

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Posto Combinatório dos Grupos Quânticos de tipo
 A_2, A_3, B_2, B_3 e C_3

Dissertação de Mestrado

Vitória Gomes de Oliveira

Porto Alegre, 06 de outubro de 2023.

Dissertação submetida por Vitória Gomes de Oliveira¹ como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:

Bárbara Seelig Pogorelsky (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:

Carolina Noele Renz (UFCSPA)

João Matheus Jury Giraldi (PPGMat-UFRGS)

Leonardo Duarte Silva (UFRGS)

Data da Apresentação: 06/10/2023.

¹Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu pai, Vitor Hugo, que embora não esteja mais ao meu lado, sei que estaria muito feliz e orgulhoso com as minhas conquistas e realizações atuais, assim como esteve quando concluí minha graduação e ingressei no mestrado em Matemática. Agradeço a ele por ser a pessoa que mais me incentivou a gostar de Matemática desde criança e que sempre incentivou a mim e a minha irmã a valorizar a educação e seguir uma formação acadêmica. Agradeço também a minha mãe, Nara Cristina, que esteve ao meu lado em muitos momentos difíceis durante essa fase da minha vida, e possibilitou que eu esteja entregando este trabalho. Além de sempre mostrar, a partir de exemplos, que não existe “trabalhos de homem”. Agradeço a ela pela visão que tenho e por estar aqui hoje.

Faço um agradecimento especial à minha orientadora, Bárbara, que me apresentou a Álgebra no meu terceiro semestre de graduação, na disciplina de Álgebra I, de uma forma que me incentivou a seguir os estudos nesta área. Ainda, agradeço por ter me aceito como aluna de iniciação científica em 2021 e posteriormente como sua orientanda de mestrado. Agradeço pela sua paciência e generosidade ao me sanar dúvidas. E agradeço por aceitar continuar me norteando, ajudando e orientando durante o doutorado.

Agradeço também a banca examinadora, que aceitou e se dedicou a entender e aprimorar este trabalho. Agradeço especialmente ao professor João Matheus, que além de ter feito parte da banca, se dispôs a me ensinar a utilizar o programa de computador GAP, que facilitou na hora de conferir os resultados.

Agradeço também aos meus amigos, André e Luíza, que fizeram com que este momento se tornasse muito mais leve e divertido. Agradeço por muitas vezes me apoiarem em momentos difíceis e por comemorem cada conquista minha.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro durante o mestrado. E agradeço a todos que lutam diariamente pela valorização da ciência, para que um dia todos cientistas e futuros cientistas possam se dedicar tranquilamente e de forma exclusiva à suas pesquisas.

Resumo

Nesta dissertação, iremos calcular o posto combinatório de alguns grupos quânticos da forma $u_q^+(\mathfrak{g})$, no qual \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie simples. Calcularemos as bases PBW, o coproduto dos elementos da base, os elementos skew-primitivos e os skew-centrais para as quantizações de tipo A_n, B_n e C_n , $n \leq 3$, e, por fim, concluiremos que $\kappa(u_q^+(A_n)) = 2$, para $n \in \{2, 3\}$, $\kappa(u_q^+(B_2)) = 2$, $\kappa(u_q^+(B_3)) = 3$ e $\kappa(u_q^+(C_3)) = 3$.

Abstract

In this dissertation, we will calculate the combinatorial rank of some quantum groups of the form $u_q^+(\mathfrak{g})$, where \mathfrak{g} is a simple Lie algebra. We will compute the PBW bases, the coproduct of the basis elements, the skew-primitive elements, and the skew-central elements for the quantizations of types A_n, B_n , and C_n , $n \leq 3$. Finally, we conclude that $\kappa(u_q^+(A_n)) = 2$, for $n \in \{1, 2\}$, $\kappa(u_q^+(B_2)) = 2$, $\kappa(u_q^+(B_3)) = 3$, and $\kappa(u_q^+(C_3)) = 3$.

Sumário

Introdução	1
1 Pré-requisitos	3
1.1 Produto tensorial	3
1.2 Álgebras e coálgebras	4
1.3 Biálgebras	9
1.4 Álgebras de Hopf	10
2 Quantizações	14
2.1 Definições preliminares	14
2.2 Álgebras de Hopf de caracteres	16
2.3 Hiper-letras duras	18
2.4 Bases PBW	21
2.5 Ordem convexa	22
2.6 Grupos quânticos	23
2.7 Posto combinatório	25
3 Posto combinatório do grupo quântico de tipo A_2	27
3.1 Quantizações de tipo A_2	27
3.2 Coproduto	29
3.3 Skew-primitivos	30
3.4 Posto combinatório	31
4 Posto combinatório do grupo quântico de tipo A_3	33
4.1 Quantizações de tipo A_3	33
4.2 Coproduto	36
4.3 Skew-primitivos	37
4.4 Posto combinatório	38
5 Posto combinatório do grupo quântico de tipo B_2	41
5.1 Quantizações de tipo B_2	41
5.2 Coproduto	43

5.3	Skew-primitivos	44
5.4	Posto combinatório	45
6	Posto combinatório do grupo quântico de tipo B_3	48
6.1	Quantizações de tipo B_3	48
6.2	Coproduto	52
6.3	Skew-primitivos	53
6.4	Posto combinatório	54
7	Posto combinatório do grupo quântico de tipo C_3	62
7.1	Quantizações de tipo C_3	62
7.2	Coproduto	66
7.3	Skew-primitivos	67
7.4	Posto combinatório	69
	Referências Bibliográficas	74

Introdução

Uma álgebra associativa H é uma álgebra de Hopf se possuir também uma estrutura dual denominada coálgebra, com uma compatibilidade entre elas, e ainda, possuir um endomorfismo que satisfaz condições sobre a estrutura de H . Uma álgebra de Hopf não comutativa e não cocomutativa é denominada um grupo quântico.

A teoria das álgebras de Hopf tem um importante papel em diversas áreas da matemática e da física. Essas estruturas foram inicialmente observadas no contexto da topologia algébrica por Heinz Hopf em 1941, a partir dos anos 1960 foram investigadas em um contexto algébrico, e ainda, posteriormente, foram estabelecidas conexões com a mecânica quântica. Vemos, por exemplo, na física, aplicações envolvendo grupos quânticos na teoria de partículas. Veremos neste trabalho cálculos do posto combinatório para quantizações de álgebras de Lie simples, que também são grupos quânticos.

O posto combinatório de uma álgebra de Hopf é o número de ideais de Hopf em uma cadeia específica com certas condições, que veremos na Seção 2.7. Este número representa o quão próximo uma álgebra de Hopf está de ser gerada por elementos skew-primitivos.

Para a produção desta dissertação, baseei-me nos trabalhos de Dylewski, Pogorelsky e Renz, mais especificamente nas referências [5] e [6]. No artigo [6], "On the combinatorial rank of the quantum groups of type G_2 ", as autoras definem os grupos quânticos $U_q^+(G_2)$ e $u_q^+(G_2)$ a partir da quantização da álgebra de Lie simples G_2 , a partir disso elas determinam sua base PBW, e usando o coproduto dos elementos com alguns resultados adicionais obtêm os elementos da quantização $U_q^+(G_2)$ que são skew-primitivos, e, por fim, provam que o posto combinatório $\kappa(u_q^+(G_2)) = 3$. O mesmo é feito no artigo [5], "On the combinatorial rank of the quantum groups of type F_4 ", para a álgebra de Lie simples F_4 . Neste, as autoras provam que o posto combinatório $\kappa(u_q^+(F_4)) = 4$. Por outro lado, o posto combinatório das álgebras de Lie de tipo A_n, B_n, C_n e D_n foi calculado por Kharchenko, Alvarez e Díaz Sosa, ver [15], [16] e [17].

O objetivo deste trabalho é calcular o posto combinatório para álgebras de Lie de tipo A_n, B_n e C_n , para $n \leq 3$. Para isso, iremos utilizar o mesmo método empregado nos artigos [6] e [5], diferente da técnica usada nas referências [15], [16] e [17].

Outros materiais que serviram como alicerce para esta produção foram as referências [4], "Hopf algebras: an introduction", dos autores Dascalescu, Nastasescu e Raianu, e [14], "Quantum Lie theory", de Kharchenko. Nestes, são apresentados definições e resultados

sobre álgebras de Hopf e sobre álgebras de Lie quânticas, respectivamente.

Iniciamos a dissertação apresentando definições e resultados sobre produto tensorial, álgebras, coálgebras, biálgebras e álgebras de Hopf. Além disso, veremos definições de quando uma álgebra de Hopf é comutativa ou cocomutativa, para então introduzirmos os grupos quânticos no trabalho. Exploraremos alguns exemplos de álgebras de Hopf para auxiliar no entendimento dos conceitos vistos.

Em seguida, no segundo capítulo, trataremos de álgebras de Hopf de caracteres, veremos as definições e resultados sobre hiper-letras duras, bases PBW e ordem convexa, para que, assim, possamos entender os grupos quânticos que iremos estudar, e como realizar o cálculo do posto combinatório destas álgebras.

Nos capítulos 3 em diante, serão feitas aplicações específicas das álgebras de Hopf para as quantizações das álgebras de Lie simples de tipo A_n , B_n e C_n , com $n \leq 3$. Veremos suas definições, suas bases PBW, coproduto de seus elementos, seus elementos skew-primitivos, e, por fim, calcularemos seu posto combinatório com base nesses resultados.

Concluiremos neste trabalho que o posto combinatório $\kappa(u_q^+(A_n)) = 2$, para $n \in \{2, 3\}$, $\kappa(u_q^+(B_2)) = 2$, $\kappa(u_q^+(B_3)) = 3$ e $\kappa(u_q^+(C_3)) = 3$.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo serão apresentados conceitos e resultados preliminares aos estudos das quantizações de álgebras de Lie simples. Para isso, os trabalhos [4] e [14] serviram de referência.

1.1 Produto tensorial

Nesta seção tomaremos R um anel comutativo e M, N, P módulos sobre R .

Definição 1.1.1. Dizemos que uma aplicação $f : M \times N \rightarrow P$ é R -bilinear, se é R -linear em cada variável, ou seja,

- $f(r_1 m_1 + r_2 m_2, n) = r_1 f(m_1, n) + r_2 f(m_2, n), \quad \forall m_1, m_2 \in M, n \in N, r_1, r_2 \in R;$
- $f(m, r_1 n_1 + r_2 n_2) = r_1 f(m, n_1) + r_2 f(m, n_2), \quad \forall m \in M, n_1, n_2 \in N, r_1, r_2 \in R.$

Por simplicidade, iremos utilizar os termos bilinear e linear para nos referirmos a R -bilinear e R -linear.

A partir deste conceito podemos definir o produto tensorial entre dois R -módulos.

Definição 1.1.2. Seja R um anel comutativo. O produto tensorial de dois R -módulos M, N , denotado por $M \otimes_R N$, é um R -módulo T juntamente com uma aplicação bilinear $\varphi : M \times N \rightarrow T$ tal que, para toda aplicação bilinear $f : M \times N \rightarrow P$, existe uma única aplicação linear $\bar{f} : T \rightarrow P$, de modo que $f = \bar{f} \circ \varphi$, fazendo com que o seguinte diagrama seja comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\varphi} & T \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & P \end{array}$$

Em alguns materiais a definição acima é denominada como a Propriedade Universal do Produto Tensorial.

Seja Q o R -módulo livre gerado pelos elementos de $M \times N$, isto é, os elementos de Q são da forma $\sum_{i=1}^n r_i(m_i, n_i)$, com $m_i \in M, n_i \in N, r_i \in R$. Sejam

$$\begin{aligned} L_1 &= \langle (m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), \forall m_1, m_2 \in M, n \in N \rangle, \\ L_2 &= \langle (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2), \forall m \in M, n_1, n_2 \in N \rangle, \\ L_3 &= \langle (rm, n) - r(m, n), \forall m \in M, n \in N, r \in R \rangle, \\ L_4 &= \langle (m, rn) - r(m, n), \forall m \in M, n \in N, r \in R \rangle. \end{aligned}$$

O produto tensorial $M \otimes_R N$ é dado pelo quociente $\frac{Q}{\langle L_1, L_2, L_3, L_4 \rangle}$ juntamente com a aplicação bilinear $\varphi : M \times N \rightarrow M \otimes_R N$, que leva cada elemento (m, n) em sua classe em $M \otimes_R N$, que é denotado por $m \otimes n$.

Observação 1.1.3. $M \otimes_R N$ construído acima satisfaz a definição de produto tensorial e é único a menos de isomorfismos.

Note que, como o produto tensorial $M \otimes_R N$ é um quociente por $\langle L_1, L_2, L_3, L_4 \rangle$, temos que as seguintes propriedades são válidas:

- $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n, \forall m_1, m_2 \in M, n \in N;$
- $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2, \forall m \in M, n_1, n_2 \in N;$
- $r(m \otimes n) = rm \otimes n = m \otimes rn, \forall m \in M, n \in N, r \in R.$

Ainda, observe que $m \otimes 0 = m \otimes 0 \cdot n = 0(m \otimes n) = 0$ e, de forma análoga, $0 \otimes n = 0$.

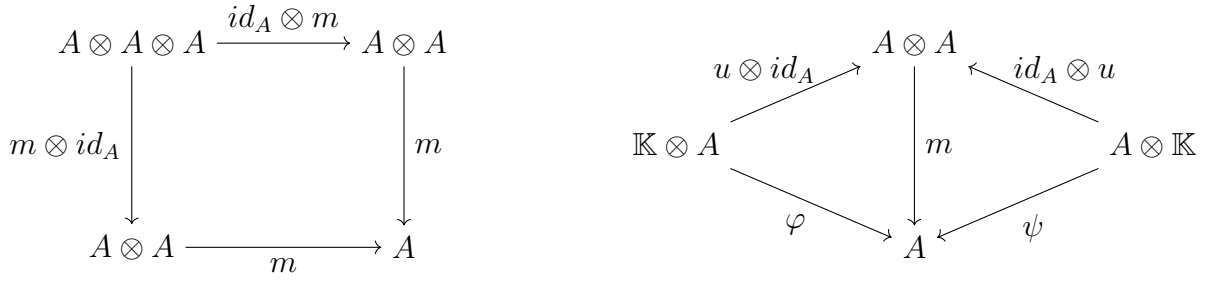
Proposição 1.1.4. *As seguintes propriedades são válidas para o produto tensorial:*

- i) $M \otimes_R R \simeq M,$*
- ii) $(M \otimes_R N) \otimes_R P \simeq M \otimes_R (N \otimes_R P),$*
- iii) $M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M.$*

1.2 Álgebras e coálgebras

Daqui em diante, tomaremos o produto tensorial como o construído na seção anterior. Para simplificar a notação, usaremos apenas $M \otimes N$.

Definição 1.2.1. Sejam \mathbb{K} um corpo e A um \mathbb{K} -espaço vetorial. Dizemos que A é uma \mathbb{K} -álgebra se existirem dois morfismos de \mathbb{K} -espaços vetoriais, a aplicação multiplicação $m : A \otimes A \rightarrow A$ dada por $m(a \otimes b) = ab$, e a unidade $u : \mathbb{K} \rightarrow A$ dada por $u(1_{\mathbb{K}}) = 1_A$, tais que os seguintes diagramas são comutativos:



Aqui, id_A é a aplicação identidade de A e φ e ψ são isomorfismos canônicos.

Observação 1.2.2. Note que, pelo primeiro diagrama, temos que $m \circ (id_A \otimes m) = m \circ (m \otimes id_A)$. Aplicando essa igualdade a um elemento $a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$ de $A \otimes A \otimes A$, segue que, $m \circ (id_A \otimes m)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = m \circ (m \otimes id_A)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)$, o que implica que, $m(a_1 \otimes a_2 a_3) = m(a_1 a_2 \otimes a_3)$ e assim, $a_1(a_2 a_3) = (a_1 a_2)a_3$. Ou seja, o primeiro diagrama nos diz que a \mathbb{K} -álgebra A é associativa. E, pelo segundo diagrama, temos que $m \circ (u \otimes id_A)(1_{\mathbb{K}} \otimes a) = \varphi(1_{\mathbb{K}} \otimes a)$ e $m \circ (id_A \otimes u)(a \otimes 1_{\mathbb{K}}) = \psi(a \otimes 1_{\mathbb{K}})$, o que implica que $1_A a = a = a 1_A$. Ou seja, o segundo diagrama nos diz que 1_A é a unidade de A .

Notação 1.2.3. Escreveremos (A, m, u) para denotarmos a álgebra A com a multiplicação m e unidade u , quando necessário enfatizar as aplicações m e u .

Exemplo 1.2.4 (Álgebra de Grupo). Sejam \mathbb{K} um corpo e G um grupo multiplicativo, temos que o \mathbb{K} -módulo livre $\mathbb{K}G$, dado por $\left\{ \sum_{i=1}^n k_i g_i \mid k_i \in \mathbb{K}, g_i \in G \right\}$, pode ser visto como um \mathbb{K} -espaço vetorial com base $\{g \mid g \in G\}$. Então, teremos que $\mathbb{K}G$ é uma \mathbb{K} -álgebra com multiplicação $m : \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G \rightarrow \mathbb{K}G$ e unidade $u : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}G$ dadas por $m(\alpha g \otimes \beta h) = (\alpha\beta)(gh), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, g, h \in G$ e $u(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}}1_G$ respectivamente. A multiplicação pode ser estendida linearmente da seguinte forma:

$$m \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \otimes \sum_{j=1}^n \beta_j h_j \right) = \sum_{i,j=1}^n (\alpha_i \beta_j) (g_i h_j).$$

É fácil ver que $\mathbb{K}G$ satisfaz os requisitos da Definição 1.2.1 para ser uma \mathbb{K} -álgebra, uma vez que um grupo G , por definição, é associativo e possui elemento neutro.

Exemplo 1.2.5 (Álgebra de Sweedler). Seja \mathbb{K} um corpo de característica diferente de 2. Considere o \mathbb{K} -espaço vetorial H , com base $\{1, c, x, cx\}$, no qual

$$c^2 = 1, x^2 = 0, xc = -cx.$$

Então, pode-se verificar que H é uma \mathbb{K} -álgebra de dimensão 4.

Exemplo 1.2.6 (Álgebra Tensorial). Sejam \mathbb{K} um corpo e M um \mathbb{K} -espaço vetorial. Denotamos $T^0(M) = \mathbb{K}$, $T^1(M) = M$ e, para $n \geq 2$, $T^n(M) = M \otimes M \otimes \cdots \otimes M$ o

produto tensorial com n cópias do \mathbb{K} -espaço vetorial M . Assim, denotamos a álgebra tensorial de M por $T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(M)$.

Dados dois elementos $x = x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p \in T^p(M)$ e $y = y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_q \in T^q(M)$, a multiplicação $x \cdot y$ é dada pela concatenação, isto é

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p) \cdot (y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_q) \\ &= x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_q. \end{aligned}$$

Logo, $x \cdot y \in T^{p+q}(M)$. E, assim, definimos uma multiplicação de dois elementos arbitrários de $T(M)$, estendendo linearmente o produto acima. A unidade da álgebra tensorial é dada pela inclusão de \mathbb{K} em $T(M)$, $u : \mathbb{K} \rightarrow T^0(M) \subseteq T(M)$.

Observação 1.2.7. Se A e B são duas \mathbb{K} -álgebras, então $A \otimes B$ é uma \mathbb{K} -álgebra com multiplicação, $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$, no qual $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$. E unidade $1_{A \otimes B} = 1_A \otimes 1_B$.

Definição 1.2.8. Uma álgebra (A, m, u) é dita **comutativa** se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\tau} & A \otimes A \\ & \searrow m & \swarrow m \\ & & A \end{array}$$

onde $\tau : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ é a aplicação twist, dada por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$.

Observação 1.2.9. O diagrama acima comutar equivale a $m(\tau(a \otimes b)) = m(a \otimes b)$, isto é, $ab = ba$, para todos $a, b \in A$.

Exemplo 1.2.10. A álgebra de grupo $\mathbb{K}G$, quando G é um grupo abeliano, é uma álgebra comutativa. Sejam αg e $\beta h \in \mathbb{K}G$, então, pela comutatividade do grupo G ,

$$m(\tau(\alpha g \otimes \beta h)) = m(\beta h \otimes \alpha g) = (\beta \alpha)(hg) = (\alpha \beta)(gh) = m(\alpha g \otimes \beta h).$$

Note que, se G não for abeliano, então a álgebra de grupo é não comutativa.

Exemplo 1.2.11. A álgebra de Sweedler dada no Exemplo 1.2.5 é não comutativa por definição, uma vez que $xc = -cx$, com x, c e cx elementos da base.

Definição 1.2.12. Sejam \mathbb{K} um corpo, (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) duas \mathbb{K} -álgebras. Então, $f : A \rightarrow B$ é um **morfismo de álgebras** se os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\
\downarrow m_A & & \downarrow m_B \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{K} & \xrightarrow{u_A} & A \\
\searrow u_B & & \downarrow f \\
& & B
\end{array}
.$$

Observação 1.2.13. A partir dos diagramas acima, concluímos que, para $f : A \rightarrow B$ ser um morfismo de álgebras, f deve ser multiplicativo, isto é, $f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2)$, para todos $a_1, a_2 \in A$. Temos também que $f(1_A) = 1_B$.

Definição 1.2.14. Um subconjunto S de uma álgebra A é uma \mathbb{K} -subálgebra de A se S é uma álgebra com a estrutura de álgebra de A restrita a S .

Definição 1.2.15. Sejam \mathbb{K} um corpo, A uma \mathbb{K} -álgebra e I um subespaço de A . Então, I é um **ideal à esquerda** de A se para todo $a \in A$, temos que $aI \subseteq I$ (análogo para **ideal à direita**). Se I é ideal à esquerda e à direita de A , dizemos que I é um **ideal bilateral** de A , ou simplesmente um ideal de A .

Definição 1.2.16. Uma \mathbb{K} -coálgebra, ou simplesmente coálgebra, é uma tripla (C, Δ, ε) , onde C é um \mathbb{K} -espaço vetorial e $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ e $\varepsilon : C \rightarrow \mathbb{K}$ (comultiplicação e counidade) são morfismos de \mathbb{K} -espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
\downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \otimes id_C \\
C \otimes C & \xrightarrow{id_C \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
& & C & & \\
& \swarrow \cong & & \searrow \cong & \\
\mathbb{K} \otimes C & & C & & C \otimes \mathbb{K} \\
& \swarrow \varepsilon \otimes id_C & \downarrow \Delta & \searrow id_C \otimes \varepsilon & \\
& & C \otimes C & &
\end{array}
.$$

Notação 1.2.17 (Notação de Sweedler). Note que, aplicando Δ em um elemento c da coálgebra C , temos que $\Delta(c) = \sum_{i=1}^n c_{i1} \otimes c_{i2}$, para certos $c_{i1}, c_{i2} \in C$. Para facilitar nos cálculos futuros, iremos utilizar simplesmente $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$. Isto é conhecido na literatura como a notação de Sweedler para o coproduto.

Observação 1.2.18. A partir do primeiro diagrama da Definição 1.2.16 temos que $(\Delta \otimes id_C) \circ \Delta(c) = (id_C \otimes \Delta) \circ \Delta(c)$. Assim, pela notação de Sweedler, segue que $(\Delta \otimes id_C)(c_1 \otimes c_2) = (id_C \otimes \Delta)(c_1 \otimes c_2)$, portanto $c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22}$. Iremos denotar a mesma simplesmente por $c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$.

Pelo segundo diagrama da definição, podemos concluir que $c_1 \varepsilon(c_2) = c = \varepsilon(c_1) c_2$.

Exemplo 1.2.19. Seja $\mathbb{K}G$ a álgebra de grupo vista no Exemplo 1.2.4. Então, $(\mathbb{K}G, \Delta, \varepsilon)$ é uma \mathbb{K} -coálgebra com $\Delta : \mathbb{K}G \rightarrow \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G$, $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon : \mathbb{K}G \rightarrow \mathbb{K}$, $\varepsilon(g) = 1_{\mathbb{K}}$. De fato, note que $(\Delta \otimes id_{\mathbb{K}G}) \circ \Delta(g) = (\Delta \otimes id_{\mathbb{K}G})(g \otimes g) = g \otimes g \otimes g = (id_{\mathbb{K}G} \otimes \Delta) \circ \Delta(g)$, logo o primeiro diagrama da Definição 1.2.16 será comutativo para a aplicação Δ de $\mathbb{K}G$. Ainda, $(id_{\mathbb{K}G} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(g) = (id_{\mathbb{K}G} \otimes \varepsilon)(g \otimes g) = g \otimes 1_{\mathbb{K}}$ e $(\varepsilon \otimes id_{\mathbb{K}G}) \circ \Delta(g) = (\varepsilon \otimes id_{\mathbb{K}G})(g \otimes g) = 1_{\mathbb{K}} \otimes g$, e assim o segundo diagrama da definição com essas aplicações irá comutar. Logo, concluímos que $(\mathbb{K}G, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra.

Exemplo 1.2.20. Seja H a álgebra de Sweedler vista no Exemplo 1.2.5. E, tomando as aplicações lineares $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$, dada por $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, $\Delta(c) = c \otimes c$, $\Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1$, $\Delta(cx) = 1 \otimes cx + cx \otimes c$ e $\varepsilon : H \rightarrow \mathbb{K}$, dada por $\varepsilon(1) = \varepsilon(c) = 1$, $\varepsilon(cx) = \varepsilon(x) = 0$, e estendendo linearmente. Pode-se verificar que (H, Δ, ε) é uma \mathbb{K} -coálgebra.

Definição 1.2.21. Uma coálgebra (C, Δ, ε) é dita **cocomutativa** se o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ \Delta \swarrow & & \searrow \Delta \\ C \otimes C & \xrightarrow{\tau} & C \otimes C \end{array} .$$

Observação 1.2.22. O diagrama acima comutar equivale a $\Delta(c) = \tau(\Delta(c))$, isto é, $c_1 \otimes c_2 = c_2 \otimes c_1$.

Exemplo 1.2.23. Note que, a álgebra de Sweedler é não cocomutativa, uma vez que $\Delta(x) = c \otimes x + x \otimes 1 \neq x \otimes c + 1 \otimes x = \tau(\Delta(x))$.

Definição 1.2.24. Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ duas \mathbb{K} -coálgebras. Então, $g : C \rightarrow D$ é um **morfismo de coálgebras** se os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & D \\ \Delta_C \downarrow & & \downarrow \Delta_D \\ C \otimes C & \xrightarrow{g \otimes g} & D \otimes D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & D \\ \varepsilon_C \searrow & & \swarrow \varepsilon_D \\ & \mathbb{K} & \end{array} .$$

Observação 1.2.25. O primeiro diagrama da observação acima comutar, junto a notação de Sweedler, nos diz que, dado $c \in C$, temos

$$\Delta_D \circ g(c) = g(c)_1 \otimes g(c)_2 = g(c_1) \otimes g(c_2) = g \otimes g \circ \Delta_C(c).$$

Pela comutatividade do segundo diagrama temos, $\varepsilon_D \circ g(c) = \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c)$.

Definição 1.2.26. Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Então:

1. Um elemento $g \in C$ é chamado **group-like** se $g \neq 0$ e $\Delta(g) = g \otimes g$. O conjunto de todos elementos group-likes da coálgebra C é denotado por $G(C)$;
2. Sejam $c \in C$ e $g, h \in G(C)$. Dizemos que c é **(g, h) -primitivo** se $\Delta(c) = c \otimes g + h \otimes c$;
3. Seja $c \in C$. Dizemos que c é um elemento **skew-primitivo** se c é (g, h) -primitivo com $g = 1$.

Observação 1.2.27. Note que se $g \in G(C)$, então $\varepsilon(g) = 1$, pois, pela propriedade da counidade, temos que $g\varepsilon(g) = g = \varepsilon(g)g$. Ainda, se $a \in C$ é (f, h) -primitivo, pela definição da counidade, temos que $\varepsilon(a)h + \varepsilon(f)a = a$, mas como f é um elemento group-like, $\varepsilon(f) = 1$, e assim, segue que $\varepsilon(a) = 0$.

Definição 1.2.28. Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Dizemos que um \mathbb{K} -subespaço D de C é uma **subcoálgebra** de C se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.

Definição 1.2.29. Sejam \mathbb{K} um corpo, C uma \mathbb{K} -coálgebra e I um subespaço de C . Então, I é um **coideal à esquerda** de C se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$ (análogo para **coideal à direita**). Dizemos que I é um **coideal** de C se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$.

Observação 1.2.30. Note que, I ser um coideal não implica que I é coideal à esquerda ou à direita.

Exemplo 1.2.31. O anel de polinômios $\mathbb{K}[X]$, é uma coálgebra com as aplicações dadas por $\Delta(x^n) = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)^n$, $\varepsilon(x^n) = 0$ para $n \geq 1$ e $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, $\varepsilon(1) = 1$. Tome $I = \mathbb{K}X$, o subespaço gerado por X , é fácil ver que I é um coideal de $\mathbb{K}[X]$, mas não é um coideal à direita ou à esquerda de $\mathbb{K}[X]$.

1.3 Biálgebras

Seja H um \mathbb{K} -espaço vetorial com uma estrutura de álgebra (H, m, u) e uma estrutura de coálgebra (H, Δ, ε) . No resultado a seguir vemos casos em que essas estruturas são compatíveis.

Proposição 1.3.1. [4, Proposition 4.1.1] *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *As aplicações m e u são morfismos de coálgebras.*
- ii) *As aplicações Δ e ε são morfismos de álgebras.*

Definição 1.3.2. Uma **biálgebra** é um \mathbb{K} -espaço vetorial H , dotado de uma estrutura de álgebra (H, m, u) , e com uma estrutura de coálgebra (H, Δ, ε) tal que Δ e ε são morfismos de álgebras (então, pela proposição anterior, m e u são morfismos de coálgebras).

Exemplo 1.3.3. A álgebra de grupo $\mathbb{K}G$ com as estruturas de álgebra e coálgebra vistas nos exemplos anteriores é uma biálgebra.

Observação 1.3.4. Diremos que uma biálgebra possui uma certa propriedade se sua álgebra ou coálgebra subjacente possuir esta propriedade. Por exemplo, dada uma biálgebra H , diremos que H é comutativa, se sua estrutura de álgebra é comutativa.

Exemplo 1.3.5. A álgebra de Sweedler $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra. Além disso, como H com sua estrutura de álgebra é não comutativa e H com sua estrutura de coálgebra é não cocomutativa, temos que a biálgebra H é não comutativa e não cocomutativa.

Definição 1.3.6. Sejam H e L duas biálgebras. Dizemos que uma aplicação \mathbb{K} -linear $f : H \rightarrow L$ é um **morfismo de biálgebras** se é um morfismo de álgebras com relação a suas estruturas de álgebra e um morfismo de coálgebras entre as coálgebras subjacentes das duas biálgebras.

Definição 1.3.7. Sejam \mathbb{K} um corpo, H uma \mathbb{K} -biálgebra e I um subespaço de H . Então, I é um **bi-ideal** de H se I for um ideal e um coideal de H .

1.4 Álgebras de Hopf

Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e (A, m, u) uma álgebra. Definimos no conjunto $Hom(C, A)$, conjunto dos morfismos \mathbb{K} -lineares de C em A , uma estrutura de álgebra com uma multiplicação $*$ dada da seguinte forma: se $f, g \in Hom(C, A)$, então

$$(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2), \quad c \in C.$$

Podemos reescrever a multiplicação dada acima como

$$(f * g)(c) = (m \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(c). \quad (1.1)$$

Esta multiplicação é denominada **produto convolução**.

Note que o produto $*$ é associativo. Sejam $f, g, h \in Hom(C, A)$ e $c \in C$, temos que

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(c) &= (f * g)(c_1)h(c_2) = f(c_{1_1})g(c_{1_2})h(c_2) \\ &= f(c_1)g(c_2)h(c_3) = f(c_1)(g * h)(c_2) \\ &= (f * (g * h))(c). \end{aligned}$$

Ainda, temos que $(f * (u \circ \varepsilon))(c) = f(c_1)(u \circ \varepsilon)(c_2) = f(c_1)\varepsilon(c_2)1 = f(c) = ((u \circ \varepsilon) * f)(c)$, isto é, $u \circ \varepsilon \in Hom(C, A)$ é o elemento identidade da álgebra $Hom(C, A)$.

Tomemos, agora, H uma biálgebra e sejam H^C a coálgebra subjacente de H e H^A a álgebra subjacente de H . Portanto, podemos definir uma estrutura de álgebra em

$Hom(H^C, H^A)$ com o produto convolução sendo a multiplicação, e valerão as mesmas propriedades vistas para $Hom(C, A)$.

Definição 1.4.1. Seja H uma biálgebra. Dizemos que uma aplicação linear $S : H \rightarrow H$ é uma **antípoda** da biálgebra H se S é a inversa multiplicativa da aplicação identidade $I : H \rightarrow H$ com respeito ao produto convolução em $Hom(H^C, H^A)$.

Observação 1.4.2. A aplicação S ser inversa de I equivale a $S * I = u \circ \varepsilon = I * S$, isto é, $S(h_1)h_2 = h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1_H, h \in H$. Ainda, como a antípoda é definida como a inversa da aplicação identidade, temos que ela será única, caso exista.

Definição 1.4.3. Uma biálgebra H que possui antípoda é chamada **álgebra de Hopf**.

Exemplo 1.4.4. No Exemplo 1.3.3, vimos que $\mathbb{K}G$ é uma biálgebra. Veremos agora que $\mathbb{K}G$ é também uma álgebra de Hopf, na qual $S : \mathbb{K}G \rightarrow \mathbb{K}G, S(g) = g^{-1}$, é sua antípoda.

Pela igualdade (1.1), temos que

$$\begin{aligned} (S * I)(g) &= (m \circ (S \otimes I) \circ \Delta)(g) = (m \circ (S \otimes I))(g \otimes g) \\ &= m(g^{-1} \otimes g) = 1_{\mathbb{K}G} = u(1_{\mathbb{K}}) = (u \circ \varepsilon)(g). \end{aligned}$$

Para mostrarmos que $I * S = u \circ \varepsilon$, basta realizar um processo análogo ao que foi feito para o caso acima.

Assim, $S * I = u \circ \varepsilon = I * S$, e concluímos que S é a antípoda de $\mathbb{K}G$. E desta forma, $\mathbb{K}G$ é uma álgebra de Hopf.

Exemplo 1.4.5. A álgebra de Sweedler H , que já vimos que é uma biálgebra não comutativa e não cocomutativa, possui uma antípoda $S : H \rightarrow H$, dada por $S(1) = 1, S(c) = c^{-1} = c, S(x) = -cx$ e $S(cx) = x$. É fácil verificar que $S * I = I * S = u \circ \varepsilon$. Portanto, H é uma álgebra de Hopf.

Definição 1.4.6. Dizemos que uma álgebra de Hopf H é um **grupo quântico**, quando H é uma álgebra de Hopf não comutativa e não cocomutativa.

Exemplo 1.4.7. Como vimos nos exemplos anteriores, a álgebra de Sweedler H é um grupo quântico.

Definição 1.4.8. Sejam H uma álgebra de Hopf e A um subespaço de H . Dizemos que A é uma **subálgebra de Hopf** de H se A é uma H -subálgebra, uma H -subcoálgebra e $S(A) \subseteq A$.

Definição 1.4.9. Sejam H e H' duas álgebras de Hopf. Uma aplicação $f : H \rightarrow H'$ é dita um **morfismo de álgebras de Hopf** se é um morfismo de biálgebras.

A proposição a seguir será necessária para entendermos melhor alguns grupos quânticos, uma vez que os que serão apresentados futuramente são da forma $\frac{H}{I}$, no qual H é uma álgebra de Hopf e I é um ideal de Hopf de H , cuja a definição veremos na mesma proposição.

Proposição 1.4.10. [4, Proposition 4.2.13] *Sejam H uma álgebra de Hopf e I um **ideal de Hopf** de H , isto é, I é um ideal para a álgebra H , um coideal para a cóalgebra H , e $S(I) \subseteq I$, onde S é a antípoda de H . Então podemos induzir uma estrutura natural de uma álgebra de Hopf no quociente $\frac{H}{I}$. Quando esta estrutura está definida, a projeção canônica $p : H \rightarrow \frac{H}{I}$ é um morfismo de álgebras de Hopf.*

Proposição 1.4.11. [4, Proposition 4.2.6] *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S . Então:*

- i) $S(hg) = S(g)S(h), \forall g, h \in H$;*
- ii) $S(1) = 1$;*
- iii) $\Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1), h \in H$;*
- iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.*

Os itens *i)* e *ii)* significam que a aplicação S é um antimorfismo de álgebras e os itens *iii)* e *iv)* que S é um antimorfismo de cóalgebras.

Proposição 1.4.12. *Se H é uma álgebra de Hopf, então o conjunto dos elementos group-likes de H , $G(H)$, é um grupo com a multiplicação induzida pela álgebra subjacente de H .*

Demonstração. Claramente $G(H)$ é associativo. Além disso, $G(H)$ possui elemento neutro. Como Δ é um morfismo de álgebras, temos que $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, e assim $1 \in G(H)$. Ainda, se $g, h \in G(H)$, $\Delta(gh) = \Delta(g)\Delta(h) = (g \otimes g)(h \otimes h) = gh \otimes gh$, logo $gh \in G(H)$.

Pela definição de antípoda, temos que para $g \in G(H)$, $S * I(g) = u \circ \varepsilon(g) = I * S(g)$, logo temos que $S(g)g = 1 = gS(g)$, e assim g é invertível com $g^{-1} = S(g)$. Desta forma, usando o item *iii)* da Proposição 1.4.11, temos que $\Delta(S(g)) = S(g) \otimes S(g)$, e assim $\Delta(g^{-1}) = g^{-1} \otimes g^{-1}$. Portanto, os elementos de $G(H)$ possuem inversos em $G(H)$. Portanto, $G(H)$ é um grupo. ■

Proposição 1.4.13. *Cada ideal gerado por elementos skew-primitivos é um ideal de Hopf.*

Demonstração. Sejam H uma álgebra de Hopf e $a \in H$ um elemento (g_1, g_2) -primitivo, ou seja, $\Delta(a) = a \otimes g_1 + g_2 \otimes a$, com $g_1, g_2 \in G(H)$. Vimos que $\varepsilon(a) = 0$, então, pela definição de antípoda, temos que $S * I(a) = u \circ \varepsilon(a) = 0$. Então, $0 = (m \circ (S \otimes I) \circ \Delta)(a) = (m \circ (S \otimes I))(a \otimes g_1 + g_2 \otimes a) = S(a)g_1 + S(g_2)a$, o que implica que $S(a) = -g_2^{-1}a g_1^{-1}$.

Tomemos agora, C o subespaço gerado por alguns elementos skew-primitivos de H multiplicados por elementos de $G(H)$ em ambos os lados, isto é, os elementos geradores de C são da forma fah onde f e h são elementos group-likes de H arbitrários e a é um skew-primitivo tal que $\Delta(a) = a \otimes 1 + g \otimes a$, $g \in G(H)$. Então C é um coideal e $S(C) \subseteq C$. De fato,

$$\begin{aligned}\Delta(fah) &= \Delta(f)\Delta(a)\Delta(h) = (f \otimes f)(a \otimes 1 + g \otimes a)(h \otimes h) \\ &= fah \otimes fh + fgh \otimes fah \in C \otimes H + H \otimes C.\end{aligned}$$

Além disso, como mostrado na proposição anterior $G(H)$ é um grupo, então $(fgh)^{-1}$, $(fh)^{-1}$ existem e pertencem a $G(H)$. Note que fah é um elemento (fh, fgh) -primitivo, então

$$S(fah) = -(fgh)^{-1}a(fh)^{-1} \in C,$$

Logo, segue que $S(C) \subseteq C$.

Sejam I o ideal gerado por C e $h_i c_i h'_i$, com $h_i, h'_i \in H, c_i \in C$, um elemento arbitrário de I , então como S é antimorfismo segue que

$$S(h_i c_i h'_i) = S(h'_i)S(c_i)S(h_i) = S(h'_i)(-g^{-1}c_i)S(h_i) = (-S(h'_i)g^{-1})c_i S(h_i) \in HCH \subseteq I;$$

$$\Delta(h_i c_i h'_i) = h_{i(1)} c_i h'_{i(1)} \otimes h_{i(2)} h'_{i(2)} + h_{i(1)} g_i h'_{i(1)} \otimes h_{i(2)} a_i h'_{i(2)} \in I \otimes H + H \otimes I;$$

$$\varepsilon(h_i c_i h'_i) = \varepsilon(h_i)\varepsilon(c_i)\varepsilon(h'_i) = \varepsilon(h_i) \cdot 0 \cdot \varepsilon(h'_i) = 0.$$

Assim, concluímos que I é também um coideal. E como $S(I) \subseteq I$, segue que I é um ideal de Hopf. ■

No capítulo a seguir serão feitas definições necessárias para a construção dos grupos quânticos que iremos investigar mais adiante, para isso serão indispensáveis os conceitos e resultados expostos até aqui.

Capítulo 2

Quantizações

Neste capítulo iremos tomar $H = G\langle X \rangle$ ou $H = \frac{G\langle X \rangle}{I}$, onde $X = \{x_i \mid i \in J\}$ é um conjunto de indeterminadas, G é um grupo abeliano e I um ideal de $G\langle X \rangle$. Nos aprofundaremos mais na definição e características de $G\langle X \rangle$ na Seção 2.2. Daqui em diante tomaremos \mathbb{K} um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados nas referências [1], [2], [5], [10], [12], [13], [14] e [18].

2.1 Definições preliminares

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto finito de variáveis, denominado **alfabeto**, onde cada variável deste conjunto é chamada **letra**. Uma **palavra** será uma lista ordenada de letras de X . Dadas duas palavras em letras do alfabeto X , fazemos o produto entre elas utilizando o **produto concatenação**, ou seja, o produto de duas palavras $u = u_1u_2 \dots u_n$ e $v = v_1v_2 \dots v_m$ é dado por $uv = u_1u_2 \dots u_nv_1v_2 \dots v_m$.

Definição 2.1.1. Se $w = uv$, dizemos que a palavra u é um **começo** de w e a palavra v é um **final** de w .

Definição 2.1.2. O **comprimento** de uma palavra u é definido como o número de letras de u . Denotaremos por $L(u)$.

Exemplo 2.1.3. Se $u = x_1x_2x_2$ então $L(u) = 3$.

Dado $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um alfabeto, fixaremos a ordem entre as letras deste alfabeto, sendo $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_{n-1} > x_n$. Utilizaremos a **ordem lexicográfica** para compararmos duas palavras, isto é, dadas u e v palavras distintas, comparamos cada letra da esquerda para direita, a palavra maior será a palavra que tem a primeira letra distinta maior nesta comparação. No caso em que uma palavra seja o começo de outra, a palavra de menor comprimento será a maior.

Exemplo 2.1.4. Dadas as palavras $u = x_1x_2$, $v = x_1x_2x_1$ e $w = x_1x_2x_2$, temos que

$$u > v > w.$$

Isso ocorre porque u é um começo de v e comparando v e w temos que a primeira letra distinta entre elas é maior em v .

Definição 2.1.5. Dizemos que uma palavra u é uma **palavra standard** se para quaisquer duas palavras u_1 e u_2 não nulas, onde $u = u_1u_2$, temos que $u > u_2u_1$.

Exemplo 2.1.6. Dadas as palavras $u = x_1x_2^2x_3$ e $v = x_1x_3x_1x_2$, temos que u é standard e v é não standard. Note que v pode ser escrita como $v = v_1v_2$, sendo $v_1 = x_1x_3$ e $v_2 = x_1x_2$. Assim, temos que

$$v_2v_1 = x_1x_2x_1x_3 > x_1x_3x_1x_2 = v.$$

Definição 2.1.7. Dados um corpo \mathbb{K} e um conjunto de letras não comutativas x_1, x_2, \dots, x_n , definimos um **polinômio não comutativo** como uma combinação linear de palavras v_i em letras x_j e escalares no corpo, isto é, $f = \sum_i a_i v_i$ com $a_i \in \mathbb{K}$. Falaremos simplesmente polinômio.

Definição 2.1.8. Sejam \mathbb{K} um corpo e X um conjunto de variáveis. A **álgebra livre** $\mathbb{K}\langle X \rangle$, consiste de polinômios de variáveis não comutativas, que podem ser expressos por combinações lineares formais $\sum_i k_i v_i$ de palavras em letras do conjunto X , com o produto concatenação.

Definição 2.1.9. A **constituição** de uma palavra u em $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ é uma família ordenada de inteiros não negativos $\{m_i \mid x_i \in X\}$ tais que u possui m_i ocorrências de x_i .

Exemplo 2.1.10. Dado $X = \{x_1, x_2\}$, se $u = x_2^2x_1x_2$ temos que, $m_{x_1} = 1$ e $m_{x_2} = 3$, então a constituição de u é $\{1, 3\}$.

Fixada a ordem total $>$ em X , sendo $x_1 > x_2 > \dots > x_{n-1} > x_n > \dots$, tomamos Γ^+ o monoide aditivo livre (comutativo) gerado por X . O monoide Γ^+ é completamente ordenado com relação a seguinte ordem:

$$m_1x_{i_1} + m_2x_{i_2} + \dots + m_kx_{i_k} > m'_1x_{i_1} + m'_2x_{i_2} + \dots + m'_kx_{i_k}$$

se o primeiro número diferente de zero da esquerda em $(m_1 - m'_1, m_2 - m'_2, \dots, m_k - m'_k)$ for positivo, onde $x_{i_j} \in X$ e $x_{i_1} > x_{i_2} > \dots > x_{i_k}$.

Definição 2.1.11. O **grau** de uma palavra u é dado por $D(u) = \sum_{x \in X} m_x x \in \Gamma^+$, onde

$\{m_x \mid x \in X\}$ é a constituição de u . Se $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \in \mathbb{K}\langle X \rangle$, com $\alpha_i \neq 0$ em \mathbb{K} , definimos

$$D(f) = \max\{D(u_i) \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

Exemplo 2.1.12. No exemplo anterior a constituição de u é $\{1, 3\}$, então o seu grau é $D(u) = 1x_1 + 3x_2$.

Exemplo 2.1.13. Seja $f = x_1x_2x_1 + x_3x_1^2x_2^2$ um polinômio não comutativo. Tomando $u_1 = x_1x_2x_1$ e $u_2 = x_3x_1^2x_2^2$, temos que a constituição de u_1 é $\{2, 1, 0\}$ e a constituição de u_2 é $\{2, 2, 1\}$, então $D(u_1) = 2x_1 + 1x_2$ e $D(u_2) = 2x_1 + 2x_2 + 1x_3$. Logo, $D(u_2) > D(u_1)$, pois em $(2 - 2, 2 - 1, 1 - 0) = (0, 1, 1)$ o primeiro termo da esquerda diferente de zero é positivo. Portanto $D(f) = \max\{D(u_1), D(u_2)\} = D(u_2)$.

Para facilitar a escrita, como iremos trabalhar adiante com o conjunto X sendo finito, utilizaremos $(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n)$ como o grau da palavra y , onde ∂_i é o grau da variável x_i . Chamaremos de **grau total** da palavra y o inteiro $\partial_1 + \partial_2 + \dots + \partial_n$. Neste caso, temos que o grau de u do exemplo anterior é $(1, 3)$ e o seu grau total é 4.

Definição 2.1.14. Um polinômio $f = \sum_i a_i v_i$ é dito **homogêneo** se todas as palavras v_i têm mesmo grau.

Definição 2.1.15. Um elemento u é chamado de **skew-central** se para todo v homogêneo, nós temos $uv = \alpha vu$, $\alpha = \alpha(v) \in \mathbb{K}$. É equivalente dizermos que $ux_i = \alpha_i x_i u$ para todo i , com $1 \leq i \leq n$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

2.2 Álgebras de Hopf de caracteres

O objetivo desta seção é definir as álgebras de Hopf de caracteres, em particular a skew álgebra de grupos $G \langle X \rangle$, uma vez que as quantizações que serão definidas adiante são quocientes desta.

Definição 2.2.1. Uma função $\chi : G \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$ é dita um **carácter** do grupo G se χ é um homomorfismo de grupos.

Definição 2.2.2. Um elemento a é dito **semi-invariante** se ag e ga são proporcionais para todo $g \in G$.

Definição 2.2.3. Uma álgebra de Hopf H é dita uma **álgebra de Hopf de caracteres** se o grupo G de todos elementos group-likes é comutativo e H é gerado sobre $\mathbb{K}G$ por skew-primitivos semi-invariantes a_i , $i \in I = \{1, \dots, n\}$, isto é:

$$\Delta(a_i) = a_i \otimes 1 + g_i \otimes a_i, g_i \in G \quad e \quad ga_i g^{-1} = \chi^i(g) a_i, g \in G,$$

onde χ^i , $i \in I$, são caracteres do grupo G .

O Teorema a seguir é um resultado importante para provarmos a existência de skew-primitivos em bi-ideais de álgebras de Hopf de caracteres, este será muito utilizado quando estivermos calculando o posto combinatório das álgebras de Hopf que iremos estudar.

Teorema 2.2.4. [13, Corollary 5.3] *Todo bi-ideal não nulo de uma álgebra de Hopf de caracteres possui pelo menos um elemento skew-primitivo não nulo.*

Definição 2.2.5. Dizemos que x é uma **variável quântica** se um elemento g de um grupo abeliano G e um carácter $\chi : G \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$, que serão denotados por g_x e χ^x , estão associados a x . Um **polinômio quântico** é um polinômio em variáveis quânticas.

Observação 2.2.6. Se $u = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l}$ então $g_u = g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_l}$. Se v é uma palavra em variáveis quânticas, isto é, $v = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$, onde cada x_{i_j} é uma variável quântica, temos que $\chi^v(g_u) = \chi^{x_{i_1}}(g_u) \chi^{x_{i_2}}(g_u) \dots \chi^{x_{i_k}}(g_u)$.

Notação 2.2.7. Denotaremos $\chi^v(g_u)$ por $p(u, v) = p_{uv}$, onde u, v são palavras em variáveis quânticas.

Definição 2.2.8. Definimos a ação de um grupo abeliano G sobre a álgebra livre $\mathbb{K}\langle X \rangle$, por $g_i a_j g_i^{-1} = \chi^j(g_i) a_j$, onde a_j é um monômio arbitrário de X , g_i um elemento do grupo G e χ^j é um carácter de X , com $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e \mathbb{K} um corpo. A **skew álgebra de grupo $G\langle X \rangle$** é uma álgebra definida pelos geradores $x_i \in X$, $g \in G$ e relações de comutação $g_i x_j = p_{ij} x_j g_i$.

A álgebra $G\langle X \rangle$ tem a estrutura natural de uma álgebra de Hopf considerando

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i, \quad i \in I, \quad \Delta(g) = g \otimes g. \quad (2.1)$$

Observação 2.2.9. Note que, $G\langle X \rangle$ é uma álgebra de Hopf de caracteres por definição. E ainda, as variáveis $x_i \in G\langle X \rangle$ são variáveis quânticas, pois para todo i existem g_i um elemento do grupo abeliano G e χ^i um carácter, associados à x_i .

Definição 2.2.10. Definimos um **skew-comutador bilinear** sobre o conjunto de todas as palavras em variáveis quânticas pela fórmula:

$$[u, v] = uv - p_{uv}vu. \quad (2.2)$$

Proposição 2.2.11. *Sejam u, v e w palavras. São válidas as seguintes identidades:*

- (i) $[uv, w] = u[v, w] + p_{vw}[u, w]v$;
- (ii) $[u, vw] = [u, v]w + p_{uv}v[u, w]$;
- (iii) $[[u, v], w] = [u, [v, w]] + p_{vw}^{-1}[[u, w], v] + (p_{vw} - p_{vw}^{-1})[u, w]v$.

Demonstração. Para provarmos as igualdades basta aplicarmos o skew comutador (2.2) em cada caso.

$$(i) \quad [uv, w] = uvw - p_{uv,w}wuv = uvw + (p_{vw}uuv - p_{vw}uuv) - p_{uv}p_{vw}wuv = u(vw - p_{vw}wv) + p_{vw}(uw - p_{uv}wu)v = u[v, w] + p_{vw}[u, w]v.$$

(ii) $[u, vw] = uvw - p_{u,vw}vwu = uvw + (p_{uv}vuw - p_{uv}vuw) - p_{uv}p_{uw}vwu = [u, v]w + p_{uv}v[u, w]$.

(iii) Subtraindo $[[u, v], w]$ por $[u, [v, w]]$, temos que $[[u, v], w] - [u, [v, w]] = [uv - p_{uv}vu, w] - [u, vw - p_{vw}vw] = [uv, w] - p_{uv}[vu, w] - [u, vw] + p_{vw}[u, wv] = u[v, w] + p_{vw}[u, w]v - p_{uv}(v[u, w] + p_{uw}[v, w]u) - ([u, v]w + p_{uv}v[u, w]) + p_{vw}([u, w]v + p_{uw}w[u, v]) = -p_{uv,w}wuv - p_{uv}vwu + p_{u,vw}vwu + p_{vw}uwv$.

Ainda, por outro lado, temos que $p_{wv}^{-1}[[u, w], v] + (p_{vw} - p_{wv}^{-1})[u, w]v = p_{wv}^{-1}([u, w], v) + p_{vw}p_{wv}[u, w]v - [u, w]v = p_{wv}^{-1}(uvw - p_{uv,v}vuw - p_{uw}wuv + p_{uw}p_{vu}vwu + p_{wv}p_{vw}uwv - p_{wv}p_{vw}p_{uw}wuv - uwv + p_{uw}wuv) = -p_{uv,w}wuv - p_{uv}vwu + p_{u,vw}vwu + p_{vw}uwv$.

Portanto, temos que $[[u, v], w] - [u, [v, w]] = p_{wv}^{-1}[[u, w], v] + (p_{vw} - p_{wv}^{-1})[u, w]v$. Assim, $[[u, v], w] = [u, [v, w]] + p_{wv}^{-1}[[u, w], v] + (p_{vw} - p_{wv}^{-1})[u, w]v$.

■

Observação 2.2.12. Note que, se $[u, w] = 0$ no item (iii) da Proposição 2.2.11, temos que

$$[[u, v], w] = [u, [v, w]]. \quad (2.3)$$

Ainda, se p_{vv} é uma raiz t-ésima da unidade, segue que

$$[u, v^t] = [\dots [[u, v], v], \dots, v]; \quad (2.4)$$

$$[v^t, u] = [v, [v, \dots [v, u] \dots]]. \quad (2.5)$$

(Ver [12]).

2.3 Hiper-letras duras

Nesta seção iremos definir palavras não associativas e apresentar resultados necessários para estudarmos hiper-letras duras.

Definição 2.3.1. Uma **palavra não associativa** é uma palavra onde colchetes $[,]$ definem como deve ser aplicado o produto entre as letras desta palavra. Em nosso caso usaremos a definição do colchete dado em (2.2). Denotaremos por $[u]$ a palavra não associativa, e u a palavra associativa correspondente.

Exemplo 2.3.2. Dada a palavra associativa $u = x_1x_2x_3$, temos as seguintes possíveis palavras não associativas relacionadas

$$[u] = [x_1, [x_2, x_3]] \quad \text{ou} \quad [u] = [[x_1, x_2], x_3].$$

Definição 2.3.3. O conjunto de todas as palavras não associativas é definido indutivamente por:

- (i) Todas as letras são palavras não associativas,
- (ii) Se $[u]$ e $[v]$ são palavras não associativas então $[w] = [[u], [v]]$ é uma palavra não associativa,
- (iii) Não existem outras palavras não associativas.

Definimos uma ordem natural para as palavras não associativas. Dadas palavras $[u]$ e $[v]$, temos que $[u] > [v]$ se, e somente se, $u > v$.

Definição 2.3.4. Dizemos que uma palavra não associativa $[u]$ é **standard** se:

- (i) A palavra u é standard,
- (ii) Se $[u] = [[u_1], [u_2]]$ então, $[u_1]$ e $[u_2]$ são palavras não associativas standard,
- (iii) Se $[u] = [[[u_1], [u_2]], [u_3]]$, então $u_2 \leq u_3$.

Embora possam existir diferentes palavras não associativas provenientes de uma palavra associativa standard, quando exigimos que esta palavra não associativa seja standard também sempre existirá um único alinhamento possível. A prova deste resultado foi feita por A. I. Shirshov e pode ser encontrada em [18].

Teorema 2.3.5 (Teorema de Shirshov). *[18, Lemma 1] Toda palavra standard u possui um único alinhamento de colchetes tal que a palavra não associativa $[u]$ é standard.*

Além da unicidade destas palavras não associativas standards, A. I. Shirshov apresenta como deve ser feito o alinhamento dos colchetes a partir de uma palavra associativa standard para que resulte em uma palavra não associativa standard, veja:

Os fatores v, w da decomposição não associativa $[u] = [[v], [w]]$ são palavras standards tal que $u = vw$ e v tem comprimento mínimo.

Exemplo 2.3.6. Seja $u = x_1^2 x_3 x_1 x_2$, temos as seguintes opções para v e w :

1. Se $v = x_1$ e $w = x_1 x_3 x_1 x_2$. Então w não é standard, pois $w = w_1 w_2$ tal que $w_1 = x_1 x_3$ e $w_2 = x_1 x_2$, mas $w_2 w_1 > w$.
2. Se $v = x_1^2$ e $w = x_3 x_1 x_2$, é fácil ver que w não é standard.
3. $v = x_1^2 x_3$ e $w = x_1 x_2$, ambas as palavras são standard. Como esta opção já cumpre com as exigências acima não há necessidade de continuar avaliando os outros casos, uma vez que, pelo Teorema de Shirshov, o alinhamento de colchetes standard relacionado a palavra associativa u é único.

Desta forma, temos que o alinhamento em que a palavra não associativa $[u]$ é standard é $[u] = [[v], [w]] = [[x_1^2 x_3], [x_1 x_2]]$. Seguindo este processo, podemos alinhar v e w como palavras não associativas standards resultando no seguinte alinhamento $[u] = [[x_1, [x_1, x_3]], [x_1, x_2]]$.

Definição 2.3.7. Uma **hiper-letra** é um polinômio que é uma palavra standard não associativa, onde os colchetes são definidos por (2.2). Uma palavra em hiper-letras é chamada de **hiper-palavra**.

Observação 2.3.8. Sejam $[u]$ e $[v]$ duas hiper-letras e $u = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l}$ e $v = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}$ suas palavras associativas correspondentes, então p_{uv} será dado por,

$$p_{uv} = p_{i_1 j_1} p_{i_1 j_2} \dots p_{i_1 j_k} p_{i_2 j_1} p_{i_2 j_2} \dots p_{i_2 j_k} \dots p_{i_l j_1} p_{i_l j_2} \dots p_{i_l j_k}.$$

Corolário 2.3.9. Cada palavra standard u define uma única hiper-letra.

Observação 2.3.10. Em alguns momentos deste trabalho será mencionado o **valor** de uma hiper-letra u em H (ou hiper-palavra, letra, palavra, etc). Isto significa que podemos estar aplicando relações em u que são satisfeitas em H . Em alguns casos temos que o valor de u será diferente em duas álgebras de Hopf distintas, por exemplo, na Seção 2.6 veremos que os geradores PBW $[u]$ elevados a sua altura h_u possuem valores diferentes nas quantizações $u_q^+(\mathfrak{g})$ e $U_q^+(\mathfrak{g})$. Em $u_q^+(\mathfrak{g})$ temos que $[u]^{h_u} = 0$, mas em $U_q^+(\mathfrak{g})$ temos $[u]^{h_u} \neq 0$.

Definição 2.3.11. Uma hiper-letra $[u]$ é dita **dura** em H se o seu valor em H não é uma combinação linear de valores de hiper-palavras do mesmo grau em hiper-letras menores do que $[u]$. Caso contrário, dizemos que $[u]$ é **suave** em H .

Proposição 2.3.12. [12, Corollary 2] Uma hiper-letra $[u]$ é dura em H se e somente se, o valor em H da palavra standard u não é uma combinação linear de palavras menores com o mesmo grau.

Exemplo 2.3.13. Considerando a relação $[[x_1, x_2], x_2] = 0$ e seguindo a ordem já definida na álgebra de Hopf H , veremos que $[u] = [[[x_1, x_2], x_2], x_2]$ é uma hiper-letra suave. Desenvolvendo os colchetes, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} 0 &= [[x_1, x_2], x_2] = [x_1, x_2]x_2 - p_{12}p_{22}x_2[x_1, x_2] \\ &= (x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)x_2 - p_{12}p_{22}x_2(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1) \\ &= x_1x_2^2 - (p_{12} + p_{12}p_{22})x_2x_1x_2 + p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1. \end{aligned}$$

Note que,

$$x_1x_2^2 = (p_{12} + p_{12}p_{22})x_2x_1x_2 - p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1.$$

Multiplicando por x_2 em ambos os lados temos,

$$x_1x_2^3 = (p_{12} + p_{12}p_{22})x_2x_1x_2^2 - p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1x_2.$$

Isto é, a palavra u é uma combinação linear de palavras menores com o mesmo grau. Assim, pela proposição anterior a palavra $[u]$ é suave.

Observação 2.3.14. Note que, se uma hiper-letra é igual a zero, então ela não será dura. De fato, se $[u] = 0$, podemos escrever

$$[u] = u_1u_2 \dots u_n + \alpha_j u_{j_1}u_{j_2} \dots u_{j_n} + \dots + \alpha_i u_{i_1}u_{i_2} \dots u_{i_n} = 0,$$

com o grau de cada palavra associativa na soma igual ao grau de u , no qual a palavra associativa $u = u_1u_2 \dots u_n$. Assim, temos $u_1u_2 \dots u_n = \beta_j u_{j_1}u_{j_2} \dots u_{j_n} + \dots + \beta_i u_{i_1}u_{i_2} \dots u_{i_n}$, como u é standard, por ser uma hiper-letra, segue que cada palavra associativa do lado direito é menor que u . Portanto, temos que a palavra associativa u é uma combinação linear de palavras menores de mesmo grau, e pela Proposição 2.3.12, $[u]$ não é uma hiper-letra dura.

Proposição 2.3.15. [10, Lemma 4.8] *Seja B um conjunto de hiper-letras contendo x_1, \dots, x_n . Se cada par $[u], [v]$ em B , com $u > v$, satisfaz uma das seguintes condições:*

- (i) $[[u], [v]]$ não é uma palavra standard não associativa,
- (ii) A hiper-letra $[[u], [v]]$ não é dura em H ,
- (iii) $[[u], [v]] \in B$,

então o conjunto B inclui todas as hiper-letras duras em H .

2.4 Bases PBW

Definição 2.4.1. Seja A uma álgebra sobre \mathbb{K} e B uma \mathbb{K} -subálgebra de A com uma base fixada $\{b_j \mid j \in J\}$. Um subconjunto totalmente ordenado $W \subseteq A$ é dito ser um conjunto de **geradores PBW** de A sobre B se existe uma função $h : W \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$, chamada função altura, tal que o conjunto de todos os produtos

$$b_j w_1^{n_1} w_2^{n_2} \dots w_k^{n_k}, \tag{2.6}$$

onde $j \in J$, $w_1 < w_2 < \dots < w_k \in W$, $0 < n_i < h(w_i)$, $1 \leq i \leq k$ é uma base de A . O valor $h(w)$ é referido como a **altura** de w em W . Se $B = \mathbb{K}$ corpo base, então chamaremos W simplesmente como um conjunto de **geradores PBW de A** .

Definição 2.4.2. A altura h de uma hiper-letra dura $[u]$ em H é definida como o menor número tal que:

- (i) p_{uu} é uma h -ésima raiz da unidade;
- (ii) O valor de $[u]^h$ em H é uma combinação linear de hiper-palavras do mesmo grau em hiper-letras menores que $[u]$.

Se não existir tal número dizemos que a altura é igual a infinito.

Teorema 2.4.3. [12, Theorem 2] *Sejam H uma álgebra de Hopf de caracteres e G o grupo dos elementos group-likes de H . Os valores de todas hiper-letras duras em H junto com suas alturas formam um conjunto de geradores PBW para H sobre $\mathbb{K}G$.*

O resultado a seguir será utilizado nos capítulos posteriores, para encontrarmos os possíveis skew-primitivos de $U_q^+(\mathfrak{g})$.

Lema 2.4.4. [10, Lemma 4.9] *Seja H uma álgebra de Hopf. Se $T \in H$ é um elemento skew-primitivo homogêneo então*

$$T = \alpha[u]^h + \sum \alpha_i w_i, \quad \alpha \neq 0$$

onde $[u]$ é uma hiper-letra dura, w_i são palavras em hiper-letras menores que $[u]$, de mesmo grau de $[u]^h$. Se p_{uu} uma raiz t -ésima primitiva da unidade então $h = 1$ ou $h = t$. Caso contrário $h = 1$.

2.5 Ordem convexa

Seja (V, c) um espaço vetorial trançado de $\dim(V) = \theta$, no qual existe uma base $(x_i)_{i \in \mathbb{I}_\theta}$, $\mathbb{I}_\theta = \{1, 2, \dots, \theta\}$, e uma matriz de trança $\mathbf{p} = (p_{ij})_{i, j \in \mathbb{I}_\theta}$ tal que

$$c(x_i \otimes x_j) = p_{ij} x_j \otimes x_i.$$

Sejam $\Delta^{\mathbf{p}}$ o sistema de raízes generalizado associado a \mathbf{p} e $\Delta_+^{\mathbf{p}} = \{\beta_1, \dots, \beta_M\}$ o subconjunto de raízes positivas. Sejam α_i , $i \in \mathbb{I}_\theta$, as raízes simples. Nós denotamos $x_{\alpha_i} = x_i$, $i \in \mathbb{I}_\theta$.

Definição 2.5.1. Considere um sistema de raízes $\Delta_+^{\mathbf{p}}$ com uma ordem total fixada $<$. Dizemos que esta ordem é uma **ordem convexa** se para quaisquer $\alpha, \beta \in \Delta_+^{\mathbf{p}}$, tal que $\alpha < \beta$ e $\alpha + \beta \in \Delta_+^{\mathbf{p}}$, nós temos

$$\alpha < \alpha + \beta < \beta.$$

Observação 2.5.2. Toda álgebra de Lie simples \mathfrak{g} possui um sistema de raízes Δ_+^p de forma que podemos fixar uma ordem convexa às suas raízes. Além disso, segundo I. Angiono, cada raiz simples α_i está associada a uma variável quântica $x_i, i \in \{1, \dots, \theta\}$. Ainda, temos que cada raiz positiva β_i está associada a um gerador PBW das álgebras de Hopf $U_q^+(\mathfrak{g})$ e $u_q^+(\mathfrak{g})$ sobre $\mathbb{K}G$. Estes resultados são demonstrados e mais explorados em [1].

No resultado a seguir é dada uma forma de associar as raízes positivas de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} a geradores PBW da álgebra de Hopf $U_q^+(\mathfrak{g})$, no qual l_β é a palavra associativa standard, que é um gerador PBW de $U_q^+(\mathfrak{g})$, associada a raiz positiva β .

Proposição 2.5.3. [1, Corolario 2.1.18] Para cada $\beta \in \Delta_+^p$, com $\beta \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$,

$$l_\beta = \text{mín}\{l_{\delta_1}l_{\delta_2} : \delta_1, \delta_2 \in \Delta_+^p, \delta_1 + \delta_2 = \beta, l_{\delta_1} > l_{\delta_2}\}.$$

Definição 2.5.4. Dizemos que uma base PBW é uma **base convexa** se a ordem das raízes associadas aos geradores PBW é convexa.

Note que nem sempre uma álgebra quântica possui apenas um conjunto convexo de geradores PBW, mesmo quando fixamos uma ordem para as raízes simples. No entanto, se supormos que os elementos são hiper-letras, temos apenas uma base convexa possível, uma base gerada pelas hiper-letras duras, veremos isso na proposição seguinte.

Observação 2.5.5. Por [2, Lemma 4.5], se uma base PBW de hiper-letras é uma base convexa, então para quaisquer $[u], [v]$ nesta base, com $[u] > [v]$, temos que $[[u], [v]]$ é uma combinação linear de hiper-palavras da base $[w] = [w_1] \dots [w_k]$, onde $[u] > [w_i] > [v]$, $i \in \{1, \dots, k\}$, $[w_i]$ pertence a base PBW e $[w]$ tem mesmo grau de $[[u], [v]]$.

Proposição 2.5.6. *Seja B um conjunto de geradores PBW convexo formado por hiper-letras. Então B é constituído por hiper-letras duras.*

Demonstração. Seja B uma base PBW convexa de hiper-letras. Pela observação anterior e pela Definição 2.3.11, para todo par $[u], [v] \in B$, tal que $[u] > [v]$, temos que $[[u], [v]] \in B$ ou $[[u], [v]]$ não é dura. Ou seja, os itens (ii) ou (iii) da Proposição 2.3.15 são satisfeitos, logo B é constituído pelas hiper-letras duras. ■

2.6 Grupos quânticos

Nesta seção definiremos os grupos quânticos $U_q^+(\mathfrak{g})$ e $u_q^+(\mathfrak{g})$, nos quais \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie simples.

Definição 2.6.1. Uma **matriz de Cartan**, $C = (a_{ij})$, com $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, é uma matriz simetrizável (existe matriz diagonal D , tal que o produto de C por D resulta em uma matriz simétrica) associada a um sistema de raízes simples (ver Capítulo III de [8]), tal que $a_{ii} = 2, a_{ij} \leq 0, i \neq j$, e $a_{ij} = 0$ se, e somente se, $a_{ji} = 0$.

Definição 2.6.2. Seja $C = (a_{ij})$ uma matriz de Cartan simetrizável por $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, isto é, $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$, e \mathfrak{g} uma álgebra de Kac-Moody definida por C (ver em [9]). Suponha que os parâmetros de quantização p_{ij} são relacionados por

$$p_{ii} = q^{d_i}, \quad p_{ij}p_{ji} = q^{d_i a_{ij}}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.7)$$

onde q é um elemento do corpo \mathbb{K} e $q^2 \neq 1$. A quantização $U_q^+(\mathfrak{g})$ da subálgebra de Borel \mathfrak{g}^+ é uma álgebra de Hopf de caracteres gerada por $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ e $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ e definida pelas seguintes relações de Serre com skew-comutador (2.2):

$$[[\dots [[x_i, x_j], x_j], \dots], x_j] = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \quad (2.8)$$

onde x_j aparece $1 - a_{ji}$ vezes. Isto é, $U_q^+(\mathfrak{g}) = \frac{G\langle X \rangle}{S}$, com $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ e $S = \langle [[\dots [[x_i, x_j], x_j], \dots], x_j \rangle$ é o conjunto gerado pelos elementos das relações de Serre.

Observação 2.6.3. Temos que $[[\dots [[x_i, x_j], x_j], \dots], x_j]$, para $i, j \in I$, é um skew-primitivo em $G\langle X \rangle$, por [11, Theorem 6.1]. Portanto, pela Proposição 1.4.13, o ideal gerado por esses elementos é um ideal de Hopf.

Definição 2.6.4. Se a ordem multiplicativa t de q é finita, definimos $u_q^+(\mathfrak{g})$ como $\frac{G\langle X \rangle}{\Lambda}$, onde Λ é o maior ideal de Hopf de $G\langle X \rangle$ contido em $G\langle X \rangle^{(2)}$, sendo $G\langle X \rangle^{(2)}$ o conjunto de todos polinômios não comutativos sem termos livres e lineares. Além disso, para cada $[u] \in U_q^+(\mathfrak{g})$, $[u]^h = 0$ em $u_q^+(\mathfrak{g})$, no qual h é a altura do elemento $[u]$.

Pela Proposição 1.4.10, $u_q^+(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Hopf. Mais ainda, como $u_q^+(\mathfrak{g})$ é não comutativa e não cocomutativa, $u_q^+(\mathfrak{g})$ é um grupo quântico.

Observação 2.6.5. Como Λ é o maior ideal de Hopf de $G\langle X \rangle$ em $G\langle X \rangle^{(2)}$, temos que os demais ideais de Hopf de $G\langle X \rangle$ contidos em $G\langle X \rangle^{(2)}$ estão em Λ . Desta maneira, Λ contém todos os elementos skew-primitivos de $G\langle X \rangle$ com grau total maior ou igual a 2, pois cada um destes gera um ideal de Hopf de $G\langle X \rangle$ em $G\langle X \rangle^{(2)}$. Portanto, por [11, Theorem 6.1] as relações de Serre ainda são válidas em $u_q^+(\mathfrak{g})$.

Note que, pela Proposição 1.4.10, como os grupos quânticos $U_q^+(\mathfrak{g})$ e $u_q^+(\mathfrak{g})$ são definidos como um quociente da álgebra de Hopf de caracteres $G\langle X \rangle$ por um ideal, a estrutura de álgebra de Hopf dada em (2.2.8) para $G\langle X \rangle$ será a mesma para as álgebras de Hopf $U_q^+(\mathfrak{g})$ e $u_q^+(\mathfrak{g})$.

2.7 Posto combinatório

Seja H uma álgebra de Hopf de caracteres e J um ideal de Hopf de H . Construimos uma cadeia de ideais de Hopf de H , $0 = J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq J_2 \subsetneq \cdots \subsetneq J_i \subsetneq \cdots \subsetneq J$, da seguinte forma. Definimos J_1 como o ideal de Hopf gerado pelos elementos skew-primitivos de J . Se $J_1 \neq J$, temos que $\frac{J}{J_1} \neq 0$ é um ideal de Hopf de $\frac{H}{J_1}$, que é uma álgebra de Hopf de caracteres, e então, pelo Teorema 2.2.4, $\frac{J}{J_1}$ possui um elemento skew-primitivo não nulo. Definimos $\frac{J_2}{J_1}$ o ideal de Hopf gerado pelos elementos skew-primitivos de $\frac{J}{J_1}$, onde $J_2 = \pi^{-1}(\frac{J_2}{J_1})$, com $\pi : H \rightarrow \frac{H}{J_1}$. Se $J_2 \neq J$, então definimos $\frac{J_3}{J_2}$ como o ideal gerado pelos elementos skew-primitivos de $\frac{J}{J_2}$. Seguindo este processo, esta cadeia de ideais de Hopf se estabiliza se $J_\kappa = J$ para algum κ .

Lema 2.7.1. [14, Lemma 1.24] *Considere H uma álgebra de Hopf de caracteres, J um ideal de Hopf de H e J_i os ideais de Hopf como construído acima. Então, $\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i = J$.*

Definição 2.7.2. Seja H uma álgebra de Hopf de caracteres gerada por $a_i, 1 \leq i \leq n$, sobre G , onde G é grupo abeliano dos elementos group-likes de H . Considere $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $\varphi : G\langle X \rangle \rightarrow H$, sendo $\varphi(x_i) = a_i$. Se $J = \ker(\varphi)$ (que é um ideal de Hopf de $G\langle X \rangle$), dizemos que o **posto combinatório de H** é o comprimento κ da cadeia acima, ou infinito se a cadeia não se estabiliza. Denotaremos por $\kappa(H)$ o posto combinatório de H .

Considere as projeções $\psi_1 : G\langle X \rangle \rightarrow u_q^+(\mathfrak{g})$ e $\psi_2 : G\langle X \rangle \rightarrow U_q^+(\mathfrak{g})$. Sabemos que $\ker(\psi_1) = \Lambda$ é o maior ideal de Hopf de $G\langle X \rangle$ ⁽²⁾ e $\ker(\psi_2)$ é gerado pelas relações de Serre (2.8). Para o cálculo do posto combinatório $\kappa(u_q^+(\mathfrak{g}))$ consideraremos $J = \Lambda$. No entanto, temos que $\ker(\psi_2) \subseteq \ker(\psi_1) = \Lambda$ e as relações definidas para $U_q^+(\mathfrak{g})$ são skew-primitivos. Assim, em vez do morfismo $\psi_1 : G\langle X \rangle \rightarrow u_q^+(\mathfrak{g})$ podemos usar o morfismo induzido $\varphi : U_q^+(\mathfrak{g}) \rightarrow u_q^+(\mathfrak{g})$. Nos próximos capítulos consideramos $J = \ker(\varphi)$ um ideal de Hopf de $U_q^+(\mathfrak{g})$.

Proposição 2.7.3. *O ideal de Hopf $J = \ker(\varphi)$ é gerado pelos elementos $[u]^h$, onde $[u]$ é gerador PBW de $U_q^+(\mathfrak{g})$ e h é a altura de $[u]$.*

Demonstração. Notamos que os elementos $[u]^h$ pertencem ao núcleo de φ , isto é, $[u]^h \in J$, pois $[u]^h = 0$ em $u_q^+(\mathfrak{g})$.

Agora mostraremos que estes elementos geram J . Seja $v = [u_1]^{n_1}[u_2]^{n_2} \dots [u_k]^{n_k} \in J$, tal que $J = \ker(\varphi) \subseteq U_q^+(\mathfrak{g})$. Se $n_i < h_i$ para todo i , onde h_i é a altura do elemento correspondente, temos, pela Definição 2.4.1, que v é um elemento da base de $u_q^+(\mathfrak{g})$, e então $\varphi(v) \neq 0$, contradizendo $v \in J$. Se $n_i \geq h_i$, então v é um múltiplo de $[u_i]^{h_i}$, logo v pertence ao ideal gerado por $[u_i]^{h_i}$. Consideramos $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in J = \ker(\varphi)$, com $\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_2$, onde $v_1 = [u_1]^{n_1}[u_2]^{n_2} \dots [u_k]^{n_k}$ e $v_2 = [u_1]^{m_1}[u_2]^{m_2} \dots [u_k]^{m_k}$. Então $\varphi(v) = 0 = \alpha_1 \varphi(v_1) + \alpha_2 \varphi(v_2)$, logo $\varphi(v_1) = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \varphi(v_2)$. Se $\varphi(v_1) = 0$, temos que $\varphi(v_2) =$

0, logo voltamos para o caso anterior, então v_1 e v_2 são múltiplos de elementos da forma $[u_i]^{h_i}$ e estão no ideal gerado por estes elementos. Se $\varphi(v_1) \neq 0$, temos que $\varphi(v_2) \neq 0$, logo $v_1 = \lambda v_2$, pois caso contrário teríamos que $\varphi(v)$ seria uma soma de elementos linearmente independentes da base de $u_q^+(\mathfrak{g})$ e assim $\varphi(v) \neq 0$, o que contradiz nossa hipótese. Então, $v = \beta v_1$, o que recai no caso anterior. Indutivamente obtemos o mesmo resultado para $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in J$. Logo J é gerado pelos elementos $[u]^h$. ■

Capítulo 3

Posto combinatório do grupo quântico de tipo A_2

Neste capítulo iremos mostrar que o posto combinatório de $u_q^+(A_2)$ é 2.

3.1 Quantizações de tipo A_2

Seja A_2 a álgebra de Lie simples associada à matriz de Cartan

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pela Definição 2.6.2, $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$, em particular $d_1 a_{12} = d_2 a_{21}$, logo $-d_1 = -d_2$. Então podemos supor $d_1 = d_2 = 1$. Assim, por (2.7), temos que os parâmetros de quantização são dados por

$$\begin{aligned} p_{11} &= q^{d_1} = q, \\ p_{22} &= q^{d_2} = q, \\ p_{12}p_{21} &= q^{d_1 a_{12}} = q^{-1}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Portanto, temos que a álgebra de Hopf $U_q^+(A_2)$ é gerada por x_1, x_2 e g_1, g_2 e com x_1 e x_2 aparecendo $1 - a_{21} = 1 - a_{12} = 2$ vezes nas relações de Serre, isto é, temos que $U_q^+(A_2)$ é definida pelas seguintes relações de Serre:

$$[x_1, [x_1, x_2]] = 0 = [[x_1, x_2], x_2], \tag{3.2}$$

com skew-comutador (2.2) e parâmetros de quantização dados acima. Além disso, supomos $q \neq 1$.

Observação 3.1.1. Note que, pelas relações de Serre (2.8), para x_1 aparecendo $1 - a_{12} = 2$

vezes resultaria na relação $[[x_2, x_1], x_1] = 0$ em vez de $[x_1, [x_1, x_2]] = 0$, mas ao abrirmos os colchetes, temos que $[[x_2, x_1], x_1] = p_{11}p_{21}^2[x_1, [x_1, x_2]]$, logo ambas são iguais a zero e então são equivalentes.

Proposição 3.1.2. *O conjunto de todas hiper-letras duras em $U_q^+(A_2)$ é dado por*

$$\mathcal{A}_2 = \{x_1, [x_1, x_2], x_2\}.$$

Demonstração. Note que $x_1 > [x_1, x_2] > x_2$, e temos que $[x_1, [x_1, x_2]]$ não é hiper-letra dura, pois $[x_1, [x_1, x_2]] = 0$ e pela Observação 2.3.14 a palavra associativa $x_1^2x_2$ associada a $[x_1, [x_1, x_2]]$ é uma combinação linear de palavras menores com o mesmo grau, logo não é dura pela Proposição 2.3.12. Temos também que, $[x_1, x_2] \in \mathcal{A}_2$. Ainda, $[[x_1, x_2], x_2]$ não é uma hiper-letra dura pelo mesmo motivo de $[x_1, [x_1, x_2]]$ não ser. Portanto, para cada par $[u], [v]$ em \mathcal{A}_2 , com $[u] > [v]$, $[[u], [v]]$ satisfaz alguma das condições da Proposição 2.3.15. Assim, \mathcal{A}_2 é o conjunto de todas hiper-letras duras de $U_q^+(A_2)$. ■

Notação 3.1.3. Usaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} [A] &= x_1, \\ [B] &= [x_1, x_2], \\ [C] &= x_2. \end{aligned}$$

Pela Observação 2.3.8, temos

$$\begin{aligned} p_{[A][A]} &= p_{11} = q, \\ p_{[B][B]} &= p_{11}p_{12}p_{21}p_{22} = qq^{-1}q = q, \\ p_{[C][C]} &= p_{22} = q. \end{aligned}$$

Teorema 3.1.4. *Se q não é uma raiz primitiva da unidade, então os valores em $U_q^+(A_2)$ dos elementos de $\mathcal{A}_2 = \{x_1, [x_1, x_2], x_2\}$ formam um conjunto de geradores PBW para $U_q^+(A_2)$ sobre $\mathbb{K}G$, no qual cada elemento possui altura infinita.*

Demonstração. Este resultado decorre diretamente do Teorema 2.4.3 e da Proposição 3.1.2. Portanto, basta mostrarmos que a altura dos elementos é infinita. Pela observação anterior, temos que para todo elemento u de \mathcal{A}_2 , $p_{uu} = q$, como q não é raiz primitiva da unidade, segue que p_{uu} também não será. Pela Definição 2.4.2, temos que a altura dos elementos é infinita. ■

Observação 3.1.5. Pelo Teorema 2.4.3 e pela Proposição 3.1.2, temos que se q tem ordem multiplicativa finita t , então os valores dos elementos de \mathcal{A}_2 em $u_q^+(A_2)$ e $U_q^+(A_2)$ formam

um conjunto de geradores PBW para $u_q^+(A_2)$ e $U_q^+(A_2)$ sobre $\mathbb{K}G$. Ainda, a altura de $[u]$ é igual a t em $u_q^+(A_2)$ e infinita em $U_q^+(A_2)$, para todo $[u] \in \mathcal{A}_2$.

Note que estas bases de geradores PBW são bases convexas formadas por hiper-letras duras para $U_q^+(A_2)$ e $u_q^+(A_2)$, e como mencionamos anteriormente as bases PBW com essas propriedades são únicas.

3.2 Coproduto

A partir da definição dos grupos quânticos $U_q^+(\mathfrak{g})$ e $u_q^+(\mathfrak{g})$ na Seção 2.6, vimos que podemos tomar a estrutura de álgebra de Hopf de $G\langle X \rangle$ para $U_q^+(\mathfrak{g})$. Desta forma, para calcularmos o coproduto de cada gerador PBW de $U_q^+(A_2)$, tomaremos $\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + g_i \otimes x_i$ e $\Delta(g_i) = g_i \otimes g_i$, com $i = \{1, 2\}$, como em (2.1).

Notação 3.2.1. Denotaremos $\beta_n = (1 - q^{-n})$, $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2.2. *As fórmulas explícitas do coproduto para os elementos da base PBW convexa em $U_q^+(A_2)$ são:*

$$\Delta(x_1) = x_1 \otimes 1 + g_1 \otimes x_1,$$

$$\Delta([B]) = [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_1 x_1 g_2 \otimes x_2,$$

$$\Delta(x_2) = x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2.$$

Demonstração. Note que precisaremos calcular apenas o coproduto de $[B]$, pois os coprodutos de $[A] = x_1$ e $[C] = x_2$ saem diretamente da definição.

Como Δ é multiplicativo e $g_i x_j = p_{ij} x_j g_i$ temos,

$$\begin{aligned} \Delta([B]) &= \Delta([x_1, x_2]) = \Delta(x_1 x_2 - p_{12} x_2 x_1) = \Delta(x_1) \Delta(x_2) - p_{12} \Delta(x_2) \Delta(x_1) \\ &= (x_1 \otimes 1 + g_1 \otimes x_1)(x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2) - p_{12} (x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2)(x_1 \otimes 1 + g_1 \otimes x_1) \\ &= (x_1 x_2 - p_{12} x_2 x_1) \otimes 1 + g_{12} \otimes (x_1 x_2 - p_{12} x_2 x_1) + (x_1 g_2 - p_{12} g_2 x_1) \otimes x_2 \\ &\quad + (g_1 x_2 - p_{12} x_2 g_1) \otimes x_1 \\ &= [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + (1 - p_{12} p_{21}) x_1 g_2 \otimes x_2 + (p_{12} x_2 g_1 - p_{12} x_2 g_1) \otimes x_1 \\ &= [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + (1 - q^{-1}) x_1 g_2 \otimes x_2 = [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_1 x_1 g_2 \otimes x_2. \end{aligned}$$

■

Corolário 3.2.3. *Os únicos geradores PBW de $U_q^+(A_2)$ em \mathcal{A}_2 que são skew-primitivos são x_1 e x_2 .*

3.3 Skew-primitivos

Nesta seção mostraremos quais são os skew-primitivos homogêneos de $U_q^+(A_2)$.

Argumentando de forma similar ao que foi feito em [5, Lemma 4.3.1] para o nosso contexto, segue o resultado a seguir:

Lema 3.3.1. *O coproduto do elemento x_i^n , $n \in \mathbb{N}$ e $i = \{1, 2\}$, é dado por*

$$\Delta(x_i^n) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p_{ii}} x_i^{n-k} g_i^k \otimes x_i^k,$$

onde $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p_{ii}} = \frac{[n]!_{p_{ii}}}{[k]!_{p_{ii}} [n-k]!_{p_{ii}}}$, $[n]!_{p_{ii}} = [n]_{p_{ii}} [n-1]_{p_{ii}} \dots [2]_{p_{ii}} [1]_{p_{ii}}$ e $[n]_{p_{ii}} = 1 + p_{ii} + p_{ii}^2 + \dots + p_{ii}^{n-1}$.

Teorema 3.3.2. *Se q não é uma raiz da unidade, os únicos skew-primitivos homogêneos de $U_q^+(A_2)$ são x_1 e x_2 . Se $q^t = 1$, os únicos skew-primitivos de $U_q^+(A_2)$ serão x_1 , x_2 , x_1^t e x_2^t .*

Demonstração. Pelo Lema 2.4.4 os possíveis skew-primitivos homogêneos são da forma $T = \alpha[u]^h + \sum_i \alpha_i w_i$, onde $[u]$ é uma hiper-letra dura e w_i são palavras em hiper-letras menores que $[u]$, com o mesmo grau de $[u]^{h_u}$. Se p_{uu} não é uma raiz primitiva da unidade então $h = 1$, se p_{uu} é uma raiz primitiva da unidade então $h = 1$ ou $h = h_u = t$, no qual h_u é a ordem multiplicativa de $p_{uu} = q$.

Se $[u] = x_1$ teremos que $T = \alpha x_1^h$, pois não existem palavras menores que x_1 com grau $(1,0)$. Se $[u] = [x_1, x_2]$, a única hiper-letra menor que $[u]$ é x_2 então $w_i = x_2^a$, assim precisamos que o grau $(0, a)$ de w_i seja igual ao grau (h, h) de $[x_1, x_2]^h$, isto é, $0 = h$ e $a = h$, como h é um inteiro positivo, temos que $T = \alpha [x_1, x_2]^h$. Se $[u] = x_2$ também teremos que $T = \alpha x_2^h$, pois não existem palavras menores que x_2 com grau $(0,1)$. Logo, os possíveis skew-primitivos homogêneos são múltiplos de elementos da forma $[u]^h$.

Se q não é uma raiz primitiva da unidade, p_{uu} também não será, temos que $h = 1$, então pelo Corolário 3.2.3 temos que os únicos skew-primitivos de $U_q^+(A_2)$ são x_1 e x_2 .

Se q é uma t -ésima raiz primitiva da unidade, p_{uu} também será, então $h = 1$ ou $h = t$. Para $h = 1$ temos que x_1 e x_2 são skew-primitivos, se $h = t$, tomamos $[u] = x_i$, $i = \{1, 2\}$, então pelo Lema 3.3.1 temos que $[t]_{p_{ii}} = 0$. Portanto, $\Delta(x_i^t) = x_i^t \otimes 1 + g_i^t \otimes x_i^t$, assim x_1^t e x_2^t também são skew-primitivos.

Outro possível skew-primitivo homogêneo é $[u]^t = [B]^t$. Temos pelo Teorema 3.2.2 que $\Delta([B]) = [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_1 x_1 g_2 \otimes x_2$, note que $\Delta([B]^n) = \sum u_1 u_2 \dots u_n$, com

$u_i \in \{[B] \otimes 1, g_{12} \otimes [B], \beta_1 x_1 g_2 \otimes x_2\}$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Assim temos que,

$$\begin{aligned} \Delta([B]^n) &= [B]^n \otimes 1 + g_{12}^n \otimes [B]^n + (\beta_1 x_1 g_2)^n \otimes x_2^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j \\ &= [B]^n \otimes 1 + g_{12}^n \otimes [B]^n + \beta_1^n p_{21}^{\frac{n(n-1)}{2}} x_1^n g_2^n \otimes x_2^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde o grau de y_j mais o grau de z_j é igual ao grau de $[B]^n$. Note que, $[B]^n$ não será skew-primitivo para nenhum n , em particular para $n = t$, pois o terceiro termo de seu coproduto nunca irá se anular já que não existirá nenhum outro termo na soma que tenha x_2^n no fundo do tensor. Assim, os únicos skew-primitivos homogêneos para $U_q^+(A_2)$, quando $q^t = 1$, são x_1 , x_2 , x_1^t e x_2^t . ■

3.4 Posto combinatório

Nesta seção consideraremos $q^t = 1$, $t \geq 2$.

Proposição 3.4.1. *Os elementos $[u]^h$ são skew-centrais em $U_q^+(A_2)$, onde $[u] \in \mathcal{A}_2$ e h é a altura de $[u]$ em $u_q^+(A_2)$.*

Demonstração. Para mostrarmos que os elementos $[u]^h$ são skew-centrais, precisamos provar que $[u]^h x_i = \alpha_i x_i [u]^h$, para $1 \leq i \leq 2$.

Note que, como q é uma raiz primitiva da unidade, temos que a altura de todos os elementos $[u]$ é $h=t$ em $u_q^+(A_2)$, pela Observação 3.1.5. Ainda, por tomarmos $q^t = 1$, poderemos admitir as relações (2.4) e (2.5).

Tome $[u] = [A] = x_1$, obviamente $x_1^h x_1 = x_1 x_1^h$. Pela relação (2.5), temos que

$$[x_1^h, x_2] = [x_1, [x_1, \dots, [x_1, [x_1, x_2]] \dots]],$$

e pelas relações de Serre (3.2), temos $[x_1, [x_1, x_2]] = 0$, assim $x_1^h x_2 = p_{12}^h x_2 x_1^h$.

No caso $[u] = [B] = [x_1, x_2]$, temos que pelas relações de Serre $[x_1, [B]] = 0$, assim pela relação (2.4), $[x_1, [B]^h] = [\dots, [[x_1, [B]], [B]], \dots, [B]] = 0$, portanto $x_1 [B]^h = p_{11}^h p_{12}^h [B]^h x_1$. Ainda, temos que $[[B], x_2] = 0$, assim $[[B]^h, x_2] = 0$, logo $[B]^h x_2 = p_{12}^h p_{22}^h x_2 [B]^h$.

Se $[u] = [C] = x_2$, pelas relações já utilizadas, temos que $[x_1, x_2^h] = 0$, e assim, concluímos que $x_1 x_2^h = p_{12}^h x_2^h x_1$. Por fim, claramente $x_2^h x_2 = x_2 x_2^h$. ■

Relembramos agora o morfismo de Hopf induzido $\varphi : U_q^+(A_2) \rightarrow u_q^+(A_2)$ visto na seção 2.7, no qual $J = \ker(\varphi)$ é um ideal de Hopf. Teremos, a partir do resultado mostrado acima e pela Proposição 2.7.3, que o conjunto J será o ideal de Hopf gerado por elementos skew-centrais $[u]^h$ de $U_q^+(A_2)$, onde $[u]$ é um gerador PBW de $U_q^+(A_2)$, pertencente a base \mathcal{A}_2 , e h é altura correspondente a $[u]$ em $u_q^+(A_2)$.

Observação 3.4.2. Por [3, Theorem 4.15] temos que as subálgebras geradas por skew-centrais de uma álgebra de Hopf são subálgebras de Hopf, desta forma, chamando de I a subálgebra gerada pelos elementos $[u]^h$, que está contida em J , temos que I é uma subálgebra de Hopf de $U_q^+(A_2)$. Por definição, temos que I é uma subcoálgebra de $U_q^+(A_2)$ vista como coálgebra. Desta forma, $\Delta(I) \subseteq I \otimes I$, então se $[u]^h \in I$ e $\Delta([u]^h) = \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j$, temos que cada y_j e $z_j \in I$.

Corolário 3.4.3. *Os únicos elementos $[u]^h \in J_1$, com $[u] \in \mathcal{A}_2$, são os elementos no qual $[u]$ tem grau total 1.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.3.2 os únicos elementos skew-primitivos em J são x_1^t e x_2^t , uma vez que os elementos de $J = \ker(\varphi) \subseteq U_q^+(A_2)$ só serão skew-primitivos em J se, também forem em $U_q^+(A_2)$. Então, J_1 é o ideal de Hopf de J gerado por $x_1^{h_1}$ e $x_2^{h_2}$, pela proposição anterior vimos que estes elementos são skew-centrais de $U_q^+(A_2)$, desta forma podemos considerar J_1 um ideal à direita ou à esquerda de $U_q^+(A_2)$. Assim, suponha que algum elemento $[u]^h$ pertença a J_1 para $[u] \in \mathcal{A}_2$, então podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$[u]^h = \alpha_1 y_1 x_1^{h_1} + \alpha_2 y_2 x_2^{h_2},$$

onde cada $y_i \in U_q^+(A_2)$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Note que, como y_1 e $y_2 \in U_q^+(A_2)$, podemos escrevê-los como combinações lineares de elementos da base PBW de $U_q^+(A_2)$, e então como $x_1^{h_1}$ e $x_2^{h_2}$ skew-comutam, podemos reescrever o lado direito da igualdade como uma soma de elementos da base PBW, onde cada termo possui o fator x_1 ou x_2 com o expoente maior ou igual à sua respectiva altura. Desta forma, como $[u]^h$ é um elemento da base, tendo apenas o fator $[u]$, segue que, $[u]$ deve ser igual à x_1 ou igual à x_2 . Assim, os únicos elementos $[u]^h \in J_1$, onde $[u] \in \mathcal{A}_2$, são os elementos no qual $[u]$ tem grau total 1. Ou seja, $[B]^{h[B]} \notin J_1$. ■

Teorema 3.4.4. *O posto combinatório $\kappa(u_q^+(A_2)) = 2$.*

Demonstração. Já temos que $J_1 = \langle x_1^t, x_2^t \rangle$, e pelo corolário anterior temos que $[B]^{h[B]} \notin J_1$. Então, basta mostrarmos que $[x_1, x_2]^t = [B]^t \in J_2$.

Pela equação (3.3) temos que $\Delta([B]^t) = [B]^t \otimes 1 + g_{12}^t \otimes [B]^t + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j$, como $[B]^t \in I$ e I é uma subálgebra de Hopf necessariamente y_j ou $z_j \in \{x_1^t, x_2^t\}$, logo todo termo que depende de j na expressão de $\Delta([B]^t)$ é zero em $\frac{J}{J_1}$, então $[B]^t$ é skew-primitivo em $\frac{J}{J_1}$, isso significa que $[B]^t \in J_2$. Como não há mais elementos para avaliarmos em J , segue que $J_2 = J$, logo $\kappa(u_q^+(A_2)) = 2$. ■

Capítulo 4

Posto combinatório do grupo quântico de tipo A_3

Neste capítulo iremos mostrar que o posto combinatório $\kappa(u_q^+(A_3)) = 2$.

4.1 Quantizações de tipo A_3

Seja A_3 a álgebra de Lie simples associada à matriz de Cartan

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pela Definição 2.6.2 concluímos que $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, e então os parâmetros de quantização são dados por

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_{22} = p_{33} = q, \\ p_{12}p_{21} &= p_{23}p_{32} = q^{-1}, \\ p_{13}p_{31} &= q^0 = 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Portanto, temos que a álgebra de Hopf $U_q^+(A_3)$ é gerada por x_1, x_2, x_3 e g_1, g_2, g_3 e definida pelas seguintes relações de Serre:

$$[x_1, [x_1, x_2]] = [[x_1, x_2], x_2] = [x_1, x_3] = [x_2, [x_2, x_3]] = [[x_2, x_3], x_3] = 0, \tag{4.2}$$

com skew-comutador (2.2) e parâmetros de quantização dados acima.

Notação 4.1.1. Para facilitar na demonstração da proposição a seguir e no desenvolvi-

mento deste capítulo usaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} [A] &= x_1, \\ [B] &= [x_1, x_2], \\ [C] &= [x_1, [x_2, x_3]], \\ [D] &= x_2, \\ [E] &= [x_2, x_3], \\ [F] &= x_3. \end{aligned}$$

Proposição 4.1.2. *O conjunto de todas hiper-letras duras em $U_q^+(A_3)$ é dado por*

$$\mathcal{A}_3 = \{x_1, [x_1, x_2], [x_1, [x_2, x_3]], x_2, [x_2, x_3], x_3\}.$$

Demonstração. Note que $[A] > [B] > [C] > [D] > [E] > [F]$. Seguindo a Proposição 2.3.15 teremos 15 possíveis pares $[u], [v]$ em $U_q^+(A_3)$ para serem avaliados. Observe que $[[A], [D]] = [B]$, $[[A], [E]] = [C]$ e $[[D], [F]] = [E]$, logo vale o item (iii) da proposição para esses pares. Ainda, $[[A], [B]] = [[A], [F]] = [[B], [D]] = [[D], [E]] = [[E], [F]] = 0$ são as relações de Serre, logo vale o item (ii) da proposição. Temos também que, $[[B], [E]]$, $[[B], [F]]$ e $[[C], [F]]$ não são hiper-letras standards pelo item (iii) da Definição 2.3.4, assim satisfaz o item (i) da Proposição 2.3.15. E por fim, pela Proposição 2.3.12, os casos $[[A], [C]]$, $[[B], [C]]$, $[[C], [D]]$ e $[[C], [E]]$ não são hiper-letras duras, pois as palavras associativas correspondentes são combinações lineares de palavras menores de mesmo grau, e assim, vale o item (ii) da Proposição 2.3.15. Vejamos este último fato:

Expandingo as relações de Serre (4.2) obtemos:

$$x_1^2 x_2 = p_{12}(1 + p_{11})x_1 x_2 x_1 - p_{11} p_{12}^2 x_2 x_1^2, \quad (4.3)$$

$$x_1 x_2^2 = p_{12}(1 + p_{22})x_2 x_1 x_2 - p_{12}^2 p_{22} x_2^2 x_1, \quad (4.4)$$

$$x_1 x_3 = p_{13} x_3 x_1, \quad (4.5)$$

$$x_2^2 x_3 = p_{23}(1 + p_{22})x_2 x_3 x_2 - p_{22} p_{23}^2 x_3 x_2^2, \quad (4.6)$$

$$x_2 x_3^2 = p_{23}(1 + p_{33})x_3 x_2 x_3 - p_{23}^2 p_{33} x_3^2 x_2. \quad (4.7)$$

Note que, pela equação (4.3), a palavra associativa $AC = x_1^2 x_2 x_3$ pode ser escrita como, $AC = (p_{12}(1 + p_{11})x_1 x_2 x_1 - p_{11} p_{12}^2 x_2 x_1^2)x_3 = p_{12}(1 + p_{11})x_1 x_2 x_1 x_3 - p_{11} p_{12}^2 x_2 x_1^2 x_3$.

Pelas equações (4.3) e (4.6), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1^2 x_2)x_2 x_3 - x_1^2(x_2^2 x_3) \\ &= p_{12}(1 + p_{11})x_1 x_2 x_1 x_2 x_3 - p_{11} p_{12}^2 x_2 x_1^2 x_2 x_3 - p_{23}(1 + p_{22})x_1^2 x_2 x_3 x_2 + p_{22} p_{23}^2 x_1^2 x_3 x_2^2. \end{aligned}$$

Assim, a palavra associativa $BC = x_1 x_2 x_1 x_2 x_3$ pode ser escrita como, $p_{12}(1 + p_{11})BC =$

$p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2x_2x_3 + p_{23}(1+p_{22})x_1^2x_2x_3x_2 - p_{22}p_{23}^2x_1^2x_3x_2^2$. Ainda, pelas equações (4.3) e (4.5), $p_{12}(1+p_{11})BC = p_{11}p_{12}^2x_2x_1^2x_2x_3 + p_{23}p_{12}^2p_{11}(1+p_{22})x_2x_1^2x_2x_3 - p_{23}p_{21}(1+p_{22})^2x_1x_2x_1x_3x_2 - p_{13}p_{22}p_{23}^2x_1x_3x_1x_2^2$.

Pelas equações (4.4) e (4.6) temos que,

$$\begin{aligned} 0 &= x_1(x_2^2x_3) - (x_1x_2^2)x_3 \\ &= p_{23}(1+p_{22})x_1x_2x_3x_2 - p_{22}p_{23}^2x_1x_3x_2^2 - p_{12}(1+p_{22})x_2x_1x_2x_3 + p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1x_3. \end{aligned}$$

Assim, a palavra associativa $CD = x_1x_2x_3x_2$ pode ser escrita como,

$$p_{23}(1+p_{22})CD = p_{22}p_{23}^2x_1x_3x_2^2 + p_{12}(1+p_{22})x_2x_1x_2x_3 - p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1x_3.$$

Temos também que,

$$\begin{aligned} 0 &= x_1(x_2^2x_3)x_3 - (x_1x_2^2)x_3^2 \\ &= p_{23}(1+p_{22})x_1x_2x_3x_2x_3 - p_{22}p_{23}^2x_1x_3x_2^2x_3 - p_{12}(1+p_{22})x_2x_1x_2x_3^2 + p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1x_3^2. \end{aligned}$$

Assim, a palavra associativa $CE = x_1x_2x_3x_2x_3$ pode ser escrita como,

$$p_{23}(1+p_{22})CE = p_{22}p_{23}^2x_1x_3x_2^2x_3 + p_{12}(1+p_{22})x_2x_1x_2x_3^2 - p_{12}^2p_{22}x_2^2x_1x_3^2.$$

Portanto, pela Proposição 2.3.15, \mathcal{A}_3 inclui todas as hiper-letras duras em $U_q^+(A_3)$. ■

Note que, pela Definição 2.3.8 temos,

$$\begin{aligned} p_{[A][A]} &= p_{11} = q, \\ p_{[B][B]} &= p_{11}p_{12}p_{21}p_{22} = qq^{-1}q = q, \\ p_{[C][C]} &= p_{11}p_{22}p_{33}p_{12}p_{21}p_{13}p_{31}p_{23}p_{32} = q^3q^{-2} = q, \\ p_{[D][D]} &= p_{22} = q, \\ p_{[E][E]} &= p_{22}p_{23}p_{32}p_{33} = qq^{-1}q = q, \\ p_{[F][F]} &= p_{33} = q. \end{aligned}$$

O teorema a seguir pode ser demonstrado seguindo o mesmo processo feito para provar o Teorema 3.1.4.

Teorema 4.1.3. *Se q não é uma raiz primitiva da unidade, então os valores em $U_q^+(A_3)$ dos elementos de $\mathcal{A}_3 = \{x_1, [x_1, x_2], [x_1, [x_2, x_3]], x_2, [x_2, x_3], x_3\}$ formam um conjunto de geradores PBW para $U_q^+(A_3)$ sobre $\mathbb{K}G$, no qual cada elemento possui altura infinita.*

Observação 4.1.4. Pelo Teorema 2.4.3 e pela Proposição 4.1.2, temos que se q tem ordem multiplicativa finita t , então os valores dos elementos de \mathcal{A}_3 em $u_q^+(A_3)$ e $U_q^+(A_3)$ formam

um conjunto de geradores PBW para $u_q^+(A_3)$ e $U_q^+(A_3)$ sobre $\mathbb{K}G$. Ainda, a altura de $[u]$ é igual a t em $u_q^+(A_3)$ e infinita em $U_q^+(A_3)$, para todo $[u] \in \mathcal{A}_3$.

Note que estas bases de geradores PBW são bases convexas formadas por hiper-letras duras para $U_q^+(A_3)$ e $u_q^+(A_3)$, e como já dito as bases com estas propriedades são únicas.

4.2 Coproduto

Como $U_q^+(A_3)$ é uma subálgebra de Hopf de $G \langle X \rangle$ utilizaremos a estrutura de álgebra de Hopf dada em (2.1).

Teorema 4.2.1. *As fórmulas explícitas do coproduto para os elementos da base PBW convexa em $U_q^+(A_3)$ são:*

$$\Delta(x_1) = x_1 \otimes 1 + g_1 \otimes x_1,$$

$$\Delta([B]) = [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_1 x_1 g_2 \otimes x_2,$$

$$\Delta([C]) = [C] \otimes 1 + g_{123} \otimes [C] + \beta_1 x_1 g_{23} \otimes [E] + \beta_1 [B] g_3 \otimes x_3,$$

$$\Delta(x_2) = x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2,$$

$$\Delta([E]) = [E] \otimes 1 + g_{23} \otimes [E] + \beta_1 x_2 g_3 \otimes x_3,$$

$$\Delta(x_3) = x_3 \otimes 1 + g_3 \otimes x_3.$$

Demonstração. Os coprodutos dos elementos $[A] = x_1$, $[D] = x_2$ e $[F] = x_3$ saem diretamente da definição. Ainda, a fórmula explícita do coproduto de $[B]$ foi demonstrada no Teorema 3.2.2. Assim, basta calcularmos apenas os coprodutos de $[C]$ e $[E]$. Note que para o caso do elemento $[E]$ seu coproduto é calculado de forma análoga ao que foi calculado para o elemento $[B]$ no Teorema 3.2.2, bastando apenas a mudança de índice, uma vez que $p_{uu} = q$ para todo elemento em \mathcal{A}_3 . Por fim, temos que

$$\begin{aligned} \Delta([C]) &= \Delta(x_1)\Delta([E]) - p_{12}p_{13}\Delta([E])\Delta(x_1) \\ &= (x_1 \otimes 1 + g_1 \otimes x_1)([E] \otimes 1 + g_{23} \otimes [E] + \beta_1 x_2 g_3 \otimes x_3) \\ &\quad - p_{12}p_{13}([E] \otimes 1 + g_{23} \otimes [E] + \beta_1 x_2 g_3 \otimes x_3)(x_1 \otimes 1 + g_1 \otimes x_1) \\ &= (x_1[E] - p_{12}p_{13}[E]x_1) \otimes 1 + (x_1 g_{23} - p_{12}p_{13}g_{23}x_1) \otimes [E] \\ &\quad + \beta_1(x_1 x_2 g_3 - p_{12}p_{13}x_2 g_3 x_1) \otimes x_3 + (g_1[E] - p_{12}p_{13}[E]g_1) \otimes x_1 \\ &\quad + g_{123} \otimes (x_1[E] - p_{12}p_{13}[E]x_1) + \beta_1(g_1 x_2 g_3 \otimes x_1 x_3 - p_{12}p_{13}x_2 g_3 g_1 \otimes x_3 x_1) \\ &= (x_1[E] - p_{12}p_{13}[E]x_1) \otimes 1 + (1 - p_{12}p_{21}p_{13}p_{31})x_1 g_{23} \otimes [E] \\ &\quad + \beta_1(x_1 x_2 g_3 - p_{12}p_{13}p_{31}x_2 x_1 g_3) \otimes x_3 + (p_{12}p_{13} - p_{12}p_{13})[E]g_1 \otimes x_1 \\ &\quad + g_{123} \otimes (x_1[E] - p_{12}p_{13}[E]x_1) + p_{12}\beta_1 x_2 g_1 g_3 \otimes (x_1 x_3 - p_{13}x_3 x_1) \end{aligned}$$

$$= [C] \otimes 1 + g_{123} \otimes [C] + \beta_1 x_1 g_{23} \otimes [E] + \beta_1 [B] g_3 \otimes x_3.$$

■

Corolário 4.2.2. *Os únicos geradores PBW de $U_q^+(A_3)$ que são skew-primitivos são x_1 , x_2 e x_3 .*

4.3 Skew-primitivos

Teorema 4.3.1. *Se q não é uma raiz da unidade, os únicos skew-primitivos homogêneos de $U_q^+(A_3)$ são x_1, x_2 e x_3 . Se $q^t = 1$, os únicos skew-primitivos de $U_q^+(A_3)$ serão $x_1, x_2, x_3, x_1^t, x_2^t$ e x_3^t .*

Demonstração. Pelo Lema 2.4.4 os possíveis skew-primitivos homogêneos são da forma $T = \alpha[u]^h + \sum_i \alpha_i w_i$, onde $[u]$ é uma hiper-letra dura e w_i são palavras em hiper-letras menores que $[u]$, com o mesmo grau de $[u]^{h_u}$. Se p_{uu} não é uma raiz primitiva da unidade então $h = 1$, se p_{uu} é uma raiz primitiva da unidade então $h = 1$ ou $h = h_u = t$, no qual h_u é a ordem multiplicativa de $p_{uu} = q$.

Se $[u] = x_1$ teremos que $T = \alpha x_1^h$, pois não existem palavras menores que x_1 com grau $(1,0,0)$. Se $[u] = [x_1, x_2]$, teremos 4 hiper-letras menores que $[u]$, $[C], [D], [E]$ e $[F]$, assim $w_i = x_3^{n_1} [x_2, x_3]^{n_2} x_2^{n_3} [x_1, [x_2, x_3]]^{n_4}$, logo o grau $(h, h, 0)$ de $[u]^h$ deve ser igual ao grau $(n_4, n_2 + n_3 + n_4, n_1 + n_2 + n_4)$ de w_i , como cada n_i é um inteiro positivo, segue que $T = \alpha[B]^h$. Seguindo esse mesmo processo para os demais elementos teremos que os possíveis skew-primitivos homogêneos são múltiplos de elementos da forma $[u]^h$.

Se q não é uma raiz primitiva da unidade, p_{uu} também não será, então temos que $h = 1$, e pelo Corolário 4.2.2 temos que os únicos skew-primitivos de $U_q^+(A_3)$ são x_1, x_2 e x_3 .

Se q é uma t -ésima raiz primitiva da unidade, p_{uu} também será, então $h = 1$ ou $h = t$, para $h = 1$ temos que x_1, x_2 e x_3 são skew-primitivos, se $h = t$, tomamos $[u] = x_i$, $i = \{1, 2, 3\}$, então pelo Lema 3.3.1 temos que $[t]_{p_{ii}} = 0$. Portanto, $\Delta(x_i^t) = x_i^t \otimes 1 + g_i^t \otimes x_i^t$, assim x_1^t, x_2^t e x_3^t também são skew-primitivos.

Outro possível skew-primitivo homogêneo é $[u]^t = [B]^t$. Temos pelo Teorema 4.2.1 que $\Delta([B]) = [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_1 x_1 g_2 \otimes x_2$, note que $\Delta([B]^n) = \sum u_1 u_2 \dots u_n$, com $u_i \in \{[B] \otimes 1, g_{12} \otimes [B], \beta_1 x_1 g_2 \otimes x_2\}$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos que,

$$\begin{aligned} \Delta([B]^n) &= [B]^n \otimes 1 + g_{12}^n \otimes [B]^n + (\beta_1 x_1 g_2)^n \otimes x_2^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j \\ &= [B]^n \otimes 1 + g_{12}^n \otimes [B]^n + \beta_1^n p_{21}^{\frac{n(n-1)}{2}} x_1^n g_2^n \otimes x_2^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde o grau de y_j mais o grau de z_j é igual ao grau de $[B]^n$. Note que, $[B]^n$ não será skew-primitivo para nenhum n , em particular para $n = t$, pois o terceiro termo de seu coproduto nunca irá se anular já que não existirá nenhum outro termo na soma que tenha x_2^n no fundo do tensor.

Ainda, temos que

$$\Delta([C]^n) = [C]^n \otimes 1 + g_{123}^n \otimes [C]^n + \beta_1^n (p_{21}p_{31})^{\frac{n(n-1)}{2}} x_1^n g_{23}^n \otimes [E]^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j, \quad (4.9)$$

$$\Delta([E]^n) = [E]^n \otimes 1 + g_{23}^n \otimes [E]^n + \beta_1^n p_{32}^{\frac{n(n-1)}{2}} x_2^n g_3^n \otimes x_3^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j. \quad (4.10)$$

Pelos mesmos argumentos feitos para o elemento $[B]$, concluímos que $[C]^t$ e $[E]^t$ não são skew-primitivos. Assim, os únicos skew-primitivos homogêneos para $U_q^+(A_3)$, quando $q^t = 1$, são $x_1, x_2, x_3, x_1^t, x_2^t$ e x_3^t . ■

4.4 Posto combinatório

Nesta seção consideraremos $q^t = 1, t \geq 2$.

Proposição 4.4.1. *Os elementos $[u]^h$ são skew-centrais em $U_q^+(A_3)$, onde $[u] \in \mathcal{A}_3$ e h é a altura de $[u]$ em $u_q^+(A_3)$.*

Demonstração. Pela Observação 4.1.4, temos que a altura em $u_q^+(A_3)$ dos geradores PBW de $U_q^+(A_3)$ é $h = t$ para todo elemento $[u] \in \mathcal{A}_3$.

Para mostrarmos que os elementos $[u]^h$ são skew-centrais, precisamos provar que $[u]^h x_i = \alpha_i x_i [u]^h$, para $1 \leq i \leq 3$.

Note que, como as relações de Serre (3.2) de $U_q^+(A_2)$ valem em $U_q^+(A_3)$, não será necessário mostrarmos que $[u]^h x_i = \alpha_i x_i [u]^h$, para $1 \leq i \leq 2$ e $[u] = \{[A], [B], [D]\}$.

Tome $[u] = [A] = x_1$, pelas relações de Serre (4.2), temos que $[x_1, x_3] = 0$, logo pela relação (2.5), $[x_1^h, x_3] = [x_1, [x_1, [\dots, [x_1, x_3] \dots]]] = 0$. Portanto, $x_1^h x_3 = p_{13}^h x_3 x_1^h$.

No caso $[u] = [B] = [x_1, x_2]$, temos que pela relação (2.5),

$$\begin{aligned} [[B]^h, x_3] &= [[B], [[B], [\dots, [[B], [[B], x_3] \dots]]] = [[B], [[B], [\dots, [[B], [[x_1, x_2], x_3] \dots]]]] \\ &= [[B], [[B], [\dots, [[B], [C] \dots]]]]. \end{aligned}$$

Pela Observação 2.5.5 temos que dados dois elementos $[u], [v]$, com $[u] > [v]$, em uma base convexa, $[[u], [v]] = \sum [w_i]$, tal que $[w_i] = [w_{i_1}] \dots [w_{i_k}]$, onde $[u] > [w_{i_j}] > [v]$, e cada $[w_{i_j}]$

pertence a base PBW. Portanto, como não há elementos na base PBW entre $[B]$ e $[C]$ segue que $[[B], [C]] = 0$. Assim, $[[B]^h, x_3] = 0$. Logo, $[B]^h x_3 = p_{13}^h p_{23}^h x_3 [B]^h$.

Se $[u] = [C] = [x_1, [x_2, x_3]]$, temos que $[x_1, [C]] = 0$ pela Observação 2.2.12 e relações de Serre (4.2), pois

$$[x_1, [C]] = [x_1, [x_1, [x_2, x_3]]] = [x_1, [[x_1, x_2], x_3]] = [[x_1, [x_1, x_2]], x_3] = 0.$$

Assim, $[x_1, [C]^h] = 0$, e então $x_1 [C]^h = p_{11}^h p_{12}^h p_{13}^h [C]^h x_1$. Temos também, pela Observação 2.5.5, que $[[C], x_2] = 0$, então $[[C]^h, x_2] = 0$, e assim, $[C]^h x_2 = p_{12}^h p_{22}^h p_{32}^h x_2 [C]^h$. Ainda, pelas mesmas relações anteriores, temos que $[[C], x_3] = 0$, pois

$$[[C], x_3] = [[x_1, [x_2, x_3]], x_3] = [x_1, [[x_2, x_3], x_3]] = 0.$$

Portanto, $[[C]^h, x_3] = 0$, e $[C]^h x_3 = p_{13}^h p_{23}^h p_{33}^h x_3 [C]^h$.

Se $[u] = [D] = x_2$, pelas relações de Serre temos que $[x_2, [x_2, x_3]] = 0$, assim, $[x_2^h, x_3] = [x_2, [x_2, [\dots, [x_2, [x_2, x_3]] \dots]]] = 0$. Portanto, $x_2^h x_3 = p_{23}^h x_3 x_2^h$.

Para $[u] = [E] = [x_2, x_3]$, temos, pela Observação 2.5.5, que $[[C], [E]] = \alpha x_2^n$, mas como não é possível o grau $(0, n, 0)$ de x_2^n ser igual ao grau $(1, 2, 2)$ de $[[C], [E]]$, teremos que $[[C], [E]] = 0$. Assim,

$$[x_1, [E]^h] = [[\dots [[x_1, [E]], [E]], \dots], [E]] = [[\dots [[C], [E]], \dots], [E]] = 0.$$

Portanto, $x_1 [E]^h = p_{12}^h p_{13}^h [E]^h x_1$.

Temos também, pelas relações de Serre, que $[x_2, [E]] = 0$, logo $[x_2, [E]^h] = 0$, assim, $x_2 [E]^h = p_{22}^h p_{23}^h [E]^h x_2$. Ainda, temos que $[[E], x_3] = 0$, o que implica que $[[E]^h, x_3] = 0$, e assim, $[E]^h x_3 = p_{23}^h p_{33}^h x_3 [E]^h$.

Por fim, se $[u] = [F] = x_3$, temos pelas relações de Serre que $[x_1, x_3^h] = 0$, logo $x_1 x_3^h = p_{13}^h x_3^h x_1$. Temos, também, que $[[x_2, x_3], x_3] = 0$, assim $[x_2, x_3^h] = 0$, e então $x_2 x_3^h = p_{23}^h x_3^h x_2$. E claramente, $x_3^h x_3 = x_3 x_3^h$. ■

A partir do resultado mostrado acima e pela Proposição 2.7.3, temos que o conjunto $J = \ker(\varphi)$ será gerado por elementos skew-centrais $[u]^h$ de $U_q^+(A_3)$. E ainda, pelo [3, Theorem 4.15] temos que novamente que I é uma subálgebra de Hopf, tal que I é a subálgebra gerada pelos elementos skew-centrais de $U_q^+(A_3)$.

Teorema 4.4.2. *O posto combinatório $\kappa(u_q^+(A_3)) = 2$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.3.1 os únicos elementos skew-primitivos em $J \subseteq U_q^+(A_3)$ são x_1^t , x_2^t e x_3^t . Logo, $J_1 = \langle x_1^t, x_2^t, x_3^t \rangle$. Ainda, fazendo um processo análogo ao que foi feito no Corolário 3.4.3 para \mathcal{A}_3 , podemos concluir que os elementos $[u]^h$ não pertencem

à J_1 para todo $[u] \neq x_i$, onde $[u] \in \mathcal{A}_3$, isto é, $[B]^t, [C]^t$ e $[E]^t \notin J_1$. Portanto, basta mostrarmos que $[B]^t, [C]^t$ e $[E]^t$ pertencem a J_2 .

Note que, pelas equações (4.8), (4.9) e (4.10), o coproduto de $[B]^t, [C]^t$ e $[E]^t$ são da forma:

$$\Delta([u]^t) = [u]^t \otimes 1 + g_u^t \otimes [u]^t + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j.$$

Pelo fato de I ser uma subálgebra de Hopf de $U_q^+(A_3)$, temos que necessariamente y_j ou $z_j \in \{x_1^t, x_2^t, x_3^t\}$, pois $[B]^t, [C]^t$ e $[E]^t$ têm grau total $2t$ ou $3t$, e como todos elementos possuem altura t , segue que sempre existirá um fator x_i^t em y_j ou z_j . Logo, todo termo que depende de j na expressão de $\Delta([u]^t)$ é zero em $\frac{J}{J_1}$, então $[B]^t, [C]^t$ e $[E]^t$ são skew-primitivos em $\frac{J}{J_1}$, isso significa que $[B]^t, [C]^t$ e $[E]^t \in J_2$. Como não há mais elementos para avaliarmos em J , segue que $J_2 = J$, logo $\kappa(u_q^+(A_3)) = 2$. ■

Capítulo 5

Posto combinatório do grupo quântico de tipo B_2

Neste capítulo iremos mostrar que o posto combinatório $\kappa(u_q^+(B_2)) = 2$.

5.1 Quantizações de tipo B_2

Seja B_2 a álgebra de Lie simples associada à matriz de Cartan

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pela Definição 2.6.2 concluímos que $d_1 = 2$ e $d_2 = 1$, e então os parâmetros de quantização são dados por

$$\begin{aligned} p_{11} &= q^2, \\ p_{22} &= q, \\ p_{12}p_{21} &= q^{-2}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Portanto, temos que a álgebra de Hopf $U_q^+(B_2)$ é gerada por x_1, x_2 e g_1, g_2 e definida pelas seguintes relações de Serre:

$$[x_1, [x_1, x_2]] = [[[x_1, x_2], x_2], x_2] = 0, \tag{5.2}$$

com skew-comutador (2.2) e parâmetros de quantização dados acima.

Notação 5.1.1. Para facilitar na demonstração da proposição a seguir e no desenvolvi-

mento deste capítulo usaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} [A] &= x_1, \\ [B] &= [x_1, x_2], \\ [C] &= [[x_1, x_2], x_2], \\ [D] &= x_2. \end{aligned}$$

Proposição 5.1.2. *O conjunto de todas hiper-letras duras em $U_q^+(B_2)$ é dado por*

$$\mathcal{B}_2 = \{x_1, [x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2], x_2\}.$$

Demonstração. Note que $[A] > [B] > [C] > [D]$. Seguindo a Proposição 2.3.15 teremos 6 possíveis pares $[u], [v]$ em $U_q^+(B_2)$ para serem avaliados. Observe que $[[A], [D]] = [B]$ e $[[B], [D]] = [C]$, logo vale o item (iii) da proposição para esses pares. Ainda, $[[A], [B]] = [[C], [D]] = 0$ são as relações de Serre, logo vale o item (ii) da proposição. E por fim, pela Proposição 2.3.12, os casos $[[A], [C]]$ e $[[B], [C]]$ não são hiper-letras duras, pois as palavras associativas correspondentes são combinações lineares de palavras menores de mesmo grau, e assim, vale o item (ii) da Proposição 2.3.15.

Expandindo as relações de Serre (5.2) obtemos:

$$x_1^2 x_2 = p_{12}(1 + p_{11})x_1 x_2 x_1 - p_{11}p_{12}^2 x_2 x_1^2, \quad (5.3)$$

$$x_1 x_2^3 = p_{12}(1 + p_{22} + p_{22}^2)x_2 x_1 x_2^2 - p_{12}^2 p_{22}(1 + p_{22} + p_{22}^2)x_2^2 x_1 x_2 + p_{12}^3 p_{22}^3 x_2^3 x_1. \quad (5.4)$$

Note que, pela equação (5.3), a palavra associativa $AC = x_1^2 x_2^2$ pode ser escrita como, $AC = (p_{12}(1 + p_{11})x_1 x_2 x_1 - p_{11}p_{12}^2 x_2 x_1^2)x_2 = p_{12}(1 + p_{11})x_1 x_2 x_1 x_2 - p_{11}p_{12}^2 x_2 x_1^2 x_2$.

Como $x_1(x_1 x_2^3) - (x_1^2 x_2)x_2^2 = 0$, pelas duas equações anteriores temos que

$$p_{12}(p_{22} + p_{22}^2 - p_{11})BC = p_{12}^2 p_{22}(1 + p_{22} + p_{22}^2)x_1 x_2^2 x_1 x_2 - p_{12}^3 p_{22}^3 x_1 x_2^3 x_1 - p_{11}p_{12}^2 x_2 x_1^2 x_2^2.$$

Portanto, pela Proposição 2.3.15, \mathcal{B}_2 inclui todas as hiper-letras duras em $U_q^+(B_2)$. ■

Note que, pela Definição 2.3.8 temos,

$$\begin{aligned} p_{[A][A]} &= p_{11} = q^2, \\ p_{[B][B]} &= p_{11}p_{12}p_{21}p_{22} = q^2 q^{-2} q = q, \\ p_{[C][C]} &= p_{11}p_{12}^2 p_{21}^2 p_{22}^4 = q^2 q^{-4} q^4 = q^2, \\ p_{[D][D]} &= p_{22} = q. \end{aligned}$$

O teorema a seguir pode ser demonstrado seguindo o mesmo processo feito para provar o

Teorema 3.1.4.

Teorema 5.1.3. *Se q não é uma raiz primitiva da unidade, então os valores em $U_q^+(B_2)$ dos elementos de $\mathcal{B}_2 = \{x_1, [x_1, x_2], [[x_1, x_2], x_2], x_2\}$ formam um conjunto de geradores PBW para $U_q^+(B_2)$ sobre $\mathbb{K}G$, no qual cada elemento possui altura infinita.*

Observação 5.1.4. Pelo Teorema 2.4.3 e pela Proposição 5.1.2, temos que se q tem ordem multiplicativa finita t , então os valores em $u_q^+(B_2)$ e $U_q^+(B_2)$ dos elementos de \mathcal{B}_2 formam um conjunto de geradores PBW para $u_q^+(B_2)$ e para $U_q^+(B_2)$ sobre $\mathbb{K}G$. Ainda, altura de $[u]$ em $u_q^+(B_2)$ é $h = t$ para $[u] = \{[B], [D]\}$, e $h = t$ ou $h = \frac{t}{2}$ para $[u] = \{[A], [C]\}$. Além disso, a altura de $[u]$ em $U_q^+(B_2)$ é infinita.

Estas bases de geradores PBW são bases convexas formadas por hiper-letras duras para $U_q^+(B_2)$ e $u_q^+(B_2)$, e portanto são únicas.

5.2 Coproduto

Como $U_q^+(B_2)$ é uma subálgebra de Hopf de $G \langle X \rangle$ utilizaremos a estrutura de álgebra de Hopf dada em (2.1).

Teorema 5.2.1. *As fórmulas explícitas do coproduto para os elementos da base PBW convexa em $U_q^+(B_2)$ são:*

$$\Delta(x_1) = x_1 \otimes 1 + g_1 \otimes x_1,$$

$$\Delta([B]) = [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_2 x_1 g_2 \otimes x_2,$$

$$\Delta([C]) = [C] \otimes 1 + g_{122} \otimes [C] + q\beta_2 [B]g_2 \otimes x_2 + \beta_1 \beta_2 x_1 g_2^2 \otimes x_2^2,$$

$$\Delta(x_2) = x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2.$$

Demonstração. Os coprodutos dos elementos $[A] = x_1$ e $[D] = x_2$ saem diretamente da definição. Ainda, a fórmula explícita do coproduto de $[B]$ foi demonstrada no Teorema 3.2.2, alterando apenas o parâmetro de quantização $p_{12}p_{21}$. Assim, basta calcularmos o coproduto de $[C]$.

$$\begin{aligned} \Delta([C]) &= \Delta([B])\Delta(x_2) - p_{12}p_{22}\Delta(x_2)\Delta([B]) \\ &= ([B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_2 x_1 g_2 \otimes x_2)(x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2) \\ &\quad - p_{12}p_{22}(x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2)([B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_2 x_1 g_2 \otimes x_2) \\ &= ([B]x_2 - p_{12}p_{22}x_2[B]) \otimes 1 + (1 - p_{12}p_{21}p_{22}^2)[B]g_2 \otimes x_2 \\ &\quad + (p_{12}p_{22}x_2g_{12} - p_{12}p_{22}x_2g_{12}) \otimes [B] + g_{122} \otimes ([B]x_2 - p_{12}p_{22}x_2[B]) \\ &\quad + \beta_2 p_{22}(x_1x_2 - p_{12}x_2x_1)g_2 \otimes x_2 + \beta_2(x_1g_2^2 - p_{12}p_{21}p_{22}x_1g_2^2) \otimes x_2^2 \end{aligned}$$

$$= [C] \otimes 1 + g_{122} \otimes [C] + q\beta_2[B]g_2 \otimes x_2 + \beta_1\beta_2x_1g_2^2 \otimes x_2^2.$$

■

Corolário 5.2.2. *Os únicos geradores PBW de $U_q^+(B_2)$ que são skew-primitivos são x_1 e x_2 .*

5.3 Skew-primitivos

Teorema 5.3.1. *Se q não é uma raiz da unidade, os únicos skew-primitivos homogêneos de $U_q^+(B_2)$ são x_1 e x_2 . Se $q^t = 1$, os únicos skew-primitivos de $U_q^+(B_2)$ serão x_1 , x_2 , $x_1^{h_1}$ e $x_2^{h_2}$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.4.4 os possíveis skew-primitivos homogêneos são da forma $T = \alpha[u]^h + \sum_i \alpha_i w_i$, onde $[u]$ é uma hiper-letra dura e w_i são palavras em hiper-letras menores que $[u]$, com o mesmo grau de $[u]^{h_u}$. Se p_{uu} não é uma raiz primitiva da unidade então $h = 1$, se p_{uu} é uma raiz primitiva da unidade então $h = 1$ ou $h = h_u$, no qual h_u é a ordem multiplicativa de p_{uu} .

Se $[u] = x_1$ teremos que $T = \alpha x_1^h$, pois não existem palavras menores que x_1 com grau $(1,0)$. Se $[u] = [x_1, x_2]$, teremos 2 hiper-letras menores que $[u]$, $[C]$ e $[D]$, assim $w_i = x_2^{n_1} [[x_1, x_2], x_2]^{n_2}$, logo o grau (h, h) de $[u]^h$ deve ser igual ao grau $(n_2, n_1 + 2n_2)$ de w_i , como cada n_i é um inteiro positivo, segue que $T = \alpha[B]^h$. Seguindo esse mesmo processo para os demais elementos teremos que os possíveis skew-primitivos homogêneos são múltiplos de elementos da forma $[u]^h$.

Se q não é uma raiz primitiva da unidade, p_{uu} também não será, então temos que $h = 1$, logo pelo Corolário 5.2.2 temos que os únicos skew-primitivos de $U_q^+(B_2)$ são x_1 e x_2 .

Se q é uma t -ésima raiz primitiva da unidade, p_{uu} terá ordem multiplicativa t ou $\frac{t}{2}$, isto é, p_{uu} também será uma raiz primitiva da unidade, então pelo Lema 2.4.4, $h = 1$ ou $h = h_u$. Para $h = 1$ temos que x_1 e x_2 são skew-primitivos. Consideramos agora $h = h_u$, se $[u] = x_i$, $i = \{1, 2\}$, pelo Lema 3.3.1, temos que $\Delta(x_i^{h_i}) = x_i^{h_i} \otimes 1 + g_i^{h_i} \otimes x_i^{h_i}$, e portanto $x_1^{h_1}$ e $x_2^{h_2}$ também são skew-primitivos.

Outro possível skew-primitivo homogêneo é $[u]^{h_u} = [B]^{h_B}$. Temos pelo Teorema 5.2.1 que $\Delta([B]) = [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_2 x_1 g_2 \otimes x_2$, assim,

$$\Delta([B]^n) = [B]^n \otimes 1 + g_{12}^n \otimes [B]^n + \beta_2^n p_{21}^{\frac{n(n-1)}{2}} x_1^n g_2^n \otimes x_2^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j, \quad (5.5)$$

onde o grau de y_j mais o grau de z_j é igual ao grau de $[B]^n$. Note que $[B]^n$ não será skew-primitivo para nenhum valor de n , pois o terceiro termo de seu coproduto, termo

claramente não nulo, nunca irá se anular já que não existirá nenhum outro termo na soma que tenha x_2^n no fundo do tensor.

Ainda, temos que

$$\Delta([C]^n) = [C]^n \otimes 1 + g_{122}^n \otimes [C]^n + \beta_1^n \beta_2^n p_{21}^{n(n-1)} x_1^n g_2^{2n} \otimes x_2^{2n} + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j. \quad (5.6)$$

Pelos mesmos argumentos feitos para o elemento $[B]^n$, temos que $[C]^n$ não será skew-primitivo. Assim, os únicos skew-primitivos homogêneos para $U_q^+(B_2)$, quando $q^t = 1$, são $x_1, x_2, x_1^{h_1}$ e $x_2^{h_2}$. ■

5.4 Posto combinatório

Nesta seção consideraremos $q^t = 1, t \geq 3$.

Proposição 5.4.1. *Os elementos $[u]^h$ são skew-centrais em $U_q^+(B_2)$, onde $[u] \in \mathcal{B}_2$ e h é a altura de $[u]$.*

Demonstração. Para mostrarmos que os elementos $[u]^h$ são skew-centrais, precisamos provar que $[u]^h x_i = \alpha_i x_i [u]^h$, para $1 \leq i \leq 2$.

Tome $[u] = [A] = x_1$, obviamente $x_1^h x_1 = x_1 x_1^h$. Pela relação (2.5), temos que $[x_1^h, x_2] = [x_1, [x_1, \dots, [x_1, [x_1, x_2]] \dots]]$, e pelas relações de Serre (5.2), temos $[x_1, [x_1, x_2]] = 0$, assim $x_1^h x_2 = p_{12}^h x_2 x_1^h$.

No caso $[u] = [B] = [x_1, x_2]$, temos que, pelas relações de Serre, $[x_1, [B]] = 0$, assim pela relação (2.4), $[x_1, [B]^h] = [\dots [x_1, [B]], \dots], [B] = 0$, portanto $x_1 [B]^h = p_{11}^h p_{12}^h [B]^h x_1$. Ainda, pela Observação 2.5.5, temos que $[[B], [C]] = 0$, assim

$$[[B]^h, x_2] = [[B], [\dots, [[B], [[B], x_2]] \dots]] = [[B], [\dots, [[B], [C]] \dots]] = 0,$$

logo $[B]^h x_2 = p_{12}^h p_{22}^h x_2 [B]^h$.

Se $[u] = [C] = [[x_1, x_2], x_2]$, temos pela Observação 2.5.5 que, $[x_1, [C]] = \alpha [B]^2$. Ainda, pelo item (i) da Proposição 2.2.11 temos que,

$$\begin{aligned} [[x_1, [C]], [C]] &= [\alpha [B]^2, [C]] = \alpha [[B][B], [C]] \\ &= \alpha [B][[B], [C]] + \alpha p_{11} p_{22}^2 p_{12}^2 p_{21} [[B], [C]][B] = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $[x_1, [C]^h] = 0$, e então, $x_1 [C]^h = p_{11}^h p_{12}^{2h} [C]^h x_1$. Ainda, como $[[C], x_2] = 0$, temos que $[[C]^h, x_2] = 0$, e assim, $[C]^h x_2 = p_{12}^h p_{22}^{2h} x_2 [C]^h$.

Por fim, $[u] = [D] = x_2$, pelas relações já utilizadas, temos que

$$[x_1, x_2^h] = [\dots [[x_1, x_2], x_2], \dots], x_2 = 0,$$

assim $x_1x_2^h = p_{12}^hx_2^hx_1$. E ainda, $x_2^hx_2 = x_2x_2^h$. ■

A partir do resultado mostrado acima e pela Proposição 2.7.3, temos que o conjunto $J = \ker(\varphi)$ será gerado por elementos skew-centrais $[u]^h$ de $U_q^+(B_2)$. E ainda, pelo [3, Theorem 4.15], temos que I é uma subálgebra de Hopf, tal que I é a subálgebra gerada pelos elementos skew-centrais de $U_q^+(B_2)$.

Teorema 5.4.2. *O posto combinatório $\kappa(u_q^+(B_2)) = 2$.*

Demonstração. Pela Observação 5.1.4, se t for ímpar, temos que a altura dos geradores PBW de $U_q^+(B_2)$ é $h = t$ para todo $[u] \in \mathcal{B}_2$, se t for par, então $h = t$ para $[u] = \{[B], [D]\}$ e $h = \frac{t}{2}$ para $[u] = \{[A], [C]\}$.

Pelo Teorema 5.3.1, temos que os elementos $[u]^t$ são skew-primitivos de J , para todo $[u] \in \mathcal{B}_2$ de grau total igual à 1, assim $[u]^h \in J_1$. Ainda, fazendo um processo análogo ao que foi feito no Corolário 3.4.3 para \mathcal{B}_2 , podemos concluir que os elementos $[u]^h$ não pertencem à J_1 para todo $[u] \neq x_i$, onde $[u] \in \mathcal{B}_2$, isto é, $[B]^{h_B}$ e $[C]^{h_C} \notin J_1$.

Além disso, vimos que o coproduto dos elementos $[u] = \{[B], [C]\}$, são da seguinte forma:

$$\Delta([u]) = [u] \otimes 1 + g_{[u]} \otimes [u] + \sum_j \alpha v_j g_w \otimes w_j,$$

no qual o grau de v_j mais o grau de w_j é igual ao grau de $[u]$, para todo índice j fixado. Como Δ é multiplicativo, temos que

$$\Delta([u]^h) = [u]^h \otimes 1 + g_{[u]^h} \otimes [u]^h + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j,$$

onde o grau de y_j mais o grau de z_j é igual ao grau de $[u]^h$.

Portanto, se t for ímpar, temos, pelo fato dos elementos $[u]^h$ gerarem uma subálgebra de Hopf de $U_q^+(B_2)$, que necessariamente y_j ou $z_j \in \{x_1^t, x_2^t\}$. Logo, todo termo que depende de j na expressão de $\Delta([u]^h)$ é zero em $\frac{J}{J_1}$, então $[B]^t$ e $[C]^t$ são skew-primitivos em $\frac{J}{J_1}$, isso significa que $[B]^t$ e $[C]^t \in J_2$. Como não há mais elementos para avaliarmos em J , se t for ímpar, segue que $J_2 = J$.

E se t for par, temos que a altura de $[B]$ é $h_B = t$ e a altura de $[C]$ é $h_C = \frac{t}{2}$. Então, pelo coproduto de $[u]^h$, temos que a soma do grau de y_j e de z_j deve ser igual ao grau total de $[u]^h$. Portanto, se $[u] = [B]$, temos que o grau de y_j mais o grau de z_j deve ser igual a (t, t) , logo temos as seguintes possibilidades:

Se $(t, t) = (\frac{t}{2}, \frac{t}{2}) + (\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$, então $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}$, $z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}$, com v_1 e v_2 tendo grau total 2. O que não é possível, pois o único elemento de grau total igual a 2 em \mathcal{B}_2 é o próprio $[B]$ que tem altura t , ou seja, y_j e $z_j \notin I$ neste caso, e como vimos na Observação 3.4.2, temos que y_j e $z_j \in I$, pois I é uma subálgebra de Hopf.

Para $(t, t) = (t, \frac{t}{2}) + (0, \frac{t}{2})$, note que esse caso não irá ocorrer, pois para isso precisaríamos que $y_j = [v_1]^t [v_2]^{\frac{t}{2}}$, $z_j = [v_3]^{\frac{t}{2}}$, onde $v_3 = x_2$, mas como a altura de x_2 é t segue que $z_j \notin I$, o que não pode ocorrer pelo mesmo argumento anterior. O mesmo ocorre para o caso $(t, t) = (0, \frac{t}{2}) + (t, \frac{t}{2})$.

Se $(t, t) = (\frac{t}{2}, t) + (\frac{t}{2}, 0)$, então $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}} [v_2]^t$, $z_j = [v_3]^{\frac{t}{2}}$, onde v_1, v_2 e v_3 tem grau total 1, isto é, $v_1 = v_3 = x_1$ e $v_2 = x_2$, pois são os únicos elementos que satisfazem y_j e $z_j \in I$. O caso $(t, t) = (\frac{t}{2}, 0) + (\frac{t}{2}, t)$ é equivalente.

Se $(t, t) = (t, 0) + (0, t)$, então $y_j = [v_1]^t$, $z_j = [v_2]^t$, onde v_1 tem grau total 2 e v_2 tem grau total 1, ou seja, $v_1 = x_1^2$ e $v_2 = x_2$. O caso $(t, t) = (0, t) + (t, 0)$ é equivalente.

Como em todas as possibilidades, ou y_j ou $z_j \in \{x_1^{h_1}, x_2^{h_2}\}$, temos que todo termo que depende de j na expressão de $\Delta([B]^t)$ é zero em $\frac{J}{J_1}$, então $[B]^t$ é skew-primitivo em $\frac{J}{J_1}$, isso significa que $[B]^t \in J_2$.

Para $[u] = [C]$, temos que o grau de y_j mais o grau de z_j deve ser igual a $(\frac{t}{2}, t)$, logo temos as seguintes possibilidades:

Se $(\frac{t}{2}, t) = (\frac{t}{2}, \frac{t}{2}) + (0, \frac{t}{2})$ e então $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}$, $z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}$, onde v_1 tem grau total 2 e v_2 tem grau total 1, como o único elemento que possui grau total igual a 2 é $[B]$ e a altura deste elemento é t , segue que este caso não é possível. O caso $(\frac{t}{2}, t) = (0, \frac{t}{2}) + (\frac{t}{2}, \frac{t}{2})$ é equivalente.

Se $(\frac{t}{2}, t) = (\frac{t}{2}, 0) + (0, t)$ e então $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}$, $z_j = [v_2]^t$, onde v_1 e v_2 têm grau total 1, ou seja, $v_1 = x_1$ e $v_2 = x_2$. O caso $(\frac{t}{2}, t) = (0, t) + (\frac{t}{2}, 0)$ é equivalente.

Assim, em todas as possibilidades temos que y_j ou z_j é igual à $x_i^{h_i}$, logo todo termo que depende de j na expressão de $\Delta([C]^{\frac{t}{2}})$ é zero em $\frac{J}{J_1}$, então $[C]^{\frac{t}{2}}$ é skew-primitivo em $\frac{J}{J_1}$, isso significa que $[C]^{\frac{t}{2}} \in J_2$.

Como não há mais elementos para avaliarmos em J , para t par, segue que $J_2 = J$.

Portanto, $\kappa(u_q^+(B_2)) = 2$.

■

Capítulo 6

Posto combinatório do grupo quântico de tipo B_3

Neste capítulo iremos mostrar que o posto combinatório $k(u_q^+(B_3)) = 3$.

6.1 Quantizações de tipo B_3

Seja B_3 a álgebra de Lie simples associada à matriz de Cartan

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pela Definição 2.6.2 concluímos que $d_1 = d_2 = 2$ e $d_3 = 1$, e então os parâmetros de quantização são dados por

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_{22} = q^2, \\ p_{33} &= q, \\ p_{12}p_{21} &= p_{23}p_{32} = q^{-2}, \\ p_{13}p_{31} &= q^0 = 1. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Portanto, temos que a álgebra de Hopf $U_q^+(B_3)$ é gerada por x_1, x_2, x_3 e g_1, g_2, g_3 e definida pelas seguintes relações de Serre:

$$[x_1, [x_1, x_2]] = [[x_1, x_2], x_2] = [x_2, [x_2, x_3]] = [[[x_2, x_3], x_3], x_3] = [x_1, x_3] = 0, \tag{6.2}$$

com skew-comutador (2.2) e parâmetros de quantização dados acima.

Notação 6.1.1. Para facilitar na demonstração da proposição a seguir e no desenvolvi-

mento deste capítulo usaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned}
[A] &= x_1, \\
[B] &= [x_1, x_2], \\
[C] &= [x_1, [x_2, x_3]], \\
[D] &= [x_1, [[x_2, x_3], x_3]], \\
[E] &= [[x_1, [[x_2, x_3], x_3]], x_2], \\
[F] &= x_2, \\
[G] &= [x_2, x_3], \\
[H] &= [[x_2, x_3], x_3], \\
[I] &= x_3.
\end{aligned}$$

Proposição 6.1.2. *O conjunto de todas hiper-letras duras em $U_q^+(B_3)$ é dado por $\mathcal{B}_3 = \{x_1, [x_1, x_2], [x_1, [x_2, x_3]], [x_1, [[x_2, x_3], x_3]], [[x_1, [[x_2, x_3], x_3]], x_2], x_2, [x_2, x_3], [[x_2, x_3], x_3], x_3\}$.*

Demonstração. Note que $[A] > [B] > \dots > [H] > [I]$. Seguindo a Proposição 2.3.15 teremos 36 possíveis pares $[u], [v]$ em $U_q^+(B_3)$ para serem avaliados.

Observe que, $[[A], [F]] = [B]$, $[[A], [G]] = [C]$, $[[A], [H]] = [D]$, $[[D], [F]] = [E]$, $[[F], [I]] = [G]$ e $[[G], [I]] = [H]$, logo vale o item (iii) da proposição para esses pares. Ainda,

$$[[A], [B]] = [[B], [F]] = [[F], [G]] = [[H], [I]] = [[A], [I]] = 0$$

são as relações de Serre, logo vale o item (ii) da proposição. Temos também que, $[[B], [G]]$, $[[B], [H]]$, $[[B], [I]]$, $[[C], [H]]$, $[[C], [I]]$, $[[D], [I]]$, $[[E], [G]]$, $[[E], [H]]$ e $[[E], [I]]$ não são hiper-letras standards pelo item (iii) da Definição 2.3.4, assim satisfaz o item (i) da Proposição 2.3.15. Ademais, pela Observação 2.5.5, temos que

$$[[B], [C]] = [[C], [D]] = [[D], [E]] = [[E], [F]] = [[G], [H]] = 0,$$

logo vale o item (ii) da proposição.

Note que, se tivermos uma palavra associativa sendo uma combinação linear de palavras menores de mesmo grau, e multiplicarmos por uma palavra à direita ou à esquerda, a palavra resultante se mantém sendo uma combinação linear de palavras menores de mesmo grau. Isto é, seja uma palavra associativa $a = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, no qual o grau de b_i é o mesmo de a e $b_i < a$ para todo i . Tome c uma palavra associativa, então $ca = \alpha_1 c b_1 + \dots + \alpha_n c b_n$, claramente teremos que $c b_i < ca$, e também, teremos que o grau de ca será igual ao grau de $c b_i$ para todo i . Será análogo para o caso ac . Portanto, para os casos restantes, precisaremos ver apenas os casos dos pares $[[A], [C]]$, $[[C], [F]]$, $[[D], [G]]$ e $[[F], [H]]$ uma vez que as palavras associativas $AE = ADx_2 = (ACx_3)x_2$, $BE = BDx_2 = (BCx_3)x_2$, $CE = CDx_2$, $CG = CFx_3$ e $DH = DGx_3$.

Sendo assim, pela Proposição 2.3.12, os casos restantes não são hiper-letras duras, pois as palavras associativas correspondentes são combinações lineares de palavras menores de mesmo grau, e portanto, vale o item (ii) da Proposição 2.3.15.

Expandindo as relações de Serre (6.2) obtemos:

$$x_1^2 x_2 = p_{12}(1 + p_{11})x_1 x_2 x_1 - p_{11}p_{12}^2 x_2 x_1^2, \quad (6.3)$$

$$x_1 x_2^2 = p_{12}(1 + p_{22})x_2 x_1 x_2 - p_{12}^2 p_{22} x_2^2 x_1, \quad (6.4)$$

$$x_1 x_3 = p_{13} x_3 x_1, \quad (6.5)$$

$$x_2^2 x_3 = p_{23}(1 + p_{22})x_2 x_3 x_2 - p_{22}p_{23}^2 x_3 x_2^2, \quad (6.6)$$

$$x_2 x_3^2 = p_{23}(1 + p_{33} + p_{33}^2)x_3 x_2 x_3^2 - p_{23}^2 p_{33}(1 + p_{33} + p_{33}^2)x_3^2 x_2 x_3 + p_{23}^3 p_{33}^3 x_3^3 x_2. \quad (6.7)$$

Note que, pela equação (6.3), a palavra associativa $AC = x_1^2 x_2 x_3$ pode ser escrita como, $AC = p_{12}(1 + p_{11})x_1 x_2 x_1 x_3 - p_{11}p_{12}^2 x_2 x_1^2 x_3$. E assim, teremos que as palavras associativas AD e AE também serão combinações lineares de palavras menores de mesmo grau.

Pelas equações (6.6) e (6.4), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= x_1(x_2^2 x_3) - (x_1 x_2^2)x_3 \\ &= p_{23}(1 + p_{22})x_1 x_2 x_3 x_2 - p_{22}p_{23}^2 x_1 x_3 x_2^2 - p_{12}(1 + p_{22})x_2 x_1 x_2 x_3 + p_{12}^2 p_{22} x_2^2 x_1 x_3. \end{aligned}$$

Assim, a palavra associativa $CF = x_1 x_2 x_3 x_2$ pode ser escrita como,

$$p_{23}(1 + p_{22})CF = p_{22}p_{23}^2 x_1 x_3 x_2^2 + p_{12}(1 + p_{22})x_2 x_1 x_2 x_3 - p_{12}^2 p_{22} x_2^2 x_1 x_3.$$

E assim, teremos que a palavra associativa CG também será uma combinação linear de palavras menores de mesmo grau.

Para o caso da hiper-letra $[[D], [G]]$, utilizamos inicialmente a equação (6.7), multiplicando pelo lado esquerdo da equação a palavra associativa $x_1 x_2$, resultando em

$$\begin{aligned} x_1 x_2(x_2 x_3^2) &= p_{23}(1 + p_{33} + p_{33}^2)x_1 x_2 x_3 x_2 x_3^2 - p_{23}^2 p_{33}(1 + p_{33} + p_{33}^2)x_1 x_2 x_3^2 x_2 x_3 \\ &\quad + p_{23}^3 p_{33}^3 x_1 x_2 x_3^3 x_2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Pela equação (6.6), temos que $x_1 x_2 x_3 x_2 x_3^2 = (p_{23}(1 + p_{22}))^{-1}(x_1 x_2^2 x_3^3 + p_{22}p_{23}^2 x_1 x_3 x_2^2 x_3^2)$. Substituindo $x_1 x_2 x_3 x_2 x_3^2$ em (6.8), temos

$$\begin{aligned} (p_{22} - p_{33} - p_{33}^2)x_1 x_2^2 x_3^3 &= -p_{23}^2 p_{33}(1 + p_{22})(1 + p_{33} + p_{33}^2)x_1 x_2 x_3^2 x_2 x_3 \\ &\quad + p_{22}p_{23}^2(1 + p_{33} + p_{33}^2)x_1 x_3 x_2^2 x_3^2 + p_{23}^3 p_{33}^3(1 + p_{22})x_1 x_2 x_3^3 x_2. \end{aligned}$$

Por fim, utilizando a equação (6.4), podemos escrever a palavra associativa $DG = x_1 x_2 x_3^2 x_2 x_3$

como

$$\alpha DG = \beta_1 x_2 x_1 x_2 x_3^3 - \beta_2 x_2^2 x_1 x_3^3 + \beta_3 x_1 x_3 x_2^2 x_3^2 + \beta_4 x_1 x_2 x_3^3 x_2,$$

onde, $\alpha = p_{23}^2 p_{33} (1 + p_{22}) (1 + p_{33} + p_{33}^2)$, $\beta_1 = p_{12} (1 + p_{22}) (p_{33} + p_{33}^2 - p_{22})$, $\beta_2 = p_{12}^2 p_{22} (p_{33} + p_{33}^2 - p_{22})$, $\beta_3 = (1 + p_{33} + p_{33}^2) p_{22} p_{23}^2$ e $\beta_4 = (1 + p_{22}) p_{23}^3 p_{33}^3$. E assim, teremos que a palavra associativa DH também será uma combinação linear de palavras menores de mesmo grau.

Finalmente, multiplicando a equação (6.6) por x_3 pela direita, podemos escrever a palavra associativa $FH = x_2^2 x_3^2$ como $FH = p_{23} (1 + p_{22}) x_2 x_3 x_2 x_3 - p_{22} p_{23}^2 x_3 x_2^2 x_3$.

Portanto, pela Proposição 2.3.15, \mathcal{B}_3 inclui todas as hiper-letras duras em $U_q^+(B_3)$. ■

Note que, pela Definição 2.3.8 temos,

$$\begin{aligned} p_{[A][A]} &= p_{11} = q^2, \\ p_{[B][B]} &= p_{11} p_{12} p_{21} p_{22} = q^2 q^{-2} q^2 = q^2, \\ p_{[C][C]} &= p_{11} p_{22} p_{33} p_{12} p_{21} p_{13} p_{31} p_{23} p_{32} = q^5 q^{-4} = q, \\ p_{[D][D]} &= p_{11} p_{22} p_{33}^4 p_{12} p_{21} p_{13}^2 p_{31}^2 p_{23}^2 p_{32}^2 = q^8 q^{-6} = q^2, \\ p_{[E][E]} &= p_{11} p_{22}^4 p_{33}^4 p_{12}^2 p_{21}^2 p_{13}^2 p_{31}^2 p_{23}^4 p_{32}^4 = q^{14} q^{-12} = q^2, \\ p_{[F][F]} &= p_{22} = q^2, \\ p_{[G][G]} &= p_{22} p_{23} p_{32} p_{33} = q^3 q^{-2} q = q, \\ p_{[H][H]} &= p_{22} p_{33}^4 p_{23}^2 p_{32}^2 = q^6 q^{-4} = q^2, \\ p_{[I][I]} &= p_{33} = q. \end{aligned}$$

O teorema a seguir pode ser demonstrado seguindo o mesmo processo feito para provar o Teorema 3.1.4.

Teorema 6.1.3. *Se q não é uma raiz primitiva da unidade, então os valores em $U_q^+(B_3)$ dos elementos de \mathcal{B}_3 formam um conjunto de geradores PBW para $U_q^+(B_3)$ sobre $\mathbb{K}G$, no qual cada elemento possui altura infinita.*

Observação 6.1.4. Pelo Teorema 2.4.3 e pela Proposição 6.1.2, temos que se q tem ordem multiplicativa finita t , então os valores em $u_q^+(B_3)$ e $U_q^+(B_3)$ dos elementos de \mathcal{B}_3 formam um conjunto de geradores PBW para $u_q^+(B_3)$ e para $U_q^+(B_3)$ sobre $\mathbb{K}G$. Ainda, a altura de $[u]$ em $u_q^+(B_3)$ é $h = t$ para $[u] = \{[C], [G], [I]\}$, e $h = t$ ou $h = \frac{t}{2}$ para $[u] = \{[A], [B], [D], [E], [F], [H]\}$. Além disso, a altura de $[u]$ em $U_q^+(B_3)$ é infinita.

Estas bases de geradores PBW são as únicas bases PBW convexas formadas por hiper-letras duras para $U_q^+(B_3)$ e $u_q^+(B_3)$.

6.2 Coproduto

Como $U_q^+(B_3)$ é uma subálgebra de Hopf de $G \langle X \rangle$ utilizaremos a estrutura de álgebra de Hopf dada em (2.1).

Teorema 6.2.1. *As fórmulas explícitas do coproduto para os elementos da base PBW convexa em $U_q^+(B_3)$ são:*

$$\Delta(x_1) = x_1 \otimes 1 + g_1 \otimes x_1,$$

$$\Delta([B]) = [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_2 x_1 g_2 \otimes x_2,$$

$$\Delta([C]) = [C] \otimes 1 + g_{123} \otimes [C] + \beta_2 x_1 g_{23} \otimes [G] + \beta_2 [B] g_3 \otimes x_3,$$

$$\Delta([D]) = [D] \otimes 1 + g_{1233} \otimes [D] + \beta_2 x_1 g_{233} \otimes [H] + \beta_1 \beta_2 [B] g_3^2 \otimes x_3^2 + q \beta_2 [C] g_3 \otimes x_3,$$

$$\begin{aligned} \Delta([E]) = & [E] \otimes 1 + g_{12332} \otimes [E] + \beta_2 [D] g_2 \otimes x_2 + \beta_2^2 x_1 g_{2233} \otimes [H] x_2 \\ & - p_{32} \beta_1 \beta_2 x_1 g_{2233} \otimes [G]^2 + \beta_1 \beta_2^2 [B] g_{233} \otimes x_3^2 x_2 - p_{32} q \beta_2^2 [B] g_{233} \otimes x_3 [G] \\ & + p_{32}^2 q \beta_2 [B] g_{233} \otimes [H] + q \beta_2^2 [C] g_{23} \otimes x_3 x_2 - p_{32} q \beta_2 [C] g_{23} \otimes [G], \end{aligned}$$

$$\Delta(x_2) = x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2,$$

$$\Delta([G]) = [G] \otimes 1 + g_{23} \otimes [G] + \beta_2 x_2 g_3 \otimes x_3,$$

$$\Delta([H]) = [H] \otimes 1 + g_{233} \otimes [H] + q \beta_2 [G] g_3 \otimes x_3 + \beta_1 \beta_2 x_2 g_3^2 \otimes x_3^2,$$

$$\Delta(x_3) = x_3 \otimes 1 + g_3 \otimes x_3.$$

Demonstração. Os coprodutos dos elementos $[A] = x_1$, $[F] = x_2$ e $[I] = x_3$ saem diretamente da definição. Ainda, as fórmulas explícitas dos coprodutos de $[B]$, $[C]$ e $[G]$ foram demonstradas no Teorema 4.2.1 para os elementos $[B]$, $[C]$ e $[E]$ de \mathcal{A}_3 respectivamente, mudando apenas o valor dos parâmetros de quantização. Ainda, note que para o caso do elemento $[H]$ seu coproduto é calculado de forma análoga ao que foi calculado para o elemento $[C]$ no Teorema 5.2.1, bastando apenas a mudança de índice e de parâmetros de quantização. Assim, basta apenas calcularmos as fórmulas explícitas dos coprodutos de $[D]$ e $[E]$. Para esses cálculos foi utilizado o programa de computador GAP [7], juntamente com o pacote GBNP, onde analisando os dados obtidos no programa chegamos ao resultado acima para $\Delta([D])$ e $\Delta([E])$. ■

Corolário 6.2.2. *Os únicos geradores PBW de $U_q^+(B_3)$ que são skew-primitivos são x_1 , x_2 e x_3 .*

6.3 Skew-primitivos

Teorema 6.3.1. *Se q não é uma raiz da unidade, os únicos skew-primitivos homogêneos de $U_q^+(B_3)$ são x_1, x_2 e x_3 . Se $q^t = 1$, os únicos skew-primitivos de $U_q^+(B_3)$ serão $x_1, x_2, x_3, x_1^{h_1}, x_2^{h_2}$ e $x_3^{h_3}$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.4.4 os possíveis skew-primitivos homogêneos são da forma $T = \alpha[u]^h + \sum_i \alpha_i w_i$, onde $[u]$ é uma hiper-letra dura e w_i são palavras em hiper-letras menores que $[u]$, com o mesmo grau de $[u]^{h_u}$. Se p_{uu} não é uma raiz primitiva da unidade então $h = 1$, se p_{uu} é uma raiz primitiva da unidade então $h = 1$ ou $h = h_u$, no qual h_u é a ordem multiplicativa de p_{uu} .

Se $[u] = x_i$ teremos que $T = \alpha x_i^h$, pois não há como encontrar uma combinação de hiper-letras menores que x_i que tenha o mesmo grau de x_i^h , a não ser o próprio x_i . Se $[u] = [x_1, x_2]$, teremos 7 hiper-letras menores que $[u]$, assim $w_i = [I]^{n_1}[H]^{n_2}[G]^{n_3}[F]^{n_4}[E]^{n_5}[D]^{n_6}[C]^{n_7}$, logo o grau $(h, h, 0)$ de $[u]^h$ deve ser igual ao grau $(n_5 + n_6 + n_7, n_2 + n_3 + n_4 + 2n_5 + n_6 + n_7, n_1 + 2n_2 + n_3 + 2n_5 + 2n_6 + n_7)$ de w_i , como cada n_i é um inteiro positivo, segue que $T = \alpha[B]^h$. Seguindo esse mesmo processo para os demais elementos teremos que os possíveis skew-primitivos homogêneos são múltiplos de elementos da forma $[u]^h$.

Se q não é uma raiz primitiva da unidade, p_{uu} também não será, então temos que $h = 1$, logo pelo Corolário 6.2.2 temos que os únicos skew-primitivos de $U_q^+(B_3)$ são x_1, x_2 e x_3 .

Se q é uma t -ésima raiz primitiva da unidade, p_{uu} terá ordem multiplicativa t ou $\frac{t}{2}$, isto é, p_{uu} também será uma raiz primitiva da unidade, então pelo Lema 2.4.4, $h = 1$ ou $h = h_u$. Para $h = 1$ temos que x_1, x_2 e x_3 são skew-primitivos. Para $h = h_u$, se $[u] = x_i$, $i = \{1, 2, 3\}$, pelo Lema 3.3.1, temos que $\Delta(x_i^{h_i}) = x_i^{h_i} \otimes 1 + g_i^{h_i} \otimes x_i^{h_i}$, e portanto $x_1^{h_1}, x_2^{h_2}$ e $x_3^{h_3}$ também são skew-primitivos.

Como mostramos acima, outro possível skew-primitivo homogêneo é $[u]^{h_u} = [B]^{h_B}$. Temos pelo Teorema 6.2.1 que $\Delta([B]) = [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_2 x_1 g_2 \otimes x_2$, assim,

$$\Delta([B]^n) = [B]^n \otimes 1 + g_{12}^n \otimes [B]^n + \beta_2^n p_{21}^{\frac{n(n-1)}{2}} x_1^n g_2^n \otimes x_2^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j, \quad (6.9)$$

onde o grau de y_j mais o grau de z_j é igual ao grau de $[B]^n$. Note que $[B]^n$ não será skew-primitivo, pois o terceiro termo de seu coproduto, termo claramente não nulo, nunca irá se anular já que não existirá nenhum outro termo na soma que tenha x_2^n no fundo do tensor.

Temos, também, que

$$\Delta([C]^n) = [C]^n \otimes 1 + g_{123}^n \otimes [C]^n + \beta_2^n (p_{31} p_{32})^{\frac{n(n-1)}{2}} [B]^n g_3^n \otimes x_3^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j. \quad (6.10)$$

Pelos mesmos argumentos feitos para o elemento $[B]^n$, temos que $[C]^n$ não será skew-

primitivo. E o mesmo valerá para os casos seguintes:

$$\begin{aligned} \Delta([D]^n) = & [D]^n \otimes 1 + g_{1233}^n \otimes [D]^n + \beta_1^n \beta_2^n (p_{31} p_{32})^{n(n-1)} [B]^n g_3^{2n} \otimes x_3^{2n} \\ & + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j; \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta([E]^n) = & [E]^n \otimes 1 + g_{12332}^n \otimes [E]^n + \beta_2^n (p_{21} p_{22} p_{23}^2)^{\frac{n(n-1)}{2}} [D]^n g_2^n \otimes x_2^n \\ & + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j; \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\Delta([G]^n) = [G]^n \otimes 1 + g_{23}^n \otimes [G]^n + \beta_2^n p_{32}^{\frac{n(n-1)}{2}} x_2^n g_3^n \otimes x_3^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j; \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta([H]^n) = & [H]^n \otimes 1 + g_{233}^n \otimes [H]^n + \beta_1^n \beta_2^n p_{32}^{n(n-1)} x_2^n g_3^{2n} \otimes x_3^{2n} \\ & + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Assim, os únicos skew-primitivos homogêneos para $U_q^+(B_3)$, quando $q^t = 1$, são x_1 , x_2 , x_3 , $x_1^{h_1}$, $x_2^{h_2}$ e $x_3^{h_3}$.

■

6.4 Posto combinatório

Nesta seção consideraremos $q^t = 1$, $t \geq 3$.

Proposição 6.4.1. *Os elementos $[u]^h$ são skew-centrais em $U_q^+(B_3)$, onde $[u] \in \mathcal{B}_3$ e h é a altura de $[u]$.*

Demonstração. Para mostrarmos que os elementos $[u]^h$ são skew-centrais, precisamos provar que $[u]^h x_i = \alpha_i x_i [u]^h$, para $1 \leq i \leq 3$.

Tome $[u] = [A] = x_1$, obviamente $x_1^h x_1 = x_1 x_1^h$. Pela relação (2.5), temos que $[x_1^h, x_2] = [x_1, [x_1, \dots, [x_1, [x_1, x_2]] \dots]]$, e pelas relações de Serre (6.2), temos $[x_1, [x_1, x_2]] = 0$, assim $x_1^h x_2 = p_{12}^h x_2 x_1^h$. Ainda, pelas relações de Serre, temos que $[x_1, x_3] = 0$, logo $[x_1^h, x_3] = [x_1, [x_1, [\dots, [x_1, x_3] \dots]]] = 0$. Portanto, $x_1^h x_3 = p_{13}^h x_3 x_1^h$.

No caso $[u] = [B] = [x_1, x_2]$, temos que, pelas relações de Serre, $[x_1, [B]] = 0$, assim pela relação (2.4), $[x_1, [B]^h] = [[\dots [x_1, [B]], \dots], [B]] = 0$, portanto $x_1 [B]^h = p_{11}^h p_{12}^h [B]^h x_1$. Ainda, pelas relações de Serre, temos que $[[B], x_2] = 0$, assim $[[B]^h, x_2] = 0$, logo

$[B]^h x_2 = p_{12}^h p_{22}^h x_2 [B]^h$. Temos que, pela relação (2.5).

$$\begin{aligned} [[B]^h, x_3] &= [[B], [[B], [\dots, [[B], [[B], x_3] \dots]]] = [[B], [[B], [\dots, [[B], [x_1, x_2], x_3] \dots]]] \\ &= [[B], [[B], [\dots, [[B], [x_1, [x_2, x_3]] \dots]]] = [[B], [[B], [\dots, [[B], [C]] \dots]]], \end{aligned}$$

Como, pela Observação 2.5.5, $[[B], [C]] = 0$, segue que $[[B]^h, x_3] = 0$. Logo,

$$[B]^h x_3 = p_{13}^h p_{23}^h x_3 [B]^h.$$

Se $[u] = [C] = [x_1, [x_2, x_3]]$, temos que $[x_1, [C]] = 0$ pela Observação 2.2.12 e relações de Serre 6.2, pois

$$[x_1, [C]] = [x_1, [x_1, [x_2, x_3]]] = [x_1, [[x_1, x_2], x_3]] = [[x_1, [x_1, x_2]], x_3] = 0.$$

Assim, $[x_1, [C]^h] = 0$, e então $x_1 [C]^h = p_{11}^h p_{12}^h p_{13}^h [C]^h x_1$. Temos também, pela Observação 2.5.5, que $[[C], x_2] = \alpha [E]^{n_1} [D]^{n_2}$, mas claramente o grau de ambos os lados da igualdade não podem se igualar, caso contrário existiriam inteiros positivos n_1 e n_2 tal que $(1, 2, 1) = (n_1 + n_2, 2n_1 + n_2, 2n_1 + 2n_2)$, o que não ocorre. Assim, $[[C], x_2] = 0$ e portanto, teremos $[[C]^h, x_2] = 0$. Logo, $[C]^h x_2 = p_{12}^h p_{22}^h p_{32}^h x_2 [C]^h$.

Ainda, temos que $[[C], x_3] = [[x_1, [x_2, x_3]], x_3] = [x_1, [[x_2, x_3], x_3]] = [D]$. Efetuando novamente o colchete com $[C]$, segue que $[[C], [[C], x_3]] = [[C], [D]] = 0$. Portanto, $[[C]^h, x_3] = 0$, e $[C]^h x_3 = p_{13}^h p_{23}^h p_{33}^h x_3 [C]^h$.

Se $[u] = [D] = [x_1, [x_2, x_3], x_3]$, pelas relações de Serre temos que $[x_1, [x_1, x_2]] = 0$, assim,

$$\begin{aligned} [x_1, [D]] &= [x_1, [x_1, [[x_2, x_3], x_3]]] = [x_1, [[x_1, [x_2, x_3]], x_3]] = [x_1, [[[x_1, x_2], x_3], x_3]] \\ &= [[x_1, [[x_1, x_2], x_3]], x_3] = [[[x_1, [x_1, x_2]], x_3], x_3] = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $x_1 [D]^h = p_{11}^h p_{12}^h p_{13}^{2h} [D]^h x_1$.

Ainda, temos que $[[D], x_2] = [E]$, desta forma, pela Observação 2.5.5, quando efetuarmos novamente o colchete por $[D]$, segue que $[[D], [[D], x_2]] = [[D], [E]] = 0$. Logo, $[D]^h x_2 = p_{12}^h p_{22}^h p_{32}^{2h} x_2 [D]^h$. Por último, temos pelas relações de Serre que $[[[x_2, x_3], x_3], x_3] = 0$, assim, segue que

$$[[D], x_3] = [[x_1, [[x_2, x_3], x_3]], x_3] = [x_1, [[[x_2, x_3], x_3], x_3]] = 0.$$

Portanto, $[D]^h x_3 = p_{13}^h p_{23}^h p_{33}^{2h} x_3 [D]^h$.

Se $[u] = [E] = [[x_1, [x_2, x_3], x_3], x_2]$, pela Observação 2.5.5, temos que $[x_1, [E]] = \alpha [C]^2$, para que o grau dos elementos de ambos os lados coincidam, desta forma, aplicando no-

vamente o colchete por $[E]$ e utilizando o item i) da Proposição 2.2.11, segue que

$$[[x_1, [E]], [E]] = \alpha[[C]^2, [E]] = \alpha[C][[C], [E]] + \alpha p_{CE}[[C], [E]][C] = \alpha[C] \cdot 0 + \alpha p_{CE} \cdot 0 \cdot [C] = 0.$$

Note que, $[[C], [E]]$ deve ser 0, pois pela Observação 2.5.5, $[[C], [E]] = \beta[D]^n$, mas claramente o grau dos elementos de ambos os lados da igualdade não coincidem. Portanto, $[[x_1, [E]], [E]] = \alpha[C] \cdot 0 + \alpha p_{CE} \cdot 0 \cdot [C] = 0$. E assim, $x_1[E]^h = p_{11}^h p_{12}^{2h} p_{13}^{2h} [E]^h x_1$. Pela Observação 2.5.5, segue que $[[E], x_2] = 0$, desta forma, temos que $[[E]^h, x_2] = 0$. E assim, $[E]^h x_2 = p_{12}^h p_{22}^{2h} p_{32}^{2h} x_2 [E]^h$. Ainda, pela mesma Observação, temos que

$$[[E], x_3] = \alpha[H]^{n_1} [G]^{n_2} [F]^{n_3}.$$

Como precisamos ter o grau dos elementos de ambos os lados iguais, o que não acontece já que para isso teríamos $(1, 2, 2) = (0, n_1 + n_2 + n_3, 2n_1 + n_2)$, concluímos que $[[E], x_3] = 0$. Desta forma, $[E]^h x_3 = p_{13}^h p_{23}^{2h} p_{33}^{2h} x_3 [E]^h$.

Se $[u] = [F] = x_2$, temos pelas relações de Serre que $[[x_1, x_2], x_2] = 0$, desta forma $[x_1, x_2^h] = 0$, e assim, $x_1 x_2^h = -p_{12}^h x_2^h x_1$. Claramente, $x_2 x_2^h = x_2^h x_2$. Ainda, pelas relações de Serre, temos que $[x_2, [x_2, x_3]] = 0$, logo $[x_2^h, x_3] = 0$, e segue que $x_2^h x_3 = p_{23}^h x_3 x_2^h$.

Para $[u] = [G] = [x_2, x_3]$, temos que $[x_1, [G]] = [C]$, e assim, pela Observação 2.5.5, temos que $[[C], [G]] = \sum \alpha[F]^{n_1} [E]^{n_2} [D]^{n_3}$, como precisamos que o grau dos elementos de ambos os lados sejam iguais, temos que $(1, 2, 2) = (n_2 + n_3, n_1 + 2n_2 + n_3, 2n_2 + 2n_3)$, assim temos duas possibilidades: $n_1 = 0, n_2 = 1$ e $n_3 = 0$ ou $n_1 = 1, n_2 = 0$ e $n_3 = 1$. Isto é, $[[C], [G]] = \alpha_1[E] + \alpha_2[F][D]$. Aplicando o colchete por $[G]$ novamente, temos que

$$[[[C], [G]], [G]] = \alpha_1[[E], [G]] + \alpha_2[[F][D], [G]].$$

Pela Observação 2.5.5, temos que $[[E], [G]] = \alpha[F]^n = \alpha x_2^n$, no qual o grau de $[F]^n$ seja igual ao grau de $[[E], [G]]$, isto é, $(1, 3, 3) = (0, n, 0)$, o que não é possível, logo $[[E], [G]] = 0$. Assim, usando a Proposição 2.2.11, segue que

$$[[[C], [G]], [G]] = \alpha_2[F][[D], [G]] + \alpha_2 p_{DG} [[F], [G]][D].$$

Novamente pela Observação 2.5.5, temos que $[[D], [G]] = \alpha[F]^{n_1} [E]^{n_2}$, assim precisamos que $(1, 2, 3) = (n_2, n_1 + 2n_2, 2n_2)$, para que o grau de ambos os lados da igualdade sejam iguais. Pela primeira coordenada segue que $n_2 = 1$, o que resulta em $(1, 2, 3) = (1, 2, 2)$, portanto vemos que $[[D], [G]] = 0$. Ainda, pela Observação, temos que $[[F], [G]] = 0$. Desta forma, segue que $[[[x_1, [G]], [G]], [G]] = 0$. E assim, $[x_1, [G]^h] = 0$, o que conclui $x_1 [G]^h = p_{12}^h p_{13}^h [G]^h x_1$.

Temos também, pelas relações de Serre, que $[x_2, [G]] = 0$, logo $[x_2, [G]^h] = 0$, assim, $x_2 [G]^h = p_{22}^h p_{23}^h [G]^h x_2$. Ainda, temos que $[[G], x_3] = [H]$, aplicando novamente o colchete

por $[G]$ e usando a Observação 2.5.5, temos que $[[G], [[G], x_3]] = [[G], [H]] = 0$, o que implica que $[[G]^h, x_3] = 0$, e assim, $[G]^h x_3 = p_{23}^h p_{33}^h x_3 [G]^h$.

Se $[u] = [H] = [[x_2, x_3], x_3]$, temos que $[x_1, [H]] = [D]$. Aplicando novamente o colchete por $[H]$ e usando a Observação 2.5.5 segue que, $[[D], [H]] = \alpha[G]^{n_1}[F]^{n_2}[E]^{n_3}$, assim precisamos que $(1, 2, 4) = (n_3, n_1 + n_2 + 2n_3, n_1 + 2n_3)$, para que o grau de ambos os lados da igualdade sejam iguais. Pela primeira coordenada segue que $n_3 = 1$, o que resulta em $(1, 2, 4) = (1, 2, 2)$, portanto vemos que $[[x_1, [H]], [H]] = 0$. Desta forma, temos que $[x_1, [H]^h] = 0$, e assim $x_1[H]^h = p_{12}^h p_{13}^{2h} [H]^h x_1$. Ainda, pela Observação, temos que $[x_2, [H]] = \alpha[G]^2$, aplicando novamente o colchete por $[H]$ e usando a Proposição 2.2.11 e Observação 2.5.5, temos que

$$\begin{aligned} [[x_2, [H]], [H]] &= \alpha[[G]^2, [H]] = \alpha[G][[G], [H]] + \alpha p_{GH} [[G], [H]][G] \\ &= \alpha[G] \cdot 0 + \alpha p_{GH} \cdot 0 \cdot [G] = 0. \end{aligned}$$

Portanto segue que, $[x_2, [H]^h] = 0$, o que conclui que $x_2[H]^h = p_{22}^h p_{23}^{2h} [H]^h x_2$. Ainda, novamente pela Observação 2.5.5, temos que $[[H], x_3] = 0$, assim, $[[H]^h, x_3] = 0$, e segue que $[H]^h x_3 = p_{23}^h p_{33}^{2h} x_3 [H]^h$.

Por fim, se $[u] = [I] = x_3$, temos pelas relações de Serre que $[x_1, x_3^h] = 0$, logo $x_1 x_3^h = p_{13}^h x_3^h x_1$. Temos, também, que $[[x_2, x_3], x_3] = 0$, assim $[x_2, x_3^h] = 0$, e então $x_2 x_3^h = p_{23}^h x_3^h x_2$. E claramente, $x_3^h x_3 = x_3 x_3^h$. ■

A partir do resultado mostrado acima e pela Proposição 2.7.3, temos que o conjunto $J = \ker(\varphi)$ será gerado por elementos skew-centrais $[u]^h$ de $U_q^+(B_3)$. E ainda, pelo [3, Theorem 4.15] temos que I , a subálgebra de $U_q^+(B_3)$ gerada pelos elementos skew-centrais é uma subálgebra de Hopf de $U_q^+(B_3)$.

Proposição 6.4.2. *Se a ordem multiplicativa t de q for ímpar temos que, se $[u] \in U_q^+(B_3)$ tem grau total menor que 2^n , então $[u]^{h_u} \in J_n$.*

Demonstração. Note que, se a ordem multiplicativa t de q for ímpar, então todo gerador PBW $[u]$ de $U_q^+(B_3)$ tem altura $h_u = t$.

Pelo Teorema 6.3.1, temos que os elementos $[u]^t$, no qual $[u]$ tem grau total 1, são skew-primitivos de J , assim $[u]^t \in J_1$. Isto é, os elementos de grau total menor que $2^1 = 2$, estão em J_1 .

Vimos nas equações (6.9), (6.10), (6.11), (6.12), (6.13) e (6.14), que o coproduto dos elementos $[u]^h \in U_q^+(B_3)$, onde $[u] \in \mathcal{B}_3$ são da seguinte forma:

$$\Delta([u]^h) = [u]^h \otimes 1 + g_{[u]}^h \otimes [u]^h + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j, \quad (6.15)$$

no qual o grau de y_j mais o grau de z_j é igual ao grau de $[u]^h$, para todo índice j fixado. Desta forma, se considerarmos $[u]^h$, onde $[u]$ possui grau total 2 ou 3, ou seja, $[u]$ tem grau total menor que $2^2 = 4$, temos, pelo fato de I ser uma subálgebra de Hopf, que y_j ou $z_j \in \{x_1^t, x_2^t, x_3^t\}$, assim todos os termos que dependem de j são iguais a zero em $\frac{J}{J_1}$, logo os elementos de grau total 2 ou 3 são skew-primitivos em $\frac{J}{J_1}$, e portanto pertencem à J_2 .

Suponhamos agora, por hipótese de indução, que para todo $[u] \in \mathcal{B}_3$ com grau total menor que 2^n , temos que $[u]^h \in J_n$. Seja $[u] \in \mathcal{B}_3$ um elemento de grau total menor que 2^{n+1} , então seu coproduto é da forma (6.15), assim o grau de y_j mais o grau de z_j é igual ao grau de $[u]^h$, isto é, o grau total de y_j mais o grau total de z_j é igual ao grau total de $[u]^h$ que é menor que $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, desta forma, temos que o grau total de y_j ou o grau total de z_j é menor que 2^n , suponha sem perda de generalidade que o grau total de y_j seja menor que 2^n , como I é uma subálgebra de Hopf de $U_q^+(\mathcal{B}_3)$, temos que y_j é um produto de elementos de I com graus total menores que 2^n , assim, cada fator de y_j pertencem à J_n , logo $y_j \in J_n$. Portanto, todos os termos que dependem de j são iguais a zero em $\frac{J}{J_n}$, logo os elementos de grau total menor que 2^{n+1} são skew-primitivos em $\frac{J}{J_n}$, e portanto pertencem à J_{n+1} .

Assim, pelo Princípio de Indução Finita, temos que se $[u] \in U_q^+(B_3)$ tem grau total menor que 2^n , então $[u]^h \in J_n$. ■

Teorema 6.4.3. *O posto combinatório $\kappa(u_q^+(B_3)) \leq 3$.*

Demonstração. Vimos na Proposição anterior, que para o caso em que a ordem multiplicativa t de q for ímpar, teremos que os elementos de grau total menor que 2^n em $U_q^+(B_3)$, pertencem à J_n . Mostraremos, agora, que se t for par vale o mesmo resultado. Para este caso não conseguimos realizar uma prova de forma genérica, por isso à faremos separadamente para cada caso.

Para $n = 1$, $[u] \in \mathcal{B}_3$ irá possuir grau total menor que $2^1 = 2$, isto é, seu grau total será igual a 1. Então, pelo Teorema 6.3.1, $[u]^h$ será um skew-primitivo de J , logo pertencerá a J_1 .

Note que, pela Observação 6.1.4, como t é par, a altura dos elementos de \mathcal{B}_3 será $h = t$ para $[u] = \{[C], [G], [I]\}$ e $h = \frac{t}{2}$ para $[u] = \{[A], [B], [D], [E], [F], [H]\}$. Perceba que, para os elementos de altura $h = \frac{t}{2}$, podemos considerar $h = \frac{t}{2} = l$, $l \in \mathbb{Z}^+$, desta forma todos elementos possuem esta mesma altura ou um múltiplo dela, isto é, não teremos alturas menores que l , e assim podemos utilizar uma demonstração análoga a da Proposição anterior, e assim concluímos que, se $[u] \in U_q^+(B_3)$ tem grau total menor que 2^n e altura $h = \frac{t}{2}$, então $[u]^h \in J_n$.

Ainda, vimos que, se $[u] \in \mathcal{B}_3$, podemos escrever o coproduto de $[u]^h$ como

$$\Delta([u]^h) = [u]^h \otimes 1 + g_{[u]}^h \otimes [u]^h + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j. \quad (6.16)$$

Portanto, a partir dessas informações, verifiquemos os casos a seguir.

Para $n = 2$, $[u] \in \mathcal{B}_3$ irá possuir grau total menor que $2^2 = 4$, isto é, seu grau total será igual a 2 ou 3. Se $[u]$ possuir grau total igual a 2 e altura $h = t$, então a única possibilidade para $[u]$ será $[u] = [G] = [x, x_3]$. Assim, segue que a soma dos graus totais de y_j com z_j será igual ao grau total de $[G]^t$, que será igual a $2t$, assim temos as seguintes possibilidades:

- $y_j = [v_1]^t, z_j = [v_2]^t$, no qual v_1, v_2 têm grau total 1.
- $y_j = [v_1]^t, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1 tem grau total 1 e v_2 tem grau total 2.
- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1 tem grau total 1 e v_2 tem grau total 3.
- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1, v_2 têm grau total 2.
- $y_j = [v_1]^t, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}[v_3]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1, v_2, v_3 têm grau total 1.
- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}[v_3]^t$, no qual v_1, v_2, v_3 têm grau total 1.
- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}[v_3]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1, v_2 têm grau total 1 e v_3 tem grau total 2. Será equivalente se v_1 tiver grau total 2 e v_2, v_3 tiverem grau total 1, ou v_2 tiver grau total 2 e v_1, v_3 tiverem grau total 1.
- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}[v_2]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_3]^{\frac{t}{2}}[v_4]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1, v_2, v_3, v_4 têm grau total 1.
- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}[v_2]^{\frac{t}{2}}[v_3]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_4]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1, v_2, v_3, v_4 têm grau total 1.

Note que, todos os elementos que possuem grau total igual a 1 se anulam em $\frac{J}{J_1}$, desta forma, todas as possibilidades acima são nulas em $\frac{J}{J_1}$, exceto a quarta possibilidade, onde $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}$, com grau total de v_1 e v_2 igual a 2. Porém, o único elemento com grau total igual a 2 que possui altura $h = \frac{t}{2}$ é o elemento $[B] = [x_1, x_2]$ e claramente tomando $[v_1] = [v_2] = [B]$, teremos que o grau de y_j mais o grau de z_j será igual a $(t, t, 0)$, que é diferente de $(0, t, t)$, grau de $[G]^t$. Portanto, para todos os casos possíveis, temos que os termos dependentes de j são zero em $\frac{J}{J_1}$, ou seja, $[u]^t \in J_2$ se $[u]$ tem grau total igual a 2.

Para os próximos casos não iremos listar as possibilidades para y_j e z_j no qual algum deles se anula, iremos ver apenas as situações que possam contradizer o resultado que queremos provar.

Assim sendo, se $[u]$ possuir grau total igual a 3 e altura $h = t$, então a única possibilidade para $[u]$ será $[u] = [C]$. Assim, segue que a soma dos graus e graus totais de y_j com z_j será igual ao grau e grau total de $[C]^t$, que será igual a (t, t, t) e $3t$ respectivamente,

assim temos as seguintes possibilidades:

- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^t$, no qual v_1, v_2 têm grau total 2.
- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}[v_3]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1, v_2, v_3 têm grau total 2.
- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1, v_2 têm grau total 3.

Para a primeira possibilidade teremos $[v_1] = [B]$ e $[v_2] = [G]$, assim o grau de y_j mais o grau de z_j é $(\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}, t)$ que é diferente do grau de $[C]^t$. Para o segundo caso, temos que $[v_1] = [v_2] = [v_3] = [B]$, e assim o grau de y_j mais o grau de z_j é $(\frac{3t}{2}, \frac{3t}{2}, 0)$ que é diferente do grau de $[C]^t$. Para a última situação temos que $[v_1] = [v_2] = [H]$ e assim o grau de y_j mais o grau de z_j é $(0, t, 2t)$ que é diferente do grau de $[C]^t$.

Portanto, como as únicas situações em que os termos dependentes de j não se anulavam não são possíveis, temos que todos os termos dependentes de j são zero em $\frac{J}{J_1}$, ou seja, $[u]^t \in J_2$ se $[u]$ tem grau total igual a 3. Desta forma, se $[u]$ tem grau total menor que $2^2 = 4$, então $[u]^h \in J_2$.

Note que para os elementos de grau maior ou igual a 4, temos que sua altura é $h = \frac{t}{2}$ e assim vale o resultado desejado.

Desta maneira, temos que se $[u] \in U_q^+(B_3)$ tem grau total menor que 2^n , então $[u]^{h_u} \in J_n$. E assim, como o elemento de maior grau de \mathcal{B}_3 tem grau $5 < 2^3$, os elementos $[u]^h$ estão no máximo em J_3 , logo o posto combinatório $\kappa(u_q^+(B_3)) \leq 3$. ■

Teorema 6.4.4. *O posto combinatório $\kappa(u_q^+(B_3)) = 3$.*

Demonstração. Veja que os únicos elementos $[u]^h \in U_q^+(B_3)$, tal que $[u] \in \mathcal{B}_3$, que pertençam a J_1 são os elementos no qual $[u]$ possui grau total igual a 1, para provarmos isto basta fazermos um processo análogo ao que foi feito no Corolário 3.4.3 para \mathcal{B}_3 . E assim, os elementos de grau total maior ou igual a $2^1 = 2$ estão no mínimo em J_2 . Portanto, $2 \leq \kappa(u_q^+(B_3)) \leq 3$.

Desta forma, pelo Teorema anterior, os elementos $[B]^{\frac{t}{2}}, [C]^t, [G]^t$ e $[H]^{\frac{t}{2}} \in J_2$. Ainda, como a altura de $[D]$ é igual a $\frac{t}{2}$ e seu grau total é 4, temos que, no coproduto de $[u]^h = [D]^{\frac{t}{2}}$, a soma do grau total de y_j com o grau total de z_j é igual a $2t$, e o único caso possível em que y_j e z_j poderiam ser não nulos em J_2 é, $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1, v_2 têm grau total 2. Note que, o único elemento de grau total igual a 2 que tem altura $\frac{t}{2}$ é $[B]$, desta forma, $[v_1] = [v_2] = [B]$. Porém, o grau de y_j mais o grau de z_j neste caso é $(t, t, 0)$, que é diferente do grau de $[D]^{\frac{t}{2}}$ que é $(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t)$. Portanto, $[D]^{\frac{t}{2}}$ também pertencerá a J_2 .

Por fim, temos que $[E]^{\frac{t}{2}} \notin J_2$. De fato, pelo Teorema 6.2.1 e pela multiplicidade de Δ ,

temos que

$$\Delta([E]^{\frac{t}{2}}) = [E]^{\frac{t}{2}} \otimes 1 + g_{12332}^{\frac{t}{2}} \otimes [E]^{\frac{t}{2}} + \alpha [B]^{\frac{t}{2}} g_{233}^{\frac{t}{2}} \otimes [H]^{\frac{t}{2}} + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j,$$

onde $\alpha = p_{32}^t (q\beta_2)^{\frac{t}{2}} (p_{21} p_{22} p_{31}^2 p_{32}^2)^{\frac{t(t-2)}{4}}$.

Observe que, $\alpha [B]^{\frac{t}{2}} g_{233}^{\frac{t}{2}} \otimes [H]^{\frac{t}{2}}$ nunca irá se anular com outros termos na soma, pois no coproduto do elemento $[E]$, os termos que possuem o mesmo grau de $[H]$ no lado direito do tensor são $\beta_1 \beta_2^2 [B] g_{233} \otimes x_3^2 x_2$ e $-p_{32} q \beta_2^2 [B] g_{233} \otimes x_3 [G]$, mas como $x_3^2 x_2$ e $x_3 [G]$ começam com a variável x_3 , não há como ter outro termo com $[H]^{\frac{t}{2}}$ do lado direito do tensor. Portanto, como $[B]^{\frac{t}{2}}$ e $[H]^{\frac{t}{2}}$ são não nulos em $\frac{J}{I_1}$, segue que $[E]^{\frac{t}{2}} \notin J_2$, e assim $[E]^{\frac{t}{2}} \in J_3$.

Assim sendo, concluímos que o posto combinatório $\kappa(u_q^+(B_3)) = 3$ e

$$\begin{aligned} J_1 &= \left\langle x_1^{\frac{t}{2}}, x_2^{\frac{t}{2}}, x_3^t \right\rangle, \\ J_2 &= \left\langle x_1^{\frac{t}{2}}, [B]^{\frac{t}{2}}, [C]^t, [D]^{\frac{t}{2}}, x_2^{\frac{t}{2}}, [G]^t, [H]^{\frac{t}{2}}, x_3^t \right\rangle, \\ J_3 &= \left\langle x_1^{\frac{t}{2}}, [B]^{\frac{t}{2}}, [C]^t, [D]^{\frac{t}{2}}, [E]^{\frac{t}{2}}, x_2^{\frac{t}{2}}, [G]^t, [H]^{\frac{t}{2}}, x_3^t \right\rangle = J. \end{aligned}$$

■

Capítulo 7

Posto combinatório do grupo quântico de tipo C_3

Neste capítulo iremos mostrar que o posto combinatório $\kappa(u_q^+(C_3)) = 3$.

7.1 Quantizações de tipo C_3

Seja C_3 a álgebra de Lie simples associada à matriz de Cartan

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pela Definição 2.6.2 concluímos que $d_1 = d_2 = 1$ e $d_3 = 2$, e então os parâmetros de quantização são dados por

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_{22} = q, \\ p_{33} &= q^2, \\ p_{12}p_{21} &= q^{-1} \\ p_{23}p_{32} &= q^{-2}, \\ p_{13}p_{31} &= q^0 = 1. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Portanto, temos que a álgebra de Hopf $U_q^+(C_3)$ é gerada por x_1, x_2, x_3 e g_1, g_2, g_3 e definida pelas seguintes relações de Serre:

$$[x_1, [x_1, x_2]] = [[x_1, x_2], x_2] = [x_2, [x_2, [x_2, x_3]]] = [[x_2, x_3], x_3] = [x_1, x_3] = 0, \tag{7.2}$$

com skew-comutador (2.2) e parâmetros de quantização dados acima.

Notação 7.1.1. Para facilitar na demonstração da proposição a seguir e no desenvolvi-

mento deste capítulo usaremos a seguinte notação:

$$\begin{aligned}
[A] &= x_1, \\
[B] &= [x_1, x_2], \\
[C] &= [[x_1, x_2], [x_1, [x_2, x_3]]], \\
[D] &= [x_1, [x_2, x_3]], \\
[E] &= [[x_1, [x_2, x_3]], x_2], \\
[F] &= x_2, \\
[G] &= [x_2, [x_2, x_3]], \\
[H] &= [x_2, x_3], \\
[I] &= x_3.
\end{aligned}$$

Proposição 7.1.2. *O conjunto de todas hiper-letras duras em $U_q^+(C_3)$ é dado por $\mathcal{C}_3 = \{x_1, [x_1, x_2], [[x_1, x_2], [x_1, [x_2, x_3]]], [x_1, [x_2, x_3]], [[x_1, [x_2, x_3]], x_2], x_2, [x_2, [x_2, x_3]], [x_2, x_3], x_3\}$.*

Demonstração. Note que $[A] > [B] > \dots > [H] > [I]$. Seguindo a Proposição 2.3.15 teremos 36 possíveis pares $[u], [v]$ em $U_q^+(C_3)$ para serem avaliados.

Observe que, $[[A], [F]] = [B]$, $[[B], [D]] = [C]$, $[[A], [H]] = [D]$, $[[D], [F]] = [E]$, $[[F], [H]] = [G]$ e $[[F], [I]] = [H]$, logo vale o item (iii) da proposição para esses pares. Ainda, $[[A], [B]] = [[B], [F]] = [[F], [G]] = [[H], [I]] = [[A], [I]] = 0$ são as relações de Serre, logo vale o item (ii) da proposição. Temos também que, $[[B], [G]]$, $[[B], [H]]$, $[[B], [I]]$, $[[C], [E]]$, $[[C], [F]]$, $[[C], [G]]$, $[[C], [H]]$, $[[C], [I]]$, $[[D], [I]]$, $[[E], [G]]$, $[[E], [H]]$, $[[E], [I]]$ e $[[G], [I]]$ não são hiper-letras standards pelo item (iii) da Definição 2.3.4, assim satisfaz o item (i) da Proposição 2.3.15. Ademais, pela Observação 2.5.5, temos que $[[B], [C]] = [[C], [D]] = [[D], [E]] = [[E], [F]] = [[G], [H]] = 0$, logo vale o item (ii) da proposição. Para os casos restantes, precisaremos ver apenas os casos dos pares $[[A], [C]]$, $[[A], [D]]$, $[[A], [G]]$, $[[B], [E]]$, $[[D], [G]]$ e $[[D], [H]]$, uma vez que a palavra associativa $AE = ADx_2$.

Sendo assim, pela Proposição 2.3.12, os casos restantes não são hiper-letras duras, pois as palavras associativas correspondentes são combinações lineares de palavras menores de mesmo grau, e portanto, vale o item (ii) da Proposição 2.3.15.

Expandindo as relações de Serre (7.2) obtemos:

$$x_1^2 x_2 = p_{12}(1 + p_{11})x_1 x_2 x_1 - p_{11}p_{12}^2 x_2 x_1^2, \quad (7.3)$$

$$x_1 x_2^2 = p_{12}(1 + p_{22})x_2 x_1 x_2 - p_{12}^2 p_{22} x_2^2 x_1, \quad (7.4)$$

$$x_1 x_3 = p_{13} x_3 x_1, \quad (7.5)$$

$$x_2^3 x_3 = p_{23}(1 + p_{22} + p_{22}^2)x_2^2 x_3 x_2 - p_{22}p_{23}^2(1 + p_{22} + p_{22}^2)x_2 x_3 x_2^2 + p_{22}^3 p_{23}^3 x_3 x_2^3, \quad (7.6)$$

$$x_2 x_3^2 = p_{23}(1 + p_{33})x_3 x_2 x_3 - p_{23}^2 p_{33} x_3^2 x_2. \quad (7.7)$$

Note que, pela equação (7.3), a palavra associativa $AC = x_1^2 x_2 x_1 x_2 x_3$ pode ser escrita como, $AC = p_{12}(1 + p_{11})x_1 x_2 x_1^2 x_2 x_3 - p_{11}p_{12}^2 x_2 x_1^3 x_2 x_3$.

Temos também, pela mesma equação, que a palavra associativa $AD = x_1^2 x_2 x_3$ pode ser escrita como, $AD = p_{12}(1 + p_{11})x_1 x_2 x_1 x_3 - p_{11}p_{12}^2 x_2 x_1^2 x_3$. Assim, a palavra associativa AE também será combinação linear de palavras menores de mesmo grau.

Pela equação (7.4), a palavra associativa $AG = x_1 x_2^2 x_3$ pode ser escrita como,

$$AG = p_{12}(1 + p_{22})x_2 x_1 x_2 x_3 - p_{12}^2 p_{22} x_2^2 x_1 x_3.$$

Novamente, pela equação (7.4), juntamente de (7.3), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= x_1(x_1 x_2^2)x_3 x_2 - (x_1^2 x_2)x_2 x_3 x_2 \\ &= p_{12}(p_{22} - p_{11})x_1 x_2 x_1 x_2 x_3 x_2 - p_{12}^2 p_{22} x_1 x_2^2 x_1 x_3 x_2 + p_{11}p_{12}^2 x_2 x_1^2 x_2 x_3 x_2. \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever a palavra associativa $BE = x_1 x_2 x_1 x_2 x_3 x_2$ como

$$p_{12}(p_{11} - p_{22})BE = p_{11}p_{12}^2 x_2 x_1^2 x_2 x_3 x_2 - p_{12}^2 p_{22} x_1 x_2^2 x_1 x_3 x_2.$$

Para o caso da hiper-letra $[[D], [G]]$, multiplicando as equações (7.6) e (7.4) por palavras associativas convenientes, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= x_1(x_2^2 x_3)x_3 - (x_1 x_2^2)x_2 x_3^2 \\ &= p_{23}(1 + p_{22} + p_{22}^2)x_1 x_2^2 x_3 x_2 x_3 - p_{22}p_{23}^2(1 + p_{22} + p_{22}^2)x_1 x_2 x_3 x_2^2 x_3 \\ &\quad + p_{22}^3 p_{23}^3 x_1 x_3 x_2^3 x_3 - p_{12}(1 + p_{22})x_2 x_1 x_2 x_2 x_3^2 + p_{12}^2 p_{22} x_2^2 x_1 x_2 x_3^2. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a palavra associativa $DG = x_1 x_2 x_3 x_2^2 x_3$ como

$$\begin{aligned} p_{22}p_{23}^2(1 + p_{22} + p_{22}^2)DG &= p_{23}(1 + p_{22} + p_{22}^2)x_1 x_2^2 x_3 x_2 x_3 + p_{22}^3 p_{23}^3 x_1 x_3 x_2^3 x_3 \\ &\quad - p_{12}(1 + p_{22})x_2 x_1 x_2^2 x_3^2 + p_{12}^2 p_{22} x_2^2 x_1 x_2 x_3^2. \end{aligned}$$

Ainda, pela equação (7.4) temos que

$$\alpha DG = \beta_1 x_2 x_1 x_2 x_3 x_2 x_3 - \beta_2 x_2^2 x_1 x_3 x_2 x_3 + \beta_3 x_1 x_3 x_2^3 x_3 - \beta_4 x_2 x_1 x_2^2 x_3^2 + \beta_5 x_2^2 x_1 x_2 x_3^2,$$

onde $\alpha = p_{22} p_{23}^2 (1 + p_{22} + p_{22}^2)$, $\beta_1 = p_{12} p_{23} (1 + p_{22} + p_{22}^2) (1 + p_{22})$, $\beta_2 = p_{12}^2 p_{22} p_{23} (1 + p_{22} + p_{22}^2)$, $\beta_3 = p_{22}^3 p_{23}^3$, $\beta_4 = p_{12} (1 + p_{22})$ e $\beta_5 = p_{12}^2 p_{22}$.

Por fim, pelas equações (7.7) e (7.4) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 x_2 (x_2 x_3^2) - (x_1 x_2^2) x_3^2 \\ &= p_{23} (1 + p_{33}) x_1 x_2 x_3 x_2 x_3 - p_{23}^2 p_{33} x_1 x_2 x_3^2 x_2 - p_{12} (1 + p_{22}) x_2 x_1 x_2 x_3^2 + p_{12}^2 p_{22} x_2^2 x_1 x_3^2. \end{aligned}$$

Desta forma, podemos escrever a palavra associativa $DH = x_1 x_2 x_3 x_2 x_3$ como

$$p_{23} (1 + p_{33}) DH = p_{23}^2 p_{33} x_1 x_2 x_3^2 x_2 + p_{12} (1 + p_{22}) x_2 x_1 x_2 x_3^2 - p_{12}^2 p_{22} x_2^2 x_1 x_3^2.$$

Portanto, pela Proposição 2.3.15, \mathcal{C}_3 inclui todas as hiper-letras duras em $U_q^+(C_3)$. ■

Note que, pela Definição 2.3.8 temos,

$$\begin{aligned} p_{[A][A]} &= p_{11} = q, \\ p_{[B][B]} &= p_{11} p_{12} p_{21} p_{22} = q q^{-1} q = q, \\ p_{[C][C]} &= p_{11}^4 p_{22}^4 p_{33} p_{12}^4 p_{21}^4 p_{13}^2 p_{31}^2 p_{23}^2 p_{32}^2 = q^{10} q^{-8} = q^2, \\ p_{[D][D]} &= p_{11} p_{22} p_{33} p_{12} p_{21} p_{13} p_{31} p_{23} p_{32} = q^4 q^{-3} = q, \\ p_{[E][E]} &= p_{11} p_{22}^4 p_{33} p_{12}^2 p_{21}^2 p_{13} p_{31} p_{23}^2 p_{32}^2 = q^7 q^{-6} = q, \\ p_{[F][F]} &= p_{22} = q, \\ p_{[G][G]} &= p_{22}^4 p_{23}^2 p_{32}^2 p_{33} = q^6 q^{-4} = q^2, \\ p_{[H][H]} &= p_{22} p_{33} p_{23} p_{32} = q^3 q^{-2} = q, \\ p_{[I][I]} &= p_{33} = q^2. \end{aligned}$$

O teorema a seguir pode ser demonstrado seguindo o mesmo processo feito para provar o Teorema 3.1.4.

Teorema 7.1.3. *Se q não é uma raiz primitiva da unidade, então os valores em $U_q^+(C_3)$ dos elementos de \mathcal{C}_3 formam um conjunto de geradores PBW para $U_q^+(C_3)$ sobre $\mathbb{K}G$, no qual cada elemento possui altura infinita.*

Observação 7.1.4. Pelo Teorema 2.4.3 e pela Proposição 7.1.2, temos que se q tem ordem multiplicativa finita t , então os valores em $u_q^+(C_3)$ e $U_q^+(C_3)$ dos elementos de \mathcal{C}_3 formam um conjunto de geradores PBW para $u_q^+(C_3)$ e para $U_q^+(C_3)$ sobre $\mathbb{K}G$. Ainda,

altura de $[u]$ em $u_q^+(C_3)$ é $h = t$ para $[u] = \{[A], [B], [D], [E], [F], [H]\}$, e $h = t$ ou $h = \frac{t}{2}$ para $[u] = \{[C], [G], [I]\}$. Além disso, a altura de $[u]$ em $U_q^+(C_3)$ é infinita.

Estas bases de geradores PBW são as únicas bases PBW convexas formadas por hiperletras duras para $U_q^+(C_3)$ e $u_q^+(C_3)$.

7.2 Coproduto

Como $U_q^+(C_3)$ é uma subálgebra de Hopf de $G \langle X \rangle$ utilizaremos a estrutura de álgebra de Hopf dada em (2.1).

Teorema 7.2.1. *As fórmulas explícitas do coproduto para os elementos da base PBW convexa em $U_q^+(C_3)$ são:*

$$\Delta(x_1) = x_1 \otimes 1 + g_1 \otimes x_1,$$

$$\Delta([B]) = [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_1 x_1 g_2 \otimes x_2,$$

$$\begin{aligned} \Delta([C]) = & [C] \otimes 1 + g_{11223} \otimes [C] + q\beta_1\beta_2 x_1 g_{1223} \otimes x_2 [D] - p_{21} p_{23} q^2 \beta_2 x_1 g_{1223} \otimes [E] \\ & + p_{21} \beta_1^2 x_1^2 g_{223} \otimes [G] + \beta_1 \beta_2 [B]^2 g_3 \otimes x_3 + q\beta_2 [B] g_{123} \otimes [D] \\ & + q\beta_1 \beta_2 [B] x_1 g_{23} \otimes [H], \end{aligned}$$

$$\Delta([D]) = [D] \otimes 1 + g_{123} \otimes [D] + \beta_1 x_1 g_{23} \otimes [H] + \beta_2 [B] g_3 \otimes x_3,$$

$$\begin{aligned} \Delta([E]) = & [E] \otimes 1 + g_{1232} \otimes [E] + p_{32} q \beta_1^2 x_1 g_{223} \otimes x_2 [H] - p_{32} q \beta_1 x_1 g_{223} \otimes [G] \\ & + \beta_1 \beta_2 [B] g_{23} \otimes x_3 x_2 - p_{32} \beta_1 [B] g_{23} \otimes [H] + \beta_1 [D] g_2 \otimes x_2, \end{aligned}$$

$$\Delta(x_2) = x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2,$$

$$\Delta([G]) = [G] \otimes 1 + g_{223} \otimes [G] + q\beta_2 x_2 g_{23} \otimes [H] + \beta_1 \beta_2 x_2^2 g_3 \otimes x_3,$$

$$\Delta([H]) = [H] \otimes 1 + g_{23} \otimes [H] + \beta_2 x_2 g_3 \otimes x_3,$$

$$\Delta(x_3) = x_3 \otimes 1 + g_3 \otimes x_3.$$

Demonstração. Os coprodutos dos elementos $[A] = x_1$, $[F] = x_2$ e $[I] = x_3$ saem diretamente da definição. Ainda, as fórmulas explícitas dos coprodutos de $[B]$, $[D]$ e $[H]$ foram demonstradas no Teorema 4.2.1 para os elementos $[B]$, $[C]$ e $[E]$ de \mathcal{A}_3 respectivamente, mudando apenas o valor dos parâmetros de quantização. Assim, basta apenas calcularmos as fórmulas explícitas dos coprodutos de $[C]$, $[E]$ e $[G]$.

$$\begin{aligned}
\Delta([G]) &= \Delta(x_2)\Delta([H]) - p_{22}p_{23}\Delta([H])\Delta(x_2) \\
&= (x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2)([H] \otimes 1 + g_{23} \otimes [H] + \beta_2 x_2 g_3 \otimes x_3) \\
&\quad - p_{22}p_{23}([H] \otimes 1 + g_{23} \otimes [H] + \beta_2 x_2 g_3 \otimes x_3)(x_2 \otimes 1 + g_2 \otimes x_2) \\
&= (x_2[H] - p_{22}p_{23}[H]x_2) \otimes 1 + (x_2g_{23} - p_{22}p_{23}g_{23}x_2) \otimes [H] \\
&\quad + \beta_2(x_2^2g_3 - p_{22}p_{23}x_2g_3x_2) \otimes x_3 + (g_2[H] - p_{22}p_{23}[H]g_2) \otimes x_2 \\
&\quad + g_{223} \otimes (x_2[H] - p_{22}p_{23}[H]x_2) + \beta_2(g_2x_2g_3 \otimes x_2x_3 - p_{22}p_{23}x_2g_{32} \otimes x_3x_2) \\
&= (x_2[H] - p_{22}p_{23}[H]x_2) \otimes 1 + (1 - p_{22}^2p_{32}p_{23})x_2g_{23} \otimes [H] \\
&\quad + \beta_2(1 - p_{22}p_{23}p_{32})x_2^2g_3 \otimes x_3 + (p_{22}p_{23} - p_{22}p_{23})[H]g_2 \otimes x_2 \\
&\quad + g_{223} \otimes (x_2[H] - p_{22}p_{23}[H]x_2) + p_{22}\beta_2x_2g_{23} \otimes (x_2x_3 - p_{23}x_3x_2) \\
&= [G] \otimes 1 + g_{223} \otimes [G] + q\beta_2x_2g_{23} \otimes [H] + \beta_1\beta_2x_2^2g_3 \otimes x_3
\end{aligned}$$

Para o cálculo dos coprodutos de $[C]$ e $[E]$ foi utilizado o programa de computador GAP [7], juntamente com o pacote GBNP, onde analisando os dados obtidos no programa chegamos ao resultado acima para $\Delta([C])$ e $\Delta([E])$. ■

Corolário 7.2.2. *Os únicos geradores PBW de $U_q^+(C_3)$ que são skew-primitivos são x_1 , x_2 e x_3 .*

7.3 Skew-primitivos

Teorema 7.3.1. *Se q não é uma raiz da unidade, os únicos skew-primitivos homogêneos de $U_q^+(C_3)$ são x_1 , x_2 e x_3 . Se $q^t = 1$, os únicos skew-primitivos de $U_q^+(C_3)$ serão x_1 , x_2 , x_3 , $x_1^{h_1}$, $x_2^{h_2}$ e $x_3^{h_3}$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.4.4 os possíveis skew-primitivos homogêneos são da forma $T = \alpha[u]^h + \sum_i \alpha_i w_i$, onde $[u]$ é uma hiper-letra dura e w_i são palavras em hiper-letras menores que $[u]$, com o mesmo grau de $[u]^{h_u}$. Se p_{uu} não é uma raiz primitiva da unidade então $h = 1$, se p_{uu} é uma raiz primitiva da unidade então $h = 1$ ou $h = h_u$, no qual h_u é a ordem multiplicativa de p_{uu} .

Se $[u] = x_i$ teremos que $T = \alpha x_i^h$, pois não há como encontrar uma combinação de hiper-letras menores que x_i que tenha o mesmo grau de x_i^h , a não ser o próprio x_i . Se $[u] = [x_1, x_2]$, teremos 7 hiper-letras menores que $[u]$, assim $w_i = [I]^{n_1}[H]^{n_2}[G]^{n_3}[F]^{n_4}[E]^{n_5}[D]^{n_6}[C]^{n_7}$,

logo o grau $(h, h, 0)$ de $[u]^h$ deve ser igual ao grau $(n_5 + n_6 + 2n_7, n_2 + 2n_3 + n_4 + 2n_5 + n_6 + 2n_7, n_1 + n_2 + n_3 + n_5 + n_6 + n_7)$ de w_i , como cada n_i é um inteiro positivo, segue que $T = \alpha[B]^h$. Seguindo esse mesmo processo para os demais elementos teremos que os possíveis skew-primitivos homogêneos são múltiplos de elementos da forma $[u]^h$.

Se q não é uma raiz primitiva da unidade, p_{uu} também não será, então temos que $h = 1$, logo pelo Corolário 7.2.2 temos que os únicos skew-primitivos de $U_q^+(C_3)$ são x_1 , x_2 e x_3 .

Se q é uma t -ésima raiz primitiva da unidade, p_{uu} terá ordem multiplicativa t ou $\frac{t}{2}$, então pelo Lema 2.4.4, $h = 1$ ou $h = h_u$. Para $h = 1$ temos que x_1 , x_2 e x_3 são skew-primitivos. Para $h = h_u$, se $[u] = x_i$, $i = \{1, 2, 3\}$, pelo Lema 3.3.1, temos que $\Delta(x_i^{h_i}) = x_i^{h_i} \otimes 1 + g_i^{h_i} \otimes x_i^{h_i}$, e portanto $x_1^{h_1}$, $x_2^{h_2}$ e $x_3^{h_3}$ também são skew-primitivos.

Como mostramos acima, outro possível skew-primitivo homogêneo é $[u]^{h_u} = [B]^{h_B}$. Temos pelo Teorema 7.2.1 que $\Delta([B]) = [B] \otimes 1 + g_{12} \otimes [B] + \beta_1 x_1 g_2 \otimes x_2$, assim,

$$\Delta([B]^n) = [B]^n \otimes 1 + g_{12}^n \otimes [B]^n + \beta_1^n p_{21}^{\frac{n(n-1)}{2}} x_1^n g_2^n \otimes x_2^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j, \quad (7.8)$$

onde o grau de y_j mais o grau de z_j é igual ao grau de $[B]^n$. Note que $[B]^n$ não será skew-primitivo, pois o terceiro termo de seu coproduto, termo claramente não nulo, nunca irá se anular já que não existirá nenhum outro termo na soma que tenha x_2^n no fundo do tensor.

Temos, também, que

$$\begin{aligned} \Delta([C]^n) = & [C]^n \otimes 1 + g_{12123}^n \otimes [C]^n + \beta_1^n \beta_2^n (p_{31} p_{32})^{n(n-1)} [B]^{2n} g_3^n \otimes x_3^n \\ & + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Pelos mesmos argumentos feitos para o elemento $[B]^n$, temos que $[C]^n$ não será skew-primitivo. E o mesmo valerá para os casos seguintes:

$$\Delta([D]^n) = [D]^n \otimes 1 + g_{123}^n \otimes [D]^n + \beta_1^n (p_{21} p_{31})^{\frac{n(n-1)}{2}} x_1^n g_{23}^n \otimes [H]^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j; \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta([E]^n) = & [E]^n \otimes 1 + g_{1232}^n \otimes [E]^n + \beta_1^n (p_{21} p_{22} p_{23})^{\frac{n(n-1)}{2}} [D]^n g_2^n \otimes x_2^n \\ & + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j; \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \Delta([G]^n) = & [G]^n \otimes 1 + g_{223}^n \otimes [G]^n + q^n \beta_2^n (p_{22} p_{32})^{\frac{n(n-1)}{2}} x_2^n g_{23}^n \otimes [H]^n \\ & + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j; \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\Delta([H]^n) = [H]^n \otimes 1 + g_{23}^n \otimes [H]^n + \beta_2^n p_{32}^{\frac{n(n-1)}{2}} x_2^n g_3^n \otimes x_3^n + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j. \quad (7.13)$$

Assim, os únicos skew-primitivos homogêneos em $U_q^+(C_3)$, quando $q^t = 1$, são x_1 , x_2 ,

$x_3, x_1^{h_1}, x_2^{h_2}$ e $x_3^{h_3}$.

■

7.4 Posto combinatório

Nesta seção consideraremos $q^t = 1, t \geq 3$.

Proposição 7.4.1. *Os elementos $[u]^h$ são skew-centrais em $U_q^+(C_3)$, onde $[u] \in \mathcal{C}_3$ e h é a altura de $[u]$.*

Demonstração. Para mostrarmos que os elementos $[u]^h$ são skew-centrais, precisamos provar que $[u]^h x_i = \alpha_i x_i [u]^h$, para $1 \leq i \leq 3$.

Note que, as relações de Serre (6.3) de $U_q^+(B_3)$ valem em $U_q^+(C_3)$, exceto $[x_2, [x_2, x_3]] = 0$ que será o elemento $[G]$ em $U_q^+(C_3)$. Desta forma, não precisaremos mostrar as skew-comutações de $[A]_{C_3} = [A]_{B_3}$ com $x_i, i = \{1, 2, 3\}$, de $[B]_{C_3} = [B]_{B_3}$ com $x_i, i = \{1, 2\}$, de $[D]_{C_3} = [C]_{B_3}$ com x_1 , de $[F]_{C_3} = [F]_{B_3}$ com $x_i, i = \{1, 2\}$ e de $[I]_{C_3} = [I]_{B_3}$ com $x_i, i = \{1, 2, 3\}$, já que para mostrar a skew-comutação destes elementos na Proposição 6.4.1 foram necessárias apenas as relações de Serre de $U_q^+(B_3)$ que também valem em $U_q^+(C_3)$.

Se $[u] = [B] = [x_1, x_2]$, temos que $[[B], x_3] = [D]$, aplicando novamente o colchete com $[B]$, temos que $[[B], [[B], x_3]] = [[B], [D]] = [C]$, aplicando por uma última vez o colchete por $[B]$ temos, pela Observação 2.5.5, que $[[B], [C]] = 0$. Assim, segue que $[[B]^h, x_3] = 0$ e logo $[B]^h x_3 = p_{13}^h p_{23}^h x_3 [B]^h$.

Se $[u] = [C] = [[x_1, x_2], [x_1, [x_2, x_3]]]$, temos, pela Observação 2.5.5, que $[x_1, [C]] = 0$, pois não existe n inteiro positivo, tal que $[x_1, [C]]$ e $[B]^n$ tenham o mesmo grau. Assim, $[x_1, [C]^h] = 0$, e portanto, $x_1 [C]^h = p_{11}^{2h} p_{12}^{2h} p_{13}^h [C]^h x_1$. Ainda, pela mesma Observação, temos que $[[C], x_2] = \alpha [E]^{n_1} [D]^{n_2}$, assim temos que o grau do elemento do lado direito deve ser igual ao grau de $[[C], x_2]$, isto é, $(n_1 + n_2, 2n_1 + n_2, n_1 + n_2) = (2, 3, 1)$, como não existem inteiros positivos n_1 e n_2 que satisfaçam a igualdade, segue que $[[C], x_2] = 0$. E assim, $[[C]^h, x_2] = 0$, o que conclui que $[C]^h x_2 = p_{12}^{2h} p_{22}^{2h} p_{32}^h x_2 [C]^h$. Pela Observação 2.5.5, temos que $[[C], x_3] = \alpha [H]^{n_1} [G]^{n_2} [F]^{n_3} [E]^{n_4} [D]^{n_5}$, para que o grau de ambos os lados coincidam temos que $n_i = 0$ para $i \neq 5$ e $n_5 = 2$. Portanto, aplicando novamente o colchete por $[C]$ e usando a Proposição 2.2.11, temos que

$$\begin{aligned} [[C], [[C], x_3]] &= \alpha [[C], [D]^2] = \alpha [[C], [D]][D] + \alpha p_{CD} [D] [[C], [D]] \\ &= \alpha \cdot 0 \cdot [D] + \alpha p_{CD} [D] \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Assim, vale que $[[C]^h, x_3] = 0$, e portanto $[C]^h x_3 = p_{13}^{2h} p_{23}^{2h} p_{33}^h x_3 [C]^h$.

Se $[u] = [D] = [x_1, [x_2, x_3]]$, temos que $[[D], x_2] = [E]$, aplicando novamente o colchete por $[D]$ e usando a Observação 2.5.5, segue que, $[[D], [[D], x_2]] = [[D], [E]] = 0$. Desta forma, temos que $[[D]^h, x_2] = 0$, e assim, $[D]^h x_2 = p_{12}^h p_{22}^h p_{32}^h x_2 [D]^h$. Ainda, pelas relações

de Serre 7.2 temos que $[[x_2, x_3], x_3] = 0$, assim

$$[[D], x_3] = [[x_1, [x_2, x_3]], x_3] = [x_1, [[x_2, x_3], x_3]] = 0.$$

Portanto, temos que $[[D]^h, x_3] = 0$, e segue que $[D]^h x_3 = p_{13}^h p_{23}^h p_{33}^h x_3 [D]^h$.

Se $[u] = [E] = [[x_1, [x_2, x_3]], x_2]$, temos, pela Observação 2.5.5, que

$$[x_1, [E]] = \sum \alpha [D]^{n_1} [C]^{n_2} [B]^{n_3},$$

assim, temos duas possibilidades para que os graus coincidam em ambos os lados da igualdade, $n_1 = n_3 = 1$ e $n_2 = 0$ ou $n_1 = n_3 = 0$ e $n_2 = 1$. Portanto, segue que $[x_1, [E]] = \alpha_1 [D][B] + \alpha_2 [C]$. Aplicando novamente o colchete por $[E]$ e usando a Proposição 2.2.11 e a Observação 2.5.5, com devidas análises dos graus, vemos que

$$\begin{aligned} [[x_1, [E]], [E]] &= \alpha_1 [[D][B], [E]] + \alpha_2 [[C], [E]] \\ &= \alpha_1 ([D][[B], [E]] + p_{BE} [[D], [E]][B]) + \alpha_2 [[C], [E]] = 0. \end{aligned}$$

Assim, $[x_1, [E]^h] = 0$, e portanto, $x_1 [E]^h = p_{11}^h p_{12}^{2h} p_{13}^h [E]^h x_1$. Ainda, pela Observação 2.5.5, temos que $[[E], [F]] = [[E], x_2] = 0$, desta forma, $[[E]^h, x_2] = 0$, e segue que $[E]^h x_2 = p_{12}^h p_{22}^{2h} p_{32}^h x_2 [E]^h$. Novamente, pela mesma Observação já mencionada, ao analisarmos o grau dos elementos entre $[E]$ e $[I]$, vemos que $[[E], [I]] = [[E], x_3] = 0$, assim, segue que $[[E]^h, x_3] = 0$ e $[E]^h x_3 = p_{13}^h p_{23}^{2h} p_{33}^h x_3 [E]^h$.

Se $[u] = [F] = x_2$, pelas relações de Serre (7.2), temos que $[x_2, [x_2, [x_2, x_3]]] = 0$, assim $[x_2^h, x_3] = 0$, e segue que $x_2^h x_3 = p_{23}^h x_3 x_2^h$.

Se $[u] = [G] = [x_2, [x_2, x_3]]$, pelas relações de Serre temos que

$$[[x_1, x_2], x_2] = 0 = [x_2, [x_2, [x_2, x_3]]],$$

assim segue que $[x_1, [G]] = 0$ e $[x_2, [G]] = 0$, logo $[x_1, [G]^h] = 0$ e $[x_2, [G]^h] = 0$, portanto vale $x_1 [G]^h = p_{12}^{2h} p_{13}^h [G]^h x_1$ e $x_2 [G]^h = p_{22}^{2h} p_{23}^h [G]^h x_2$. Pela Observação 2.5.5, temos que $[[G], x_3] = \alpha [H]^2$, aplicando novamente o colchete por $[G]$ e usando a Proposição 2.2.11, segue que

$$[[G], [[G], x_3]] = \alpha [[G], [H]^2] = \alpha [[G], [H]][H] + \alpha p_{GH} [H][[G], [H]] = 0.$$

Assim, $[[G]^h, x_3] = 0$, e portanto $[G]^h x_3 = p_{23}^{2h} p_{33}^h x_3 [G]^h$.

Finalmente, se $[u] = [H] = [x_2, x_3]$, temos que $[x_1, [H]] = [D]$, aplicando novamente o colchete por $[H]$ e usando a Observação 2.5.5 com as devidas análises do grau, temos que $[[C], [H]] = 0$, assim $[x_1, [H]^h] = 0$, e $x_1 [H]^h = p_{12}^h p_{13}^h [H]^h x_1$. Ainda, temos que $[x_2, [H]] = [G]$, aplicando novamente o colchete por $[H]$ e usando a mesma Observação

anterior, segue que $[[G], [H]] = 0$, logo $[x_2, [H]^h] = 0$ e vale que $x_2[H]^h = p_{22}^h p_{23}^h [H]^h x_2$. Por fim, pela Observação 2.5.5, temos que $[[H], x_3] = 0$, então $[[H]^h, x_3] = 0$, e segue que $[H]^h x_3 = p_{23}^h p_{33}^h x_3 [H]^h$. ■

A partir do resultado mostrado acima e pela Proposição 2.7.3, temos que o conjunto $J = \ker(\varphi)$ será gerado por elementos skew-centrais $[u]^h$ de $U_q^+(C_3)$. E ainda, pelo [3, Theorem 4.15] temos que I , a subálgebra de $U_q^+(C_3)$ gerada pelos elementos skew-centrais, é uma subálgebra de Hopf de $U_q^+(C_3)$.

Teorema 7.4.2. *O posto combinatório $\kappa(u_q^+(C_3)) \leq 3$.*

Demonstração. Realizando o processo análogo ao que foi feito na Proposição 6.4.2 para $U_q^+(C_3)$, temos que se t for ímpar, então os elementos $[u]^h \in J_n$, para $[u]$ com grau menor que 2^n . Mostraremos, agora, que se t for par vale o mesmo resultado.

Para $n = 1$, $[u] \in \mathcal{C}_3$ irá possuir grau total menor que $2^1 = 2$, isto é, seu grau total será igual a 1. Então, pelo Teorema 7.3.1, $[u]^h$ será um skew-primitivo de J , logo pertencerá a J_1 .

Note que, pela Observação 7.1.4, como t é par, a altura dos elementos de \mathcal{B}_3 será $h = t$ para $[u] = \{[A], [B], [D], [E], [F], [H]\}$ e $h = \frac{t}{2}$ para $[u] = \{[C], [G], [I]\}$. Ainda, como vimos no Teorema 6.4.3, se $[u] \in U_q^+(C_3)$ tem grau total menor que 2^n e altura $h = \frac{t}{2}$, então $[u]^h \in J_n$. Desta forma, precisaremos analisar apenas os elementos que possuem altura $h = t$.

Vimos nas equações (7.8), (7.9), (7.10), (7.11), (7.12) e (7.13), que o coproduto dos elementos $[u]^h \in U_q^+(C_3)$, onde $[u] \in \mathcal{C}_3$ são da seguinte forma:

$$\Delta([u]^h) = [u]^h \otimes 1 + g_{[u]}^h \otimes [u]^h + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j,$$

no qual o grau de y_j mais o grau de z_j é igual ao grau de $[u]^h$, para todo índice j fixado. Portanto, a partir dessas informações, verifiquemos os casos a seguir.

Para $n = 2$, $[u] \in \mathcal{C}_3$ irá possuir grau total menor que $2^2 = 4$, isto é, seu grau total será igual a 2 ou 3. Se $[u]$ possuir grau total igual a 2 e altura $h = t$, a soma dos graus totais de y_j com z_j será igual ao grau total de $[u]^t$, que será igual a $2t$, assim temos a seguinte possibilidade não nula em $\frac{J}{J_1}$:

- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1, v_2 têm grau total 2.

Note que, não há elementos de grau total igual a 2 tal que sua altura é $h = \frac{t}{2}$, assim este caso não será possível. Portanto, para todos os casos possíveis, temos que os termos dependentes de j são zero em $\frac{J}{J_1}$, ou seja, $[u]^t \in J_2$ se $[u]$ tem grau total igual a 2.

Se $[u]$ possuir grau total igual a 3 e altura $h = t$, então a única possibilidade para $[u]$ será $[u] = [D]$. Assim, segue que a soma dos graus e graus totais de y_j com z_j será igual

ao grau e grau total de $[D]^t$, que será igual a (t, t, t) e $3t$ respectivamente, assim temos as seguintes possibilidades:

- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^t$, no qual v_1, v_2 têm grau total 2.
- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}[v_3]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1, v_2, v_3 têm grau total 2.
- $y_j = [v_1]^{\frac{t}{2}}, z_j = [v_2]^{\frac{t}{2}}$, no qual v_1, v_2 têm grau total 3.

Note que, o primeiro e segundo caso, como não existem elementos de grau total igual a 2 com altura $\frac{t}{2}$, não serão possíveis. Para a terceira situação temos que $[v_1] = [v_2] = [G]$ e assim o grau de y_j mais o grau de z_j é $(0, 2t, t)$ que é diferente do grau de $[D]^t$.

Portanto, como as únicas situações em que os termos dependentes de j não se anulavam não são possíveis, temos que todos os termos dependentes de j são zero em $\frac{J}{J_1}$, ou seja, $[u]^t \in J_2$ se $[u]$ tem grau total igual a 3. Desta forma, se $[u]$ tem grau total menor que $2^2 = 4$, então $[u]^h \in J_2$.

Para $n = 3$, $[u] \in \mathcal{C}_3$ irá possuir grau total menor que $2^3 = 8$, isto é, seu grau total será igual a 4, 5, 6 ou 7. Desta forma, teremos apenas dois elementos para avaliarmos, $[E]$ que possui grau total igual a 4 e altura igual a t , e $[C]$ que possui grau total igual a 5 e altura igual a $\frac{t}{2}$. Se $[u]$ possuir grau total igual a 4 e altura $h = t$, temos que $[u] = [E]$, e assim a soma dos graus totais de y_j com z_j será igual ao grau total de $[u]^t$, que será igual a $4t$. Para que y_j e z_j sejam diferentes de zero em $\frac{J}{J_2}$, eles devem depender de elementos de grau total maior ou igual a 4, porém, não será possível, pois há apenas um elemento de grau total igual a 4 que será o $[E]$, e como sua altura é t , não há como fazermos com que y_j e z_j dependam apenas dele, já que I é uma subálgebra de Hopf. E ainda, não há como decompor o grau total de $[E]^t$ no único elemento de grau total igual a 5, pois para isso teríamos $[C]^{\frac{kt}{2}}$ tendo grau total igual $4t$, ou seja, $\frac{5kt}{2} = 4t$, e assim k não seria um número inteiro. Logo, todos os elementos dependentes de j na soma são nulos em $\frac{J}{J_2}$, e assim $[E]^t \in J_3$.

Por fim, se $[u]$ possuir grau total igual a 5 teremos apenas o elemento $[C]$ que possui altura $\frac{t}{2}$, e como já vimos, temos que $[C]^{\frac{t}{2}} \in J_3$.

Desta maneira, temos que se $[u] \in U_q^+(C_3)$ tem grau total menor que 2^n , então $[u]^{h_u} \in J_n$. E assim, como o elemento de maior grau de \mathcal{C}_3 tem grau $5 < 2^3$, os elementos $[u]^h$ estão no máximo em J_3 , logo o posto combinatório $\kappa(u_q^+(C_3)) \leq 3$. ■

Teorema 7.4.3. *O posto combinatório $\kappa(u_q^+(C_3)) = 3$.*

Demonstração. Realizando um processo análogo ao que foi feito para \mathcal{A}_2 no Corolário 3.4.3 para \mathcal{C}_3 , mostramos que os únicos elementos $[u]^h \in U_q^+(C_3)$, tal que $[u] \in \mathcal{C}_3$, que pertencem a J_1 são os elementos nos quais $[u]$ possui grau total igual a 1, desta forma os elementos de grau total maior ou igual a $2^1 = 2$ estão no mínimo em J_2 . Logo, $2 \leq \kappa(u_q^+(C_3)) \leq 3$.

Portanto, pelo Teorema anterior, os elementos $[B]^t, [D]^t, [G]^{\frac{t}{2}}$ e $[H]^t \in J_2$. Ainda, como a altura de $[C]$ é igual a $\frac{t}{2}$ e seu grau total é 5, temos que, no coproduto de $[u]^h = [C]^{\frac{t}{2}}$, a soma do grau total de y_j com o grau total de z_j é igual a $\frac{5t}{2}$. Para que y_j e z_j não sejam nulos em $\frac{J}{J_1}$, precisaremos que ambos dependam de elementos $[w]^h$, tal que $[w] \in \mathcal{C}_3$ tenha grau total maior ou igual a 2. Suponha sem perda de generalidade que y_j possua em sua fatoração um elemento $[w]^h$, tal que $[w]$ possui grau total igual a 2, então, como todo elemento de \mathcal{C}_3 de grau total igual a 2 tem altura t , teremos que o grau total de y_j será no mínimo $2t$, e desta maneira, segue que o grau total de z_j será no máximo $\frac{t}{2}$. Desse modo, $z_j = [v]^{\frac{t}{2}}$, no qual v possui grau total 1, o que implica que este termo será nulo em $\frac{J}{J_1}$. Observe, que se y_j possuir um fator com o grau total 3, teremos duas possibilidades de elementos, um com altura t , e neste caso teremos que z_j terá grau total menor que 2, o que também conclui que este termo será nulo em $\frac{J}{J_1}$, e outro com altura $\frac{t}{2}$. Suponha que y_j tenha como fator o elemento de grau total 3 e altura $\frac{t}{2}$, então teremos que o grau total de y_j será no mínimo $\frac{3t}{2}$, e assim, como não há elementos de grau total igual a 2 com altura $h = \frac{t}{2}$, segue que $z_j \in \{x_1^t, x_2^t, x_3^t\}$. Para $[w]$ com grau total igual a 4, não será possível que $[w]^h$ seja um fator de y_j ou z_j , uma vez que o único elemento que possui grau total igual a 4 possui altura t e assim $[w]^h$ possui grau total $4t$ que é maior que o grau total de $[C]^{\frac{t}{2}}$. Claramente, para o caso em que $[w]$ possui grau total igual 5 não será possível que y_j e z_j possuam juntamente fatores desta forma, pois a menor altura dos elementos de \mathcal{C}_3 é $\frac{t}{2}$, e assim se um possui esse elemento como fator, o outro terá grau total menor que 2. Logo, $[C]^{\frac{t}{2}} \in J_2$.

Por fim, temos que $[E]^t \notin J_2$. De fato, pelo Teorema 7.2.1 e pela multiplicidade de Δ , temos que $\Delta([E]^t) = [E]^t \otimes 1 + g_{1232}^t \otimes [E]^t + \alpha[B]^t g_{23}^t \otimes [H]^t + \sum_j \gamma y_j g_z \otimes z_j$, no qual $\alpha = (-p_{32}\beta_1)^t (p_{21}p_{22}p_{31}p_{32})^{\frac{t(t-1)}{2}}$.

Observe que, $\alpha[B]^t g_{23}^t \otimes [H]^t$ nunca irá se anular com outros termos na soma, pois no coproduto do elemento $[E]$, o termo que possui o mesmo grau de $[H]$ no lado direito do tensor é $\beta_1\beta_2[B]g_{23} \otimes x_3x_2$, mas como x_3x_2 começa com a variável x_3 , não há como ter outro termo com $[H]^t$ do lado direito do tensor. Portanto, como $[B]^t$ e $[H]^t$ são não nulos em $\frac{J}{J_1}$, segue que $[E]^t \notin J_2$, e assim $[E]^{\frac{t}{2}} \in J_3$. Assim sendo, concluímos que o posto combinatório $\kappa(u_q^+(B_3)) = 3$ e

$$\begin{aligned} J_1 &= \left\langle x_1^t, x_2^t, x_3^{\frac{t}{2}} \right\rangle, \\ J_2 &= \left\langle x_1^t, [B]^t, [C]^{\frac{t}{2}}, [D]^t, x_2^t, [G]^{\frac{t}{2}}, [H]^t, x_3^{\frac{t}{2}} \right\rangle, \\ J_3 &= \left\langle x_1^t, [B]^t, [C]^{\frac{t}{2}}, [D]^t, [E]^t, x_2^t, [G]^{\frac{t}{2}}, [H]^t, x_3^{\frac{t}{2}} \right\rangle = J. \end{aligned}$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] I. Angiono. *Nichols algebras with standard braiding*. *Algebra & Number Theory*, 3(1):35–106, 2009. 14, 23
- [2] I. Angiono. *A presentation by generators and relations of Nichols algebras of diagonal type and convex orders on root systems*. *Journal of the European Mathematical Society*, 17(10):2643–2671, 2015. 14, 23
- [3] I. Angiono. *Distinguished pre-Nichols algebras*. *Transformation groups*, 21(1):1–33, 2016. 32, 39, 46, 57, 71
- [4] S. Dascalescu, C. Nastasescu, and S. Raianu. *Hopf algebras: an introduction*. CRC Press, 2000. 1, 3, 9, 12
- [5] V. Dylewski. *On the combinatorial rank of quantum groups*. *Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre*, 2022. 1, 14, 30
- [6] V. Dylewski, B. Pogorelsky, and C. Renz. *On the combinatorial rank of the quantum groups of type G_2* , *Journal of Algebra and Its Applications*, 20(11):2150208, 2021. 1
- [7] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.2*, 2022. 52, 67
- [8] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2012. 24
- [9] V. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge university press, 1990. 24
- [10] V. Kharchenko. *A combinatorial approach to the quantification of Lie algebras*. *Pacific Journal of Mathematics*, 203(1):191–233, 2002. 14, 21, 22
- [11] V. K. Kharchenko. *An algebra of skew primitive elements*. *Algebra and Logic*, 37(2):101–126, 1998. 24
- [12] V. K. Kharchenko. *A quantum analog of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem*. *Algebra and Logic*, 38(4):259–276, 1999. 14, 18, 20, 22

- [13] V. K. Kharchenko. *Skew primitive elements in Hopf algebras and related identities. Journal of Algebra*, 238(2):534–559, 2001. 14, 17
- [14] V. K. Kharchenko. *Quantum Lie theory. Universidad Nacional Autónoma de México*, 2015. 1, 3, 14, 25
- [15] V. K. Kharchenko and A. A. Alvarez. *On the combinatorial rank of Hopf algebras. Contemporary Mathematics*, 376:299–308, 2005. 1
- [16] V. K. Kharchenko and M. Díaz Sosa. *Computing of the Combinatorial Rank of $u_q(SO_{2n+1})$. Communications in Algebra*, 39:4705–4718, 2011. 1
- [17] V. K. Kharchenko and M. Díaz Sosa. *Combinatorial rank of $u_q(SO_{2n})$. Journal of Algebra*, 448:48–73, 2016. 1
- [18] A. I. Shirshov. *On free Lie rings. Mat. Sb*, 45(87):113–122, 1958. 14, 19