

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**CONFIABILIDADE DE LAJES DE CONCRETO  
ARMADO PROJETADAS DE ACORDO COM A  
NBR 6118:2023 CONSIDERANDO O  
CONFINAMENTO LATERAL**

**Gabriel Orso Garcia**

Porto Alegre  
2024

GABRIEL ORSO GARCIA

**CONFIABILIDADE DE LAJES DE CONCRETO ARMADO  
PROJETADAS DE ACORDO COM A NBR 6118:2023  
CONSIDERANDO O CONFINAMENTO LATERAL**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Porto Alegre  
2024

### CIP - Catalogação na Publicação

Garcia, Gabriel Orso  
CONFIABILIDADE DE LAJES DE CONCRETO ARMADO  
PROJETADAS DE ACORDO COM A NBR 6118:2023 CONSIDERANDO  
O CONFINAMENTO LATERAL / Gabriel Orso Garcia. -- 2024.  
147 f.  
Orientadores: Mauro de Vasconcellos Real, Paula  
Manica Lazzari.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,  
BR-RS, 2024.

1. Confiabilidade. 2. Concreto Armado. 3. Lajes. 4.  
Método dos Elementos Finitos. 5. Confinamento Lateral.  
I. Real, Mauro de Vasconcellos, orient. II. Lazzari,  
Paula Manica, orient. III. Título.

**GABRIEL ORSO GARCIA**

**CONFIABILIDADE DE LAJES DE CONCRETO ARMADO  
PROJETADAS DE ACORDO COM A NBR 6118:2023  
CONSIDERANDO O CONFINAMENTO LATERAL**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na área de concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 03 de maio de 2024

Prof. Mauro de Vasconcellos Real  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul  
Orientador

Profa. Paula Manica Lazzari  
Dra. pela Universidade Federal do Rio  
Grande do Sul  
Orientadora

Nilo Cesar Consoli  
Dr. pela Concordia University  
Coordenador do PPGE/UFGRS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Américo Campos Filho (UFGRS)**  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

**Prof. Jorge Luis Palomino Tamayo (UFGRS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. André Teófilo Beck (USP)**  
Dr. pela University of Newcastle

## **AGRADECIMENTOS**

Aos professores Mauro de Vasconcellos Real e Paula Manica Lazzari, pelos conhecimentos compartilhados ao longo das reuniões semanais e por toda a ajuda e compreensão empregados no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, Jorge Luís Guimarães Garcia e Rita Tânia Orso Garcia, que sempre foram e serão meus heróis e maiores exemplos, e nunca mediram esforços para que os filhos recebessem a melhor educação possível.

Ao meu irmão, Felipe Orso Garcia, pelo companheirismo e apoio ao longo dos anos.

À Tami, pela compreensão e motivação e carinho sempre intermináveis.

Aos meus colegas de mestrado, Eric, José, Igor e Mário, pelas diversas trocas e ajudas durante o curso de mestrado.

A todos os amigos que sempre estiveram ao meu lado em todos os momentos. Em especial ao Henry Carvalho da Rosa Timm e Felipe Orso Garcia, que gentilmente cederam seus computadores para agilizar as análises desenvolvidas neste trabalho.

Aos colegas de profissão Maicom e Alexandre por ajudarem a desenvolver em mim o amor pela engenharia e ao Lucas, Tiago e Rubem por me incentivarem a nunca parar de estudar e por todos os ensinamentos passados.

Por fim, à toda comunidade acadêmica da Escola de Engenharia da UFRGS e em especial o Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, por buscarem incansavelmente um ensino de excelência para todos que passam por suas fileiras.

O mundo é muito, muito mais complicado  
do que pensamos, o que não é um problema,  
exceto quando a maioria de nós não sabe disso.  
*A Lógica do Cisne Negro – Nassim Nicholas Taleb*

## RESUMO

GARCIA, G. O. **Confiabilidade de Lajes de Concreto Armado projetadas de Acordo com a NBR 6118:2023 considerando o confinamento lateral**. 2024. 147p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Este estudo propõe uma análise da confiabilidade de lajes de concreto armado, dimensionadas de acordo com a NBR6118:2023, levando em conta o efeito do confinamento lateral. O fenômeno do confinamento lateral foi abordado através de teorias analíticas e um modelo tridimensional de elementos finitos desenvolvido no *software* ANSYS, validado por meio da comparação com resultados experimentais de lajes confinadas e não confinadas. Um total de 27 lajes foram dimensionadas e analisadas, variando-se a resistência à compressão do concreto, o vão e o índice de esbelte. Inicialmente, um estudo determinístico foi conduzido para compreender a mudança no comportamento mecânico das lajes induzido pelo confinamento, revelando um incremento médio de 97% na carga de ruptura das lajes estudadas. A análise de confiabilidade foi realizada utilizando o Método de Simulação de Monte Carlo e o Método da Superfície de Resposta, demonstrando um aumento substancial nos índices de confiabilidade de todas as lajes, quando o efeito do confinamento lateral foi considerado, passando de um valor médio de 3,29 para um valor médio de 4,44. O método de confiabilidade de primeira ordem foi também empregado em conjunto com as superfícies de resposta para análise de sensibilidade das variáveis aleatórias, evidenciando o aumento da importância da altura da laje com a consideração do confinamento. Adicionalmente, um estudo paramétrico indicou uma forte influência da esbelte e da resistência do concreto no nível de segurança das lajes. Com um índice de confiabilidade alvo de 3,0, apenas 6 das 27 lajes apresentaram resultados insatisfatórios, e somente quando o confinamento não foi considerado. Por fim, a comparação entre a confiabilidade de lajes confinadas e não confinadas revelou uma correlação significativa entre os resultados e uma relação linear entre os índices de confiabilidade de lajes não confinadas e confinadas foi observada.

**Palavras-chave:** *Confiabilidade. Concreto Armado. Lajes. Método dos Elementos Finitos. Efeito Arco. Confinamento Lateral.*

## ABSTRACT

GARCIA, G. O. **Confiabilidade de Lajes de Concreto Armado projetadas de Acordo com a NBR 6118:2023 considerando o confinamento lateral.** 2024. 147p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

This study proposes a reliability analysis of reinforced concrete slabs, designed according to NBR6118:2023, taking into account the effect of lateral confinement. The phenomenon of lateral confinement was addressed through analytical theories and a three-dimensional finite element model developed in ANSYS software, validated by comparing results from both confined and unconfined slab experiments. A total of 27 slabs were designed and analyzed, varying parameters such as compressive strength of concrete, span, and slenderness ratio. Initially, a deterministic study was conducted to understand the change in the mechanical behavior of slabs induced by confinement, revealing an average increase of 97% in the ultimate load of the studied slabs. The reliability analysis was performed using the Monte Carlo Simulation Method and the Response Surface Method, demonstrating a substantial increase in the reliability indexes of all slabs when the effect of lateral confinement was considered, increasing from an average value of 3.29 to an average value of 4.44. The first-order reliability method was also employed in conjunction with response surfaces for sensitivity analysis of random variables, highlighting the increased importance of slab height when considering confinement. Additionally, a parametric study indicated a strong influence of slenderness and concrete strength on the safety level of slabs. With a target reliability index of 3.0, only 6 out of 27 slabs showed unsatisfactory results, and only when confinement was not considered. Finally, the comparison between the reliability of confined and unconfined slabs revealed a significant correlation between the results, and a linear relationship between the reliability indexes of unconfined and confined slabs was observed.

**Keywords:** *Reliability. Reinforced Concrete. Slabs. Finite Element Method. Arching Effect. Compressive Membrane Effect.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Fenômeno do confinamento lateral em lajes . . . . .	17
Figura 1.2 – Fluxograma de desenvolvimento da pesquisa . . . . .	21
Figura 2.1 – Influência da intensidade das forças laterais para o efeito arco: (a) laje com restrição lateral grande (b) laje com restrição lateral fraca . . . . .	31
Figura 2.2 – Efeito do aumento da força axial em uma seção fletida de concreto armado (a) Relação Momento x Curvatura (b) Diagrama de interação M-N (c) Deformações na seção transversal . . . . .	31
Figura 3.1 – Diagrama tensão-deformação idealizado do concreto . . . . .	39
Figura 3.2 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas . . . . .	40
Figura 3.3 – Geometria de uma laje maciça de concreto armado . . . . .	44
Figura 3.4 – Seção transversal de laje maciça de concreto armado . . . . .	45
Figura 3.5 – Seções plastificadas . . . . .	46
Figura 3.6 – Configuração de ruptura - lajes retangulares simplesmente apoiadas . . . . .	48
Figura 3.7 – Domínios de estado-limite último de uma seção transversal . . . . .	51
Figura 3.8 – Concreto de envolvimento da armadura . . . . .	57
Figura 4.1 – Elemento SOLID186 . . . . .	59
Figura 4.2 – Elemento <i>layered</i> SOLID186 . . . . .	60
Figura 4.3 – Elementos REINF264 e REINF265 . . . . .	61
Figura 4.4 – Lajes modeladas com (a) REINF264 e (b) REINF265 . . . . .	61
Figura 4.5 – Testes de compressão uniaxial no concreto . . . . .	62
Figura 4.6 – (a) Planos desviadores e (b) meridianos idealizados para o concreto . . . . .	63
Figura 4.7 – Critério de falha de Drucker-Prager . . . . .	64
Figura 4.8 – Superfície de ruptura de Rankine (a) Espaço Tridimensional de tensões principais (b) Planos meridianos (c) Planos desviadores . . . . .	65

Figura 4.9 – Superfícies de plastificação do <i>DP-Concrete</i> . . . . .	66
Figura 4.10 – Modelos HSD para o concreto comprimido . . . . .	66
Figura 4.11 – Modelos HSD para o concreto tracionado . . . . .	67
Figura 4.12 – Endurecimento isotrópico linear do aço . . . . .	68
Figura 5.1 – Distribuições de probabilidade de R e S . . . . .	71
Figura 5.2 – Função densidade de probabilidade de M . . . . .	73
Figura 5.3 – Transformação de Nataf . . . . .	76
Figura 5.4 – Função estado limite no espaço padrão não-correlacionado . . . . .	79
Figura 5.5 – Planejamento CCD em duas dimensões . . . . .	82
Figura 6.1 – (a) Condições de contorno das lajes não confinadas no modelo numérico (b) Detalhe do bordo apoiado . . . . .	86
Figura 6.2 – (a) Condições de contorno das lajes confinadas no modelo numérico (b) Detalhe do bordo apoiado . . . . .	87
Figura 6.3 – (a) cargas e apoios do experimento (b) modelo numérico para as lajes de Pires (2003) . . . . .	88
Figura 6.4 – Estudo de malha de elementos no plano da Laje S1 . . . . .	90
Figura 6.5 – Estudo de malha de elementos na espessura da Laje S1 . . . . .	91
Figura 6.6 – Algumas das malhas estudadas para a laje S1 . . . . .	91
Figura 6.7 – Tensões no Aço - Laje S1 . . . . .	92
Figura 6.8 – Deformações no Concreto - Laje S1 . . . . .	92
Figura 6.9 – Comparação de resultados de lajes não confinadas . . . . .	93
Figura 6.10 – Comparação dos modelos numéricos com resultados experimentais de lajes confinadas . . . . .	96
Figura 7.1 – Planta de formas do pavimento estudado. . . . .	98
Figura 7.2 – Modelo numérico de lajes confinadas . . . . .	100

Figura 7.3 – Modelo numérico de lajes engastadas . . . . .	101
Figura 7.4 – Comparação de comportamento mecânico devido ao confinamento lateral .	106
Figura 7.5 – Influência da esbeltez e do $f_{ck}$ nas cargas de ruptura das lajes confinadas de acordo com os modelos numéricos . . . . .	108
Figura 7.6 – Diagramas de força de confinamento de deslocamento lateral nas lajes estudadas . . . . .	111
Figura 7.7 – Tensões na seção do apoio - L30-4-08 . . . . .	112
Figura 7.8 – Cossenos diretores das variáveis aleatórias . . . . .	117
Figura 7.9 – Influência do $f_{ck}$ na confiabilidade das lajes . . . . .	118
Figura 7.10 – Influência da altura na confiabilidade das lajes . . . . .	118
Figura 7.11 – Influência do vão na confiabilidade das lajes . . . . .	119
Figura 7.12 – Influência da esbeltez na confiabilidade das lajes . . . . .	119
Figura 7.13 – Influência da taxa de armadura na confiabilidade das lajes . . . . .	120
Figura 7.14 – Correlação entre confiabilidade de lajes não confinadas e confinadas . . .	120

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Classes de Agressividade Ambiental . . . . .	35
Tabela 3.2 – Correspondência entre a classe de agressividade e a qualidade do concreto	36
Tabela 3.3 – Classes de resistência de concretos estruturais. . . . .	37
Tabela 3.4 – coeficientes $\gamma$ para ELU . . . . .	42
Tabela 3.5 – Valores dos coeficientes $\psi$ . . . . .	43
Tabela 3.6 – Correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o cobrimento nominal para $\Delta c = 10$ mm. . . . .	45
Tabela 3.7 – Valores de $\alpha$ e $\kappa$ para lajes simplesmente apoiadas armadas em duas direções	55
Tabela 3.8 – Valores de $\alpha$ e $\kappa$ para lajes simplesmente engastadas armadas em duas direções	55
Tabela 5.1 – Associação entre $\beta$ e $p_f$ . . . . .	73
Tabela 5.2 – Fatores de correção de correlações $F_{i,j}$ entre diferentes distribuições . . .	77
Tabela 5.3 – Índices de confiabilidade alvo sugeridos pelo JCSS . . . . .	85
Tabela 6.1 – Dados de geometria das lajes experimentais sem confinamento lateral . . .	89
Tabela 6.2 – Dados dos materiais das lajes experimentais sem confinamento lateral . .	89
Tabela 6.3 – Cargas de ruptura de lajes não confinadas . . . . .	93
Tabela 6.4 – Dados das armaduras das lajes experimentais com confinamento lateral . .	95
Tabela 6.5 – Dados dos materiais das lajes experimentais com confinamento lateral . .	95
Tabela 6.6 – Comparativo entre modelo numérico e resultado experimental para lajes com confinamento lateral . . . . .	97
Tabela 7.1 – Dados dos casos de dimensionamento para estudo . . . . .	99
Tabela 7.2 – Variáveis aleatórias utilizadas na análise de confiabilidade . . . . .	102
Tabela 7.3 – Distribuições de probabilidade para a resistência a compressão do concreto conforme a classe do material . . . . .	103

Tabela 7.4 – Comparação de resultados determinísticos entre lajes confinadas e não confinadas . . . . .	107
Tabela 7.5 – Coeficientes $R^2$ das superfícies de resposta geradas . . . . .	114
Tabela 7.6 – Comparação de resultados entre Método da Superfície de Resposta Adaptativo e Normal . . . . .	115
Tabela 7.7 – Resultados de confiabilidade dos casos estudados . . . . .	116

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
APDL	<i>ANSYS Parametric Design Language</i>
CAA	Classe de Agressividade Ambiental
CCD	<i>Central Composite Design</i>
CEB	<i>Euro-International Committee for Concrete</i>
CFRP	<i>Carbon fiber reinforced polymer</i>
CRFA	Concreto Reforçado com Fibras de Aço
CSCM	<i>Continuous Surface Cap Model</i>
CV	Coefficiente de Variação
ELS-DEF	Estado Limite de Deformação Excessiva
ELS-W	Estado Limite de Abertura de Fissuras
ELU	Estado Limite Último
FDP	Função densidade de probabilidade
FDPA	Função densidade de probabilidade acumulada
fib	<i>Fédération internationale du béton</i>
FORM	<i>First Order Reliability Method</i>
HSD	<i>Hardening, softening, dilatation</i>
JCSS	<i>Joint Committee on Structural Safety</i>
NBR	Norma Técnica Brasileira
PPGEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
USP	Universidade de São Paulo

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
1.1	OBJETIVOS	18
1.2	JUSTIFICATIVA	19
1.3	METODOLOGIA	19
1.4	LIMITAÇÕES	20
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	20
1.6	ESTADO DA ARTE	22
1.6.1	Modelagem em Elementos Finitos	22
1.6.2	Confiabilidade Estrutural	23
1.6.3	Lajes Confinadas Lateralmente	25
<b>2</b>	<b>CONFINAMENTO LATERAL EM LAJES DE CONCRETO ARMADO</b>	<b>28</b>
2.1	HISTÓRICO DO CONFINAMENTO LATERAL EM LAJES	28
2.2	MECANISMOS DO CONFINAMENTO LATERAL	30
2.3	OBTENÇÃO DA CARGA DE RUPTURA	32
<b>3</b>	<b>PROJETO DE LAJES DE ACORDO COM A NBR 6118</b>	<b>35</b>
3.1	CLASSE DE AGRESSIVIDADE AMBIENTAL	35
3.2	PROPRIEDADES DOS MATERIAIS	36
3.2.1	Concreto	36
3.2.2	Aço da armadura passiva	39
3.3	AÇÕES NAS ESTRUTURAS	40
3.3.1	Combinações de Ações	41
3.3.1.1	Estado-limite Último	42

3.3.1.2	Estado-limite de deformações excessivas . . . . .	43
3.3.1.3	Estado-limite de abertura das fissuras . . . . .	43
3.4	GEOMETRIA DA LAJE . . . . .	44
3.5	DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS . . . . .	46
3.6	DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO . . . . .	50
3.7	VERIFICAÇÃO AO ESFORÇO CORTANTE . . . . .	53
3.8	VERIFICAÇÃO EM ESTADO LIMITE DE SERVIÇO . . . . .	54
3.8.1	Estado Limite de Deformação Excessiva . . . . .	54
3.8.2	Estado Limite de Abertura de Fissuras . . . . .	56
<b>4</b>	<b>MODELO DE ELEMENTOS FINITOS . . . . .</b>	<b>58</b>
4.1	ELEMENTOS FINITOS . . . . .	58
4.2	MODELOS DE MATERIAIS . . . . .	61
4.2.1	Concreto . . . . .	61
4.2.2	Aço . . . . .	67
4.3	ANÁLISE NÃO-LINEAR . . . . .	68
<b>5</b>	<b>CONFIABILIDADE ESTRUTURAL . . . . .</b>	<b>70</b>
5.1	MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO . . . . .	74
5.2	MÉTODO DE CONFIABILIDADE DE PRIMEIRA ORDEM . . . . .	76
5.3	MÉTODO DA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA . . . . .	81
5.3.1	Planejamento Composto Central . . . . .	82
5.3.2	Avaliação da Superfície de Resposta . . . . .	83
5.4	ÍNDICES DE CONFIABILIDADE ALVO . . . . .	84
<b>6</b>	<b>APLICAÇÃO DO MODELO . . . . .</b>	<b>86</b>
6.1	LAJES SEM CONFINAMENTO LATERAL . . . . .	87

6.2	LAJES COM CONFINAMENTO LATERAL . . . . .	94
6.3	ANÁLISE DOS RESULTADOS . . . . .	97
<b>7</b>	<b>ANÁLISE DOS EFEITOS DO CONFINAMENTO LATERAL EM LAJES PROJETADAS DE ACORDO COM A NBR6118 . . . . .</b>	<b>98</b>
7.1	ESTUDO DO CONFINAMENTO LATERAL . . . . .	103
7.2	ANÁLISE DE CONFIABILIDADE . . . . .	112
7.3	ESTUDO PARAMÉTRICO . . . . .	117
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>122</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>124</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>130</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, os projetos de lajes de concreto armado são desenvolvidos no Brasil baseados principalmente em três teorias: a Teoria Elástica, exposta no livro de Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1964), a Teoria das Linhas de Ruptura, baseada na Teoria da Plasticidade e desenvolvida por Johansen (1972) e a analogia da grelha equivalente, facilmente programável e por isso utilizada em grande parte dos *softwares* de cálculo estrutural. Essas teorias consideram que as lajes trabalham sob flexão pura, sem esforços em seu plano médio.

Com o rompimento das lajes de um hospital em Johannesburgo, Okleston (1956) percebeu que as teorias subestimavam a capacidade resistente das lajes, principalmente naquelas armadas em duas direções. O autor atribuiu o fenômeno à existência de esforços de compressão no plano da laje.

A explicação física para a ocorrência desse fenômeno é que, quando a laje fissa devido ao aumento da carga aplicada e ocorre a formação de linhas de ruptura, a superfície média da laje tende a se expandir em direção aos apoios devido às deformações de tração, que serão predominantes na seção transversal. Caso os apoios sejam suficientemente rígidos para conter essa expansão lateral, surgem esforços normais de compressão que aumentam a capacidade resistente das estruturas (REAL, 1990). A figura Figura 1.1 ilustra esse fenômeno.

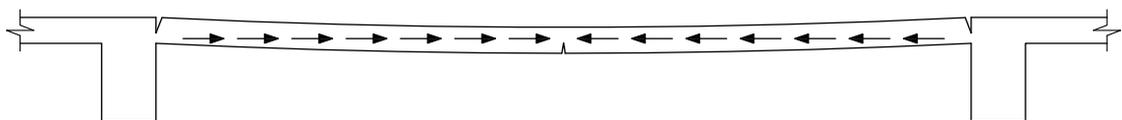


Figura 1.1 – Fenômeno do confinamento lateral em lajes  
(fonte: adaptado de Real (1990))

A restrição à expansão lateral das lajes de concreto armado pode acontecer em diferentes níveis, desde a não existência da restrição até o confinamento completo, resultando em diferentes influências na carga de ruptura da laje. Desde a descoberta do fenômeno por Okleston (1956), mais trabalhos, numéricos e experimentais, foram desenvolvidos para correta compreensão do fenômeno, como por exemplo as pesquisas de Park (1964a), Park (1964b), Park (1965), Rankin et al. (1991) e Rankin e Long (1997).

Em engenharia de estruturas é impossível prever com precisão cargas de colapso de elementos estruturais devido à incertezas intrínsecas relacionadas aos materiais, carregamentos e geometria das peças. Esses parâmetros podem, inclusive, ser considerados aleatórios. A presença de variáveis aleatórias implica na impossibilidade de se conceber uma estrutura absolutamente

segura. No entanto, é possível estimar a probabilidade de falha de uma peça estrutural. Portanto, as estruturas devem ser projetadas de maneira a atender a uma probabilidade máxima de falha estipulada previamente ou a um nível mínimo de confiabilidade estrutural (TITELLO, 2020).

Como a confiabilidade de uma estrutura está diretamente ligada à capacidade de previsão de seu comportamento sob carga, o efeito da membrana compressiva em lajes acaba afetando a probabilidade de falha dessas estruturas, além de modificar os parâmetros mais importantes na sua avaliação (ARSHIAN; MORGENTHAL, 2017). Dessa forma, a correta estimativa da confiabilidade e a inclusão de métodos que levem em consideração o efeito da membrana compressiva no dimensionamento de lajes pode levar a processos normativos de dimensionamento mais seguros e econômicos.

Nesse contexto, o presente trabalho pretende contribuir com o entendimento a respeito do fenômeno do confinamento lateral em lajes maciças de concreto armado, bem como suas implicações na confiabilidade desses elementos, quando dimensionados de acordo com as normas brasileiras atualmente vigentes.

## 1.1 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo principal avaliar a confiabilidade de um conjunto de lajes dimensionadas conforme as normas brasileiras NBR 6118:2023 e NBR 6120:2019 submetidas ao efeito do confinamento lateral e compará-las às não confinadas lateralmente.

Ainda, pretende-se como objetivos específicos:

- a) Investigar, através de um modelo numérico, as diferenças no comportamento mecânico de lajes confinadas lateralmente em relação às não confinadas;
- b) Avaliar a confiabilidade de lajes sem confinamento conforme critérios das NBR 6118:2023 e NBR 6120:2019;
- c) Avaliar a confiabilidade de lajes com confinamento conforme critérios das NBR 6118:2023 e NBR 6120:2019;
- d) Realizar um estudo paramétrico procurando entender os principais fatores de influência na variação dos diferentes índices de confiabilidade encontrados.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

A execução deste estudo é justificada pela significativa contribuição que oferecerá ao entendimento da confiabilidade das estruturas projetadas de acordo com as normas brasileiras. Apesar dos avanços recentes nesta área do conhecimento, a escassez de pesquisas que avaliem os processos de dimensionamento estabelecidos pelas novas normas brasileiras em termos de confiabilidade é notável. Este trabalho, em particular, se propõe a contribuir para o preenchimento dessa lacuna, dedicando-se à análise de efeitos estruturais frequentemente desconsiderados, como o confinamento lateral, fenômeno presente em muitos edifícios convencionais construídos no país.

A análise probabilística de estruturas têm sido adotada mundialmente para calibração das normas de dimensionamento, procurando consolidar os níveis de confiabilidade e buscando estruturas mais seguras e econômicas. Neste sentido, uma avaliação do desempenho das normas contribui para validação das metodologias existentes ou propicia sugestões de melhorias em futuras revisões normativas.

## 1.3 METODOLOGIA

A abordagem utilizada envolve a aplicação de um método de simulação numérica, o método dos elementos finitos, utilizando o *software* ANSYS para obter a capacidade resistente das lajes analisadas. Essas lajes são dimensionadas de acordo com os critérios estabelecidos na NBR 6118:2023. O ANSYS, por meio da linguagem APDL, vem sendo utilizado em trabalhos acadêmicos devido à sua facilidade de geração e processamento de modelos, além de possibilitar um alto nível de intervenção do usuário em propriedades geométricas e dos materiais. Recentemente, diversos trabalhos de modelagem numérica de estruturas de concreto foram desenvolvidos no PPGEC/UFRGS, como os de Alarcón Ayala (2017), Benincá (2019), Silva (2023), Kraeski (2023) e Schimanowski (2024). A validação do modelo é realizada através da comparação entre resultados experimentais encontrados na literatura e as cargas de ruptura encontradas pelo modelo numérico.

Posteriormente, o modelo numérico gerado foi utilizado para análise de confiabilidade de lajes maciças de concreto armado projetadas segundo as normas brasileiras. Em relação aos métodos de confiabilidade, foram utilizados métodos já consagrados na literatura do tema: Método de Monte Carlo associado ao Método da Superfície de Resposta e o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem. Os algoritmos de confiabilidade foram desenvolvidos na linguagem *Python* e integrados com o *software* ANSYS.

## 1.4 LIMITAÇÕES

Para o desenvolvimento deste trabalho, e devido ao modelo numérico adotado para análise de confiabilidade, a contribuição da rigidez confinante de pilares e vigas no pavimento da laje foram desconsideradas.

Quando à geometria da laje, foram estudadas apenas lajes quadradas e confinadas nos quatro bordos por lajes de mesma espessura, e o carregamento foi aplicado exclusivamente na laje de interesse do estudo. Maiores detalhes do modelo utilizado e geometrias estudadas estão presentes no Capítulo 7.

Além disso, conforme discutido na subseção 4.2.1, o modelo utilizado para o concreto em elementos finitos não possui um critério explícito de falha, fazendo com que a falha da estrutura seja dada pela perda de convergência do modelo numérico.

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O primeiro capítulo apresenta de forma geral o problema a ser trabalhado, a importância do tema, os objetivos do trabalho e trabalhos de referência sobre lajes confinadas lateralmente, método dos elementos finitos aplicado à estruturas de concreto armado e análise de confiabilidade.

No segundo capítulo, o fenômeno do confinamento lateral em elementos de concreto armado é minuciosamente explorado e examinado. Embora tenha sido objeto de estudo por décadas entre pesquisadores, é notável que o conhecimento sobre sua existência ainda não tenha sido amplamente disseminado entre projetistas e pesquisadores da engenharia estrutural. Este capítulo se dedica a preencher essa lacuna, revisando alguns dos trabalhos já publicados sobre o assunto e procurando esclarecer para o leitor o fenômeno.

O terceiro capítulo apresenta um dos métodos atualmente indicados pela norma brasileira NBR6118:2023 para cálculo de lajes maciças de concreto armado.

O Capítulo 4 apresenta o modelo desenvolvido em elementos finitos, descrevendo os elementos utilizados, as características dos materiais, método de aplicação das cargas e obtenção da resposta estrutural, ou seja, os deslocamentos da estruturas e a carga máxima resistida.

No quinto capítulo são apresentados alguns dos métodos para obtenção da confiabilidade estrutural, sendo o Método de Monte Carlo, o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem e o Método da Superfície de Resposta.

No Capítulo 6, o modelo desenvolvido em elementos finitos é submetido a uma análise comparativa com resultados experimentais extraídos da literatura, com o propósito de validar sua aplicabilidade futura na análise de confiabilidade - são descritos os modelos experimentais utilizados assim como as cargas de ruptura obtidas experimentalmente e numericamente para comparação. Essa abordagem permite uma avaliação crítica da robustez do modelo de elementos finitos, essencial para sua aplicação confiável em estudos posteriores de confiabilidade estrutural.

O Capítulo 7 é dividido em duas partes: na primeira são apresentadas as lajes de estudo deste trabalho, e cargas de ruptura determinísticas são calculadas analiticamente e numericamente para uma discussão sobre os efeitos do confinamento lateral. Posteriormente, são apresentados e discutidos os resultados de confiabilidade para cada uma das lajes.

O Capítulo 8 apresenta as considerações finais desta pesquisa, bem como sugestões para trabalhos futuros.

A Figura 1.2 apresenta o fluxograma geral de desenvolvimento desta pesquisa, com a ordem dos passos desenvolvidos para que os objetivos fossem alcançados.

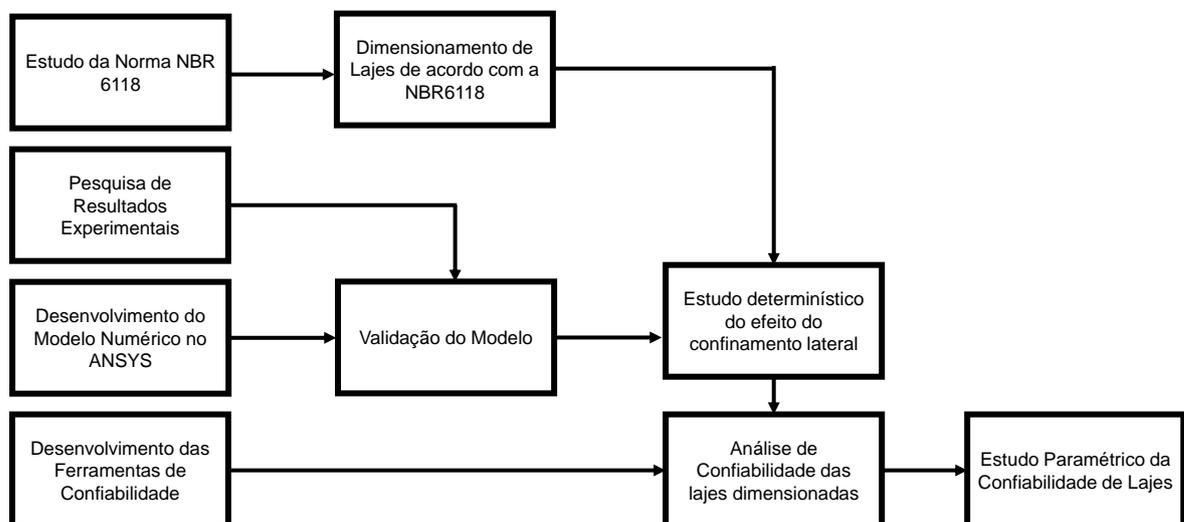


Figura 1.2 – Fluxograma de desenvolvimento da pesquisa  
(fonte: o autor)

## 1.6 ESTADO DA ARTE

Nesta seção serão apresentados e indicados brevemente alguns estudos sobre os tópicos principais da pesquisa, sendo separados em três categorias: modelagem de estruturas de concreto armado pelo método dos elementos finitos, confiabilidade estrutural e comportamento de lajes submetidas ao efeito do confinamento lateral.

### 1.6.1 Modelagem em Elementos Finitos

Real (1990) desenvolveu uma formulação utilizando o método dos elementos finitos para realizar a análise estática de lajes de concreto armado, levando em consideração diversas condições de contorno no plano, incluindo a restrição de expansão lateral. A análise não levou em conta efeitos reológicos do concreto. Por meio de suas análises, o autor evidenciou a influência das condições de contorno da laje no comportamento estrutural, relacionando-o à carga resistida e à deflexão.

No estudo conduzido por Bandeira (2006), o *software* comercial DIANA foi utilizado para modelar lajes de concreto armado. Ao comparar os resultados numéricos com os experimentais, a autora concluiu que os parâmetros de resistência à tração do concreto e a energia despendida na formação de fissuras são fundamentais para prever corretamente o comportamento das lajes. Além disso, ressaltou que, para obter resultados numéricos precisos, os valores de resistência à tração devem ser menores do que os estipulados pelos códigos normativos, enquanto o modelo indicado pelo CEB-FIP se mostrou adequado para representar a energia de fraturamento.

No estudo realizado por Stramandinoli (2007), foram desenvolvidas e comparadas diversas formulações em elementos finitos para a análise de vigas e pórticos planos de concreto armado. Foram empregados elementos planos e elementos de viga, baseados na teoria de Bernoulli e Timoshenko. Além disso, foram considerados modelos constitutivos tanto uniaxiais quanto biaxiais para o concreto. Esses modelos foram confrontados com resultados experimentais, demonstrando, em geral, boa concordância com os ensaios realizados. Entre as principais conclusões da autora está a importância do *tension stiffening* - comportamento pós-fissuração - em estruturas de concreto, principalmente no comportamento em serviço.

No estudo realizado por Alarcón Ayala (2017), foram analisadas lajes de concreto armado e protendido, com e sem aderência, utilizando o *software* ANSYS. Foi empregado um modelo elasto-viscoplástico personalizado para o concreto, desenvolvido por Lazzari (2015) e baseado no critério de ruptura de Ottosen (1977). Os elementos utilizados no modelo foram: SHELL281, REINF264 e LINK180. O autor verificou uma boa correspondência entre o modelo numérico e os resultados experimentais.

Bermejo, Santos e Goicolea (2017) estudaram o colapso de estruturas de concreto armado

através do *software* LS-DYNA. O modelo adotado para o concreto foi o *Continuous Surface Cap Model* (CSCM), com formulação para considerar o dano. Para o aço, foi utilizado um modelo elasto-plástico com endurecimento. Os resultados numéricos obtidos foram comparados com os resultados experimentais da estrutura, e demonstraram a capacidade de prever o colapso progressivo da estrutura de forma satisfatória.

Nassim, Khalil e Bekaddour (2018) desenvolveram um programa de elementos finitos capaz de prever com boa precisão o comportamento de lajes de concreto de alta resistência, utilizando um critério de falha baseado nos dois primeiros invariantes de tensões do concreto. Além disso, o comportamento das lajes sob punção também foi avaliado. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados do *software* ANSYS e com resultados experimentais, demonstrando a capacidade do programa desenvolvido.

Benincá (2019) modelou no *software* ANSYS vigas alveolares mistas de concreto e aço. Para o concreto, foram empregados elementos sólidos hexaédricos e dois modelos de material: DP-Concrete do ANSYS e um modelo personalizado com base no critério de Ottosen (1977), do PPGEC/UFRGS. O autor constatou uma boa correlação entre os resultados numéricos e experimentais para ambos os modelos de concreto, destacando que, por se tratar de vigas alveolares, o concreto nos modelos desenvolvidos não atingia altas tensões.

Kraeski (2023) dedicou-se a modelagem de lajes alveolares protendidas em elementos finitos através do *software* ANSYS. O objetivo da pesquisa foi estudar numericamente o comportamento das lajes em situações de flexão e corte. Resultados experimentais foram utilizados para validação do modelo, que foi considerado satisfatório a partir de análises do comportamento mecânico.

Schimanowski (2024) investigou, por meio de um modelo computacional no *software* ANSYS, lajes lisas contendo vazios esféricos. O autor validou o modelo numérico comparando-o com 19 resultados experimentais e, em seguida, realizou uma análise paramétrica para avaliar o impacto da variação da presença, distribuição, posição e diâmetro dos vazios, bem como da espessura das lajes, taxas de armadura de flexão, presença de pré-lajes, formato e dimensões dos pilares, e posição e presença de armaduras de cisalhamento no comportamento carga-deslocamento das peças. Entre as conclusões do estudo, o autor destacou que a presença de esferas influencia significativamente nas cargas de ruptura, enquanto os outros parâmetros impactam de forma semelhante às lajes sem a presença de vazios. Além disso, as armaduras de cisalhamento contribuíram positivamente para os ganhos de resistência e ductilidade das lajes.

## 1.6.2 Confiabilidade Estrutural

O trabalho de Gomes (2001) destinou-se a comparar diferentes técnicas de avaliação de confiabilidade - como FORM, Método de Monte Carlo, Método de Monte Carlo com Amostragem

por Importância Adaptativa e meta modelos como Método da Superfície de Resposta e Redes Neurais Artificiais - em estruturas de concreto armado. Além disso, o autor incluiu em sua pesquisa a investigação do efeito da variabilidade espacial das propriedades do concreto. A pesquisa concluiu que as técnicas de simulação perdem competitividade em problemas complexos devido ao baixo desempenho. Em contrapartida, as técnicas de meta-modelagem e FORM apresentam desempenho satisfatório embora tenham precisão menor devido as aproximações presentes.

Silva (2017) investigou a confiabilidade de ligações laje-pilar sob punção, conforme estabelecido pela NBR 6118:2014. O estudo empregou um modelo de elementos finitos no *software* ANSYS. A abordagem probabilística foi realizada por meio do Método de Monte Carlo, que reduziu as variáveis de resistência e solitação a variáveis aleatórias independentes usando síntese estatística. O autor concluiu que a norma brasileira é adequada para dimensionar lajes sem armadura de cisalhamento, mas requer cuidado ao utilizar o Processo Elástico Aproximado e considerar cargas acidentais elevadas. Já as lajes com armadura de cisalhamento apresentaram, em geral, índices de confiabilidade abaixo do considerado satisfatório.

Prata (2017) utilizou uma formulação analítica associada ao Método de Monte Carlo e ao FORM para avaliar a confiabilidade de lajes maciças de concreto armado em estruturas portuárias. O estudo paramétrico indicou uma diminuição nos índices de confiabilidade com o aumento da resistência característica à compressão do concreto das lajes e com o aumento da proporção da carga acidental atuante na estrutura. Por outro lado, o aumento da relação vão/espessura das lajes resultou em um aumento dos índices de confiabilidade.

Scherer (2018) apresentou uma dissertação que explorou a confiabilidade de vigas de concreto armado. A análise da resistência das vigas foi conduzida numericamente utilizando o *software* ANSYS. O método de Monte Carlo foi empregado para obter estatísticas sobre a resistência das vigas, enquanto a síntese estatística e o Método da Superfície de Resposta foram utilizados em conjunto com o FORM para calcular os índices de confiabilidade. O autor observou uma influência significativa do carregamento variável e das propriedades mecânicas do aço de reforço nos índices de confiabilidade.

Santiago (2019) realizou a calibração dos coeficientes parciais de segurança das normas brasileiras NBR8681, NBR6118 e NBR8800 com base na confiabilidade. Os índices de confiabilidade foram calculados por meio do Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM), buscando atingir um índice alvo de 3. Foram consideradas diferentes situações de projeto de estruturas de concreto no processo de calibração, como vigas de concreto armado sujeitas à flexão, vigas de concreto armado sujeitas ao cisalhamento, pilares de concreto armado sujeitos à flexo-compressão normal, lajes de concreto armado sujeitas à flexão e vigas de concreto protendido sujeitas à flexão. Além da calibração, o estudo coletou uma série de dados amostrais sobre as estruturas de concreto e

aço no país. As análises demonstraram que as variáveis de resistência e solicitação no Brasil apresentam um comportamento ligeiramente diferente em relação a outros países. Os novos coeficientes sugeridos indicaram uma tendência de aumentar as ações variáveis principais e diminuir as secundárias, destacando a importância da revisão dos coeficientes parciais adotados pelas normas brasileiras.

Titello (2020) utilizou o *software* ANSYS para avaliar a confiabilidade de vigas de CRFA (Concreto Reforçado com Fibras de Aço) para esforços transversais. Os índices de confiabilidade foram calculados por meio do *First Order Reliability Method* (FORM), utilizando uma biblioteca que trabalha com a função de estado limite implícita do ANSYS. O reforço de vigas de concreto com CRFA mostrou-se viável para esforços transversais, porém são necessários cuidados especiais com o controle de produção e as margens de segurança.

O estudo realizado por Leite (2022) investigou a confiabilidade de lajes de concreto armado projetadas conforme as normas brasileiras, focando no estado limite de serviço relacionado à deformação excessiva. A análise foi conduzida utilizando campos estocásticos para representar a variabilidade na geometria das lajes, e modelos baseados em elementos finitos foram implementados por meio do *software* ANSYS. Os resultados indicaram índices de confiabilidade aproximados de 2,80 para condições em serviço.

Silva (2023) aplicou os métodos FORM, Método de Monte Carlo e Método da Superfície de Resposta em combinação com o *Central Composite Design* (CCD) para obter os índices de confiabilidade de túneis profundos reforçados com tirantes passivos. Tanto modelos analíticos quanto numéricos foram utilizados para modelar túneis com e sem reforço, sendo que os últimos empregaram o método da homogeneização. Os resultados obtidos demonstraram a eficácia das metodologias utilizadas. Em todos os casos estudados, foram obtidas probabilidades de falha abaixo ou próximas a 1,0% para as melhores condições estruturais dos túneis.

### 1.6.3 Lajes Confinadas Lateralmente

Keyvani, Sasani e Mirzaei (2014) desenvolveram uma técnica de modelagem por elementos finitos para estudar o efeito da membrana compressiva em lajes lisas. Observou-se que o confinamento da laje resulta em um significativo aumento na força de punção devido ao desenvolvimento de esforços de compressão no plano da laje, bem como um aumento na força de atrito próximo às regiões dos pilares. Além disso, o estudo demonstrou que, em estruturas de lajes lisas, o confinamento lateral é proporcionado pela própria laje.

A dissertação de Botticchio (2014) investigou a distribuição de esforços em lajes de pontes sujeitas ao efeito arco. Concluiu-se que a rigidez no plano das lajes adjacentes é responsável por prover os esforços horizontais de compressão na laje, e que os banzos comprimidos no interior

das lajes formam ângulos entre 15 e 30 graus em relação à horizontal. O autor também constatou que a capacidade de carga e a rigidez da laje estão diretamente relacionadas ao espaçamento das vigas de suporte, mas que essas não influenciam a relação carga vertical aplicada/esforços horizontais internos. Além disso, ressaltou que o efeito arco ocorre apenas quando há fissuração nas lajes.

Thoma e Malisia (2018) conduziram análises não lineares por elementos finitos em lajes de concreto armadas em uma direção e submetidas a diferentes graus de confinamento lateral com o objetivo de investigar o efeito da membrana compressiva na resposta da laje. Um estudo paramétrico foi realizado para compreender melhor a tensão desenvolvida no aço, a deflexão da peça e o efeito da esbeltez. Os resultados demonstraram que uma pequena restrição à expansão lateral é suficiente para reduzir consideravelmente as tensões e deformações no aço, e que, com o aumento da restrição, esses valores tendem a estabilizar em um patamar.

Zhu et al. (2021) desenvolveram um método analítico para prever a capacidade resistente de lajes com restrição lateral, levando em consideração a excentricidade da restrição lateral, a rigidez da restrição à rotação do apoio e a variação de espessura das lajes. O método proposto foi posteriormente comparado a análises por elementos finitos e resultados experimentais.

Viegas (2022) estudou a confiabilidade de lajes projetadas de acordo com a NBR 6118:2014, utilizando um modelo de elementos finitos e síntese estatística, considerando o confinamento lateral através de apoios infinitamente rígidos. Como resultado, observou-se um considerável aumento no índice de confiabilidade nas lajes com restrição lateral, devido aos ganhos de resistência entre 26% e 89%. Além disso, constatou-se a influência do parâmetro de resistência à compressão do concreto, que se torna determinante para a resistência final das lajes com restrição lateral.

Entre as diferenças do trabalho de Viegas (2022) e este trabalho, destacam-se a consideração de rigidez infinita do confinamento pelo autor enquanto este trabalho utilizou rigidezes geradas pelas lajes adjacentes no pavimento e a análise probabilística que foi realizada através de síntese estatística e FORM pelo autor no lugar das superfícies de resposta atreladas ao Método de Simulação de Monte Carlo utilizado neste trabalho. Além disso, em relação ao dimensionamento das lajes, o autor utilizou a teoria da elasticidade para dimensionar lajes simplesmente apoiadas, enquanto este trabalho utilizou a teoria das linhas de ruptura para calcular lajes engastadas nos quatro bordos.

Thienpont et al. (2022) investigaram probabilisticamente o comportamento de lajes alveolares pré-moldadas considerando diferentes graus de restrição lateral por meio do método dos elementos finitos e testes experimentais. Os autores destacaram o alto coeficiente de variação para as forças restritivas no plano, independentemente do grau de restrição lateral utilizado. Devido a isso, a

variabilidade da resistência das lajes aumenta com o aumento da restrição lateral.

## 2 CONFINAMENTO LATERAL EM LAJES DE CONCRETO ARMADO

O efeito do confinamento lateral em lajes de concreto armado, apesar de possuir vasta bibliografia científica, ainda é pouco conhecido no meio acadêmico e profissional. Dessa forma, esse capítulo tem o objetivo de familiarizar o leitor com o tema e foi dividido em três seções: a primeira traz um breve histórico da descoberta do fenômeno, enquanto a segunda traz explicações teóricas sobre os ganhos de resistência observados, já a terceira seção apresenta uma teoria analítica para obtenção de cargas de ruptura em lajes confinadas lateralmente.

### 2.1 HISTÓRICO DO CONFINAMENTO LATERAL EM LAJES

O efeito membrana compressiva vem sendo notado em lajes de concreto armado há quase setenta anos. As primeiras observações do comportamento peculiar de lajes foram feitas por Westergaard e Slater (1921) que ao testarem uma série de painéis de lajes notaram que as cargas de ruptura foram superiores, e em alguns casos muito superiores, aquelas determinadas pelas teorias disponíveis na época. Entretanto, nenhuma explicação razoável foi obtida.

Provavelmente, a primeira e mais famosa descoberta em relação ao confinamento lateral de lajes de concreto armado foi feita por Okleston (1956), que carregou as lajes de uma edificação existente com 10 anos de idade até a falha. As lajes, que haviam sido dimensionadas para suportar carregamentos próximos de  $6,6 \text{ kN/m}^2$  falharam apenas com cargas próximas a  $40 \text{ kN/m}^2$ . O autor atribuiu parcialmente a reserva de resistência ao efeito da membrana compressiva nas lajes.

Christiansen et al. (1963) desenvolveram expressões para analisar o efeito membrana em lajes unidirecionais de concreto armado submetidas à carregamento uniforme. Um fator de rigidez relativa dos elementos adjacentes à laje era necessário para o cálculo das forças da membrana e foi determinado a partir de uma base empírica. A partir da força no plano, a carga de ruptura das lajes poderia então ser calculada.

O trabalho de Park (1965) também se dedicou a buscar expressões para o cálculo da carga de ruptura de lajes restritas à expansão em seus planos. As equações desenvolvidas foram baseadas na teoria das linhas de ruptura, utilizando-se de uma aproximação rígido-plástica perfeita. Para os cálculos, era necessário determinar o deslocamento vertical da laje no centro do vão no instante da ruptura. O autor demonstrou, através de resultados experimentais que a deflexão última

das lajes estariam em uma faixa entre 40 e 50% da altura das lajes, independentemente de suas esbeltezes.

Um ano depois, Liebenberg (1966) demonstrou que o efeito do confinamento lateral em lajes de concreto armado é uma consequência da fissuração e do comportamento altamente não-linear do concreto sob tensões. O autor também desenvolveu uma teoria que buscava estimar cargas de ruptura para lajes confinadas lateralmente.

Em um estudo experimental sobre o efeito do confinamento lateral em vigas, Roberts (1969) relatou o rompimento do concreto por compressão próximo aos apoios das vigas, aproximadamente no terço inferior da seção. Esse fato indica que as forças de compressão laterais podem gerar momentos negativos consideráveis nos apoios, devido à sua excentricidade, além da mudança da forma de ruptura do elemento, que nesses casos passaram a apresentar rupturas bruscas e menos dúcteis se comparadas às rupturas por flexão pura.

Hopkins e Park (1972) investigaram o efeito membrana rompendo painéis com nove lajes para simular pavimentos em concreto armado. Os resultados foram utilizados para contribuir e revisar as formulações analíticas existentes.

Em seu trabalho, Guice e Rhomberg (1989) romperam uma série de lajes confinadas lateralmente e concluíram que as teorias de Park resultam em um limite superior para a carga de ruptura, em alguns casos superestimando-a significativamente. O trabalho também constatou que a restrição à rotação nos bordos da laje é capaz de alterar o comportamento da membrana de compressão, sendo um fator importante a ser levado em consideração.

Experimentos em duas lajes de concreto armado para comparar o comportamento entre uma com restrição lateral e outra sem foram realizados por Vecchio e Tang (1990). A laje com restrição lateral apresentou forças axiais internas maiores do que a carga suportada, resultando em um aumento de aproximadamente 30% a 40% na capacidade de carga e rigidez. Os autores destacaram a importância da não linearidade geométrica no comportamento das lajes, uma vez que os esforços axiais combinados com alta deflexão acabam atenuando o efeito da membrana compressiva. Além disso, os autores demonstraram que as lajes adjacentes em um pavimento de concreto armado são capazes de prover a rigidez necessária para o desenvolvimento de forças axiais no plano do pavimento.

Rankin et al. (1991) desenvolveram um novo modelo analítico para determinar a carga de ruptura de lajes com restrição ao deslocamento lateral. O modelo tinha o objetivo de ter formulações simples e não necessitar de dados empíricos ou aproximações. A teoria foi testada com ensaios experimentais próprios e de terceiros, resultando em boa concordância. O modelo porém, considerava uma rigidez infinita para a restrição lateral, e foi modificado posteriormente para

trabalhar-se com lajes em um pavimento, onde a restrição lateral não é completa.

## 2.2 MECANISMOS DO CONFINAMENTO LATERAL

O efeito arco, ou efeito membrana compressiva, pode ser entendido como a formação de campos de compressão inclinados em lajes de concreto armado. O campo de tensões inclinado é composto por uma componente vertical advinda do carregamento aplicado e uma componente horizontal que se desenvolve a partir da restrição ao deslocamento lateral imposta. O fenômeno é causado a partir da rigidez no plano dos elementos adjacentes à laje (BOTTICCHIO, 2014).

Conforme demonstrado por Liebenberg (1966), a fissuração do concreto faz com que a laje tenha uma tendência de expansão no plano, dado que a maior parte de sua seção transversal estará sujeita a deformações de tração. Assim, a restrição à expansão lateral dada pelos elementos adjacentes faz com que surjam esforços de compressão significativos no plano. O autor se refere a diferença do comportamento em tração e compressão do concreto como o principal motivo para o desenvolvimento dos planos de tensão inclinados.

Antes da ocorrência de fissuras, a distribuição de tensões na seção transversal do concreto segue um padrão linear, resultando em uma igualdade entre as deformações de compressão e tração. Portanto, teoricamente, o efeito da membrana compressiva só se manifesta após a fissuração, quando o concreto deixa o estágio I. Em seus estudos, Liebenberg (1966) demonstrou que o efeito de arco se manifesta na laje antes mesmo de quaisquer fissuras visíveis surgirem, sugerindo que até microfissuras têm o potencial de desencadear esse fenômeno.

Conforme demonstrado nos estudos de Park (1965) e Vecchio e Tang (1990) os esforços horizontais produzidos pela restrição no plano da laje devem ser significativamente maiores que as cargas verticais, já que a combinação delas é que forma o pequeno ângulo de inclinação da força resultante, que permite que a força seja transferida aos apoios majoritariamente por compressão da membrana, aliviando a flexão pura. Isso explica como a laje consegue, através do efeito arco, sustentar carregamentos maiores que em flexão pura (BOTTICCHIO, 2014). A Figura 2.1 ilustra didaticamente esse conceito.

O efeito da membrana compressiva no aumento da resistência das lajes pode ser melhor entendido ao comparar o comportamento de seções de concreto armado com níveis diferentes de esforços axiais de compressão. A Figura 2.2 (a) ilustra o ganho de resistência e rigidez da seção axialmente comprimida. A compressão axial provoca um aumento do momento resistente através da iteração entre os esforços axiais e de flexão, conforme ilustrado na figura Figura 2.2 (b). A parte inferior do diagrama demonstra que uma seção de concreto armado submetida a uma carga axial maior é

capaz de resistir a um momento fletor maior.

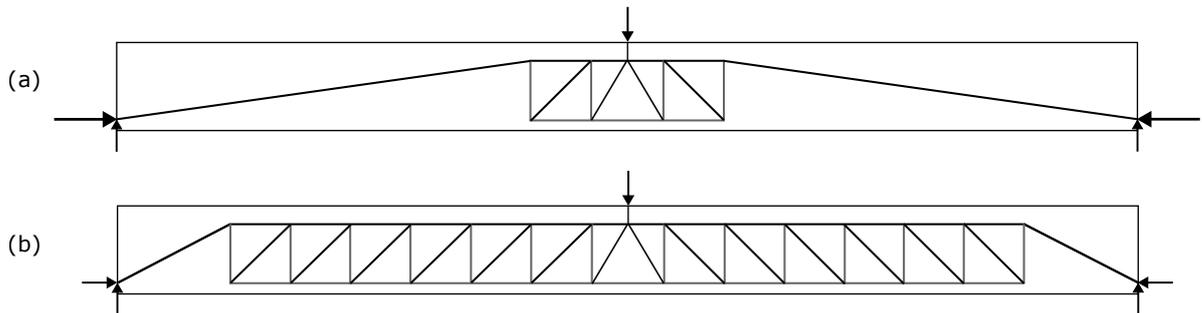


Figura 2.1 – Influência da intensidade das forças laterais para o efeito arco: (a) laje com restrição lateral grande (b) laje com restrição lateral fraca  
(fonte: Adaptado de Botticchio (2014))

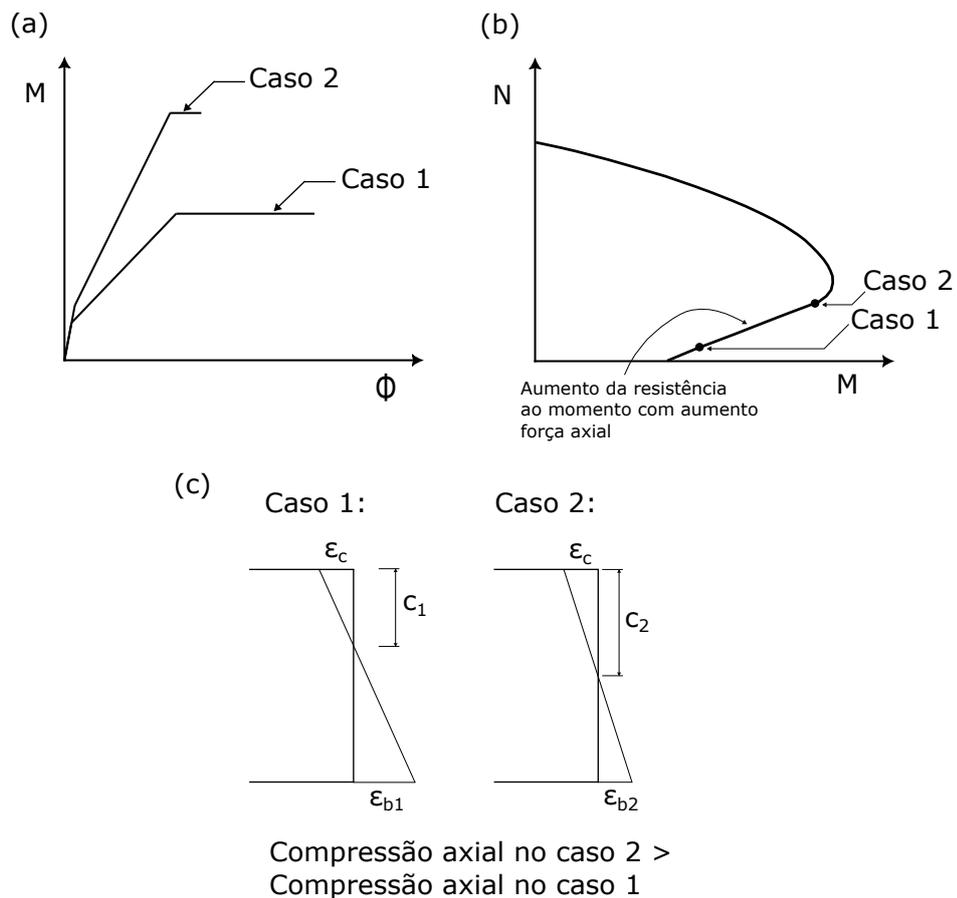


Figura 2.2 – Efeito do aumento da força axial em uma seção fletida de concreto armado (a) Relação Momento x Curvatura (b) Diagrama de interação M-N (c) Deformações na seção transversal  
(fonte: Adaptado de Botticchio (2014))

Ao analisar seções transversais submetidas à flexo-compressão (Figura 2.2 (c)) percebe-se que seções com maior compressão axial terão sua linha neutra mais próxima da face inferior e portanto mais área comprimida - o que providencia um aumento do momento resistente. Por outro lado, as deformações no aço serão menores, porém, se o aço for corretamente dimensionado para trabalhar em escoamento isso não provocará uma diminuição da tensão no material, e portanto não influenciará no momento resistido. Portanto, um aumento na área comprimida da seção se traduz em um aumento da resistência ao momento.

Apesar disso, é necessária atenção para o fato de que uma seção comprimida poderá apresentar menor ductilidade, devido as menores deformações do aço, conforme pode ser observado também na Figura 2.2 (a). Essa redução de ductilidade pode fazer com que a seção falhe subitamente por esmagamento do concreto, sem apresentar sinais claros da ruína como fissuração elevada ou deformação excessiva na peça.

### 2.3 OBTENÇÃO DA CARGA DE RUPTURA

Conforme apresentado na seção 2.1, ao longo do tempo diversos autores desenvolveram formulações capazes de estimar cargas de ruptura em lajes de concreto armado confinadas lateralmente. Dentre as diversas opções, a teoria desenvolvida por Rankin et al. (1991) foi escolhida para ser utilizada neste trabalho, por ser uma teoria de fácil aplicação e que não requer a entrada de dados empíricos.

A teoria desenvolvida por Rankin et al. (1991) consiste em igualar o trabalho externo, realizado pela carga uniformemente distribuída atuante na laje com o trabalho interno, desenvolvido em parte pela flexão das seções de concreto armado e em parte pelo arco formado através da restrição lateral. Dessa forma, a carga resistida pelo elemento pode ser obtida pela Equação 2.1.

$$N_{ps} = \frac{6I_w}{L_x(3L_y - L_x)} \quad (2.1)$$

Onde  $L_x$  e  $L_y$  são as dimensões no plano da laje, paralela aos eixos X e Y, respectivamente.  $I_w$  é o trabalho interno, dado pela soma das parcelas referentes ao trabalho de flexão ( $I_b$ ) e o trabalho do arco comprimido ( $I_a$ ), conforme a Equação 2.2.

$$I_w = I_a + I_b \quad (2.2)$$

A Equação 2.2 porém, considera uma rigidez que impede completamente a expansão da laje

analisada em seu plano, o que não acontece na prática em planos de lajes. Posteriormente ao desenvolvimento inicial da teoria, os autores corrigiram a equação para a Equação 2.3, que inclui um fator  $R_f$ , a ser adotado entre 0 e 1 para consideração da rigidez parcial. Nos testes de Rankin et al. (1991) e os realizados neste trabalho, valores entre 0,5 e 0,8 resultaram satisfatórios.

$$I_w = R_f I_a + I_b \quad (2.3)$$

Os trabalhos internos  $I_a$  e  $I_b$  são dados pelas equações 2.4 e 2.5, respectivamente.

$$I_a = 8M_{av} + 4M_{av} \frac{(L_y - L_x)}{L_x} \quad (2.4)$$

$$I_b = 8(M_b + \overline{M}_b) + 4(M_b + \overline{M}_b) \frac{(L_y - L_x)}{L_x} \quad (2.5)$$

$M_{av}$  e  $M_b$  são os momentos resistidos pelo efeito arco e por flexão pura, respectivamente, e  $\overline{M}_b$  corresponde ao momento negativo resistido. A equação para cálculo do momento resistido pela flexão é dada por (2.6), onde, para obter a equivalente para o momento negativo, basta substituir a taxa de armadura  $\rho$  pela taxa de armadura negativa  $\overline{\rho}$ .

$$M_b = \rho f_y d^2 \left(1 - 0.59 \frac{\rho f_y}{f_c}\right) \quad (2.6)$$

onde:

$\rho$  é a taxa de armadura de flexão;

$f_y$  é a tensão resistente do aço;

$f_c$  é a tensão resistente do concreto em compressão;

$d$  é a altura útil da seção.

O momento resistido pelo arco teórico dentro da laje é dado pela Equação 2.7:

$$M_{av} = C_a f_c d_a^2 \quad (2.7)$$

O coeficiente  $C_a$ , chamado coeficiente do momento do arco, foi determinado empiricamente por Rankin et al. (1991) por correlação do método com uma ampla variedade de resultados experimentais, e é função da esbeltez da laje, podendo ser calculado pela Equação 2.8

$$C_a = 0,12 - 0,001 \frac{L_x}{d_a} \quad (2.8)$$

$d_a$  é a altura útil da seção disponível para desenvolvimento do arco, dada por (2.9), onde  $h$  é a altura total da laje.

$$d_a = h - (\rho + \bar{\rho}) \frac{f_y d}{0,85 f_c} \quad (2.9)$$

Por fim, o trabalho interno do elemento não pode superar o critério convencional de flexão para uma seção de concreto armado, de forma que os autores adotam um limite máximo teórico para o valor calculado, conforme a Equação 2.10:

$$I_w \not\geq 8M_{bal} + 4M_{bal} \frac{(L_y - L_x)}{L_x} \quad (2.10)$$

O valor do momento balanceado é obtido através da Equação 2.11:

$$M_{bal} = \frac{f_c d^2}{3} \quad (2.11)$$

Como validação da teoria, Rankin et al. (1991) apresentaram comparações com resultados experimentais de outros autores. No total, 59 resultados foram comparados, onde a média da razão entre o resultado experimental e o teórico foi de 1,166, e o coeficiente de variação foi de 0,145. Esses resultados evidenciam que a teoria desenvolvida é capaz de estimar as cargas de ruptura de lajes confinadas, apresentando uma tendência levemente conservadora nos resultados.

### 3 PROJETO DE LAJES DE ACORDO COM A NBR 6118

Segundo a ABNT (2023), lajes são elementos de superfície plana de concreto, sujeitos a ações principalmente normais ao seu plano e com a relação espessura/vão de no máximo 1/3. Segundo a norma, existem diversos tipos de lajes, sendo: lajes maciças, lajes lisas, lajes cogumelo e lajes nervuradas. Neste trabalho, apenas o primeiro tipo será considerado.

#### 3.1 CLASSE DE AGRESSIVIDADE AMBIENTAL

A classe de agressividade ambiental classifica o ambiente de acordo com as ações físicas e químicas que atuam sobre a estrutura de concreto, dispensando às ações mecânicas, de origem térmica, de retração hidráulica e outras previstas para o dimensionamento (ABNT, 2023).

A classe de agressividade é utilizada para definir características da proteção das estruturas de concreto, como cobertura nominal, limites de fissuração e protensão no caso de peças protendidas. Ela é determinada a partir da Tabela 3.1. Em alguns casos, como o de ambientes internos e secos, urbanos ou industriais, com concreto revestido com argamassa e pintura, a norma permite a adoção de uma CAA mais branda. O responsável pelo projeto estrutural pode, a critério de escolha, considerar uma classificação mais agressiva que a estabelecida na tabela Tabela 3.1 (ABNT, 2023).

Tabela 3.1 – Classes de agressividade ambiental (CAA)

<b>Classe de agressividade ambiental</b>	<b>Agressividade</b>	<b>Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto</b>	<b>Risco de deterioração da estrutura</b>
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbana	Pequeno
III	Forte	Marinha	Grande
		Industrial	
IV	Muito forte	Industrial	Elevado
		Respingos de maré	

(fonte: adaptado de ABNT (2023))

Segundo a norma, as estruturas de concreto devem ser projetadas para que conservem sua segurança, estabilidade e aptidão em serviço durante o prazo correspondente à sua vida útil, desde que as condições ambientais e de uso previstas no projeto não sejam alteradas.

A vida útil da estrutura é o período de tempo durante o qual as suas características devem ser mantidas sem intervenções significativas, desde que atendido os requisitos de uso e manutenção e execução de reparos decorrentes de danos acidentais. O conceito de vida útil aplica-se à estrutura como um todo ou às suas partes individuais (ABNT, 2023).

Além disso, a norma define a durabilidade de uma estrutura como a capacidade de resistir às influências ambientais previstas e definidas pelo autor do projeto em conjunto com o contratante. Sendo a durabilidade altamente dependente das características do concreto e da espessura e qualidade do concreto do cobrimento da armadura.

Assim, a norma exige a execução de ensaios comprobatórios de desempenho da durabilidade da estrutura frente ao tipo e classe de agressividade prevista em projeto. Na falta dos ensaios, valores máximos do fator água/cimento devem atender o disposto na Tabela 3.2:

Tabela 3.2 – Correspondência entre a classe de agressividade e a qualidade do concreto

Concreto <sup>a</sup>	Tipo	Classe de Agressividade			
		I	II	III	IV
Relação água/cimento em massa	Concreto Armado	≤ 0,65	≤ 0,60	≤ 0,55	≤ 0,45
	Concreto Protendido	≤ 0,60	≤ 0,55	≤ 0,50	≤ 0,45
Classe de concreto	Concreto Armado	≥ C20	≥ C25	≥ C30	≥ C40
	Concreto Protendido	≥ C25	≥ C30	≥ C35	≥ C40

<sup>a</sup> O concreto empregado na execução das estruturas deve cumprir com os requisitos estabelecidos na ABNT NBR 12655

(fonte: adaptado de ABNT (2023))

## 3.2 PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

Como as propriedades dos materiais impactantes em uma estrutura de concreto armado são muitas, torna-se muito oneroso realizar ensaios para determinação individual de cada uma delas. Assim, na prática de projeto comumente se utilizam correlações estabelecidas pela norma para estimativa de diversos parâmetros de projeto.

### 3.2.1 Concreto

A principal característica mecânica do concreto, a partir da qual são calculadas as outras por meio de equações de correlação é a resistência à compressão. Ela é obtida a partir de ensaios

padronizados em laboratório.

Por ser uma variável obtida experimentalmente, a resistência à compressão do concreto possui um caráter aleatório. A ABNT (2015a) define a resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ) através da Equação 3.1:

$$f_{ck} = f_{cm} - 1,65 * S_d \quad (3.1)$$

onde

$f_{cm}$  é a resistência média dos exemplares do lote (MPa);

$S_d$  é o desvio padrão dessa amostra de n exemplares (MPa).

Admitindo-se uma distribuição normal para a resistência à compressão do concreto, o  $f_{ck}$  corresponde ao valor de resistência que possui 5% de chance de ser ultrapassada, no sentido desfavorável da segurança. A resistência característica à compressão do concreto determina a classe do mesmo, segundo a tabela Tabela 3.3 (ABNT, 2015b). Cabe observar que, apesar da existência da classe C100, a NBR 6118:2023 cita para uso em projetos estruturais apenas concretos até a classe C90.

Tabela 3.3 – Classes de resistência de concretos estruturais.

Classe de resistência Grupo I	Resistência característica à compressão (MPa)	Classe de resistência Grupo II	Resistência característica à compressão (MPa)
C20	20	C55	55
C25	25	C60	60
C30	30	C70	70
C35	35	C80	80
C40	40	C90	90
C45	45	C100	100
C50	50		

(fonte: ABNT (2015b))

A resistência de cálculo à compressão do concreto é dada pela Equação 3.2. O valor de  $\gamma_c$  é estabelecido pela NBR6118 como 1,4 para combinações normais de carregamento.

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (3.2)$$

O módulo de elasticidade inicial do concreto ( $E_{ci}$ ) pode ser estimado utilizando-se a Equação 3.3:

$$E_{ci} = \begin{cases} \alpha_E * 5600 * \sqrt{f_{ck}} & \text{para } f_{ck} \text{ de 20 MPa a 50 MPa} \\ 21,5 * 10^3 * \alpha_E * \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25\right)^{\frac{1}{3}} & \text{para } f_{ck} \text{ de 55 MPa a 90 MPa} \end{cases} \quad (3.3)$$

sendo

$\alpha_E = 1,2$  para agregado graúdo de basalto e diabásio;

$\alpha_E = 1,0$  para agregado graúdo de granito e gnaisse;

$\alpha_E = 0,9$  para agregado graúdo de calcário;

$\alpha_E = 0,7$  para agregado graúdo de arenito;

onde

$E_{ci}$  e  $f_{ck}$  são dados em megapascal (MPa).

O módulo de deformação secante do concreto ( $E_{cs}$ ) é dado pela Equação 3.4:

$$E_{cs} = \left(0,8 + 0,2 * \left(\frac{f_{ck}}{80}\right)\right) * E_{ci} \leq E_{ci} \quad (3.4)$$

A resistência à tração do concreto  $f_{ct}$  em projetos de lajes de concreto armado é fator determinante para os estados limites de fissuração e deformação excessiva, apesar de pouco influenciar na resistência final da peça. A resistência à tração média  $f_{ctm}$  pode ser aproximada, na falta de ensaios específicos, pela Equação 3.5.

$$f_{ctm} = \begin{cases} 0,3 * (f_{ck})^{2/3} & \text{para concretos de classe até C50} \\ 2,12 \ln(1 + 0,1 * (f_{ck} + 8)) & \text{para concretos de classes C55 a C90} \end{cases} \quad (3.5)$$

Além disso, a norma define os termos  $f_{ctk,inf}$  e  $f_{ctk,sup}$  como os limites inferior e superior, respectivamente para a resistência a tração, dados pelas equações 3.6 e 3.7.

$$f_{ctk,inf} = 0,7 * f_{ctm} \quad (3.6)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 * f_{ctm} \quad (3.7)$$

A norma apresenta o diagrama tensão-deformação idealizado do concreto em compressão, a ser utilizado para dimensionamento de peças em estado limite último. O diagrama é apresentado na Figura 3.1, cuja formulação é dada pelas equações 3.8 a 3.12

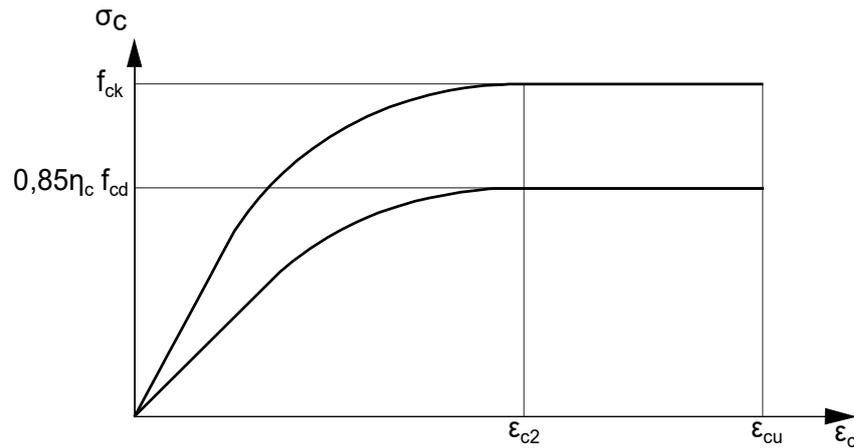


Figura 3.1 – Diagrama tensão-deformação idealizado do concreto (fonte: ABNT (2023))

$$\sigma_c = 0,85\eta_c f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (3.8)$$

$$n = \begin{cases} 2 & \text{para concretos de classe até C50} \\ 1,4 + 23,4 * [(90 - f_{ck})/100]^4 & \text{para concretos de classes C55 a C90} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\eta_c = \begin{cases} 1,0 & \text{para concretos de classe até C40} \\ (40/f_{ck})^{1/3} & \text{para concretos de classes C45 a C90} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{c2} = \begin{cases} 2,0\text{‰} & \text{para concretos de classe até C50} \\ 2,0\text{‰} + 0,085\text{‰} * (f_{ck} - 50)^{0,53} & \text{para concretos de classes C55 a C90} \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{cu} = \begin{cases} 3,5\text{‰} & \text{para concretos de classe até C50} \\ 2,6\text{‰} + 35\text{‰} * [(90 - f_{ck})/100]^4 & \text{para concretos de classes C55 a C90} \end{cases} \quad (3.12)$$

Por fim, outras importantes características do concreto são a fluência e retração, que são efeitos atuantes nas peças que modificam as deformações ao longo do tempo. A norma NBR 6118, em seu anexo A, apresenta um roteiro para uma estimativa aproximada dos fenômenos. O processo de cálculo não foi incluído neste trabalho por adotar-se um processo simplificado para lajes, descrito na subseção 3.8.1.

### 3.2.2 Aço da armadura passiva

A norma brasileira que prescreve sobre os aços utilizados em estruturas de concreto armado é a NBR 7480:2007. Os valores característicos de tensão de escoamento do aço podem ser 250, 500

ou 600 MPa, que lhes rende a classificação de aço CA-25, CA-50 e CA-60, respectivamente.

Para o dimensionamento em estado limite último e de serviço, a NBR6118 permite a adoção de um diagrama tensão x deformação elasto-plástico perfeito para o aço, conforme a figura 3.2. O valor do módulo de elasticidade  $E_s$  pode ser adotado como 210 GPa na falta de ensaios ou valores fornecidos pelo fabricante.

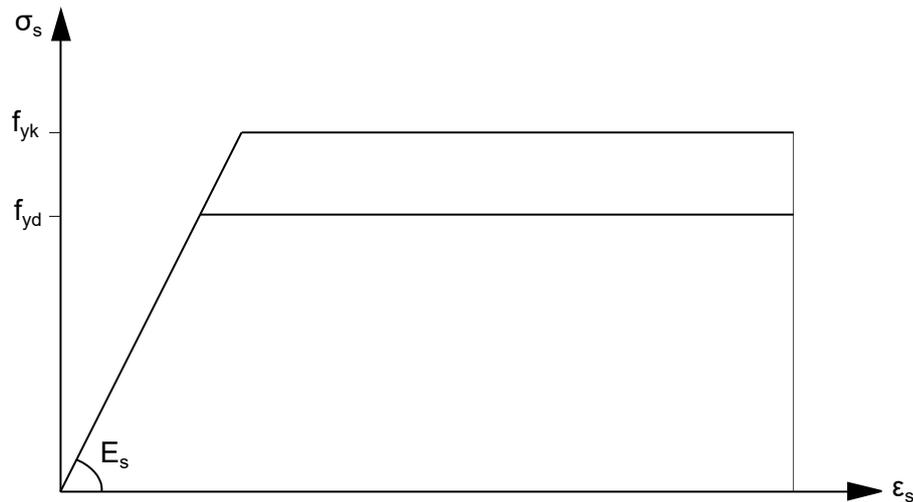


Figura 3.2 – Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas

(fonte: adaptado de ABNT (2023))

O valor de cálculo da tensão de escoamento do aço ( $f_{yd}$ ) é obtido através da Equação 3.13, onde  $\gamma_s$  é o coeficiente de minoração de resistência do aço, adotado igual a 1,15 para combinações normais de ações.

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (3.13)$$

### 3.3 AÇÕES NAS ESTRUTURAS

Segundo a NBR8681 (ABNT, 2003), ações são causas que provocam efeitos ou deformações nas estruturas. Na prática, as ações podem ser consideradas as forças e deformações atuantes em uma estrutura e são divididas em três categorias:

- a) Ações permanentes: ocorrem com valor constante ou com pequena variação em torno de sua média, durante praticamente toda a vida da construção. Podem ser diretas ou indiretas;

- b) Ações variáveis: ações que apresentam variação significativa em torno da sua média, ao longo da vida da construção. Podem ser normais ou especiais;
- c) Ações excepcionais: são aquelas com vida extremamente curta e muito baixa probabilidade de ocorrência durante a vida da construção, mas que devem ser consideradas no dimensionamento.

No processo de dimensionamento, cada ação é representada por um valor característico para posteriormente ser combinada e resultar nos esforços atuantes nas estruturas. Os valores característicos das ações são determinados conforme suas distribuições de probabilidade e variabilidade no tempo, sendo diferente para cada tipo de ação (ABNT, 2003).

A norma NBR6120:2019 apresenta em seu corpo valores sugeridos de ações para utilização no dimensionamento de estruturas no Brasil. A combinação das ações para cálculo dos esforços internos aos quais as estruturas estão submetidas pode ser feita de acordo com a NBR6118:2023 ou com a NBR8681:2003.

No dimensionamento de lajes, são considerados majoritariamente esforços normais ao plano da laje, sendo ações permanentes como peso próprio da laje, revestimentos e eventuais equipamentos apoiados e ações variáveis acidentais, que são aquelas decorrentes do uso da estrutura, como pessoas, mobiliário, veículos, etc.

### 3.3.1 Combinações de Ações

As combinações de ações são realizadas de modo a determinar o carregamento atuante na estrutura para o caso de interesse. As combinações podem ser de estado-limite último (ELU) ou estado-limite de serviço (ELS).

Uma estrutura deve ser projetada de maneira a atender todos os estados limites pertinentes durante sua vida útil. Para o dimensionamento das lajes deste trabalho, serão considerados os seguintes estados-limites:

- a) Estado-limite último (ELU): relacionado ao colapso, ou a qualquer outra forma de ruína estrutural, que determine a paralisação do uso da estrutura;
- b) Estado-limite de deformações excessivas (ELS-DEF): estado em que as deformações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal;
- c) Estado-limite de abertura das fissuras (ELS-W): estado em que as fissuras se apresentam com aberturas iguais aos máximos especificados pela norma.

### 3.3.1.1 Estado-limite Último

A combinação a ser utilizada para dimensionamento no estado limite último é dada pela equação 3.14.

$$F_d = \gamma_g F_{gk} + \gamma_{\varepsilon g} F_{\varepsilon gk} + \gamma_q (F_{q1k} + \sum \psi_{0j} F_{qjk}) + \gamma_{\varepsilon q} \psi_{0\varepsilon} F_{\varepsilon qk} \quad (3.14)$$

onde

$F_d$  é o valor de cálculo das ações para combinação última;

$F_{gk}$  representa as ações permanentes diretas;

$F_{\varepsilon k}$  representa as ações indiretas permanentes como a retração ( $F_{\varepsilon gk}$ ) e variáveis como a temperatura ( $F_{\varepsilon qk}$ );

$F_{qk}$  representa as ações variáveis diretas das quais  $F_{q1k}$  é escolhida principal;

$\gamma_g, \gamma_{\varepsilon g}, \gamma_q, \gamma_{\varepsilon q}$  são os coeficientes de majoração das ações, conforme a tabela 3.4;

$\psi_{0j}, \psi_{0\varepsilon}$  são os coeficientes de minoração das ações variáveis secundárias, conforme a tabela 3.5.

Neste trabalho, e para dimensionamento em ELU, não serão consideradas ações de retração e temperatura.

Tabela 3.4 – coeficientes  $\gamma$  para ELU

Combinações de ações	Ações			
	Permanentes (g)		Variáveis (q)	
	D	F	G	T
<b>Normais</b>	1,4	1,0	1,4	1,2
<b>Especiais ou de construção</b>	1,3	1,0	1,2	1,0
<b>Excepcionais</b>	1,2	1,0	1,0	0

onde D é desfavorável, F é favorável, G representa as cargas variáveis em geral e T é a temperatura.

(fonte: adaptado de ABNT (2023))

Tabela 3.5 – Valores dos coeficientes  $\psi$ 

Ações		$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
<b>Cargas acidentais de edifícios</b>	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas <sup>b</sup>	0,5	0,4	0,3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas <sup>c</sup>	0,7	0,6	0,4
	Biblioteca, arquivos, oficinas e garagens	0,8	0,7	0,6
<b>Vento</b>	Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0
<b>Temperatura</b>	Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3
<sup>b</sup> Edifícios residenciais.				
<sup>c</sup> Edifícios comerciais, de escritórios, estações e edifícios públicos.				

(fonte: adaptado de ABNT (2023))

### 3.3.1.2 Estado-limite de deformações excessivas

A combinação para verificação do ELS-DEF é a chamada combinação quase permanente, que é definida como a combinação que pode atuar durante grande parte da vida da estrutura, seu valor é dado pela equação 3.15. Na combinação quase permanente de serviço, todas as ações variáveis são consideradas com seus valores quase permanentes ( $\psi_2 F_{qk}$ ).

$$F_{d,ser} = \sum F_{gi,k} + \sum \psi_{2j} F_{qj,k} \quad (3.15)$$

onde:

$F_{d,ser}$  é o valor de cálculo da ação para combinação de serviço;

$\psi_2$  é o fator de redução de combinação quase permanente de ELS, conforme tabela 3.5.

### 3.3.1.3 Estado-limite de abertura das fissuras

Para verificação do ELS-W, utiliza-se a combinação frequente para ações, que é aquela que deve se repetir muitas vezes durante a vida da estrutura. A equação 3.16 apresenta o modo de cálculo para esta combinação.

A combinação frequente de serviço toma uma ação variável como principal  $F_{q1}$ , cujo valor é tomado como seu valor frequente ( $\psi_1 F_{q1k}$ ). As demais ações variáveis são tomadas com seus valores quase permanentes ( $\psi_2 F_{qk}$ ).

$$F_{d,ser} = \sum F_{gi,k} + \psi_1 F_{q1k} + \sum \psi_{2j} F_{qjk} \quad (3.16)$$

onde:

$\psi_1$  é o fator de redução de combinação frequente para ELS, conforme tabela 3.5.

### 3.4 GEOMETRIA DA LAJE

A figura 3.3 mostra as variáveis de geometria que serão utilizadas neste estudo, que são as mesmas indicadas por Araujo (2014). Como mencionado no início do capítulo 3, as dimensões das lajes no plano,  $l_x$  e  $l_y$ , devem ser bastante superiores à espessura  $h$ . Além disso, a maioria dos carregamentos atua na direção perpendicular ao plano da laje. Esses carregamentos podem ser distribuídos ou pontuais, e estão representados pelas letras  $p$  e  $P$  na figura.

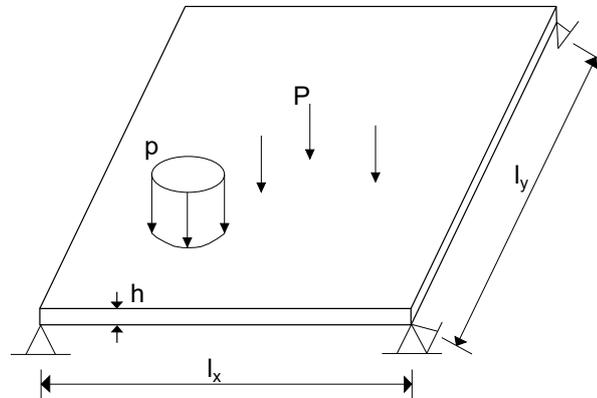


Figura 3.3 – Geometria de uma laje maciça de concreto armado  
(fonte: adaptado de Araujo (2014))

A seção transversal típica de uma laje maciça de concreto armado é apresentada na figura 3.4. Costumeiramente, a seção é representada por uma faixa representativa, de 1 metro de largura. Assim sendo, as armaduras de flexão nas direções X e Y ( $A_{sx}$  e  $A_{sy}$ , respectivamente) são dadas em  $\text{cm}^2/\text{m}$ . Outros dados geométricos importantes são a altura útil  $d$ , o cobrimento da laje  $c$  e o diâmetro das barras de armadura  $\phi$ . A altura útil é calculada a partir da equação 3.17.

$$d = h - c - \frac{\phi}{2} \quad (3.17)$$

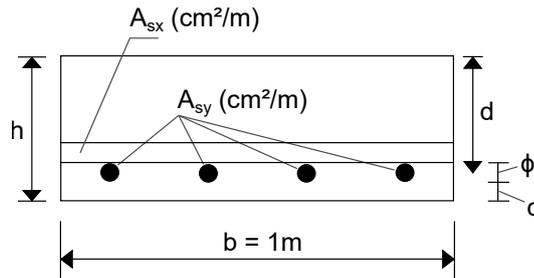


Figura 3.4 – Seção transversal de laje maciça de concreto armado  
(fonte: adaptado de Araujo (2014))

O cobrimento que deve ser usado nas lajes é determinado pela NBR6118:2023 com base na classe de agressividade ambiental à qual a estrutura está submetida. Considerando uma tolerância de execução  $\Delta c$  igual a 10 mm, a tabela 3.6 especifica os cobrimentos mínimos indicados pela norma. Se um concreto de resistência superior ao mínimo exigido na tabela 3.2 for utilizado para a classe de agressividade da obra, os cobrimentos podem ser reduzidos em 5 mm.

Tabela 3.6 – Correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o cobrimento nominal para  $\Delta c = 10$  mm.

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental			
		I	II	III	IV <sup>c</sup>
		Cobrimento nominal (mm)			
Concreto Armado	Laje <sup>b</sup>	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo <sup>d</sup>	30	40		50

<sup>b</sup> Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros, as exigências dessa Tabela podem ser substituídas, respeitado um cobrimento nominal  $\geq 15$  mm.

<sup>c</sup> Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas e efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV.

<sup>d</sup> No trecho de pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal  $\geq 45$  mm.

(fonte: adaptado de ABNT (2023))

### 3.5 DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS

As normas brasileiras permitem a utilização de diversas teorias para determinação de esforços em lajes maciças de concreto armado. Entre as opções disponíveis, a teoria das linhas de ruptura foi adotada para utilização neste trabalho.

Ao ser submetida a uma carga gradualmente crescente, nos primeiros instantes uma laje de concreto armado se comportará como uma placa elástica: a distribuição de esforços no elemento será dada conforme a teoria da elasticidade. Conforme a carga aumenta e a fissuração do concreto acontece, os esforços são redistribuídos no plano da laje. Supondo que a laje seja sub-armada, existirá uma carga correspondente ao ponto em que o limite elástico das armaduras é alcançado, a partir da qual a seção de concreto se deformará sem que o momento nela sofra grandes variações: é quando a seção está plasticada. Assim, quando as cargas continuam aumentando, as seções da laje irão sucessivamente se plasticar, criando linhas que se unem e cruzam a placa, formando finalmente um mecanismo livremente deformável, conforme ilustra a figura 3.5 (MESEGUER; CABRÉ; PORTERO, 2009).

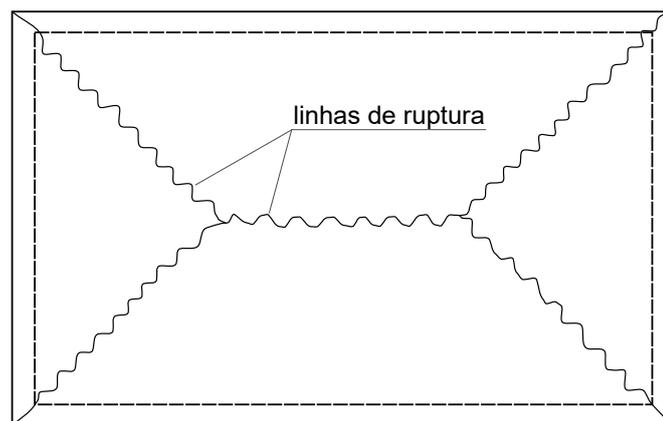


Figura 3.5 – Seções plasticadas  
(fonte: adaptado de Meseguer, Cabré e Portero (2009))

A teoria das linhas de ruptura é uma teoria simplificada de plasticidade que permite a determinação de esforços solicitantes com base num modelo de ruptura e foi desenvolvida por Johansen (1972). Para determinação dos esforços, é admitida a formação de um quadro de ruptura na laje, constituído por charneiras plásticas ou linhas de ruptura (MASON, 1976). São premissas básicas da teoria de linhas de ruptura:

- a) a laje é subarmada, portanto a ruptura ocorre com escoamento da armadura e a formação de charneiras plásticas;
- b) as deformações elásticas entre as linhas de ruptura podem ser desprezadas, face às grandes deformações plásticas desenvolvidas nas charneiras, *i.e.* os materiais são rígido-plástico perfeitos.

Como a teoria das linhas de ruptura considera o equilíbrio da laje em estado limite último, isto é, no momento imediatamente anterior à ruína, ela não permite analisar o comportamento da laje em condições de serviço. A NBR6118:2023 permite o emprego da teoria para cálculo de lajes nos domínios 2 e 3, isto é, peças sub-armadas e normalmente armadas. Nestas condições, o momento de ruína de uma seção de concreto armado será diretamente proporcional à área de armadura de flexão encontrada na seção. (ARAUJO, 2014).

Considerando uma seção de laje submetida a momentos  $M_x$  e  $M_y$ , que causam tensões normais nas direções X e Y, respectivamente, o momento atuante em uma seção de inclinação qualquer  $\alpha$  será dado pela equação 3.18.

$$M_\alpha = M_x (\sin^2 \alpha + k \cos^2 \alpha) \quad (3.18)$$

Onde  $k$  é o coeficiente de ortotropia da laje, que representa a razão entre os momentos  $M_y$  e  $M_x$ , e deve ser escolhido de forma a evitar grandes diferenças da solução elástica. A equação 3.19 indica o valor sugerido por Araujo (2014).

$$k = \left( \frac{l_x}{l_y} \right)^2 \quad (3.19)$$

Quando o coeficiente de ortotropia de uma laje  $k$  for menor que 0,25, o momento fletor da laje pode ser calculado como o de uma viga, atuando na direção do menor vão da laje. Nesse caso, a armadura na direção do maior vão será uma armadura secundária, apenas para distribuição dos esforços, dada na subseção 3.6 (ARAUJO, 2014).

Apesar da teoria das charneiras plásticas permitir a aproximação da carga de ruptura para lajes de qualquer formato, a solução se torna particularmente simples para lajes retangulares simplesmente apoiadas. Nesses casos, as charneiras se desenvolverão nas lajes conforme apresentado na figura 3.6, e os momentos atuantes nas linhas de ruptura  $l_1$  e  $l_2$  serão dados com base na equação 3.18, transformando-a nas equações 3.20 e 3.21, respectivamente (ARAUJO, 2014).

$$M_1 = \left( \frac{1+k}{2} \right) M_x \quad (3.20)$$

$$M_2 = M_x \quad (3.21)$$

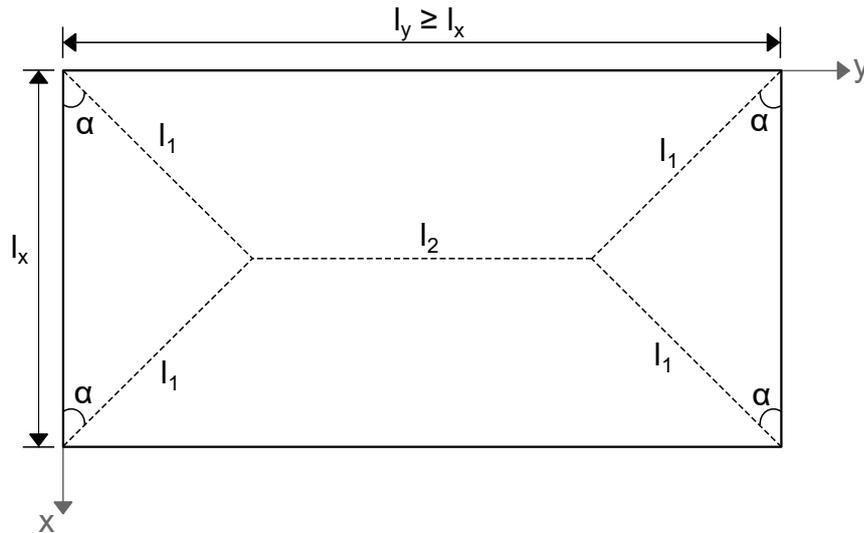


Figura 3.6 – Configuração de ruptura - lajes retangulares simplesmente apoiadas  
(fonte: adaptado de Araujo (2014))

O momento  $M_x$  atuante pode ser calculado pelo princípio dos trabalhos virtuais, considerando-se apenas as rotações nas linhas de ruptura, conforme premissa do método. Assim, os momentos atuantes nas direções X e Y são dados pelas equações 3.22 e 3.23 respectivamente - válidas para lajes armadas em duas direções (ARAUJO, 2014):

$$M_x = ql_x^2 \left[ \frac{3l_y - l_x}{24(l_y + kl_x)} \right] \quad (3.22)$$

onde  $q$  é a carga atuante na laje.

$$M_y = kM_x \quad (3.23)$$

As reações da laje nos apoios podem ser calculadas conforme a área dos trapézios e triângulos determinado pelas linhas de ruptura demonstradas na figura 3.6, conforme equação 3.24

$$R_i = \frac{A_i}{L_i} * q \quad (3.24)$$

onde:

$R_i$  é a reação no bordo  $i$  da laje;

$A_i$  é a área delimitada pelas linhas de ruptura que está apoiada no bordo  $i$ ;

$L_i$  é o comprimento do respectivo bordo;

$q$  é a carga atuante na laje.

A NBR6118:2023 permite o cálculo das reações de apoio das lajes através da equação 3.24. Para situações de apoio diferentes da laje simplesmente apoiada nos quatro bordos, a norma pede a adoção de diferentes ângulos  $\alpha$  de inclinação das linhas de ruptura, conforme abaixo:

- a)  $\alpha = 45^\circ$  entre dois apoios do mesmo tipo;
- b)  $\alpha = 60^\circ$  a partir de um bordo engastado, quando o adjacente for simplesmente apoiado;
- c)  $\alpha = 90^\circ$  a partir de um bordo apoiado ou engastado, quando o adjacente for livre.

Para o caso de lajes engastadas, Meseguer, Cabré e Portero (2009) apresenta uma formulação também baseada em linhas de ruptura. Inicialmente, os vãos efetivos  $l_x^*$  e  $l_y^*$  devem ser calculados através das equações 3.25 e 3.26. Onde os coeficientes  $i_i$  indicam a razão entre os momentos de borda e o momento no vão naquela direção - cujo valor pode ser definido pelo projetista, respeitando o mínimo exigido pela NBR 6118 de 1,5.

$$l_x^* = \frac{2l_x}{\sqrt{1-i_1} + \sqrt{1-i_2}} \quad (3.25)$$

$$l_y^* = \frac{2l_y}{\sqrt{k}(\sqrt{1-i_3} + \sqrt{1-i_4})} \quad (3.26)$$

O coeficiente de ortotropia que considera o engastamento dos bordos é dado pela equação 3.27 (GOBETTI, 1982).

$$k = \frac{12-i_1-i_2}{12-i_3-i_4} \left( \frac{l_x}{l_y} \right)^{1,7} \quad (3.27)$$

Assim, o momento atuante no menor vão é dado pela equação 3.28, enquanto o momento atuante no vão de maior direção da laje é obtido como nas lajes apoiadas - através da equação 3.23. Já os momentos negativos em cada bordo são obtidos multiplicando-se os coeficientes de engastamento  $i_i$  pelo respectivo momento do vão.

$$M_x = \frac{q l_x^* l_y^*}{8 \left( 1 + \frac{l_x^*}{l_y^*} + \frac{l_y^*}{l_x^*} \right)} \quad (3.28)$$

### 3.6 DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO

Após definidos os momentos atuantes nas lajes, estes devem ser utilizados para dimensionamento das armaduras em Estado Limite Último. A carga  $q$  a ser utilizada na equação 3.22 é a proveniente da combinação de cargas calculada pela equação 3.14.

O dimensionamento de uma seção em flexão pura consiste em calcular o equilíbrio de momentos na seção, com o objetivo de igualar o momento resistente de cálculo e o momento atuante de cálculo. A ABNT (2023) considera as seguintes hipóteses para dimensionamento em ELU:

- a) As seções transversais se mantêm planas após a deformação;
- b) A deformação das barras aderentes em tração ou compressão é a mesma do concreto em seu entorno;
- c) As tensões de tração no concreto, normais à seção transversal, devem ser desprezadas;
- d) A distribuição de tensões no concreto é feita de acordo com o diagrama parábola retângulo, definido pela equação 3.8. Esse diagrama pode ser substituído pelo retângulo equivalente de profundidade  $y = \lambda x$ , onde o valor de  $\lambda$  é dado pela equação 3.29 e a tensão constante atuante até a profundidade  $y$  pode ser tomada igual a  $\alpha_c \eta_c f_{cd}$ , com  $\alpha_c$  definido pela equação 3.30;

$$\lambda = \begin{cases} 0,8 & \text{para concretos de classe até C50} \\ 0,8 - (f_{ck} - 50)/400 & \text{para concretos de classes C50 a C90} \end{cases} \quad (3.29)$$

$$\alpha_c = \begin{cases} 0,85 & \text{para concretos de classe até C50} \\ 0,85 [1 - (f_{ck} - 50)/200] & \text{para concretos de classes C50 a C90} \end{cases} \quad (3.30)$$

- e) A tensão nas armaduras deve ser obtida a partir dos diagramas tensão-deformação com seus valores de cálculo, definidos pela equação 3.13 e figura 3.2;
- f) O estado limite último é definido quando a distribuição de deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios da figura 3.7, onde  $\varepsilon_{c2}$  e  $\varepsilon_{cu}$  são definidos por (3.11) e (3.12). Os modos de ruína de uma seção transversal podem acontecer das seguintes formas:
  - Reta a: tração uniforme, a ruína acontece por deformação excessiva do aço (10‰);
  - Domínio 1: tração não uniforme, sem compressão. A ruína acontece por deformação excessiva do aço (10‰);

- Domínio 2: flexão simples ou composta. A ruína é dada por deformação excessiva do aço tracionado sem que o concreto rompa por compressão;
- Domínio 3: flexão simples ou composta. A ruína é caracterizada por rompimento do concreto em compressão com deformação no aço maior que a deformação de escoamento ( $\epsilon_{yd}$ );
- Domínio 4: flexão simples ou composta com ruptura a compressão do concreto sem que o aço tenha atingido o patamar de escoamento;
- Domínio 4a: flexão composta onde as armaduras estão todas comprimidas, a ruína acontece por ruptura do concreto em compressão;
- Domínio 5: compressão não uniforme, a seção está completamente comprimida, a ruína acontece por compressão do concreto;
- Reta b: compressão uniforme, a compressão do concreto é causadora da ruína estrutural.

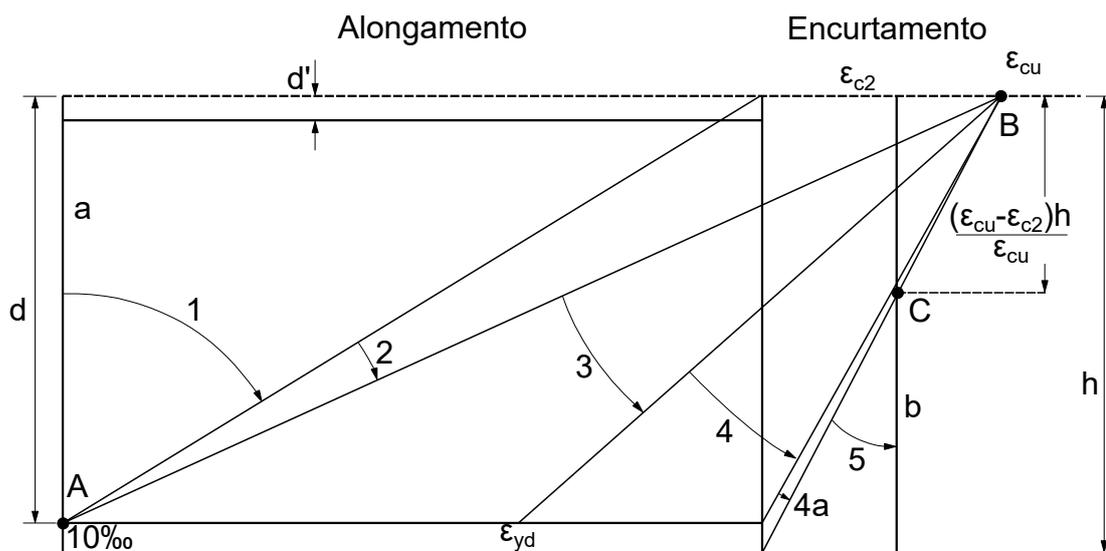


Figura 3.7 – Domínios de estado-limite último de uma seção transversal (fonte: ABNT (2023))

A NBR6118:2023 impõe a espessura mínima de 8 cm para lajes não em balanço, que não sejam de cobertura. Além disso, as lajes calculadas pelo método plástico devem respeitar um critério de altura da linha neutra  $x$ , a fim de garantir que uma eventual ruína da laje seja dúctil. O critério é apresentado na equação 3.31, e obriga o projetista a dimensionar a laje nos domínios de deformação 2 ou 3, conforme a figura 3.7.

$$x \leq \begin{cases} 0,25d & \text{para concretos de classe até C50} \\ 0,15d & \text{para concretos de classes C55 a C90} \end{cases} \quad (3.31)$$

Dado um momento atuante de cálculo  $M_d$ , a altura da linha neutra  $x$  que equilibra a seção em termos de momento fletor é dada pela equação 3.32. Calculado o  $x$  e verificado o critério de ductilidade, a área de aço necessária na laje pode ser calculada pelo equilíbrio de forças na seção, dada pela equação 3.33. Em lajes, normalmente utilizam-se unidades em termos de unidade por comprimento, portanto o momento dado pela equação 3.22 possui dimensão de força, a linha neutra  $x$  dimensão de comprimento e a área de aço  $A_s$  é dada em área por unidade de comprimento.

$$x = \frac{d}{\lambda} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2 * M_d}{\alpha_c \eta_c f_{cd} d^2}} \right) \quad (3.32)$$

$$A_s = \frac{\alpha_c \lambda \eta_c f_{cd} x}{f_{yd}} \quad (3.33)$$

Assim, calculados os momentos atuantes na laje  $M_x$  e  $M_y$ , com as cargas já combinadas para dimensionamento em ELU, serão encontradas as taxas de armadura necessárias em cada direção da laje  $A_{sx}$  e  $A_{sy}$ . Sendo verificado o critério de ductilidade para ambas as direções, a laje está corretamente dimensionada para suportar os esforços atuantes.

Apesar do critério de ductilidade dado pela Equação 3.31 poder ser atendido utilizando-se uma armadura de compressão na laje, o aumento da altura  $h$  da laje é mais comum na prática de projeto, portanto este será o critério adotado para dimensionamento das lajes deste trabalho.

A norma brasileira prescreve um valor máximo e mínimo de armadura de flexão a ser utilizada em lajes, para evitar comportamentos não esperados do sistema estrutural. A armadura mínima de tração de uma peça fletida deve ser calculada a partir de um momento mínimo  $M_{d,min}$  dado pela equação 3.34, a partir do qual calcula-se uma taxa mínima de armaduras  $A_{s,min}$ . Deve-se ainda, respeitar uma taxa mínima absoluta  $\rho_{min}$  de 0,15%.

$$M_{d,min} = 0,8W_0 f_{ctk,sup} \quad (3.34)$$

onde:

$W_0$  é o módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada;

$f_{ctk,sup}$  é dado pela equação 3.7;

A taxa de aço de uma seção retangular de concreto armado é dada pela equação 3.35

$$\rho_s = \frac{A_s}{b_w h} \quad (3.35)$$

onde  $b_w$  é a largura da seção transversal. No caso de lajes, as áreas de aço  $A_s$  costumam ser expressas por unidade de comprimento, portanto utiliza-se  $b_w$  unitário.

No caso de lajes maciças de concreto armado sem armadura ativa a NBR6118:2023 estabelece os seguintes valores de armadura mínima:

- a) Armaduras negativas:  $\rho_s \geq \rho_{min}$ ;
- b) Armaduras negativas de bordas sem continuidade:  $\rho_s \geq 0,67\rho_{min}$ ;
- c) Armaduras positivas de lajes armadas nas duas direções:  $\rho_s \geq 0,67\rho_{min}$ ;
- d) Armadura positiva (principal) de lajes armadas em uma direção:  $\rho_s \geq \rho_{min}$ ;
- e) Armadura positiva (secundária) de lajes armadas em uma direção:
  - $A_s \geq 20\%$  da armadura principal;
  - $A_s \geq 0,9\text{cm}^2/m$ ;
  - $\rho_s \geq 0,5\rho_{min}$ .

Como limitação máxima para armaduras de flexão, a ABNT (2023) estabelece que a área de armadura não pode ser superior a 4% da área da seção transversal, somando-se armaduras positivas e negativas.

### 3.7 VERIFICAÇÃO AO ESFORÇO CORTANTE

Além das armaduras de flexão, as lajes maciças podem necessitar de reforço ao esforço cortante, quando a desigualdade da equação 3.36 não é verificada (ABNT, 2023).

$$V_{Sd} \leq V_{Rd1} \quad (3.36)$$

onde:

$V_{Sd}$  é a força cortante de cálculo, calculada de acordo com a combinação para estado-limite último;

$V_{Rd1}$  é a força cortante resistente, dada pela equação 3.37.

$$V_{Rd1} = [\tau_{Rd}k(1,2+40\rho_1) + 0,15\sigma_{cp}] b_w d \quad (3.37)$$

$k$  é um coeficiente que vale 1 para elementos onde 50% da armadura inferior não chega até o apoio e  $|1,6 - d|$ , não menor que 1, nos demais casos, com  $d$  em metros;

$\tau_{Rd}$  é a tensão resistente de cálculo do concreto ao cisalhamento, e vale  $0,25f_{ctk,inf}/\gamma_c$ ;

$\sigma_{cp}$  é a tensão normal na seção devido à protensão ou carregamento, positiva se for de compressão;

$\rho_1 = A_{s1}/(b_w d) \leq 0,02$ , onde  $A_{s1}$  é a área da armadura de tração que se está devidamente ancorada a um comprimento  $d$  além da seção considerada.

Como a expressão 3.36 é verificada para grande parte das lajes comuns de edifícios, o processo de dimensionamento de armadura para força cortante não será exposto neste trabalho.

## 3.8 VERIFICAÇÃO EM ESTADO LIMITE DE SERVIÇO

Após ter as armaduras calculadas, as lajes devem ser verificadas em estado limite de serviço, para garantir o desempenho adequado da estrutura durante seu uso. No caso de lajes de concreto armado, as verificações devem ser para deformação excessiva e abertura de fissuras.

### 3.8.1 Estado Limite de Deformação Excessiva

Segundo a ABNT (2023), o deslocamento limite para elementos estruturais é igual a  $l/250$ , sendo  $l$  o vão do elemento. Este limite é caracterizado por acessibilidade sensorial, ou seja: para prevenir efeitos visuais desagradáveis.

A verificação dos valores limites estabelecidos para deslocamentos em elementos estruturais deve ser realizada por modelos que considerem a rigidez efetiva das seções do elemento estrutural, isto é: levem em consideração a presença de armaduras, fissuração do concreto e deformações diferidas no tempo.

Como durante o uso a laje está longe do rompimento, a teoria plástica desenvolvida anteriormente não é adequada para avaliação da flecha e determinação dos esforços atuantes na laje, sendo mais recomendada a utilização da teoria elástica clássica com a devida adaptação para considerar a não-linearidade dos materiais. Pela teoria da elasticidade, o momento atuante em lajes armadas em duas direções pode ser determinado pela equação 3.38 (ARAUJO, 2014).

$$M_a = \alpha q l_x^2 \quad (3.38)$$

onde  $\alpha$  é um coeficiente que depende da geometria e condições de contorno da laje. A tabela 3.7 apresenta os valores para cálculo dos momentos  $M_x$  e  $M_y$  em lajes simplesmente apoiadas.

Tabela 3.7 – Valores de  $\alpha$  e  $\kappa$  para lajes simplesmente apoiadas armadas em duas direções

$l_x/l_y$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\alpha_{M_x}$	0,1000	0,0869	0,0743	0,0627	0,0528	0,0442
$\alpha_{M_y}$	0,0367	0,0407	0,0435	0,0446	0,0450	0,0442
$\kappa$	1,013	0,865	0,726	0,603	0,498	0,406

(fonte: adaptado de (ARAUJO, 2014))

No caso de lajes engastadas, torna-se necessário avaliar o momento nos vãos e também nos quatro bordos de apoio, onde surgem os momentos negativos  $M_{xe}$  e  $M_{ye}$ . A tabela 3.8 apresenta os valores para o cálculo.

Tabela 3.8 – Valores de  $\alpha$  e  $\kappa$  para lajes simplesmente engastadas armadas em duas direções

$l_x/l_y$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\alpha_{M_x}$	0,0409	0,0382	0,0345	0,0300	0,0255	0,0211
$\alpha_{M_y}$	0,0118	0,0149	0,0178	0,0197	0,0211	0,0211
$\alpha_{M_{xe}}$	-0,0826	-0,0784	-0,0731	-0,0661	-0,0580	-0,0511
$\alpha_{M_{ye}}$	-0,0560	-0,0562	-0,0568	-0,0558	-0,0540	-0,0511
$\kappa$	0,251	0,235	0,209	0,184	0,156	0,127

(fonte: adaptado de (ARAUJO, 2014))

Para avaliação da flecha imediata em vigas e lajes de concreto armado, em caso de fissuração do elemento estrutural em serviço, a norma permite a utilização de uma rigidez equivalente, dada pela equação 3.39. Caso momento atuante ( $M_a$ ), calculado através da ponderação de cargas da equação 3.15 não atinja o momento de fissuração ( $M_r$ ) em serviço, a rigidez utilizada no cálculo da flecha deve ser a rigidez integral da seção de concreto  $I_c$ .

$$I_{eq} = \left\{ \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 * I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq I_c \quad (3.39)$$

onde:

$M_r$  é o momento de fissuração do elemento estrutural, dado pela equação 3.40;

$M_a$  é o momento atuante na laje;

$I_c$  é o momento de inércia da seção plena de concreto armado;

$I_{II}$  é o momento de inércia da seção fissurada de concreto armado, no estágio II.

$$M_r = 0,25b_w h^2 f_{ctm} \quad (3.40)$$

A flecha imediata na laje pode ser estimada a partir da expressão 3.41.

$$\delta_0 = \kappa \frac{q l_x^4}{E_{cs} * I_{eq}} \quad (3.41)$$

onde:

$\delta_0$  é a flecha no centro da laje;

$E_{cs}$  é o módulo de elasticidade secante do concreto, calculado de acordo com a equação 3.4;

$\kappa$  é um coeficiente que depende da vinculação e relação entre os vãos da laje, retirado da tabela 3.7 para lajes simplesmente apoiadas e da tabela 3.8 para lajes engastadas.

Para considerar o efeito do tempo na deformação do concreto, a flecha inicial  $\delta_0$  calculada deve ser multiplicada por um fator de fluência, obtendo-se assim a flecha diferida  $\delta_f$ , conforme equações 3.42 a 3.45.

$$\delta_f = \delta_0(1 + \alpha_f) \quad (3.42)$$

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50\rho'} \quad (3.43)$$

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (3.44)$$

$$\xi(t) = \begin{cases} 0,68(0,996^t)t^{0,32} & \text{para } t \leq 70 \text{ meses} \\ 2 & \text{para } t > 70 \text{ meses} \end{cases} \quad (3.45)$$

onde:

$\rho'$  é a taxa de armadura negativa da laje.

$t_0$  é a idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração.

### 3.8.2 Estado Limite de Abertura de Fissuras

Visando a proteção adequada das armaduras contra a corrosão, a ABNT (2023) estabelece valores-limites da abertura característica ( $w_k$ ) das fissuras de acordo com a classe de agressividade ambiental:

- a) Classe de Agressividade Ambiental I :  $w_k \leq 0,4 \text{ mm}$ ;
- b) Classes de Agressividade Ambiental II e III :  $w_k \leq 0,3 \text{ mm}$ ;
- c) Classe de Agressividade Ambiental IV :  $w_k \leq 0,2 \text{ mm}$ .

Esses limites de abertura de fissuras são válidos apenas para estruturas de concreto armado, e devem ser calculadas conforme a combinação frequente de cargas, dada pela equação 3.16. Devido à grande variabilidade envolvendo o fenômeno de fissuração, a abertura de fissuras pode ser apenas estimada, e não precisamente calculada. O valor característico da abertura de fissuras,  $w_k$ , é o menor entre os obtidos pelas equações 3.46 e 3.47.

$$w_k = \frac{\phi_i}{12,5\eta_1} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \frac{3\sigma_{si}}{f_{ctm}} \quad (3.46)$$

$$w_k = \frac{\phi_i}{12,5\eta_1} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \left( \frac{4}{\rho_{ri}} + 45 \right) \quad (3.47)$$

onde:

$\rho_{ri}$  é a taxa de armadura em relação à área da região de envolvimento  $A_{cri}$ ;

$\phi_i$  é o diâmetro da barra que protege a região de envolvimento considerada;

$\sigma_{si}$  é a tensão de tração no centro de gravidade da armadura considerada, calculada no estágio II;

$E_{si}$  é o módulo de elasticidade do aço da barra considerada, de diâmetro  $\phi_i$ ;

$\eta_1$  é o coeficiente de conformação superficial da armadura, igual a 2,25 para barras nervuradas;

A abertura de fissuras deve ser calculada para cada elemento da armadura passiva que controla a fissuração do elemento estrutural, uma área  $A_{cr}$  do concreto de envolvimento deve ser considerada, constituída por retângulos de lados que não distem mais de  $7,5\phi$  do eixo das barras de armadura, conforme figura 3.8.

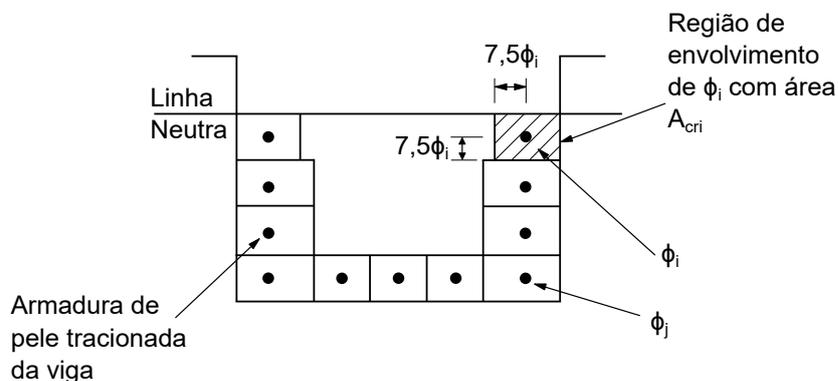


Figura 3.8 – Concreto de envolvimento da armadura  
(fonte: ABNT (2023))

## 4 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Optou-se para o desenvolvimento deste trabalho pela modelagem das lajes em elementos finitos, por ser capaz de representar modelos complexos de materiais, geometrias e facilmente considerar não-linearidades, e, portanto, utilizar de um ferramental mais poderoso para correta aproximação dos sistemas estruturais. Um *script* foi desenvolvido com o intuito de automatizar a modelagem e análise das lajes maciças de concreto armado, através da linguagem APDL (*ANSYS Parametric Design Language*), disponível no *software* ANSYS. O programa foi utilizado em sua versão 2021 R2.

O *script* é um arquivo de texto que passa para o *software*, linha a linha, os comandos a serem executados em ordem para correta modelagem, análise e extração de resultados das lajes, que são chamadas de pré-processamento, processamento e pós-processamento, respectivamente. O *script* foi desenvolvido de forma parametrizada, para que seja fácil a alteração dos dados de entrada e consequente modificação da laje analisada. Um exemplo do *script* pode ser encontrado no Apêndice A deste trabalho.

Apesar de, na validação do modelo ter sido analisado todo o comportamento da laje até a ruptura, *i.e.* desenvolvimento das tensões no concreto e aço, diagrama carga x deslocamento e reações de apoio, posteriormente para a análise de confiabilidade apenas a carga de ruptura é necessária, portanto este é o dado de saída principal do modelo desenvolvido.

### 4.1 ELEMENTOS FINITOS

Para modelagem da laje de concreto armado, foram escolhidos os seguintes elementos finitos: o SOLID186 para a matriz de concreto e REINF264 para o reforço em aço.

O elemento SOLID186 é um elemento tridimensional de 20 nós, que apresenta funções de interpolação quadráticas. Seus graus de liberdade em cada nó são as translações em cada direção do espaço tridimensional. O elemento suporta plasticidade, endurecimento e grandes deformações, além do modelo de material adotado - *Drucker-Prager Concrete* - o que foi determinante para sua escolha (ANSYS, 2023).

Outra grande vantagem do elemento SOLID186 é a permissão da utilização de armadura incorporada no elemento. Assim, os elementos de reforço REINF264 ou REINF265 são

incorporados na matriz de rigidez do SOLID186, permitindo uma malha livre e que não se preocupe em coincidir os nós entre armadura de aço e matriz de concreto.

A depender da malha, o SOLID186 pode assumir diferentes formatos, não precisando ser necessariamente hexaédrico. Essa flexibilidade torna um elemento ideal para malhas irregulares, por ser capaz de contornar formas geométricas complexas. Apesar disso, as lajes estudadas neste trabalho tem forma paralelepípedica e, portanto, o elemento foi usado apenas em seu formato hexaédrico. A figura 4.1 apresenta o elemento em seus diversos formatos possíveis, com denominação dos nós e faces.

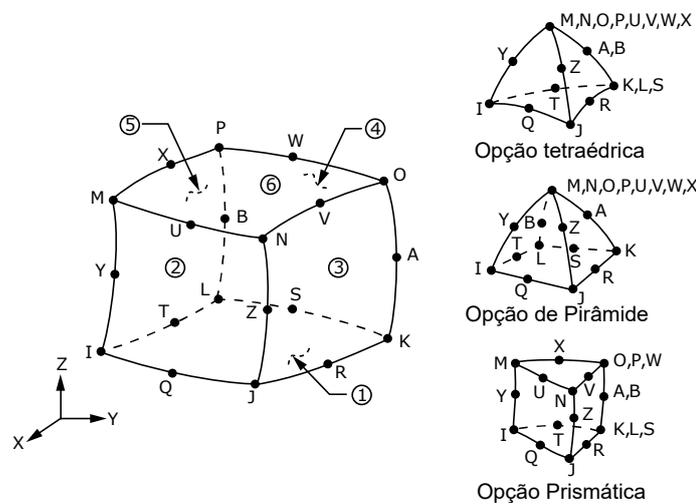


Figura 4.1 – Elemento SOLID186  
(fonte: adaptado de ANSYS (2023))

O SOLID186 possui também uma variação em que no lugar de utilizar um material homogêneo, é possível definir camadas de diferentes materiais. Nesse caso, o elemento apresenta apenas as variações hexaédrica e prismática, conforme figura 4.2. Apesar de essa opção poder se utilizada para modelar as lajes, com a camada de aço dentro do elemento SOLID186, ela torna a programação do *script* paramétrico mais complicada, assim, optou-se por utilizar elementos SOLID186 homogêneos e elementos REINF para representar as armaduras.

O elemento REINF264 suporta plasticidade e grandes deslocamentos e é utilizado juntamente com elementos de barra, casca ou sólidos. É adequado para simulação de fibras de reforço com orientação arbitrária, sendo possível a utilização de várias delas em um único elemento base. As fibras de reforço podem ser utilizadas em qualquer posição dentro do elemento base, e seus graus de liberdade são expressos em função dos deslocamentos nodais do elemento pai, ou seja: a contribuição para a matriz de rigidez de cada elemento REINF264 é somada à matriz dos elementos aos quais estes estão incorporados (LAZZARI, 2016).

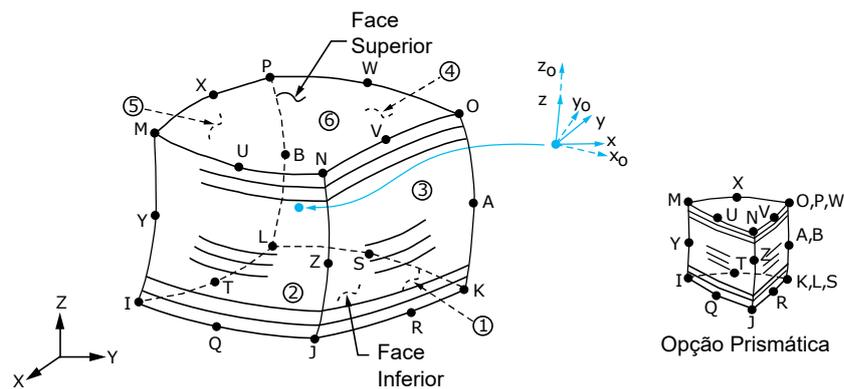


Figura 4.2 – Elemento *layered* SOLID186  
(fonte: adaptado de ANSYS (2023))

Apesar dos elementos REINF facilitarem a modelagem do concreto armado e tornarem a análise rápida, o programa assume como iguais os deslocamentos entre eles e seus elementos base, isso implica que a ancoragem das barras não é corretamente modelada, sendo impossível detectar fenômenos de escorregamento das barras de aço nas análises que utilizam esses elementos (BENINCÁ, 2019).

Para utilização do reforço modelado com o elemento REINF264, é adotado o método da malha independente (*mesh-independant method*), onde são gerados primeiramente elementos MESH200 na posição das barras de armadura, que são posteriormente transformados nos elementos de armadura. Ao utilizar-se o elemento REINF264, cada barra de armadura é modelada separadamente.

Caso as armaduras sejam igualmente espaçadas, pode optar-se pela utilização do elemento REINF265, que transforma todas as barras orientadas em uma direção em uma única camada uniforme de reforço. A principal vantagem desse elemento é a facilidade de modelagem em comparação ao REINF264, no caso de armaduras igualmente espaçadas. O comportamento estrutural de ambos elementos é idêntico, com a exceção que o REINF265 não pode ser utilizado incorporado em elementos de barra (ANSYS, 2023). A figura 4.3 apresenta ambos elementos incorporados a um elemento sólido de 20 nós. O ANSYS ainda apresenta o elemento REINF263, que é a variação dos elementos de reforço para ser utilizada em análises com elementos planos.

Durante o desenvolvimento do trabalho, foram realizados testes de comparação entre os elementos REINF264 e REINF265. Os resultados em termos de comportamento estrutural e tempo de processamento mostraram diferenças desprezíveis entre as opções. Para utilização nos modelos, o elemento REINF264 foi escolhido. A figura 4.4 apresenta lajes com os diferentes elementos para melhor entendimento.

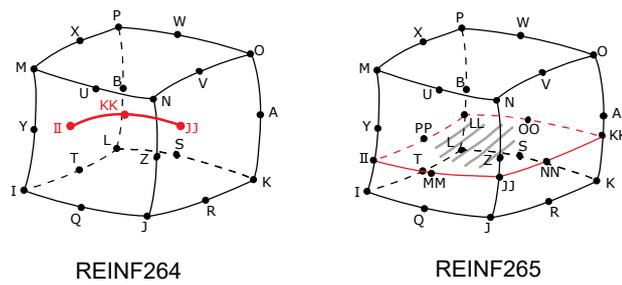


Figura 4.3 – Elementos REINF264 e REINF265  
(fonte: adaptado de ANSYS (2023))

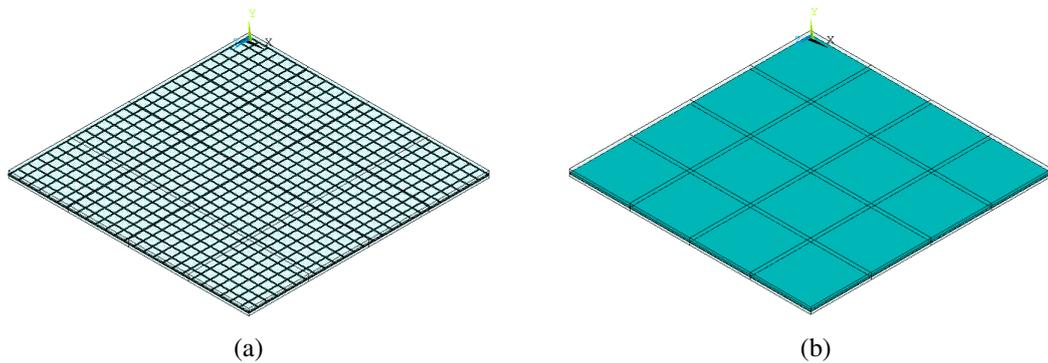


Figura 4.4 – Lajes modeladas com (a) REINF264 e (b) REINF265  
(fonte: o autor)

## 4.2 MODELOS DE MATERIAIS

As seções seguintes apresentam as descrições dos modelos matemáticos dos materiais adotados na análise numérica, assim como uma breve discussão sobre cada um deles.

### 4.2.1 Concreto

Construído a partir de uma matriz de argamassa e agregado graúdo, o concreto é um material compósito. De acordo com Chen e Han (1988), a estrutura do material pode ser ignorada e apenas seu comportamento macroscópico analisado, quando o interesse não é a microestrutura do material. Ainda, o concreto pode ser considerado homogêneo e de natureza isotrópica no início do carregamento.

O concreto é um material frágil. O seu comportamento sob tensão é definido principalmente pelo desenvolvimento de micro e macro fissuras em seu corpo. Particularmente, as microfissuras aparecem quase que instantaneamente na interface entre a argamassa e o agregado graúdo, mesmo antes da aplicação de carregamentos, causadas por segregação, retração e expansão térmica da pasta cimentícia. Com a aplicação de carregamentos externos, as fissuras passam a ser maiores e se unem, gerando o comportamento não-linear do material (CHEN, 2007).

As investigações em concreto ao longo dos anos levaram à proposta de diversos modelos matemáticos que reproduzem o comportamento diante de várias condições de carregamento. O objetivo de um modelo fenomenológico de material é reproduzir as relações entre tensão e deformação para diversos casos de carga, sendo fiel ao comportamento macroscópico do material mas negligenciando o microscópico. A teoria da plasticidade é uma das formas de reproduzir esse comportamento (CHEN; HAN, 1988).

Segundo Chen e Han (1988), qualquer modelo de plasticidade envolve três premissas básicas:

- a) Uma superfície de plastificação inicial no espaço de tensões que define o nível de tensão em que a plasticidade inicia;
- b) Uma regra de endurecimento que define a mudança da superfície e das propriedades do material durante o fluxo plástico;
- c) Uma regra de fluxo plástico, que é relacionada a função de potencial plástico e define uma relação de tensões e deformações incremental.

Especificamente para o concreto, um modelo de plasticidade deve prover uma descrição completa do comportamento do material, não apenas na fase de endurecimento, mas também modelar o comportamento pós-falha (amolecimento). Do ponto de vista macroscópico, o comportamento pós falha é caracterizado pelos trechos descendentes dos diagramas tensão x deformação (CHEN; HAN, 1988). A figura 4.5 apresenta os testes uniaxiais de compressão do concreto de Wischers (1978), onde é possível observar as fases de endurecimento e amolecimento do concreto de diferentes resistências.

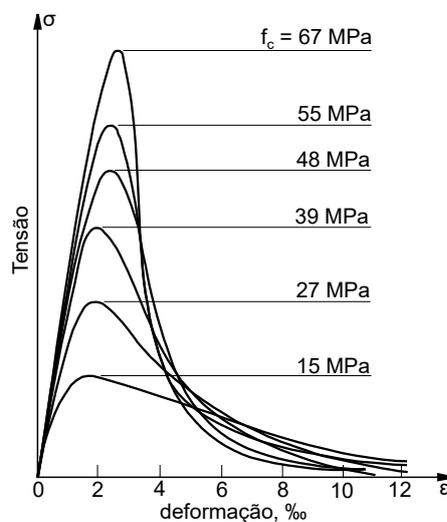


Figura 4.5 – Testes de compressão uniaxial no concreto (fonte: Wischers (1978))

Segundo Chen e Han (1988), os testes experimentais em concreto, principalmente bi e tri-axiais, ao serem compilados indicam uma superfície de falha na forma da figura 4.6. Pode-se observar algumas características básicas da superfície: a ruptura é altamente dependente da pressão, os meridianos são curvilíneos e os meridianos de tração  $\rho_t$ , cisalhamento  $\rho_s$  e compressão  $\rho_c$ , correspondentes a  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$  e  $\theta = 60^\circ$  respectivamente, satisfazem  $\rho_t \leq \rho_s \leq \rho_c$ . Além disso, conforme pode ser observado na parte (a) da figura, os planos desviadores têm períodos de 120 graus, o que caracteriza um material isotrópico. Ademais, os planos mudam sua forma de acordo com a pressão atuante: são quase triangulares para pressões de tração e de compressões baixas, enquanto praticamente circulares em altas tensões de compressão.

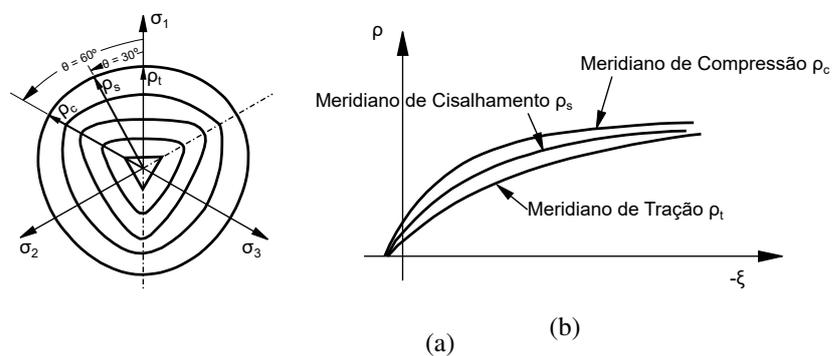


Figura 4.6 – (a) Planos desviadores e (b) meridianos idealizados para o concreto

(fonte: Chen e Han (1988))

A superfície de ruptura utilizada no ANSYS para o concreto, em suas versões mais recentes é chamada de Drucker-Prager Concrete, que é na verdade o conjunto de duas superfícies de ruptura: uma superfície de Drucker-Prager para o concreto comprimido e uma superfície para o concreto tracionado que pode ser do modelo Drucker-Prager ou Rankine (ANSYS, 2023).

A superfície de proposta por Drucker e Prager (1952) foi originalmente pensada para modelagem do comportamento plástico de solos, e é definida pela equação 4.1. Sua forma geométrica no espaço tridimensional é a de um cone circular, portanto, os planos desviadores formam círculos e os meridianos retas inclinadas, conforme pode ser visto na figura 4.7.

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} + k = 0 \quad (4.1)$$

onde:

$\alpha$  e  $k$  são parâmetros do material;

$I_1$  e  $J_2$  são o primeiro e segundo invariantes de tensão atuantes, respectivamente.

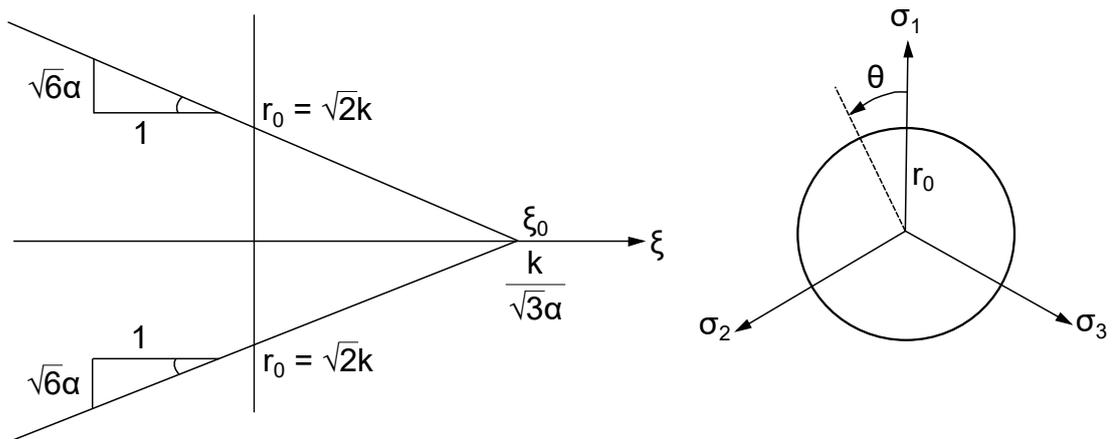


Figura 4.7 – Critério de falha de Drucker-Prager  
(fonte: Chen (2007))

É possível observar na figura que a superfície original de Drucker e Prager (1952) falha na representação do comportamento do concreto tanto nos planos desviadores, onde os círculos não são representativos do comportamento em tração, quanto nos meridianos, onde no lugar de curvas existem retas perfeitas. No entanto, para grandes pressões de compressão, a superfície de Drucker-Prager se aproxima do formato ideal exposto por Chen e Han (1988).

A fim de contornar o problema, o modelo *DP-Concrete* do ANSYS propõe a utilização de uma segunda superfície de ruptura, para representação do concreto tracionado, que pode ser uma nova superfície de Drucker-Prager com parâmetros diferentes da primeira, ou uma superfície de Rankine.

A superfície de Rankine é também conhecida como critério de máxima tensão de tração, uma superfície que adota um único parâmetro: a resistência à tração do material. Nesse critério, admite-se que a ruptura é atingida quando a tensão principal em qualquer ponto atinge o valor da resistência à tração do material. A equação 4.2 define este critério de ruptura (CHEN, 2007).

$$f(I_1, J_2, \theta) = 2\sqrt{3J_2} \cos(\theta) + I_1 - 3\sigma_t = 0 \quad (4.2)$$

Sendo  $\theta$  o ângulo de similaridade ( $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ ) e  $\sigma_t$  a resistência a tração do material.

A superfície de Rankine forma, no espaço tri-dimensional um conjunto de planos perpendiculares aos eixos de tensões principais e localizados nos valores de  $\sigma_t$ . A intersecção desta superfície com o plano desviador forma triângulos equiláteros, já com o plano meridiano são formadas retas. A figura 4.8 apresenta visualmente a superfície.

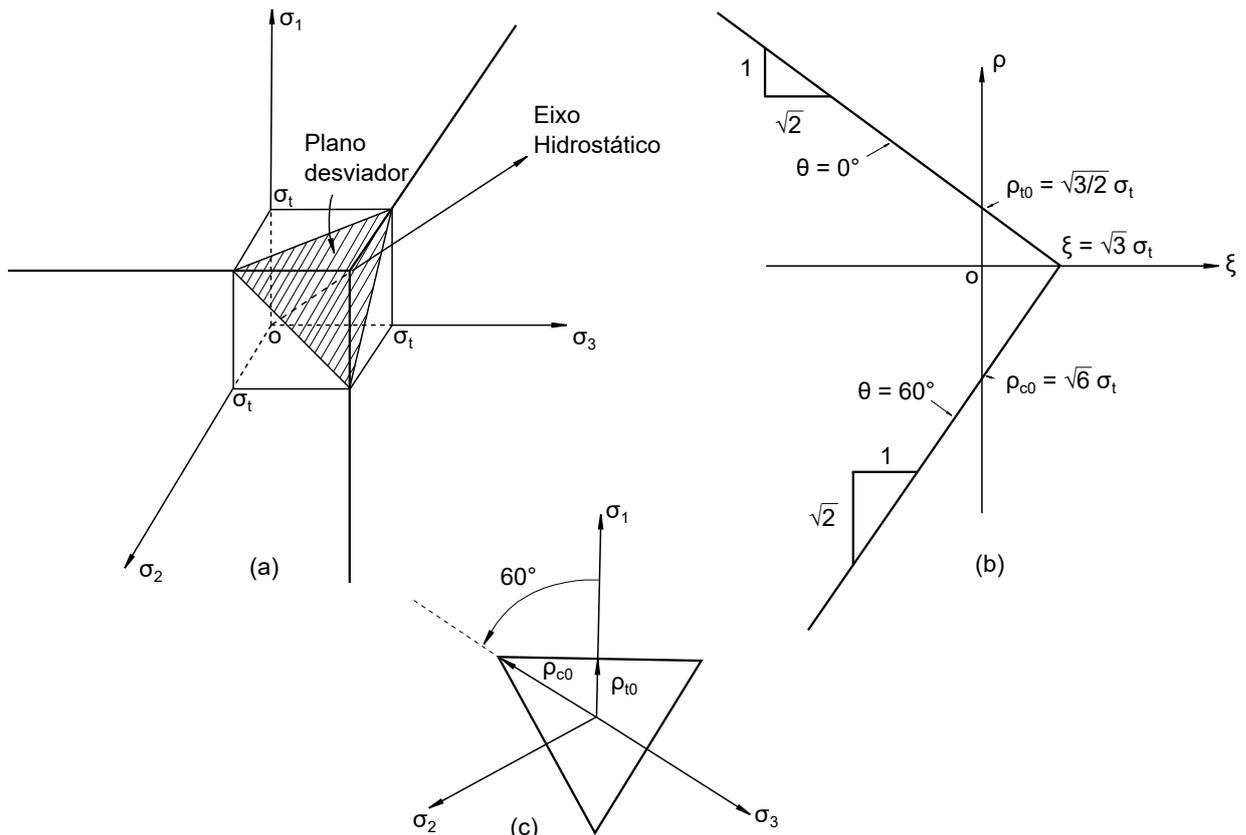


Figura 4.8 – Superfície de ruptura de Rankine (a) Espaço Tridimensional de tensões principais (b) Planos meridianos (c) Planos desviadores

(fonte: adaptado de Chen e Han (1988))

O ANSYS utiliza uma aproximação da superfície de Rankine, uma suavização da curva para efeitos de cálculo, a fim de contornar problemas numéricos nas arestas. Contudo, isso leva a um fluxo plástico não associado, especialmente próximo das arestas, que também pode acarretar em problemas numéricos de convergência (ANSYS, 2023). Dessa forma, recomenda-se a utilização de superfícies combinadas de Drucker-Prager em caso de problemas com a convergência do modelo.

Assim, ao utilizar o modelo *DP-Concrete* do ANSYS, o usuário pode escolher a superfície que representará o concreto tracionado. Nas análises desenvolvidas neste trabalho a superfície de Drucker-Prager foi escolhida para representar o concreto tracionado por facilitar a convergência numérica e apresentar melhores resultados nos testes. A figura 4.9 compara as duas superfícies no plano de tensões principais  $\sigma_1 \times \sigma_2$ .

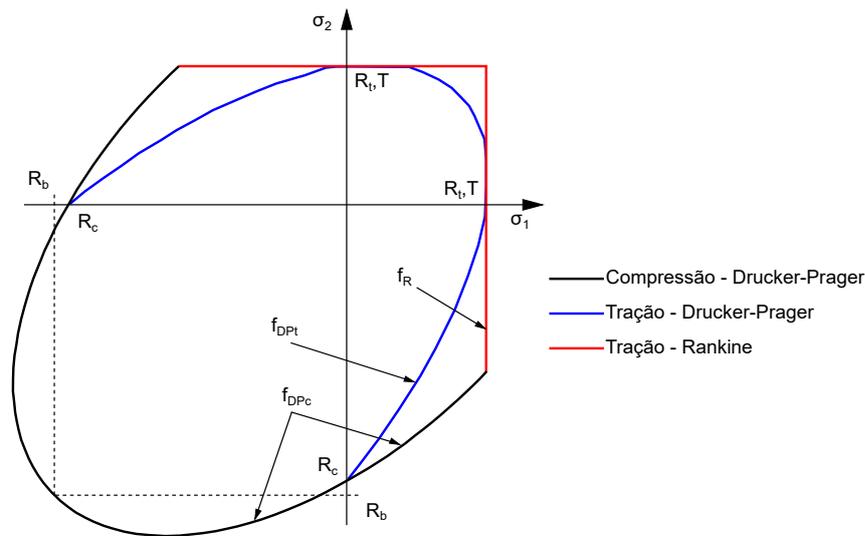


Figura 4.9 – Superfícies de plastificação do *DP-Concrete*  
(fonte: ANSYS (2023))

A superfície de plastificação de um material define o ponto em que ele passa a apresentar comportamento não-linear. Portanto, para valores negativos das equações 4.1 e 4.2 o concreto é considerado um material elástico. Ao atingir o ponto de plastificação ( $f = 0$ ), o material passa a apresentar comportamento não-linear, sendo necessária a definição de leis que caracterizam esse comportamento, *i.e.* determinam a movimentação da superfície de plastificação, que pode ser expansiva (leis de endurecimento) ou se retrativa (leis de amolecimento).

O ANSYS apresenta, dentro do modelo *DP-Concrete* quatro opções para modelar a movimentação da superfície de plastificação, chamadas de modelos HSD (*hardening, softening, dilatation*), são elas: *exponential, linear, steel reinforcement* e *fracture energy*. Caso o usuário opte por não definir um modelo HSD, o concreto é considerado como elasto-plástico perfeito. As figuras 4.10 e 4.11 apresentam os modelos HSD para compressão e tração, respectivamente (ANSYS, 2023).

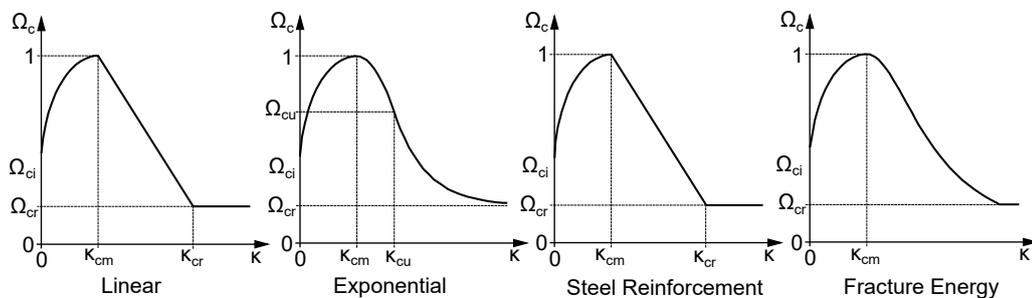


Figura 4.10 – Modelos HSD para o concreto comprimido  
(fonte: adaptado de ANSYS (2023))

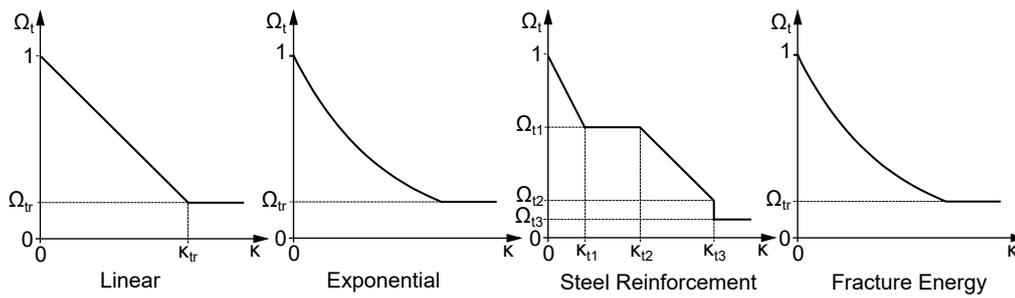


Figura 4.11 – Modelos HSD para o concreto tracionado  
(fonte: adaptado de ANSYS (2023))

No *script* desenvolvido neste trabalho, o modelo HSD Linear foi adotado como padrão para representar o comportamento do concreto, por permitir mais facilmente a definição de parâmetros importantes do comportamento do material. Os dados dos parâmetros foram escolhidos inicialmente de acordo com os indicados no trabalho de Benincá (2019) e posteriormente calibrados de acordo com os resultados experimentais.

O modelo *DP-Concrete* ainda permite a definição de parâmetros de dilatância, que alteram a superfície de potencial plástico, tornando-a diferente da superfície de plastificação e introduzindo, portanto, a plasticidade não associada. Nas aplicações deste trabalho, os parâmetros de dilatância foram utilizados iguais a 1, que torna as duas superfícies iguais e a plasticidade associada.

Como pode ser visto nas figuras 4.10 e 4.11, o modelo de material do concreto possui sempre uma resistência residual, além de não ter um critério explícito de falha. Dessa forma, conforme o aumento da carga externa acontece na estrutura, mais regiões de concreto tendem à deformações plásticas excessivas e consequente amolecimento, suportando esforços menores. Assim, em certo ponto do carregamento as forças internas desenvolvidas nos elementos passam a não ser capazes de equilibrar as forças externas e o modelo encontra problemas de convergência. Neste ponto é considerada a ruína da estrutura, sendo aconselhável, entretanto, verificar as tensões e deformações no concreto para assegurar o correto comportamento do modelo.

#### 4.2.2 Aço

Para modelagem do aço de reforço das lajes, foi adotado um diagrama de tensão uniaxial bi-linear, conforme apresentado na Figura 4.12, onde  $\sigma_0$  representa a tensão de escoamento inicial do material. Assim, ao atingir a tensão de escoamento, o material começa a sofrer plastificação, e tem seu módulo de elasticidade reduzido para o módulo tangente  $E_t$ .

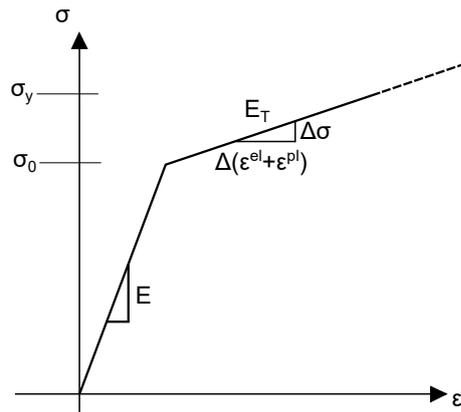


Figura 4.12 – Endurecimento isotrópico linear do aço  
(fonte: adaptado de ANSYS (2023))

No *script* desenvolvido, os dados de entrada fornecidos são o módulo de elasticidade  $E$ , a tensão de início de escoamento do aço  $f_y$  e a tensão última  $f_u$ , a partir desses dados o módulo tangente  $E_t$  é calculado, considerando que a tensão última é atingida na deformação de 10%. Caso o usuário deseje utilizar um material elasto-plástico perfeito, *i.e.*  $E_t = 0$ , basta que a tensão última  $f_u$  seja considerada igual a tensão de escoamento  $f_y$ .

### 4.3 ANÁLISE NÃO-LINEAR

O método dos elementos finitos transforma um sistema estrutural no sistema de equações dado pela equação 4.3. No caso de existirem não-linearidades físicas ou geométricas, o vetor de forças do sistema  $F$  é aplicado em parcelas, a matriz de rigidez  $K_i^T$  é atualizada a cada passo e o vetor deslocamentos  $\Delta u_i$  calculado em incrementos, tornando possível a consideração correta do comportamento não-linear da estrutura (BATHE, 2014).

$$K_i^T \Delta u_i = F \quad (4.3)$$

onde:

$K_i^T$  é a matriz de rigidez do sistema;

$\Delta u_i$  é o vetor de deslocamentos nodais;

$F$  é o vetor de forças do sistema.

Para resolver o sistema de equações, o ANSYS oferece a opção de diversos métodos, dentre os quais foi escolhido o método de Newton–Raphson, comumente utilizado para sistemas estruturais por sua velocidade de convergência. O critério de convergência utilizado considera a norma euclidiana do vetor resíduo de forças, calculado pelas equações 4.4 e 4.5. O valor de  $\|R\|$

deve ser inferior a uma parcela do vetor  $\|F_a\|$ . Da mesma forma, um critério de tolerância em deslocamentos também pode ser adotado (ANSYS, 2023).

$$R = F_a - F_i \quad (4.4)$$

$$\|R\| = \left( \sum R_i^2 \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

$F_a$  é o vetor de forças aplicadas à estrutura;

$F_i$  é o vetor de forças internas das estrutura.

Neste trabalho, foi adotada a tolerância de 5% em força e em deslocamentos para considerar a convergência do passo de aplicação do carregamento. Dado um número máximo definido pelo usuário de iterações do Método de Newton-Raphson, caso o critério de tolerância não seja satisfeito, a solução é dita não-convergente e a estrutura é considerada como rompida.

Para aplicação do carregamento, aproveitou-se um recurso do ANSYS de dividir automaticamente os passos de carga, bastando definir um limite superior e inferior para a divisão, para os quais foram adotados valores de 500 e 100 passos, respectivamente, depois de testes nos modelos. A carga foi aplicada nas lajes na forma de pressão uniforme nas faces superiores dos elementos mais acima da estrutura.

Em relação à discretização da malha de elementos finitos, foi conduzido um estudo de malha com o objetivo de definir um padrão a ser utilizado em todas as lajes. Os resultados do estudo e suas conclusões foram inseridos no Capítulo 6. As condições de contorno adotadas podem ser vistas nos Capítulos 6 e 7.

Como forma de obtenção dos resultados, as reações dos nós na direção vertical foi somada e representou o carregamento total aplicado, a carga última resistida pela laje foi tomada como o maior valor atingido durante o processo de carregamento. Para obtenção dos deslocamentos, o nó do centro do vão da laje foi monitorado.

## 5 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Ao enfrentar desafios no mundo real, é fundamental reconhecer a inevitabilidade das incertezas e compreender suas principais fontes. Na engenharia, tais incertezas podem ser divididas em duas categorias principais: aquelas originadas da aleatoriedade natural, conhecidas como aleatórias, e aquelas decorrentes de imprecisões nos métodos de cálculo e estimativas, chamadas de epistêmicas. As incertezas aleatórias derivam da variabilidade inerente a fenômenos naturais, enquanto as incertezas epistêmicas resultam de limitações e desconhecimentos associados aos processos de análise e previsão (ANG; TANG, 2007).

A incerteza aleatória está associada a variabilidade inerente do mundo real, dentro da capacidade humana de observá-la e descrevê-la. Boa parte das incertezas aleatórias não podem ser reduzidas ou modificadas. Por outro lado, a incerteza epistêmica está associada ao conhecimento imperfeito do mundo e pode ser reduzida ao utilizar-se modelos mais robustos e confiáveis para previsão de fenômenos ou experimentos melhorados. Além disso, os efeitos das duas categorias de incertezas também são distintos: enquanto a primeira leva à probabilidade calculada de um certo evento, a segunda expressa o erro nessa estimativa (ANG; TANG, 2007).

A confiabilidade em sistemas de engenharia pode ser formulada como problemas de capacidade e demanda. A engenharia estrutural está principalmente preocupada com a garantia de que a resistência da estrutura (capacidade) seja maior que a carga máxima nela aplicada (demanda) durante seu tempo de vida útil (ANG; TANG, 1984).

A confiabilidade em engenharia foi atingida durante muito tempo através da utilização de fatores e margens de segurança, garantindo um mínimo de capacidade para um máximo de demanda. Acontece que esses mínimos e máximos eram constantemente definidos conforme julgamentos subjetivos baseados em experiências passadas em sistemas similares. Essa abordagem tradicional é dificilmente quantificada e falha em estabelecer base lógica para lidar com incertezas, conseqüentemente, os níveis de segurança ou confiabilidade não podem ser determinados quantitativamente (ANG; TANG, 1984).

Diante das incertezas presentes, a capacidade e demanda de um sistema não podem ser determinadas precisamente, mas podem ser colocadas em uma possível faixa de resultados. Assim sendo, a capacidade e demanda de um sistema de engenharia são admitidas como variáveis aleatórias e a confiabilidade pode ser medida em termos de probabilidades. Com esse objetivo, dão definidas as seguintes variáveis aleatórias (ANG; TANG, 1984):

$R$  = Resistência ou capacidade do sistema.  
 $S$  = Solicitação ou demanda do sistema.

O objetivo da análise de confiabilidade é garantir o evento ( $R > S$ ) durante o período de vida útil do sistema. Essa garantia é feita somente em termos de probabilidade  $P[R > S]$ , que é, portanto, a medida de confiabilidade do sistema. Além disso, o evento complementar  $P[R < S]$  é a medida da possibilidade de falha do sistema (ANG; TANG, 1984).

Denominando-se  $f_{RS}(r, s)$  como a função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias  $R$  e  $S$ , a probabilidade de falha é calculada pela equação 5.1 (BECK, 2019).

$$p_f = P[R \leq S] = \int_{\Omega_f} f_{RS}(r, s) dr ds \quad (5.1)$$

onde  $\Omega_f$  é o domínio de falha  $\Omega_f = \{(r, s) | r \leq s\}$ .

No caso de  $R$  e  $S$  serem estatisticamente independentes, a equação pode ser escrita como:

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) F_R(s) ds \quad (5.2)$$

A equação 5.2 é a integral de convolução com respeito a variável  $s$ . Se  $[S = s]$ , a probabilidade de falha do sistema seria  $F_R(s)$ . Porém, como a probabilidade de  $[S = s]$  é  $f_S(s)$ , a probabilidade total de falha do sistema será a integração dessa multiplicação, conforme ilustra a figura 5.1. A integral de convolução também pode ser feita com respeito a variável  $r$ , resultado na equação 5.3.

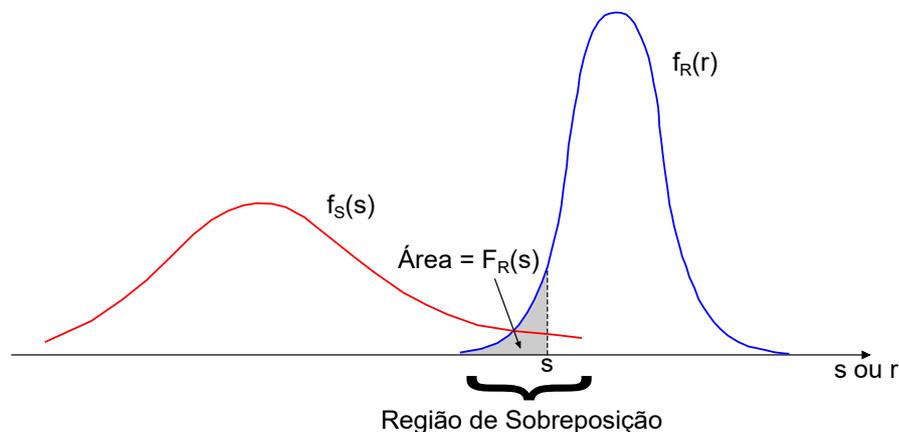


Figura 5.1 – Distribuições de probabilidade de  $R$  e  $S$   
(fonte: adaptado de Ang e Tang (1984))

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F_S(r)) f_R(r) dr \quad (5.3)$$

A região de sobreposição das variáveis  $R$  e  $S$  representam uma medida qualitativa da probabilidade de falha de um sistema. Nesse contexto, observa-se:

- a) A região de sobreposição depende das posições relativas de  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$ . Quando as duas curvas se distanciam, a região de sobreposição diminui, diminuindo a probabilidade de falha da estrutura. A distância relativa das curvas pode ser medida a partir da diferença das médias das variáveis aleatórias  $\mu_R - \mu_S$ ;
- b) A dispersão das curvas também apresenta papel determinante na probabilidade de falha: a região de sobreposição aumenta com o aumento das dispersões. A dispersão de uma variável aleatória pode ser medida em termos do desvio padrão  $\sigma$  ou do coeficiente de variação  $CV$ , dado pela equação 5.4.

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (5.4)$$

onde  $X$  é uma variável aleatória qualquer.

A avaliação da probabilidade de falha  $p_f$  de uma estrutura comumente é de difícil realização por apresentar alguns problemas crônicos: a determinação das formas corretas de  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  é necessária, e nem sempre é uma tarefa simples (ANG; TANG, 1984).

O problema de capacidade x demanda da confiabilidade também pode ser formulado em torno de uma única variável aleatória chamada de margem de segurança  $M = R - S$ . Nesse caso, o evento de falha se torna o evento ( $M < 0$ ) e a probabilidade de falha é calculada pela equação 5.5, que é a área da função densidade de probabilidade que está situada abaixo de 0, conforme mostra a figura 5.2

$$p_f = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm = F_M(0) \quad (5.5)$$

No caso de  $f_M(m)$  ser uma função normal de probabilidade  $N(\mu_M, \sigma_M)$  a probabilidade de falha pode ser calculada facilmente pela equação 5.6. A confiabilidade será, então, função da relação  $\mu_M/\sigma_M$ , que é a margem de segurança expressa em unidades de  $\sigma_M$ . Essa razão pode ser chamada de Índice de Confiabilidade, denotado como  $\beta$ , conforme mostra a equação 5.7, válida somente para variáveis  $M$ ,  $R$  e  $S$  normais e estatisticamente independentes.

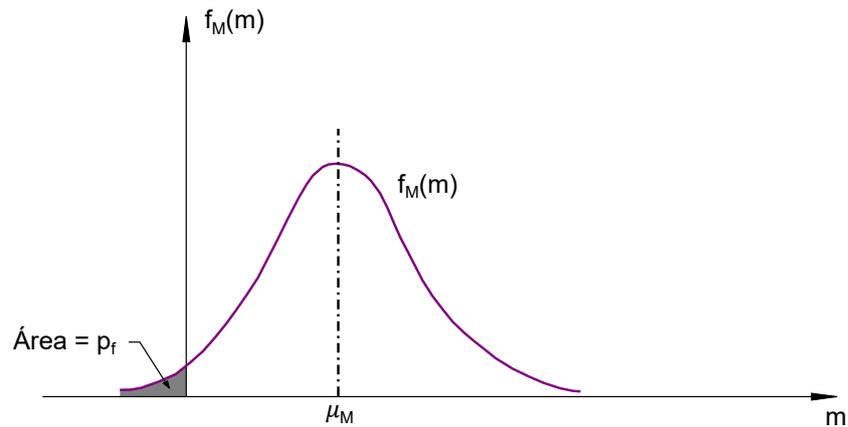


Figura 5.2 – Função densidade de probabilidade de M  
(fonte: adaptado de Ang e Tang (1984))

$$p_f = F_M(0) = \Phi\left(\frac{-\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad (5.6)$$

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (5.7)$$

A probabilidade de falha, então, se torna:

$$p_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (5.8)$$

É comum que a confiabilidade de uma estrutura seja expressada em função do Índice de Confiabilidade  $\beta$  mesmo para variáveis não normais, por estar diretamente relacionado com uma probabilidade de falha e ter ordens de grandeza mais próximas da unidade, tornando a leitura mais simples. A tabela 5.1 apresenta alguns valores do índice  $\beta$  e sua respectiva probabilidade de falha.

Tabela 5.1 – Associação entre  $\beta$  e  $p_f$ .

$p_f$	0,50	0,25	0,16	0,10	0,05	0,01	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$\beta$	0	0,67	1,00	1,28	1,65	2,33	3,10	3,72	4,25	4,75

(fonte: adaptado de Ang e Tang (1984))

É importante notar a relação extremamente não linear entre  $\beta$  e  $p_f$ , uma pequena variação do índice de confiabilidade pode levar a mudanças extremamente significativas na probabilidade de falha da estrutura, principalmente para valores mais altos do índice.

Conforme citado anteriormente, a obtenção da probabilidade de falha ou índice de confiabilidade é muitas vezes uma tarefa árdua para a engenharia, dado que as funções de probabilidade da capacidade, demanda ou margem de segurança do sistema normalmente não são conhecidas, tornando impraticável a aplicação das equações desenvolvidas anteriormente. Nesse sentido, diversos métodos foram desenvolvidos ao longo do tempo para estimar a probabilidade de falha ou índice de confiabilidade de um sistema, dos quais serão apresentados aqui o Método de Simulação de Monte Carlo e o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM - *First Order Reliability Method*).

Além disso, a aplicação de métodos de confiabilidade diretamente no modelo numérico desenvolvido pode ser muito onerosa computacionalmente. Com o objetivo de contornar o problema, o Método da Superfície de Resposta (MSR) é também apresentado.

## 5.1 MÉTODO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Os métodos de simulação permitem calcular a probabilidade de falha em funções de estado-limite explícitas ou implícitas. Na forma mais simples de simulação, cada variável aleatória do problema é gerada algumas vezes, respeitando sua respectiva função densidade de probabilidade. O problema é então resolvido para cada conjunto de variáveis aleatórias onde a falha é ou não verificada. Resolver o problema deterministicamente é chamado de tentativa ou simulação, e, usando muitas simulações, as características probabilísticas do problema tendem a ser representadas corretamente, particularmente quando o número de simulações  $N$  tende ao infinito (HALDAR; MAHADEVAN, 2000).

O método de simulação mais amplamente utilizado é o Método de Monte Carlo, que consiste em seis passos principais:

1. Definir o problema em função das variáveis aleatórias;
2. Definir as funções de densidade de probabilidade de cada variável;
3. Gerar valores aleatórios para as variáveis dentro dessas funções;
4. Resolver o problema deterministicamente para cada conjunto de variáveis aleatórias geradas;
5. Extrair informações probabilísticas a partir das  $N$  simulações realizadas;
6. Determinar a acurácia e eficiência do resultado.

Definir o problema em termos das variáveis implica estabelecer uma ou mais funções de estado limite para o sistema. A função de estado limite, representada por  $g(X)$ , é uma função de  $n$  variáveis aleatórias, formulada como  $g(X) = g(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ , onde  $X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  constitui o vetor das variáveis aleatórias do problema. A condição de desempenho limite é estabelecida como  $g(X) = 0$ , sendo que para  $g(X) > 0$ , considera-se o estado de segurança, enquanto para  $g(X) < 0$ , é admitido o estado de falha (ANG; TANG, 1984).

Geometricamente, a função estado limite é uma superfície  $n$ -dimensional, chamada de superfície de falha, que divide as regiões de segurança e falha. Considerando um problema para muitas variáveis aleatórias, a equação 5.1 é transformada na equação 5.9

$$p_f = \int_{g(x)<0} \dots \int f_{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) dX_1 dX_2 dX_3 \dots dX_n \quad (5.9)$$

Para aplicação do método, um conjunto de  $N$  amostras de cada variável aleatória deve ser gerado respeitando as respectivas distribuições de probabilidade e correlações entre variáveis. Apesar da geração de números aleatórios ser extremamente importante para aplicação do Método de Monte Carlo, este trabalho não explorará esse assunto, dado que hoje existem inúmeros algoritmos desenvolvidos e de livre acesso que facilitam esse trabalho. A geração de números aleatórios foi feita com auxílio da biblioteca livre *SciPy*, que tem funções incorporadas para geração de valores aleatórios já dentro das funções densidade de probabilidade mais comuns.

Após a geração, os números produzidos são empregados para avaliar  $N$  vezes a função  $g(X)$ , gerando um conjunto de respostas que pode ser utilizado para a avaliação estatística da resposta da função de estado limite. Definindo  $N_f$  como o número de ocorrências em que a função  $g(X)$  resulta em valores inferiores a zero (indicando falha), a estimativa da probabilidade de falha é obtida mediante a aplicação da equação 5.10, conforme estabelecido por Haldar e Mahadevan (2000).

$$p_f = \frac{N_f}{N} \quad (5.10)$$

Obviamente, a precisão com que a equação 5.10 aproxima o valor real da probabilidade de falha do sistema é de interesse. Conforme o número de simulações se aproxima do infinito, a probabilidade  $p_f$  estimada se aproxima da probabilidade real da estrutura. Porém, como o processo de simulação pode ser custoso, objetiva-se fazer o menor número de simulações considerando um erro aceitável.

O erro normalmente é medido a partir do coeficiente de variação do estimador da probabilidade de

falha, dado pela equação 5.11. Normalmente, consideram-se aceitáveis coeficientes de variação do estimador de  $p_f$  da ordem de 1% a 5%.

$$CV_{p_f} \approx \frac{\sqrt{\frac{(1-p_f)p_f}{N}}}{p_f} \quad (5.11)$$

A equação 5.11 também pode ser utilizada para estimar o número de simulações necessárias no método para atingir certo nível de erro, sendo necessário entretanto uma estimativa da probabilidade de falha do sistema. Para problemas de engenharia estrutural, as probabilidades de falha de elementos isolados estão na ordem de  $\sim 10^{-2}$  a  $\sim 10^{-8}$ , requerendo de 40 mil a 40 bilhões de simulações, respectivamente, considerando um coeficiente de variação igual a 5%.

## 5.2 MÉTODO DE CONFIABILIDADE DE PRIMEIRA ORDEM

O Método de Confiabilidade de Primeira Ordem aproxima a função estado limite através de uma expansão em série de Taylor até o termo de primeira ordem. O método FORM adota um espaço normalizado e não correlacionado para as variáveis aleatórias, sendo necessário, portanto, a transformação do vetor  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  para um vetor de variáveis normais padrão não-correlacionadas  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  (BECK, 2019).

A transformação das variáveis do espaço de trabalho  $X$  para o espaço normal não-correlacionado pode ser feita através da Transformação de Nataf, cujo processo é realizado em duas etapas, primeiro transformando as variáveis em suas normais equivalentes correlacionadas, com ajuste dos coeficientes de correlação a partir do modelo de Nataf e posteriormente a eliminação da correlação entre variáveis. A Figura 5.3 ilustra ambas etapas do processo (BECK, 2019).

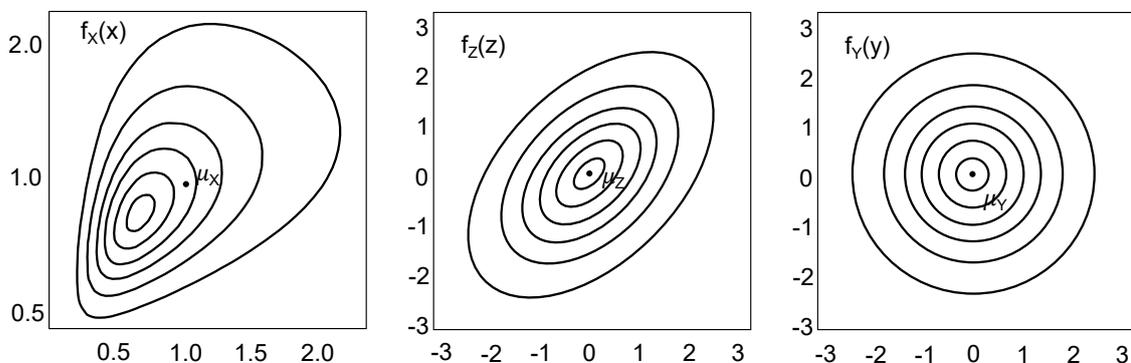


Figura 5.3 – Transformação de Nataf  
(fonte: Beck (2019))

A transformação de uma distribuição qualquer para sua normal equivalente é feita determinando-

se os parâmetros  $(\mu_X^{eq}, \sigma_X^{eq})$  de forma que as probabilidades no ponto de projeto  $x^*$  permaneçam as mesmas. Esse objetivo é atingido igualando-se os valores das FDP's e FDPA's no ponto de projeto, conforme equações 5.12 e 5.13.

$$\Phi\left(\frac{x^* - \mu_X^{eq}}{\sigma_X^{eq}}\right) = F_X(x^*) \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{\sigma_X^{eq}} \phi\left(\frac{x^* - \mu_X^{eq}}{\sigma_X^{eq}}\right) = f_X(x^*) \quad (5.13)$$

Após o cálculo dos parâmetros equivalentes, é necessário também ajustar os coeficientes de correlação. Esse ajuste pode ser feito através da integração exposta na equação 5.14, para obter a matriz de correlação no espaço normal padrão  $\mathbf{R}_z$  a partir de cada coeficiente de correlação no espaço  $X$ ,  $\rho_{X_i, X_j}$ .

$$\rho_{X_i, X_j} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_i z_j \frac{\varphi[z, \mathbf{R}_z] \prod f_{X_i}(x_i)}{\prod \varphi_{Z_i}(z_i)} dx_i dx_j \quad (5.14)$$

Alternativamente, Liu e Kiureghian (1986) apresentam em seu trabalho valores já calculados da equação 5.14, bastando aplicar um fator de correção  $F_{i,j}$  para transformação dos coeficientes de correlação no espaço  $X$ ,  $\rho_{X_i, X_j}$  para o espaço  $Z$ ,  $\rho_{Z_i, Z_j}$ , conforme a equação 5.15. Alguns fatores de transformação estão dispostos na tabela 5.2, para outras distribuições os valores podem ser encontrados no trabalho original dos autores.

Tabela 5.2 – Fatores de correção de correlações  $F_{i,j}$  entre diferentes distribuições

$X_i$	$X_j$	$F_{i,j}$	Erro Máximo (%)
Normal	Normal	1,0	0,0
Normal	Uniforme	1,023	0,0
Normal	Exponencial	1,107	0,0
Normal	Rayleigh	1,014	0,0
Normal	Tipo I, extremo máximo	1,031	0,0
Normal	Tipo I, extremo mínimo	1,031	0,0
Normal	Lognormal	$CV_{X_j} * \sqrt{\ln(1 + CV_{X_j}^2)}$	Exato
Normal	Gamma	$1,001 - 0,007CV_{X_j} + 0,118CV_{X_j}^2$	0,0
Normal	Tipo II, extremo máximo	$1,03 - 0,238CV_{X_j} + 0,364CV_{X_j}^2$	0,1
Normal	Tipo II, extremo mínimo	$1,031 - 0,195CV_{X_j} + 0,328CV_{X_j}^2$	0,1

(fonte: adaptado de Liu e Kiureghian (1986))

$$\rho_{Z_i, Z_j} = F_{i,j} \rho_{X_i, X_j} \quad (5.15)$$

Para completar a transformação ao espaço  $Y$ , normal-padrão e descorrelacionado, é necessário ainda remover a correlação entre as variáveis aleatórias. Esse processo pode ser feito, entre outras formas, por via da decomposição de Cholesky da matriz de covariância. O processo da transformação é feito a partir da matriz de desvios padrões equivalentes  $\Sigma^{eq}$ , conforme equações 5.16 e 5.17.

$$COV = \Sigma^{eq} \rho_Z \Sigma^{eq} \quad (5.16)$$

$$COV = LL^T \quad (5.17)$$

Assim, a transformação entre o espaço  $X$  e  $Y$  pode ser feita através das equações 5.18 e 5.19. Por se tratar de um processo iterativo, a operação deve ser refeita a cada laço do processo, para que os valores calculados nas equações 5.12, 5.13 e 5.15 possam ser ajustados de acordo com o ponto de projeto.

$$\mathbf{y} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}^{eq}) \quad (5.18)$$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}^{eq} + \mathbf{L}\mathbf{y} \quad (5.19)$$

Adotando-se o espaço  $Y$  como espaço de trabalho, onde todas as variáveis são normais-padrão e não correlacionadas, a função estado limite escrita neste espaço é denotada por  $g'(y)$ . Conforme descrito por Beck (2019) o índice de confiabilidade  $\beta$  será a menor distância de  $g'(y)$  à origem do espaço, sendo o ponto na superfície de falha correspondente a menor distância chamado de ponto de projeto, ou ponto mais provável de falha. A figura 5.4 ilustra o problema.

A distância entre um ponto qualquer no espaço reduzido e sua origem é dada pela equação 5.20. Como objetiva-se encontrar a mínima distância  $d$  que esteja sob a superfície de falha  $g'(y) = 0$ , têm-se um problema de otimização com restrição.

$$d = \|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \quad (5.20)$$

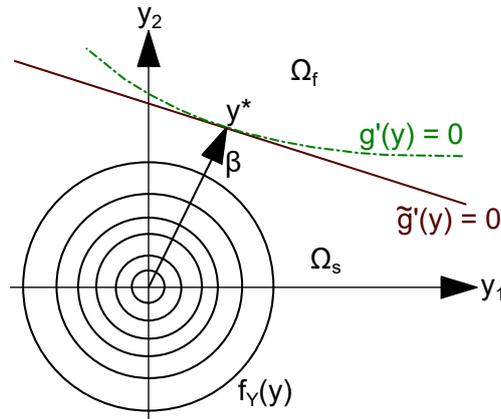


Figura 5.4 – Função estado limite no espaço padrão não-correlacionado  
(fonte: adaptado de Titello (2020))

Empregando-se o método dos multiplicadores de Lagrange na equação anterior, a equação 5.21 é obtida.

$$\Lambda(\mathbf{y}, \lambda) = \sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} + \lambda g'(\mathbf{y}) \quad (5.21)$$

Derivando-se 5.21 em relação às  $n$  variáveis aleatórias e em relação à  $\lambda$ , é obtido um sistema de  $(n + 1)$  equações e incógnitas, descritos por 5.22 e 5.23.

$$\frac{\partial \Lambda(\mathbf{y}, \lambda)}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}} + \lambda \nabla g'(\mathbf{y}) = 0 \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \Lambda(\mathbf{y}, \lambda)}{\partial \lambda} = g'(\mathbf{y}) = 0 \quad (5.23)$$

A expressão 5.22 pode ser escrita também em termos de  $\mathbf{x}$ , aplicando-se a regra da cadeia, conforme (5.24).

$$\nabla g'(\mathbf{y}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \sigma_X \quad (5.24)$$

Ao reescrever (5.22) isolando  $\lambda$  e substituindo (5.20), a equação 5.25 é encontrada.

$$\mathbf{y}^{est} = -\lambda d \nabla g'(\mathbf{y}) \quad (5.25)$$

Assumindo que o ponto  $y^{est}$  obtido é o ponto de projeto  $y^*$  e usando novamente (5.20), a equação 5.26 é obtida:

$$\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{\nabla g'(y)^T \nabla g'(y)}} = \frac{\pm 1}{\|\nabla g'(y)\|} \quad (5.26)$$

Isolando  $d$  em (5.25) e substituindo (5.26) obtém-se (5.27). Quando a condição de (5.23) é satisfeita, esta será a menor distância da equação estado limite  $g'(z)$  e a origem do espaço normal padrão não correlacionado, ou seja: o índice de confiabilidade  $\beta$ .

$$d_{min} = \beta = -\frac{\nabla g'(y)}{\|\nabla g'(y)\|} y^* \quad (5.27)$$

Ainda, é possível calcular os cossenos diretores do ponto de falha através da equação 5.28.

$$\alpha^T = \frac{\nabla g'(y)}{\|\nabla g'(y)\|} \quad (5.28)$$

Os cossenos diretores do ponto de projeto apresentam informações a respeito da contribuição de cada variável aleatória para a falha. O somatório dos quadrados dos termos do vetor deve ser igual a unidade ( $\sum \alpha_i^2 = 1$ ) e cada termo representa sua contribuição relativa. Assim, é possível utilizar o FORM para avaliar a importância das variáveis em problemas de confiabilidade e substituir aquelas com valores de  $\alpha_i$  próximos a zero por determinísticas, simplificando o problema (BECK, 2019).

A solução de problemas de confiabilidade envolvendo equações de estado limite não-lineares através do método FORM é um problema de otimização em busca do ponto de projeto  $y^*$ . A probabilidade de falha obtida através do Método de Confiabilidade de Primeira Ordem pode ser estimada pela equação 5.8.

O Método utiliza uma aproximação linear da função calculada no ponto de falha  $\tilde{g}'(y)$ , conforme pode ser observado na figura 5.4. Essa aproximação perde precisão para avaliação da confiabilidade da estrutura conforme aumenta o grau de não-linearidade da função estado limite ou o número de variáveis aleatórias do problema (SCHUËLLER; STIX, 1987) *apud* (BECK, 2019).

### 5.3 MÉTODO DA SUPERFÍCIE DE RESPOSTA

O Método da Superfície de Resposta propõe a aproximação da função estado limite implícita por uma função mais simples, de menor custo computacional para avaliação. Sobre a Superfície de Resposta, pode-se então aplicar qualquer método de avaliação de confiabilidade estrutural (GOMES, 2001).

A regressão linear múltipla é um conjunto de métodos estatísticos usados para determinar a função representativa de uma superfície de resposta (MYERS; MONTGOMERY; ANDERSON-COOK, 2009). O modelo de função de uma superfície de resposta é geralmente representado por um polinômio de grau  $n$  com interação entre os termos, conforme (5.29).

$$\tilde{y}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij} x_i x_j + \dots \quad (5.29)$$

A equação pode ser adaptada a diversos problemas que se queira aproximar. A variável  $k$  representa o número de fatores que alteram a resposta de  $y(x)$ . Os coeficientes  $a_0, a_i, a_{ij}, \dots$  podem ser ajustados a partir de diversos métodos para aproximar a função original (MYERS; MONTGOMERY; ANDERSON-COOK, 2009). Neste trabalho, a regressão linear é utilizada em conjunto com o método dos mínimos quadrados.

Segundo Myers, Montgomery e Anderson-Cook (2009) a utilização de uma função de até segunda ordem é adequada para resolver a maioria dos problemas físicos, segundo a experiência prática. Além disso, o cálculo dos parâmetros se torna relativamente simples, ao contrário de polinômios de alta ordem, que geram muitos coeficientes a serem calculados e podem levar a formas irregulares na função, causando dificuldades para convergência numérica.

Assim, o Método da Superfície de Resposta será utilizado nesta pesquisa para substituir o modelo em elementos finitos do ANSYS, aproximando a carga última resistida pelas lajes de concreto armado. Para cada laje, um polinômio com diferentes parâmetros  $a_0, a_i, a_{ij}$  é determinado.

Um ponto chave para a aplicação com sucesso do Método da Superfície de Resposta é a escolha dos pontos amostrais para cálculo da superfície - deseja-se alcançar uma superfície suficientemente representativa da função estado limite com o mínimo de amostragens possíveis. Diversos métodos têm sido propostos para a escolha das amostras, como: amostragem compósita central, amostragem fatorial fracional total e parcial, amostragem aleatória, amostragem incompleta parcialmente balanceada, etc. (GOMES, 2001). Para o desenvolvimento desta pesquisa, optou-se pela utilização do *Central Composite Design* (CCD).

### 5.3.1 Planejamento Composto Central

O Planejamento Composto Central é a técnica de amostragem que gera amostras de diferentes níveis de probabilidade para cada variável em torno de seu ponto central (médio). O número de pontos de amostragem está diretamente ligado ao total de variáveis  $k$  do problema, em razão das combinações entre variáveis que são geradas. Os pontos de amostragem são definidos como: ponto fatorial  $n_f$ , ponto central  $n_c$  e ponto axial  $n_a$ , e o total de amostras é dado por (5.30).

$$n = n_c + n_f + n_a = n_c + 2^k + 2k \quad (5.30)$$

Os pontos centrais  $n_c$  são gerados nas médias das variáveis. Os pontos axiais e fatoriais são gerados em um espaço das variáveis codificadas, que é obtido através da equação 5.31. O valor de  $\xi_{ik}$  apresenta limites dentro do intervalo  $[-1,1]$  para os pontos fatoriais e  $[-\alpha, \alpha]$  para os pontos axiais.

$$\xi_{ik} = \frac{x_{ik} - [\max(x_{ik}) + \min(x_{ik})] / 2}{[\max(x_{ik}) - \min(x_{ik})] / 2} \quad (5.31)$$

Sendo  $\max(x_{ik})$  e  $\min(x_{ik})$  os valores máximos e mínimos da variável  $x_{ik}$ . A figura 5.5 apresenta graficamente os pontos gerados pelo CCD no espaço das variáveis codificadas, considerando duas variáveis.

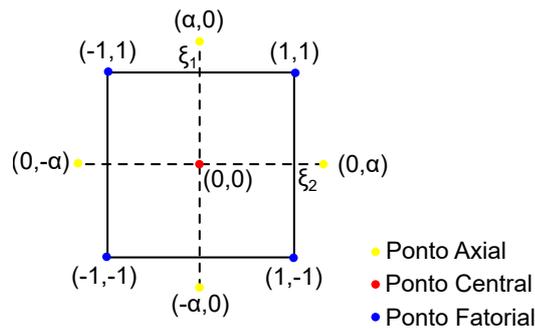


Figura 5.5 – Planejamento CCD em duas dimensões  
(fonte: adaptado de Myers, Montgomery e Anderson-Cook (2009))

Os pontos axiais podem ser gerados em qualquer distância  $\alpha$  dos pontos centrais. Porém, segundo Myers, Montgomery e Anderson-Cook (2009), uma propriedade importante do planejamento do experimento é manter a variância da predição constante ao longo do espaço de amostragem, *i.e.* em dois locais distintos no espaço codificado, os valores preditos pela superfície de resposta  $\tilde{y}(x_1)$  e  $\tilde{y}(x_2)$  devem ser igualmente precisos, ter a mesma variância.

Essa propriedade do planejamento composto central chama-se *rotatability*, e é atingida escolhendo-se  $\alpha$  de acordo com a equação 5.32 (MYERS; MONTGOMERY; ANDERSON-COOK, 2009).

$$\alpha = \sqrt[4]{2^k} \quad (5.32)$$

Outra forma comum de escolha para a distância dos pontos axiais é manter os pontos axiais e fatoriais com a mesma distância do ponto central, conforme (5.33). Esse tipo de amostragem torna a superfície de resposta quase rotacional, podendo oferecer ótimos resultados com pontos amostrais mais próximos das médias (MYERS; MONTGOMERY; ANDERSON-COOK, 2009).

$$\alpha = \sqrt{k} \quad (5.33)$$

A escolha do número de pontos centrais também é importante, pois o erro da superfície de resposta deve ser menor neste ponto. Conforme o aumento do número de pontos centrais, a regressão linear dará mais peso à esta região da superfície, diminuindo seu erro. Segundo Myers, Montgomery e Anderson-Cook (2009), para amostragens rotacionais, de três a cinco pontos centrais devem ser suficientes.

Uma vez ajustada a superfície de resposta, pode-se procurar através dela o ponto mais provável de falha da estrutura e, utilizando-se este como ponto central, gerar uma nova superfície de resposta, que deverá ser mais representativa da equação estado limite na região de falha, melhorando a aproximação para cálculo da confiabilidade. A aproximação é feita sucessivamente até que o ponto de amostragem tenha convergido satisfatoriamente.

Beck (2019) alerta para a perda de precisão da superfície de resposta em avaliar a probabilidade de falha quando esta é calculada centrada no ponto médio das variáveis, recomendando que o esquema adaptativo descrito acima seja utilizado ou ainda outros métodos na busca do ponto de projeto antes da superfície ser calculada.

### 5.3.2 Avaliação da Superfície de Resposta

Ao utilizar-se técnicas de meta-modelagem, é importante certificar-se de que os meta-modelos foram corretamente treinados e são capazes de reproduzir o modelo original. Para tanto, uma avaliação quantitativa dos polinômios gerados na superfície de resposta se faz necessária. Neste trabalho, além dos pontos amostrais gerados pelo planejamento composto central, que serviram para gerar as superfícies de resposta de cada laje, alguns pontos aleatórios foram gerados e calculados pelo modelo numérico das lajes a fim de certificar que a superfície de resposta

seria capaz de substituí-lo. O número de pontos de validação foi escolhido de forma que esses representassem 20% da amostragem total.

A avaliação dos meta-modelos foi feita pelo coeficiente de determinação, ou  $R^2$ , que é uma medida de ajuste de um modelo generalizado, como a regressão linear aos valores de uma variável. Ele pode ser utilizado para medir a capacidade de um modelo para prever determinada grandeza (MYERS; MONTGOMERY; ANDERSON-COOK, 2009).

O coeficiente  $R^2$  geralmente assume valores entre 0 e 1, sendo que a unidade indica que o modelo é capaz de prever completamente a variação da resposta, enquanto a aproximação ao 0 indica a perda dessa capacidade (MYERS; MONTGOMERY; ANDERSON-COOK, 2009). O coeficiente é calculado de acordo com a Equação 5.34.

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y}_i)^2} \quad (5.34)$$

onde:

$y_i$  é o valor real de cada observação;

$\bar{y}_i$  é a média dos valores das observações;

$\hat{y}_i$  é o valor previsto de cada observação.

O coeficiente de determinação é a razão entre o somatório do quadrado da diferença entre os valores previstos pelo meta-modelo e a média e o quadrado da diferença entre os valores reais e a média. Caso todos os valores previstos pelo modelo ( $\hat{y}_i$ ) sejam iguais aos observados ( $y_i$ ) o coeficiente resulta em 1. Além disso, pode-se provar que o coeficiente de terminação ( $R^2$ ) é o quadrado do coeficiente de correlação entre duas variáveis (DEVORE, 2012).

Dessa forma, o coeficiente de determinação foi avaliado para as superfícies de resposta geradas neste trabalho, considerando um  $R^2$  mínimo a ser atingido de 0,90 para os pontos de validação. Nos casos em que o coeficiente não foi atingido inicialmente, novos pontos amostrais foram utilizados para cálculo da superfície.

## 5.4 ÍNDICES DE CONFIABILIDADE ALVO

O *Joint Committee on Structural Safety* publicou em 2001 um documento que tem como objetivo servir de modelo para outras normas técnicas baseada em confiabilidade estrutural. O documento apresenta em seu corpo índices de confiabilidade alvo sugeridos de acordo com as consequências

de falha da estrutura e o custo das medidas adicionais de segurança (JCSS, 2001). Os valores apresentados no documento estão reproduzidos na Tabela 5.3

Tabela 5.3 – Índices de confiabilidade alvo sugeridos pelo JCSS

<b>Custo relativo da medida de segurança</b>	<b>Consequências da falha</b>		
	<b>mínimas</b>	<b>moderadas</b>	<b>grandes</b>
Grande	$\beta_T = 3,1$	$\beta_T = 3,3$	$\beta_T = 3,7$
Normal	$\beta_T = 3,7$	$\beta_T = 4,2$	$\beta_T = 4,4$
Pequeno	$\beta_T = 4,2$	$\beta_T = 4,4$	$\beta_T = 4,7$

(fonte: adaptado de JCSS (2001))

O documento descreve as consequências de falha como:

- a) Consequências mínimas: o risco a vida e as consequências econômicas são baixos ou negligenciáveis em caso de falha (estruturas agrícolas, silos, postes);
- b) Consequências moderadas: o risco a vida é moderado e as consequências econômicas são consideráveis em caso de falha (edifícios de escritórios, residenciais e industriais);
- c) Consequências graves: o risco a vida é alto em caso de falha, e as consequências econômicas significantes (pontes, teatros, hospitais, edifícios altos).

Em seu estudo para calibração das normas brasileiras, Santiago (2019) adotou  $\beta_T = 3,00$ , segundo indicação de Melchers e Beck (2018). Assim, este também foi o índice de confiabilidade satisfatório considerado neste trabalho.

## 6 APLICAÇÃO DO MODELO

Com o objetivo de testar e validar o modelo numérico apresentado no Capítulo 4, são apresentados a seguir modelagens numéricas de lajes ensaiadas experimentalmente encontradas na literatura, para comparação. Foram utilizados resultados de lajes com e sem confinamento lateral.

Para manter a maior fidelidade possível do modelo com os testes experimentais, todas as informações a cerca dos ensaios experimentais foram incorporadas no modelo, como módulo de elasticidade  $E_c$ , resistência a tração do concreto  $f_{ct}$ , módulo de elasticidade do aço  $E_s$ , tensão de escoamento  $f_y$  e tensão última  $f_u$ . Na falta de alguma informação, os valores sugeridos pela FIB (2010) foram utilizados. Quando necessário o cálculo de propriedades do concreto, a resistência característica a compressão  $f_{ck}$  foi determinada de acordo com a equação 3.1, considerando um coeficiente de variação de 15%.

Aproveitando-se do fato de todas as lajes serem retangulares e com dupla simetria, o modelo de elementos finitos foi desenvolvido para apenas 1/4 da laje, com o objetivo de reduzir o tempo de processamento. Para as lajes não confinadas as condições de contorno da Figura 6.1 (a) foram adotadas: o deslocamento vertical igual a zero foi imposto no nó inferior dos bordos de apoio, já nos bordos de simetria as restrições de deslocamento foram aplicadas em todos os nós. A Figura 6.1 (b) apresenta o detalhe das condições de contorno aplicadas no bordo do apoio.

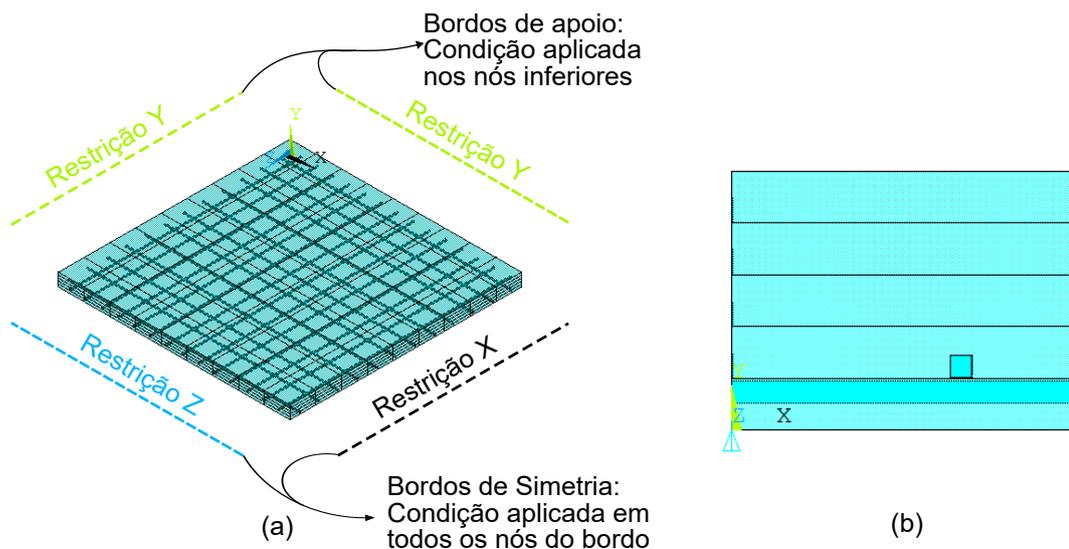


Figura 6.1 – (a) Condições de contorno das lajes não confinadas no modelo numérico (b) Detalhe do bordo apoiado (fonte: o autor)

Nas lajes confinadas lateralmente, a imposição de deslocamento lateral nulo foi adotada também nos bordos de apoio. Apesar de existir uma certa flexibilidade da restrição lateral, nas condições em que as lajes foram testadas experimentalmente, apoios muito rígidos foram utilizados, com perfis metálicos, impedindo o deslocamento lateral das lajes. Além disso, as lajes experimentais também foram engastadas, condição que foi reproduzida através das condições de contorno apresentadas na Figura 6.2 (a), a parte (b) da figura apresenta o detalhe das condições de contorno no bordo de apoio.

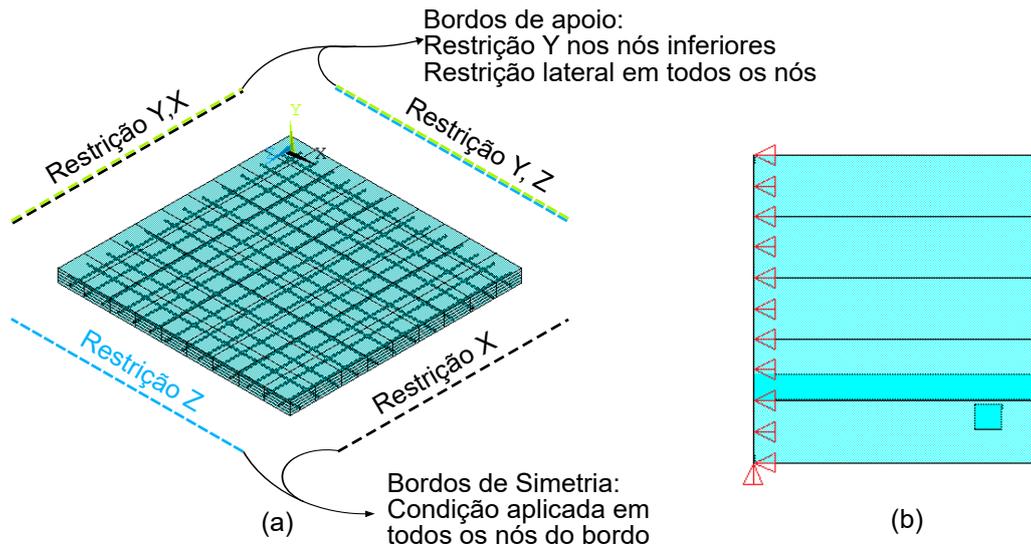


Figura 6.2 – (a) Condições de contorno das lajes confinadas no modelo numérico (b) Detalhe do bordo apoiado  
(fonte: o autor)

## 6.1 LAJES SEM CONFINAMENTO LATERAL

Taylor, Maher e Hayes (1966) ensaiaram experimentalmente 10 lajes de concreto armado simplesmente apoiadas para testar o efeito do arranjo das armaduras no comportamento estrutural. Diferentes orientações de armadura foram utilizadas. Dos 10 ensaios realizados apenas as lajes S1, S7 e S9 foram reproduzidas numericamente, por serem as únicas a apresentar armaduras paralelas aos bordos e de espaçamento constante.

A laje 7, dentre as 7 ensaiadas por Geymayer e McDonald (1967) foi a única modelada numericamente dos referidos autores por ser a única sem armaduras de reforço nos cantos. Apesar de ser um modelo de dimensões reduzidas, a laje possuía uma relação vão/espessura de 66, sendo importante para testar o modelo com estruturas mais esbeltas.

Nos ensaios realizados por Gomes et al. (2012), o efeito de reforços na capacidade última de lajes foi estudado. Dentre as diversas lajes ensaiadas, apenas a laje L1 pôde ser utilizada para

comparação com o modelo numérico, por ser a única sem ciclos de carga/descarga.

O trabalho de Abdul-Wahab e Khalil (2000) investigou a rigidez e resistência de lajes nervuradas de concreto. Para comparação, duas lajes maciças também foram ensaiadas: as lajes S7 e S8, que puderam ser aproveitadas para comparação com o resultado numérico obtido neste trabalho.

Pires (2003) investigou em sua pesquisa de mestrado o efeito de reforço em lajes de concreto armado. Diferente das anteriores, as lajes foram armadas em uma única direção e o carregamento foi aplicado pontualmente em substituição à carga uniformemente distribuída (Figura 6.3 (a)). Para corretamente considerar essas características, foram necessárias algumas adaptações no modelo numérico, nesse caso, metade da laje foi modelada e apenas uma condição de simetria foi utilizada, conforme apresentado na figura 6.3 (b). Os resultados selecionados para comparação são os das lajes P1, P2A, P2B, P3A e P3B.

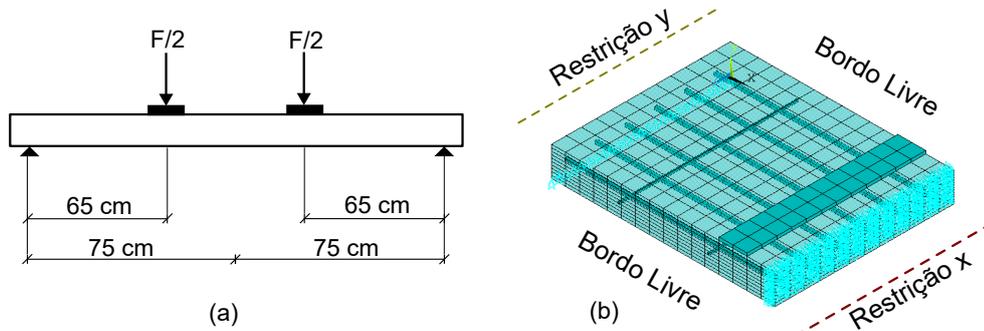


Figura 6.3 – (a) cargas e apoios do experimento (b) modelo numérico para as lajes de Pires (2003)  
(fonte: o autor)

No total, 12 lajes sem confinamento lateral foram utilizadas para comparação com os resultados numéricos. A tabela 6.1 apresenta os dados de geometria das lajes estudadas e as armaduras utilizados em cada uma delas, onde  $c$  é o cobrimento das armaduras,  $A_s$  é a área de aço de uma única barra de armadura e  $S$  representa o espaçamento entre elas. O *script* foi programado de tal forma que as armaduras na direção do eixo X sejam as principais, ficando abaixo das armaduras na direção do eixo Y. Já a tabela 6.2 apresenta os parâmetros dos materiais. Para os materiais, os casos onde o aço apresentou endurecimento pós-escoamento, foi considerado que a tensão última  $f_u$  seria atingida em uma deformação  $\varepsilon = 10\%$ .

Tabela 6.1 – Dados de geometria das lajes experimentais sem confinamento lateral

<b>Lajes sem confinamento lateral</b>									
Referência	Laje	Geometria				Armaduras			
		lx cm	ly cm	h cm	c cm	Asx cm <sup>2</sup>	Sx cm	Asy cm <sup>2</sup>	Sy cm
<b>Taylor (1966)</b>	S1	183	183	5,08	0,50	0,178	7,62	0,178	6,35
	S7	183	183	4,45	0,50	0,178	6,35	0,178	5,558
	S9	183	183	7,62	0,50	0,178	12,19	0,178	11,43
<b>Geymayer (1967)</b>	Laje 7	167,6	167,6	2,54	0,35	0,311	20	0,311	4,29
<b>Gomes (2012)</b>	L1	400	400	7	1,20	0,196	20	0,196	20
<b>Abdul-Wahab (2000)</b>	S7	150	150	7,5	1,05	0,301	10	0,301	10
	S8	150	150	9,5	1,05	0,301	10	0,301	10
<b>Pires (2003)</b>	P1	150	60	10	1,5	0,785	10	0,311	30
	P2A	150	60	15	1,5	0,785	10	0,311	30
	P2B	150	60	15	1,5	0,785	10	0,311	30
	P3A	150	60	15	1,5	0,785	10	0,311	30
	P3B	150	60	15	1,5	0,785	10	0,311	30

(fonte: o autor)

Tabela 6.2 – Dados dos materiais das lajes experimentais sem confinamento lateral

<b>Lajes sem confinamento lateral</b>							
Referência	Laje	Materiais					
		fcm kN/cm <sup>2</sup>	Ec kN/cm <sup>2</sup>	fct kN/cm <sup>2</sup>	fy kN/cm <sup>2</sup>	fu kN/cm <sup>2</sup>	Es kN/cm <sup>2</sup>
<b>Taylor (1966)</b>	S1	3,05	-	-	37,59	41,608	21000
	S7	3,40	-	-	37,59	41,608	21000
	S9	2,86	-	-	37,59	41,608	21000
<b>Geymayer (1967)</b>	Laje 7	2,164	-	-	54,45	57,63	21000
<b>Gomes (2012)</b>	L1	2,08	1610	-	76,17	82,92	20470
<b>Abdul-Wahab (2000)</b>	S7	3,6	2800	0,329	39,8	39,8	20000
	S8	2,85	2590	0,281	39,8	39,8	20000
<b>Pires (2003)</b>	P1	3,75	2590	0,241	68,26	80,3	19950
	P2A	3,69	2570	0,241	68,26	80,3	19950
	P2B	3,69	2570	0,241	68,26	80,3	19950
	P3A	3,75	2590	0,241	68,26	80,3	19950
	P3B	3,75	2590	0,241	68,26	80,3	19950

(fonte: o autor)

Apesar do principal interesse deste trabalho ser na carga de ruptura das lajes, o *script* foi calibrado de forma a aproximar o comportamento das lajes do início do carregamento até o rompimento. Para tanto, foram ajustados os parâmetros numéricos da análise não-linear bem como a malha de elementos finitos das lajes.

A figura 6.4 apresenta o gráfico carga x deslocamento no centro do vão para a laje S1, ensaiada por Taylor, Maher e Hayes (1966) com diferentes configurações de discretização da malha no plano, a fim de comparação. A partir da análise da figura, percebe-se que as malhas com 2, 3 e 4 elementos apresentam curvas instáveis, com pouco sentido físico e distantes da resposta experimental. Por outro lado, as malhas com 27 e 36 elementos em cada direção no plano apresentaram uma rápida perda da capacidade de convergência, levando à respostas da carga de ruptura muito menores que a carga de ruptura real. As malhas com 6, 9, 10 e 12 elementos apresentaram resultados razoavelmente próximos entre si e do resultado experimental, indicando que seriam adequadas para o modelo. Por fim, o modelo com 18 elementos em cada direção do plano, apesar de ser o que melhor concordou com o resultado experimental próximo ao final do carregamento, apresentou um certo afastamento em estágios anteriores, e demonstrou o início da tendência de malhas com mais elementos a não-convergência precoce. Considerando essa análise e também as indicações de outros trabalhos que utilizaram modelos com elementos e materiais parecidos, como os de Leite (2022) e Benincá (2019), adotou-se como padrão para este trabalho elementos com dimensões próximas a 10 cm no plano, já que a laje S1 possui 91,5 cm como metade do vão.

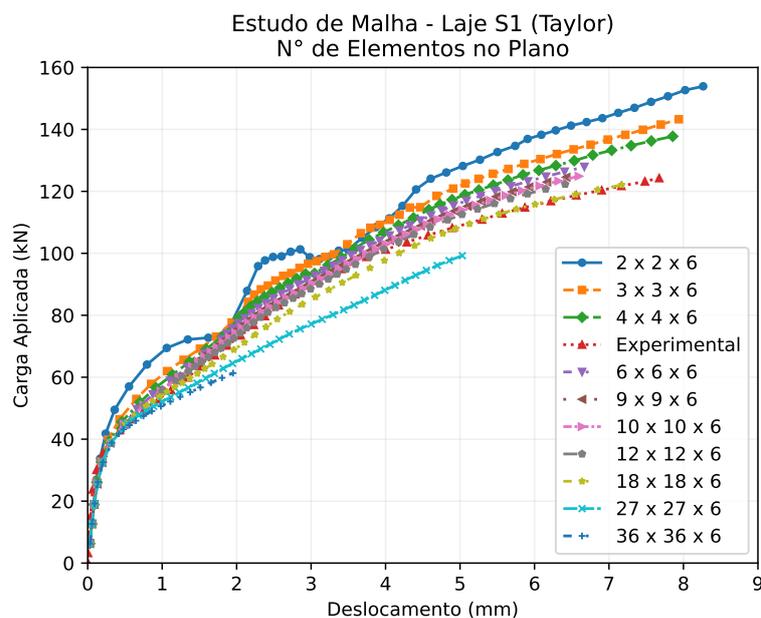


Figura 6.4 – Estudo de malha de elementos no plano da Laje S1 (fonte: o autor)

O estudo de malha para determinação do número de elementos ao longo da espessura das lajes pode ser visualizado na Figura 6.5. A partir da análise da figura é possível perceber que excetuando-se as malhas com 1 e 2 elementos no plano, todas as outras apresentaram resultados muito próximos. Como as lajes de concreto armado em flexão pura normalmente apresentam linhas neutras da ordem de 10 a 20% da sua altura, optou-se pela utilização de elementos com aproximadamente 1cm de espessura, a fim de representar melhor a variação de tensões e

deformações do concreto ao longo da espessura das lajes. Como a laje S1 possui 5,08cm de altura, a malha que representa essa situação é a com 9x9x5 elementos.

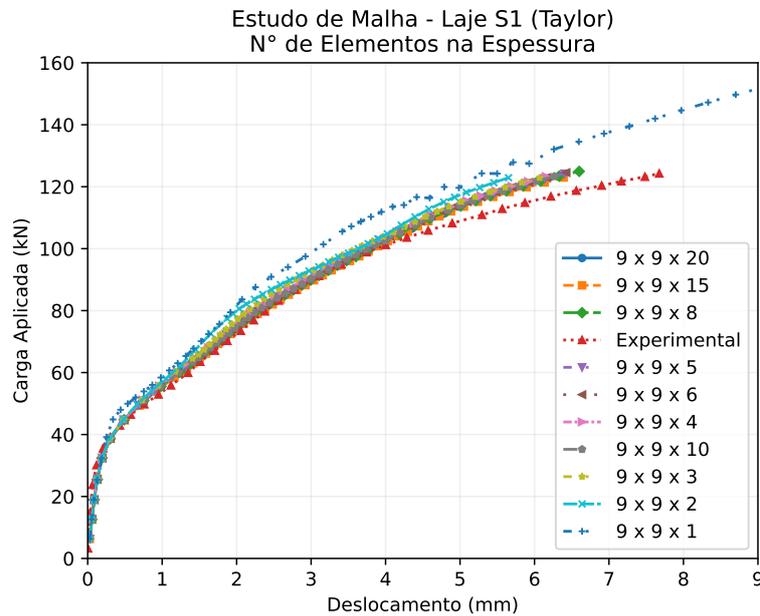


Figura 6.5 – Estudo de malha de elementos na espessura da Laje S1  
(fonte: o autor)

Para que o leitor consiga visualizar melhor a dimensão dos elementos no estudo, algumas das malhas utilizadas foram apresentadas na Figura 6.6.

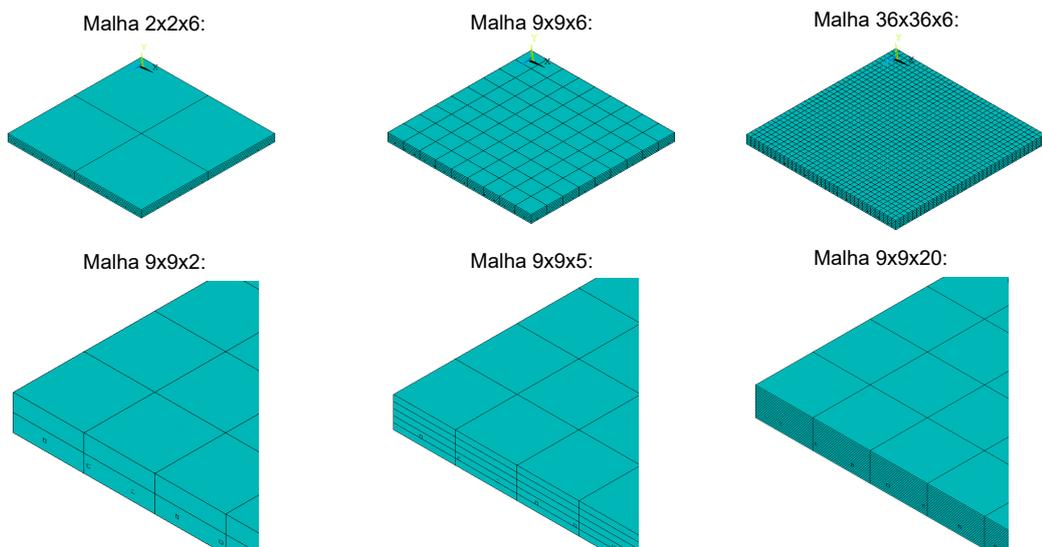


Figura 6.6 – Algumas das malhas estudadas para a laje S1  
(fonte: o autor)

Ao analisar as tensões calculadas pelo modelo numérico para o aço da laje S1 ao longo do carregamento - apresentadas na Figura 6.7, é possível observar o desenvolvimento das linhas de ruptura diagonais na laje, o mesmo padrão de falha observado por Taylor, Maher e Hayes (1966).

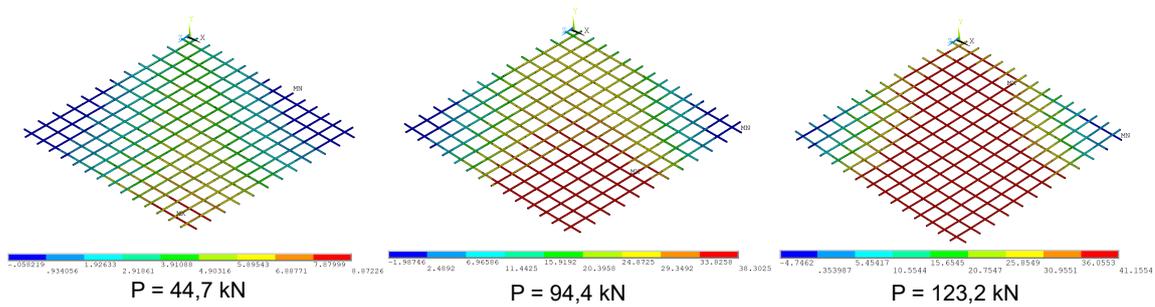


Figura 6.7 – Tensões no Aço - Laje S1  
(fonte: o autor)

O padrão das charneiras plásticas também foi observado ao analisar a primeira deformação principal nos elementos de concreto da face inferior  $\varepsilon_1$ , por meio da Figura 6.8.

Na Figura 6.8 é possível observar que as deformações não estão completamente contínuas entre diferentes elementos, o que indica que um refinamento maior da malha seria importante caso o objetivo do modelo numérico fosse representá-las corretamente. Como para este trabalho o interesse está em representar corretamente o comportamento global da laje em termos do diagrama carga x deslocamento, o modelo foi considerado adequado para ser utilizado em outras lajes.

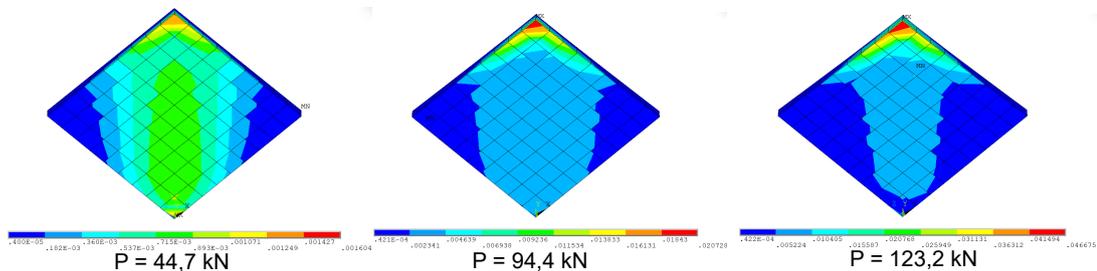


Figura 6.8 – Deformações no Concreto - Laje S1  
(fonte: o autor)

A Figura 6.9 apresenta os gráficos de carga aplicada x deslocamento no centro do vão para as 12 lajes não confinadas estudadas. As lajes com sinal de \* no título não tiveram seus resultados experimentais gravados até a ruptura por escolha dos autores, portanto seus resultados só podem ser comparados parcialmente.

A tabela 6.3 apresenta os resultados de carga máxima resistida para comparação entre resultados experimentais e numéricos, onde  $Q_{u,num}$  é carga máxima suportada pelo modelo numérico e  $Q_{u,exp}$  a carga máxima suportada pelo modelo experimental.

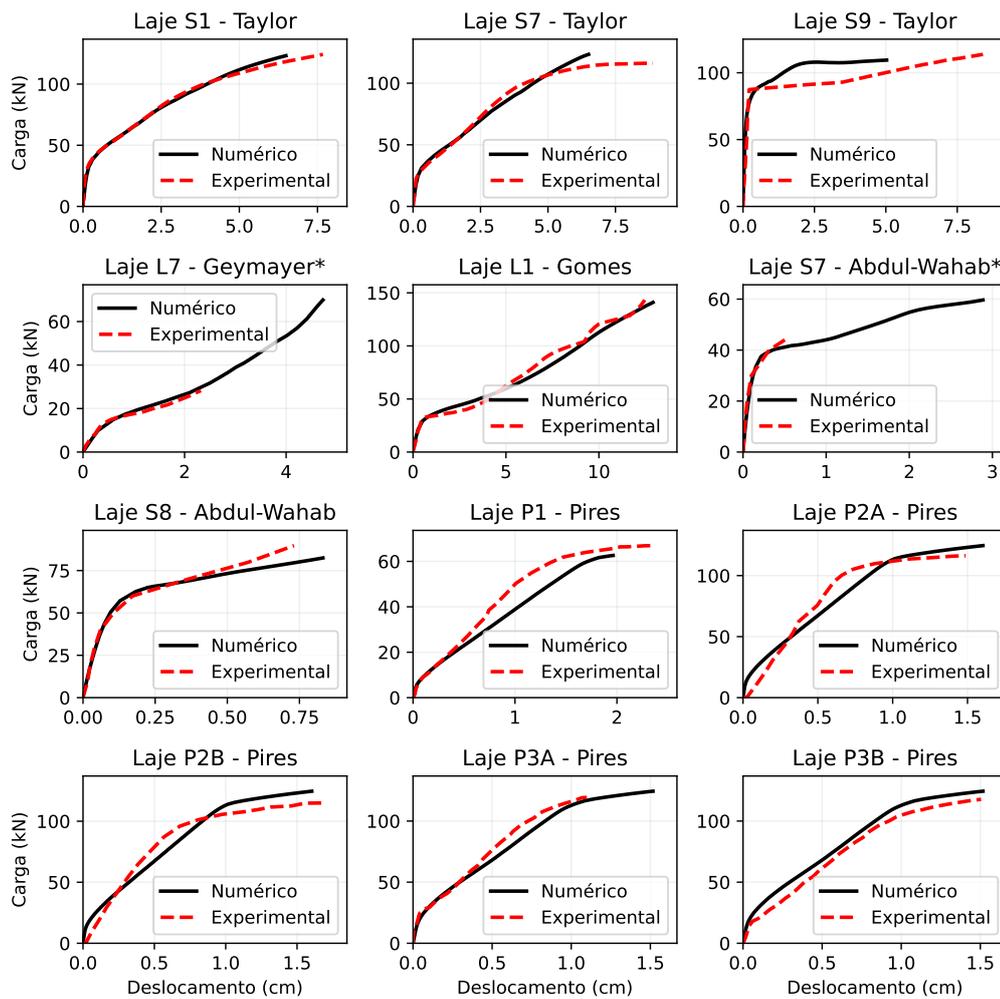


Figura 6.9 – Comparação de resultados de lajes não confinadas  
(fonte: o autor)

Tabela 6.3 – Cargas de ruptura de lajes não confinadas

<b>Lajes sem confinamento lateral</b>					
<b>Referência</b>	<b>Laje</b>	<b>Qu,exp kN</b>	<b>Qu,num kN</b>	<b>exp/num -</b>	<b>Erro %</b>
<b>Taylor (1966)</b>	S1	124,27	123,2	1,01	0,90
	S7	116,19	123,38	0,94	5,8
	S9	113,74	109,46	1,04	3,9
<b>Geymayer (1967)</b>	Laje 7	63,02	69,91	0,90	9,9
<b>Gomes (2012)</b>	L1	143,27	140,99	1,02	1,6
<b>Abdul-Wahab (2000)</b>	S7	65,00	59,65	1,09	9,0
	S8	89,72	82,44	1,09	8,8
<b>Pires (2003)</b>	P1	66,94	62,61	1,07	6,9
	P2A	116,31	124,58	0,93	6,6
	P2B	114,93	124,58	0,92	7,7
	P3A	119,31	124,42	0,96	4,1
	P3B	117,79	124,42	0,95	5,3
<b>Média</b>				0,993	
<b>Desvio Padrão</b>				0,067	

(fonte: o autor)

Ao analisar os resultados apresentados na Figura 6.9 e na Tabela 6.3, percebe-se que em geral o modelo numérico foi capaz de representar aproximadamente o comportamento das lajes estudadas. Algumas diferenças maiores, entretanto, podem ser notadas, como na laje S9 de Taylor, Maher e Hayes (1966), que, por possuir uma taxa de armadura muito baixa, acaba gerando uma instabilidade no modelo numérico no momento da sua fissuração, devido à brusca perda de rigidez.

Outro fator que ajuda a explicar as diferenças entre o modelo numérico e os resultados experimentais é a variabilidade natural dos experimentos, evidenciada pelos resultados das lajes P2A e P2B de Pires (2003), bem como pelas P3A e P3B, que são idênticas em geometria e materiais de forma que o modelo numérico resulta igual para os grupos, mas os resultados experimentais apresentam diferenças entre si.

Considerando-se os argumentos apresentados, o modelo numérico foi considerado como satisfatório e validado para determinação da carga de ruptura de lajes não confinadas.

## 6.2 LAJES COM CONFINAMENTO LATERAL

Para estudo das lajes confinadas lateralmente, foram separados 10 ensaios experimentais provenientes dos trabalhos de Keenan (1969) e Rankin et al. (1991). Todas as lajes estudadas nessa etapa são quadradas e os critérios utilizados para definição dos materiais e malha foram os mesmos das lajes sem confinamento lateral.

As tabelas 6.4 e 6.5 trazem os dados de geometria, materiais e armadura das lajes confinadas lateralmente que foram utilizados nos modelos numéricos. Todas as lajes possuem armadura negativa igual à positiva, com exceção das lajes S1R que não possui armadura e a laje S7R que possui apenas armadura positiva.

Tabela 6.4 – Dados das armaduras das lajes experimentais com confinamento lateral

<b>Lajes com confinamento lateral</b>									
<b>Referência</b>	<b>Laje</b>	<b>Geometria</b>				<b>Armaduras</b>			
		lx cm	ly cm	h cm	c cm	Asx cm <sup>2</sup>	Sx cm	Asy cm <sup>2</sup>	Sy cm
<b>Keenan (1969)</b>	3S1	183	183	7,62	1,91	0,946	15,24	0,946	15,24
	3S3	183	183	7,62	1,91	0,946	15,24	0,946	15,24
	3S4	183	183	7,62	1,91	0,946	15,24	0,946	15,24
<b>Rankin (1991)</b>	S1R	95	95	5	-	-	-	-	-
	S2R	95	95	5	1,2	0,129	10	0,129	10
	S3R	95	95	5	2,5	0,392	10	0,392	10
	S4R	95	95	5	1,2	0,258	10	0,258	10
	S5R	95	95	5	2,5	0,784	10	0,784	10
	S6R	95	95	5	1,2	0,129	10	0,129	10
	S7R	95	95	5	1,2	0,258	10	0,258	10

(fonte: o autor)

Tabela 6.5 – Dados dos materiais das lajes experimentais com confinamento lateral

<b>Lajes com confinamento lateral</b>							
<b>Referência</b>	<b>Laje</b>	<b>Materiais</b>					
		fcm kN/cm <sup>2</sup>	Ec kN/cm <sup>2</sup>	fct kN/cm <sup>2</sup>	fy kN/cm <sup>2</sup>	fu kN/cm <sup>2</sup>	Es kN/cm <sup>2</sup>
<b>Keenan (1969)</b>	3S1	2,45	-	-	34,2	46,19	21000
	3S3	2,84	-	-	34,2	46,19	21000
	3S4	2,27	-	-	34,2	46,19	21000
<b>Rankin (1991)</b>	S1R	4,23	-	-	-	-	-
	S2R	3,7	-	-	51	-	21000
	S3R	4,07	-	-	51	-	21000
	S4R	3,04	-	-	51	-	21000
	S5R	3,56	-	-	51	-	21000
	S6R	3,88	-	-	51	-	21000
	S7R	3,45	-	-	51	-	21000

(fonte: o autor)

A Figura 6.10 apresenta os gráficos de carga x deslocamento no centro do vão das lajes confinadas, para comparação entre resultados do modelo numérico com experimentais. Keenan (1969) não apresentou os diagramas em seu trabalho, portanto apenas os resultados do modelo numérico foram apresentados. No geral, os resultados concordaram bem, com uma leve tendência do modelo numérico apresentar uma rigidez maior que o resultado experimental.

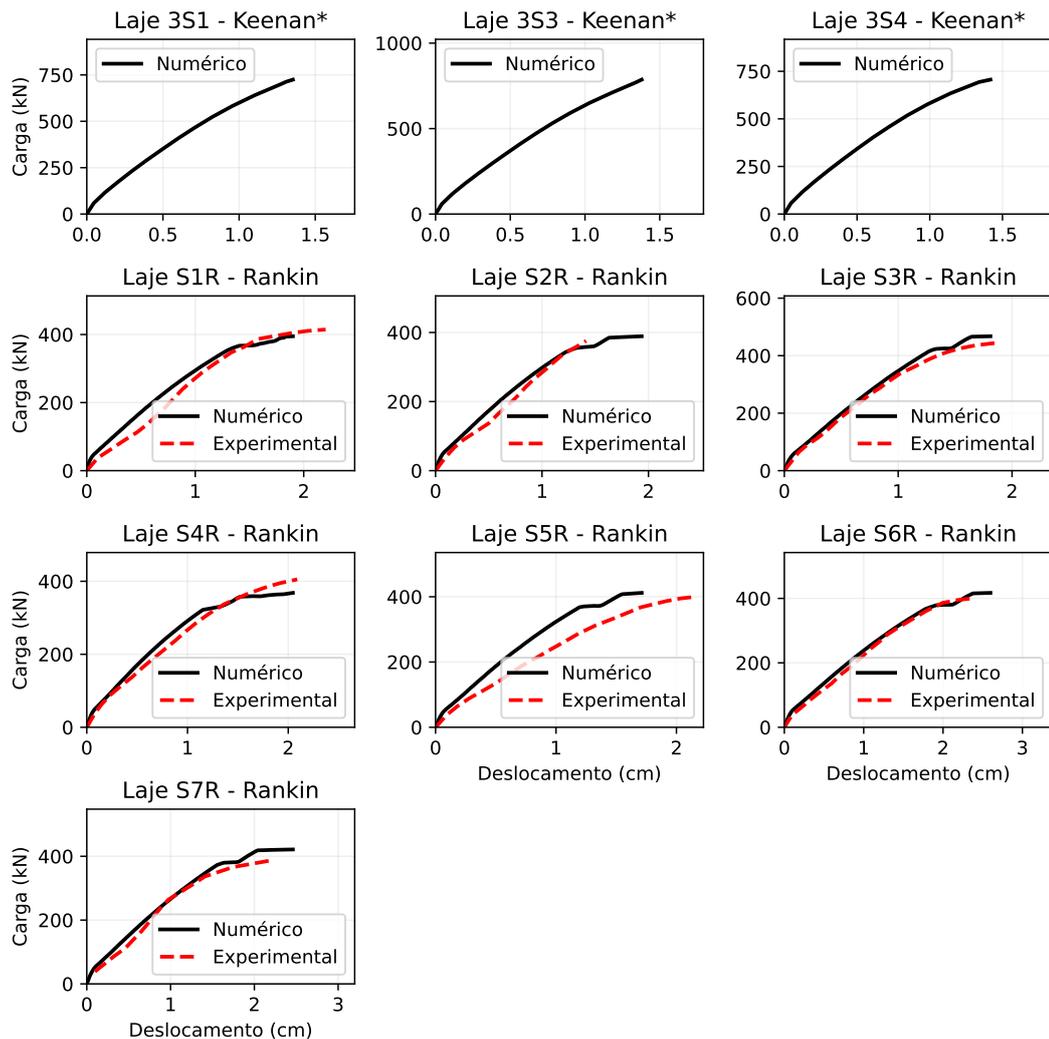


Figura 6.10 – Comparação dos modelos numéricos com resultados experimentais de lajes confinadas (fonte: o autor)

A tabela 6.6 apresenta a comparação de resultados obtidos experimentalmente com os obtidos pelo modelo numérico do ANSYS. No geral, os resultados de carga de ruptura concordaram de forma razoavelmente precisa, demonstrados a partir da média da razão entre o modelo experimental e o numérico de 1,001, e desvio padrão de 0,06.

Em termos de previsão da carga de ruptura, o maior erro gerado pelo modelo numérico foi para a laje S4R de Rankin et al. (1991) que apresentou uma diferença de 10,0% em relação ao resultado experimental.

Tabela 6.6 – Comparativo entre modelo numérico e resultado experimental para lajes com confinamento lateral

<b>Lajes com confinamento lateral</b>					
<b>Referência</b>	<b>Laje</b>	<b>Qu,exp</b> <i>kN</i>	<b>Qu,num</b> <i>kN</i>	<b>exp/num</b> -	<b>Erro</b> %
<b>Keenan (1969)</b>	3S1	748,11	724,53	1,03	3,3
	3S3	798,91	786,44	1,02	1,6
	3S4	741,18	706,10	1,05	5,0
<b>Rankin (1991)</b>	S1R	414,58	394,91	1,05	5,0
	S2R	375,67	389,07	0,97	3,4
	S3R	445,46	467,51	0,95	4,7
	S4R	405,26	368,26	1,10	10,0
	S5R	398,50	411,93	0,97	3,3
	S6R	399,15	417,18	0,96	4,3
	S7R	385,64	421,31	0,92	8,5
Média				1,001	
Desvio Padrão				0,058	

### 6.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Após a verificação do comportamento do modelo numérico, é possível afirmar que os modelos de materiais e elementos escolhidos, bem como os parâmetros da análise não linear foram capazes de reproduzir, dentro de certo nível de fidelidade, o comportamento das lajes de concreto armado estudadas, com e sem confinamento lateral.

A respeito das malhas de elementos finitos, o estudo concluiu que elementos com 10 cm na direção do plano de laje e 1 cm na direção da espessura são suficientes para simular aproximadamente o comportamento de lajes considerando ou não o efeito confinante de elementos adjacentes.

Devido a heterogeneidade e variabilidade natural dos materiais envolvidos, torna-se, na prática, impossível para um modelo numérico prever corretamente a carga de ruptura de elementos estruturais. Dessa forma e dados os resultados apresentados, considerou-se o *script* desenvolvido capaz de prever a carga de ruptura de lajes maciças de concreto armado, com e sem confinamento lateral para realização da análise de confiabilidade.

Assim, o estudo avançou para a análise de lajes dimensionadas de acordo com as normas brasileiras. No entanto, a consideração de confinamento perfeito não pôde mais ser adotada, uma vez que não se conhece *a priori* a capacidade de confinamento dos elementos adjacentes às lajes dos edifícios. Dessa forma, em vez de considerar lajes isoladas, o estudo prosseguiu com a análise de panos de lajes.

## 7 ANÁLISE DOS EFEITOS DO CONFINAMENTO LATERAL EM LAJES PROJETADAS DE ACORDO COM A NBR6118

Com o objetivo de estudar o confinamento lateral nas lajes de um pavimento típico de um edifício de concreto armado, imaginou-se uma planta estrutural igual a da Figura 7.1, em que todas as lajes têm as mesmas dimensões. A laje de interesse para este trabalho é a laje L105, por ter elementos de concreto em torno de todo o seu contorno, e portanto estar completamente confinada.

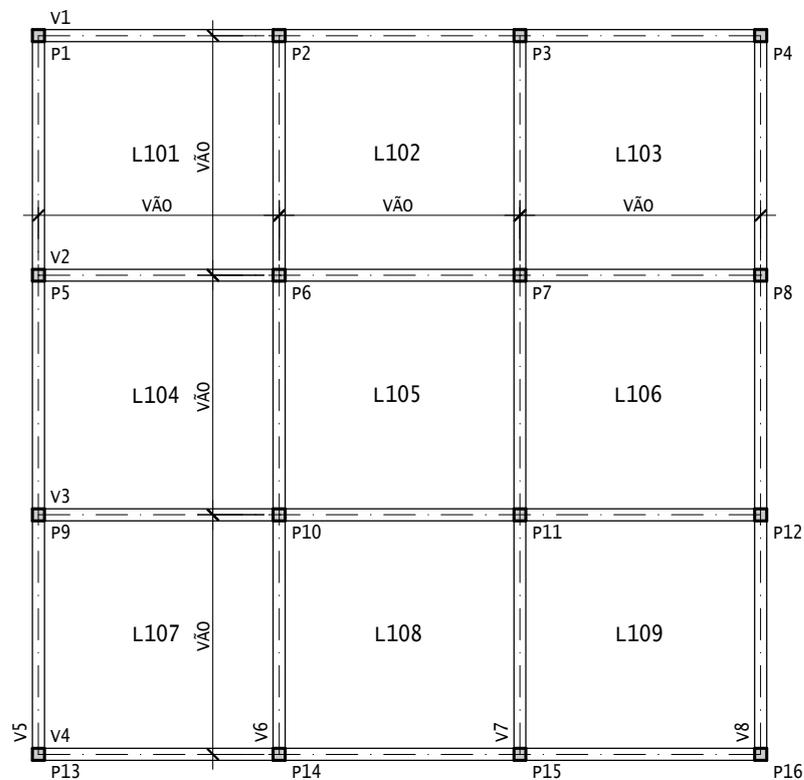


Figura 7.1 – Planta de formas do pavimento estudado.  
(fonte: o autor)

No total, a laje L105 foi dimensionada 27 vezes de acordo com o processo descrito no Capítulo 3, com os esforços atuantes determinados pela Equação 3.28. Entre os casos de dimensionamento, a resistência característica à compressão ( $f_{ck}$ ), o vão e a altura das lajes foram variados. Os vãos escolhidos foram de 400, 500 e 600 cm, o  $f_{ck}$  variou entre os valores de 30, 40 e 50 MPa e as alturas das lajes foram adotadas como números inteiros para que suas esbeltezes (razão entre vão e altura) ficassem próximas de 50, 45 e 40 - que são valores próximos dos praticados por projetistas para lajes maciças. Como a laje de interesse é a laje central de um pavimento onde todas as lajes vizinhas possuem a mesma altura, as lajes foram calculadas como engastadas nos quatro bordos.

As cargas verticais adotadas foram o peso próprio dos elementos de concreto mais  $1 \text{ kN/m}^2$  de carga permanente e  $5 \text{ kN/m}^2$  de carga variável, que é a carga correspondente a salas de arquivos, quadras esportivas e salões de dança de acordo com a ABNT (2019). A escolha da carga variável teve o objetivo de tentar evitar que as armaduras resultantes do processo de cálculo sejam as armaduras mínimas exigidas pela ABNT (2023), fato que acaba influenciando a confiabilidade.

A Tabela 7.1 apresenta os dados de geometria e armadura das 27 variações calculadas, a esbelteza é expressada pelo símbolo  $\lambda$  e as armaduras do vão e dos engastes são representadas pelas siglas  $A_{sv}$  e  $A_{se}$  respectivamente. A nomenclatura dos casos de dimensionamento foi estabelecida de acordo com o código LXX-Y-ZZ, onde XX é o  $f_{ck}$  em MPa, Y o vão em metros e ZZ a altura em centímetros, o símbolo \* indica que a armadura é a mínima exigida pela norma.

Tabela 7.1 – Dados dos casos de dimensionamento para estudo

Caso	$f_{ck}$ MPa	Vão cm	Altura cm	$\lambda$	$A_{sv}$ cm <sup>2</sup> /m	$A_{se}$ cm <sup>2</sup> /m	$\delta_f$ cm	$\delta_{lim}$ cm	$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd1}}$	$W_k$ mm
L30-4-08	30	400	8	50	1,35	1,87	0,33	1,60	0,47	0,00
L40-4-08	40	400	8	50	1,34	1,85	0,28	1,60	0,38	0,00
L50-4-08	50	400	8	50	1,34	1,94	0,24	1,60	0,33	0,00
L30-5-10	30	500	10	50	1,63	2,32	0,46	2,00	0,45	0,00
L40-5-10	40	500	10	50	1,62	2,30	0,38	2,00	0,37	0,00
L50-5-10	50	500	10	50	1,62	2,29	0,33	2,00	0,32	0,00
L30-6-12	30	600	12	50	1,96	2,82	0,62	2,40	0,45	0,00
L40-6-12	40	600	12	50	1,95	2,79	0,50	2,40	0,37	0,00
L50-6-12	50	600	12	50	1,94	2,78	0,44	2,40	0,32	0,00
L30-4-09	30	400	9	44,4	1,17	1,64	0,24	1,60	0,41	0,00
L40-4-09*	40	400	9	44,4	1,19	1,79	0,21	1,60	0,34	0,00
L50-4-09*	50	400	9	44,4	1,38	2,07	0,18	1,60	0,29	0,00
L30-5-11	30	500	11	45,5	1,47	2,10	0,36	2,00	0,42	0,00
L40-5-11	40	500	11	45,5	1,47	2,09	0,30	2,00	0,34	0,00
L50-5-11*	50	500	11	45,5	1,57	2,36	0,26	2,00	0,29	0,00
L30-6-13	30	600	13	46,2	1,81	2,62	0,49	2,40	0,42	0,00
L40-6-13	40	600	13	46,2	1,80	2,60	0,41	2,40	0,35	0,00
L50-6-13	50	600	13	46,2	1,80	2,66	0,36	2,40	0,30	0,00
L30-4-10*	30	400	10	40	1,05	1,58	0,19	1,60	0,37	0,00
L40-4-10*	40	400	10	40	1,27	1,91	0,16	1,60	0,30	0,00
L50-4-10*	50	400	10	40	1,48	2,21	0,14	1,60	0,26	0,00
L30-5-12	30	500	12	41,7	1,35	1,94	0,29	2,00	0,38	0,00
L40-5-12*	40	500	12	41,7	1,44	2,16	0,24	2,00	0,32	0,00
L50-5-12*	50	500	12	41,7	1,68	2,51	0,21	2,00	0,27	0,00
L30-6-15	30	600	15	40	1,59	2,31	0,34	2,40	0,38	0,00
L40-6-15*	40	600	15	40	1,71	2,56	0,29	2,40	0,31	0,00
L50-6-15*	50	600	15	40	1,99	2,98	0,25	2,40	0,27	0,00

(fonte: o autor)

As lajes foram calculadas para um cobrimento nominal de 20 mm, considerando a CAA II mais a redução permitida pela utilização de resistência do concreto acima do mínimo exigido. As fissuras calculadas não resultaram em valores significativos pois para a combinação frequente de cargas já que nenhum dos 27 casos de dimensionamento apresentou momentos acima do momento de fissuração das lajes levando a tensões muito baixas nas armaduras passivas: um valor máximo de 17,6 MPa foi obtido para o caso L30-6-12.

Como as lajes em pavimentos não possuem uma restrição ao deslocamento lateral completa, o modelo que considera a restrição lateral utiliza 1/4 do pavimento inteiro apresentado na Figura 7.1, a fim de que a rigidez relativa das lajes vizinhas fosse corretamente considerada. A Figura 7.2 apresenta o modelo utilizado para as lajes confinadas. As lajes representadas em vermelho, que são as lajes adjacentes à laje de interesse foram modeladas com uma malha mais grosseira e com material elástico-linear, pois as tensões geradas nelas devido ao confinamento da laje L105 são relativamente baixas, além de não existir interesse em analisá-las. As condições de contorno aplicadas são as de simetria nas bordas marcadas em rosa na imagem e apoio vertical - restrição do deslocamento - ao longo de todas as vigas do pavimento, destacadas em verde na imagem.

Ressalta-se que o modelo utilizado incorpora o efeito do confinamento gerado apenas pelas lajes adjacentes, desprezando completamente os acréscimos de rigidez que poderiam ser gerados pelas vigas e pilares do pavimento.

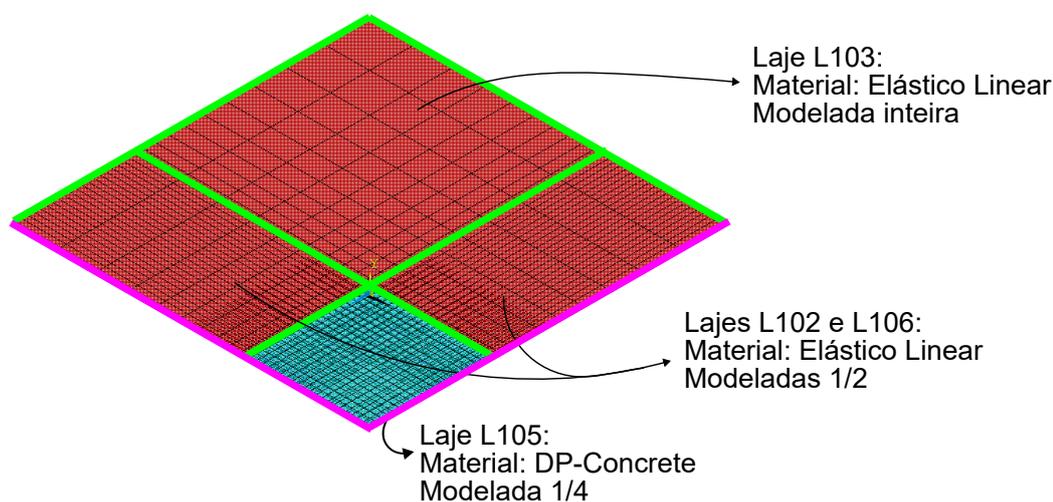


Figura 7.2 – Modelo numérico de lajes confinadas  
(fonte: o autor)

A fim de conduzir o estudo, um modelo que despreza o efeito do confinamento também foi gerado. Como a laje L105 é uma laje engastada nos quatro bordos, foi necessário o acoplamento dos deslocamentos horizontais nos nós dos apoios a fim de reproduzir essa característica, fazendo com que os bordos apoiados fiquem livres para se deslocar no plano porém não possam girar. O acoplamento dos deslocamentos de nós é feito no ANSYS APDL através do comando CP. A

Figura 7.3 traz em detalhe o modelo utilizado para as lajes sem confinamento lateral, a linha rosa representa as condições de contorno de simetria e a linha azul as condições de contorno de apoio vertical e impedimento do giro.

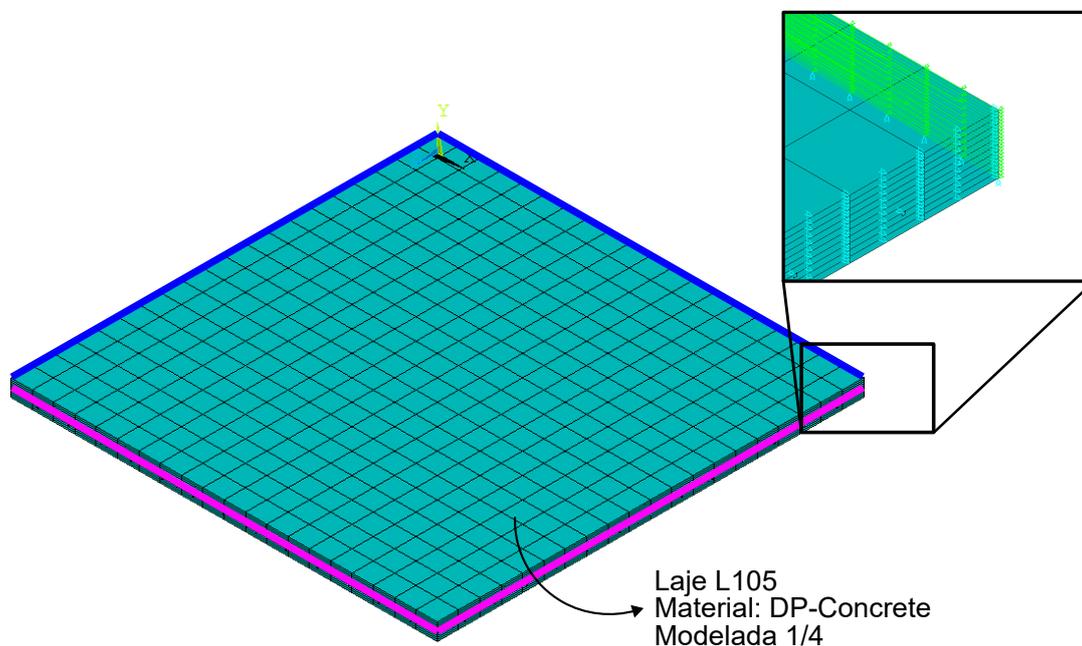


Figura 7.3 – Modelo numérico de lajes engastadas  
(fonte: o autor)

Ao comparar os modelos com confinamento lateral e sem ele, fica claro que a condição de engaste no modelo confinado existe pela continuidade dos elementos com as lajes vizinhas, porém, esse engaste possui uma certa rigidez que não é a rigidez perfeita utilizada no modelo sem confinamento lateral. Apesar disso ser uma diferença que pode influenciar as cargas de ruptura calculadas, o modelo confinado aproxima melhor o comportamento de um plano de lajes por modelar o plano inteiro e considerar um engastamento com certa flexibilidade.

A partir da definição dos modelos, o estudo foi dividido em três partes: a primeira, determinística, tem o objetivo de estudar o efeito do confinamento lateral nas lajes dimensionadas segundo a NBR 6118 usando os modelos numéricos desenvolvidos. Na segunda seção a análise de confiabilidade dos casos de dimensionamento foi realizada e na terceira o estudo paramétrico, com discussão dos resultados.

O estudo de confiabilidade das lajes foi conduzido de acordo com a equação estado limite (7.1), onde  $R$  é a função responsável por retornar a carga de ruptura das lajes, que pode ser dada pelos modelos numéricos, pelas teorias analíticas apresentadas ou pelas superfícies de resposta. As variáveis aleatórias foram adotadas de acordo com os trabalhos de Santiago (2019) e Costa, Santiago e Beck (2023) e estão apresentadas na Tabela 7.2, onde o sub-índice  $n$  representa o valor nominal da variável.

$$G(X) = \theta_r * R(f_c, f_y, h, c) - \theta_s * (G + Q) \quad (7.1)$$

onde:

$f_c$  é a resistência à compressão do concreto;

$f_y$  é a tensão de escoamento do aço;

$h$  é a altura da laje;

$c$  é o cobrimento das armaduras;

$\theta_s$  é o erro de modelo da sollicitação;

$\theta_r$  é o erro de modelo da resistência:  $\theta_{r1}$  para lajes não confinadas e  $\theta_{r2}$  para lajes confinadas;

$G$  é a carga permanente;

$Q$  é a carga acidental.

Tabela 7.2 – Variáveis aleatórias utilizadas na análise de confiabilidade

Símbolo	$\mu$	$\sigma$	Distribuição de probabilidade	Fonte
$f_c$	Ver Tabela 7.3		Normal	Santiago (2019)
$f_y$	$1,22f_{yk}$	$0,04\mu_{f_y}$	Normal	Santiago (2019)
$h$	$h_n$	$0,4 + 0,06h_n$	Normal	Santiago (2019)
$c$	$c_n$	$1cm$	Normal	Santiago (2019)
$\theta_s$	1,00	0,20	Log-normal	Santiago (2019)
$\theta_{r1}$	1,001	0,058	Normal	Mirza e Skrabek (1992)
$\theta_{r2}$	0,993	0,067	Normal	Mirza e Skrabek (1992)
$G$	$1,06G_n$	$0,12\mu_{G_n}$	Normal	Santiago (2019)
$Q$	$0,92Q_n$	$0,25\mu_{Q_n}$	Gumbel	Costa, Santiago e Beck (2023)

(fonte: o autor)

A estimativa de erro do modelo de resistência foi feita de acordo com as recomendações de Mirza e Skrabek (1992), que afirmam que a relação entre os resultados experimentais e teóricos é afetada pelo modelo computacional, pela variabilidade das variáveis aleatórias e pela variabilidade inerente ao processo experimental, e é dada pela Equação 7.2.

$$V_{\frac{EXP}{MOD}}^2 = V_{MODELO}^2 + V_{LOTE}^2 + V_{ENSAIO}^2 \quad (7.2)$$

onde:

$V_{\frac{EXP}{MOD}}$  é o coeficiente de variação da razão entre resultados experimentais e numéricos;

$V_{MODELO}$  é o coeficiente de variação do erro gerado pelo modelo utilizado;

$V_{LOTE}$  é o coeficiente de variação dos resultados devido as variáveis do sistema;

$V_{ENSAIO}$  é o coeficiente de variação dos resultados experimentais.

Neste trabalho, devido à falta de informações mais precisas, as variáveis  $V_{LOTE}$  e  $V_{ENSAIO}$  foram conservadoramente adotadas igual a 0, fazendo com que o erro do modelo ( $V_{MODELO}$ ) seja igual ao valor de  $V_{\frac{EXP}{MOD}}$  calculados nas tabelas 6.6 e 6.3 para lajes confinadas e não confinadas, respectivamente.

Santiago (2019) coletou e compilou mais de 39.000 amostras de concreto produzidas no Brasil para geração de distribuições de probabilidade. Entre suas conclusões, o autor ressaltou a diferença entre os valores de média e coeficiente de variação das distribuições de acordo com a classe do concreto analisado, por isso, recomendou diferentes parâmetros conforme a classe do material. A Tabela 7.3 apresenta as distribuições de probabilidade para a resistência a compressão do concreto para as diferentes classes de concreto analisadas.

Tabela 7.3 – Distribuições de probabilidade para a resistência a compressão do concreto conforme a classe do material

Classe do Concreto	Distribuição de Probabilidade	$\mu$	Coefficiente de Variação
C20	Normal	$1,30f_{ck}$	0,20
C25	Normal	$1,25f_{ck}$	0,17
C30	Normal	$1,22f_{ck}$	0,15
C35	Normal	$1,19f_{ck}$	0,13
C40	Normal	$1,16f_{ck}$	0,11
C45	Normal	$1,13f_{ck}$	0,10
C50	Normal	$1,11f_{ck}$	0,10
C55	Normal	$1,10f_{ck}$	0,09
C60	Normal	$1,10f_{ck}$	0,09

(fonte: Santiago (2019))

## 7.1 ESTUDO DO CONFINAMENTO LATERAL

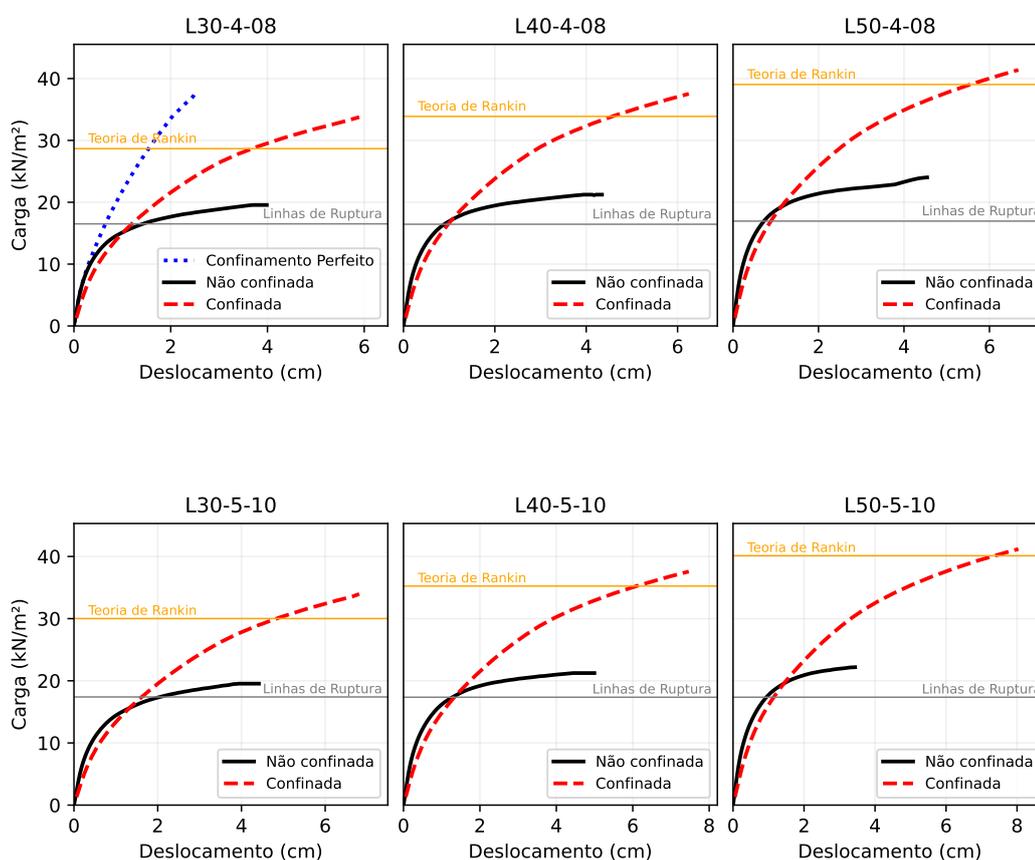
Inicialmente, com o intuito de estudar as diferenças do comportamento mecânico de lajes de concreto armado confinadas ou não, os 27 casos de dimensionamento foram analisados com os valores médios das variáveis aleatórias apresentadas na Tabela 7.2. Esse estudo contemplou apenas a resistência da laje, portanto apenas as variáveis aleatórias que fazem parte da função  $R$  da equação 7.1 foram utilizadas.

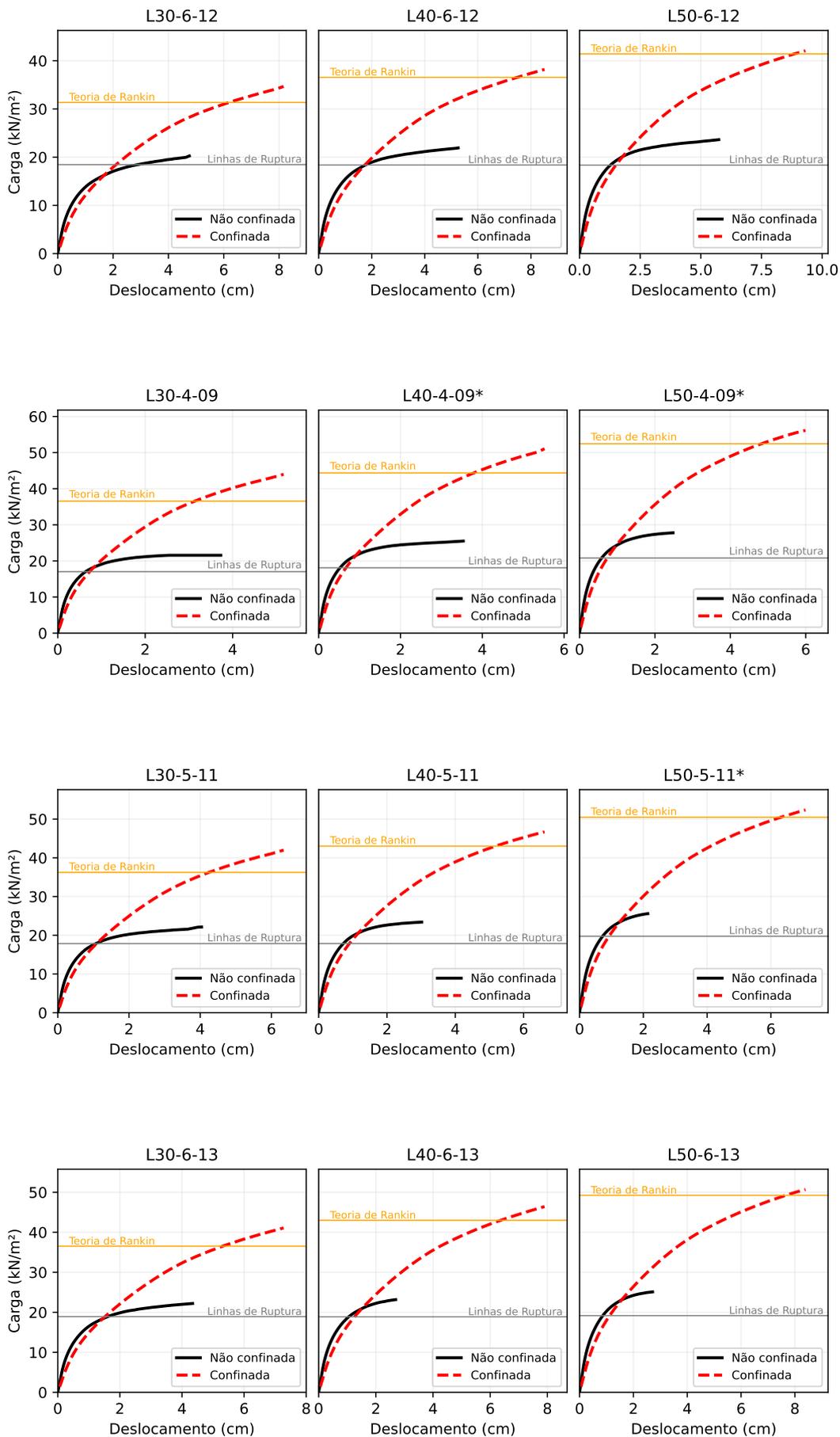
Cada laje foi submetida à simulação em quatro modelos distintos: a teoria analítica das linhas de ruptura de Johansen (1972), a teoria analítica proposta por Rankin et al. (1991), além dos dois modelos numéricos desenvolvidos no *software* ANSYS. Enquanto os modelos numéricos permitiram uma análise mais detalhada do comportamento das lajes, avaliando tensões e deslocamentos em todas as direções e fases de carregamento, os resultados analíticos foram

utilizados como referência para comparação com os resultados numéricos, visando aumentar a confiança nos mesmos.

A primeira comparação foi realizada com base no comportamento mecânico das lajes, considerando a carga resistida e o deslocamento vertical no ponto central dos vãos. A Figura 7.4 apresenta os gráficos que relacionam a carga distribuída aplicada com o deslocamento para os 27 casos analisados. Nesses gráficos, os modelos numéricos são representados por curvas, enquanto as previsões das teorias analíticas são mostradas por meio de retas horizontais, indicando a carga de ruptura estimada por cada uma delas. Além disso, no gráfico do caso L30-4-8 foi adicionada uma curva representando o comportamento da laje considerando um confinamento perfeito - aplicando-se as mesmas condições de contorno que reproduziram os resultados experimentais, a partir da curva nota-se a influência da rigidez do confinamento no comportamento das lajes confinadas e a importância de estimá-la corretamente.

A partir da análise da figura, é evidente um notável aumento na resistência das lajes quando o efeito do confinamento gerado pelas lajes adjacentes é incorporado ao modelo. Observa-se também que as lajes confinadas exibem uma rigidez ligeiramente menor nos estágios iniciais de carregamento, devido ao engastamento perfeito considerado no modelo não confinadas. No entanto, à medida que o carregamento avança e as fissuras se iniciam, as lajes confinadas demonstram uma degradação da rigidez consideravelmente inferior às lajes não confinadas.





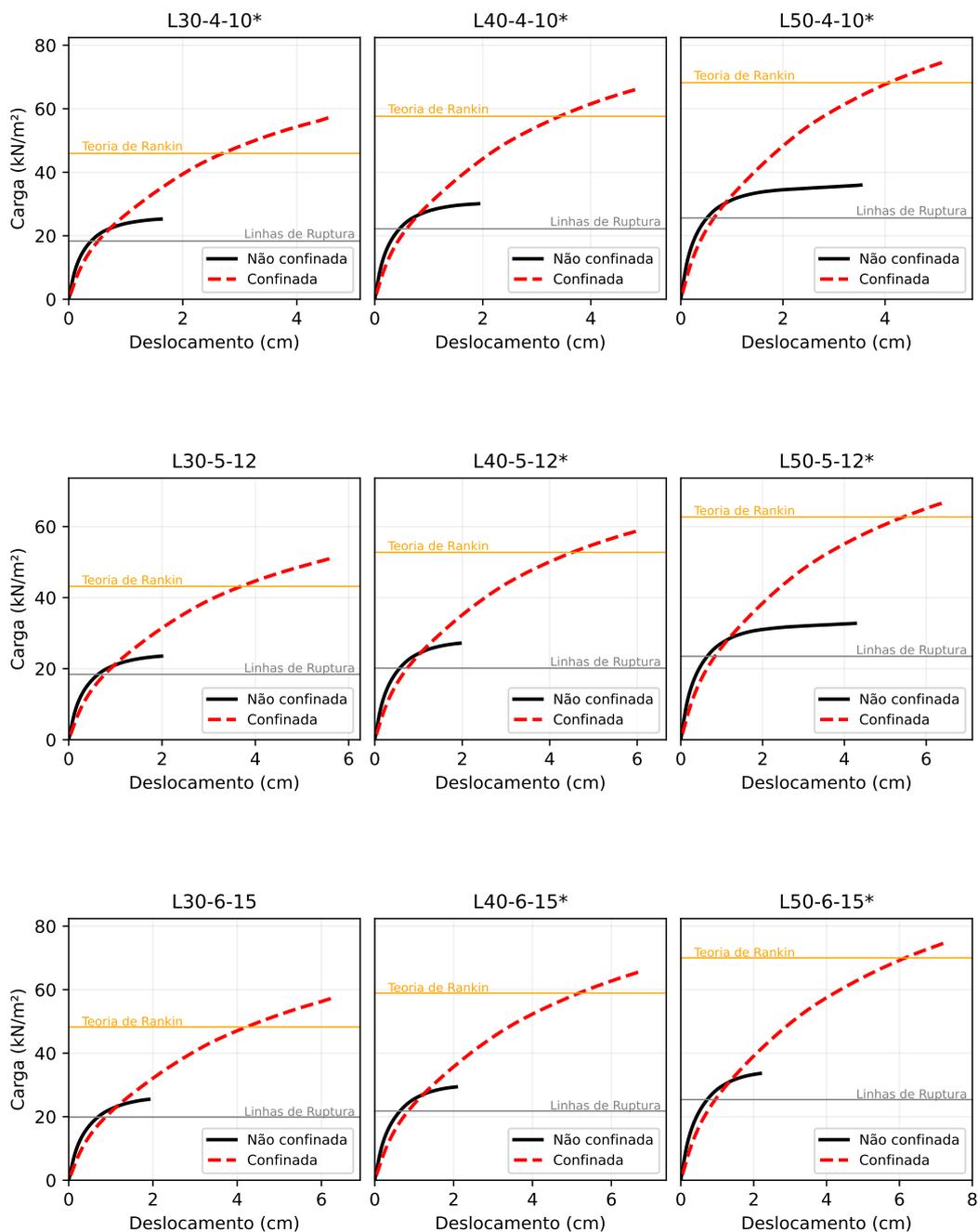


Figura 7.4 – Comparação de comportamento mecânico devido ao confinamento lateral

(fonte: o autor)

Em relação às teorias analíticas comparadas ao modelo numérico, nota-se uma considerável correlação nos resultados para lajes confinadas e também não confinadas. Em todos os casos analisados as teorias analíticas resultaram em cargas de ruptura menores que os modelos numéricos, resultados esperados visto que por serem mais simples tendem a ser mais conservadoras.

A tabela 7.4 exibe os resultados das cargas de ruptura dos 27 casos, calculadas de acordo com diferentes métodos, incluindo a Teoria das Linhas de Ruptura (TLR), o Modelo Numérico Não

Confinado ( $M_{NC}$ ), a abordagem de Rankin et al. (1991), e o Modelo Numérico Confinado ( $M_{CONF}$ ), além das respectivas razões entre esses resultados. A análise dos dados na tabela revela que os modelos numéricos apresentaram, em média, um aumento de 97% na carga última resistente quando o confinamento foi considerado, enquanto as teorias analíticas indicaram um aumento médio de 131%. O Apêndice C deste trabalho apresenta o cálculo passo a passo para obtenção da carga de ruptura do caso L30-4-08 de acordo com a teoria de Rankin et al. (1991).

Considerando diferentes faixas de esbelteza, os casos com  $\lambda$  próximo de 40 obtiveram um aumento médio das cargas de ruptura de 118,8%, valor que caiu para 98,3% para  $\lambda$  próximos de 45 e 74,0% em valores próximos a 50, o que evidencia que os efeitos do confinamento lateral são maiores em estruturas menos esbeltas.

Tabela 7.4 – Comparação de resultados determinísticos entre lajes confinadas e não confinadas

<b>Caso</b>	<b>TLR</b> <i>kN</i>	$M_{NC}$ <i>kN</i>	$\frac{M_{NC}}{TLR}$	<b>Rankin</b> <i>kN</i>	$M_{CONF}$ <i>kN</i>	$\frac{M_{CONF}}{Rankin}$	$\frac{Rankin}{TLR}$	$\frac{M_{CONF}}{M_{NC}}$
<b>L30-4-08</b>	264,1	312,9	1,18	458,9	540,2	1,18	1,74	1,73
<b>L40-4-08</b>	263,1	339,6	1,29	542,2	600,5	1,11	2,06	1,77
<b>L50-4-08</b>	271,2	384,3	1,42	624,7	662,3	1,06	2,30	1,72
<b>L30-5-10</b>	435,0	514,4	1,18	750,3	849,0	1,13	1,73	1,65
<b>L40-5-10</b>	433,9	552,9	1,27	881,0	939,5	1,07	2,03	1,70
<b>L50-5-10</b>	434,0	554,6	1,28	1003,1	1029,6	1,03	2,31	1,86
<b>L30-6-12</b>	664,2	729,1	1,10	1128,4	1248,4	1,11	1,70	1,71
<b>L40-6-12</b>	661,5	789,2	1,19	1315,8	1375,2	1,05	1,99	1,74
<b>L50-6-12</b>	660,7	850,7	1,29	1491,0	1514,5	1,02	2,26	1,78
<b>L30-4-09</b>	272,3	350,7	1,29	585,1	704,0	1,20	2,15	2,01
<b>L40-4-09*</b>	289,5	408,0	1,41	709,9	817,2	1,15	2,45	2,00
<b>L50-4-09*</b>	332,9	444,6	1,34	839,1	898,5	1,07	2,52	2,02
<b>L30-5-11</b>	446,3	553,4	1,24	906,1	1050,0	1,16	2,03	1,90
<b>L40-5-11</b>	446,6	585,1	1,31	1075,6	1168,0	1,09	2,41	2,00
<b>L50-5-11*</b>	493,6	639,4	1,30	1261,7	1309,3	1,04	2,56	2,05
<b>L30-6-13</b>	681,2	799,3	1,17	1314,9	1479,0	1,12	1,93	1,85
<b>L40-6-13</b>	679,2	834,0	1,23	1548,0	1670,9	1,08	2,28	2,00
<b>L50-6-13</b>	689,9	903,7	1,31	1772,6	1824,9	1,03	2,57	2,02
<b>L30-4-10*</b>	293,5	404,1	1,38	735,2	922,7	1,26	2,51	2,28
<b>L40-4-10*</b>	355,1	481,6	1,36	922,0	1063,0	1,15	2,60	2,21
<b>L50-4-10*</b>	409,8	575,6	1,40	1091,3	1198,7	1,10	2,66	2,08
<b>L30-5-12</b>	460,1	588,4	1,28	1079,4	1282,1	1,19	2,35	2,18
<b>L40-5-12*</b>	504,4	679,2	1,35	1319,1	1474,3	1,12	2,62	2,17
<b>L50-5-12*</b>	587,2	818,8	1,39	1567,7	1673,6	1,07	2,67	2,04
<b>L30-6-15</b>	715,4	916,9	1,28	1736,9	2073,3	1,19	2,43	2,26
<b>L40-6-15*</b>	784,4	1057,9	1,35	2120,9	2365,1	1,12	2,70	2,24
<b>L50-6-15*</b>	913,6	1210,1	1,32	2520,6	2696,0	1,07	2,76	2,23
Média			1,293			1,109	2,31	1,97

(fonte: o autor)

Contribuindo com a análise dos fatores de influência para o aumento da resistência das lajes, destaca-se também a influência da resistência do concreto  $f_{ck}$ . Enquanto um aumento da esbeltez leva à uma diminuição do efeito do confinamento, o aumento da resistência do concreto contribui positivamente - conforme pode ser visto na Figura 7.5. Esses resultados também foram reportados por Thoma e Malisia (2018).

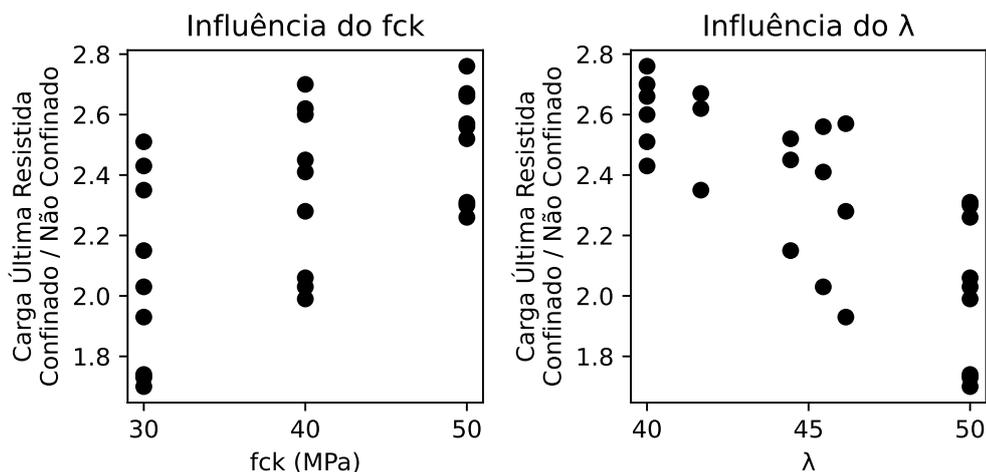


Figura 7.5 – Influência da esbeltez e do  $f_{ck}$  nas cargas de ruptura das lajes confinadas de acordo com os modelos numéricos (fonte: o autor)

Com o propósito de aprimorar o entendimento do confinamento lateral a partir dos modelos de elementos finitos, um estudo das tensões na interface entre a laje de interesse e as lajes adjacentes foi conduzido. Zhu et al. (2021) definiram o fator  $R_{ka}$  para representar a rigidez do confinamento lateral, que é a razão entre a rigidez do confinamento e a rigidez axial da laje confinada, conforme a Equação 7.3.

$$R_{ka} = \frac{K_a l}{E_c A_c} \quad (7.3)$$

onde:

$K_a$  é a rigidez proporcionada pelo confinamento lateral;

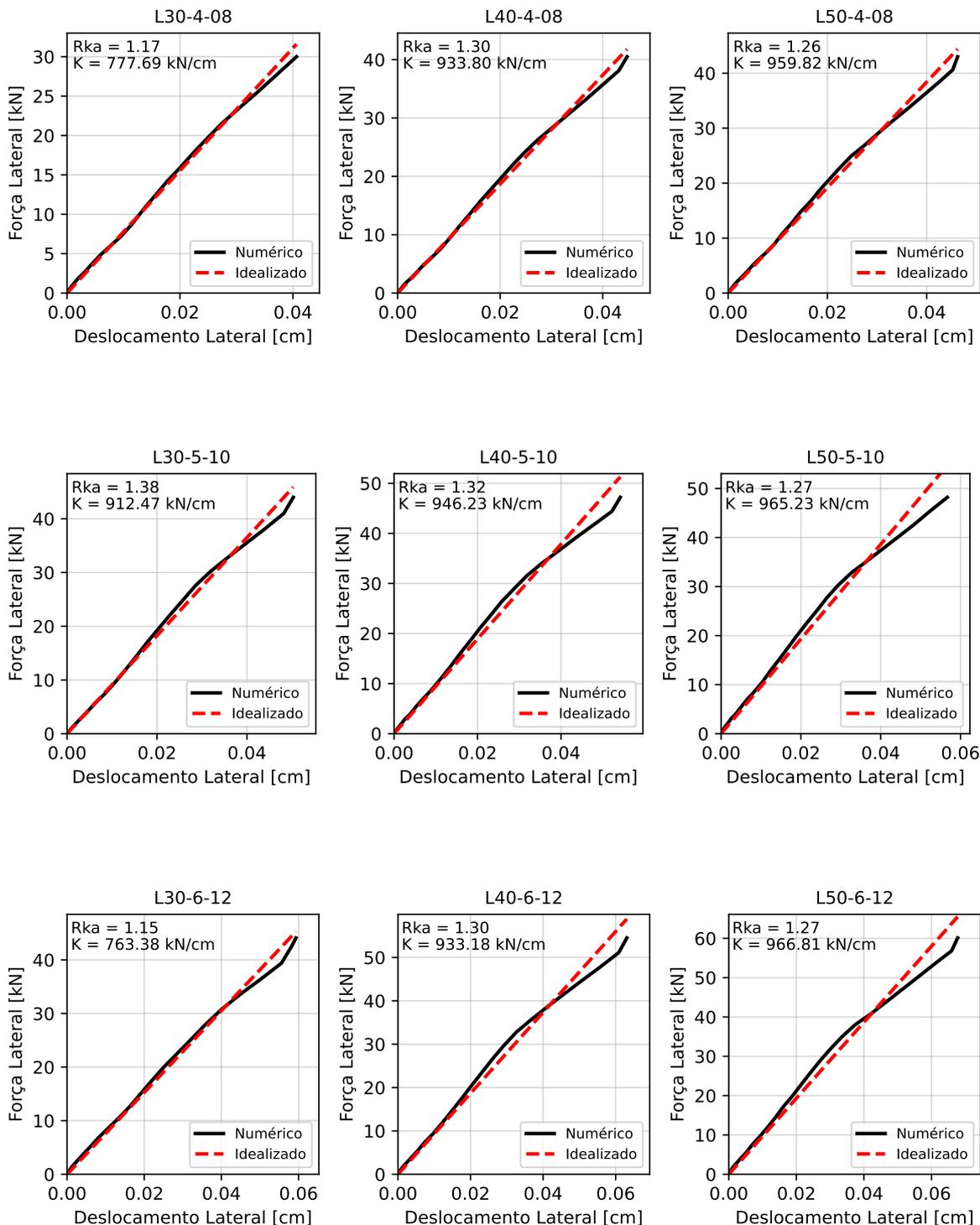
$E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto;

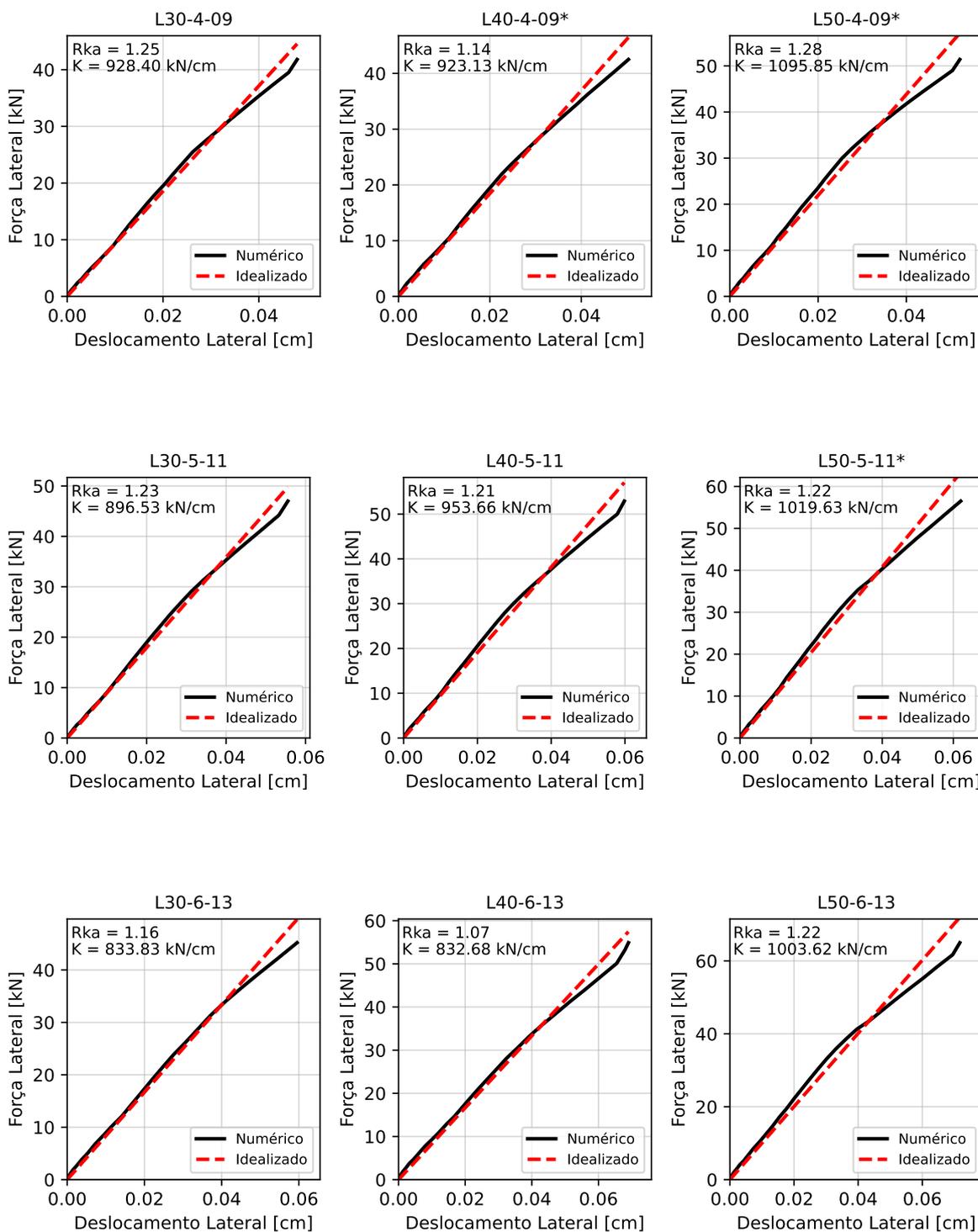
$A_c$  é a área de contribuição para o cálculo da rigidez;

$l$  é o vão da laje.

Assim, para cada um dos casos estudados, as tensões no elemento central do bordo de apoio do modelo que considera o confinamento foram integradas e impressas com o deslocamento lateral, a fim de que a rigidez do confinamento lateral pudesse ser obtida. Esses resultados estão dispostos na Figura 7.6. Conforme pode ser observado, relações praticamente lineares foram

encontradas do início ao fim do carregamento, o que indica que o efeito do confinamento lateral poderia ser substituído por uma mola linear de rigidez equivalente. Os fatores  $R_{ka}$  e uma rigidez de mola ideal também foram calculados a partir da média dos pontos de cada curva.





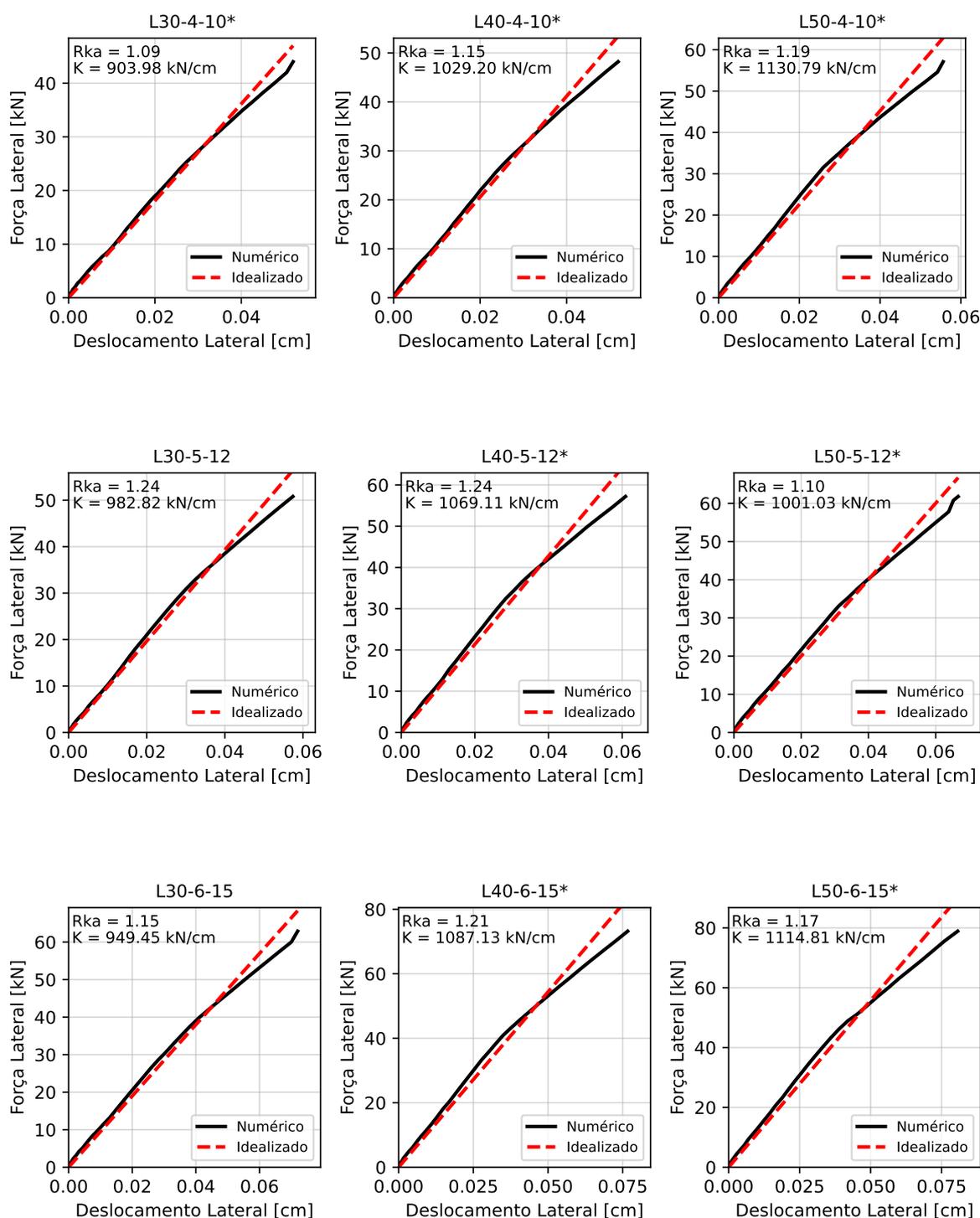


Figura 7.6 – Diagramas de força de confinamento de deslocamento lateral nas lajes estudadas (fonte: o autor)

Os fatores  $R_{ka}$  encontrados variaram entre 1,07 e 1,38, com uma média de 1,21. De acordo com Zhu et al. (2021), esses valores classificariam as lajes como fortemente confinadas ( $R_{ka} \geq 1,00$ ), indicando um nível significativo de capacidade confinante na estrutura periférica. Os autores sugerem que aumentos adicionais no confinamento teriam pouco impacto no aumento da

resistência das lajes. No entanto, Thoma e Malisia (2018) estabelecem um limite mais elevado, estimando-o como 5,0.

A Figura 7.7 ilustra as tensões no concreto na seção de apoio da laje L30-4-08 em diferentes níveis de carregamento, tanto para a situação confinada quanto não confinada, conforme simulado no modelo numérico. A análise da figura revela um aumento significativo nas tensões de compressão na peça a partir da linha neutra, que passa de aproximadamente 1,6 cm no caso não confinado para 3 cm no caso confinado. Esse deslocamento da linha neutra emerge como o principal mecanismo de aumento da força resistente da laje, conforme discutido na seção 2.2. Além disso, destaca-se que o comportamento do modelo numérico confinado está em concordância com os padrões descritos na literatura.

O comportamento observado na Figura 7.7 foi observado em todos os 27 casos estudados. Porém, como o objetivo ao analisá-los foi apenas verificar o comportamento do modelo numérico, somente os resultados do caso L30-4-08 foram apresentados no trabalho.

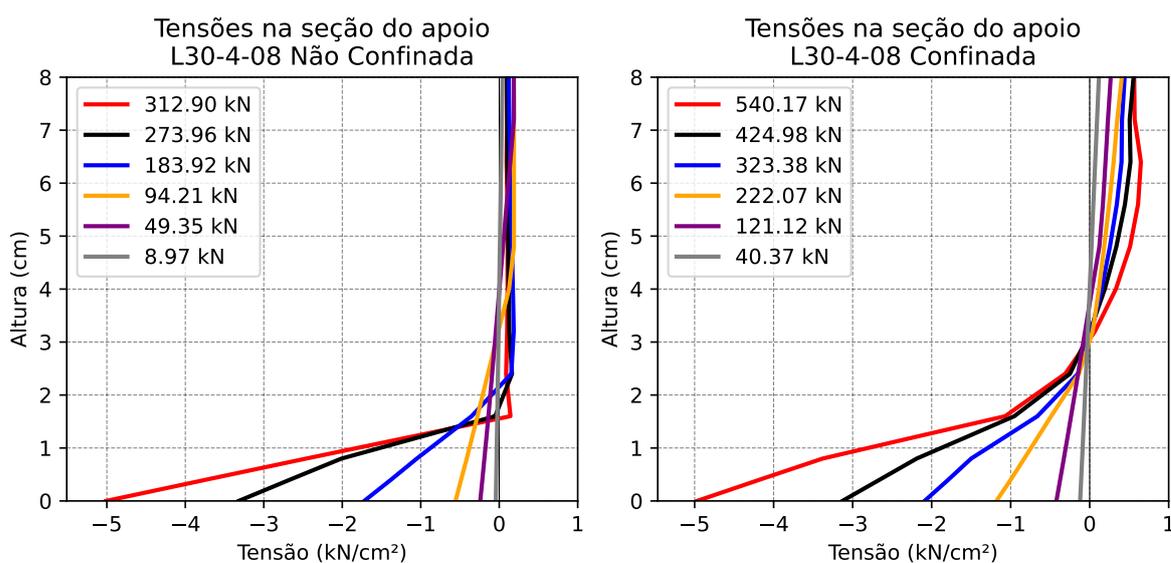


Figura 7.7 – Tensões na seção do apoio - L30-4-08  
(fonte: o autor)

Assim, dada a diferença de comportamento mecânico das lajes devido à presença de elementos adjacentes confinando-as e constatado que o modelo numérico foi capaz de representá-la corretamente, o estudo prosseguiu para a realização da análise de confiabilidade.

## 7.2 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

Devido ao elevado custo computacional do modelo numérico (cerca de 30 minutos a 1 hora para determinar a carga de ruptura de uma laje) a aplicação direta do Método de Monte Carlo descrito

na seção seção 5.1 torna-se inviável. Portanto, a técnica de meta-modelagem da Superfície de Resposta foi utilizada, a fim de substituir o modelo numérico por um polinômio interpolador na equação Equação 7.1 na determinação da resistência da laje R. Todas as superfícies foram geradas com polinômios de segundo grau, essa definição foi feita após alguns testes que demonstraram que esse tipo de polinômio atenderia satisfatoriamente o problema.

Para implementação de um algoritmo que utilize o modelo numérico do ANSYS na avaliação de confiabilidade das lajes foi necessário o desenvolvimento de um código que é capaz de passar parâmetros de entrada da laje para o ANSYS, rodar a análise e recuperar como resposta a carga máxima resistida sem interferência direta do usuário. Por ser de fácil implementação, a linguagem *Python* foi escolhida para a interface. O *script* desenvolvido encontra-se no Apêndice B deste trabalho para consulta.

As superfícies de resposta foram calculadas individualmente para cada caso de dimensionamento, considerando o confinamento ou não, utilizando o planejamento composto central. Esse processo resultou na geração de 54 superfícies de resposta no total. Para avaliar a capacidade dos metamodelos de representar os modelos numéricos, foi utilizado o valor de  $R^2$ , um indicador de ajuste do modelo. Um conjunto adicional de amostras do modelo numérico foi gerado aleatoriamente, de forma que 20% do total de amostras fosse reservado exclusivamente para a validação do modelo, ou seja, essas amostras não foram utilizadas no cálculo das superfícies de resposta. Uma superfície de resposta foi considerada satisfatória quando seu valor de  $R^2$  calculado foi igual ou superior a 0,90, o que indicaria um coeficiente de correlação entre os modelos de pelo menos 0,948.

A Tabela 7.5 apresenta os resultados dos coeficientes  $R^2$  calculados para as 54 superfícies de respostas geradas. Os valores marcados com \* indicam as superfícies que inicialmente não atingiram o valor mínimo desejado de 0,90. Para essas, novos pontos foram adicionados ao treinamento, partindo do planejamento composto central, porém agora com valores de  $\alpha$  de 2,5 e 3 e novos pontos fractais nas distâncias de 1,5 e 2. Os pontos foram adicionados conforme necessidade para cada caso.

Dos coeficientes apresentados na tabela também destaca-se o valor muito superior dos resultados para lajes confinadas, em que não foram obtidos valores menores que 0,99. Apesar da diferença, os valores menores para as lajes não confinadas não foi considerado um problema, visto que foram obtidos valores de  $R^2$  acima do limite mínimo estipulado.

Tabela 7.5 – Coeficientes  $R^2$  das superfícies de resposta geradas

<b>Caso</b>	<b>R<sup>2</sup> Modelo não confinado</b>	<b>R<sup>2</sup> Modelo confinado</b>
<b>L30-4-08</b>	0,9063*	0,9998
<b>L40-4-08</b>	0,9163	0,9999
<b>L50-4-08</b>	0,9359*	1,0000
<b>L30-5-10</b>	0,9775	0,9998
<b>L40-5-10</b>	0,9142	0,9994
<b>L50-5-10</b>	0,9270	0,9997
<b>L30-6-12</b>	0,9913	0,9995
<b>L40-6-12</b>	0,9027	0,9997
<b>L50-6-12</b>	0,9585	0,9999
<b>L30-4-09</b>	0,9438	0,9985
<b>L40-4-09*</b>	0,9803	0,9987
<b>L50-4-09*</b>	0,9898	0,9999
<b>L30-5-11</b>	0,9254	0,9995
<b>L40-5-11</b>	0,9712	0,9998
<b>L50-5-11*</b>	0,9518	0,9999
<b>L30-6-13</b>	0,9614*	0,9977
<b>L40-6-13</b>	0,9187	0,9992
<b>L50-6-13</b>	0,9800	0,9992
<b>L30-4-10*</b>	0,9743	0,9992
<b>L40-4-10*</b>	0,9890	0,9985
<b>L50-4-10*</b>	0,9781	0,9997
<b>L30-5-12</b>	0,9838	0,9999
<b>L40-5-12*</b>	0,9620	0,9999
<b>L50-5-12*</b>	0,9337	0,9995
<b>L30-6-15</b>	0,9887	0,9987
<b>L40-6-15*</b>	0,9733	0,9994
<b>L50-6-15*</b>	0,9796	0,9994

(fonte: o autor)

Conforme citado na seção 5.3, alguns autores sugerem que as superfícies de resposta para avaliação de confiabilidade estrutural devem ser calculadas em torno do ponto de projeto, ou ponto mais provável de falha. Porém, o alto custo computacional para geração de cada polinômio (cerca de 1 dia a 1,5 dias) acabou inviabilizando o modelo adaptativo neste trabalho. Apesar disso, 3 casos foram escolhidos para realização do procedimento, a fim de comparar os resultados. A Tabela 7.6 apresenta os índices de confiabilidade das lajes calculados pelos métodos adaptativo e tradicional.

Conforme observado na tabela, foi identificada uma diferença significativa nos resultados exclusivamente para o caso L40-6-15\*. Além disso, as superfícies de resposta centradas nos pontos médios se mostraram conservadoras em todos os casos, resultado em índices de confiabilidade menores que aquelas calculadas nos pontos de projeto. Diante do alto custo

computacional associado ao método utilizado, a decisão foi tomada de continuar a obtenção das probabilidades de falha por meio de superfícies de resposta centradas nos pontos médios das variáveis aleatórias.

Tabela 7.6 – Comparação de resultados entre Método da Superfície de Resposta Adaptativo e Normal

Caso	Não Confinada		Confinada	
	$\beta$	$\beta$	$\beta$	$\beta$
	Tradicional	Adaptativo	Tradicional	Adaptativo
L50-5-10	3,19	3,24	4,50	4,50
L30-4-09	3,12	3,15	4,14	4,23
L40-6-15*	3,40	3,66	4,79	4,95

(fonte: o autor)

Assim, as superfícies de resposta calculadas foram utilizadas para cálculo das probabilidades de falha com a Equação 7.1 e o Método de Monte Carlo, utilizando-se as variáveis aleatórias apresentadas na Tabela 7.2. As simulações foram realizadas em lotes de 5.000.000 e foram paradas quando o coeficiente de variação da probabilidade de falha resultou menor que 5%.

Novamente, as teorias analíticas foram utilizadas para comparação dos resultados. A teoria das linhas de ruptura de Johansen (1972) representou o modelo que despreza a contribuição do confinamento enquanto a teoria de Rankin et al. (1991) foi utilizada para cálculo das lajes considerando o efeito. Como as teorias possuem custo computacional baixíssimo para serem aplicadas, o Método de Monte Carlo foi utilizado diretamente em conjunto com elas, não sendo necessária a utilização de meta modelos.

Os resultados de confiabilidade, incluindo a probabilidade de falha e o índice de confiabilidade  $\beta$ , estão apresentados na Tabela 7.7. Uma análise dos dados a partir do modelo numérico revela um aumento significativo na confiabilidade em todos os casos de dimensionamento quando o efeito do confinamento lateral é considerado no modelo. Enquanto as lajes não confinadas apresentaram um índice de confiabilidade médio de 3,29, esse valor aumentou para 4,44 quando o modelo incorporou as lajes adjacentes. Isso representa uma redução média na probabilidade de falha de 98,64%.

As teorias analíticas também previram um aumento substancial na confiabilidade das lajes, e uma queda média na probabilidade de falha de 98,61%, concordando com o modelo numérico nesse sentido. Porém, naturalmente os resultados de carga de ruptura menores das teorias analíticas levaram a índices de confiabilidade menores que os modelos de elementos finitos.

Tabela 7.7 – Resultados de confiabilidade dos casos estudados

Caso	Modelo Analítico				Modelo Numérico				$\frac{P_{fconf}}{P_{fnconf}}$
	Não Confinada		Confinada		Não Confinada		Confinada		
	$\beta$	Pf	$\beta$	Pf	$\beta$	Pf	$\beta$	Pf	
<b>L30-4-08</b>	2,17	1,50E-2	2,96	1,54E-3	3,28	5,13E-4	3,93	4,27E-5	8,31%
<b>L40-4-08</b>	2,17	1,51E-2	3,25	5,68E-4	3,19	7,05E-4	4,35	6,85E-6	0,97%
<b>L50-4-08</b>	2,25	1,22E-2	3,48	2,52E-4	3,34	4,20E-4	4,71	1,25E-6	0,30%
<b>L30-5-10</b>	2,35	9,32E-3	3,26	5,59E-4	2,68	3,67E-3	3,81	6,86E-5	1,87%
<b>L40-5-10</b>	2,35	9,38E-3	3,58	1,70E-4	2,73	3,15E-3	4,22	1,22E-5	0,39%
<b>L50-5-10</b>	2,35	9,28E-3	3,80	7,28E-5	3,19	7,23E-4	4,50	3,45E-6	0,48%
<b>L30-6-12</b>	2,48	6,53E-3	3,46	2,66E-4	2,67	3,80E-3	3,77	8,29E-5	2,18%
<b>L40-6-12</b>	2,48	6,65E-3	3,78	7,78E-5	2,85	2,17E-3	4,15	1,66E-5	0,76%
<b>L50-6-12</b>	2,47	6,72E-3	4,03	2,82E-5	3,07	1,08E-3	4,40	5,29E-6	0,49%
<b>L30-4-09</b>	2,30	1,07E-2	3,57	1,81E-4	3,12	8,89E-4	4,14	1,74E-5	1,96%
<b>L40-4-09*</b>	2,48	6,60E-3	3,94	4,13E-5	3,50	2,36E-4	4,36	6,42E-6	2,72%
<b>L50-4-09*</b>	2,86	2,13E-3	4,21	1,27E-5	3,88	5,20E-5	4,94	4,00E-7	0,77%
<b>L30-5-11</b>	2,42	7,82E-3	3,73	9,62E-5	2,78	2,75E-3	4,00	3,19E-5	1,16%
<b>L40-5-11</b>	2,42	7,73E-3	4,09	2,16E-5	3,31	4,59E-4	4,45	4,29E-6	0,93%
<b>L50-5-11*</b>	2,74	3,10E-3	4,39	5,61E-6	3,74	9,20E-5	4,86	5,89E-7	0,64%
<b>L30-6-13</b>	2,52	5,81E-3	3,85	6,00E-5	2,85	2,22E-3	3,96	3,79E-5	1,71%
<b>L40-6-13</b>	2,52	5,89E-3	4,23	1,18E-5	3,07	1,06E-3	4,14	1,74E-5	1,65%
<b>L50-6-13</b>	2,57	5,06E-3	4,48	3,68E-6	3,15	8,23E-4	4,55	2,67E-6	0,32%
<b>L30-4-10*</b>	2,53	5,74E-3	4,13	1,78E-5	3,28	5,16E-4	4,14	1,76E-5	3,40%
<b>L40-4-10*</b>	3,10	9,80E-4	4,60	2,14E-6	3,93	4,30E-5	4,86	5,99E-7	1,39%
<b>L50-4-10*</b>	3,50	2,33E-4	4,91	4,60E-7	4,11	2,00E-5	5,30	5,64E-8	0,28%
<b>L30-5-12</b>	2,48	6,58E-3	4,19	1,37E-5	3,19	7,01E-4	4,45	4,27E-6	0,61%
<b>L40-5-12*</b>	2,78	2,73E-3	4,62	1,89E-6	3,72	1,01E-4	4,77	9,07E-7	0,90%
<b>L50-5-12*</b>	3,26	5,52E-4	4,96	3,61E-7	3,48	2,47E-4	4,76	9,70E-7	0,39%
<b>L30-6-15</b>	2,58	4,90E-3	4,54	2,87E-6	3,03	1,22E-3	4,49	3,64E-6	0,30%
<b>L40-6-15*</b>	2,90	1,86E-3	5,03	2,41E-7	3,40	3,36E-4	4,79	8,33E-7	0,25%
<b>L50-6-15*</b>	3,42	3,19E-4	5,45	2,55E-8	4,17	1,50E-5	5,04	2,28E-7	1,52%
<b>Média</b>	2,61	6,25E-3	4,09	1,48E-4	3,29	1,04E-3	4,44	1,44E-5	1,36%

(fonte: o autor)

O método FORM também foi utilizado associado às superfícies de resposta para obtenção dos cossenos diretores, que representam a contribuição relativa de cada variável aleatória para a probabilidade de falha. A Figura 7.8 representa os resultados obtidos, os valores próximos ao eixo horizontal do gráfico indicam a média do cosseno diretor para cada variável aleatória.

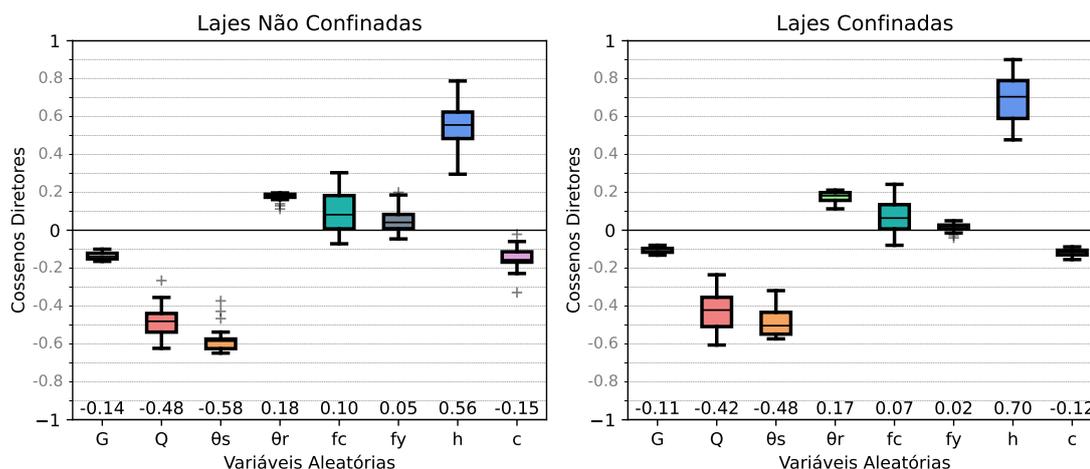


Figura 7.8 – Cossenos diretores das variáveis aleatórias  
(fonte: o autor)

A partir da análise da figura, percebe-se que em relação aos resultados das lajes não confinadas, ao considerar o confinamento lateral a altura da laje ( $h$ ) tem um aumento substancial de sua relevância para a confiabilidade em detrimento de todas as outras variáveis aleatórias. Esse comportamento é bastante consistente com os estudos apresentados no Capítulo 2, visto que a altura contribui para a resistência da laje de duas formas: aumento o braço de alavanca da armadura passiva na flexão e aumentando o ângulo da biela de compressão do arco, possibilitando assim uma maior capacidade de resistência para a laje.

Destaca-se também na figura alguns casos onde os cossenos diretores das variáveis aleatórias  $f_c$  e  $f_y$  resultaram negativos, indicando que um aumento no valor dessas variáveis levaria à uma diminuição da confiabilidade. Este é um resultado anômalo e que não faz sentido do ponto de vista teórico, e resulta de algum erro de aproximação dos métodos de cálculo. Como os valores encontrados foram próximos de 0, essa anomalia foi desprezada.

### 7.3 ESTUDO PARAMÉTRICO

Com o objetivo de identificar os fatores que influenciam a confiabilidade de lajes maciças de concreto armado considerando ou não o confinamento lateral, um estudo paramétrico foi conduzido a partir dos resultados obtidos anteriormente para os 27 casos de dimensionamento. As variáveis estudadas foram: resistência característica à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ), altura da laje ( $h$ ), as taxas de armadura ( $\rho$ ), vão da laje ( $L$ ) e esbeltez ( $\lambda$ ). Nos gráficos de todas as variáveis foram adicionadas linhas de tendência lineares, a fim de facilitar a leitura e entendimento da influência dos parâmetros.

A Figura 7.9 apresenta graficamente os resultados de confiabilidade para todas os casos estudados. No caso da resistência à compressão do concreto, percebe-se um aumento dos índices de confiabilidade com o aumento da resistência à compressão do concreto, tanto para lajes não confinadas quanto para confinadas. Esse fato pode ter alguma influência das armaduras mínimas requeridas pela NBR6118:2023: conforme pode ser observado na Tabela 7.1, as lajes com maior  $f_{ck}$  apresentam mais comumente dimensionamento a partir das armaduras mínimas exigidas pela norma, o que tende a gerar elementos que resistem a mais carga do que para as quais foram projetados, refletindo em índices de confiabilidade maiores.

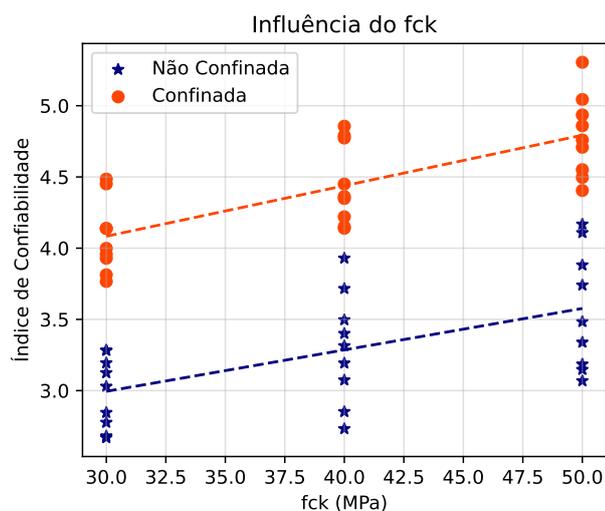


Figura 7.9 – Influência do  $f_{ck}$  na confiabilidade das lajes  
(fonte: o autor)

Em relação a altura, os resultados não apresentaram uma tendência clara de influência do parâmetro na confiabilidade de lajes, conforme pode ser visto através da Figura 7.10.

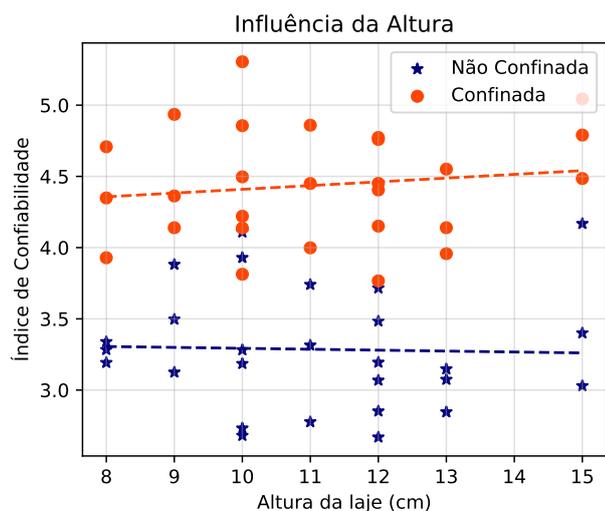


Figura 7.10 – Influência da altura na confiabilidade das lajes  
(fonte: o autor)

Os índices de confiabilidade apresentaram uma leve tendência de queda com o aumento dos vãos,

conforme pode ser visto na Figura 7.11. Além disso, a queda foi mais acentuada nas lajes não confinadas do que nas confinadas. Novamente, isso pode ter alguma relação com as armaduras mínimas solicitadas pela norma brasileira, visto que lajes com menor vão têm maior tendência de utilizarem armaduras mínimas por estarem submetidas à esforços solicitantes menores.

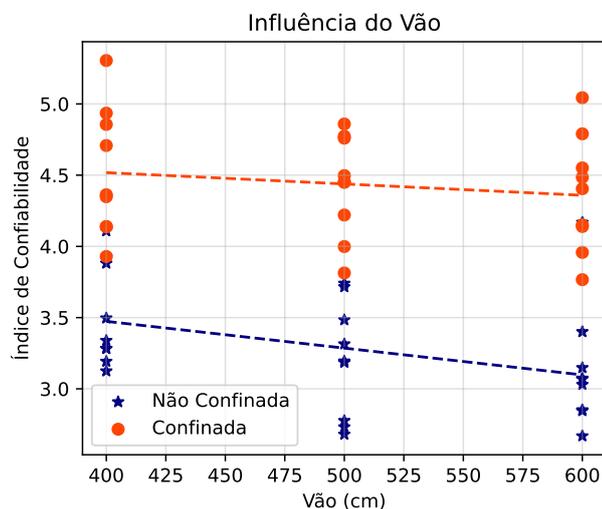


Figura 7.11 – Influência do vão na confiabilidade das lajes (fonte: o autor)

A esbeltez  $\lambda$ , ou relação  $L/h$  das lajes, parece estar inversamente relacionada ao índice de confiabilidade, conforme apresenta a Figura 7.12, tanto para lajes confinadas quanto para as sem a consideração do efeito do confinamento.

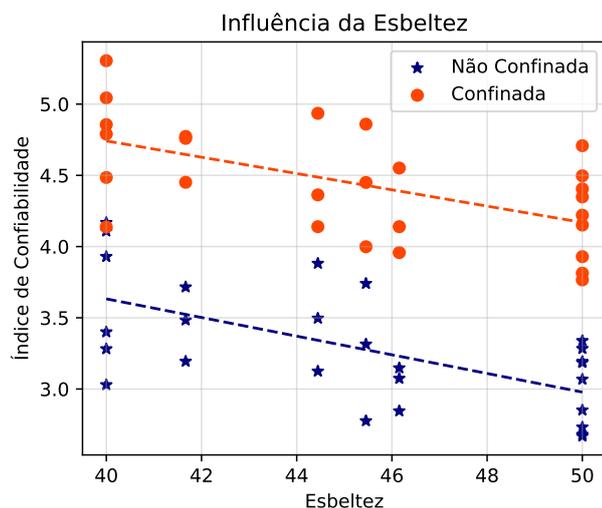


Figura 7.12 – Influência da esbeltez na confiabilidade das lajes (fonte: o autor)

A influência das taxas de armadura, positivas e negativas, está retratada na Figura 7.13 respectivamente. Para nenhuma das taxas foi encontrada uma tendência de aumento ou decréscimo do índice de confiabilidade. É importante ressaltar, entretanto, que as taxas encontradas neste

estudo tiveram uma variação baixa, e portanto o entendimento da influência desse parâmetro na confiabilidade dos elementos fica comprometido.

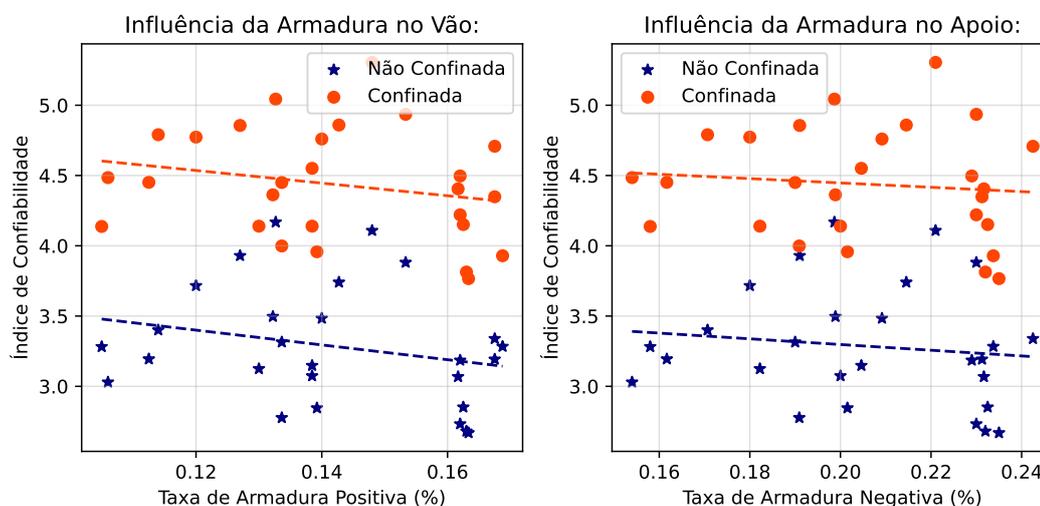


Figura 7.13 – Influência da taxa de armadura na confiabilidade das lajes  
(fonte: o autor)

A Figura 7.14 apresenta a relação entre os índices de confiabilidade de lajes não confinadas comparado ao índice da mesma laje considerando o efeito do confinamento. A forte correlação percebida na figura é evidenciada pelo coeficiente de correlação encontrado  $\rho = 0,877$ . Ademais, a linha traçada no gráfico representa a equação linear de relação entre as duas variáveis encontrada pelo método dos mínimos quadrados. Nota-se também, que as lajes armadas com armadura mínima apresentaram índices de confiabilidade ligeiramente superiores àquelas armadas com a armadura calculada.

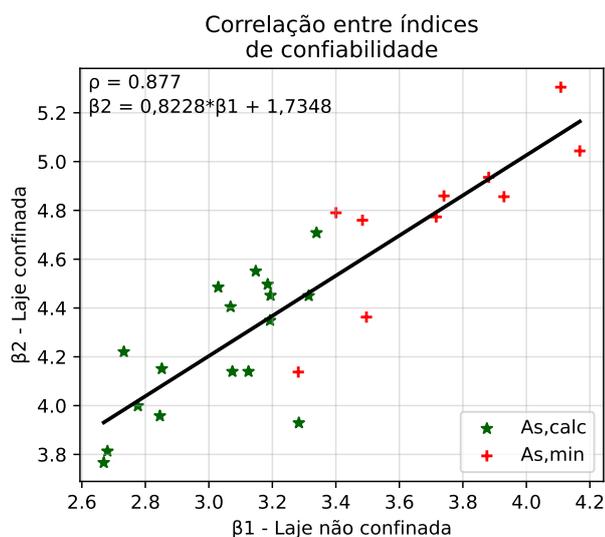


Figura 7.14 – Correlação entre confiabilidade de lajes não confinadas e confinadas

(fonte: o autor)

A análise dos dados apresentados neste estudo paramétrico, bem como os coeficientes diretores da análise de confiabilidade demonstram que os fatores relevantes para a confiabilidade de lajes de concreto armado considerando ou não o confinamento lateral são parecidos. Além disso, ao considerar o confinamento para cálculo da carga de ruptura, um acréscimo substancial nos índices de confiabilidade das lajes é observado.

Por fim, considerando o valor de índice de confiabilidade alvo  $\beta_T = 3,0$ , as lajes estudadas apresentaram, em geral, um desempenho satisfatório em estado limite último quando calculadas através do modelo de elementos finitos - com exceção dos casos L30-5-10, L40-5-10, L30-6-12, L40-6-12, L30-5-11 e L30-6-13, e somente o efeito do confinamento lateral for desprezado.

## 8 CONCLUSÃO

Este estudo dedicou-se à análise do efeito do confinamento lateral em lajes usuais de concreto armado, dimensionadas de acordo com as normas brasileiras. Inicialmente, foram realizadas investigações determinísticas para compreender os mecanismos de aumento de resistência e comportamento das lajes confinadas. Em seguida, o foco principal foi nas análises de confiabilidade, visando estimar as probabilidades de falha dos elementos.

As análises foram conduzidas utilizando o método dos elementos finitos e o programa ANSYS, além de teorias analíticas para determinação da carga de ruptura das lajes, usadas para comparação com os resultados numéricos. Para as análises de confiabilidade, foram empregados os Métodos da Superfície de Resposta, associado ao Método de Simulação de Monte Carlo e o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem para obtenção dos cossenos diretores do problema de confiabilidade.

Os resultados das análises determinísticas revelaram que o efeito confinante, gerado no modelo numérico pela modelagem das lajes adjacentes, resultou em um aumento médio de 97% na carga de ruptura das lajes dimensionadas, quando comparadas àquelas sem considerar o confinamento.

Os fatores de confinamento encontrados, representando a razão entre a rigidez confinante e a rigidez axial da própria laje, variaram entre 1,07 e 1,38, com uma média de 1,21. Além disso, as relações entre carga axial nas lajes e deslocamentos laterais encontradas pelo modelo numérico mostraram-se próximas de retas, sugerindo que o efeito das lajes adjacentes pode ser considerado por meio de molas lineares no modelo.

Foi avaliada a confiabilidade de 27 lajes quadradas de concreto armado, com vãos de 4, 5 e 6 m, resistência característica à compressão do concreto de 30, 40 e 50 MPa, e índices de esbeltez próximos de 50, 45 e 40. Mesmo sem considerar o efeito do confinamento lateral, as lajes dimensionadas neste trabalho alcançaram níveis satisfatórios de confiabilidade, com apenas 6 lajes apresentando índices de confiabilidade abaixo do alvo ( $\beta_T = 3,0$ ). Quando o confinamento lateral foi incorporado aos modelos numéricos, a confiabilidade de todas as lajes aumentou substancialmente, refletida pelo índice de confiabilidade médio que passou de 3,29 para 4,44.

Os resultados indicam que o confinamento lateral exerce uma influência significativa no comportamento mecânico das lajes de concreto armado, sugerindo que sua consideração adequada poderia resultar em melhores projetos. No entanto, é importante ressaltar que este estudo é um dos primeiros a investigar o tema do confinamento associado à confiabilidade,

portanto mais investigações ainda são necessárias.

Por ser um estudo inicial sobre o efeito do confinamento em lajes de concreto armado, há ainda muitas lacunas no conhecimento a serem preenchidas. Em primeiro lugar, seria interessante ampliar as variáveis utilizadas para o dimensionamento das lajes (como resistência característica do concreto, vãos e índices de esbeltez), indo além dos limites investigados neste estudo.

Este trabalho restringiu-se à investigação de lajes quadradas com impedimento de deslocamento lateral em todos os bordos. Seria importante investigar os efeitos do fenômeno em lajes retangulares com diferentes relações entre os lados, bem como em lajes com diferentes formas geométricas, como em "L" ou curvas, por exemplo. Além disso, retirar o confinamento em alguns dos bordos, equivalente a investigar o comportamento das lajes L101 e L102 da Figura 7.1, também seria uma investigação importante sobre o tema.

Quanto ao efeito do confinamento lateral, apenas lajes consideradas engastadas foram utilizadas neste trabalho. No entanto, conforme indicado pela literatura e por alguns testes realizados pelo autor, o comportamento também é importante em lajes consideradas simplesmente apoiadas nos bordos, desde que estes ofereçam rigidez suficiente para impedir o deslocamento lateral. Dessa forma, sugere-se a investigação do efeito do confinamento em lajes simplesmente apoiadas. Além disso, um estudo mais aprofundado sobre a rigidez das lajes adjacentes seria valioso para substituí-las seguramente por molas nos modelos numéricos, reduzindo consideravelmente o custo computacional.

O aumento de resistência das lajes devido ao efeito arco é altamente influenciado pela altura da laje, que promove uma membrana compressiva dentro da estrutura, facilitando a transferência de esforços. No entanto, o aumento das tensões no concreto pode intensificar os efeitos da fluência, resultando em maiores deformações nos elementos e, conseqüentemente, atenuando o impacto positivo na resistência desses elementos. Portanto, é importante a realização um estudo que leve em consideração os efeitos reológicos do concreto.

Finalmente, além da superfície de resposta polinomial, outras técnicas de meta modelagem poderiam ser exploradas para reduzir o custo computacional ou aumentar a precisão na avaliação das probabilidades de falha. Sugere-se a utilização de técnicas como redes neurais artificiais e krigagem, que têm se mostrado eficazes na modelagem de sistemas complexos e na obtenção de respostas precisas com menor demanda computacional.

## REFERÊNCIAS

ABDUL-WAHAB, H. M. S.; KHALIL, M. H. Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs. **Journal of Structural Engineering**, v. 126, n. 2, p. 219–227, Feb 2000. ISSN 0733-9445, 1943-541X. Citado na página 88.

ABNT. **NBR8681: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento**. 2003. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

\_\_\_\_\_. **NBR7480: Aço Destinado a armaduras para estruturas de concreto armado - Especificação.pdf**. 2007. Citado na página 39.

\_\_\_\_\_. **NBR12655: Concreto de cimento Portland - Preparo, controle, recebimento e aceitação - Procedimento.pdf**. 2015. Citado na página 37.

\_\_\_\_\_. **NBR8953: Concreto Para Fins Estruturais**. 2015. Citado na página 37.

\_\_\_\_\_. **NBR6120: Ações para o cálculo de estruturas de edificações**. 2019. Citado 3 vezes nas páginas 18, 41 e 99.

\_\_\_\_\_. **NBR6118: Projeto de Estruturas de Concreto**. 2023. Citado 22 vezes nas páginas 18, 19, 20, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 47, 49, 50, 51, 53, 54, 56, 57, 99 e 118.

ALARCÓN AYALA, I. C. **Customização do Software Ansys para Análise de Lajes de Concreto Protendido pelo Método dos Elementos Finitos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 22.

ANG, A. H.-S.; TANG, W. H. **Probability Concepts in Engineering Planning and Design**. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1984. v. 2. Citado 5 vezes nas páginas 70, 71, 72, 73 e 75.

\_\_\_\_\_. **Probability Concepts in Engineering - Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering**. 2. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2007. ISBN 978-0-471-72064-5. Citado na página 70.

ANSYS. **Ansys Mechanical APDL Guide**. [S.l.: s.n.], 2023. Citado 10 vezes nas páginas 58, 59, 60, 61, 63, 65, 66, 67, 68 e 69.

ARAUJO, J. M. d. **Curso de Concreto Armado**. 4. ed. Rio Grande: Editora Dunas, 2014. v. 2. ISBN 978-85-86717-15-4. Citado 6 vezes nas páginas 44, 45, 47, 48, 54 e 55.

ARSHIAN, A. H.; MORGENTHAL, G. Probabilistic assessment of the ultimate load-bearing capacity in laterally restrained two-way reinforced concrete slabs. **Engineering Structures**, v. 150, p. 52–63, Nov 2017. ISSN 01410296. Citado na página 18.

BANDEIRA, M. S. **Análise Não-Linear de Lajes de Concreto Armado pelo Método dos Elementos Finitos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2006. Citado na página 22.

BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. 2nd edition. ed. Watertown, MA: K.J. Bathe, 2014. ISBN 978-0-9790049-5-7. Citado na página 68.

BECK, A. T. **Confiabilidade e Segurança das Estruturas**. [S.l.]: Elsevier, 2019. ISBN 978-85-352-8895-7. Citado 5 vezes nas páginas 71, 76, 78, 80 e 83.

BENINCÁ, M. E. **Simulação numérica de vigas alveolares mistas de aço e concreto: modelo parametrizado de elementos finitos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019. Citado 5 vezes nas páginas 19, 23, 60, 67 e 90.

BERMEJO, M.; SANTOS, A. P.; GOICOLEA, J. M. Development of practical finite element models for collapse of reinforced concrete structures and experimental validation. **Shock and Vibration**, v. 2017, p. 1–9, 2017. ISSN 1070-9622, 1875-9203. Citado na página 22.

BOTTICCHIO, R. M. **Determining and Validating the Three-Dimensional Load Path Induced by Arching Action in Bridge Deck Slabs**. Dissertação (Mestrado) — University of Toronto, Toronto, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 25, 30 e 31.

CHEN, W. F. **Plasticity in Reinforced Concrete**. 2. ed. Nova Iorque: J. Ross Publishing, 2007. ISBN 978-1-932159-74-5. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 64.

CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for Structural Engineers**. [S.l.]: Springer Verlag, 1988. Citado 5 vezes nas páginas 61, 62, 63, 64 e 65.

CHRISTIANSEN, K. et al. The effect of membrane stresses on the ultimate strength of the interior panel in a reinforced concrete slab. **The Structural Engineer**, v. 41, n. 8, p. 261–265, 1963. Citado na página 28.

COSTA, L. G. L.; SANTIAGO, W. C.; BECK, A. T. Probabilistic models for live loads in buildings: critical review, comparison to brazilian design standards and calibration of partial safety factors. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 16, n. 2, p. e16204, 2023. ISSN 1983-4195. Citado 2 vezes nas páginas 101 e 102.

DEVORE, J. L. **Probability and Statistics for Engineering and the Sciences.pdf**. 8. ed. San Luis Obispo: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012. ISBN 978-0-538-73352-6. Citado na página 84.

DRUCKER, D. C.; PRAGER, W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 10, n. 2, p. 157–165, 1952. ISSN 0033-569X, 1552-4485. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 64.

FIB. **Model Code for Concrete Structures 2010**. [S.l.]: Fédération Internationale du Béton, 2010. Citado na página 86.

GEYMAYER, H. G.; MCDONALD, J. E. **Influence of Reinforcing Details on Yield Line Pattern and Ultimate Load-carrying Capacity of Reinforced Concrete Slabs**. [S.l.: s.n.], 1967. Citado na página 87.

GOBETTI, L. C. W. **Indicações para os valores do grau de engastamento e coeficiente de ortotropia no uso do processo de linhas de ruptura em lajes de concreto armado**. [S.l.]: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1982. (Caderno Técnico, 35). Citado na página 49.

- GOMES, H. M. **Técnicas de Avaliação da Confiabilidade em Estruturas de Concreto Armado**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 81.
- GOMES, R. B.; CAMPOS, C. D. O.; ROCHA, A. P. D.; MELO, G. S. Reforço em lajes de concreto armado. **REEC - Revista Eletrônica de Engenharia Civil**, v. 4, n. 2, Sep 2012. ISSN 2179-0612. Disponível em: <<http://www.revistas.ufg.br/index.php/reec/article/view/19838>>. Citado na página 87.
- GUICE, L. K.; RHOMBERG, E. J. An analogous model for slabs using a truss element. **Computers and Structures**, v. 31, n. 5, p. 767–774, 1989. ISSN 0045-7949. Citado na página 29.
- HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Probability, reliability, and statistical methods in engineering design**. New York; Chichester [England]: John Wiley, 2000. ISBN 978-0-471-33119-3. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.
- HOPKINS, D. C.; PARK, R. Test on a reinforced concrete slab and beam floor designed with allowance for membrane action. **American Concrete Institute Journal and Proceedings**, v. 69, n. 1, 1972. Citado na página 29.
- JCSS. **Probabilistic Model Code**. [S.l.]: Joint Committee on Structural Safety, 2001. v. 1. Citado na página 85.
- JOHANSEN, K. W. **Yield-line formulae for slabs**. London: Cement and Concrete Association, 1972. ISBN 978-0-7210-0819-6. Citado 4 vezes nas páginas 17, 46, 103 e 115.
- KEENAN, W. A. **Strenght and Behavior of Restrained Reinforced Concrete Slabs under Static and Dynamic Loadings**. [S.l.: s.n.], 1969. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 95.
- KEYVANI, L.; SASANI, M.; MIRZAEI, Y. Compressive membrane action in progressive collapse resistance of rc flat plates. **Engineering Structures**, v. 59, p. 554–564, Feb 2014. ISSN 01410296. Citado na página 25.
- KRAESKI, V. E. **Análise por elementos finitos do comportamento de lajes alveolares protendidas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.
- LAZZARI, B. M. **Análise por Elementos Finitos de Peças de Concreto Armado e Protendido sob Estados Planos de Tensões**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Citado na página 22.
- LAZZARI, P. M. **Simulação Numérica das Etapas Construtivas de Pontes Estaiadas Através do Método dos Elementos Finitos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016. Citado na página 59.
- LEITE, D. D. L. **Análise da confiabilidade de lajes maciças de concreto armado com erros de execução por meio de campos estocásticos**. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 90.
- LIEBENBERG, A. **Arch action in concrete slabs**. [S.l.]: National Building Research Institute, Council for Scientific and Industrial, 1966. v. 40. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

LIU, P.-L.; KIUREGHIAN, A. D. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 1, n. 2, p. 105–112, Jun 1986. ISSN 02668920. Citado na página 77.

MASON, J. **Concreto Armado e Protendido: princípios e aplicações**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos S.A., 1976. v. 1. Citado na página 46.

MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. **Structural reliability analysis and prediction**. [S.l.]: Wiley, 2018. Citado na página 85.

MESEGUER, A. G.; CABRÉ, F. M.; PORTERO, J. C. A. **Jiménez Montoya Hormigón Armado**. 15. ed. [S.l.]: Gustavo Gil, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 49.

MIRZA, S. A.; SKRABEK, B. W. Statistical analysis of slender composite beam-column strength. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, n. 5, p. 1312–1332, 1992. Citado na página 102.

MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D. C.; ANDERSON-COOK, C. M. **Response Surface Methodology**. 3. ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley and Sons, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 81, 82, 83 e 84.

NASSIM, K.; KHALIL, B.; BEKADDOUR, B. A. Non-linear finite element analysis of reinforced concrete members and punching shear strength of hsc slabs. **MATEC Web of Conferences**, v. 149, p. 02056, 2018. ISSN 2261-236X. Citado na página 23.

OKLESTON, A. J. Loading tests on the floor systems of a reinforced concrete building. **The South African Institution of Civil Engineers**, 1956. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 28.

OTTOSEN, N. A failure criterion for concrete. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 103, n. 4, p. 527–535, 1977. ISSN 0044-7951. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

PARK, R. Ultimate strength of rectangular concrete slabs under short-term uniform loading with edges restrained against lateral movement. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 28, n. 2, p. 125–150, Jun 1964. ISSN 1753-7789. Citado na página 17.

\_\_\_\_\_. The ultimate strength and long-term behaviour of uniformly loaded, two-way concrete slabs with partial lateral restraint at all edges. **Magazine of Concrete Research**, v. 16, n. 48, p. 139–152, Sep 1964. ISSN 0024-9831, 1751-763X. Citado na página 17.

\_\_\_\_\_. The lateral stiffness and strength required to ensure membrane action at the ultimate load of a reinforced concrete slab-and-beam floor. **Magazine of Concrete Research**, v. 17, n. 50, p. 29–38, Mar 1965. ISSN 0024-9831, 1751-763X. Citado 3 vezes nas páginas 17, 28 e 30.

PIRES, E. F. **Comportamento e Desempenho do Reforço à Flexão de Lajes de Concreto Armado através do Aumento da Seção na Região Comprimida**. Belo Horizonte: [s.n.], 2003. Citado 3 vezes nas páginas 9, 88 e 94.

PRATA, V. S. **Confiabilidade de lajes maciças de concreto armado em estruturas portuárias**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2017. Citado na página 24.

RANKIN, B.; LONG, A. E.; NIBLOCK, R. A.; SKATES, A. S. Compressive membrane action strength enhancement in uniformly loaded, laterally restrained slabs. **The Structural Engineer**, v. 69, n. 16, 1991. Citado 10 vezes nas páginas 17, 29, 32, 33, 34, 94, 96, 103, 107 e 115.

RANKIN, G. I. B.; LONG, A. E. Arching action strength enhancement in laterally-restrained slab strips. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings**, v. 122, p. 461–467, 1997. ISSN 09650911, 17517702. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 145.

REAL, M. D. V. **Análise Estática de lajes de concreto armado incluindo não linearidade física e geométrica**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 22.

ROBERTS, E. H. Load-carrying capacity of slab strips restrained against longitudinal expansion. v. 3, n. Concrete Society, p. 369–378, 1969. ISSN 0010-5317. Citado na página 29.

SANTIAGO, W. C. **Calibração baseada em confiabilidade dos coeficientes parciais de segurança das principais normas brasileiras de projeto estrutural**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019. Citado 5 vezes nas páginas 24, 85, 101, 102 e 103.

SCHERER, M. **Avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018. Citado na página 24.

SCHIMANOWSKI, E. R. Z. **Análise da punção em lajes com vazios esféricos através do método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.

SCHUËLLER, G.; STIX, R. A critical appraisal of methods to determine failure probabilities. **Structural Safety**, v. 4, n. 4, p. 293–309, Jan 1987. ISSN 01674730. Citado na página 80.

SILVA, C. C. C. da. **Análise de Confiabilidade Aplicada a Modelagem Geomecânica de Túneis Profundos Reforçados por Tirantes Passivos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 25.

SILVA, G. R. da. **Análise da confiabilidade da ligação laje-pilar interno sob punção de acordo com a NBR6118:2014**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Citado na página 24.

STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007. Citado na página 22.

TAYLOR, R.; MAHER, D. R. H.; HAYES, B. Effect of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs. **Magazine of Concrete Research**, v. 18, n. 55, p. 85–94, Jun 1966. ISSN 0024-9831, 1751-763X. Citado 4 vezes nas páginas 87, 90, 91 e 94.

THIENPONT, T.; COILE, R. V.; CORTE, W. D.; CASPEELE, R. Structural reliability of hollow core slabs considering compressive membrane action. **Acta Polytechnica CTU Proceedings**, v. 36, p. 237–243, Aug 2022. ISSN 2336-5382. Citado na página 26.

THOMA, K.; MALISIA, F. Compressive membrane action in rc one-way slabs. **Engineering Structures**, v. 171, p. 395–404, Sep 2018. ISSN 01410296. Citado 3 vezes nas páginas 26, 108 e 112.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**. 2. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1964. Citado na página 17.

TITELLO, E. P. **Análise da confiabilidade de vigas em concreto armado reforçado com fibras de aço em relação aos esforços transversais**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 18, 25 e 79.

VECCHIO, F. J.; TANG, K. Membrane action in reinforced concrete slabs. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 17, n. 5, p. 686–697, Oct 1990. ISSN 0315-1468, 1208-6029. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

VIEGAS, C. H. H. **Estudo de confiabilidades de lajes projetadas de acordo com a NBR6118 e submetidas ao confinamento lateral**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2022. Citado na página 26.

WESTERGAARD, H.; SLATER, W. Moments and stresses in slabs. **ACI Journal Proceedings**, v. 17, n. 2, jan 1921. Citado na página 28.

WISCHERS, G. Application of effects of compressive loads on concrete. **Betontech**, 1978. Citado na página 62.

ZHU, Y.-J.; ZHOU, M.; ZHU, J.-M.; NIE, X. Analytical models for load capacities of variable thickness reinforced concrete slabs considering compressive membrane action and boundary effects. **Engineering Structures**, v. 246, p. 113067, Nov 2021. ISSN 01410296. Citado 3 vezes nas páginas 26, 108 e 111.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A – SCRIPT LAJE S1

```

!-----
! PROBLEMA: LAJE S1 - TAYLOR
! PROGRAMADOR: GABRIEL ORSO GARCIA
! UNIDADES: kN, cm
!-----

/CLEAR, NOSTART
/NOPR
/TITLE, LAJE S1
/RGB, INDEX, 100, 100, 100, 0
/RGB, INDEX, 80, 80, 80, 13
/RGB, INDEX, 60, 60, 60, 14
/RGB, INDEX, 0, 0, 0, 15
/REPLOT

!=====
!           DADOS INICIAIS:
!=====

! GEOMETRIA:
h = 5.08
vao_x = 91.50
vao_z = 91.50
cobr = 0.50

! OPÇÕES DO MODELO:
soluc = 1           ! 1: roda solução
apoio = 0           ! 1: gera material para apoio
carga = 000         ! Carga a ser aplicada (se 0 o programa estima)

! ARMADURAS: X É A DIREÇÃO PRINCIPAL
phi_x = 0.50
esp_x = 7.62
asc_x = 0.178

```

```

phi_z = 0.50
esp_z = 6.35
asc_z = 0.178

! CONCRETO:
fccubo = 3.50
Kcubo = log(fccubo/2)*0.2 + 0.76
fcm = Kcubo*fccubo
fck = fcm / 1.32
ka = 0.70

! AÇO:
fsy = 37.59
fsu = 41.60
Es = 21000
epsu = 10/1000

! MALHA:
nex = 09
nez = 09
ney = 05
!
dpc1 = (cobr + phi_x/2)
dpc2 = (cobr + phi_x + phi_z/2)
!
!=====
!      PARÂMETROS DO CONCRETO:
!=====
nic = 0.20
Ec = 2150*(fcm)**(1/3)

*IF, fck, LE, 5, THEN
    fct=(0.03*((fck*10)**(2/3)))
*ELSE
    fct=(0.212*log(1+0.1*(fcm*10)))
*ENDIF

! DADOS DO MODELO DRUCKER-PRAGER:
Rc = fcm

```

```

! Resistência à compressão uniaxial [kN/cm²]
Rt = fct*ka
! Resistência à tração uniaxial [kN/cm²]
Rb = fcm*(1.2-fcm/100)
! Resistência à compressão biaxial [kN/cm²]
delta_t = 1.00
! Fator de dilatação por tração
delta_c = 1.00
! Fator de dilatação por compressão

! PARAMETROS HSD:
epscm = (0.0011207*(fck*10)**(0.2098))
! Deformação na resistência à compressão uniaxial
epscu = 0.0035
! Deformação última em compressão
Oci = 0.40
! Nível de tensão relativa no início do endurecimento
Ocr = 0.10
! Nível de tensão residual relativa em compressão

Ecp = (0.25*fcm)/(epscu-epscm)
! Módulo do concreto pós pico da tensão de compressão
kcm = epscm - (fcm/Ec)
! Deformação plástica no momento da tensão de pico
Kcr = kcm + (1.0-Ocr)/Ecp
! Deformação plástica última

Otr = 0.05000
! Nível de tensão relativa residual em tração
ktr = 0.00250
! Deformação plástica no momento de Otr
!=====
!           PARÂMETROS DO AÇO:
!=====
gamas=7.7e-5           ! peso específico do aço [kN/cm³]
nis= 0.3               ! coeficiente de poisson do aço
epsy= fsy/Es           ! deformação de escoamento
Ets= (fsu-fsy)/(epsu-epsy) ! Módulo tangente [kN/cm²]
!=====

```

```

!           CÁLCULO DA CARGA A SER APLICADA:
!=====
*IF,carga,EQ,0,THEN
  AS1 = asc_x*100/esp_x
  AS2 = asc_z*100/esp_z
  *IF,AS1,GT,AS2,THEN
    AS = AS1
  *ELSE
    AS = AS2
  *ENDIF
  y = AS*fsu/(fcm*100)
  DD = h - dpc1
  MU = fcm*y*(DD - 0.5*y)
  carga = (6)*MU*8*(1 + vao_x/vao_z + vao_z/vao_x)
*ENDIF

!=====
!=====
!           FIM DA ENTRADA DE DADOS
!=====
!=====
/PREP7           ! Abre o pré-processador
ET,1,SOLID186    ! Define o elemento 1 como SOLID
KEYOPT,1,2,1     ! Define integração completa
KEYOPT,1,3,0     ! Define Structural Solid
KEYOPT,1,6,0     ! Define Pure Displacement
KEYOPT,1,8,0     ! ----
!
!=====
!           MATERIAIS - CONCRETO:
!=====
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,Ec           ! Define o modulo de elasticidade do concreto
MPDATA,PRXY,1,,nic       ! Define o coeficiente de poisson do concreto
TB,CONCR,1,,DP           ! Define o modelo de concreto
TBDATA,1,Rc,Rt,Rb
TB,CONCR,1,,DILA
TBDATA,1,delta_t,delta_c
TB,CONCR,1,,HSD6

```

```

TBDATA,1,kcm,kcr,0ci,0cr,ktr,Otr
TB,CONCR,1,,MSOL
TBDATA,1,2,1,1e-3,100,10,1e-20
MPTEMP,1,0
!=====
!      MATERIAIS - AÇO:
!=====
MPDATA,DENS,2,,gamas/9.81
MPDATA,EX,2,,Es
MPDATA,PRXY,2,,nis
TB,MISO,2,1,4,0
TBTEMP,0
TBPT,,0.00,0.00
TBPT,,epsy,fsy
TBPT,,epsu,fsu
TBPT,,0.10,fsu+0.05
!=====
!      GERANDO VOLUMES DA LAJE:
!=====
BLC4,0,0,vao_x,h,vao_z
/VIEW,1,2,2,2
/REPLOT,FAST
!
!=====
!      GERANDO A MALHA:
!=====
TYPE,1
MAT,1
REAL,1
ESYS,0
SECNUM,
!
LSEL,S,LENGHT,,h
LESIZE,ALL,,ney,1,,0,
ALLSEL
!
LSEL,S,LENGHT,,vao_x
LESIZE,ALL,,nex,1,,0,
ALLSEL

```

```

!
LSEL,S,LENGHT,,vao_z
LESIZE,ALL,,,nez,1,,,0,
ALLSEL
!
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
VMESH,ALL
NUMMRG,NODE,,,,LOW
NUMCMP,NODE
!
/TRLCY,ELEM,0.5,ALL
EPLLOT
!
!=====
!                ARMADURA LONGITUDINAL:
!=====
ET,2,200
KEYOPT,2,1,0
KEYOPT,2,2,0

! Armaduras em X:
ponto = 1000
nasx = NINT(vao_z/esp_x - MOD(vao_z/esp_x,1))
sobrax = (vao_z - (nasx*esp_x))/2
*if,sobrax,lt,(esp_x/2),then
    nasx = nasx - 1
    sobrax = (vao_z - (nasx*esp_x))/2
*ENDIF

*do,jj,0,nasx
    coordz = sobrax + ((jj)*esp_x)
    K,ponto,0,dpc1,coordz
    K,ponto+1,vao_x,dpc1,coordz
    lstr,ponto,ponto+1
    ponto = ponto + 2
    lsel,s,loc,y,dpc1
    CM,ARMX,LINE
    allsel,all

```

```

*enddo

SECTYPE,1,reinf,discrete
SECDATA,2,asc_x,MESH
TYPE,2
MAT,2
REAL,0
ESYS,0
SECNUM,1
CMSEL,S,ARMX
LESIZE,ALL,,1
LMESH,ALL
ALLSEL,ALL

! Armaduras em Z:
nasz = NINT(vao_x/esp_z - MOD(vao_x/esp_z,1))
sobraz = (vao_x - (nasz*esp_z))/2
*IF,sobraz,LT,(esp_z/2),THEN
    nasz = nasz - 1
    sobraz = (vao_x - (nasz*esp_z))/2
*ENDIF
*do,jj,0,nasz
    coordx = sobraz + ((jj)*esp_z)
    K,ponto,coordx,dpc2,0
    K,ponto+1,coordx,dpc2,vao_z
    lstr,ponto,ponto+1
    ponto = ponto + 2
    lsel,s,loc,y,dpc2
    CM,ARMY,LINE
    allsel,all
*enddo

SECTYPE,2,reinf,discrete
SECDATA,2,asc_z,MESH
TYPE,2
MAT,2
REAL,0
ESYS,0
SECNUM,2
CMSEL,S,ARMY

```

```

LESIZE,ALL,,1
LMESH,ALL
ALLSEL,ALL
!
ESEL,S,TYPE,,1
ESEL,A,MAT,,2
EREINF
ALLSEL,ALL
!
/SHRINK,0      ! Define o encolhimento do elemento como 0%
/ESHAPE,1,0    !
/EFACET,1
/RATIO,1,1,1
/CFORMAT,32,0
/REPLOT

!=====
!                      APOIO:
!=====
/PREP7
NSEL,S,LOC,X,0
NSEL,R,LOC,Y,0
D,ALL,UY
ALLSEL,ALL
!
NSEL,S,LOC,Z,0
NSEL,R,LOC,Y,0
D,ALL,UY
ALLSEL,ALL
!
ALLSEL,ALL
NSEL,S,LOC,Z,vao_z
NSEL,R,LOC,Y,0
D,ALL,UZ
ALLSEL,ALL
NSEL,S,LOC,Z,vao_z
NSEL,R,LOC,Y,h
D,ALL,UZ
ALLSEL,ALL

```

```

NSEL, S, LOC, Z, vao_z
NSEL, R, LOC, Y, h/2
D,ALL,UZ
ALLSEL,ALL
NSEL, S, LOC, X, vao_x
NSEL, R, LOC, Y, h
D,ALL,UX
ALLSEL,ALL
NSEL, S, LOC, X, vao_x
NSEL, R, LOC, Y, h/2
D,ALL,UX
ALLSEL,ALL
NSEL, S, LOC, X, vao_x
NSEL, R, LOC, Y, 0
D,ALL,UX
ALLSEL,ALL

```

!! CARREGAMENTO:

```

q = (carga)/((2*vao_z)*(2*vao_x))
ASEL,S,LOC,Y,h
SFA,ALL,1,PRESS,q
NUMMRG,NODE,, , ,LOW

```

```

*IF,SOLUC,EQ,1,THEN
  /SOLU
  TIME,1
  ! EQSLV,SPAR,,0,
  ANTYPE,0           ! Análise estática
  NCVN,2            ! se nao atingir convergência para a analise
  NLGEOM,1          ! Não linearidade Geométrica - Grandes Deslocamentos
  AUTOTS,1          !
  nsubrec1 = 100
  nsubmax1 = 500
  nsubmin1 = 100
  NSUBST,nsubrec1,nsubmax1,nsubmin1
  tolf1=0.05        ! em força
  tolu1=0.05        ! em deslocamento
  CNVTOL,F,,tolf1,2,0.10, ! Criterio de convergencia em força

```

```

CNVTOL,U,,tolu1,2,0.10,      ! Criterio de convergencia em deslocamento
niter1=100                    ! numero maximo de iterações por substep
NEQIT,niter1                  ! numero maximo de iterracoes p/ cada substep
OUTRES,ERASE                  ! Salva resultados de todos substeps
OUTRES,ALL,1                  ! Salva resultados de todos substeps
SOLVE
!=====
!           PÓS-PROCESSAMENTO:
!=====
/POST26
/NOPR
NUMVAR,200
LINES,20000
FATOR1 = -1.00
FATOR2 = 4.00
ALLSEL,ALL
NSEL,S,LOC,X,vao_x
NSEL,R,LOC,Z,vao_z
NSEL,R,LOC,Y,0
*GET,NNUY,NODE,0,NUM,MIN
!
/AXLAB,Y,CARGA (kN)
/AXLAB,X,DESLOCAMENTO (cm)
NSOL,2,NNUY,U,y
NSOL,3,1,U,Z
!
ALLSEL,ALL
NSEL,S,LOC,Y,0
*GET,NUMNOD,NODE,0,COUNT
*GET,CURNOD,NODE,0,NUM,MIN
!
*DO,I,1,NUMNOD,1
    RFORCE,4,CURNOD,F,y
    ADD,3,3,4,SOMA
    CURNOD=NDNEXT(CURNOD)
*ENDDO
!
PROD,2,2,,,,,FATOR1 ! Ajuste dos deslocamentos pelo fator FATOR1
PROD,3,3,,,,,FATOR2 ! Ajuste das cargas pelo fator FATOR2

```

```
!  
XVAR, 2  
PLVAR, 3  
!  
ALLSEL, ALL  
*ENDIF
```

## APÊNDICE B – SCRIPT DE INTERFACE PYTHON-ANSYS

Esse anexo contém o código base utilizado e desenvolvido pelo autor para automatizar a chamada de modelos numéricos e a obtenção de respostas com o *Python*. Apesar de ele ser bastante particular para o problema abordado nesse trabalho e não estar parametrizado, entende-se que a lógica de programação possa ser útil para alguns leitores, por isso ele foi disponibilizado.

```

"""
BIBLIOTECA QUE TEM A FUNÇÃO DE RODAR A LAJE NO ANSYS E DEVOLVER
A CARGA DE RUPTURA COMO RESULTADO
"""

import os
import time
import scriptlajes
import numpy as np
import shutil

def RodaLaje(vars, aviso = True):
    try:
        shutil.rmtree("C:\\\\ANSYSRUN")
    except Exception as erro:
        print(erro)
    try:
        os.mkdir("C:\\\\ANSYSRUN")
    except Exception as erro:
        print(erro)

    with open("C:\\\\ANSYSRUN\\run.inp", 'w') as file:
        file.write(scriptlajes.script(vars))

    with open("C:\\\\ANSYSRUN\\data.inp", 'w') as file:
        file.write(scriptlajes.saidaDados())

    cmd = 'start "ANSYS" /d "C:\\\\ANSYSRUN\\" /min /wait /b "C:\\\\
Program Files\\ANSYS Inc\\v221\\ansys\\bin\\winx64\\ANSYS221
.exe" " -smp -np 8 -j JOBNAME -b -i run.inp -o run.out"'

```

```

cmd2 = 'start "ANSYS" /d "C:\\\\ANSYSRUN\\" /min /wait /b "C:\\
Program Files\\ANSYS Inc\\v221\\ansys\\bin\\winx64\\ANSYS221.exe"
" -smp -np 8 -j JOBNAME -b -i data.inp -o data.out"'
cmd3 = 'del "C:\\\\ANSYSRUN\\JOBNAME.lock"'

if(os.path.isfile('C:\\\\ANSYSRUN\\JOBNAME.lock')):
    os.system(cmd3)

if(aviso):
    print("Initializing Ansys...")
    print(vars)
ti = time.time()
os.system(cmd)
os.system(cmd2)
te = time.time() - ti
if(aviso):
    print("Ansys Finished - Time Elapsed: {0:.2f}s".format(te))
with open("C:\\\\ANSYSRUN\\cargas.txt",'r') as file:
    CargaRuptura = float(file.read().split()[-2])
if(aviso):
    print("Slab Rupture Load: {0:.3f} kN".format(CargaRuptura))
return CargaRuptura

```

Exemplo de aplicação para obtenção de uma carga de ruptura:

```

varX = {
    'h'          : 10,
    'vao_x'      : 250,
    'vao_z'      : 250,
    'cobr'       : 2.0,
    'vizinhanca': 1,
    'phi'        : 0.63,
    'esp'        : 19.1,
    'asc'        : 0.312,
    'phin'       : 0.63,
    'espn'       : 12.5,
    'ascn'       : 0.312,
    'fcm'        : 3.00*1.32,

```

```
'fsy'          : 54.50  
}  
ruptura = RodaLaje(varX)
```

O arquivo *scriptlajes* (não incluído no apêndice) contém duas funções: a primeira devolve uma *string* com o *script* a ser executado pelo ANSYS, onde as variáveis das lajes que são alteradas entre uma execução e outra são trocadas pelos valores do dicionário *varX*, como pode ser visto no exemplo de aplicação. Assim, quando a função `scriptlajes.script(varX)` é chamada, ela retorna o *script* do ANSYS com todas as variáveis definidas pelo dicionário.

Uma segunda função existe no arquivo, chamada `scriptlajes.saidaDados()`. Essa função não recebe argumentos de entrada, somente retorna o arquivo de pós-processamento do modelo numérico. É importante que esse pós processamento salve em arquivos de texto os resultados da análise, para que posteriormente eles possam ser lidos no *Python* automaticamente.

## APÊNDICE C – OBTENÇÃO DA CARGA DE RUPTURA PELA TEORIA DE RANKIN

Neste apêndice foi colocado o roteiro para obtenção da carga de ruptura do caso de dimensionamento L30-4-08 segundo a teoria proposta por Rankin e Long (1997). Como as análises determinísticas desenvolvidas neste trabalho foram realizadas nos pontos médios das variáveis aleatórias apresentadas nas tabelas Tabela 7.2 e Tabela 7.3, o primeiro passo para obtenção da carga de ruptura é o cálculo do valor da resistência à compressão do concreto e tensão de escoamento do aço:

$$f_c = 1,22 * f_{ck} = 1,22 * 30 = 36,6MPa$$

$$f_y = 1,22 * f_{yk} = 1,22 * 500 = 610MPa$$

A Tabela 7.1 contém os outros dados da laje necessários para obtenção da carga de ruptura:

$$L_x = L_y = 400cm$$

$$h = 8cm$$

$$A_{sv} = 1,35cm^2/m$$

$$A_{se} = 1,87cm^2/m$$

A partir dos quais são calculados:

$$d = h - 2cm - \frac{0,5cm}{2} = 5,75cm$$

$$\rho = \frac{A_{svl}}{b * h} = \frac{1,35}{100 * 8} = 0,169\%$$

$$\bar{\rho} = \frac{A_{se}}{b * h} = \frac{1,87}{100 * 8} = 0,234\%$$

Agora, de posse de todas as informações, o cálculo é feito de acordo com as equações 2.1 a 2.11, na ordem inversa:

$$M_{bal} = \frac{3,66 * 5,75^2}{3} = 40,34 kNm/m$$

$$I_{w,max} = 8 * 40,34 + 4 * 40,34 * \frac{400 - 400}{400} = 322,69 kNm/m$$

$$d_a = 8 - (0,00169 + 0,00234) * \frac{61,0 * 5,75}{0,85 * 3,66} = 7,55 cm$$

$$C_a = 0,12 - 0,001 * \frac{400}{7,55} = 0,067$$

$$M_{av} = 0,067 * 3,66 * 7,55^2 = 13,963 kNm/m$$

$$M_b = 0,00169 * 61,0 * 5,75^2 * \left(1 - 0,59 * \frac{0,00169 * 61,0}{3,66}\right) = 3,35 kNm/m$$

$$M_{be} = 0,00234 * 61,0 * 5,75^2 * \left(1 - 0,59 * \frac{0,00169 * 61,0}{3,66}\right) = 4,61 kNm/m$$

$$I_a = 8 * 13,963 + 4 * 13,963 * \frac{400 - 400}{400} = 111,7 kNm/m$$

$$I_b = 8 * (3,35 + 4,61) + 4 * (3,35 + 4,61) * \frac{400 - 400}{400} = 63,62 kNm/m$$

$$I_w = 0,8 * 111,7 + 63,62 = 152,98 \leq I_{w,max}$$

Finalmente, a carga de ruptura é obtida por:

$$N_{ps} = \frac{6 * 152,98}{4 * (3 * 4 - 4)} = 28,68 \text{ kN/m}^2$$

$$Q_u = 28,68 * 4 * 4 = 458,95 \text{ kN}$$