

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

Marília Gabriela Elias da Silva

**CALIBRAGEM DO MODELO GENERALIZADO
BLACK-KARASINSKI PARA TÍTULOS DE DESCONTO**

Porto Alegre
2010

Marília Gabriela Elias da Silva

**CALIBRAGEM DO MODELO GENERALIZADO
BLACK-KARASINSKI PARA TÍTULOS DE DESCONTO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Tourrucão

**Porto Alegre
2010**

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
Responsável: Biblioteca Gládis W. do Amaral, Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS

S586c

Silva, Marília Gabriela Elias da

Calibragem do modelo generalizado Black-Karasinski para títulos de desconto / Marília Gabriela Elias da Silva. – Porto Alegre, 2010.
57 f. : il.

Orientador: Fabrício Tourrucôo.

Ênfase em Economia Aplicada.

Dissertação (Mestrado em Economia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre, 2010.

1. Modelo econométrico : Taxa de juros : Calibragem. I. Tourrucôo, Fabrício. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Ciências Econômicas. Programa de Pós-Graduação em Economia. III. Título.

CDU 336.748

Marília Gabriela Elias da Silva

**CALIBRAGEM DO MODELO GENERALIZADO
BLACK-KARASINSKI PARA TÍTULOS DE DESCONTO**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Aprovada em: Porto Alegre, 16 de Abril de 2010

Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini
Instituto de Ensino e Pesquisa (INSPER-SP)

Prof. Dr. Pedro Valls
Fundação Getúlio Vargas (EESP)

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus pela vida concedida a mim. Em sequência agradeço aos meus pais Jorge Elias da Silva e Helenice Furtado da Silva, pela dedicação de uma vida inteira, agradeço-os por terem vivido em prol da minha felicidade, demonstrando um amor incondicional o qual sempre tive consciência e reciprocidade, mas que gostaria de aqui explicitar na forma de palavras a gratidão que sinto por estas pessoas que fizeram minha vida maravilhosa.

Gostaria de agradecer e reverenciar, em especial, ao prof. Dr. Fabrício Tourrucô sem o qual este trabalho não seria realizado, este profissional que como orientador deste trabalho me ofereceu muito mais do que suas supostas obrigações, pois, além de conduzir-me academicamente me ensinou, por meio de seu exemplo, a agir como um impecável profissional. Ainda agradecendo ao professor Fabricio Tourrucô, gostaria de explicitar minha gratidão pela disponibilidade, paciência e compreensão demonstradas em todas as inúmeras vezes que compareci em sua sala, pelos inúmeros emails respondidos prontamente, pela solicitude e bom humor na resolução de qualquer eventual problema, mesmo que estes surgissem em meio a suas férias. É por esses motivos que agradeço pela impecável orientação e pelo bom exemplo que me foi concedido por este profissional.

Agradeço a todo corpo docente do PPGE, pela contribuição direta ao meu crescimento acadêmico por meio das disciplinas ministradas e destaco os professores Fabricio Tourrucô, Marcelo Portugal, Sabino da Silva Porto Júnior, Giacomo Balbinotto Neto, Cleber Bisognin e Ronald Otto Hillbrecht. Agradeço em especial ao professor Marcelo Portugal pelo apoio a continuidade da vida acadêmica. Gostaria de agradecer a todas as funcionárias da secretaria, que atenderam, sempre, prontamente as minhas solicitações, portanto, agradeço a Iara, Raquel, Aline, Cláudia e Maria Delourdes.

Sou grata ao governo brasileiro que financiou esses 24 meses de estudo por meio do programa REUNI (Programa de Apoio a Planos de Reestruturação e Expansão das Universidades Federais) com o financiamento oferecido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

Agradeço ainda a todos os meus irmãos Jorge Luiz Elias da Silva, Vânia Lucia Elias da Silva, Maria das Graças de Mattos e Aline Lima de Souza pelo apoio nesta fase da minha vida, assim como em todas as outras. Em especial, sou grata ao meu irmão Jorge Luiz por ser, acredito eu, o maior entusiasta com minhas escolhas. Agradeço a minha cunhada Márcia Rodrigues da Silva pelo carinho sem tamanho e pelo apoio tanto na execução deste trabalho quanto em qualquer outra escolha que eu tenha feito. Agradeço aos irmãos da minha cunhada Eduardo Rodrigues da Silva e sua esposa Julia, David Rodrigues da Silva e Paulo César Rodrigues da Silva por terem me ajudado dos mais diversos modos. Não posso deixar de agradecer ao amigo e também grande incentivador Armando Tadeu Thomaz Sobrino, o qual sempre se mostrou torcedor do meu progresso acadêmico e admirador das minhas escolhas.

Agradeço ao mais antigo amigo Maurício Gonçalves Neto, que além da sua amizade abriu as portas de sua casa todas as vezes que eu precisei, possibilitando um ambiente propício ao estudo e execução deste trabalho. Agradeço a amiga Julia Rocha Araújo por ser a personificação mais fiel de uma verdadeira amizade. Agradeço ao querido amigo Luiz Gabriel Negreiros Passos pelo carinho, pelo apoio cotidiano e pelo incentivo a realização deste trabalho. Sou intensamente grata a amiga Marina Sequetto Pereira por ter transformado os últimos meses dedicados a esses trabalho em uma maravilhosa e memorável época. Agradeço ao amigo Marcelo de Carvalho Griebeler pelo apoio durante a execução desta dissertação, por ter feito um importante questionamento, portanto, uma

grande contribuição a este trabalho, pela paciência em me ouvir falar sobre o estudo aqui realizado, pelas palavras de incentivo e principalmente pelo exemplo de responsabilidade, compromisso e dedicação. Agradeço também aos amigos Gabriel Vital, Aziz Calzolaio, Róber Iturriet e Ivan Colangelo Salomão a este último, declaro uma enorme gratidão. Por fim, agradeço a todos os colegas do ppge que de alguma forma me auxiliaram e me incentivaram, em especial cito Fabio Caetano, Cassandro Mendes, Rivaldo Alves de Mesquita e Cassia Favoretto.

A todos muito obrigada!

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo apresentar um caso específico de Interpolação da Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) com base no processo estocástico que determina a taxa de juros, o qual é aqui denominado por interpolação estrutural. Este método estrutural permite a calibração das curvas de desconto e de rendimento, por meio do ajuste dos parâmetros do modelo generalizado Black-Karasinski sob a hipótese de não arbitragem. São apresentados três métodos distintos de calibragem. O primeiro deles é constituído pela solução numérica do sistema de equações que satisfaz a hipótese de não arbitragem. O segundo método remete-se a inversão dos parâmetros do modelo de forma exata, a partir da definição da curva de rendimento. O terceiro e último método apresenta uma solução aproximada a partir de um problema reduzido. Mostramos que os métodos são equivalentes quando se utiliza a mesma definição para a curva de rendimentos. A importância deste resultado reside no desenvolvimento de algoritmos de fácil implementação computacional e na possibilidade de usar esse método de interpolação com base em um modelo de determinação da taxa de juros em trabalhos empíricos de previsão e determinação da estrutura a termo da taxa de juros.

Palavras-chave: Modelo generalizado Black-Karasinski; Estrutura a termo da taxa de juros; Calibragem

Abstract

This paper aims to present a special case of interpolation of the Term Structure of Interest Rates based on the stochastic process that determines the interest rate, which is here called by structural interpolation. This structural method allows the calibration discounts and yields curves adjusted through the parameters of the generalized Black-Karasinski model under the assumption of no arbitrage. Three distinct methods of calibration are presented. The first consists of the numerical solution of the system of equations that satisfies the hypothesis of no arbitrage. The second method refers to the inversion of the parameters model, from the definition of the yield curve. The third and last method presents an approximate solution from a smaller problem. We show that the three methods are equivalent when using the same definition for the yield curve. The importance of this result lies in the development of algorithms for easy computational implementation and the possibility of using this interpolation method based on a model for determining the rate of interest for empirical prediction and determination of the term structure of interest rates.

Keywords: Generalized model Black-Karasinski; the term structure of interest rates; Calibration.

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Objetivo geral	12
1.1	Objetivos específicos	12
2	Modelos de estrutura a termo da taxa de juros	14
2.1	Modelos de equilíbrio	15
2.1.1	Modelo de Merton (1973)	15
2.1.2	Modelo de Vasicek (1977)	15
2.1.3	Modelo Cox, Ingersoll e Ross - CIR (1985)	16
2.2	Modelos de não-arbitragem	16
2.2.1	Modelo Ho Lee (1986)	16
2.2.2	Modelo de Hull e White (1990)	16
2.2.3	Black-karasinski	17
3	Metodologia	19
4	Reprodução da curva de desconto e rendimento observada por meio da condição de não arbitragem	27
4.1	Calibragem para dados disponíveis em 20 de Maio de 2009	28
4.2	Calibragem para dados disponíveis em 20 de Julho de 2009	36
4.3	Reprodução da curva de desconto observada por meio da minimização da norma da segunda derivada da curva de rendimentos	39
5	Uma abordagem exata	41
5.1	Caso geral	41
5.2	Caso específico, $\nu = 1$	43
6	Calibragem aproximada para $\nu \neq 1$, caso contínuo	47
7	Considerações finais	50
	Referências	52
	Anexo A - determinação dos parametros	55
	Anexo B - Taxa spot	56

1 Introdução

A estrutura a termo da taxa de juros pode ser definida pela coleção de taxas de juros indexadas em duas dimensões, maturidade e tempo. O primeiro índice mostra a relação entre taxas com diferentes maturidades para contratos de uma mesma natureza em determinado dia. O segundo índice revela a evolução das taxas no tempo de contratos com mesmas maturidades. Modelar a estrutura a termo é fundamental, uma vez que as instituições financeiras necessitam controlar a sua exposição ao risco de oscilação de taxas de juros através do balanceamento de suas posições em títulos de dívida pública ou contratos futuros, visto que estes possuem valor atrelado às taxas de juros, e as estratégias de imunização de portfólio necessitam de medidas preditivas dos movimentos na estrutura a termo das taxas de juros (Laurini e Hotta, 2007).

Os modelos de estrutura a termo da taxa de juros têm apresentado um importante avanço nos últimos 30 anos conforme ressaltado por Diebold e Li (2006). Segundo esses autores pode-se destacar a existência de três classes de modelos. Modelos de não-arbitragem descritos especialmente por Hull-White (1990) e Heath et al. (1992), tais modelos implicam na condição de não arbitragem entre as taxas correntes da curva de rendimentos. Modelos de equilíbrio representados principalmente pelos modelos desenvolvidos por Vasicek (1977), Cox, Ingersoll e Ross (1985) e Duffie e Kan (1996).

Existem ainda modelos estatísticos que são compostos por modelos de componentes principais de fatores e por modelos de interpolação. Esta classe de modelos inclui o modelo de análise de fator do Litterman e Scheinkman (1991), modelos de splines cúbicas e quadráticas de McCulloch (1971, 1975), spline exponencial de Vasicek e Fong (1982) e suave de Fisher et al. (1995) e modelos paramétricos de Nelson-Siegel (1987), Svesson (1994), Bliss (1997a), Björk e Christensen (1999) e Almeida, Duarte e Fernandes (1998), Diebold e Li (2006), Christenssen, Diebold e Redebush (2008) e Almeida e Vicente (2008).

A literatura referente a estrutura a termo da taxa de juros apresenta diversas maneiras de determinar e/ou prever o comportamento da ETTJ. O modelo utilizado no presente trabalho, segue a linha dos trabalhos realizados por Merton (1973), Vasicek (1977), Ho e Lee (1986) Hull e White (1990) e Black karasinski (1991), nesse sentido, é apresentado o modelo generalizado Black-Karasinski, desenvolvido em Turrucão (2007), no qual a taxa de juros de curto prazo é determinada por um processo estocástico de reversão a média. O caráter generalizado do modelo remete-se diretamente ao fato dele permitir que a taxa de juros seja representada por diversos tipos de funções, podendo, assim, assumir tanto valores positivos quanto negativos, conforme será melhor explicitado no decorrer dessa introdução e na metodologia deste trabalho.

Uma vez que a estrutura a termo não apresenta valores conhecidos para todos os vencimentos, o conjunto de trabalhos que compõem essa literatura permite o uso de métodos de interpolação com a finalidade de tornar tais séries completas para todos as maturidades. Este procedimento tem grande importância para o desenvolvimento de previsões da ETTJ. O trabalho desenvolvido por McCulloch (1971, 1975) faz uma interpolação da função desconto por meio de splines cúbicas e quadráticas, enquanto Vasicek e Fong (1982) viabilizam ajustes mais suaves a curva de desconto ao lançar mão de splines exponenciais como método de interpolação. Todavia, esses métodos existentes na literatura não apresentam relação com a modelagem da taxa de juros, eles são, na verdade, métodos de interpolação que podem ser aplicados a quaisquer séries de dados. Para o melhor desenvolvimento deste trabalho denominar-se-á esta forma de interpolação

por método não estrutural. Isto é, uma interpolação que não está relacionada com uma estrutura implicada por um modelo de taxa de juros.

A fim de apresentar um método de interpolação que esteja de acordo com uma estrutura implicada pelo modelo, esta dissertação acrescenta a literatura um caso específico de interpolação com base no processo estocástico que determina a taxa de juros de curto prazo, o qual será denominado por interpolação estrutural. O método estrutural aqui desenvolvido permitirá a calibragem das curvas de desconto e de rendimento, posto que tais curvas serão ajustadas a partir da estrutura implicada pelo modelo. Neste sentido, a calibragem consistirá em ajustar os parâmetros do modelo generalizado Black-Karasinski (*gBK*) para que este possa refletir os dados observáveis de forma a satisfazer a hipótese de não arbitragem. A calibragem decorrente do método estrutural torna possível a determinação do comportamento das curvas de desconto e rendimento entre os pontos conhecidos a partir da estrutura implicada pelo modelo de taxa de juros de curto prazo.

Neste contexto, a investigação aqui proposta reside em empregar métodos de otimização numérica, analíticos e de aproximação à resolução de problemas de calibragem.

O modelo utilizado neste trabalho é o modelo generalizado Black-Karasinski apresentado por Tourrucôo (2007). Neste, a taxa de juros de curto prazo é uma função explícita g da variável de estado X^1 .

$$r = g(X) := r_0 (1 + vX)^{\frac{1}{v}}$$

onde a variável de estado $X(T)$ segue o seguinte processo estocástico

$$dX = [\theta(t) - k(t)X] dt + \varepsilon \tilde{\alpha} dW$$

e r_0 é o valor atual da taxa de juros de curto prazo e $v = 1/q$ com $q \in N$. É o valor de v que determina o formato da função $r = g(X)$ e permite que a taxa de juros assuma valores negativos para alguns valores de v , em compensação, a simplicidade do modelo tem como fator positivo a obtenção de fórmulas exatas. O modelo *gBK* pode ser aplicado a qualquer valor de v . Este trabalho assumirá três casos representativos, quando $v = 1$ tem-se o caso Hull-White (*HW*), quando $v = 1/2$, o caso Cox, Ingersoll e Ross (*CIR*) e quando $v \rightarrow 0$ ($q \rightarrow \infty$), $r = r_0 e^X$, defini-se o caso BK.

A escolha desses três casos, justifica-se pelas diferentes características analíticas apresentada por cada um deles. Para $v = 1$ a taxa de juros é uma função linear da variável de estado, permitindo dessa forma que a taxa de juros assuma valores negativos. Se $v = 1/2$ a taxa de juros é uma função quadrática da variável de estado $X(T)$ podendo associar dois valores distintos de $X(T)$ a um mesmo valor de r , este fato evidencia o comportamento não monótono dessa função, mas este caso não permite que a taxa de juros assuma valores menores que zero. Com $v \rightarrow 0$ ($q \rightarrow \infty$), $r = r_0 e^X$ a taxa de juros é, portanto, uma função exponencial de $X(T)$ não permitindo que valores negativos sejam atingidos por r , além de implicar um comportamento monótono a taxa de juros.

Dessa forma, este trabalho propõe calibrar as curvas de desconto e de rendimento com o auxílio do modelo generalizado Black-Karasinski para os casos *CIR*, *HW* e *BK*. Para tal, serão utilizados procedimentos numéricos por meio do uso de dados observados, para maturidades $\{T_i\}_{i=1}^N$, que permitem a obtenção dos parâmetros $\theta(t)$ e $k(t)$, os quais possibilitam o ajuste deste a curva de desconto observada. É importante destacar que em decorrência da hipótese de não arbitragem o modelo se ajusta perfeitamente aos dados

¹A variável de estado $X(T)$ segue o processo Ornstein-Uhlenbeck.

observados para o tempo $t = 0$, isto é, ele reproduz as curvas observadas em $t = 0$.

O modelo *gBK* considera $Z(t, y, T)$ como sendo o valor de um título de desconto na data t , com vencimento em T e y resulta de uma mudança de variável dada por uma relação que reflete o desvio da variável de estado X em relação \bar{X} , onde $\lambda(t)y = X(T) - \bar{X}(T)$ ². Para este modelo, $Z(t, y, T)$ é função dos parâmetros $\theta(t)$, $k(t)$ e $\alpha(t)$, que, respectivamente, permitem a satisfação da condição de não arbitragem, determinam a velocidade de reversão a média e controlam a variância da variável de estado X . A relação existente entre esses parâmetros e a curva de desconto observada pode ser vista pela seguinte relação, na qual a taxa de juros é determinada por uma parte determinística $D(T)/D(t)$ e outra estocástica representada por $e^{-\Delta\phi(t,y,T)}$

$$Z(t, y, T) = \frac{D(T)}{D(t)} e^{-\Delta\phi(t,y,T)} \quad (1)$$

onde $D(\cdot)$ representa o preço unitário de um título de desconto e $e^{-\Delta\phi(t,y,T)}$ pode ser interpretado como uma correção estocástica do modelo puramente determinístico³.

Os parâmetros que permitem a calibração aqui proposta resultam da definição de curva de rendimento e da hipótese de não arbitragem que implica $Z(t, y, T) = D(T)$, isto é, o modelo reproduz os preços observados garantindo a identidade entre a curva de desconto observada e a ajustada. A definição de curva de rendimento adotada neste trabalho é uma função logarítmica da curva de desconto, conforme segue

$$\hat{Y} := \frac{-\log Z(0, T, 0)}{T} \quad (2)$$

Uma vez que $Z = e^{-\int_t^T r(s)ds}$, então

$$\hat{Y} = \frac{1}{T} \int_t^T r(s) ds$$

e a curva de rendimento é definida como a média para cada período considerado, vale ressaltar que para $T = t$ tem-se $Y = 0$, o que é intuitivo pois não há rendimento no período inicial.

A curva de rendimento, também é comumente definida por meio da seguinte função contínua

$$\hat{Y} = \frac{-\partial \log D(0, T, 0)}{\partial T}$$

essa outra forma de definição implica $Y = r(s)$ e a curva de rendimento passa ser definida pela taxa de juros. Vale ressaltar que, independentemente da definição de rendimento assumida, a condição de não arbitragem é reescrita na forma $\hat{Y}(0, 0, T) = Y(T)$.

A partir do modelo *gBK*, da hipótese de não arbitragem e das definições para as curvas de rendimento, este trabalho apresenta três possíveis formas de calibração por meio da determinação dos parâmetros do modelo. A primeira forma consiste na solução numérica da condição de não arbitragem para cada $\{T_i\}_{i=1}^N$, tomando k e α constantes e exógenos, assumindo valores, respectivamente, iguais a 0.6 e 0.35. $\theta(t)$ é uma função que assume valores constante por intervalo, ela é endógena ao modelo, pois o valor de $\theta(t)$

² $\lambda(t)$ é explicitado na página 21 deste trabalho e y é a medida do desvio ocorrido entre a variável de estado e sua média

³Esta relação é que permite a calibração via parâmetros do modelo. Mais detalhes podem ser vistos na página 27 deste trabalho.

é determinado pela solução do sistema $\widehat{Y}(0, 0, T) = Y(T)$. Dessa forma, a calibragem da curva de desconto e de rendimento observada permite que os parâmetros do modelo sejam encontrados a partir da satisfação da condição de não arbitragem, que por sua vez implica no ajuste do modelo aos dados observados⁴.

Conseguir fazer esse ajuste sem o uso de métodos numéricos traz vantagens computacionais principalmente para aqueles casos nos quais os modelos precisam ser calibrados várias vezes. Nesse sentido, a segunda forma de calibração apresentada por este trabalho constitui um método alternativo ao método estritamente numérico. A partir da definição contínua de curva de rendimento e mantendo k e α constantes será possível determinar de forma analítica os parâmetros $\theta(t)$ para quaisquer valores de ν . Entre os casos *HW*, *CIR* e *BK*, o primeiro é o que apresenta mais fácil tratamento analítico o que permitirá, para este caso específico, a realização da inversão do parâmetro $\theta(t)$ a partir da definição discreta (2) da curva de rendimentos.

Uma segunda alternativa ao método numérico, que caracteriza a terceira forma de calibração apresentada, é a solução aproximada para a calibragem do caso geral ($\nu \neq 1$). O método de aproximação dar-se-á a partir da solução encontrada para o modelo *HW*, onde $\nu = 1$. Este caso será considerado o problema reduzido, visto que é possível determinar os parâmetros desse modelo sem o uso de métodos numéricos. Uma vez encontrada a solução para o caso $\nu = 1$ são realizadas correções para os casos gerais ($\nu \neq 1$) a partir da solução do modelo *HW*. Para um melhor entendimento pode-se considerar $\xi = 1 - \nu$, quando $\nu = 1 \Rightarrow \xi = 0$ e, portanto, o modelo *HW* é considerado o problema reduzido onde $\xi = 0$. Os parâmetros desse modelo podem ser expandidos por meio de uma expansão regular para os casos em que $\nu \neq 1$.

Com $\nu \neq 1$, $\xi \ll 1$ os resultados aproximados são obtidos a partir do caso específico *HW*. Formalmente pode-se entender que supondo um parâmetro θ resultando do caso em que $\xi = 0$, pode-se produzir soluções aproximadas para os casos em que $\nu \neq 1$ por meio de uma expansão em torno do θ cuja solução é dada na forma $\theta = \delta_0(\xi)\theta_0 + \delta_1(\xi)\theta_1 + \dots$, este método é conhecido como método das escalas interminadas, onde $\delta_0(\xi) \gg \delta_1(\xi) \gg \delta_2(\xi) \gg \dots$, que permite obter o parâmetro θ aproximado via sucessivas correções e $\delta_i(\xi) \forall i \neq 0$ é uma função de ξ .⁵

1.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é resolver problemas associados à calibragem do modelo generalizado de Black-karasinski para títulos de desconto.

1.1 Objetivos específicos

- Calibrar a curva de juros observada para casos de volatilidade determinística,
- Analisar a possibilidade de calibragem que dispense a utilização de algoritmos de otimização numérica para casos gerais e para o caso especial Hull-White.
- Estudar alternativas aproximadas (via métodos perturbativos) para a calibragem, para o caso geral.

⁴O método proposto para o cálculo dos parâmetros κ e α , encontra-se no anexo 1 desse trabalho.

⁵Maiores detalhes sobre o método de aproximação encontram-se na página 24 deste trabalho.

O presente trabalho está dividido em seis capítulos, sendo esta introdução o primeiro deles. O segundo apresenta uma breve revisão literária sobre modelos de equilíbrio e de não arbitragem, cujo objetivo é apresentar a forma de determinação da taxa de juros para os diferentes autores apontados. O terceiro capítulo traz a metodologia utilizada no desenvolvimento deste trabalho. O quarto capítulo apresenta os resultados por meio do uso de métodos numéricos. O quinto explicita a solução analítica para o caso geral com o auxílio da definição contínua de curva de rendimento e para o caso específico HW por meio da definição discreta. O sexto capítulo apresenta os resultados para o método de aproximação e, por último, a conclusão do trabalho, na qual são sugeridos alguns trabalhos futuros provenientes da pesquisa aqui realizada.

2 Modelos de estrutura a termo da taxa de juros

Esta seção tem como principal objetivo apresentar os modelos de estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ): modelos não paramétricos de equilíbrio e de não arbitragem e modelos paramétricos. Viera Neto (1999) classifica os modelos não paramétricos de estrutura a termo em duas abordagens distintas: abordagem direta e abordagem indireta. O presente trabalho utiliza somente modelos pertencentes a última. Na abordagem direta o processo estocástico dos preços dos títulos é especificado diretamente, pois não deriva da taxa de juros de curto prazo ou da relação de preferência dos agentes. Dessa forma, essa abordagem especifica o processo estocástico seguido diretamente pelo preços do título, da mesma forma que Black e Scholes (1973) fizeram ao modelar o preços de uma ação. Dois importantes modelos que fazem parte dessa abordagem são os modelos de Ball e Torous (1983) e Munnik (1992).

A abordagem indireta é composta por modelos nos quais a determinação dos preços dos títulos é dada a partir do estabelecimento do processo estocástico que rege a taxa de juros de curto prazo ou a taxa de juros futura instantânea. Os modelos pertencentes a essa abordagem podem ser divididos em duas classes: modelos de equilíbrio e modelos de não-arbitragem.

Nos modelos de equilíbrio o preço dos títulos é derivado a partir da taxa de juros de curto prazo, esses modelos além de fornecerem a distribuição de probabilidade futura da ETTJ, fornecem a ETTJ inicial endogenamente, a partir dos parâmetros do processo estocástico seguido pela taxa de juros e da taxa de juros corrente. A endogeneidade faz com que essa classe de modelos tenha pouca aplicação prática na precificação de derivativos, embora tenha utilidade para a precificação e avaliação do valor dos próprios títulos objetos.

Para os modelos de não arbitragem assim como os de equilíbrio o processo estocástico seguido pelo preço também é derivado a partir do processo da taxa de juros. Esses modelos também são conhecidos como modelos exógenos uma vez que a ETTJ inicial é considerada dada e não mais derivada endogenamente. Por este motivo não permitem a avaliação do preço corrente de um título. Mas possibilitam o ajuste perfeito da estrutura a termo em cada ponto no tempo assegurando a não existência de arbitragem.

Nas duas próximas subseções serão apresentados os principais modelos de estrutura a termo conforme a classificação supracitada. A idéia é apresentar alguns modelos pertencentes a estas classes, vale ressaltar que não se pretende esgotar a literatura referente a estas classes de modelos. Para um melhor entendimento será utilizada uma notação uniforme para todos os modelos, exceto para o modelo generalizado BK, pois neste caso manter-se-á a notação apresentada por Tourrucôo(2007). Alguns conceitos básicos referentes à modelagem da estrutura a termos da taxa de juros são explicitados a seguir.

Definição 1 *Para fins desse trabalho um Zero-coupon-bond, neste trabalho chamado de título de desconto, com maturidade T é um título de renda fixa cujo valor é igual a 1 em T .*

Definição 2 *Seja uma família de títulos de desconto cujo espectro contínuo de maturidade seja dado por $T \in [t, T^*]$, para algum T^* real positivo e finito, representando o maior tempo utilizado na modelagem. Sejam seus preços $P(t, T)$ e seus respectivos yields to maturity $R(t, T)$.*

Então o espectro de yields $\{R(t, T) \mid T \in [t, T^*]\}$ é denominada estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ).

O yield $R(t, T)$ de um zero-coupon-bond de maturidade T é definido implicitamente pela equação:

$$P(t, T) = \exp(-R(t, T)(T - t)), \quad t \in [0, T)$$

Definição 3 A taxa de juros futura no tempo t , de um empréstimo que começa em T_1 e termina T_2 , sendo $t < T_1 < T_2$, é definida como:

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{\ln(P(t, T_1)) - \ln(P(t, T_2))}{T_2 - T_1}$$

Definição 4 A taxa de juro futura instântanea no tempo t , de um empréstimo realizado por um período de tempo infinitesimal em $T > t$ é definida como:

$$f(t, T) = \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$$

esta definição implica que:

$$f(t, t) = r_t$$

2.1 Modelos de equilíbrio

Os mais importantes modelos de equilíbrio são Merton (1973), Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985).

2.1.1 Modelo de Merton (1973)

No modelo apresentado por Merton (1973) a taxa de juros de curto prazo segue o seguinte processo estocástico:

$$dr(t) = \theta dt + \sigma dW(t) \quad (3)$$

onde θ e σ são constantes positivas e $W(t)$ é um processo de Wiener unidimensional. Destaca-se que este processo estocástico permite que a taxa de juros assuma valores negativos. Se $\theta > 0$ a taxa cresce ilimitadamente com o tempo.

2.1.2 Modelo de Vasicek (1977)

No modelo de Vasicek (1977) a taxa de juros segue o seguinte processo estocástico:

$$dr(t) = \alpha(\theta - r(t)) dt + \sigma dW(t) \quad (4)$$

onde θ , α e σ são constantes positivas e $W(t)$ é um processo de Wiener unidimensional. Diferentemente do modelo de Merton (1973), o modelo de Vasicek (1977) apresenta um processo de reversão a média, o que impede que a taxa de juros de curto prazo tenha um crescimento ilimitado. Porém o processo proposto por Vasicek, assim como o processo de Merton (1973), continua a permitir taxas de juros negativas.

2.1.3 Modelo Cox, Ingersoll e Ross - CIR (1985)

No modelo CIR (1985) a dinâmica da taxa de juros pode ser expressa como:

$$dr(t) = \alpha(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \quad (5)$$

onde θ , α e σ são constantes positivas e $W(t)$ é um processo de Wiener unidimensional. Pode-se observar que $r(t)$ reverte para média θ com velocidade α . Devido a presença da raiz quadrada no coeficiente de difusão, a taxa de juros pode assumir somente valores reais não negativos.

2.2 Modelos de não-arbitragem

Alguns dos importantes modelos de não arbitragem são aqueles apresentados por Ho e Lee (1986), Hull e White (1990) e Black e Karasinski (1991).

2.2.1 Modelo Ho Lee (1986)

O trabalho original apresentado por Ho e Lee (1986) foi realizado em tempo discreto, contudo, de acordo com Vieira Neto (1999) foi demonstrado que conforme o intervalo de tempo em cada período tende a zero, o processo estocástico seguido pela taxa de juros de curto prazo converge para um processo em tempo contínuo. Tomando por base esta informação, apresentar-se-á somente a versão contínua do modelo Ho e Lee (1986).

A taxa de juros de curto prazo segue a seguinte equação diferencial estocástica.

$$dr(t) = \frac{\partial\theta(t)}{\partial t}dt + \sigma dW(t) \quad (6)$$

onde $\theta(t)$ é uma função determinística, σ é uma constante positiva e $W(t)$ é um processo de Wiener unidimensional.

2.2.2 Modelo de Hull e White (1990)

Hull e White(1990) estenderam o modelo de Vasicek e o CIR. Os autores apresentam dois modelos de estrutura a termo da taxa de juro de curto prazo. O primeiro modelo é uma extensão do modelo de Vasicek (1977) e o segundo é uma extensão do modelo de Cox, Ingersoll e Ross (1995b).

A principal contribuição desse trabalho foi mostrar como os processos permitidos pela estrutura a termo da taxa de juros de curto prazo nos dois modelos supracitados podem ser deduzidos da estrutura a termo da taxa de juros e da estrutura a termo de spot ou da volatilidade da taxa de forward.

Os autores estenderam o modelo de estrutura a termo no qual o termo da taxa de juros de curto prazo, r , segue um processo de reversão a média da forma:

$$dr(t) = \alpha(\theta - r(t))dt + \sigma r(t)^\beta dW(t) \quad (7)$$

onde α , θ , σ e β são constantes positivas e $dW(t)$ é um processo de Wiener unidimensional. Foi adicionado um drift tempo-dependente ao processo $r(t)$, o que permite que

tanto a taxa de reversão, α , quanto o fator de volatilidade, σ , sejam funções do tempo. O que conduz ao seguinte modelo:

$$dr(t) = [b(t) + \alpha(t)(\theta - r(t))] dt + \sigma(t)r(t)^\beta dW(t) \quad (8)$$

A extensão do modelo de Vasicek é dada pela equação (8) com $\beta = 0$:

$$dr(t) = [b(t) + \alpha(t)(\theta - r(t))] dt + \sigma(t) dW(t) \quad (9)$$

A extensão do modelo de CIR é dada pela equação (8) com $\beta = 0,5$:

$$dr(t) = [b(t) + \alpha(t)(\theta - r(t))] dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}dW(t) \quad (10)$$

2.2.3 Modelo Black-karasinski

Segundo Black e Kararasinski (1991), o modelo proposto pelos próprios autores é um modelo lognormal, no qual os possíveis valores para a taxa de juros de curto prazo em um dado tempo futuro seguem uma distribuição lognormal, os autores apontam essa característica como uma vantagem sobre modelos de “raiz-quadrada”, uma vez que tais modelos não apresentam uma distribuição “raiz quadrada” em um dado tempo futuro.

O processo estocástico que define a taxa de juros é :

$$d(\log r(t)) = \alpha(t)[\log \theta(t) - r(t)] dt + \sigma(t) dW(t) \quad (11)$$

Neste modelo $\theta(t)$ é a taxa alvo, $\alpha(t)$ é a reversão a média e $\sigma(t)$ é a volatilidade local do $\log r(t)$. Os autores chamam estas três funções de *inputs* e escolhem-nas como correspondentes a três características, denominadas *outputs*. Os *outputs* são:

- *Yield curve*
- curva de volatilidade
- *cap curve*

A *yield curve* fornece, para cada maturidade, o rendimento corrente de um título de desconto (ZCB). A curva de volatilidade fornece para cada maturidade a volatilidade do rendimento corrente em um ZCB. A *cap curve* dá, para cada maturidade, o preço de um *at-the-money differential cap*⁶. Uma vantagem desses *outputs* é que todos eles são, em princípio, observáveis.

A volatilidade *input* é a volatilidade local para a taxa de juros de curto prazo para todos os horizontes. A volatilidade *output* é a volatilidade de um rendimento corrente para um ZCB em todas as maturidades.

Os autores mantêm a volatilidade local da taxa de juros fixa por um determinado período de tempo, depois aumentam a volatilidade. Os outros *inputs* permanecem fixos. Para o modelo lognormal, aumentar o *input* volatilidade local reduzirá o *output* volatilidade do rendimento. Quanto mais alta for a volatilidade local, e maior for a reversão a média, mais rapidamente a volatilidade da curva declinará.

Os autores chamam os *inputs* resultantes de "taxa alvo implícita", "reversão a média implícita" e "volatilidade local implícita", respectivamente, $\theta(t)$, $\alpha(t)$ e $\sigma(t)$.

⁶Diferença entre a taxa de curto prazo e o preço de exercício.

Uma vez apresentada a literatura seminal relacionada aos modelos de estrutura a termo da taxa de juros cabe destacar o trabalho de Tourrucô, Hagan e Schleiniger (2006) no qual são usados métodos para obter fórmulas para zero-coupon bond (ZCB) sob o modelo generalizado Black-Karasinski. Para o caso especial do modelo Hull-White, os autores obtiveram uma solução exata. Eles apresentaram simulações numéricas no sentido de validar as aproximações assintóticas. É também investigada uma estratégia de calibragem para ajustar o modelo aos dados da curva de desconto.

Sobre o mesmo prisma, Tourrucô (2007) utilizou métodos de perturbação regulares para obter fórmulas aproximadas para o preço de um título de desconto e investigou algumas estratégias de calibragem. Este trabalho também realiza simulações numéricas para obter evidências da validade da aproximação assintótica.

3 Metodologia

O objetivo desse trabalho consiste em calibrar as curvas de desconto e de rendimento por meio da estrutura a termo implícita no contrato swap DI contra taxa pré fixada. Os dados foram providos pela Bolsa de Mercadorias e Futuro (BM&F). São utilizadas séries com maturidades iniciais distintas, foram escolhidas duas séries disponíveis nas seguintes datas: 20 de Maio de 2009, 20 de Julho de 2009 e 20 de Agosto de 2009, uma vez que os outros dados da amostra compreendida entre os meses de janeiro de 2009 a dezembro de 2009 apresentaram resultados similares. O método de calibragem aqui apresentado corresponde ao ajuste dos parâmetros do modelo a dados exógenos. O modelo proposto considera a hipótese de livre arbitragem.

Conforme explicitado pela Bolsa de Mercadorias e Futuros – BM&F (2009), um dos instrumentos mais importantes e líquidos do mercado brasileiro de renda fixa é o contrato swap DI contra taxa pré-fixada. A taxa DI é a taxa média das operações interbancárias de empréstimo por um dia, apuradas pela CETIP (Central de Custódia e Liquidação Financeira de Títulos). A taxa DI em um dia t é definida como a média ponderada das taxas às quais foram efetuadas operações interbancárias nesse mercado

O contrato swap DI contra taxa pré-fixada com vencimento em T é um derivativo que no dia corrente, t , é negociado a preço zero, mas que tem o preço de referência dado pelo valor esperado sob a medida neutra ao risco de 100 mil reais, descontado pela taxa livre de risco. O preço de referência de um contrato swap desse tipo, com vencimento em T , no dia t é dado por:

$$P_{t,\tau} = E_t \left[100000 * \exp \left(\int_t^{t+\tau} -r_u du \right) \right] \quad (12)$$

Esse contrato swap apresenta características muito similares a um título de desconto.

Vale ressaltar que os dados obtidos referem-se a taxa de juros, dessa forma, é necessário encontrar a taxa de desconto pelo cálculo do valor presente do título de desconto. Como em $T_i = T$ o valor do título de desconto é igual a 1, o preço unitário do título de desconto, representado por $D(T_i)$, é obtido da seguinte forma

$$D(T_i) = (1 + r_i)^{\frac{-DC}{360}} \quad (13)$$

onde

DC - Dias corridos

r_i - taxa de juros

T_i - Maturidade em anos

O presente trabalho desenvolve-se-á por meio do modelo generalizado Black-Karasinski (gBK) apresentado por Tourrucôo (2007). Neste contexto, o modelo gBK é definido por:

$$V(t, x, T) = E \left\{ e^{-\int_t^T r(X(t')) dt} V(T, X(T)) | X(T) = x \right\} \quad (14)$$

com V sendo um instrumento de renda fixa com data de vencimento em T . Com $0 \leq t \leq T$, onde a variável de estado $X(T)$ segue o processo Ornstein-Uhlenbeck.

$$dX = [\theta(t) - k(t) X] dt + \varepsilon \tilde{\alpha}(t) dW \quad (15)$$

onde $\theta(t)$, $k(t)$ e $\tilde{\alpha}(t)$ são parâmetros do modelo. $X(0) = 0, \varepsilon \ll 1$, com W um processo de Wiener, ou movimento browniano. A taxa de juros de curto prazo r é uma

função explícita g da variável de estado X , como segue

$$r = g(X) := r_0 (1 + vX)^{\frac{1}{v}} \quad (16)$$

o parâmetro r_0 é o valor atual da taxa de juros de curto prazo e $v = \frac{1}{q}$ com $q \in \mathbb{N}$. A forma funcional assumida pela taxa de juros depende do valor do parâmetro v , que, neste modelo, pertence ao intervalo $[0,1]$. Devido às peculiaridades analíticas decorrentes da escolha de determinados valores para v , este trabalho apresentará resultados para os casos $v = 1$, $v = 1/2$ e $v = 0$ denominados, respectivamente por caso Hull-White (*HW*), caso Cox, Ingersoll e Ross (*CIR*) e caso Black-Karasinski (*BK*).

Conforme apresentado pela figura (1), para o caso *HW* a taxa de juros é dada pela função $r = g(X) := r_0 (1 + X)$, que é uma função linear em relação a variável de estado $X(T)$, para este caso específico a taxa de juros pode assumir valores negativos. Quando toma-se o caso *CIR* a taxa de juros passa a ser determinada por uma função quadrada $r = g(X) := r_0 (1 + (1/2) X)^2$, podendo assumir um mesmo valor para dois pontos distintos da variável de estado. O caso *BK* a taxa de juros é dada pela função exponencial $r = g(X) = r_0 e^X$, assim como para o caso *HW*, ela apresenta um comportamento inteiramente monótono, porém, não assume valores negativos.

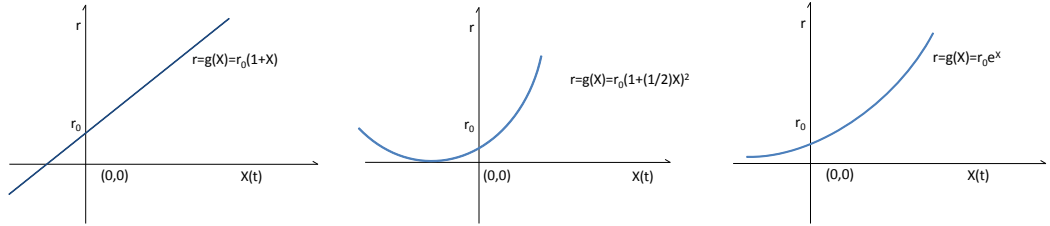


Figura 1. Taxa de juros para os casos $v = 1$, $v = 1/2$ e $v = 0$

Seja $\bar{X}(t)$ o valor esperado de $X(T)$

$$\bar{X}(t) := E \{X(t) | X(0) = 0\} \quad (17)$$

Como W é um processo de Wiener $E(W) = 0$, para todo $t > 0$ e $W_0 = 0$, portanto, tomando a equação (17) obtemos que \bar{X} satisfaz:

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = k(t) \left(\frac{\theta(t)}{k(t)} - \bar{X} \right) \quad (18)$$

$$\bar{X}(0) = 0$$

A partir de (18) pode-se observar que \bar{X} reverte para a média $\frac{\theta(t)}{k(t)}$ com velocidade $k(t)$. A resolução da equação diferencial estocástica (15) é dada como segue:

sendo $I(t) = \exp\left(\int_0^t k(s) ds\right)$ o fator integrante e reescrevendo (18):

$$\frac{d\bar{X}}{dt} + \bar{X}k(t) = \theta(t) \quad (19)$$

Aplicando o fator integrante,

$$e^{\int_0^t k(s) ds} \frac{d\bar{X}}{dt} + e^{\int_0^t k(s) ds} \bar{X}k(t) = e^{\int_0^t k(s) ds} \theta(t) \quad (20)$$

Sabendo que,

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\int_0^t k(s) ds} \bar{X} \right) = e^{\int_0^t k(s) ds} \frac{d\bar{X}}{dt} + e^{\int_0^t k(s) ds} \bar{X} k(t) \quad (21)$$

Substituindo (21) em (20) e tomando a integral de ambos os lados, tem-se:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left(e^{\int_0^t k(s) ds} \bar{X} \right) dt = \int_0^T e^{\int_0^t k(s) ds} \theta(t) dt \quad (22)$$

$$e^{\int_0^t k(s) ds} \bar{X} = \int_0^T e^{\int_0^t k(s) ds} \theta(t) dt \quad (23)$$

Portanto, a média da variável de estado que determina o comportamento da taxa de juros de curto prazo pode ser escrita como segue

$$\bar{X}(T) = \lambda(t) \left[\int_0^T e^{\int_0^t k(s) ds} \theta(t) dt \right] \quad (24)$$

$$\lambda(t) = e^{-\int_0^t k(s) ds} \quad (25)$$

Uma vez estabelecido $\bar{X}(t)$ pode-se decompor a variável de estado $X(t)$ em uma parte determinística definida por $\bar{X}(t)$ e outra estocástica determinada pela variável $Y(t)$. Vale ressaltar que $Y(t)$, neste caso, representa o comportamento aleatório da variável X . Portanto, o modelo gBK pode ser escrito da seguinte forma simplificada, onde $Y(t)$ é definido por:

$$X(t) = \bar{X}(t) + \lambda(t) Y(t) \quad (26)$$

Redefindo o modelo gBK em termos de Y .

$$V(t, x, T) = E \left\{ e^{-\int_t^T r(Y(s')) ds} V(T, Y(T)) | Y(T) = y \right\} \quad (27)$$

Dessa forma, (16) torna-se:

$$r = r(t, Y) \quad (28)$$

$$r(t, Y) = g(\bar{X}(t) + \lambda(t) Y(t)) \quad (29)$$

Diferenciando (26) em relação a t .

$$dX = d\bar{X} + Y d\lambda + \lambda dY \quad (30)$$

Sabendo que W é um processo de Wiener, de (15)

$$d\bar{X} = [\theta(t) - k(t) \bar{X}] dt \quad (31)$$

Diferenciando $\lambda(t)$ em (25):

$$d\lambda = -k(t) e^{\int_0^t k(s) ds} dt \quad (32)$$

$$d\lambda = -k(t) \lambda(t) dt \quad (33)$$

Substituindo (31) e (33) em (30):

$$dX = [\theta(t) - k(t)\bar{X}] dt - k(t)\lambda(t)Y(t) dt + \lambda dY \quad (34)$$

Isolando $\bar{X}(t)$ em (26):

$$\bar{X}(t) = X(t) - \lambda(t)Y(t) \quad (35)$$

Substituindo (35) em (34):

$$dX = [\theta(t) - k(t)(X(t) - \lambda(t)Y(t))] dt - k(t)\lambda(t)Y(t) dt + \lambda(t)dY(t) \quad (36)$$

$$dX = \theta(t) dt - k(t)X(t) dt + k(t)\lambda(t)Y(t) dt - k(t)\lambda(t)Y(t) dt + \lambda(t)dY(t) \quad (37)$$

$$dX = [\theta(t) - k(t)X(t)] dt + \lambda(t)dY(t) \quad (38)$$

Uma vez que (15) = (38):

$$\lambda(t)dY(t) = \varepsilon\tilde{\alpha}(t)dW \quad (39)$$

$$dY(t) = \varepsilon\frac{\tilde{\alpha}(t)}{\lambda(t)}dW \quad (40)$$

Portanto,

$$dY(t) = \varepsilon\alpha(t)dW \quad (41)$$

$$Y(0) = 0 \quad (42)$$

Com,

$$\alpha(t) = \frac{\tilde{\alpha}(t)}{\lambda(t)} \quad (43)$$

Com o auxílio de (26) pode-se rever o caso particular de um título de desconto sob o modelo gBK . Seja $Z(t, x, T)$ o valor de um título de desconto na data t , com vencimento em T , dado que a variável de estado X é x na data t . O problema de apreçamento é dado por:

$$Z(t, x, T) = E \left\{ e^{-\int_t^T r(X(t')) dt'} | X(T) = x \right\} \quad (44)$$

Escrevendo (44) em função do termo aleatório $Y(t)$ e usando a equação (26):

$$Z(t, y, T) = E \left\{ e^{-\int_t^T r(\bar{X}(s) + \lambda(s)Y(s)) ds'} | Y(T) = y \right\} \quad (45)$$

A partir de (29) obtemos $Z(t, y, T)$ como segue

$$Z(t, y, T) = E \left\{ e^{-\int_t^T r(s', Y(s')) ds'} | Y(T) = y \right\} \quad (46)$$

Aplicando o teorema de Feynman-Kac na equação (46):

$$-Z_t + rZ = \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha^2 Z_{yy} \quad \text{em } [0, T] \quad (47)$$

$$Z(t, y, T) = 1 \quad \forall y \in R$$

O problema (47) é resolvido usando técnicas de perturbação regular. Assume-se Z da forma:

$$Z(t, y, T) = e^{-\phi(t, y, T)} \quad (48)$$

Uma vez posta a equação (48) a equação (46) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-\phi_t + r(t, y) = \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha^2 (\phi_y^2 - \phi_{yy}), \quad [0, T] \times R \quad (49)$$

Sabendo que $Z(T, y, T) = 1$, pode-se observar o seguinte

$$\begin{aligned} e^{-\phi(T, y, T)} &= 1 \\ \phi(T, y, T) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -\phi_t + r(t, y) &= \frac{1}{2}\varepsilon^2\alpha^2 (\phi_y^2 - \phi_{yy}), \quad [0, T] \times R \\ \phi(T, y, T) &= 0 \quad \forall y \in R \end{aligned} \quad (50)$$

O autor assume a expansão regular:

$$\phi(t, y, T) = \phi^{(0)}(t, y, T) + \varepsilon^2\phi^{(2)}(t, y, T) + \varepsilon^4\phi^{(4)}(t, y, T) \quad (51)$$

e calcula os três primeiros termos, ou seja, até $O(\varepsilon^4)$.

Como o trabalho aqui apresentado fará uso somente das expansões até segunda ordem $O(\varepsilon^2)$ serão apresentadas somente as soluções para $\phi^{(0)}(t, y, T)$ e $\phi^{(2)}(t, y, T)$ ⁷. Portanto,

$$\phi^{(0)}(t, y, T) = R(t, y, T) = \int_t^T r(s, y) ds \quad (52)$$

$$\phi^{(2)}(t, y, T) = \frac{1}{2} \int_t^T \alpha^2 (R_y^2 - R_{yy})(s, y, T) ds \quad (53)$$

A calibragem do modelo resulta do preço observado do título de desconto $D(T)$ que é conhecido para todos os vencimentos T em $t = 0$. Sendo $Z(0, T, 0)$ um título de desconto no tempo $t = 0$, isto é, no tempo inicial, e maturidade T . A hipótese de não arbitragem do modelo implica que a seguinte condição seja satisfeita

$$D(T) = Z(0, T, 0) \quad (54)$$

para todo T , fazendo com que o modelo reproduza a curva de desconto observada em $t = 0$. Uma vez posta a condição (54), define-se a curva de rendimento a partir do valor

⁷ $\phi^{(4)}(t, y, T)$ pode ser encontrada em Tourrucôo (2007).

do título de desconto observado da seguinte forma:

$$D(T) \leftrightarrow Y := \frac{-\log D(T)}{T} \quad (55)$$

A equação (54) resulta na seguinte curva de rendimento calibrada:

$$\widehat{Y} := \frac{-\log Z(0, T, 0)}{T} \quad (56)$$

O preço do título de desconto calibrado é função dos parâmetros $\alpha(t)$, $\theta(t)$ e $k(t)$, conforme indicado abaixo:

$$Z(t, T, Y) = f(\alpha(t), \theta(t), k(t)) \quad (57)$$

Dessa forma, a calibragem da curva dar-se-á por meio da determinação dos parâmetros $\alpha(t)$, $\theta(t)$ e $k(t)$. Os parâmetros $\tilde{\alpha}(t)$ e $k(t)$ são considerados constantes e o parâmetro $\theta(t)$ é especificado pela função:

$$\theta(t) = \sum_{j=i}^n \theta_j I_j(t) \quad (58)$$

onde,

$$I_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } T_{j-1} < t < T_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (59)$$

Os métodos de calibração desenvolvidos neste trabalho dar-se-ão por meio da determinação do parâmetro $\theta(t)$ especificado na equação (58). Este parâmetro resulta da solução do sistema de equações explicitado no Problema 1, vale ressaltar que para a solução desse sistema considerar-se-á o parâmetro k constante, assim como apresentado por Tourrucão (2007)

Problema 1

$$\begin{cases} \widehat{Y}(T_i) = Y(T_i) \\ \forall i = 1, \dots, N \end{cases}$$

Esta dissertação apresenta três métodos distintos de calibração, o primeiro deles remete-se a solução numérica do problema 1, isto é, com o auxílio computacional são encontrados os parâmetros que satisfazem a condição de não arbitragem. O segundo método constitui a inversão do parâmetro θ por meio da solução analítica para o problema 1, este método apresenta vantagens computacionais, pois possibilita algoritmos de implementação mais simples.

O terceiro método é o de aproximação, nesse método a inversão do parâmetro $\theta(t)$ ocorre a partir da definição contínua da curva de rendimentos. O desenvolvimento deste método será realizado com base na explicitação do método de perturbação encontrado em Murdock (1999). De forma genérica o método de perturbação apresentado por Murdock (1999) consiste na criação de uma família de problemas com base em um problema original. Supondo a equação $\varphi(x) = 0$ como sendo o problema original com solução exatas para x , o método de perturbação permite encontrar uma família de equações na forma $\varphi(x, \xi) = 0$ com soluções aproximadas, onde os valores de x que satisfazem a equação $\varphi(x, \xi) = 0$ são funções do parâmetro suficientemente pequeno $0 < \xi \ll 1$, isto é $x = f(\xi)$. Neste

sentido ao tomar uma família de equações $\varphi(x, \xi) = 0$ pode-se representar a solução desta por $x = \delta_0(\xi)x_0 + \delta_1(\xi)x_1 + \dots$, onde $\delta_0(\xi) \gg \delta_1(\xi) \gg \delta_2(\xi) \gg \dots$

Esta dissertação utiliza o método de perturbação para obter soluções aproximadas para os parâmetros θ a partir do caso $\nu = 1$, que será aqui considerado o problema original. Dessa forma a partir da definição contínua para a curva de rendimento, que é função de ν e θ , $Y(\nu, \theta) = 0$, serão invertidos os parâmetros θ para quaisquer valores de ν . A fim de tornar este procedimento semelhante ao processo apresentado por Murdock (1999), vamos considerar $\xi = 1 - \nu$, quando $\nu = 1$ (problema original), temos $\xi = 0$ e, portanto, o modelo *HW* é considerado o problema reduzido onde $\xi = 0$. Posto isso, pode-se reescrever a curva de rendimento como função dos parâmetros θ e ξ . Dessa forma, a família de equações $Y(\xi, \theta)$ possibilita uma expansão em torno de θ na forma $\theta = \delta_0(\xi)\theta_0 + \delta_1(\xi)\theta_1 + \dots$. Este método é conhecido por método das escalas indeterminadas (Murdock, 1999). Neste trabalho, a escolha adequada às escalas é uma função polinomial de ξ na forma $\delta_i(\xi) = \xi^n$ e $\delta_0(\xi) = \xi^0 = 1$ e $\delta_0(\xi) \gg \delta_1(\xi) \gg \delta_2(\xi) \gg \dots$, permitindo, dessa forma, que o parâmetro θ possa ser aproximado via sucessivas correções em ξ . Para os casos em destaque neste trabalho temos $\nu = 1$, $\nu = 1/2$ e $\nu = 0$ implicando, respectivamente, em $\xi = 0$, $\xi = 1/2$ e $\xi = 1$. Este trabalho considerará a expansão até a ordem $O(\xi)$, dessa forma a inversão aproximada dos parâmetros θ é dada da seguinte forma: para o caso *HW* temos $\theta = \theta_0$, para o caso *CIR* temos $\theta = \theta_0 + (1/2)\theta_1$ e para o caso *BK* temos $\theta = \theta_0 + \theta_1$.

A calibragem da curva de rendimentos não gera, necessariamente, uma curva com comportamento monótono. Neste contexto, para o método numérico é possível que os parâmetros sejam encontrados de forma a minimizar as oscilações da curva calibrada, ou seja, esses parâmetros devem fornecer o menor valor para a norma da segunda diferencial da curva de desconto calibrada (\widehat{Y}''') , dessa forma, enfrenta-se o Problema 2 para cada (T_{i-1}, T_i) para $i = 1 \dots N$:

Problema 2

$$\begin{cases} \text{Min}_{k, \theta_i} \left(\|\widehat{Y}'''\|^2 \right) \\ \text{sa. } \widehat{Y}(T_i) = Y(T_i) \end{cases} \quad (60)$$

Sabendo que Z é função de θ , tem-se que

$$Y(T_i) = \widehat{Y}(\theta_1, \dots, \theta_N; k) \quad (61)$$

então

$$Y(T_i) - \widehat{Y}(\theta_1, \dots, \theta_N; k) = 0 \quad (62)$$

portanto, pode-se definir

$$F(\theta_1, \dots, \theta_N; k) = \widehat{Y}(T_i) - Y(\theta_1, \dots, \theta_N; k) = 0 \quad (63)$$

logo o problema de minimização pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Min}_{k, \theta_i} (\|Y'''\|^2) \\ \text{sa. } F(\theta_1, \dots, \theta_N; k) = 0 \end{cases} \quad (64)$$

A solução desse problema pode ser dada numericamente para todos os possíveis valores de ν . A equação (58) é um caso especial do método de colocação, que pode ser consider-

ado como uma generalização natural de métodos de interpolação. O método de colocação emprega um conceito estrategicamente simples para resolver equações funcionais. Especificamente, uma função desconhecida f é aproximada usando uma combinação linear de n funções bases conhecidas, $\varphi_j(x)$.

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x)$$

onde c_i são os coeficientes a serem determinados exigindo uma aproximação para satisfazer as equações funcionais, não em todos os pontos possíveis do domínio, mas sim nos n pontos x_1, x_2, \dots, x_n prescritos em $[a, b]$ chamados de nós de colocação. Resolver o problema de uma função implícita por colocação, portanto, requer encontrar n coeficientes c_j que satisfaçam simultaneamente n equações. Tomando um operador L , pode-se explicitar a condição a ser satisfeita, do seguinte modo.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x_i), \\ Lf(x) &= 0 \\ L\hat{f}(x) &= 0 \\ \text{para } i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Uma base $\varphi_j(x)$ pode assumir distintos padrões de funções. Elas podem ser definidas como spline linear, spline cúbica, polinômio de chebychev, entre outras (Judd, 1998). No caso específico deste trabalho, a função base é representada por $I_j(t)$ conforme definido em (59). O uso dessa base de simplicidade extrema justifica-se pela intenção de desenvolver procedimentos analíticos, os quais se tornariam demasiados complexos se fossem utilizadas funções bases menos simples. Destaca-se, entretanto, que o método numérico apresentado no capítulo 4 pode ser realizado por meio do uso de funções bases mais complexas, não obstante, a realização dos métodos analíticos e de aproximação, respectivamente, apresentados nos capítulos 5 e 6 poderia alcançar um nível de complexidade consideravelmente alto.

4 Reprodução da curva de desconto e rendimento observada por meio da condição de não arbitragem

A curva de desconto observada $D(T)$ é conhecida para todas as maturidades T no tempo $t = 0$, dessa forma, é apresentada nessa seção a possibilidade de interpolação tanto da curva de desconto quanto da curva de rendimentos para todos os valores de T . Para tal, faz-se necessária a satisfação da seguinte condição de não arbitragem

$$D(T) = Z(0, 0, T) \quad (65)$$

que também pode ser escrita como $\widehat{Y}(T_i) = Y(T_i)$.

Essa condição implica que o modelo reproduza a curva de desconto observada em $t = 0$. O modelo *gBK* assume que $Z(t, y, T) = e^{-\phi(t, y, T)}$, ao considerar o caso determinístico, isto é, $X = \bar{X}$ ou $Y = 0$, denota-se o preço do título de desconto ajustado pelo modelo por $Z_d(t, 0, T)$. Se $Y = 0$, sem perda de generalidade, tem-se $\varepsilon = 0$. Dessa forma a partir de (50) tem-se que $\phi_d(t, 0, T) = R(0, 0, T) - R(0, 0, t)$. Portanto

$$Z_d(t, 0, T) = e^{-\phi_d(t, 0, T)}$$

$$Z_d(t, 0, T) = e^{R(0, 0, t) - R(0, 0, T)}$$

$$Z_d(t, 0, T) = \frac{Z(T)}{Z(t)} \quad (66)$$

Pela condição de não arbitragem $D(T) = Z(T)$ e utilizando (46)

$$Z(t, 0, T) = \frac{D(T)}{D(t)} = e^{-\int_t^T g(\bar{X}(t)) dt} \quad (67)$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados e derivando em relação a T

$$\frac{D'(T)}{D(T)} = -g(\bar{X}(T)) \quad (68)$$

Uma vez que a variável de estado X é função dos parâmetros θ e k , conforme visto em (15), observa-se que a calibragem das curvas de desconto e de rendimento dependem dos parâmetros θ e k , os quais possuem relação, via $\bar{X}(T)$, com a curva de desconto observada de acordo com a equação (68).

Com (67) por motivação, reescreve-se (48) e (51) da seguinte forma

$$Z(t, y, T) = \frac{D(T)}{D(t)} e^{-\Delta\phi(t, y, T)} \quad (69)$$

onde $\Delta\phi(t, y, T) = \phi(t, y, T) - (\Delta\phi(0, 0, T) - \Delta\phi(0, 0, t))$ e representa a natureza estocástica da taxa de juros de curto prazo. Dessa forma, o preço do título de desconto é obtido por meio de uma composição do modelo determinístico com o fator de correção $e^{-\Delta\phi(t, y, T)}$.

A equação(50) permite observar que para qualquer $T > 0$, $\phi(T, y, T) = 0$, pela continuidade dessa função tem-se que $\lim_{T \rightarrow 0} \phi(T, 0, T) = 0$. Com $t = 0$ e $y = 0$ pode-se reescrever (69) como segue

$$Z(0, 0, T) = \frac{D(T)}{D(0)}$$

Uma vez que $D(0) = 1$, tem-se $Z(T) = D(T)$ e portanto a condição de não arbitragem é verificada, assegurando, dessa forma, que o modelo gBK permite que a estrutura a termo do título de desconto para $t = 0$ reproduza a curva de desconto observada, desde que os parâmetros θ e k sejam escolhidos de tal maneira que permitam essa aparente calibragem automática.

A calibragem é feita utilizando k e α constantes e estabelecidos previamente de forma arbitrária e o parâmetro θ constante por intervalo, conforme explicitado a seguir

$$\theta(t) = \theta_i, \text{ para } T_{i-1} < t < T_i \quad (70)$$

com $i = 1, \dots, n$, onde n é o número total de vencimentos para os quais as taxas de desconto são conhecidas. O procedimento implica a solução do sistema de equações (71) por meio da seleção dos parâmetros θ_i que satisfaçam a seguinte condição de não arbitragem

$$\hat{Y}(T_i) = Y(T_i) \quad (71)$$

Nesse sentido é o parâmetro θ que permite a igualdade entre a curva observada e a ajustada pelo modelo. A identidade entre o rendimento observado e o rendimento obtido pelo modelo, embora seja necessária ao método de calibração aqui proposto, não controla, por exemplo, a curvatura da curva de rendimento. Nesse contexto, os resultados apresentados nesse capítulo evidenciam as limitações da calibragem, provavelmente, provenientes da escolha da base $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Apresenta-se aqui uma tentativa de corrigir essa ausência de controle da curvatura por meio da solução para o problema 2, apresentado na metodologia deste trabalho.

O trabalho apresenta curvas calibradas para duas séries diferentes. São apresentadas curvas de desconto e de rendimentos calibradas para maturidades iniciais distintas, são elas: 20 de Maio de 2009 e 20 de Agosto de 2009. A escolha dessas duas datas específicas justifica-se em decorrência do comportamento apresentado pelas diversas curvas calibradas durante o estudo, pois observou-se que as calibrações para datas iniciais distintas se aproximavam a um dos dois casos aqui expostos.

4.1 Calibragem para dados disponíveis em 20 de Maio de 2009

O modelo gBK , proposto neste trabalho, é um modelo de reversão a média explicitado pela seguinte modificação da equação(15)

$$dX = k(t) \left(\frac{\theta(t)}{k(t)} - X \right) dt + \varepsilon \tilde{\alpha} dW \quad (72)$$

Esta equação diferencial estocástica mostra que quando a variável de estado X se afasta de $\theta(t)/k(t)$ o próximo valor assumido por esta será resultado de uma variação inversa ao sinal do afastamento e, portanto, X estará mais próximo de $\theta(t)/k(t)$. A velocidade com que a variável X retorna a média é dada por $k(t)$. Quanto maior o

valor desse parâmetro mais rapidamente X retornará a média afetando, diretamente, o comportamento das curvas calibradas.

A calibragem adotada, a partir da satisfação da condição de não arbitragem, exige que o parâmetro k seja constante e previamente estabelecido e que θ , constante por intervalo, seja obtido por meio da solução do sistema (71). O conjunto dos valores de θ permite que a curva calibrada assuma valores iguais aos observados e o valor de k está associado a curvatura.

Na tabela 1 são apresentadas as taxas de desconto conhecidas para os vencimentos T_i , onde $t = 0$ é dado pelo dia 20 de Maio de 2009. É a partir destes dados que são realizadas as calibrações. A curva calibrada pelo modelo gBK deverá assumir, para as maturidades expostas na tabela 1, valores iguais aos observados, isto ocorre em decorrência da hipótese de não arbitragem.

Tabela 1. Curva de desconto observada - 20/05/2009

T_i	$D(T_i)$
0.08	0.99219
0.25	0.97749
0.5	0.97046
1.01	0.91589
2.00	0.82764
3.00	0.73855
4.00	0.65541
5.00	0.58470
7.00	0.46879
10.0	0.33852
15.5	0.18631

A calibragem das curvas depende dos parâmetros θ_i que solucionam o sistema de equações (71). Estes parâmetros são encontrados numericamente. A tolerância usada na solução do sistema é de 10^{-8} , esta tolerância garante uma maior exatidão nos resultados obtidos.

A curva calibrada é função dos parâmetros constantes k e $\tilde{\alpha}$ e dos θ_i encontrados. O parâmetro k determina a velocidade de reversão a média, enquanto α é entendido como um controle para a variância da variável de estado. Uma escolha arbitrária de valores para k mostra que quanto mais próximo de zero é o valor de k menor é o controle sobre a curvatura da curva de rendimento calibrada, sendo o oposto verdadeiro. Foram realizadas calibrações para diversos valores de k com a finalidade de mostrar o comportamento da curva calibrada ante valores distintos para este parâmetro. Nesse sentido, são apresentadas curvas calibradas para $k = 0.1$, $k = 0.6$, $k = 0.9$ e $k = 10$. Destaca-se que para cada valor de k há uma mudança nos valores de θ_i .

Uma vez que para o modelo gBK , a taxa spot é assumida da seguinte forma

$$r = g(X) := r_0 (1 + \nu X)^{\frac{1}{\nu}}$$

a calibragem é realizada para os casos HW , CIR e BK , para os quais ν assume, respectivamente, os valores 1, $1/2$ e 0. Em detrimento da semelhança entre os resultados para os diferentes casos, restringir-se-á a análise ao caso BK , cabe destacar que as conclusões provenientes desta análise podem ser estendidas, sem perda, aos outros dois casos.

A tabela 2 mostra os parâmetros θ_i encontrados para $\nu = 0$ com $k = 0.6$ e $\alpha = 0.35$, ambos determinados exógenamente. Relembrando que $Z(t, y, T) = e^{-\phi(t, y, T)}$ e $\phi(t, y, T) = \phi^{(0)}(t, y, T) + \varepsilon^2 \phi^{(2)}(t, y, T)$, os parâmetros θ que satisfazem a condição de não arbitragem são apresentados na tabela 2, foram calculados os parâmetros até a ordem $O(\varepsilon^2)$.

Tabela 2. θ_i para BK . Calibragem até $O(1)$ e $O(\varepsilon^2)$ - 20/05/2009

T_i	$\theta_i(BK_0)$	$\theta_i(BK_2)$
0.08	-1.41602	-1.47587
0.25	0.03555	-0.01854
0.5	-12.34879	-12.39654
1.01	8.60238	8.56426
2.00	-4.31440	-4.32772
3.00	3.47076	3.43533
4.00	-2.59217	-2.58427
5.00	2.13374	2.08929
7.00	-0.77603	-0.77991
10.0	0.37465	0.34744
15.5	-0.03706	-0.05341

Uma vez encontrados os parâmetros θ_i é realizada a calibragem da curva de desconto ilustrada na figura 2⁸, ou seja, a partir dos parâmetros encontrados é feita a interpolação estrutural dos dados o que implica a construção de uma curva de desconto contínua a partir dos valores discretos observados. A tabela 2 mostra que os parâmetros assumem valores alternativamente negativos e positivos, assim como, há uma maior variação entre os valores iniciais de θ_i , enquanto que para os vencimentos finais a amplitude da diferença entre θ_i e θ_{i-1} é menor. Esse comportamento oscilante dos parâmetros θ_i , que por sua vez decorre do valor estipulado para k , influencia o formato da curva conforme pode ser visto pela figura 3.

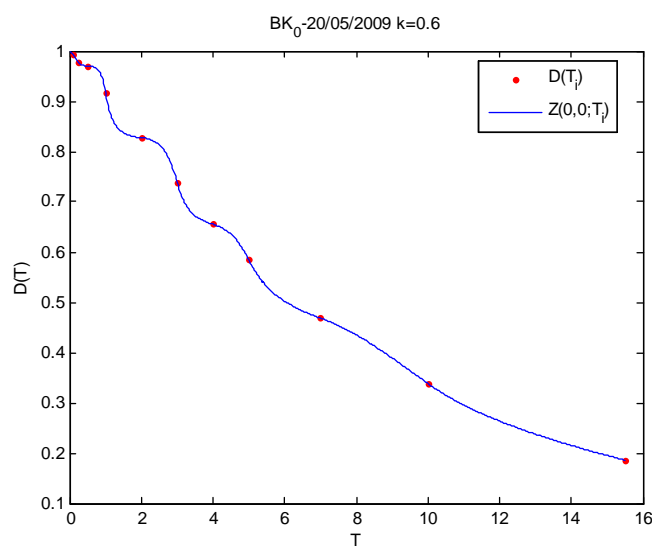


Figura 2. Curva de desconto calibrada por BK para $O(1)$ com $k = 0.6$

⁸Devido a semelhança entre as curvas calibradas para $O(1)$ e $O(\varepsilon^2)$, são apresentadas somente as de ordem $O(1)$.

Ao observar a figura 2 nota-se que a curva calibrada oscila de forma mais intensa para os vencimentos iniciais tendo um comportamento mais suave para as maturidades finais, refletindo os valores assumidos pelos parâmetros θ_i , que de acordo com a tabela 2 variam mais intensamente para os primeiros vencimentos que para os últimos. A condição de não arbitragem é satisfeita, todavia a oscilação da curva entre os nós de interpolação e a mudança de concavidade a cada intervalo indicam que a variável de estado não reverte rápido o suficiente para a média, fazendo com que a curva calibrada oscile entre os nós de interpolação.

Uma das maneiras de controlar a oscilação da curva dá-se pela mudança na velocidade de reversão a média. Para fins didáticos, a figura 3 apresenta curvas de desconto calibradas para $k = 0.1$, $k = 0.9$ e $k = 10$.

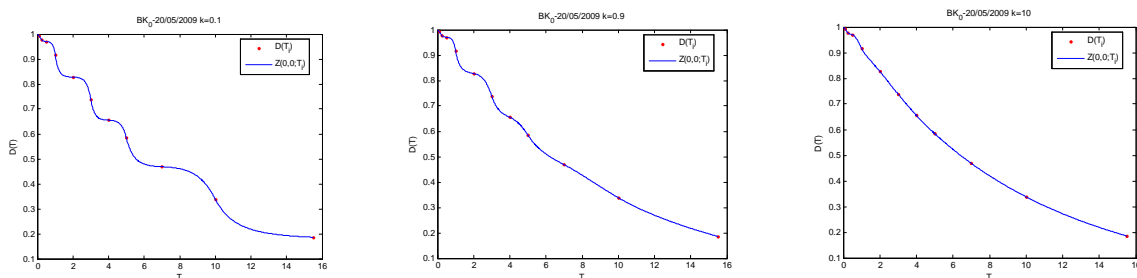


Figura 3. Curvas de desconto calibrada por BK para $O(1)$ com $k = 0.1$, $k = 0.9$ e $k = 10$

Valores mais altos de k produzem curvas de desconto com concavidade mais controlada, este controle passará a ser referenciado aqui como uma maior suavidade da curva. Esta constatação evidencia a função do parâmetro k como determinante da velocidade de reversão a média, ou seja, ao se afastar de seu valor médio a variável de estado, que determina a taxa spot, volta mais rapidamente a ela diminuindo, portanto, as oscilações das taxas de desconto.

A influência do parâmetro k na determinação do formato das curvas calibradas pode ser observada por meio da análise da evolução da taxa spot a partir do modelo gBK . Também para fins didáticos apresentaremos alguns gráficos com o intuito de mostrar a forma como o parâmetro k influencia a taxa de juros instantânea, a curva de desconto e a média da variável de estado. As figuras 4 e 5 apresentam para k , respectivamente, iguais a 0.6 e 10, a taxa de juros instantânea simulada para o caso $Y(t) = 0$, representada pela curva azul, e a taxa de juros instantânea para o caso estocástico, representada pela linha vermelha.

Por meio dessas figuras podemos notar que ao adotar um fator aleatório os valores assumidos pela taxa spot são alterados pelo fator aleatório, mas o comportamento da taxa spot segue o padrão determinístico. Uma comparação entre as figuras 4 e 5 mostra que quanto maior o valor assumido por k mais rapidamente a taxa spot muda de valor entre as maturidades T_i . Note que para o caso $k = 10$, representado pela figura 5, a taxa de juros de curto prazo assume um comportamento praticamente constante dentro de cada intervalo de vencimento, isso decorre da grande velocidade com que a variável de estado X retorna a média no intervalo $[T_{i-1}, T_i]$.

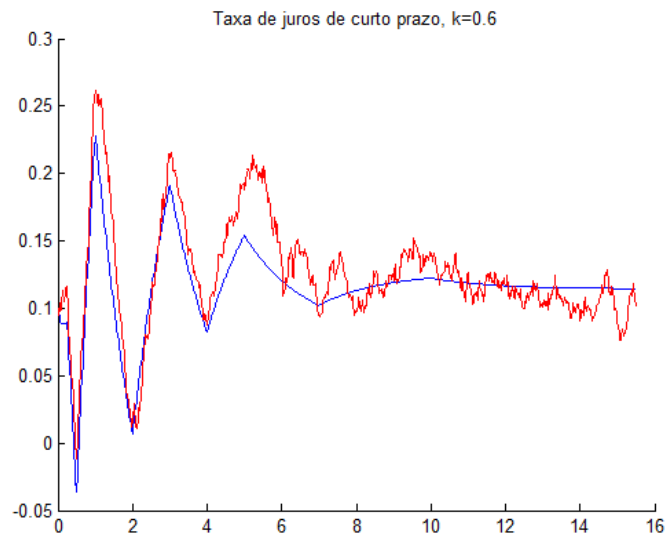


Figura 4. Taxa spot com $k = 0.6$ e $\nu = 1$, caso determinístico e estocástico - 20/05/2009

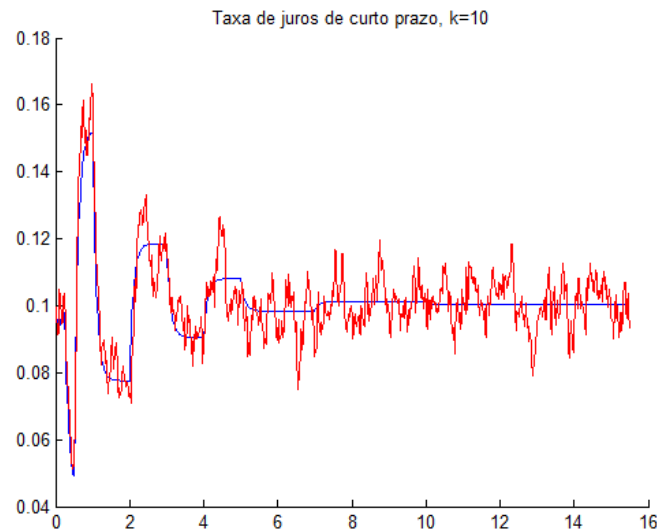


Figura 5. Taxa spot com $k = 10$ e $\nu = 1$, caso determinístico e estocástico - 20/05/2009

As figuras 4 e 5 apresentam a taxa spot para o caso específico $\nu = 1$, a análise para os outros valores de ν é semelhante, todavia é interessante destacar que conforme apresentado na figura 1 na página 20, para o caso $\nu = 1$ a taxa de juros instantânea pode assumir valores negativos, mas para os casos $\nu = 1/2$ e $\nu = 0$, a taxa spot só pode assumir valores positivos, essa relação pode ser conferida nas figuras 18, 19, 20 e 21 do anexo 2.

Uma vez que para a ordem dominante, isto é, $O(1)$, a curva de desconto é dada pela função

$$Z \approx e^{-\int_0^t r(s) ds}$$

onde $r = g(X) = g(\bar{X}(t) + \lambda(t)Y(t))$ e \bar{X} é função de k , pode-se constatar que o valor assumido pelo parâmetro k influencia o formato da curva de desconto ajustada pelo modelo. Corroborando com o resultado didático da figura 3, as figuras 6 e 7 mostram as curvas de desconto ajustada pelo modelo para k , respectivamente, igual a 0.6 e 10.

Ao observar estas figuras verificamos que quanto maior o valor do parâmetro k mais controlada são as oscilações da curva de de desconto ajustada pelo modelo gBK .

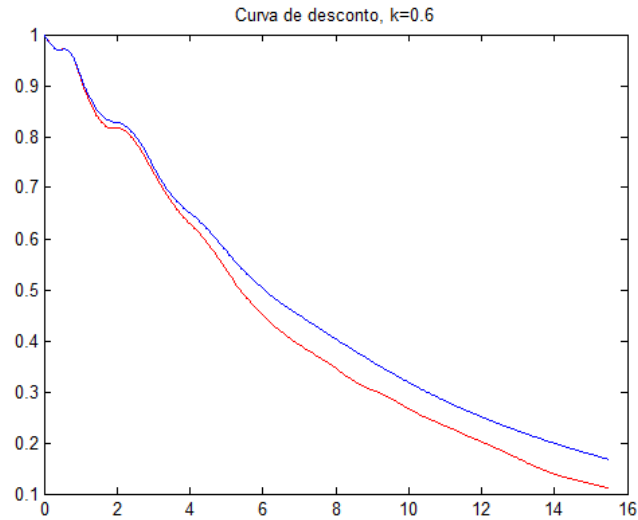


Figura 6. Curva de desconto com $k = 0.6$ e $\nu = 1$, caso determinístico e estocástico - 20/05/2009

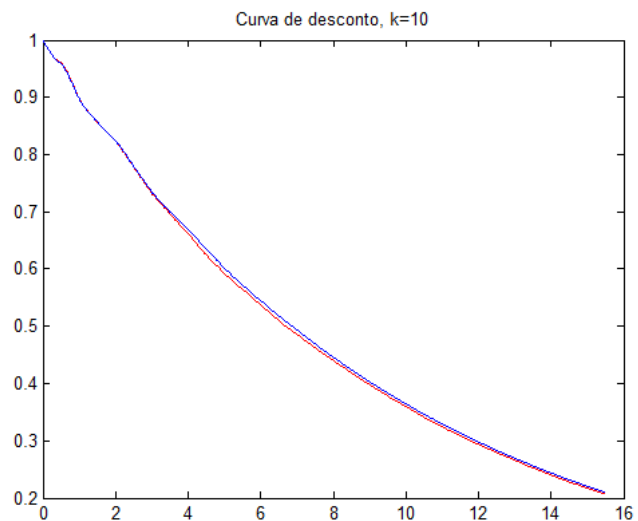


Figura 7. Curva de desconto com $k = 10$ e $\nu = 1$, caso determinístico e estocástico - 20/05/2009

Não são apresentadas as curvas de desconto para os casos em que $\nu \neq 1$ devido a semelhança entre as figuras, a análise pode ser estendida a todos os casos sem perdas.

As figuras 8 e 9 introduzem um resultado interessante. Nelas observa-se que com $k = 0.6$ além de \bar{X} oscilar em um intervalo maior que quando $k = 10$, ele demora mais tempo para assumir seu valor T_i , enquanto que para $k = 10$ isso ocorre mais rapidamente. O mais importante resultado proveniente dessa análise decorre do fato do título de desconto ser uma função de $\bar{X}(T)$. Uma vez que $Z \approx \exp(-\int_0^t r(\bar{X}(t) + \lambda(t)Y(t)) ds)$, as oscilações

observadas em $r(t)$ ao serem integradas são amortecidas, suavizadas, mas ainda mantêm-se presente. Note que a taxa spot apresentada na figura 4 apresenta o mesmo padrão de comportamento que o valor esperado da variável de estado X , conforme pode ser observado pela figura 8. Comparação semelhante pode ser feita entre as figuras 5 e 9. Este resultado é intuitivo, posto que a taxa de juros instantânea é função de \bar{X} . É importante notar que quanto maior é a velocidade de reversão a média mais rapidamente a variável que determina o comportamento da taxa de juros muda de valor em um determinado intervalo $[T_{i-1}, T_i]$ e é esta rapidez em retomar a média que faz com que as oscilações da taxa spot sejam reduzidas e, conseqüentemente, as oscilações da curva de desconto também.

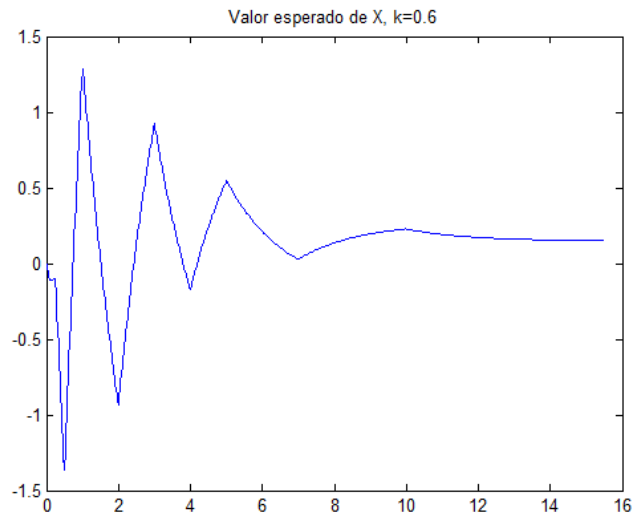


Figura 8. $\bar{X}(t)$ com $k = 0.6$ e $\nu = 1$, caso determinístico e estocástico - 20/05/2009

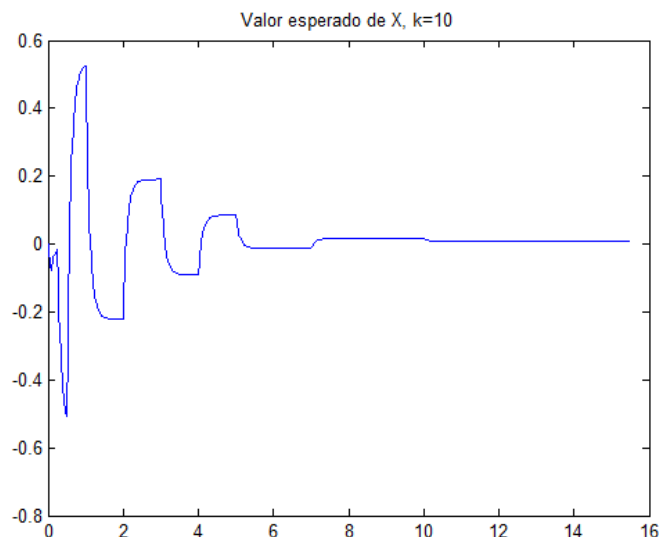


Figura 9. $\bar{X}(t)$ com $k = 10$ e $\nu = 1$, caso determinístico e estocástico - 20/05/2009

A análise decorrente das figuras 8 e 9 pode ser generalizada para quaisquer valores de ν sem perda.

Uma vez exposta a importância do parâmetro k na calibragem da curva de desconto aqui proposta, vale ressaltar que o principal interesse dos tomadores de decisões está

centrado na curva de rendimento e não na curva de desconto, uma vez que a primeira apresenta o rendimento para cada nível de maturidade. Prever a curva de rendimentos é um dos objetivos dos economistas que estudam estrutura a termo, porém como o valor dos rendimentos não são conhecidos para todo o intervalo, métodos de previsão necessitam do auxílio de métodos de interpolação. Conforme explicitado na introdução deste trabalho, a literatura concernente a ETTJ utiliza métodos de interpolação que, neste trabalho, convencionamos chamar de não estrutural, isto é, sem base em um modelo. A calibração adotada visa suprir essa lacuna e o modelo gBK aqui apresentado pode ser entendido como um critério de interpolação (a interpolação, neste contexto, sugere a estrutura implicada pelo modelo) da estrutura a termo da taxa de juros. A figura 10 apresenta a curva de rendimento calibrada, interpolada, para $k = 0.6$, $\alpha = 0.35$ e θ_i apresentados na tabela 2.

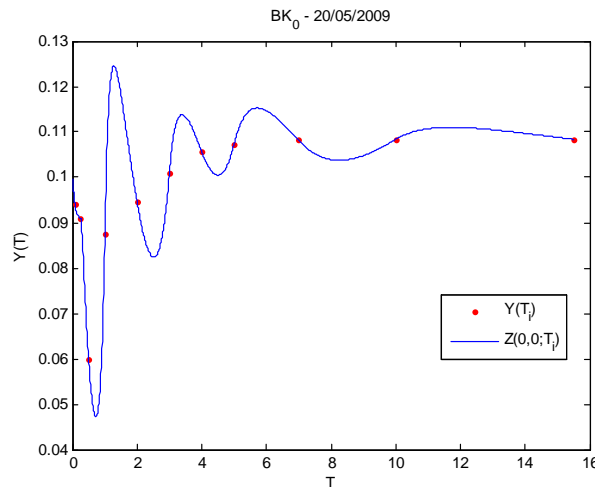


Figura 10. Curva de rendimento calibrada por BK para $O(1)$ com $k = 0.6$

A calibragem da curva de rendimentos apresenta um visível problema de não monotonicidade entre os vértices interpolados, pois, embora a curva ajustada satisfaça a condição de não arbitragem esta oscila consideravelmente entre os pontos observados fazendo com que a curva ajustada alterne a inclinação e a concavidade com a evolução da maturidade. A negação da condição de monotonicidade é difícil de ser defendida. Nesse sentido, também considerar-se-á os diferentes valores para k na calibragem das curvas de rendimento. A figura 11 apresenta as curvas calibradas para para $k = 0.1$, $k = 0.9$ e $k = 10$.

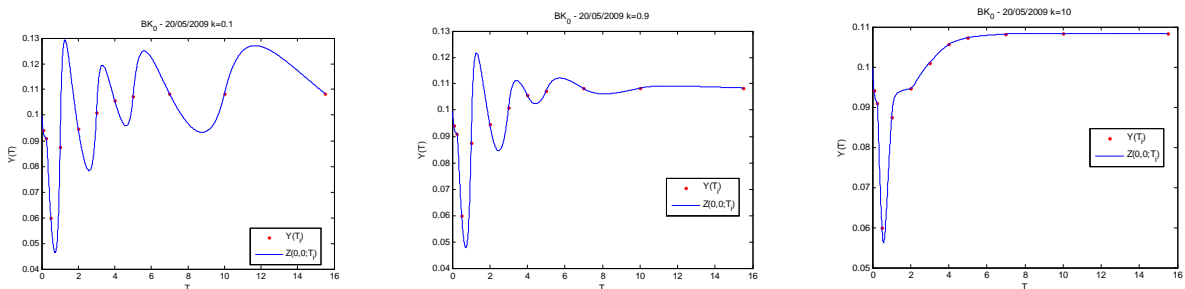


Figura 11. Curvas de rendimento calibradas por BK para $O(1)$ com $k = 0.1$, $k = 0.9$ e $k = 10$

As curvas de rendimentos calibradas são mais suaves quanto maior é o valor assumido por k , tal como ocorrido com as curvas de desconto. Pode-se constatar que a irregularidade

da curva de rendimento depende da irregularidade da curva de desconto, essa observação além de intuitiva corrobora com o modelo apresentado uma vez que a curva de rendimento é apenas uma função logarítmica da curva de desconto. O caráter intuitivo resulta da própria definição dada a curva de rendimento pelo modelo. Assim como explicitado na introdução deste trabalho, há duas definições frequentemente utilizadas, são elas:

$$\widehat{Y} = -\frac{\partial \log Z(T)}{\partial T} \quad (73)$$

$$\widehat{Y} = -\frac{\log Z(T)}{T} \quad (74)$$

A função (73) pode ser reescrita no mesmo formato de (74), como segue

$$\widehat{Y} = -\frac{[\log Z(T_i) - \log Z(T_0)]}{T_i - T_0}$$

o que ocorre é que quando $T_0 \rightarrow 0$ obtém-se uma aproximação da derivada. A diferenciação de uma função amplifica as variações, caso elas existam e sejam menos aparentes, é esta característica que dá o caráter intuitivo das maiores oscilações apresentadas pelas curvas de rendimento.

É visível a importância do parâmetro k na calibração. Neste contexto, surge um novo problema, o qual reside na determinação de um método que possibilite a determinação do parâmetro k de modo não arbitrário. Para solucionar este problema será realizada uma calibragem por meio da minimização da norma da segunda derivada da curva de rendimentos. Este método de calibragem será apresentado na subseção 4.3.

4.2 Calibragem para dados disponíveis em 20 de Julho de 2009

A mudança dos dados observados modifica o valor dos parâmetros que satisfazem a condição de não arbitragem e, portanto, podem também influenciar no formato das curvas de desconto e de rendimento calibradas. Com a finalidade de verificar a aplicação do modelo gBK para diferentes dados observados é realizada a calibragem das curvas de desconto e rendimento para os dados apresentados na tabela 3, que possuem data inicial referente a 20 de Julho de 2009.

Tabela 3. Curva de desconto (20/07/2009)

T_i	$D(T_i)$
0.08	0.992745
0.25	0.979452
0.51	0.959640
1.00	0.918695
2.00	0.822180
3.00	0.727842
4.00	0.641748
5.00	0.566667
7.00	0.440376
10.0	0.309043
15.5	0.161782

A fim de verificar a afirmação de que os parâmetros θ_i e a forma da curva calibrada mudam quando modificam-se os dados observados, a primeira calibragem realizada é feita para $k = 0.6$ e $\alpha = 0.35$, tal como no caso anterior. Os parâmetros encontrados são apresentados na tabela 4.

Tabela 4. θ_i para BK . Calibragem até $O(1)$ e $O(\varepsilon^2)$ - 20/07/2009

T_i	$\theta_i(BK_0)$	$\theta_i(BK_2)$
0.08	-0.64511	-0.70498
0.25	-0.86525	-0.91953
0.51	0.56788	0.52120
1.00	0.02941	-0.00860
2.00	0.50670	0.47973
3.00	0.05944	0.04099
4.00	0.34474	0.32422
5.00	0.07844	0.06240
7.00	0.25575	0.23677
10.0	0.10801	0.23677
15.5	0.17707	0.15802

Uma leitura dos parâmetros, sem considerar as curvas calibradas, conduz a conclusão de que para esses dados a calibração, considerando $k = 0.6$ e $\alpha = 0.35$, deve apresentar um comportamento menos oscilante, uma vez que os parâmetros não mais alternam-se positiva e negativamente e a amplitude da diferença entre os valores de θ_i é menor que a apresentada para os dados do dia 20 de maio de 2009. A figura 12 mostra a curva calibrada para $\nu = 0$, isto é, para o modelo BK . Não serão apresentadas as curvas para $\nu = 1$ e $\nu = 1/2$ devido a semelhança entre elas.

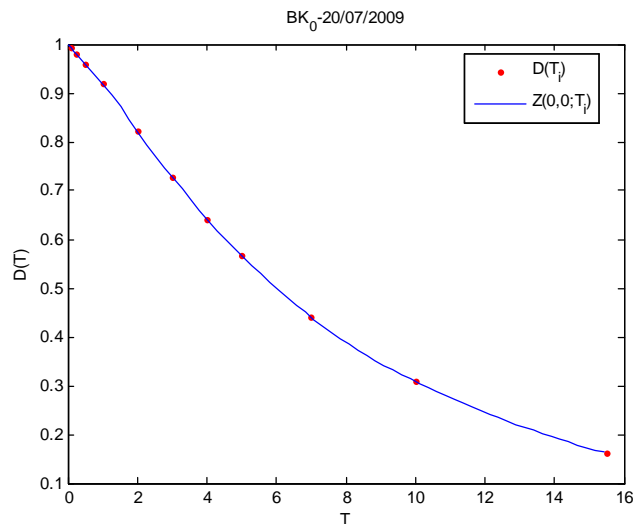


Figura 12. Curva de desconto interpolada por BK para $O(1)$ - 20/07/2009.

Corroborando com a interpretação dada aos parâmetros a curva de desconto calibrada, diferentemente do caso anterior, apresenta um comportamento sem oscilações e sem mudanças de concavidade. Com o intuito de verificar, para esses dados, qual o efeito de k assumir um valor muito pequeno realizou-se a calibragem utilizando $k = 0.001$, dessa forma, pode-se observar que a curva calibrada continua suave conforme mostra a figura 13.

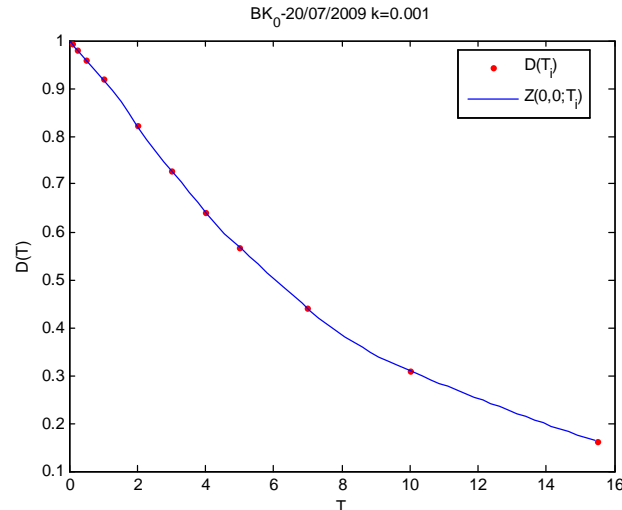


Figura 13. Curva de desconto interpolada por BK para $O(1)$ para $k = 0.001$ - 20/07/2009

É conclusivo, portanto, que para parâmetros k iguais e séries distintas a calibragem das curvas ocorre de maneira diferente. Observou-se que mesmo diante de um k muito pequeno a curva calibrada para os dados referentes ao dia 7 de Julho de 2009 apresentou um comportamento suave. Como discutido anteriormente, a definição de curva de rendimento adotada pelo modelo amplia as variações ocorridas na curva de desconto. Nesse sentido, é apresentada, na figura 14, a curva de rendimento com $k = 0.6$, observa-se que embora ela apresente leves oscilações, quando comparada com a figura 4, pode-se observar que ela apresenta uma curvatura bem mais controlada que a do caso apresentado na figura 4.

Figura 14. Curva de Rendimento interpolada por BK para $O(1)$ para $k = 0.6$ - 20/07/2009

Para a data inicial 20 de julho de 2009, a curva de rendimento calibrada considerando $k = 10$ praticamente não apresenta problemas de oscilação ou de concavidade, como pode ser visto na figura 15. Nota-se que há uma pequeno problema de não monotonicidade somente para os primeiros vencimentos. Neste sentido, pode-se concluir que consoante o modelo gBK , quanto maior for o valor do parâmetro k mais bem comportada, isto é, mais monótona é a curva calibrada, portanto, a determinação do valor do parâmetro k é de crucial importância para este modelo.

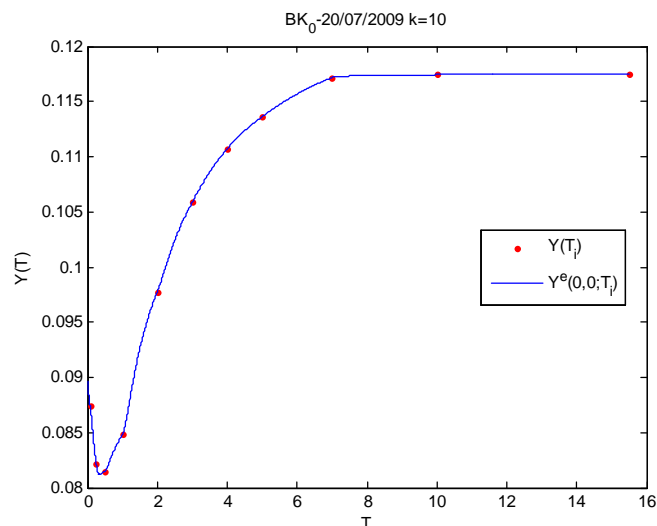


Figura 15. Curva de Rendimento interpolada por BK para $O(1)$ para $k = 10 - 20/07/2009$

Uma vez realizada a calibragem por meio da solução do sistema de equações (71) para distintos dados observou-se que o valor dos parâmetros além de garantir a condição de não arbitragem determina o formato assumido pelas curvas calibradas. A importância apresentada pelo parâmetro k pode conduzir à seguinte questão:

- A minimização da norma da segunda derivada da curva de rendimentos possibilitaria a determinação do parâmetro k de forma endógena ao modelo, fornecendo, dessa forma, uma curva com propriedades desejáveis, isto é, uma curva cuja curvatura é controlada e, portanto, uma curva monótona?

Essa questão será respondida na subseção seguinte.

4.3 Reprodução da curva de desconto observada por meio da minimização da norma da segunda derivada da curva de rendimentos

Na subseção anterior verificou-se a importância do valor assumido pelo parâmetro k . Todavia, a necessidade de controlar a curvatura implicou o desenvolvimento de um método no qual escolha de k não fosse discricionária. Para tal, é apresentado nesta subseção o seguinte problema de minimização

$$\begin{cases} \text{Min}_{k, \theta_i} \left(\|\hat{Y}''\|^2 \right) \\ \text{sa. } \hat{Y}(T_i) = Y(T_i) \end{cases}$$

A minimização da norma da segunda derivada da curva de rendimentos tem o objetivo de controlar as variações entre os nós de interpolação das curvas calibradas. Neste problema, a restrição que é dada pela condição de não arbitragem garante a reprodução da curva observada.

Ciente da possibilidade de existência de diversos mínimos locais, as estimativas iniciais para os dados referentes as datas 20 de Maio e 20 de Julho de 2009 foram iguais aos valores apresentados em 4.1, respectivamente, $k = 10$ e $k = 0.6$, enquanto a estimativa inicial para os parâmetros θ foi igual a 1 para todos os elementos do vetor θ . Neste contexto, a não discricionariedade do parâmetro k limita-se a determinação exata de seu valor a partir de uma estimativa inicial sugerida pelo método apresentado na seção anterior. Portanto, a metodologia proposta por meio da minimização determina o valor exato dos parâmetros determinando-os simultaneamente.

As figuras 16 e 17 mostram as curvas de desconto e de rendimento calibradas para o caso BK por meio do método de minimização, respectivamente, para as datas iniciais 20 de Maio e 20 de Julho de 2009. Para os dados referentes ao mês de maio foi encontrado $k = 11.6695$. Já para o mês de julho o valor de k que minimiza a segunda derivada da curva de rendimento é 3.3386. Os valores dos parâmetros θ encontram-se no anexo. Assim como na seção anterior não serão apresentadas as curvas para os outros casos devido a grande semelhança entre elas.

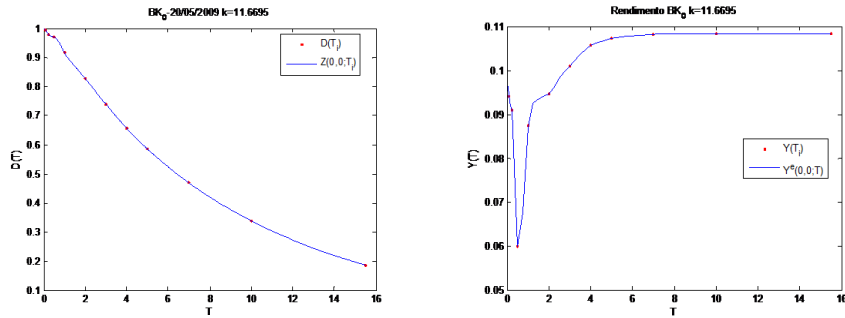


Figura 16. Curvas de desconto e de rendimento interpoladas por BK para $O(1)$ para $k = 11.6695 - 20/05/2009$

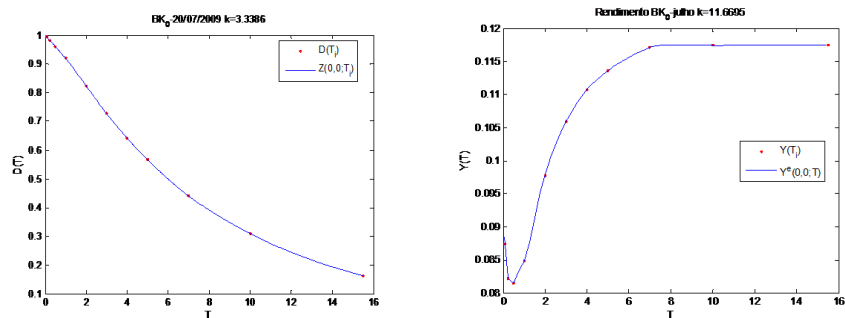


Figura 17. Curvas de desconto e de rendimento interpoladas por BK para $O(1)$ para $k = 3.3386 - 20/07/2009$

O método de minimização resolveu a questão da determinação do valor exato para o parâmetro k ao considerá-lo endógeno. Todavia, pode-se ainda minimizar a norma tomando k endógeno e constante por intervalo. A ideia de tornar k constante por intervalo foi motivada pelo desejo em se obter uma curva totalmente monótona. Não obstante, o método de minimização sob a hipótese de k constante por intervalo, produziu resultados inconclusivos uma vez que não foi possível encontrar o ponto mínimo da função, devido ao algoritmo atingir o critério de parada antes de alcançar o ponto mínimo. Este resultado, leva a tentativa de novas soluções com a finalidade de se obter curvas calibradas com curvaturas mais controladas possíveis e que sejam monótonas. Uma sugestão para trabalhos futuros seria a mudança da base na implementação do método de colocação. É possível, que a dificuldade do algoritmo alcançar um resultado desejado provenha da simplicidade da base estabelecida neste trabalho. A substituição desta por splines ou qualquer outra aproximação mais complexa pode ser que permita a calibragem considerando k com uma função que varia.

5 Uma abordagem exata

Na seção anterior foi apresentada a solução do problema de calibragem a partir da hipótese de não arbitragem por meio de métodos numéricos. Nesta seção este problema será resolvido de forma analítica. Há dois objetivos aqui propostos. O primeiro é inverter, de forma exata, o parâmetro θ para quaisquer valores de ν utilizando a definição contínua da curva de rendimento e uma versão de baixa ordem da fórmula aproximada. O segundo consiste em inverter, exatamente, o modelo para o parâmetro θ , considerando o caso particular de HW , a partir da definição discreta da curva de rendimentos. São mantidas as pressuposições de k e $\tilde{\alpha}$ constantes e θ constante por intervalo.

5.1 Caso geral

Uma forma de explicitar o parâmetro θ para qualquer valor de ν , de forma exata, é a partir da definição contínua da curva de rendimento dada da seguinte forma:

$$\hat{Y} = -\frac{\partial \log(Z)}{\partial T} \quad (75)$$

Para o modelo gBK $Z(0, 0, T) = e^{-\phi^{(0)}(T)}$, dada que a dependência de $\phi(T)$ em θ é tal que permite uma inversão explícita para a ordem dominante, escolhe-se inverter o parâmetro θ somente para a ordem $O(1)$. Já para $Z(0, 0, T) = e^{-\phi^{(0)}(T) - \varepsilon^2 \phi^{(0)}(T)}$, isto é, para a primeira correção, a inversão do parâmetro θ não é possível. Dessa forma, será utilizado $Z(0, 0, T) = e^{-\phi^{(0)}(T)}$. Utilizando (52), $Z(T)$ pode ser definido da seguinte forma:

$$Z(T) = e^{-\int_0^T r(s) ds} \quad (76)$$

com o auxílio de (16) e (24) e definindo θ constante por intervalo

$$\theta(t) = \sum_{j=1}^i \theta_j I_j(t)$$

onde,

$$I_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } T_{j-1} < t < T_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é uma base simples do problema de colocação apresentado na metodologia. A escolha dessa base de simplicidade extrema é que permite a inversão do parâmetro θ da forma como apresentada nesta seção. A escolha de bases mais complexas, para a solução exata, pode tornar demasiada complexa a inversão do parâmetro θ . Mas, vale ressaltar que para o caso numérico apresentado na seção anterior bases mais complexas podem ser desejáveis.

A partir das equações (75), (76) e (58), a curva de rendimentos pode ser reescrita como segue

$$Y_i = r(T_i) = r_0 \left(1 + \nu \bar{X}(T_i)\right)^{\frac{1}{\nu}}$$

Dessa forma,

$$\bar{X}(T_i) = \frac{\left(\frac{Y_i}{r_0}\right)^\nu - 1}{\nu}$$

Substituindo (58) em (24), a definição de $\bar{X}(T_i)$ é dada como segue

$$\begin{aligned}\bar{X}(T_i) &= e^{-kT_i} \int_0^{T_i} \left(\sum_{j=1}^i \theta_j I_j(s) \right) e^{-ks} ds \\ \bar{X}(T_i) &= e^{-kT_i} \sum_{j=1}^i \theta_j \int_0^{T_i} I_j(s) e^{-ks} ds\end{aligned}\quad (77)$$

Renomeando os termos da equação (77)

$$\begin{aligned}\int_0^{T_i} I_j(s) e^{-ks} ds &= w_{ij} = W \\ \theta_j &= \theta\end{aligned}$$

onde W é uma matriz triangular inferior e θ é um vetor coluna. Portanto,

$$\left(\frac{\left(\frac{Y_i}{r_0}\right)^\nu - 1}{\nu} \right) e^{kT_i} = W\theta \quad (78)$$

Chamando o primeiro termo da equação (78) de $b_i = b$, onde b é um vetor coluna, pode-se explicitar θ em notação matricial. Note que a matriz W por ser triangular inferior não precisa ser invertida, somente uma substituição a frente resolve o sistema, como explicitado abaixo.

$$\theta = bW \quad (79)$$

Para explicitar o algoritmo que determina a inversão exata para cada θ_i é necessário definir cada elemento do vetor θ em (79). Neste contexto, toma-se

$$b_i = \sum_{j=1}^i \theta_j w_{ij}$$

onde

$$w_{ij} = \begin{cases} \int_{T_{j-1}}^{\text{Min}(\text{Max}(T_i, T_{j-1}), T_j)} e^{ks} ds, & \text{se } i \geq j \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

ou seja,

$$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{k} e^{k \text{Min}(\text{Max}(T_i, T_{j-1}), T_j)} - e^{kT_{j-1}}, & \text{se } i \geq j \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = \theta_1 w_{11} \\ b_2 = \theta_1 w_{21} + \theta_2 w_{22} \\ \vdots \\ b_i = \theta_1 w_{i1} + \dots + \theta_i w_{ii} \end{array} \right.$$

Invertendo para θ

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \frac{b_1}{w_{11}} \\ \theta_2 = \frac{b_2 - \theta_1 w_{21}}{w_{22}} \\ \vdots \\ \theta_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \theta_j w_{ij}}{w_{ii}} \end{array} \right. \quad (80)$$

Portanto, para qualquer valor de ν , os parâmetros θ_i podem ser definidos com em (80). Este é um resultado geral que permite que a calibragem seja realizada sem o uso de métodos numéricos. Todavia, uma vez que obtém-se somente o vetor θ é necessário lançar mão de algum método para determinar o valor de k a ser utilizado. Uma alternativa é considerar k encontrado em 4.1.2.

5.2 Caso específico, $\nu = 1$

Na subseção anterior foi possível inverter o modelo, para sua fórmula de baixa ordem, escrevendo θ como função de $D(T_i)$ e dos parâmetros exógenos k e α . Agora é apresentada aqui a solução exata dos parâmetros θ_i para o caso específico em que $\nu = 1$. Para tal, vale ressaltar que para a fórmula exata, o caso *HW* com k e α constantes, tem-se

$$\lambda(t) = e^{-kt} \quad (81)$$

$$\alpha(t) = \tilde{\alpha} e^{kt} \quad (82)$$

$$\bar{X}(t) = e^{-kt} \int_0^t \theta(s) e^{ks} ds \quad (83)$$

Ao substituir (16) em (26), pode-se observar que para o caso *HW* $r = r(t, y)$ é dado por:

$$r(t, y) = r_0 (1 + \bar{X} + \lambda(t) y) \quad (84)$$

Uma vez que $\phi(t, y, T) = \phi^{(0)}(t, y, T) + \phi^{(2)}(t, y, T)$ e $Z(t, y, T) = e^{-\phi(t, y, T)}$, tem-se:

$$Z(t, y, T) = e^{-(\phi^{(0)}(t, y, T) + \phi^{(2)}(t, y, T))} \quad (85)$$

onde $\phi^{(0)}$ é

$$\phi^{(0)}(t, y, T) = R(t, y, T) = \int_t^T r(s, y) ds \quad (86)$$

e o termo de correção é

$$\phi^{(2)}(t, y, T) = -\frac{1}{2}r_0^2 \int_t^T \alpha^2(s) \left(\int_s^T \lambda(s') ds' \right) ds \quad (87)$$

A partir da condição (54) de não arbitragem tem-se

$$Z(0, 0, T_i) = e^{-\phi^{(0)}(T) - \phi^{(2)}(T)} \quad (88)$$

Substituindo (86) e (87) em (88), obtém-se

$$e^{-\int_t^T r(s, y) ds - \frac{1}{2}r_0^2 \int_t^T \alpha^2(s) \left(\int_s^T \lambda(s') ds' \right) ds} = D(T_i) \quad (89)$$

Aplicando log de ambos os lados e utilizando (87)

$$-\int_t^T r(s, y) ds - \phi^{(2)} = \log D(T_i) \quad (90)$$

Substituindo (84) em (90), tem-se

$$\begin{aligned} -\int_0^{T_i} (r_0 + r_0 \bar{X}(s)) ds - \phi^{(2)} &= \log D(T_i) \\ \int_0^{T_i} \bar{X}(s) ds &= -\frac{\log D(T_i) + \phi^{(2)}}{r_0} + T_i \end{aligned} \quad (91)$$

A inversão para o parâmetro θ exige que o primeiro termo de (91) seja explicitado. Neste sentido, é necessário assumir θ constante por intervalo na forma específica apresentada em (58). Dessa forma, observa-se que

$$\bar{X}(s) = \lambda(s) \int_0^s \frac{\theta(s')}{\lambda(s')} ds'$$

Substituindo (58) na equação acima e integrando ambos os lados, a inversão do parâmetro θ decorre como segue

$$\begin{aligned} \bar{X}(s) &= e^{-ks} \int_0^s \sum_{j=1}^i \theta_j I_j(s') e^{ks'} ds' \\ \int_0^{T_i} \bar{X}(s) ds &= \int_0^{T_i} e^{-ks} \int_0^s \sum_{j=1}^i \theta_j I_j(s') e^{ks'} ds' ds \\ \int_0^{T_i} \bar{X}(s) ds &= \sum_{j=1}^i \theta_j \int_0^{T_i} \int_0^s e^{-ks} e^{ks'} I_j(s') ds' ds \\ \int_0^{T_i} \bar{X}(s) ds &= \sum_{j=1}^i \theta_j \int_0^{T_i} \int_{s'}^{T_i} e^{-ks} e^{ks'} I_j(s') ds' ds \end{aligned}$$

$$\int_0^{T_i} \bar{X}(s) ds = \sum_{j=1}^i \theta_j \int_0^{T_i} e^{-ks} I_j(s) \left[-\frac{1}{k} (e^{-kT_i} - e^{-ks}) \right] ds$$

$$\int_0^{T_i} \bar{X}(s) ds = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^i \theta_j \left[\int_0^{T_i} I_j(s) ds - e^{-kT_i} \int_0^{T_i} e^{ks} I_j(s) ds \right]$$

Reescrevendo em termos dos índices i e j .

$$\int_0^{T_i} \bar{X}(s) ds = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^i \theta_j \left[\int_{T_{j-1}}^{T_j} I_j(s) ds - e^{-kT_i} \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{ks} I_j(s) ds \right]$$

$$\int_0^{T_i} \bar{X}(s) ds = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^i \theta_j \left[T_j - T_{j-1} - e^{-kT_i} \left(\frac{e^{-kT_j} - e^{-kT_{j-1}}}{k} \right) \right]$$

Renomeando o termo entre colchetes por

$$K_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i < j \\ T_j - T_{j-1} - e^{-kT_i} \left(\frac{e^{-kT_j} - e^{-kT_{j-1}}}{k} \right), & \text{se } i > j \end{cases}$$

Tem-se

$$\int_0^{T_i} \bar{X}(s) ds = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^i \theta_j K_{ij}$$

Em formato matricial $\theta K/k = b$, sendo K uma matriz triangular inferior, θ um vetor coluna de parâmetros θ_i , k um escalar e $b = b_i$ sendo outro vetor coluna. Dessa forma, pode-se explicitar $\theta = kbK$. Especificamente

$$b_i = \frac{K_{ij} \sum_{j=1}^i \theta_j}{k}$$

Invertendo para cada θ_i

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{k}{K_{11}} b_1 \\ \theta_2 &= \frac{kb_2 - K_{21}\theta_1}{K_{22}} \\ &\vdots \\ \theta_i &= \frac{kb_i - \sum_{j=1}^{i-1} \theta_j K_{ij}}{K_{ii}} \end{aligned} \tag{92}$$

Neste contexto, para o caso específico HW é possível determinar os valores de θ sem o uso de métodos numéricos permitindo que a calibragem das curvas dispense o uso de métodos de otimização numérica. Para ilustrar a eficácia do tratamento analítico a tabela 5 apresenta em sua primeira coluna valores para θ_i encontrados para o modelo HW por meio do método numérico apresentado no capítulo 4. A segunda coluna apresenta os valores para parâmetros θ_i conforme explicitado em (92). A comparação entre esses dois

métodos é possível, visto que em ambos foi utilizada a mesma definição para a curva de rendimento, a definição discreta.

Tabela 5. θ_i obtidos pelo método numérico e exato para o caso específico *HW*

	θ Numérico	θ Exato
θ_1	-1.363003	-1.363003
θ_2	0.052937	0.052936
θ_3	-5.25087	-6.03328
θ_4	5.540833	5.927166

A tabela 5 permite observar que os parâmetros obtidos analiticamente não se distanciam daqueles obtidos pelo método numérico. A proximidade entre os valores apresentados na tabela 5 reflete a possibilidade de construção de um algoritmo simples, de rápida solução computacional, a partir da inversão exata do parâmetro θ .

6 Calibragem aproximada para $\nu \neq 1$, caso contínuo

A calibragem por meio do método de aproximação rompe a limitação imposta pela calibragem analítica para quaisquer valores de ν , conforme apresentado na seção 5.1, a solução exata quando $\nu \neq 1$ é possível somente para a primeira ordem $Z(0, 0, T) = e^{-\phi^{(0)}(T)}$. Já o método de aproximação será realizado ao considerar $Z(0, 0, T) = e^{-\phi^{(0)}(T) - \phi^{(2)}(T)}$. Nesse sentido, a curva de rendimentos é definida da seguinte forma

$$\begin{aligned} Y(T) &= \frac{-\partial \log Z(t, y, T)}{\partial T} = \frac{-\partial \left(-\phi^{(0)}(T) - \phi^{(2)}(T) \right)}{\partial T} = \\ &= \frac{\partial \left(\phi^{(0)}(T) + \phi^{(2)}(T) \right)}{\partial T} \Big|_{t=0, y=0} \end{aligned} \quad (93)$$

Definindo

$$\phi^{(0)}(t, y, T) = \int_t^T r(s, y) ds$$

onde

$$r(s, y) = r_0 [1 + v\bar{X}(s) + v\lambda(s)y]^{1/\nu}$$

e

$$\bar{X}(t) = \lambda(t) \int_0^T \frac{\theta(s)}{\lambda(s)} ds$$

$$\lambda(s) = e^{-\int_0^s k(s) ds}$$

$$\phi^{(2)}(t, y, T) = \frac{1}{2} \int_t^T \alpha^2(s) [R_{yy}(s, y, T) - R_y^2(s, y, T)] ds$$

onde

$$\alpha(t) = \frac{\tilde{\alpha}}{\lambda(t)}$$

$$R_{yy} = \int_0^T r_{yy}(s', y) ds'$$

$$R_y = \int_0^T r_y(s', y) ds'$$

com $\tilde{\alpha}$ constante. Substituindo $\phi^{(0)}(t, y, T)$ e $\phi^{(2)}(t, y, T)$ em (93)

$$Y(T) = \frac{\partial \left(\phi^{(0)}(t, y, T) \right)}{\partial T} \Big|_{t=0, y=0} + \frac{\partial \left(\phi^{(2)}(t, y, T) \right)}{\partial T} \Big|_{t=0, y=0}$$

$$\begin{aligned}
Y(T) &= r(T, 0) + \frac{1}{2} \alpha^2(T) [R_{yy}(T, y, T) - R_y^2(T, y, T)]|_{t=0, y=0} + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \alpha^2(s) [R_{yy}(s, y, T) - R_y^2(s, y, T)] ds|_{y=0}
\end{aligned} \tag{94}$$

Pode-se reescrever os termos de (94) como segue

$$r(T, 0) = r_0 [1 + v \bar{X}(T)]^{1/v}$$

$$[R_{yy}(T, y, T) - R_y^2(T, y, T)] = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^T \alpha^2(s) [R_{yy}(s, y, T) - R_y^2(s, y, T)] ds|_{y=0} &= \frac{1}{2} \left(\int_0^T \alpha^2(s) ds \right) r_{yy}(T, 0) - \\
&- r_y(T, 0) \int_0^T \alpha^2(s) R_y(s, y, T) ds
\end{aligned}$$

Dessa forma, a curva de rendimento (94) pode ser reescrita

$$Y(T) = r_0 [1 + v \bar{X}(T)]^{1/v} + \frac{1}{2} \left(\int_0^T \alpha^2(s) ds \right) r_{yy}(T, 0) - r_y(T, 0) \int_0^T \alpha^2(s) R_y(s, y, T) ds \tag{95}$$

Para solucionar (95) é necessario explicitar $r_y(t, y)$ e $r_{yy}(t, y)$

$$\begin{aligned}
r_y(t, y) &= \frac{1}{v} r_0 [1 + v \bar{X}(t) + v \lambda(t) y]^{\frac{1}{v}-1} v \lambda(t) = \\
&= \lambda(t) r_0^v r(t)^{1-v}
\end{aligned}$$

$$r_{yy}(t, y) = [\lambda(t) r_0^v]^2 (1 - v) r(t)^{1-2v}$$

Com o auxílio de $r_y(t, y)$ e $r_{yy}(t, y)$, (95) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
Y(T) &= r_0 [1 + v \bar{X}(T)]^{1/v} + \frac{1}{4} \tilde{\alpha}^2 (1 - v) [\lambda(t) r_0^v]^2 [e^{2kT} - 1] r(T, 0)^{1-2v} + \\
&+ \lambda(t) r_0 r(T, 0)^{1-v} \frac{\tilde{\alpha}}{2k} \int_0^T r(s, 0)^{1-v} (e^{ks} - e^{-ks}) ds
\end{aligned} \tag{96}$$

Destaca-se que $\bar{X}(T) = \frac{e^{-kT}\theta}{k} (e^{kT} - 1)$. Tomando $\theta = \theta_0 + \xi\theta_1$, pode-se obter o parâmetro θ por meio da aproximação para o caso reduzido. Assim como apresentado na metodologia deste trabalho, o problema reduzido do método de aproximação é definido por $v = 1$, isto é, para o caso *HW*. Tomando $\xi = 1 - v$. Substituindo v por $1 - \xi$ em (96) e passando todos os termos pra esquerda da igualdade, tem-se

$$Y(T) - r_0 [1 + (1 - \xi) \bar{X}(T)]^{1/(1-\xi)} - \frac{1}{4} \tilde{\alpha}^2(\xi) \left[\lambda(t) r_0^{(1-\xi)} \right]^2 [e^{2kT} - 1] r(T, 0)^{1-2(1-\xi)} \quad (97)$$

$$- \lambda(t) r_0 r(T, 0)^\xi \frac{\tilde{\alpha}}{2k} \int_0^T r(s, 0)^\xi (e^{ks} - e^{-ks}) ds = 0$$

O parâmetro θ_0 é obtido a partir da expansão em taylor de (97) tomando $\xi = 0$ até a ordem $O(\xi)$. Enquanto que o parâmetro θ_1 é dado pela expansão em taylor de $Y(T)/\xi$, com $\xi = 0$ até a ordem $O(\xi^2)$.

O método aproximado, assim como a abordagem exata apresentada na seção 5.1 utiliza a definição contínua para a curva de rendimento. A inversão exata do parâmetro θ para quaisquer valores de ν exige $Z = e^{-\phi^{(0)}}$, isto é, ela é possível somente para a ordem dominante. A aproximação aqui realizada considerou $Z = e^{-\phi^{(0)} - \phi^{(2)}}$. Todavia, para fins de comparação e verificação da eficácia da aproximação, o parâmetro θ será calculado tomando $\tilde{\alpha} = 0$, pois uma vez que $\phi^{(2)}(t, y, T) = \frac{1}{2} \int_t^T \alpha^2(s) [R_{yy}(s, y, T) - R_y^2(s, y, T)] ds$ esta condição torna $Z = e^{-\phi^{(0)}}$ e a inversão exata para quaisquer valores de ν pode ser comparada ao método de aproximação. Antes de apresentar os valores dos parâmetros θ para os casos exato e aproximado, são apresentadas a seguir as equações para θ_0 e θ_1 .

$$\theta_0 = \frac{e^{kT} kY - e^{kT} k r_0}{r_0 e^{kT} - r_0}$$

$$\theta_1 = \frac{-e^{kT} k \ln\left(\frac{Y}{r_0}\right) + e^{kT} kY - e^{kT} k r_0}{r_0 e^{kT} - r_0}$$

A tabela 6 mostra os valores dos parâmetros θ_i com $i = 1$ para os casos *HW*, *CIR* e *BK* tanto para o método exato (seção 5.1) quanto para o método aproximado (com $\tilde{\alpha} = 0$). Esses valores são obtidos ao assumir $k = 0.6$.

Tabela 6. θ_1 obtidos a partir da definição contínua da curva de rendimento para a ordem $O(1)$

	$O(1)$	
	θ_1 Exato ($\nu \neq 1$)	θ_1 aproximado ($\tilde{\alpha} = 0$)
<i>HW</i>	-0.6579718865	-0.6917068265
<i>CIR</i>	-0.6674900002	-0.7016122785
<i>BK</i>	-0.7021499989	-0.7115177305

A tabela 6 mostra que utilizando definições iguais para a curva de rendimento, a calibração realizada pelos métodos de aproximação e exato apresentam resultados similares, conforme desejado. Nesse sentido, pode-se concluir que ambos os métodos são capazes de encontrar parâmetros que permitam a calibragem das curvas com base no modelo, sem que seja necessário utilizar o método numérico. Estes resultados, tornam a calibração de fácil implementação computacional, sem violar o comportamento da taxa de juros apresentado pelo modelo *gBK*.

7 Considerações finais

Uma vez que as séries de estrutura a termo da taxa de juros não apresentam valores para todos os vencimentos, é necessário o uso de métodos que possibilitem atribuir valores a todos os vencimentos. A literatura relacionada a ETTJ, satisfaz essa necessidade por meio do uso de métodos de interpolação aplicáveis a qualquer séries de dados. Normalmente, são utilizadas splines cúbicas e exponenciais, como apresentado nos trabalhos de McCulloch (1971, 1975) e Vasicek e Fong (1982), ou ainda outras funções polinomiais. Esta forma de interpolação foi entendida neste trabalho como não estrutural, uma vez que estabelece valores para a ETTJ sem base nos modelos que determinam o processo da mesma.

O método aqui proposto, procurou calibrar a ETTJ com o auxílio de três distintos métodos. O primeiro deles resultou da satisfação da hipótese de não arbitragem por meio da solução numérica do sistema de equações (71), a partir da determinação dos parâmetros θ_i . Este método mostrou a importância do parâmetro k no controle da curvatura das curvas calibradas. Foi possível observar que menores valores para k fazem com que a taxa spot sofra variações graduais enquanto valores maiores de k tornam as variações mais concentradas em torno de T_i . Essas variações são suavizadas pela definição de título de desconto do modelo gBK , $Z = e^{-\int_0^t r(s)ds}$, mas para k pequenos essa suavização não é suficiente para tornar a curva calibrada monótona. Dessa forma, concluiu-se, portanto, que o parâmetro k deve assumir valores suficientemente altos, ao ponto de tornar a curva calibrada o mais monótona possível. Vale ressaltar que um valor suficientemente alto pode ser diferente para séries distintas, conforme pode-se observar para as séries apresentadas nesta dissertação. Com a finalidade de determinar o tamanho desse parâmetro, apresentou-se um problema de otimização da norma da segunda derivada, por meio desse problema pode-se determinar de forma endógena ao modelo o valor para o parâmetro k . Mesmo ao endogeneizar o parâmetro k observou-se uma certa dificuldade em controlar a curvatura para os vencimentos iniciais, na tentativa de contornar este problema, tentou-se endogeneizar k considerando-o constante por intervalo, porém, os resultados foram inconclusivos.

O segundo método de calibração apresentou a inversão dos parâmetros θ_i para quaisquer valores de v , a partir da definição contínua da curva de rendimento. Para o caso específico HW a inversão foi realizada a partir da definição discreta da curva de rendimento. Foi possível, observar que a inversão exata dos parâmetros para o caso HW apresentou valores muito próximos aos encontrados numericamente. Esse resultado possibilita o uso de algoritmos de fácil implementação computacional na calibragem das curvas.

O último método de calibragem apresentado foi o método de aproximação. A partir do problema reduzido onde $v = 1$ é possível inverter o parâmetro θ para quaisquer valores de v . Vale ressaltar que para este método os valores assumidos por θ não se aproximam daqueles encontrados de forma numérica em detrimento do uso da definição contínua para a curva de rendimento. Mas, ao comparar os θ aproximados com aqueles invertidos de forma exata para $v \neq 1$, pode-se observar que os valores resultantes desses dois métodos foram próximos, isso decorreu do uso da definição contínua da curva de rendimento em ambos os métodos. A comparação entre esses dois métodos exigiu que o parâmetro $\tilde{\alpha}$ assumisse o valor zero, fazendo com que o modelo fosse considerado somente até a ordem dominante, tal como utilizado na forma exata para $v \neq 1$.

Conforme explicitado na metodologia desse trabalho, o parâmetro θ é definido como

constante por intervalo, essa definição resulta da base escolhida para o método de colocação utilizado neste trabalho. Como sugestão para trabalhos futuros, pode-se considerar a mudança dessa base de simplicidade extrema para bases mais complexas, como splines ou polinômios de chebychev. Essa mudança metodológica pode apresentar limitações aos métodos exatos e aproximados aqui apresentados, porém a implementação numérica, além de possível pode resultar em curvas calibradas inteiramente monótonas.

O trabalho aqui apresentado, teve a intenção de incitar um novo modo de interpolação, aqui chamado de calibragem da ETTJ a partir do próprio modelo que determina o comportamento da taxa de juros. Uma sugestão pontual de trabalhos posteriores refere-se a análise do desempenho dinâmico do modelo calibrado com o uso do modelo empírico da classe Nelson-Siegel-Svensson, mais especificamente, o modelo AFGNS (Affine Generalized Nelson-Siegel), apresentado por Christensen Diebold e Redebusch (2008). Estes autores utilizaram o modelo de parâmetro de Nelson-Siegel (1987) associado ao trabalho de Diebold-Li (2006) e desenvolveram um modelo de fatores livre de arbitragem. Um trabalho posterior a ser desenvolvido seria utilizar modelo empírico AFGNS com a finalidade de predição da estrutura a termo para dados brasileiros a partir da calibragem desenvolvida e apresentada nessa dissertação.

Referências

- ALMEIDA, C., DUARTE, A., FERNANDES, C. Decomposing and simulating the movements of term structures in emerging eurobonds markets. *Journal of Fixed Income*, v. 8, n. 1, p. 21–31, 1998.
- ALMEIDA, C., GOMES, R., Leite, A. e Vicente, J. Does curvature enhance forecasting? *Technical Report 155*, Banco Central do Brasil, 2007
- ALMEIDA, C. e VICENTE, J. The role of no-arbitrage on forecasting: lessons from a parametric term structure model. *Journal of Banking and Finance*, 2695-2705, 2008.
- BALL, C. A. TOUROS, W. N. Bond Price Dynamics and Options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18:517-531, 1983.
- BJÖRK, T., CHRISTENSEN, B. Interest rate dynamics and consistent forward rate curves. *Mathematical Finance* 9, 323–348, 1999.
- BLACK, F., KARASINSKI, P. Bond and Option Pricing When Short Rates Are Log-normal. *Financial Analysts Journal*, vol.47, no. 4, (July/August 1991):52–59, 1991.
- BLACK, F., SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637-659, 1973.
- BLISS, R. Movements in the term structure of interest rates. *Economic Review Federal Reserve Bank of Atlanta*, 82, 16–33, 1997a.
- COX, J. C. INGERSOLL, J. E. e ROSS, S. A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53, 385-467, 1985.
- CHRISTENSEN, J., DIEBOLD, F., RUDEBUSCH, G. An Arbitrage-Free Generalized Nelson-Siegel Term Structure Model. *PIER Working Papers* 08-030, 2008.
- DIEBOLD, F. X. e LI, C. (2006). Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. *Journal of Econometrics*, v. 130, p. 337–364.
- DUFFIE, D. e KAN, R. A Yield-Factor Model of Interest Rates. *Mathematical Finance* 6, 379–406, 1996.
- FISHER, M., NYCHKA, D., ZERVOS, D.. Fitting the Term Structure of Interest Rates with Smoothing Splines. Board of Governors of the Federal Reserve System, Finance and Economics Discussion Series n. 1995–1, 1995.
- HEATH, D. JARROW, R. e MORTON, A. Bond Pricing and the Term Structure of Interest-Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuating. *Econometrica*, vol. 60, n.º. 1, (January):77–105, 1992.

HO, T., e LEE, S. Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. *Journal of Finance*, vol. 41, n° 5, (December):1011–1029, 1986.

HULL, J. e WHITE, A. Pricing Interest Rate Derivatives Securities. *The Review of Financial Studies*, vol. 3, no. 4, 573–92, 1990.

HUSE, C. Term structure modelling with observable state variables. *Technical report*, London School of Economics, 2007.

LAURINI, M. & HOTTA, L. Extensões bayesianas do modelo de estrutura a termo de Diebold-Li. *Technical Report 40*, IBMEC, 2007.

LITTERMAN, R. e SCHEINKMAN, J. Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income*, vol. 1, 54–61, 1991.

MCCULLOCH, J.H. Measuring the Term Structure of Interest Rates. *Journal of business*. vol.44, 19-31, 1971.

MCCULLOCH, J.H. The tax adjusted yield curve. *Journal of Finance* vol. 30, 811–830, 1975.

MERTON, R. The theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Manangement science*, vol. 4, 141-183, 1973.

NELSON, C.R., SIEGEL, A.F. Parsimonious modeling of yield curve. *Journal of Business*, vol. 60, 473–489, 1987.

SVENSSON, L. E. O. Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. *NBER Working Paper*, n° 4871, 1994.

TOURRUCÔO, F. ; HAGAN, P. S. ; SCHLEINIGER, G. F. . Approximate Formulas for Zero-Coupon Bonds. *Applied Mathematical Finance*, vol. 14, 207-226, 2007.

TOURRUCÔO, F. . Modelos para Títulos de Desconto e Considerações sobre Calibragem. 2007. (Apresentação de Trabalho/Seminário).

VARGA, G. Brazilian (local) Term Structure Forecast in a Factor Model. *VII Encontro Brasileiro de Finanças*, 2007.

VASICEK, O.A. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, vol. 5, 177-188, 1977.

VASICEK, O.A., FONG, H.G. Term structure modeling using exponential splines. *Journal of Finance*, vol. 37, 339–348, 1982.

VIERA NETO, C.A.V. Modelagem da estrutura a termo da taxa de juros e avaliação de contratos derivativos. Tese de doutorado. Universidade de São Paulo. FEA. Departa-

mento de economia. 1999.

VICENTE, J. & TABAk B. Forecasting bond yields in the brazilian fixed income market. *International Journal of Forecasting*, 24(3):490–497. RBE Rio, 2007.

Anexo A - determinação dos parâmetros

Os valores dos parâmetros exógenos k e α decorrem da discretização do processo $X(t)$. A taxa de juros de curto prazo é uma função explícita da variável de estado X

$$r(t) = g(X(t)) = r_0 (1 + \nu X(t))^{\frac{1}{\nu}}$$

Invertendo para X

$$X(t) = \frac{\left(\frac{r(t)}{r_0}\right)^\nu - 1}{\nu}$$

Uma vez que a variável de estado X é definida por

$$dX = (\theta - kX) dt + \alpha dW.$$

Discretizando o processo temos

$$\Delta X_t = (\theta - kX_t) \Delta t + \alpha \varepsilon_t \sqrt{\Delta t},$$

com $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ *i.i.d* e $\Delta X_t := X_{t+1} - X_t$. Assim a regressão

$$Y_t = a + bX_t + \sigma \varepsilon_t$$

com $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ *i.i.d* e $Y_t := \Delta X_t$, permite relacionar os parâmetros a , b da regressão e o desvio do termo do erro nesta, σ , com os parâmetros estimados do processo θ , k e α via

$$a = \theta \Delta t, \quad b = -k \Delta t, \quad \sigma = \alpha \sqrt{\Delta t}$$

Este foi o método utilizado para obtenção dos parâmetros exógenos ao modelo.

Anexo B - Taxa spot

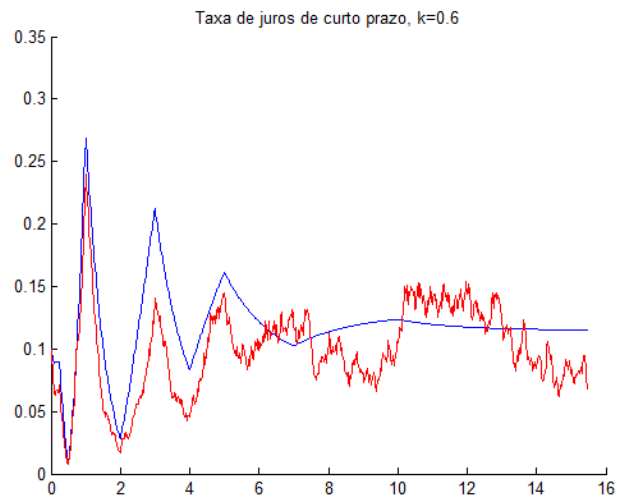


Figura 18. Taxa spot com $k = 0.6$ e $\nu = 1/2$, caso determinístico e estocástico - 20/05/2009

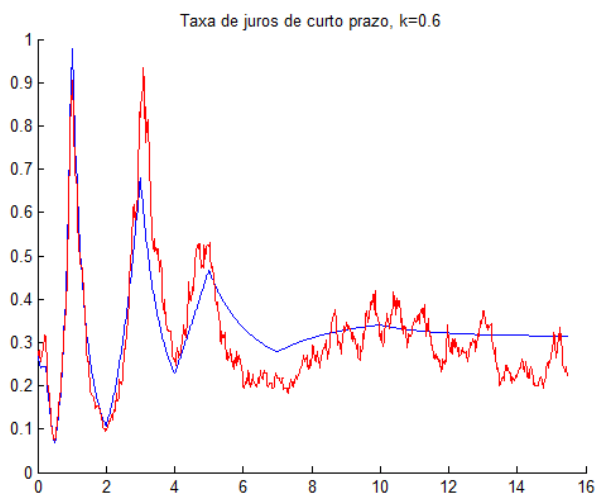


Figura 19. Taxa spot com $k = 0.6$ e $\nu = 0$, caso determinístico e estocástico - 20/05/2009

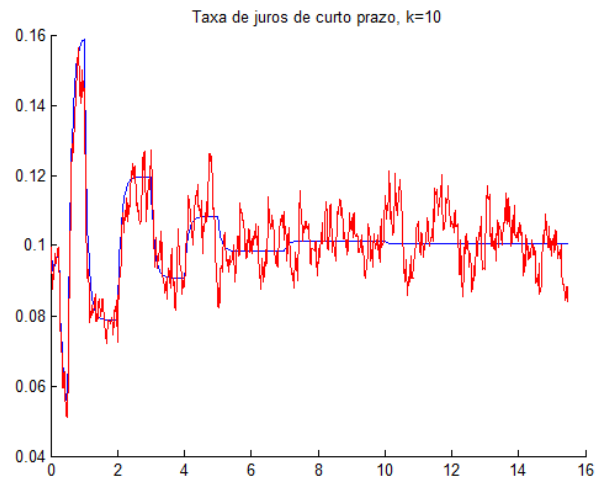


Figura 20. Taxa spot com $k = 10$ e $\nu = 1/2$, caso determinístico e estocástico - 20/05/2009

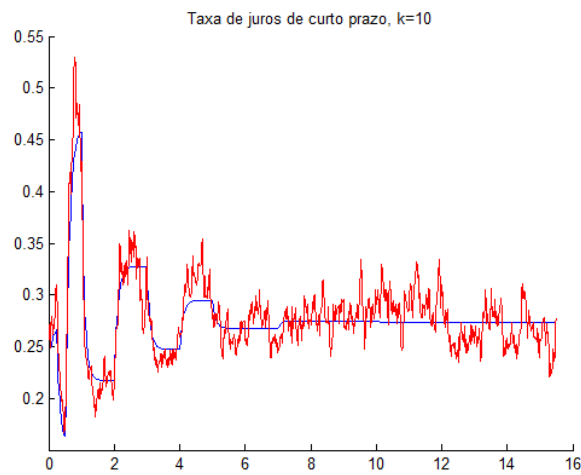


Figura 21. Taxa spot com $k = 10$ e $\nu = 0$, caso determinístico e estocástico - 20/05/2009