Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Globalização de Ações Parciais de Grupoides sobre Anéis Semiprimos

JULIANA CAMILE DO NASCIMENTO

$$\begin{tikzcd}
D_{g^{-1}} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\alpha_g"] & D_{d(g)} \arrow[r, "\varphi_{d(g)}"] \arrow[d, "\delta_g"] & E_{d(g)} \arrow[d, "\beta_g"] \\
D_g \arrow[r, "j"] & D_{r(g)} \arrow[r, "\varphi_{r(g)}"] & E_{r(g)}
\end{tikzcd}$$

Orientador: Wagner de Oliveira Cortes

Porto Alegre, 2024

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Globalização de Ações Parciais de Grupoides sobre Anéis Semiprimos

JULIANA CAMILE DO NASCIMENTO

Orientador: Wagner de Oliveira Cortes

Banca Examinadora: Aprovada em: 13/03/2024.

....
Wagner de Oliveira Cortes

....
Laerte Bemm

....
Orlando Stanley Juriaans

....
Thaísa Raupp Tamusiunas

Porto Alegre, 2024

Tese submetida por Juliana Camile do Nascimento[†], sob orientação do professor Dr. Wagner de Oliveira Cortes, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

[†]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

The beauty of mathematics only shows itself to more patient followers.
Maryam Mirzakhani

Agradecimentos

Existirmos: a que será que se destina?

Incapaz de responder essa questão, me dedico a registrar aqui duas manifestações da minha existência: a satisfação por não precisar mais assinalar a opção “demais pesquisadores” para encontrar o meu nome na Plataforma Lattes, e os genuínos agradecimentos às pessoas que tornaram isso possível.

À minha gata extraordinária, Marina. Os motivos são muitos: mudança para Porto Alegre, aprendizados de confeitaria e direção, apoio incondicional, pequenas e felizes surpresas diárias, cãezinhos, Tap8 e, claro, a melhor companhia do mundo. Tudo fica mais bonito você estando perto.

Às minhas amigas Stefane, Tainara e Rebeca. Seus ouvidos atentos e receptivos são fundamentais, e a parceria em eventos e bares melhoram qualquer coisa.

Ao meu orientador, professor Wagner de Oliveira Cortes, pelo aceite à essa jornada, compreensão, recomendações pertinentes e compartilhamento de muitos conhecimentos algébricos.

Ao amigo e professor Laerte Bemm. São dez anos trabalhando juntos! Obrigada pelos incentivos ainda incansáveis, pela disponibilidade, por explicar a mesma coisa algumas vezes, por ouvir meus lamentos receando o desemprego, pelas críticas inteligentes e oportunas e pelas cervejas.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Estamos interessados em determinar condições necessárias e suficientes para a existência de globalização de ações parciais de grupoides sobre anéis semiprimos. Além disso, mostramos que toda ação globalizável sobre um anel semiprimo possui uma ação envolvente semiprima, a qual é única a menos de equivalência. Mais ainda, construímos uma extensão de uma ação parcial de grupoide sobre um anel semiprimo ao seu respectivo anel de quocientes de Martindale à direita e apresentamos outros critérios para a existência de globalização. A partir dessa extensão, investigamos a transferência de propriedades entre skew anéis de grupoide parciais, especialmente para estabelecer condições para que o skew anel de grupoide parcial seja um anel de Goldie.

Palavras-chave

Ação parcial, grupoide, anel semiprimo, anel de quocientes de Martindale, ação envolvente

Abstract

We are interested in determining necessary and sufficient conditions for the existence of globalization of groupoid partial actions on semiprime rings. Also, we show that any globalizable action on a semiprime ring has a semiprime enveloping action, which is unique up to equivalence. Furthermore, we construct an extension of a groupoid partial action on a semiprime ring to its respective Martindale ring of right quotients and present other criteria for the existence of globalization. From such an extension, we investigate the transfer of properties between partial skew groupoid rings, especially to establish conditions for the partial skew groupoid ring to be a Goldie ring.

Key-words

Partial action, groupoid, semiprime ring, Martindale ring of quotients, enveloping action

Índice de Notações

$\emptyset$	conjunto vazio.
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros.
M_R	M é um R-módulo à direita.
$R \cong S$	R é isomorfo a S.
$A \oplus B$	soma direta dos anéis (ou ideais) A e B.
$A \subset B$	A é um subconjunto próprio de B.
$A \subseteq B$	A é um subconjunto de B.
$I \lhd_r R$	I é um ideal à direita do anel R.
$I \lhd_l R$	I é um ideal à esquerda do anel R.
$I \lhd R$	I é um ideal (bilateral) do anel R.
$I \lhd_e R$	I é um ideal essencial do anel R.
$ann_{l,R}(A)$	anulador à esquerda de A em R.
$ann_{r,R}(A)$	anulador à direita de A em R.
$ann_R(A)$	anulador de A em R.
$\mathcal{E}(R)$	conjunto dos ideais essenciais de R.
$\mathcal{M}(R)$	anel de multiplicadores do anel R.
$Q_r(R)$	anel de quocientes de Martindale à direita do anel semiprimo R.
$Q_{cl}^r(R)$	anel de quocientes clássico à direita do anel R.
$\mathcal{C}$	centroide estendido de R.
$[I]$	fecho do ideal I.
I^*	ideal fechado de $Q_r(R)$ correspondente ao fecho $[I]$ de I em R.
G^2	conjunto dos pares $(g,h) \in G \times G$ tais que o elemento gh existe com G grupoide.
G_0	conjunto das identidades do grupoide G.
G_e	conjunto dos elementos g do grupoide G tais que $d(g) = r(g) = e$.
$\mathcal{Z}(R)$	ideal singular à direita do anel R.
$udim(R)$	dimensão uniforme à direita do anel R.
$R *_\alpha G$	skew anel de grupoide parcial.
$U(R)$	grupo das unidades do anel R.
$\mathcal{C}(R)$	conjunto dos elementos regulares do anel R.
$Nil(R)$	radical primo do anel R.
$mmc(m,n)$	mínimo múltiplo comum de m e n.

Sumário

Agradecimentos **5**

Resumo **7**

Abstract **9**

Índice de Notações **11**

Introdução **16**

1 Grupoides e Ações Parciais **17**

1.1 Grupoides 17

1.2 Ações Parciais de Grupoides 19

2 Globalização de Ações Parciais de Grupoides sobre Anéis Semiprimos **33**

2.1 Ações Parciais Globalizáveis 33

2.2 Ações Envolventes Semiprimas 44

3 Anel de Quocientes de Martindale **55**

3.1 Pré-requisitos 55

3.2 A Extensão α^* de G sobre $Q_r(R)$ 57

3.3 Globalização via α^* 60

4 Skew Anel de Grupoide Parcial **67**

4.1 Condições para que $R *_\alpha G$ seja um Anel de Goldie 67

Conclusões **78**

Índice Remissivo **79**

Referências Bibliográficas **82**

Introdução

Com o propósito de generalizar o conceito de extensões de Galois parciais de anéis comutativos, as ações parciais de grupoides foram introduzidas por D. Bagio e A. Paques em [2], inicialmente como uma generalização natural de ações parciais de grupos, tendo em vista que, em particular, todo grupo é um grupoide com uma única unidade. A possibilidade de visualizar grupoides em um contexto puramente algébrico promoveu diversas pesquisas para ações parciais de grupoides semelhantes ao caso de grupos.

Um dos muitos tópicos desenvolvidos diz respeito à determinação de condições necessárias e suficientes para a existência de globalização (ação envolvente) para uma dada ação parcial. Tal problema foi investigado para o caso de grupos por M. Dokuchaev e R. Exel em [8], o qual motivou um estudo análogo para ações parciais de grupoides sobre anéis com unidade em [2]. D. Bagio e H. Pinedo também buscaram estipular condições para que uma ação seja globalizável considerando anéis s-unitários em [3].

Seguindo essas ideias, nosso objetivo consiste em desenvolver resultados semelhantes aos apresentados por W. Cortes e M. Ferrero para ações parciais de grupos em [6] mas no contexto de grupoides. Essencialmente, a partir da noção de anel de multiplicadores, visamos estabelecer requisitos para que ações parciais de grupoides sobre anéis semiprimos sejam globalizáveis. Contudo, temos alguns desafios: em primeiro lugar, consideramos anéis semiprimos (aqueles nos quais todo ideal nilpotente é nulo) não necessariamente unitários e, portanto, recorremos a objetos como ideais fechados ou essenciais para provar alguns resultados; em segundo lugar, como nem todos os elementos de um grupoide são componíveis e as ações parciais de grupoides são construídas por meio de ideais de ideais em vez de ideais do anel base, torna-se necessário o uso de ferramentas mais refinadas.

O texto está organizado como segue. O capítulo inicial é introdutório e apresenta um panorama geral das noções de grupoide, ação parcial de grupoide e anel semiprimo, bem como os principais resultados dessa teoria e exemplos para elucidação dos conceitos. O segundo capítulo generaliza o artigo [6] e estabelece condições para a existência de globalização de ações parciais de grupoides sobre anéis semiprimos, mostrando que, quando semiprima, tal globalização é única a menos de equivalência. O terceiro capítulo abrange outros critérios para a existência de globalização, aplicando a extensão de uma ação parcial de grupoide sobre um anel semiprimo ao seu respectivo anel de quocientes de Martindale à direita, desenvolvida em [18]. O capítulo final reúne algumas das ideias supracitadas a fim de determinar requisitos para que o skew anel de grupoide parcial seja um anel de Goldie.

Capítulo 1

Grupoides e Ações Parciais

Este capítulo possui caráter essencialmente introdutório à teoria de grupoides e, especialmente, às ações parciais de grupoides. Buscamos apresentar conceitos e resultados fundamentais e exemplificá-los, a fim de familiarizar o(a) leitor(a) com os objetos matemáticos aqui considerados.

Na primeira seção, seguiremos os passos de Bagio e Paques em [2] e definiremos grupoides de modo puramente algébrico, juntamente com várias de suas propriedades que serão livremente aplicadas nos demais capítulos. Na segunda seção, definiremos ações parciais e globais de grupoides sobre um anel e globalização (ou ação envolvente), explorando cada uma dessas noções a partir de exemplos.

Fixemos algumas notações: no que segue, R sempre será um anel associativo (não necessariamente comutativo ou unitário) e G denotará um grupoide não necessariamente finito. Quando não apresentarmos a demonstração de um resultado, indicaremos uma referência para que o(a) leitor(a) possa obtê-la.

1.1 Grupoides

Conforme supracitado, ao longo deste estudo, consideraremos uma versão axiomática da definição de grupoides, a qual pode ser encontrada em [2].

Definição 1.1. *Um grupoide é um conjunto não vazio G munido de uma operação binária parcialmente definida, denominada concatenação, para a qual os axiomas de grupo são válidos sempre que houver sentido, isto é, para quaisquer $g, h, l \in G$:*

(i) $g(hl)$ existe se, e somente se, $(gh)l$ existe. Nesse caso, eles são iguais;

(ii) $g(hl)$ existe se, e somente se, gh e hl existem;

(iii) existem elementos únicos $d(g), r(g) \in G$ tais que $gd(g)$ e $r(g)g$ existem e $gd(g) = g = r(g)g$;

(iv) existe um elemento $g^{-1} \in G$ tal que $d(g) = g^{-1}g$ e $r(g) = gg^{-1}$.

Denotaremos por G^2 o subconjunto dos pares $(g, h) \in G \times G$ tais que o elemento gh existe. Esse conjunto será melhor caracterizado no item *(iv)* do Lema 1.4.

Um elemento $e \in G$ é denominado uma *identidade* de G se $e = d(g) = r(g^{-1})$, para algum $g \in G$. Nesse caso, e é denominada a *identidade domínio* de g e a *identidade imagem* de g^{-1}. Também, denotaremos por G_0 o conjunto de todas as identidades de G e por G_e o conjunto de todos os elementos $g \in G$ tais que $d(g) = r(g) = e$. É claro que G_e é um grupo, para cada $e \in G_0$.

E por falar em grupo: sim! Todo grupo é um grupoide com apenas uma unidade. De forma mais técnica, um grupo G é um grupoide tal que $G^2 = G$ e $G_0 = \{1_G\}$. Outros exemplos de grupoides, abordados em [12], são:

Exemplo 1.2. *Seja $I_n = \{1, 2, ..., n\}$, $n \geq 1$. Em $I_n \times I_n$, podemos definir a seguinte operação binária parcial:*

$$\text{existe } (i, j)(k, l) \text{ se, e somente se, } j = k$$

e, nesse caso, $(i, j)(k, l) = (i, l)$.

O conjunto $I_n \times I_n$ com essa operação é um grupoide, usualmente denotado por G_n. Note que $d(i, j) = (j, j)$ e $r(i, j) = (i, i)$ e, além disso, $(i, j)^{-1} = (j, i)$, o que implica $r((i, j)^{-1}) = r(j, i) = (j, j)$. Consequentemente, o conjunto das identidades de G_n é dado por $(G_n)_0 = \{(i, i) \mid i \in I_n\}$.

Exemplo 1.3. *Todo semigrupo inverso X é um grupoide com respeito ao produto restrito definido como segue: para quaisquer $x, y \in X$,*

$$\textit{existe } xy \textit{ se, e somente se, } x^{-1}x = yy^{-1}.$$

As identidades do grupoide X são exatamente os idempotentes de X.

O lema a seguir explicita o comportamento dos elementos de um grupoide. É imediato da definição acima e indispensável para a demonstração de muitos resultados da teoria de grupoides, bem como de ações parciais de grupoides.

Lema 1.4. *([13], Lemma 2.1) Seja G um grupoide. Então,*

(i) *para todo $g \in G$, o elemento g^{-1} é o único que satisfaz $g^{-1}g = d(g)$ e $gg^{-1} = r(g)$;*

(ii) *para todo $g \in G$, $d(g^{-1}) = r(g)$ e $r(g^{-1}) = d(g)$;*

(iii) *para todo $g \in G$, $(g^{-1})^{-1} = g$;*

(iv) *para quaisquer $g, h \in G$, $(g, h) \in G^2$ se, e somente se, $d(g) = r(h)$;*

(v) *para quaisquer $g, h \in G$, $(h^{-1}, g^{-1}) \in G^2$ se, e somente se, $(g, h) \in G^2$ e, neste caso, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$;*

(vi) *para todo* $(g,h) \in G^2$, $d(gh) = d(h)$ *e* $r(gh) = r(g)$;

(vii) *para todo* $e \in G_0$, $d(e) = r(e) = e$ *e* $e^{-1} = e$;

(viii) *para todo* $(g,h) \in G^2$, $gh \in G_0$ *se, e somente se,* $g = h^{-1}$;

(ix) *para quaisquer* $g, h \in G$, *existe* $l \in G$ *tal que* $g = hl$ *se, e somente se,* $r(g) = r(h)$;

(x) *para quaisquer* $g, h \in G$, *existe* $l \in G$ *tal que* $g = hl$ *se, e somente se,* $d(g) = d(h)$.

Substancialmente, um grupoide pode ser pensado como um grupo com muitos objetos ou muitas identidades sem a garantia de totalidade. Como um grupoide com apenas um elemento é um grupo, torna-se tangível a noção de que grupoides são generalizações de grupos. E, por apresentar esse caráter de extensão, grupoides podem propiciar uma conveniência adicional, dada pela sua flexibilidade e possibilidade de aplicações nas mais diversas áreas: teoria ergódica, análise funcional, teoria de homotopia, geometria algébrica, geometria diferencial, topologia diferencial e teoria de grupos.

A generalização de uma estrutura algébrica é sempre ponderada, uma vez que espera-se manter a força dos exemplos motivadores originais e o caráter da teoria. As teorias de monoides ou de semigrupos, por exemplo, diferem em muitos aspectos com relação à teoria de grupos. Em [5], o autor mostra, a partir de exemplos e aplicações, que a teoria de grupoides não difere muito em espírito ou objetivos quando comparada à teoria de grupos. Um dos tópicos que também exprime tal semelhança trata de ações parciais.

1.2 Ações Parciais de Grupoides

No que segue, definiremos ações globais e parciais de grupoides sobre um anel e globalização, como em [2] e [13]. Após cada definição, buscaremos analisar o comportamento dessas ações com o objetivo de reduzir a quantidade de ideais necessários para a construção ou estudo de uma ação, o que simplificará significativamente o nosso trabalho. Além disso, apresentaremos exemplos desses conceitos e alguns resultados importantes.

Definição 1.5. *Sejam* G *um grupoide e* T *um anel. Uma ação global de* G *sobre* T *é um par* $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ *em que, para cada* $g \in G$, $E_g = E_{r(g)}$ *é um ideal de* T, $\beta_g : E_{g^{-1}} \longrightarrow E_g$ *é um isomorfismo de anéis e as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) β_e *é a aplicação identidade* I_{E_e} *de* E_e, *para todo* $e \in G_0$;

(ii) $\beta_g \circ \beta_h(x) = \beta_{gh}(x)$, *para quaisquer* $(g,h) \in G^2$ *e* $x \in E_{h^{-1}} = E_{(gh)^{-1}}$.

Notemos que a igualdade $E_{h^{-1}} = E_{(gh)^{-1}}$ na condição (ii) da definição acima é válida pois

$$E_{h^{-1}} = E_{r(h^{-1})} = E_{r(h^{-1}g^{-1})} = E_{r((gh)^{-1})} = E_{(gh)^{-1}},$$

pelos itens (v) e (vi) do Lema 1.4.

Pela definição de ação global, para cada $g \in G$, consideraremos um ideal E_g tal que $E_g = E_{r(g)}$ e um isomorfismo $\beta_g : E_{g^{-1}} \longrightarrow E_g$. Com a condição $E_g = E_{r(g)}$, é suficiente definirmos os ideais indexados pelas identidades do grupoide, ou seja, pelos elementos de G_0. Logo, os ideais indexados pelos demais elementos, $g \in G$ tais que $e = r(g) \in G_0$, estarão automaticamente definidos. Assim, se $g, h \in G$ têm a mesma identidade à esquerda, isto é, $r(g) = r(h)$, então $E_g = E_{r(g)} = E_{r(h)} = E_h$. Portanto, à dois elementos temos um único ideal associado.

Agora, quanto aos isomorfismos, a definição implica que deve existir $\beta_g : E_{r(g^{-1})} \longrightarrow E_{r(g)}$, para todo $g \in G$. Ou seja, nosso objetivo consiste em definir um isomorfismo cujo domínio é um ideal indexado por $r(g^{-1})$ e cujo contradomínio é o ideal indexado por $r(g)$.

Sendo que $e = e^{-1}$ e $r(e) = r(e^{-1})$, para todo $e \in G_0$, consideraremos $\beta_e : E_e \longrightarrow E_e$ como a aplicação identidade. Consequentemente, definiremos

$$\beta_{r(g)} : E_{r(g)} \longrightarrow E_{r(g)}$$

como a aplicação identidade para todo $r(g) \in G_0$.

Também, como desejamos que $\beta_g \circ \beta_h = \beta_{gh}$, consideraremos apenas o caso em que existe gh, ou seja, quando $(g, h) \in G^2$. Para que faça sentido, tal igualdade deve ser pensada considerando os elementos de $E_{r((gh)^{-1})} = E_{r(h^{-1}g^{-1})} = E_{r(h^{-1})}$. Dessa forma, é possível aplicar tanto β_{gh} quanto β_h em $x \in E_{r((gh)^{-1})}$ e, como $\beta_h(x) \in E_{r(h)} = E_{r(g^{-1})}$, a composição $\beta_g \circ \beta_h$ está bem definida em $E_{r((gh)^{-1})}$. É por este motivo que, no item (ii) da definição de ação global de grupoides, há a condição $x \in E_{r((gh)^{-1})} = E_{r(h^{-1})}$.

Isso significa que é suficiente considerar os isomorfismos indexados pelos elementos $r(g) \in G_0$, uma vez que qualquer outro elemento do grupoide G que possui $r(g)$ como inverso à esquerda estará associado automaticamente ao mesmo isomorfismo $\beta_{r(g)}$.

Exemplo 1.6. *Sejam $G = \{g, g^{-1}, r(g), d(g)\}$ um grupoide e $T = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4$, em que K é um anel comutativo e e_1, e_2, e_3 e e_4 são idempotentes centrais, dois a dois ortogonais, cuja soma é 1_T. Consideremos os seguintes ideais e aplicações:*

$$E_g = E_{r(g)} = Ke_3 \oplus Ke_4$$

$$E_{g^{-1}} = E_{d(g)} = Ke_1 \oplus eKe_2$$

$$\beta_{r(g)} = I_{E_{r(g)}}$$

$$\beta_{d(g)} = I_{E_{d(g)}}$$

$$\beta_g(xe_1 + ye_2) = xe_3 + ye_4$$

$$\beta_{g^{-1}}(xe_3 + ye_4) = xe_1 + ye_2,$$

para quaisquer $x, y \in K$*. Então* $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ *é uma ação global de* G *sobre* T*.*

Prosseguimos para a definição de ações parciais de grupoides.

Definição 1.7. *Uma ação parcial* α *de um grupoide* G *sobre um anel* R *é um par* $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$*, em que, para cada* $g \in G$*,* $D_{r(g)}$ *é um ideal de* R*,* D_g *é um ideal de* $D_{r(g)}$ *e* $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ *é um isomorfismo de anéis, e as seguintes condições são satisfeitas, para quaisquer* $e \in G_0$ *e* $(g, h) \in G^2$*:*

(i) α_e *é a aplicação identidade* I_{D_e} *de* D_e*;*

(ii) $\alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$*;*

(iii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$ *para todo* $x \in \alpha_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h)$*.*

Notemos que as condições *(ii)* e *(iii)* implicam que a função α_{gh} é uma extensão da função $\alpha_g \circ \alpha_h$. Além disso, os próximos resultados apresentam propriedades fundamentais de ações parciais de grupoides.

Lema 1.8. *([2], Lemma 1.1) Seja* $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *uma ação parcial de um grupoide* G *sobre um anel* R*. Então, as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) α *é global se, e somente se,* $D_g = D_{r(g)}$ *para todo* $g \in G$*;*

(ii) $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$*, para todo* $g \in G$*;*

(iii) $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$*, para todo* $(g, h) \in G^2$*.*

Observação 1.9. *Se* $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ *é uma ação parcial de um grupoide* G *sobre um anel* R*, então segue de (ii) e (iii) do Lema 1.8 que* $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$*, para quaisquer* $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$ *e* $(g, h) \in G^2$*. Além disso, é imediato que* $\alpha_{(e)} = (\{D_g\}_{g\in G_e}, \{\alpha_g\}_{g\in G_e})$ *é uma ação parcial (no sentido de [8]) do grupo* G_e *sobre o anel* D_e*, para todo* $e \in G_0$*.*

É importante enfatizar que, no caso de grupos, cada D_g é um ideal do próprio anel R mas, para grupoides, temos um ideal intermediário, de modo que D_g é um ideal de $D_{r(g)}$ que, por sua vez, é um ideal de R. Nesse sentido, considerar ideais de ideais exige maior cautela no desenvolvimento de resultados no contexto de ações parciais de grupoides.

Quanto à notação, usualmente denotaremos uma ação parcial α de um grupoide G sobre um anel R por (R, α) ou apenas α sempre que o contexto estiver claro.

Da Definição 1.7, é claro que para construir uma ação parcial de um grupoide G sobre um anel R temos essencialmente quatro passos a seguir:

1. Identificar as identidades de G e indexar ideais de R por tais elementos. Para cada $e \in G_0$, definimos $\alpha_e : D_e \longrightarrow D_e$ como a aplicação identidade. Note que os ideais D_e podem ser iguais ao anel R, para todo $e \in G_0$. Nesse caso, temos que $\alpha_e = id_R$.

2. Para cada elemento de G que não é uma identidade, definir o ideal D_g de $D_{r(g)}$. Assim, se $e = r(g) \in G_0$, definimos o ideal D_g de D_e.

3. Para cada $g \in G$, definir o isomorfismo $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$. Os isomorfismos indexados pelas identidades $e \in G_0$ são aplicações identidades.

4. Verificar as condições (ii) e (iii) da definição de ação parcial de grupoides.

Exemplo 1.10. *Consideremos o grupoide $G = \{g_1, g_2, g_3\}$, em que $G_0 = \{g_1, g_2\}$, $g_3^{-1} = g_3$ e $g_3g_3 = g_2$. Dado $R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4 \oplus Ke_5$, com K anel unitário e e_1, e_2, e_3, e_4 e e_5 idempotentes centrais, dois a dois ortogonais, cuja soma é 1_R. Definamos os seguintes ideais e aplicações:*

$$D_{g_1} = Ke_1 \oplus Ke_2$$

$$D_{g_2} = Ke_3 \oplus Ke_4 \oplus Ke_5$$

$$D_{g_3} = Ke_3 \oplus Ke_4$$

$$\alpha_{g_1} = id_{D_{g_1}}$$

$$\alpha_{g_2} = id_{D_{g_2}}$$

$$\alpha_{g_3}(xe_3 + ye_4) = ye_3 + xe_4,$$

para quaisquer $x, y \in K$. Então $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial de G sobre R.

Na verdade, Bagio e Paques mostraram em [2] a possibilidade de obter exemplos de ação parcial de grupoide ao restringir uma ação global, de modo padrão:

Exemplo 1.11. *(Example 1.3, [2]) Consideremos uma ação global $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ de um grupoide G sobre um anel T e, para cada $e \in G_0$, seja D_e um ideal de E_e (por exemplo, se I é um ideal arbitrário de T, é suficiente considerar $D_e = I \cap E_e$). Então, $D_g = D_{r(g)} \cap \beta_g(D_{r(g^{-1})})$ é um ideal de $D_{r(g)}$ e $\alpha_g = \beta_g|_{D_{g^{-1}}}$ é um isomorfismo de anéis, para todo $g \in G$. Agora, para cada $e \in G_0$, sejam $R = \prod_{e\in G_0} D_e$ e $\iota_e : D_e \longrightarrow R$ a aplicação definida por $\iota_e(x) = (x_l)_{l\in G_0}$, com $x_e = x$ e $x_l = 0$ para todo $l \neq e$. Considerando $\iota_g = \iota_{r(g)}|_{D_g}$, $D'_g = \iota_g(D_g)$ e $\alpha'_g = \iota_g\alpha_g\iota_{g^{-1}}^{-1} : D'_{g^{-1}} \longrightarrow D'_g$, é imediato verificar que $\alpha' = (\{D'_g\}_{g\in G}, \{\alpha'_g\}_{g\in G}$ é uma ação parcial de G sobre R. Se, em particular, cada D_e, $e \in G_0$, é da forma $D_e = I \cap E_e$ para algum ideal I de T, então $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}$ também é uma ação parcial de G sobre I. Dizemos que α' é uma* restrição *de β ao anel R (respectivamente, I).*

No que se segue, vamos definir globalização de uma ação parcial de um grupoide G sobre um anel, como apresentada em [2]:

Definição 1.12. *Uma ação global $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ de um grupoide G sobre um anel T é dita uma globalização (ação envolvente) de uma ação parcial $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha\}_{g\in G})$ de*

G sobre um anel R se, para cada $e \in G_0$, existe um monomorfismo de anéis $\varphi_e : D_e \longrightarrow E_e$ de modo que as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $\varphi_e(D_e)$ *é um ideal de* E_e*;*

(ii) $\varphi_{r(g)}(D_g) = \varphi_{r(g)}(D_{r(g)}) \cap \beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})}))$*;*

(iii) $\beta_g \circ \varphi_{r(g^{-1})}(a) = \varphi_{r(g)} \circ \alpha_g(a)$*, para todo* $a \in D_{g^{-1}}$*;*

(iv) $E_g = \displaystyle\sum_{r(h)=r(g)} \beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})}))$.

Dizemos que β é *única a menos de equivalência* se para toda ação global $\beta' = (\{E'_g\}_{g\in G}, \{\beta'_g\}_{g\in G})$ de G sobre um anel T', a qual também é uma globalização de α, existe, para cada $e \in G_0$, um isomorfismo de anéis $\psi_e : E'_e \longrightarrow E_e$ tal que $\beta_g \circ \psi_{d(g)}(a) = \psi_{r(g)} \circ \beta'_g(a)$, para todo $a \in E'_{r(g^{-1})}$.

Vamos explorar cada um dos itens da definição acima, a fim de obter uma definição alternativa e simplificada para globalização.

(i) $\varphi_e(D_e)$ é um ideal de E_e.

Notemos que o isomorfismo $\varphi_e : D_e \longrightarrow E_e$ pode ser reescrito como $\varphi_{r(g)} : D_{r(g)} \longrightarrow E_{r(g)}$, obtendo $\varphi_{r(g)}(D_{r(g)}) \lhd E_{r(g)} = E_g$. Isso significa que, para cada $r(g) \in G_0$, a aplicação $\varphi_{r(g)}$ mapeia injetivamente $D_{r(g)}$ como um ideal de $E_{r(g)}$. Se $g, h \in G$ são tais que $r(g) = r(h)$, então

1. $E_g = E_{r(g)} = E_{r(h)} = E_h$;
2. $D_{r(g)} = D_{r(h)}$;
3. $\varphi_{r(g)} : D_{r(g)} \longrightarrow E_{r(g)} = E_g = E_h$ é tal que $\varphi_{r(g)}(D_{r(g)}) \lhd E_g = E_h$.

Logo, $\varphi_e(D_e)$ é um ideal de todo E_g tal que $r(g) = e$. Como cada φ_e é um monomorfismo, podemos ver cada D_e como um ideal de E_e, isto é, cada $D_{r(g)}$ é ideal de $E_{r(g)} = E_h$, para todo $h \in G$ tal que $r(h) = r(g)$, ou seja, todo elemento de G que possui $r(g)$ como identidade à esquerda.

(ii) $\varphi_{r(g)}(D_g) = \varphi_{r(g)}(D_{r(g)}) \cap \beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})}))$.

Pelo item anterior, temos que

$$\varphi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})}) \lhd E_{r(g^{-1})} = E_{g^{-1}}.$$

Portanto, podemos aplicar β_g em $\varphi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})})$, obtendo o ideal $\beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})}))$ de E_g. Agora, como

$$\varphi_{r(g)}(D_{r(g)}) \lhd E_{r(g)} = E_g,$$

podemos determinar o ideal

$$\varphi_{r(g)}(D_{r(g)} \cap \beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})})$$

de E_g. Por outro lado, D_g é um ideal de $D_{r(g)}$ pela definição de ação parcial de grupoides e, consequentemente, $\varphi_{r(g)}(D_g) \subseteq E_{r(g)} = E_g$. O item (ii) pede a igualdade entre $\varphi_{r(g)}(D_g)$ e $\varphi_{r(g)}(D_{r(g)}) \cap \beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})}))$. Ao identificar $D_{r(g)}$ como ideal de $E_{r(g)} = E_g$, podemos considerar D_g em $E_{r(g)}$. Assim, o item (ii) pode ser reescrito como

$$D_g = D_{r(g)} \cap \beta_g(D_{r(g^{-1})}).$$

(iii) $\beta_g \circ \varphi_{r(g^{-1})}(a) = \varphi_{r(g)} \circ \alpha_g(a)$, para todo $a \in D_{g^{-1}}$.

Isto significa que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} D_{g^{-1}} \arrow[r, "\varphi_{r(g^{-1})}"] \arrow[d, "\alpha_g"'] & E_{r(g^{-1})} \arrow[d, "\beta_g"] \\ D_g \arrow[r, "\varphi_{r(g)}"] & E_{r(g)}. \end{tikzcd}$$

Considerando as identificações anteriores, o item (iii) pode ser reescrito como

$$\beta_g|_{D_{g^{-1}}} = \alpha_g,$$

em que $D_{g^{-1}} \lhd D_{r(g^{-1})}$.

(iv) $E_g = \sum_{r(h)=r(g)} \beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})}))$.

Como $E_g = E_{r(g)}$ e, para construir uma ação global, precisamos definir apenas os ideais indexados pelas identidades $e \in G_0$, podemos reescrever tal item como

$$E_{r(g)} = \sum_{r(h)=r(g)} \beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})})).$$

Agora, consideremos elementos $g, h \in G$ que possuem a mesma identidade à esquerda, isto é, $r(h) = r(g)$. Assim, temos que

$$D_{r(h^{-1})} \xrightarrow{\varphi_{r(h^{-1})}} E_{r(h^{-1})} \xrightarrow{\beta_h} E_{r(h)} = E_{r(g)} = E_g$$

implicando que se $r(h) = r(g)$, então

$$\beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})})) \subseteq E_g = E_{r(g)}.$$

O item (iv) pede que $E_{r(g)}$ seja a soma de todos os conjuntos $\beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})}))$ tais que $r(h) = r(g)$. Notemos que também podemos reescrever tal item como

$$E_e = \sum_{r(h)=e} \beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})}))$$

para todo $e \in G_0$; ou, ainda,

$$E_{r(g)} = \sum_{r(h)=r(g)} \beta_h(D_{r(h^{-1})})$$

considerando as identificações acima.

Essa análise nos mostra que, em geral, podemos omitir a aplicação φ_e da definição de globalização, reescrevendo-a como segue:

Definição 1.13. *Uma ação global $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ de um grupoide G sobre um anel T é dita uma globalização (ação envolvente) de uma ação parcial $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha\}_{g\in G})$ de G sobre um anel R se, para cada $e \in G_0$, existe um monomorfismo de anéis $\varphi_e : D_e \longrightarrow E_e$ de modo que as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) De é um ideal de E_e;

(ii) $D_g = D_{r(g)} \cap \beta_g(D_{r(g^{-1})})$;

(iii) $\beta_g(a) = \alpha_g(a)$, para todo $a \in D_{g^{-1}}$;

(iv) $E_g = \sum_{r(h)=r(g)} \beta_h(D_{r(h^{-1})})$.

Tal definição será utilizada quando for conveniente. O próximo exemplo reúne todos os conceitos apresentados nessa seção.

Exemplo 1.14. *Vamos construir uma ação global $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ do grupoide $G = G_3$ (vide Exemplo 1.2) sobre o anel $T = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Posteriormente, considerando o ideal $I = 2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times 0$ de T, vamos seguir os passos do Exemplo 1.11 a fim de determinar uma ação parcial $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ de G sobre I ao restringir a ação global β supracitada.*

Primeiramente, notemos que todos os elementos do grupoide G podem ser visualizados com a seguinte tabela:

(1,1)	(1,2)	(1,3)
(2,1)	(2,2)	(2,3)
(3,1)	(3,2)	(3,3)

Tabela 1.1

e, dessa forma, é fácil notar que

(a) os elementos da diagonal principal são as identidades de G;

(b) os elementos da linha i têm (i,i) como identidade à esquerda;

(c) os elementos da coluna j têm (j,j) como identidade à direita;

(d) os elementos simétricos em relação à diagonal principal são um inverso do outro.

Isto posto, vamos determinar inicialmente uma ação global β de G sobre T. Definiremos, então, os conjuntos indexados pelas identidades de G como segue:

$$\begin{aligned} E_{(1,1)} &= 0 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ E_{(2,2)} &= \mathbb{Z} \times 0 \times \mathbb{Z} \\ E_{(3,3)} &= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times 0. \end{aligned}$$

É claro que tais conjuntos são ideais de T. Assim, pelo item (b) acima, obtemos automaticamente os ideais indexados por elementos de G que não são identidades:

$$E_{(1,2)} = E_{(1,3)} = E_{(1,1)}$$

$$E_{(2,1)} = E_{(2,3)} = E_{(2,2)}$$

$$E_{(3,1)} = E_{(3,2)} = E_{(3,3)}.$$

O próximo passo consiste em definir os isomorfismos $\beta_g : E_{g^{-1}} \longrightarrow E_g$, para todo $g \in G$. As aplicações indexadas pelas identidades de G, isto é, $\beta_{(i,i)} : E_{(i,i)} \longrightarrow E_{(i,i)}$, com $i \in \{1,2,3\}$, são aplicações identidade e, claramente, isomorfismos. Como, para todo $(i,j) \in G$, devemos ter $\beta^{-1}_{(i,j)} = \beta_{(i,j)^{-1}}$, basta definir $\beta_{(i,j)}$ para os elementos acima da diagonal principal, uma vez que os isomorfismos $\beta_{(i,j)^{-1}}$ serão obtidos ao considerarmos os isomorfismos $\beta^{-1}_{(i,j)}$ já definidos (vide item (d)). Além disso, como $(1,2)(2,3) = (1,3)$ e queremos que

$$\beta_{(1,2)} \circ \beta_{(2,3)} = \beta_{(1,2)(2,3)} = \beta_{(1,3)},$$

então é suficiente definir $\beta_{(1,2)}$ e $\beta_{(2,3)}$, já que $\beta_{(1,3)}$ será obtido pela igualdade acima. Temos que $\beta_{(i,j)} : E_{r((i,j)^{-1})} \longrightarrow E_{r(i,j)}$, isto é, $\beta_{(i,j)} : E_{(j,j)} \longrightarrow E_{(i,i)}$. Assim, definimos

$$\begin{aligned} \beta_{(1,2)} : E_{(2,2)} &\longrightarrow E_{(1,1)} \\ (x,0,y) &\mapsto (0,x,y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{(2,3)} : E_{(3,3)} &\longrightarrow E_{(2,2)} \\ (x,y,0) &\mapsto (x,0,y) \end{aligned}$$

e, considerando a composição $\beta_{(1,2)} \circ \beta_{(2,3)}$, *obtemos*

$$\begin{aligned} \beta_{(1,3)} : E_{(3,3)} &\longrightarrow E_{(1,1)} \\ (x, y, 0) &\mapsto (0, x, y). \end{aligned}$$

Consequentemente, segue da condição $\beta^{-1}_{(i,j)} = \beta_{(i,j)^{-1}}$ *que*

$$\begin{aligned} \beta_{(2,1)} = \beta_{(1,2)^{-1}} = \beta^{-1}_{(1,2)} : E_{(1,1)} &\longrightarrow E_{(2,2)} \\ (0, x, y) &\mapsto (x, 0, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{(3,2)} = \beta_{(2,3)^{-1}} = \beta^{-1}_{(2,3)} : E_{(2,2)} &\longrightarrow E_{(3,3)} \\ (x, 0, y) &\mapsto (x, y, 0), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta_{(3,1)} = \beta_{(1,3)^{-1}} = \beta^{-1}_{(1,3)} : E_{(1,1)} &\longrightarrow E_{(3,3)} \\ (0, x, y) &\mapsto (x, y, 0). \end{aligned}$$

Para que $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ *seja uma ação global de* G *sobre* T, *devemos verificar que as aplicações definidas acima são, de fato, isomorfismos. Mas observemos que, como a composição de isomorfismos é um isomorfismo e a aplicação inversa de um isomorfismo também é um isomorfismo, então basta verificar que* $\beta_{(1,2)}$ *e* $\beta_{(2,3)}$ *são isomorfismos. Mostremos, primeiramente, que* $\beta_{(1,2)}$ *é um isomorfismo. Para isso, sejam* $a = (x, 0, y)$, $b = (w, 0, z) \in E_{(2,2)}$. *Temos que*

• $\beta_{(1,2)}$ *está bem definida e é injetora pois*

$$\begin{aligned} a = b &\Leftrightarrow (x, 0, y) = (w, 0, z) \\ &\Leftrightarrow x = w \text{ e } z = y \\ &\Leftrightarrow (0, x, y) = (0, w, z) \\ &\Leftrightarrow \beta_{(1,2)}(a) = \beta_{(1,2)}(b); \end{aligned}$$

• $\beta_{(1,2)}$ *é um homomorfismo de anéis já que*

$$\begin{aligned} \beta_{(1,2)}(a + b) &= \beta_{(1,2)}[(x, 0, y) + (w, 0, z)] \\ &= \beta_{(1,2)}(x + w, 0, y + z) \\ &= (0, x + w, y + z) \\ &= (0, x, y) + (0, w, z) \\ &= \beta_{(1,2)}(a) + \beta_{(1,2)}(b) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\beta_{(1,2)}(ab) &= \beta_{(1,2)}[(x,0,y)(w,0,z)] \\
&= \beta_{(1,2)}(xw,0,yz) \\
&= (0,xw,yz) \\
&= (0,x,y)(0,w,z) \\
&= \beta_{(1,2)}(a)\beta_{(1,2)}(b).
\end{aligned}$$

Por fim, notemos que $\beta_{(1,2)}$ é sobrejetora uma vez que dado $(0,x,y) \in E_{(1,1)}$, basta tomar $(x,0,y) \in E_{(2,2)}$ de modo que $\beta_{(1,2)}(x,0,y) = (0,x,y)$. Consequentemente, $\beta_{(1,2)}$ é um isomorfismo de anéis. Analogamente, a aplicação $\beta_{(2,3)}$ também é um isomorfismo de anéis e, portanto, $\{\beta_g \mid g \in G\}$ é um conjunto de isomorfismo de anéis.

Para concluir, devemos verificar a condição (ii) da definição de ação global de grupoides, isto é, vamos mostrar que

$$\beta_g \circ \beta_h = \beta_{gh},$$

para todo $(g,h) \in G^2$. Recordemos que G^2 é o subconjunto dos pares $(g,h) \in G \times G$ tais que o elemento gh existe. Em $(G_3)^2 = G^2$, temos 4 tipos de elementos e vamos analisar a condição (ii) para cada um deles no que se segue: para $i,j,k \in \{1,2,3\}$, temos

1. $((i,j),(j,i)) = ((i,j),(i,j)^{-1})$

   Notemos que $\beta_{(i,j)(j,i)} = \beta_{(i,i)}$, pela definição da a operação em G. Por outro lado, como $\beta_{(i,j)}^{-1} = \beta_{(i,j)^{-1}}$, então

$$\begin{aligned}
\beta_{(i,j)} \circ \beta_{(j,i)} &= \beta_{(i,j)} \circ \beta_{(i,j)^{-1}} \\
&= \beta_{(i,j)} \circ \beta_{(i,j)}^{-1} \\
&= \beta_{(i,i)}.
\end{aligned}$$

   Logo, a condição (ii) está satisfeita. Observemos que, nesse caso, também estão inclusos os elementos do tipo $((i,i)(i,i))$, quando $i = j$.

2. $((i,i)(i,j))$, *com* $i \neq j$

   Temos que $\beta_{(i,i)(i,j)} = \beta_{(i,j)}$ e, por outro lado, $\beta_{(i,i)} \circ \beta_{(i,j)} = \beta_{(i,j)}$, já que $\beta_{(i,i)}$ é a aplicação identidade. Portanto, (ii) está satisfeita.

3. $((i,j)(j,j))$, *com* $i \neq j$

   Análogo ao caso anterior.

4. $((i,j)(j,k))$, *com* $i \neq j \neq k$

   O subconjunto de G^2 formado por elementos deste tipo é dado por:

$$\{((1,2),(2,3)),((3,2),(2,1)),((3,1),(1,2)),((2,1),(1,3)),((2,3),(3,1)),((1,3),(3,2))\}.$$

Note que para o par $((1,2),(2,3))$ *a condição* (ii) *já ocorre, pois previamente definimos os isomorfismos correspondentes de modo que a igualdade*

$$\beta_{(1,2)} \circ \beta_{(2,3)} = \beta_{(1,3)} \tag{1.1}$$

já estivesse satisfeita. Assim, considerando a propriedade $\beta_{(i,j)}^{-1} = \beta_{(i,j)^{-1}}$ *e aplicando-a de forma conveniente na igualdade* (1.1), *obtemos que a condição* (ii) *está satisfeita para todos os elementos de* G^2, *uma vez que:*

$$\begin{array}{rcll}
\beta_{(1,2)} \circ \beta_{(1,3)} & = & \beta_{(3,2)} & \textit{aplicando } \beta_{(2,3)}^{-1} \textit{ à direita na igualdade em (1.1);} \\
\beta_{(2,3)} \circ \beta_{(2,1)} & = & \beta_{(1,3)} & \textit{aplicando } \beta_{(1,2)}^{-1} \textit{ à esquerda na igualdade em } (1.1); \\
\beta_{(3,2)} \circ \beta_{(3,1)} & = & \beta_{(1,2)} & \textit{aplicando } \beta_{(1,3)}^{-1} \textit{ à esquerda na primeira igualdade acima;} \\
\beta_{(2,1)} \circ \beta_{(2,3)} & = & \beta_{(3,1)} & \textit{aplicando } \beta_{(1,3)}^{-1} \textit{ à direita na segunda igualdade acima;} \\
\beta_{(3,1)} \circ \beta_{(3,2)} & = & \beta_{(2,1)} & \textit{aplicando } \beta_{(1,2)}^{-1} \textit{ à direita na terceira igualdade acima.}
\end{array}$$

Agora, para finalizar este exemplo, considerando o ideal $I = 2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0$ *de* T, *vamos seguir os passos do Exemplo 1.11 a fim de determinar uma ação parcial* $\alpha = (\{D_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ *de* G *sobre* I *ao restringir a ação global* β. *Primeiramente, dado* $e = r(g) \in G_0$, *devemos definir ideais* D_e *de* E_e *e, pelo Exemplo 1.11, é suficiente considerar* $D_e = I \cap E_e$. *Assim, temos que:*

$$\begin{array}{rcl}
D_{(1,1)} & = & I \cap E_{(1,1)} = 0 \times 3\mathbb{Z} \times 0 \lhd E_{(1,1)}; \\
D_{(2,2)} & = & I \cap E_{(2,2)} = 2\mathbb{Z} \times 0 \times 0 \lhd E_{(2,2)}; \\
D_{(3,3)} & = & I \cap E_{(3,3)} = 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z} \times 0 \lhd E_{(3,3)}.
\end{array}$$

O próximo passo consiste em definir os conjuntos $D_g \lhd D_{r(g)} = D_e$ *para os elementos* $g \in G$ *que não são identidades. Pelo Exemplo 1.11, o candidato ao ideal* D_g *é dado por*

$$D_g = D_{r(g)} \cap \beta_g(D_{r(g^{-1})}).$$

Logo, os demais ideais são:

$$\begin{array}{rcl}
D_{(1,2)} & = & D_{(1,1)} \cap \beta_{(1,2)}(D_{(2,2)}) \\
& = & (0 \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \cap \beta_{(1,2)}(2\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0) \\
& = & (0 \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \cap (0 \oplus 2\mathbb{Z} \oplus 0) \\
& = & 0 \oplus 6\mathbb{Z} \oplus 0 \\
& \lhd & D_{(1,1)};
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D_{(1,3)} & = & D_{(1,1)} \cap \beta_{(1,3)}(D_{(3,3)}) \\ & = & (0 \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \cap \beta_{(1,3)}(2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \\ & = & (0 \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \cap (0 \oplus 2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}) \\ & = & 0 \oplus 6\mathbb{Z} \oplus 0 \\ & \triangleleft & D_{(1,1)}; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D_{(2,1)} & = & D_{(2,2)} \cap \beta_{(2,1)}(D_{(1,1)}) \\ & = & (2\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0) \cap \beta_{(2,1)}(0 \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \\ & = & (2\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0) \cap (3\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0) \\ & = & 6\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \\ & \triangleleft & D_{(2,2)}; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D_{(2,3)} & = & D_{(2,2)} \cap \beta_{(2,3)}(D_{(3,3)}) \\ & = & (2\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0) \cap \beta_{(2,3)}(2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \\ & = & (2\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0) \cap (2\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 3\mathbb{Z}) \\ & = & 2\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \\ & \triangleleft & D_{(2,2)}; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} D_{(3,1)} & = & D_{(3,3)} \cap \beta_{(3,1)}(D_{(1,1)}) \\ & = & (2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \cap \beta_{(3,1)}(0 \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \\ & = & (2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \cap (3\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0) \\ & = & 6\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \\ & \triangleleft & D_{(3,3)}; \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} D_{(3,2)} & = & D_{(3,3)} \cap \beta_{(3,2)}(D_{(2,2)}) \\ & = & (2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \cap \beta_{(3,2)}(2\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0) \\ & = & (2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \oplus 0) \cap (2\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0) \\ & = & 2\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus 0 \\ & = & D_{(2,2)} \\ & \triangleleft & D_{(3,3)}. \end{array}$$

Logo, considerando $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ tal que $\alpha_g = \beta_g|_{D_{g^{-1}}}$, segue do Exemplo 1.11 que $\alpha = (\{D_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ é uma ação parcial de G sobre I.

Bagio e Paques determinaram condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial de grupoides admita envolvente no caso em que cada D_e possui unidade.

Teorema 1.15. *([2], Theorem 2.1) Seja $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de um grupoide G sobre um anel R e suponha que D_e é um anel com unidade para cada $e \in G_0$. Então α admite um globalização β se, e somente se, cada ideal D_g, $g \in G$, é um anel com unidade. Mais ainda, se β existe, então é única a menos de equivalência.*

Como o nosso estudo será realizado para anéis semiprimos, também enunciaremos aqui a Proposição 10.16 de [14], que apresenta algumas caracterizações para um anel semiprimo.

Proposição 1.16. *Para todo anel R, são equivalentes:*

(i) *R é um anel semiprimo;*

(ii) *o radical primo de R é nulo;*

(iii) *todo ideal nilpotente de R é nulo;*

(iv) *todo ideal nilpotente à esquerda de R é nulo.*

Todo ideal não nulo de um anel semiprimo e toda soma direta de anéis semiprimos são, também, anéis semiprimos. São exemplos de anéis semiprimos: $\mathbb{Z}$ com as operações usuais, $n\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z}$ e $R \oplus \mathbb{Z}$, em que R é um anel semiprimo.

A partir dessa noção, podemos definir o conceito de globalização semiprima, a qual será abordada na Seção 2.2.

Definição 1.17. *Seja α uma ação parcial de um grupoide G sobre um anel semiprimo R. Dizemos que uma ação envolvente (T, β) de α é semiprima se T é um anel semiprimo.*

Capítulo 2

Globalização de Ações Parciais de Grupoides sobre Anéis Semiprimos

Encontrar uma globalização para uma ação parcial de grupos é o objeto de estudo de Cortes e Ferrero em [6], para anéis semiprimos. Nesse artigo, os autores determinam condições para que uma ação parcial de um grupo sobre um anel semiprimo admita uma globalização e mostram que, quando semiprima, tal globalização é única a menos de equivalência.

O propósito desse capítulo consiste em apresentar resultados para ações parciais de grupoides sobre anéis semiprimos análogos àqueles obtidos em [6]. Vale ressaltar que, conforme disposto em [16], ao considerar $R = \sum_{e \in G_0} D_e$ na definição de ação parcial de grupoides, recuperamos o conceito de ações parciais de grupos sobre anéis, uma vez que se G é um grupo com identidade 1_G que age parcialmente sobre R via α, então $R1_G = R$ e $\alpha_{1_G} = id_R$. Ou seja, com essa condição adicional, os resultados aqui enunciados generalizam o caso de grupos estudado em [6]. Para o nosso contexto, alguns resultados extras são necessários e, para desenvolvê-los, utilizamos como referência o artigo [3] de Bagio e Pinedo, o qual explora a globalização de ações parciais de grupoides sobre anéis s-unitários.

2.1 Ações Parciais Globalizáveis

Buscamos generalizar a Seção 2 do artigo [6] no sentido de determinar condições necessárias e suficientes para que uma ação parcial de grupoide sobre um anel semiprimo admita globalização. Essencialmente, utilizaremos as noções de anéis de multiplicadores e de ideais fechados, as quais definiremos no que segue, juntamente com outros conceitos básicos.

Para homomorfismos de R-módulos à esquerda, consideraremos a notação do lado direito, ou seja, escreveremos $x \mapsto xf$ para $f : {}_RM \longrightarrow {}_RN$, enquanto que, para homomorfismos de R-módulos à direita $f : M_R \longrightarrow N_R$, utilizaremos a notação usual $x \mapsto fx$.

Consequentemente, a composição de homomorfismos de módulos à esquerda é lida da esquerda para a direita, isto é, $x(f_1f_2) = (xf_1)f_2$; e a composição de homomorfismos de módulos à direita é lida da forma usual, da direita para a esquerda.

Recordemos que, dado um anel R, o anel de multiplicadores $\mathcal{M}(R)$ de R é o conjunto

$$\mathcal{M}(R) = \{(\lambda, \mu) \in \mathrm{End}({}_RR) \times \mathrm{End}(R_R) \mid (a\lambda)b = a(\mu b) \text{ para quaisquer } a, b \in R\}$$

com adição e multiplicação usuais. Para um multiplicador $\gamma = (\lambda, \mu) \in \mathcal{M}(R)$ e $a \in R$, temos $a\gamma = a\lambda$ e $\gamma a = \mu a$. Logo,

$$(a\gamma)b = a(\gamma b)$$

para quaisquer $a, b \in R$. Um elemento $a \in R$ sempre determina o multiplicador $\gamma_a = (r_a, l_a) \in \mathcal{M}(R)$, em que $xr_a = xa$ e $l_a x = ax$ ($x \in R$). A primeira (segunda) componente dos elementos de $\mathcal{M}(R)$ é chamada multiplicador à direita (esquerda) de R.

Se I é um ideal de R, então o multiplicador γ_a evidentemente se restringe a um multiplicador de I, o qual também será denotado pelo mesmo par de símbolos (r_a, l_a).

Definição 2.1. *O anulador à esquerda de um subconjunto S de um anel R é o conjunto $ann_{l,R}(S) = \{x \in R \,|\, xS = 0\}$. De modo análogo definimos o anulador à direita $ann_{r,R}(S)$.*

Quando R é semiprimo, temos que, para todo ideal I de R, os anuladores à direita e à esquerda de I em R coincidem. Desta forma, para anéis semiprimos, não precisamos especificar a lateralidade dos anuladores e podemos mencionar apenas anulador. Denotaremos o anulador de um ideal I de R por

$$ann_R(I) = \{a \in R \,|\, aI = 0\} = \{a \in R \,|\, Ia = 0\},$$

o qual também é um ideal de R. Mais ainda, tanto o produto quanto a interseção de um ideal com o seu anulador são triviais.

Definição 2.2. *Um ideal à direita (esquerda, bilateral) J de R é dito essencial se, para todo ideal à direita (esquerda, bilateral) não nulo K de R, temos que $J \cap K \neq 0$.*

Equivalentemente, J é um ideal essencial (bilateral) de R se $ann_R(J) = 0$. O conjunto de todos os ideais essenciais de um anel R será denotado por $\mathcal{E}(R)$.

Para alguns resultados deste capítulo, faz-se necessária a introdução do conceito de ideais fechados. Dado um ideal I de R, o *fecho* de I é definido em [9] como o conjunto

$$\begin{aligned}[I] &= \{x \in R \mid \text{existe } H \in \mathcal{E}(R) \text{ com } xH \subseteq I\} \\ &= \{x \in R \mid \text{existe } H \in \mathcal{E}(R) \text{ com } Hx \subseteq I\}.\end{aligned}$$

Evidentemente, $I \subseteq [I]$. Se $I = [I]$, dizemos que I é um ideal *R-fechado* ou, simplesmente, fechado, quando o contexto estiver claro. Além disso, é fácil verificar que se I e J são ideais de R, então $[I \cap J] = [I] \cap [J]$. Notemos que todo ideal unitário é fechado e que o fecho do ideal nulo é o próprio ideal nulo.

A partir dessas noções, podemos introduzir, então, a definição de ação parcial fechada.

Definição 2.3. *Uma ação parcial de $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ de um grupoide G sobre um anel R é dita fechada se cada D_g é um ideal fechado de $D_{r(g)}$, para todo $g \in G$.*

Exemplo 2.4. *Consideremos o anel semiprimo $R = 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ e o grupoide $G = \{g, g^{-1}, r(g), d(g)\}$ (esse é o menor grupoide que não é um grupo!). Definamos os ideais*

$$D_{r(g)} = 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times 0 \times 0$$

$$D_{d(g)} = 0 \times 0 \times 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$$

$$D_g = 2\mathbb{Z} \times 0 \times 0 \times 0$$

$$D_{g^{-1}} = 0 \times 0 \times 0 \times 2\mathbb{Z},$$

as aplicações $\alpha_{r(g)}$ e $\alpha_{d(g)}$ como aplicações identidade restritas aos domínios apropriados, $\alpha_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ dada por

$$(0,0,0,2x) \mapsto (2x,0,0,0)$$

e $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$. Como $2\mathbb{Z}$ é um anel primo, então $D_{r(g)}$ e $D_{d(g)}$ são anéis semiprimos. Além disso, D_g é ideal fechado de $D_{r(g)}$ e $D_{g^{-1}}$ é ideal fechado de $D_{d(g)}$, uma vez que ambos são somas diretas de ideais que aparecem na decomposição de $D_{r(g)}$ e $D_{d(g)}$, respectivamente. Analogamente, $D_{r(g)}$ e $D_{d(g)}$ são ideais fechados de R. Então $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é uma ação parcial fechada de G sobre R.

A princípio, temos o seguinte resultado para anéis semiprimos

Lema 2.5. *([6], Lemma 1.5) Sejam R um anel semiprimo e I um ideal não nulo de R.*

(i) Se $\phi : R \longrightarrow I$ e $\psi : R \longrightarrow I$ são homomorfismos de R-módulos à esquerda tais que ϕ e ψ coincidem sobre I, então $\phi = \psi$.

(ii) Suponhamos que $\gamma, \gamma' \in \mathcal{M}(R)$ e $x\gamma = x\gamma'$, para todo $x \in R$. Então $\gamma = \gamma'$.

Demonstração:

(*i*) Sejam $i \in I$ e $r \in R$. Por hipótese, $\phi(ir) = \psi(ir)$ e, pela definição de homomorfismo de R-módulos à esquerda, temos que $i\phi(r) = \phi(ir) = \psi(ir) = i\psi(r)$. Assim, $i(\phi(r) - \psi(r)) = 0$, para todo $i \in I$, ou seja, $I(\phi(r) - \psi(r)) = 0$, para todo $r \in R$. Como I é não nulo e R é semiprimo, então $\phi(r) - \psi(r) = 0$ para todo $r \in R$ e, consequentemente, $\phi = \psi$.

(*ii*) Dados $x, y \in R$, temos que $x(\gamma' y) = (x\gamma')y = (x\gamma)y = x(\gamma y)$ e, daí, $R(\gamma' y - \gamma y) = 0$. Logo, $\gamma' y = \gamma y$ para todo $y \in R$ e, portanto, $\gamma' = \gamma$.

□

Em [6] os autores provaram o seguinte resultado

Corolário 2.6. *([6], Corollary 3.3) Sejam R um anel semiprimo, G um grupo e α uma ação parcial de G sobre R. Suponhamos que, para todo $g \in G$, os ideais D_g são fechados e, para quaisquer $a \in R$ e $g \in G$, existe $\gamma_g(a) \in \mathcal{M}(R)$ tal que as seguintes condições são satisfeitas*

(i) $R\gamma_g(a) \subseteq D_g$;

(ii) $\gamma_g(a)|_{D_g} = \alpha_{g^{-1}} r_a \alpha_g|_{D_g}$, *como multiplicadores à direita, isto é,* $x\gamma_g(a) = \alpha_g(\alpha_g^{-1}(x)a)$, *para todo* $x \in D_g$.

Então α possui uma ação envolvente semiprima, a qual é única a menos de equivalência.

O principal resultado desse capítulo é uma versão do corolário acima para ações parciais de grupoides sobre anéis semiprimos. Iniciaremos com alguns resultados elementares.

Seja α uma ação parcial de um grupoide G sobre um anel R. Se (T, β) é uma ação envolvente de α, então existe um monomorfismo de anéis $\varphi_e : D_e \longrightarrow E_e$ para cada $e \in G_0$. No que segue, frequentemente omitimos φ_e e consideramos que $D_e \subseteq E_e$.

Proposição 2.7. *Sejam R um anel, G um grupoide e α uma ação parcial de G sobre R. Se (R, α) possui uma ação envolvente, então, para quaisquer $a \in D_{r(g^{-1})}$ e $g \in G$, existe $\gamma_g(a) \in \mathcal{M}(D_{r(g)})$ tal que*

(i) $D_{r(g)}\gamma_g(a) \subseteq D_g$;

(ii) $\gamma_g(a)|_{D_g} = \alpha_{g^{-1}} r_a \alpha_g|_{D_g}$ *como multiplicadores à direita, ou seja,* $x\gamma_g(a) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a)$, *para todo* $x \in D_g$;

(iii) $\gamma_g(a)D_{r(g)} \subseteq D_g$.

Demonstração: Seja (T, β) uma ação envolvente de (R, α). Dado $x \in D_g$, notemos que $\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(x)a) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(x))\beta_g(a) = x\beta_g(a)$. Considerando $\gamma_g(a) = (r_{\beta_g(a)}, l_{\beta_g(a)})$, para quaisquer $a \in D_{r(g^{-1})}$ e $g \in G$, o item (ii) segue, uma vez que $x\gamma_g(a) = x\beta_g(a)$. Para o item (i), seja $y \in D_{r(g)}$. Então, considerando $\gamma_g(a)$ obtido anteriormente e o item *(ii)* da Definição 1.13, temos que

$$y\gamma_g(a) = y\beta_g(a) \in D_{r(g)} \cap \beta_g(D_{r(g^{-1})}) = D_g.$$

Portanto, $D_{r(g)}\gamma_g(a) \subseteq D_g$, como desejado.

Por fim, mostremos que $\gamma_g(a)D_{r(g)} \subseteq D_g$. Para todo $x \in D_g$, temos $\alpha_g(a\,\alpha_{g^{-1}}(x)) = \beta_g(a\,\beta_{g^{-1}}(x)) = \beta_g(a)x$ e, portanto,

$$\gamma_g(a)x = l_{\beta_g(a)}(x) = \beta_g(a)x = \alpha(a\,\alpha_{g^{-1}}(x)) = (\alpha_g l_a \alpha_{g^{-1}})(x).$$

Logo, $\gamma_g(a)|_{D_g} = \alpha_g l_a \alpha_{g^{-1}}$ como multiplicador à esquerda. Para $y \in D_{r(g)}$, segue que

$$\gamma_g(a)y = \beta_g(a)y \in \beta_g(D_{r(g^{-1})}) \cap D_{r(g)} = D_g,$$

provando (iii).

□

Notemos que, pelo Lema 2.5, se R é semiprimo, então o elemento $\gamma_g(a) \in \mathcal{M}(D_{r(g)})$ na Proposição 2.7 é único e está bem definido, para quaisquer $a \in D_{r(g^{-1})}$ e $g \in G$. Assim, para todo $g \in G$, existe uma aplicação $\gamma_g : D_{d(g)} \longrightarrow \mathcal{M}(D_{r(g)})$. Além disso, se cada D_g possui unidade, então existe um isomorfismo de anéis $\psi_g : D_{r(g)} \longrightarrow \mathcal{M}(D_{r(g)})$, para todo $g \in G$. Ou seja, quando (R, α) admite uma ação envolvente, podemos considerar $\delta_g = \psi_g^{-1} \circ \gamma_g$ e obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
D_{g^{-1}} & \xrightarrow{\iota} & D_{d(g)} & \xrightarrow{\varphi_{d(g)}} & E_{d(g)} \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha_g} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_g} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_g} \\
D_g & \xrightarrow{j} & D_{r(g)} & \xrightarrow{\varphi_{r(g)}} & E_{r(g)}.
\end{array}$$

Com o objetivo de obter uma recíproca para a Proposição 2.7, apresentaremos uma série de resultados técnicos que explicitam o comportamento dos ideais que compõem as ações parciais de grupoides e dos multiplicadores adequados.

Lema 2.8. *Sejam R um anel semiprimo e α uma ação parcial fechada do grupoide G sobre R tal que, para quaisquer $a \in D_{r(g^{-1})}$ e $g \in G$, existe $\gamma_g(a) \in \mathcal{M}(D_{r(g)})$ de modo que as condições (i)-(iii) da Proposição 2.7 são satisfeitas. Então, para quaisquer $g, h \in G$ tais que $r(h) = r(g)$, temos*

(i) $D_h \gamma_g(a) \subseteq D_g \cap D_h$ para todo $a \in D_{r(g^{-1})}$;

(ii) $D_{r(h^{-1})}\gamma_{h^{-1}}(a) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g}$ para todo $a \in D_g$.

Demonstração:

(i) Sejam $a \in D_{r(g^{-1})}$ e $g, h \in G$ tais que $r(h) = r(g)$. Então D_h é um ideal de $D_{r(g)}$ e, pelo item (i) da Proposição 2.7, temos que $D_h\gamma_g(a) \subseteq D_g$. Seja $x \in D_h$. Para todo $y \in D_g$, temos que $yx\gamma_g(a) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(yx)a) \in D_g \cap D_h$. De fato, notemos que $yx \in D_g \cap D_h$ pois D_g e D_h são ideais de $D_{r(g)} = D_{r(h)}$. Também, $\alpha_g(a) \in D_g \subseteq D_{r(g)} = D_{r(h)}$. Portanto,

$$yx\gamma_g(a) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(yx)a) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(yx))\alpha_g(a) = yx\alpha_g(a) \in D_g \cap D_h.$$

Agora, observemos que, se $z \in ann_{D_{r(g)}}(D_g)$, então $zx\gamma_g(a) = 0$. Assim, $Hx\gamma_g(a) \subseteq D_g \cap D_h$, em que $H = D_g \oplus ann_{D_{r(g)}}(D_g)$ é um ideal essencial de $D_{r(g)}$. Logo, $x\gamma_g(a) \in [D_g \cap D_h] = [D_g] \cap [D_h] = D_g \cap D_h$, para todo $x \in D_h$. Consequentemente, $D_h\gamma_g(a) \subseteq D_g \cap D_h$.

(*ii*) Consideremos $x \in D_{r(h^{-1})}$ e $z \in D_{h^{-1}}$. Então $zx\gamma_{h^{-1}}(a) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_h(zx)a) \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g}$ uma vez que $\alpha_h(zx)a \in D_h \cap D_g$ (vide Lema 1.8(*iii*)). Mais ainda, para todo $v \in ann_{D_{r(h^{-1})}}(D_{h^{-1}})$, temos que $vx\gamma_{h^{-1}}(a) = 0$. Dessa forma, $Hx\gamma_{h^{-1}}(a) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g}$, em que $H = D_{h^{-1}} \oplus ann_{D_{r(h^{-1})}}(D_{h^{-1}})$ é um ideal essencial de $D_{r(h^{-1})}$. Assim, $x\gamma_{h^{-1}}(a) \in [D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g}] = D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g}$ para todo $x \in D_{r(h^{-1})}$ e, portanto, $D_{r(h^{-1})}\gamma_{h^{-1}}(a) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g}$ como desejado.

□

Os próximos resultados são, respectivamente, os Lemas 3.1 e 3.2 de [3] para anéis semiprimos.

Lema 2.9. *Sejam R um anel semiprimo e α uma ação parcial fechada do grupoide G sobre R tal que, para quaisquer $a \in D_{r(g^{-1})}$ e $g \in G$, existe $\gamma_g(a) \in \mathcal{M}(D_{r(g)})$ de modo que as condições (i)-(iii) da Proposição 2.7 são satisfeitas. Então, para quaisquer $g, h \in G$ tais que $r(g) = r(h)$, temos*

(*i*) $D_{h^{-1}}\gamma_{h^{-1}g}(a) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g}$, *para todo* $a \in D_{r(g^{-1})}$;

(*ii*) $D_{r(h^{-1})}\gamma_{h^{-1}}(\alpha_g(a)) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g}$, *para todo* $a \in D_{g^{-1}}$;

(*iii*) $D_{g^{-1}h}\gamma_{g^{-1}}(b) \subseteq D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h}$, *para todo* $b \in D_{r(g)}$;

(*iv*) $D_{r(g^{-1})}\gamma_{g^{-1}}(\gamma_h(a)b) \subseteq D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h}$, *para quaisquer* $a \in D_{r(h^{-1})}$ *e* $b \in D_{r(h)} = D_{r(g)}$;

(*v*) $D_{g^{-1}}\gamma_{g^{-1}h}(a) \subseteq D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h}$, *para todo* $a \in D_{r(h^{-1})}$;

(*vi*) $D_{r(g^{-1})}\gamma_{g^{-1}}(b\gamma_h(a)) \subseteq D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h}$, *para quaisquer* $a \in D_{r(h^{-1})}$ *e* $b \in D_{r(h)} = D_{r(g)}$.

Demonstração:

(*i*) Como $r((h^{-1}g)^{-1}) = r(g^{-1}h) = r(g^{-1})$, temos que $D_{r(g^{-1})} = D_{r((h^{-1}g)^{-1})}$. Assim, basta aplicar o Lema 2.8(*i*) para os índices h^{-1} e $h^{-1}g$.

(*ii*) Como $\alpha_g(a) \in D_g \lhd D_{r(g)} = D_{r(h)}$, ou seja, existe $\gamma_{h^{-1}}(\alpha_g(a)) \in \mathcal{M}(D_{r(h^{-1})})$, basta aplicar o item (*ii*) do Lema 2.8.

(*iii*) Segue do Lema 2.8(*i*) considerando os índices $g^{-1}h$ e g^{-1}.

(*iv*) Pelo item (*iii*) da Proposição 2.7, temos que $\gamma_h(a)b \in D_h \subseteq D_{r(h)} = D_{r(g)}$ e, assim, existe $\gamma_{g^{-1}}(\gamma_h(a)b) \in \mathcal{M}(D_{r(g^{-1})})$. Além disso, segue do Lema 2.8(*ii*) que $D_{r(g^{-1})}\gamma_{g^{-1}}(\gamma_h(a)b) \subseteq D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h}$, pois $\gamma_h(a)b \in D_h$.

(*v*) Notemos que $r(h^{-1}) = r(h^{-1}g) = r((g^{-1}h)^{-1})$. Assim, para todo $a \in D_{r(h^{-1})}$, temos $a \in D_{r((g^{-1}h)^{-1})}$, garantindo a existência de $\gamma_{g^{-1}h}(a) \in \mathcal{M}(D_{r(g^{-1}h)})$. Portanto, o resultado segue do item (*i*) do Lema 2.8 para os índices g^{-1} e $g^{-1}h$.

(*vi*) Pela Proposição 2.7(*i*), temos que $b\gamma_h(a) \in D_h$, para todo $b \in D_{r(h)}$. Dessa forma, $b\gamma_h(a) \in D_{r(h)} = D_{r(g)}$ e, portanto, existe $\gamma_{g^{-1}}(b\gamma_h(a))$. Como $b\gamma_h(a) \in D_h$, segue de 2.8(*ii*) que $D_{r(g^{-1})}\gamma_{g^{-1}}(b\gamma_h(a)) \subseteq D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h}$.

□

Lema 2.10. *Sejam R um anel semiprimo e α uma ação parcial fechada do grupoide G sobre R tal que, para quaisquer $a \in D_{r(g^{-1})}$ e $g \in G$, existe $\gamma_g(a) \in \mathcal{M}(D_{r(g)})$ de modo que as condições (i)-(iii) da Proposição 2.7 são satisfeitas. Consideremos $g, h \in G$ tais que $r(g) = r(h)$, $a \in D_{r(h^{-1})}$ e $b \in D_{r(h)}$. Então, as seguintes igualdades são satisfeitas em $\mathcal{M}(D_{r(g^{-1})})$:*

$$\gamma_{g^{-1}h}(a)\gamma_{g^{-1}}(b) = \gamma_{g^{-1}}(\gamma_h(a)b), \quad \gamma_{g^{-1}}(b)\gamma_{g^{-1}h}(a) = \gamma_{g^{-1}}(b\gamma_h(a)).$$

Demonstração: Consideremos os multiplicadores $\phi := \gamma_{g^{-1}h}(a)\gamma_{g^{-1}}(b)$ e $\tau := \gamma_{g^{-1}}(\gamma_h(a)b)$ e $\mathcal{J} = D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h} \triangleleft D_{r(g^{-1})}$. Como $\gamma_h(a)b \in D_h$, então τ está bem definido. Segue do Lema 2.8(*ii*) que $D_{r(h^{-1})}\gamma_{h^{-1}g}(a) \subseteq D_{h^{-1}g}$ pois $r(h^{-1}g) = r(h^{-1})$ e, portanto,

$$D_{r(g^{-1})}\gamma_{g^{-1}h}(a)\gamma_{g^{-1}}(b) \subseteq D_{g^{-1}h}\gamma_{g^{-1}}(b) \subseteq \mathcal{J},$$

pelo Lema 2.9(*iii*). Por outro lado, pelo item (*iv*) do Lema 2.9, obtemos que $D_{r(g^{-1})}\gamma_{g^{-1}}(\gamma_h(a)b) \subseteq \mathcal{J}$. Assim, pelo Lema 2.5, é suficiente provar que ϕ e τ coincidem como multiplicadores à direita em $\mathcal{J}$.

Seja $x \in \mathcal{J}$. Pelo Lema 1.8(*iii*), $\alpha_{h^{-1}g}(x) \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g}$. Daí, $\alpha_{h^{-1}g}(x)a \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g}$ e

$$\begin{aligned}
x\phi &= (x\gamma_{g^{-1}h}(a))\gamma_{g^{-1}}(b) \\
&= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}h}(\alpha_{h^{-1}g}(x)a))b) \\
&= \alpha_{g^{-1}}((\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}h})(\alpha_{h^{-1}g}(x)a)b) \\
&= \alpha_{g^{-1}}((\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_h)((\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_g)(x)a)b) \\
&= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_h((\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)))a)b) \\
&= \alpha_{g^{-1}}((\alpha_g(x)\gamma_h(a))b) \\
&= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(x)(\gamma_h(a)b)) \\
&= x\gamma_{g^{-1}}(\gamma_h(a)b) \\
&= x\tau,
\end{aligned}$$

como desejado.

Agora, consideremos os multiplicadores $\phi := \gamma_{g^{-1}}(b)\gamma_{g^{-1}h}(a)$ e $\tau := \gamma_{g^{-1}}(b\gamma_h(a))$. Aplicando o item (*ii*) do Lema 2.8 e os itens (*v*) e (*vi*) do Lema 2.9, temos que $D_{r(g^{-1})}\phi \subseteq D_{g^{-1}}\gamma_{g^{-1}h}(a) \subseteq \mathcal{J}$ e $D_{r(g^{-1})}\tau \subseteq \mathcal{J}$. Como anteriormente, basta mostrar que ϕ e

τ coincidem como multiplicadores à direita em $\mathcal{J}$. Dado $x \in \mathcal{J}$, note que $\alpha_g(x)b \in D_g \cap D_h$ e, portanto,

$$\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)b) \in D_{h^{-1}g} \cap D_{h^{-1}} \quad \text{e} \quad \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(x)b) \in D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
x\phi &= (x\gamma_{g^{-1}}(b))\gamma_{g^{-1}h}(a)\\
&= \alpha_{g^{-1}h}(\alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(x)b))a)\\
&= \alpha_{g^{-1}h}((\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_g)(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(x)b))a)\\
&= \alpha_{g^{-1}h}(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)b)a)\\
&= (\alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_h)(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)b)a)\\
&= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x)b)a))\\
&= \alpha_{g^{-1}}((\alpha_g(x)b)\gamma_h(a))\\
&= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(x)(b\gamma_h(a)))\\
&= x\gamma_{g^{-1}}(b\gamma_h(a))\\
&= x\tau
\end{aligned}$$

e o resultado segue. □

Dado um grupoide G, definamos o conjunto $X_g := \{h \in G \mid r(h) = r(g)\}$. Agora estamos em condições de provar um dos principais resultados dessa seção, baseado nos Teoremas 2.3 de [6] e 3.3 de [3].

Proposição 2.11. *Sejam R um anel semiprimo, G um grupoide e α uma ação parcial fechada de G sobre R. Então (R, α) possui uma ação envolvente (T, β) se, para quaisquer $a \in D_{r(g^{-1})}$ e $g \in G$, existe $\gamma_g(a) \in \mathcal{M}(D_{r(g)})$ tal que*

(i) $D_{r(g)}\gamma_g(a) \subseteq D_g$;

(ii) $\gamma_g(a)|_{D_g} = \alpha_{g^{-1}} r_a \alpha_g|_{D_g}$ *como multiplicadores à direita, ou seja,* $x\gamma_g(a) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a)$, *para todo* $x \in D_g$;

(iii) $\gamma_g(a)D_{r(g)} \subseteq D_g$.

Demonstração: Seja $\mathcal{L} := \mathcal{F}(G, \sum_{e\in G_0} \mathcal{M}(D_e))$ o anel de todas as funções de G em $\sum_{e\in G_0} \mathcal{M}(D_e)$. Consideremos o subanel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}$ de todas as funções f tais que $f(g) \in \mathcal{M}(D_{r(g^{-1})})$, para todo $g \in G$. Seguindo [2], para cada $g \in G$ definimos

$$F_g := \{f \in \mathcal{F} \mid f(h) = 0, \text{ para todo } h \notin X_g\}.$$

Claramente, F_g é um ideal de $\mathcal{F}$ e $F_g = F_{r(g)}$, uma vez que $X_g = X_{r(g)}$. No que se segue, convenientemente denotaremos o valor $f(h)$ por $f|_h$, para quaisquer $f \in \mathcal{F}$ e $h \in G$.

Para $g \in G$ e $f \in F_{g^{-1}}$, seja $\beta_g : F_{g^{-1}} \longrightarrow F_g$ a aplicação dada por

$$\beta_g(f)|_h = \begin{cases} f(g^{-1}h), & \text{se } h \in X_g \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notemos que se $h \in X_g$, então $r(h) = r(g) = d(g^{-1})$ e, portanto, o produto $g^{-1}h$ existe e $r(g^{-1}h) = r(g^{-1})$. Assim, β_g está bem definida. É claro que β_g é um homomorfismo de anéis e, além disso, temos que

$$\begin{aligned} \beta_{g^{-1}} \circ \beta_g(f)|_h &= \beta_g(f)|_{gh} = f(g^{-1}(gh)) \\ &= f(d(g)h) = f(r(h)h) = f(h), \end{aligned}$$

para quaisquer $g \in G$, $f \in F_{g^{-1}}$ e $h \in X_{g^{-1}}$. Se $h \notin X_{g^{-1}}$, β_g se anula. Analogamente, $\beta_g \circ \beta_{g^{-1}}(f)|_h = f(h)$, para quaisquer $f \in F_g$ e $h \in X_g$. Logo, β_g é um isomorfismo de anéis. Observemos que $\beta_e = I_{F_e}$, para todo $e \in G_0$. Mais ainda,

$$\beta_{gh}(f)|_l = f((h^{-1}g^{-1})l) = f(h^{-1}(g^{-1}l)) = \beta_g \circ \beta_h(f)|_l,$$

para quaisquer $f \in F_{h^{-1}}$, $l \in X_g$ e $(g, h) \in G^2$. Se $l \notin X_g$, então β_{gh} se anula. Consequentemente, $\beta = (\{F_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ é uma ação global de G sobre $\mathcal{F}$.

Agora, sejam $g \in G$ e $a \in D_{r(g^{-1})}$. Pelo Lema 2.5, o multiplicador $\gamma_g(a)$ é unicamente determinado. Então, podemos definir uma aplicação $\psi_e : D_e \longrightarrow F_e$ por

$$\psi_e(a)|_h = \begin{cases} \gamma_{h^{-1}}(a), & \text{se } r(h) = e \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $e \in G_0$. Notemos que $\psi_e(a)|_h = \gamma_{h^{-1}}(a) \in \mathcal{M}(D_{r(h^{-1})})$, para todo $h \in G$ tal que $r(h) = e$. Assim, $\psi_e(a) \in F_e$.

Mostremos que ψ_e é injetora. Seja $a \in D_e$ tal que $\psi_e(a) \equiv 0$. Então, para todo $h \in G$, $\psi_e(a)|_h = 0$. Em particular, para todo $h \in G$ com $r(h) = e$, temos que $\psi_e(a)|_h = \gamma_{h^{-1}}(a) = 0$. Assim, para $h = e$, $\gamma_e(a) = 0$ para todo $a \in D_e$. Daí, $0 = \gamma_e(a)|_{D_e} = \alpha_{e^{-1}} r_a \alpha_e|_{D_e} = D_e a$. Ou seja, $D_e a = 0$ e, uma vez que D_e é um anel semiprimo, obtemos $a = 0$, provando a injetividade de ψ_e.

Para mostrar que ψ_e é um homomorfismo de anéis, sejam $a, b \in D_e$ e $h \in G$. Claramente, $\psi_e(ab)|_h = 0 = \psi_e(a)|_h \psi_e(b)|_h$, para todo $h \notin X_e$. Suponhamos que $h \in X_e$.

Então

$$\begin{aligned}(x\gamma_{h^{-1}}(a))\gamma_{h^{-1}}(b) &\overset{(ii)}{=} ((x)\alpha_h r_a \alpha_{h^{-1}})\alpha_h r_b \alpha_{h^{-1}}\\ &= (x)\alpha_h r_{ab}\alpha_{h^{-1}}\\ &= x\gamma_{h^{-1}}(ab),\end{aligned}$$

para todo $x \in D_{h^{-1}}$. Aplicando os itens (i) e (ii) do Lema 2.5, obtemos que $\gamma_{h^{-1}}(ab) = \gamma_{h^{-1}}(a)\gamma_{h^{-1}}(b)$. Logo, ψ_e é uma função multiplicativa. Analogamente mostra-se que ψ_e é uma função aditiva e, portanto, ψ_e é um monomorfismo de anéis.

Agora, seja E_g a subálgebra de F_g gerada por $\bigcup_{r(g)=r(h)} \beta_h(\psi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})}))$, para todo $g \in G$. Seja $T := \prod_{e\in G_0} E_e$, para cada $e \in G_0$, e defina

$$\begin{aligned}\iota_e : E_e &\longrightarrow T\\ x &\longmapsto (x_l)_{l\in G_0},\end{aligned}$$

em que $x_e = x$ e $x_l = 0$ se $l \neq e$. Seguindo [2], para simplificar as notações, identificaremos E_e com $\iota_e(E_e) \subseteq T$ e ψ_e com $\iota_e \circ \psi_e$. Além disso, denotaremos pelo mesmo β_g o isomorfismo de anéis $\iota_{r(g)} \circ \beta_g|_{E_{g^{-1}}} \circ \iota^{-1}_{r(g^{-1})}$ de $\iota_{r(g^{-1})}(E_{g^{-1}}) \equiv E_{g^{-1}}$ sobre $\iota_{r(g)}(E_g) \equiv E_g$. Assim, por construção, $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ é uma ação global de G sobre T.

Queremos mostrar que β é uma globalização pra α. Para isto, provemos primeiramente a propriedade (iii) da Definição 1.12 de globalização, isto é,

$$\beta_g(\psi_{r(g^{-1})}(a)) = \psi_{r(g)}(\alpha_g(a)),\ a \in D_{g^{-1}}. \tag{2.1}$$

Sejam $g, h \in G$ e $a \in D_{g^{-1}}$. Temos dois casos a considerar. No primeiro, $r(h) \neq r(g)$. Nesse caso, $\beta_g(\psi_{r(g^{-1})}(a))|_h = 0 = \psi_{r(g)}(\alpha_g(a))|_h$, mostrando o desejado. No segundo caso, $r(h) = r(g)$. Assim, temos que D_g e D_h são ideais de $D_{r(h)} = D_{r(g)}$. Consideremos $\phi = \beta_g(\psi_{r(g^{-1})}(a))|_h = \gamma_{h^{-1}g}(a)$ e $\tau = \psi_{r(g)}(\alpha_g(a))|_h = \gamma_{h^{-1}}(\alpha_g(a))$. Então ϕ e τ são multiplicadores em $\mathcal{M}(D_{r(h^{-1})})$. Dado $x \in I := D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g} \lhd D_{r(h^{-1})}$, temos que $\alpha_{g^{-1}h}(x) \in D_{g^{-1}h} \lhd D_{r(g^{-1}h)} = D_{r(g^{-1})}$ e, multiplicando por $a \in D_{g^{-1}} \lhd D_{r(g^{-1})}$, segue que $\alpha_{g^{-1}h}(x)a \in D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h}$. Assim, pela Observação 1.9, temos

$$\begin{aligned}x\phi &= x\gamma_{h^{-1}g}(a)\\ &= (\alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_g)((\alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_h)(x)a)\\ &= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_h(x)\alpha_g(a))\\ &= x\tau.\end{aligned}$$

Logo, segue do Lema 2.5 e dos itens (i) e (ii) do Lema 2.9 que $\phi = \tau$, isto é, $\beta_g(\psi_{r(g^{-1})}(a))|_h = \psi_{r(g)}(\alpha_g(a))|_h$ para todo $h \in G$ tal que $r(h) = r(g)$. Consequentemente, $\beta_g(\psi_{r(g^{-1})}(a)) = \psi_{r(g)}(\alpha_g(a))$ para todo $a \in D_{g^{-1}}$ como desejado.

Agora vamos verificar a propriedade (ii) da definição de globalização, a saber

$$\psi_{r(g)}(D_g) = \psi_{r(g)}(D_{r(g)}) \cap \beta_g(\psi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})})), \text{ para todo } g \in G.$$

Consideremos um elemento $c \in \psi_{r(g)}(D_{r(g)}) \cap \beta_g(\psi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})}))$. Então, existem elementos $a \in D_{r(g)}$ e $b \in D_{r(g^{-1})}$ tais que $c = \psi_{r(g)}(a) = \beta_g(\psi_{r(g^{-1})}(b)$. Dado $h \in G$ tal que $r(h) = r(g)$, obtemos

$$\gamma_{h^{-1}}(a) = \psi_{r(g)}(a)|_h = \beta_g(\psi_{r(g^{-1})}(b))|_h = \gamma_{h^{-1}g}(b).$$

Em particular, considerando $h = r(g)$, temos que $\gamma_{r(g)}(a) = \gamma_g(b)$, ou seja, $r_a = \gamma_g(b)$. Como $D_{r(g)}a = D_{r(g)}\gamma_g(b) \overset{(i)}{\subseteq} D_g$, pelo Lema 2.8$(ii)$, segue que $a \in [D_g] = D_g$. Logo, $c = \psi_{r(g)}(a) \in \psi_{r(g)}(D_g)$, o que prova uma das inclusões desejadas.

Para a outra inclusão, basta verificar que $\psi_{r(g)}(D_g) \subseteq \beta_g(\psi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})}))$. Para isso, sejam $a \in D_g$ e $b = \alpha_{g^{-1}}(a)$. Então, dado $h \in G$ tal que $r(h) = r(g)$, temos

$$\begin{aligned}\psi_{r(g)}(a)|_h &= \psi_{r(g)}(\alpha_g(b))|_h = \gamma_{h^{-1}}(\alpha_g(b)) \\ &\overset{2.1}{=} \gamma_{h^{-1}g}(b) = \beta_g(\psi_{r(g^{-1})}(b))|_h.\end{aligned}$$

Portanto, $\psi_{r(g)}(D_g) \subseteq \beta_g(\psi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})}))$.

Finalmente, mostremos que $\psi_e(D_e)$ é um ideal de E_e, para todo $e \in G_0$. É suficiente provar que

$$x := \beta_h(\psi_{r(h^{-1})}(a))\psi_e(b) \in \psi_e(D_e), \qquad v := \psi_e(b)\beta_h(\psi_{r(h^{-1})}(a)) \in \psi_e(D_e),$$

para quaisquer $a \in D_{r(h^{-1})}$, $b \in D_e$ e $h \in G$ com $h \in X_e$. Se $g \in G$ satisfaz $r(g) \neq r(h) = e$, então $x|_g = 0 = v|_g$. Se $r(g) = r(h) = e$ e

$$x|_g = \psi_{r(h^{-1})}(a)|_{h^{-1}g}\psi_e(b)|_g = \gamma_{g^{-1}h}(a)\gamma_{g^{-1}}(b),$$

segue do Lema 2.10 que $\gamma_{g^{-1}h}(a)\gamma_{g^{-1}}(b) = \gamma_{g^{-1}}(\gamma_h(a)b)$ como elementos de $\mathcal{M}(D_{r(g^{-1})})$. Assim, $x = \psi_e(\gamma_h(a)b) \in \psi_e(D_e)$.

Agora provemos que $\psi_e(D_e)$ é um ideal à direita de E_e. Seja $g \in G$ tal que $r(h) = r(g)$. Então

$$v|_g = \psi_e(b)|_g\psi_{r(h^{-1})}(a)|_{h^{-1}g} = \gamma_{g^{-1}}(b)\gamma_{g^{-1}h}(a).$$

Pelo Lema 2.10, segue que $\gamma_{g^{-1}}(b)\gamma_{g^{-1}h}(a) = \gamma_{g^{-1}}(b\gamma_h(a))$. Portanto, $v = \psi_e(b\gamma_h(a)) \in \psi_e(D_e)$. Consequentemente, $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ é uma globalização de α. $\square$

Unindo as Proposições 2.7 e 2.11, enunciamos o principal resultado dessa seção no que segue.

Teorema 2.12. *Sejam R um anel semiprimo, G um grupoide e α uma ação parcial de G sobre R. Suponhamos que todos os ideais D_g são ideais fechados, $g \in G$. Então α possui uma ação envolvente se, e somente se, para quaisquer $a \in D_{r(g^{-1})}$ e $g \in G$, existe $\gamma_g(a) \in \mathcal{M}(D_{r(g)})$ tal que*

(i) $D_{r(g)}\gamma_g(a) \subseteq D_g$;

(ii) $\gamma_g(a)|_{D_g} = \alpha_{g^{-1}} r_a \alpha_g|_{D_g}$ *como multiplicadores à direita, ou seja,* $x\gamma_g(a) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a)$, *para todo* $x \in D_g$;

(iii) $\gamma_g(a)D_{r(g)} \subseteq D_g$.

É importante enfatizar que a propriedade *(iii)* no resultado acima não é considerada para o caso de grupo mas se mostrou necessária no contexto de grupoides, principalmente para provar o item *(iv)* do Lema 2.9, já que consideramos anéis não necessariamente unitários.

Até aqui mostramos a existência de uma ação envolvente sob as hipóteses da Proposição 2.11 mas não provamos a sua unicidade a menos de equivalência. Esse resultado é válido para ações envolventes semiprimas.

2.2 Ações Envolventes Semiprimas

O objetivo dessa seção consiste em provar que se α possui uma ação envolvente, então também possui uma ação envolvente semiprima, a qual é única a menos de equivalência, generalizando a Seção 3 de [6]. No que segue, consideraremos que todas as condições da Proposição 2.11 são satisfeitas e usaremos a mesma notação da Seção 2.1. Em particular, (T, β) denota uma ação envolvente de (R, α) e $Nil(T)$ denota o radical primo (interseção de todos os ideais primos) do anel T.

Recordemos, inicialmente, a definição de radical hereditário e algumas propriedades do radical primo de um anel.

A definição de radical hereditário é dada no Teorema 48 de [7]:

Teorema 2.13. *([7], Theorem 48) Seja S um anel. Para um radical* rad, *são equivalentes:*

(i) Se I é um ideal de S e $S = \mathrm{rad}(S)$, *então* $I = \mathrm{rad}(I)$;

(ii) Para todo anel S e todo ideal I de S tem-se $\mathrm{rad}(I) = \mathrm{rad}(S) \cap I$.

No caso em que um radical satisfaz uma das condições acima, dizemos que tal radical é hereditário.

O radical primo é um radical hereditário (ver [7]). Em [14], temos outros dois resultados importantes sobre o radical primo:

Observação 2.14. *Dado um anel R*

(i) $R/Nil(R)$ é um anel semiprimo (Exemplo 10.17(d));

(ii) $Nil(R) = (0)$ se R é semiprimo (Proposição 10.16).

Notemos que, se R é semiprimo, então D_e é um ideal semiprimo de R para todo $e \in G_0$. Ou, ainda, $D_{r(g)}$ é semiprimo, para todo $g \in G$. A partir destes resultados, identificando D_e com $\varphi_e(D_e) \subseteq E_e$, para todo $e \in G_0$, podemos concluir que

$$Nil(E_{r(g)}) \cap \beta_h(D_{r(h^{-1})}) = Nil(\beta_h(D_{r(h^{-1})})) = 0$$

para quaisquer $g, h \in G$ tais que $r(g) = r(h)$. De fato, a primeira igualdade segue pois o radical primo é hereditário e $\beta_h(D_{r(h^{-1})})$ é um ideal de $E_{r(g)}$. A segunda igualdade é imediata pelo item (ii) da observação acima. Em particular, para $h = r(g)$, obtemos que $Nil(E_{r(g)}) \cap \beta_{r(g)}(D_{r(r(g))}) = 0$ e, como $\beta_{r(g)}$ é a aplicação identidade de $E_r(g)$, então $Nil(E_{r(g)}) \cap D_{r(g)} = 0$. Disso segue que, para todo $g \in G$,

$$Nil(T) \cap D_{r(g)} = 0 \tag{2.2}$$

uma vez que $Nil(E_{r(g)}) = Nil(T) \cap E_{r(g)}$ e $D_{r(g)}$ é um ideal de $E_{r(g)}$.

Nosso próximo passo consiste em estender β à uma ação global $\overline{\beta}$ sobre o anel semiprimo $\overline{T} = T/Nil(T)$. Para isso, vamos definir previamente o conceito de ideal β-invariante e mostrar que $Nil(T)$ satisfaz tal propriedade.

Dizemos que um ideal I do anel T é β-invariante se $\beta_g(I \cap E_{g^{-1}}) \subseteq I \cap E_g$, para todo $g \in G$. Notemos que, como E_g é um ideal de T, então $I \cap E_g$ também é um ideal de T, para todo $g \in G$. Além disso, é fácil verificar que $Nil(T)$ é um ideal β-invariante de T pois

$$\begin{aligned} \beta_g(Nil(T) \cap E_{g^{-1}}) &= \beta_g(Nil(E_{g^{-1}}) \\ &= Nil(\beta_g(E_{g^{-1}})) \\ &= Nil(E_g) \\ &= Nil(T) \cap E_g, \end{aligned}$$

uma vez que $Nil(T)$ é um radical hereditário.

Agora vamos estender β à uma ação global $\overline{\beta}$ sobre o anel semiprimo $\overline{T} = T/Nil(T)$, seguindo os passos do Lema 2.2*(ii)* de [11].

Considere os isomorfismos canônicos

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \dfrac{E_{g^{-1}} + Nil(T)}{Nil(T)} & \longrightarrow & \dfrac{E_{g^{-1}}}{E_{g^{-1}} \cap Nil(T)} \\ a_{g^{-1}} + Nil(T) & \mapsto & a_{g^{-1}} + (E_{g^{-1}} \cap Nil(T)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sigma' : \dfrac{E_g}{E_g \cap Nil(T)} & \longrightarrow & \dfrac{E_g + Nil(T)}{Nil(T)} \\ a_g + (E_g \cap Nil(T)) & \mapsto & a_g + Nil(T). \end{array}$$

Como, para todo $g \in G$, $\beta_g : E_{g^{-1}} \longrightarrow E_g$ é um isomorfismo e $\beta_g(Nil(T) \cap E_{g^{-1}}) = Nil(T) \cap E_g$ pois $Nil(T)$ é β-invariante, então β_g se estende a um isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \psi_g : \dfrac{E_{g^{-1}}}{E_{g^{-1}} \cap Nil(T)} & \longrightarrow & \dfrac{E_g}{E_g \cap Nil(T)} \\ a + (E_{g^{-1}} \cap Nil(T)) & \mapsto & \beta_g(a) + (E_g \cap Nil(T)). \end{array}$$

A composição $\sigma' \circ \psi_g \circ \sigma$ desses três isomorfismos implica que, para todo $g \in G$, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \overline{\beta}_g : \dfrac{E_{g^{-1}} + Nil(T)}{Nil(T)} & \longrightarrow & \dfrac{E_g + Nil(T)}{Nil(T)} \\ a + Nil(T) & \mapsto & \beta_g(a) + Nil(T) \end{array}$$

está bem definida e é um isomorfismo de ideais de $\overline{T} = T/Nil(T)$. Dado $g \in G$, defina $\overline{E_g} = \dfrac{E_g + Nil(T)}{Nil(T)}$.

Mostremos que $\overline{\beta} = (\{\overline{\beta}_g\}_{g\in G}, \{\overline{E}_g\}_{g\in G})$ é uma ação global do grupoide G sobre o anel $\overline{T}$. Primeiramente, note que $\overline{E}_g = \overline{E}_{r(g)}$ para todo $g \in G$, já que β é ação global e $E_g = E_{r(g)}$. Agora basta provar os itens (i) e (ii) da Definição 1.5.

(i) $\overline{\beta}_e$ é a aplicação identidade de $\overline{E}_e$ para todo $e \in G_0$.

Sejam $e \in G_0$ e $\overline{a} = a + Nil(T) \in \overline{E}_e$, com $a \in E_e$. Daí,

$$\overline{\beta}_e(a + Nil(T)) = \beta_e(a) + Nil(T) = a + Nil(T)$$

e, portanto, $\overline{\beta}_e = id_{\overline{E}_e}$.

(ii) $\overline{\beta}_g \circ \overline{\beta}_h(\overline{x}) = \overline{\beta}_{gh}(\overline{x})$, para quaisquer $(g,h) \in G^2$ e $\overline{x} \in \overline{E}_{h^{-1}} = \overline{E}_{(gh)^{-1}}$.

Seja $(g,h) \in G^2$. Note que $\overline{E}_h = \overline{E}_{r(h)} = \overline{E}_{r(g^{-1})} = \overline{E}_{g^{-1}}$. Assim, dado $\overline{x} \in \overline{E}_{h^{-1}}$, temos que $\overline{x} = x + Nil(T)$ com $x \in E_{h^{-1}}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \overline{\beta}_g \circ \overline{\beta}_h(\overline{x}) &= \overline{\beta}_g \circ \overline{\beta}_h(x + Nil(T)) \\ &= \overline{\beta}_g(\beta_h(x) + Nil(T)) \\ &= \beta_g(\beta_h(x)) + Nil(T) \\ &= \beta_{gh}(x) + Nil(T) \\ &= \overline{\beta}_{gh}(x + Nil(T)) \\ &= \overline{\beta}_{gh}(\overline{x}) \end{aligned}$$

como desejado.

Logo, $\overline{\beta}$ é uma ação global de G sobre $\overline{T} = T/Nil(T)$, que é um anel semiprimo. Imediatamente obtemos o seguinte resultado

Lema 2.15. $(\overline{T}, \overline{\beta})$ *é uma ação envolvente semiprima de* α.

Demonstração: Para cada $e \in G_0$, o monomorfismo $\varphi_e : D_e \longrightarrow E_e$ induz o monomorfismo

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_e : D_e &\longrightarrow \overline{E}_e = \frac{E_e + Nil(T)}{Nil(T)} \\ x &\mapsto \varphi_e(x) + Nil(T). \end{aligned}$$

De fato, dado $x \in ker\overline{\varphi}_e$, segue de (2.2) que $\varphi_e(x) \in Nil(T) \cap \varphi_e(D_e) = 0$. Assim, $\varphi_e(x) = 0$ e, como φ_e é monomorfismo, $x = 0$.

Agora vamos provar os itens $(i) - (iv)$ da Definição 1.12.

(i) $\overline{\varphi}_e(D_e)$ é um ideal de $\overline{E}_e$, para todo $e \in G_0$.

Como $\varphi_e(D_e)$ é um ideal de E_e, então $\overline{\varphi}_e(D_e) = \varphi_e(D_e) + Nil(T)$ é um ideal de $\overline{E}_e$.

(ii) $\overline{\varphi}_{r(g)}(D_g) = \overline{\varphi}_{r(g)}(D_{r(g)}) \cap \overline{\beta}_g(\overline{\varphi}_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})}))$, para todo $g \in G$.

Pela definição de $\overline{\varphi}_e$, podemos reescrever a igualdade acima como

$$\varphi_{r(g)}(D_g) + Nil(T) = (\varphi_{r(g)}(D_{r(g)}) + Nil(T)) \cap (\beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})})) + Nil(T)).$$

A inclusão $\subseteq$ é imediata pois $D_g \subseteq D_{r(g)}$, para todo $g \in G$. Por outro lado, seja $y \in (\varphi_{r(g)}(D_{r(g)}) + Nil(T)) \cap (\beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(D_{r(g^{-1})})) + Nil(T))$. Então

$$y = \varphi_{r(g)}(a) + Nil(T) = \beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(b)) + Nil(T),$$

com $a \in D_{r(g)}$ e $b \in D_{r(g^{-1})}$. Devemos mostrar que $a \in D_g$. Temos que $\varphi_{r(g)}(a) - \beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(b)) \in Nil(T)$. Assim, para todo $c \in D_{r(g)}$,

$$\varphi_{r(g)}(c)(\varphi_{r(g)}(a) - \beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(b))) \in Nil(T) \cap \varphi_{r(g)}(D_{r(g)}) \overset{(2.2)}{=} (0).$$

Logo,

$$\varphi_{r(g)}(c)\varphi_{r(g)}(a) = \varphi_{r(g)}(c)\beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(b)) \in \varphi_{r(g)}(D_g)$$

por 1.12(*ii*) e, consequentemente, $\varphi_{r(g)}(D_{r(g)})\varphi_{r(g)}(a) \subseteq \varphi_{r(g)}(D_g)$. Como D_g é um ideal fechado de $D_{r(g)}$, então $\varphi_{r(g)}(D_g)$ é um ideal fechado de $E_{r(g)}$. Assim, $\varphi_{r(g)}(a) \in [\varphi_{r(g)}(D_g)] = \varphi_{r(g)}(D_g)$, ou seja, $a \in D_g$ para todo $g \in G$. Portanto,

$$y = \varphi_{r(g)}(a) + Nil(T) \in \varphi_{r(g)}(D_g) + Nil(T)$$

mostrando o desejado.

(iii) $\overline{\beta}_g \circ \overline{\varphi}_{r(g^{-1})}(a) = \overline{\varphi}_{r(g)} \circ \alpha_g(a)$, para todo $a \in D_{g^{-1}}$.

Seja $a \in D_{g^{-1}} \subseteq D_{r(g^{-1})}$. Então

$$\begin{aligned}
(\overline{\beta}_g \circ \overline{\varphi}_{r(g^{-1})})(a) &= \overline{\beta}_g(\varphi_{r(g^{-1})}(a) + Nil(T)) \\
&= \beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(a)) + Nil(T) \\
&= \varphi_{r(g)}(\alpha_g(a)) + Nil(T) \\
&= \overline{\varphi}_{r(g)}(\alpha_g(a)) \\
&= (\overline{\varphi}_{r(g)} \circ \alpha_g)(a).
\end{aligned}$$

(iv) $\overline{E}_g = \sum\limits_{r(g)=r(h)} \overline{\beta}_h(\overline{\varphi}_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})}))$, para todo $g \in G$.

Dado $g \in G$,

$$\begin{aligned}
\overline{E}_g &= \{a + Nil(T) \mid a \in E_g\} \\
&= \left\{\left(\sum_{r(g)=r(h)} \beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(x))\right) + Nil(T) \mid x \in D_{r(h^{-1})}\right\} \\
&= \left\{\sum_{r(g)=r(h)} [\beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(x)) + Nil(T)] \mid x \in D_{r(h^{-1})}\right\} \\
&= \left\{\sum_{r(g)=r(h)} [\overline{\beta}_h(\varphi_{r(h^{-1})}(x) + Nil(T))] \mid x \in D_{r(h^{-1})}\right\} \\
&= \left\{\sum_{r(g)=r(h)} [\overline{\beta}_h(\overline{\varphi}_{r(h^{-1})}(x)] \mid x \in D_{r(h^{-1})}\right\} \\
&= \sum_{r(g)=r(h)} \overline{\beta}_h(\overline{\varphi}_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})})).
\end{aligned}$$

Como $\overline{T} = T/Nil(T)$ é um anel semiprimo, segue que $(\overline{T}, \overline{\beta})$ é uma ação envolvente semiprima de α. $\square$

Agora podemos provar que uma ação envolvente semiprima, quando existe, é única a menos de equivalência.

Proposição 2.16. *Suponhamos que α é uma ação parcial de um grupoide G sobre um anel semiprimo R. Sejam $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ e $\beta' = (\{E'_g\}_{g\in G}, \{\beta'_g\}_{g\in G})$ ações envolventes semiprimas de (R,α) sobre os anéis T e T', respectivamente. Então (T,β) e (T',β') são equivalentes, isto é, para cada $e \in G_0$, existe um isomorfismo de anéis $\Phi_e : E_e \longrightarrow E'_e$ tal que*

$$\Phi_{r(g)} \circ \beta_g(w) = \beta'_g \circ \Phi_{r(g^{-1})}(w)$$

para todo $w \in E_{r(g^{-1})}$.

Demonstração: Dado $e \in G_0$, sejam $\varphi_e : D_e \longrightarrow E_e$ e $\varphi'_e : D_e \longrightarrow E'_e$ os monomorfismos referentes às ações envolventes semiprimas β e β', respectivamente. Note que

1. D_e é um ideal tanto de E_e quanto de E'_e, para todo $e \in G_0$. Em particular, $D_{r(g)}$ é um ideal de $E_{r(g)}$ e $E'_{r(g)}$, para todo $g \in G$.

2. Os anéis T e T' são semiprimos, já que β e β' são ações envolventes semiprimas. Portanto, E_g e E'_g são anéis semiprimos, para todo $g \in G$.

Além disso, os elementos de $E_{r(g)}$ podem ser escritos como

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i))$$

e os elementos de $E'_{r(g)}$ podem ser escritos como

$$\sum_{i=1}^{n} \beta'_{h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(a_i))$$

com $a_i \in D_{r(h_i^{-1})}$. Definamos, para cada $e \in G_0$,

$$\begin{array}{rcl} \Phi_e : E_e & \longrightarrow & E'_e \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_{h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i)) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta'_{h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(a_i)) \end{array}$$

com $a_i \in D_{r(h_i^{-1})}$, $h_i \in X_e$, $i \in \{1, ..., n\}$.

Mostremos, primeiramente, que Φ_e é um isomorfismo de anéis para todo $e \in G_0$. Para mostrar que Φ_e está bem definida, suponhamos que $\sum_{i=1}^{n} \beta'_{h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(a_i)) = 0$. Devemos provar que $\sum_{i=1}^{n} \beta_{h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i)) = 0$. Para quaisquer $l \in X_e$ e $a \in D_{r(l^{-1})}$, temos

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \beta'_{h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(a_i))\beta'_l(\varphi'_{r(l^{-1})}(a)).$$

Então

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(a_i))\varphi'_{r(l^{-1})}(a). \tag{2.3}$$

Mais ainda, observe que o conjunto $\varphi'_{r((l^{-1}h_i)^{-1})}(D_{r((l^{-1}h_i)^{-1})}) = \varphi'_{r(h_i^{-1})}(D_{r(h_i^{-1})})$ é um ideal de $E'_{r(h_i^{-1})}$ e o conjunto $\beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(D_{r(h_i^{-1})})$ é um ideal de $E'_{r(l^{-1})}$. Pela Definição 1.12(ii), segue que o elemento

$$x_i := \beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(a_i))\varphi'_{r(l^{-1})}(a)$$

pertence ao ideal

$$\begin{aligned}
&\varphi'_{r(l^{-1}h_i)}(D_{r(l^{-1})}) \cap \beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r((l^{-1}h_i)^{-1})}(D_{r(h_i^{-1})}))\\
&\quad = \varphi'_{r(l^{-1}h_i)}(D_{r(l^{-1}h_i)}) \cap \beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r((l^{-1}h_i)^{-1})}(D_{r(h_i^{-1})}))\\
&\quad = \varphi'_{r(l^{-1}h_i)}(D_{l^{-1}h_i}).
\end{aligned}$$

Logo, existe um elemento $b'_{i,a} \in D_{l^{-1}h_i}$ tal que $x_i = \varphi'_{r(l^{-1}h_i)}(b'_{i,a})$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Analogamente, existe $b_{i,a} \in D_{l^{-1}h_i}$ tal que

$$y_i := \beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i))\varphi_{r(l^{-1})}(a) = \varphi_{r(l^{-1}h_i)}(b_{i,a}).$$

Afirmação: $b'_{i,a} = b_{i,a}$.

De fato, seja H um ideal essencial de $D_{r(h_i^{-1})}$ e considere $\alpha_{l^{-1}h_i}(H \cap D_{h_i^{-1}l})$ um ideal essencial de $D_{l^{-1}h_i}$. Para todo $z \in H \cap D_{h_i^{-1}l}$, temos

$$\begin{aligned}
& \alpha_{l^{-1}h_i}(z)(b_{i,a} - b'_{i,a}) \\
= \ & \alpha_{l^{-1}h_i}(z)b_{i,a} - \alpha_{l^{-1}h_i}(z)b'_{i,a} \\
= \ & \varphi^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(\beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1}l)}(z)))b_{i,a} - \varphi'^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(\beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1}l)}(z)))b'_{i,a} \\
= \ & \varphi^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(\beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1}l)}(z)))\varphi^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(y_i) - \varphi'^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(\beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1}l)}(z)))\varphi'^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(x_i) \\
= \ & \varphi^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(\beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1}l)}(z)))\varphi^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(\beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i))\varphi_{r(l^{-1})}(a)) \\
& - \varphi'^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(\beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1}l)}(z)))\varphi'^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(\beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(a_i))\varphi'_{r(l^{-1})}(a)) \\
= \ & \varphi^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(\beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1}l)}(z)))\varphi^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(\beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i)))a \\
& - \varphi'^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(\beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1}l)}(z)))\varphi'^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}(\beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(a_i)))a \\
= \ & \varphi^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}[\beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1}l)}(z))\beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i))]a \\
& - \varphi'^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}[\beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1}l)}(z))\beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(a_i))]a \\
= \ & \varphi^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}[\beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1}l)}(za_i))]a - \varphi'^{-1}_{r(l^{-1}h_i)}[\beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1}l)}(za_i))]a \\
= \ & \alpha_{l^{-1}h_i}(za_i)a - \alpha_{l^{-1}h_i}(za_i)a \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\alpha_{l^{-1}h_i}(z)(b_{i,a} - b'_{i,a}) = 0$ para todo $z \in H \cap D_{h_i^{-1}l}$ e, portanto, $\alpha_{l^{-1}h_i}(H \cap D_{h_i^{-1}l})(b_{i,a} - b'_{i,a}) = 0$. Isso implica que $b_{i,a} = b'_{i,a}$ pois $H \cap D_{h_i^{-1}l}$ é um ideal essencial de $D_{r(h_i^{-1})}$, provando a afirmação.

Agora, segue de (2.3) que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \varphi'_{r(l^{-1})}(a)\beta'_{l^{-1}h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(a_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi'_{r(l^{-1}h_i)}(b'_{i,a}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi'_{r(l^{-1})}(b'_{i,a}) \\
&= \varphi'_{r(l^{-1})}\left(\sum_{i=1}^{n} b'_{i,a}\right)
\end{aligned}$$

e, sendo $\varphi'_{r(l^{-1})}$ injetora, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} b'_{i,a} = 0. \tag{2.4}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\beta_l(\varphi_{r(l^{-1})}(a))\sum_{i=1}^{n}\beta_{h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i)) &= \sum_{i=1}^{n}\beta_l(\varphi_{r(l^{-1})}(a))\beta_{h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i))\\
&= \beta_l\left[\sum_{i=1}^{n}\varphi_{r(l^{-1})}(a)\beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i))\right]\\
&= \beta_l\left[\sum_{i=1}^{n}\varphi_{r(l^{-1}h_i)}(b_{i,a})\right]\\
&= \beta_l\left(\varphi_{r(l^{-1})}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{i,a}\right)\right)\\
&\overset{(2.4)}{=} \beta_l\left(\varphi_{r(l^{-1})}\left(\sum_{i=1}^{n}b'_{i,a}\right)\right)\\
&= \beta_l(\varphi_{r(l^{-1})}(0))\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\beta_l(\varphi_{r(l^{-1})}(a))\sum_{i=1}^{n}\beta_{h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i)) = 0$ e, portanto, o elemento $\sum_{i=1}^{n}\beta_{h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i))$ anula o ideal $\beta_l(\varphi_{r(l^{-1})}(D_{r(l^{-1})}))$ de $E_{r(l^{-1})}$ para todo $l \in X_e$. Consequentemente,

$$E_e\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_{h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i))\right) = 0$$

e, como E_e é semiprimo, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_{h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i)) = 0,$$

mostrando que Φ_e está bem definida.

Analogamente, a aplicação

$$\begin{aligned}
\Phi'_e : E'_e &\longrightarrow E_e\\
\sum_{i=1}^{n}\beta'_{h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(a_i)) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n}\beta_{h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i))
\end{aligned}$$

com $a_i \in D_{r(h_i^{-1})}$, $h_i \in X_e$ e $i \in \{1, ..., n\}$, está bem definida e é a inversa de Φ_e.

O próximo passo consiste em mostrar que Φ_e preserva produtos para todo $e \in G_0$. Sejam $g, h \in G$ tais que $r(g) = r(h)$, $a \in D_{r(g^{-1})}$ e $b \in D_{r(h^{-1})}$. Então

$$\begin{aligned}
w &:= \beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(a))\beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(b))\\
&= \beta_h(\beta_{h^{-1}g}(\varphi_{r((h^{-1}g)^{-1})}(a))\varphi_{r(h^{-1}g)}(b))\\
&= \beta_h(\beta_{h^{-1}g}(\varphi_{r(g^{-1}h)}(a))\varphi_{r(h^{-1}g)}(b)).
\end{aligned}$$

Seja $x := \beta_{h^{-1}g}(\varphi_{r(g^{-1}h)}(a))\varphi_{r(h^{-1}g)}(b)$. Observemos que x pertence ao ideal

$$\begin{aligned}
&\beta_{h^{-1}g}(\varphi_{r(g^{-1}h)}(D_{r(g^{-1}h)}))\varphi_{r(h^{-1}g)}(D_{r(h^{-1}g)})\\
&\qquad = \beta_{h^{-1}g}(\varphi_{r(g^{-1}h)}(D_{r(g^{-1}h)})) \cap \varphi_{r(h^{-1}g)}(D_{r(h^{-1}g)})\\
&\qquad = \varphi_{r(h^{-1}g)}(D_{h^{-1}g}).
\end{aligned}$$

Assim, existe $u \in D_{h^{-1}g}$ tal que $x = \varphi_{r(h^{-1}g)}(u)$.

Agora, sejam

$$\begin{aligned}
w' &:= \beta'_g(\varphi'_{r(g^{-1})}(a))\beta'_h(\varphi'_{r(h^{-1})}(b))\\
&= \beta'_h(\beta'_{h^{-1}g}(\varphi'_{r(g^{-1}h)}(a))\varphi'_{r(h^{-1}g)}(b))
\end{aligned}$$

e $y := \beta'_{h^{-1}g}(\varphi'_{r(g^{-1}h)}(a))\varphi'_{r(h^{-1}g)}(b)$. De modo análogo, note que y pertence ao ideal $\varphi'_{r(h^{-1}g)}(D_{h^{-1}g})$ e, portanto, existe $v \in D_{h^{-1}g}$ tal que $y = \varphi'_{r(h^{-1}g)}(v)$. Seguindo os passos da demonstração para a afirmação acima, obtemos que $u = v$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Phi_e(\beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(a))\beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(b))) &= \Phi_e(\beta_h(\varphi_{r(h^{-1}g)}(u)))\\
&= \beta'_h(\varphi'_{r(h^{-1}g)}(u))\\
&= \beta'_h(\varphi'_{r(h^{-1}g)}(v))\\
&= \beta'_g(\varphi'_{r(g^{-1})}(a))\beta'_h(\varphi'_{r(h^{-1})}(b))\\
&= \Phi_e(\beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(a)))\Phi_e(\beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(b))).
\end{aligned}$$

Logo, Φ_e preserva produtos e, consequentemente, Φ_e é um homomorfismo de anéis pois é, também, aditiva, já que β_e e φ_e são aditivas para todo $e \in G_0$.

Então, resta mostrar que $\Phi_{r(g)} \circ \beta_g(w) = \beta'_g \circ \Phi_{r(g^{-1})}(w)$ para todo $w \in E_{r(g^{-1})}$. Com efeito, dados $g, h \in G$ tais que $r(h) = r(r(g^{-1})) = r(g^{-1})$, $w = \beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(a))$ e $a \in D_{r(g^{-1})}$, temos

$$\begin{aligned}
\Phi_{r(g)} \circ \beta_g(w) &= \Phi_{r(g)} \circ \beta_{gh}(\varphi_{r(h^{-1})}(a))\\
&= \beta'_{gh}(\varphi'_{r(h^{-1})}(a))\\
&= \beta'_g\Phi_{r(g^{-1})}(\beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(a)))\\
&= \beta'_g \circ \Phi_{r(g^{-1})}(w).
\end{aligned}$$

□

Como uma consequência imediata, obtemos o seguinte resultado

Teorema 2.17. *Sejam R um anel semiprimo, G um grupoide e α uma ação parcial fechada de G sobre R. Suponhamos que, para quaisquer $a \in D_{r(g^{-1})}$ e $g \in G$, exista $\gamma_g(a) \in \mathcal{M}(D_{r(g)})$ tal que*

(i) $D_{r(g)}\gamma_g(a) \subseteq D_g$;

(ii) $\gamma_g(a)|_{D_g} = \alpha_{g^{-1}} r_a \alpha_g|_{D_g}$ *como multiplicadores à direita, ou seja,* $x\gamma_g(a) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a)$*, para todo* $x \in D_g$*;*

(iii) $\gamma_g(a)D_{r(g)} \subseteq D_g$.

Então α *possui uma ação envolvente semiprima, a qual é única a menos de equivalência.*

Demonstração: Segue das Proposições 2.11 e 2.16. □

Façamos um exercício: no que se assemelham o Teorema 2.17 aqui enunciado e o Teorema 1.15 apresentado por Bagio e Paques em [2, Theorem 2.1]?

Consideremos uma ação parcial $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ de um grupoide G sobre um anel R tal que cada D_e é unitário e, portanto, fechado. Se cada D_g é unitário, $g \notin G_0$, então α admite uma globalização única a menos de equivalência, pelo Teorema 1.15. Por outro lado, ao considerar 1_g a identidade de D_g, segue que, para cada $a \in D_{r(g^{-1})}$, sempre podemos definir um multiplicador $\gamma_g(a) = (r_{\alpha_g(1_{g^{-1}}a)}, l_{\alpha_g(1_{g^{-1}}a)})$ no anel de multiplicadores $\mathcal{M}(D_{r(g)})$. Tal multiplicador satisfaz as hipóteses *(i)*-*(iii)* do Teorema 2.17 e, consequentemente, também garante a existência e unicidade de uma globalização para α. Ou seja, tais resultados coincidem.

Capítulo 3

Anel de Quocientes de Martindale

Neste capítulo, vamos definir o anel de quocientes de Martindale à direita $Q_r(R)$ de um anel semiprimo R e noções básicas relacionadas. Uma vez que é possível estender uma ação parcial α de um grupoide G sobre o anel R à uma ação α^* de G sobre $Q_r(R)$, nosso principal objetivo consiste em obter uma globalização de α por meio da globalização de α^*, cuja existência é garantida por [2]. Ao longo desse capítulo, R denota um anel semiprimo não necessariamente com unidade.

3.1 Pré-requisitos

A noção de anéis de quocientes de Martindale bilaterais foi introduzida em 1969 para anéis primos por W. S. Martindale em [17] e estendida em 1972 para anéis semiprimos por Amitsur em [1]. A definição do anel de quocientes de Martindale é semelhante à do anel de quocientes maximal. No que segue, a descrevemos para anéis semiprimos, seguindo os passos da Seção 1.4 de [18]. Para isso, vamos definir e recordar, primeiramente, alguns conceitos básicos.

Definição 3.1. *Dado um ideal à direita I de um anel R, dizemos que uma aplicação $f : I \longrightarrow R$ é R-linear à direita se f é aditiva e $f(xr) = f(x)r$, para quaisquer $x \in I$ e $r \in R$.*

Recordemos que $\mathcal{E}(R)$ denota o conjunto dos ideais essenciais do anel R (ideais cuja interseção com outro ideal não nulo de R é não trivial). Notemos que, por definição, $(0) \notin \mathcal{E}(R)$. Além disso, se I é um ideal de R, então $I + ann_R(I) = I \oplus ann_R(I)$ é um ideal essencial de R.

Agora, seja $\mathcal{H}$ o conjunto dos pares (f, J), onde $f : J \longrightarrow R$ é uma aplicação R-linear à direita e J é um ideal essencial de R. Definimos em $\mathcal{H}$ uma relação de equivalência $\sim$ dada por: $(f, J) \sim (g, K)$ se, e somente se, existe $L \subseteq J \cap K$ tal que $L \in \mathcal{E}(R)$ e $f = g$ em L. Denotaremos por $[f; J]$ a classe de equivalência determinada por $(f, J) \in \mathcal{H}$. O *anel* *de quocientes de Martindale à direita* de um anel semiprimo R é o conjunto $Q_r(R)$ das classes de equivalência determinadas pela relação acima, munido das operações de adição e multiplicação definidas como segue:

$$[f; J] + [g; K] = [f + g; K \cap J]$$

$$[f; J][g; K] = [fg; KJ],$$

em que fg é a composição das funções f e g.

Notemos que se R é um anel semiprimo, então $Q_r(R)$ é um anel semiprimo. Quando o contexto estiver claro, denotaremos o anel de quocientes de Martindale à direita apenas por Q.

Observemos, também, que a aplicação $\rho : R \longrightarrow Q$ dada por $\rho(x) = [l_x; R]$, em que l_x denota a multiplicação à esquerda por x, é um monomorfismo de anéis. Mais ainda, sejam $q = [f; J] \in Q$ e $x \in J$. Pode-se verificar que $[f; J][l_x; R] = [l_{f(x)}; R]$, isto é, $q\rho(J) \subseteq \rho(R)$. Ademais, se $K \in \mathcal{E}(R)$ são tais que $q\rho(K) = 0$, então $q = 0$. De fato, para todo $x \in J \cap K$, temos que

$$[0; R] = [f; J][l_x; R] = [l_{f(x)}; R],$$

o que implica $l_{f(x)}|_L = 0$, para algum $L \in \mathcal{E}(R)$, ou seja, $f(x) \in ann_R(L) = 0$. Portanto, $f|_{J\cap K} = 0$, mostrando que $q = [f; J] = [0; R]$. Por fim, para quaisquer ideal $J \in \mathcal{E}(R)$ e aplicação R-linear à direita $f : J_R \longrightarrow R_R$, obtemos $q\rho(x) = \rho(f(x))$. Assim, podemos simplificar a notação ao identificar R com a sua imagem homomórfica $\rho(R)$ em Q.

Sintetizamos todas essas propriedades na seguinte proposição, a qual caracteriza o anel de quocientes de Martindale à direita Q.

Proposição 3.2. *Se R é um anel semiprimo*

(i) R é um subanel de Q;

(ii) Para todo $q \in Q$, existe $J \in \mathcal{E}(R)$ tal que $qJ \subseteq R$;

(iii) Para quaisquer $q \in Q$ e $J \in \mathcal{E}(R)$, $qJ = 0$ se, e somente se, $q = 0$;

(iv) Para quaisquer $J \in \mathcal{E}(R)$ e $f : J_R \longrightarrow R_R$, existe $q \in Q$ tal que $f(x) = qx$ para todo $x \in J$.

Mais ainda, as propriedades (i)-(iv) caracterizam o anel Q a menos de isomorfismo.

Demonstração: Mostremos a última afirmação. Seja P um anel que satisfaz as condições $(i) - (iv)$. Dado $p \in P$, ao aplicar (i) e (ii), podemos definir um homomorfismo de anéis $\omega : P \longrightarrow Q$ dado por $\omega(p) = [f; J]$, em que $J \in \mathcal{R}$, $pJ \subseteq R$ e $f(x) = px$, para todo $x \in J$. Por (iii), ω é injetora e, por (iv), ω é sobrejetora. Logo, ω é um isomorfismo de anéis. $\square$

3.2 A Extensão α^* de G sobre $Q_r(R)$

Seja α uma ação parcial de um grupoide G sobre um anel semiprimo R. Nesta seção, vamos estender α à uma ação α^* de G sobre o anel $Q_r(R) := Q$. Inicialmente, apresentaremos brevemente algumas noções fundamentais. Para mais detalhes, o(a) leitor(a) pode recorrer às referências [9], [10] e [18].

O centro de Q é denominado centroide estendido de R e será denotado por $\mathcal{C}$. Os elementos de $\mathcal{C}$ são precisamente os elementos de Q obtidos via funções de R-bimódulos.

Podemos descrever os elementos idempotentes de $\mathcal{C}$ como segue: sejam H um ideal não nulo de R e $K_H := H \oplus ann_R(H) \in \mathcal{E}(R)$. Assim, a aplicação $f : K_H \longrightarrow R$ definida por $f(a+b) = a$, para quaisquer $a \in H$ e $b \in ann_R(H)$, é um homomorfismo de R-bimódulos. Consequentemente, existe $e_H \in \mathcal{C}$ tal que $e_H(a+b) = e_H a = a$. É claro que e_H é um elemento idempotente de $\mathcal{C}$. Reciprocamente, se $e \in C$ é um elemento idempotente de $\mathcal{C}$, então existe um ideal essencial I de R tal que $H = eI$ é um ideal de R e, portanto, $e = e_H$. Notemos que $e_H = 1$ se, e somente se, $H \in \mathcal{E}(R)$.

Recordemos que o fecho $[I]$ do ideal I de um anel semiprimo R é o conjunto de todos os elementos $x \in R$ para os quais existe um ideal essencial H de R com $xH \subseteq I$ (equivalentemente, $Hx \subseteq I$).

É fácil ver que $[I] = ann_R(ann_R(I))$ e, consequentemente, os ideais fechados de R, isto é, os ideais I tais que $I = [I]$, são os anuladores.

Dado um ideal fechado I de R, definimos

$$I^* = \{q \in Q \mid \text{existe } H \in \mathcal{E}(R) \text{ com } qH \subseteq I\}.$$

É claro que $I^* \cap R = I$ e $[0_R]^* = 0_Q$.

Pelos resultados obtidos em [9], sabemos que há uma correspondência 1-1 entre o conjunto de todos os ideais fechados de R e o conjunto de todos os ideais fechados de Q. Isso nos mostra que os ideais fechados de Q são precisamente os ideias I^* para algum ideal fechado I de R.

Proposição 3.3. *Se I^* é um ideal fechado de Q, então $I^* = e_I Q$, onde e_I é o elemento idempotente de $\mathcal{C}$ associado ao ideal I.*

Pela proposição acima, todo ideal fechado de Q é gerado por um idempotente central e, portanto, é um somando direto de Q.

Proposição 3.4. *Para qualquer ideal I de R, o ideal fechado I^* de Q correspondente ao fecho $[I]$ de I em R é dado por*

$$I^* := [I]^* = \{q \in Q \,|\, \text{existe } F \in \mathcal{E}(R) \text{ com } qF \subseteq I\}.$$

Lema 3.5. *Se um ideal I é um somando direto de Q, então I é um ideal fechado de Q.*

O desenvolvimento dos resultados 3.3, 3.4 e 3.5 podem ser encontrados na segunda seção de [10].

Seja A um ideal não nulo de um anel semiprimo R. Então A é um anel semiprimo e podemos considerar o anel de Martindale à direita $Q_r(A)$. Seja I um ideal de R maximal com respeito à condição $I \cap A = 0$. Então $A + I = A \oplus I$ e, mais ainda, $I = ann_R(A)$, pois se $x \in I$, temos que $xA \subseteq A$ e $xA \subseteq I$, isto é, $xA \subseteq A \cap I = 0$. Desse modo, $x \in ann_R(A)$ e, como $A \cap ann_R(A) = 0$, segue da maximalidade de I que $I = ann_R(A)$. Sejam A^* e I^* os ideais fechados de Q correspondentes a $[A]$ e $[I]$, respectivamente. Notemos que $I = [I]$, pois I é um anulador.

Proposição 3.6. *([10], Proposition 2.2) Com a notação acima, temos*

(i) $Q = A^* \oplus I^*$;

(ii) $Q_r(A) \cong A^* = \{q \in Q \mid qI^* = 0\} = \{q \in Q \mid qI = 0\}$.

Proposição 3.7. *([10], Proposition 2.3) Sejam A e B ideais não nulos de R e $\varphi : A \longrightarrow B$ um isomorfismo de anéis. Então φ pode ser estendida a um isomorfismo $\varphi^* : Q_r(A) \longrightarrow Q_r(B)$.*

A extensão φ^* do isomorfismo φ da proposição anterior é única. A demonstração desse resultado é um caso particular da seguinte proposição:

Proposição 3.8. *([10], Proposition 2.4) Sejam A um ideal não nulo de R, $\varphi : A \longrightarrow R$ um monomorfismo de anéis e $f, f' : Q_r(A) \longrightarrow Q_r(\varphi(A))$ isomorfismos de anéis tais que $f|_A = f'|_A = \varphi$. Então $f = f'$.*

Agora estamos em condições de estender a ação parcial α de G sobre R à uma ação parcial α^* de G sobre $Q_r(R)$.

Seja $g \in G$. Como $D_{r(g)}$ é um ideal de R, considere $D^*_{r(g)}$ o ideal Q-fechado correspondente ao fecho $[D_{r(g)}]$ de $D_{r(g)}$. Sabemos que $D^*_{r(g)}$ é gerado por um idempotente central, ou seja, é um anel com unidade. Pela Proposição 3.6, existe um isomorfismo $\psi : Q(D_{r(g)}) \longrightarrow D^*_{r(g)}$. Como D_g é um ideal de $D_{r(g)}$, pois α é uma ação parcial de G sobre R, consideramos D^*_g como sendo o ideal $Q(D_{r(g)})$-fechado correspondente ao fecho $[D_g]$ de D_g em $D_{r(g)}$. Notemos que D^*_g é um ideal de $Q(D_{r(g)})$. Logo, $\psi(D^*_g)$ é um ideal de $D^*_{r(g)}$. Para simplificar, denotaremos $\psi(D^*_g)$ por D^*_g. Observemos que $D_g \subseteq D^*_g$ e $D_{r(g)} \subseteq D^*_{r(g)}$. Além disso, pela Proposição 3.7, temos que cada α_g $(g \in G)$ se estende a um isomorfismo $\alpha^*_g : D^*_{g^{-1}} \longrightarrow D^*_g$. Então, $\alpha^* = (\{D^*_g\}_{g \in G}, \{\alpha^*_g\}_{g \in G})$ é uma ação parcial de G sobre Q e D^*_g é um anel com unidade para cada $g \in G$. A demonstração está detalhada na Seção 3.4 de [18].

Note que, pelo Teorema 1.15, α^* possui uma ação envolvente, uma vez que os ideais D^*_g de Q são gerados por idempotentes centrais.

Mais ainda, como D_g é fechado em $D_{r(g)}$, temos que $D^*_g \cap D_{r(g)} = D_g = [D_g]$, para todo $g \in G$. No que segue, identificaremos D_e com a sua imagem em E_e, para todo $e \in G_0$.

Consideremos as seguintes ações:

• $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ ação parcial do grupoide G sobre o anel semiprimo R;

• $\alpha^* = (\{D_g^*\}_{g\in G}, \{\alpha_g^*\}_{g\in G})$ a extensão de α à Q, o anel de quocientes de Martindale à direita de R;

• $\delta = (\{E_g^*\}_{g\in G}, \{\delta_g\}_{g\in G})$ ação global de G sobre um anel S e envolvente de (Q, α^*);

• $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ ação global de G sobre T e envolvente semiprima de (R, α), obtida na Proposição 2.15 como $(\overline{T}, \overline{\beta})$.

Como β é envolvente de α, existe um monomorfismo $\varphi_e : D_e \longrightarrow E_e$, para todo $e \in G_0$. Da mesma forma, temos um monomorfismo $\varphi'_e : D_e^* \longrightarrow E_e^*$, $e \in G_0$, uma vez que δ é envolvente de α^*. Então

$$E_e = \sum_{r(h)=e} \beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})}))$$

e

$$E_e^* = \sum_{r(h)=e} \delta_h(\varphi'_{r(h^{-1})}(D^*_{r(h^{-1})}))$$

para todo $e \in G_0$.

Definimos

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_e : E_e & \longrightarrow & E_e^* \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_{h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i)) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{h_i}(\varphi'_{r(h_i^{-1})}(a_i)) \end{array}$$

em que $e \in G_0$, $a_i \in D_{r(h_i^{-1})} \subseteq D^*_{r(h_i^{-1})}$, $h_i \in X_e$ e $i \in \{1, ..., n\}$.

Proposição 3.9. *Sob a notação acima, Γ_e é um monomorfismo de anéis bem definido e $\Gamma_e \circ \varphi_e = \varphi'_e \circ j$, em que $j : D_e \longrightarrow D_e^*$ denota a inclusão natural para todo $e \in G_0$.*

Demonstração: Suponhamos que $\sum_{1\leq i\leq n} \beta_{h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i)) = 0$. Dados $l \in X_e$ e $a \in D_{r(l^{-1})}$, temos que $\sum_{1\leq i\leq n} \varphi_{r(l^{-1})}(a)\beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i)) = 0$. O elemento $x_i = \varphi_{r(l^{-1})}(a)\beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r(h_i^{-1})}(a_i))$ pertence ao ideal

$$\varphi_{r(l^{-1}h_i)}(D_{r(l^{-1})}) \cap \beta_{l^{-1}h_i}(\varphi_{r((l^{-1}h_i)^{-1})}(D_{r(h_i^{-1})})) = \varphi_{r(l^{-1}h_i)}(D_{l^{-1}h_i}).$$

Notemos que a relação $\Gamma_e \circ \varphi_e = \varphi'_e \circ j$ é imediata, uma vez que se $a \in D_e$, então

$$\Gamma_e \circ \varphi_e(a) = \Gamma_e(\varphi_e(a)) = \varphi'_e(a) = \varphi'_e(j(a)) = \varphi'_e \circ j(a).$$

Isso implica que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} D_e & \xrightarrow{\varphi_e} & E_e \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_e} \\ D_e^* & \xrightarrow{\varphi'_e} & E_e^* \end{array}$$

comuta. Dessa forma, vamos omitir as aplicações φ_e, φ'_e e j quando conveniente. Assim, podemos dizer mais precisamente que o elemento x_i pertence ao ideal $D_{l^{-1}h_i}$.

Seja $H = \bigcap_{1\leq i\leq n}(D_{l^{-1}h_i} \oplus ann_{D_{r(l^{-1})}}(D_{l^{-1}h_i}))$ um ideal essencial de $D_{r(l^{-1})}$. Para todo $y \in H$, podemos escrever $y = c_i + r_i$, com $c_i \in D_{l^{-1}h_i}$ e $r_i \in ann_{D_{r(l^{-1})}}(D_{l^{-1}h_i})$, $i \in \{1, ..., n\}$. Logo,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} ya\beta_{l^{-1}h_i}(a_i) = \sum_{i=1}^{n}(c_i + r_i)a\beta_{l^{-1}h_i}(a_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i a\beta_{l^{-1}h_i}(a_i)$$

e, portanto, existe $d_i \in D_{h_i^{-1}l}$ tal que $c_i a = \alpha_{l^{-1}h_i}(d_i)$, pois $c_i a \in D_{l^{-1}h_i}$.

Consequentemente,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} c_i a\beta_{l^{-1}h_i}(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{l^{-1}h_i}(d_i)\beta_{l^{-1}h_i}(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{l^{-1}h_i}(d_i a_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{l^{-1}h_i}(d_i a_i)$$

pelas propriedades de envolvente, já que $d_i a_i \in D_{h_i^{-1}l}$. Isso implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} \alpha^*_{l^{-1}h_i}(d_i a_i) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{l^{-1}h_i}(d_i a_i) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{l^{-1}h_i}(d_i)\delta_{l^{-1}h_i}(a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{l^{-1}h_i}(d_i)\delta_{l^{-1}h_i}(a_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i a\delta_{l^{-1}h_i}(a_i). \end{aligned}$$

Notemos que $a\delta_{l^{-1}h_i}(a_i) \in D^*_{r(l^{-1})} \cap \delta_{l^{-1}h_i}(D_{r(h_i^{-1})}) = D^*_{l^{-1}h_i}$ e, como $r_i \in ann_{D_{r(l^{-1})}}(D_{l^{-1}h_i})$, segue que $r_i a\delta_{l^{-1}h_i}(a_i) = 0$. Assim, $ya\sum_{1\leq i\leq n} \delta_{l^{-1}h_i}(a_i) = 0$ e, pela arbitrariedade de $y \in H$, obtemos $Ha\sum_{1\leq i\leq n} \delta_{l^{-1}h_i}(a_i) = 0$. Além disso, $a \in D_{r(l^{-1})} \subseteq D^*_{r(l^{-1})}$ e $D^*_{r(l^{-1})}$ é um ideal de $E^*_{r(l^{-1})}$, o que implica $a\sum_{1\leq i\leq n} \delta_{l^{-1}h_i}(a_i) \in D^*_{r(l^{-1})}$. Logo, $a\sum_{1\leq i\leq n} \delta_{l^{-1}h_i}(a_i) = 0$ já que H é um ideal essencial de $D_{r(l^{-1})}$ e, portanto, $D_{r(l^{-1})}\sum_{1\leq i\leq n} \delta_{l^{-1}h_i}(a_i) = 0$, o que implica $D^*_{r(l^{-1})}\sum_{1\leq i\leq n} \delta_{l^{-1}h_i}(a_i) = 0$.

Analogamente, dado $g \in G$, temos que $\delta_g(D^*_{r(g^{-1})})\sum_{1\leq i\leq n} \delta_{l^{-1}h_i}(a_i) = 0$ e, assim, $E^*_{r(g^{-1})}\sum_{1\leq i\leq n} \delta_{l^{-1}h_i}(a_i) = 0$.

Então, $\sum_{1\leq i\leq n} \delta_{l^{-1}h_i}(a_i) = 0$ pois $E^*_{r(g^{-1})}$ é semiprimo. Logo, $\sum_{1\leq i\leq n} \delta_{h_i}(a_i) = 0$ e Γ_e está bem definida, para todo $e \in G_0$.

Usando argumentos análogos aos do Teorema 2.16, segue que Γ_e, $e \in G_0$, é um monomorfismo de anéis, o que completa a prova. □

3.3 Globalização via α^*

Nos dedicaremos a apresentar condições necessárias e suficientes para que α possua uma envolvente, munidos da existência da envolvente semiprima de α^*, a qual é única a menos de equivalência. Por conseguinte, vamos generalizar alguns resultados desenvolvidos para ações parciais de grupos em [4] e [6].

Seja $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ a ação envolvente de α^*. Então, pela Definição 1.13, β é uma ação global de G sobre um anel T tal que, para cada $e \in G_0$, existe um monomorfismo de anéis $\varphi_e^* : D_e^* \longrightarrow E_e$ de modo que as seguintes propriedades são satisfeitas, para quaisquer $e \in G_0$ e $(g,h) \in G^2$:

(i) $\varphi_e^*(D_e^*)$ é um ideal de E_e;

(ii) $\varphi^*_{r(g)}(D^*_g) = \varphi^*_{r(g)}(D^*_{r(g)}) \cap \beta_g(\varphi^*_{r(g^{-1})}(D^*_{r(g^{-1})}))$;

(iii) $\beta_g \circ \varphi^*_{r(g^{-1})}(a) = \varphi^*_{r(g)} \circ \alpha^*_g(a)$, para todo $a \in D_{g^{-1}}$;

(iv) $E_g = \displaystyle\sum_{r(h)=r(g)} \beta_h(\varphi^*_{r(h^{-1})}(D^*_{r(h^{-1})}))$.

Pela construção realizada na demonstração do Teorema 1.15, segue que $T = \displaystyle\prod_{e\in G_0} E_e$, com $E_e = \displaystyle\sum_{r(h)=e} \beta_h(\varphi^*_{r(h^{-1})}(D^*_{r(h^{-1})}))$, para todo $h \in G$.

Observemos que, dado $e \in G_0$, temos as aplicações $D_e \xrightarrow{\iota_e} D_e^* \xrightarrow{\varphi_e^*} E_e$, em que ι_e denota a aplicação de inclusão. Portanto, a composição dos monomorfismos ι_e e φ_e^* resulta em um monomorfismo $\varphi_e : D_e \longrightarrow E_e$. Dessa forma, podemos considerar $T' = \displaystyle\prod_{e\in G_0} E'_e$, de modo que $E'_e = \displaystyle\sum_{r(h)=e} \beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})})) \subseteq E_e$. Por construção, T' é um anel e E'_e é um subgrupo aditivo de T', para todo $e \in G_0$. Além disso, se $e, f \in G_0$ são tais que $e \neq f$, então $E'_e E'_f = 0$ pois $E_e E_f = 0$.

No que segue, vamos investigar em quais condições E'_e é um anel. Sejam $g, h \in G$ tais que $r(g) = r(h) = e$, $e \in G_0$. Dados $a \in D_{r(h^{-1})}$ e $b \in D_{r(g^{-1})}$, temos

$$\beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(a))\beta_g(\varphi_{r(g^{-1})}(b)) = \beta_h(\varphi_{r(h^{-1})}(a)\beta_{h^{-1}g}(\varphi_{r(g^{-1})}(b))).$$

Portanto, é fácil ver que E'_e será um anel quando $\varphi_{r(h^{-1})}(a)\beta_{h^{-1}g}(\varphi_{r(g^{-1})}(b))$ pertencer ao conjunto $\varphi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})})$. Identificando D_e com $\varphi(D_e)$, $e \in G_0$, isto é equivalente a exigir que

$$a\beta_{h^{-1}g}(b) \in D_{r(h^{-1})}$$

ou, ainda,

$$D_{r(h^{-1})}\beta_{h^{-1}g}(D_{r(g^{-1})}) \subseteq D_{r(h^{-1})},$$

para quaisquer $g, h \in G$ tais que $r(g) = r(h) = e$.

Para facilitar a referenciação, vamos registrar tal fato na seguinte observação:

Observação 3.10. *Nas condições acima, E'_e é um anel e $\varphi_{r(h^{-1})}(D_{r(h^{-1})})$ é um ideal de E'_e se, e somente se, $D_{r(h^{-1})}\beta_{h^{-1}g}(D_{r(g^{-1})}) \subseteq D_{r(h^{-1})}$ para quaisquer $g, h \in G$ tais que $r(g) = r(h) = e$.*

Definamos, para todo $g \in G$, $\beta'_g = \beta_g|_{E'_g}$. Agora estamos em condições de determinar quando a ação $\beta' = (\{E'_g\}_{g\in G}, \{\beta'_g\}_{g\in G})$ sobre o anel T' é uma envolvente de α.

Imediatamente obtemos o seguinte resultado

Corolário 3.11. *Sejam R um anel semiprimo, G um grupoide e α uma ação parcial. Suponhamos que todas as condições do Corolário 2.17 são satisfeitas. Então α possui uma ação envolvente semiprima, a qual é única a menos de equivalência. Mais ainda, tal ação envolvente é precisamente (T', β').*

Demonstração: Segue da Proposição 3.9. □

Se R é um anel com unidade, temos

Proposição 3.12. *Sejam R um anel semiprimo com unidade e α uma ação parcial de um grupoide G sobre R tal que cada D_e é unitário, $e \in G_0$. Então (T', β') é uma envolvente de α se, e somente se, D_e é um ideal de E'_e e D_g é um ideal fechado de $D_{r(g)}$, para quaisquer $e \in G_0$ e $g \in G$. Mas ainda, quando isso ocorre, (T', β') é única a menos de equivalência.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponhamos que (T', β') é uma envolvente de α. Pelo Teorema 1.15, cada ideal D_g, $g \in G$, é um anel com unidade e, portanto, é gerado por um idempotente central $1_g \in D_{r(g)}$, ou seja, cada ideal D_g é um somando direto de $D_{r(g)}$ e $D_g = D_{r(g)}1_g$.

Neste caso, $D_{r(g)} = D_{r(g)}1_g \oplus D_{r(g)}(1_{D_{r(g)}} - 1_g)$, para todo $g \in G$. De fato, dado $a \in D_{r(g)}$, temos que

$$a = a1_{D_{r(g)}} = a(1_g - 1_g + 1_{D_{r(g)}}) = a1_g + a(1_{D_{r(g)}} - 1_g).$$

Além disso, note que $1_g(1_{D_{r(g)}} - 1_g) = 0$ e, consequentemente, para todo $x \in D_{r(g)}1_g \cap D_{r(g)}(1_{D_{r(g)}} - 1_g)$, segue que $x = a1_g$ e $x = b(1_{D_{r(g)}} - 1_g)$, com $a, b \in D_{r(g)}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} a1_g = b(1_{D_{r(g)}} - 1_g) \ &\Rightarrow\ a1_g \cdot 1_g = b(1_{D_{r(g)}} - 1_g) \cdot 1_g \\ &\Rightarrow\ a1_g = 0 \\ &\Rightarrow\ x = 0, \end{aligned}$$

mostrando que $D_{r(g)} = D_{r(g)}1_g \oplus D_{r(g)}(1_{D_{r(g)}} - 1_g)$ é uma soma direta.

Portanto, cada D_g, $g \in G$, é um ideal fechado de $D_{r(g)}$, pois é o anulador de $D_{r(g)}(1_{D_{r(g)}} - 1_g)$. Mais ainda, segue da Definição 1.13 (ação envolvente) que D_e é um ideal de E'_e, para todo $e \in G_0$.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, suponhamos que D_e é um ideal de E'_e e que D_g é um ideal fechado de $D_{r(g)}$, para quaisquer $e \in G_0$ e $g \in G$. Denotaremos o gerador de D^*_g por 1_g, $g \in G$. Como $E_g = E_{r(g)}$ possui unidade (já que $E_g = \sum_{r(h)=r(g)} \beta_h(\varphi^*_{r(h^{-1})}(D^*_{r(h^{-1})}))$ e todo

D_g^* possui unidade, $g \in G$), então $1_{D_{r(g)}} = 1_{E_g}$, para todo $g \in G$. Assim, uma vez que $D_g^* = E_g \cap \beta_g(E_{g^{-1}})$ e D_e é ideal de E'_e, obtemos

$$1_g = 1_{E_g}\beta_g(1_{E_{g^{-1}}}) = 1_{D_{r(g)}}\beta_g(1_{D_{r(g^{-1})}}) \in D_{r(g)},$$

pois $\beta_g(1_{D_{r(g^{-1})}}) \in E_g$. Além disso, notemos que

$$E_g 1_g \cap D_{r(g)} = D_{r(g)}1_g = D_{r(g)} \cap \beta_g(D_{r(g^{-1})}).$$

Com efeito, se $a1_g \in E_g1_g \cap D_{r(g)}$, então $a1_g = (a1_g)1_g \in D_{r(g)}1_g$ e, portanto, $E_g1_g \cap D_{r(g)} \subseteq D_{r(g)}1_g$. A inclusão contrária é imediata pois $1_g \in D_{r(g)}$. A segunda igualdade segue pois $1_g = 1_{D_{r(g)}}\beta_g(1_{D_{r(g^{-1})}})$ é um gerador de $D_{r(g)} \cap \beta_g(D_{r(g^{-1})})$. Logo,

$$D_g = [D_g] = D_g^* \cap D_{r(g)} = E_g1_g \cap D_{r(g)} = D_{r(g)}1_g = D_{r(g)} \cap \beta_g(D_{r(g^{-1})}).$$

Mais ainda, note que $\alpha_g(a) = \alpha_g^*(a) = \beta_g(a)$, para quaisquer $a \in D_{g^{-1}}$ e $g \in G$. Portanto,

(i) D_e é um ideal de E'_e, para todo $e \in G_0$;

(ii) $D_g = D_{r(g)} \cap \beta_g(D_{r(g^{-1})}) = D_{r(g)} \cap \beta'_g(D_{r(g^{-1})})$, para todo $g \in G$;

(iii) $\beta'_g(a) = \alpha_g(a)$, para todo $a \in D_{g^{-1}}$;

(iv) $E'_g = \sum_{r(h)=r(g)} \beta'_h(D_{r(h^{-1})})$, para quaisquer $g, h \in G$.

Consequentemente, (T', β') é uma ação envolvente de α. A unicidade segue do Teorema 1.15. □

Vale ressaltar que, se cada D_e ($e \in G_0$) é unitário, segue do Teorema 1.15 que α possui uma ação envolvente se, e somente se, D_g é unitário, para todo $g \in G$. Portanto, "D_e é um ideal de E'_e e ideal D_g é fechado em $D_{r(g)}$, para quaisquer $g \in G$ e $e \in G_0$" pode ser a condição adequada a substituir a existência de unidade de cada D_g. Com essa perspectiva, o resultado anterior parece supérfluo já que traz condições mais complexas quanto aos ideais D_g, $g \in G$. Contudo, como estamos interessados em estudar especialmente o caso em que R não possui unidade, se faz necessário estabelecer novas propriedades sobre tais ideais, para que ambos os casos (unitário e não unitário) coincidam.

Além disso, pela demonstração anterior, podemos observar que se R é um anel semiprimo com unidade e D_e é um ideal de E'_e ($e \in G_0$), então $[D_g] = D_{r(g)} \cap \beta_g(D_{r(g^{-1})})$, ainda que os ideais D_g não sejam fechados, com $g \in G$.

O Exemplo 3.8 de [4] mostra que a Proposição 3.12 não é válida para o caso em que R não possui unidade e α é uma ação parcial de um grupo sobre R. Em particular, também podemos concluir a essencialidade da unidade para ações parciais de grupoides.

No entanto, temos o seguinte resultado

Teorema 3.13. *Sejam R um anel semiprimo e α uma ação parcial fechada de um grupoide G sobre R. Então (T', β') é uma envolvente de α se, e somente se, D_e é um ideal de E'_e, para todo $e \in G_0$.*

Demonstração: Suponhamos que D_e é um ideal de E'_e, para todo $e \in G_0$. Recordemos que, dado $x \in D_{g^{-1}}$, temos $\alpha_g(x) = \alpha^*_g(x) = \beta_g(x)$. Para quaisquer $g \in G$ e $a \in D_{r(g^{-1})}$, defina $\gamma_g(a) = (r_{\beta_g(a)}, l_{\beta_g(a)}) \in \mathcal{M}(D_{r(g)})$. Notemos que $\gamma_g(a)$ é um multiplicador de $D_{r(g)}$, já que este é um ideal de E'_g.

Como $D_{r(g)}$ e $\beta_g(D_{r(g^{-1})})$ são ideais de E'_g e

$$D_{r(g)} \cap \beta_g(D_{r(g^{-1})}) \subseteq D_{r(g)} \cap (E_g \cap \beta_g(E_{g^{-1}})) = D_{r(g)} \cap D^*_g,$$

então

$$D_{r(g)}\gamma_g(a) \subseteq D_{r(g)}\beta_g(a) \subseteq D_{r(g)} \cap \beta_g(D_{r(g^{-1})}) \subseteq D_{r(g)} \cap D^*_g = [D_g] = D_g.$$

Além disso, para todo $x \in D_g$,

$$x\gamma_g(a) = x\beta_g(a) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(x)a) = \beta_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a).$$

Assim, segue dos Corolários 2.17 e 3.11 que (T', β') é uma envolvente de α. □

Teorema 3.14. *Sejam R um anel semiprimo e α uma ação parcial de um grupoide G sobre R. Se todo ideal D_g, $g \in G$, é um somando direto de $D_{r(g)}$, então (T', β') é uma envolvente de α.*

Demonstração: Seja $g \in G$. Como na Proposição 3.12, temos que todo ideal D_g é fechado em $D_{r(g)}$, já que, em particular, é um somando direto de $D_{r(g)}$. Além disso, $D_{r(g)} = D_g \oplus ann_{D_{r(g)}} D_g$ e, para todo $g \in G$, existe um idempotente central $1_g \in E_g$ tal que $D^*_g = E_g 1_g$. Pela Seção 3.2, segue que $1_g = e_{D_g}$ e, para todo $a \in D_{r(g)}$, temos $a = a_g + b_g$, com $a_g \in D_g$ e $b_g \in ann_{D_{r(g)}} D_g$. Então $1_g a = a_g$, ou seja, todo $a \in D_{r(g)}$ pode ser escrito como $a = 1_g a + b_g$, onde $b_g \in ann_{D_{r(g)}} D_g$.

Dados $g \in G$ e $a \in D_{r(g)}$, considere o seguinte multiplicador em $\mathcal{M}(D_{r(g)})$:

$$\gamma_g(a) = (r_{\alpha_g(1_{g^{-1}}a)}, l_{\alpha_g(1_{g^{-1}}a)}).$$

Notemos que

(i) $D_{r(g)}\gamma_g(a) = D_{r(g)}\alpha_g(1_{g^{-1}}a) \subseteq D_g$, já que $\alpha_g(1_{g^{-1}}a) \in D_g$;

(ii) para todo $x \in D_g$, temos

$$\begin{aligned}\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a) &= \alpha_g((\alpha_{g^{-1}}(x)1_{g^{-1}})a) \\ &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)(1_{g^{-1}}a)) \\ &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x))\alpha_g(1_{g^{-1}}a) \\ &= x\alpha_g(1_{g^{-1}}a) \\ &= x\gamma_g(a);\end{aligned}$$

(iii) $\gamma_g(a)D_{r(g)} \subseteq D_g$, pois $\alpha_g(1_{g^{-1}}a) \in D_g$.

Logo, pelo Corolário 2.12, α possui envolvente e podemos considerá-la como sendo (T', β'), pelo Corolário 2.17. $\square$

A recíproca do Teorema 3.14 não é necessariamente verdadeira, vide o Exemplo 3.13 de [4]. Agora, para o caso em que R possui unidade, a recíproca segue imediatamente do Teorema 1.15.

Ainda podemos nos perguntar se no caso em que todos os ideais D_g ($g \in G$) são fechados em $D_{r(g)}$, a existência de uma envolvente para α implica que tais ideais são somandos diretos de $D_{r(g)}$. A resposta também é negativa, como apresentada no Exemplo 3.17 de [4].

Capítulo 4

Skew Anel de Grupoide Parcial

A principal finalidade desse capítulo consiste em generalizar os resultados obtidos no segundo capítulo de [4] mas no contexto de ações parciais de grupoides. Em suma, buscamos estudar a transferência de propriedades entre os skew anéis de grupoides $R *_\alpha G$ e $Q *_{\alpha^*} G$, determinando condições para que $R *_\alpha G$ seja um anel de Goldie, em que Q denota o anel de quocientes de Martindale à direita do anel semiprimo R.

4.1 Condições para que $R *_\alpha G$ seja um Anel de Goldie

Iniciaremos com a definição de skew anel de grupoide parcial. Para isso, fixemos, então, algumas notações: $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ denotará uma ação parcial fechada de um grupoide G sobre um anel semiprimo com unidade R, $Q_r(R) := Q$ é o anel de quocientes de Martindale à direita de R e $\alpha^* = (\{D_g^*\}_{g\in G}, \{\alpha_g^*\}_{g\in G})$ é a extensão de α à Q, obtida na Seção 4.2. Além disso, 1_g^* é o idempotente central que gera D_g^*, para todo $g \in G$.

O skew anel de grupoide parcial $R *_\alpha G$ correspondente à α é definido como a soma direta

$$R *_\alpha G = \bigoplus_{g\in G} D_g\delta_g,$$

em que δ_g, $g \in G$, são símbolos, com a adição usual e a multiplicação dada por

$$(x\delta_g)(y\delta_h) = \begin{cases} \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)y)\delta_{gh}, & \text{se } (g,h) \in G^2 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para quaisquer $g, h \in G$, $x \in D_g$ e $y \in D_h$.

Observação 4.1. *Consideremos que cada D_e é unitário, $e \in G_0$. Se α possui envolvente, então $a_g\delta_g = 1_g\delta_g \cdot \alpha_{g^{-1}}(a_g)$, em que 1_g denota a identidade de D_g, para quaisquer $g \in G$ e $a_g \in D_g$. De fato, suponhamos que α admite envolvente. Assim, para quaisquer $(g,h) \in G^2$,*

$a_g \in D_g$ e $b_h \in D_h$, temos

$$\begin{aligned} a_g\delta_g \cdot b_h\delta_h &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh} \\ &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)1_{g^{-1}}b_h)\delta_{gh} \\ &= a_g\alpha_g(1_{g^{-1}}b_h)\delta_{gh}. \end{aligned}$$

Se $(g, h) \notin G^2$, segue que $a_g\delta_g \cdot b_h\delta_h = 0$ por definição.

Em particular, se $r \in D_{r(g^{-1})}$, como $(g, r(g^{-1})) \in G^2$, obtemos que $gr(g^{-1}) = g$ e, portanto,

$$a_g\delta_g \cdot r = a_g\delta_g \cdot r\delta_{r(g^{-1})} = a_g\alpha_g(1_{g^{-1}}r)\delta_g.$$

Por outro lado, se $r \notin D_{r(g^{-1})}$, então $a_g\delta_g \cdot r = 0$. Em suma, temos

$$a_g\delta_g \cdot r = \begin{cases} a_g\alpha_g(1_{g^{-1}}r)\delta_g, & \text{se } r \in D_{r(g^{-1})} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Consequentemente, para todo $a_g \in D_g$, segue que $\alpha_{g^{-1}}(a_g) \in D_{g^{-1}} \subseteq D_{r(g^{-1})}$, o que implica

$$\begin{aligned} 1_g\delta_g \cdot \alpha_{g^{-1}}(a_g) &= 1_g\alpha_g(1_{g^{-1}}\alpha_{g^{-1}}(a_g))\delta_g \\ &= 1_g\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g))\delta_g \\ &= a_g\delta_g. \end{aligned}$$

Observação 4.2. *Notemos que cada D_g^* é um ideal de Q, para todo $g \in G$. De fato, como cada D_g^* é gerado por um idempotente central 1_g^*, então $D_g^* = 1_g^* D_{r(g)}^*$, já que D_g^* é sempre um ideal de $D_{r(g)}^*$. Logo, para todo $q \in Q$, obtemos $1_g^* q \in D_{r(g)}^*$, já que $D_{r(g)}^*$ é um ideal de Q. Consequentemente, para quaisquer $a \in D_g^*$ e $q \in Q$,*

$$aq = (a1_g^*)q = a(1_g^* q) \in D_g^*.$$

Analogamente, $qa \in D_g^*$, mostrando o desejado.

Na verdade, essa noção pode ser estendida para qualquer ação parcial no seguinte sentido: se α é uma ação parcial de um grupoide G sobre um anel R que admite uma globalização (T, β), então, pelo Teorema 1.15, todo D_g é um anel com unidade e, portanto, é um ideal de R, para todo $g \in G$.

As observações acima nos permitem mostrar o próximo lema, fundamental para o desenvolvimento direto ou indireto dos resultados dessa seção.

Lema 4.3. *(i) Seja $y \in Q *_{\alpha^*} G$ um elemento não nulo e arbitrário. Então existe um ideal essencial H de R tal que $yH \subseteq R *_{\alpha} G$. Mais ainda, se $y_1, y_2, ..., y_k \in Q *_{\alpha^*} G$, então existe um ideal essencial K de R tal que $y_i K \subseteq R *_{\alpha} G$, para todo $1 \leq j \leq k$.*

(ii) Se $y \in Q *_{\alpha^*} G$ e H é um ideal essencial de R tal que $Hy = 0$ ou $yH = 0$, então $y = 0$.

Demonstração:

(i) Inicialmente, vamos estudar o comportamento de um monômio não nulo $q_g\delta_g$ em $Q *_{\alpha^*} G = \bigoplus_{g \in G} D_g^*\delta_g$. Notemos que $D_g^* = 1_g^* D_{r(g)}^*$, pois D_g^* é gerado por um idempotente central 1_g^* de $D_{r(g)}^*$. Como $q_g \in D_g^*$, então $q_g = 1_g^* q_{r(g)}$, para algum $q_{r(g)} \in D_{r(g)}^*$. Além disso, $1_g^* \in Q = Q_r(R)$ e, pela Proposição 3.2*(ii)*, existe um ideal essencial J_g em R tal que $1_g^* J_g \subseteq R$. Mais ainda, observemos que $D_{r(g)}^*$ é um ideal de Q e $1_g^* \in D_g^* \subseteq D_{r(g)}^*$, o que garante a inclusão $1_g^* J_g \subseteq D_{r(g)}^*$. Portanto,

$$1_g^* J_g \subseteq D_{r(g)}^* \cap R = [D_{r(g)}] = D_{r(g)},$$

uma vez que α é uma ação parcial fechada (a primeira igualdade segue das noções apresentadas na Seção 3.2). Consequentemente, $1_g^* J_g \subseteq D_g^*$, uma vez que D_g^* é um ideal de Q, pela Observação 4.2, e $J_g \subseteq R \subseteq Q$. Logo, segue por argumento análogo que

$$1_g^* J_g \subseteq D_g^* \cap D_{r(g)}^* = [D_g] = D_g.$$

Por outro lado, temos que $q_{r(g)} \in D_{r(g)}^*$ e, assim, existe um ideal essencial L_g em R tal que $q_{r(g)} L_g \subseteq D_{r(g)}$. Dessa forma, $H_g = L_g J_g$ é um ideal essencial em R e

$$q_g H_g = q_{r(g)} 1_g^* L_g J_g = q_{r(g)} L_g 1_g^* J_g \subseteq D_{r(g)} D_g \subseteq D_g. \tag{4.1}$$

Notemos que $q_g H_g \neq 0$ pois, caso contrário, obteríamos $q_g = 0$, pela Proposição 3.2*(iii)*.

Mais ainda, aplicando a Observação 4.1 para a ação α^*, que admite envolvente, temos que $q_g\delta_g = 1_g^*\delta_g \cdot \alpha_{g^{-1}}^*(q_g)$. Assim, segue de (4.1) que existe um ideal essencial $H_{g^{-1}}$ de R tal que $\alpha_{g^{-1}}^*(q_g) H_{g^{-1}} \subseteq D_{g^{-1}} \subseteq D_{r(g^{-1})}$.

Seja $b \in H_{g^{-1}}$. Há duas possibilidades: se $b \notin D_{r(g^{-1})}$, temos que $q_g\delta_g \cdot b = 0 \in R *_{\alpha} G$; se $b \in D_{r(g^{-1})}$, então

$$\begin{aligned} q_g\delta_g \cdot b &= 1_g^*\delta_g \cdot \alpha_{g^{-1}}^*(q_g) b \\ &= \alpha_g^*(\alpha_{g^{-1}}^*(1_g)\alpha_{g^{-1}}^*(q_g) b)\delta_g \\ &= \alpha_g^*(\alpha_{g^{-1}}^*(q_g) b)\delta_g \end{aligned}$$

$$= \quad \alpha_g(\alpha^*_{g^{-1}}(q_g)b)\delta_g \in D_g\delta_g \subseteq R *_\alpha G.$$

Isto é, para todo $b \in H_{g^{-1}}$, segue que $q_g\delta_g \cdot b \in R *_\alpha G$.

Agora, seja $y = \sum_{i=1}^n q_{g_i}\delta_{g_i}$ um elemento não nulo de $Q *_{\alpha^*} G$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que os índices g_i's que aparecem em y são todos distintos e que os coeficientes q_{g_i} são não nulos, para todo $1 \leq i \leq n$.

Repetindo o argumento acima para cada parcela de y, garantimos a existência de um ideal essencial H_i em R tal que $q_{g_i}\delta_i \cdot H_i \subseteq R *_\alpha G$. Consideremos o ideal essencial $H = \bigcap_{i=1}^n H_i$ de R. Assim, para todo $b \in H$, temos

$$yb = \left(\sum_{i=1}^n q_{g_i}\delta_{g_i}\right) b = \sum_{i=1}^n (q_{g_i}\delta_{g_i})b = \sum_{i=1}^n (q_{g_i}b)\delta_{g_i} \in R *_\alpha G.$$

Em particular, segue da Proposição 3.2*(iii)* que, como todo $q_{g_i} \neq 0$, existe $a \in H$ tal que $q_{g_i}a \neq 0$ para algum i e, consequentemente, $0 \neq ya \in R *_\alpha G$.

Agora, se $y_1, ..., y_k \in Q *_{\alpha^*} G$, então existe um ideal essencial K_j de R tal que $y_jK_j \in R *_\alpha G$, para todo $1 \leq j \leq k$. Considerando o ideal essencial $K = \bigcap_{j=1}^k K_j$ de R, obtemos que $y_jK \subseteq R *_\alpha G$, para todo $i \leq j \leq k$.

(ii) Sejam $y = \sum_{i=1}^{n} q_{g_i}u_{g_i} \in Q *_{\alpha^*} G$ um elemento não nulo e H um ideal essencial de R tais que $yH = 0$. Como no item *(i)*, suponhamos, sem perda de generalidade, que os índices g_i's que aparecem em y são todos distintos e que os coeficientes q_{g_i} são não nulos, para todo $1 \leq i \leq n$. Como consideramos $q_{g_i} \neq 0$, temos que $D_{g_i} \neq 0$ e, consequentemente, $D_{r(g_i)} \neq 0$. Além disso, $D_{r(g_i^{-1})} \neq 0$, uma vez que $D_{r(g_i)} \cong D_{r(g_i^{-1})}$. Sendo H essencial em R, obtemos $H \cap D_{r(g_i^{-1})} \neq 0$. Denotemos $g := g_i$. Então $H \cap D_{r(g^{-1})}$ é um ideal essencial não nulo de $D_{r(g^{-1})}$. Assim, $\alpha^*_{g^{-1}}(q_g) \neq 0$ e, portanto, $\alpha^*_{g^{-1}}(q_g)(H \cap D_{r(g^{-1})}) \neq 0$, o que implica $\alpha^*_g(\alpha^*_{g^{-1}}(q_g)(H \cap D_{r(g^{-1})})) \neq 0$. Dessa forma, existe $a \in H \cap D_{r(g^{-1})}$ tal que $\alpha^*_{g_1}(\alpha^*_{g_1^{-1}}(q_{g_1})a) \neq 0$ e, consequentemente,

$$yH \ni ya = \alpha^*_{g_1}(\alpha^*_{g_1^{-1}}(q_{g_1})a)u_{g_1} + \sum_{i=2}^n \alpha^*_{g_i}(\alpha^*_{g_i^{-1}}(q_{g_i})a)u_{g_i} \neq 0,$$

contradizendo a hipótese de que $yH = 0$. O segundo caso segue de forma análoga.

□

Proposição 4.4. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se I é um ideal à direita não nulo de $Q *_{\alpha^*} G$, então $I \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal à direita não nulo de $R *_\alpha G$.

(ii) Se $R *_\alpha G$ é semiprimo, então $Q *_{\alpha^*} G$ é semiprimo.

Demonstração:

(i) Sejam I um ideal à direita não nulo de $Q *_{\alpha^*} G$ e $0 \neq x \in I$. Então, pelo Lema 4.3, existe um ideal essencial H de D_{g_i} tal que $0 \neq xH \subseteq R *_\alpha G$. Como I é um ideal à direita de $Q *_{\alpha^*} G$, então $0 \neq xH \subseteq (R *_\alpha G) \cap I$, uma vez que $H \subseteq Q *_{\alpha^*} G$.

(ii) Seja I um ideal à direita de $Q *_{\alpha^*} G$ tal que $I^2 = 0$. Como $(I \cap (R *_\alpha G))^2 \subseteq I^2 = 0$ e $I \cap (R *_\alpha G)$ é ideal de $R *_\alpha G$, então $I \cap (R *_\alpha G) = 0$ pois $R *_\alpha G$ é semiprimo. Pelo item (i), $I = 0$ e, portanto, $Q *_{\alpha^*} G$ é semiprimo.

□

Um anel R é dito não singular à direita se o ideal singular à direita $\mathcal{Z}(R)$ de R é nulo, em que $\mathcal{Z}(R) = \{x \in R \mid xE = 0, \text{para algum ideal essencial } E \text{ de } R\}$. É fácil verificar que $x \in \mathcal{Z}(R)$ se, e somente se, existe um elemento não nulo $y \in J$ tal que $xy = 0$, em que J é um ideal à direita de R.

Proposição 4.5. $\mathcal{Z}(R *_\alpha G) = \mathcal{Z}(Q *_{\alpha^*} G) \cap (R *_\alpha G)$.

Demonstração: Sejam $x \in \mathcal{Z}(R *_\alpha G)$ e J um ideal à direita não nulo de $Q *_{\alpha^*} G$. Então, pelo item (i) da Proposição 4.4, temos que $J \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal à direita não nulo de $R *_\alpha G$. Assim, existe $0 \neq y \in J \cap (R *_\alpha G)$ tal que $xy = 0$. Portanto, $x \in \mathcal{Z}(Q *_{\alpha^*} G)$ e, consequentemente, $\mathcal{Z}(R *_\alpha G) \subseteq \mathcal{Z}(Q *_{\alpha^*} G) \cap (R *_\alpha G)$.

Por outro lado, sejam $x \in \mathcal{Z}(Q *_{\alpha^*} G) \cap (R *_\alpha G)$ e I um ideal à direita não nulo de $R *_\alpha G$. Então existe $0 \neq z \in I(Q *_{\alpha^*} G)$ tal que $xz = 0$. Além disso, existem $a_1, ..., a_n \in Q *_{\alpha^*} G$, $y_1, ..., y_n \in I$ tais que $z = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$. Pelo Lema 4.3, existe um ideal essencial não nulo E de R tal que $a_i E \subseteq R *_\alpha G$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo, $(y_i a_i)E = y_i(a_i E) \subseteq y_i(R *_\alpha G) \subseteq I$, para todo $1 \leq i \leq n$ e, portanto, $zE \subseteq I$. Pelo Lema 4.3, $zE \neq 0$. Assim, existe $b \in E$ tal que $0 \neq zb \in I$ e $x(zb) = (xz)b = 0$, mostrando que $x \in \mathcal{Z}(R *_\alpha G)$. □

Corolário 4.6. *$R *_\alpha G$ é não singular à direita se, e somente se, $Q *_{\alpha^*} G$ é não singular à direita.*

Demonstração: Segue imediatamente da Proposição 4.5. □

Proposição 4.7. *As seguintes condições são válidas:*

(i) Se H é um ideal essencial à direita de $R *_\alpha G$, então $H(Q *_{\alpha^*} G)$ é um ideal essencial à direita de $Q *_{\alpha^*} G$.

(ii) Se F é um ideal essencial à direita de $Q *_{\alpha^*} G$, então $F \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal essencial à direita de $R *_\alpha G$.

Demonstração:

(i) Sejam H um ideal essencial à direita de $R *_\alpha G$ e I um ideal à direita não nulo de $Q *_{\alpha^*} G$. Pela Proposição 4.4(i), obtemos que $I \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal não nulo à direita de $R *_\alpha G$. Assim,

$$0 \neq H \cap (I \cap (R *_\alpha G)) \subseteq H \cap I \subseteq H(Q *_{\alpha^*} G) \cap I.$$

Portanto, $H(Q *_{\alpha^*} G)$ é um ideal essencial à direita de $Q *_{\alpha^*} G$.

(ii) Sejam F um ideal essencial à direita de $Q *_{\alpha^*} G$ e J um ideal não nulo à direita de $R *_\alpha G$. Então $F \cap J(Q *_{\alpha^*} G) \neq 0$. Consideremos $0 \neq y = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i \in F \cap J(Q *_{\alpha^*} G)$, em que $a_i \in J$ e $c_i \in Q *_{\alpha^*} G$, para todo $1 \leq i \leq n$. Então, pelo Lema 4.3, existe um ideal essencial E de R tal que $c_i E \subseteq R *_\alpha G$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Assim, $yE = \sum_{i=1}^{n} a_i(c_i E) \subseteq (F \cap (R *_\alpha G)) \cap J$, já que J é um ideal à direita de $R *_\alpha G$ e $y \in F \triangleleft_r Q *_{\alpha^*} G$.

Mais ainda, como $y \neq 0$ e E é um ideal essencial de R, segue do Lema 4.3 que $yE \neq 0$. Portanto, $F \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal essencial à direita de $R *_\alpha G$.

□

É imediato da proposição acima que existe uma correspondência um-a-um entre os ideais essenciais à direita de $R *_\alpha G$ e os ideais essenciais à direita de $Q *_{\alpha^*} G$.

A fim de estudar condições para que $R *_\alpha G$ seja um anel de Goldie à direita, apresentaremos, primeiramente, as definições de alguns conceitos necessários.

Um anel R é dito *uniforme à direita* se todo ideal à direita não nulo de R é essencial. Ou seja, dado um ideal à direita não nulo I de R, temos que R é uniforme à direita se, e somente se, para quaisquer elementos não nulos $x, y \in I$, existem $r, s \in R$ tais que $xr = ys \neq 0$. Consequentemente, um anel R é *não uniforme à direita* se, e somente se, existem elementos não nulos $x, y \in I$ tais que $xR \cap yR = 0$. Notemos que $\mathbb{Z}$ é uniforme pois todo ideal $m\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ é essencial, já que $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$, com $k = mmc(m, n)$ e $n\mathbb{Z}$ ideal de $\mathbb{Z}$. Contudo, observemos que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ não é uniforme, uma vez que $(2\mathbb{Z} \times 0) \cap (0 \times 2\mathbb{Z}) = 0$.

A partir dessa noção, estamos em condições de definir o conceito dimensão uniforme.

Definição 4.8. *Um anel R possui dimensão uniforme à direita n se existe um ideal essencial à direita I de R que é uma soma direta de n ideais uniformes à direita.*

Nesse caso, denotaremos a dimensão uniforme à direita de R por $udim(R) = n$. Por outro lado, se tal n não existe, dizemos que R possui dimensão uniforme à direita infinita e escrevemos $udim(R) = \infty$. Pela definição, é fácil verificar que $udim(R) = 0$ se, e somente se, $R = 0$; e $udim(R) = 1$ se, e somente se, R é um anel uniforme. A dimensão uniforme à esquerda de R é definida de forma análoga, mas não será abordada nesse trabalho. Logo, a notação não causará dúvidas quanto à lateralidade.

Dizemos que R satisfaz a *condição de cadeias ascendentes* para anuladores à direita se toda cadeia ascendente de ideais anuladores à direita estaciona. Nesse caso, dizemos que R satisfaz a ACC sobre ideias anuladores à direita. A abreviação ACC deriva do inglês "ascending chain condition".

Agora podemos introduzir o conceito de anel de Goldie à direita.

Definição 4.9. *Um anel R é um anel de Goldie à direita se $udim(R) < \infty$ e R satisfaz a ACC sobre ideais anuladores à direita.*

Um elemento x de um anel R é *regular à direita* (resp. *regular à esquerda*) se $xy = 0$ (resp. $yx = 0$) implica $y = 0$, para $y \in R$. Dessa forma, $x \in R$ é dito *regular* quando x é regular à direita e à esquerda. O conjunto de todos os elementos regulares de R será denotado por $\mathcal{A}_R$.

Se R possui unidade, dizemos que um elemento não nulo $x \in R$ é *inversível* em R se existe um único elemento $y \in R$ tal que $xy = yx = 1$. O elemento y é denominado o *inverso* de x em R. Denotaremos por $U(R)$ o conjunto de todos os elementos inversíveis de R.

Além disso, se $R \subseteq Q$ são anéis com a mesma unidade, dizemos que R é uma *ordem à direita* em Q se $\mathcal{A}_R \subseteq U(Q)$ e todo elemento de Q é da forma xs^{-1}, em que $x \in R$ e $s \in \mathcal{A}_R$. Nesse caso, Q é denominado um *anel de quocientes clássico à direita* de R e denotado por $Q^r_{cl}(R)$. Destaca-se que um anel clássico de quocientes de um anel nem sempre existe, conforme estudado no Capítulo 10 de [15].

Algumas propriedades de anéis de Goldie são apresentadas no seguinte teorema [15, Theorem 11.13].

Teorema 4.10. (Teorema de Goldie) *Para um anel com unidade R, são equivalentes:*

(i) R é uma ordem à direita em um anel semissimples artiniano;

(ii) R é um anel semiprimo de Goldie à direita;

(iii) R é semiprimo, $udim(R) < \infty$ e $\mathcal{Z}(R) = 0$;

(iv) todo ideal à direita E de R é essencial se, e somente se, $E \cap \mathcal{A}_R \neq \emptyset$.

Mostremos que a Proposição 4.7 também é válida para ideais uniformes à direita.

Proposição 4.11. *As seguintes condições são satisfeitas:*

(i) Se U é um ideal uniforme à direita não nulo de $R *_\alpha G$, então $U(Q *_{\alpha^*} G)$ é um ideal uniforme à direita de $Q *_{\alpha^*} G$.

(ii) Se V é um ideal uniforme à direita não nulo de $Q *_{\alpha^*} G$, então $V \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal uniforme à direita de $R *_\alpha G$.

Demonstração:

(i) Notemos que $U(Q*_{\alpha^*}G) \neq 0$, pois $Q*_{\alpha^*}G$ possui unidade e U é não nulo. Suponhamos que $U(Q*_{\alpha^*}G)$ não é uniforme. Então existem elementos não nulos $\mu = \sum_{i=1}^n u_i y_i$, $\omega = \sum_{j=1}^m v_j x_j \in U(Q*_{\alpha^*}G)$ tais que $\mu(Q*_{\alpha^*}G) \cap \omega(Q*_{\alpha^*}G) = 0$, em que $u_i, v_j \in U$ e $y_i, x_j \in Q*_{\alpha^*}G$ são todos não nulos.

Como μ e ω são não nulos, segue da Proposição 4.4*(i)* que $\mu(Q*_{\alpha^*}G) \cap R *_\alpha G$ e $\omega(Q*_{\alpha^*}G) \cap R *_\alpha G$ são ideais à direita não nulos de $R *_\alpha G$. Contudo, a interseção

$$(\mu(Q*_{\alpha^*}G) \cap R *_\alpha G) \cap (\omega(Q*_{\alpha^*}G) \cap R *_\alpha G)$$

desses ideais é nula.

Por outro lado, como quaisquer $y_i's$ e $x_j's$ são elementos não nulos de $Q*_{\alpha^*}G$ e ocorrem em quantidade finita, segue do Lema 4.3 que existe um ideal essencial E em R tal que $y_iE \subseteq R *_\alpha G$ e $x_jE \subseteq R *_\alpha G$, para quaisquer $i \in \{1, ..., n\}$ e $j \in \{1, ..., m\}$. Assim, como U é um ideal à direita de $R *_\alpha G$, obtemos que $\mu E, \omega E \subseteq U$. Além disso, sendo μ e ω não nulos e E essencial em R, temos que $\mu E \neq 0$ e $\omega E \neq 0$. Consideremos $a, b \in E$ tais que $\mu a \neq 0$ e $\omega b \neq 0$. Como U é uniforme em $R *_\alpha G$, então $((\mu a)(R *_\alpha G)) \cap ((\omega b)(R *_\alpha G)) \neq 0$, contradizendo o fato de que

$$((\mu a)(R *_\alpha G)) \cap ((\omega b)(R *_\alpha G)) \subseteq (\mu(Q*_{\alpha^*}G) \cap R *_\alpha G) \cap (\omega(Q*_{\alpha^*}G) \cap R *_\alpha G) = 0.$$

Portanto, $U(Q*_{\alpha^*}G)$ é uniforme.

(ii) Seja V um ideal à direita uniforme não nulo de $Q*_{\alpha^*}G$. Então, pela Proposição 4.4, $V \cap (R *_\alpha G)$ é um ideal à direita não nulo de $R *_\alpha G$. Suponhamos que existam dois ideais à direita não nulos I e J de $R *_\alpha G$ contidos em V tais que $I \cap J = 0$. Assim, $I(Q*_{\alpha^*}G)$ e $J(Q*_{\alpha^*}G)$ são dois ideais à direita não nulos de $Q*_{\alpha^*}G$ contidos em V. Pelo Lema 4.3, $I(Q*_{\alpha^*}G) \cap J(Q*_{\alpha^*}G) = 0$, contradizendo o fato de que V é uniforme.

□

Segue diretamente da proposição acima que existe uma correspondência um-a-um entre os ideais uniformes à direita de $R *_\alpha G$ e os ideais uniformes à direita de $Q *_{\alpha^*} G$.

As Proposições 4.7 e 4.11 implicam imediatamente os seguintes corolários.

Corolário 4.12. *$udim(R *_\alpha G) = udim(Q*_{\alpha^*}G)$.*

Corolário 4.13. *Se R é um anel semiprimo com unidade e $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita, então $Q*_{\alpha^*}G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita.*

Demonstração: Se $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita, então segue do Teorema 4.10 que $R *_\alpha G$ é semiprimo, $\mathcal{Z}(R *_\alpha G) = 0$ e $udim(R *_\alpha G) < \infty$. Assim, pela Proposição 4.4*(i)* e pelos Corolários 4.6 e 4.12, temos que $Q*_{\alpha^*}G$ é semiprimo,

$\mathcal{Z}(Q*_{\alpha^*}G) = 0$ e $udim(Q*_{\alpha^*}G) < \infty$. Logo, pelo Teorema 4.10, $Q*_{\alpha^*}G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita. □

Na Proposição 4.4, provamos que se $R*_{\alpha}G$ é um anel semiprimo, então $Q*_{\alpha^*}G$ também é semiprimo. Mostremos que a recíproca é verdadeira para o caso em que R é um anel semiprimo de Goldie à direita.

Teorema 4.14. *Seja R um anel semiprimo de Goldie à direita com unidade. Então $R*_{\alpha}G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita se, e somente se, $Q*_{\alpha^*}G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita.*

Demonstração: É suficiente provar a recíproca. Suponhamos que $Q*_{\alpha^*}G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita. Então, por definição, $udim(Q*_{\alpha^*}G) < \infty$ e $Q*_{\alpha^*}G$ satisfaz a ACC sobre ideais anuladores à direita. Assim, pelo Corolário 4.12, $udim(R*_{\alpha}G) < \infty$ e $R*_{\alpha}G$ satisfaz a ACC sobre ideais anuladores à direita por ser um subanel de $Q*_{\alpha^*}G$. Consequentemente, $R*_{\alpha}G$ é um anel de Goldie à direita.

Para mostrar que $R*_{\alpha}G$ é semiprimo, provemos que os anéis de quocientes clássicos $Q^r_{cl}(R*_{\alpha}G)$ e $Q^r_{cl}(Q*_{\alpha^*}G)$ são iguais.

Afirmação: $\mathcal{A}_R \subseteq \mathcal{A}_{R*_{\alpha}G} = \mathcal{A}_{Q*_{\alpha^*}G} \cap R*_{\alpha}G$.

A primeira inclusão é imediata. Agora, sejam $x \in \mathcal{A}_{R*_{\alpha}G}$ e $y \in Q*_{\alpha^*}G$ tais que $xy = 0$. Pelo Lema 4.3, existe um ideal essencial H em R tal que $yH \subseteq R*_{\alpha}G$. Então, $0 = (xy)H = x(yH)$, o que implica $yH = 0$, já que $x \in \mathcal{A}_{R*_{\alpha}G}$. Logo, pelo Lema 4.3, segue que $y = 0$. Isso mostra que x é um elemento regular à direita de $Q*_{\alpha^*}G$ e, portanto, x também regular à esquerda, pois $Q*_{\alpha^*}G$ é um semiprimo de Goldie à direita. Consequentemente, $x \in \mathcal{A}_{Q*_{\alpha^*}G}$ e a inclusão " $\subseteq$ " é verdadeira. A inclusão contrária é imediata.

Agora, seja $y \in Q^r_{cl}(Q*_{\alpha^*}G)$. Então, existe $x \in \mathcal{A}_{Q*_{\alpha^*}G}$ tal que $yx \in Q*_{\alpha^*}G$ e, pelo Lema 4.3, existe um ideal essencial H de R tal que $xH \subseteq R*_{\alpha}G$. Por outro lado, existe um ideal essencial F de R tal que $(yx)F \subseteq R*_{\alpha}G$. Considerando $L = H \cap F \in \mathcal{E}(R)$, temos $xL, (yx)L \subseteq R*_{\alpha}G$. Sendo R um anel semiprimo de Goldie à direita, segue do Teorema 4.10(*iv*) que existe $e \in \mathcal{A}_R \cap L \subseteq \mathcal{A}_{Q*_{\alpha^*}G} \cap L$. Assim, $xe \in \mathcal{A}_{Q*_{\alpha^*}G} \cap R*_{\alpha}G = \mathcal{A}_{R*_{\alpha}G}$ é tal que $y(xe) \in R*_{\alpha}G$. Portanto, $y \in Q^r_{cl}(R*_{\alpha}G)$ o que implica $Q^r_{cl}(Q*_{\alpha^*}G) \subseteq Q^r_{cl}(R*_{\alpha}G)$. A inclusão contrária é evidente, pois $\mathcal{A}_{R*_{\alpha}G} \subseteq \mathcal{A}_{Q*_{\alpha^*}G}$.

Como $Q*_{\alpha^*}G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita, temos do Teorema 4.10 que $Q^r_{cl}(R*_{\alpha}G) = Q^r_{cl}(Q*_{\alpha^*}G)$ é semissimples e artiniano. Logo, pelo Teorema 4.10, $R*_{\alpha}G$ é semiprimo. □

Conclusões

Sim, trabalhar com grupoides pode exigir maior cautela quanto aos objetos considerados e, às vezes, algumas hipóteses adicionais, mas também permite produzir elegantes e satisfatórios resultados!

Aqui, buscamos sintetizar os principais resultados desenvolvidos nesse estudo e, por vezes, comparar as diferenças com o caso de grupos. Encerramos o segundo capítulo com o seguinte resultado, em que $\mathcal{M}(D_{r(g)})$ denota o anel de multiplicadores de $D_{r(g)}$:

Resultado 1. *Sejam R um anel semiprimo, G um grupoide e α uma ação parcial fechada de G sobre R. Suponhamos que, para quaisquer $a \in D_{r(g^{-1})}$ e $g \in G$, exista $\gamma_g(a) \in \mathcal{M}(D_{r(g)})$ tal que*

(i) $D_{r(g)}\gamma_g(a) \subseteq D_g$;

(ii) $\gamma_g(a)|_{D_g} = \alpha_{g^{-1}} r_a \alpha_g|_{D_g}$ *como multiplicadores à direita, ou seja,* $x\gamma_g(a) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)a)$, *para todo* $x \in D_g$;

(iii) $\gamma_g(a)D_{r(g)} \subseteq D_g$.

Então α possui uma ação envolvente semiprima, a qual é única a menos de equivalência.

Ele generaliza [6, Corollary 3.3] e difere do caso de grupos pela adição da hipótese *(iii)*, justificada pelo fato de que o anel R não é necessariamente unitário.

No Capítulo 3, dada uma ação parcial $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ de um grupoide G sobre um anel semiprimo R, construímos a extensão α^* de α ao anel de quocientes de Martindale à direita Q de R. Como Q é um anel com unidade, podemos aplicar o Teorema 1.15, que garante a existência de uma globalização (T, β) para a extensão α^*. A partir dessa globalização, construímos uma ação global (T', β') e investigamos as condições necessárias para que (T', β') seja uma globalização de α, obtendo

Resultado 2. *Sejam R um anel semiprimo, G um grupoide e α uma ação parcial. Suponhamos que todas as condições do Resultado 1 são satisfeitas. Então α possui uma ação envolvente semiprima, a qual é única a menos de equivalência. Mais ainda, tal ação envolvente é precisamente (T', β').*

Resultado 3. *Sejam R um anel semiprimo e α uma ação parcial fechada de um grupoide G sobre R. Então (T', β') é uma envolvente de α se, e somente se, D_e é um ideal de E'_e, para todo $e \in G_0$.*

Resultado 4. *Sejam R um anel semiprimo e α uma ação parcial de um grupoide G sobre R. Se todo ideal D_g, $g \in G$, é um somando direto de $D_{r(g)}$, então (T', β') é uma envolvente de α.*

Nesse caso, a distinção entre os contextos de grupos e grupoides é dada também pela hipótese adicional do Resultado 1 e pelo cuidado ao considerar ideais de ideais (D_g é um ideal de $D_{r(g)}$ e não necessariamente ideal do anel base R).

O Capítulo 4 aborda o skew anel de grupoide parcial $R *_\alpha G$ a fim de estabelecer condições para que tal anel seja um anel de Goldie. Substancialmente, a principal diferença no caso de grupoides coube à demonstração do Lema 4.3. Os demais resultados seguem de forma análoga ao caso de grupos, desenvolvido em [4] para o anel de quocientes maximal, já que derivam basicamente de propriedades da teoria de anéis. Destacamos alguns desses resultados, em que $udim(R)$ denota a dimensão uniforme de um anel R:

Resultado 5. *$R *_\alpha G$ é não singular à direita se, e somente se, $Q *_{\alpha^*} G$ é não singular à direita.*

Resultado 6. *$udim(R *_\alpha G) = udim(Q *_{\alpha^*} G)$.*

Resultado 7. *Se R é um anel semiprimo com unidade e $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita, então $Q *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita.*

Resultado 8. *Seja R um anel semiprimo de Goldie à direita com unidade. Então $R *_\alpha G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita se, e somente se, $Q *_{\alpha^*} G$ é um anel semiprimo de Goldie à direita.*

Problemas em Aberto

Não garantimos um prêmio de um milhão de dólares mas vale a pena investigar:

(1) a transferência de propriedades entre o anel base R e o subanel de invariantes (ou anel fixo) R^α, definido em [2], para ações parciais de grupoides;

(2) o comportamento do skew anel de grupoide $Q_m *_{\alpha^{**}} G$, em que Q_m denota o anel de quocientes maximal do anel semiprimo R e α^{**} a extensão de uma ação parcial α de G sobre R ao anel Q_m, obtida em [18].

Índice Remissivo

ACC sobre anuladores, 73

anel
- de Goldie à direita, 73
- de multiplicadores, 34
- de quocientes clássico, 73
- uniforme, 72
- de quocientes de Martindale à direita, 55, 56
- não-singular, 71

anulador de um ideal, 34

ação
- envolvente, 22
- global de grupoides, 19
- parcial de grupoides, 21
- parcial fechada, 35
- semiprima, 31

centroide estendido, 57

dimensão uniforme, 72

elemento
- inversível, 73
- regular, 73
  - à direita, 73

fecho de um ideal, 34

função R-linear, 55

globalização, 22

grupoide, 17

ideal
- β-invariante, 45
- essencial, 34
- fechado, 34
- singular, 71

ordem
- à direita, 73

radical
- hereditário, 44
- primo, 44

skew anel de grupoide parcial, 67

Teorema de Goldie, 73

Referências Bibliográficas

[1] AMITSUR, S. A. *On Rings of Quotients*. Symposia Mathematica, 1972, Vol. 8, 149-164.

[2] BAGIO, D.; PAQUES, A. *Partial Groupoid Actions: Globalization, Morita Theory and Galois Theory*. Communications in Algebra, Vol. 40 (2012), 3658-3678.

[3] BAGIO, D.; PINEDO, H. *Globalization of partial actions of groupoids on nonunital rings*. Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 15, No. 5 (2016) 1650096.

[4] BEMM, L. *Ações Parciais de Grupos sobre Anéis Semiprimos*. Tese de Doutorado, PPG-Mat, UFRGS, 2011.

[5] BROWN, R. *From Groups to Groupoids: A Brief Survey*. London Math. Soc, 19(2) (1987), 113-134.

[6] CORTES, W., FERRERO, M. *Globalizations of Partial Actions on Semiprime Rings*. Contemporary Math, 499 (2009), 27-35.

[7] DIVINSKI, N.J. *Rings and Radicals*. Mathematical Expositions N14, University of Toronto Press, 1964.

[8] DOKUCHAEV, M., EXEL, R. *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations*. Trans. Am. Math. Soc. 357 (2005), 1931-1952.

[9] FERRERO, M. *Closed Submodules of Centred Bimodules over Semiprime Rings*. Nova J. Math., Game Theory and Alg. 5 (1996), 309-345.

[10] FERRERO, M. *Partial Actions of Groups on Semiprime Rings*. A Series of Lectures Notes in Pura and Applied Mathematics, 248, Chapman and Hall, 2006.

[11] FERRERO, M., LAZZARIN, J. *Partial Actions and Partil Skew Group Rings*. Journal of Algebra 319 (2008), 5247-5264.

[12] FLÔRES, D. *Ação de Grupoides sobre Álgebras: Teoremas de Estrutura*. Tese de Doutorado, PPG-Mat, UFRGS, 2011.

[13] FLÔRES, D.; PAQUES, A. *On the Structure of Skew Groupoid Rings which are Azumaya*. Algebra and Discrete Mathematics, 2013, Vol. 16, 71-80.

[14] LAM, T. Y. *A First Course on Noncommutative Rings*. 2ª ed., Grad. Text in Math., vol. 131, Springer-Verlag, New York, 2001.

[15] LAM, T. Y. *Lectures on Modules and Rings*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[16] LAUTENSCHLAEGER, W. G.; TAMUSIUNAS, T. *Globalization of Partial Actions of Ordered Groupoids on Rings*. arXiv:2402.16758v1, 2024.

[17] MARTINDALE, W. S. *Prime Ring Satisfying a Generalized Polynomial Identity*. Journal of Algebra, 1969, Vol. 12, 576-584.

[18] NASCIMENTO, J.C. *Extensões de Ações Parciais de Grupoides em Anéis de Quocientes*. Dissertação de Mestrado, PMA, UEM, 2020.