Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Guilherme Hahn Krás

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E SEUS ASPECTOS PEDAGÓGICOS: UMA REFLEXÃO COM (FUTUROS) PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Porto Alegre
2023

Guilherme Hahn Krás

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E SEUS ASPECTOS PEDAGÓGICOS: UMA REFLEXÃO COM (FUTUROS) PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Marilaine de Fraga Sant'Ana

Porto Alegre
2023

CIP - Catalogação na Publicação

Krás, Guilherme Hahn
A Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos: Uma reflexão com (futuros) professores de Matemática / Guilherme Hahn Krás. -- 2023.
133 f.
Orientadora: Marilaine de Fraga Sant'Ana.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2023.

1. Resolução de Problemas. 2. Licenciatura em Matemática. 3. Formação de Professores de Matemática. I. Sant'Ana, Marilaine de Fraga, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Guilherme Hahn Krás

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E SEUS ASPECTOS PEDAGÓGICOS: UMA REFLEXÃO COM (FUTUROS) PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Membros da Banca Examinadora:

____

Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana
IME/PPGEMAT/UFRGS (Orientadora)

____

Profa. Dra. Norma Suely Gomes Allevato
UNICSUL

____

Profa. Dra. Elisabete Zardo Búrigo
IME/PPGEMAT/UFRGS

____

Profa. Dra. Débora da Silva Soares
IME/PPGEMAT/UFRGS

Porto Alegre, 11 de setembro de 2023

DEDICATÓRIA

Ao meu Bom Jesus, que me amou e se entregou por mim, oferto este fruto do meu trabalho pelas mãos da Virgem Santíssima e de São José, que nunca desampararam quem tenha recorrido a eles.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Bom Jesus, que me deu o dom da vida, a redenção, uma ótima família, os dons necessários para executar trabalho de cada dia e para realizar essa pesquisa, e que me amparou em todos os momentos que achei que não conseguiria seguir em frente.

À Virgem Santíssima, Maria, Mãe de Deus e minha mãe, à qual me consagrei e que sempre intercede por mim.

Ao glorioso São José, que me ensina a santificar o trabalho cotidiano.

Ao meu anjo da guarda, que sempre luta pela salvação da minha alma.

Aos meus pais, Elizete e Marino, que sempre me apoiaram na decisão de ser professor, mesmo sabendo das dificuldades que eu teria pelo caminho. As minhas conquistas foram regadas pelo seu suor, pois foi por meio do seu esforço que eu tive tantas oportunidades de crescer.

À minha irmã, Bianca, que me ajuda a amadurecer e a ser um irmão melhor todos os dias.

À minha namorada, Ana Luíza, que acredita em mim, até quando eu mesmo não acredito, e sempre me incentiva a crescer nas virtudes e buscar a santidade.

À minha orientadora, Prof.ª Marilaine, sempre cheia de energia e disposição, que me inspirou como profissional e cujo apoio me permitiu concluir esta pesquisa.

Às professoras Norma, Elisabete e Débora, membros da banca que de forma tão cuidadosa avaliou o meu trabalho, dando sugestões precisas que permitiram a sua evolução.

Aos licenciandos que fizeram parte do curso de extensão, e que acreditaram no potencial deste trabalho.

Ao meu grande amigo e padrinho, Gabriel, que tem estado ao meu lado há tantos anos e que me dá testemunho das virtudes que quero conquistar para ser um bom homem.

Às minhas amigas e colegas de mestrado, Érica e Paulinha, com quem eu sempre pude contar para partilhar os sucessos e reclamar dos insucessos que a vida acadêmica oferece.

A todos os amigos, familiares e colegas que rezaram por mim e de alguma forma contribuíram com este trabalho.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é analisar quais são as concepções construídas por alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul sobre Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos. Para tanto, desenvolvemos um curso de extensão universitária sobre tal tema, com três licenciandos tendo participação assídua. As discussões giraram em torno do conceito de problema, de conexões construídas durante a resolução de um problema e de aspectos pedagógicos e ações docentes vinculadas à Resolução de Problemas. Foi realizada uma análise qualitativa dos dados produzidos por meio de questionários, observações dos encontros, materiais elaborados pelos participantes e gravações de áudio, de acordo com as seguintes categorias: concepções dos licenciandos sobre resolução de problemas; concepções dos licenciandos sobre abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas; e ações dos licenciandos durante os momentos de resolução de problemas. Os resultados da pesquisa apontam que o curso de extensão promoveu uma compreensão maior sobre o tema discutido e permitiu que os licenciandos compartilhassem suas dificuldades com o grande grupo, indicando possíveis caminhos para abordar a Resolução de Problemas na formação inicial dos professores de Matemática. Por conta disso, defendemos que a discussão e reflexão sobre a Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos deve ser incentivada durante o curso de licenciatura em Matemática, com o objetivo de orientar cada vez mais a sua formação para uma educação matemática escolar que promova a autonomia intelectual, utilizando a resolução de problemas como um meio para tal fim.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Licenciatura em Matemática, Formação de Professores de Matemática.

ABSTRACT

PROBLEM SOLVING AND ITS PEDAGOGICAL ASPECTS: A REFLECTION WITH (FUTURE) MATHEMATICS TEACHERS

The objective of this research is to analyze which are the conceptions built by students in the Mathematics Teacher Education Program at the Federal University of Rio Grande do Sul regarding Problem Solving and its pedagogical aspects. To do so, we developed a university extension course on this topic, with three teacher candidates having regular participation. The discussions revolved around the concept of problem, connections built during problem-solving, and pedagogical aspects and teaching actions related to Problem Solving. A qualitative analysis was carried out on the data produced through questionnaires, observations of the meetings, materials developed by the participants, and audio recordings, according to the following categories: teacher candidates' conceptions of problem-solving; teacher candidates' conceptions of teaching approaches involving problem-solving; and teacher candidates' actions while solving problems. The research results indicate that the extension course promoted a better understanding of the discussed topic and allowed the undergraduates to share their difficulties with the group, suggesting possible ways for approaching Problem Solving in the initial training of Mathematics teachers. Therefore, we argue that discussion and reflection on Problem Solving and its pedagogical aspects should be encouraged during the Mathematics Teacher Education Program, with the aim of orienting their training towards a school mathematics education that promotes intellectual autonomy, using problem solving as a means to this end.

Keywords: Problem Solving, Mathematics Teacher Education, Teacher Training in Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde criança, sempre gostei[1] de me sentir desafiado, especialmente em relação a trabalhos intelectuais. Isso despertou em mim, desde cedo, um interesse pessoal pela disciplina de Matemática, na qual os conceitos poderiam ser discutidos de forma prática a partir de situações potencialmente problemáticas. Entretanto, nem sempre as questões propostas no Ensino Básico eram desafiadoras. Durante uma parte do Ensino Médio, lembro-me que era comum realizarmos atividades repetitivas ou que exigiam simplesmente a aplicação de regras decoradas, o que me frustrava, já que não me sentia desafiado. Recordo-me claramente de listas intermináveis de fórmulas de Geometria Plana e Espacial, entregues prontas e sem nenhuma justificativa para suas deduções. Elas eram utilizadas para resolver questões que não exigiam nenhum esforço intelectual além do seguimento de algoritmos, como calcular o volume de um cilindro ou a área de um hexágono regular.

Como as partes mais fascinantes da Matemática, para mim, estavam quase sempre relacionadas à resolução de diferentes tipos de problemas, e o ensino regular não estava tendo uma participação satisfatória nessas descobertas, busquei conhecimentos e desafios novos fora da escola, especialmente estudando para o vestibular. A decorrência disso, em união com um gosto pelo ensino, foi a decisão de cursar Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Pensei que seria uma oportunidade de tornar-me um profissional que pudesse fazer a diferença e desafiar os meus alunos, de modo a desenvolver novos conhecimentos e prepará-los para as situações difíceis que estariam esperando-os fora dos portões da escola.

A minha busca por formas mais desafiadoras de ensinar Matemática acabou me levando a participar de uma oficina sobre Resolução de Problemas[2] (RP) durante o meu segundo semestre da graduação, organizada pela Prof.ª Débora Soares e ministrada pela Prof.ª Rejane Schuwartz Faria. Além de permitir um momento em que nós, participantes, em pequenos grupos, solucionássemos problemas propostos, houve uma exposição teórica sobre as ideias de George Polya em relação à RP.

Nessa oficina, aprendi que a resolução de problemas em sala de aula não precisa ser reduzida à simples apresentação, resolução e correção de diferentes questões, mas sim que existe uma grande área de pesquisa que discute como conduzir os

---

[1] A primeira parte da Introdução será escrita usando a primeira pessoa do singular, pois trata da própria história do pesquisador e das suas inquietações pessoais.

[2] Nesta dissertação, diferenciaremos Resolução de Problemas (RP) e resolução de problemas (rp), sendo a primeira entendida enquanto campo de estudo e a segunda como o ato de resolver problemas.

alunos nesse processo para que eles aprendam Matemática enquanto resolvem problemas de maneira autônoma, exercitando a sua criatividade e tendo o professor como um mediador cuja função é mais perguntar do que responder. Desde aquele momento, comecei a sentir-me inquieto e perguntar-me por que, embora seja comum que os professores resolvam questões com os seus alunos, abordagens utilizando resolução de problemas não estavam sendo objeto de reflexão profunda no curso de Licenciatura em Matemática.

Alguns anos depois, li A Arte de Resolver Problemas (POLYA, 2006)[3] e interesseime mais ainda pela área. Isso confirmou-se quando comecei a trabalhar em um curso preparatório para concursos de colégios militares, e precisei resolver questões propostas em tais avaliações com os meus alunos cotidianamente. A partir das minhas experiências, comecei a questionar-me se não haveria formas de facilitar o aprendizado dos discentes por meio da resolução de problemas matemáticos, e iniciei uma leitura com mais afinco da literatura sobre a área. Assim, pude aprender a ouvir as estratégias dos meus alunos mais do que sugerir as minhas próprias, a questioná-los para que conseguissem chegar às soluções com mais autonomia e a justificar por que determinadas estratégias eram úteis para resolver certos tipos de problema.

Ao ingressar no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS, meu objetivo inicial era discutir aspectos da Resolução de Problemas com alunos do Ensino Médio. Entretanto, após um semestre de leituras, conversas e ponderações, decidi que seria mais interessante trabalhar diretamente com o curso de Licenciatura em Matemática. A mudança de rota ocorreu porque refleti sobre a necessidade de valorizar a discussão acerca da Resolução de Problemas durante a graduação para contribuir com o preparo dos futuros professores para a sala de aula, como já relatado. Além disso, refletir sobre aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas com licenciandos poderia gerar um impacto mais significativo na Educação, já que cada um dos envolvidos com a pesquisa poderia utilizar abordagens dessa área com diversos alunos em sua trajetória docente.

A importância de resolver problemas e a discussão sobre aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas – tanto na Escola Básica quanto na formação inicial de professores – são destacadas em diversos documentos, artigos e trabalhos acadêmicos. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que apresenta o que se espera que seja trabalhado durante a Educação Básica no Brasil, podemos observar que algumas das competências específicas do componente curricular Matemática do Ensino Fundamental ressaltam a necessidade de se trabalhar com resolução de problemas. A primeira delas elenca a importância de:

[3]Quando utilizarmos citações de Polya (2006), estaremos nos referindo à edição publicada em português no ano de 2006, embora a obra original date de 1945.

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 267).

A competência supracitada traz a ideia de que o desenvolvimento da Matemática é uma consequência de necessidades e preocupações dos diferentes povos e culturas ao longo da história. Em outras palavras, o problema pode ser visto como uma possível causa para o aperfeiçoamento de conceitos e procedimentos matemáticos já existentes, a fim de aplicá-los de forma cada vez mais eficaz. Além disso, a resolução de problemas também pode levar ao desenvolvimento de novos campos de estudo, definições, teoremas e algoritmos. O texto também destaca a importância da Matemática na resolução de problemas de outras ciências, relacionados a diferentes tecnologias e ao mundo do trabalho. Isto é, vemos que trabalhar com resolução de problemas em sala de aula pode dar suporte a diferentes áreas do conhecimento e situações cotidianas, mostrando aos alunos a aplicabilidade da Matemática em diversos campos, inclusive da sua própria realidade.

A competência específica 5 confirma o que já foi dito, valorizando o uso de tecnologias digitais para auxiliar na resolução de diferentes problemas:

> Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados (BRASIL, 2018, p. 267).

Outra competência específica que merece destaque é a sexta, que ressalta que os problemas não precisam ser reduzidos a simples aplicações da Matemática:

> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (BRASIL, 2018, p. 267).

Com a competência de número 6, complementamos as ideias de aplicabilidade da Matemática na realidade descritas nas competências 1 e 5, entendendo que o problema não tem apenas esse fim. Sua utilização também está relacionada com o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos estudantes, sua capacidade de argumentar e apresentar conclusões de modo adequado, utilizando uma variedade de linguagens, matemáticas ou não. Isso pode ser desenvolvido a partir de problemas da Matemática Pura, mesmo que, em alguns casos, possa parecer que não existe conexão entre determinados conceitos matemáticos estudados e problemas práticos do cotidiano.

Por fim, a oitava e última competência específica traz a resolução de problemas como forma de socialização no ambiente escolar:

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2018, p. 267).

Vemos que esta competência indica que resolver problemas nem sempre é um ato isolado. Pensando em problemas do mundo do trabalho, como descritos na competência específica 1, entendemos que pode ser necessária a colaboração entre membros de uma equipe para resolver determinado problema, o que exige a capacidade de ouvir os seus colegas, argumentar, organizar as informações e chegar a uma decisão a partir de opiniões diversas. Assim, é importante que os professores de Matemática desenvolvam estratégias de ensino para que os alunos trabalhem em grupos, criando um ambiente de discussão em que um contribua com as ideias do outro, aperfeiçoando suas resoluções e refletindo sobre diferentes planos de resolução.

Em relação ao Ensino Médio, duas das cinco competências específicas do componente curricular Matemática falam sobre resolução de problemas. Em particular, a competência específica 3 ressalta:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 531).

Observamos também a menção à resolução de problemas na quarta competência específica: "Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas" (BRASIL, 2018, p. 531).

Assim, a BNCC dá suporte e incentiva abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas nas aulas de Matemática desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, com diferentes objetivos e utilizando várias ferramentas. Ressaltamos ainda que diversas das habilidades trazidas no documento relativas à Matemática falam da importância dos alunos elaborarem problemas envolvendo uma multiplicidade de conceitos, com o objetivo de enxergar o que aconteceria se algum dado fosse alterado em problemas já conhecidos e resolvidos (BRASIL, 2018).

Embora haja diversas menções no documento acerca da resolução de problemas, particularmente no componente curricular de Matemática, não encontramos uma formalização do seu conceito. Em vez disso, alguns trechos nos permitem intuir qual a concepção trazida pela BNCC acerca do que seria um problema:

> No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação (BRASIL, 2018, p. 535).

Esse trecho do documento nos mostra que “problema”, para a BNCC, pode ser considerado simplesmente uma tarefa que envolva a execução de determinado algoritmo já trabalhado em aula. Esse tipo de atividade tem sua importância, como veremos no Capítulo 3, mas a resolução de “problemas” no ensino de Matemática não deve se reduzir à aplicação de algoritmos, com o risco de comprometer o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes (SCHROEDER; LESTER, 1989; POLYA, 2006; VAN DE WALLE, 2009). De fato, o trecho seguinte do documento valoriza a criatividade dos alunos e o seu próprio raciocínio, sem se apoiar completamente em algoritmos já conhecidos para resolver problemas:

> Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco (BRASIL, 2018, p. 535-536).

Como já defendido por Allevato (2005), desenvolver esse tipo de atividade demanda mais tempo dos professores, já que pressupomos que o aluno terá mais autonomia e precisará de um tempo maior para pensar, testar ideias, discutir com o seu grupo etc. Questionamos, baseado nisso, se a quantidade de objetos de conhecimento e habilidades presentes na BNCC dão suporte a abordagens como essa.

O 6.º ano do Ensino Fundamental, por exemplo, reúne 27 objetos de conhecimento que se desdobram em 34 habilidades. Supondo um ano com 40 semanas letivas, um docente teria, em média, pouco mais de uma semana para trabalhar cada uma das habilidades, sem contar o tempo reservado para feriados, avaliações e atividades especiais da escola. Consideramos ainda que tais estudantes, no primeiro dos Anos Finais do Ensino Fundamental, precisam de um tempo maior para organizarem-se, focarem nas atividades propostas e praticarem diferentes algoritmos que serão utilizados durante toda a Educação Básica. Assim, retomamos o nosso questionamento: será que um professor do sexto ano, por exemplo, conseguirá trabalhar todos os objetos do conhecimento e habilidades que a BNCC propõe (que seriam a “base”, como sugere o nome “Base Nacional Comum Curricular”) e ainda terá tempo para desafiar os alunos com problemas que exigem um nível de criatividade e pensamento matemático que superam a simples aplicação de algoritmos?

A BNC-Formação, documento que estrutura as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial de professores, afirma que um dos fundamentos pedagógicos de cursos com tal objetivo deve ser:

> O compromisso com as metodologias inovadoras e com outras dinâmicas formativas que propiciem ao futuro professor aprendizagens significativas e contextualizadas em uma abordagem didático-metodológica alinhada com a BNCC, visando ao desenvolvimento da autonomia, da capacidade de resolução de problemas, dos processos investigativos e criativos, do exercício do trabalho coletivo e interdisciplinar, da análise dos desafios da vida cotidiana e em sociedade e das possibilidades de suas soluções práticas (BRASIL, 2020, p. 5).

Portanto, a capacidade de resolver problemas deve ser desenvolvida durante a formação inicial de professores, independentemente da sua área de atuação. Tratando especificamente da Matemática, como veremos na Seção 3.3.2, isso não significa que o docente consiga conduzir os alunos em um processo de descoberta e desenvolvimento do pensamento matemático utilizando resolução de problemas. Entretanto, também há uma habilidade relativa à dimensão do engajamento profissional que traz a importância de "Construir um ambiente de aprendizagem que incentive os estudantes a solucionar problemas, tomar decisões, aprender durante toda a vida e colaborar para uma sociedade em constante mudança" (BRASIL, 2020, p. 19).

Com um número considerável de menções à resolução de problemas na BNCC e a necessidade do seu incentivo na escola trazida pela BNC-Formação, entendemos que é importante discutir aspectos teóricos, práticos e pedagógicos acerca da RP nos cursos de Licenciatura em Matemática, visando uma reflexão profunda sobre o assunto e buscando preparar os licenciandos para desenvolverem práticas pedagógicas envolvendo resolução de problemas, incentivadas e comuns nos ambientes escolares.

Dito isso e focando o nosso olhar para o curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, no qual foi desenvolvida a prática desta pesquisa, o seu Projeto Pedagógico de Curso não faz menção à Resolução de Problemas, com exceção à sumula da disciplina de Ensino e Aprendizagem de Estatística, na qual consta o "ensino centrado em dados e a resolução de problemas" (UFRGS, 2018, p. 53). Entendemos, todavia, que o projeto possa ter sido alterado desde então, e que a falta de menções explícitas à Resolução de Problemas não implica a inexistência de discussões sobre esse assunto, mesmo que possa induzir a ideia de que elas talvez sejam conduzidas de maneira tangencial. É necessário, portanto, um estudo mais aprofundado e direcionado para compreender de que forma essas reflexões são propostas no curso de licenciatura em Matemática da UFRGS. Além disso, compreendemos que o contato com a resolução de problemas também pode ser feito durante as disciplinas de Matemática Pura, o que não exclui a necessidade de se refletir sobre ela de um ponto de vista pedagógico.

Dados os diversos benefícios de se refletir sobre a Resolução de Problemas na formação inicial e continuada de professores de Matemática, corroborada em múltiplos trabalhos acadêmicos (ALLEVATO, 2005; AZEVEDO, 2014; CAVALHEIRO, 2017; COSTA, 2012; FIGUEIREDO, 2017; HUANCA, 2014; JUSTULIN, 2014; MAGNI, 2017; MOÇO, 2013; PROENÇA, 2012), esperamos, com esta pesquisa, contribuir com o aprendizado e a reflexão de alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS a partir da construção de um ambiente de discussão sobre RP. Embora alguns estudantes tenham lido sobre Resolução de Problemas na universidade, entendemos que, por não estar mencionada no Projeto Pedagógico de Curso ou nas súmulas das disciplinas, as discussões sobre esse tema não necessariamente foram aprofundadas, e por isso gostaríamos de propor reflexões mais detalhadas aos estudantes.

Inseridos nesse meio e inspirados por tais inquietações e reflexões, trabalhamos de modo a buscar respostas para a seguinte pergunta diretriz: **Quais são as concepções construídas por licenciandos em Matemática acerca da Resolução de Problemas e dos seus aspectos pedagógicos?** Para tanto, partimos de outros trabalhos que tratam de discussões sobre RP na formação de (futuros) professores[4] de Matemática, que constituem a Revisão de Literatura desta pesquisa, descrita no Capítulo 2. A partir dessa análise, complementamos a justificativa de relevância da presente dissertação para o Ensino de Matemática.

No Capítulo 3, discorremos sobre a Resolução de Problemas, tratando do conceito de problema e de algumas abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas. Também discutimos possíveis ações do professor em tais abordagens, buscando diferenciar o ato de resolver problemas dos aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas. Por fim, apresentamos formas de desenvolver conexões mentais por meio da resolução de problemas e das ações docentes discutidas.

Esse estudo teórico fundamentou a prática que gerou dados para a pesquisa relatada nesta dissertação, descritos no Capítulo 4. Nele, apresentamos o curso de extensão que foi desenvolvido com alunos de Licenciatura em Matemática da UFRGS, para refletirmos sobre aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas, buscando responder a nossa pergunta de pesquisa. A partir desses dados, realizamos um processo de organização e categorização no Capítulo 5, com o objetivo de facilitar a análise e a obtenção de conclusões, que foram resumidas no Capítulo 6.

[4]Utilizamos o termo “(futuros) professores” pois estamos nos referindo a graduados e licenciandos. Ademais, entendemos que mesmo licenciandos podem exercer a docência de alguma maneira.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Para justificar e auxiliar na construção desta pesquisa, foi realizada uma seleção de trabalhos acadêmicos no Catálogo de Teses e Dissertações[1] da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), no dia 17 de novembro de 2021, utilizando os seguintes termos de pesquisa: "resolução de problemas" *and* "professores" *and* "matemática". Delimitamos os filtros de pesquisa[2] para analisar somente os resultados:

- Que fossem pesquisas de mestrado ou doutorado acadêmico;
- Que tivessem sido concluídas entre 2012 e 2021 (até a data da pesquisa)[3];
- Cuja grande área do conhecimento fosse "ciências humanas" ou "multidisciplinar";
- E, por fim, cuja área do conhecimento fosse "ensino de ciências e matemática", "ensino" ou "ensino-aprendizagem".

Assim, obtivemos 7996 resultados. Analisamos o título e o resumo disponibilizado pela CAPES dos 100 primeiros trabalhos[4], e selecionamos aqueles que aparentavam trazer uma discussão sobre Resolução de Problemas com professores (ou licenciandos) que ensinam (ou ensinariam) Matemática, obtendo assim, 18 resultados. Em uma última filtragem, revisamos o resumo de cada trabalho e, caso considerado necessário, analisamos a introdução, a produção de dados e/ou as considerações finais. Selecionamos, a partir disso, os trabalhos que:

- Incluíam apenas professores (ou licenciandos) que ensinavam (ou ensinariam) Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental ou para o Ensino Médio;
- Realizavam sua prática com um grupo de professores (ou licenciandos);
- E discutiam a Resolução de Problemas de forma abrangente, isto é, não limitada

[1]https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/.
[2]Os termos de pesquisa e os filtros foram delimitados a partir de diversos testes, bem como por meio de uma comparação com os filtros de Costa (2012), que tratava de um tema semelhante ao nosso. Todavia, tal trabalho foi excluído da nossa revisão por tratar especificamente de proporcionalidade, o que não faz parte dos critérios que estabeleceremos a seguir.
[3]Entendemos que esse filtro temporal não contempla todos os trabalhos nessas condições, uma vez que as dissertações e teses não são imediatamente incluídas no sistema da CAPES.
[4]Escolhemos proceder dessa forma por acreditarmos que os trabalhos com melhor correspondência aos termos da nossa pesquisa seriam os primeiros a serem apresentados. Além disso, como os últimos elementos dessa lista de 100 trabalhos não estavam satisfazendo os critérios de seleção, não achamos necessário analisar os trabalhos seguintes.

a apenas uma área ou conteúdo específico de Matemática.

Com isso, obtivemos 8 trabalhos, que constituem a Revisão de Literatura desta dissertação: Huanca (2014), Azevedo (2014), Justulin (2014), Moço (2013), Magni (2017), Cavalheiro (2017), Figueiredo (2017) e Proença (2012)[5]. O Quadro 1[6] traz algumas informações básicas sobre tais trabalhos.

Quadro 1 – Trabalhos presentes na Revisão de Literatura

Autor(a)	Ano	Tipo	Orientador(a)	Instituição
Roger Huanca	2014	Tese	Lourdes Onuchic	UNESP
Elizabeth de Azevedo	2014	Tese	Lourdes Onuchic	UNESP
Andresa Justulin	2014	Tese	Lourdes Onuchic	UNESP
Priscila Moço	2013	Dissertação	Celiane Machado	FURG
Rosana Magni	2017	Tese	Nielce da Costa	Anhanguera
Gabriela Cavalheiro	2017	Tese	Renata Meneghetti	UNESP
Fabiane Figueiredo	2017	Tese	Claudia Groenwald	ULBRA
Marcelo de Proença	2012	Tese	Nelson Pirola	UNESP

Fonte: Elaborado pelo autor.

Notamos que, dentre os oito trabalhos analisados, apenas Moço (2013) se trata de uma dissertação de mestrado, sendo os outros classificados como teses de doutorado. Em relação aos locais de publicação, os trabalhos recentes no Brasil que discutem a RP na formação de (futuros) professores de Matemática se concentram nos estados de São Paulo (6 trabalhos) e Rio Grande do Sul (2 trabalhos). Dentre os trabalhos do estado do Rio Grande do Sul, um é de uma universidade federal, e outro de uma universidade particular. Para compreendermos melhor cada um dos trabalhos, organizamos suas perguntas de pesquisa no Quadro 2.

[5]A ordem dos autores preserva a ordem que eles apareceram no sistema da CAPES.

[6]Legenda: Universidade Estadual Paulista (UNESP), Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Universidade Luterana do Brasil (ULBRA).

Quadro 2 – Perguntas de pesquisa dos trabalhos

Trabalho	Pergunta de Pesquisa
Huanca (2014)	Quais as contribuições, na ação da formação de um "Multiplicador", formado para atuar junto a professores de Matemática da Educação Básica da região do Cariri Paraibano, teria o trabalho realizado com um grupo colaborativo de professores utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?
Azevedo (2014)	Como preparar o futuro professor de Matemática, da UFMT - Campus de Sinop, para a construção do conhecimento matemático necessário a um professor de Matemática do Ensino Básico?
Justulin (2014)	Que aprendizagens profissionais docentes se manifestam em um grupo de estudo apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?
Moço (2013)	Quais as compreensões de acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática com relação à resolução de problemas enquanto estratégia metodológica?
Magni (2017)	Quais são as características do caminho de um Grupo de professoras de Matemática que podem favorecer o processo de Desenvolvimento Profissional Docente?
Cavalheiro (2017)	Quais as contribuições, para licenciandos em Matemática, de um processo de intervenção formativa que envolve teoria, prática e análise da RP e da IM [Investigação Matemática] como metodologias de ensino e aprendizagem de Matemática? Segundo esses sujeitos, quais as potencialidades e as dificuldades didático-pedagógicas no uso em sala de aula das metodologias em questão? Eles preferem alguma dessas metodologias ao utilizá-las na prática? Por quê?
Figueiredo (2017)	Como se apresenta o processo de *Design* de problemas com a utilização das Tecnologias Digitais na formação inicial de professores de Matemática?
Proença (2012)	Uma intervenção, baseada em um Curso sobre Resolução de Problemas e em regências de aula, favorece a formação do futuro professor de Matemática para o ensino-aprendizagem de Matemática escolar por meio da resolução de problemas? Quais as possibilidades e limites para a implementação do trabalho com a resolução de problemas nas regências de aula do estágio curricular supervisionado pelos futuros professores de Matemática?

Fonte: Huanca (2014), Azevedo (2014), Justulin (2014), Moço (2013), Magni (2017), Cavalheiro (2017), Figueiredo (2017) e Proença (2012).

Huanca (2014) conduziu encontros com um grupo de estudos formado por professores de escolas públicas do Cariri Paraibano para discutir o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nesta metodologia, "o problema é um ponto de partida e os professores, através da resolução do problema, devem fazer conexões com outras ciências e entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos" (HUANCA, 2014, p. 95). O objetivo do pesquisador era que os participantes se tornassem "multiplicadores", isto é, incentivassem outros professores a utilizar a metodologia discutida e praticada nos encontros. Com a constituição do grupo de estudos, o autor percebeu que o objetivo foi atingido, e a troca de ideias entre os participantes teve um impacto na formação continuada dos docentes e nas suas práticas em sala de aula, como relatado pelos próprios professores.

Azevedo (2014) realizou dois projetos, um na disciplina de Tendências em Educação Matemática II e outro em Seminário de Práticas Educativas VI do Curso de Licenciatura em Ciências da Natureza e Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT – Campus Sinop), direcionados a estudantes do 6.º semestre. Tais projetos utilizavam a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas: no primeiro, os licenciandos se dedicaram a estudar sobre Resolução de Problemas a partir da metodologia em questão, resolver problemas trazidos pela pesquisadora e discutir aspectos importantes relacionados a eles; no segundo, os alunos deveriam pesquisar formas de aplicar tal metodologia em sala de aula e apresentar seminários com propostas didáticas para o restante da turma. A pesquisadora verificou que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é um recurso potente para preparar o (futuro) professor de Matemática naquela realidade, ressaltando que seria interessante o seu uso desde os primeiros semestres da graduação.

Justulin (2014) constituiu dois grupos de estudo apoiados na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas: o primeiro era formado por professores de Matemática de uma escola estadual; o segundo, por licenciandos em Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP – Campus Rio Claro). Em ambos os grupos, os participantes escolheram quais conteúdos da Educação Básica seriam trabalhados e discutidos durante os encontros, dependendo do que eles experienciavam como sendo as maiores dificuldades dos alunos que tiveram contato. A autora evidencia algumas aprendizagens que foram observadas nos grupos de estudos:

> Para a formação inicial pode-se notar a presença de: uma reflexão sobre o que seria uma boa aula e um bom trabalho do professor de Matemática; a experiência, de um futuro trabalho em sala de aula com uma nova proposta metodológica, exigindo um trabalho diferenciado por parte do professor; o

> compartilhamento de saberes e experiências; e a reflexão sobre o currículo de Matemática na Educação Básica. [...] Na formação continuada houve: compartilhamento de experiências; reflexão sobre suas práticas; busca de soluções para um melhor trabalho com os alunos; discussão e reflexão sobre conteúdos matemáticos; apoio entre os professores de uma mesma área; rompimento da ênfase na técnica operatória matemática em direção a uma forma de ensino que busca a compreensão das ideias matemáticas (JUSTULIN, 2014, p. 234-235).

Moço (2013) realizou uma oficina pedagógica com licenciandos da Universidade Federal do Rio Grande (FURG) participantes do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), com o objetivo de verificar quais eram as concepções dos estudantes sobre Resolução de Problemas. Foi feita a Análise Textual Discursiva das produções dos alunos (questionários e relatos de experiência após aplicação de propostas dos participantes em sala de aula), cuja finalidade é "chegar à elaboração de textos descritivos e interpretativos, discutindo os assuntos que visam proporcionar a compreensão do pesquisador em relação aos fenômenos que investiga" (MOÇO, 2013, p. 55). A professora ressalta a importância do compartilhamento de experiências e de ideias no grupo de licenciandos, não apenas em relação aos conteúdos matemáticos, mas também às atitudes dos participantes em sala de aula. Os licenciandos destacaram, em seus relatos, a preocupação em realizar toda a atividade prevista no tempo disponível, bem como a necessidade de o professor estar aberto para enfrentar imprevistos, dependendo do perfil da turma em que se aplica determinada proposta.

Magni (2017) construiu um grupo de estudos denominado Constelações, composto por duas pesquisadoras da universidade e cinco professoras de Matemática, a partir do qual foi analisado o Desenvolvimento Profissional Docente das participantes, que a autora define como

> um processo constante que legitima a necessidade do professor, ao longo do exercício da sua profissão, de aprofundar e adquirir conhecimentos sobre temas inerentes à docência, como conhecer o ambiente escolar que leciona[,] propor e avaliar projetos na escola, desenvolver metodologias diferenciadas para ministrar aulas, conhecer teorias e técnicas relativas à transmissão do conhecimento (MAGNI, 2017, p. 73-74).

No grupo Constelações, o tema central de discussão era a Resolução de Problemas, e as participantes construíram o conhecimento juntamente com as investigadoras, assumindo os papéis de aprendizes, docentes, formadoras e pesquisadoras. A autora relatou a evolução na formação profissional das participantes, a reflexão sobre a prática docente, bem como a mudança na sua forma de conduzir as aulas. Em um clima de confiança e respeito mútuo, as professoras desconstruíram determinadas crenças acerca da Resolução de Problemas e de alguns conteúdos de Matemática da Educação Básica.

Cavalheiro (2017) realizou um processo de intervenção formativa em uma disciplina de um curso de Licenciatura em Matemática, vinculada ao estágio supervisionado. Foram discutidos aspectos relativos à Resolução de Problemas e à Investigação Matemática (IM), e a partir disso os licenciandos elaboraram e aplicaram propostas didáticas no estágio supervisionado. A pesquisadora utilizou a Análise Textual Discursiva nos dados produzidos, concluindo que

> o processo de intervenção formativa permitiu aos futuros professores: a) ampliar seus conhecimentos prévios e construir novos, b) investigar sua própria prática docente, c) contrastar uma metodologia com a outra, d) refletir na e sobre a ação docente, e e) relacionar teoria e prática. Além disso, esses sujeitos apontaram potencialidades e dificuldades didático-pedagógicas próprias do uso da RP ou IM e também comuns à utilização de ambas as metodologias (CAVALHEIRO, 2017, p. 6).

Figueiredo (2017) realizou um curso de extensão para licenciandos em Matemática, que tratava do *design* de problemas matemáticos utilizando tecnologias digitais. Os participantes, em pequenos grupos, desenvolveram problemas com temáticas de relevância social, que foram avaliados pela professora e por outros grupos, e aplicados em aulas com estudantes da Educação Básica. A partir da análise dos resultados, a pesquisadora concluiu que o *design* de problemas matemáticos utilizando tecnologias digitais é um meio para reflexão sobre a prática docente, embora devam ser observadas algumas limitações, como a necessidade de conhecer o perfil dos estudantes, seus interesses e conhecimentos anteriores sobre ferramentas tecnológicas.

Proença (2012) realizou um curso sobre Resolução de Problemas e regência de aulas com quatro alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática. Durante o curso, os licenciandos resolveram problemas em duplas e discutiram aspectos teóricos da Resolução de Problemas. Os participantes evidenciaram inicialmente uma resistência em apresentar as suas resoluções na lousa, e isso foi observado nos primeiros cinco problemas. Nos momentos de discussão teórica, eles demonstraram uma participação ativa, questionando e fazendo conexões entre a teoria e os problemas resolvidos no curso. Em um segundo momento, foram elaboradas sequências didáticas para serem aplicadas nos seus estágios da Educação Básica. O autor ressalta que um dos participantes da pesquisa abandonou o uso da Resolução de Problemas desde a primeira aplicação, optando por um modelo tradicional. Ainda assim, o pesquisador conclui a intervenção auxiliou, de modo geral, na formação dos sujeitos para o ensino de Matemática utilizando resolução de problemas.

A partir das exposições feitas sobre os oito trabalhos selecionados, iremos estabelecer relações com a presente dissertação, tanto em aspectos que se interseccionam quanto em disjunções. Huanca (2014) realiza seu trabalho com professores de Matemática já em exercício, e trabalha especificamente com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que constituem pontos de divergência com esta pesquisa. Azevedo (2014) e Justulin (2014), embora trabalhem com a formação inicial de professores de Matemática, também focam na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Moço (2013) apresenta diversos pontos de semelhança com a presente dissertação: além de trabalhar com licenciandos em Matemática, busca compreender as suas concepções sobre a Resolução de Problemas e realiza o seu trabalho em uma universidade federal no Rio Grande do Sul. Entretanto, entendemos que o trabalho de Moço (2013) se debruçou mais sobre as aplicações práticas de atividades construídas pelos licenciandos participantes da oficina. Os aspectos teóricos discutidos com os (futuros) professores de Matemática foram: constituição histórica da Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem; caracterização e resolução de diferentes problemas; e passos de Polya como ferramenta para organizar a resolução de problemas. Acreditamos que o presente trabalho possa contribuir com as conclusões de Moço (2013) pelo nosso foco nas discussões teóricas, incluindo temas como as conexões na Resolução de Problemas e ações docentes relativas aos aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas.

Magni (2017) também apresenta pontos de disjunção com a presente dissertação, pois a autora constitui um grupo de estudos com professoras de Matemática já em exercício, e o trabalho é uma pesquisa-ação de cunho co-generativo, ou seja, visa

> solucionar problemas relacionados a determinados contextos, através de uma investigação democrática, na qual os pesquisadores dedicam-se a resolver uma determinada tarefa conjuntamente aos colaboradores, na busca e na aprovação de soluções para problemas de importância para ambos (MAGNI, 2017, p. 101).

Cavalheiro (2017) e Figueiredo (2017) também trabalham com licenciandos em Matemática. Entretanto, a primeira faz distinção entre a Resolução de Problemas e Investigação Matemática e a segunda foca no *design* de problemas.

Por fim, Proença (2012) também desenvolve um curso sobre Resolução de Problemas com licenciandos em Matemática, tendo um enfoque na prática, a partir da resolução de 28 problemas (tomando consciência das estratégias que foram utilizadas em cada um) e da aplicação de propostas didáticas no estágio curricular supervisionado. O próprio autor sugere modificações nesse aspecto para futuros trabalhos: “Outra situação que poderia ser repensada seria o formato do Curso sobre Resolução de Problemas. Poder-se-ia trabalhar com menos problemas. Poder-se-ia problematizar os aspectos teóricos discutidos” (PROENÇA, 2012, p. 185). Assim, vemos que a presente pesquisa também complementa o trabalho de Proença (2012), por dar mais atenção à teoria e às discussões que podem ser feitas, analisando as experiências e ações dos participantes sob a lente da literatura e buscando criar um ambiente de reflexão sobre a prática.

A partir das análises feitas, notamos que dentre os oito trabalhos lidos, seis englobam o estudo sobre Resolução de Problemas na licenciatura em Matemática. Entretanto, apenas dois deles discutem esse assunto de um modo geral, do mesmo modo que a presente dissertação. Acreditamos que contribuiremos com as pesquisas semelhantes a esta, complementando suas discussões e conclusões com o foco nos aspectos teóricos e pedagógicos da Resolução de Problemas, a busca da reflexão sobre a prática, as discussões sobre as conexões construídas ao resolver um problema e as ações docentes em abordagens de Resolução de Problemas, assuntos que não foram trabalhados nas duas pesquisas analisadas.

Além das pesquisas que fazem parte da nossa revisão de literatura, mencionamos ainda os trabalhos de Bicalho (2022) e Mendes (2023), sugeridos pela banca de qualificação desta dissertação. Acreditamos que seja relevante discutirmos teses de publicação recente, não contempladas pelo filtro temporal estabelecido.

Bicalho (2022), em sua tese de doutorado, procurou responder à seguinte pergunta de pesquisa: "Quais são as percepções e reflexões de futuros professores sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e suas implicações para a prática pedagógica?" (p. 89). A sua produção de dados se deu inicialmente por um questionário, formado por 15 perguntas, incluindo questões alternativas com solicitação de justificativas, respondido por 17 licenciandos do curso de Licenciatura em Matemática de um instituto federal em Minas Gerais. Nesse questionário, a autora buscou compreender as experiências dos discentes na sua formação básica e superior, especialmente acerca da Resolução de Problemas e da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Além disso, também havia perguntas que tratavam das concepções dos estudantes e das suas reflexões pessoais sobre os mesmos temas. Duas alunas desse grupo inicial aceitaram participar da fase seguinte, em que foram realizados 5 encontros de 2 horas cada para aprofundamento no tema Resolução de Problemas e, de modo particular, na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a partir de textos pré-selecionados. Por fim, cada uma das duas participantes, com o auxílio da professora-pesquisadora, desenvolveu quatro planos de aula para o 9.º ano do Ensino Fundamental, envolvendo a metodologia em questão. A análise dos dados foi feita por meio da Análise Textual Discursiva.

Em suas considerações finais, Bicalho (2022) afirma que as participantes da pesquisa concluíram que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tem potencial para desenvolver diversas competências necessárias para o tempo em que vivemos, como a capacidade de argumentação, colaboração e discussão. Elas defenderam, a partir de suas concepções, que tal prática não é habitual, e alguns de seus aspectos foram considerados inovadores: a avaliação formativa, as interações em sala de aula, o problema como ponto de partida e a elaboração de problemas pelos próprios discentes. A autora defende, em consonância com as discussões e reflexões da sua pesquisa, que o curso de Licenciatura em Matemática não deve separar a teoria da prática, e os conhecimentos de Matemática devem ser pensados também a partir de metodologias de ensino-aprendizagem:

> A aprendizagem da docência que acontece na graduação deve ser repleta de oportunidades para que o discente compreenda e assimile os conhecimentos necessários para ensinar. É um momento fundamental para levar o futuro professor à reflexão sobre o que ensinar, como ensinar e por que ensinar, ou seja, é nesta ocasião que se constrói os conhecimentos necessários para ensinar, além do conteúdo a ser ensinado (BICALHO, 2022, p. 184).

Na tese de Mendes (2023), o autor realizou um curso de formação sobre Resolução de Problemas, constituído por 13 aulas de 1h40min cada, durante a disciplina de Estágio Curricular Supervisionado I, do quinto semestre do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do norte do estado do Paraná. Participaram 13 licenciandos, e os dados foram produzidos a partir de questionários, entrevistas, gravações das aulas e produção de sequências didáticas. Os temas dos encontros foram desde o conceito de problema até as etapas e estratégias de resolução de um problema, o Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas e a construção de sequências didáticas e apresentação de aulas simuladas envolvendo resolução de problemas. A pergunta que norteou a pesquisa foi: “Que aspectos emergem de uma formação oferecida a futuros professores de Matemática sobre o Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas?” (MENDES, 2023, p. 20).

Mendes (2023) sintetiza as conclusões do seu estudo:

> Dentre uma gama de resultados obtidos, podemos sumarizar como os principais que os licenciandos, inicialmente, não possuíam compreensões adequadas sobre: como trabalhar com a resolução de problemas, sobre o que é um problema matemático, etapas de resolução de problemas e conhecimentos matemáticos. Apenas possuíam um conhecimento parcial sobre o que é um exercício e alguns tipos de estratégias de resolução de problemas. Quanto ao EAMvRP [Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas], os licenciandos puderam compreender os vários papéis que o professor necessita realizar, bem como os dos alunos. As principais dificuldades estiveram presentes principalmente na ação de escolha do problema, como na escolha de situações de matemáticas para serem trabalhadas. Entre as potencialidades do EAMvRP identificadas pelos licenciandos, estão que ele favoreceu o trabalho em grupo, proporcionou um processo reflexivo/construtivo, fomentou a autonomia, permitiu a troca de conhecimentos e oportunizou o aprendizado com mais significado. (MENDES, 2023, p. 7).

Em relação às teses de Bicalho (2022) e Mendes (2023), embora ambas também tenham como sujeitos de pesquisa licenciandos em Matemática e contemplem as concepções dos participantes, ressaltamos que elas têm foco em abordagens específicas, a saber, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e o Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução de Problemas. Desse modo, defendemos que a presente dissertação pode contribuir com tais pesquisas ao investigar as concepções de licenciandos em Matemática acerca da Resolução de Problemas e dos seus aspectos pedagógicos de um modo mais geral, além de enriquecer o arcabouço de conhecimentos presentes na literatura sobre esse tema, juntamente com os outros trabalhos pertencentes a esta revisão.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, buscamos entender o que é um problema, de que formas podemos trabalhar com diferentes abordagens envolvendo resolução de problemas nas aulas de Matemática, possíveis ações do professor em tais abordagens e como essas ações favorecem o desenvolvimento de conexões mentais e, por consequência, a compreensão dos estudantes.

3.1 O QUE É UM PROBLEMA?

O estudo e o desenvolvimento da Matemática estiveram sempre associados à resolução de problemas dos mais variados tipos, e podemos observar diversas perguntas que acabaram mobilizando matemáticos ao longo da história. Como um pastor saberá se todas as suas ovelhas voltaram do pasto? É possível trisseccionar qualquer ângulo utilizando apenas régua e compasso? Qual é o menor número de cores necessárias para pintar um mapa qualquer? Existe uma fórmula que determine todas as raízes de um polinômio genérico de quinto grau? De fato:

> A História da Matemática está repleta de exemplos da força motivadora que alguns problemas podem ter, de modo que podemos afirmar: a Matemática não é infalível ou inquestionável; não está pronta e totalmente estruturada. Ela se desenvolve pela prática da crítica e da dúvida e move-se a partir de conhecimentos anteriores, em busca de novos conhecimentos necessários à solução de novos ou antigos, mas não resolvidos, problemas (ALLEVATO, 2005, p. 38).

A partir disso, vemos que, enquanto existe a Matemática, há também a associação dessa área do saber à resolução de problemas. Todavia, embora a humanidade já estivesse familiarizada com diferentes questionamentos e buscas por respostas, a Resolução de Problemas só começou a ser visualizada como pesquisa a partir da década de 1960, impulsionada pelo livro de George Polya, A Arte de Resolver Problemas (do original *How to solve it*), lançado em 1945 (MORAIS; ONUCHIC, 2021).

Existem diferentes concepções sobre o que seria um problema em Matemática, e é possível que isso gere algumas ambiguidades, pois definições divergentes podem causar problemas de comunicação entre os pesquisadores e professores. Schoenfeld (1992) traz a ideia de uma dupla de conceitos utilizados para esse termo, a partir de uma consulta ao dicionário:

> *Definição 1*: "Em Matemática, qualquer coisa requerida a ser feita, ou que requer que algo seja feito".
> *Definição 2*: "Uma questão... que é desconcertante ou difícil"[1] (WEBSTER, 1979 apud SCHOENFELD, 1992, p. 337, tradução nossa, grifo do autor).

Iremos nos debruçar momentaneamente sobre a Definição 1[2] de Schoenfeld (1992). É uma visão que

> captura o sentido do termo *problema* como tem tradicionalmente sido usado, em instrução matemática. Por quase tanto tempo quanto nós temos registros escritos de Matemática, conjuntos de tarefas matemáticas têm estado conosco – como veículos de instrução, como meios de prática, e como parâmetros para aquisição de habilidades matemáticas[3] (SCHOENFELD, 1992, p. 337, tradução nossa, grifo do autor).

De fato, reparemos que a Definição 1 utiliza o verbo "requerer" (do original *require*). Duas interpretações possíveis para o verbo *to require* são: "precisar de alguma coisa ou tornar algo necessário" e "pedir ou demandar alguma coisa, ou pedir a alguém para fazer alguma coisa, especialmente por causa de uma regra ou lei"[4] (DICTIONARY, 2022, tradução nossa). Assim, a Definição 1 de Schoenfeld (1992), quando diz que o problema pode ser visto como "qualquer coisa requerida a ser feita", pode remeter tanto a uma necessidade quanto a um pedido ou uma obrigação externa. Isso realmente pode acontecer em sala de aula, mas Polya (2006) alerta sobre a importância de não deixarmos que os únicos questionamentos na escola sejam feitos pelo professor, mas de darmos espaço para os alunos exercitarem sua imaginação e criatividade:

> No ensino da Matemática, podem fazer-se necessários *problemas rotineiros*, até mesmo muitos deles, mas deixar que os alunos nada mais façam é indesculpável. O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém (POLYA, 2006, p. 142, grifo nosso).

Ainda nesta concepção de problema como tarefa a ser feita, vemos uma distinção entre problemas rotineiros e não-rotineiros, como elencado por Polya (2006) no trecho supracitado. Para o autor, um problema será rotineiro se "ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento, passo a passo, de um exemplo muito batido" (POLYA, 2006, p. 142).

[1] Definition 1*: "In mathematics, anything required to be done, or requiring the doing of something."* Definition 2*: "A question... that is perplexing or difficult."*

[2] Utilizaremos o termo "definição" quando estivermos nos referindo às duas possíveis concepções de problema apresentadas por Schoenfeld (1992). Escolhemos proceder dessa forma em respeito à terminologia utilizada pelo autor (no original, *definition*), embora acreditemos que o termo "concepção" seja mais apropriado.

[3] *Captures the sense of* problem *as it has traditionally been used, in mathematics instruction. For nearly as long as we have written records of mathematics, sets of mathematics tasks have been with us – as vehicles of instruction, as means of the practice, and as yardsticks for the acquisition of mathematical skills.*

[4] *To need something, or to make something necessary. To order or demand something, or to order someone to do something, esp. because of a rule or a law.*

Reparemos que o autor também advoga que os problemas rotineiros detêm sua importância, e outros pesquisadores concordam com essas ideias (CAI; LESTER, 2012; VAN DE WALLE, 2009). Entretanto, deve-se ter o cuidado para não tornar o ensino de Matemática centrado apenas na execução de algoritmos. Van de Walle (2009) defende que problemas rotineiros são apropriados quando: "(a) os conceitos desejados foram significativamente desenvolvidos, (b) foram desenvolvidos procedimentos flexíveis e úteis e (c) são necessárias velocidade e precisão" (VAN DE WALLE, 2009, p. 77).

Na Definição 2 trazida por Schoenfeld (1992), que envolve a ideia de desafio na resolução de problemas, atividades que são mera aplicação de algoritmos já conhecidos não são consideradas problemas, e sim exercícios. Os exercícios, nessa segunda definição, correspondem aos problemas rotineiros na anterior, e os problemas aos problemas não-rotineiros (Figura 1).

Figura 1 – Correspondências entre as definições de problema

Fonte: Elaborado pelo autor.

Embora haja distinção entre os possíveis conceitos de problema, observa-se que muitos autores têm uma preferência pela Definição 2 de Schoenfeld (1992). Para Cai e Lester (2012), problemas são "tarefas matemáticas que têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais que podem melhorar o desenvolvimento matemático dos alunos" (p. 148). Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (também conhecidos como *Standards 2000*), publicados pelo Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM), vemos que "a resolução de problemas implica o envolvimento numa tarefa, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente" (NCTM, 2008, p. 57).

English, Lesh e Fennewald (2008) afirmam que as pesquisas em Resolução de Problemas têm focado em conceituar problemas como "atividades que envolvem *ir dos* *dados para as metas quando o caminho não é óbvio*"[5] (p. 2, tradução nossa, grifo dos autores). Van de Walle (2009) define problema como sendo

> qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja nenhuma percepção por parte dos estudantes de que haja um método "correto" específico de resolução (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

Além do grau de desafio, também consideramos importante o grau de interesse do resolvedor para caracterizarmos uma atividade como problema, ainda não mencionado nos conceitos apresentados. Isso porque o "problema", no sentido estrito da palavra, nos remete a uma situação que causa inquietação no resolvedor, que pode ser desencadeada por uma necessidade ou por um gosto pessoal pelo desafio. Para nós, uma situação difícil, mas que é ignorada, não gera a inquietação necessária para reconhecermos que ela seja um problema para quem a ignora. Por isso, concordamos com o conceito de problema trazido por Onuchic e Allevato (2011), que afirmam que um problema é "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer" (p. 81). Para as autoras, mesmo que uma atividade seja difícil para determinado resolvedor, não necessariamente ela se caracterizará como um problema, pois depende de um interesse pessoal para receber tal classificação.

De fato, para um professor de Matemática, determinar o valor de x em equações como $2x + 1 = 5x - 5$ dificilmente será uma questão problemática; entretanto, para um aluno do 6.º ou 7.º ano do Ensino Fundamental, isso pode acabar se tornando desafiador. Também podemos pensar que, se tal aluno ignora a questão pois não tem interesse em resolvê-la, não é um problema para ele, tampouco. Assim, podemos concluir que, na concepção adotada, uma questão ser ou não um problema depende do resolvedor, de modo que, em uma mesma turma, podemos ter vários alunos para os quais uma situação é um problema, e tantos outros que a enxergam apenas como um simples exercício.

3.2 ABORDAGENS DE ENSINO ENVOLVENDO RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A partir da concepção de problema de Onuchic e Allevato (2011), podemos começar a pensar em diferentes abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas nas aulas de Matemática. Schroeder e Lester (1989), baseados em Hatfield (1978), elencam três formas de trabalharmos com resolução de problemas: *teaching* about *problem solving, teaching* for *problem solving* e *teaching* via *problem solving*. Iremos adotar, nesta dissertação, a terminologia escolhida por Allevato e Onuchic (2021): ensino *sobre* resolução de problemas, ensino de Matemática *para* a resolução de pro-

[5] *Activities that involve* getting from givens to goals when the path is not obvious.

blemas e ensino de Matemática *através* da resolução de problemas.

3.2.1 Ensinar sobre resolução de problemas

Schroeder e Lester (1989) conceituam ensinar sobre resolução de problemas como uma abordagem baseada ou adaptada das ideias de Polya (2006), em que

> estudantes são explicitamente ensinados sobre as fases que, de acordo com Polya, resolvedores de problemas especialistas usam quando resolvem problemas matemáticos, e são incentivados a se tornarem conscientes do seu próprio progresso através dessas fases ao resolverem problemas. Além disso, a eles é ensinado um número de "heurísticas", ou "estratégias", a partir das quais eles podem escolher ou devem utilizar ao planejar e executar seus planos de resolução[6] (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 32, tradução nossa).

As quatro fases de Polya (2006) para a resolução de um problema são a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução do plano e o retrospecto. A compreensão do problema é o primeiro passo para a resolução, e envolve entender quais são as partes do problema: dados, incógnita e condicionante (no caso de um problema de determinação) ou hipótese e tese (no caso de um problema matemático de demonstração)[7].

O estabelecimento de um plano é o conhecimento, de um modo geral, do que é necessário realizarmos para determinarmos a incógnita ou provarmos a veracidade da nossa tese. Existem diversas estratégias que podemos adotar para estabelecermos um plano, e o seu uso depende do tipo de problema que estamos trabalhando. Polya (2006) chama algumas dessas estratégias de heurísticas, que podem ser conceituadas da seguinte forma:

> A heurística pode ser considerada como a criação de métodos e regras para a elaboração de teorias e teoremas, e está baseada em métodos não-dedutivos, em oposição aos algoritmos, que providenciam fundamentações dedutivas para essas elaborações. A heurística também pode ser entendida como um caso especial do método de tentativa e erro, no qual os problemas são solucionados por meio de tentativas, até que uma solução adequada seja encontrada. Porém, quando a solução adequada for encontrada, ela necessita ser testada com o rigor do método científico para que a validade da resposta seja estabelecida (ROSA; OREY, 2009, p. 19).

Vejamos um exemplo: para calcularmos a altura h de um triângulo equilátero

[6] *Students are explicitly taught the phases that, according to Pólya, expert problem solvers use when solving mathematics problems, and they are encouraged to become aware of their own progression through these phases when they themselves solve problems. Additionally, they are taught a number of "heuristics," or "strategies," from which they can choose or which they should use in devising and carrying out their problem-solving plans.*

[7] "Nem todos os teoremas podem ser divididos naturalmente em hipótese e conclusão. Assim, é impossível dividir dessa maneira o teorema: 'Há uma infinidade de números inteiros'" (POLYA, 2006, p. 143).

de lado l, podemos usar a fórmula $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Entretanto, isso não é uma heurística, de acordo com o conceito adotado por Rosa e Orey (2009), pois não é um método genérico para auxiliar na resolução de uma gama de problemas distintos, mas sim um método prescritivo, ou seja, que sabemos exatamente quando usar.

Para maiores esclarecimentos do leitor sobre o que, de fato, são heurísticas, iremos mencionar brevemente algumas das elencadas por Polya (2006), apenas para fins de exemplificação: analogia, demonstração por absurdo, demonstração indireta, equacionamento, indução e regressão. Algumas delas são mais indicadas para problemas de determinação, enquanto outras para problemas de demonstração.

A analogia consiste em utilizarmos um problema auxiliar cuja estratégia de resolução pode ser generalizada ou adaptada para casos similares (como deduzir propriedades relativas a blocos retangulares a partir de ideias conhecidas sobre retângulos). A demonstração por absurdo é um artifício utilizado por matemáticos para provar implicações: "Provar por absurdo que $p(x) \Rightarrow q(x)$ consiste em mostrar que a 'mistura' da possibilidade de $p(x)$ ser verdadeira com a de $q(x)$ ser falsa produz um conflito; nos leva a um resultado sabidamente falso ou absurdo" (RIPOLL; RIPOLL; SILVEIRA, 2011, p. 43).

A demonstração indireta é também conhecida como demonstração por contraposição: "*Provar por contraposição* uma implicação $p(x) \Rightarrow q(x)$ consiste em provar de forma direta sua contrapositiva $\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$" (RIPOLL; RIPOLL; SILVEIRA, 2011, p. 45, grifo dos autores). O equacionamento consiste em traduzir a condicionante para a linguagem algébrica. O processo de indução trata de irmos de casos particulares para casos gerais, e o Princípio de Indução Matemática nos diz que se uma proposição $p(\alpha)$ vale para certo $\alpha \in \mathbb{N}$ e $p(k) \Rightarrow p(k+1) \forall k \in \mathbb{N}$ com $k \geq \alpha$, então $p(n)$ é verdadeira para todo n inteiro e maior ou igual a α (RIPOLL; RIPOLL; SILVEIRA, 2011). Por fim, a regressão é uma estratégia de partirmos da incógnita e buscarmos traçar um caminho até os dados, de modo que seja possível fazer o caminho inverso, a partir de equivalências, para resolver o problema.

Repare que as estratégias supracitadas não são prescritivas, ou seja, não sabemos previamente em quais casos elas serão aplicadas e em quais não serão. Por isso a ideia de Polya (2006) foi organizar um quadro com heurísticas, para que o estudante as testasse, uma a uma, buscando encontrar alguma que o ajudasse na resolução do problema. Nesse mesmo quadro, Polya (2006) inclui todos os passos de resolução e dicas específicas para cada passo.

Tendo selecionado a estratégia que podemos utilizar para resolver o problema, o próximo passo é executarmos o plano. Isso implica organizar cada passo e tornar a sua resolução clara e sem erros. Ressaltamos que o processo de ir da seleção da estratégia para sua execução não necessariamente acontece de forma linear, pois o resolvedor pode realizar diversas tentativas e reformulações até chegar em uma descrição final e organizada da estratégia. Kilpatrick (2017), para explicar isso, compara o ato de resolver problemas com um GPS que recalcula sua rota dependendo do caminho que escolhemos seguir.

Por fim, o último passo é o retrospecto, que consiste em verificar e aperfeiçoar a resolução, pensar em outras formas de resolver o problema ou criar, a partir dele, outro mais genérico ou similar. Nessas verificações é possível checar se a unidade de medida encontrada corresponde, de fato, aos cálculos que foram feitos, ou ainda se a resposta encontrada faz sentido no contexto em que está inserida (por exemplo, medidas que estão muito longe do que se esperava ou funções modeladas cujos pares $(x, f(x))$ não correspondem às situações previstas indicam um possível erro na estratégia ou na sua execução).

Entendendo o que significa ensinar sobre resolução de problemas, vejamos o que a literatura tem a dizer sobre esse assunto:

> Uma quantidade substancial de esforço tem ido para tentativas de descobrir quais estratégias os estudantes usam ao tentar resolver problemas matemáticos. [...] Nenhuma direção clara para a Educação Matemática é fornecida pelas descobertas desses estudos. De fato, existem indicações suficientes de que estratégias de resolução de problemas são específicas tanto do problema quanto do aluno, com frequência o suficiente para sugerir que procurar uma estratégia (ou algumas) que deveria ser ensinada para todos os estudantes (ou a maioria) são muito simplistas[8] (BEGLE, 1979 apud SCHOENFELD, 1992, p. 353, tradução nossa).

A partir da conclusão do autor, vemos que o professor precisa de flexibilidade ao ensinar sobre resolução de problemas, já que os alunos têm conhecimentos, habilidades e formas de pensar e aprender diferentes umas das outras, e por isso as estratégias que são naturais para um não surgem tão espontaneamente para os demais, que podem ter opção por outros caminhos, às vezes nem imaginados pelo docente. Além disso, pesquisas indicam que ao tentarmos ensinar uma lista de heurísticas no estilo-Polya para os alunos, elas acabam se tornando genéricas demais, dificultando o processo de entender quando aplicar cada uma. Entretanto, ao ensinarmos estratégias prescritivas, como algoritmos, acabamos por criar uma quantidade enorme de regras a serem memorizadas, dificultando ou negligenciando a compreensão dos estudantes sobre o que se faz, por que se faz e como isso se relaciona com outros aspectos da

[8] *A substantial amount of effort has gone into attempts to find out what strategies students use in attempting to solve mathematical problems. ...No clear-cut directions for mathematics education are provided by the findings of these studies. In fact, there are enough indications that problem solving strategies are both problem- and student-specific often enough to suggest that finding one (or few) strategies which should be taught to all (or most) students are far too simplistic.*

Matemática (ENGLISH; LESH; FENNEWALD, 2008).

Schroeder e Lester (1989) acrescentam que um foco excessivo em ensinar sobre resolução de problemas a torna apenas um adendo ao currículo. Em vez de ser um contexto no qual a Matemática é aprendida e aplicada, ocorre um isolamento do restante dos conteúdos. Nos vemos, então, num impasse: se ensinar estratégias descritivas ou prescritivas aos nossos alunos não tem se mostrado eficaz, de que outras formas podemos melhorar a capacidade dos estudantes de resolver problemas? Buscaremos desenvolver esses aspectos na subseção 3.3.2 e na seção 3.4.

3.2.2 Ensinar Matemática para resolver problemas

A segunda possibilidade trazida por Schroeder e Lester (1989) para abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas em sala de aula é ensinar Matemática para resolver problemas:

> Ao ensinar *para* resolver problemas, o professor se concentra nas maneiras pelas quais a Matemática sendo ensinada pode ser aplicada na solução tanto de problemas rotineiros quanto não-rotineiros. Embora a aquisição de conhecimento matemático seja de importância primária, o propósito essencial para aprender Matemática é ser capaz de utilizá-la[9] (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 32, grifo dos autores, tradução nossa).

Quando ensinamos Matemática para resolver problemas, na linguagem de Schroeder e Lester (1989), estamos falando em primeiramente adquirir o conhecimento para depois nos preocuparmos em aplicá-lo, seja em exercícios ou problemas. Sobre a utilização dessa abordagem na resolução de exercícios, Onuchic (2013) ressalta:

> Até uma época bastante recente, ensinar resolução de problemas significava apresentar problemas e, talvez, incluir uma técnica de resolução específica. Uma versão mais moderna do desenvolvimento de habilidades nos alunos em resolução de problemas, nos livros-texto, apresenta-se colorida, com desenhos, chamando a atenção para fatos da vida real, mas sempre com alguém resolvendo o problema e deixando-se uma lista com questões semelhantes para serem solucionadas (ONUCHIC, 2013, p. 94).

Entretanto, corremos alguns riscos se focarmos excessivamente em ensinar Matemática para resolver exercícios. Schroeder e Lester (1989) apontam que isso pode dificultar o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes, que apenas seguem regras, às vezes sem refletir sobre o seu uso. Isso pode se tornar tão naturalizado que, quando confrontados com um problema propriamente dito, como conceituamos anteriormente, se sintam perdidos e não saibam por onde começar, além de

[9] *In teaching* for *problem solving, the teacher concentrates on ways in which the mathematics being taught can be applied in the solution of both routine and nonroutine problems. Although the acquisition of mathematical knowledge is of primary importance, the essencial purpose for learning mathematics is to be able to use it.*

desenvolverem a crença de que todas as atividades em Matemática podem ser feitas rapidamente e sem esforço. Portanto, os exercícios devem ser dosados e utilizados apenas quando necessário, conforme já discutimos na seção 3.1.

Quando pensamos em resolver problemas após estudar algum conteúdo específico, podemos ter alguns proveitos ao desafiar os alunos intelectualmente, mas também há um cuidado a ser tomado: quando em excesso, essa visão “pode levar a configurar a resolução de problemas como uma atividade que os alunos só podem realizar após a introdução de um novo conceito, ou após o treino de alguma habilidade de cálculo ou de algum algoritmo” (ALLEVATO, 2005, p. 53). E, conforme veremos na subseção 3.2.3, também é possível trabalharmos com abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas antes da formalização do conteúdo que temos como objetivo atual. Ademais, a resolução de problemas apenas após o ensino depende de um papel passivo dos estudantes e cria a ideia de que o aluno não consegue resolver problemas sem a intervenção do professor (VAN DE WALLE, 2009; SCHROEDER; LESTER, 1989).

Sobre a necessidade que essa abordagem tem de vermos a resolução de problemas como a meta principal do ensino de Matemática, questionamos, em consonância com Allevato (2005), se o foco excessivo nas aplicações não reduz a importância da Matemática apenas àquilo para o qual conseguimos ver a utilidade imediata. De fato, mesmo que não apresentemos uma aplicabilidade real de determinado conteúdo, inserida ou não no contexto dos alunos, ele também pode auxiliar no aprendizado de outros objetos do conhecimento, no desenvolvimento do pensamento matemático ou na construção das conexões mentais dos estudantes, como veremos na seção 3.4.

3.2.3 Ensinar Matemática através da resolução de problemas

Segundo Schroeder e Lester (1989):

> Ao ensinar *através* da resolução de problemas, os problemas são valorizados não apenas como um propósito para aprender Matemática, mas também como um meio primário de fazê-lo. O ensino de um tópico de Matemática começa com uma situação-problema que incorpora aspectos centrais do assunto, e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. A meta de aprender Matemática é transformar certos problemas não-rotineiros em rotineiros[10] (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 33, grifo dos autores, tradução nossa).

[10] *In teaching* via *problem solving, problems are valued not only as a purpose for learning mathematics but also as a primary means of doing so. The teaching of a mathematical topic begins with a problem situation that embodies key aspects of the topic, and mathematical techniques are developed as reasonable responses to reasonable problems. A goal of learning mathematics is to transform certain nonroutine problems into routine ones.*

Vemos que essa forma de trabalhar com resolução de problemas em sala de aula difere da anterior: aprender Matemática para resolver problemas implica "adquirir" um conhecimento teórico sobre determinado assunto para depois aplicá-lo em situações-problema. Em contrapartida, ao aprendermos Matemática através da Resolução de Problemas, o aprendizado e a resolução são construídos juntos (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021).

No Brasil, o Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP) conduz diversas pesquisas a partir de tal abordagem, utilizando a chamada Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas,

> onde o ensino e a aprendizagem devem ocorrer, simultaneamente, durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como coconstrutores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma concepção mais atual de avaliação, sendo esta construída em meio à resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando sua aprendizagem e reorientando as práticas em salas de aula quando for necessário (ONUCHIC, 2013, p. 101).

Esta metodologia tem 10 passos[11] indicados para a sua aplicação em sala de aula (ALLEVATO; ONUCHIC, 2019; ONUCHIC, 2013; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011; ALLEVATO; ONUCHIC, 2021):

1. É proposto um problema para a turma, com o objetivo de iniciar um tópico novo;
2. Os alunos leem o problema individualmente e buscam compreendê-lo a partir de seus conhecimentos prévios;
3. É feita a leitura do problema em pequenos grupos, com o auxílio do professor, se necessário, para a compreensão do problema;
4. Os estudantes, em pequenos grupos, discutem sobre o problema, compartilham estratégias e aprimoram a sua compreensão;
5. O professor, enquanto mediador do processo, observa, auxilia, questiona e incentiva;
6. Os grupos registram na lousa as suas resoluções;
7. Há uma plenária para que se discutam as resoluções, os grupos compartilhem suas estratégias e percebam formas diferentes de resolver o mesmo problema;
8. A turma chega a um consenso sobre a resolução;

[11] Os passos de aplicação da metodologia têm variado em detalhes ao longo dos anos, mas utilizaremos a ordem de Allevato e Onuchic (2021), por ser o texto mais recente dentre os consultados, embora também tenhamos utilizado outros trabalhos para compreender melhor cada um dos passos.

9. Há uma formalização do “novo” conteúdo, a partir daquilo que foi discutido na plenária;
10. São propostos novos problemas derivados do original.

De acordo com Cai e Lester (2012):

> O ambiente de aprendizagem do ensino através da resolução de problemas oferece um cenário natural para os alunos apresentarem várias soluções do problema para o seu grupo ou classe e aprenderem matemática por meio de interações sociais, ou seja, negociação, e obter a compreensão compartilhada. Tais atividades ajudam os alunos a esclarecer suas idéias e adquirir diferentes perspectivas para o conceito ou idéia que estão aprendendo. Empiricamente, o ensino da matemática através de resolução de problemas ajuda os alunos a irem além da aquisição de idéias isoladas para desenvolverem cada vez mais um complexo e conectado sistema de conhecimento (CAI; LESTER, 2012, p. 152).

Vemos, a partir desse trecho, que o ensino através da resolução de problemas tem o potencial de promover a interação entre os estudantes e o aprimoramento da compreensão do conteúdo. Nessa abordagem, procedimentos e algoritmos não são simplesmente ensinados pelo professor, mas desenvolvidos a partir das diferentes resoluções de questões inicialmente problemáticas, feitas pelos próprios estudantes. As ideias matemáticas são otimizadas pela discussão em grupos e pela mediação do professor, que questiona e incentiva a reflexão. Reparemos também que ensinar através da resolução de problemas pode fazer com que os alunos tenham contato com o conhecimento matemático como ele é construído (e não apenas apresentado), pois os matemáticos, antes da exposição formal e organizada da demonstração de um teorema, muitas vezes estavam com um problema que gostariam de resolver por algum método desconhecido, como exemplificamos no início desse capítulo a partir das ideias de Allevato (2005).

Van de Walle (2009) apresenta outras vantagens de utilizarmos tal abordagem nas aulas de Matemática:

- Tira o foco das instruções e o coloca nas ideias;
- Aumenta a autoestima dos alunos, que acreditam que são capazes de fazer matemática e que ela faz sentido;
- A partir das discussões do professor com os seus alunos, é realizada uma avaliação contínua para conhecer tanto a turma quanto cada um dos estudantes;
- Os estudantes partem das próprias ideias, que podem ser diversificadas, em detrimento de um modelo expositivo em que seguem as ideias do professor;
- Aumenta o envolvimento e o interesse dos estudantes, diminuindo os problemas de disciplina;
- Desenvolve o potencial matemático dos alunos.

Após a exposição dessas três formas de trabalhar resolução de problemas em sala de aula, cabe ressaltar que:

> Embora em teoria essas três concepções de ensinar Resolução de Problemas em Matemática podem ser isoladas, na prática elas se sobrepõem e ocorrem em várias combinações e sequências. Portanto, é provavelmente contraproducente argumentar em favor de um ou mais desses tipos de ensino ou contra os outros[12] (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 33, tradução nossa).

Desse modo, entendemos que, embora o ensino de Matemática através da resolução de problemas envolva diversos pontos positivos, é importante incluirmos aspectos do ensino sobre resolução de problemas (como nomear estratégias, auxiliar os alunos a monitorarem o seu progresso, incentivá-los a entender o problema antes de buscar resolvê-lo e revisitar a resolução e o enunciado após a conclusão) e do ensino para resolução de problemas (como trabalhar com problemas da realidade, mostrar aplicações da Matemática e propiciar momentos de prática dos algoritmos aprendidos).

Para finalizar esta seção, apontamos que não basta conhecermos diferentes abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas: é essencial que o professor saiba o que fazer ao aplicá-las:

> Escolher o problema ou tarefa é apenas uma parte do ensino com resolução de problemas. Há evidências consideráveis de que, mesmo quando os professores têm bons problemas, esses podem não ser implementados como pretendido. As reais oportunidades dos alunos de aprenderem dependem não só dos tipos de tarefas matemáticas que os professores colocam, mas também dos tipos de discurso em sala de aula que ocorrem durante a resolução de problemas, tanto entre professor e alunos como entre alunos. O discurso se refere às maneiras de representar, pensar, falar, concordar e discordar que os professores e os alunos usam para se engajarem nas tarefas de ensino. Existem evidências teóricas e empíricas consideráveis que sustentam a conexão entre o discurso de sala de aula e a aprendizagem dos alunos (CAI; LESTER, 2012, p. 153).

Assim, na próxima seção, buscaremos evidenciar as ações e discursos que o professor pode adotar em abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas, buscando desenvolver o pensamento matemático de seus alunos.

3.3 AÇÕES DO PROFESSOR EM ABORDAGENS DE ENSINO ENVOLVENDO RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, discutiremos possíveis ações do professor em abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas, refletindo especialmente sobre os aspectos pedagógicos subjacentes à prática em sala de aula. Entretanto, para falarmos sobre

---

[12] *Although in theory these three conceptions of teaching problem solving in mathematics can be isolated, in practice they overlap and occur in various combinations and sequences. Thus, it is probably counterproductive to argue in favor of one or more of these types of teaching or against the others.*

isso, é necessário distinguirmos o ato de resolver problemas dos aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas.

3.3.1 O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e o Conhecimento Matemático para o Ensino

Questionamentos envolvendo a diferença entre o conhecimento sobre determinada ciência e os saberes mobilizados para ensiná-la já são feitos há alguns anos. Shulman (1987) categoriza os conhecimentos necessários para o exercício da docência e nomeia esse conjunto de saberes como Base de Conhecimento[13]. O autor divide essa estrutura em sete classes: Conhecimento do Conteúdo; Conhecimento Pedagógico Geral; Conhecimento do Currículo; Conhecimento Pedagógico do Conteúdo; Conhecimento dos Alunos e de suas Características; Conhecimento dos Contextos Educacionais e Conhecimento dos Fins, Propósitos e Valores Educacionais[14]. Iremos tratar, nesta dissertação, apenas do Conhecimento do Conteúdo e do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, pois nosso objetivo é aplicar essas ideias à Resolução de Problemas.

O Conhecimento do Conteúdo trata do entendimento daquilo que se ensina. Shulman (1986) especifica:

> Professores não precisam apenas ser capazes de definir para os estudantes as verdades aceitas em uma área. Eles precisam também ser capazes de explicar por que uma determinada proposição é considerada garantida, por que vale a pena conhecê-la e como ela se relaciona com outras proposições, tanto na disciplina quanto fora dela, tanto na teoria quanto na prática[15] (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa).

Shulman (1986, 1987) distingue esse conhecimento em dois tipos de estruturas. As estruturas substantivas se referem à organização dos princípios, conceitos e fatos da disciplina, bem como suas relações (ou seja, entender o que se conhece sobre o assunto). Na Matemática, poderíamos entender isso como o conhecimento dos principais axiomas, definições, postulados, teoremas, proposições e corolários que regem tal área do conhecimento, dando enfoque especial àqueles que serão ensinados aos alunos na Educação Básica. As estruturas sintáticas são as regras que estabelecem a veracidade ou falsidade, validação ou invalidação de determinado fato ou fenômeno. Poderíamos traduzir isso, na nossa área, para os princípios lógicos e as ideias que

[13] *Knowledge Base.*

[14] *Content knowledge, general pedagogical knowledge, curriculum knowledge, pedagogical content knowledge, knowledge of learners and their characteristics, knowledge of educational contexts, knowledge of educational ends, purposes, and values.*

[15] *Teachers must not only be capable of defining for students the accepted truths in a domain. They must also be able to explain why a particular proposition is deemed warranted, why it is worth knowing, and how it relates to other propositions, both within the discipline and without, both in theory and in practice.*

regem as demonstrações matemáticas.

O autor ainda explica que esses dois tipos de estruturas procuram responder aos seguintes questionamentos: "Quais são as ideias e habilidades importantes desta área? E como as novas ideias são acrescentadas e as deficientes abandonadas pelos que produzem conhecimento nesta área?"[16] (SHULMAN, 1987, p. 9, tradução nossa).

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo é a aplicação do Conhecimento do Conteúdo para o ensino. Shulman (1986) traz alguns tópicos presentes nesse conhecimento: formas úteis para representação das ideias e a capacidade de escolher a mais adequada para a situação que se está ensinando; analogias; ilustrações; exemplos; explicações; demonstrações; a capacidade de tornar o conhecimento compreensível a outros; o que torna o aprendizado de determinado tópico mais fácil ou difícil; quais as preconcepções que os estudantes de diferentes faixas etárias e de diferentes realidades geralmente têm sobre determinados assuntos e, se forem ideias erradas, formas de reorganizar o entendimento sobre aquele tópico.

Vemos, a partir dessas ideias, que Shulman (1986, 1987) diferencia o simples conhecimento de determinado conteúdo do seu conhecimento voltado para o ensino. Todavia, o autor fala de modo geral, e não especificamente da Matemática, que é a disciplina de que esta dissertação trata. Nesse sentido, Ball, Thames e Phelps (2008) traduzem as ideias do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo para a Matemática, desenvolvendo o que chamaram de Conhecimento Matemático para o Ensino:

> Por "ensino", nós queremos dizer tudo que os professores precisam fazer para dar suporte ao aprendizado de seus estudantes. Claramente queremos dizer o trabalho interativo de ensinar lições nas salas de aula e todas as tarefas que emergem no decurso de tal trabalho. Mas também queremos dizer planejar essas lições, avaliar o trabalho dos estudantes, desenvolver e dar nota por avaliações, explicar o trabalho de aula para os pais, fazer e administrar trabalhos para casa, atender às preocupações de equidade e lidar com o diretor da escola que tem opiniões fortes sobre o currículo de Matemática. Cada uma dessas tarefas, e várias outras também, envolvem o conhecimento de ideias matemáticas, habilidades de pensamento matemático, fluência com exemplos e termos e consideração sobre a natureza da proficiência matemática[17] (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 395, tradução nossa).

Tanto a partir das ideias de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo quanto

---

[16] *What are the important ideas and skills in this domain? and How are new ideas added and deficient ones dropped by those who produce knowledge in this area?*

[17] *By "teaching," we mean everything that teachers must do to support the learning of their students. Clearly we mean the interactive work of teaching lessons in classrooms and all the tasks that arise in the course of that work. But we also mean planning for those lessons, evaluating students' work, writing and grading assessments, explaining the classwork to parents, making and managing homework, attending to concerns for equity, and dealing with the building principal who has strong views about the math curriculum. Each of these tasks, and many others as well, involve knowledge of mathematical ideas, skills of mathematical reasoning, fluency with examples and terms, and thoughtfulness about the nature of mathematical proficiency.*

de Conhecimento Matemático para o Ensino, verificamos que é possível distinguirmos apenas conhecer a Matemática de ensiná-la, e os saberes necessários para cada uma dessas situações podem ser diferentes. De fato, algumas das elencadas por Ball, Thames e Phelps (2008) são intrínsecas à figura do professor, e não de alguém que apenas conhece Matemática, mas não tem o intuito de ensiná-la.

Pensemos agora em relação à Resolução de Problemas: é possível fazermos a distinção entre o ato de resolver problemas e os aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas? Como? Buscaremos continuar essas reflexões na próxima subseção.

3.3.2 Os aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas

Já discutimos na subseção 3.2.1 a tentativa de Polya (2006) de desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas por meio de heurísticas, e como a literatura aponta que essa estratégia, por si só, tem se mostrado infrutífera. Na verdade, devemos ter em mente que resolver problemas não é algo tão simples quanto dominar uma lista de estratégias. Schoenfeld (1985, apud GAZZONI; OST, 2008) elenca quatro conhecimentos e aspectos cognitivos associados à resolução de um problema: recursos, heurísticas, controle e convicções. Schoenfeld (1992) ainda traz outros dois fatores importantes: as crenças e as práticas. O uso de heurísticas durante a resolução de um problema já foi discutido na mesma subseção supracitada, mas cabe ressaltar que elas são importantes e utilizadas amplamente por resolvedores de problemas experientes, mesmo que de forma inconsciente. Entretanto, a crítica trazida pela literatura fala sobre o foco excessivo em ensinar as heurísticas apenas como regras a serem seguidas ou tópicos a serem testados.

Os recursos são os conhecimentos sobre Matemática que podem ser utilizados para a resolução de um problema (SCHOENFELD, 1985 apud GAZZONI; OST, 2008). Costa (2012), em sua tese, realizou discussões com licenciandos em Matemática sobre o conceito de proporcionalidade através da resolução de problemas. Vemos em sua produção de dados que as lacunas nos recursos que os alunos demonstravam sobre esse assunto em sua formação escolar e acadêmica impactaram negativamente na resolução de algumas atividades propostas. Entenderem proporcionalidade como uma relação em que, sempre que uma grandeza aumenta, a outra também aumenta, fez com que estudantes utilizassem estratégias impróprias de resolução, como a regra de três, quando falamos, por exemplo, de uma função afim, mas não linear, como a atividade proposta pelo autor:

> Suely e Júlia estavam correndo na mesma velocidade ao redor de uma trilha. Suely começou primeiro. Quando Suely completou 9 voltas, Júlia completou 3 voltas. Quando Júlia completou 15 voltas, quantas voltas Suely completou? (COSTA, 2012, p. 191).

Repare que, na questão mencionada, como a velocidade das duas corredoras é a mesma, basta ver que Suely correu $9 - 3 = 6$ voltas a mais que Júlia. Portanto, quando Júlia completou 15 voltas, Suely completou $15 + 6 = 21$ voltas. Essas grandezas não são proporcionais porque, se dobrarmos a quantidade de voltas de Júlia, por exemplo, não significa que Suely também terá corrido o dobro de voltas. Por isso, a regra de três não é uma ferramenta adequada para a resolução.

O controle é a capacidade de escolher quais recursos utilizar e quando eles serão úteis (SCHOENFELD, 1985 apud GAZZONI; OST, 2008). Ao trabalharmos relações envolvendo lados e ângulos de triângulos, por exemplo, existem diversas ferramentas que podem ser utilizadas para resolver determinado problema: o Teorema de Pitágoras, as relações trigonométricas no triângulo retângulo, o teorema dos senos, o teorema dos cossenos etc. Todavia, cada uma dessas estratégias exige requisitos específicos para serem utilizadas. O Teorema de Pitágoras, por exemplo, relaciona os três lados de um triângulo retângulo; o teorema dos senos, dois lados de um triângulo e os dois ângulos opostos a tais lados; a tangente, um ângulo agudo e os catetos de um triângulo retângulo, e assim sucessivamente. O controle, portanto, é a capacidade de conhecermos esses requerimentos para não aplicarmos uma estratégia indevidamente, e reconhecermos o cenário em que estamos para verificar as estratégias conhecidas que fazem sentido naquela situação.

As convicções envolvem saber o que se faz e para que se faz (SCHOENFELD, 1985 apud GAZZONI; OST, 2008). Ou seja, é importante para a resolução de um problema entender como uma parte da estratégia está inserida no contexto global da resolução, e o que será feito a partir de um determinado resultado obtido. Sobre as crenças dos estudantes, Schoenfeld (1992) traz uma lista com algumas ideias comuns, mas que podem impactar negativamente no processo de resolução de um problema:

> Há apenas uma forma correta de resolver qualquer problema matemático – normalmente a regra que o professor demonstrou mais recentemente para a turma. Estudantes comuns não podem esperar entender Matemática; eles esperam simplesmente memorizá-la e aplicar o que eles aprenderam mecanicamente e sem compreensão. Matemática é uma atividade solitária, feita por indivíduos isolados. Estudantes que entenderam a Matemática que estudaram serão capazes de resolver qualquer problema atribuído a eles em cinco minutos ou menos. A Matemática aprendida na escola tem pouco ou nada a ver com o mundo real. Prova formal é irrelevante para processos de descoberta ou invenção[18] (SCHOENFELD, 1992, p. 359, tradução nossa).

---

[18] *Mathematics problems have one and only one right answer. There is only one correct way to solve any mathematics problem – usually the rule the teacher has most recently demonstrated to the class. Ordinary students cannot expect to understand mathematics; they expect simply to memorize it and apply*

Por fim, a prática também é um elemento essencial para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. Sobre isso, Polya (2006) comenta:

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os (POLYA, 2006, p. 4).

Entretanto, apenas ter tais capacidades implica dominar os aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas? Isto é, saber resolver problemas eficientemente significa também conseguir conduzir os alunos num processo de ensino envolvendo resolução de problemas? Ou ainda: na linguagem de Ball, Thames e Phelps (2008), ter os conhecimentos matemáticos requeridos para resolver diversos problemas significa obrigatoriamente mobilizar o Conhecimento Matemático para o Ensino necessário para trabalharmos com abordagens envolvendo resolução de problemas em sala de aula?

Tentaremos chegar à resposta de tais questionamentos a partir de um exemplo: imagine que queiramos resolver a equação de segundo grau $x^2 + 6x - 16 = 0$. O professor pode ter anteriormente trabalhado uma estratégia de resolução, por exemplo, a Fórmula de Bhaskara, como é conhecida no Brasil:

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Assim, se o aluno conhece o procedimento de resolução e as operações básicas com números reais, ele pode apenas aplicar a fórmula para obter a resposta:

$$x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow a = 1; b = 6; c = -16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}$$

Assim, $x = \dfrac{-6 + 10}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ ou $x = \dfrac{-6 - 10}{2} = \dfrac{-16}{2} = -8$.

Note que, se o aluno tem acesso ao procedimento apresentado anteriormente pelo professor, o objetivo deste exercício é treinar para aplicar o algoritmo cada vez

---

what they have learned mechanically and without understanding. Mathematics is a solitary activity, done by individuals in isolation. Students who have understood the mathematics they have studied will be able to solve any assigned problem in five minutes or less. The mathematics learned in school has little or nothing to do with the real world. Formal proof is irrelevant to processes of discovery or invention.

mais rápido e com um número cada vez menor de erros de cálculo ou de desatenção, ou seja, de forma “eficiente”.

Analisemos agora a questão a seguir (Figura 2):

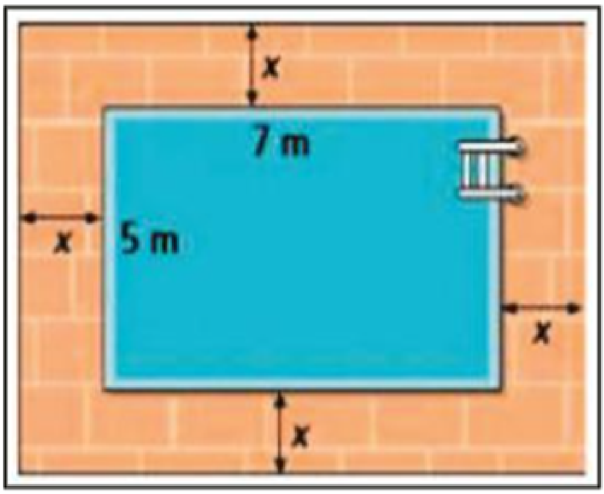


Figura 2 – Atividade da piscina

Fonte: Dante e Viana (2019, p. 74).

“Num terreno de 99 m² de área será construída uma piscina de 7 m de comprimento por 5 m de largura, deixando-se um recuo x ao seu redor para construir um calçadão. Quantos metros o recuo deve medir?” (DANTE; VIANA, 2019, p. 74).

Para resolver essa questão, assumiremos que tanto o terreno em questão quanto a piscina podem ser aproximados por retângulos. Podemos usar múltiplas estratégias: uma possibilidade é supor que a nossa resposta é um número inteiro de metros, e a partir disso podemos testar alguns valores até descobrir que $x = 2$ metros resolve o problema. Justificamos essa resposta com a ideia de que a área de um retângulo é dada pelo produto da medida da base pela medida da altura. Então se $x = 2$ metros, a área do terreno deveria ser de $(7 + 2 \cdot 2) \cdot (5 + 2 \cdot 2) = 11 \cdot 9 = 99$ metros quadrados, o que está de acordo com os dados apresentados na questão.

Ainda assumindo que é uma resposta inteira, podemos pensar em formas de decompor os 99 metros quadrados como produto de dois números inteiros, fazendo como que o caminho inverso da estratégia aplicada anteriormente. Tais formas de escrita são $99 = 1 \cdot 99 = 3 \cdot 33 = 9 \cdot 11$. O último caso é o único que tem um número maior do que 5 e o outro maior do que 7, e que são candidatos à base e à altura do nosso terreno retangular. Assim, fazemos $9 = 5 + 2x \Rightarrow x = 2$ e $11 = 7 + 2x \Rightarrow x = 2$, mostrando que o valor de 2 metros resolve o problema.

Entretanto, note que para essas duas formas de resolução, foi necessário que o valor de x fosse um número inteiro de metros. Mas seria interessante também pensarmos em uma estratégia que pudesse resolver uma família de problemas semelhantes a esse, independente de os valores serem inteiros ou não. Assim, apresentamos uma terceira estratégia que também utiliza a ideia da área de retângulos. Notando que a base do terreno é $7+2x$ e sua altura é $5+2x$, podemos determinar o valor de sua área, que sabemos ser 99 m², apenas fazendo o produto entre as dimensões:

$$(7+2x)\cdot(5+2x)=99$$

$$35+14x+10x+4x^2=99$$

$$4x^2+24x+35-99=0$$

$$4x^2+24x-64=0$$

Dividindo os dois lados da igualdade por 4, obtemos $x^2+6x-16=0$, que é a mesma equação de segundo grau que já resolvemos anteriormente, obtendo $x=2$ ou $x=-8$ como soluções. Entendendo que x só pode assumir valores positivos por conta do contexto da questão, descobrimos que o valor procurado para o recuo é de 2 metros.

Imaginemos que um estudante busque resolver essa última questão que apresentamos. Mesmo que o professor tenha ensinado algoritmos para o cálculo da área de um retângulo e para a resolução de equações quadráticas, se o aluno nunca resolveu ou viu alguém resolver uma questão parecida com essa (ou não se recorda disso), não necessariamente o caminho de resolução será tão claro quanto o de uma que pede para que ele simplesmente resolva a equação, após o aluno ter conhecido o procedimento. Assim, se um estudante tivesse dúvidas sobre como resolver essa questão, será que seria prudente que o professor, para mediar o aprendizado desse aluno, utilizasse as mesmas estratégias pedagógicas que utilizaria para uma tarefa procedimental, como a primeira situação que discutimos?

No primeiro caso, bastaria que o professor lembrasse o aluno da fórmula que estudaram anteriormente, seja diretamente ou por meio de questionamentos, e o auxiliasse a fazer o passo a passo já discutido, já que o objetivo de uma questão, após a explicação do algoritmo, é o exercício da aplicação. Entretanto, em relação ao segundo cenário que criamos, supomos a falta da discussão de um procedimento que resolvesse a situação inteiramente, o que poderia gerar uma oportunidade para incentivar o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos por meio de um potencial problema. Nesse caso, será que seria suficiente que o professor simplesmente apresentasse a estratégia de resolução para o estudante ou há saberes que o professor poderia mobilizar para conduzir tal desenvolvimento de uma forma mais adequada? Polya (2006) nos alerta que:

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma *parcela razoável do trabalho*. Se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isso, deve auxiliá-lo discretamente, *sem dar na vista*. O melhor é, porém, ajudar o estudante com naturalidade. O professor deve colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que *poderia ter ocorrido ao próprio estudante* (POLYA, 2006, p. 1, grifo do autor).

Vemos nesse trecho que o autor prima pela autonomia do estudante, sendo o professor um mediador no processo de resolução. Isso se dá por meio de indicações e perguntas, de modo que o aluno seja o protagonista. Voltando aos casos já elencados, vemos que como o objetivo do exemplo da equação quadrática era apenas a prática da estratégia, o professor poderia apenas auxiliar o aluno a perceber que tipo de questão era e qual a estratégia vista em aula para resolver tal situação. Entretanto, em relação ao caso da piscina, vemos que apenas indicar uma das possíveis técnicas de resolução não está de acordo com os princípios de autonomia discente elencados por Polya (2006). Em vez disso, o autor sugere que o professor instigue o estudante a pensar por si mesmo. Isso poderia ser feito, por exemplo, questionando o aluno sobre o que significa ter 99 metros quadrados de área e qual a relação desse número com a figura associada a ele. Outras perguntas podem ser feitas dependendo das estratégias específicas que cada estudante tenha tomado ou das respostas que cada discente dê aos questionamentos do professor.

O autor também ressalta que mesmo em um momento em que o próprio professor resolva a atividade em aula, é possível utilizar uma estratégia semelhante, desafiando-o a colocar-se no lugar do aluno:

> Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Graças a essa orientação, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer (POLYA, 2006, p. 4).

Tais orientações de Polya (2006) servem para auxiliar os estudantes a desenvolverem o seu pensamento matemático e sua autonomia, ou seja, estão aliadas a objetivos pedagógicos. E note que o professor conseguir resolver a questão da piscina não necessariamente implica que ele consiga fazer bons questionamentos ao seu aluno, entender seu ponto de vista, adaptar o seu discurso conforme os argumentos e as dúvidas do discente, entre outros saberes pedagógicos importantes para incentivar a autonomia do estudante e a capacidade de resolver outros problemas sem a intervenção do professor.

Existe, de fato, a possibilidade de o ato de resolver problemas auxiliar no desenvolvimento de saberes pedagógicos, mas isto não é uma regra. Entendemos que saber resolver problemas é uma condição necessária, mas não suficiente, para trabalhar com resolução de problemas em sala de aula.

Assumimos nesta pesquisa, a partir das orientações de Polya (2006) e guiados pelas ideias de Ball, Thames e Phelps (2008), que existem, de fato, aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas, que se diferenciam do simples ato de resolver problemas, cujo conhecimento aplicado à prática pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento matemático e da autonomia dos estudantes. Veremos, a partir disso, que tipo de ações e discursos a literatura apresenta como sendo importantes para o professor potencializar o ensino por meio da resolução de problemas.

Lester, Garofalo e Kroll (1989) sugerem algumas ações do professor para auxiliar os alunos a desenvolverem a sua habilidade de resolução de problemas (Quadro 3).

Quadro 3 – Possíveis ações do professor segundo Lester, Garofalo e Kroll (1989)

Ação do professor	**Propósito**
ANTES	
Ler o problema para a turma ou pedir para alguém lê-lo. Discutir palavras ou frases que os estudantes possam não entender.	Ilustrar a importância de ler os problemas com cuidado e focar em palavras que têm interpretação especial na Matemática.
Fazer uma discussão com toda a turma sobre entender o problema.	Focar a atenção nos dados importantes e esclarecer partes do problema.
(Opcional) Fazer uma discussão com toda a turma sobre possíveis estratégias de resolução.	Provocar ideias para possíveis caminhos de resolver o problema.
DURANTE	
Observar e questionar os estudantes para verificar onde eles estão no processo de resolução do problema.	Diagnosticar as forças e fraquezas dos estudantes no que tange à resolução de problemas.
Prover dicas quando necessário.	Ajudar os estudantes a passar por bloqueios ao resolverem o problema.
Prover extensões do problema quando necessário.	Desafiar aqueles que terminaram cedo a generalizar a sua estratégia para um problema similar.
Requerer aos que resolveram o problema que “respondam à questão”.	Requerer que os estudantes verifiquem seu trabalho e se ele faz sentido.
DEPOIS	
Mostrar e discutir resoluções.	Mostrar e nomear diferentes estratégias efetivas de resolução.
Relacionar o problema com outros previamente resolvidos e discutir ou pedir para os estudantes resolverem extensões do problema.	Demonstrar que estratégias de resolução não são específicas de um único problema e auxiliam a reconhecer diferentes situações nas quais tal estratégia seria útil.
Discutir características especiais do problema, como uma figura que acompanha o enunciado.	Mostrar como as características de um problema podem influenciar como alguém pensa sobre ele.

Fonte: Adaptado de Lester, Garofalo e Kroll (1989, p. 26, tradução nossa).

Van de Walle (2009), assim como Lester, Garofalo e Kroll (1989) faz algumas sugestões de ações para o professor antes, durante e depois da resolução de um problema (Quadro 4).

Quadro 4 – Possíveis ações do professor segundo Van de Walle (2009)

ANTES - Preparando os alunos
Verifique se o problema foi compreendido.
Ative os conhecimentos prévios úteis.
Estabeleça expectativas claras para os produtos.
Comece com uma versão mais simples da tarefa.
DURANTE - Alunos trabalhando
Deixe os alunos construírem seu conhecimento. Evite antecipações desnecessárias.
Escute cuidadosamente.
Forneça sugestões adequadas, baseadas nas ideias dos estudantes.
Observe e avalie.
Forneça atividades para os estudantes que terminarem a tarefa cedo, buscando possíveis generalizações e adaptações do problema.
Permita que os estudantes cometam erros, mostrando que eles podem ser úteis.
Encoraje a verificação e o teste das ideias.
DEPOIS - Alunos debatendo
Escute/Aceite soluções dos estudantes sem julgá-las.
Encoraje o diálogo entre os estudantes em vez de conversações entre os alunos e o professor que excluam a turma.
Exija explicações para acompanhar todas as respostas.
Encoraje os estudantes a fazer perguntas.
Certifique-se que os estudantes compreenderam o que você compreende.
Eventualmente peça que um estudante que compreendeu explique o raciocínio para outro que não compreendeu.
Se um estudante está com dificuldade para expressar a sua linha de raciocínio, sugira que o grupo tome uns minutos a mais para rever seus argumentos e depois volte para expô-los à turma.
Sintetize as principais ideias e identifique futuros problemas.

Fonte: Adaptado de Van de Walle (2009).

O Quadro 3 e o Quadro 4 apresentam ambos sugestões de ações para o professor ao trabalhar com resolução de problemas em sala de aula. Entretanto, notemos que o Quadro 4 apresenta ideias que exigem um grau maior de autonomia dos estudantes. Nas ações antes da resolução, por exemplo, o Quadro 3 sugere que se faça a leitura em conjunto do problema e que se inicie uma discussão sobre o seu entendimento. Em contrapartida, no Quadro 4 não há essa indicação, o que nos sugere que os alunos devam fazer uma leitura individual e buscar compreender o problema antes da intervenção do professor. Nos passos para a aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, é explicitamente sugerido que os alunos façam uma leitura individual do problema, para que depois seja realizada uma discussão em grupo (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021).

Em relação às fases durante e depois da resolução, o Quadro 3 foca nas ações do professor, trazendo-o para a posição de protagonista. No Quadro 4, todas as sugestões envolvem permitir que o aluno trabalhe, e o professor deve auxiliá-lo apenas a partir das construções discentes e quando estritamente necessário. Também são encorajadas a escuta ativa, o diálogo entre os estudantes e a argumentação consistente, assim como nos passos apontados por Allevato e Onuchic (2021) em sua metodologia.

Allevato (2005) elenca algumas ações docentes importantes para conduzir momentos de resolução de problemas em sala de aula:

> Propiciar a construção do conhecimento a partir de conhecimentos anteriores, focalizar no pensamento e não na obtenção de respostas esperadas, dar tempo aos alunos para pensar, levar os alunos a explicar ou justificar suas respostas ou raciocínios, questionar os alunos, ouvi-los e ensiná-los a ouvir os colegas, explorar conceitos matemáticos em termos de resolução de problemas, promover o trabalho em grupos sempre diversificados de alunos (ora individualmente, ora em duplas, ora com a classe toda, etc) (ALLEVATO, 2005, p. 62).

Nos *Standards 2000*, há também uma menção à importância do papel do professor em um ambiente de resolução de problemas:

> Logo desde o pré-escolar, os professores desempenham um papel importante no desenvolvimento da disposição para a resolução de problemas, através da criação e manutenção de um ambiente de aprendizagem que estimule os alunos a explorar, a assumir riscos, a partilhar sucessos e insucessos e a questionar-se mutuamente (NCTM, 2008, p. 59).

Cai e Lester (2012) defendem que é importante que o professor entenda que os alunos aprendem a resolver de problemas de forma lenta e gradual, bem como o seu engajamento com as propostas em abordagens desse tipo, caso não estejam acostumados. Ainda sobre ações docentes, acrescentam:

> Os professores devem envolver os alunos em uma variedade de atividades de resolução de problemas, como: (a) encontrar múltiplas estratégias de resolução para um dado problema; (b) engajar-se na exploração matemática; (c) dar justificativa para as suas soluções; e (d) fazer generalizações (CAI; LESTER, 2012, p. 157).

Na literatura, também vemos que alguns docentes apresentam dificuldades em aplicar os aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas em aula. Allevato (2005) nos traz alguns dos principais obstáculos relatados por professores em determinadas pesquisas ao utilizarem abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas:

- Conseguir trabalhar os objetos do conhecimento propostos no currículo, pois essas abordagens podem demandar mais tempo para serem aplicadas;
- Adaptar-se às concepções e orientações curriculares a respeito da resolução de problemas;
- Incentivar os alunos acostumados a métodos de ensino expositivos;
- Envolver todos os estudantes, que pensam e aprendem de maneiras diferentes;
- Formular e encontrar bons problemas;
- Gerir as discussões coletivas.

Alguns saberes do Conhecimento Matemático para o Ensino também podem ser mobilizados em abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas:

> Ensinar envolve mais do que identificar uma resposta incorreta. Um ensino hábil requer ser capaz de avaliar a fonte de um erro matemático. Além disso, esse é um trabalho que os professores precisam fazer rapidamente, muitas vezes na mosca, porque em uma sala de aula, os estudantes não podem esperar que o próprio professor entenda a matemática[19] (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 397, tradução nossa).

Em termos de resolução de problemas, é importante que o professor saiba onde e por que o aluno está errando na sua estratégia para auxiliá-lo devidamente. Além disso, podemos citar outras ações do professor valorizadas por Ball, Thames e Phelps (2008): responder aos porquês dos estudantes, encontrar um exemplo para um argumento matemático específico, relacionar diferentes representações, modificar tarefas para que sejam mais fáceis ou mais difíceis, usar notação matemática adequada e criticar seu uso, fazer questionamentos matemáticos produtivos e inspecionar equivalências. Repare que muitos desses saberes são mobilizados durante a resolução de um problema ou durante o ensino a partir da resolução de problemas. Isso indica uma importância no desenvolvimento de tais saberes para que o professor consiga resolver diversos tipos de problema e saiba conduzir seus alunos nesse processo do mesmo modo.

A partir de todas as ações mencionadas nesta seção e das recomendações de diversos autores, percebemos a importância de desenvolver nos (futuros) professores de Matemática tanto a capacidade de resolver problemas quanto o conhecimento de aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas. Uma vez que solucionar problemas está, e sempre esteve, associada ao desenvolvimento da Matemática e do pensa-

[19] *Teaching involves more than identifying an incorrect answer. Skillful teaching requires being able to size up the source of a mathematical error. Moreover, this is work that teachers must do rapidly, often on the fly, because in a classroom, students cannot wait as a teacher puzzles over the mathematics himself.*

mento matemático ao longo da história, trabalhar com abordagens de ensino utilizando resolução de problemas se torna uma necessidade para os educadores matemáticos, especialmente ao seguirmos as orientações da BNCC. Por isso, defendemos que é necessário discutir e refletir sobre saberes e ações relativas a tais abordagens com (futuros) professores de Matemática, desde a sua formação inicial.

3.4 AS CONEXÕES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Outro aspecto importante a considerarmos é a construção de conexões a partir da resolução de problemas, que também pode ser analisada de um ponto de vista pedagógico. Van de Walle (2009) defende que a aprendizagem ocorre quando reorganizamos, acrescentamos ou modificamos informações nas nossas estruturas de conhecimento pré-existentes. Essas informações podem ser fatos isolados, bem como ideias que se conectam ao que já conhecíamos. Na Figura 3, vemos uma informação nova (bolinha vermelha) que se conecta com informações pré-existentes (bolinhas azuis). Essas conexões podem ser feitas de diferentes maneiras, o que gera, segundo Allevato e Onuchic (2019), uma Matemática "personalizada" para cada estudante.

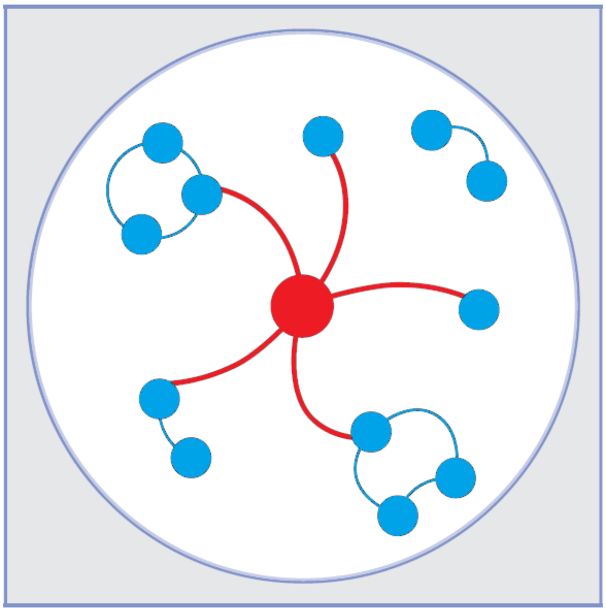


Figura 3 – Estabelecimento de conexões

Fonte: adaptado de Van de Walle (2009, p. 43).

Segundo Van de Walle (2009):

> A compreensão pode ser definida como uma medida da qualidade e da quantidade de conexões que uma ideia tem com as já existentes. Compreender nunca é uma proposição "ou tudo ou nada". Ela depende da existência de ideias apropriadas e da criação de novas conexões (VAN DE WALLE, 2009, p. 45).

O autor diferencia compreensão relacional (quando o nosso conhecimento é constituído por diversas conexões) e compreensão instrumental (ideias isoladas e sem significado), como podemos ver na Figura 4. Desse modo, percebemos que as aulas de Matemática não devem ser centradas na mera apresentação ou exposição de regras e procedimentos, mas principalmente nas conexões que podem ser evidenciadas ao discutirmos determinado tópico (VAN DE WALLE, 2009).

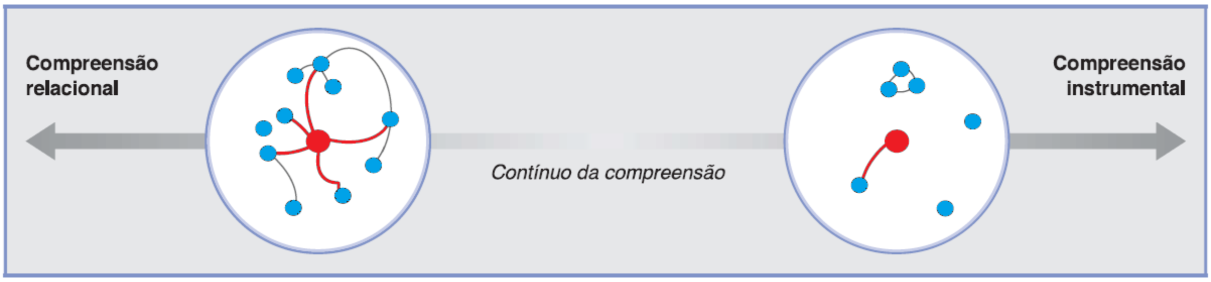


Figura 4 – Compreensão relacional e compreensão instrumental

Fonte: adaptado de Van de Walle (2009, p. 45).

Canavarro (2017) apresenta uma lista de vantagens ao desenvolvermos aulas de Matemática que propiciem uma riqueza de conexões para os discentes:

> Os alunos aprendem com maior aprofundamento da compreensão, nomeadamente quando diversas representações são conectadas; os alunos conseguem conceber a Matemática como uma atividade que faz sentido; os alunos desenvolvem capacidades transversais, nomeadamente de interrogar e interpretar no contexto das conexões abordadas; os alunos desenvolvem uma atitude mais favorável relativamente à Matemática, apreciando o seu valor como explicação das situações extra-matemáticas e possibilidade de predição/intervenção sobre essas situações; os alunos aprendem não só conteúdos da matemática como também dos assuntos extra-matemáticos que são abordados (CANAVARRO, 2017, p. 41-42).

Assumindo a importância de buscar a compreensão relacional, que se dá pela construção do maior número possível de conexões mentais, podemos considerá-la como um objetivo da aprendizagem matemática e, portanto, da resolução de problemas. Buscaremos entender como abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas e as ações docentes mencionadas na seção anterior podem impactar no desenvolvimento de uma compreensão relacional, ou seja, rica em conexões.

Um número considerável de heurísticas trazidas por Polya (2006) falam sobre representar os dados de um problema de diferentes formas: por meio de uma tabela, um diagrama, um desenho, uma expressão algébrica etc., para auxiliar-nos na compreensão do problema e na busca de uma estratégia de resolução. Além disso, em problemas para crianças dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, também é muito comum utilizarmos objetos físicos para representar quantidades (até mesmo os nossos dedos) e materiais manipuláveis para representar o sistema decimal. No Ensino Médio, podemos resolver problemas envolvendo funções reais de variável real representando-as a partir de sua lei de formação ou do seu gráfico, analisando as informações disponíveis em cada representação.

Canavarro (2017) afirma que:

> Vários estudos mostram que a profundidade da compreensão está relacionada com a força das conexões entre as representações matemáticas que os alunos tiverem interiorizado. Cada representação funciona como uma lente e a sua conjugação proporciona uma imagem mais completa e articulada do conceito (CANAVARRO, 2017, p. 39).

Concluímos, a partir disso, que as diferentes representações de um mesmo conceito que podem surgir durante a resolução de um problema enriquecem o aprendizado do aluno, e é importante buscarmos construir conexões entre tais representações. Canavarro (2017) afirma que as representações de conceitos matemáticos podem ser visuais, físicas, simbólicas, verbais ou contextuais (Figura 5). Um bom resolvedor de problemas tem a capacidade de transitar entre essas representações, e escolher aquela que apresenta maior potencial para resolver um problema específico:

> Estudantes capazes de aplicar e transitar entre diferentes representações de uma situação-problema ou de um conceito matemático, possuem um conjunto de ferramentas flexíveis e poderosas para a resolução de problemas. É importante que eles construam um repertório de conexões, como um "kit de ferramentas", que lhes ofereça caminhos alternativos e criativos de resolução para os problemas propostos. E, ainda, embora não seja condição suficiente para o sucesso na resolução de um problema, a habilidade de estabelecer conexões é necessária para o desenvolvimento da autonomia do estudante nessa atividade (ALLEVATO; ONUCHIC, 2019, p. 7).

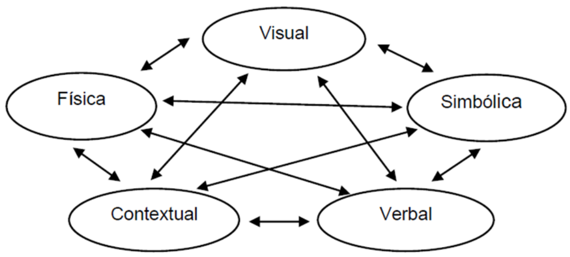


Figura 5 – Tipos de representações de um conceito matemático

Fonte: Canavarro (2017, p. 39).

Além das diferentes representações de um mesmo conceito, ainda há outras formas de estabelecermos conexões durante as aulas de Matemática e, mais especificamente, durante a resolução de um problema: entre a Matemática e outras áreas do saber, entre a Matemática e a vida real (ou mundo do trabalho), entre conteúdos de Matemática e entre conhecimentos prévios e novos (ALLEVATO; ONUCHIC, 2019). Em relação às conexões entre conhecimentos prévios e novos, ressaltamos que é importante que o professor tenha noção das conexões já construídas pelo estudante para partir delas e construir novas. Na resolução de um problema, isso implica fazer perguntas de acordo com a estratégia que o aluno pensou inicialmente, e não a partir das concepções do professor, pois a primeira favorece a compreensão relacional e a segunda a compreensão instrumental (VAN DE WALLE, 2009).

Ponte (2010) afirma que as conexões entre conteúdos ou representações matemáticas podem ser de temas de mesma área (como teorema de Tales e semelhança de triângulos, ambos relativos à Geometria Plana) ou temas de áreas distintas (como a representação algébrica e gráfica de um sistema de equações de primeiro grau). Além disso, o autor ressalta que existem também as situações em que os alunos desenvolvem conexões de modo incorreto, dando o exemplo do perímetro e da área, em que podem enxergar relações que não são verdadeiras sempre (por exemplo, "quanto maior o perímetro, maior a área", já que existem pares de polígonos em que o perímetro do primeiro é maior que o do segundo, mas a área do segundo é maior que a do primeiro, como na Figura 6). Nesse caso, o professor tem o papel de identificar tais conexões incorretas e corrigi-las, e isso pode vir à tona enquanto o estudante resolve um problema. Isso evidencia um outro processo importante durante a resolução de problemas: a avaliação, que pode acontecer não apenas durante testes ou provas, mas de modo contínuo durante as abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas (PIRONEL; ONUCHIC, 2021).

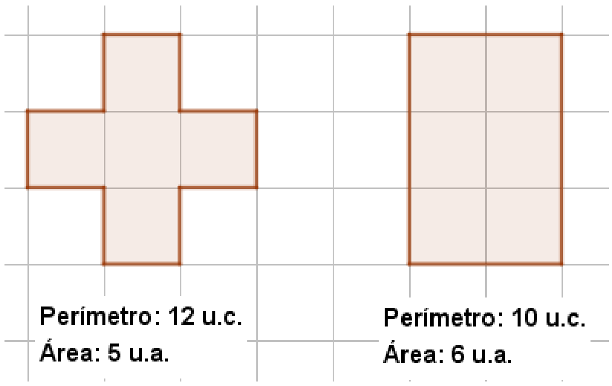


Figura 6 – Conjectura sobre a relação entre perímetro e área

Fonte: Produzido pelo autor.

Ponte (2010) ainda defende que as conexões entre a Matemática e aspectos exteriores a ela são importantes para melhorar a nossa capacidade de resolver problemas reais. Assim, compreendemos que existe, de fato, relação entre a (re)construção de conexões na Matemática com a capacidade de resolver problemas, seja convertendo uma representação em outra mais conveniente para resolver um problema, seja modelando uma situação da vida real com linguagem matemática, seja unindo diferentes áreas da Matemática para resolver um problema ou até mesmo resolvendo um problema de diferentes formas. Portanto, são importantes conhecimentos pedagógicos da Resolução de Problemas escolher atividades que permitam construir essas conexões, conduzir os alunos nesse processo através de questionamentos e, além disso, torná-los conscientes delas, para buscar potencializar o seu aprendizado. Concluímos que o estabelecimento de conexões deve fazer parte do dia-a-dia das aulas de Matemática, de forma intencional e continuada (CANAVARRO, 2017), e por isso se deve discutir esses aspectos desde a formação inicial dos professores de Matemática (ALLEVATO; ONUCHIC, 2019).

4 DESCRIÇÃO E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

Neste capítulo, nos debruçamos sobre a metodologia de pesquisa desta investigação, constituída a partir da sua pergunta de pesquisa e dos seus objetivos específicos. Descrevemos também como o curso de extensão sobre Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos foi estruturado e como se deu o seu andamento.

4.1 PERGUNTA DE PESQUISA E OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Como vimos, a Resolução de Problemas iniciou sua constituição como campo de pesquisa na Educação Matemática na década de 1960, embora o ato de resolver problemas já estivesse intimamente ligado à Matemática desde os tempos mais remotos. Essa área investigou (e ainda investiga) abordagens de ensino e aprendizagem que envolvem resolução de problemas, as quais buscam criar ambientes propícios para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. Para que isso seja potencializado, defendemos a discussão sobre aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas desde a formação inicial dos professores de Matemática, e por isso esta dissertação é pautada no desenvolvimento de um curso de extensão sobre tal assunto com licenciandos em Matemática.

A pergunta de pesquisa que embasa esta investigação é: **Quais são as concepções construídas por licenciandos em Matemática acerca da Resolução de Problemas e dos seus aspectos pedagógicos?** Esse questionamento desdobra-se em dois objetivos específicos, que são:

1. Averiguar quais concepções os licenciandos trazem sobre Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos antes da constituição do ambiente de discussão, a partir das suas experiências escolares e universitárias, bem como das suas reflexões pessoais;

2. Entender quais conhecimentos pedagógicos aplicados à Resolução de Problemas são valorizados e exercitados pelos licenciandos participantes do ambiente de discussão.

Cabe aqui um breve esclarecimento sobre o que consideramos “concepções”, termo central na nossa pergunta de pesquisa. Concordamos com Ponte (1994) quando afirma que “*concepções* são os marcos organizadores implícitos de conceitos, com natureza essencialmente cognitiva"[1] (PONTE, 1994, p. 199, grifo do autor, tradução baseada em Costa (2012)). O autor defende que as concepções constituem um modo de ver o mundo e organizar o pensamento, bem como condicionam a forma com que lidamos com as tarefas.

Para procurar responder à pergunta de pesquisa e atingir os objetivos específicos, foi realizada uma análise qualitativa dos dados produzidos com um grupo de discussões formado pelo professor-pesquisador e por alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. Essas informações foram registradas por meio de gravações de áudio, questionários e produções escritas dos (futuros) professores no decorrer das atividades propostas.

Optamos por uma pesquisa qualitativa, pois ela tem os seguintes atributos:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não a neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2004 apud BORBA, 2004, p. 1, grifo do autor)

Entendemos que a nossa pesquisa vai ao encontro de tais atributos, já que:

- É uma pesquisa que busca a compreensão das concepções formadas por licenciandos, fortemente influenciadas pelos sujeitos da pesquisa, suas histórias e convicções pessoais, pela época em que vivem e o lugar em que estão;
- A categorização dos dados foi definida *a posteriori*, pois era necessário que entendêssemos as concepções dos alunos sobre resolução de problemas para definir como seria realizada a análise;
- O pesquisador ministrou o curso de extensão, sendo responsável por conduzir os encontros, mediar as discussões e provocar reflexões a partir de questionamentos;
- O planejamento do curso de extensão pode ser reformulado, com novos textos, novos potenciais problemas, novos temas de discussão e novos participantes, evidenciando dados distintos dos que foram coletados inicialmente;
- E a condução dos encontros dependia fortemente das colocações dos participantes, de modo que mesmo com um planejamento idêntico, os encontros acabariam por ser conduzidos de maneira diferente se fossem outros sujeitos de pesquisa.

[1]Conceptions *are the underlying organizing frames of concepts, having essentially a cognitive nature*.

Desse modo, optamos por tal metodologia de pesquisa, já que pergunta de pesquisa, os objetivos específicos e a produção dos dados da presente dissertação estão de acordo com as características supracitadas.

4.2 O CONTEXTO DA PESQUISA

Para produzir os dados utilizados nesta dissertação, foi realizado um curso de extensão destinado a alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul a partir do terceiro semestre, ministrado pelo autor desta dissertação. O curso foi realizado na modalidade presencial no Campus do Vale da UFRGS, e seu objetivo geral foi refletir sobre aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas na Educação Matemática. Podemos elencar também os seguintes objetivos específicos:

- Conhecer os diferentes conceitos de problema na literatura;
- Resolver problemas de nível básico e superior, buscando argumentar de forma didática e pedagógica;
- Evidenciar os diferentes tipos de conexões que podem ser construídas a partir da resolução de um problema;
- E discutir sobre possíveis ações do professor em um ambiente de resolução de problemas.

A partir de tais objetivos, o curso de extensão foi planejado em seis encontros de 1h40min cada. Foram selecionadas questões para serem resolvidas e apresentadas, textos para serem discutidos e tópicos para refletirmos em conjunto. No primeiro encontro, foi preenchido um questionário inicial e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, os participantes e o professor-pesquisador apresentaram-se e foram propostas quatro questões para serem resolvidas em pequenos grupos. No encontro seguinte, os participantes apresentaram as suas resoluções e argumentaram se tais questões seriam problemas ou não. As questões foram variadas: havia uma questão contextualizada pensada para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental; outra, relativa à Matemática Pura e passível de resolução por uma fórmula possivelmente conhecida; uma que envolvia uma quantidade maior de passos de resolução, com modelagem de equações a partir de uma situação contextualizada; e outra, que permitia diversas respostas e estratégias.

No terceiro encontro, realizamos uma discussão sobre as características das atividades propostas, refletimos sobre um recorte da tese de Figueiredo (2017) que envolvia o conceito de problema e foi proposta a dedução de uma fórmula para calcular a área de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio unitário. No quarto encontro, um dos participantes apresentou a sua resolução da questão proposta no encontro anterior, o professor-pesquisador mostrou duas resoluções alternativas e pensamos em possíveis questões que seriam similares à trabalhada. No quinto encontro, discutimos o texto de Allevato e Onuchic (2019) sobre as conexões na resolução de problemas e analisamos possíveis conexões que poderiam ser feitas na questão do polígono inscrito. Por fim, no último encontro, construímos um quadro sobre ações docentes que poderiam favorecer ou desfavorecer o aprendizado dos estudantes durante a resolução de um problema, discutimos os conceitos de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e Conhecimento Matemático para o Ensino e refletimos sobre alguns trechos de Polya (2006).

Inicialmente, a proposta do grupo de discussão foi divulgada para os alunos de Licenciatura em Matemática da UFRGS por meios eletrônicos (e-mail e *WhatsApp*[2]) e a partir de convites presenciais feitos em algumas disciplinas ministradas no curso. 12 alunos e 6 alunas manifestaram interesse e preencheram um formulário *online* com sua disponibilidade, e os horários do curso de extensão foram escolhidos a partir dos horários disponíveis do pesquisador com maior número de estudantes inscritos. Por esse motivo, os encontros ocorreram nas tardes de terças e quintas-feiras, totalizando seis encontros de 1h40min cada. Os sujeitos da pesquisa foram Lucas, Marcelo, André, Leonardo e Alan, cujos nomes foram alterados para fins de anonimato durante esta pesquisa.

O curso de extensão do qual a presente dissertação trata, como já mencionado, foi proposto a alunos a partir do terceiro semestre letivo do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS. Escolhemos tal limite inferior para que os participantes tivessem uma base mínima de conhecimentos matemáticos construídos na universidade, bem como uma reflexão sobre Educação, de um modo geral, e sobre Ensino de Matemática, de um modo particular. Na Figura 7 e na Figura 8, vemos as disciplinas que licenciandos teriam como pré-requisito para a participação no curso.

[2] *WhatsApp* é um aplicativo para *smartphones* que possibilita a troca de mensagens de texto, chamadas de áudio e vídeo, entre outras funcionalidades.

Etapa 1

Código	Disciplina/Pré-Requisito	Caráter	Créditos	Carga Horária
MAT01341	GEOMETRIA I - MAT	Obrigatória	5	75
EDU01004	HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO: HIST. DA ESCOLARIZAÇÃO BRAS. E PROC PEDAGÓGICOS	Obrigatória	2	30
MAT01207	INTRODUÇÃO AOS NUMEROS RACIONAIS	Obrigatória	3	45
MAT01206	INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES ALGÉBRICAS	Obrigatória	4	60
EDU03097	POLÍTICA E ORGANIZAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA	Obrigatória	4	60
EDU01011	PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO I - A	Obrigatória	2	30

Etapa 2

Código	Disciplina/Pré-Requisito	Caráter	Créditos	Carga Horária
MAT01211	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E DOCÊNCIA I	Obrigatória	3	45
EDU01010	FILOSOFIA DA EDUCAÇÃO I	Obrigatória	2	30
MAT01063	FUNDAMENTOS DE ARITMÉTICA	Obrigatória	5	75
MAT01345	GEOMETRIA II - MAT - MAT01341 - GEOMETRIA I - MAT	Obrigatória	5	75
MAT01208	INTRODUÇÃO AOS NÚMEROS REAIS E COMPLEXOS	Obrigatória	5	75
EDU01012	PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO II - EDU01011 - PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO I - A	Obrigatória	2	30
MAT01191	VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA	Obrigatória	4	60

Figura 7 – Etapas 1 e 2 do curso de Licenciatura em Matemática (diurno)

Fonte: http://www.ufrgs.br/ufrgs/ensino/graduacao/cursos/exibeCurso?cod_curso=335. Acesso em: 12/10/2022.

Etapa 1

Código	Disciplina/Pré-Requisito	Caráter	Créditos	Carga Horária
MAT01341	GEOMETRIA I - MAT	Obrigatória	5	75
EDU01004	HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO: HIST. DA ESCOLARIZAÇÃO BRAS. E PROC PEDAGÓGICOS	Obrigatória	2	30
MAT01207	INTRODUÇÃO AOS NUMEROS RACIONAIS	Obrigatória	3	45
MAT01206	INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES ALGÉBRICAS	Obrigatória	4	60
EDU01011	PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO I - A	Obrigatória	2	30

Etapa 2

Código	Disciplina/Pré-Requisito	Caráter	Créditos	Carga Horária
MAT01211	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E DOCÊNCIA I	Obrigatória	3	45
EDU01010	FILOSOFIA DA EDUCAÇÃO I	Obrigatória	2	30
MAT01063	FUNDAMENTOS DE ARITMÉTICA	Obrigatória	5	75
MAT01345	GEOMETRIA II - MAT - MAT01341 - GEOMETRIA I - MAT	Obrigatória	5	75
MAT01208	INTRODUÇÃO AOS NÚMEROS REAIS E COMPLEXOS	Obrigatória	5	75
EDU01012	PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO II	Obrigatória	2	30

Figura 8 – Etapas 1 e 2 do curso de Licenciatura em Matemática (noturno)

Fonte: http://www.ufrgs.br/ufrgs/ensino/graduacao/cursos/exibeCurso?cod_curso=335. Acesso em: 12/10/2022.

Nota-se que tanto no curso diurno quanto no noturno, os alunos teriam estudado áreas da Matemática Pura, como Geometria, números e funções, bem como discutido questões acerca da Educação (História, Psicologia, Filosofia) e do Ensino de Matemática (na disciplina de Educação Matemática e Docência I).

4.3 DESCRIÇÃO DOS ENCONTROS

Nesta seção, descrevemos o andamento dos encontros no curso de extensão proposto.

4.3.1 Encontro 1

Neste encontro, realizado em 22 de setembro de 2022, os participantes assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice A) e preencheram um questionário inicial[3], para entendermos o contexto em que os sujeitos da pesquisa estavam inseridos a respeito da Resolução de Problemas:

1. Na sua concepção, o que é um problema?
2. Você teve alguma experiência com resolução de problemas na escola, na universidade ou nos momentos de prática da licenciatura? Descreva.
3. Você já estudou algum aspecto teórico sobre a tendência de Resolução de Problemas na Educação Matemática? Qual? Sob qual circunstância?
4. Você percebe alguma vantagem de conhecer e utilizar aspectos da Resolução de Problemas em sala de aula? Justifique.

Após o preenchimento (que foi feito em primeiro lugar para que os participantes não interferissem nas respostas uns dos outros a partir de suas falas), o pesquisador e os sujeitos se apresentaram, contando um pouco da sua trajetória acadêmica e experiência com Resolução de Problemas e, no caso dos participantes, o porquê de terem se inscrito num curso com essa temática.

Marcelo, 22 anos, se encontrava no 8.º semestre do curso. Afirmou perceber discrepâncias entre o público da universidade e o da Escola Básica, o que tornava difícil para ele incluir abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas na sua prática pedagógica, que seria muito diferente da teoria pensada na universidade. Os alunos que ele conheceu tinham resistência em trabalhar com questões desafiadoras e atividades diferentes de procedimentos expositivos e algorítmicos, alegando simplesmente que “não sabem fazer”, sem esforço para superar as suas dificuldades, ou que atividades diferentes “não são aula”.

Para ele, um problema é “uma situação, um contexto, que age como motor de busca para novos conhecimentos. Pode ser interno à Matemática ou provir de outras

[3]As respostas do questionário foram corrigidas, caso tivessem algum erro gramatical ou abreviação, para facilitar a leitura.

áreas, e nem sempre está formulado previamente como uma pergunta". Em relação à sua vivência com RP, afirma: "tive algumas experiências, mas nunca as fundamentei fortemente com referenciais teóricos na área. A mais marcante para mim foi quando utilizei problemas para introduzir o conceito de função quadrática em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio, atividade na qual utilizei problemas relacionados a áreas de retângulos". Acrescentou, em relação aos referenciais teóricos, que apenas leu alguns textos em disciplinas na graduação, mas sem especificar quais deles.

Marcelo percebe vantagens em utilizar abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas em sala de aula: "Acredito que o principal potencial da tendência seja desenvolver a capacidade de criar soluções próprias e originais para situações novas, em vez de apenas reproduzir algoritmos".

Leonardo, 20 anos, está no 5.º semestre do curso. No seu relato sobre o porquê do interesse em um grupo de discussão sobre RP, ele contou que, ao resolver questões do Exame Nacional do Ensino Médio com seus alunos, percebeu que tinha muita facilidade, o que não acontecera alguns anos antes, quando ele estava fazendo a sua própria edição do exame para ingressar na universidade. Isso foi um incentivo para buscar entender como poderia potencializar o ensino de Matemática utilizando Resolução de Problemas, de modo que os seus alunos também evoluíssem ao resolver tais questões. No seu trabalho de conclusão de curso, Leonardo quer estabelecer conexões entre Resolução de Problemas e Aprendizagem Significativa no ensino de frações.

Quando questionado sobre o que era um problema para ele, Leonardo afirmou: "um problema é uma situação, fictícia ou real, onde não se sabe ao certo como, ou sequer se é possível, resolver. Na perspectiva escolar, gosto de pensar que o problema ajuda a desenvolver o raciocínio lógico dos alunos, bem como fixar conceitos trabalhados".

Leonardo também teve algumas experiências com Resolução de Problemas: "Na escola, a maioria (se não a totalidade) dos 'problemas' eram apenas exercícios de fixação. Na universidade, já tive cadeiras, como a de Combinatória I, que se baseavam na resolução de problemas. Também participo do PIC, Programa de Iniciação Científica, que usa resolução de problemas. Já tentei aplicar, de forma sucinta, essas metodologias nas minhas aulas particulares, mas não sinto ter domínio quando o assunto é elaborar a aula 'do zero'".

Em relação ao estudo de aspectos teóricos da Resolução de Problemas, ele afirma ter algum conhecimento: "No PIC tive acesso a alguns materiais sobre o tópico, também li alguns textos do Paulo Cruz sobre resolução de problemas na Combinatória.

Em geral minhas experiencias estão ligadas ao que foi disponibilizado na cadeira de Combinatória I, como ‘material extra’”. O aluno ainda ressalta que não se recorda dos outros autores que havia estudado.

Quando questionado se via alguma vantagem em conhecer e utilizar aspectos da Resolução de Problemas na sala de aula, ele responde: “Sim, vários! O desenvolvimento de estratégias de organização (que podem ser aplicadas até fora de sala), o desenvolvimento lógico, a fixação de conteúdos estudados etc. Entender conceitos e saber aplicar modelos matemáticos em situações diversas é um grande indicativo do aprendizado dos discentes, na minha opinião”.

André, 23 anos, está no último semestre do curso e escrevendo seu trabalho de conclusão. Inicialmente, pensou em utilizar a RP em seu trabalho, mas desistiu. A partir de sua ideia original, teve contato com alguns referenciais teóricos da área, que citou em sua apresentação e em seu questionário. Alegou ter uma preferência por Lourdes Onuchic e Norma Allevato, que trabalham com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Buscando conceituar problema, André afirma que “é possível descrever um problema a partir da ideia do desconhecido e do método de estabelecer um caminho para passar a conhecê-lo. No ato de conhecer, conseguimos, também, resolvê-lo”. Em relação às suas experiências com Resolução de Problemas, diz o seguinte: “Durante as disciplinas de Educação Matemática e Docência I e II e nas atividades de ensino de Estágio II e III foram abordadas discussões envolvendo resolução de problemas. Nos estágios, foi possível desenvolver atividades práticas sobre resolução de problemas no ensino-aprendizagem de Matemática”.

Ao ser questionado se havia tido contato com referenciais teóricos na área, afirma: “Sim, durante a pesquisa para o tema do meu TCC. Embora tenha mudado a temática posteriormente, estudei a tendência de RP sob a concepção de Polya, conhecido como o primeiro na literatura a abordar este tópico. De referenciais teóricos mais recentes, aponto Onuchic, Allevato e Dante, autor de livros didáticos”.

Sobre as vantagens de utilizar Resolução de Problemas em sala de aula, declara: “A RP possibilita uma abordagem na sala de aula que promove diálogo e prática nos objetos de conhecimento a serem abordados, fomentando o ensino-aprendizagem-avaliação, do aluno e do professor. Além disso, existem as concepções de ensinar VIA RP, PARA resolver problemas e COM RP. É importante, também, diferenciar Resolução de Problemas de exercícios-problema, corriqueiros na sala de aula”.

Alan, 23 anos, está no 5.º semestre da graduação. Como ainda não havia feito estágios de prática, apenas de observação, não teve a oportunidade de utilizar abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas em sala de aula, embora tenha tido alguma experiência durante as disciplinas teóricas do curso a partir da leitura de artigos. Sobre o conceito de problema, alega que é “uma ‘circunstância’ em que se tem informações conhecidas e desconhecidas e a partir das informações conhecidas se tenta determinar as desconhecidas”.

Em relação às suas experiências com RP, afirma: “Enquanto aluno da Escola Básica, não tive tanta experiência com a resolução de problemas, era mais algo mecânico, como por exemplo ‘decorar’ passos de resoluções de problemas e aplicar posteriormente. Enquanto aluno da graduação, tive experiências teóricas em disciplinas mencionadas no item posterior e experiências práticas em disciplinas como Geometria II”. Quando questionado se já havia tido contato com aspectos teóricos sobre RP, responde: “Sim, leitura e discussão acerca de alguns trechos do livro do Polya, artigos da Lourdes de la Rosa Onuchic nas disciplinas de Educação Matemática e Docência I e II e Pesquisa em Educação Matemática”.

Por fim, sobre as possíveis vantagens de utilizar RP em sala de aula, afirma: “Acredito que uma das vantagens é estimular o próprio raciocínio lógico matemático e independente do aluno, sair da zona de conforto de só estimular a repetição por parte do aluno”.

Lucas, 24 anos, 6.º semestre da Licenciatura em Matemática, afirmou ter defasagens na sua formação teórica sobre Resolução de Problemas, por não ter feito as disciplinas de Educação Matemática e Docência I e II (o aluno conseguira a liberação dessas disciplinas). Ele relata ter feito uma aula de resolução de atividades sobre progressões aritméticas e geométricas antes de formalizar o conteúdo e ter gostado muito da experiência. Todavia, uma das questões da lista disponibilizada para os alunos foi muito difícil para o contexto em que estavam inseridos, e isso acabou por desmotivar os estudantes. O participante acredita que seria interessante ter uma melhor formação sobre Resolução de Problemas para evitar esse tipo de situação, sabendo como aplicar abordagens envolvendo RP adequadamente.

Ao conceituar problema, ele traz a seguinte ideia: “é qualquer situação que nos seja apresentada (e nos desafie) sem que sua solução seja evidente”. Sobre suas experiências com RP, descreve: “Na disciplina de Pesquisa em Educação Matemática fiquei com o grupo que apresentou os seminários sobre resolução de problemas, lendo um artigo para tal”.

Ao ser questionado se havia estudado aspectos teóricos sobre RP, responde: “Sim, para um dos seminários da disciplina de Pesquisa. O artigo que li trazia toda a história de Resolução de Problemas, e apresentava-o como uma tendência, mas tratava-o como uma metodologia de ensino de Matemática, trazendo até um roteiro (uma ideia, modelo) de como aplicar em sala". Em relação às vantagens de utilizar RP em sala de aula, afirma: "Acredito que a resolução de problemas tem o potencial de movimentar o aluno a pensar. O problema para o aluno, inicialmente, o desconcerta, o deixa até mesmo instigado a descobrir a solução. Este processo desperta no aluno o pensamento matemático, não apenas resolver questões e exercícios genéricos".

Após o preenchimento dos questionários e as apresentações, foi exposto como se daria o andamento dos encontros. Por fim, foram disponibilizadas quatro atividades para os participantes, que se dividiram nos seguintes grupos: grupo 1, formado por Lucas, Marcelo e Leonardo; e grupo 2, formado por André e Alan. As questões estão listadas a seguir:

a) Joãozinho tinha 12 laranjas em casa e comeu duas no lanche da tarde. Quantas laranjas sobraram?

b) Determine a área de um triângulo equilátero de lado 3 cm.

c) A bandeira da figura é formada por um retângulo 40 cm x 20 cm e tem duas cores (branca e cinza). A parte branca é composta por duas listras de mesma largura que se cruzam e são perpendiculares aos lados do retângulo. A parte cinza é a área do retângulo que não foi coberto pelas listras. Qual deve ser a medida da largura das listras para que a área branca seja igual à área cinza?[4]

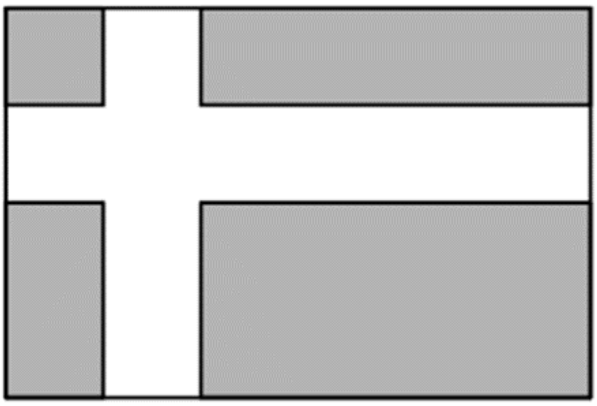


Figura 9 – Figura da questão (c)

Fonte: Banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas - 2020. Disponível em: http://www.obmep.org.br/banco.htm. Acesso em: 19/07/2022.

d) Determine uma estratégia para medir a altura de um prédio ou construção à sua escolha, apenas com instrumentos que você ou seu grupo possuam em casa.

[4]Fonte: Banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas - 2020. Disponível em: http://www.obmep.org.br/banco.htm. Acesso em: 19/07/2022

O objetivo era que realizassem três movimentos:

1. Resolver as questões propostas, pensando não apenas em chegar à resposta, mas visando o processo pedagógico, isto é, resolver pensando como aquela questão poderia ser trabalhada ou resolvida em aulas de Matemática.

2. Discutir, para cada uma das questões, se seriam problemas ou não, apresentando seus argumentos.

3. Pensar em características que diferenciam a questão, ou a sua resolução, das demais apresentadas.

Os participantes trabalharam nas questões até o fim do encontro, promovendo diálogos nos grupos e sem fazer perguntas para o professor-pesquisador.

4.3.2 Encontro 2

O segundo encontro do grupo foi realizado no dia 27 de setembro de 2022. A partir desse encontro, André e Alan não se fizeram mais presentes, por questões de trabalho. Lucas, Marcelo e Leonardo, entretanto, participaram das atividades propostas. Nesse encontro, a ideia era realizarmos uma plenária para discutirmos as reflexões que o grupo fez no encontro anterior.

PP[5]*: Vocês fiquem bem à vontade, tá? Hã... Falem, assim, sobre o que vocês pensaram, né, nessas quatro questões [...]. Resolver a questão como se vocês tivessem resolvendo aqui pra uma turma de alunos imaginários, tá? Trabalhem bem assim a parte pedagógica e depois vamos comentar sobre as questões, né, se vocês acham que é um problema ou que não é um problema, por quê, o que que essa questão tem de especial, que tipo de habilidade essa questão requer [...].*

Marcelo ficou responsável por resolver a primeira questão, que envolvia quantidades de laranjas. Ele iniciou lendo a questão em voz alta, e logo em seguida comentou:

Marcelo: Acho que uma das coisas importantes da nossa discussão, que depois, é, entrou no nosso debate sobre essas questões serem problemas ou não, é o tratamento que a gente daria em relação a pra quais alunos a gente tá explicando, ao nível de dificuldade, ao nível escolar, enfim. Então, isso daqui, pensando em uma turma de Fundamental II, que seria o nosso, hã, público-alvo, talvez, parece um problema bastante simples... Ele tinha 12 laranjas... Um problema, uma questão, tem que cuidar

[5]Professor-pesquisador.

isso... 12 laranjas, comeu duas, 12 menos 2 é igual a 10. Mas o ponto de discussão seria pra um aluno que tá começando a escola no primeiro ano, é, que os símbolos pra números e pra operações não são coisas bastante trabalhadas já. Talvez, nesse nível, uma explicação talvez pudesse ser desenhar as laranjas, fazer círculos (Figura 10).

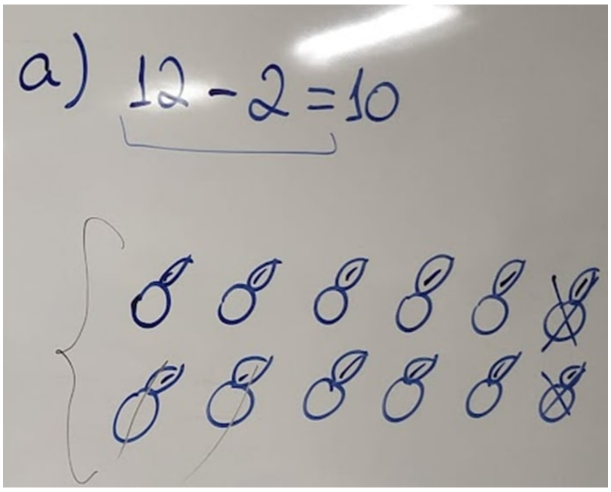


Figura 10 – Resolução da questão (a) por Marcelo no segundo encontro

Fonte: Dados da pesquisa.

Leonardo comentou que um tópico de discussão que surgiu no grupo sobre essa questão era que essa atividade seria um problema para um aluno que não conhecesse a operação de subtração, mas algo do tipo “$12 - 2 =$” não seria um problema, nem sequer seria considerada uma questão, tampouco, pois o aluno nessa situação não entenderia a simbologia. Lucas mencionou a possibilidade de construirmos uma questão similar:

Lucas: Vou botar uma coisa, mas não sei se mudaria o problema [...]. E se fosse assim: [...] Maria tem 8 e Joana tem 12 laranjas. Quantas laranjas Joana tem a mais do que Maria? Esse é um problema pra minha sobrinha que tá no terceiro ano. Eu vou ser sincero: se desse esse problema aqui pra ela, ela já sabe a conta de subtração, mas ainda assim eu sei que primeiro ela desenharia, e depois ela faria a continha, ou ela faria com os dedos. Como é 12, ela não conseguiria fazer. Então ela faria o desenho, riscaria ou apagaria com a borracha. [...] Aí eu fiquei pensando: a conta seria exatamente... muito parecida, né, pra gente descobrir a diferença, mas a forma como o enunciado é escrito, vamos botar então lá, uma tem 10 e outra tem 12, mas acho que a diferença é muito pouca, eles iam se tocar muito fácil talvez. [...] Vai talvez perder a característica de problema [...].

Marcelo: Eu acho que isso entra na discussão que a gente teve. Talvez aqui eu esteja me adiantando um pouco, mas já que a discussão trouxe, né. Que a questão *de ser ou não um problema talvez não seja algo intrínseco da questão, pelo menos não apenas, né. Mas envolva muito do quanto o aluno, a pessoa que tá resolvendo, já sabe ou não sabe. E possivelmente possa ser um problema, ou não. Um problema pra uma pessoa pode não ser pra outra.*

Após as colocações dos participantes, o professor-pesquisador fez alguns comentários. Inicialmente, perguntou qual seria a conclusão do grupo: se seria um problema ou não. A resposta dos três foi que isso depende.

PP: Depende do quê?

Leonardo: Depende do nível de conhecimento do aluno.

Lucas: Mais especificamente, nessa questão depende se ele sabe... ãh... subtração? Se ele sabe subtração. Se o aluno só sabe contar, seria um problema [...].

PP: E se um aluno, ãh, sabe subtração. Será que obrigatoriamente não seria um problema?

Lucas: Ãh, nesse caso do exemplo (a), pelo que eu lembro, guris, também agora já me esqueci, mas a gente chegou que esse, no caso (a) não seria um problema. Se ele soubesse o conteúdo de subtração não seria um problema. Seria isso, né?

Marcelo: É que eu acho que a gente tem que, ãh, clarificar o que a gente tá pensando quando a gente fala em saber subtração. Saber subtração é saber fazer essa continha seguindo o algoritmo ou é saber usar subtração em todos os contextos que ele aparece? Se ele só sabe usar o algoritmo, acho que pode ser um problema. E eu acho que é difícil falar também "é um problema" ou "não é um problema". Pra mim faz mais sentido pensar "pode ser um problema" ou "não é um problema".

O professor pesquisador disse que achou interessante a ideia de que uma mesma estratégia de resolução, no caso a operação de subtração, pode gerar questões diferentes e, de acordo com a concepção de Lucas, com níveis de dificuldade distintos. Assim, os participantes foram questionados se a explicação para os alunos feita por Marcelo mudaria no caso de querer saber quantas laranjas uma pessoa tem a mais do que outra. Leonardo afirmou que a expressão com a subtração seria a mesma, mas a representação visual da situação não, e trabalhou com um exemplo em que uma pessoa tem 12 laranjas e a outra duas. Em relação aos desenhos das laranjas, ele optaria por desenhar as quantidades de cada pessoa e ir cortando uma laranja de cada um, simultaneamente, até que as laranjas da pessoa com a menor quantidade tivessem sido todas cortadas (Figura 11).

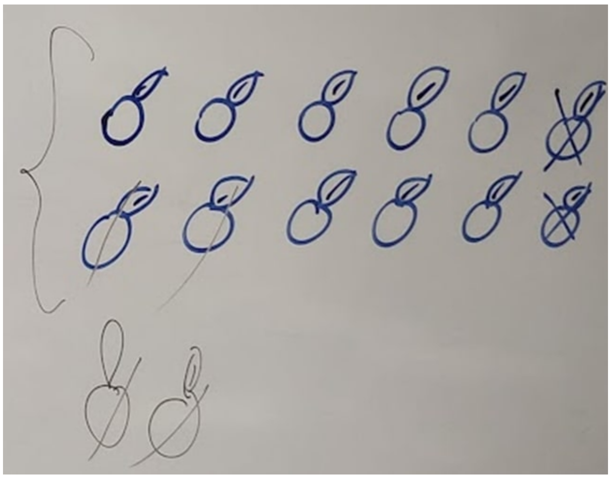


Figura 11 – Resolução da questão (a) remodelada por Leonardo no segundo encontro

Fonte: Dados da pesquisa.

O professor-pesquisador questionou os participantes sobre o comentário anterior de Leonardo, que defendera que propostas do professor que envolvessem simbologias desconhecidas para o aluno (como “$12 - 2 =$”) não constituíam problemas, nem questões propriamente ditas, já que não fariam sentido para o estudante, e seriam apenas rabiscos no quadro. Na retomada do assunto, eles complementaram a sua explicação, fazendo uma comparação com integrais para alunos do terceiro ano do Ensino Médio (cuja base curricular não contempla tal assunto).

O professor-pesquisador questionou qual era o conceito de problema que os alunos estavam utilizando para fazer as classificações das atividades, buscando entender se o argumento dos participantes sobre simbologia matemática era condizente com as condições que eles haviam estabelecido para uma questão ser problema ou não.

Leonardo: Um problema é uma situação que tu não sabe necessariamente se ele tem resolução ou não, onde tu... eu tô pensando que preciso de Matemática, tá? É, onde tu tem que... abstrair o que tá sendo dito ali pra ti, pra tu ler aquilo ali a partir de um modelo matemático, entender... resolver esse modelo matemático, entender o que esse modelo tá te dando, no caso o que que o resultado significa, e daí tu abstrair de volta pra... pra... pro exercício, pra tu saber qual que é a tua resposta. Entendeu? Vai um pouco... Hã... É o processo que eu uso sempre pra resolver problemas com os meus alunos, é, entender quais são as informações que o problema tá me dando, eu faço aqui a... a listinha das informações, entender aonde eu quero chegar, resolvo as continhas e vejo se faz sentido o resultado que eu cheguei [...] com o que eu queria descobrir. Sabe? Eu acho que o problema, ele vai mais nessa ideia. O exercício, no entanto, ele não... ele não tem esse processo de tipo tu ir e voltar na tua abstração, é só tu entende o que tá sendo feito ali e tu repete várias vezes aquilo dali pra tu *confirmar que tu entendeu a conta, que tu entendeu a formulazinha, sabe? Por isso que, por exemplo, eu acho que se a gente botasse várias coisas do tipo... ah... o enunciado: resolva. Daí tem letra a,* $12 - 2 =$*. Letra b, ãh,* $3 - 2$*. Letra c... E assim por diante. Isso daqui não é um problema, sabe? Isso daqui não é um problema, isso é só eu pegando e aplicando o meu modelo. Se eu pegasse por exemplo, daí, ãh, alunos que já aprenderam [...], falando de uma maneira orgânica, a subtração, e eu passar o problema das laranjas, não tem diferença entre o problema das laranjas e isso daqui [aponta para o* $12 - 2 =$*] pra eles. E daí deixa de ser um problema pra eles. É o que a gente tava falando, que depende do nível de conhecimento do aluno.*

PP: Tá, mas a questão é $12-2$*, então nunca em nenhuma circunstância poderia ser um problema?*

Lucas: Hmmm...

Leonardo: Uou... E agora? Uou!

PP: Porque o que vocês argumentaram no início é que ser ou não ser um problema depende da pessoa que está resolvendo, né, é o que vocês concluíram a partir da questão das laranjas. [...] Agora, uma questão do tipo $12 - 2 =$*, pode ou não pode ser um problema?*

Marcelo: Ideia do momento, tá? Talvez eu esteja redondamente errado. Talvez isso possa ser um problema pra um aluno que saiba fazer subtração com um algarismo só. Se ele saber fazer só $8 - 2$*,* $9 - 2$*,* $5 - 2$*, e daí chega aqui:* $12 - 2$*. Como eu resolvo isso? Só que eu acho que pra ser um problema, é... também tem que ser algo que... talvez essa não seja a melhor palavra, mas que de certa forma mexa contigo, sabe? Que te deixe intrigado. Então nesse sentido talvez possa ser um problema pra um aluno que olhe isso e pensa "não, como será que faz? São dois dígitos, sei fazer com um". Mas se isso for algo que ele vai olhar e que não vai deixar ele nada intrigado... Não sei. Então eu não sei se isso teria muito potencial pra deixar alguém intrigado, também, por ser uma coisa tão formal, talvez. Pra um aluno que nessa fase estaria num momento, tipo... Ele não é nenhum matemático que olha pra um problema formal e pensa "nossa, que coisa interessante", sabe? Embora isso seja possível também.*

PP: Então um problema necessariamente tem que instigar?

[...]

Leonardo: Depende do que a gente tá definindo como instigar. Se instigar é tipo "nossa, vamos fazer esse problema, galerinha!", e daí a turma responde "vamos!", não, não necessariamente.

PP: Instigar no sentido de ter o desejo de resolver.

Marcelo: E talvez possa ser no sentido que tu acha aquilo interessante, e isso te leva a resolver, ou no sentido de que aquilo seja uma necessidade, e aí isso te leva a resolver. Porque quando a gente pensa em problemas, é... de outras áreas do conhecimento, ou do cotidiano e tal, tem questões que tu busca uma solução não porque seja uma coisa que te motiva. "Ah, eu vou fazer uma pesquisa de preço porque eu gosto muito de fazer pesquisa de preço". Não, porque eu quero gastar menos. Isso é uma coisa que demanda trabalho, que pode ser chata, mas que eu vejo algum sentido em fazer aquilo ali.

Lucas: Pra mim, um problema só tem que ter uma coisa: tem que desafiar. Pra mim, não precisa nem instigar [...]. Se tu consegue levar alguma coisa pro aluno que, sei lá, de alguma forma deixe ele desconfortável, não que ele deseje fazer, mas que capture a atenção, que desafie ele.

[...]

Marcelo: Eu acho que pra algo te desafiar tu tem que estar minimamente instigado pra aquilo, porque eu não me sinto muito desafiado pra fazer coisas que eu faço porque eu sou obrigado, no sentido de que elas são impostas [...].

Nesse ponto da discussão, Leonardo retomou a sua opinião a partir das colocações dos colegas e concluiu que, na verdade, $12 - 2$ pode, sim, ser um problema, dependendo do contexto em que está inserido. Ele trouxe ainda outros exemplos. Para ele, $3 - 7$ é uma conta de subtração, sem contexto, que pode ser um problema se os alunos ainda não aprenderam a trabalhar com números negativos. Ele relembra também um problema da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP) que pedia que se calculasse o algarismo das unidades do número 2^{2009}.

Embora Leonardo tivesse concluído que atividades de Matemática Pura possam também ser consideradas problemas, o professor-pesquisador trouxe à tona novamente a ideia da possível necessidade de conhecer a simbologia utilizada para que a situação seja considerada um problema, conforme Leonardo havia elencado anteriormente. Os três participantes chegaram ao consenso de que é necessário entender a simbologia utilizada e ter meios para chegar em uma resposta para uma questão ser considerada um problema.

Marcelo: Se ele não tem meios de tentar entender o que aquilo significa, né. Acho que tem uma história de que os... hieróglifos? Acho que os hieróglifos... ficaram muito tempo sem [...] a comunidade saber decifrar o que eles significavam. E tipo, *isso era um problema, tu não sabe o que aquilo significa, mas o que tu tenta fazer é decifrar. [...] E aí tu busca maneiras de fazer isso. Se a ideia for tentar entender o que isso significa e depois resolver, talvez possa ser visto como um problema. [...] Só que aí eu acho que o problema não é* $12 - 2$*, quanto é* $12 - 2$*, o problema passa a ser "o que isso significa?".*

O professor-pesquisador comentou que os participantes estavam visualizando as duas situações como disjuntas, ou seja, ou se calcula $12 - 2$, ou se entende o que significa. A partir disso, ele questionou sobre a possibilidade de o problema "o que isso significa?" fazer parte da resolução do problema $12 - 2 =$, como um problema auxiliar. Os participantes concordaram, a partir disso, que uma situação em que não se entende a simbologia pode também ser considerada um problema, se o aluno tiver condições e interesse para entender uma nova forma de comunicação antes desconhecida.

Marcelo ainda trouxe a ideia de que o tipo de ferramenta que o resolvedor possui pode, também, impactar a classificação da questão em problema ou exercício, trazendo o exemplo de que desenhar um gráfico à mão ou utilizando algum *software* são atividades que podem envolver níveis de dificuldades diferentes. Lucas manifestou a preocupação de que as condições que os participantes estavam elencando para uma situação ser um problema estavam se tornando numerosas, e seria interessante ter uma única condição que categorizasse questões em problemas ou exercícios. Ele sugeriu que aquilo que distingue um problema de um exercício é a situação fazer o resolvedor pensar, mesmo que ele já conheça os conteúdos que seriam usados como ferramentas para resolver a questão.

Após uma hora de discussão, o foco mudou para a questão (b), que envolvia o cálculo da área de um triângulo equilátero. Os três comentaram que haviam concluído que essa atividade era um problema dependendo do contexto, mesmo antes das discussões dessa aula, embora com algumas dúvidas. Lucas mencionou a existência de uma fórmula para determinar a medida, mas preferiu resolver a atividade sem utilizá-la, pois não havia aprendido tal procedimento na escola.

Lucas: A primeira coisa que eu tinha pensado em explicar pro aluno... Eu faria a representação, tá, com as medidas. [...] Eu ia falar pra eles que a gente pode dividir esse triângulo em dois, tá, e que esse triângulo aqui é exatamente um triângulo retângulo. Então, pra calcular a área desse triângulo aqui, a gente só precisa saber da base e multiplicar pela altura e dividir por dois, que é a área do triângulo retângulo, que eu penso que eles já saberiam se eles tão vendo isso aqui

Ele continuou, afirmando que a base do triângulo retângulo era metade da base do triângulo equilátero, e portanto $\frac{3}{2}$, e que "o que a gente não sabe é a altura, e a gente vai usar uma Pitágoras pra resolver”. O participante aplicou o Teorema de Pitágoras, como indicado na Figura 12, e prosseguiu explicando as manipulações algébricas que fez, obtendo o valor da altura e calculando a área. No fim, questionou se ele não ter usado a fórmula era condição suficiente para configurarmos essa atividade como resolução de um problema, e não de um exercício.

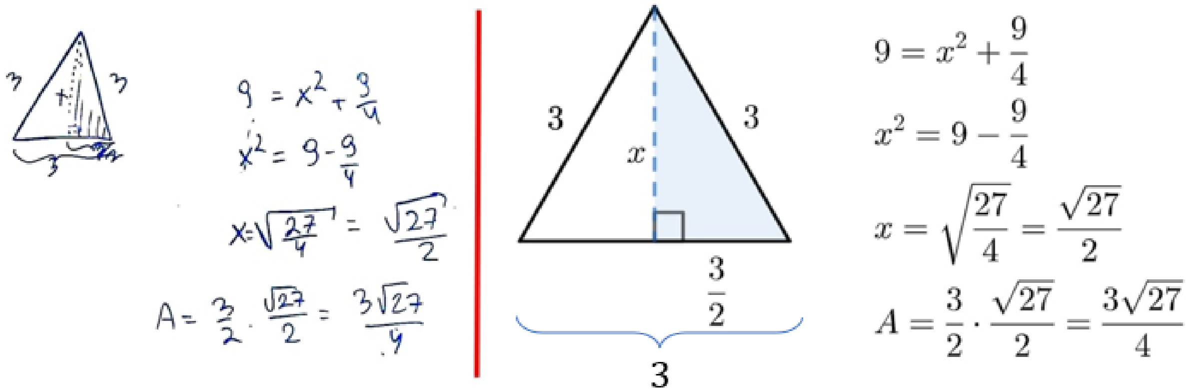


Figura 12 – Resolução da questão (b) por Lucas no segundo encontro

Fonte: Dados da pesquisa.

Leonardo: Tu já se habituou a fazer desse jeito sempre, correto?

Lucas: Tipo, pra mim, fazer isso aqui ou fazer com a fórmula, só dá mais conta, nisso eu concordo.

PP: Pra ti é trivial isso, pra ti é uma coisa automática ou pra ti é algo difícil?

Lucas: Pra mim isso é trivial. Esse é o caminho que eu sei que dá pra fazer. Eu aprendi a calcular a área do equilátero assim, pensando no triângulo retângulo.

Leonardo: Pra ti isso não é um problema, pra um aluno que não sabe a fórmula... $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$*? Pra um aluno que não sabe isso, seria um problema...*

PP: Poderia ser um problema. Vocês não podem deduzir isso com 100% de certeza. [...] Ele já fez tanto disso na vida dele que ele já algoritmizou.

A questão (c), sobre a bandeira, foi resolvida por Leonardo. Cabe ressaltar que enquanto Marcelo estava explicando a questão (a), Leonardo estava transcrevendo o enunciado da terceira questão em uma outra parte do quadro. O professor-pesquisador disse que ele não precisava se dar ao trabalho de escrever toda a questão, mas Leonardo insistiu, afirmando que estava agindo como faria se estivesse em uma sala de aula com os seus alunos. Inclusive, ele trocou as cores cinza e branca por azul e vermelha, como podemos ver na Figura 13.

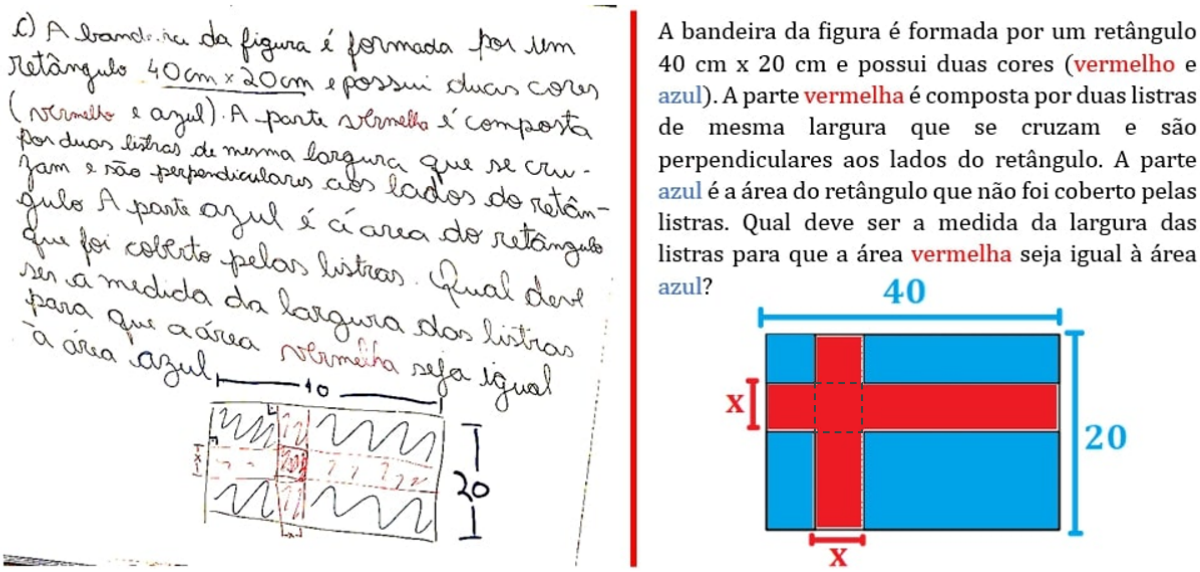


Figura 13 – Enunciado da questão (c) por Leonardo no segundo encontro

Fonte: Dados da pesquisa.

Leonardo iniciou realizando a leitura da questão, e denominou x a largura dos retângulos vermelhos. Perguntou para os demais participantes qual seria a área total, e a partir da multiplicação da base e da altura, concluiu que a área do retângulo maior é de 800, sem especificar a unidade de medida. Afirmou que, para que as áreas vermelha e azul sejam iguais, ambas devem ser metades da área total calculada anteriormente, ou seja, 400. Ele afirmou que, para descobrirmos, portanto, a largura x, deveríamos modelar a área vermelha.

Leonardo: A gente pode perceber que essas duas listras, elas nada mais são do que dois retângulos, né, um deles tem largura x e comprimento 40, enquanto o outro tem largura x e comprimento 20. [...] Minha área vermelha, ela é x vezes 40 mais, que é essa listra aqui [aponta para a horizontal] x vezes 20, que é essa listra aqui [aponta para a vertical]. [...] Quando a gente tá calculando, a gente tá calculando toda essa área e toda essa área. Percebam que onde elas se cruzam tá sendo contado duas vezes.

A partir disso, foi modelada a área da intersecção como x^2, e Leonardo procedeu igualando a área modelada a 400 e disse que optou por aplicar a fórmula de Bhaskara (Figura 14).

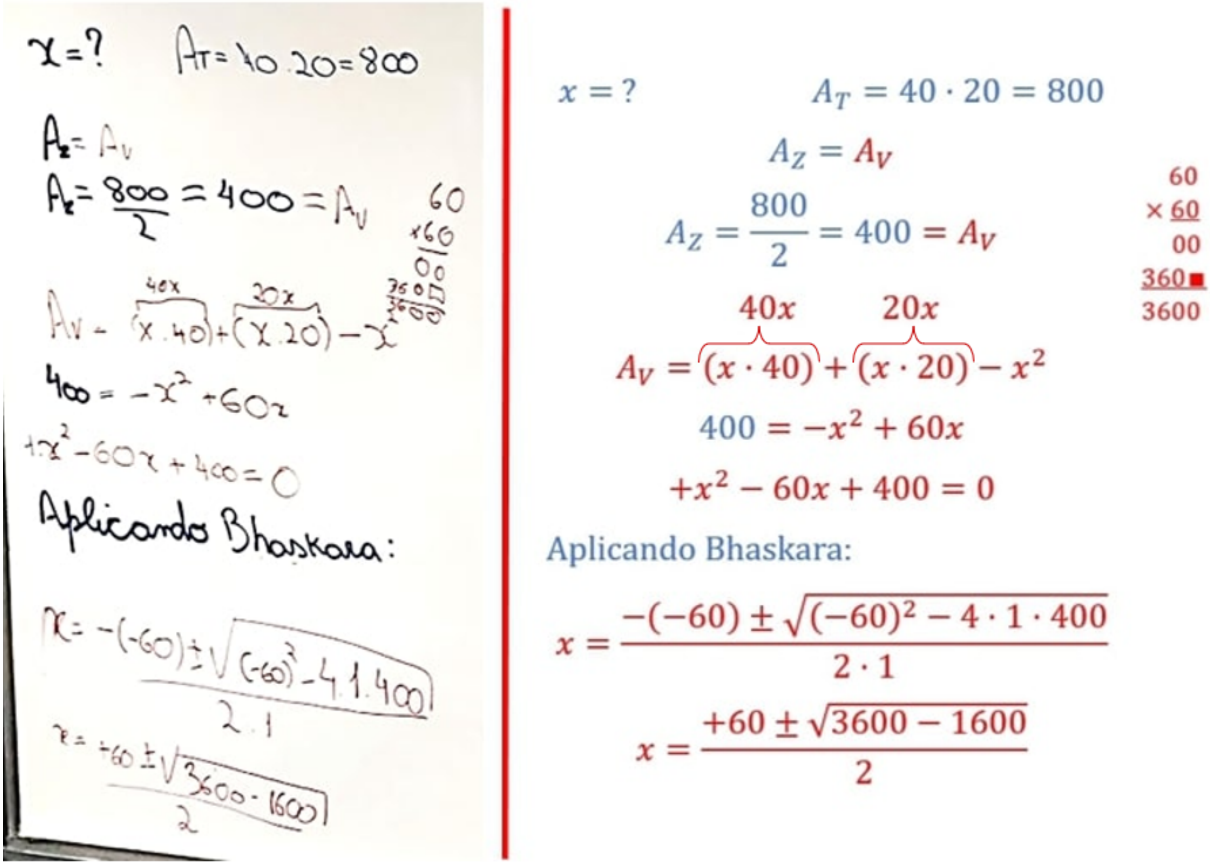
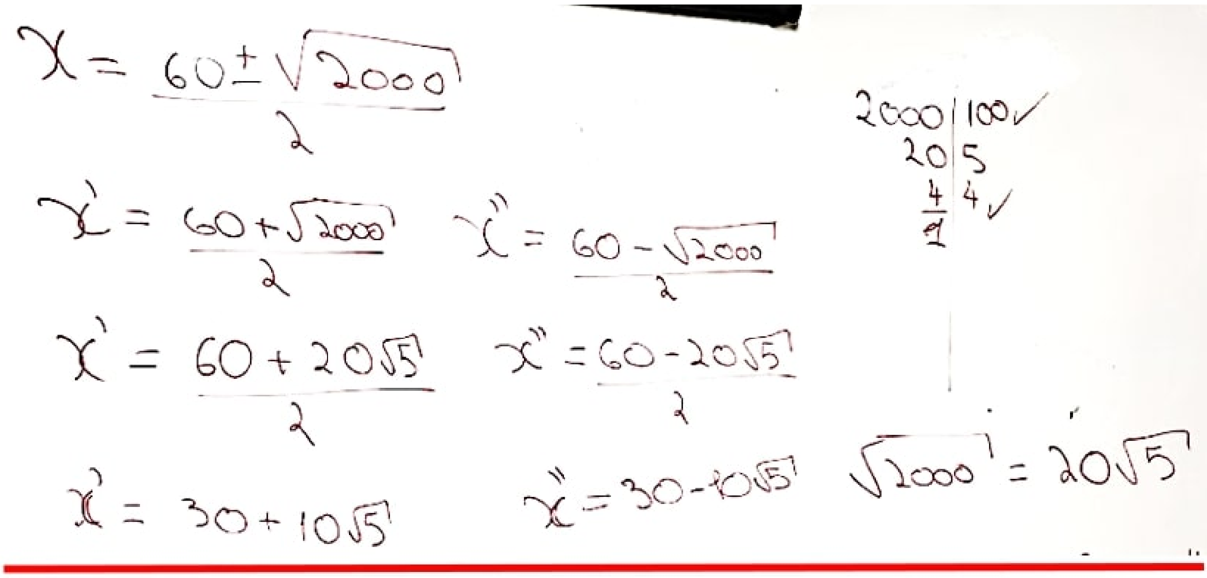


Figura 14 – Resolução da questão (c) por Leonardo no segundo encontro (quadro 1)

Fonte: Dados da pesquisa.

Em alguns momentos, Leonardo perguntou aos demais participantes os valores das respostas e se tinham alguma dúvida até o momento. Continuando as contas e obtendo $\sqrt{2000}$ na fórmula de Bhaskara, Leonardo optou por fazer a decomposição não em fatores primos, mas em quadrados perfeitos conhecidos, otimizando o processo. Assim, obteve duas respostas: $30 + 10\sqrt{5}$ e $30 - 10\sqrt{5}$, finalizando o seu raciocínio (Figura 15).



$$x = \frac{60 \pm \sqrt{2000}}{2}$$

$$x' = \frac{60 + \sqrt{2000}}{2} \qquad x'' = \frac{60 - \sqrt{2000}}{2}$$

$$x' = \frac{60 + 20\sqrt{5}}{2} \qquad x'' = \frac{60 - 20\sqrt{5}}{2}$$

$$x' = 30 + 10\sqrt{5} \qquad x'' = 30 - 10\sqrt{5}$$

2000	100
20	5
4	4
1	

$$\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$$

Figura 15 – Resolução da questão (c) por Leonardo no segundo encontro (quadro 2)

Fonte: Dados da pesquisa.

Sobre a questão (d), que envolvia determinar possíveis estratégias para medir alturas inacessíveis, Marcelo trouxe a ideia de utilizar semelhança de triângulos, realizando uma proporção entre as alturas e sombras de uma pessoa e de um prédio, comentando que os triângulos são semelhantes porque consideramos a pessoa e o prédio perpendiculares ao solo e os raios do sol como sendo retas paralelas. Marcelo utilizou algumas medidas fictícias para exemplificar seu método, obtendo uma resposta igual a 60, sem especificar unidade de medida, como vemos na Figura 16.

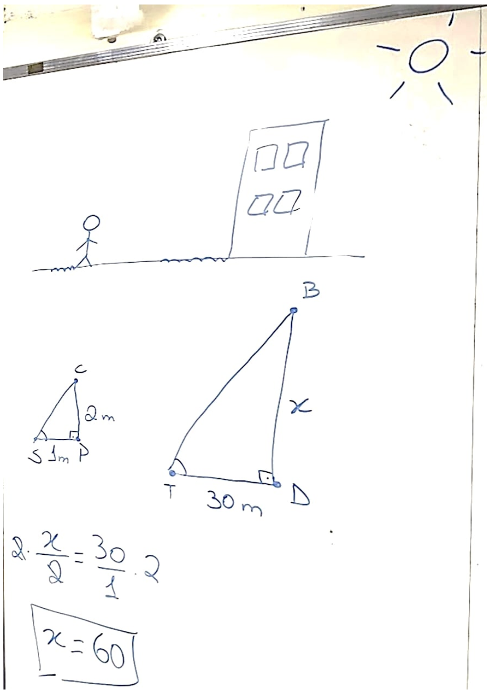


Figura 16 – Resolução da questão (d) por Marcelo no segundo encontro

Fonte: Dados da pesquisa.

Ainda sobre a questão (d), Leonardo também disse que poderíamos construir teodolitos caseiros e utilizar trigonometria para determinarmos a altura do prédio em questão.

O professor-pesquisador, depois das explicações das questões (b), (c) e (d), fez algumas sugestões para auxiliar a melhorar as resoluções dos participantes (essas impressões serão discutidas na análise dos dados). Além disso, sugeriu outras as resoluções. Na questão (b), trouxe a ideia de determinar a altura do triângulo utilizando trigonometria. Na questão (c), comentou sobre a possibilidade de transladar as faixas para obter uma figura com áreas equivalentes (como visto na Figura 17). Na questão (d), disse que poderiam tirar fotos do prédio (se possível) junto com uma pessoa cuja altura é conhecida, e que esteja a uma distância desprezível do prédio, trabalhando com a ideia de escala.

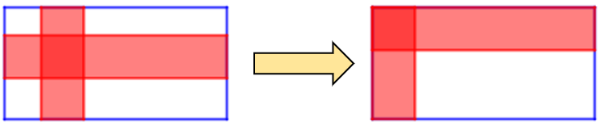


Figura 17 – Sugestão de resolução da questão (c) pelo pesquisador no segundo encontro

Fonte: Produzido pelo autor.

Foi disponibilizado aos participantes o subcapítulo 3.1.2 de Figueiredo (2017, p. 56-62), “As concepções de problema na Educação Matemática”, como leitura domiciliar para o próximo encontro. O objetivo da leitura era comparar as discussões feitas e as inquietações dos participantes com o que a literatura traz como possíveis conceitos de problema.

4.3.3 Encontro 3

Realizamos o terceiro encontro do grupo no dia 29 de setembro de 2022, e fizeram-se presentes Lucas, Marcelo e Leonardo. Os três fizeram a leitura prévia do texto disponibilizado, fazendo marcações e/ou anotações próprias. Entretanto, estava pendente a discussão sobre as características que cada atividade dos últimos dois encontros tinha, segundo as concepções dos participantes, e por isso o encontro foi iniciado por ela. Dividimos uma das lousas da sala em 4 colunas, uma para cada questão, e os licenciandos livremente conversavam e anotavam ideias. Entretanto, para fins de organização, iremos discutir as características percebidas de cada atividade, na ordem em que foram resolvidas.

Iniciamos pela questão (a), relativa às laranjas. Lucas achou uma questão direta e imediata, ou seja, sem muitos passos de resolução evidentes e cuja estratégia pode ser percebida sem demora. Leonardo trouxe a ideia dos conteúdos mobilizados para resolver a questão, elencando a Aritmética básica como cerne da atividade. Marcelo comentou que caso modificássemos a atividade original, poderíamos pensar em um processo de generalização, com $m - n$ laranjas, para discutir uma iniciação à Álgebra.

Em relação à questão (b), do triângulo equilátero, Leonardo comentou que ela envolve Geometria Plana, mas combinada com Aritmética básica, pois é necessário utilizar propriedades geométricas e operar com números para chegar ao resultado final. Também trouxeram a ideia de que essa questão pode ser resolvida simplesmente com a aplicação da fórmula, se conhecida. Entretanto, se o aluno não conhece a fórmula, pode se discutir uma possível generalização.

Sobre a questão (c), da bandeira, Leonardo elenca a necessidade dos conteúdos de funções, Geometria Plana e Aritmética Básica. O professor pesquisador, a partir de tais conteúdos, questionou:

PP: Que função que a gente pode pensar no problema da bandeira?

Leonardo: Hã... Funções quadráticas... Funções afins...

PP: Tá, mas aquilo é uma função ou é uma equação?

Lucas: Quando tu escreveu, eu também achei que tu queria falar equações. Depois até que eu entendi, mas eu... eu pensaria mais numa equação. Ela dá pra ter *um pensamento funcional, mas o que tu tá usando ali é uma equação, né.*

Leonardo: É, quando eu escrevi isso aqui eu tava pensando naqueles problemas clássicos de cálculo, de encontrar mínimo e máximo, né... Então acho que equações seria a forma mais correta de escrever isso daqui.

PP: É, pode enxergar uma função, né... Uma função... Hã... A função área. Só que daí tu pega um ponto específico da função e vira uma equação. Mas o mais... o que mais a gente foca na questão é a parte da equação.

Leonardo concordou, e acrescentou que essa atividade difere da primeira questão por ser complexa, ou seja, necessitar de diversos passos de resolução. Além disso, ressaltou que tanto essa questão quanto a (b) podem trabalhar Álgebra, mostrando que pensamentos diferentes resultam em expressões algébricas equivalentes.

Sobre a questão (d), que falava sobre a medição de um edifício, Leonardo comenta que ele envolve conceitos de Geometria. Entretanto, ressalta que embora as outras cresçam em complexidade pela quantidade de conteúdos e áreas que envolvem, essa atividade depende da ideia do aluno para sabermos quais outros conhecimentos matemáticos estão envolvidos. Marcelo comenta que essa questão é aberta, ou seja, tem mais de uma possibilidade de resposta, e ideias completamente diferentes podem ambas estar corretas. Isso é uma consequência, segundo eles, de a questão ter o procedimento como sua resposta, e não um número (como a medida da altura do prédio). A partir disso, eles perceberam que as outras três atividades poderiam ser classificadas como fechadas, ou seja, com apenas uma resposta correta. Marcelo também fala que existem hipóteses simplificadoras que o resolvedor pode precisar assumir, como supor que o chão é plano.

A partir dessas colocações, construímos um quadro que resume as conclusões obtidas pelos participantes (Quadro 5)

Questão (a)	Direta; Imediata; Envolve Aritmética básica; Pode ser trabalhada tanto com o Ensino Fundamental I no ensino de subtração quanto no Ensino Fundamental II em introdução à Álgebra; Tarefa fechada.
Questão (b)	Pode ser direta ou complexa; Resolução imediata por fórmula; Pode envolver generalização; Envolve Geometria Plana, Aritmética básica e Álgebra; Pode mostrar que pensamentos diferentes resultam em expressões algébricas equivalentes; Tarefa fechada.
Questão (c)	Complexa; Envolve Álgebra, funções/equações quadráticas, Geometria Plana e Aritmética básica; Pode mostrar que pensamentos diferentes resultam em expressões algébricas equivalentes; Tarefa fechada.
Questão (d)	Envolve Geometria, e outros conteúdos dependem (mais do que as outras questões) da estratégia de resolução adotada; Foco no procedimento, e não no valor numérico; Pode envolver hipóteses simplificadoras implícitas; Tarefa aberta.

Quadro 5 – Características das questões pelos participantes no terceiro encontro

Fonte: Dados da pesquisa.

Após essas colocações, iniciamos a discussão do texto lido a partir de uma apresentação feita pelo professor-pesquisador, que elencava alguns tópicos julgados importantes. A autora começa o texto falando sobre a concepção de Polya acerca da RP, e foi por essa direção que iniciamos a discussão. Foi apresentado quem foi George Polya e os princípios de sua teoria, vista em Polya (2006): o método de indagação do professor, as heurísticas e os passos para resolução de um problema. Elencamos alguns exemplos de heurísticas e explicitamos os quatro passos.

Após as colocações do professor-pesquisador sobre os quatro passos de Polya para resolver problemas, Lucas comentou sobre uma discrepância observada na realidade:

Lucas: A gente tá tão acostumado a pegar e já fazer! [...] A execução é só o que ele vai estar fazendo do que ele planejou ali?

O professor-pesquisador concordou com o licenciando, e disse que, quando estamos falando de um exercício, o estabelecimento de um plano é algo que geralmente dura apenas alguns segundos, porque internamente o resolvedor reconhece na questão um procedimento algorítmico que já sabe fazer. Entretanto, em um problema, devemos buscar uma estratégia ainda desconhecida, e isso envolve tempo, às vezes até tentativas e erros, que evidenciam transições sucessivas do estabelecimento do plano para a execução falha, e dela para uma nova ideia.

Marcelo, ainda se referindo a estarmos acostumados a ir direto para o terceiro passo, trouxe um relato de experiência:

Marcelo: De minha experiência, assim, na escola desse ano, uma das coisas que eu achei mais interessantes foi levar, é... problemas. E ali na verdade quando eu levei esses problemas eu tava pensando mesmo num paradigma de exercício [...], mas que pros alunos não se mostrou desse jeito, como eu esperava. Pra eles, acho que se aproximou bastante de um problema. Isso foi uma coisa que eu tava pensando enquanto lendo o texto, de que parece que não necessariamente existe uma oposição ali, entre essas duas coisas, exercício e problema. [...] Pra mim era muito direto, e quando eu fui explicar pros alunos e... enfim... no quadro, eu, agora que tu falou, me remeteu bastante que eu pulei já pro passo três. "Tá, olha só, aqui a gente tem dois triângulos que são semelhantes, a gente vai fazer..." [...] E aí uma aluna perguntou assim: "Tá professor, e na prova" – sempre a prova, né – "e na prova, como eu vou saber que é isso que eu tenho que fazer?". [...] E a partir dali foi ficando bastante claro como eu tava negligenciando esse passo.

O professor-pesquisador concordou, e comentou sobre a importância que o momento da discussão em grande grupo tem para auxiliar os alunos que talvez não tivessem realizado as atividades propostas em aula:

PP: Se tu tratar esse momento da correção como um procedimento algorítmico, tu não vai estar dando, nem nesse momento, a oportunidade pro teu aluno pensar. E nisso, o Polya defende a questão de uma dramatização. Ou seja, o professor, naquele momento, ele tem que dramatizar como se ele fosse o resolvedor do problema, mesmo nas coisas que parecem triviais. Tu vai fazer um teatro: tu vai olhar pra aquilo ali e pensar como se tu fosse o teu aluno resolvendo.

O professor-pesquisador trouxe um exemplo da sua vivência com os nonos anos e equações de segundo grau, em que, mesmo envolvendo procedimentos algorítmicos, é importante o professor analisar a situação conjuntamente com os alunos, vendo as características da equação e pensando em qual estratégia é a mais adequada para resolvê-la, em detrimento de simplesmente aplicar os algoritmos como se todos conseguissem naturalmente fazer essa diferenciação. Ele ressaltou também que esse diálogo é importante para manter a atenção dos alunos, em vez de ser uma mera exposição de conteúdos.

Leonardo questionou sobre a compreensão do problema:

Leonardo: Ali no primeiro passo, pensa no exemplo do triângulo. Compreender o problema seria eu entender que o triângulo equilátero tem todos os lados iguais e entender que onde que eu quero chegar é qual que é a área dele?

O professor concordou, afirmando que não era uma questão com um enunciado muito complexo, e por isso a compreensão não envolvia muitos passos. Leonardo comentou que tinha dificuldade em entender quando terminava o primeiro passo e iniciava o segundo. Lucas comentou que, para ele, o passo 2 está muito mais relacionado com o "como?", e o primeiro passo com "o quê?", e nisso se diferenciam os dois.

A seguir, trouxemos a ideia principal do texto, que diz que os autores analisados distinguem problemas de exercícios, sendo os primeiros desafiadores e os últimos mais imediatos, embora haja um senso comum na sociedade de chamar qualquer questão matemática de "problema", e apenas distinguir as questões em tipos de problemas. Para cada autor exposto, apresentamos as ideias envolvidas na sua forma de conceituar problema.

Por fim, discutimos os conhecimentos envolvidos na resolução de um problema segundo Schoenfeld: recursos (conhecimento de procedimentos e questões matemáticas), heurísticas (estratégias e técnicas de resolução), controle (decisões sobre quando e quais recursos usar) e convicções (saber realmente o que se está fazendo e para que se utilizará o resultado).

Após a exposição das ideias, Leonardo fez um questionamento:

Leonardo: Em relação às heurísticas, é... isso é uma dúvida que eu tenho... Não conhecia por esse nome, mas às vezes eu chego na resolução e eles precisam de uma técnica, por exemplo, de Aritmética: somar e subtrair 1, com uma outra cara. Às vezes, isso é uma técnica de Aritmética que a gente precisa ter pra resolver uma série de problemas. Quando eu fui trabalhar isso com os meus alunos, tinha um exercício que eu falei: "Gente, ó, pra vocês resolverem esse problema, vocês vão precisar saber dessa e dessa técnica". Como professor, qual que é a melhor... Qual que é a melhor *posição, não, mas... O que eu devo cuidar na hora de tomar essas posturas? Eu apresento essa estratégia direto pra eles ou eu tento rezar pra que em algum momento essa estratégia apareça sozinha? Porque eu sinto, tipo, tanto na formação acadêmica quanto agora como professor, eu percebo que quando era eu na cadeira de Aritmética, a professora demorou muito tempo para deixar que isso acontecesse com a gente, foi simplesmente frustrante, e aos 45 do segundo tempo ela deu essa heurística pra gente. Mas eu fico me sentindo meio mal de dar isso direto pra eles porque parece que tô tirando a oportunidade de eles pensarem nisso. Eu fico nessa dúvida: qual posição tomar?*

O professor-pesquisador trouxe as ideias de Polya de que a postura do professor deve ser equilibrada, no sentido de que ele não pode dar todas as informações para o aluno, que ficará sem nada para fazer, nem deixar de auxiliar sempre, pois o aluno pode não conseguir avançar mais, e se tornar um momento de frustração. Para isso, é importante que o professor analise a situação e, com a experiência que possui e o conhecimento da turma, tome uma decisão. O professor evidenciou que isso não é algo que conseguiremos acertar sempre, é apenas uma tentativa baseada em conhecimentos anteriores. Por fim, disse que a estratégia de somar e subtrair 1 pode ser difícil de ser percebida onde usar até para os próprios matemáticos, já que não é sempre claro quando deve ser usada.

Concluímos o debate sobre o texto trazendo algumas potencialidades do ensino com RP segundo a autora:

> Além da valorização dos conhecimentos prévios dos alunos e das suas estratégias mentais de resolução, podem ser potencializadas a criação de novas estratégias, a elaboração de conjecturas, o desenvolvimento de competências e habilidades e a produção de conhecimento matemático, dentre outros (FIGUEIREDO, 2017, p. 60)

.

O professor-pesquisador questionou se haveria ainda algum tópico do texto ou da discussão que chamara a atenção dos participantes para que comentassem, e Marcelo trouxe a seguinte contribuição:

Marcelo: Acho que um ponto... Agora talvez voltando um pouquinho na apresentação. Ali quando tu falou sobre o aluno estar interessando em resolvê-lo, né? Acho que é da Allevato...? Isso, da Allevato. Isso me faz pensar bastante também no papel do professor na resolução de problemas no sentido de lidar com o primeiro impulso que é não estar nem um pouco interessado em resolver o problema, sabe? Porque eles, os meus alunos, vários deles... eles se consideram preguiçosos. Então tu pergunta: "ah, por que tu não quer nem tentar fazer?". "Ah, porque tenho preguiça, sor". Mas assim, eu acho que resolver um problema em que tu tem que pensar em coisas, tipo...

formular coisas novas, é uma baita saída de uma zona de conforto, [...] e isso envolve trabalho, isso envolve... como o Lucas falou, uma certa... não é decepção a palavra... mas... enfim, nesse sentido, sabe? Frustração. Isso. E como é importante também o professor saber estar ali e ser chato e insistir pra que eles pelo menos tentem aquilo ali. E é muito... Fica muito claro como isso dá certo em certos casos, no sentido de eles não estarem nem aí no primeiro momento, mas tu vai ali com uma certa insistência e eles pilham muito.

Marcelo deu um exemplo de uma aula sua com jogos em que isso aconteceu, e o professor-pesquisador falou da importância de tentar tornar o problema algo interessante e chamar a atenção do aluno. Entretanto, ressaltou que nem sempre o discente não estar interessado em resolver a questão é culpa do professor, e ele não deveria assumir toda a responsabilidade caso tenha tentado tudo que estivesse ao seu alcance no momento. Essa falta de interesse também poderia ser algo ligado à idade ou a uma situação ruim que o aluno estivesse passando no momento, que poderia gerar uma desmotivação ou uma preocupação excessiva que dificultaria a sua concentração na aula de Matemática. Outra forma de chamar a atenção do aluno que os participantes discutiram é utilizar problemas que envolvam a realidade que os discentes vivenciam.

Sem mais colocações, o professor-pesquisador pediu que os participantes resolvessem a seguinte atividade: modelar uma função que nos informe a área de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio unitário. Para isso, foi apresentado um *applet*[6] no *software* GeoGebra[7] (Figura 18) que mostrava a variação dos polígonos dependendo do valor de n.

Os participantes inicialmente trabalharam sozinhos, mas o professor-pesquisador disse que eles poderiam se juntar para discutir. Já de início, eles partiram da ideia de dividir o polígono em n triângulos isósceles desenhando os raios do centro da circunferência até os pontos de intersecção da circunferência com o polígono. Leonardo e Marcelo rapidamente chegaram a uma resposta. Lucas questionou se existiria uma forma única de resolução, pois ele notou que os colegas estavam utilizando ângulos, mas gostaria de saber se teria uma outra possibilidade sem o uso dessa estratégia. Como o encontro estava no fim, o professor sugeriu que continuasse pensando para discutirmos na próxima reunião.

[6]https://www.geogebra.org/m/u6nzbrmd.

[7]"O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar". Disponível em: https://www.geogebra.org/about. Acesso em: 20 set 2021.

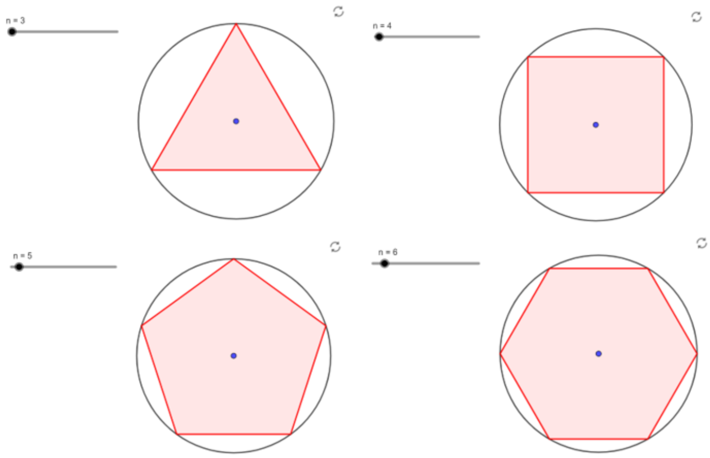


Figura 18 – Polígono inscrito na circunferência de raio unitário

Fonte: Produzido pelo autor.

4.3.4 Encontro 4

O quarto encontro do grupo aconteceu no dia 04 de outubro de 2022 e estavam presentes apenas Marcelo e Lucas. O professor-pesquisador convidou um dos participantes para apresentar a sua resolução da atividade do encontro passado, lembrando que o objetivo não era meramente a resposta, mas principalmente a questão pedagógica, isto é, pensar em como conduzir os alunos no processo de resolução. Lucas comentou que achou estranho os colegas terem resolvido a questão com muita rapidez, e questionou se eles já haviam resolvido algo parecido. No encontro passado, Leonardo já havia comentado que resolveu o mesmo problema em uma disciplina de programação, e, em resposta ao questionamento, Marcelo justificou que estava trabalhando Geometria com seus alunos, e acha que por isso as ideias fluíram com mais rapidez. O professor-pesquisador comentou que normalmente, quando se trabalha com polígonos inscritos e circunscritos, se seguem procedimentos similares: olhar para o triângulo formado por um dos lados e os raios que vão até os extremos de tal lado, analisando os seus ângulos e aplicando relações trigonométricas. Marcelo, então, se voluntariou para realizar a resolução:

Marcelo: Vou tomar cuidado pra usar a estratégia de lançar bastante pergunta pra turma. Tô tentando fazer com os meus também e tô tendo altos resultados.

O licenciando comentou que, embora estivéssemos trabalhando com um polígono de n lados, seria interessante trabalhar com algum (de 6 ou 7 lados) para ajudar na visualização e generalização do procedimento. Ele afirmou que não tínhamos uma fórmula para calcular a área de tal polígono, mas questionou quais figuras tinham um método conhecido para calcular a área. Os restantes responderam que triângulos e quadrados.

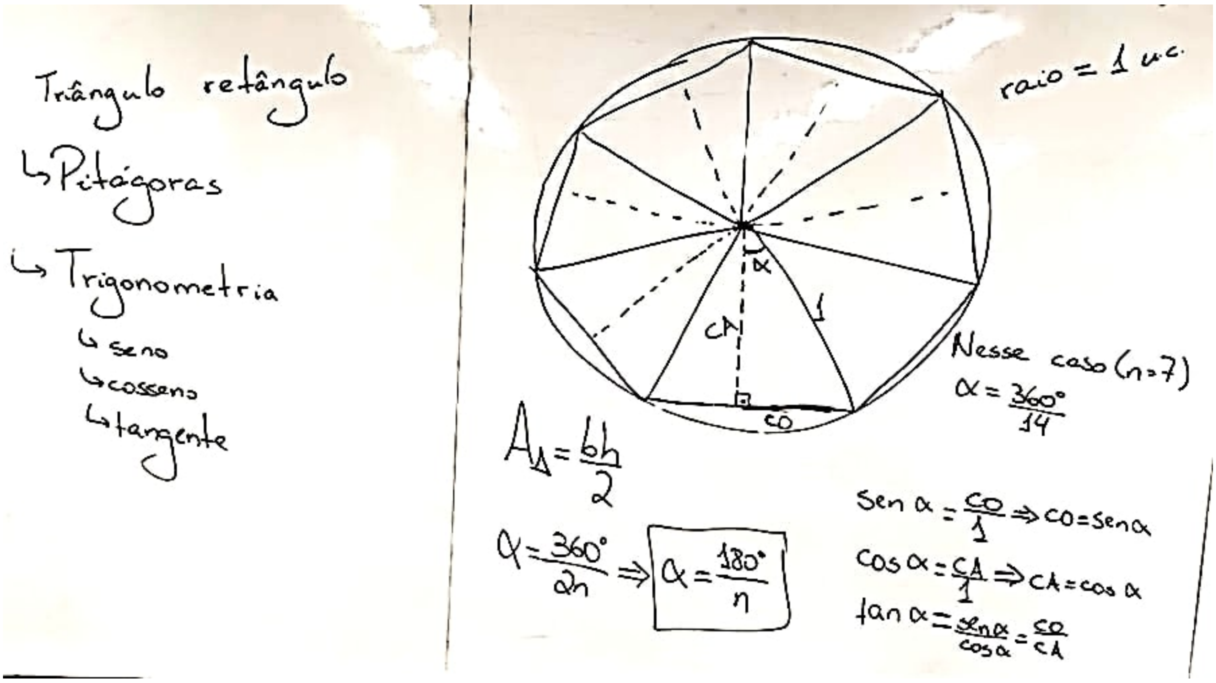


Figura 19 – Resolução da questão do polígono inscrito por Marcelo no quarto encontro (quadro 1)

Fonte: Dados da pesquisa.

Marcelo: Então, eu consigo dividir esse polígono em triângulos ou em quadrados ou em alguma outra forma da qual eu tenha essa expressão?

PP: Dá pra fatiar que nem uma pizza, sor!

Marcelo: Isso aí! Certo. Meus triângulos, eles não ficaram muito iguais, mas é por causa do meu desenho. A gente tá assumindo que todos os lados têm a mesma medida e portanto esses triângulos seriam congruentes. Certo. O que eu preciso pra ter a área de um triângulo?

PP: Pode ser base e altura, sor.

Marcelo: Então a área do triângulo é base e altura? Base vezes altura?

PP: Divide por dois!

Marcelo: Certo! [...] Eu tenho a medida da base e da altura?

PP: Não.

Marcelo: Então já era? Não tem como eu conseguir?

PP: Dá pra pensar numa forma de calcular, sor.

Marcelo: Isso! Como eu posso fazer isso?

PP: Não sei.

Marcelo: Alguma ideia, colega Lucas?

Lucas: A gente podia descobrir a altura do triângulo.

O licenciando traçou a altura de um dos triângulos e perguntou o que poderíamos dizer sobre ele ou sua altura. Foi respondido que ele era um triângulo retângulo, e Marcelo questionou quais ferramentas poderíamos utilizar que envolvessem seus lados. O professor-pesquisador disse que poderíamos utilizar o Teorema de Pitágoras. Marcelo fez uma lista em um canto do quadro com as possíveis ferramentas, anotando o teorema mencionado e perguntando sobre outros.

Marcelo: Antes disso, pra Pitágoras, do que a gente precisa? Pra que a gente usa e o que a gente precisa?

PP: A gente trabalha com os três lados do triângulo: a hipotenusa e os catetos.

Marcelo: Isso. Aqui a altura seria hipotenusa ou seria cateto?

Lucas: Cateto, sor.

Marcelo: Cateto. Qual seria o outro cateto?

Lucas: Seria o chão, sor, a base.

Marcelo: Seria todo o chão?

PP: Não, só metade.

[...]

Marcelo: E o que seria a hipotenusa?

PP: Ah! Ia ser o raio!

Marcelo: Exato. E o raio é de quanto?

PP: 1.

Marcelo: 1. Então já sei que a hipotenusa é 1.

O participante questionou se seria possível aplicar o teorema nesse caso para descobrir um dos catetos, e chegamos à conclusão de que geraria uma equação com duas incógnitas. Perguntando sobre outras possibilidades de ferramentas, surgiu a trigonometria no triângulo retângulo. Marcelo questionou o que era necessário para trabalharmos com esse conteúdo, e incentivou o estudo dos ângulos no triângulo para aplicarmos as fórmulas. Em particular, sugeriu olharmos para um dos ângulos centrais da circunferência e perguntou qual seria o seu valor. O professor-pesquisador comentou que bastava dividir 360° por 14, que era a quantidade de triângulos retângulos presentes no heptágono que Marcelo havia desenhado como exemplo. Assim, ele conduziu um processo de generalização, explicando que (e por que) um dos ângulos do triângulo retângulo mediria $\frac{360°}{2n}$, ou $\frac{180°}{n}$ após a simplificação.

Ele relembrou que queríamos chegar na área da figura, e por isso precisaríamos da base e da altura, que poderiam ser escritas dependendo do valor do ângulo α, marcado na Figura 19, que depois seria substituído por $\frac{180°}{n}$. Assim, a partir de perguntas ao professor-pesquisador e a Lucas, utilizando trigonometria, chegamos nas relações $CO = sen(\alpha)$, $CA = cos(\alpha)$ e $tan(\alpha) = \frac{CO}{CA}$ (Figura 19). É importante ressaltar que, quando questionado sobre a fórmula para a tangente, Lucas comentou que seria $\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$, e Marcelo utilizou as relações anteriores para mostrar que isso é equivalente a outra fórmula conhecida: $\frac{CO}{CA}$.

Por fim, chegamos à conclusão, através de questionamentos e direcionamentos de Marcelo, que a fórmula para a área seria $A(n) = n \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{180°}{n}\right)$, como podemos ver na Figura 20.

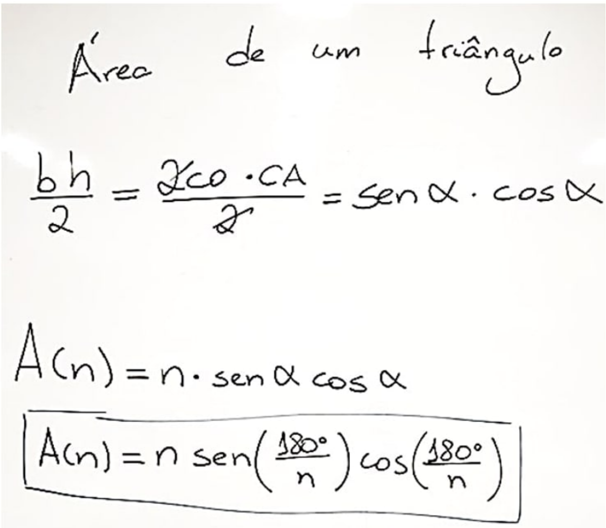


Figura 20 – Resolução da questão do polígono inscrito por Marcelo no quarto encontro (quadro 2)

Fonte: Dados da pesquisa.

No final, Marcelo questionou se havia alguma dúvida, e comentou que seria interessante, na sala de aula, retomar a resolução com os estudantes. Lucas achou interessante Marcelo ter incluído o Teorema de Pitágoras na discussão, mesmo sendo uma estratégia que não pudesse ser usada no momento. Ele compartilhou a sua experiência em um dos estágios da graduação, dizendo que quando corrigia alguma atividade, apenas corrigia, sem abrir espaço para pensar em outras possibilidades. O professor-pesquisador comentou que esse procedimento que envolve os alunos com questionamentos é interessante, mas toma muito tempo de aula, e por isso cabe ao professor determinar até que ponto ele é necessário, dependendo do perfil da turma e se eles já resolveram alguma atividade similar. Lucas comentou que achou um problema complexo e com vários passos, e o professor-pesquisador falou novamente da importância de conhecer a turma e verificar se eles estão acostumados com abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas antes de apresentar uma questão de tal complexidade, que poderia ser frustrante para alguns alunos.

A seguir, inspirado pelo questionamento de Lucas no encontro passado sobre existir a possibilidade de resolver a questão sem utilizar ângulos, o professor-pesquisador comentou que achava difícil pensarmos em uma resolução dessa forma, porque precisaríamos de uma função que não utilizasse senos e cossenos, mas que tivesse o mesmo comportamento. Entretanto, poderíamos discutir outras formas de resolver a questão a partir de fórmulas diferentes para determinar a área de um triângulo. A primeira delas é a fórmula de Heron, que nos diz que a área de um triângulo de lados a, b e c é $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, sendo p o semiperímetro do triângulo, calculado da seguinte forma: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

O professor-pesquisador foi escrevendo em um canto do quadro as fórmulas que estavam sendo usadas, completando conforme surgia a necessidade, e resolveu juntamente com os alunos a questão, a partir da estratégia já estabelecida por Marcelo de dividir a figura em n triângulos isósceles (Figuras 21 e 22).

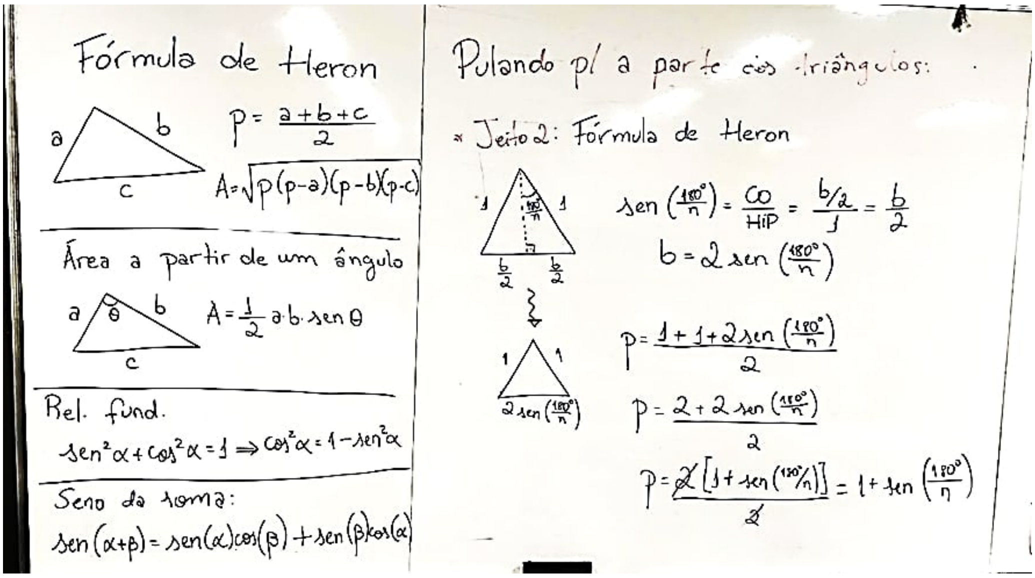


Figura 21 – Resolução da questão do polígono inscrito pelo professor-pesquisador no quarto encontro (quadro 1)

Fonte: Dados da pesquisa.

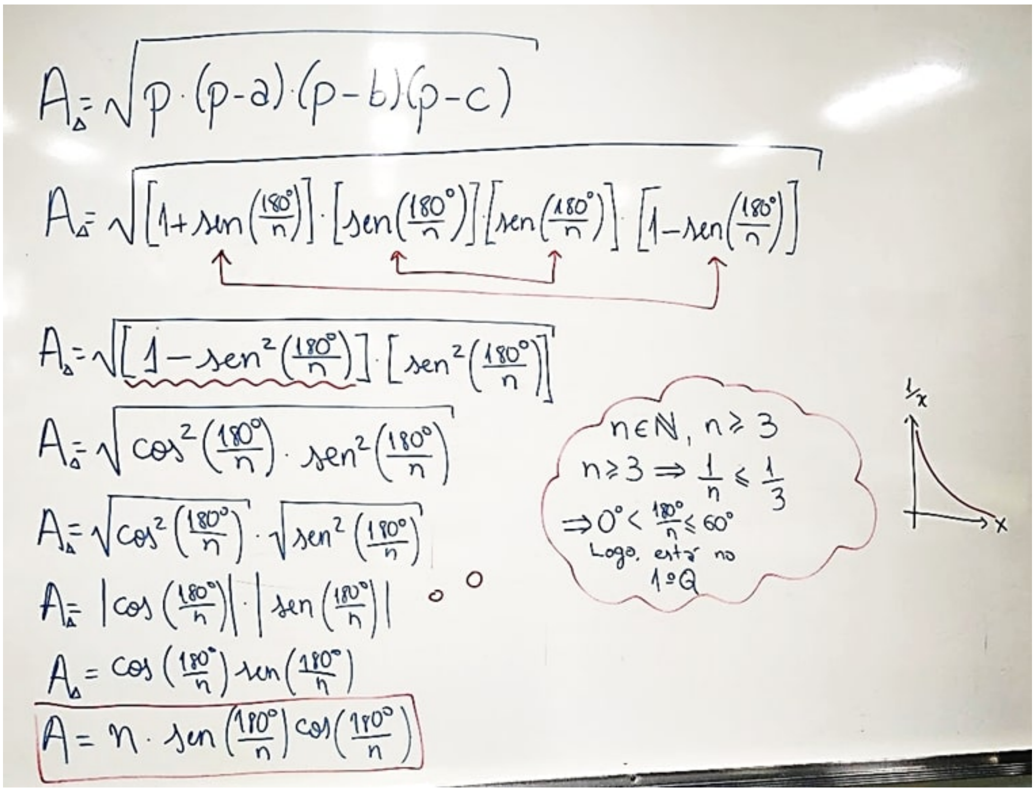


Figura 22 – Resolução da questão do polígono inscrito pelo professor-pesquisador no quarto encontro (quadro 2)

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, foi discutida uma outra forma de resolução, utilizando uma fórmula que calcula a área de um triângulo que possui dois lados a e b e cujo ângulo entre eles é θ: $A = \frac{1}{2}ab \cdot sen(\theta)$ (Figura 23).

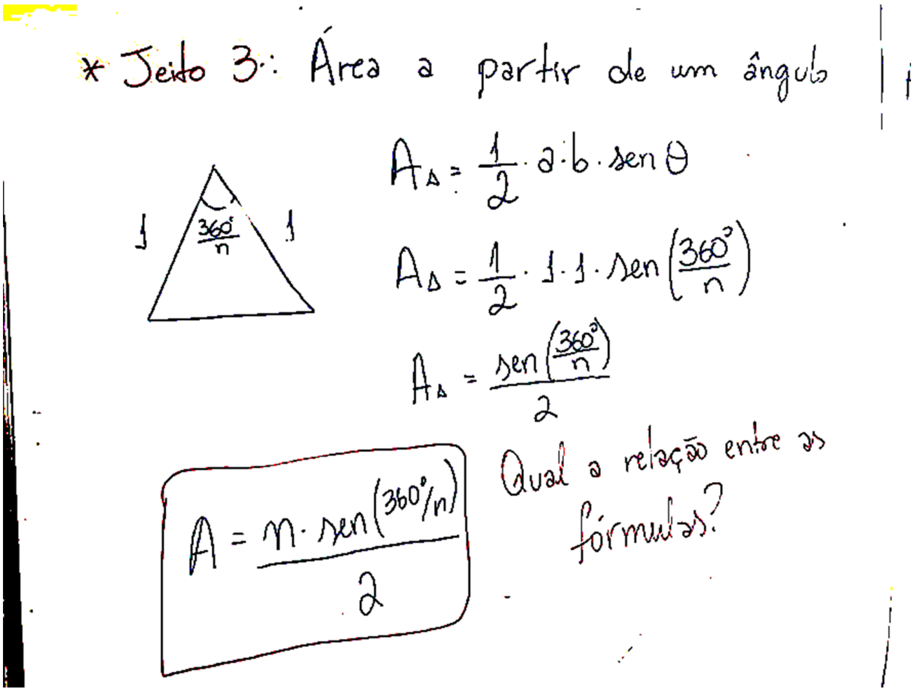


Figura 23 – Resolução da questão do polígono inscrito pelo professor-pesquisador no quarto encontro (quadro 3)

Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, discutimos qual seria a relação entre as fórmulas obtidas na primeira e segunda resolução com a obtida na terceira resolução.

PP: Qual a relação das fórmulas?

Lucas: Uma delas não tem o cosseno, né? Tá dividido por 2.

PP: Isso! Olha só... Ali, em vez de ter $\frac{360°}{n}$, eu tenho $\frac{180°}{n}$. Qual que é a relação do $\frac{360°}{n}$ e do $\frac{180°}{n}$?

Marcelo: Um é o dobro do outro.

PP: Um é o dobro do outro... ou...? [...] Que outra forma que eu tenho de encarar o dobro?

Lucas: Duas vezes...

PP: Multiplicar um negócio por 2 é a mesma coisa que fazer o quê?

Lucas: Somar ele... Somar ele mais ele.

PP: Somar ele mais ele. Então eu tenho aqui... se eu quisesse que aparecesse aquilo ali, eu tenho o seno de uma coisa mais ela mesma.

Lucas: Seria $n \cdot \left(sen\left(\frac{180°}{n}\right) + sen\left(\frac{180°}{n}\right)\right)$?

PP: Não. $n \cdot sen\left(\frac{180°}{n} + \frac{180°}{n}\right)$*.*

Lucas: Ah, tá! Ok.

PP: Isso não lembra nada? De trigonometria... A gente vai precisar de outra relação agora pra conseguir grudar essas duas fórmulas. Qual que é a relação?

[...]

Lucas: Ah, eu lembro que tinha $sen(a + b)$*...*

E assim o professor e os participantes utilizaram a relação do seno da soma de dois arcos, $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha) \cdot cos(\beta) + sen(\beta) \cdot cos(\alpha)$, para demonstrar que as duas fórmulas obtidas são equivalentes (Figura 24).

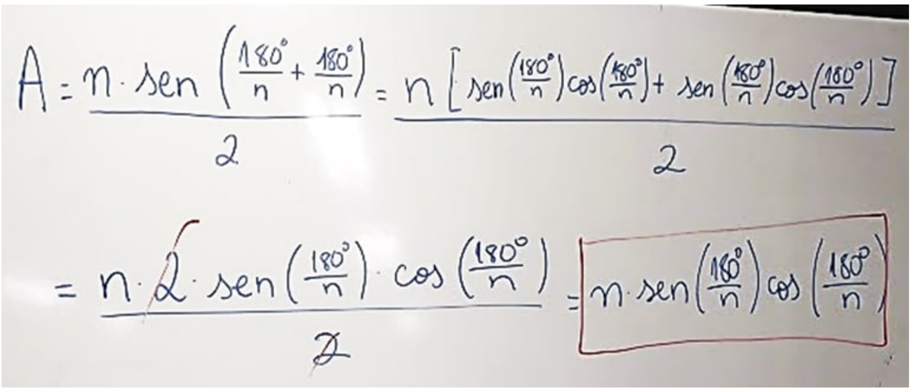
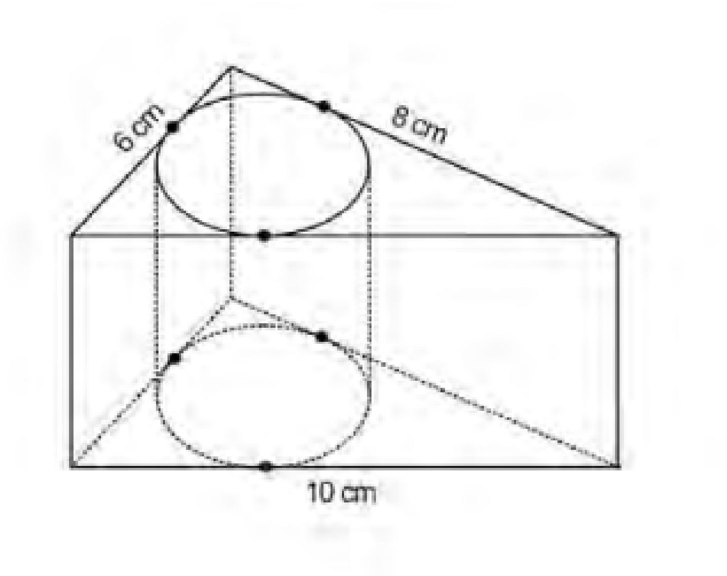


Figura 24 – Resolução da questão do polígono inscrito pelo professor-pesquisador no quarto encontro (quadro 4)

Fonte: Dados da pesquisa.

O professor-pesquisador comentou que isso mostra que, mesmo após chegar na resposta da questão, ela não se esgota, pois podemos pensar em outras resoluções e outras conexões que podem ser feitas. Lucas comentou sobre uma questão do ENEM de 2010, que ele não havia conseguido resolver e gostaria de pedir a ajuda do grupo (Figura 25).

Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.



O raio da perfuração da peça é igual a

- A 1 cm.
- B 2 cm.
- C 3 cm.
- D 4 cm.
- E 5 cm.

Figura 25 – Questão do ENEM proposta por Lucas no quarto encontro

Fonte: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/AZUL_Domingo_GAB.pdf. Acesso em 19/11/2022.

O professor-pesquisador auxiliou-o e explicou uma forma de resolvê-la (Figura 26).

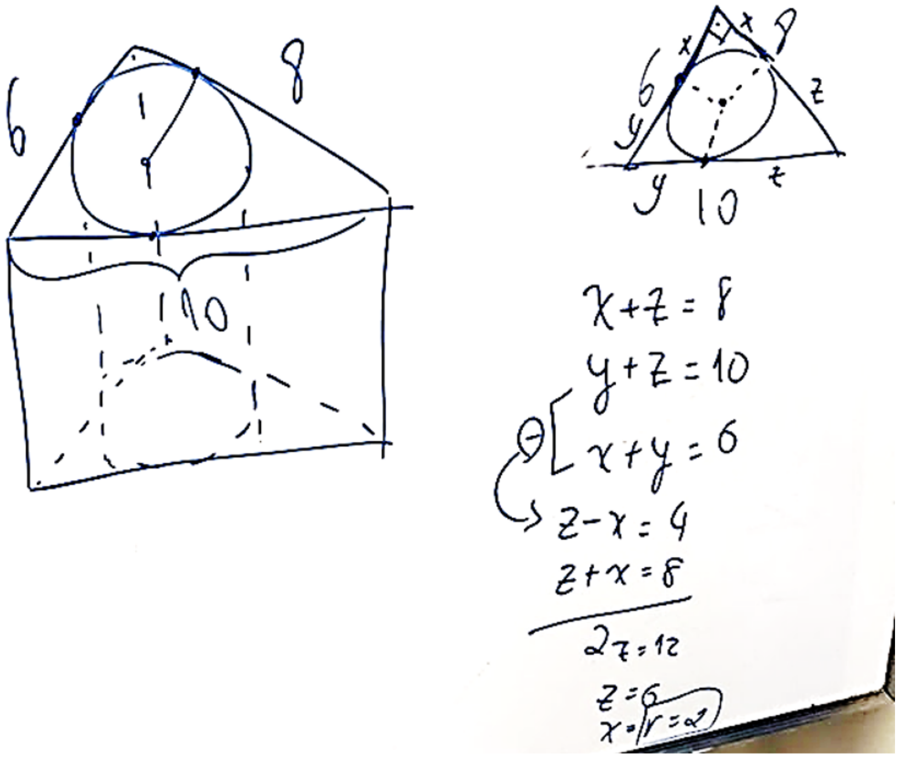


Figura 26 – Resolução pelo professor-pesquisador da questão proposta por Lucas no quarto encontro

Fonte: Dados da pesquisa.

Lucas: Então o raio é 2.

PP: O raio é 2.

Lucas: Caraca! Mas isso aqui não é imediato, né? E ver isso aqui...

PP: Não, é que é um conjunto de experiências, entendeu? Então, assim, durante a minha vida, eu vi várias vezes o triângulo 3-4-5 em várias formas diferentes. Então eu olho 6, 8 e 10 e que que eu penso? Terna pitagórica. Que que eu penso? Triângulo retângulo. Ah, foi coincidência? Acho difícil. Então posso pensar em alguma coisa de triângulo retângulo. O que que eu já vi também? Circunferências inscritas, né, tipo, lá em Geometria I a gente fazia isso. Né, a gente pegava, via, a gente provou que esses triângulos aqui são congruentes... Não sei mais o que... Então esse é igual a esse... Eu já fiz uma questão na minha prova de Geometria I que envolvia isso. Então tá aqui na minha gavetinha. E daí eu vou juntando isso.

Depois dessa discussão sobre a questão trazida por Lucas, Marcelo comentou sobre as resoluções feitas anteriormente, relativas à questão do polígono regular inscrito:

Marcelo: Pra além dos problemas em si, uma coisa muito massa e que tá... tá relacionado também com a exposição, né, a gente fica pensando nisso... É a forma *como tu organiza tudo no quadro, sabe, de sublinhar, colocar setinha, colocar balãozinho de pensamento... E eu vejo que quando eu fiz ali o meu, por exemplo, e eu fui colocar "ah, nesse caso específico", e eu coloquei ali [...], só que ficou uma coisa muito solta. Pensando no aluno que ele tá... Não tá ali naquele momento com toda a atenção mas depois ele vai copiar, [...], fica bem difícil de se achar.*

PP: É, e também um aluno que vai estudar depois, né, que é... Claro, a gente espera de coração que eles abram o caderno pra estudar, mas é... É, essa coisa... Sempre, assim... Pelo menos duas canetas de cores diferentes. De preferência uma vermelha, né, que se enxergue com mais clareza, e uma preta ou azul, que... mais escura assim, que mostra... que tu consegue fazer o corpo do texto, né. [...] Essa didática de tu mostrar pro aluno o que que tá acontecendo em cada passo também é bem interessante. O artifício dos balõezinhos de pensamento eu uso bastante em sala de aula.

Também foi comentado sobre o formulário do lado esquerdo do quadro, e o professor-pesquisador disse que a questão escolhida trazia diversos conhecimentos que precisavam ser recuperados, e por isso foi um artifício importante. Mas ele também falou que era importante fazer uma lista do que estava sendo discutido em aula no momento, para os alunos com dificuldade ou que estavam fazendo atividades sobre aquele tema pela primeira vez tivessem um auxílio e maior clareza de algumas das ferramentas que estavam disponíveis para a resolução das questões.

O professor-pesquisador comentou sobre a possibilidade de pensarmos em formas de ampliar a questão ou em elaborarmos atividades semelhantes, mostrando a quantidade de questões que poderíamos resolver de forma mais fácil utilizando o conhecimento que adquirimos nesta primeira. Ele também ressaltou que esse é um procedimento padrão na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, discutida por Onuchic e Allevato, autoras do texto que seria lido para o próximo encontro.

Os participantes construíram uma lista de "problemas" (pois, mesmo se a questão original fosse um problema, as seguintes não necessariamente seriam, já que já conhecemos uma possível estratégia a ser adaptada), que podemos observar na Figura 27.

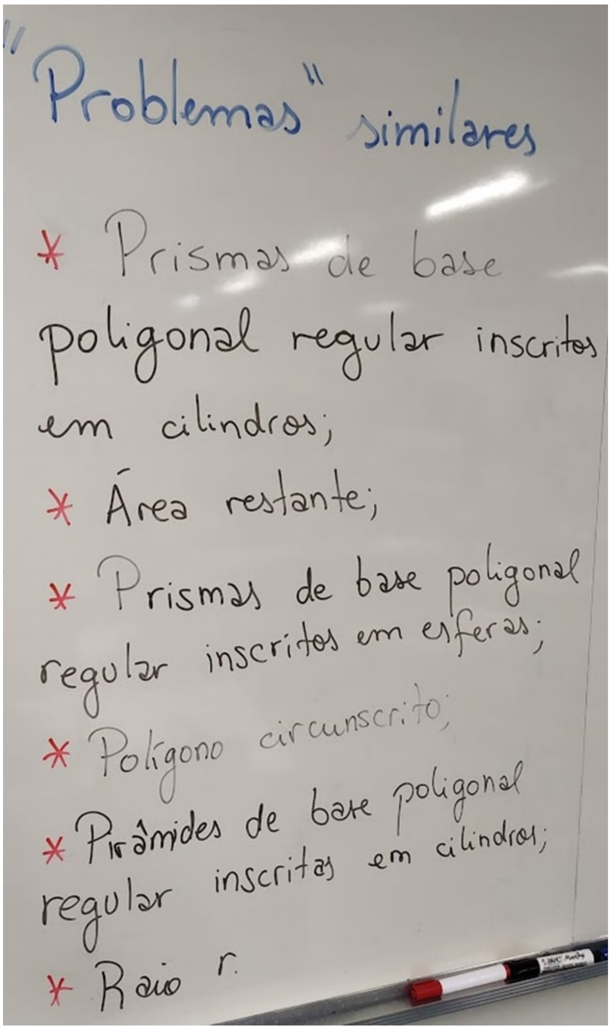


Figura 27 – Lista de "problemas" similares à questão do polígono inscrito desenvolvida pelos participantes no quarto encontro

Fonte: Dados da pesquisa.

O professor-pesquisador disse que uma proposta seria escolher um (ou mais) desses problemas para resolver, mas isso não foi viável por conta do tempo, já que foi acrescentado ao cronograma a resolução da questão por duas outras formas, a partir da dúvida de Lucas sobre diferentes estratégias. Para o próximo encontro, seria discutido o texto "As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2019), que já havia sido enviado aos participantes no dia anterior, por ser um texto mais longo.

Sobre a metodologia das autoras, Lucas comentou:

Lucas: Uma coisa que eu li e fiquei, pá... Me perguntando. Tá, vamos começar um conteúdo novo. Levar um problema que envolva esse conteúdo. Tecnicamente os alunos não sabem o conteúdo formal. Bah, vai sair várias coisas diferentes, ela fala assim: "Ah, cada um expressa ali no quadro, ou fala como resolveu, que valor encontrou". Provavelmente vai dar diferente, coisas diferentes. Aí depois: "Ah, vamos *chegar a um consenso, vamos formalizar matematicamente". Eu disse "tá, beleza, aula show", aula, uma, duas, três, sei lá quantas vão levar. Bah, cara, sensacional, né? Tá, mas e depois? Porque agora eles já sabem o conteúdo, né? Tu apresenta problemas de que espécie? Tá, geramos o conteúdo, né? Emergiu o conteúdo ali da resolução deles, formalizamos... Aí os problemas vão em qual sentido? Utilizando esse conteúdo? Mas agora eles já sabem o conteúdo.*

PP: Mas quem disse que tu tem que usar só a metodologia delas? Entende?

Lucas: Entendo.

PP: Então assim, a metodologia delas serve para quê? Serve para introduzir um conteúdo novo utilizando resolução de problemas.

Lucas: Hmmmm...

PP: Tu usa resolução de problemas só para introduzir um conteúdo novo? Não.

Lucas: Exatamente, não. Do jeito que elas apresentam [...] parece que travou, né? Tá, cheguei, agora parto pra um conteúdo novo, que eles não pegaram aquele que a gente formalizou, mas eles, beleza. Aí parece... parece que do jeito que ela fala, tipo assim, tá o que que eu faço agora? Porque ou eu vou pro conteúdo novo, ou eu vou trabalhar com problemas... São problemas, mas agora eles já sabem o conteúdo.

PP: É, daí o tipo de problema que tu vai trabalhar depois de ter uma formalização do conteúdo, tu pode pensar na ideia delas, né, num dos últimos passos, se não é o último, de generalizar, e trabalhar a partir disso, ou tu pode continuar na resolução de problemas, só que daí tu deixa a metodologia delas um pouquinho de lado. Tu pode usar aspectos da metodologia delas, mas tu não vai usar a metodologia delas porque tu vai trabalhar com uma coisa que eles já sabem... um conteúdo que eles já sabem. No problema tem alguma coisa que possivelmente eles não sabem, mas o conteúdo eles já têm. Daí tu usa outras estratégias.

Lucas ainda perguntou se a Resolução de Problemas seria uma teoria ou uma metodologia, questão que ele havia feito para um de seus professores, mas não entendeu muito bem. O professor-pesquisador explicou a diferença entre resolução de problemas e Resolução de Problemas, sendo a primeira o ato de resolver e a segunda a teoria que fala sobre o ato. Ele comentou a partir disso a teoria se abre em diferentes abordagens que podem ser utilizadas em sala de aula.

4.3.5 Encontro 5

O 5.º encontro foi realizado no dia 06 de outubro de 2022, e contou com a presença de Marcelo, Leonardo e Lucas. Iniciamos o encontro discutindo o texto que foi mencionado anteriormente, que fala sobre as conexões no ensino de Matemática a partir da resolução de problemas. O professor-pesquisador iniciou com uma apresentação sobre o artigo para incentivar a discussão, embora tenha resumido os tópicos em uma ordem diferente do que foi apresentado no artigo.

Foram expostas as ideias das autoras sobre o estabelecimento de conexões, que relacionam informações e conhecimentos adquiridos pelos alunos, construindo uma forma pessoal de ver a Matemática. Isso se dá de diferentes formas: conexões entre Matemática e outras áreas do saber, conexões entre Matemática e vida real (e/ou mundo do trabalho), conexões entre conteúdos de Matemática, conexões entre conhecimentos prévios e novos, e conexões entre diferentes representações de um mesmo conceito. Em particular, foram vistas cinco formas de representar objetos ou situações: visual, simbólica, verbal, contextual e física.

Após outras considerações sobre as conexões no ensino de Matemática, foi apresentada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, suas características e etapas. Sobre a avaliação se dar durante o processo de resolução, Lucas questiona:

Lucas: Isso significa não ter prova ou um trabalho avaliativo? Eu sempre fiquei nessa dúvida, se essa colocação delas de ser durante, né, durante todo o processo de ensino e avaliação, isso significa não ter prova, significa ter um trabalho avaliativo e não ter prova... Ou fazer durante, mas também avaliar...

O participante comentou ainda que achava difícil que isso acontecesse, por conta das escolas. O professor-pesquisador afirmou que não sabia responder ao questionamento, mas suspeitava que isso não excluía a possibilidade de fazer provas, pois o texto não trazia essa ideia de forma explícita, já que é possível fazer uma avaliação dos estudantes durante o processo, sua evolução, dificuldades e aprendizados, mas também realizar testes e trabalhar com outras abordagens durante o ano letivo.

Leonardo fez um comentário sobre a importância do trabalho em pequenos grupos na metodologia das autoras:

Leonardo: No trabalho das autoras, é... eu acho... eu acho muito legal essa ideia de trabalhar sempre em grupos. Porém, na minha experiência, quando eu tava lá no Ensino Básico, eu consigo ver que se eu fizesse trabalhos desse tipo, muito provavelmente ia ter grupos na minha turma que ia ficar tipo... ia ter um aluno que *sabe bem Matemática fazendo grupo com o resto do pessoal, esse aluno meio que ia carregar todo mundo na mochilinha e eles não iam aprender. É... As autoras abordam alguma coisa sobre como lidar com essa situação ou fica a cargo do leitor?*

Lucas: Mas tem uma coisa: no teu tempo tu trabalhava com resolução de problemas ou trabalhava com exercícios?

Leonardo: Os dois. Eu trabalhei com os dois.

[...]

Lucas: Problemas que desafiavam realmente? Não, porque eu penso assim, tipo: o cara que tem mais facilidade, mesmo nos problemas, tipo... Em resolução de problemas ele vai ter desafios, né. Tipo, ele não vai conseguir só conseguir carregar, né.

Leonardo: Hmm... Aí que entra. O carregar que eu quero dizer é: o resto da turma... o resto do grupo não consegue nem estar errado. Ou seja, eles não conseguem... Eles não tentam... Eles têm uma dificuldade que eles nem sequer tentam [...] porque tem um cara ali que tá resolvendo esse problema.

O participante ainda comentou de um episódio que aconteceu com ele em uma disciplina, em que ele foi o único aluno que tentou resolver o problema proposto pelo professor. E acrescentou:

Leonardo: E outra coisa que tu botou agora. "Ah, na resolução de problemas mesmo o cara que é bom em Matemática vai ter alguma dificuldade". Ok, mas às vezes a gente tem, na Escola Básica, uma discrepância muito grande entre alguns alunos, certo? Então eu, eu vou tentar... eu, como professor, pelo menos, vou tentar sempre fazer uma média. Dito isso, em fazer essa média, o problema fica mais fácil pra pessoa que tem facilidade na Matemática.

O professor-pesquisador comentou que esse assunto não foi abordado no texto, entretanto é uma questão delicada por envolver o interesse do aluno, que é algo que foge do controle do professor. Sobre algumas estratégias para contornar essa dificuldade, além do que já foi mencionado no encontro 3, o professor-pesquisador falou sobre a possibilidade de conversar com os alunos, remodelar os grupos ou incentivar o aluno que tem facilidade a não dar as respostas, mas incentivar os colegas a pensarem, utilizando questionamentos e assumindo o papel de mediador no grupo.

Lucas comentou de uma experiência sua como docente, em que propôs problemas para que seus alunos resolvessem em duplas ou trios e, embora alguns não tivessem interesse, muitos se engajaram na proposta. Ele acrescentou, dizendo que, embora alguns não tivessem chegado nas respostas, tiveram algumas ideias interessantes que puderam ser exploradas.

Marcelo concordou com a afirmação de Lucas, dizendo que é importante ver a realidade como um todo, pois focar excessivamente nos aspectos negativos pode nos fazer adoecer psicologicamente. Também disse que a empatia que os alunos têm pelo docente é importante nesse aspecto, e muitas vezes o professor estagiário é mais bem visto pelos discentes, que se identificam mais com ele. Sobre o comentário do professor-pesquisador relativo ao envolvimento dos estudantes com facilidade em resolver problemas como mediadores do grupo, ele comenta:

Marcelo: Eu tenho dois alunos nas quatro turmas com que eu trabalho, que eles se... acho que a palavra é se sobressaem bastante, assim, em relação à turma, e eles são bastante parceiros. Hoje, um aluno do sétimo ano, eu tava corrigindo, comentando umas coisas no quadro, e jogando pergunta pra eles, né. E ele respondia, participava e tal. Só que aí, ele já tinha me mostrado o caderno, eu já tinha visto que ele tinha feito tudo certo. Aquilo ali era fichinha pra ele. Mas ele sentiu assim, ah, ele falava e a turma ia atrás, sabe? Ah, é, "qual desses... esse círculo que eu fiz responde qual pergunta?". E ele assim: "letra A", e a turma "ah, letra A, não sei o que". Aí daqui a pouco ele começou a responder errado, pra tipo, a turma não ir atrás dele, e fazer a turma pensar também.

Marcelo também comentou que o problema de "fazermos uma média" do nível de dificuldade das atividades é que as aulas ficam muito focadas nos alunos "medianos", e aqueles que apresentam muita facilidade ou muita dificuldade são deixados de lado. Lucas alertou sobre a dificuldade de julgarmos se os alunos são capazes ou não de resolver determinado problema, e que abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas são capazes de nos surpreender positivamente.

O professor-pesquisador fez algumas contribuições acerca dos comentários dos participantes. Em particular, disse que existem casos na literatura em que os alunos não apresentam interesse no início, mas o engajamento vai acontecendo aos poucos, após algumas aplicações de abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas.

Para finalizar, retomamos a discussão sobre a questão do polígono regular inscrito, e o professor deduziu a fórmula para o caso de um polígono circunscrito (Figura 28).

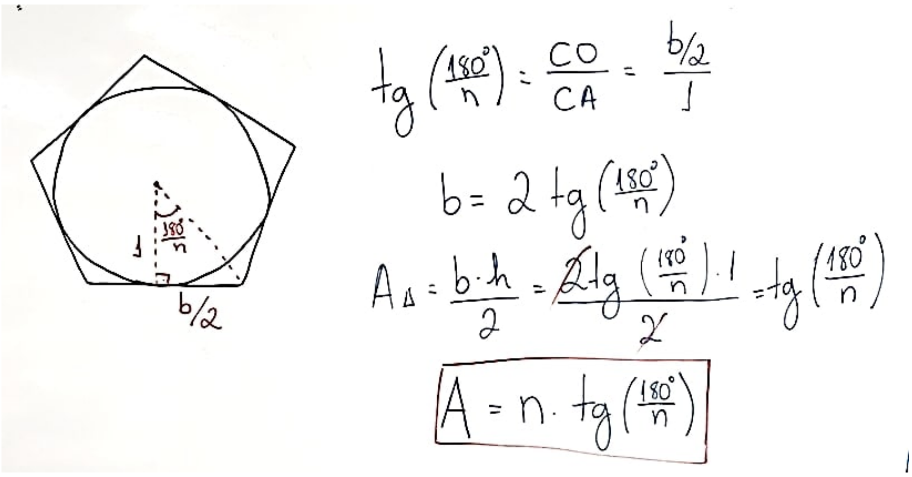


Figura 28 – Resolução da questão do polígono circunscrito pelo professor-pesquisador no quinto encontro

Fonte: Dados da pesquisa.

O professor mostrou um *applet*[8] no GeoGebra em que associou o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos à sua área por meio de coordenadas cartesianas, criando um gráfico com domínio discreto (Figura 29).

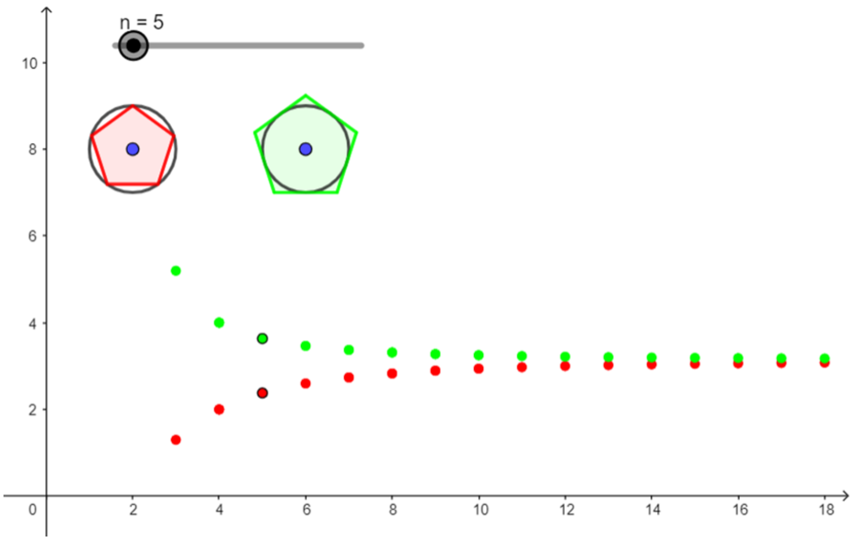


Figura 29 – *Applet* sobre as questões dos polígonos inscritos e circunscritos

Fonte: Produzido pelo autor.

A partir disso, o professor-pesquisador questionou quais conexões poderíamos estabelecer entre a representação pictórica e a gráfica, baseado no texto que foi discutido.

Marcelo: Eu acho que elas vão se aproximando do mesmo valor conforme tu aumenta o número de lados, né? Porque pensando no limite, quando n tende ao infinito, tu teria dois círculos de mesmo raio, que teriam a mesma área.

[8] https://www.geogebra.org/m/ehunhmtb.

O professor-pesquisador concordou, e afirmou que o polígono inscrito gera uma função crescente e que o polígono circunscrito gera uma função decrescente. Também comentou da possibilidade de fazermos conexões entre diferentes áreas da Matemática, como Geometria e Análise Real. A partir disso, foi calculado o limite das duas funções deduzidas no encontro anterior (Figura 30).

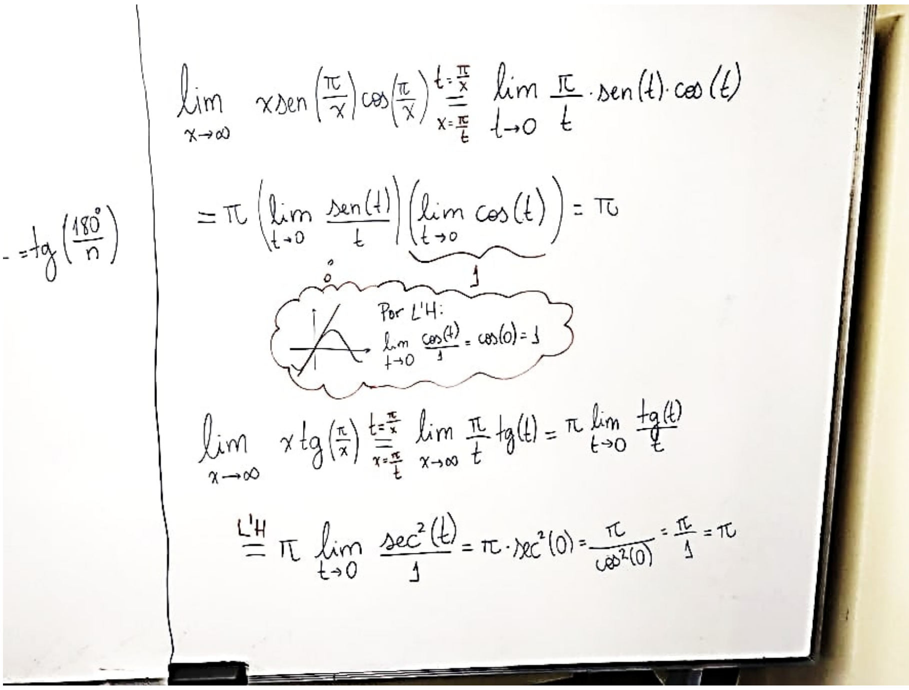


Figura 30 – Limites das funções dos polígonos inscritos e circunscritos

Fonte: Dados da pesquisa.

Para a próxima semana, o texto escolhido para a discussão foi o texto de Polya (2006, p. XIX-XX, 1-4 e 18), que discute o papel do professor na Resolução de Problemas.

4.3.6 Encontro 6

O sexto e último encontro foi realizado no dia 11 de outubro de 2022, e estiveram presentes Lucas e Leonardo. Inicialmente, concluímos a ideia das conexões relativas à questão dos polígonos inscritos e circunscritos, traçando o gráfico das funções modeladas, com domínio real (Figura 31).

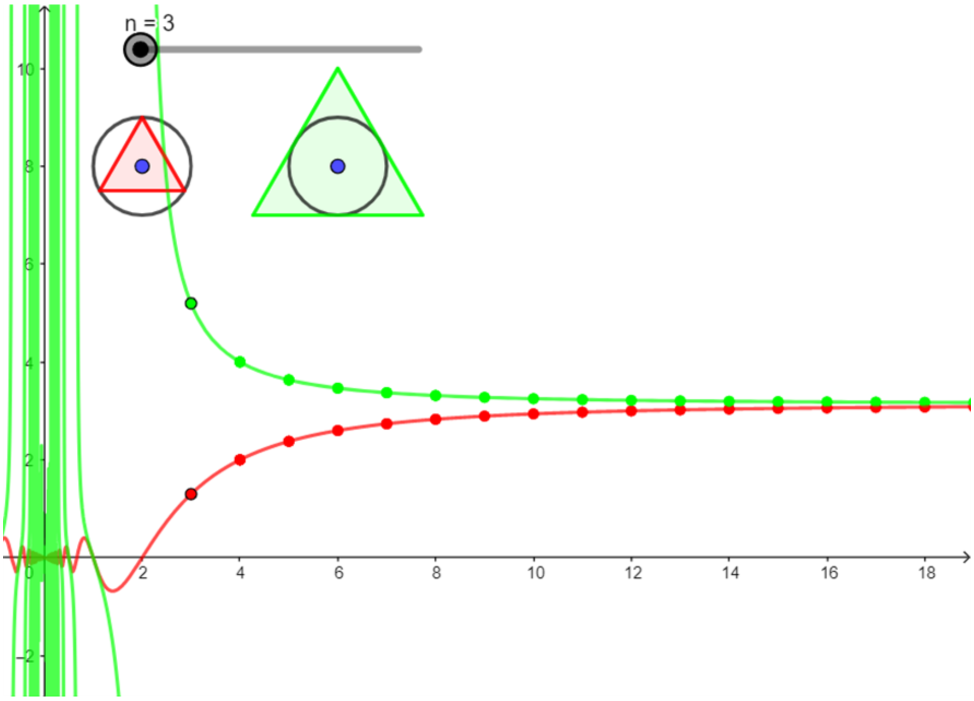


Figura 31 – *Applet* com os gráficos das funções dos polígonos inscritos e circunscritos

Fonte: Produzido pelo autor.

Dando seguimento às reflexões, os participantes foram questionados sobre quais atitudes docentes favoreciam e quais dificultavam uma dinâmica de resolução de problemas em sala de aula, baseado em suas experiências pessoais (Quadro 6).

Facilitam o aprendizado	Dificultam o aprendizado
Saber identificar quais aspectos estão dificultando o aprendizado do aluno.	Não pensar em como responder uma dúvida de maneira diferente.
Dar uma dica que tem a resposta, sem dizer que é a resposta.	Focar numa única maneira de resolver a(s) questão(ões).
Dar tempo e espaço para o aluno tentar resolver os problemas.	Focar em apenas um grupo de alunos.
Entender as diversas formas que os alunos pensam para resolver um problema.	Não identificar que a dica que tu sugeriu está sendo insuficiente, frustrando ele.
Aproveitar os próprios erros para entender os erros dos alunos.	Tratar problema como exercício e vice-versa.
Saber errar.	

Quadro 6 – Ações do professor durante abordagens envolvendo resolução de problemas segundo os participantes no sexto encontro

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir disso, buscou-se gerar uma discussão sobre a diferença entre a capacidade de resolver problemas e aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas com o questionamento: se consigo resolver um problema, necessariamente mobilizo os conhecimentos pedagógicos elencados? Os estudantes responderam que sim e começaram a trazer possíveis cenários nos quais um professor poderia crescer nos seus conhecimentos pedagógicos a partir da resolução de problemas:

Lucas: Quando tu for dar uma dica, como tu já fez, tu vai ter mais noção do que vai ser suficiente ou não pra, tipo, instigar o aluno, ou, tipo, o que tu não quer fazer, né: dar uma dica que, tipo, não ajuda em nada, né, não movimenta nada no aluno, ou uma dica que, tipo, simplesmente vai dar a resposta.

Leonardo: Essa daí eu discordo. Esse erro eu acho que o professor, mesmo que o professor tenha resolvido e entendido, ocorre a chance dele dar uma dica que não vai ajudar de nada no aluno ou que vai tipo frustrar ele. Eu acho que isso pode acontecer. [...] Porque se ele for aberto o suficiente, não necessariamente tu vai entender o que o aluno tá fazendo. [...] Então assim, de brinde... [...] Aproveitar os próprios erros e saber identificar, e dar tempo e espaço. Acho que essas aí vêm de brinde só de resolver o problema.

O professor-pesquisador reiterou o questionamento sobre esses conhecimentos surgirem *necessariamente* a partir da resolução de problemas, e os participantes perceberam que não haviam entendido corretamente a pergunta. Então, a partir desse novo entendimento, Leonardo afirmou que esses aspectos pedagógicos não estavam vinculadas à simples resolução correta do problema, obrigatoriamente.

Lucas: Agora eu fiquei pensando... Pode acontecer então... É um caso... Eu ser muito bom em resolver problemas, tipo, pedagogicamente ser péssimo em resolver problemas?

PP: Sim.

Lucas: E pode ter uma pessoa que, tipo, em questão de ele mesmo resolver problemas, não tem muita capacidade, mas ser bom em [...] pedagogicamente resolver problemas.

Leonardo: Pega um aluno que [...] consegue pensar fora da caixa, e tu como professor não consegue entender o que tu tá falando, porque ele não consegue expressar aquilo dali pra ti de uma maneira clara.

Lucas: Que loucura! Eu achava que as duas coisas eram... tipo... ser bom em resolver problemas, ter habilidades... eu vou conseguir explicar.

PP: Se fosse o caso a gente não precisaria estar fazendo uma oficina, um curso, *que fala sobre habilidades pedagógicas de resolução de problemas, né. Se fosse... Porque daí, se é o caso, daí a gente foca em dar uma formação em Matemática, e a gente não precisa se preocupar com uma formação em Ensino de Matemática, né. Mas, se existem [...] dificuldades que a gente encontra no ambiente da sala de aula relativo à resolução de problemas, e vocês relataram isso, quer dizer que uma coisa não está... Porque os professores de vocês sabiam resolver os problemas.*

De modo a diferenciar a resolução de problemas dos aspectos pedagógicos de Resolução de Problemas, o professor-pesquisador preparou uma apresentação com as ideias de Shulman (1986, 1987) e Ball, Thames e Phelps (2008) antes de discutirem o texto de Polya (2006). Foram apresentadas as sete categorias da base de conhecimento do professor, segundo Shulman (1987), e a tradução desse conhecimento no conhecimento matemático para o ensino de Ball, Thames e Phelps (2008). A partir disso, se elencaram algumas atribuições do professor de Matemática mencionadas por Ball, Thames e Phelps (2008, p. 400), sendo muitas delas vistas do ponto de vista pedagógico.

> 1. Apresentar ideias matemáticas;
> 2. Responder aos porquês dos estudantes;
> 3. Encontrar um exemplo para um argumento matemático específico;
> 4. Reconhecer o que está envolvido em usar uma representação particular;
> 5. Relacionar representações a ideias subjacentes e a outras representações;
> 6. Conectar um tópico ensinado com tópicos de anos anteriores ou futuros;
> 7. Explicar os objetivos e as metas da Matemática para os pais;
> 8. Avaliar e adaptar o conteúdo matemático de livros didáticos;
> 9. Modificar tarefas para que sejam mais fáceis ou mais difíceis;
> 10. Avaliar a plausibilidade das afirmações dos estudantes (às vezes rapidamente);
> 11. Dar ou avaliar explicações matemáticas;
> 12. Escolher e desenvolver definições utilizáveis;
> 13. Usar notação e linguagem matemática e criticar seu uso;
> 14. Fazer questões matemáticas produtivas;
> 15. Selecionar representações para propósitos particulares;
> 16. Inspecionar equivalências[9] (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 400, tradução nossa).

O professor-pesquisador então questionou quais desses aspectos estariam relacionados com a Resolução de Problemas, quais chamavam a atenção e quais os participantes sentiam mais fragilidade na sua prática pedagógica. Leonardo comentou que os tópicos 2 e 16 chamavam a sua atenção. Lucas concordou sobre o segundo

[9]Presenting mathematical ideas; Responding to students' "why" questions; Finding an example to make a specific mathematical point; Recognizing what is involved in using a particular representation; Linking representations to underlying ideas and to other representations; Connecting a topic being taught to topics from prior or future years; Explaining mathematical goals and purposes to parents; Appraising and adapting the mathematical content of textbooks; Modifying tasks to be either easier or harder; Evaluating the plausibility of students' claims (often quickly); Giving or evaluating mathematical explanations; Choosing and developing useable definitions; Using mathematical notation and language and critiquing its use; Asking productive mathematical questions; Selecting representations for particular purposes; Inspecting equivalencies.

tópico, trazendo um relato em que seus alunos tiveram interesse em saber o porquê de algumas propriedades matemáticas serem verdadeiras, e ele não conseguiu justificar, pois havia visto aquilo na universidade há muito tempo e não se recordava. Também comentou sobre o tópico 9, pela situação que havia acontecido, já comentada no encontro 1, em que colocou uma atividade muito difícil em uma lista sobre progressões aritméticas, e isso acabou por desmotivar os estudantes.

Leonardo comentou sobre a dificuldade de desenvolver o item 3, pela pressão do momento, principalmente em conteúdos relativos à Álgebra e a funções. Também trouxe o tópico 10, afirmando que achava complexo avaliar as explicações matemáticas dos alunos, principalmente se eram argumentos que ele não havia pensado ou não conhecia, relatando uma situação que aconteceu com ele envolvendo o Teorema de Menelaus. Ele afirmou que demorou para que ele entendesse que desconhecer algo ou demonstrar alguma fragilidade em sala de aula não representava necessariamente uma falta de preparo do professor.

Conhecendo essas ideias, foram discutidas alguns conhecimentos pedagógicos do professor resolvedor de problemas apresentadas por Polya (2006):

- O aluno deve fazer o máximo de trabalho independente que lhe for possível;
- O professor não pode desmotivar o aluno com auxílio insuficiente, nem fazer todo o trabalho por ele;
- O professor deve fazer perguntas para o aluno pensar, mostrando um caminho que o estudante poderia pensar por si só;
- O professor não tem apenas o objetivo de auxiliar a resolver o problema, mas de preparar o aluno para consegui-lo sozinho;
- Ao resolver as questões em aula, deve-se mostrar a resolução do ponto de vista do aluno, não do professor.

Entretanto, como já havíamos conversado em outros encontros sobre esses conhecimentos a partir dos questionamentos dos participantes, essa exposição não suscitou novos comentários.

5 CATEGORIZAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS

Para uma discussão mais estruturada dos dados produzidos nesta dissertação, determinamos as seguintes categorias de análise:

1. Concepções dos licenciandos sobre resolução de problemas.
    - Como eles conceituam problema?
    - Quais características eles acham que um problema pode vir a ter, ou obrigatoriamente tem?
    - Quais características eles acham que a resolução de problemas tem?
2. Concepções dos licenciandos sobre abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas.
    - Que experiências os licenciandos têm em relação a tais abordagens?
    - Quais possibilidades os licenciandos enxergam para uma aula envolvendo resolução de problemas?
    - Quais ações docentes os licenciandos acham importantes em tais abordagens?
3. Ações dos licenciandos durante os momentos de resolução de problemas.
    - Quais aspectos da literatura ajudam a compreender as ações dos licenciandos?
    - O que os licenciandos dizem a respeito de suas reflexões e de sua aprendizagem após as intervenções do professor-pesquisador em relação às suas resoluções?

Tais categorias foram criadas *a posteriori*, uma vez que o andamento do curso de extensão e os dados que seriam gerados no ambiente de discussão organizado não eram previstos inicialmente, já que dependem fortemente das contribuições feitas pelos sujeitos da pesquisa. Ressaltamos que a análise não foi feita de forma cronológica, mas os momentos foram agrupados conforme acreditamos que seria mais conveniente para entendermos as concepções dos licenciandos.

5.1 CONCEPÇÕES DOS LICENCIANDOS SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Iniciamos a análise buscando entender as concepções dos licenciandos sobre o conceito e as características de um problema matemático. Ao analisarmos os questionários iniciais dos participantes, percebemos que Marcelo mostrou compreender que um problema mobiliza a aquisição de novos conhecimentos. Leonardo afirmou que um problema implica a falta de um processo de resolução, inicialmente. Lucas também comentou sobre a necessidade de um problema ser desafiador, com uma solução não evidente. Assim, vemos que as respostas dos três participantes, embora escritas com diferentes termos, estão de acordo com a Definição 2 de Schoenfeld (1992), apresentada na seção 3.1, que defende que um problema é uma situação desafiadora, que inicialmente não sabemos como resolver.

André e Alan pareceram entender que um problema possui informações desconhecidas (incógnitas) e conhecidas (dados), com as quais o processo de resolução é desenvolvido. Entretanto, embora um problema também seja constituído dessa forma, nem todas as situações desse tipo podem ser caracterizadas como problemas, segundo a concepção adotada neste trabalho. Vemos que esse conceito se aproxima mais da Definição 1 de Schoenfeld (1992), que apresenta o problema como sendo uma situação a ser resolvida, independentemente da dificuldade. Entretanto, ambos os participantes, ao falarem sobre resolução de problemas, fizeram uma distinção entre atividades que envolvem a aplicação de algoritmos e atividades que desenvolvem o raciocínio lógico dos estudantes, sem focarem na mera repetição de procedimentos. Isso nos leva a crer que, embora tenham inicialmente conceituado problema a partir da Definição 1 de Schoenfeld (1992), eles também valorizam a aplicação de tarefas desafiadoras e entendem que existe uma diferença entre trabalhar com atividades rotineiras e não-rotineiras.

Marcelo, durante a discussão do segundo encontro, falou da importância de o resolvedor se sentir instigado a resolver uma situação desafiadora para que ela seja considerada um problema, o que está de acordo com a ideia de Onuchic e Allevato (2011) e complementa a resposta trazida pelo licenciando no questionário inicial. Ele ainda ressaltou que esse interesse também pode se dar por uma necessidade, de modo que o resolvedor, sem algo externo que requeresse a resolução, poderia não se sentir instigado a resolver a situação em questão. Leonardo comentou que o interesse não necessariamente se dá de forma exagerada, mas pode ser uma simples curiosidade. Lucas discordou, afirmando que apenas o desafio seria suficiente para classificar uma situação como um problema.

Em sua resposta ao questionário, Marcelo trouxe algumas características interessantes de um problema: comentou que pode ser tanto uma situação da Matemática Pura quanto de outras áreas do conhecimento, e não necessariamente está escrito no formato de uma pergunta. Esses dois atributos, de fato, são intrínsecos a problemas conforme conceituamos na seção 3.1. Leonardo argumentou que um problema pode auxiliar no desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos e fixar conceitos trabalhados.

Marcelo, ao apresentar a questão (a) no encontro 2, sobre as laranjas, demonstrou coerência entre o conceito de problema defendido pelos integrantes do grupo no questionário inicial e a classificação da atividade como um problema ou exercício. Foi consenso do grupo que essa classificação depende do resolvedor, e não é intrínseca à questão propriamente dita. O licenciando ainda fez uma distinção entre saber o algoritmo e conseguir reconhecer as situações em que ele pode ser aplicado. Isso evidencia a importância das conexões mentais já discutidas na seção 3.4. De fato, em uma situação envolvendo subtração, um estudante pode ter uma compreensão instrumental, apenas conhecendo o algoritmo, ou uma compreensão relacional, associando o algoritmo a diferentes situações e entendendo por que a operação pode ser aplicada em cada caso. Também vemos, nessa ideia, o conceito de controle proposto por Schoenfeld (1985 apud GAZZONI; OST, 2008), que é a capacidade de saber quando utilizar determinado recurso, como vimos na subseção 3.3.2.

Leonardo ainda havia argumentado que retirar o contexto das laranjas e trabalhar com uma simples operação de subtração não caracterizaria um problema. Quando questionado novamente sobre o conceito de problema que ele estaria utilizando para fazer tal classificação, o estudante fala sobre um processo utilizado na Modelagem Matemática, de transitar entre o “mundo real” e o mundo da “Matemática Pura”, para chegar a uma resposta. De fato, essa concepção é trazida por Schroeder e Lester (1989), mas não inclui todos os tipos de problemas, pois situações da Matemática Pura não utilizam esse processo de transição, embora possam ser categorizadas como problemas, dependendo do resolvedor. Ao serem questionados se uma situação de simples subtração nunca poderia ser um problema, Marcelo sugeriu que aumentar a quantidade de algarismos de uma subtração pode torná-la uma situação problemática para estudantes que não sabem como resolvê-la. Leonardo concordou, e lembrou de outros problemas da Matemática Pura que foram desafiadores para ele.

Leonardo defendeu que o uso de simbologias desconhecidas pelo resolvedor inviabilizaria a classificação de uma situação como um problema. Todavia, voltando a uma das respostas do licenciando em seu questionário inicial, vemos que ele apresentou o conceito de problema como “uma situação, fictícia ou real, onde não se sabe ao certo como, ou sequer se é possível, resolver”. Partindo dessa concepção, entende-se que ela pode incluir uma operação matemática com uma simbologia desconhecida, uma vez que é uma situação, embora abstrata, que não se saberia como resolver, e que exigiria um estudo mais aprofundado de abstração e simbologia matemática para ser compreendida e resolvida. Marcelo chegou a essa conclusão em um outro momento do encontro, entendendo que o aprendizado de uma nova simbologia também pode fazer parte da resolução de um problema, embora inicialmente tenha argumentado que seria um problema diferente do inicial, e não uma parte do processo de resolução.

No Encontro 3, a partir das discussões realizadas acerca dos passos de Polya (2006) para a resolução de problemas, Lucas iniciou uma reflexão sobre a distinção entre a linearidade aparente dos passos 2 e 3 (estabelecimento e execução de um plano) e a realidade. Discutimos que nem sempre isso se dá de forma linear. Na resolução de exercícios (ou problemas rotineiros, na nomenclatura do autor), isso se dá de forma quase que instantânea, pelo conhecimento do algoritmo. Em problemas (não-rotineiros), pode ser necessário alternar entre os passos diversas vezes, como que "recalculando a rota" (KILPATRICK, 2017). Leonardo ainda teve dúvidas sobre como diferenciar a compreensão do problema do estabelecimento do plano, e Lucas respondeu que acreditava que a primeira estava mais relacionada com "o quê?" e a segunda com o "como?".

Buscamos, a partir de tais análises, estabelecer relações com as considerações feitas por Moço (2013) e Proença (2012), que foram os trabalhos nos quais encontramos similaridades a esta dissertação no Capítulo 2. Vemos que em ambos os trabalhos analisados também houve diferentes concepções dos licenciandos sobre resolução de problemas. Moço (2013) traz três trechos do seu questionário inicial em que licenciandos em Matemática buscaram conceituar problema, e os três trouxeram a ideia de que problemas envolvem situações contextualizadas, embora apenas dois tenham afirmado que é necessário o uso de lógica para ser resolvido. Proença (2012) faz o mesmo com os quatro alunos participantes de sua pesquisa, e apenas um deles defende que um problema está atrelado a um contexto, enquanto os outros três exploram a ideia da necessidade de uma dificuldade a ser superada ao resolver um problema.

5.2 CONCEPÇÕES DOS LICENCIANDOS SOBRE ABORDAGENS DE ENSINO ENVOLVENDO RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No questionário inicial e nas apresentações do primeiro encontro, vemos alguns comentários dos participantes sobre abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas. Marcelo, Alan e Lucas afirmaram terem trabalhado textos sobre resolução de problemas durante a graduação, e dois deles conseguiram elencar nomes de autores que tratam do tema. Leonardo teve acesso a materiais extras durante uma disciplina da graduação, e André estudou o tema para o seu trabalho de conclusão de curso. Vemos que houve certo incentivo dos professores no curso de licenciatura para o estudo sobre a resolução de problemas. Entretanto, como a RP não é um tópico presente explicitamente na súmula de nenhuma disciplina da graduação, com exceção de Ensino e Aprendizagem de Estatística, é possível que esse estudo possa ter sido superficial e apresentado apenas como um tópico dentre diversas tendências em Educação Matemática, já que os licenciandos demonstraram certas inconsistências ao conceituar e categorizar problemas.

Em sua experiência com abordagens de resolução de problemas na Educação Básica, Marcelo evidenciou que seus estudantes tinham dificuldades em trabalhar nessa modalidade, pois estavam acostumados a resolver exercícios, e não tinham interesse em ser desafiados. Vemos que essa crença está de acordo com as apontadas por Schoenfeld (1992), segundo as quais os estudantes acreditam que os problemas matemáticos devem ser resolvidos rapidamente e seguindo os algoritmos ensinados pelo professor. Esse tópico foi discutido novamente no terceiro encontro, em que Marcelo falou sobre a importância do professor insistir nas primeiras experiências com resolução de problemas, para que os alunos se abram a novas possibilidades para as aulas de Matemática.

Marcelo ainda apontou que teve experiência com resolução de problemas ao introduzir o conceito de função de segundo grau, o que aponta para características do ensino de Matemática através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021; VAN DE WALLE, 2009; SCHROEDER; LESTER, 1989); e Lucas afirmou que é importante que o professor consiga apresentar os problemas com um nível de dificuldade adequado, de forma a não impactar negativamente no interesse ou na autoestima dos estudantes.

Nenhum deles, ao mencionar a sua própria escolarização no questionário inicial, falou sobre abordagens envolvendo resolução de problemas; em vez disso, citam apenas experiências com exercícios e algoritmos. Entretanto, todos os licenciandos percebem pontos positivos em trabalhar com resolução de problemas em sala de aula: criação de estratégias originais, desenvolvimento do raciocínio lógico, maior compreensão dos conceitos trabalhados, aplicações de modelos matemáticos em situações práticas e promoção do diálogo na sala de aula.

No terceiro encontro, Marcelo fez um comentário sobre a sua vivência em sala de aula e como a perspectiva do professor pode negligenciar a do estudante. Muitas questões que, para ele, eram triviais, para os estudantes eram consideradas problemas. De acordo com ele, não basta o professor explicar a estratégia de resolução, mas é importante refletir sobre o porquê de ela ser adequada naquela situação e como sabemos que ela deve ser utilizada. Isso está de acordo com as ideias de Polya (2006) sobre a dramatização na resolução de um problema de forma coletiva, em que o docente, com o auxílio dos estudantes, deve apontar a situação em que o resolvedor se encontra e como chegar em uma possível estratégia a partir daquela circunstância. Também percebemos relação de tais comentários com os conceitos de controle e convicções de Schoenfeld (1985, apud GAZZONI; OST, 2008), que envolvem saber, durante a resolução de um problema, o que se faz, quando se faz e para que se faz.

Nesse mesmo encontro, Leonardo partilhou uma dificuldade sua enquanto professor, que envolve saber o que, quando, como e quanto se deve falar para auxiliar os alunos no processo de resolução. De fato, Polya (2006) já trazia em sua obra a importância do professor equilibrar o apoio ao estudante com a liberdade para que ele exerça a sua autonomia em busca de uma solução. Van de Walle (2009) também comenta sobre a importância de se evitar antecipações desnecessárias, permitindo que o estudante tente e cometa erros, mostrando a sua utilidade no processo de descoberta. Isso também está de acordo com a capacidade de selecionar tarefas adequadas ao nível de escolaridade dos estudantes (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) e fazer questionamentos para que eles pensem por si próprios (ALLEVATO, 2005).

Lucas, no Encontro 4, apresentou algumas dúvidas sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021), pois tinha dificuldade em conciliar a abordagem das autoras com outras, como problemas além dos propostos para a introdução de um novo conteúdo. Entretanto, como defendem Schroeder e Lester (1989), é importante trazermos elementos de diversas abordagens para a sala de aula, e isso inclui o ensino através da resolução de problemas para aprender um novo conteúdo, mas também o uso de problemas para gerar maior compreensão de conceitos já conhecidos e verificar sua aplicabilidade.

No encontro seguinte, houve mais comentários acerca do mesmo tema. Lucas questionou se a metodologia das autoras era compatível com provas ou trabalhos avaliativos. De acordo com Pironel e Onuchic (2021):

> Todos sabemos que existe a exigência em praticamente todos os níveis de ensino, se não em todos, de que uma nota e/ou um conceito sejam emitidos ao final de cada etapa educacional, de modo que compreendemos a necessidade de se realizar atividades avaliativas somativas. Não é a esse tipo de avaliação, entretanto, que nos referimos no contexto da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (PIRONEL; ONUCHIC, 2021, p. 82).

Desse modo, vemos que a avaliação explicitada na metodologia em questão não substitui provas e trabalhos avaliativos, como tradicionalmente se tem feito, mas sim fala da importância de utilizarmos a resolução de problemas como forma de avaliar os estudantes de modo contínuo, gerando um *feedback* constante para que eles aprimorem suas habilidades aula a aula (PIRONEL; ONUCHIC, 2021), e não apenas percebam as suas dificuldades após receberem uma nota em uma avaliação.

Leonardo também apontou a dificuldade de trabalhar em grupos durante a resolução de problemas, já que, segundo as suas experiências, os alunos vivem em uma cultura que valoriza mais encontrar a resposta correta do que o aprendizado que é construído no processo de resolução. Marcelo afirmou que os estudantes que se interessam por Matemática podem ser aliados nesse processo, auxiliando o professor a ensinar os colegas, e não apenas dar as respostas corretas. Sobre isso, Van de Walle (2009) afirma que:

> Quando trabalham sozinhos, os estudantes não têm ninguém para conversar sobre alguma ideia ou sobre algum modo de começar se estiverem bloqueados. Por outro lado, quando trabalham em grupos, sempre há a possibilidade de alguns não contribuírem ou de um aluno dominador conduzir os demais. Uma boa solução é uma abordagem *por etapas* em que eles primeiro trabalham sozinhos (refletem) e depois conversam e trocam ideias com um parceiro (VAN DE WALLE, 2009, p. 62, grifo do autor).

Houve também uma discussão sobre o nível de dificuldade das atividades, que estaria privilegiando os alunos "medianos", isto é, que não apresentam nem muita facilidade nem muita dificuldade no componente curricular. Van de Walle (2009) sugere que o professor separe atividades extras para os alunos que terminaram mais cedo que os demais aquelas que haviam sido solicitadas. Entendemos que, com essa abordagem, mobilizamos um ensino mais individualizado, e a proposta de resolução de problemas como desafio pode abranger um número maior de estudantes, incluindo aqueles que demonstram mais facilidade em Matemática. Os alunos que apresentam mais dificuldade serão especialmente desafiados com uma aula envolvendo resolução de problemas, e cremos que o trabalho em grupos também pode ser um aliado nesse processo, desde que os discentes tenham a consciência de que o objetivo deve ser o aprendizado, e essa cultura deve ser construída de forma gradual, com o professor tendo grande participação nesse processo.

Durante o sexto encontro, Lucas e Leonardo construíram um quadro apontando quais seriam as ações do professor durante abordagens envolvendo resolução de problemas que eles considerariam como facilitadoras e dificultadoras do aprendizado dos estudantes. Os licenciandos valorizaram: a percepção do raciocínio do aluno, mesmo que seja diferente do que o professor esperava, e das possíveis causas de uma estratégia de resolução incorreta; o auxílio aos estudantes sem apresentar a resposta de forma explícita, mas dando espaço para que os alunos pensem de forma autônoma;

a flexibilidade de estratégias de resolução e de dicas necessárias, bem como a percepção de quando é necessário mudar a abordagem de ensino; entender o que é um problema e o que é um exercício; circular entre diferentes grupos de alunos e auxiliar a todos; e ter uma boa relação com o erro, tornando-o uma ferramenta de aprendizado.

A partir disso, os licenciandos entenderam que esses saberes não necessariamente são consequências de conseguir resolver diversos problemas, sendo importante compreender os aspectos pedagógicos da resolução de problemas para trabalhar em sala de aula utilizando abordagens com esse tema, de modo a auxiliar os estudantes de forma cada vez mais assertiva. Entretanto, embora eles entendessem que resolver diversos problemas pode nos auxiliar a ser um professor melhor, ainda não era claro, antes da discussão, que essa relação não era uma consequência obrigatória em todos os aspectos pedagógicos, sendo necessária uma reflexão específica sobre esse assunto para aplicá-los em sala de aula.

As concepções dos licenciandos acerca da resolução de problemas complementa as conclusões obtidas por Moço (2013), que trouxe a preocupação dos (futuros) professores com o tempo e com a capacidade de improviso durante a aula, sendo necessário que o docente tome decisões sobre como proceder muitas vezes sem planejar e refletir previamente. A autora também relata que os participantes da sua pesquisa apontaram diversos pontos positivos de trabalharmos com resolução de problemas em sala de aula, e essas ideias se tornaram mais desenvolvidas e variadas a partir das discussões na oficina sobre resolução de problemas e na prática com os alunos da Educação Básica.

Proença (2012) apresentou algumas dificuldades encontradas pelos sujeitos da sua pesquisa ao desenvolverem propostas didáticas envolvendo resolução de problemas para a Educação Básica. Segundo os licenciandos, as defasagens dos estudantes em conhecimentos matemáticos básicos e a falta de autonomia foram fatores que impactaram negativamente as aulas. Além disso, os licenciandos apresentaram dificuldade em encontrar problemas que pudessem ser resolvidos por múltiplas estratégias.

5.3 AÇÕES DOS LICENCIANDOS DURANTE OS MOMENTOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Desde o início do curso de extensão, foram propostas atividades a serem resolvidas pelos licenciandos, com o objetivo de discutir os aspectos pedagógicos relativos a elas. Isso foi feito a partir de apresentações das resoluções feitas pelos participantes, imaginando que estavam conversando com alunos da Educação Básica para refletirmos sobre formas de conduzir tais alunos no processo de resolução, visando sua autonomia.

Iniciamos no segundo encontro com Marcelo resolvendo a atividade das laranjas. Na sua explicação, ele percebeu que alunos diferentes exigiam níveis de justificativa diferentes, de modo que, para alunos que tivessem uma abstração maior e um conhecimento mais aprofundado sobre a operação de subtração, apenas realizá-la já seria suficiente. Entretanto, ele pensou em uma abordagem alternativa para alunos das séries iniciais, que não se enquadrassem nessa situação, desenhando 12 laranjas e eliminando duas delas. Na sua explicação, o licenciando apenas resolveu a questão de forma expositiva, sem questionar o professor-pesquisador e os colegas. É importante ressaltar que o licenciando apresentou apenas o número, e não a resposta completa (10 laranjas).

A segunda questão, relativa à área do triângulo equilátero de lado 3, foi resolvida por Lucas. Ele apresentou os passos de resolução e afirmou que iria comentá-los com os alunos, o que ocorreu sem nenhum tipo de interação além disso. Ao aplicar o teorema de Pitágoras, também não explicou por que essa foi a estratégia escolhida ou questionou os colegas sobre outras ideias.

A questão sobre a área da bandeira foi resolvida por Leonardo, que escreveu todo o enunciado no quadro, afirmando que faria o mesmo se estivesse na sala de aula com os seus alunos. Entendemos que talvez seria interessante pensar em outras estratégias que não tomassem tanto tempo de aula, como utilizar o livro didático, atividades impressas ou plataformas digitais, pois os alunos poderiam se dispersar durante esse tempo, que também poderia ser empregado em atividades mais relevantes.

Na sua resolução, Leonardo fez a leitura da questão e dialogou com os participantes, mesmo que poucas vezes, especialmente no início do processo. O licenciando perguntou aos participantes se estavam com dúvidas em vários momentos durante o seu raciocínio, mostrando uma preocupação com a compreensão dos alunos sobre o processo de resolução, e não apenas com sua exposição. Sobre a sua apresentação, cabe ainda apontar que Leonardo não utilizou unidades de medida em nenhum momento, nem mesmo na resposta final, e não verificou se as suas respostas, $30 + 10\sqrt{5}$ e $30 - 10\sqrt{5}$, resolviam a situação inicial. De fato, $30 + 10\sqrt{5}$ cm, por ser maior do que 30 cm, ultrapassa o limite superior de tamanho da listra vermelha, que é 20 cm.

Na última questão, foi feita uma discussão coletiva sobre estratégias para determinar a altura de um prédio, sendo ela inacessível. Marcelo apresentou uma delas no quadro, utilizando sombras e proporcionalidade. O licenciando, assim como seu colega, também não utilizou unidades de medida.

No quarto encontro, Marcelo deduziu uma fórmula para a área de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio unitário. Antes de iniciar, ele comentou que, seguindo as discussões e reflexões que havíamos feito, iria utilizar de questionamentos para envolver a sua turma no processo de resolução, dizendo ainda que estaria fazendo o mesmo no seu trabalho como professor, obtendo um retorno positivo. O licenciando questionou os colegas e o professor-pesquisador sobre estratégias conhecidas para o cálculo de área, como dividir a figura para utilizar tais estratégias, meios para determinar a altura do triângulo estudado, entre diversas perguntas que tornaram Lucas e o professor-pesquisador participantes ativos da discussão. Ele anotou as sugestões dos estudantes no quadro para calcular a base e a altura do triângulo analisado, mesmo aquelas que não seriam úteis, como o Teorema de Pitágoras, por não conhecermos nenhum dos catetos (pelo menos no início da resolução). Ele discutiu o porquê de a estratégia não ser utilizada, e por que as outras seriam úteis no caso estudado.

No final da apresentação de Marcelo, ele afirmou que seria interessante retomar os pontos principais da resolução com os alunos e verificar se existiam dúvidas, já que a questão poderia ser complexa. Lucas ainda comentou que achou interessante esse envolvimento que Marcelo proporcionou, e que todos os seus momentos de correção de atividades eram expositivos.

Vemos, a partir dos dados, que as resoluções foram se tornando progressivamente mais coletivas, em detrimento das apresentações iniciais feitas pelos licenciandos de forma expositiva. Marcelo e Lucas, no início, apenas resolveram as questões sem se preocupar com as contribuições que os demais presentes tinham a oferecer. Leonardo, durante a sua resolução, questionou os colegas em alguns momentos, mas tomou a iniciativa na maior parte dos passos de resolução. Marcelo, na última questão trabalhada, a partir das discussões realizadas, conduziu, do início ao fim, uma discussão coletiva com o professor-pesquisador e Lucas, presentes no encontro. Observamos também que nenhum dos licenciandos estava preocupado com as verificações que deveriam ser feitas no último passo da resolução de um problema proposto por Polya (2006): o retrospecto. Isto é, não houve uma análise da unidade de medida que seria necessária em alguns problemas ou uma verificação da possível falta de adequação dos valores obtidos em relação ao contexto da questão.

Moço (2013), durante a sua oficina com os alunos do PIBID, proporcionou um momento de resolução, em pequenos grupos, de questões de vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio. Os alunos apresentaram suas resoluções e perceberam que, embora algumas estratégias fossem diferentes, eles obtiveram os mesmos resultados. A autora não detalhou como foi esse processo de resolução e quais as estratégias utilizadas pelos alunos, e por isso acreditamos que este trabalho complementa as suas ideias, já que analisa as resoluções feitas pelos licenciandos e discute seus aspectos pedagógicos a partir dos referenciais teóricos adotados. Moço (2013) apresenta resultados similares aos discutidos neste trabalho, afirmando que a oficina

> permitiu aos alunos dialogarem sobre o conteúdo com os colegas, compartilhar ideias, trabalhar coletivamente para a construção de suas aprendizagens, tornando a aula mais agradável e significativa do que aquela aula em que o professor fala e os alunos permanecem em silêncio (MOÇO, 2013, p. 101).

Moço (2013) ainda relata que alguns alunos não se sentiram confortáveis em apresentar as suas resoluções, e conjecturou que isso teria se dado pelo medo de errar, comumente associado à perda de nota. Episódios parecidos foram relatados por Proença (2012), que realizou uma formação para licenciandos em Matemática que focava em aspectos teóricos sobre Resolução de Problemas e momentos de prática, em que os estudantes deveriam resolver atividades propostas, discutindo e nomeando as estratégias utilizadas. O autor afirma que apenas a partir do sexto problema os alunos se sentiram mais à vontade para apresentar suas ideias.

Vemos, após a análise, a diversidade de dados e contribuições que os licenciandos em Matemática trouxeram sobre a Resolução de Problemas e os seus aspectos pedagógicos. Percebemos a evolução, as inquietações, as dificuldades e as experiências dos (futuros) professores. O curso de extensão não foi apenas um momento de apresentação teórica e formal dos conceitos, mas de troca de ideias, em que os participantes puderam ouvir uns aos outros e contribuir com sugestões. A partir dessas discussões, esperamos auxiliar com a construção de novas possibilidades para a formação inicial de professores de Matemática, levando em consideração tópicos valorizados pelos próprios licenciandos, de modo a melhor prepará-los para o exercício da docência, especialmente envolvendo a resolução de problemas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o início da constituição da Matemática enquanto ciência, verificamos a sua associação à resolução dos mais variados tipos de problemas. As consequências dessa relação indissociável podem ser a aplicação de conceitos e procedimentos matemáticos a situações práticas e cotidianas, bem como a busca pelo desenvolvimento da Matemática *per se*, entendida como um corpo de ideias estruturadas e conectadas. A Base Nacional Comum Curricular evidencia a necessidade de incentivarmos essa relação nas aulas de Matemática em diversas das suas competências, e por isso defendemos que a Resolução de Problemas deve estar presente no currículo dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Unindo isso às experiências pessoais do autor desta dissertação, desde a sua formação básica, passando pelo Ensino Superior, início da caminhada profissional e pós-graduação, decidimos buscar resposta à seguinte pergunta diretriz: **Quais são as concepções construídas por licenciandos em Matemática acerca da Resolução de Problemas e dos seus aspectos pedagógicos?** Para isso, desenvolvemos um curso de extensão universitária destinado a estudantes de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Nele, formamos um grupo de discussão para refletir sobre diversos aspectos pedagógicos da Resolução de Problemas, pois entendemos que não basta aprender a resolver problemas: é necessário aprender a ensinar por meio da resolução de problemas.

O curso de extensão universitária foi desenvolvido em seis encontros de 1h40min cada, e foi ministrado pelo autor desta dissertação. Entretanto entendemos que ele foi uma construção coletiva, que contou com a colaboração da orientadora desta pesquisa, bem como dos participantes do curso. Os dados produzidos nos encontros foram registrados no Capítulo 4 e categorizados e analisados no Capítulo 5, a partir dos referenciais teóricos estudados e discutidos no Capítulo 3 e à luz das pesquisas recentes em Resolução de Problemas na formação de professores de Matemática, apresentadas no Capítulo 2. A partir da análise feita, trazemos algumas considerações finais acerca das ideias dos licenciandos sobre Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos.

Iniciamos apresentando as conclusões obtidas sobre as concepções dos licenciandos acerca do conceito e das características de um problema matemático.

- Houve divergência entre as formas com que os licenciandos conceituaram problemas matemáticos, dado que alguns deles trouxeram a ideia de que qualquer tarefa matemática que incluísse dados e incógnitas seria um problema, enquanto outros defenderam que seria necessário que a tarefa fosse desafiadora;

- Alguns licenciandos valorizaram o interesse para conceituar um problema, mesmo que por meio de uma necessidade;
- Sobre os problemas matemáticos, os licenciandos destacaram a possibilidade de diferentes resoluções que convergem para a mesma resposta, da classificação de problemas como abertos ou fechados, do desenvolvimento do raciocínio lógico dos estudantes e da fixação de conceitos trabalhados;
- E houve divergências entre os argumentos de alguns licenciandos sobre a necessidade de uma simbologia conhecida e de um contexto cotidiano para conceituar problemas e a forma com que eles haviam conceituado problemas no questionário inicial.

Com diferentes bagagens que os licenciandos podem trazer sobre o conceito de problema, defendemos a importância de realizar uma discussão nesse sentido durante a sua formação inicial. Como vimos no Capítulo 3, existem ações e conhecimentos do professor que são próprias para ajudar os alunos a superar situações difíceis, e isso parte da diferenciação feita entre exercícios e problemas. Como relata um dos participantes da pesquisa de Moço (2013): "às vezes achamos que estamos aplicando problemas e na verdade são exercícios mecânicos disfarçados" (MOÇO, 2013, p. 95). Ou seja, confundirmos essas duas formas de atividades matemáticas pode dificultar o uso devido e equilibrado tanto de exercícios quanto de problemas, já que cada um apresenta objetivos e vantagens diferentes. Além disso, buscar conceituar com clareza e objetividade o que consideramos um problema, bem como problematizar tal conceito a partir de uma variedade de exemplos, pode auxiliar a superar alguns equívocos relatados neste trabalho, em particular a aparente necessidade de problemas estarem atrelados a um contexto do cotidiano do aluno, o que não é verdade, de acordo com a concepção adotada. Entretanto, vemos que essa ideia foi relatada tanto na prática desta dissertação quanto nos trabalhos analisados.

Elencamos, a seguir, as concepções dos licenciandos sobre abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas.

- Os relatos de três dos cinco participantes nos informam que, em algum grau, houve discussão sobre resolução de problemas em sua formação inicial, em disciplinas que tratavam sobre o ensino de Matemática;
- Os licenciandos não relataram abordagens envolvendo resolução de problemas (propriamente ditos) durante o seu Ensino Básico, mas percebem a sua impor-

tância;

- Comentou-se sobre a falta de interesse de determinados alunos de um dos licenciandos em aulas envolvendo resolução de problemas;
- Os participantes relataram algumas dificuldades ao trabalhar com resolução de problemas em sala de aula, especialmente: como instigar os discentes em abordagens envolvendo resolução de problemas; como auxiliar o aluno a resolver um problema sem dar a resposta; como enxergar o problema do ponto de vista do aluno; como conciliar o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com outras abordagens e avaliações somativas; como utilizar o trabalho em pequenos grupos como forma de auxiliar no aprendizado dos alunos durante a resolução de problemas; e como selecionar questões com nível de dificuldade adequado;
- Sobre as ações e saberes docentes valorizados pelos licenciandos, destacamos: a capacidade de compreensão e flexibilização ao dialogar com os alunos; o conhecimento de como resolver um problema de diferentes maneiras; a valorização do erro como forma de aprendizado; e a compreensão da distinção entre problemas e exercícios;
- E embora, inicialmente, os licenciandos não compreendessem com clareza a diferença entre a resolução de problemas e os seus aspectos pedagógicos, isso se tornou mais evidente a partir da discussão feita.

Reiteramos, a partir dessas conclusões, que é necessário, além de discutir amplamente o conceito de problema na formação inicial de professores de Matemática, refletir sobre as ações do professor durante abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas. As dificuldades apresentadas pelos licenciandos participantes dessa pesquisa constituem um guia que nos auxilia a entender quais aspectos podem ser valorizados nessa discussão. Entendemos que é necessário um investimento considerável de tempo, já que as dificuldades e as ações docentes valorizadas pelos participantes tratam de diversos campos da Resolução de Problemas.

De fato, levando em consideração que nenhum dos cinco licenciandos afirmou ter sido desafiado com problemas durante a sua formação básica, entendemos que a discussão sobre esses tópicos pode auxiliar na mudança desse cenário recente. Isso poderia tornar mais comum a inclusão de abordagens envolvendo resolução de problemas nos planos de aula dos professores de Matemática, de modo adaptado às suas realidades e alternado com outras estratégias pedagógicas.

Apresentamos, por fim, nossas conclusões sobre as ações dos licenciandos durante a resolução das questões propostas.

- Nas primeiras resoluções, os licenciandos assumiram uma postura mais ativa no processo, realizando uma apresentação expositiva e sem considerar as contribuições dos colegas;
- Nos últimos encontros, um dos participantes, a partir das reflexões feitas e dos textos lidos, conseguiu incorporar as sugestões de Polya (2006) sobre tornar o aluno protagonista do processo de resolução, fazendo com que, mesmo em um momento de correção coletiva, os demais pudessem sugerir abordagens, responder a perguntas e refletir sobre a resolução do ponto de vista dos alunos, e não do professor;
- E os licenciandos mostraram dificuldade em associar as respostas às questões propostas, desconsiderando unidades de medida e verificações sobre a adequação dos valores às situações apresentadas.

Assim, vemos que a discussão e reflexão sobre aspectos pedagógicos da RP pode auxiliar na compreensão dos papéis do professor e do estudante em abordagens de ensino envolvendo resolução de problemas, apresentados pelos autores estudados. Além disso, a discussão sobre os passos de Polya (2006) para a resolução de um problema pode facilitar a condução dos alunos nesse processo de maneira integral, desde a compreensão do problema até o retrospecto. Consideramos também a importância de associar as reflexões a uma prática constante, de preferência vinculada ao estágio supervisionado, para aplicar o que foi discutido com os licenciandos em situações de sala de aula, trazendo relatos para o grande grupo e buscando potencializar as discussões a partir de um número maior de circunstâncias reais, e menos hipotéticas.

A partir dos referenciais teóricos estudados, dos encontros realizados e das conclusões obtidas, reiteramos a importância de uma sólida formação inicial de professores de Matemática, que inclua a reflexão sobre a Resolução de Problemas não como um adendo ao currículo, mas como parte estruturante da preparação docente com o objetivo de mobilizar, nos (futuros) alunos dos licenciandos, as competências e habilidades previstas na BNCC acerca da resolução de problemas. Defendemos que essas discussões devem incluir o conceito de problema, aspectos teóricos sobre como resolver problemas, diferentes abordagens envolvendo a resolução de problemas nas aulas de Matemática e possíveis ações do professor que podem potencializar o aprendizado dos estudantes a partir da resolução de problemas.

Acreditamos ter avançado na pesquisa em Resolução de Problemas, complementando as conclusões de Moço (2013) e Proença (2012), que produziram trabalhos similares a este, por meio da reflexão profunda de aspectos teóricos acerca da resolução de problemas, dando enfoque à voz dos licenciandos em Matemática e criando um ambiente de discussão colaborativa em que uns puderam analisar as resoluções e relatos dos outros, contribuindo a partir de suas próprias experiências.

Como limitações desta pesquisa, entendemos que o curso de extensão acabou por traçar um perfil dos participantes restrito àqueles que tivessem disponibilidade de horários e interesse no tema proposto. Por um lado, isso pode possibilitar discussões mais profundas e com envolvimento maior dos participantes, que estariam presentes por escolha própria; sob outra perspectiva, as concepções que os licenciandos apresentaram sobre Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos podem não ser representativas em relação aos demais (futuros) professores de uma realidade similar. Também compreendemos que, embora os licenciandos tenham relatado uma compreensão maior sobre o tema após as intervenções, e um deles tenha afirmado estar obtendo bons resultados com suas turmas da Educação Básica, a pesquisa se limita a discussões teóricas e reflexões a partir de experiências passadas dos participantes e do professor-pesquisador, não incluindo, em sua análise, a construção e aplicação, pelos licenciandos, de planos de aula envolvendo resolução de problemas. Mais do que a mera análise do contexto escolar e verificação das ações docentes colocadas em prática pelos (futuros) professores, se faria necessário um investimento maior de tempo para verificar se as implicações do curso de extensão na prática pedagógica dos licenciandos é observada a longo prazo.

Para futuras pesquisas sobre resolução de problemas, acreditamos que o processo de reflexão e discussão pode ser ainda mais elaborado e aprimorado, com uma quantidade maior de encontros e tratando de forma mais específica sobre temas que foram relatados como difíceis para os licenciandos. Poderiam ser trazidos casos verídicos ou hipotéticos de situações de sala de aula para os licenciandos discutirem possíveis ações docentes. Isso poderia incluir a análise de erros cometidos por alunos da Educação Básica durante a resolução de uma questão, bem como a discussão sobre dúvidas que os alunos poderiam manifestar a partir de problemas específicos e possíveis formas de auxiliá-los. Outra possibilidade é a reflexão sobre anos escolares específicos, com a seleção de potenciais problemas pelos próprios licenciandos ou a adaptação de estratégias de resolução dependendo das habilidades que se esperam de cada etapa escolar. Por fim, o tema das conexões também poderia ser aprofundado, com os licenciandos apresentando as relações que podem ser construídas e discutidas nos problemas trabalhados.

Além disso, acreditamos que essa reflexão pode ser aliada a um processo de prática já tradicionalmente realizado em outros trabalhos acadêmicos sobre o tema (MOÇO, 2013; PROENÇA, 2012), especialmente se vinculada ao estágio supervisionado, que pode gerar temas de discussão que vão do hipotético para o concreto.

Esta pesquisa, além de fomentar reflexões aos licenciandos que dela participaram, também permitiu o meu desenvolvimento pessoal. Não me refiro à minha evolução apenas como pesquisador, mas especialmente enquanto professor. Pude, a partir deste trabalho, refletir sobre a minha própria prática e repensar as formas que tenho trabalhado com os meus alunos. Embora o objetivo desta pesquisa fosse conhecer as concepções sobre Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos dos (futuros) professores, também eu me permiti fazer parte desse processo e (re)conhecer o meu próprio entendimento acerca desse assunto, e como as minhas concepções se manifestam em ações no ambiente escolar. Desejo que as marcas que essa pesquisa teve na minha trajetória não sejam passageiras, mas se convertam em constantes problematizações e atualizações do meu “ser professor”, entendendo que essa construção não é estática, mas dinâmica.

Por fim, esperamos que esta pesquisa não contribua apenas com o estudo na área, auxiliando em outros trabalhos que envolvam Resolução de Problemas. Mais do que isso, desejamos que os resultados obtidos nesta dissertação sirvam como um alerta para os cursos de Licenciatura em Matemática, incentivando-os a valorizar o estudo, a reflexão e a prática sobre a Resolução de Problemas, como forma de tornar o seu currículo mais próximo daquilo que é apresentado na Base Nacional Comum Curricular e nos diversos trabalhos que tratam desse tema.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência**. 2005. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 2, 2019.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? *In:* **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 40-63.

AZEVEDO, Elizabeth Quirino de. **O processo de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas no contexto da formação inicial do professor de matemática**. 2014. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389–407, 2008.

BICALHO, Jossara Bazílio de Souza. **A Resolução de Problemas e o conhecimento para ensinar: uma análise de percepções e reflexões de futuros professores de Matemática**. 2022. Tese (Doutorado) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2022.

BORBA, Marcelo. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. In:* 27.ª reunião anual da Anped, 2004, Caxambu. **Anais** [...] Caxambu: ANPEd, 2004. p. 1-18. 1 CD-ROM.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019**. Brasília: Ministério da Educação, 2020. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2019-pdf/135951-rcp002-19/file. Acesso em: 26 abr. 2023.

CAI, Jinfa; LESTER, Frank. Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? Tradução: Antonio Sergio Abrahão Monteiro Bastos e Norma Suely Gomes Allevato. **Boletim Gepem**, n. 60, p. 117–135, 2012.

CANAVARRO, Ana Paula. O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da matemática com conexões – Ideias da teoria ilustradas com exemplos. **Educação e Matemática**, p. 38–42, 2017.

CAVALHEIRO, Gabriela Castro Silva. **Resolução de problemas e investigação matemática: um processo de intervenção formativa para licenciandos em Matemática**. 2017. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2017.

COSTA, Manoel dos Santos. **Ensino-aprendizagem-avaliação de proporcionalidade através da resolução de problemas: uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de matemática**. 2012. Tese (Doutorado) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2012.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Teláris matemática 9º ano**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2019.

DICTIONARY, Cambridge. **Require**. Disponível em: https://dictionary.cambridge.org/pt/dicionario/ingles/require#dataset_cacd. Acesso em: 20 set. 2022.

ENGLISH, Lyn; LESH, Richard; FENNEWALD, Thomas. Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. *In:* **Proceedings of the International Congress on Mathematical Education 2008**. International Commission on Mathematical Instruction, 2008. p. 1-13.

FIGUEIREDO, Fabiane Fischer. **Design de problemas com a utilização das Tecnologias Digitais na formação inicial de professores de Matemática**. 2017. Tese (Doutorado) – Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2017.

GAZZONI, Alcibiades; OST, Augusto. A resolução de um problema: soluções alternativas e variações na formulação. **VIDYA**, v. 28, n. 2, p. 37–45, 2008.

HATFIELD, Larry. Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: Rationales and research. *In:* **Mathematical problem solving**: papers from a research workshop. Colombus: ERIC, 1978.

HUANCA, Roger Ruben Huaman. **A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática**. 2014. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

JUSTULIN, Andresa Maria. **A formação de professores de matemática no contexto da resolução de problemas**. 2014. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

KILPATRICK, Jeremy. Reformulando: Abordando a Resolução de Problemas Matemáticos como Investigação. *In:* **Perspectivas para resolução de problemas**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 163-187.

LESTER, Frank; GAROFALO, Joe; KROLL, Diana Lambdin. The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Seven Classes. Final Report. **ERIC**, 1989.

MAGNI, Rosana Jorge Monteiro. **Grupo de Estudos sobre Resolução de Problemas: um Caminho para o Desenvolvimento Profissional Docente**. 2017. Tese (Doutorado) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

MENDES, Luiz Otavio Rodrigues. **O processo formativo para o ensino-aprendizagem de Matemática via resolução de problemas: Análise da compreensão de futuros professores**. 2023. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2023.

MOÇO, Priscila Pedroso. **Discussões sobre a resolução de problemas enquanto estratégia metodológica para o ensino de Matemática**. 2013. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2013.

MORAIS, Rosilda dos Santos; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Uma abordagem histórica da Resolução de Problemas. *In:* **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 20-39.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Tradução: Magda Melo. 2. ed. Lisboa: APM, 2008.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, n. 1, 2013.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, v. 25, n. 41, p. 73–98, 2011.

PIRONEL, Márcio; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Resolução de problemas: oportunidade de avaliação para aprendizagem. *In:* **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 64-87.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, João Pedro da. Mathematics teachers' professional knowledge. *In:* **Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics**

Education (PME). International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1994, Lisbon. Vol. I. p. 195-210.

PONTE, João Pedro da. Conexões no programa de matemática do ensino básico. **Educação e Matemática**, n. 110, p. 3–6, 2010.

PROENÇA, Marcelo Carlos de. **A resolução de problemas na licenciatura em matemática: análise de um processo de formação no contexto do estágio curricular supervisionado**. 2012. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto da. **Números Racionais, Reais e Complexos**. 2. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. De Pappus a Polya: da Heurística grega à Resolucao de Problemas. **Plures Humanidades**, n. 11, p. 12–27, 2009.

SCHOENFELD, Alan Henry. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. **Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning**, p. 334–370, 1992.

SCHROEDER, Thomas; LESTER, Frank. Developing understanding in mathematics via problem solving. **New directions for elementary school mathematics**, p. 31–42, 1989.

SHULMAN, Lee. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational researcher**, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986.

SHULMAN, Lee. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard educational review**, Harvard Education Publishing Group, v. 57, n. 1, p. 1–23, 1987.

UFRGS, Comissão de Graduação de Matemática da. **Projeto Pedagógico do Curso - Licenciatura em Matemática**. Porto Alegre, 2018. Disponível em: bit.ly/PPCMATUFRGS. Acesso em: 26 abr. 2023.

VAN DE WALLE, John. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: artmed, 2009.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____,
R.G. ____________________, aluno(a) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), declaro, por meio deste termo, que concordo com minha participação na pesquisa intitulada "A Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos: uma reflexão com (futuros) professores de Matemática", desenvolvida pelo pesquisador Guilherme Hahn Krás.

Fui informado(a) que a pesquisa é orientada pela Prof.ª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (XX) XXXXXXXXX ou do e-mail XXXXXX@XXXXXX.

Tenho ciência de que minha participação não envolve forma alguma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) que a pesquisa é qualitativa e que tem como objetivos estritamente acadêmicos:

1. Averiguar quais concepções os licenciandos trazem sobre Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos antes da aplicação do curso, a partir das suas experiências escolares e universitárias, bem como das suas reflexões pessoais;
2. Entender quais conhecimentos pedagógicos aplicados à RP são valorizados e exercitados pelos licenciandos participantes do curso.

Como benefício da pesquisa, é esperado que ela produza informações importantes sobre Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional, tanto para os licenciandos quanto para seus futuros alunos.

Também estou ciente que minha colaboração para a mencionada pesquisa se fará por meio da participação no curso intitulado "Resolução de Problemas e seus aspectos pedagógicos", em que serei observado (havendo também gravações em áudio/vídeo feitas pelo pesquisador), e minha produção será fotografada e/ou digitalizada e analisada. Fui informado(a), ainda, que minha participação iniciará apenas a partir da entrega desse documento (do qual receberei uma via), por mim assinado.

Fui também esclarecido(a) de que o uso das informações por mim oferecidas será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.) e que minha identidade será mantida em sigilo. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), sem identificação. Essas informações, fotos ou filmagens ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, a fim de amenizar qualquer desconforto, será mantido o anonimato dos graduandos. Além disso, é assegurado que eu posso deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não me sinta confortável com alguma situação, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável no telefone (XX) XXXXXXXXX ou e-mail XXXXXX@XXXXXX.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria – Campus Centro, Porto Alegre/RS – CEP: 90040-060, e que tem como telefone 55 51 3308-3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br.

Porto Alegre, ______ de ____________________________ de 20______.

Assinatura do participante: ____

Assinatura do pesquisador: ____

Assinatura da orientadora da pesquisa: ____