

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

**DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTAS PARA ANÁLISE DE  
ESCOAMENTOS EM COLUNAS DE BOLHAS: ESTIMADORES DE ERRO  
DE DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL EM SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E  
ALGORITMO COM FILTRO DE KALMAN PARA CARACTERIZAÇÃO  
EXPERIMENTAL**

TESE DE DOUTORADO

**VINÍCIUS DA COSTA ÁVILA**

PORTO ALEGRE  
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

**DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTAS PARA ANÁLISE DE  
ESCOAMENTOS EM COLUNAS DE BOLHAS: ESTIMADORES DE ERRO  
DE DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL EM SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E  
ALGORITMO COM FILTRO DE KALMAN PARA CARACTERIZAÇÃO  
EXPERIMENTAL**

**VINÍCIUS DA COSTA ÁVILA**

Tese de Doutorado apresentado ao Programa de Pós-Graduação Engenharia Química da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Química.

Área de concentração: Pesquisa e Desenvolvimento de Processos

**Orientadores:**

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Isabel Cristina Tessaro**

**Prof. Dr. Nilo Sérgio Medeiros Cardozo**

PORTO ALEGRE

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova o Exame de Qualificação ***DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTAS PARA ANÁLISE DE ESCOAMENTOS EM COLUNAS DE BOLHAS: ESTIMADORES DE ERRO DE DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL EM SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E ALGORITMO COM FILTRO DE KALMAN PARA CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL***, elaborado por Vinícius da Costa Ávila, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Química.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Marcio Schwaab

---

Prof. Dra. Adriane Prisco Petry

---

Prof. Dr. Argimiro Resende Secchi

# Resumo

Ferramentas numéricas e experimentais se complementam no estudo de diversos sistemas e cada uma apresenta vantagens e limitações. Em termos de aspectos numéricos, destaca-se a lacuna científica relacionada a estimativas acuradas do erro de discretização espacial em simulações de escoamentos com bolhas. Em relação a aspectos experimentais, um importante desafio no estudo de escoamentos complexos é o de se obter dados confiáveis a partir de técnicas ópticas de obtenção de imagens. Nesse contexto, considerando escoamentos com bolhas dispersas, este trabalho tem como objetivos principais (A) realizar uma investigação comparativa da adequabilidade de estimadores do erro de discretização espacial para análises numéricas e (B) desenvolver e avaliar um algoritmo com base no filtro de Kalman para caracterização experimental do sistema. Para a parte numérica do trabalho, os métodos de estimação do erro considerados foram: a extrapolação de Richardson (RExt), o método proposto por Eça e Hoekstra com mínimos quadrados ponderados (EH-wLS), e o estimador direto da série de Taylor (DTS). Os estimadores foram analisados com base em soluções de diferentes modelos para o escoamento: o modelo de dois fluidos padrão (TFM), uma versão hiperbólica do TFM (hTFM), e o modelo de mistura (MixtM). Médias geométricas da estimativa do erro e da diferença entre a solução obtida com a malha considerada e uma solução quase independente da malha foram usadas como métricas de comparação para os estimadores do erro. As estimativas do erro de discretização espacial com o método DTS apresentaram baixa acurácia para malhas grossas. Ambos os métodos EH-wLS e RExt geraram bons resultados para o MixtM, com o segundo sendo favorecido por seu menor custo computacional. O método RExt não conseguiu lidar adequadamente com a convergência oscilatória exibida pelo hTFM. O EH-wLS foi o único método que exibiu boa adequabilidade tanto para o MixtM quanto para o hTFM. Em relação à parte experimental deste trabalho, o algoritmo desenvolvido foi aplicado para escoamentos com bolhas a duas vazões de aeração, de 3 e 5 L/min, utilizando mais de 14000 imagens sequenciais. Os resultados obtidos estão de acordo com trabalhos da literatura: (i) os histogramas de tamanhos de bolha se ajustaram adequadamente a distribuições log-normal; (ii) a velocidade das bolhas foi similar entre os escoamentos com diferentes vazões de aeração devido ao efeito de obstrução para a ascensão de bolhas gerado pela proximidade das mesmas na vazão de aeração mais alta; (iii) os valores médios locais dos números adimensionais Eötvös e Reynolds exibiram uma correlação linear entre eles, com os coeficientes de correlação dependentes da vazão de aeração. A acurácia do algoritmo empregado foi quantificada em termos da raiz da diferença quadrática média (NRMSD) entre os resultados médios locais obtidos com o algoritmo e aqueles obtidos com o procedimento manual. Os valores de NRMSD indicam que o algoritmo apresenta boa acurácia para a determinação de velocidade das bolhas, com um erro de aproximadamente 6 e 15 % para os escoamentos a 3 e 5 L/min, respectivamente.

## Palavras-chave

Escoamento com bolhas dispersas; Erro de discretização espacial; CFD; Técnica óptica de aquisição de imagens; Filtro de Kalman.

# Abstract

Both numerical and experimental tools support the study of several systems, and each presents their own advantages and limitations. Considering numerical aspects, there is a scientific gap related to accurate spatial discretization error estimates in bubbly flow simulations. Regarding experimental aspects, a major challenge on studying complex bubbly flows is to obtain reliable data from optical imaging techniques. In this context, this work includes two main objectives: (A) investigate comparatively the suitability of spatial discretization error estimators for the simulations of a benchmark bubbly flow and (B) develop and evaluate an algorithm with the Kalman filter for the characterization of complex bubbly flows consisting of large, deformable, non-spherical, and overlapping bubbles. For the numerical work, the following error estimation methods were considered: the Richardson extrapolation (RExt), the method proposed by Eça and Hoekstra using weighted least-squares (EH-wLS), and the direct Taylor series (DTS). These estimators were compared based on solutions obtained with three modeling approaches for the bubbly flow: standard two-fluid model (TFM), a hyperbolic version of the TFM (hTFM), and mixture model (MixtM). Geometric means of the error estimate and of the difference between the solution obtained with the considered mesh and a nearly mesh-independent solution were used as comparison metrics for the error estimators. The DTS estimates were considered too inaccurate for coarse meshes. Both EH-wLS and RExt methods generated very good results for the MixtM, with the latter being favored by its lower computational cost. The RExt method could not deal adequately with the oscillatory convergence exhibited by the hTFM. The EH-wLS was the only method that showed good suitability for both MixtM and hTFM. For the experimental work, the developed algorithm was employed for bubbly flows generated by two aeration rates, of 3 and 5 L/min, using more than 14000 frames. The obtained results were in agreement with published papers: (i) the histograms of bubble sizes for both flows were adequately fitted by log-normal distributions; (ii) the velocity of the bubbles presented a low difference between airflow rates due to the hindering effect of bubble proximity at the higher airflow rate; (iii) the dimensionless numbers Eötvös and Reynolds showed a linear correlation between them, with a dependence of the correlation coefficients on the airflow rate. The accuracy of the employed algorithm was quantified using the normalized root mean squared difference (NRMSD) between the local results obtained with the algorithm and the local results obtained with a manual procedure. The NRMSD values indicated that the developed algorithm presents good accuracy for the bubble velocity determination, with an error of approximately 6 % and 15 % for the flows at 3 and 5 L/min, respectively.

## Keywords

Bubbly flow; Spatial discretization error; CFD; Optical imaging; Kalman filter.

# Sumário

<b>Resumo.....</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract .....</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras .....</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas .....</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Símbolos .....</b>	<b>ix</b>
<b>Introdução.....</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e objetivos .....	1
1.2 Estrutura do trabalho.....	5

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas



# Lista de Símbolos

$A_d$	área projetada pela bolha	$m^2$
$A^{\alpha\beta}$	tensor métrico de superfície	-
$a_i$	concentração de área interfacial de partículas de volume $V$	$m^2$
$B_d$	volume da bolha	$m^3$
$C_k$	coeficiente da força interfásica $k$ ( $BD$ , $D$ , $L$ , $TD$ , ou $VM$ )	-
$D_d$	diâmetro da bolha	$m$
$F$	propriedade genérica	-
$\underline{F}$	matriz de transição de estado	-
$\underline{F}_k$	vetor da força interfásica $k$ ( $BD$ , $D$ , $L$ , $TD$ , ou $VM$ )	$N$
$F_s$	fator de segurança	-
$f$	função de distribuição da densidade do número de partículas por unidade de volume ou distância focal das lentes	$m^{-3}$ ou $m$
$\underline{g}$	vetor gravidade	$m/s^2$
$h$	espaçamento da malha	$m$
	termo fonte da PBE	-
$\underline{H}$	matriz de observação	-
$\underline{I}$	matriz identidade	-
$I_\varphi$	termo interfacial de transferência de uma propriedade genérica entre fases	-
$J$	fluxo superficial da variável genérica $\psi$	-
$k$	energia cinética da turbulência	$m^2/s^2$
$\underline{K}$	ganho de Kalman	-
$l$	comprimentos característicos da turbulência	$m$
$M$	função de densidade de estado	-
	número de classes para PBE	-

$\underline{\underline{M}}_\varphi$	vetor de transferência de quantidade de movimento entre fases	$kg/(m^2 \cdot s^2)$
$\underline{n}_\varphi$	vetor unitário na direção normal e sentido externo ao fluido $\varphi$	-
$n$	número de quadros	-
$n_r$	número de sub-regiões	-
$p$	pressão	$Pa$
	ordem de convergência	-
$\hat{p}$	ordem de convergência observada	-
$\underline{\underline{P}}$	matriz de incerteza de predição	-
$r$	razão de refino entre malhas	-
$\underline{\underline{R}}$	matriz de incerteza de medição	-
$\underline{\underline{Q}}$	matriz de incerteza do processo	-
$s$	desvio padrão	-
$\underline{S}$	vetor da área da face do volume de discretização	$m^2$
$t_\alpha$	tensor híbrido de interface	$Pa$
$\underline{\underline{T}}$	tensor das tensões totais	$Pa$
$\underline{U}$	vetor velocidade	$m/s$
$V$	volume	$m^3$
$y^+$	distância da parede adimensional	-
$\underline{\underline{Z}}$	matriz de medições	-

### Letras Gregas

$\alpha$	fração volumétrica	-
$\delta$	espessura da interface	$m$
$\varepsilon$	taxa de dissipação de energia da turbulência	$m^2/s^3$
	erro de discretização espacial	-
$\varepsilon_j$	metade do intervalo de tempo em que a característica da interface $j$ domina	$s$

	variável genérica	-
$\phi$	termo fonte da IATE	-
	termo fonte de variável genérica $\psi$	-
$\mu$	viscosidade dinâmica do fluido	$Pa \cdot s$
$\nu$	viscosidade cinemática do fluido	$m^2/s$
$\rho$	massa específica do fluido	$kg/m^3$
$\sigma$	tensão superficial	$N/m$
$\underline{\underline{\tau}}$	tensor das tensões viscosas	$Pa$
$\underline{\underline{\tau^T}}$	tensor das tensões turbulentas	$Pa$
$\psi$	variável genérica em base mássica	-
$\omega$	taxa de dissipação de energia da turbulência específica	$1/s$

### Sobrescritos e Subscritos

,	indica o componente de flutuação turbulenta da variável <i>ou</i> derivada em relação ao tempo
' $\beta$	denota a derivada covariante de superfície
<i>BD</i>	dispersão por bolhas
<i>BI</i>	turbulência induzida por bolhas
<i>c</i>	fase contínua <i>ou</i> centróide
<i>d</i>	fase discreta
<i>D</i>	arraste
<i>i</i>	interface
<i>j</i>	j-ésima interface
<i>L</i>	sustentação lateral
<i>m</i>	mistura
<i>n</i>	referente ao componente normal
<i>ni</i>	referente ao componente normal de variável da interface

$P$	ponto no domínio, associado a um volume de discretização
$r$	referente à velocidade relativa entre as fases
$SI$	turbulência induzida por cisalhamento
$TD$	dispersão turbulenta
$t$	indica a transposta
$T$	referente à turbulência
$VM$	massa virtual
$\varphi$	denota a fase
$\varphi_j$	referente à velocidade de deslizamento da fase $\varphi$
$\varphi_m$	referente à velocidade de difusão da fase $\varphi$

### Caracteres de acento

—	média
=	média ponderada pela função de densidade de estado (def. Eq. 2.11)
^	média ponderada pela massa específica (def. Eq. 2.13) <i>ou</i> valor estimado (def. Eq. 2.16)

### Siglas

BRM	Biorreator com Membranas
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i> (Dinâmica de Fluidos Computacional)
DNS	<i>Direct Numerical Simulation</i> (Simulação Numérica Direta)
DOF	<i>depth of field</i> (profundidade de foco)
DTS	<i>Direct Taylor Series</i> (Direto da Série de Taylor)
EH-wLS	<i>Eça and Hoekstra weighted Least Squares</i> (Mínimos Quadrados ponderados de Eça e Hoekstra)
GAMG	<i>Geometric Algebraic Multi-Grid</i> (Multi-Grid Algébrico-Geométrico)
hTFM	<i>Hyperbolic Two-Fluid Model</i> (Modelo de Dois Fluidos Hiperbólico)
IATE	<i>Interfacial Area Transport Equation</i> (Equação de Transporte para a Área Interfacial)
KF	<i>Kalman filter</i> (Filtro de Kalman)

LES	<i>Large Eddies Simulation</i> (Simulação dos Grandes Vórtices)
LS	<i>Least Squares</i> (Mínimos Quadrados)
MixtM	<i>Mixture Model</i> (Modelo de Mistura)
NRMSD	RMSD normalizado
PBE	<i>Population Balance Equation</i> (Equação de Balanço Populacional)
PIMPLE	PISO ( <i>Pressure-Implicit Split-Operator</i> ) + SIMPLE ( <i>Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations</i> )
RANS	<i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes</i> (Média de Reynolds de Navier-Stokes)
RExt	<i>Richardson extrapolation</i> (Extrapolação de Richardson)
RMSD	<i>root mean squared difference</i> (raiz da diferença quadrática média)
TFM	<i>Two-Fluid Model</i> (Modelo de Dois Fluidos)



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação e objetivos

A importância de escoamentos com bolhas é evidenciada pela presença dos mesmos em diversos processos industriais, em equipamentos como reatores de coluna de bolhas, evaporadores, e trocadores de calor. Compreender os padrões de escoamento em tais sistemas é relevante para o projeto de novos equipamentos, escalonamento de equipamentos existentes, e para o desenvolvimento e melhoria de técnicas de otimização e controle.

Para o estudo desses escoamentos, dois grandes grupos de ferramentas são utilizados, sendo elas experimentais e numéricas, cada qual com suas vantagens e limitações. As medições experimentais podem ser destrutivas, invasivas, demoradas e caras. Por outro lado, as metodologias numéricas podem utilizar modelos matemáticos que não retratem de maneira acurada o fenômeno estudado, possuir problemas de estabilidade numérica e exigir alta capacidade computacional.

Dentre as ferramentas experimentais, as chamadas não-invasivas, em especial ferramentas ópticas de aquisição de imagens, têm sido o foco de diversas pesquisas em escoamentos com bolhas (AL-YAHIA; YOON; JO, 2019; AUGUSTYNIAK; PERKOWSKI; MOSDORF, 2020; BORER; DELBRUCK; RÖSGEN, 2017; CERQUEIRA et al., 2018; FU;

---

LIU, 2018; GHORBANI et al., 2016; HESSENKEMPER; ZIEGENHEIN, 2018; KIM; PARK, 2019; LEGENDRE; ZEVENHOVEN, 2019; LIU et al., 2020; MANDALAHALLI et al., 2020; PRAKASH; KUMAR MAJUMDER; SINGH, 2020; WANG; LAI; SOCOLOFSKY, 2019; ZHAO et al., 2017; ZHOU; NIU, 2020), justamente pelo fato de que essas ferramentas não ocasionam perturbações no escoamento.

Contudo, obter informações úteis, acuradas e confiáveis a partir das imagens adquiridas ainda representa um desafio para escoamentos mais complexos devido à, e.g., sobreposição de bolhas, polidispersão de tamanho de bolhas e presença de bolhas fora de foco (CERQUEIRA et al., 2018; LEGENDRE; ZEVENHOVEN, 2019; MANDALAHALLI et al., 2020; SHEPARD; HÖFT, 2019; ZHOU; NIU, 2020).

As metodologias existentes para a determinação da trajetória de bolhas podem ser classificadas em dois grandes grupos: as relacionadas a inferência probabilística (e.g., o filtro de Kalman e o filtro de Partícula) e as relacionadas a otimização determinística (e.g., a Correspondência de Grafos Bipartidos e a Programação Dinâmica). Ao contrário das ferramentas de otimização determinística, as de inferência probabilística podem ser aplicadas para rastrear objetos em tempo real, o que configura uma vantagem relevante no seu uso em estratégias de controle em plantas industriais. Dentre as ferramentas de inferência probabilística, apesar de o filtro de Kalman ser tipicamente apenas capaz de lidar com sistemas dinâmicos lineares, essa característica não representa uma restrição neste trabalho devido à alta taxa de aquisição de imagens utilizada, a qual permite a aproximação do movimento das bolhas como sendo linear de uma imagem para outra.

O KF tem sido empregado como parte de algoritmos de extração de dados de imagem para obter trajetórias e velocidades de múltiplos objetos simultaneamente em diversos sistemas de alta complexidade, como pessoas em multidões, estruturas virais em imagens de microscópio, e veículos em tráfego (ABDULGHAFOOR; ABDULLAH, 2022; BABU; PARTHASARATHY, 2022; KLASSEN; STEINHAGE, 2022; RITTER et al., 2021; WANG; MU, 2020; WOJKE; BEWLEY; PAULUS, 2017; XIAO et al., 2022; XU et al., 2022). Ainda assim, apenas alguns poucos trabalhos científicos fizeram uso do KF em escoamentos com bolhas e, apesar das relevantes contribuições desses trabalhos, eles não contemplaram a análise de escoamentos de bolhas em líquidos tipicamente encontrados em aplicações industriais. Escoamentos de bolhas em líquido em aplicações industriais comumente são não-homogêneos,



---

contém bolhas não-esféricas (MIKAELIAN et al., 2015; ZIEGENHEIN; LUCAS, 2019) e bolhas grandes de formato *cap-spherical* (RUZICKA; PUNCOCHAR; SIMCIK, 2021).

Em termos de ferramentas numéricas, diversos pesquisadores têm focado seus trabalhos na modelagem de escoamentos com bolhas através do uso da fluidodinâmica computacional (CFD, *computational fluid dynamics*) (ASKARI; PROULX; PASSALACQUA, 2018; BHUSARE et al., 2017; CHERNYSHEV; SCHIMIDT, 2017; DA COSTA ÁVILA; TESSARO; CARDOZO, 2019; FRAGA et al., 2016; HEYLMUN et al., 2019; LI; LI, 2019; LIAO et al., 2019; MARSCHALL et al., 2011; MCCLURE et al., 2014; SARDINA et al., 2019; SILVA; D&APOS;ÁVILA; MORI, 2012).

A modelagem de escoamentos com bolhas utilizando a complexa combinação das equações de balanço monofásicas (equações locais instantâneas) de cada fase e equações das múltiplas interfaces móveis não é uma estratégia realística para aplicações industriais (ISHII; HIBIKI, 2011), especialmente devido ao alto custo computacional associado ao uso dessa metodologia. Por causa disso, modelos conceituais foram desenvolvidos, baseados em médias de variáveis locais, sendo o modelo de dois fluidos (TFM, *two-fluid model*) e o modelo de mistura (MixtM, *mixture model*) os mais utilizados (ISHII; HIBIKI, 2011; KOLEV, 2015; MOREL, 2015; PROSPERETTI; TRYGGVASON, 2007; YEOH; TU, 2010). O TFM é um modelo mais complexo e completo que o modelo de mistura e consegue prever fenômenos associados à interação dinâmica entre as fases (ISHII; HIBIKI, 2011).

Uma grande desvantagem do TFM clássico é que suas equações são apenas condicionalmente hiperbólicas e suas regiões de hiperbolicidade são relativamente pequenas comparadas com o tamanho do domínio de existência de solução física. A falta de hiperbolicidade frequentemente resulta em uma série de dificuldades, algumas delas inter-relacionadas: mal condicionamento matemático; aumento das instabilidades numéricas conforme a malha é refinada; limitações em termos de testes de verificação de código e de avaliação da acurácia e precisão das previsões (BERTODANO et al., 2017; PANICKER; PASSALACQUA; FOX, 2018; PROSPERETTI; TRYGGVASON, 2007). Essas dificuldades são particularmente críticas para o uso de estimadores de erro, os quais são essenciais quando se objetiva aplicar resultados CFD como parte de algoritmos de refinamento adaptativo ou ferramentas de otimização e controle.

---

Diversos pesquisadores têm desenvolvido formulações hiperbólicas do modelo de dois fluidos (hTFM, *hyperbolic two-fluid model*) (DAVIDSON, 1990; JARETEG et al., 2017; LAHEY et al., 1980; LHUILLIER; CHANG; THEOFANOUS, 2013; LI et al., 2018; PANICKER; PASSALACQUA; FOX, 2018; SONDERMANN et al., 2019; TISELJ; PETELIN, 1997; TOUMI; KUMBARO, 1996). Apesar disso e da importância amplamente conhecida de se obter estimativas confiáveis do erro de discretização espacial, os artigos científicos relacionados à simulação de escoamentos com bolhas não utilizam estimadores de erro.

Com base no que foi discutido nos últimos parágrafos, esse trabalho tem como objetivos, considerando escoamentos com bolhas dispersas: (A) realizar uma investigação comparativa da adequabilidade de estimadores do erro de discretização espacial para análises numéricas; e (B) desenvolver e avaliar um algoritmo com base no filtro de Kalman para caracterização experimental do sistema.

Para isso, definiram-se os seguintes objetivos específicos:

- (A1) aferir as regiões de hiperbolicidade do MixtM e do TFM;
  - (A2) realizar análise comparativa de predições para a seleção de submodelos de interação interfacial para a abordagem de dois fluidos;
  - (A3) realizar a comparação das predições com dados experimentais da literatura (DEEN; SOLBERG; HJERTAGER, 2001) e analisar comparativamente a predição da dinâmica do escoamento com as três abordagens de modelagem empregadas;
  - (A4) realizar análise de desempenho de diferentes estimadores do erro de discretização espacial, nomeadamente, a extrapolação de Richardson (RExt) (OBERKAMPF; ROY, 2010; PHILLIPS; ROY, 2014; ROACHE, 1994; ROY, 2003; SILVA et al., 2018), o método proposto por Eça e Hoekstra (EÇA; HOEKSTRA, 2002, 2014) utilizando o método dos mínimos quadrados ponderados (EH-wLS), e o estimador direto da série de Taylor (DTS) (JASAK, 1996; JASAK; GOSMAN, 2000).
- (B1) projetar e construir um sistema experimental de escoamentos não-homogêneos com bolhas não-esféricas dispersas no meio líquido para duas vazões de entrada

de ar, 3 e 5 L/min, e um sistema óptico de aquisição de imagens para caracterização dos escoamentos;

- (B2) implementar um algoritmo para processamento e extração de dados das imagens coletadas utilizando o filtro de Kalman para aferição da velocidade das bolhas;
- (B3) caracterizar os escoamentos com base nos grupos adimensionais Eötvös, Morton e Reynolds e na distribuição de diâmetro e velocidade das bolhas;
- (B4) quantificar a acurácia do algoritmo empregado.

## 1.2 Estrutura do trabalho

Além do presente capítulo, este trabalho contém outros quatro, cujos conteúdos se detalham a seguir.

No Capítulo 1, foi realizada a contextualização do trabalho, apresentação das suas motivações e objetivos, e descrição da sua estrutura.

No Capítulo 2, são apresentados os fundamentos teóricos relacionados a escoamentos com bolhas e diferentes aspectos de sua modelagem e caracterização experimental a partir de imagens, assim como a teoria e as equações relacionadas aos estimadores do erro de discretização espacial e ao filtro de Kalman. A revisão da literatura referente a estudos de discretização de malha e a estudos que utilizam o filtro de Kalman na obtenção de dados experimentais para o tipo de escoamento em questão também é abordada.

No Capítulo 3, a metodologia é descrita em duas partes – Metodologia Numérica e Metodologia Experimental. Na parte de Metodologia Numérica, são descritas as informações sobre os modelos, implementações, malhas, condições de contorno, aspectos numéricos das simulações e estimadores do erro de discretização espacial empregados. Na parte de Metodologia Experimental, são descritas as informações a respeito do sistema experimental de caracterização dos escoamentos, números adimensionais computados, captura e tratamento das imagens, identificação das bolhas, determinação da velocidade das bolhas com uso do filtro de Kalman, rastreamento de múltiplas bolhas simultaneamente e determinação da distribuição espacial das variáveis de interesse. Além disso, em ambas as partes, detalha-se os escoamentos

e colunas de bolhas estudados e a aplicação de análises estatísticas e métricas para comparação e avaliação de acurácia dos resultados.

No Capítulo 4, os resultados são exibidos e discutidos. Em relação aos resultados numéricos, após análise de hiperbolicidade das estratégias de modelagem utilizadas (TFM, hTFM, e MixtM) e análise de predições obtidas com diferentes submodelos para o TFM e o hTFM, é tratado da convergência de malha, feita uma comparação das predições obtidas aqui com dados experimentais da literatura, analisado o comportamento dinâmico do escoamento predito pelos modelos, e avaliado o desempenho dos diferentes estimadores do erro de discretização espacial utilizados. Em relação aos resultados experimentais, é realizada inicialmente uma análise de caracterização dos escoamentos com base em grupos adimensionais relevantes e na distribuição de diâmetro e velocidade das bolhas. Em um segundo momento, a quantificação de acurácia do algoritmo empregado é realizada com base em métricas previamente definidas.

No Capítulo 5, são apresentadas as conclusões do trabalho juntamente com as possibilidades de trabalhos futuros.

## Referências

ABDULGHAFOOR, N. H.; ABDULLAH, H. N. A novel real-time multiple objects detection and tracking framework for different challenges. **Alexandria Engineering Journal**, v. 61, n. 12, p. 9637–9647, dez. 2022.

ACUÑA, C. A.; FINCH, J. A. Tracking velocity of multiple bubbles in a swarm. **International Journal of Mineral Processing**, v. 94, n. 3–4, p. 147–158, abr. 2010.

ADETUNJI, O.; RAWATLAL, R. Estimation of bubble column hydrodynamics: Image-based measurement method. **Flow Measurement and Instrumentation**, v. 53, p. 4–17, mar. 2017.

AL-YAHIA, O. S.; YOON, H. J.; JO, D. Bubble dynamic parameters during subcooled flow boiling under uniform and non-uniform transverse heat distribution. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 143, p. 118508, nov. 2019.

ASKARI, E.; PROULX, P.; PASSALACQUA, A. Modelling of Bubbly Flow Using CFD-PBM Solver in OpenFOAM: Study of Local Population Balance Models and Extended Quadrature Method of Moments Applications. **ChemEngineering**, v. 2, n. 1, p. 8, 2018.

AUGUSTYNIAK, J.; PERKOWSKI, D. M.; MOSDORF, R. Measurement of multifractal character of bubble paths using image analysis. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 117, p. 104701, out. 2020.

BABU, P.; PARTHASARATHY, E. FPGA implementation of multi-dimensional Kalman filter for object tracking and motion detection. **Engineering Science and Technology, an International Journal**, v. 33, p. 101084, set. 2022.

BEHZADI, A.; ISSA, R. I.; RUSCHE, H. Modelling of dispersed bubble and droplet flow at high phase fractions. **Chemical Engineering Science**, v. 59, n. 4, p. 759–770, 2004.

BERTODANO, M. L. DE et al. **Two-Fluid Model Stability, Simulation and Chaos**. Cham: Springer International Publishing, 2017.

BHUSARE, V. H. et al. CFD simulations of a bubble column with and without internals by using OpenFOAM. **Chemical Engineering Journal**, v. 317, p. 157–174, 2017.

BORER, D.; DELBRUCK, T.; RÖSGEN, T. Three-dimensional particle tracking velocimetry using dynamic vision sensors. **Experiments in Fluids**, v. 58, n. 12, p. 165, dez. 2017.

BROOKNER, E. **Tracking and Kalman Filtering Made Easy**. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1998.

BUFFO, A.; VANNI, M.; MARCHISIO, D. L. Simulation of a reacting gas–liquid bubbly flow with CFD and PBM: Validation with experiments. **Applied Mathematical Modelling**, v. 44, p. 43–60, 2017.

BURGER, W.; BURGE, M. J. **Digital Image Processing: An Algorithmic Introduction Using Java**. London: Springer London, 2016.

- 
- BURLUTSKII, E.; DI FELICE, R. Experimental and numerical study of two-phase flow mixing in gas-liquid external-loop airlift reactor. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 119, p. 1–13, 2019.
- CERQUEIRA, R. F. L. et al. Image processing techniques for the measurement of two-phase bubbly pipe flows using particle image and tracking velocimetry (PIV/PTV). **Chemical Engineering Science**, v. 189, p. 1–23, nov. 2018.
- CHALLA, S. et al. **Fundamentals of Object Tracking**. 1. ed. [s.l.] Cambridge University Press, 2011.
- CHEN, C. H.; QIDWAI, U. **Digital Image Processing**. Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, LLC, 2009.
- CHERNYSHEV, A. S.; SCHIMIDT, A. A. Investigation of the evolution of the bubble size distribution in the ascending and descending flows. **Journal of Physics**, 2017.
- CHUANG, T. J.; HIBIKI, T. Interfacial forces used in two-phase flow numerical simulation. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 113, p. 741–754, 2017.
- CLIFT, R.; GRACE, J. R.; WEBER, M. E. **Bubbles, drops, and particles**. New York: Academic Press, 1978.
- CLOETE, S.; OLSEN, J. E.; SKJETNE, P. CFD modeling of plume and free surface behavior resulting from a sub-sea gas release. **Applied Ocean Research**, v. 31, n. 3, p. 220–225, 2009.
- COLEMAN, H. W.; STEELE, W. G. **EXPERIMENTATION, VALIDATION, AND UNCERTAINTY ANALYSIS FOR ENGINEERS**. 4th. ed. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2018.
- COULALOGLOU, C. A.; TAVLARIDES, L. L. Description of interaction processes in agitated liquid-liquid dispersions. **Chemical Engineering Science**, v. 32, n. 11, p. 1289–1297, 1977.
- CROWE, C. T. et al. **Multiphase Flows with Droplets and Particles**. [s.l.] CRC Press, 2011.
- DA COSTA ÁVILA, V.; TESSARO, I. C.; CARDOZO, N. S. M. The role of turbulence models in the modeling of membrane bioreactors. **Chemical Engineering and Processing - Process Intensification**, p. 107639, 22 ago. 2019.
- DAVIDSON, M. R. Numerical calculations of two-phase flow in a liquid bath with bottom gas injection: The central plume. **Applied Mathematical Modelling**, v. 14, n. 2, p. 67–76, 1990.
- DEEN, N. **An Experimental and Computational Study of Fluid Dynamics in Gas-Liquid Chemical Reactors**. [s.l.] Aalborg University Esbjerg, 2001.
- DEEN, N. G.; SOLBERG, T.; HJERTAGER, B. H. Large eddy simulation of the gas-liquid flow in a square cross-sectioned bubble column. **Chemical Engineering Science**, v. 56, n. 21–22, p. 6341–6349, 2001.

---

DINH, T. N.; NOURGALIEV, R. R.; THEOFANOUS, T. G. **Understanding of the Ill-posed two-fluid model**. The 10th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-10). **Anais...**Seoul, Korea: 2003.

DOMÍNGUEZ, D.; GONZALO, J.; LÓPEZ, D. Numerical modelling of a wind profiler system based on bubble tracking. **Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems**, v. 20, n. 3, p. 209–223, 4 maio 2014.

DREW, D. A.; LAHEY, R. T. The virtual mass and lift force on a sphere in rotating and straining inviscid flow. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 13, n. 1, p. 113–121, 1987.

DREW, D. A.; PASSMAN, S. L. **Theory of Multicomponent Fluids**. New York, NY: Springer New York, 1999. v. 135

EÇA, L.; HOEKSTRA, M. **An Evaluation of Verification Procedures for CFD Applications**. 24th Symposium on Naval Hydrodynamics. **Anais...**Fukuoka, Japan: 2002.

EÇA, L.; HOEKSTRA, M. A procedure for the estimation of the numerical uncertainty of CFD calculations based on grid refinement studies. **Journal of Computational Physics**, v. 262, p. 104–130, 2014.

EGHORIETA, R. A.; AFOLABI, T. A.; PANACHAROENSAWAD, E. Drift flux modeling of transient high-viscosity-liquid and gas two-phase flow in horizontal pipes. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 171, n. July, p. 605–617, 2018.

FABIJAŃSKA, A. **Variance filter for edge detection and edge-based image segmentation**. Perspective Technologies and Methods in MEMS Design. **Anais...**2011.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 8ª ed. ed. [s.l.] LTC, 2014.

FRAGA, B. et al. A LES-based Eulerian-Lagrangian approach to predict the dynamics of bubble plumes. **Ocean Modelling**, v. 97, p. 27–36, 2016.

FU, Y.; LIU, Y. 3D bubble reconstruction using multiple cameras and space carving method. **Measurement Science and Technology**, v. 29, n. 7, p. 075206, 1 jul. 2018.

GAURAV, K.; MITTAL, G.; KARN, A. On the morphology of elongated bubbles during their formation at submerged orifices. **Chemical Engineering Science**, v. 250, p. 117395, mar. 2022.

GHORBANI, M. et al. Visualization of microscale cavitating flow regimes via particle shadow sizing imaging and vision based estimation of the cone angle. **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 78, p. 322–333, nov. 2016.

GREENSHIELDS, C. J. **OpenFOAM Programmer's Guide**. OpenFOAM Foundation, , 2015.

GREWAL, M. S.; ANDREWS, A. P. **Kalman filtering: theory and practice using MATLAB**. 3rd ed ed. Hoboken, N.J: Wiley, 2008.

---

Haji Mohammadi, M.; Sotiropoulos, F.; Brinkerhoff, J. R. Eulerian-Eulerian large eddy simulation of two-phase dilute bubbly flows. **Chemical Engineering Science**, v. 208, p. 115156, 2019.

Hessenkemper, H.; Ziegenhein, T. Particle Shadow Velocimetry (PSV) in bubbly flows. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 106, p. 268–279, set. 2018.

Heylmun, J. C. et al. A quadrature-based moment method for polydisperse bubbly flows. **Computer Physics Communications**, n. xxxx, 2019.

Ishii, M.; Hibiki, T. **Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow**. New York, NY: Springer New York, 2011.

Ishii, M.; Kim, S.; Kelly, J. Development of Interfacial Area Transport Equation. **Nuclear Engineering and Technology**, 2005.

Ishii, M.; Zuber, N. Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows. **AIChE Journal**, v. 25, n. 5, p. 843–855, 1979.

Jacobson, R. E. et al. (EDS.). **The manual of photography: photographic and digital imaging**. 9th ed ed. Oxford ; Boston, MA: Focal Press, 2000.

Jähne, B. **Digital Image Processing**. 6th. ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.

Jakobsen, H. A. **Chemical Reactor Modeling**. Cham: Springer International Publishing, 2014.

Jareteg, K. et al. On the dynamics of instabilities in two-fluid models for bubbly flows. **Chemical Engineering Science**, v. 170, p. 184–194, 2017.

Jasak, H. Error Analysis and Estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. Thesis submitted for the degree of doctor. Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, 1996. v. M, n. June, 1996.

Jasak, H.; Gosman, A. D. AUTOMATIC RESOLUTION CONTROL FOR THE FINITE-VOLUME METHOD, PART 1: A-POSTERIORI ERROR ESTIMATES. **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, v. 38, n. 3, p. 237–256, out. 2000.

Joshi, J. B. et al. Bubble generated turbulence and direct numerical simulations. **Chemical Engineering Science**, v. 157, p. 26–75, 2017.

Kalman, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Journal of Basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1 mar. 1960.

Kapur, J. N.; Sahoo, P. K.; Wong, A. K. C. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram. **Computer Vision, Graphics, and Image Processing**, v. 29, n. 3, p. 273–285, 1985.

Kim, Y.; Park, H. Upward bubbly flows in a square pipe with a sudden expansion: Bubble dispersion and reattachment length. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 118, p. 254–269, set. 2019.



- 
- KITTLER, J.; ILLINGWORTH, J. Minimum error thresholding. **Pattern Recognition**, v. 19, n. 1, p. 41–47, jan. 1986.
- KLASEN, M.; STEINHAGE, V. Improving wildlife tracking using 3D information. **Ecological Informatics**, v. 68, p. 101535, maio 2022.
- KOLEV, N. I. **Multiphase Flow Dynamics 1**. Cham: Springer International Publishing, 2015.
- KUMAR, S.; RAMKRISHNA, D. On the solution of population balance equations by discretization—I. A fixed pivot technique. **Chemical Engineering Science**, v. 51, n. 8, p. 1311–1332, abr. 1996.
- LAACKONEN, M.; ALOPAEUS, V.; AITTAMAA, J. Validation of bubble breakage, coalescence and mass transfer models for gas-liquid dispersion in agitated vessel. **Chemical Engineering Science**, v. 61, n. 1, p. 218–228, 2006.
- LAHEY, R. T. et al. The effect of virtual mass on the numerical stability of accelerating two-phase flows. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 6, n. 4, p. 281–294, 1980.
- LAHEY, R. T. The simulation of multidimensional multiphase flows. **Nuclear Engineering and Design**, v. 235, n. 10–12, p. 1043–1060, 2005.
- LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. The numerical computation of turbulent flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 3, n. 2, p. 269–289, 1974.
- LEGENDRE, D.; MAGNAUDET, J. The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 368, n. August, p. 81–126, 1998.
- LEGENDRE, D.; ZEVENHOVEN, R. Image analysis assessment of the effect on mixing on aqueous dissolution of CO<sub>2</sub> and air bubble swarms in a bubble column. **Chemical Engineering Research and Design**, v. 146, p. 379–390, jun. 2019.
- LHUILIER, D.; CHANG, C. H.; THEOFANOUS, T. G. On the quest for a hyperbolic effective-field model of disperse flows. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 731, n. September, p. 184–194, 2013.
- LI, C. H.; TAM, P. K. S. An iterative algorithm for minimum cross entropy thresholding. **Pattern Recognition Letters**, v. 19, n. 8, p. 771–776, jun. 1998.
- LI, W. et al. An investigation of numerical performance enhancement of RELAP5: Numerical stability, higher resolution and an alternative constitutive relation. **Nuclear Engineering and Design**, v. 328, n. September 2017, p. 309–320, 2018.
- LI, Y.; LI, D. Simulations of gas-liquid flow by the Eulerian-Eulerian method: a numerical study of nine cases. **Chemical Engineering Journal**, 4 jun. 2019.
- LIAO, Y. et al. Application of a novel model for bubble-induced turbulence to bubbly flows in containers and vertical pipes. **Chemical Engineering Science**, v. 202, p. 55–69, 2019.
- LIAO, Y.; LUCAS, D. A literature review on mechanisms and models for the coalescence process of fluid particles. **Chemical Engineering Science**, v. 65, n. 10, p. 2851–2864, 2010.

---

LIU, J.; GUI, W.; TANG, Z. Flow velocity measurement and analysis based on froth image SIFT features and Kalman filter for froth flotation. v. 21, out. 2013.

LIU, Z. et al. Hydrodynamics of gas phase in a shallow bubble column from in-line photography. **Chemical Engineering Science**, v. 221, p. 115703, ago. 2020.

LIU, Z.; LI, B. Scale-adaptive analysis of Euler-Euler large eddy simulation for laboratory scale dispersed bubbly flows. **Chemical Engineering Journal**, v. 338, n. 3, p. 465–477, 2018.

LONDON, B.; STONE, J.; UPTON, J. **Photography**. Twelfth edition ed. Boston: Pearson, 2017.

LOPEZ DE BERTODANO, M.; LAHEY, R. T.; JONES, O. C. Development of a  $k-\epsilon$  model for bubbly two-phase flow. **Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME**, v. 116, n. 1, p. 128–134, 1994.

LUBCHENKO, N. et al. A more fundamental wall lubrication force from turbulent dispersion regularization for multiphase CFD applications. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 98, p. 36–44, 2018.

LUO, W. et al. Multiple Object Tracking: A Literature Review. **Artificial Intelligence**, v. 293, p. 103448, abr. 2021.

MA, T. et al. Euler-Euler large eddy simulations for dispersed turbulent bubbly flows. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, v. 56, p. 51–59, 2015.

MAJUMDER, S. K.; KUNDU, G.; MUKHERJEE, D. Bubble size distribution and gas–liquid interfacial area in a modified downflow bubble column. **Chemical Engineering Journal**, v. 122, n. 1–2, p. 1–10, set. 2006.

MANDALAHALLI, M. M. et al. Electrolyte effects on recirculating dense bubbly flow: An experimental study using X-ray imaging. **AIChE Journal**, v. 66, n. 1, jan. 2020.

MARCHISIO, D. L.; FOX, R. O. **Computational Models for Polydisperse Particulate and Multiphase Systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

MARFAING, O. et al. Comparison and uncertainty quantification of two-fluid models for bubbly flows with NEPTUNE\_CFD and STAR-CCM+. **Nuclear Engineering and Design**, v. 337, n. December 2017, p. 1–16, 2018.

MARSCHALL, H. et al. Numerical Simulation of Dispersed Gas/Liquid Flows in Bubble Columns at High Phase Fractions using OpenFOAM®. Part I - Modeling Basics. **Chemical Engineering and Technology**, v. 34, n. 8, p. 1311–1320, 2011.

MASNADI-SHIRAZI, H.; MASNADI-SHIRAZI, A.; DASTGHEIB, M.-A. **A Step by Step Mathematical Derivation and Tutorial on Kalman Filters**. arXiv, , 8 out. 2019. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1910.03558>>. Acesso em: 17 set. 2022

MASOOD, R. M. A.; JOVICIC, V.; DELGADO, A. Numerical simulation of interfacial closures for 3D bubble column flows. **Chemical Engineering and Technology**, v. 38, n. 5, p. 777–786, 2015.

---

MASTEROV, M. V.; BALTUSSEN, M. W.; KUIPERS, J. A. M. Numerical simulation of a square bubble column using Detached Eddy Simulation and Euler–Lagrange approach. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 107, p. 275–288, 2018.

MATLAB®. **Multiple Object Tracking**. , 2022. Disponível em:  
<<https://www.mathworks.com/help/vision/ug/multiple-object-tracking.html>>

MCCLURE, D. D. et al. Development of a CFD model of bubble column bioreactors: Part two - comparison of experimental data and CFD predictions. **Chemical Engineering and Technology**, v. 37, n. 1, p. 131–140, 2014.

MENTER, F.; ESCH, T. Elements of Industrial Heat Transfer Prediction. **16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering (COBEM)**, 2001.

MERKUS, H. G. **Particle size measurements: fundamentals, practice, quality**. New York: Springer, 2009.

MICHAELIDES, E. E.; CROWE, C. T.; SCHWARZKOPF, J. D. **MULTIPHASE FLOW HANDBOOK**. 2nd. ed. [s.l.] Taylor & Francis, CRC Press, 2017. v. 53

MIKAELIAN, D. et al. Dynamics and morphology of single ellipsoidal bubbles in liquids. **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 64, p. 1–12, jun. 2015.

MILLER, M. L.; STONE, H. S.; COX, I. J. Optimizing Murty’s ranked assignment method. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v. 33, n. 3, p. 851–862, jul. 1997.

MITRE, J. F. et al. Analysis of breakage and coalescence models for bubble columns. **Chemical Engineering Science**, v. 65, n. 23, p. 6089–6100, 2010.

MOREL, C. **Mathematical Modeling of Disperse Two-Phase Flows**. Cham: Springer International Publishing, 2015. v. 114

MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. **The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics**. [s.l.] Springer, 2016.

MÜHLBAUER, A.; HLAWITSCHKA, M. W.; BART, H. J. Models for the Numerical Simulation of Bubble Columns: A Review. **Chemie-Ingenieur-Technik**, v. 91, n. 12, p. 1747–1765, 2019.

MUNKRES, J. Algorithms for the Assignment and Transportation Problems. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 5, n. 1, p. 32–38, mar. 1957.

NIČENO, B.; DHOTRE, M. T.; DEEN, N. G. One-equation sub-grid scale (SGS) modelling for Euler-Euler large eddy simulation (EELES) of dispersed bubbly flow. **Chemical Engineering Science**, v. 63, n. 15, p. 3923–3931, 2008.

OBERKAMPF, W. L.; ROY, C. J. **Verification and Validation in Scientific Computing**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

OTSU, N. A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, v. 9, n. 1, p. 62–66, jan. 1979.

---

PANICKER, N.; PASSALACQUA, A.; FOX, R. O. On the hyperbolicity of the two-fluid model for gas-liquid bubbly flows. **Applied Mathematical Modelling**, v. 57, n. February, p. 432-447, 2018.

PAOLUZZI, A. **Geometric programming for computer aided design**. [s.l.] Wiley, 2003.

PHILLIPS, T. S.; ROY, C. J. Richardson extrapolation-based discretization uncertainty estimation for computational fluid dynamics. **Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME**, v. 136, n. 12, p. 1-17, 2014.

POUGATCH, K. et al. A two-fluid model of gas-assisted atomization including flow through the nozzle, phase inversion, and spray dispersion. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 35, n. 7, p. 661-675, 2009.

PRAKASH, R.; KUMAR MAJUMDER, S.; SINGH, A. Bubble size distribution and specific bubble interfacial area in two-phase microstructured dense bubbling bed. **Chemical Engineering Research and Design**, v. 156, p. 108-130, abr. 2020.

PROSPERETTI, A. TWO-FLUID MODELLING AND AVERAGED EQUATIONS. **Multiphase Science and Technology**, v. 15, n. 1-4, p. 181-192, 2003.

PROSPERETTI, A.; TRYGGVASON, G. (EDS.). **Computational Methods for Multiphase Flow**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

RAHMAN, A. et al. Detection and tracking of bubbles in two-phase air water flow for non-convergent sinusoidal channel. **IET Image Processing**, v. 13, n. 4, p. 692-697, mar. 2019.

RAMKRISHNA, D. **Population Balances**. [s.l.] Elsevier, 2000.

RASBAND, W. S. **ImageJ**. Bethesda, Maryland, USAU. S. National Institutes of Health, , 2018 1997. Disponível em: <<https://imagej.nih.gov/ij/>>

RATKOVICH, N.; HUNZE, M.; NOPENS, I. Hydrodynamic Study of a Hollow Fiber Membrane System Using Experimentally and Numerically Derived Surface Shear Stresses. **Multiphase Science and Technology**, v. 24, n. 1, p. 47-66, 2012.

RAY, S. F. **Scientific photography and applied imaging**. Oxford: Boston : Focal Press, 1999.

RAZZAQUE, M. M. et al. Bubble size in coalescence dominant regime of turbulent air-water flow through horizontal pipes. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 29, n. 9, p. 1451-1471, set. 2003.

REZIG, S. et al. Fuzzy Kalman Filtering for 3-D Lagrangian Particle Tracking using Blob Detection. **Journal of Applied Fluid Mechanics**, v. 9, n. SI2, 1 jun. 2016.

RIDLER, T. W.; CALVARD, S. Picture Thresholding Using an Iterative Selection Method. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, v. 8, n. 8, p. 630-632, 1978.

RITTER, C. et al. Data fusion and smoothing for probabilistic tracking of viral structures in fluorescence microscopy images. **Medical Image Analysis**, v. 73, p. 102168, out. 2021.

- 
- ROACHE, P. J. Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies. **Journal of Fluids Engineering**, v. 116, n. 3, p. 405–413, 1 set. 1994.
- ROBBE, C. et al. Quantification of the uncertainties of high-speed camera measurements. **International Journal of Metrology and Quality Engineering**, v. 5, n. 2, p. 201, 2014.
- ROY, C. **Review of Discretization Error Estimators in Scientific Computing**. 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. **Anais...** Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 4 jan. 2010.
- ROY, C. J. Grid convergence error analysis for mixed-order numerical schemes. **AIAA Journal**, v. 41, n. 4, p. 595–604, 2003.
- RUSCHE, H. Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions. **PhD Thesis**, v. 1, n. December, p. 335, 2002.
- RUZICKA, M. C.; PUNCOCHAR, M.; SIMCIK, M. From single bubble to global mixing: Added mass, drift, wake. **Chemical Engineering Research and Design**, v. 172, p. 280–290, ago. 2021.
- SARDINA, G. et al. Assessing the ability of the Eulerian-Eulerian and the Eulerian-Lagrangian frameworks to capture meso-scale dynamics in bubbly flows. **Chemical Engineering Science**, v. 201, p. 58–73, 2019.
- SCHIESTEL, R. **Modeling and Simulation of Turbulent Flows**. [s.l.: s.n.].
- SHANG, X. et al. Investigation of CFD-PBM simulations based on fixed pivot method: Influence of the moment closure. **Chemical Engineering Journal**, v. 382, n. June 2019, p. 122882, 2020.
- SHEPARD, T.; HÖFT, T. **Bubble Measurement via Hough Transform in Highly Overlapping Conditions**. Volume 4: Fluid Measurement and Instrumentation; Micro and Nano Fluid Dynamics. **Anais...** Em: ASME-JSME-KSME 2019 8TH JOINT FLUIDS ENGINEERING CONFERENCE. San Francisco, California, USA: American Society of Mechanical Engineers, 28 jul. 2019.
- SHIEA, M. et al. Evaluation of Hydrodynamic Closures for Bubbly Regime CFD Simulations in Developing Pipe Flow. **Chemical Engineering and Technology**, n. 8, p. 1618–1626, 2019.
- SHU, S. et al. Multiscale multiphase phenomena in bubble column reactors: A review. **Renewable Energy**, v. 141, p. 613–631, out. 2019.
- SILVA, M. C. et al. Numerical uncertainty analysis in regular wave modeling. **Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering**, v. 140, n. 4, p. 1–8, 2018.
- SILVA, M. K.; D&APOS;ÁVILA, M. A.; MORI, M. Study of the interfacial forces and turbulence models in a bubble column. **Computers and Chemical Engineering**, v. 44, p. 34–44, 2012.

---

SILVA, M. K.; D'ÁVILA, M. A.; MORI, M. CFD modelling of a bubble column with an external loop in the heterogeneous regime. **Canadian Journal of Chemical Engineering**, v. 89, n. 4, p. 671–681, 2011.

SIMONNET, M. et al. Experimental determination of the drag coefficient in a swarm of bubbles. **Chemical Engineering Science**, v. 62, n. 3, p. 858–866, fev. 2007.

SOCCOL, R. et al. Numerical analysis of the interphase forces in bubble columns using euler-euler modelling framework. **Canadian Journal of Chemical Engineering**, v. 93, n. 11, p. 2055–2069, 2015.

SOKOLICHIN, A.; EIGENBERGER, G.; LAPIN, A. Simulation of Buoyancy Driven Bubbly Flow: Established Simplifications and Open Questions. **AIChE Journal**, v. 50, n. 1, p. 24–45, 2004.

SOLOMON, C.; BRECKON, T. **Fundamentals of Digital Image Processing**. [s.l.] John Wiley & Sons, Ltd, 2011.

SONDERMANN, C. N. et al. Numerical simulation of non-isothermal two-phase flow in pipelines using a two-fluid model. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 173, n. October 2018, p. 298–314, 2019.

SWINSCOW, T. D. V; CAMPBELL, M. J. **Statistics at Square One**. 10th ed. ed. [s.l.] BMJ Books, 2002.

TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. **A First Course in Turbulence**. [s.l.] The MIT Press, 1972.

TEUBNER, U.; BRÜCKNER, H. J. **Optical Imaging and Photography: Introduction to Science and Technology of Optics, Sensors and Systems**. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2019.

THE OPENFOAMFOUNDATION. **OpenFOAM v6 User Guide**. , 2015.

TISELJ, I.; PETELIN, S. Modelling of two-phase flow with second-order accurate scheme. **Journal of Computational Physics**, v. 136, n. 2, p. 503–521, 1997.

TOMIYAMA, A. et al. Drag Coefficients of Single Bubbles under Normal and Micro Gravity Conditions. **JSME International Journal Series B**, v. 41, n. 2, p. 472–479, 1998.

TOMIYAMA, A. et al. Transverse migration of single bubbles in simple shear flows. **Chemical Engineering Science**, v. 57, n. 11, p. 1849–1858, 2002.

TOUMI, I.; KUMBARO, A. An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model. **Journal of Computational Physics**, v. 124, n. 2, p. 286–300, 1996.

TSAI, W.-H. Moment-preserving thresholding: A new approach. **Computer Vision, Graphics, and Image Processing**, v. 29, n. 3, p. 377–393, 1985.

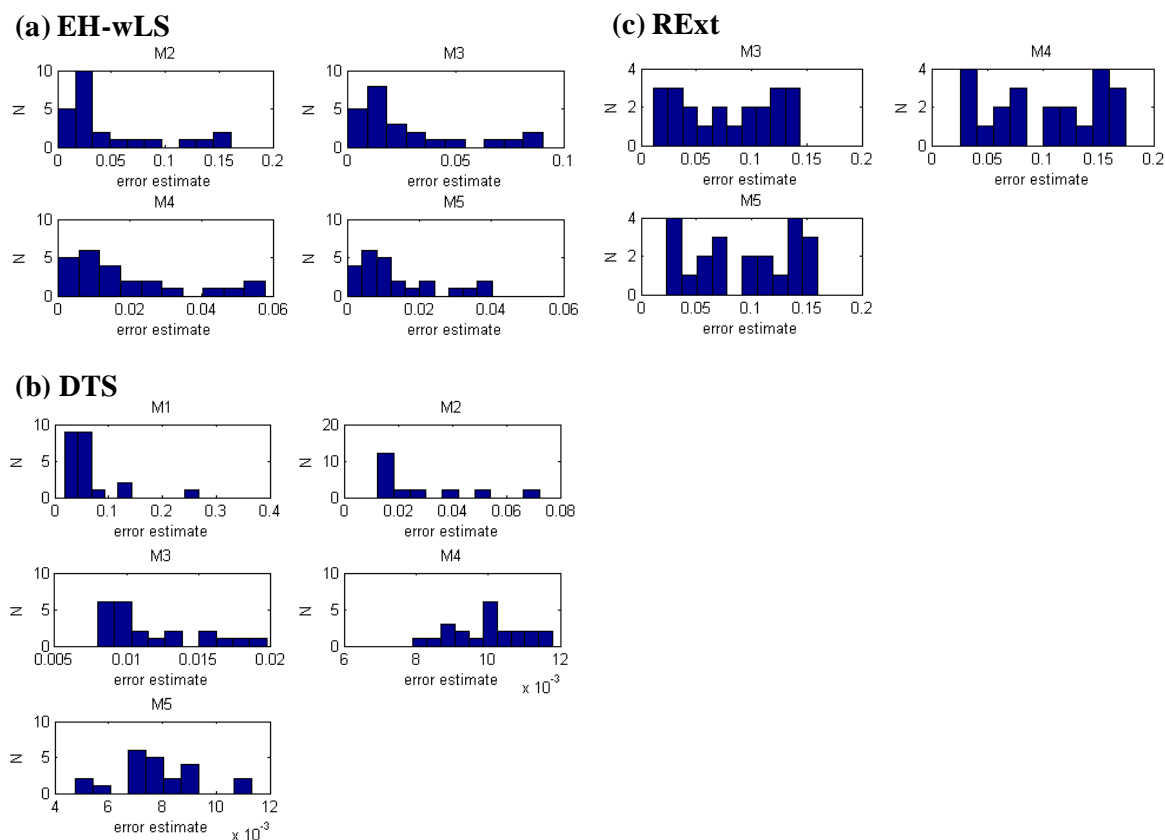
VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics**. Second ed. [s.l.] Pearson Education Limited, 2007.

- WANG, B.; LAI, C. C. K.; SOCOLOFSKY, S. A. Mean velocity, spreading and entrainment characteristics of weak bubble plumes in unstratified and stationary water. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 874, p. 102–130, 10 set. 2019.
- WANG, Y.; MU, X. Dynamic Siamese Network With Adaptive Kalman Filter for Object Tracking in Complex Scenes. **IEEE Access**, v. 8, p. 222918–222930, 2020.
- WHITE, F. **Fluid Mechanics**. 4th. ed. [s.l.] McGraw-Hill Higher Education, 1998.
- WILCOX, D. C. **Turbulence modeling for CFD**. 2. ed. [s.l.] DCW Industries, 1993.
- WOJKE, N.; BEWLEY, A.; PAULUS, D. **Simple online and realtime tracking with a deep association metric**. 2017 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). **Anais...** Em: 2017 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON IMAGE PROCESSING (ICIP). Beijing: IEEE, set. 2017. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/8296962/>>. Acesso em: 9 jun. 2022
- WU, Q. et al. One-group interfacial area transport in vertical bubbly flow. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 41, n. 8–9, p. 1103–1112, 1998.
- XIAO, B. et al. Vision-based method for tracking workers by integrating deep learning instance segmentation in off-site construction. **Automation in Construction**, v. 136, p. 104148, abr. 2022.
- XU, B. et al. An Effectively Finite-Tailed Updating for Multiple Object Tracking in Crowd Scenes. **Applied Sciences**, v. 12, n. 3, p. 1061, 20 jan. 2022.
- XUE, T.; WANG, Q.; AN, M. Experimental investigation of overlapping bubbles based on laser scanning. **Experimental Thermal and Fluid Science**, v. 119, p. 110200, nov. 2020.
- YANG, C.; MAO, Z. S. Numerical Simulation of Multiphase Reactors with Continuous Liquid. **Numerical Simulation of Multiphase Reactors with Continuous Liquid**, p. 1–309, 2014.
- YEOH, G. H.; TU, J. **Computational Techniques for Multiphase Flows**. [s.l.] Elsevier, 2010.
- ZHANG, D.; DEEN, N. G.; KUIPERS, J. A. M. Numerical simulation of the dynamic flow behavior in a bubble column: A study of closures for turbulence and interface forces. **Chemical Engineering Science**, v. 61, n. 23, p. 7593–7608, 2006.
- ZHAO, L. et al. A visualized study of the motion of individual bubbles in a venturi-type bubble generator. **Progress in Nuclear Energy**, v. 97, p. 74–89, maio 2017.
- ZHOU, H.; NIU, X. An image processing algorithm for the measurement of multiphase bubbly flow using predictor-corrector method. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 128, p. 103277, jul. 2020.
- ZIEGENHEIN, T.; LUCAS, D. The critical bubble diameter of the lift force in technical and environmental, buoyancy-driven bubbly flows. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 116, p. 26–38, jul. 2019.

# Apêndice A

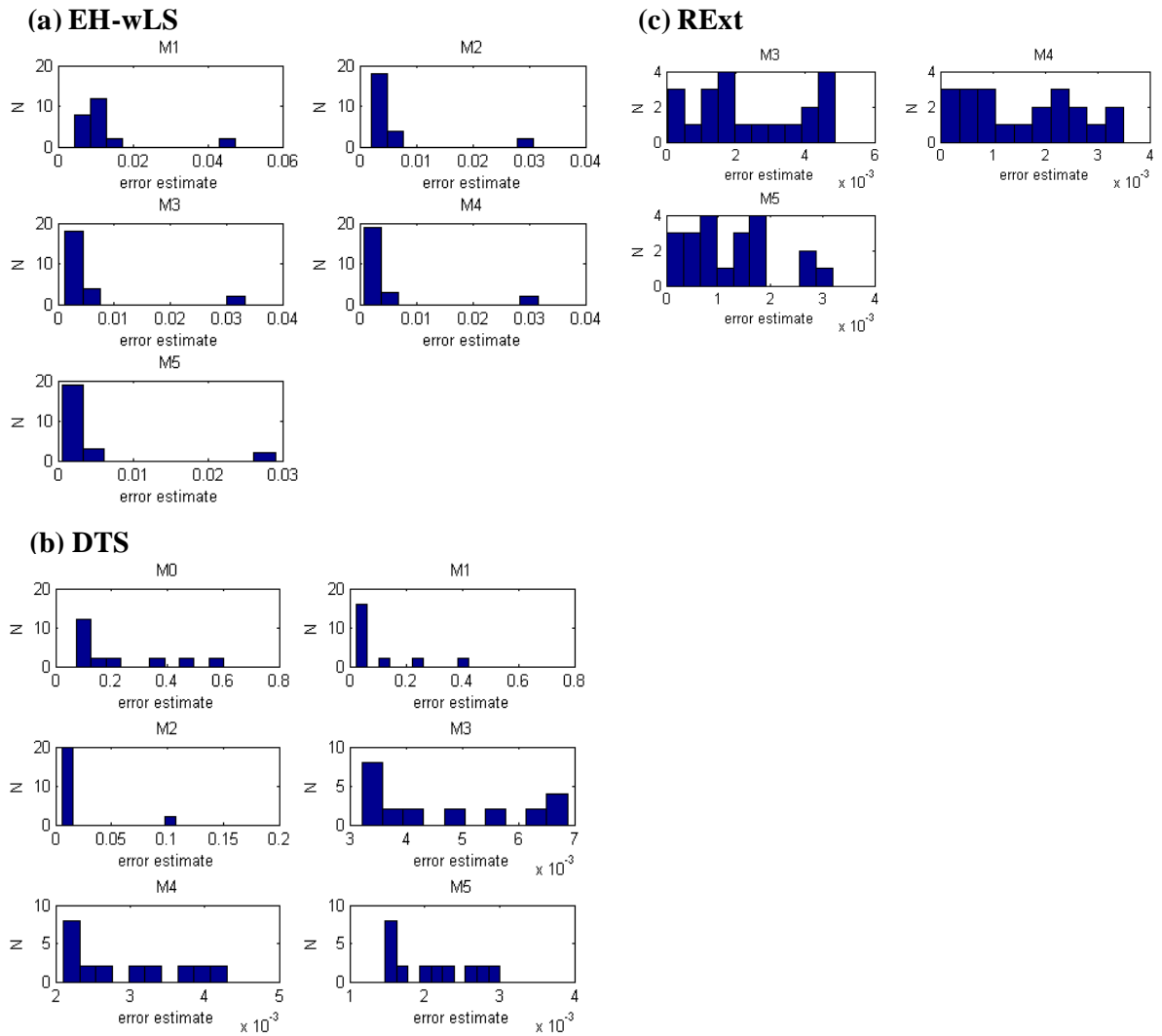
## Distribuições e Valores Médios de Estimativas do Erro

Os histogramas das estimativas do erro estão exibidos na Figura A.1 (para o hTFM) e Figura A.2 (para o MixtM). A maioria dos histogramas das estimativas obtidas com os métodos DTS e EH-wLS mostram distribuições assimétricas com maior dispersão à direita da média, para as quais a média geométrica resulta em um valor médio mais representativo. Apesar de esse não ser o caso para o RExt, o emprego da média geométrica no lugar da média aritmética não afetou a análise dos resultados nesse caso, como pode ser visto na Tabela A.1, que compara valores obtidos com os dois procedimentos de média.



**Figura A.1:** Histogramas das estimativas de erro obtidas para o hTFM com os métodos (a) EH-wLS (M2-M5), (b) DTS, e (c) RExt (M3-M5). Apenas resultados obtidos empregando as malhas mais finas para a estimação do erro pelos métodos que necessitam de mais de uma malha (indicadas entre parênteses), EH-wLS e RExt, são exibidos.





**Figura A.2:** Histogramas das estimativas de erro obtidas para o MixtM com os métodos (a) EH-wLS (M1-M5), (b) DTS, e (c) RExt (M3-M5). Apenas resultados obtidos empregando as malhas mais finas para a estimação do erro pelos métodos que necessitam de mais de uma malha (indicadas entre parênteses), EH-wLS e RExt, são exibidos.

**Tabela A.1:** Comparação entre as médias geométrica e aritmética dos valores relativos das estimativas do erro,  $\overline{\varepsilon_{h_i}^*}$ , para os valores locais de velocidade do gás. Apenas resultados obtidos empregando as malhas mais finas para a estimação do erro pelos métodos que necessitam de mais de uma malha (indicadas entre parênteses), EH-wLS e RExt, são exibidos.

Modelo	Malha	$\overline{\varepsilon_{h_i}^*}$ (%)					
		Média geométrica			Média aritmética		
		EH-wLS (M2-M5)	DTS	RExt (M3-M5)	EH-wLS (M2-M5)	DTS	RExt (M3-M5)
hTFM	M1	-	22,7	-	-	36,9	-
	M2	9,0	7,2	-	12,5	9,3	-
	M3	6,1	3,9	21,5	8,8	4,6	27,4
	M4	3,9	3,2	28,4	5,5	3,3	32,6
	M5	2,9	2,5	26,7	4,2	2,7	30,8
MixtM		EH-wLS (M1-M5)	DTS	RExt (M3-M5)	EH-wLS (M1-M5)	DTS	RExt (M3-M5)
	M0	-	51,7	-	-	87,5	-
	M1	3,0	18,1	-	3,0	40,5	-
	M2	1,1	3,2	-	1,2	7,0	-
	M3	0,7	1,5	0,7	0,9	1,6	0,8
	M4	0,5	0,9	0,3	0,7	1,0	0,4
	M5	0,3	0,7	0,2	0,5	0,7	0,3