UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ALGUMAS ESTIMATIVAS DE AUTOVALOR E DA MÉDIA DE AUTO-FUNÇÃO DO LAPLACIANO DE VARIEDADES RIEMANNIANAS COMPACTAS

Tese de Doutorado

Cinthya Maria Schneider

Porto Alegre, 05 de novembro de 2010.

Tese de Doutorado submetida por Cinthya Maria Schneider[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca Examinadora:

Dr. Jaime Bruck Ripoll (PPGMat-UFRGS)

Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano (PPGMat-UFRGS)

Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito (UFRJ)

Dr. Giovanni da Silva Nunes (UFPel)

Data da Apresentação: 05 de novembro de 2010.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes, de março de 2007 a julho de 2009 e bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, de agosto de 2009 a fevereiro de 2010.

Resumo

Seja Ω uma variedade riemanniana compacta tal que $\partial\Omega = M$ é convexo em média e com curvatura de Ricci limitada inferiormente por $(n-1)k > 0$. Neste trabalho, obtemos uma estimativa superior da média de uma autofunção do problema de Dirichlet $\Delta u = -\delta u$ e $u\big|_M = 0$ e uma estimativa inferior do seu respectivo autovalor. Também obtemos uma estimativa superior para o primeiro autovalor positivo de Ω. Quando M é estritamente convexo, estabelecemos uma relação entre um autovalor do laplaciano Ω e o primeiro autovalor positivo de M. Além disso, no caso em que M é convexo em média e a curvatura de Ricci de Ω positiva, obtemos uma estimativa da área de M em função da dimensão e do volume de Ω e do ínfimo H_0 da curvatura média H de M.

Abstract

Let Ω be a compact Riemannian manifold such that $\partial\Omega = M$ is mean convex and with Ricci curvature bounded below by $(n-1)k > 0$. In this work, we obtain an upper bound for the mean of an eigenfunction of the Dirichlet problem $\Delta u = -\delta u$ and $u\Big|_{M} = 0$ and a lower bound for the corresponding eigenvalue. We also obtain an upper bound for the first positive eigenvalue of Ω. If M is strictly convex, we obtain a relation between an eigenvalue of the Laplacian of Ω and the first positive eigenvalue of M. If M is mean convex and has positive Ricci curvature, we obtain an estimative of the area of M in terms of the dimension and the volume of Ω and in terms of the infimum H_0 of the mean curvature H of M.

Agradecimentos

À Deus pela minha saúde; Ao professor Jaime Bruck Ripoll pelo exemplo, estímulo e paciência; Aos meus pais Protásio e Maria Schneider porque nunca mediram esforços para que eu continuasse minha jornada acadêmica e sempre compreenderam a minha ausência; Aos amigos Giovanni, Lica e Renato pelo apoio e companheirismo; Às minhas colegas de trabalho Daiane, Lineia, Bárbara, Fabíola, Andrea e Cristiana pela acolhida; À diretora do IMEF-FURG Denise, pela compreensão e apoio às minhas idas a Porto Alegre; Aos amigos da pós-graduação do Instituto de Matemática da UFRGS, em especial ao Álvaro; Às Agências de Fomento: Programa de Apoio à Pós Graduação-PROF/CAPES e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq pelo financiamento da bolsa de mestrado durante o período de 03/2007 à 02/2010; À Rosane, secretária do programa de pós-graduação do Instituto de Matemática da UFRGS, pelo carinho e disponibilidade.

Sumário

1 Introdução

Seja N uma variedade riemanniana compacta. O problema do autovalor do laplaciano de N consiste em determinar os números reais δ para os quais existe uma solução não trivial $u \in C^\infty(N)$ da EDP

$$\Delta u + \delta u = 0. \tag{1}$$

tal que $u\big|_{\partial N} = 0$ no caso em que $\partial N \neq \varnothing$. Os valores δ são ditos autovalores e as soluções u são ditas auto-funções do laplaciano de N.

O problema de estimar o primeiro autovalor do laplaciano de variedades riemannianas com curvatura de Ricci positiva ou não-negativa, com ou sem bordo, foi e continua sendo amplamente estudado. Existe atualmente uma vasta literatura sobre o assunto. Nesta introdução, vamos apresentar os teoremas da tese e comentar apenas alguns resultados conhecidos que se relacionam mais de perto com os que obtivemos na tese.

Vamos considerar N com bordo, usamos as notações $\Omega = N$ e $M = \partial\Omega$ e supomos que a curvatura de Ricci de Ω é limitada inferiormente por $(n-1)k > 0$, onde k é uma constante e $n = \dim \Omega$. Denotamos por δ um autovalor positivo genérico do laplaciano de Ω, e por δ_1, λ_1 os primeiros autovalores positivos de Ω e de M, respectivamente. Por $V(\Omega)$ e $A(M)$ denotamos os volumes de Ω e de M e por H a curvatura média não normalizada em relação ao normal exterior, ou seja, o traço do operador $U \longmapsto (\nabla_U \eta)^\top$, onde η é o vetor normal à M apontando para o complementar de Ω. Vamos assumir que o bordo de Ω é convexo em média, ou seja, $H \geq 0$. Seja $H_0 = \inf_M H$.

Seja u uma auto-função qualquer do laplaciano de Ω e δ o autovalor correspondente. Supondo

$$\int_\Omega u^2 = 1,$$

então, no Teorema 1, provamos que

$$\sqrt{H_0}\left|\int_\Omega u\right| < \left(\frac{(n-1)A(M)}{n}\right)^{1/2} \tag{2}$$

e

$$\delta \geq \frac{n(n-1)kA(M)}{(n-1)A(M) - nH_0\left(\displaystyle\int_\Omega u\right)^2}. \tag{3}$$

Estimativas inferiores de δ tem sido obtidas em termos do supremo de u e da geometria do domínio (veja por exemplo [2] e suas referências). Mais próximo ao resultado acima é a seguinte estimativa, obtida por Q. Wang e C. Xia, para o primeiro auto-valor no caso em que N é uma superfície mínima compacta em $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$ com bordo:

$$\delta_1 \geq \frac{4\pi}{\left(\displaystyle\int_N u\right)^2}$$

(supondo $\int_\Omega u^2 = 1$).

Da estimativa (3), como $H_0 \geq 0$, temos $\delta \geq nk$. Em particular, $\delta_1 \geq nk$. Lembramos que para $\Omega = N$ *sem* bordo a estimativa $\delta_1 \geq nk$ é um resultado clássico de Lichnerowicz ([9]).

Para os próximos resultados precisamos introduzir uma definição. Seja $\phi : \Omega \to \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ um mergulho isométrico para algum $m \in \mathbb{N}$. Por um abuso de notação, escrevemos $\phi(\Omega) = \Omega$ e $\phi(M) = M$. Sejam $x \in \Omega$ e

$$d(x) = d(x, \partial\Omega) = \inf\{d(x,y) \mid y \in \partial\Omega\},$$

onde d é a distância riemanniana de $\mathbb{S}^m$. Defina

$$r = \sup\{d(x) \mid x \in \Omega\}.$$

Note que se $m = n = \dim \Omega$, então r é o raio inscrito de Ω.

Seja agora $x_0 \in \Omega$ tal que $r = d(x_0)$. Seja R o raio da menor bola geodésica $B_R(x_0)$ de $\mathbb{S}^m$ centrada em x_0 que contém M. Denotaremos por $\mathcal{A}(M)$ o anel geodésico $B_R(x_0)\backslash B_r(x_0)$ de $\mathbb{S}^m$ de centro x_0 e raios $r < R$.
Seja $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$\sigma(x) = \cos d(x, x_0) - \cos r,$$

Lembrando que todas estas construções dependem de ϕ e de Ω, introduzimos por último

$$\Gamma_\Omega^\phi = \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} \sigma^2. \tag{4}$$

Vamos denotar por $\overrightarrow{H}_\phi$ o vetor curvatura média de ϕ em $\mathbb{R}^{m+1}$, a saber

$$\overrightarrow{H}_\phi = \sum_{i=1}^{n} - \left(\overline{\nabla}_{E_i} E_i\right)^\perp,$$

onde E_i é um referencial ortonormal local em Ω e $\overline{\nabla}$ a conexão riemanniana de $\mathbb{R}^{m+1}$. Pondo

$$H_\phi = \sup_\Omega \left|\overrightarrow{H}_\phi\right|, \tag{5}$$

no Teorema 3, obtemos a seguinte estimativa:

$$\delta_1 \leq \frac{V(\Omega)[(n-1)A(M) - nH_0 V(\Omega)]H_\phi^2}{n(n-1)kA(M)\Gamma_\Omega^\phi} \tag{6}$$

e, como $H_0 \geq 0$,

$$\delta_1 \leq \frac{V(\Omega)H_\phi^2}{nk\Gamma_\Omega^\phi}. \tag{7}$$

Observamos que, como

$$\mathrm{X} := \left\{ \frac{H_\phi^2}{\Gamma_\Omega^\phi} \;\middle|\; \phi : \Omega^n \to \mathbb{S}^m \text{ mergulho isométrico para algum } m \in \mathbb{N} \right\}$$

é não vazio, pelo Teorema de Nash [10], podemos definir

$$\mathcal{I}(\Omega) = \inf \mathrm{X} \tag{8}$$

e, como corolário de (6) e (7), obter estimativas superiores de δ_1 que dependem apenas da geometria de Ω:

$$\delta_1 \leq \frac{V(\Omega)[(n-1)A(M) - nH_0 V(\Omega)]\mathcal{I}(\Omega)}{n(n-1)kA(M)}$$

e também

$$\delta_1 \leq \frac{V(\Omega)\mathcal{I}(\Omega)}{nk}.$$

No mesmo trabalho acima mencionado, Q. Wang e C. Xia obtiveram o seguinte resultado para variedades compactas sem bordo: sendo δ_1 o primeiro autovalor não nulo de uma hipersuperfície N conexa, compacta, *sem* bordo, mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 2)$ então

$$\delta_1 \leq \frac{nA}{(n+1)V}\left(\frac{\upsilon_{n+1}}{V}\right)^{1/(n+1)},$$

onde A e V denotam, nesta ordem, os volumes de N e da região limitada por N, sendo que υ_{n+1} é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$. A igualdade é verdadeira se, e somente se, N é a esfera unitária $\mathbb{S}^n$.

A seguir, estabelecemos uma relação entre δ e λ_1 no caso em que Ω^n é um domínio da esfera unitária $\mathbb{S}^n$. Supomos que o bordo de Ω é estritamente convexo, ou seja, $\exists\ \alpha = \alpha(M) > 0$ tal que

$$\forall\ x \in M, \forall\ U, V \in T_x M,\ B_\eta(U, V) \geq \alpha, \tag{9}$$

onde B_η é a segunda forma fundamental de M em Ω com relação ao vetor normal exterior η. Como consequência desta hipótese, temos que a curvatura média H de M com relação a η é positiva.

Considere $f_p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_p(x) = \langle x, p \rangle, \quad p \in \mathbb{S}^n. \tag{10}$$

É fácil de ver que existe $p \in \mathbb{S}^n$ tal que $\displaystyle\int_M z_p = 0$, onde $z_p(x) = f_p\Big|_M$ (veja Lema 2 do Capítulo 3).
Seja $p_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $\displaystyle\int_M z_{p_0} = 0$ e

$$\int_M z_{p_0}^2 \leq \int_M z_p^2, \ \forall p \in \mathbb{S}^n \text{ tal que } \int_M z_p = 0.$$

Definimos

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Z}(M) = \int_M z_{p_0}^2, \tag{11}$$

e ainda

$$\mathcal{H} := \left(\int_M H^2 \right)^{1/2}. \tag{12}$$

Com as hipóteses e definições acima, no Teorema 4 obtemos

$$\begin{aligned} \alpha\lambda_1 \mathcal{Z} \leq\ & 2A(M)^{1/2}\big((n-1)A(M)^{1/2} + \mathcal{H}\big) + n(n-1)\big(V(\Omega) - V(\Omega)^{1/2}\big) \\ & + \left[2\left(\frac{A(M)}{n}\right)^{1/2} \big((n-1)A(M)^{1/2} + \mathcal{H}\big) + (n-1)(2V(\Omega)^{1/2} - 1) \right] \delta \\ & + \frac{n-1}{n}\delta^2. \end{aligned} \tag{13}$$

As técnicas que vimos utilizando permitem obter alguns resultados de geometria riemanniana: sejam Ω e M como definimos anteriormente. No Teorema 5 provamos que se M é convexo em média ($H \geq H_0 \geq 0$) e $\mathrm{Ric}_\Omega \geq 0$, então

$$A(M) \geq \frac{n}{n-1} H_0 V(\Omega). \tag{14}$$

A prova desse resultado consiste de uma aplicação direta do Teorema 7 para uma solução $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ da equação de Poisson

$$\Delta v = f \tag{15}$$

$$v\Big|_M = 0,$$

onde f é uma função contínua em $\overline{\Omega}$.

Substituindo a hipótese de que $H \geq H_0 \geq 0$ pela hipótese de que $\partial\Omega$ é convexo ($\alpha \geq 0$ em (9)), em 1985, E. Pak, H. Min, O. Yoon e D. Chi em [13] provaram que

$$A^2(M) \geq \frac{n}{(n-1)(1-nk)} V(\Omega) \int_M H. \tag{16}$$

Em verdade, este resultado generaliza uma estimativa obtida por Reilly em [12] que, supondo M convexo e $\mathrm{Ric}_\Omega \geq 0$, obteve

$$A^2(M) \geq \frac{n}{n-1} V(\Omega) \int_M H. \tag{17}$$

As provas de (16) e (17) se baseiam em uma aplicação do Teorema 7 e na existência da solução do problema de Neumann que enunciamos a seguir.

Suponha que f e g são funções contínuas em $\overline{\Omega}$ e M respectivamente tais que

$$\int_M g = \int_\Omega f.$$

Então o problema

$$\Delta v = f \quad \text{em } \Omega$$
$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = g \quad \text{em } M,$$

tem pelo menos uma solução $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Note que (14) é uma consequência direta de (17) sempre que M for convexo.

No Capítulo 2 apresentamos algumas noções preliminares necessárias para a compreensão dos teoremas que serão demonstrados no Capítulo 3. Os resultados conhecidos que usaremos em tais demonstrações estão todos enunciados no Capítulo 4, com demonstrações ou referências, afim de tornar este trabalho mais completo.

2 Preliminares

Neste trabalho vamos considerar N *com* bordo e usaremos as notações $\Omega = N$ e $M = \partial\Omega$.

Denotaremos por δ um autovalor positivo qualquer do laplaciano de Ω e, por δ_1 e λ_1, os primeiros autovalores de Ω e de M, respectivamente.

Seja $\mathfrak{X}(\Omega)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis de Ω.

Definição 1. *A curvatura R de Ω é uma correspondência que a cada par de campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(\Omega)$ associa a aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(\Omega) \to \mathfrak{X}(\Omega)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde $Z \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e ∇ é a conexão riemanniana de Ω.

Definição 2. *O tensor de Ricci de Ω em um ponto $x \in \Omega$ é definido por*

$$\mathrm{Ric}_\Omega(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)E_i, Y \rangle ,$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal qualquer de $T_x\Omega$.

Dado um vetor unitário $e \in T_x\Omega$, o número real $\mathrm{Ric}_\Omega(e,e)$*, que por um abuso de notação vamos escrever* $\mathrm{Ric}_\Omega(e)$*, é dito a curvatura de Ricci em $x \in \Omega$ na direção de e.*

Neste texto, com exceção do Teorema 5, vamos supor que

$$\mathrm{Ric}_\Omega(e) \geq (n-1)k > 0. \tag{18}$$

Mais precisamente, isto significa que para todo $p \in \Omega$, dado $e \in T_p\Omega$ vetor unitário, temos $\mathrm{Ric}_\Omega(e) \geq (n-1)k > 0$.

Definição 3. *Definimos o gradiente de uma função diferenciável* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*, denotado por* $\operatorname{grad}(f)$*, como o campo de vetores de* Ω *dado por*

$$\langle w, \operatorname{grad}(f)(x) \rangle = df_x(w)$$

$\forall\, (x, w) \in T\Omega$.

Definição 4. *Sejam* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável e* X,$Y \in T_x\Omega$ *definidos em uma vizinhança de* x*. Definimos o hessiano de* f *em* x *como o operador bilinear dado por*

$$\operatorname{Hess}(f)(X, Y)(x) = \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y \rangle\, (x).$$

Definição 5. *Dado* $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$*, definimos o divergente de* X *como a função* $\operatorname{div}(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\operatorname{div}(X)(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle\, (x)$$

onde $x \in \Omega$ *e* $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ *é uma base ortonormal de* $T_x\Omega$*.*

Definição 6. *Seja* $f \in C^\infty(\Omega)$*. Definimos o laplaciano de* f *como o operador* $\Delta : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ *dado por*

$$\Delta f(x) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)).$$

Seja $x \in \Omega$. Dada uma base ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ de $T_x\Omega$, temos

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad}(f), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Hess}(f)(E_i, E_i). \end{aligned}$$

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Considere η normal unitário exterior a Ω em p.

Definição 7. *Definimos a segunda forma fundamental de M em Ω com relação a η por*

$$B_\eta(u,v) = \langle \nabla_U N, V \rangle \,,$$

onde $u, v \in T_pM$, U, V são campos de vetores de M definidos em uma vizinhança de $p \in M$ tais que $U(p) = u, V(p) = v$ e N é uma extensão de η a Ω normal a M.

Dizemos que $\partial\Omega = M$ é *convexo* quando $\exists\ \alpha = \alpha(M) \geq 0$ tal que

$$\forall\, x \in M, \forall\, U, V \in T_xM, B_\eta(U,V) \geq \alpha.$$

Quando $\alpha > 0$ dizemos que M é *estritamente convexo*.

3 Prova dos Resultados

Seja Ω variedade riemanniana compacta, $\partial\Omega = M$, $\mathrm{Ric}_\Omega \geq k(n-1) > 0$ e $H_0 = \inf H$, sendo que H é o traço do operador $U \longmapsto (\nabla_U \eta)^\top$, onde η é o vetor normal a M apontando para o complementar de Ω e U é tangente a M.

Teorema 1. *Seja u uma auto-função qualquer do laplaciano em Ω e δ o autovalor correspondente. Supondo*

$$\int_\Omega u^2 = 1,$$

então

$$\sqrt{H_0}\left|\int_\Omega u\right| < \left(\frac{(n-1)A(M)}{n}\right)^{1/2}$$

e

$$\delta \geq \frac{n(n-1)kA(M)}{(n-1)A(M) - nH_0\left(\int_\Omega u\right)^2}.$$

Prova.

Aplicando a fórmula de Reilly (Teorema 7) nas hipóteses do Teorema 1 obtemos

$$\int_\Omega (\Delta u)^2 \geq \int_\Omega |\operatorname{Hess}(u)|^2 + \mathrm{Ric}_\Omega(\operatorname{grad}(u)) + H_0 \int_M \nu^2 \tag{19}$$

onde $\nu = \langle \operatorname{grad}(u), \eta \rangle$.

Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para obtermos $(\Delta u)^2 \leq n|\operatorname{Hess}(u)|^2$, temos que

$$\frac{n-1}{n}\int_\Omega (\Delta u)^2 \;\; \geq \;\; \int_\Omega \mathrm{Ric}_\Omega(\operatorname{grad}(u)) + H_0 \int_M \nu^2. \tag{20}$$

Como $\operatorname{grad}(u)$ não é necessariamente unitário e, lembrando que um tensor é linear em cada argumento, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}_\Omega(\operatorname{grad}(u)) &= |\operatorname{grad}(u)|^2 \operatorname{Ric}_\Omega\left(\frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|}, \frac{\operatorname{grad}(u)}{|\operatorname{grad}(u)|}\right) \\ &\geq |\operatorname{grad}(u)|^2 (n-1)k. \end{aligned} \tag{21}$$

Assim, de (20) temos

$$\frac{n-1}{n}\int_\Omega (\Delta u)^2 \;\geq\; (n-1)k\int_\Omega |\operatorname{grad}(u)|^2 + H_0\int_M \nu^2. \tag{22}$$

Substituindo $\Delta u = -\delta u$ na desigualdade acima, obtemos

$$\frac{n-1}{n}\delta^2\int_\Omega u^2 \;\geq\; (n-1)k\int_\Omega |\operatorname{grad}(u)|^2 + H_0\int_M \nu^2$$

de onde vem que

$$\frac{n-1}{n}\delta^2 \;\geq\; (n-1)k\int_\Omega |\operatorname{grad}(u)|^2 + H_0\int_M \nu^2, \tag{23}$$

pois estamos supondo $\int_\Omega u^2 = 1$.

Note que

$$\begin{aligned} \left(\int_M \nu\right)^2 &\leq \int_M 1 \int_M \nu^2 \\ &= A(M)\int_M \nu^2, \end{aligned}$$

de onde vem que

$$\int_M \nu^2 \geq \frac{1}{A(M)}\left(\int_M \nu\right)^2.$$

Por outro lado, temos que

$$\left(\int_\Omega \Delta u\right)^2 = \left(\int_\Omega -\delta u\right)^2 = \delta^2\left(\int_\Omega u\right)^2.$$

Do Teorema 6, temos que $\int_M \nu = \int_\Omega \Delta u$ e, portanto,

$$\int_M \nu^2 \quad \geq \quad \frac{\delta^2}{A(M)} \left(\int_\Omega u \right)^2 . \tag{24}$$

Novamente pelo Teorema 6 temos

$$\int_\Omega |\operatorname{grad}(u)|^2 = \delta \int_\Omega u^2 .$$

Usando este fato e a desigualdade (24) em (23), obtemos:

$$\frac{n-1}{n}\delta^2 \quad \geq \quad (n-1)k\delta + \frac{H_0 \delta^2}{A(M)} \left(\int_\Omega u \right)^2 ,$$

que reescrevemos como

$$\left[\frac{n-1}{n} - \frac{H_0}{A(M)} \left(\int_\Omega u \right)^2 \right] \delta \geq (n-1)k. \tag{25}$$

Disto decorre que

$$\left[\frac{n-1}{n} - \frac{H_0}{A(M)} \left(\int_\Omega u \right)^2 \right] > 0,$$

e, consequentemente,

$$\sqrt{H_0} \left| \int_\Omega u \right| < \left(\frac{(n-1)A(M)}{n} \right)^{1/2} .$$

Além disso, de (25) temos

$$\delta \geq \frac{n(n-1)kA(M)}{(n-1)A(M) - nH_0 \left(\int_\Omega u \right)^2}, \tag{26}$$

o que conclui a prova do Teorema 1.

$\square$

Teorema 2. *Seja* Ω *variedade riemanniana compacta com bordo* $\partial\Omega = M$ *tal que* $\mathrm{Ric}_\Omega \geq k(n-1) > 0$ *e* $H \geq H_0 \geq 0$*, onde* $n = \dim(M)$*. Considere uma solução* $v \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *da equação de Poisson, a saber,*

$$\Delta v = f \tag{27}$$

$$v\Big|_M = 0,$$

onde f *é uma função contínua em* $\overline{\Omega}$*. Então*

$$\int_\Omega |\operatorname{grad}(v)|^2 \leq \frac{1}{nk}\int_\Omega f^2 - \frac{H_0}{(n-1)kA(M)}\left(\int_\Omega f\right)^2.$$

Prova.

Aplicando o Teorema 7 para a função v obtemos

$$\frac{n-1}{n}\int_\Omega (\Delta v)^2 \geq H_0 \int_M \nu^2 + \int_\Omega \mathrm{Ric}_\Omega(\operatorname{grad}(v)). \tag{28}$$

Pelo teorema da divergência, temos

$$\begin{aligned} \int_M \nu &= \int_M \langle \operatorname{grad}(v), \eta \rangle \\ &= \int_\Omega \Delta v. \end{aligned} \tag{29}$$

Como

$$\int_M \nu^2 \geq \frac{1}{A(M)}\left(\int_M \nu\right)^2, \tag{30}$$

substituindo (29) na desigualdade (30), temos que

$$\int_M \nu^2 \geq \frac{1}{A(M)}\left(\int_\Omega f\right)^2. \tag{31}$$

Além disso,

$$\frac{n-1}{n}\int_\Omega (\Delta v)^2 = \frac{n-1}{n}\int_\Omega f^2, \tag{32}$$

de modo que, substituindo (31) e (32) em (28), temos

$$\frac{n-1}{n}\int_\Omega f^2 \geq \frac{H_0}{A(M)}\left(\int_\Omega f\right)^2 + \int_\Omega \mathrm{Ric}_\Omega(\mathrm{grad}(v)). \tag{33}$$

Como

$$\int_\Omega \mathrm{Ric}_\Omega(\mathrm{grad}(v)) \quad \geq \quad (n-1)k\int_\Omega |\mathrm{grad}(v)|^2 \tag{34}$$

pois

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_\Omega(\mathrm{grad}(v)) &= |\,\mathrm{grad}(v)|^2\,\mathrm{Ric}_\Omega\left(\frac{\mathrm{grad}(v)}{|\,\mathrm{grad}(v)|},\frac{\mathrm{grad}(v)}{|\,\mathrm{grad}(v)|}\right) \\ &\geq |\,\mathrm{grad}(v)|^2 k(n-1), \end{aligned}$$

de (33) temos

$$\frac{n-1}{n}\int_\Omega f^2 \geq \frac{H_0}{A(M)}\left(\int_\Omega f\right)^2 + (n-1)k\int_\Omega |\,\mathrm{grad}(v)|^2,$$

e dividindo ambos os lados por $k(n-1)$ obtemos

$$\frac{1}{nk}\int_\Omega f^2 \geq \frac{H_0}{A(M)(n-1)k}\left(\int_\Omega f\right)^2 + \int_\Omega |\,\mathrm{grad}(v)|^2,$$

de onde vem que

$$\int_\Omega |\,\mathrm{grad}(v)|^2 \leq \frac{1}{nk}\int_\Omega f^2 - \frac{H_0}{(n-1)kA(M)}\left(\int_\Omega f\right)^2,$$

como queríamos mostrar.

□

Em particular, podemos reescrever a estimativa acima como

$$\int_\Omega f^2 \quad \geq \quad \frac{nH_0}{(n-1)A(M)}\left(\int_\Omega f\right)^2 + nk\int_\Omega |\,\mathrm{grad}(v)|^2. \tag{35}$$

Teorema 3. *Seja Ω variedade riemanniana compacta, $\partial\Omega = M$. Se* $\mathrm{Ric}_\Omega \geq (n-1)k > 0$ *e* $H \geq H_0 \geq 0$, *então*

$$\delta_1 \leq \frac{V(\Omega)[(n-1)A(M) - nH_0V(\Omega)]H_\phi^2}{n(n-1)kA(M)\Gamma_\Omega^\phi}$$

e, como $H_0 \geq 0$,

$$\delta_1 \leq \frac{V(\Omega)H_\phi^2}{nk\Gamma_\Omega^\phi}.$$

onde $\phi : \Omega^n \longmapsto \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ *é um mergulho isométrico,* Γ_Ω^ϕ *e* H_ϕ *como definimos em (4) e (5) respectivamente.*

Prova.

Do fato de que a curvatura de Ricci de Ω é limitada inferiormente por $k(n-1) > 0$, temos que

$$\int_\Omega \mathrm{Ric}_\Omega(\mathrm{grad}(v)) \quad \geq \quad (n-1)k\int_\Omega |\mathrm{grad}(v)|^2.$$

Como

$$\int_\Omega |\mathrm{grad}(v)|^2 \geq \delta_1 \int_\Omega v^2, \tag{36}$$

temos

$$\int_\Omega \mathrm{Ric}_\Omega(\mathrm{grad}(v)) \geq (n-1)k\delta_1 \int_\Omega v^2.$$

Seja $f = -1$ em (27). Segue que

$$\int_\Omega f^2 = V(\Omega) \tag{37}$$

e

$$\left(\int_\Omega f\right)^2 = V^2(\Omega). \tag{38}$$

Substituindo (36), (37) e (38) em (35) temos

$$V(\Omega)\left[1 - \frac{nH_0V(\Omega)}{(n-1)A(M)}\right] \geq nk\delta_1 \int_\Omega v^2.$$

Como o lado direito da desigualdade acima é estritamente positivo, escrevemos

$$1 \geq \frac{n(n-1)k\delta_1 A(M)}{V(\Omega)[(n-1)A(M) - nV(\Omega)H_0]} \int_\Omega v^2. \tag{39}$$

Para estimar $\displaystyle\int_\Omega v^2$, vamos determinar explicitamente uma função g tal que $v \geq g$. Como $v\Big|_M = 0$, devemos ter que $g\Big|_M \leq 0$.

Como

$$\Delta v = -1 < 0 \Rightarrow \inf_\Omega v = \inf_M v = 0,$$

temos que $v \geq 0$. Note portanto que, se

(i) $g\Big|_M \leq 0$;

(ii) $\Delta(v-g) \leq 0$,

então

$$\inf_\Omega (v-g) = \inf_M (v-g) \geq 0 \Rightarrow v \geq g \text{ em } \Omega,$$

de modo que em $\Omega' = \{x \in \Omega \,|\, g \geq 0\}$ temos

$$\int_{\Omega'} v^2 \geq \int_{\Omega'} g^2.$$

Portanto, vamos determinar g tal que

$$g\Big|_M \leq 0 \quad \text{e} \quad \Delta(v-g) = -1 - \Delta g \leq 0,$$

ou seja,

$$g\Big|_M \leq 0 \quad \text{e} \quad -\Delta g \leq 1.$$

Defina

$$g_1 : \Omega^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \cos d(x, x_0).$$

Sejam $r+1$ a codimensão de Ω em $\mathbb{R}^{m+1}$, $\{E_i\}_{i=1}^n$ referencial ortonormal de $T_x\Omega$ geodésico em x e $\{U_j\}_{j=1}^r$ referencial ortonormal de $T_x\Omega^\perp \subset T_x\mathbb{S}^m$. Defina $U_{r+1} = x$ e, portanto, $\{E_i\}_{i=1}^n \cup \{U_j\}_{j=1}^{r+1}$ é referencial ortonormal de $\mathbb{R}^{m+1}$.

Daí temos que

$$\Delta g_1 = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(g_1)).$$

Como $\cos d(x, x_0) = \langle \phi(x), x_0 \rangle$, temos

$$E_i(g_1) = E_i \langle x, x_0 \rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} x, x_0 \right\rangle = \langle E_i, x_0 \rangle,$$

$$\begin{aligned} E_i(E_i(g_1)) &= \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, x_0 \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, \sum_{j=1}^n \langle x_0, E_j \rangle E_j + \sum_{j=1}^{r+1} \langle x_0, U_j \rangle U_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle x_0, E_j \rangle \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, E_j \right\rangle + \sum_{j=1}^{r+1} \langle x_0, U_j \rangle \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, U_j \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{r+1} \langle x_0, U_j \rangle \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, U_j \right\rangle. \end{aligned}$$

pois

$$\left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, E_j \right\rangle = \langle \nabla_{E_i} E_i, E_j \rangle + \left\langle (\overline{\nabla}_{E_i} E_i)^\perp, E_j \right\rangle.$$

Como estamos considerando um referencial ortonormal geodésico em $x \in \Omega$ e $(\overline{\nabla}_{E_i} E_i)^{\perp}$ é ortogonal a Ω, temos $\left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, E_j \right\rangle = 0$.
O vetor curvatura média de ϕ é dado por

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H}_{\phi}(x) &= \sum_{i=1}^{n} -\left(\overline{\nabla}_{E_i} E_i\right)^{\perp} \\ &= \sum_{j=1}^{r+1} \left(\sum_{i=1}^{n} -\left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, U_j \right\rangle \right) U_j \\ &= \sum_{j=1}^{r+1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} U_j, E_i \right\rangle \right) U_j, \end{aligned} \tag{40}$$

daí temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(g_1)) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r+1} \langle x_0, U_j \rangle \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, U_j \right\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r+1} \langle x_0, U_j \rangle \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} U_j, E_i \right\rangle \\ &= -\left\langle x_0, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r+1} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i} U_j, E_i \right\rangle U_j \right\rangle \\ &= -\left\langle x_0, \overrightarrow{H}_{\phi} \right\rangle \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\Delta g_1 = -\left\langle x_0, \overrightarrow{H}_{\phi} \right\rangle.$$

Assim,

$$-\Delta g_1 \leq 1 \Leftrightarrow \left\langle x_0, \overrightarrow{H}_{\phi} \right\rangle \leq 1.$$

Defina

$$g_2(x) = \frac{1}{H_{\phi}} g_1(x) = \frac{1}{H_{\phi}} \cos d(x, x_0).$$

Assim, temos

$$-\Delta g_2 = \frac{1}{H_{\phi}} \left\langle \overrightarrow{H}_{\phi}(x), x_0 \right\rangle \leq \frac{1}{H_{\phi}} \left| \overrightarrow{H}_{\phi}(x) \right| |x_0| \leq 1$$

pois $|x_0| = 1$ e $\left|\overrightarrow{H}_\phi(x)\right| \leq H_\phi$.

Como $g_2 \geq 0$, temos que g_2 ainda não é a função desejada pois precisamos que $g_2\Big|_M \leq 0$. Para isso, defina

$$g(x) = \frac{1}{H_\phi}\left(\cos d(x, x_0) - \cos r\right) = \frac{1}{H_\phi}\sigma(x).$$

Claramente temos que $g(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathcal{A}(M) \cap \Omega$. Em particular, $g(x) \leq 0$ para todo $x \in M$. De fato,

$$\forall\, x \in \mathcal{A}(M) \cap \Omega,\ d(x, x_0) \geq r$$

de modo que

$$\cos d(x, x_0) \leq \cos r.$$

Da mesma forma, concluímos que $g(x) \geq 0\ \forall\, x \in B_r(x_0) \cap \Omega$. De fato,

$$\forall\, x \in B_r(x_0) \cap \Omega,\ d(x, x_0) \leq r$$

de modo que

$$\cos d(x, x_0) \geq \cos r.$$

Daí temos

$$\int_\Omega v^2 \geq \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} v^2 \geq \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} g^2 = \frac{1}{H_\phi^2}\Gamma_\Omega^\phi,$$

pois

$$\Gamma_\Omega^\phi = \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} \left(\cos d(x, x_0) - \cos r\right)^2.$$

Assim, temos que (39) fica

$$1 \geq \frac{n(n-1)k\delta_1 A(M)\Gamma_\Omega^\phi}{V(\Omega)[(n-1)A(M) - nH_0V(\Omega)]H_\phi^2} \tag{41}$$

e, portanto,

$$\delta_1 \leq \frac{V(\Omega)[(n-1)A(M) - nH_0V(\Omega)]H_\phi^2}{n(n-1)kA(M)\Gamma_\Omega^\phi}, \tag{42}$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Corolário 1. *Seja $\mathcal{I}(\Omega)$ como definimos em (8). Com as mesmas hipóteses do Teorema 3,*

$$\delta_1 \leq \frac{V(\Omega)[(n-1)A(M) - nH_0V(\Omega)]\mathcal{I}(\Omega)}{n(n-1)kA(M)}$$

e também

$$\delta_1 \leq \frac{V(\Omega)\mathcal{I}(\Omega)}{nk}.$$

Prova.

A estimativa (42) é verdadeira para todo $\dfrac{H_\phi^2}{\Gamma_\Omega^\phi} \in X$. Em particular, é verdadeira para $\mathcal{I}(\Omega) = \inf X$.

Portanto,

$$\delta_1 \leq \frac{V(\Omega)[(n-1)A(M) - nH_0V(\Omega)]\mathcal{I}(\Omega)}{n(n-1)kA(M)},$$

e, além disso,

$$\delta_1 \leq \frac{V(\Omega)\mathcal{I}(\Omega)}{nk},$$

pois $H_0 \geq 0$.

$\square$

Corolário 2. *Seja Ω como no Teorema 3 e Γ_Ω^ϕ como definimos em (4). Se $\Omega^n \subset \mathbb{S}^n$ e $\phi(x) = x$ então o primeiro autovalor δ_1 do laplaciano de M satisfaz*

$$\delta_1 \leq \frac{nV(\Omega)[(n-1)A(M) - nH_0V(\Omega)]}{(n-1)A(M)\Gamma_\Omega^\phi}$$

e, além disso, como $H_0 \geq 0$ temos

$$\delta_1 \leq \frac{nV(\Omega)}{\Gamma_\Omega^\phi}.$$

Prova.

Por (40) e como $r = m - n = 0$, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H}_\phi(x) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_i} x, E_i \rangle\right) x \\ &= nx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$H_\phi = \sup_{x \in \mathbb{S}^n} |\overrightarrow{H}_\phi(x)| = n.$$

Basta substituir $H_\phi = n$ no Teorema 3 e, juntamente com o fato de que $k = 1$ em $\mathbb{S}^n$, conclui-se a prova do corolário.

$\square$

Corolário 3. *Com as mesmas hipóteses do Teorema 3, sejam $\phi(x) = x$ e $\Omega^n \subset \mathbb{S}^n$. Então Γ_Ω^ϕ (como definimos em (4)) satisfaz*

$$\Gamma_\Omega^\phi \leq \frac{V(\Omega)[(n-1)A(M) - nH_0 V(\Omega)]}{(n-1)A(M)}$$

.

Prova.

Como $\delta_1 \geq n$ e pelo Corolário (3) temos

$$n \leq \delta_1 \leq \frac{[(n-1)A(M) - nH_0 V(\Omega)]nV(\Omega)}{(n-1)A(M)\Gamma_\Omega^\phi},$$

de onde vem que

$$1 \leq \frac{[(n-1)A(M) - nH_0 V(\Omega)]V(\Omega)}{(n-1)A(M)\Gamma_\Omega^\phi},$$

e, portanto,

$$\Gamma_{\Omega}^{\phi} \leq \frac{V(\Omega)[(n-1)A(M) - nH_0V(\Omega)]}{(n-1)A(M)}.$$

$\square$

Seja f_p como definimos em (10). O laplaciano de f_p é dado por

$$\Delta f_p = -nf_p.$$

De fato, considerando $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ referencial ortonormal de $T_x\mathbb{S}^n$ temos

$$\begin{aligned} \Delta f_p &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}\mathrm{grad}(f_p), E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\langle -\left\langle E_j, p\right\rangle x - \left\langle x, p\right\rangle E_j, E_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} -\left\langle x, p\right\rangle \\ &= -nf_p \end{aligned} \tag{43}$$

pois $\mathrm{grad}(f_p) = p - \sum_{j=1}^{n} \left\langle x, p\right\rangle E_i$.

Lema 1. *Sejam* $\Omega^n \subset \mathbb{S}^n$, $M = \partial\Omega$. *Considere a função* $f_p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$, $f_p(x) = \left\langle x, p\right\rangle, \ \ x, p \in \mathbb{S}^n$ *e* $z_p = f_p\Big|_M$. *Então*

$$\Delta z_p = -(n-1)z_p - \left\langle \eta, p\right\rangle H.$$

Prova.

Seja $x \in M$ e considere $\{E_i\}_{i=1}^{n-1}$ uma base ortonormal de T_xM (lembre que estamos identificando x com sua imagem por ϕ).

Podemos estender cada E_i para uma vizinhança $V \subset U$ de x tal modo que $\{E_i\}_{i=1}^{n-1}$ seja um referencial ortonormal geodésico de M em x. Em particular, $\widetilde{\nabla}_{E_i}E_j(x) = 0$ onde $\widetilde{\nabla}$ é a conexão riemanniana de M. Estendemos os campos E_i a campos ortonormais F_i em uma vizinhança de x em $\mathbb{S}^n$ e, a seguir, fazemos uma extensão radial desta extensão a campos ortonormais G_i em uma vizinhança W de x em $\mathbb{R}^{n+1}$, ou seja,

$$G_i(q) = F_i(q/||q||).$$

Para simplificar a escrita, denotaremos $G_i = F_i = E_i$. Assim, em particular, $\langle E_i(q), q\rangle = 0$ para todo $q \in W$.

Do fato de que $\{E_i\}_{i=1}^{n-1}$ é geodésico em x temos que

$$\Delta z_p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} E_i(E_i(z_p(x))).$$

Note que, para cada i, $E_i(f) = \langle E_i, p\rangle$. De fato, seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = E_i$. Então

$$E_i(z_p) = E_i(z_p \circ \alpha) = \left\langle \frac{d}{dt}\alpha(t)\Big|_{t=0}, p \right\rangle = \langle E_i, p\rangle .$$

Segue-se que

$$E_i(E_i(z_p)) = \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}E_i, p\right\rangle + \left\langle E_i, \overline{\nabla}_{E_i}p\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{E_i}E_i, p\right\rangle$$

onde $\overline{\nabla}$ denota a conexão riemanniana do $\mathbb{R}^{n+1}$. Denotando por $(\ )^T$ a projeção ortogonal do $\mathbb{R}^{n+1}$ sobre $T\mathbb{S}^n$, temos

$$\nabla_{E_i}E_i = \left(\overline{\nabla}_{E_i}E_i\right)^T$$

e

$$\left(\overline{\nabla}_{E_i}E_i\right)^N(x)=\left\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_i,x\right\rangle x,\ \ x\in M.$$

Derivando ambos lados de $\langle E_i(y),y\rangle=0$, em relação à E_i, $y\in W$, obtemos

$$\begin{aligned}0&=\left\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_i,y\right\rangle\,+\,\left\langle E_i(y),\overline{\nabla}_{E_i}y\right\rangle\\&=\left\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_i,y\right\rangle+\langle E_i(y),E_i(y)\rangle\\&=\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_i,y\rangle+1.\end{aligned}$$

Em particular

$$\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_i,x\rangle=-1.$$

Logo

$$\begin{aligned}E_i(E_i(z_p))(x)\ &=\ \left\langle\overline{\nabla}_{E_i}E_i(x),p\right\rangle\\&=\ \left\langle\left(\overline{\nabla}_{E_i}E_i\right)^T(x)+\left(\overline{\nabla}_{E_i}E_i\right)^N(x),p\right\rangle\\&=\langle\nabla_{E_i}E_i,p\rangle-\langle x,p\rangle\\&=\langle\nabla_{E_i}E_i,p\rangle-z_p.\end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$\Delta z_p(x)\ =-(n-1)z_p+\sum_{i=1}^{n-1}\langle\nabla_{E_i}E_i,p\rangle\,.$$

Temos

$$\begin{aligned}\langle\nabla_{E_i}E_i,p\rangle\ &=\ \left\langle(\nabla_{E_i}E_i)^T,p\right\rangle+\left\langle(\nabla_{E_i}E_i)^\perp,p\right\rangle\\&=\ \left\langle(\nabla_{E_i}E_i)^\perp,p\right\rangle\\&=\ \langle\langle\nabla_{E_i}E_i,\eta\rangle\,\eta,p\rangle\\&=\ -B_\eta(E_i,E_i)\,\langle\eta,p\rangle\,,\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} E_i, p \rangle \;\; = \;\; -\langle \eta, p \rangle H.$$

Assim, temos

$$\Delta z_p = -(n-1) z_p - \langle \eta, p \rangle H.$$

$\square$

Lema 2. *Existe* $p \in \mathbb{S}^n$ *tal que* $\displaystyle\int_M z_p = 0$*, onde* $z_p(x) = \langle x, p \rangle$*.*

Prova.

Seja $p_0 \in \mathbb{S}^n$. Considere uma curva contínua $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = -p_0$. Então, a curva

$$h(t) = \int_M z_{\gamma(t)}$$

é contínua e satisfaz $h(0) = -h(1)$. De fato,

$$h(0) = \int_M z_{\gamma(0)} = \int_M \langle x, p_0 \rangle$$
$$h(1) = \int_M z_{\gamma(1)} = \int_M \langle x, -p_0 \rangle.$$

Portanto, por continuidade, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $h(t_0) = 0$.

Tome $p = \gamma(t_0)$ e isto conclui a prova da afirmação acima.

$\square$

Para todo $p \in \mathbb{S}^n$ tal que $\displaystyle\int_M z_p = 0$, temos que

$$\int_M |\operatorname{grad}(z_p)|^2 \geq \lambda_1 \int_M z_p^2,$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor positivo do laplaciano de M.

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{H}$ como definimos em (9), (11) e (12) respectivamente.

Teorema 4. *Seja $\Omega^n \subset \mathbb{S}^n$, tal que $\partial\Omega = M$. Com as definições acima, temos*

$$\begin{aligned}
&\alpha\lambda_1\mathcal{Z} \leq 2A(M)^{1/2}\big((n-1)A(M)^{1/2}+\mathcal{H}\big) + n(n-1)\big(V(\Omega)-V(\Omega)^{1/2}\big)\\
&+\left[2\left(\frac{A(M)}{n}\right)^{1/2}\big((n-1)A(M)^{1/2}+\mathcal{H}\big)+(n-1)(2V(\Omega)^{1/2}-1)\right]\delta\\
&+\frac{n-1}{n}\delta^2.
\end{aligned} \tag{44}$$

Prova.

Seja p_0 tal que $\displaystyle\int_M z_{p_0}^2 \leq \int_M z_p^2$ $\forall p \in \mathbb{S}^n$ tal que $\displaystyle\int_M z_p = 0$. Considere a função $h := f_{p_0} + u$, onde u é uma auto-função do laplaciano de Ω, conforme (1) e $u\Big|_M = 0$. Note que $h\Big|_M = z_{p_0}$.

A partir de agora, denotaremos f_{p_0} simplesmente por f_p.

Do Teorema 7 temos que

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{n}\int_\Omega(\Delta h)^2 &\geq \int_\Omega \mathrm{Ric}_\Omega(\mathrm{grad}(h),\mathrm{grad}(h)) + \int_M B_\eta(\mathrm{grad}(z_p),\mathrm{grad}(z_p))\\
&+\int_M \langle \mathrm{grad}(f_p)+\mathrm{grad}(u),\eta\rangle\left[2\Delta z_p + \langle \mathrm{grad}(f_p)+\mathrm{grad}(u),\eta\rangle H\right].
\end{aligned} \tag{45}$$

Como

$$\Delta h = \Delta u + \Delta f_p = -\delta u - n f_p,$$

temos

$$\frac{(n-1)}{n}\int_\Omega(\Delta h)^2 = \frac{(n-1)}{n}\int_\Omega\left[\delta^2u^2 + 2n\delta u f_p + n^2 f_p^2\right]. \tag{46}$$

Suponha que $\displaystyle\int_\Omega u^2 = 1$. Daí temos

$$\frac{(n-1)}{n}\int_\Omega(\Delta h)^2 = \frac{n-1}{n}\delta^2 + 2(n-1)\delta\int_\Omega u f_p + n(n-1)\int_\Omega f_p^2. \tag{47}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{Ric}_\Omega\left(\mathrm{grad}(u+f_p),\mathrm{grad}(u+f_p)\right) &= (n-1)\int_\Omega |\,\mathrm{grad}(u+f_p)|^2\\
&= (n-1)\int_\Omega |\,\mathrm{grad}(u)|^2\\
&\quad +2(n-1)\int_\Omega \langle \mathrm{grad}(u),\mathrm{grad}(f_p)\rangle\\
&\quad +(n-1)\int_\Omega |\,\mathrm{grad}(f_p)|^2,
\end{aligned}$$

de onde vem que (veja (64))

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{Ric}_\Omega\left(\mathrm{grad}(u+f_p),\mathrm{grad}(u+f_p)\right) &= (n-1)\delta\int_\Omega u^2 - 2(n-1)\int_\Omega u\Delta f_p\\
&\quad +(n-1)\int_\Omega |\,\mathrm{grad}(f_p)|^2\\
&\geq (n-1)\delta + 2n(n-1)\int_\Omega u f_p.
\end{aligned} \tag{48}$$

Como $h\Big|_M = z_p$, temos

$$\begin{aligned}
\int_M B_\eta(\mathrm{grad}(z_p),\mathrm{grad}(z_p)) &= \int_M |\mathrm{grad}(z_p)|^2 B_\eta\left(\frac{\mathrm{grad}(z_p)}{|\,\mathrm{grad}(z_p)|},\frac{\mathrm{grad}(z_p)}{|\,\mathrm{grad}(z_p)|}\right)\\
&\geq \alpha\int_M |\,\mathrm{grad}(z_p)|^2\\
&\geq \alpha\lambda_1\int_M z_p^2\\
&= \alpha\lambda_1\mathcal{Z}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned}
& \int_M \langle \operatorname{grad}(f_p) + \operatorname{grad}(u), \eta\rangle[2\Delta z_p] + \langle \operatorname{grad}(f_p) + \operatorname{grad}(u), \eta\rangle^2 H \geq \\
\geq \;& \int_M \langle \operatorname{grad}(f_p), \eta\rangle[2\Delta z_p] + \langle \operatorname{grad}(u), \eta\rangle[2\Delta z_p] \\
= \;& -2\int_M (\overline{\nu} + \nu)((n-1)z_p + \langle \eta, p\rangle H)
\end{aligned} \tag{50}$$

onde $\overline{\nu} = \langle \operatorname{grad}(f_p), \eta\rangle$ e $\nu = \langle \operatorname{grad}(u), \eta\rangle$.

Sabemos que, dadas duas funções $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$, por Cauchy-Schwarz temos

$$-\int_M fg \geq -\left|\int_M fg\right| \geq -\left(\int_M f^2\right)^{1/2}\left(\int_M g^2\right)^{1/2}.$$

Fazendo $f = \overline{\nu} + \nu$ e $g = (n-1)z_p + \langle \eta, p\rangle H$ temos

$$\begin{aligned}
& -2\int_M (\overline{\nu} + \nu)((n-1)z_p + \langle \eta, p\rangle H) \\
& \geq -2\left(\int_M (\overline{\nu} + \nu)^2\right)^{1/2}\left(\int_M ((n-1)z_p + \langle \eta, p\rangle\, H)^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
& \int_M (\overline{\nu} + \nu)^2 = \int_M \overline{\nu}^2 + \int_M \nu^2 + 2\int_M \nu\overline{\nu} \\
= \;& \int_M |\langle \operatorname{grad}(f_p), \eta\rangle|^2 + \int_M |\langle \operatorname{grad}(u), \eta\rangle|^2 + 2\int_M \langle \operatorname{grad}(u), \eta\rangle\langle \operatorname{grad}(f_p), \eta\rangle \\
\leq \;& \int_M |\operatorname{grad}(f_p)|^2 + \int_M |\operatorname{grad}(u)|^2 + 2\left|\int_M \langle \operatorname{grad}(u), \eta\rangle\langle \operatorname{grad}(f_p), \eta\rangle\right| \\
\leq \;& \int_M |\operatorname{grad}(f_p)|^2 + \int_M |\operatorname{grad}(u)|^2 \\
& +2\left(\int_M |\langle \operatorname{grad}(u), \eta\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\int_M |\langle \operatorname{grad}(f_p), \eta\rangle|^2\right)^{1/2} \\
\leq \;& \int_M |\operatorname{grad}(f_p)|^2 + \int_M |\operatorname{grad}(u)|^2 + 2\left(\int_M |\operatorname{grad}(u)|^2\right)^{1/2}\left(\int_M |\operatorname{grad}(f_p)|^2\right)^{1/2} \\
= \;& \left(\left(\int_M |\operatorname{grad}(u)|^2\right)^{1/2} + \left(\int_M |\operatorname{grad}(f_p)|^2\right)^{1/2}\right)^2
\end{aligned} \tag{51}$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_M |\operatorname{grad}(u)|^2 &\leq \int_M \left(\frac{\delta^2}{n} - \frac{H_0\delta^2}{(n-1)A(M)}\left(\int_\Omega u\right)^2\right) \\
&= \delta^2\left(\frac{A(M)}{n} - \frac{H_0}{(n-1)}\left(\int_\Omega u\right)^2\right) \\
&\leq \delta^2\frac{A(M)}{n}
\end{aligned} \tag{52}$$

e, além disso,

$$\int_M |\operatorname{grad}(f_p)|^2 \leq A(M),$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_M (\overline{\nu}+\nu)^2 &\leq \left(\delta\left(\frac{A(M)}{n}\right)^{1/2} + A(M)^{1/2}\right)^2 \\
&= A(M)\left(\delta\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} + 1\right)^2
\end{aligned} \tag{53}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_M \langle \operatorname{grad}(f_p) + \operatorname{grad}(u), \eta\rangle[2\Delta z_p] + \langle \operatorname{grad}(f_p) + \operatorname{grad}(u), \eta\rangle^2 H \\
&\geq \int_M \langle \operatorname{grad}(f_p) + \operatorname{grad}(u), \eta\rangle[2\Delta z_p] \\
&\geq -2A(M)^{1/2}\left(\delta\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} + 1\right) \\
&\left((n-1)^2\int_M z_p^2 + 2(n-1)\int_M \langle\eta, p\rangle H z_p + \int_M \langle \eta, p\rangle^2 H^2\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{54}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\Big| \quad (n-1)^2 & \int_M z_p^2 + 2(n-1)\int_M \langle \eta, p\rangle H z_p + \int_M \langle \eta, p\rangle^2 H^2 \Big| \leq \\
& \leq (n-1)^2 \int_M z_p^2 + 2(n-1)\int_M |z_p|\, H + \int_M H^2 \\
& \leq (n-1)^2 \int_M z_p^2 + 2(n-1)\left(\int_M z_p^2\right)^{1/2}\left(\int_M H^2\right)^{1/2} + \int_M H^2 \\
& = (n-1)^2 A(M) + 2(n-1)A(M)^{1/2}\left(\int_M H^2\right)^{1/2} + \int_M H^2 \\
& = \left((n-1)A(M)^{1/2} + \left(\int_M H^2\right)^{1/2}\right)^2
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Por hora, substituindo (47), (48), (49) e (55) em (45) obtemos:

$$
\begin{aligned}
& \frac{n-1}{n}\delta^2 + 2(n-1)\delta \int_\Omega u f_p + n(n-1)\int_\Omega u f_p + n(n-1)\int_\Omega f_p^2 \\
& \geq (n-1)\delta + 2(n-1)n\int_\Omega u f_p + \alpha\lambda_1 \mathcal{Z} \\
& -2A(M)^{1/2}\left(\delta\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} + 1\right)\left((n-1)A(M)^{1/2} + \left(\int_M H^2\right)^{1/2}\right)
\end{aligned}
\tag{56}
$$

que podemos reescrever como

$$
\begin{aligned}
\frac{n-1}{n}\delta^2 \geq & -(n-1)[2\delta - n]\int_\Omega u f_p - n(n-1)\int_\Omega f_p^2 + (n-1)\delta + \alpha\lambda_1\mathcal{Z} \\
& -2A(M)^{1/2}\left(\delta\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} + 1\right)\left((n-1)A(M)^{1/2} + \left(\int_M H^2\right)^{1/2}\right).
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Temos

$$
\int_\Omega f_p^2 \leq V(\Omega),
$$

e ainda

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u f_p &\leq \left|\int_\Omega u f_p\right| \\
&\leq \left(\int_\Omega u^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega f_p^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_\Omega f_p^2\right)^{1/2} \\
&\leq V(\Omega)^{1/2}
\end{aligned} \tag{58}
$$

de onde vem que

$$
-\int_\Omega u f_p \geq -V(\Omega)^{1/2}.
$$

Como $2\delta - n \geq 0$, substituindo em (57) temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{n-1}{n}\delta^2 \geq -(n-1)[2\delta - n]V(\Omega)^{1/2} - n(n-1)V(\Omega) + (n-1)\delta + \alpha\lambda_1\mathcal{Z} \\
&-2A(M)^{1/2}\left(\delta\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} + 1\right)\left((n-1)A(M)^{1/2} + \left(\int_M H^2\right)^{1/2}\right),
\end{aligned} \tag{59}
$$

que é equivalente a

$$
\begin{aligned}
&\alpha\lambda_1\mathcal{Z} \leq 2A(M)^{1/2}\big((n-1)A(M)^{1/2} + \mathcal{H}\big) + n(n-1)\big(-V(\Omega)^{1/2} + V(\Omega)\big) \\
&+\left[2\left(\frac{A(M)}{n}\right)^{1/2}\big((n-1)A(M)^{1/2} + \mathcal{H}\big) + (n-1)(2V(\Omega)^{1/2} - 1)\right]\delta \\
&+\frac{n-1}{n}\delta^2.
\end{aligned} \tag{60}
$$

□

Teorema 5. *Seja Ω variedade riemanniana compacta tal que $\partial\Omega = M$. Se $H \geq H_0 \geq 0$ e $\mathrm{Ric}_\Omega \geq 0$, então*

$$
A(M) \geq \frac{n}{n-1} H_0 V(\Omega).
$$

Prova.

De fato, seja $f = 1$ em (27). Temos

$$\int_\Omega f^2 = V(\Omega)$$

e, além disso,

$$\left(\int_\Omega f\right)^2 = V(\Omega)^2.$$

Portanto, temos de (33) que

$$V(\Omega) \geq \frac{nH_0}{(n-1)A(M)} V(\Omega)^2,$$

de onde vem que

$$V(\Omega)\left[1 - \frac{nH_0 V(\Omega)}{(n-1)A(M)}\right] \geq 0.$$

Em particular, temos

$$1 - \frac{nH_0 V(\Omega)}{(n-1)A(M)} \geq 0,$$

e, portanto,

$$A(M) \geq \frac{n}{n-1} H_0 V(\Omega).$$

□

4 Teoremas Utilizados

Os resultados abaixo foram usados para demonstrar os teoremas do capítulo 3. O primeiro deles é o teorema da divergência:

Teorema 6. *Se X é um campo de vetores diferenciável em Ω, então*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X(p)\omega = \int_{\partial\Omega} \langle X, \eta\rangle \sigma \tag{61}$$

onde ω é a forma volume de Ω, σ é a forma volume de $\partial\Omega$ com relação à orientação induzida por Ω e η o campo de vetores unitário, normal exterior a $\partial\Omega$ em Ω.

Teorema 7. *[Reilly] Seja Ω uma variedade compacta de dimensão n com bordo $M = \partial\Omega$. Suponha que u é uma função definida em Ω satisfazendo $\Delta u = g$ em Ω e $u|_M = z$. Então*

$$\int_{\Omega} \left[g^2 - |\operatorname{Hess}(u)|^2 - \operatorname{Ric}_{\Omega}(\operatorname{grad}(u))\right] =$$
$$= \int_M \left[\nu(\Delta z + H\nu) - \langle \operatorname{grad}(\nu), \operatorname{grad}(z)\rangle + B_{\eta}(\operatorname{grad}(z), \operatorname{grad}(z))\right]$$

onde H e $B(\operatorname{grad}(z), \operatorname{grad}(z))$ denotam, respectivamente, a curvatura média não normalizada e a segunda forma fundamental de M em relação ao normal exterior unitário η, $\nu = \langle \operatorname{grad}(u), \eta\rangle$ e $\operatorname{Ric}_{\Omega}(\operatorname{grad}(u))$ é a curvatura de Ricci de Ω na direção de $\operatorname{grad}(u)$.

A demonstração desse resultado encontra-se em [5]. Precisamente, usamos uma consequência do Teorema 7, que é o seguinte corolário:

Corolário 4. *Sejam Ω e u como no Teorema 7. Então*

$$\frac{n-1}{n}\int_{\Omega} g^2 \geq \int_{\Omega} \operatorname{Ric}_{\Omega}(\operatorname{grad}(u) + \int_M \left[\nu(2\Delta z + H\nu) + B_{\eta}(\operatorname{grad}(z), \operatorname{grad}(z))\right]$$

Antes de enunciar o próximo resultado, note que se $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $x \in \Omega$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$ é uma curva satisfazendo $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = E \in T_x\Omega$ então considerando uma extensão paralela de E ao longo de α temos

$$\begin{aligned}
E(E(f))(x) &= E(\langle \operatorname{grad}(f), E \rangle)(x) \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_E \operatorname{grad}(f), E \right\rangle (x) + \left\langle \operatorname{grad}(f), \overline{\nabla}_E E \right\rangle (x) \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\alpha'(0)} \operatorname{grad}(f)(x), \alpha'(0) \right\rangle .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f}{dt^2}(\alpha(t))\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(\alpha(t)) \right)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\langle \operatorname{grad}(f), \alpha'(t) \rangle \right)\Big|_{t=0} \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\alpha'(0)} \operatorname{grad}(f)(x), \alpha'(0) \right\rangle + \left\langle \operatorname{grad}(f)(x), \overline{\nabla}_{\alpha'(0)} \alpha'(0) \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{\alpha'(0)} \operatorname{grad}(f)(x), \alpha'(0) \right\rangle ,
\end{aligned}$$

pois $\alpha'(0)$ e $\operatorname{grad}(f)(x)$ são tangentes a Ω.

Com isso temos

$$E(E(f))(x) = \frac{d^2 f}{dt^2}(\alpha(t))\Big|_{t=0}.$$

Vamos nos referir ao teorema abaixo como o princípio do máximo (mínimo) para funções subharmônicas (superharmônicas):

Teorema 8. *Ω variedade compacta com bordo. Se $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é superharmônica (subharmônica) então*

$$\sup_{\Omega} f = \sup_{\partial\Omega} f \ \ (\inf_{\Omega} f = \inf_{\partial\Omega} f).$$

Prova.

Seja $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = \sup\limits_{\Omega} f$. Se $x_0 \in \partial\Omega$ o teorema está demonstrado. Suponha que $x_0 \in \Omega\backslash\partial\Omega$ e defina

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq \Omega \,|\, x_0 \in U,\ \ U \text{ aberto e } \sup_{\partial\Omega} f = f(x_0)\}. \tag{62}$$

Afirmação 1. *Se $U \subseteq \Omega$ é aberto e $\Delta f > 0$ ($\Delta f < 0$) em U então $\sup\limits_{U} f = \sup\limits_{\partial U} f$ $(\inf\limits_{U} f = \inf\limits_{\partial U} f)$.*

Prova.

Se $y_0 \in U$ tal que $f(y_0) = \sup\limits_{U} f$. Daí temos $\text{grad}(f)(y_0) = 0$. Logo tomando $\{E_i\}$ referencial ortonormal geodésico em y_0, temos que

$$\Delta f(y_0) = \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f))(y_0) = \frac{d^2 f}{dt^2}(\alpha(t)) \leq 0$$

o que contradiz a hipótese de que $\Delta f > 0$, logo existe um aberto em torno de y_0 tal que $\Delta f > 0$. Analogamente, fazendo $f(y_0) = \inf\limits_{U}$ f prova-se que existe um aberto tal que $\Delta f < 0$ e isto conclui a prova da afirmação.

Vamos mostrar que $\mathcal{U} \neq \emptyset$.

(i)Se $\Delta f(x_0) > 0$ ($\Delta f(x_0) < 0$), pela afirmação anterior ok.

(ii)Se $\Delta f(x_0) = 0$ tome B bola normal centrada em x_0 e defina

$$v : B \to \mathbb{R}$$

$$v : x \mapsto (d(x, x_0))^2 = |\exp_{x_0}^{-1} x|^2$$

Daí temos que

$$0 \leq v(x_0) \leq v(x) \,\forall\, x \in B,$$

pois $d(x_0, x_0) = 0$. Daí temos que x_0 é um mínimo, logo $\text{grad}(v)(x_0) = 0$.

Como
$$E(E(v))(x_0) = \frac{d^2}{dt^2} v(\alpha(t))\Big|_{t=0}$$
tome $\alpha(t) = \exp_{x_0} tE(x_0)$. Daí temos $v(\alpha(t)) = |tE(x_0)|^2 = t^2$, $E(E(v)) = 2$ e ainda
$$\Delta v(x_0) = \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(v))(x_0) = 2n > 0$$
de modo que
$$\Delta(f + \varepsilon v)(x_0) > 0 \;\; (\Delta(f - \varepsilon v)(x_0) < 0)\,.$$
Daí, pela Afirmação 1 temos que existe U tal que
$$\sup_U (f + \varepsilon v) = \sup_{\partial U}(f + \varepsilon v) \;\; \left(\inf_U (f - \varepsilon v) = \inf_{\partial U}(f - \varepsilon v)\right).$$
Por outro lado
$$f(x_0) = f(x_0) + \varepsilon v(x_0) = \sup_U (f + \varepsilon v)$$
$$\left(f(x_0) = f(x_0) - \varepsilon v(x_0) = \inf_U (f - \varepsilon v)\right)$$
Fazendo $\varepsilon = 0$ temos que $f(x_0) = \sup_{\partial U} f$ $\left(f(x_0) = \inf_{\partial U} f\right)$ e , portanto, $U \in \mathcal{U}$.

Afirmação 2. *Toda cadeia totalmente ordenada de $\mathcal{U}$ admite elemento maximal.*

Prova.

De fato, seja $\{U_i\}_{i \in I}$ enumerável
onde $U_1 \subseteq U_2 \subseteq ...$ tais que $f(x_0) = \sup_{\partial U_i} f$ $\left(f(x_0) = \inf_{\partial U_i} f\right)$.
Vamos mostrar que $V := \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \in \mathcal{U}$.
Pela própria definição de V temos que V é aberto e $x_0 \in V$. Basta mostrar que $\sup_{\partial V} f = f(x_0)$ $\left(\inf_{\partial V} f = f(x_0)\right)$.

Como ∂U_i é compacto, $\exists\, x_i \in \partial U_i$ tal que $f(x_i) = f(x_0)$. Por outro lado, $\overline{V}$ é compacto, logo existe uma subsequência convergente (x_{i_k}) de (x_i) convergente em $\overline{V}$, isto é, $x_{n_k} \to x$ e $f(x) = \lim\limits_{i_k \to \infty} f(x_{i_k}) = f(x_0)$.
Se $x \in \partial V$ a demonstração está concluída. Suponha que $x \in V \backslash \partial V$. Então $\exists\, i$ tal que $x \in U_i \backslash \partial U_i$, isto é, $\exists\, \delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset U_i \subset U_n \,\forall\, n \geq i$, de modo que $d(x, \partial U_n) > \delta \;\forall\; n \geq i$, ou seja, $d(x, x_{i_k}) > \delta$, o que contradiz o fato de que (x_{i_k}) converge.
Resta mostrar que se U é um elemento maximal de $\mathcal{U}$ então $U = \Omega$. Suponha que $U \subsetneq \Omega$. Então existe $y_0 \in \partial U$ tal que $f(x_0) = f(y_0)$. Seja $W = B_\delta(x) \subset \Omega$. Então $U \cup W \in \mathcal{U}$, o que contradiz a maximalidade de U e conclui a prova do Teorema 8.

$\square$

Dada $u \in C_0^\infty(\Omega)$, por uma propriedade do divergente temos

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad}(u)) = u\Delta u + |\operatorname{grad}(u)|^2,$$

de onde vem que

$$\int_\Omega u\Delta u + |\operatorname{grad}(u)|^2 = 0. \tag{63}$$

Note que

$$\Delta u = -\delta u \Leftrightarrow u\Delta u = -\delta u^2 \Leftrightarrow \int_\Omega u\Delta u = -\delta \int_\Omega u^2.$$

Por (63) temos

$$\int_\Omega u\Delta u = -\int_\Omega |\operatorname{grad}(u)|^2,$$

logo

$$\Delta u = -\delta u \Leftrightarrow \delta = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\operatorname{grad}(u)|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2}. \tag{64}$$

O quociente $R(u) = \dfrac{\displaystyle\int_\Omega |\operatorname{grad}(u)|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2}$ é conhecido como quociente de Rayleigh-Ritz.

Afirmação 3. *O primeiro autovalor δ_1 do laplaciano de Ω pode ser caracterizado como*

$$\delta_1 = \inf\{R(u) | u \in C_0^\infty(\Omega)\backslash\{0\}\}.$$

Este ínfimo existe pois $R(u) \geq 0$. Para provar que este ínfimo é realizado por uma função $u \in C_0^\infty(\Omega)$ é necessário considerar o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com a norma $\|.\|_1$ dada por $\|u\|_1 = \displaystyle\int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\operatorname{grad}(u)|^2$. Este espaço é chamado espaço de Sobolev e denotado por $H_0^1(\Omega)$. A norma $\|.\|_1$ é escolhida para que a inclusão de $(H_0^1(\Omega), \|.\|_1)$ em $(L^2(\Omega), \|.\|)$ seja compacta e, da análise funcional, possamos concluir que de fato existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $R(u) = \delta$ (aqui, consideramos $\|u\| = \left(\displaystyle\int_\Omega u^2\right)^{1/2}$). Uma demonstração destes fatos pode ser vista em [1].

O espaço $E = \{u \in H_0^1(\Omega) \ | \ R(u) = \delta\}$ é caracterizado como

$$u \in E \Leftrightarrow \int_\Omega \langle \operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(v)\rangle = \delta \int_\Omega \langle u, v\rangle .$$

Da teoria de equações diferenciais parciais elípticas é possível concluir que $E \subset C_0^\infty(\Omega)$.

Referências

[1] Berad, Pierre H. - *Lectures on Spectral Geometry*, IMPA, Rio de Janeiro, 1985.

[2] Grieser, D. - *Uniform Bounds for Eigenfunctions of Laplacian on Manifolds with Bondary.* Comunications in Partial Differential Equations, 27:7, (2002), pp. 1283-1299.

[3] Evans, Lawrence C. -*Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, (1998)

[4] Chavel, Isaac - *Eigenvalues in Riemannian Geometry.* Academic Press, London, 1984.

[5] Choi, H. in and Wang, AI-Nung - *A first Eigenvalue Estimate for minimal Hypersurfaces.* J, Differential Geometry, **18** (1983), pp. 559-562.

[6] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[7] Reilly, R. - *Aplications of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977) pp.456-472.

[8] Obata, M. -*Certain condition for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere.* J. Math. Soc. Japan **14** (1962), pp.333-340.

[9] Lichnerowicz, A. -*Géometrie des groupes de transformations.* Dunod, Paris,1958.

[10] Nash, J. - C^1 *isometric imbeddings.* Annals of Math **60** (1954), pp.383-385.

[11] Wang, Q. and Xia, C. -*Isoperimetric bonds for the first eigenvalue of the Laplacian.* ZAMP (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik **61**

[12] Reilly, R. - *Geometric Aplication of the solvability of Neumann problems in a Riemannian manifold*, Arch. Rational Mech. and Analysis, Vol.**75** (1980) pp.23-29.

[13] Pak,E. ; Minn, H; Yonn, O.K. and Chi, P.-*On the first eigenvalue estimate of the Dirichlet and Neumann Problem*, Bull. Korean Math. Soc. **23** (1968) No1, pp.21-25.