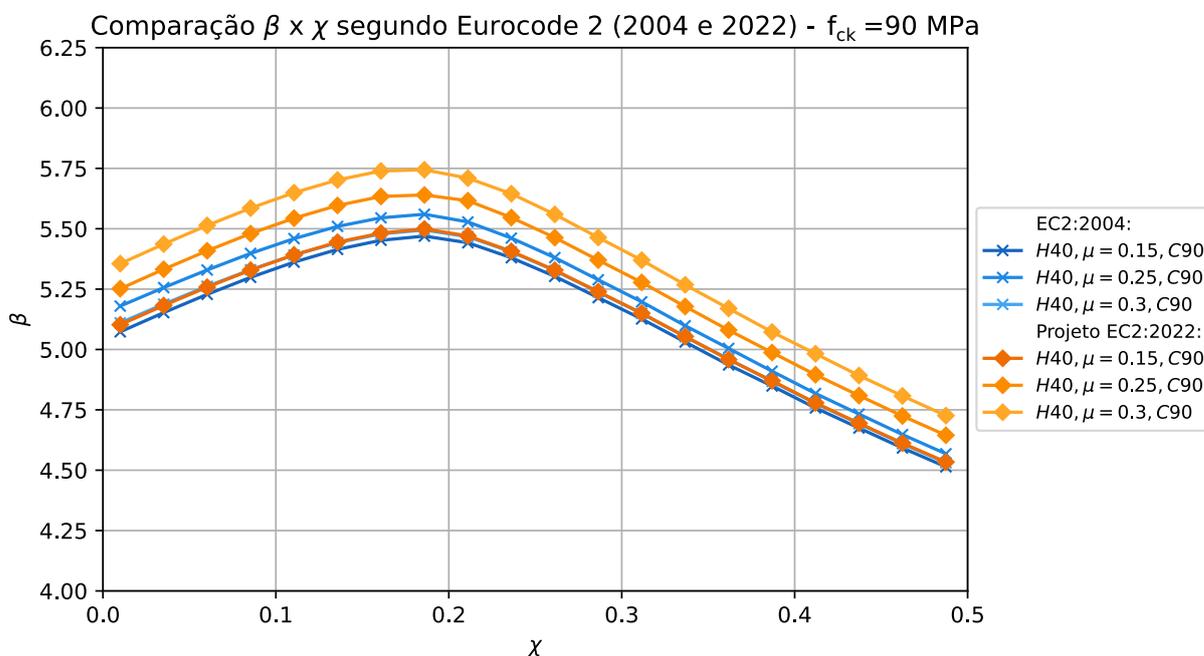


Figura 7.19 – Índices de confiabilidade viga H=40cm (C90) - comparação entre versões do Eurocode 2.

Fonte: do autor

Fica claro, portanto, que a uniformidade encontrada para os elementos dimensionados conforme o Eurocode 2:2004 dá lugar a um novo comportamento de confiabilidade, decorrente do projeto

do EC2:2022, que é crescente quanto maior for a classe resistente do concreto empregado (maior região de tensões de compressão), assim como quanto mais alta for a taxa de armadura longitudinal do elemento (menor variabilidade da resistência do aço em relação ao concreto). Para as seções com  $f_{ck} = 90$  MPa, por exemplo, observam-se acréscimos máximos aproximados de 5% ao índice de confiabilidade calculado.

### 7.3 ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE AS VERSÕES RECENTES DE AMBAS AS NORMAS (NBR 6118 E EC2)

Considerando os processos anteriormente mencionados, que têm como objetivo manter a padronização entre as simulações, é possível realizar uma análise comparativa que busca destacar os aspectos positivos e negativos da versão da NBR 6118:2023 e do projeto de revisão FprEN 1992-1-1:2022. Essa análise será realizada sob a perspectiva da confiabilidade das vigas no Estado-Limite Último.

As figuras 7.20 a 7.24 apresentam os resultados comparativos obtidos para a viga de  $h = 40$  cm (representativa das demais seções), conforme a classe resistente de concreto empregada.

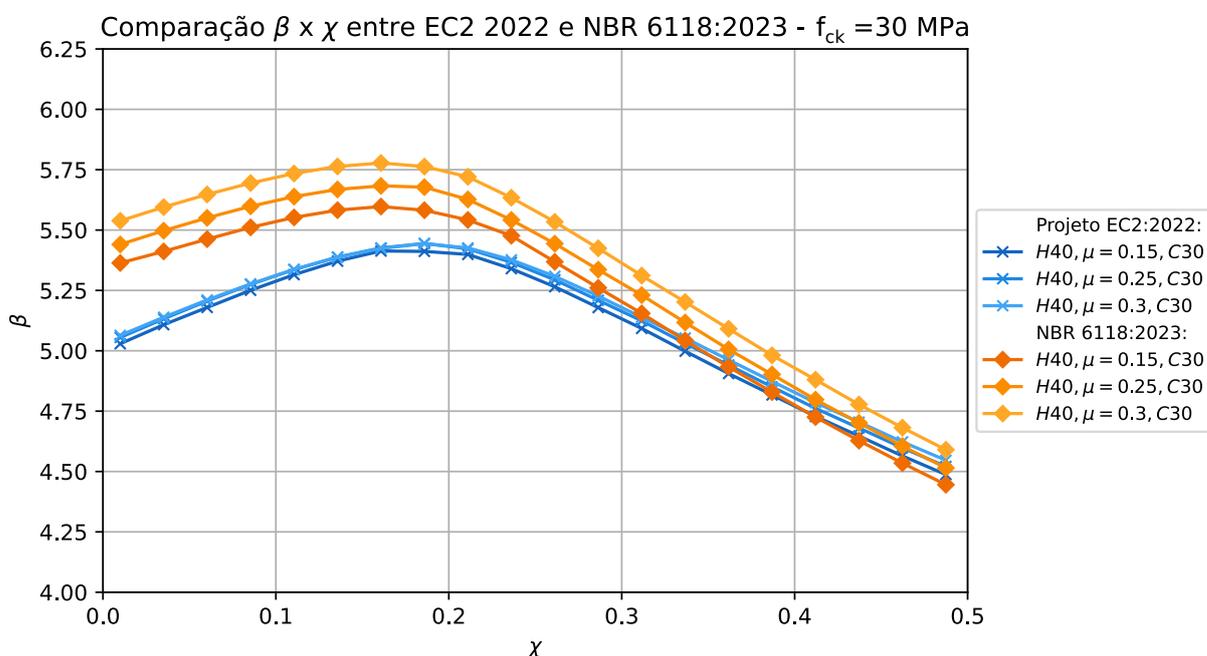


Figura 7.20 – Índices de confiabilidade viga H=40 (C30) - comparação entre NBR 6118:2023 e EC2:2022.

Fonte: do autor

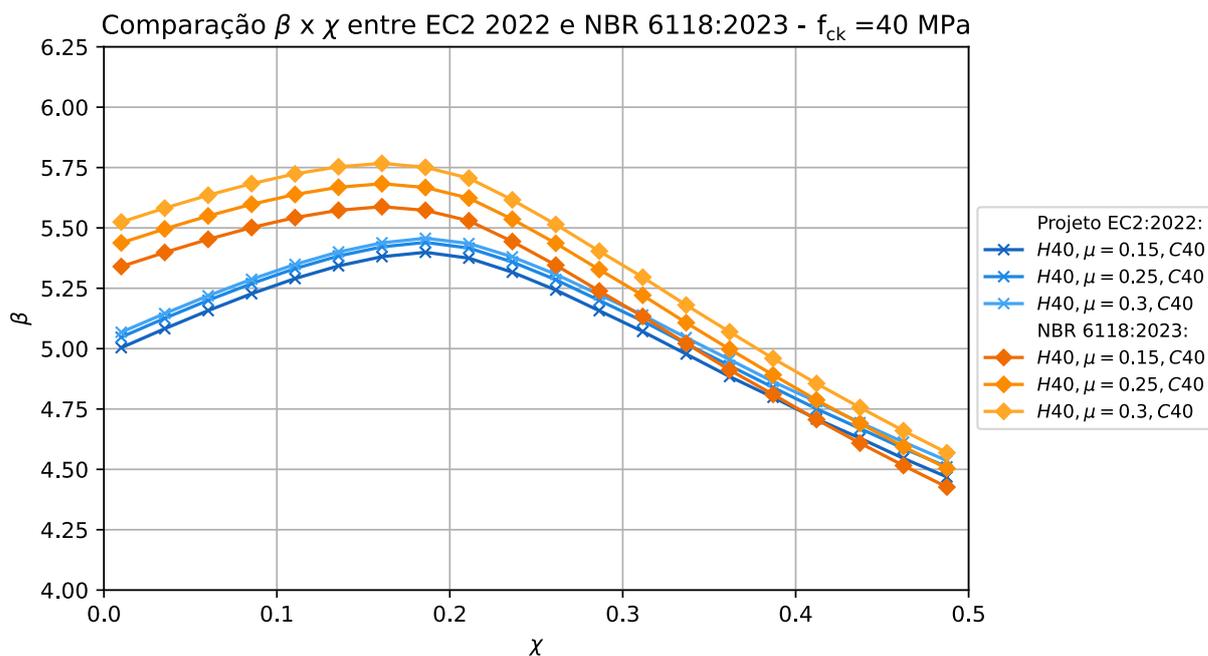


Figura 7.21 – Índices de confiabilidade viga H=40 (C40) - comparação entre NBR 6118:2023 e EC2:2022.

Fonte: do autor

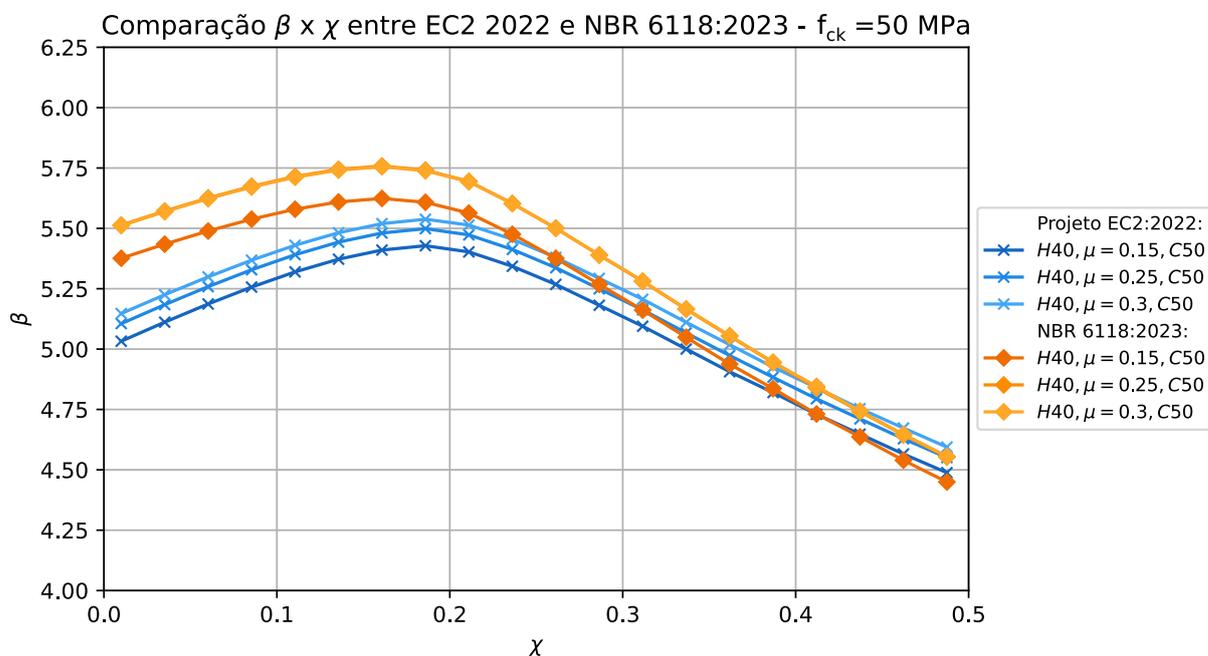


Figura 7.22 – Índices de confiabilidade viga H=40 (C50) - comparação entre NBR 6118:2023 e EC2:2022.

Fonte: do autor

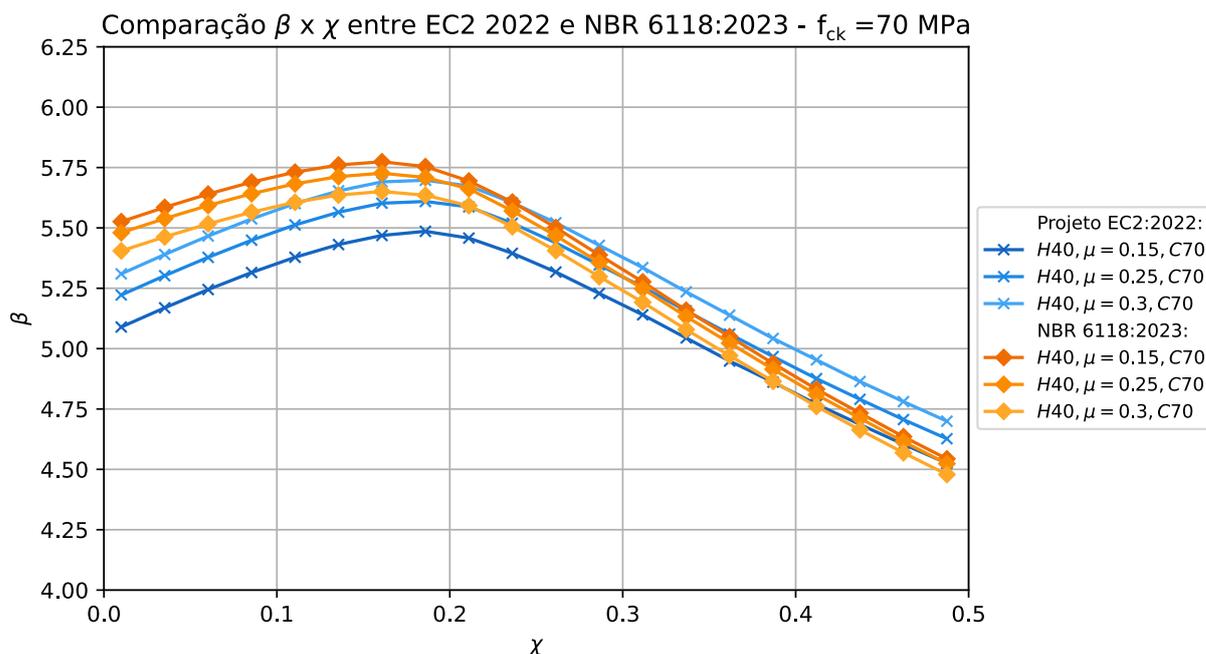


Figura 7.23 – Índices de confiabilidade viga H=40 (C70) - comparação entre NBR 6118:2023 e EC2:2022.

Fonte: do autor

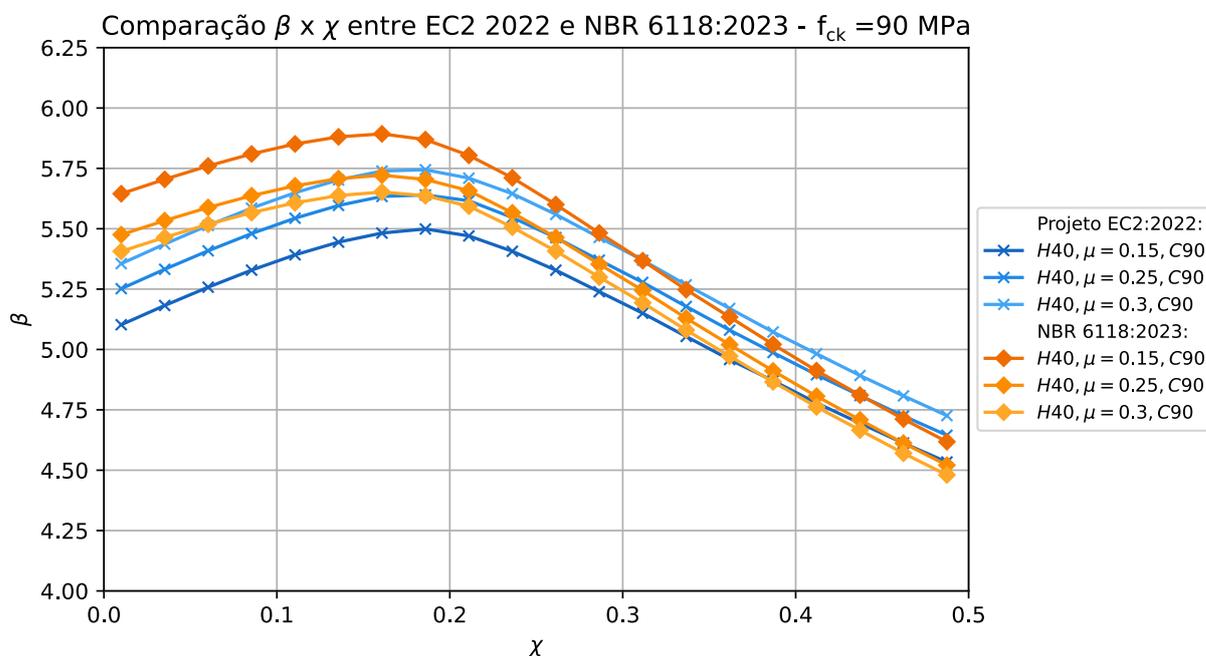


Figura 7.24 – Índices de confiabilidade viga H=40 (C90) - comparação entre NBR 6118:2023 e EC2:2022.

Fonte: do autor

Os resultados obtidos indicam que as estruturas projetadas de acordo com o código normativo brasileiro têm apresentado índices médios de confiabilidade relativamente superiores em

comparação com aqueles obtidos por meio do projeto do EC2:2022. Entretanto, nota-se uma preocupação da norma europeia em promover maior uniformidade na confiabilidade dos diferentes elementos à medida em que os carregamentos variáveis sobre a estrutura tornam-se mais presentes, exemplificado pela presença de um coeficiente de majoração de ações variáveis superior ao das ações permanentes ( $\gamma_q = 1,50$  e  $\gamma_g = 1,35$ ).

Especialmente em relação aos concretos com  $f_{ck}$  superiores a 40 MPa, há um evidente desacordo quanto à implementação do coeficiente de fragilidade  $\eta_c$  na NBR 6118:2023 (chamado  $\eta_{cc}$  pelo Eurocode). Tratando-se especificamente sobre o diagrama tensão-deformação retangular simplificado, de ampla utilização em projetos estruturais, a norma europeia introduz como substituição ao coeficiente multiplicador  $\eta$  (versão 2004) o coeficiente de fragilidade  $\eta_{cc}$ , que surge acoplado à formulação da resistência à compressão de projeto ( $f_{cd}$ ). Enquanto isso, a NBR aplica uma sobreposição destes coeficientes, uma vez que insere  $\eta_c$  sobre o diagrama tensão-deformação do concreto e mantém os fatores redutores (referentes a  $\eta$  do Eurocode 2:2004) como parte componente do coeficiente  $\alpha_c$ , através do termo multiplicador  $[1,0 - (f_{ck} - 50)/200]$  para concretos das classes C50 a C90 (Figura 7.25).

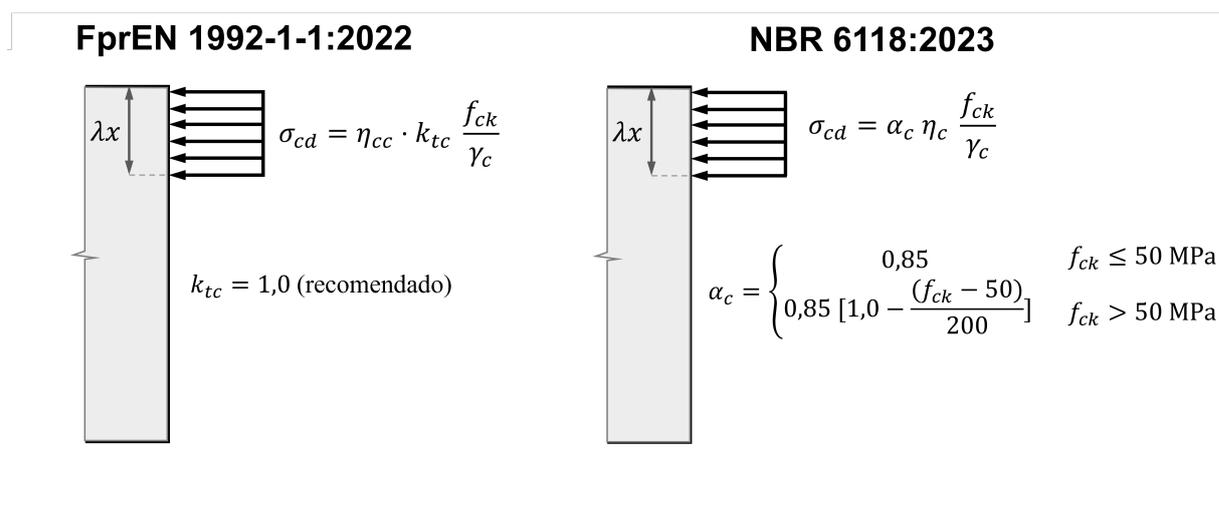


Figura 7.25 – Comparação normativa do diagrama retangular idealizado

Fonte: do autor

Como resultado, além de um aumento na área de aço para elementos com concreto de alta resistência (enquanto se observa uma redução segundo o dimensionamento via Eurocode), a confiabilidade dos elementos dimensionados segundo a NBR 6118:2023 não apresenta aumento significativo. Em contraponto, aos elementos dimensionados segundo o FprEN:2022, observam-se elevações contínuas nos índices de confiabilidade ao passo em que se utilizam concretos com classes resistentes superiores, justificado pela permissão promovida para a atuação da linha neutra em uma posição relativa inferior, concomitantemente à extensão da deformação específica última do concreto em 3,5‰ para os concretos do Grupo II.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, buscou-se avaliar a confiabilidade de vigas de concreto armado sujeitas à flexão simples no estado-limite último, efetuando-se uma comparação do índice de confiabilidade para elementos dimensionados segundo a NBR 6118:2023 frente à versão anterior da mesma normativa (NBR 6118:2014) e recentes versões do Eurocode 2 (versão 2004 e projeto de revisão FprEN-1992-1-1:2022). Com este objetivo, reuniu-se primordialmente no Capítulo 2 o conjunto de aspectos e disposições relevantes ao dimensionamento de seções com base nas respectivas versões de ambas normativas brasileira e europeia, imprescindíveis ao desenvolvimento das etapas subsequentes, além dos parâmetros que compõem o modelo mecânico realístico apresentado pelo Código Modelo *fib* 2010 (2013). Em segunda instância, apresentou-se uma revisão bibliográfica no Capítulo 3 a respeito dos conceitos e métodos que norteiam as análises de confiabilidade estrutural, com ênfase ao método de confiabilidade de primeira ordem, FORM.

A partir dos conhecimentos elencados, desenvolveram-se dois diferentes modelos mecânicos em linguagem *Python*, dispostos no Capítulo 4, visando (1) a verificação e estimativa da capacidade resistente real de seções de concreto armado em ELU e (2) o dimensionamento destas seções em função das normativas supracitadas. O primeiro caso consistiu de um modelo numérico generalizado para verificação de seções poligonais sujeitas à flexo-compressão normal, de acordo com as recomendações do Código Modelo *fib* 2010, que objetivam a determinação dos esforços resistentes em função de parâmetros médios, por meio da integração de tensões de regiões sob compressão e tração de concreto íntegro e/ou fissurado. Em contrapartida, o modelo de dimensionamento propôs-se a atender às condições de projeto de seções retangulares sob flexão simples, para o cálculo das áreas de aço inferior e superior, conforme estabelecido pela NBR 6118 e Eurocode 2, em quatro diferentes versões.

Para avaliação da confiabilidade dos problemas de estudo, definiu-se a utilização do modelo numérico computacional proposto por Real (2021), que visa implementar o método FORM na estimativa do índice de confiabilidade ( $\beta$ ), cuja otimização da busca pelo ponto de projeto é viabilizada por algoritmos como o HLRF e iHLRF. Como requisito à implementação dessa rotina, determinou-se também o conjunto de variáveis aleatórias a serem consideradas nas análises, associado aos seus respectivos modelos de distribuição de probabilidades, como resultado de um levantamento para obtenção de parâmetros representativos da realidade brasileira, oriundos de diferentes fontes de literatura.

A seguir, realizou-se a etapa de validação dos modelos propostos. Primeiramente, foram simuladas as capacidades resistentes para um conjunto de 53 vigas de concreto armado, extraídas de dez

diferentes trabalhos científicos, de modo que os resultados de cálculo pudessem ser comparados às capacidades resistentes apresentadas pelos ensaios de ruptura por flexão. Com isso, obteve-se uma relação média entre momentos resistentes reais e de cálculo ( $M_R/M_{R,calc}$ ) aproximadamente igual à unidade, com desvio padrão de 7% em torno da média, ajustado para uma distribuição Gaussiana. O coeficiente de variação médio a ser atribuído como valor final ao erro do modelo de capacidade resistente, que considera dentre outros aspectos as imprecisões de ensaio e variações geométricas, foi estimado em 4,1%.

Uma vez conhecidos todos os parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias, tornou-se possível realizar uma avaliação da aplicação dos modelos de cálculo para estimativa da confiabilidade de uma viga exemplo. Para tal, utilizou-se como referência a viga estudada por Santos, Stucchi e Beck (2014), tornando-se possível efetuar três diferentes simulações:

- a) Em princípio, foram consideradas as cinco configurações propostas pelos autores, nos modelos resistentes e variáveis disponíveis no artigo, de tal sorte que os resultados obtidos apresentaram diferenças de aproximadamente 5% em comparação aos valores publicados.
- b) O segundo teste, desta vez por implementação do modelo resistente desenvolvido neste trabalho, apontou resultados para os índices de confiabilidade até 10% superiores aos da referência original, como efeito da utilização de um modelo mais preciso e menos conservador.
- c) O último teste de validação buscou implementar os modelos de distribuição das variáveis aleatórias reunidas neste estudo. Conforme apresentado, os resultados apontaram um aumento de 22% aos valores máximos de  $\beta$  em comparação com a segunda simulação e aproximadamente 35% acima dos máximos obtidos por Santos, Stucchi e Beck (2014). Esta observação deve-se em razão dos coeficientes utilizados para os modelos de distribuição das resistências do aço ( $f_y$ ) e concreto ( $f_c$ ), encontrados por Santiago (2019), que indicam uma reserva de segurança mais elevada dos materiais produzidos no Brasil em comparação à média internacional.

Logo, após a realização dos processos prévios, permitiu-se construir as análises almeçadas no presente estudo. Foram definidas três configurações para a seção transversal dos elementos, com base fixada de 20 centímetros e alturas de 40, 50 e 60 centímetros, respectivamente. Os momentos de serviço ( $M_k$ ) das vigas foram mantidos constantes independentemente do código ou versão normativa empregada no dimensionamento, sendo calculados segundo valores de momentos fletores adimensionalizados ( $\mu$ ) iguais a 0,15, 0,25 e 0,30 (formulação da NBR 6118:2014 utilizada como referência). Foram também admitidas cinco resistências à compressão características de concreto, de 30, 40, 50, 70 e 90 MPa. O Capítulo 7 apresentou as respostas

fnais do dimensionamento das respectivas seções e os gráficos de variações dos índices de confiabilidade calculados para valores de  $\chi$  entre 0 e 0,5 (razão entre carregamentos acidentais e totais), de modo que se permitiu apontar o seguinte conjunto de observações:

- Ao longo das análises, notou-se que, invariavelmente, existe uma tendência para aumento dos índices de confiabilidade até valores de  $\chi$  entre 0,17 e 0,20, onde seu valor é máximo. Após o trecho, o índice  $\beta$  cai por consequência do aumento das incertezas associadas aos carregamentos variáveis;
- Os resultados encontrados para as diferentes seções transversais, com momentos fletores adimensionalizados e valores de  $\delta$  ( $d'/d = 0,10$ ) constantes, são estatisticamente equivalentes;
- Aos elementos dimensionados segundo a NBR 6118:2014, as curvas de confiabilidade obtidas para seções com diferentes solicitações e resistências características apresentaram resultados bastante semelhantes entre si, cujas variações observadas foram da ordem de 3%. Ao longo da alteração na proporção de carregamentos variáveis, o índice de confiabilidade variou aproximadamente entre  $\beta = 4,50$  e  $\beta = 5,75$ ;
- No que tange aos elementos dimensionados pela NBR 6118:2023, a inclusão do coeficiente de fragilidade  $\eta_c$  elevou em até 19% o consumo de aço nas seções com maior  $f_{ck}$ . Entretanto, a comparação direta entre ambas versões da normativa brasileira demonstrou que os índices de confiabilidade calculados sofreram variações médias desprezáveis. Apenas para vigas com  $\mu = 0,15$  e  $f_{ck} = 90$  MPa fora observado um crescimento sutil dos índices  $\beta$ , em torno de 5%;
- Em seguida, foram avaliadas as seções dimensionadas segundo o Eurocode 2:2004, para os mesmos momentos de serviço dos exemplos anteriores. Diferentemente da metodologia empregada pela normativa brasileira, os dimensionamentos pelo modelo do Eurocode resultam em áreas de aço diferentes para proporções distintas de carregamento variável, dada a implementação de  $\gamma_q = 1,50$  como coeficiente de ponderação de solicitações dessa natureza. Os resultados obtidos também demonstram pouca variação do índice de confiabilidade em função da intensidade das solicitações, mudança de seção ou resistência característica do concreto. Apesar das mudanças destacadas em termos de dimensionamento, os gráficos apresentaram variação típica da confiabilidade para valores extremos entre  $\beta = 4,50$  e  $\beta = 5,50$ , aproximadamente, onde os valores mínimos foram observados conforme a proporção entre cargas acidentais e cargas totais aproximou-se de 0,5;
- Comparativamente, quando do dimensionamento a partir das recomendações do projeto de revisão do Eurocode 2 (FprEN 1992-1-1:2022), observou-se redução nas áreas de aço calculadas para elementos com  $f_{ck} > 40$  MPa, sem ocorrência de armadura dupla.

Como consequência, têm-se um aumento da região de concreto sob compressão, dado o deslocamento da linha neutra, que influi gradativamente no crescimento do índice  $\beta$  para concretos de mais alta resistência, até 5% superiores aos obtidos pela versão anterior da mesma norma;

- Finalmente, pode-se confrontar os resultados das normativas mais recentes, NBR 6118:2023 e FprEN 1992-1-1:2022. Constatou-se maior estabilidade nas curvas de seções dimensionadas pelo código europeu, onde a variação de  $\beta$  com o aumento de  $\chi$  não se acentua, como no caso da norma brasileira. Isto posto, os máximos índices ainda são obtidos para vigas dimensionadas conforme a NBR;
- Neste ponto, os acréscimos em consumo de aço vistos na NBR 6118:2023 não se justificam sob a ótica da confiabilidade, uma vez que não se traduzem em melhorias significativas nesse quesito, enquanto a proposta de atualização do Eurocode 2 produz efeito contrário. Ressalta-se, portanto, a discrepância sobre a forma de introdução do coeficiente de fragilidade no código brasileiro, que promove uma sobreposição de coeficientes sem embasamento teórico claro.

De todo modo, os índices de confiabilidade das vigas ultrapassaram em todas as simulações os valores mínimos recomendados por referências internacionais, como o ASCE/SEI 7-22, que estabelece  $\beta_T = 3,0$ , para estruturas com falhas por flexão e riscos moderados, em período de referência de 50 anos. Ainda que as conclusões aqui obtidas sejam representativas exclusivamente de elementos sujeitos à flexão simples, que respeitem os modelos e valores assumidos para as variáveis aleatórias empregadas neste estudo, permite-se salientar o comprometimento dos códigos normativos com a manutenção da segurança e mitigação de riscos associados a falhas em estruturas civis.

## 8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A partir dos procedimentos e metodologias desenvolvidas neste estudo, permite-se elencar algumas sugestões para trabalhos futuros com base nesta linha de pesquisa: avaliar a confiabilidade e os impactos da atualização da NBR 6118:2023 em relação a pilares de concreto armado; com base nos modelos mecânicos computacionais apresentados, propor uma calibração dos coeficientes parciais de segurança da NBR 6118:2023, a partir de índices de confiabilidade alvo; realizar um estudo mais aprofundado a respeito das variabilidades relacionadas a parâmetros geométricos das seções, como distâncias de cobrimento em vigas de concreto armado, visando maior representatividade no que diz respeito à realidade dos canteiros de obra encontrados pelo país.

## REFERÊNCIAS

- AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS; STRUCTURAL ENGINEERING INSTITUTE. **ASCE/SEI 7-22: Minimum Design Loads And Associated Criteria For Buildings And Other Structures**. Virginia, 2022. 1046 p. Citado na página 61.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318-19(22): Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary**. Farming Hills, 2022. 613 p. Citado na página 24.
- ANG, A.; TANG, W. **Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 2007. ISBN 9780471720645. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- ANSARI ESFEH, M.; KATTAN, L.; LAM, W. H.; SALARI, M.; ANSARI ESFE, R. Road network vulnerability analysis considering the probability and consequence of disruptive events: A spatiotemporal incident impact approach. **Transportation Research Part C: Emerging Technologies**, v. 136, p. 103549, 2022. ISSN 0968-090X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X21005313>>. Citado na página 58.
- ARAÚJO, J. M. de. **Curso de Concreto Armado**. 4. ed. Rio Grande: Dunas, 2014. v. 1. 303 p. ISBN 978-85-86717-14-7. Citado 3 vezes nas páginas 36, 88 e 91.
- AREZOUMANDI, M.; SMITH, A.; VOLZ, J. S.; KHAYAT, K. H. An experimental study on flexural strength of reinforced concrete beams with 100% recycled concrete aggregate. **Engineering Structures**, v. 88, p. 154–162, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 103.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014. 238 p. Citado 16 vezes nas páginas 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 43, 115, 121, 141, 142 e 143.
- \_\_\_\_\_. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto**. Rio de Janeiro, 2023. 242 p. Citado 12 vezes nas páginas 25, 27, 37, 38, 115, 117, 123, 127, 137, 140, 143 e 144.
- BASE, G. D.; READ, J. B. Effectiveness of helical binding in the compression zone of concrete beams. **ACI Journal**, v. 62, n. 7, p. 763–782, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 102.
- BECK, A. T. **Confiabilidade e Segurança das Estruturas**. 1. ed. São Carlos: Elsevier, 2019. 448 p. ISBN 978-85-352-8895-7. Citado 6 vezes nas páginas 53, 55, 59, 63, 64 e 67.
- BECK, A. T.; OLIVEIRA, W. L. A.; DENARDIM, S.; ELDEBS, A. L. H. C. Reliability-based evaluation of design code provisions for circular concrete-filled steel columns. **Engineering Structures**, v. 31, p. 2299–2308, 2009. Citado na página 25.
- BRESLER, B.; SCORDELIS, A. C. Shear strength of reinforced concrete beams. **ACI Journal**, v. 60, n. 1, p. 51–74, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 102.
- BUCHER, C. G. Adaptive sampling — an iterative fast Monte Carlo procedure. **Structural Safety**, v. 5, n. 2, p. 119–126, 1988. ISSN 0167-4730. Citado 2 vezes nas páginas 111 e 112.

CAMPOS FILHO, A. **Dimensionamento e Verificação de Seções Poligonais de Concreto Armado Submetidas À Flexão Composta Oblíqua**. 3. ed. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 2014. 50 p. Citado 4 vezes nas páginas 72, 73, 74 e 79.

CANAVAL, J. H. **Estudo experimental do comportamento de vigas de concreto armado reforçadas à flexão por meio de graute, armaduras e conectores**. 149 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 103.

COELHO, J. D. **Confiabilidade de vigas de concreto armado no estado limite de serviço**. 272 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 98.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 2: Design of Concrete Structures : Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings**. Brussels: CEN, 2004. 225 p. (EN 1992-1-1:2004). Citado 13 vezes nas páginas 25, 26, 27, 38, 40, 42, 43, 127, 133, 136, 140, 141 e 143.

\_\_\_\_\_. **Eurocode: Basis of Structural Design**. Brussels: CEN, 2005. 119 p. (EN 1990:2002+A1). Citado 2 vezes nas páginas 41 e 60.

\_\_\_\_\_. **FprEN 1992-1-1:2022 - Eurocode 2: Design of Concrete Structures : Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings**. Brussels: CEN, 2022. 409 p. (fprEN 1992-1-1:2022). Citado 12 vezes nas páginas 25, 27, 37, 45, 92, 115, 127, 137, 140, 141, 143 e 144.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BETÓN. **Fib Bulletin 42. Constitutive modelling for high strength/high performance concrete**. Stuttgart: fib, 2008. 125 p. Citado na página 83.

\_\_\_\_\_. **Fib Model Code for Concrete Structures 2010**. Berlin: Ernst & Sohn, a Wiley brand, 2013. 402 p. ISBN 9783433604212. Citado 12 vezes nas páginas 12, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 60, 61, 72, 127 e 141.

FÜST, A. **Erro de modelo e confiabilidade estrutural de vigas de concreto armado**. 86 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2020. Citado na página 101.

GALAMBOS, T. V.; ELLINGWOOD, B.; MACGREGOR, J. G.; CORNELL, C. A. Probability based load criteria: Assessment of current design practice. **Journal of the Structural Division**, American Society of Civil Engineers, v. 108, n. 5, p. 959–977, 1982. Citado na página 99.

GARCIA, S. L. G. **Taxa de Armadura Transversal Mínima em Vigas de Concreto Armado**. 207 p. Tese (Doutorado) — COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 102.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design**. New York: John Wiley & Sons, 2000. 304 p. ISBN 9780471331193. Citado 3 vezes nas páginas 24, 61 e 62.

JANNEY, J. R.; HOGNESTAD, E.; MCHENRY, D. Ultimate flexural strength of prestressed and conventionally reinforced concrete beams. **ACI Journal**, v. 52, n. 2, p. 601–620, 1956. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 102.

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY. **Probabilistic Model Code: Part 1 - Basis of Design**. JCSS, 2001. Disponível em: <<https://www.jcss-lc.org/jcss-probabilistic-model-code/>>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 60 e 127.

\_\_\_\_\_. **Probabilistic Model Code: Part 3 - Resistance models**. JCSS, 2001. Disponível em: <<https://www.jcss-lc.org/jcss-probabilistic-model-code/>>. Citado na página 98.

KONG, P. Y. L.; RANGAN, B. V. Shear strength of high-performance concrete beams. **ACI Journal**, v. 95, n. 6, p. 677–688, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 102.

KULKARNI, S. M.; SHAH, S. P. Response of reinforced concrete beams at high strain rates. **ACI Journal**, v. 95, n. 6, p. 705–715, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 103.

LEITE, D. D. L.; GOMES, H. M. Reliability analysis of reinforced concrete sections for ultimate limit states. In: **XLII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering and III Pan-American Congress on Computational Mechanics (CILAMCE-PANACM-2021)**. Rio de Janeiro: ABMEC, 2021. v. 1, p. 1–8. Disponível em: <<https://doi.org/10.5281/zenodo.7044667>>. Citado na página 25.

LIU, P.-L.; KIUREGHIAN, A. D. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 1, n. 2, p. 105–112, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 169.

LOPES, M. T. d. A. **Análise de Confiabilidade de Estruturas Aplicada ao Projeto de Reforço à Força Cortante de Vigas em Concreto Armado com Compósitos de Fibras de Carbono**. 209 p. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 64.

MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. **Structural reliability analysis and prediction**. [S.l.]: Wiley, 2018. 506 p. Citado na página 58.

MONTGOMERY, D.; RUNGER, G. **Applied statistics and probability for engineers**. 4. ed. [S.l.]: Wiley India Pvt. Limited, 2009. ISBN 9788126523153. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.

MUSSO JUNIOR, F. **Dimensionamento de Seções de Concreto Armado e Verificação da Estabilidade de Vigas-Colunas no Estado Limite**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1987. Citado na página 72.

NING, X.; DING, Y.; ZHANG, F.; ZHANG, Y. Experimental study and prediction model for flexural behavior of reinforced scc beam containing steel fibers. **Construction and Building Materials**, v. 93, p. 644–653, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 103.

NOWAK, A.; COLLINS, K. **Reliability of Structures**. 1. ed. New York: McGraw-Hill, 2000. 338 p. (McGraw-Hill civil engineering series). ISBN 9780070481633. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 63.

NOWAK, A. S.; SZERSZEN, M. M. Calibration of Design Code for Buildings (ACI 318) Part 1: Statistical Models for Resistance. **ACI Journal**, v. 100, n. 3, p. 377–382, 2003. Citado na página 105.

RABADE, M. P.; TANNER, P. Incertidumbres del modelo de resistencia a flexión para vigas con armaduras corroídas. In: **IV Congreso de ACHE**. Valencia: ACHE 2008, 2008. p. 1–13. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 102.

REAL, M. d. V. **Notas de Aula - Confiabilidade em Engenharia. Programa de Pós-graduação em Engenharia Oceânica - PPGEO**. Rio Grande: Universidade Federal do Rio Grande, 2023. Citado na página 95.

REAL, M. de V. **RealPy: a Python class for Reliability analysis including Monte Carlo and FORM methods**. 2021. Disponível em: <<https://github.com/mvreal/Reliability>>. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 141.

SANTIAGO, W. C. **Calibração baseada em confiabilidade dos coeficientes parciais de segurança das principais normas brasileiras de projeto estrutural**. 181 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019. Citado 6 vezes nas páginas 25, 96, 97, 110, 111 e 142.

SANTOS, D. M.; STUCCHI, F. R.; BECK, A. T. Confiabilidade de vigas projetadas de acordo com as normas brasileiras. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, v. 7, n. 5, p. 723–746, 2014. Citado 9 vezes nas páginas 24, 25, 98, 99, 106, 107, 108, 116 e 142.

SCHERER, M.; MORSCH, I. B.; REAL, M. V. Reliability of reinforced concrete beams designed in accordance with Brazilian code NBR-6118:2014. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, v. 12, n. 5, p. 1086–1125, 2019. ISSN 1983-4195. Citado na página 25.

STEWART, M. G. Serviceability reliability analysis of reinforced concrete structures. **Journal of Structural Engineering**, v. 122, n. 7, p. 794–803, 1996. Citado na página 98.

STUCCHI, F.; SANTOS, S.; FRANCO, R. Evaluation of the safety criteria of Brazilian Standard NBR 6118 for slender members based on reliability analyses. **Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering**, p. 2761–2767, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 98 e 99.

STUCCHI, F. R.; SANTOS, S. H. C. Reliability based comparison between ACI 318-05 and NBR 6118. **Revista Ibracon de Estruturas**, v. 3, p. 230–239, 2007. Citado na página 25.

THOFT-CRISTENSEN, P.; BAKER, M. **Structural Reliability Theory and its Applications**. 1. ed. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1982. ISBN 9783642686979. Citado na página 54.

VERZENHASSI, C. C. **Otimização de risco estrutural baseada em confiabilidade**. 154 p. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008. Nenhuma citação no texto.

WERNER, H. Schiefe biegung polygonal umrandeter stahl-beton-qwerschnitte. **Beton-und Stahlbetonbau**, Berlin, v. 69, n. 4, p. 92–97, 1974. Citado na página 72.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A – CÓDIGO PYTHON PARA VERIFICAÇÃO DE SEÇÕES SEGUNDO O FIB-MC 2010

```

1 def fib(nc, xc, yc, As, xs, ys, rj, fcm, fy, Es, Na, Max, cc) :
2     """
3     Programa para verificação de seções poligonais de concreto armado
4     ↪ submetidas
5     à flexão composta normal segundo o FIB model code (2010).
6
7     @author: GabrielMachado
8     Last-Modified: 19/04/2023
9     """
10    import numpy as np
11    from scipy.optimize import fsolve
12
13    #####
14    # cálculo das const. para diag. de tensão de compressão
15    fck = fcm*cc - 8
16
17    # determinação de epsc limite
18    if fck<50:
19        epsc_lim = -3.5/1000
20    else:
21        epsc_lim = np.round(0.01*fck - 3.9,1)/1000
22
23    # determinação de epsc1
24    epsc1 = np.round(-1.60*((fck + 8)/10)**(0.25)/1000 - 0.00007,4)
25
26    # determinação do k
27    Ec1 = np.abs((fck + 8)/epsc1)/cc
28    alfE = 1.0 # granito e gnaisse (1.2=basalto, 0.9=calcário,
29    ↪ 0.7=arenito)
30    Eci = (21.5 * 10**3 * alfE * ((fck + 8)/10)**(1/3))/cc
31    k = (Eci/Ec1)
32
33    # ajuste de sigma_c
34    epsc = np.zeros(1001)
35    for i in range(1001):
36        if i==1000:
37            continue
38        else:
39            epsc[i+1] = (epsc[i] + epsc_lim/1000)
40    eta = epsc/epsc1

```

```

39     sigmac_i = -(k*eta - eta**2)/(1+(k-2)*eta)    #sigmac_i/fcm
40     ajust4 = np.poly1d(np.polyfit(epsc, sigmac_i, 4))
41     a0 = ajust4[0]
42     a1 = ajust4[1]
43     a2 = ajust4[2]
44     a3 = ajust4[3]
45     a4 = ajust4[4]
46
47     #####
48     # cálculo das const. para diag. de tensão de tração
49     if fck>50:
50         fctm = (2.12*np.log(1 + 0.1*(fcm*cc)))/cc
51     else:
52         fctm = (0.3*(fck)**(2/3))/cc
53     b1 = Eci
54     epsct0 = 0.9*fctm/Eci
55     c1 = 0.1*fctm / (0.15/1000 - epsct0)
56     c0 = fctm * (0.9 - (0.1*epsct0)/(0.15/1000 - epsct0))
57
58     #####
59     xmax = np.amax(xc, axis=0)
60     xmin = np.amin(xc, axis=0)
61     ymax = np.amax(yc, axis=0)
62     ymin = np.amin(yc, axis=0)
63
64     # cálculo das propriedades geométricas da seção
65     Lx = xmax-xmin    #b
66     Ly = ymax-ymin    #h
67     Ac = 0
68     Sx = 0
69     Jx = 0
70     Sy = 0
71     Jy = 0
72     Jxy = 0
73     for i in range(nc):
74         dx = xc[i+1]-xc[i]
75         dy = yc[i+1]-yc[i]
76         Ac = Ac + (xc[i]+dx/2)*dy
77         Sx = Sx + (xc[i]*(yc[i]+dy/2) + dx*(yc[i]/2+dy/3))*dy
78         Jx = Jx + (xc[i]*(yc[i]*(dy+yc[i])+dy*dy/3) + \
79                 dx*(yc[i]*(yc[i]/2+dy/1.5) + dy*dy/4))*dy
80         Sy = Sy + (xc[i]*(xc[i]+dx)+dx*dx/3)*dy/2
81         Jy = Jy + (dx**3/4+xc[i]*(dx*dx+xc[i]*(1.5*dx+xc[i])))*dy/3
82         Jxy = Jxy + (xc[i]*(xc[i]*(yc[i]+dy/2) + dx*(yc[i]+dy/1.5)) + \
83                 dx*dx*(yc[i]/3+dy/4))*dy/2
84     xg = Sy/Ac
85     yg = Sx/Ac
86     Sxg = Sx - yg*Ac

```

```

87     Syg = Sy - xg*Ac
88     Jxg = Jx - Ac*yg**2
89     Jyg = Jy - Ac*xg**2
90     Jxyg = Jxy - Ac*xg*yg
91
92     # coordenadas no sistema local xg,yg
93     xc = xc - xg
94     yc = yc - yg
95     xs = xs - xg
96     ys = ys - yg
97
98     #####
99     """
100    Função esfor() retorna os esforços resistentes Mrx e Nr, calculados
101    a partir das funções poli(), reg1(), reg2() - integração da área de
102    concreto comprimida - e aco() - diagrama tensão-deformação das
103    ↪ armaduras.
104    Variáveis:
105        X - altura da linha neutra
106        Ly - altura da seção
107        xc, yc - vértices da seção em relação ao cg.
108        ys - coordenadas y das armaduras em relação ao cg.
109        epscu, epsc2, epsct0 - def. específicas
110        xg, yg - coord. do centroide
111        YS, YI - alturas acima e abaixo da LN
112        d - altura útil da seção
113        epsS, epsI - def. específicas nos pontos extremos da seção
114        b, c - variáveis de ajuste usadas em D0, D1 e D2
115        a1,..., a4 - coeficientes da regressão do diagr.
116        b1, c1 - diag. tração
117        fcd - resistência à compressão do concreto em projeto
118        fy - tensão de escoamento do aço
119        rj() - porcentagem de armaduras das barras
120        Es - módulo de def. longitudinal do aço
121    """
122    def esfor(As, a1, a2, a3, a4, b1, c0, c1, Es, epscu, epsc2, epsct0,
123    ↪ fcm, fy,
124        Ly, rj, X, xc, xg, yc, yg, ys):
125        YS = np.max(yc)
126        rjj= np.copy(rj)
127        for i in range(np.size(rjj)):
128            if ys[i] > 0:
129                rjj[i] = 0
130            else:
131                continue
132        rjj2 = rjj/(np.sum(rjj))
133        YI = np.sum(rjj2*ys)
134        d = YS-YI

```

```

133     # calculo de epsilon S e epsilon I
134     # domínios 1 e 2
135     if X>(-1E50) and X<=((epscu*d)/(50/(1000)+epscu)):
136         epsS = -50/(1000)*X/(d-X)
137         epsI = 50/(1000)
138     # domínios 3 e 4
139     elif X>=((epscu*d)/(50/(1000)+epscu)) and X<=(d):
140         epsS = -epscu
141         epsI = epscu*(d-X)/X
142     # domínio 4a
143     elif X>=(d) and X<=(Ly):
144         epsS = -epscu
145         epsI = 0
146     # domínio 5
147     else:
148         epsS = -epsc2*(X/(X-Ly*((epscu-epsc2)/epscu)))
149         epsI = -epsc2*((X-Ly)/(X-Ly*((epscu-epsc2)/epscu)))
150
151     b = (epsS-epsI)/d
152     c = epsS - b*YS
153
154     xx1, yy1 = poli(xc, yc, c, b)
155     Mrx1, Nr1 = reg1(a1, a2, a3, a4, c, b, fcm, xx1, yy1)
156     #
157     if epsI>0:
158         # Param. abertura de fissuras
159         kk = np.argmax(ys)
160         As1 = rj[kk]*As
161         phi1 = np.sqrt(As1*4/np.pi)
162         cob = np.abs(np.min(yc) - np.min(ys)) - phi1/2
163         Ast = As*(np.sum(rjj))
164         if 2.5*(Ly-d)<(Ly-X)/3:
165             Ac_ef = 2.5*(Ly-d)
166         else:
167             Ac_ef = (Ly-X)/3
168         if Ac_ef >= 0:
169
170             rhos_ef = Ast/Ac_ef
171             lsmax = 1.0*cob + 0.25*phi1/(1.8*rhos_ef)
172             Gf = (73 * (fcm*200000/Es)**0.18)/1e5 #kN/cm
173             w1 = Gf/(fctm)
174             k1 = 0.8*fctm/(0.15/1000 - w1/(2*lsmax))
175             k0 = fctm - 0.15/1000*k1
176             kk1 = - 0.2*fctm/(4*w1/(2*lsmax))
177             kk0 = - 5*kk1*w1/(2*lsmax)
178         #
179         y01 = -c/b
180         y12 = (epsct0 - c)/b

```

```

181         y23 = ((0.15/1000) - c)/b
182         y34 = ((w1/(2*lsmax)) - c)/b
183         y44 = ((5*w1/(2*lsmax)) - c)/b
184         xxt1, yyt1 = polit(xc, yc, y01, y12)
185         xxt2, yyt2 = polit(xc, yc, y12, y23)
186         xxt3, yyt3 = polit(xc, yc, y23, y34)
187         xxt4, yyt4 = polit(xc, yc, y34, y44)
188     else:
189         k0 = k1 = kk1 = kk0 = 1
190         xxt1 = np.zeros(np.size(xc))
191         yyt1 = xxt2 = yyt2 = xxt3 = yyt3 = xxt4 = yyt4 = xxt1
192
193     Mrxt1, Nrt1 = regt(b, c, b1, 0, xxt1, yyt1)
194     Mrxt2, Nrt2 = regt(b, c, c1, c0, xxt2, yyt2)
195     Mrxt3, Nrt3 = regt(b, c, k1, k0, xxt3, yyt3)
196     Mrxt4, Nrt4 = regt(b, c, kk1, kk0, xxt4, yyt4)
197
198     Mrxas, Nras = aco(As, b, c, Es, fy, rj, ys)
199
200     Mrx = Mrx1 + (Mrxt1 + Mrxt2 + Mrxt3 + Mrxt4) + Mrxas
201     Nr = Nr1 + (Nrt1 + Nrt2 + Nrt3 + Nrt4) + Nras
202
203     return (Mrx, Nr, epsS, epsI)
204     #####
205
206     #####
207     """
208     Função poli() retorna as variáveis xx1,yy1 que determina
209     a poligonal da região comprimida da seção.
210     Variáveis:
211         xc, yc - vértices da seção em relação ao cg.
212         xx1, yy1 - vértices da poligonal
213         c, b - variáveis de ajuste
214         y01 - ordenada de início
215     Last-Modified: 14/01/2023
216     Status: Ok - Testado para seções retangulares e T.
217     """
218     def poli(xc, yc, c, b):
219         y01 = (-c/b)
220         xx1 = np.copy(xc)
221         yy1 = np.copy(yc)
222
223         for i in range(np.size(yy1)):
224             if yy1[i]<y01:
225                 yy1[i] = np.nan
226                 xx1[i] = np.nan
227             elif np.isnan(yy1[i-1])==True:
228                 yy1[i-1] = y01

```

```

229         xx1[i-1] =
           ↪ (y01-yc[i-1])/(yc[i]-yc[i-1])*(xc[i]-xc[i-1])+xc[i-1]
230     elif i<(np.size(yy1)-1):
231         if (yy1[i+1]<y01) and (yy1[i]>y01):
232             yy1[i+1] = y01
233             xx1[i+1] =
           ↪ (y01-yc[i])/(yc[i+1]-yc[i])*(xc[i+1]-xc[i])+xc[i]
234     else:
235         continue
236     yy1=yy1[np.logical_not(np.isnan(yy1))]
237     xx1=xx1[np.logical_not(np.isnan(xx1))]
238     return (xx1, yy1)
239     #####
240
241     #####
242     """
243     Função polit() retorna as variáveis xxt1,yyt1 que determinam
244     as poligonais de uma região tracionada da seção.
245     Variáveis:
246         xc, yc - vértices da seção em relação ao cg.
247         xxt1, yyt1 - vértices das poligonais das região
248         c, b - variáveis de ajuste usadas em D0, D1 e D2
249         epsct0 - def. específica limite do 1o trecho
250         y01 - ordenada limite entre as regiões 0 e 1
251         y12 - ordenada limite entre as regiões 1 e 2
252     Last-Modified: 15/01/2023
253     Status:
254     """
255     def polit(xc, yc, y01, y12):
256         xxt1 = np.copy(xc)
257         yyt1 = np.copy(yc)
258
259         if y01<np.min(yc):
260             yyt1 = xxt1 = np.array([])
261         else:
262             for i in range(np.size(yyt1)):
263                 if yyt1[i]>y01:
264                     yyt1[i] = np.nan
265                     xxt1[i] = np.nan
266                 elif np.isnan(yyt1[i-1])==True:
267                     yyt1[i-1] = y01
268                     xxt1[i-1] =
           ↪ (y01-yc[i-1])/(yc[i]-yc[i-1])*(xc[i]-xc[i-1])+xc[i-1]
269             elif i<(np.size(yyt1)-1):
270                 if (yyt1[i+1]>y01) and (yyt1[i]<y01):
271                     yyt1[i+1] = y01
272                     xxt1[i+1] =
           ↪ (y01-yc[i])/(yc[i+1]-yc[i])*(xc[i+1]-xc[i])+xc[i]

```

```

273         else:
274             continue
275     for i in range(np.size(yt1)):
276         if yt1[i]<y12:
277             yt1[i] = np.nan
278             xt1[i] = np.nan
279         elif np.isnan(yt1[i-1])==True:
280             yt1[i-1] = y12
281             xt1[i-1] =
                ↪ (y12-yc[i-1])/(yc[i]-yc[i-1])*(xc[i]-xc[i-1])+xc[i-1]
282         elif i<(np.size(yt1)-1):
283             if (yt1[i+1]<y12) and (yt1[i]>y12):
284                 yt1[i+1] = y12
285                 xt1[i+1] =
                ↪ (y12-yc[i])/(yc[i+1]-yc[i])*(xc[i+1]-xc[i])+xc[i]
286         else:
287             continue
288     yt1=yt1[np.logical_not(np.isnan(yt1))]
289     xt1=xt1[np.logical_not(np.isnan(xt1))]
290     return (xt1, yt1)
291     #####
292
293     #####
294     """
295     Função reg1() integra a região de compressão do concreto, retornando
296     ↪ momento
297     e esforço normal resistente.
298     Variáveis:
299         D0, D1,..., D4 - coef. geométricos da seção p/ calc. das tensões
300         ↪ no concreto
301         scd = sigma cd, tensão de compressão do concreto
302         Mrx1, Nr1 - esforços resistentes da reg. comprimida
303         G00, G01,..., G05 - polinômios de integração
304     """
305     def reg1(a1, a2, a3, a4, c, b, fcm, xx1, yy1):
306         D0 = a1*c + a2*c**2 + a3*c**3 + a4*c**4
307         D1 = a1*b + 2*a2*b*c + 3*a3*b*c**2 + 4*a4*b*c**3
308         D2 = a2*b**2 + 3*a3*b**2*c + 6*a4*b**2*c**2
309         D3 = a3*b**3 + 4*a4*b**3*c
310         D4 = a4*b**4
311         scd = fcm
312         Mrx1 = 0
313         Nr1 = 0
314         for i in range(np.size(xx1)-1):
315             x1 = xx1[i]
316             y1 = yy1[i]
317             x2 = xx1[i+1]
318             y2 = yy1[i+1]

```

```

317         dx = x2 - x1
318         dy = y2 - y1
319         dy1 = dy/2
320         if dy==0:
321             continue
322         else:
323             dy2 = dy*dy
324             dy3 = dy2*dy
325             dy4 = dy3*dy
326             dy5 = dy4*dy
327             dy6 = dy5*dy
328             G00 = (x1 + dx/2)*dy
329             G01 = (x1*(y1+dy1)+dx*(y1/2+dy/3))*dy
330             G02 = (x1*(y1*(dy+y1)+dy2/3) +
331                 ↪ dx*(y1*(y1/2+dy/1.5)+dy2/4))*dy
332             G03 = (x1*(y1*(dy2+y1*(1.5*dy+y1))+dy3/4) +
333                 ↪ dx*(y1*(0.75*dy2+y1*(dy+y1/2))+dy3/5))*dy
334             G04 = (x1*y1**4*dy + dx*dy5/6+ dy4*(x1*dy+4*y1*dx)/5 +
335                 ↪ dy3*(2*x1*y1*dy + 3*y1**2*dx)/2 +
336                 ↪ dy2*(6*x1*y1**2*dy + 4*y1**3*dx)/3 +
337                 ↪ dy*(4*x1*y1**3*dy + y1**4*dx)/2)
338             G05 = (x1*y1**5*dy + dx*dy6/7 + dy5*(x1*dy + 5*y1*dx)/6 +
339                 ↪ dy4*(x1*y1*dy + 2*y1**2*dx) + dy3*(5*x1*y1**2*dy +
340                 ↪ 5*y1**3*dx)/2 +
341                 ↪ dy2*(10*x1*y1**3*dy + 5*y1**4*dx)/3 +
342                 ↪ dy*(5*x1*y1**4*dy + y1**5*dx)/2)
343             Mrx1 = Mrx1 + scd*(D0*G01 + D1*G02 + D2*G03 + D3*G04 +
344                 ↪ D4*G05)
345             Nr1 = Nr1 + scd*(D0*G00 + D1*G01 + D2*G02 + D3*G03 +
346                 ↪ D4*G04)
347         return (Mrx1, Nr1)
348     #####
349     #####
350     """
351     Função regt() integra as regiões de tração/fissuração do concreto,
352     ↪ definidas
353     por funções lineares, retornando momento e esforço normal resistente.
354     Variáveis:
355         Mrxt, Nrt - esforços resistentes da regioao
356         G00, G01, G02 - polinômios de integração
357     """
358     def regt(b, c, k1, k0, xt, yt):
359         D0 = k1*c + k0
360         D1 = k1*b
361         Mrxt = 0
362         Nrt = 0
363         for i in range(np.size(xt)-1):
364             x1 = xt[i]

```

```

358         y1 = yt[i]
359         x2 = xt[i+1]
360         y2 = yt[i+1]
361         dx = x2 - x1
362         dy = y2 - y1
363         dy1 = dy/2
364         if dy==0:
365             continue
366         else:
367             dy2 = dy*dy
368             G00 = (x1 + dx/2)*dy
369             G01 = (x1*(y1+dy1)+dx*(y1/2+dy/3))*dy
370             G02 = (x1*(y1*(dy+y1)+dy2/3) +
371                  ↪ dx*(y1*(y1/2+dy/1.5)+dy2/4))*dy
372             Mrxt = Mrxt + D0*G01 + D1*G02
373             Nrt = Nrt + D0*G00 + D1*G01
374         return (Mrxt, Nrt)
375 #####
376 """
377 Função aco() retorna a parcela resistente das armaduras da seção.
378 Variáveis:
379     As - área total de aço
380     b,c - variáveis de ajuste
381     Nراسi - força normal na barra i
382     Nراس, Mrراس - esforços resistentes do aço
383     sig - tensão na armadura
384     epsb - deformação específica da barra
385     fy - tensão de escoamento do aço
386     Es - módulo elástico do aço
387     rj - porcentagem de área de aço das armaduras
388     ys - ordenadas das armaduras em relação ao cg
389 """
390 def aco(As, b, c, Es, fy, rj, ys, type='A'):
391     Nراس = 0
392     Mrراس = 0
393     # Aço A, diagrama elasto-plástico perfeito
394     if type == 'A':
395         for i in range(np.size(ys)):
396             epsb = b*ys[i] + c
397             epsyk = fy/Es
398             if (np.abs(epsb)<=epsyk):
399                 sig = Es*epsb
400             else:
401                 sig = np.sign(epsb)*fy
402             Nراسi = rj[i]*As*sig
403             Nراس = Nراس + Nراسi
404             Mrراس = Mrراس + Nراسi*ys[i]
405     # Aço B, diagrama de Menegotto-Pinto

```

```

405     elif type == 'B':
406         epsyk = fy/Es
407         H = 500 #kN/cm2
408         n = 15
409         bb = H/Es
410         for i in range(np.size(ys)):
411             epsb = b*ys[i] + c
412             eps = np.abs(epsb)/epsyk
413             dd = ((1-bb)*eps)/((1+eps**n)**(1/n))
414             sig = np.sign(epsb)*fy*(bb*eps + dd)
415             Nrasi = rj[i]*As*sig
416             Nras = Nras + Nrasi
417             Mrxas = Mrxas + Nrasi*ys[i]
418         return (Mrxas, Nras)
419     #####
420     """
421     Função nlsistema() define o sistema de equações não lineares a ser
422     ↪ solucionado,
423     a partir da chamada das demais funções
424     """
425     def nlsistema(var, *var_aux):
426         (X, lamb) = var
427         const, epscu, epsc2, rj, xc, xg, yc, yg, ys = var_aux
428         As = const[0]
429         a1 = const[1]
430         a2 = const[2]
431         a3 = const[3]
432         a4 = const[4]
433         b1 = const[5]
434         c0 = const[6]
435         c1 = const[7]
436         Es = const[8]
437         fcm = const[9]
438         fy = const[10]
439         Ly = const[11]
440         Max = const[12]
441         Na = const[13]
442         epsct0= const[14]
443         Mrx, Nr, epsS, epsI = esfor(As, a1, a2, a3, a4, b1, c0, c1, Es,
444         ↪ epscu, epsc2, epsct0, fcm, fy,
445         Ly, rj, X, xc, xg, yc, yg, ys)
446         f = lamb*(Mrx) - Max
447         g = lamb*(Nr) - Na
448         return[f,g]
449     #####
450     const = np.array([As, a1, a2, a3, a4, b1, c0, c1, Es, fcm, fy, Ly, Max,
451     ↪ Na, epsct0])
452     lamb_i = 1 #lambda inicial

```

```
450     #vetor de chutes iniciais da LN
451     X_i = np.array([0.5*Ly, 0, Ly, 0.15*Ly, 0.3*Ly, 0.7*Ly, 0.85*Ly])
452     var_aux = (const, -epsc_lim, -epscl, rj, xc, xg, yc, yg, ys)
453     for j in range(np.size(X_i)):
454         s0 = np.array([X_i[j], lamb_i])
455         sf, info, ier, msg = fsolve(nlsistema, s0, var_aux,
456             ↪ full_output=True)
457         if ier==1:
458             break
459     if ier!=1:
460         print(msg)
461     X = sf[0]
462     lamb = sf[1]
463     Mrx, Nr, epsS, epsI = esfor(As, a1, a2, a3, a4, b1, c0, c1, Es,
464         ↪ -epsc_lim, -epscl, epsct0, fcm, fy,
465         Ly, rj, X, xc, xg, yc, yg, ys)
466     FS = 1/lamb
467     return(Mrx, FS)
```

## APÊNDICE B – CÓDIGO DO PROGRAMA DIMFS-NBR.PY

```

1 def dimfs_nbr(b, d, dl, fck, fyk, Es, gamac, gamas, M, flag,
  ↪ version=2023):
2     """
3     Parameters
4     -----
5     b : base da seção (cm).
6     d : altura útil (cm).
7     dl : distância da armadura superior à fibra mais comprimida.
8     fck : resistência característica do concreto (MPa).
9     fyk : resistência característica do aço (MPa).
10    Es : módulo de elasticidade do aço (MPa).
11    gamac, gamas : coeficientes de segurança.
12    M : entrada de momento, da forma adimensional ( $\mu$ ) ou de projeto
  ↪ (Md).
13    flag : 1- $\mu$ , 2-Md.
14    version : versão da norma, opcional. The default is 2023.
15
16    Returns
17    -----
18    As, Asl, Md : áreas de aço e momento.
19    """
20    fcd = fck/gamac/10
21    fyd = fyk/gamas/10
22    Es = Es/10
23
24    # Parâmetros para concretos do grupo I e grupo II
25    if fck <= 50: #MPa
26        lamb = 0.8
27        alfac = 0.85
28        xi_lim = 0.45
29        epscu = 3.5/1000
30        rho_min = (0.078 * fck ** (2/3))/(fyd*10)
31
32    elif fck > 50 and fck <= 90:
33        lamb = 0.8 - (fck-50)/400
34        alfac = 0.85 * (1 - (fck - 50)/200)
35        xi_lim = 0.35
36        epscu = 2.6/1000 + 35/1000 * ((90 - fck)/100)**4
37        rho_min = (0.5512 * np.log(1 + 0.11 * fck)) / (fyd*10)
38
39    if rho_min < 0.15/100:
40        rho_min = 0.15/100

```

```

41
42 # Definição de eta c
43 if version == 2014:
44     etac = 1
45 elif version == 2023:
46     if fck <= 40:
47         etac = 1
48     else:
49         etac = (40/fck)**(1/3)
50
51 sigmacd = alfac * etac * fcd
52 mu_lim = lamb * xi_lim * (1 - 0.5 * lamb * xi_lim)
53
54 if flag == 1: # entrada com momento fletor reduzido \mu
55     mu0 = M
56     Md = mu0 * b * d**2 * sigmacd / etac
57     mu = Md/(b * d**2 * sigmacd)
58     #etac adicionado por efeito de comparação entre versões da norma,
59     ↪ para fixar de acordo com 6118:2014
60 elif flag == 2: # entrada com momento fletor de cálculo Md
61     Md = M
62     mu = Md/(b * d**2 * sigmacd)
63
64 h = d + dl # para os casos avaliados
65 Asmin = rho_min * b * h
66 # Verificação para armadura dupla
67 if mu <= mu_lim:
68     xi = (1 - np.sqrt(1 - 2*mu))/lamb
69     As = lamb * xi * b * d * sigmacd/(fyd)
70     Asl = 0
71 else:
72     epsls = epscu * (xi_lim - dl/d)/xi_lim
73     sigmalsd = Es*epsls
74     if sigmalsd > fyd:
75         sigmalsd = fyd
76     Mdlim = mu_lim * b * d**2 * sigmacd
77     Asl = (Md - Mdlim)/((d - dl)*sigmalsd)
78     As = (Asl * sigmalsd + lamb * xi_lim * b * d * sigmacd)/fyd
79
80 if As < Asmin:
81     As = Asmin
82 return As, Asl, Md

```

## APÊNDICE C – CÓDIGO DO PROGRAMA DIMFS-EC2.PY

```

1 def dimfs_ec2(b, d, dl, fck, fyk, Es, gamac, gamas, M, flag,
  ↪ version=2023):
2     fyd = fyk/gamas/10
3     Es = Es/10
4     ktc = 1.0
5
6     # Parâmetros para concretos do grupo I e grupo II
7     if fck <= 50: #MPa
8         eta = 1.0
9     elif fck > 50 and fck <= 90:
10        eta = 1.0 - (fck-50)/200
11
12    # Definição de eta c
13    if version == 2004:
14        etac = 1
15        if fck <= 50:
16            xi_lim = 0.45
17            lamb = 0.8
18            epscu = 3.5/1000
19            rho_min = (0.078 * fck ** (2/3))/(fyk)
20        elif fck > 50 and fck <= 90:
21            xi_lim = 0.35
22            lamb = 0.8 - (fck-50)/400
23            epscu = 2.6/1000 + 35/1000 * ((90 - fck)/100)**4
24            rho_min = (0.5512 * np.log(1 + (fck + 8)/10)) / (fyk)
25        fcd = ktc * fck/gamac/10
26        sigmacd = eta * fcd
27
28
29    elif version == 2023:
30        epscu = 3.5/1000
31        xi_lim = 1 - 1/(1 + 0.7 * epscu * Es/fyd) #seção 7.3.2, eq 7.16
32        lamb = 0.8
33        if fck <= 40:
34            etac = 1
35        else:
36            etac = (40/fck)**(1/3)
37        if fck <= 50:
38            fctm = 0.3 * fck**(2/3)
39        elif fck > 50:
40            fctm = 1.1 * fck**(1/3)
41        rho_min = 0.26 * fctm/fyk

```

```

42     fcd = ktc * etac * fck/gamac/10
43     sigmacd = fcd
44
45     if rho_min < 0.13/100:
46         rho_min = 0.13/100
47
48     Asmin = rho_min * b * d
49     mu_lim = lamb * xi_lim * (1 - 0.5 * lamb * xi_lim)
50
51     if flag == 1: # entrada com momento fletor reduzido \mu
52         mu0 = M
53         Md = mu0 * b * d**2 * sigmacd
54         if version == 2023:
55             Md = Md * eta/etac
56         mu = Md/(b * d**2 * sigmacd)
57         #etac adicionado por efeito de comparação entre versões da norma,
58         ↪ para fixar de acordo com ec2:2004
59     elif flag == 2: # entrada com momento fletor de cálculo Md
60         Md = M
61         mu = Md/(b * d**2 * sigmacd)
62
63     # Verificação para armadura dupla
64     if mu <= mu_lim:
65         xi = (1 - np.sqrt(1 - 2*mu))/lamb
66         As = lamb * xi * b * d * sigmacd/(fyd)
67         Asl = 0
68     else:
69         epsls = epscu * (xi_lim - dl/d)/xi_lim
70         sigmalsd = Es*epsls
71         if sigmalsd > fyd:
72             sigmalsd = fyd
73         Mdlim = mu_lim * b * d**2 * sigmacd
74         Asl = (Md - Mdlim)/((d - dl)*sigmalsd)
75         As = (Asl * sigmalsd + lamb * xi_lim * b * d * sigmacd)/fyd
76
77     if As < Asmin:
78         As = Asmin
79
80     Astotal = As + Asl
81     if Asl == 0:
82         ns = 1
83         rj = np.array([As])/Astotal
84     else:
85         ns = 2
86         rj = np.array([As, Asl])/Astotal
87
88     return Astotal, ns, rj

```

## APÊNDICE D – CONJUNTO DE VIGAS COM RUPTURA POR FLEXÃO

Tabela AP-D.1 – Parâmetros mecânicos e geométricos das vigas utilizadas na etapa de validação deste estudo

<i>Artigo/ID</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>f<sub>c</sub></i>	<i>f<sub>y</sub></i>	<i>A<sub>s</sub></i>	<i>A<sub>s</sub>'</i>	<i>ρ<sub>s</sub></i>	<i>MR</i>
	(cm)	(cm)	(MPa)	(MPa)	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> )	(%)	(kN.cm)
<b><i>Janney et al. (1956)</i></b>								
janney-01	15,24	30,48	37,2	296	3,80	-	0,82	2530,9
janney-02	15,24	30,48	36,2	333	5,94	-	1,28	4169,1
janney-03	15,24	30,48	42,7	307	8,55	-	1,84	4880,9
janney-04	15,24	30,48	36,5	308	11,64	-	2,51	6451,4
janney-05	15,24	30,48	37,4	387	15,20	-	3,27	8937,1
<b><i>Bresler &amp; Scordelis (1963)</i></b>								
bresler-a3	30,73	56,13	35,0	552	38,68	2,53	2,24	77161,8
bresler-b3	22,86	55,63	38,7	552	32,24	2,53	2,54	58572,4
bresler-c3	23,11	55,37	35,0	552	25,79	2,53	2,01	45058,7
<b><i>Base &amp; Read (1965)</i></b>								
base-01	15,24	27,94	35,4	250	5,07	0,63	1,19	3310,5
base-02	15,24	27,94	34,9	250	5,07	0,63	1,19	3446,0
base-03	15,24	27,94	28,3	250	5,07	0,63	1,19	3954,5
base-04	15,24	27,94	32,1	250	11,40	0,63	2,68	6858,2
base-05	15,24	27,94	41,4	250	11,40	0,63	2,68	6824,3
<b><i>Kong &amp; Rangan (1998)</i></b>								
kong-s2-6	25	35	72,5	452	20,36	2,26	2,33	26312,0
kong-s4-5	25	30	87,3	442	18,10	2,26	2,41	19011,1
kong-s5-6	25	35	89,4	452	20,36	2,26	2,33	28550,9
kong-s6-1	25	35	68,9	450	12,32	2,26	1,41	19050,7
kong-s6-2	25	35	68,9	450	12,32	2,26	1,41	19014,1
<b><i>Garcia (2002)</i></b>								
garcia-2	15	45	70,3	546	15,71	1,01	2,33	32977,5
garcia-10	15	45	37,5	520	12,06	1,01	1,79	22177,5
<b><i>Prieto Rabade &amp; Tamer (2008)</i></b>								
prieto-5-1	20	15	32,6	591	1,51	1,01	0,50	1172,8
prieto-5-2	20	15	32,6	591	1,51	1,01	0,50	1266,6
prieto-11-1	15	20	49,9	575	1,57	1,01	0,52	1689,5
prieto-11-2	15	20	49,9	575	1,57	1,01	0,52	1761,5
prieto-12-1	15	20	47,9	585	4,52	1,01	1,51	3993,5
prieto-12-2	15	20	47,9	585	4,52	1,01	1,51	4233,5
prieto-21-1	15	20	49,5	585	4,52	2,01	1,51	4249,5
prieto-21-2	15	20	49,5	585	4,52	2,01	1,51	4357,5
<b><i>Arezoumandi et al. (2015)</i></b>								

*Continua na página seguinte*

Tabela AP-D.1 – Parâmetros mecânicos e geométricos das vigas utilizadas na etapa de validação deste estudo (continuação)

<i>Artigo/ID</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>f<sub>c</sub></i>	<i>f<sub>y</sub></i>	<i>A<sub>s</sub></i>	<i>A<sub>s</sub>'</i>	$\rho_s$	<i>MR</i>
	( <i>cm</i> )	( <i>cm</i> )	( <i>MPa</i> )	( <i>MPa</i> )	( <i>cm<sup>2</sup></i> )	( <i>cm<sup>2</sup></i> )	(%)	( <i>kN.cm</i> )
arez-cc-1	30	46	37,2	568	5,67	2,65	0,41	15358,0
arez-cc-2	30	46	34,2	568	5,67	2,65	0,41	15808,0
arez-cc-3	30	46	37,2	517	7,60	2,65	0,55	17023,0
arez-cc-4	30	46	34,2	517	7,60	2,65	0,55	16393,0
arez-rca-1	30	46	30,5	568	5,67	2,65	0,41	13783,0
arez-rca-2	30	46	31,3	568	5,67	2,65	0,41	15538,0
arez-rca-3	30	46	37,2	517	7,60	2,65	0,55	17158,0
arez-rca-4	30	46	26,2	517	7,60	2,65	0,55	16888,0
<b><i>Ning et al. (2015)</i></b>								
ning-bs-a-pc	20	30	65,3	471	4,02	1,01	0,67	6762,7
ning-bs-b-pc	20	30	75,6	454	5,09	1,01	0,85	7882,7
ning-bs-c-pc	20	30	63,3	443	6,28	1,01	1,05	9162,7
<b><i>Canaval (2006)</i></b>								
canaval-vref-1	12	22	22,8	601	2,45	0,39	0,93	2257,5
canaval-vref-2	12	22	22,8	601	2,45	0,39	0,93	2182,8
canaval-vref-3	12	22	22,8	601	2,45	0,39	0,93	2226,9
canaval-vref-4	12	22	22,8	601	2,45	0,39	0,93	2129,1
canaval-vref-5	12	22	22,8	601	2,45	0,39	0,93	2160,3
<b><i>Kulkarni &amp; Shah (1998)</i></b>								
shah-b4jl25s	10,2	17,8	41,5	518	2,13	-	1,17	1603,0
shah-b4jl25h	10,2	17,8	41,5	518	2,13	-	1,17	1801,0
shah-b3oc25s	10,2	17,8	46,2	518	2,13	-	1,17	1580,0
shah-b3oc25h	10,2	17,8	46,2	518	2,13	-	1,17	1758,0
shah-b4jl20h	10,2	17,8	41,9	518	2,13	-	1,17	1709,0
shah-b3se03h	10,2	17,8	45,0	518	2,13	-	1,17	1771,0
shah-b3de03s	10,2	17,8	43,0	518	2,13	-	1,17	1585,0
shah-b3de03h	10,2	17,8	43,0	518	2,13	-	1,17	1814,0
shah-b3no15h	10,2	17,8	43,0	518	2,13	-	1,17	1817,0

## **ANEXOS**

## ANEXO A – TABELA DE PARÂMETROS PARA AS DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE PROBABILIDADES

Tabela AN-A.1 - Sumário de distribuições contínuas de probabilidades

Distribuição	$f_x(x)$	parâmetros				Média	Variância
		$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$		
Uniforme	$\frac{1}{b-a}$	$a$	$b$	-	-	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$\mu$	$\sigma$	-	-	$\mu$	$\sigma^2$
Log-Normal	$\frac{1}{\xi x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right)^2\right]$	$\lambda$	$\xi$	-	-	$\exp[\lambda + 0,5\xi^2]$	$\mu^2 [\exp(\xi^2) - 1]$
Exponencial deslocada	$\nu \exp[-\nu(x-\varepsilon)]$	$\nu$	$\varepsilon$	-	-	$\frac{1}{\nu} + \varepsilon$	$\frac{1}{\nu^2}$
Gumbel mínimos	$\beta \exp[\beta(x-u_1) - e^{-\beta(x-u_1)}]$	$u_1$	$\beta$	-	-	$u_1 - \frac{\gamma}{\beta}$	$\frac{\pi^2}{6\beta^2}$
Gumbel máximos	$\beta \exp[\beta(x-u_n) - e^{\beta(x-u_n)}]$	$u_n$	$\beta$	-	-	$u_n - \frac{\gamma}{\beta}$	$\frac{\pi^2}{6\beta^2}$
Frechet mínimos	$\beta \left(\frac{x}{u_1}\right)^{\beta+1} \exp\left[-\left(\frac{x}{u_1}\right)^\beta\right]$	$u_1$	$\beta$	-	-	$u_1 \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$	$u_1^2 \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right]$
Frechet máximos	$\beta \left(\frac{u_n}{x}\right)^{\beta+1} \exp\left[-\left(\frac{u_n}{x}\right)^\beta\right]$	$u_n$	$\beta$	-	-	$u_n \Gamma\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$	$u_n^2 \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\right]$
Weibull mínimos	$\beta \left(\frac{x-\varepsilon}{u_1-\varepsilon}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\varepsilon}{u_1-\varepsilon}\right)^\beta\right]$	$u_1$	$\beta$	$\varepsilon$	-	$\varepsilon + (u_1 - \varepsilon) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$(u_1 - \varepsilon)^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]$
Weibull máximos	$\beta \left(\frac{\varepsilon-x}{\varepsilon-u_n}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon-x}{\varepsilon-u_n}\right)^\beta\right]$	$u_n$	$\beta$	-	$\varepsilon$	$\varepsilon + (\varepsilon - u_n) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$(\varepsilon - u_n)^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]$

Fonte: adaptado de Verzenhassi (2008)

## ANEXO B – FATORES PARA DISTRIBUIÇÃO NORMAL EQUIVALENTE SEGUNDO O MODELO DE NATAF

Tabela AN-B.1 – Tabela para determinação dos fatores  $F_{X_{ij}}$

$X_i$	$X_j$	$F_{X_{ij}}$
Normal	Normal	1,000
Normal	Uniforme	1,023
Normal	Exponencial	1,107
Normal	Rayleigh	1,014
Normal	Tipo-I valor extremo máximo (Gumbel)	1,031
Normal	Tipo-I valor extremo mínimo (Gumbel)	1,031
Normal	Lognormal	$\frac{COV_j}{\sqrt{\ln(1+COV_j^2)}}$
Normal	Gamma	$1,001-0,007COV_j + 0,118COV_j^2$
Normal	Tipo-II valor extremo máximo (Frechet)	$1,030-0,238COV_j + 0,364COV_j^2$
Normal	Tipo-III valor extremo mínimo (Weibull)	$1,031-0,195COV_j + 0,328COV_j^2$

Fonte: adaptado de Liu e Kiureghian (1986)