UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO AOS GRUPOS DE SIMETRIA NO ENSINO BÁSICO EM UMA ABORDAGEM *INQUIRY-BASED LEARNING*

Jeremy Ortiz Moretto

Porto Alegre

2023

Jeremy Ortiz Moretto

INTRODUÇÃO AOS GRUPOS DE SIMETRIA NO ENSINO BÁSICO EM UMA ABORDAGEM *INQUIRY-BASED LEARNING*

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado junto ao curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Matheus Jury Giraldi

Porto Alegre

2023

Instituto de Matemática e Estatística

Curso de Licenciatura em Matemática

INTRODUÇÃO AOS GRUPOS DE SIMETRIA NO ENSINO BÁSICO EM UMA ABORDAGEM *INQUIRY-BASED LEARNING*

Jeremy Ortiz Moretto

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Matheus Jury Giraldi

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof.ª Dra. Barbara Seelig Pogorelsky

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Rodrigo Orsini Braga

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS

Desde o momento que me entendo como um ser pensante, carrego a ideia de que tudo aquilo que é produzido é resultado de um trabalho árduo e coletivo, e mesmo que muitas vezes não consigamos descrever com clareza como as atitudes de cada um dos indivíduos envolvidos durante o processo teve efeito no seu resultado final, estes não devem ser esquecidos. Trago este texto com o intuito de enfatizar esta ideia.

O presente trabalho é resultado de diversas experiências que tive desde o momento que decidi que faria o curso de licenciatura em matemática, dentre elas as que foram as mais importantes destaco os estágios de docência e a iniciação científica.

Diante disto, sinto a necessidade em agradecer a todos os professores que fizeram parte desta trajetória. Em particular ao meu orientador João Matheus por cada uma das horas que me orientou com excelência tantos nos aspectos acadêmicos, como pessoais. Por ti, tenho imensa admiração.

Porém, nem só de flores a vida é feita. Para chegar nesta etapa de conclusão de um curso de graduação, é necessário muito apoio, principalmente mental e financeiro.

Desta forma agradeço à minha mãe Adriana, minha inspiração para a vida toda, que mesmo diante de todas as dificuldades se mostrou como uma pessoa extremamente forte e capaz. Pai Roberto (*in memorian*), padrasto Antônio e irmão Robert por todo amor e educação que me deram. Agradeço também aos meus pais do coração Irineu e Raquel por todo suporte financeiro e apoio que me deram perante as batalhas que tive que enfrentar.

Mais ainda, quando se trata de apoio mental e amor, não posso deixar de mencionar a minha namorada Gabrielly, o meu grande amor. Esta é a pessoa que mais contribuiu em toda a minha trajetória, me apoiando e incentivando em todas as minhas dificuldades, em particular, todas as madrugadas que passei estudando para as provas da graduação e também aquelas que pernoitei escrevendo este trabalho. A ela, um dia, desejo retribuir tudo em dobro (impossível).

Também agradeço nominalmente a todos aqueles amigos que me deram apoio nesta trajetória: Bruno, Klaus, Mateus, Samuel, Tiago e Wesley.

Por fim, agradeço à professora Barbara e ao professor Rodrigo por terem aceitado fazer parte da banca examinadora deste TCC e por terem contribuído com suas sugestões acerca dele.

“The objective in mathematics is not to obtain the highest ranking, the highest “score”, or the highest number of prizes and awards; instead, it is to increase understanding of mathematics (both for yourself, and for your colleagues and students), and to contribute to its development and applications. For these tasks, mathematics needs all the good people it can get.” **Terence Tao**

RESUMO

Este estudo nasceu do interesse do autor pela área de álgebra, em especial, pela teoria de grupos. A motivação central por trás deste estudo é a convicção de que os conceitos de simetria podem ser uma introdução cativante a uma "matemática nova", especialmente no caso em que queremos fugir um pouco dos aspectos relacionados a cálculos aritméticos. Assim sendo, nos debruçamos à seguinte pergunta diretriz para esta pesquisa: "Quais significados matemáticos são produzidos por alunos do ensino básico ao explorarem os conceitos de simetria e composição?". Mais precisamente, objetiva-se neste trabalho analisar os dados obtidos após aplicar uma sequência didática que trate dos seguintes assuntos: simetria, composição e conceitos iniciais da teoria de grupos. A pesquisa adota uma abordagem qualitativa, focando na análise de dados gerados a partir de diálogos anotados em um caderno de campo e as respostas dos participantes durante as atividades. Estes dados são examinados pela ótica do Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Além disso, toda a prática de pesquisa é fundamentada na abordagem *Inquiry-Based Learning* (*IBL*). O estudo foi conduzido com uma turma do oitavo ano do ensino fundamental na escola Dolores Alcaraz Caldas, localizada em Porto Alegre/RS. Durante as atividades, os participantes foram desafiados a explorar as simetrias do triângulo equilátero e a composição entre estes elementos utilizando um material manipulável. Posteriormente, foram apresentadas as definições iniciais da teoria de grupos, e eles foram estimulados a conectar suas descobertas anteriores com a estrutura algébrica recém-apresentada. Os resultados da pesquisa revelaram que alguns alunos conseguiram construir uma compreensão sólida dos conceitos apresentados. Além disso, destacou-se seu comprometimento, sua interação colaborativa e a construção coletiva do conhecimento. Este trabalho destaca a relevância da abordagem *IBL*, especialmente quando combinada com o MCS, não apenas para o estudo de grupos e simetria, mas também como uma abordagem viável para introduzir conceitos não tradicionais de matemática no ensino básico. Além disso, fornece um exemplo concreto de como inserir tópicos menos convencionais no currículo escolar.

Palavras-chave: Modelo dos campos semânticos. *Inquiry-Based Learning*. Simetria. Grupos.

ABSTRACT

This study emerged from the author's interest in the field of algebra, particularly group theory. The central motivation behind this study is the belief that symmetry concepts can provide an engaging introduction to a “new mathematics,” especially when wanting to move away from arithmetic calculations. Therefore, we pose the following guiding question for this research: “What mathematical meanings are produced by elementary school students when exploring the concepts of symmetry and composition?” More precisely, the objectives of this work are to analyze the data obtained after implementing a didactic sequence that addresses the following topics: symmetry, composition, and initial concepts of group theory. The research adopts a qualitative approach, focusing on analysis of data generated from annotated dialogues in a field notebook and participants' responses during activities. These data are examined through the view of the Model of Semantic Fields (MSF). Beyond that, the entire research practice is grounded in the Inquiry-Based Learning (IBL) approach. The study was conducted with an eighth-grade class at Dolores Alcaraz Caldas School in Porto Alegre/RS. During the activities, participants were challenged to explore the symmetries of the equilateral triangle and the composition of these elements using manipulative materials. Subsequently, we presented the inicial definitions of the group theory, and they were encouraged to connect their earlier findings with the newly introduced algebraic structure. The research results revealed that some students were able to build a solid understanding of the presented concepts. Furthermore, their commitment, collaborative interaction, and collective knowledge construction stood out. This work highlights the relevance of the IBL approach, especially when combined with MSF, not only for studying of groups and symmetry but also as a viable approach to introduce non-traditional mathematics concepts in elementary education. Additionally, it provides a concrete example of how to insert less conventional topics into the school curriculum.

Keywords: Model of Semantic Fields. Inquiry-Based Learning. Symmetry. Groups.

1. INTRODUÇÃO

A principal motivação à construção deste trabalho foi meu gosto particular pela área de álgebra, mais especificamente pela teoria de grupos. O primeiro contato que tive com o assunto foi por meio do meu primeiro ano de iniciação científica, em que estudei um pouco de álgebra para entender alguns resultados importantes da teoria de números.

A ideia de trabalhar os grupos de simetria se dá ao fato de que quando eu mesmo fui aprender sobre a teoria, esses mesmos grupos foram os introdutórios. Entendo também a importância de trabalhar esse tema, uma vez que trabalharíamos com uma matemática diferente da normalmente proposta na escola, que está mais vinculada à ideia de fazer cálculos aritméticos.

A partir dos grupos de simetria, podemos apresentar aos estudantes uma "matemática nova" e também motivamos o desenvolvimento do pensamento algébrico. Por fim, a intenção de trabalhar um conteúdo que não é obrigatório no curso de licenciatura em matemática da UFRGS e que formalmente não faz parte do currículo do ensino básico, é que o mesmo não necessita de conceitos complexos concebidos *a priori* pelo estudante; dessa forma, não é necessário que os alunos tenham uma grande "maturidade matemática".

Ao refletir sobre a ideia e leituras realizadas acerca do tema, apresentamos a pergunta diretriz desta pesquisa: ***Quais significados matemáticos são produzidos por alunos do ensino básico ao explorarem os conceitos de simetria e composição?***

A pesquisa visa analisar qualitativamente os dados produzidos por meio de diálogos registrados no caderno de campo e escrita dos alunos nas folhas das atividades. Estes dados foram analisados sob o olhar do Modelo dos Campos Semânticos (MCS) e toda a prática da pesquisa foi baseada na abordagem *Inquiry-Based Learning* (*IBL*).

O público-alvo da pesquisa foram alunos do oitavo ano do ensino fundamental da escola Dolores Alcaraz Caldas, situada no município de Porto Alegre/RS. A prática foi realizada no laboratório de Matemática da escola e contou com 14 participantes. Dentre os materiais utilizados durante as atividades, destacam-se as atividades I e II, e os triângulos equiláteros em MDF (ver apêndices A, B e E, respectivamente).

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o desenvolvimento do pensamento algébrico é a principal finalidade para a unidade de álgebra para o ensino fundamental. Diante disto, o presente trabalho busca desenvolver a habilidade algébrica de construção e generalização de um objeto matemático a partir de um objeto material. A importância de trabalhar o conceito de simetria, também está presente no mesmo documento:

> “O estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de softwares de geometria dinâmica” (BNCC, 2018, p.272).

Cabe ressaltar que mesmo que o tópico de simetria esteja posto na área de geometria na BNCC, buscamos apresentá-lo por meios algébricos. Desta forma, a escolha de trabalhar com grupos de simetria e utilizando tal material se dá pela facilidade de compreensão de objetos já conhecidos pelos estudantes. Por sua vez, o *IBL* se justifica pela sua abordagem, uma vez que a questão central é entender como os estudantes conseguem construir significados matemáticos a partir de um determinado contexto. E, a partir disso, correlacionar os conceitos entendidos a algo já existente, que neste caso são as definições iniciais da teoria de grupos.

Além disto, a necessidade do desenvolvimento algébrico em alunos ainda no ensino básico é indispensável segundo Blanton; Kaput (2005). Mais ainda, na p. 413, eles categorizam o pensamento algébrico em quatros formas:

> “a) o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada); b) a generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); c) a modelagem como um domínio para expressar e formalizar generalizações; d) a generalização de sistemas matemáticos abstraídos de cálculos e relações”(BLANTON;KAPUT, 2005, p.413, tradução nossa).

Dito isto, o presente trabalho está relacionado mais com a quarta forma, pois a partir da abordagem *IBL*, os alunos serão capazes de fazer generalizações acerca de sistemas matemáticos que podem ou não estar representados no mundo físico.

Por fim, o texto está organizado em seis capítulos. O primeiro é voltado para a revisão bibliográfica utilizada. Nele são discutidos trabalhos e artigos acadêmicos que servem de inspiração para as principais ideias apresentadas ao longo de todo o texto.

No segundo capítulo é vista a parte matemática do trabalho, o que inclui as definições de simetria, as simetrias do quadrado e triângulo equilátero, e, por fim, uma breve introdução à teoria de grupos com alguns exemplos. Cabe destacar que este capítulo está escrito mais formalmente do ponto de vista matemático. No entanto, claramente este formato não foi mantido durante a parte prática da pesquisa, como pode ser atestado pelas apresentações I e II (ver apêndices C e D).

O terceiro capítulo tem o objetivo de apresentar para o leitor os principais aspectos dos referenciais teóricos desta pesquisa, que são o *IBL* e o MCS.

O quarto capítulo trata da abordagem metodológica da pesquisa, detalhando o seu caráter qualitativo, especialmente no contexto do estudo de caso atual. Além disso, este capítulo delineia os aspectos cruciais relacionados ao “como”, “onde”, “quem” e “tempo de duração” da pesquisa, com o objetivo de proporcionar uma exploração abrangente destes elementos-chave.

Já no quinto capítulo, fazemos a análise dos dados obtidos durante a pesquisa. Esta análise é realizada sob a ótica do MCS, com o intuito de entendermos como se deu a produção de significados dos alunos.

Por fim, no sexto capítulo, são discutidas as considerações finais. Entre elas, apresentamos uma síntese de toda a pesquisa e relatamos aspectos pertinentes da análise de dados, importância para futuras pesquisas, desafios e aprendizados.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para a construção deste trabalho, utilizamos como revisão de literatura inicialmente dois Trabalhos de Conclusão: o primeiro do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) e o segundo do Curso de Licenciatura em Matemática, ambos da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

Estes dois trabalhos foram inspiradores no sentido de que me mostraram que era possível desenvolver uma prática que envolvesse os conceitos de simetrias e de grupo no ensino básico.

O primeiro é intitulado "Uma breve introdução à teoria de grupos" de Souza (2014). Este trabalho teve um papel importante, pois o autor apresenta a teoria de grupos de uma forma mais acessível, o que torna este assunto mais factível de ser trabalhado com os participantes da pesquisa.

Já com o segundo, "Ornamentos e Grupos" de Borges (2003), foi possível aprender mais sobre o conceito de simetria em si, que é, de certa forma, o objeto central do estudo. Este segundo trabalho também apresenta um excelente material introdutório à parte inicial da teoria de grupos.

Outros referenciais relacionados ao conteúdo matemático aparecem na Seção 3. Estes foram utilizados para trazer um pouco mais de robustez matemática para as definições apresentadas naquela parte.

Para compor a parte pedagógica da revisão de literatura, foram utilizados dois artigos relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

O primeiro deles se chama "A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino" de Coelho; Aguiar (2018). Neste artigo estão presentes algumas considerações teóricas acerca do desenvolvimento tanto da álgebra como do pensamento algébrico; em particular, como o desenvolvimento da álgebra pode e deve estar presente no processo de ensino da álgebra.

O segundo artigo, "*Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning*" de Blanton; Kaput (2005), traz considerações acerca de um estudo de caso. Seu objetivo foi explorar de que formas e em que medida uma professora era capaz de construir uma sala de aula cuja prioridade fosse o desenvolvimento de habilidades de raciocínio algébrico. A pesquisa teve duração de um ano e a partir disso os autores fizeram algumas considerações acerca do impacto na capacidade dos alunos raciocinarem algebricamente. Para tal análise os autores utilizaram da diversidade de tipos de raciocínio algébrico, sua frequência e método de integração.

Por fim, os últimos dois artigos analisados estão relacionados diretamente com o referencial teórico da pesquisa que são o *Inquiry-Based Learning* (*IBL*) e o Modelo dos Campos Semânticos (MCS).

O primeiro deles é "*An Inquiry-Oriented Approach to Span and Linear Independence: The Case of the Magic Carpet Ride Sequence*" de Wawro; *et al*, (2012) e está relacionado com o IBL. Neste artigo, os autores buscam construir alguns conceitos iniciais de álgebra linear a partir de um contexto lúdico, o qual eles chamam de "*Magic Carpet Ride*".

O objetivo do trabalho é que os participantes, a partir do contexto lúdico apresentado, façam discussões em grupos e busquem reinventar os conceitos de subespaço gerado, dependência linear e independência linear; a ideia geral é trabalhar em um ambiente no qual o aluno possa resolver os problemas propostos e seja capaz, a partir das soluções, de criar as definições formais. O grande acréscimo que ganhei ao ler este trabalho se dá ao fato de que o objetivo da minha pesquisa é muito similar ao proposto pelos autores.

Já o segundo, "O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico" de Lins (1994), tem como objetivo principal estabelecer uma análise epistemológica com foco na álgebra e no pensamento algébrico. O autor argumenta que usar ou aplicar álgebra difere do pensamento algébrico e que este último é apenas uma das várias maneiras de atribuir significado à álgebra.

O ponto central da discussão são os diferentes modos de produzir significados (campos semânticos) para um mesmo objeto, que neste caso é a álgebra. Para fundamentar seu argumento, o autor se apoia no MCS, abordando alguns de seus aspectos. Além disso, o artigo também explora as implicações desse estudo para o contexto da sala de aula.

Este último trabalho apresenta um grande alicerce teórico, cuja importância fica evidenciada na etapa de análise de dados, uma vez que a presente pesquisa se compromete em entender as respostas e não meramente a relatar se está certo ou errado; desta forma, aquilo que o autor considera como significado é imprescindível para a nossa análise.

3. SIMETRIA E TEORIA DE GRUPOS

Esta seção tem por objetivo ser uma seção de preliminares da parte matemática envolvida durante todo o trabalho. Mais precisamente, vamos discutir os tópicos de simetrias – com ênfases nas simetrias do triângulo equilátero e do quadrado – e os conceitos iniciais da teoria de grupos na direção da construção dos grupos de simetrias dos polígonos supracitados.

Para esta seção a referência principal foi Bovo; Santos (2004).

3.1 Simetria

Para este trabalho, a noção de simetria é primordial. Contudo apenas definir o que entendemos por simetria já não é uma tarefa fácil de ser realizada, como já afirma Coutinho (2014):

> A noção de simetria é relativamente difícil de descrever com precisão. Imagine que você fecha os olhos enquanto aplico alguma transformação à figura. Se, abrindo os olhos, você não for capaz de dizer se fiz alguma coisa à figura ou não, então esta transformação é uma simetria. (COUTINHO, 2014, p. 135).

Para fins deste trabalho vamos usar a definição de simetria que consta em Bovo; Santos (2004, p. 7). Antes de enunciá-la, recordemos alguns conceitos necessários. Cabe ressaltar que algumas definições aqui dadas poderiam ser consideradas em ambientes mais abrangentes; no entanto, restringimo-nos a estas versões tendo em vista o contexto *core* deste trabalho.

Considere V o espaço $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Definimos uma *figura* como qualquer subconjunto X de V. Como V possui uma função distância usual (a proveniente da norma euclidiana $||\,.\,||_E$), podemos restringi-la à figura X, obtendo assim a métrica $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = ||x - y||_E$, para $x, y \in X$.

Seja X uma figura e tome $f\colon X \to X$ uma aplicação. Dizemos que f é uma *isometria* se ela preserva distâncias, ou seja, se $d\big(f(x), f(y)\big) = d(x,y)$ para todo $x, y \in X$. Note que toda isometria f é injetora. De fato, se $f(x) = f(y)$, então $0 = d\big(f(x), f(y)\big) = d(x,y)$, o que nos diz que $x = y$. Entretanto, nem toda isometria é sobrejetora, pois, considerando $X = [0, \infty)$, a translação $g\colon X \to X, g(x) = x + 1$, é uma isometria não sobrejetora.

Agora temos condições de definir simetria. Dada uma figura X, uma simetria de X é uma isometria $f\colon X \to X$ que também é sobrejetora. Pelo que acabamos de observar acima, também podemos ver que uma simetria de X é uma isometria bijetora de X.

O conceito de simetria tem aplicações em várias áreas da matemática e ciências, como a teoria dos números, a teoria dos grupos, a física, a química, a biologia e até mesmo na teoria da computação, onde é aplicada em algoritmos de otimização e reconhecimento de padrões.

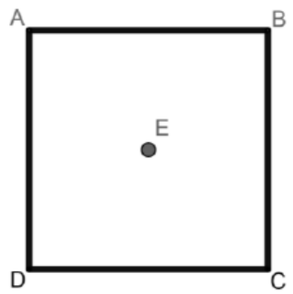
Embora possamos estudar as simetrias de qualquer figura X, neste trabalho vamos nos limitar a discutir apenas as simetrias do quadrado e do triângulo equilátero.

3.1.1 Simetrias do quadrado

O quadrado possui diversas simetrias. Elas essencialmente são divididas em dois tipos: as de rotação e as de reflexão. Vejamos como construí-las.

Considere o quadrado $ABCD$ como consta na Figura 1 a seguir.

Figura 1 - Quadrado $ABCD$



Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Chamemos de E o ponto central deste quadrado $ABCD$. A partir deste ponto, podemos rotar o quadrado e assim obter as quatro simetrias de rotação do quadrado. Mais explicitamente, estas simetrias são:

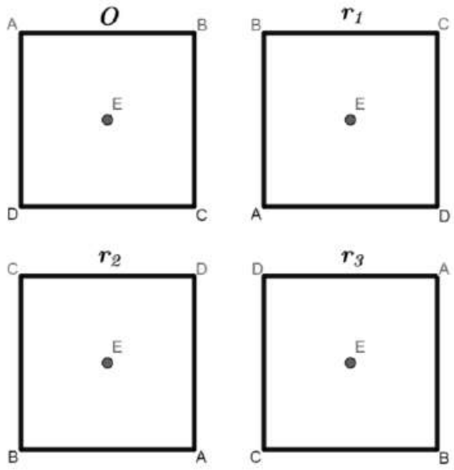
- O é aquela simetria que deixa o quadrado como está, ou seja, é a simetria identidade;
- r_1 é a rotação de 90º no sentido anti-horário;
- r_2 é a rotação de 180º no sentido anti-horário;
- r_3 é a rotação de 270º no sentido anti-horário.

Observe que a simetria O pode ser vista como a rotação de 360º (ou 0º) no sentido anti-horário, o que a justifica como uma simetria de rotação.

Também gostaríamos de comentar um pouco sobre a abreviação O para a simetria identidade. Durante a Apresentação I (ver apêndice C), utilizamos a expressão “simetria origem” em vez de “simetria identidade”, gerando a abreviação natural O para a mesma. Decidimos utilizar esta notação desde já de modo que o leitor que já se acostume com ela, visto que ela aparecerá bastante durante a seção de análises de dados.

A Figura 2 traz uma visualização geométrica das simetrias de rotação do quadrado.

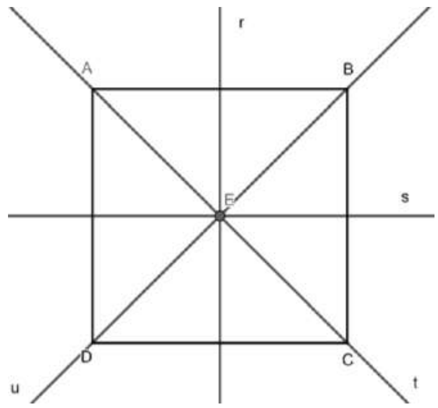
Figura 2 - Simetrias de rotação do quadrado



Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Para determinar as simetrias de reflexão do quadrado $ABCD$, necessitamos do auxílio das retas que passam pelas suas diagonais e também daquelas que o cortam nos pontos médios de seus lados paralelos. Chame estas retas de r, s, t e u, conforme a Figura 3.

Figura 3 - Quadrado e suas retas de reflexão



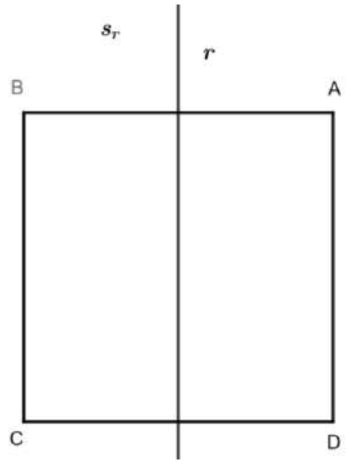
Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Utilizando estas retas, obtemos as simetrias de reflexão do quadrado $ABCD$ da seguinte forma:

- s_r é a reflexão do quadrado em torno da reta *r*;
- s_s é a reflexão do quadrado em torno da reta *s*;
- s_t é a reflexão do quadrado em torno da reta *t*;
- s_u é a reflexão do quadrado em torno da reta u.

A Figura 4 mostra visualmente como o quadrado $ABCD$ fica após a aplicação da simetria s_r.

Figura 4 - Reflexão s_r do quadrado

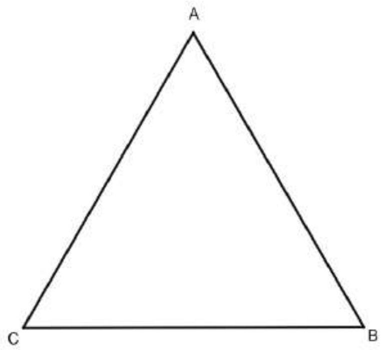


Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

3.1.2 Simetrias do triângulo equilátero

Assim como o quadrado, o triângulo equilátero também possui simetrias de rotação e de reflexão. Consideremos ABC o triângulo equilátero como na Figura 5.

Figura 5 - Triângulo equilátero ABC



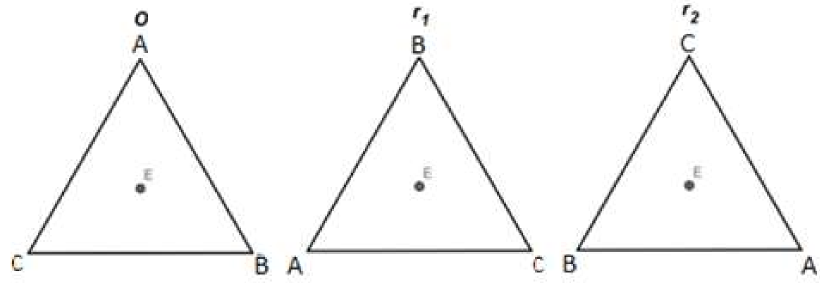
Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Se tomarmos o ponto E como o centro deste triângulo, obtemos as simetrias de rotação em torno deste ponto:

- O é aquela simetria que deixa o triângulo como está, ou seja, é a simetria identidade;
- r_1 é a rotação de 120º no sentido anti-horário;
- r_2 é a rotação de 240º no sentido anti-horário.

A Figura 7 ilustra as simetrias recém-definidas.

Figura 6 - Simetrias de rotação do triângulo equilátero

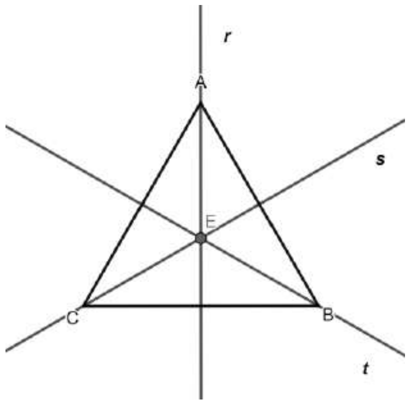


Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Ressaltamos que as mesmas observações feitas com respeito à simetria origem (O) na subseção anterior permanecem válidas (a menos das devidas adequações ao novo contexto).

Para determinar as simetrias de reflexão do triângulo ABC, consideremos as retas r, s e t que passam pelo centro E e por cada um dos vértices do triângulo, como na Figura 7.

Figura 7 - Triângulo equilátero e suas retas de reflexão



Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Utilizando estas retas, as simetrias de reflexão do triângulo equilátero são da seguinte forma:

- s_r é a reflexão do triângulo equilátero em torno da reta r;
- s_s é a reflexão do triângulo equilátero em torno da reta s;
- s_t é a reflexão do triângulo equilátero em torno da reta t.

3.1.3 Composição de simetrias

Em Matemática, quando estamos interessados no estudo de um objeto matemático, é comum classificarmos esses objetos e analisarmos o conjunto formado por eles. Em nosso caso, trata-se do conjunto das simetrias das figuras que consideramos anteriormente.

Além disso, é importante encontrarmos uma forma de fazer com que esses elementos interajam entre si; isto é, definindo uma operação entre eles. Como as simetrias são antes de tudo funções, a composição é a operação natural que possibilita essa interação entre elas.

Além do mais, como a composição de isometrias também é uma isometria, temos que a composição de simetrias também é uma simetria. Desta forma, a composição se mostra como uma excelente operação quando restrita a simetrias.

Adiante vamos compor explicitamente algumas simetrias, logo um pouco de notação se faz necessário. Para tanto, observe que todas as simetrias do quadrado preservam vértices, ou seja, elas os permutam entre si. No entanto, cabe ressaltar que nem toda permutação de vértices corresponde a uma simetria.

Mais ainda, não existem duas simetrias distintas que levam os vértices em uma mesma configuração. Consequentemente, as simetrias do quadrado ficam unicamente determinadas pela permutação dos vértices e, assim sendo, podemos identificá-las por meio destas permutações.

Por exemplo, a simetria s_r aplicada ao quadrado $ABCD$ na Figura 4 pode ser simplesmente pensada como a função em que o vértice A troca de lugar com o vértice B e o vértice C troca de lugar com o vértice D. Portanto, a notação que vamos adotar é a seguinte:

$$s_r = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}.$$

Esta notação é a usual quando se trabalha com funções de permutação: a primeira linha mostra os vértices do quadrado na sua posição inicial e na segunda linha temos a posição dos vértices após a transformação da simetria s_r.

Vejamos alguns exemplos de composição entre simetrias do quadrado utilizando a notação recém apresentada. Antes disto, observe que a rotação r_1 nesta notação fica:

$$r_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix}.$$

Para calcular a composição $r_1 \circ s_r$, precisamos saber onde cada vértice é levado. Primeiramente, vemos que o vértice A é levado por s_r no vértice B, que por sua vez é trazido de volta ao vértice A por r_1. Assim sendo, na composição $r_1 \circ s_r$, o vértice A é levado nele mesmo. Seguindo este raciocínio, podemos calcular todas as novas posições dos demais vértices e, com isto, obter explicitamente a simetria $r_1 \circ s_r$.

A Figura 8 a seguir traz os resultados obtidos para as composições $r_1 \circ s_r$ e $s_r \circ r_1$, seguindo esta notação. Mais ainda, a mesma figura traz em verde e vermelho o procedimento que foi feito no parágrafo anterior para calcular onde cada vértice é levado de uma forma mais simplificada, evidenciando uma das vantagens da notação adotada.

Figura 8 - Composição de simetrias

$$r_1 \circ s_r = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix} = s_t,$$

$$s_r \circ r_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix} = s_u.$$

Fonte: Produzido pelo autor

Desta forma, mediante uma notação simples e concisa, podemos calcular as composições e obter que a simetria $s_r \circ r_1$ é diferente da simetria $r_1 \circ s_r$.

Por fim, ressaltamos que apesar de termos trabalhado a notação acima apenas para as simetrias do quadrado, as observações com respeito à permutação dos vértices também valem para as simetrias do triângulo equilátero. Portanto, com os devidos ajustes ao número de vértices da figura em questão, a notação acima pode ser utilizada no contexto das simetrias do triângulo equilátero da mesma forma.

3.2 Introdução à Teoria de Grupos

A teoria de grupos é um campo de natureza mais abstrata da matemática, focado no estudo da estrutura algébrica desenvolvida inicialmente pelo matemático francês Évariste Galois (1811-1832) que ficou conhecida na literatura como grupo. Essa teoria tem suas raízes no século XIX, graças aos trabalhos de matemáticos como Joseph-Louis Lagrange**,** Niels Abel e Paolo Ruffini, além do supracitado. Diante dos progressos obtidos, ela acabou se tornando – e ainda é – uma área importante na álgebra moderna.

Nesta seção, vamos revisar as noções elementares desta teoria, assim como ver que os conjuntos das simetrias vistos na Seção anterior formam grupos.

3.2.1 Grupos

Dado G um conjunto, tomemos $*$ uma *operação binária e fechada em* G, isto é, uma função $*: G \times G \to G, (a, b) \mapsto a * b$. Dizemos que o par $(G,*)$ é um *grupo* se as três propriedades seguintes são satisfeitas:

i) **Associatividade:** para quaisquer elementos $a, b, c \in G$, temos que

$$a * (b * c) = (a * b) * c;$$

ii) **Elemento neutro:** existe um elemento $e \in G$ tal que para todo $a \in G$, vale

$$a * e = a = e * a;$$

iii) Elemento inverso: para todo elemento $a \in G$, existe $a' \in G$ de modo que

$$a * a' = e = a' * a.$$

Antes de prosseguirmos, vejamos um exemplo. Considere o conjunto dos números inteiros junto da operação usual de soma, ou seja, o par $(\mathbb{Z}, +)$. Temos que este par é um grupo. De fato, basta tomar como elemento neutro $e = 0$ e como inverso (aditivo) $a' = -a$ para todo elemento $a \in \mathbb{Z}$, e segue que as propriedades **(ii)** e **(iii)** são satisfeitas.

A propriedade de associatividade **(i)** é um pouco mais difícil de ser mostrada, mas também é verdadeira. Ela poderia ser verificada via a construção dos números inteiros e suas operações a partir da construção dos números naturais (e suas operações), que por sua vez é feita por meio dos Axiomas de Peano. Como este não é o foco, vamos nos limitar a isto para justificar que a soma é associativa.

Um ponto importante a ser destacado é que se trocarmos a operação de adição pela de multiplicação, o par $(\mathbb{Z}, \cdot)$ deixa de ser um grupo, pois a propriedade **(iii)** já não é mais satisfeita, uma vez que apenas os números 1 e -1 são inversíveis (multiplicativamente) em $\mathbb{Z}$.

Por fim, observamos que a definição de grupo não demanda que a operação $*$ também seja comutativa, isto é, que $a * b = b * a$ para todo $a, b \in G$. Desta forma, grupos podem ou não satisfazer esta propriedade. Quando ela é cumprida, dizemos que se trata de um *grupo abeliano*. No exemplo do par $(\mathbb{Z}, +)$ esta propriedade é satisfeita, portanto trata-se de um grupo *abeliano*.

Um exemplo de grupo não abeliano é o grupo formado pelas matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais que são inversíveis munido da operação de produto usual de matrizes, que geralmente é denotado na literatura por $(Gl_2(\mathbb{R}), \cdot)$. De fato, basta observar que a matriz identidade é o elemento neutro e que todo elemento neste conjunto tem um inverso (multiplicativo), pois tomamos o conjunto justamente consistindo de matrizes inversíveis. Disto segue que as propriedades **(ii)** e **(iii)** são satisfeitas.

Verifiquemos agora a propriedade de associatividade **(i).** Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$ elementos de $Gl_2(\mathbb{R})$, então

$$(A \cdot B) \cdot C = \cdots = \begin{bmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afl + bhl \\ cei + dgi + cfk + dhk & cej + dgj + cfl + dhl \end{bmatrix}$$

e

$$A \cdot (B \cdot C) = \cdots = \begin{bmatrix} aei + afk + bgi + bhk & aej + afl + bgj + bhl \\ cei + cfk + dgi + dhk & cej + cfl + dgj + dhl \end{bmatrix},$$

garantindo que $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, ou seja, a propriedade **(i)** vale.

Por fim, note que este grupo não é abeliano pois, por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2.2 Grupo de simetrias do quadrado

Agora que temos bem definido aquilo que entendemos por um grupo, vamos verificar que o conjunto de simetrias do quadrado $\blacksquare = \{O, r_1, r_2, r_3, s_r, s_s, s_t, s_u\}$ junto da operação de composição forma um grupo.

A condição de associatividade é satisfeita, uma vez que a composição de funções é genericamente uma operação associativa, ou seja, a associatividade sempre é verdadeira em qualquer contexto de composição de funções, desde que esta composição seja possível.

Para verificar que a operação de composição restrita às simetrias $\blacksquare = \{O, r_1, r_2, r_3, s_r, s_s, s_t, s_u\}$ é fechada, poderíamos argumentar de forma teórica como já foi feito na Seção 3.1.3, mas tendo em visto a prática aplicada, vamos fazer por inspeção. Para tanto, construímos o Quadro 1 a seguir e temos que a operação é, de fato, fechada.

Quadro 1 - Tábua de simetrias do quadrado

$\circ$	O	r_1	r_2	r_3	s_r	s_s	s_t	s_u
O	O	r_1	r_2	r_3	s_r	s_s	s_t	s_u
r_1	r_1	r_2	r_3	O	s_t	s_u	s_s	s_r
r_2	r_2	r_3	O	r_1	s_s	s_r	s_u	s_t
r_3	r_3	O	r_1	r_2	s_u	s_t	s_r	s_s
s_r	s_r	s_t	s_s	s_u	O	r_2	r_1	r_3
s_s	s_s	s_u	s_r	s_t	r_2	O	r_3	r_1
s_t	s_t	s_s	s_u	s_r	r_3	r_1	O	r_2
s_u	s_u	s_r	s_t	s_s	r_1	r_3	r_2	O

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Outro ganho que temos com o Quadro 1 é que fica nítido que a simetria origem O atua como elemento neutro e, assim, a propriedade **(ii)** está conferida.

Por fim, o Quadro 1 também nos ajuda a checar que todos os elementos possuem inverso. De forma mais explícita, construímos o Quadro 2 no qual especificamos o inverso de cada elemento.

Quadro 2 - Elementos e inversos do quadrado

Elemento	Inverso
O	O
r_1	r_3
r_2	r_2
r_3	r_1
s_r	s_r
s_s	s_s
s_t	s_t
s_u	s_u

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Portanto, temos que o par (■,∘) é um grupo. Este grupo é geralmente conhecido na literatura como um dos grupos diedrais e geralmente é denotado por D_4.

3.2.3 Grupo de simetrias do triângulo equilátero

De forma análoga à Seção anterior, podemos provar que conjunto de simetrias do triângulo equilátero $\Delta = \{O, r_1, r_2, s_r, s_s, s_t\}$ junto da operação de composição forma um grupo. Não teceremos detalhes disto; apenas por questão de completude, adicionamos a seguir dois quadros que são os equivalentes aos Quadro 1 e Quadro 2 na argumentação da Seção anterior.

Quadro 3 - Tábua de simetrias do triângulo equilátero

$\circ$	O	r_1	r_2	s_r	s_s	s_t
O	O	r_1	r_2	s_r	s_s	s_t
r_1	r_1	r_2	O	s_s	s_t	s_r
r_2	r_2	O	r_1	s_t	s_r	s_s
s_r	s_r	s_t	s_s	O	r_2	r_1
s_s	s_s	s_r	s_t	r_1	O	r_2
s_t	s_t	s_s	s_r	r_2	r_1	O

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Quadro 4 - Elementos e inversos do triângulo equilátero

Elemento	Inverso
O	O

r_1	r_2
r_2	r_1
s_r	s_r
s_s	s_s
s_t	s_t

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Assim como para o grupo de simetrias do quadrado, o grupo $(\Delta,\circ)$ é geralmente conhecido na literatura como um dos grupos diedrais e geralmente é denotado por D_3.

De forma geral, dado um polígono regular com *n* lados, o conjunto de simetrias dele forma um grupo com a operação de composição. Esses grupos de simetrias são conhecidos como grupos diedrais, representados pela notação D_n.

4. REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção abordaremos os dois referenciais teóricos que estão por de trás deste trabalho, que são o *Inquiry-Based Learning* (*IBL*) e o Modelo dos Campos Semânticos (MCS).

Ambos referenciais se alinham na perspectiva do construtivismo e entendem o conhecimento como resultado de uma construção subjetiva. Enquanto o *IBL* põe o aluno em uma posição de um ser mais autônomo na construção do próprio conhecimento, o MCS entende que o conhecimento é resultado de uma crença-afirmação e justificação de cada indivíduo.

Utilizamos o *IBL* para "moldar" nosso trabalho, ou seja, baseamo-nos nas suas ideias norteadoras e nas suas fases de implementação, no sentido de nos fornecer um modelo de experimento. Já o MCS serviu como a teoria de apoio para refletirmos acerca daquilo que foi produzido pelos alunos, no sentido de compreender que significados foram construídos a partir das respostas.

4.1 *Inquiry-Based Learning*

O *IBL* é uma abordagem educacional que coloca o aluno no centro do processo de aprendizagem. Nessa abordagem, os alunos são incentivados a explorar tópicos, fazer perguntas, investigar problemas e buscar respostas de forma ativa e autônoma.

Em contraste ao ensino tradicional, em que os conhecimentos são transmitidos de forma passiva para os alunos, o *IBL* enfatiza a construção do conhecimento através da investigação e descoberta.

Os alunos são incentivados a formular suas próprias perguntas e hipóteses, a buscar estratégias a partir de um determinado contexto e a chegar a conclusões com base em evidências. Segundo Lee *et al*; *apud* Spronken-Smith (2008):

> O objetivo central do *IBL* é que os estudantes desenvolvam valiosas habilidades de pesquisa e estejam preparados para aprendizagem contínua. Estudantes devem alcançar resultados de aprendizagem que incluam o pensamento crítico, a capacidade de investigação independente, responsabilidade pelo próprio aprendizado e crescimento intelectual e maturidade. (LEE *et al*; *apud* SPRONKEN-SMITH 2008, tradução nossa).

Além disso, o *IBL* também incentiva a colaboração entre os alunos, pois eles preferencialmente são estimulados a trabalharem em grupo (conforme vamos ver adiante no Quadro 5 - Sugestões para o professor) para realizar as investigações.

Em Bell; Banchi (2008), os autores classificam os níveis de investigação em quatro, como podemos ver na Figura 9:

Figura 9 - Níveis do IBL

The four levels of inquiry and the information given to the student in each one.

Inquiry Level	Question	Procedure	Solution
1—Confirmation Inquiry *Students confirm a principle through an activity when the results are known in advance.*	✔	✔	✔
2—Structured Inquiry *Students investigate a teacher-presented question through a prescribed procedure.*	✔	✔	
3—Guided Inquiry *Students investigate a teacher-presented question using student designed/selected procedures.*	✔		
4—Open Inquiry *Students investigate questions that are student formulated through student designed/selected procedures.*			

Fonte: The Many Levels of Inquiry (BELL, BANCHI, 2008, p.2)

Para este trabalho utilizamos a “2 - Investigação Estruturada: Os estudantes investigam uma pergunta apresentada pelo professor por meio de um procedimento prescrito.” (tradução nossa) como referência, uma vez que os estudantes tiveram que realizar as atividades utilizando o material fornecido pelo professor.

4.1.1 O papel do professor no *IBL*

O papel do professor no *IBL* é o de facilitador e guia, fornecendo orientação e suporte para os alunos, ajudando-os a desenvolver suas habilidades de pesquisa e pensamento crítico. O professor também deve fornecer recursos, apresentar tópicos iniciais e estimular o interesse dos alunos. Segundo Hoover (1996), professores construtivistas: “[…] não assumem o papel de ‘sábio no palco’. Em vez disto, os professores construtivistas atuam como ‘guias ao lado’, proporcionando aos estudantes oportunidades para testar a adequação de suas compreensões atuais” (HOOVER, 1996, tradução nossa).

Conforme Moura (2018), ao utilizar o *IBL* é importante que o professor se atente às seguintes etapas:

> a) Pré-planejamento – devem ser verificados fatores como os conteúdos que serão abordados, tempo, características do público alvo, ferramentas que serão utilizadas (a organização do processo está diretamente relacionada com os resultados), etc.
> b) Discussão – no início é necessária para introduzir conceitos básicos e para diagnosticar o que os estudantes conhecem do assunto que será trabalhado (caso necessário deverá ser feito uma revisão de conteúdos).
> c) Questionamento – onde são colocadas questões para os estudantes, que devem ser investigadas e discutidas para posteriormente serem respondidas (têm de ser coerentes com o contexto e possíveis de responder). (MOURA, 2018, p. 59).

Moura (2018), também apresenta o seguinte quadro, que esquematiza diversas sugestões para os professores durante o *IBL:*

Quadro 5 - Sugestões para o professor

DOMÍNIO DO CONTEÚDO	• O professor deve dominar o conteúdo que está sendo ensinado, inclusive compreendendo como este está ordenado no currículo. • O professor deve estar a par do nível de conhecimento dos estudantes em relação aos assuntos estudados.
AMBIENTE DE APRENDIZAGEM	• A sala de aula deve ter condições de espaço e equipamentos para permitir a organização em grupos. Os estudantes devem ser estimulados a conhecer cada um dos colegas e os objetivos da aprendizagem. • O professor deve estimular os estudantes, por exemplo, com elogios, e avaliações qualitativas dos trabalhos realizados.
CONTEÚDOS QUE SERÃO TRATADOS	• Apresentar os tópicos que serão abordados. • Mostrar para os estudantes como os novos tópicos complementarão os tópicos anteriores. • Introduzir os trabalhos sempre com uma ou mais questões.
NO INÍCIO DA INTERVENÇÃO	• Dar oportunidade para que os grupos discutam as questões colocadas. • Permitir que os estudantes apresentem algum trabalho que tenham produzido.
ENVOLVER OS ESTUDANTES	• Após as discussões, permitir que os grupos apresentem as respostas formuladas para questões colocadas.
HONESTIDADE	• O professor deve valorizar e considerar importante as conclusões apresentadas de diferentes formas pelos alunos, tais como, escrita, oral, em gráficos, etc. • O professor deve assumir que não conhece as respostas para tudo, mostrando que nenhum profissional detêm todo o conhecimento.
FAZER PERGUNTAS OBJETIVAS	• Por que ...? • O que você pensa a respeito de ...? • Como você explica ...?
ESTAR ALERTA AS DINÂMICAS DE GRUPO	• Estar alerta à participação de todos os membros do grupo.
NO ENCERRAMENTO DAS ATIVIDADES	• Revisar os conteúdos abordados. • Descrever as conclusões. • Mostrar as interligações entre os diferentes conteúdos abordados. • Passar informações sobre as sessões seguintes.

Fonte: (MOURA, 2018, p. 60-61)

Por fim, a utilização do *IBL* neste trabalho torna-se evidente, uma vez que desde o processo de criação e implementação das atividades, tentamos adotar a maior quantidade de características que são comuns ao *IBL*, principalmente nos quesitos: elaboração das atividades, organização em grupos, investigação do objeto de estudo e papel do professor.

4.2 O Modelo dos Campos Semânticos

O MCS é uma teoria recente na área da Educação Matemática. Originalmente recebeu o nome de Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS), mas com o passar do tempo, o termo "teórico" caiu em desuso. Este modelo foi elaborado por Romulo Campos Lins e derivou como subproduto de sua tese de doutorado intitulada "*A framework for understanding what algebric thinking is*", cuja defesa foi no ano de 1992.

Para entender melhor o MCS, comecemos por entender aquilo que o autor define como conhecimento. Para Lins (1994):

> O MTCS é um modelo epistemológico que propõe que conhecimento é uma crença-afirmação junto com uma justificação para a crença-afirmação. Indicamos, desta forma, que conhecimento é algo do domínio da enunciação – e que, portanto, todo conhecimento tem um sujeito – e não do domínio do enunciado; (LINS, 1994, p.29).

Desta forma, para o MCS, todo conhecimento é resultado de uma construção subjetiva, resultante de um par composto por uma crença-afirmação e uma justificação. Para Lins (1994), o processo de justificação é importante, pois:

> [...] o MTCS indica que o mesmo texto, falado com diferentes justificações, constitui diferentes conhecimentos. Uma criança de 5 anos acredita – e diz – que "2+2=4," o mesmo que um matemático acredita – e diz. Mas as justificações de cada um são provavelmente distintas: a criança exibe os dedos, o matemático fala de conjuntos. Estão constituídos conhecimentos diferentes (LINS, 1994, p.29).

Agora temos condições de refletir sobre o que o autor entende por "pensamento algébrico". Para Lins (2012), ele pode ser visto das seguintes formas:

> Pensar aritmeticamente significa que os objetos com que estou lidando são exclusivamente números, operações aritméticas e, acrescento aqui, uma relação de igualdade.
> Pensar internamente significa que as propriedades destes objetos que sustentam o que faço com eles, isto é, que sustentam a lógica das operações num sentido mais amplo, não fazem referência a nada fora do domínio destes objetos. [...]
> Pensar analiticamente, por fim, significa que números genéricos são tratados exatamente como se fossem específicos, "incógnitas" são tratadas exatamente como se fossem "dados"; [...] (LINS, 1994, p.30).

Diante disto é possível entender como o autor distingue a álgebra do pensamento algébrico, uma vez que para ele, "[...] a álgebra é um texto, e o pensamento algébrico é um – entre outros – modo de produzir significado para a álgebra. E, ainda, significado é a relação que se estabelece entre uma crença-afirmação e uma justificação para ela no momento da enunciação" (LINS, 1994, p.30).

Como de costume, para construir significado para algo em matemática, trabalhamos com definições fixas, no sentido de descrever um objeto de uma forma "universal". Em contrapartida, para o MCS isto ocorre em um sentido contrário, pois o objeto só pode ser constituído a partir de um significado, uma vez que, segundo Lins (2012):

> Significado de um objeto é aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto, no interior de uma atividade: Objeto é aquilo para que se produz significado. Sempre que há produção de significado há produção de conhecimento e vice-versa, mas conhecimento e significado são coisas de naturezas distintas. Para o MCS não existe o significado de um "objeto" sem referência ao contexto em que se fala de um objeto (que se pensa com ele, que se pensa sobre ele). Talvez seja útil dizer que significado é sempre local (LINS, 2012, p.20).

Assim sendo, finalmente podemos entender aquilo que o autor chama de resíduo de enunciação. Para Lins (2012), trata-se de:

> Algo com que me deparo e que acredito ter sido dito por alguém. [...] Sons, rabiscos de todo tipo, arranjos de coisas, gestos, imagens, construções. Mas também a borra de café ou chá no fundo da xícara, o resultado do lançamento de moedas ou varetas, a disposição dos planetas no céu, o fato de este carro ter a placa de uma cidade da qual nunca ouvi falar, a tempestade que devastou a casa de uma pessoa poucos dias depois de ela ter abandonado a religião que professava, e assim por diante (LINS, 2012, p.27).

Portanto, os resíduos de enunciação fazem o papel daquilo que pode ser capturado para uma análise dos modos de produzir significados. Neste trabalho utilizamos apenas aqueles resíduos que se referem a diálogos entre aluno e professor, ou escritas dos alunos nas atividades.

Posto isto, temos o necessário para entender aquilo que Lins (1994) considera como sendo um campo semântico:

> Um Campo Semântico é um modo de produzir significado. Embora seja tentador interpretar esta definição como simples questão terminológica, este não é o caso. O que esta definição indica é que minha formulação de semântica em relação a conhecimento não faz referência primária a objetos, mas a modos de produzir objetos (LINS, 1994, p.4).

Por sua vez, os campos semânticos também são constituídos de núcleos, que são (localmente) verdades para o sujeito no processo de produção de significados. Para Lins; *apud* Oliveira (2002):

> A partir da noção de núcleo é que definimos Campo Semântico. Campo Semântico é a atividade de produção de significado em relação a um certo núcleo. Assim, sempre que o sujeito produz significado em relação a um núcleo dizemos que ele está operando em um Campo Semântico (LINS, *apud* OLIVEIRA, 2002, p.21).

Ao desenvolver o MCS, o autor tinha como objetivo “[...] dar conta de caracterizar o que os alunos estavam pensando quando ‘erravam’, mas sem recorrer à ideia de erro” (LINS, 2012, p.11). Desta forma, o MCS, tem um potencial gigantesco quando utilizamos como uma ferramenta de análise da construção de significados pelos alunos, uma vez que o objetivo central possa ser o de analisar o que o aluno estava pensando e não apenas se o aluno acerta ou erra a questão.

Para isto, o autor apresenta o conceito de leitura plausível, que será indispensável para nossa análise de dados. Para ele, “[...] toda tentativa de se entender um autor deve passar pelo esforço de olhar o mundo com os olhos do autor, de usar os termos que ele usa de uma forma que torne o todo de seu texto plausível [...]” (LINS, 1999, p.93).

Diante de todas as considerações feitas acerca do MCS, fica evidente seu potencial analítico para nossa pesquisa, que intrinsecamente tem o objetivo de refletir, assim como o MCS, a produção de significados.

5. ABORDAGEM METODOLÓGICA

O presente trabalho é uma pesquisa de caráter qualitativo. Segundo Bogdan; Biklen (1994), a investigação qualitativa é descritiva, isto é:

> Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48).

Desta forma para entender: que matemática os alunos conseguem produzir a partir de um material manipulável (ver apêndice E), e como a abordagem IBL auxilia os estudantes a formular as definições de grupo, é necessário analisar de forma contínua todo o processo construído por eles.

Assim, o tipo de pesquisa qualitativa escolhida foi a de Estudo de Caso, que segundo Triviños (1987):

> [...] é uma categoria de pesquisa cujo objeto é uma unidade que se analisa aprofundadamente, sendo que nesse tipo nem a hipótese nem os esquemas de inquisição estão aprioristicamente estabelecidos, a complexidade do exame aumenta à medida que se aprofunda no assunto (TRIVIÑOS, 1987, p.134).

A técnica de coleta de dados utilizada foi a de observação participante, por meio dessa metodologia é possível organizar a unidade de análise, neste caso, alunos de oitavo ano de turma de escola pública, para que se investigue a produção de significados realizada por eles, no momento em que constituem seus objetos matemáticos.

A partir de conceitos básicos sobre simetria, os alunos foram desafiados a construir os elementos do grupo de simetria do triângulo equilátero e a trabalhar a composição entre os elementos desse grupo, isso tudo sem que fosse apresentada qualquer noção de grupo.

Feito isso, os alunos foram expostos às definições iniciais da teoria de grupos e foram instigados a conectar o que foi elaborado anteriormente com a estrutura algébrica agora apresentada. Mais precisamente, os alunos tiveram que responder se algumas das propriedades de grupo eram satisfeitas (ou não) a partir da tábua de composição elaborada por eles.

Para que possamos entender um pouco melhor a parte estrutural da pesquisa, apresentaremos o contexto em que ela foi aplicada.

A parte prática da pesquisa ocorreu em uma escola da rede estadual de ensino na cidade de Porto Alegre. Participaram 14 alunos de uma turma de 8º ano do ensino fundamental. Esta prática aconteceu durante o estágio da disciplina EDU012193 (Estágio de Docência em Educação Matemática II).

Utilizamos o espaço do laboratório de Matemática da escola para realizar as atividades, uma vez que este era estruturalmente melhor que as salas de aula regulares e também possuía projetor, o qual foi usado para a Apresentação 1 e Apresentação 2, que estão disponíveis nos apêndices C e D, respectivamente.

Ao longo de duas semanas, tivemos dois encontros semanais de duas horas cada, totalizando 8 horas totais de prática. O Quadro 6 - *Encontros e Atividades* esquematiza o roteiro das atividades desenvolvidas.

Quadro 6 - Encontros e Atividades

Encontro	Atividade
1	No primeiro momento foi apresentada uma aula expositiva sobre simetria (Apresentação 1). No segundo momento os participantes se reuniram em grupos e receberam o material I para iniciar as atividades.
2 e 3	Os participantes continuaram a realizar as atividades do Material I.
4	Em um primeiro momento foi apresentada uma aula expositiva, sobre os conceitos iniciais da teoria de grupos (Apresentação 2). No segundo momento os participantes receberam o material II para realizar as atividades.

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Já a partir do início da prática, os alunos foram separados em grupos e tiveram que se manter no mesmo grupo até o final da pesquisa. O primeiro encontro teve um caráter praticamente só expositivo, visto que foi necessário apresentar o conceito de simetria para os participantes.

Finalizado isto, a participação do professor no segundo e terceiro encontros foi apenas a de um mediador, com o intuito apenas de auxiliar os alunos em eventuais dúvidas, sem tentar influenciar nas respostas dos alunos.

No último encontro, o professor ficou responsável por apresentar uma introdução à teoria de grupos e desafiar os alunos a fazerem as conexões daquilo que foi construído por eles ao longo dos encontros 2 e 3, com a estrutura algébrica nova que fora apresentada.

A coleta de dados ocorreu a partir dos resultados tanto coletivos (obtidos por cada grupo participante) como individuais, que foram registrados nos materiais I e II fornecidos aos alunos ao longo da pesquisa. O conteúdo destes materiais se encontra nos apêndices A e B.

Cabe ressaltar que, no que diz respeito aos resultados coletivos, os integrantes de cada grupo tiveram que entrar em comum acordo sobre as respostas.

Durante a pesquisa, foi utilizado um caderno de campo para registrar as anotações necessárias, incluindo quaisquer dúvidas ou ideias que surgiram dos alunos ao longo do processo, com o intuito de fazer uma melhor análise na relação do diálogo entre aluno/professor com o material produzido pelos alunos, já que nem sempre era possível entender o que o aluno estava pensando apenas lendo suas respostas.

Dentre os dados analisados, serão considerados de maior importância aqueles que dizem respeito à conexão das resoluções presentes no Material 2 com as respostas do Material 1.

6. ANÁLISE DE DADOS

Nesta seção, vamos analisar os resultados da pesquisa, sejam eles os escritos nas atividades, como também aqueles que foram coletados no caderno de campo durante os encontros, já que por meio do mesmo temos registrados diálogos que contém algumas justificações das crença-afirmações dos alunos presentes nas atividades.

A identidade dos alunos é preservada durante toda a análise, a fim de evitar qualquer desconforto com os participantes. Para tanto, utilizamos o código “GXAY” para identificar o aluno que pertence ao grupo “X” e cuja enumeração é “Y”.

Utilizamos o MCS para realizar esta análise. O objetivo é entender os diferentes modos de produzir significados (campos semânticos) que os alunos construíram a partir dos seguintes conceitos: simetria, composição, fecho, elemento neutro, elementos inversos.

Mais precisamente, no que se refere às questões 1 e 2, buscamos entender como a partir da manipulação dos triângulos equiláteros em MDF (ver apêndice E) os alunos conseguiram construir as simetrias de rotação e reflexão. E como também eles fizeram para compor duas simetrias quaisquer.

Já na questão 3, buscamos entender como os alunos fazem o uso das questões anteriores para afirmar que as condições de grupo são verificadas (ou não) para aqueles objetos que eles haviam construído anteriormente.

As análises ocorreram da seguinte forma: para cada questão (Q1, Q2 e Q3) das atividades I e II (ver apêndices A e B), discutimos primeiro os resultados individuais e posteriormente do grupo; ao longo das mesmas, evidenciamos também alguns breves diálogos que constam no caderno de campo mencionado na seção 5. Cabe salientar que tais diálogos ocorreram sempre na frente do grupo todo, por mais que nas suas descrições apenas alguns alunos sejam mencionados.

Outro ponto a destacar sobre a análise das questões é que, a menos que haja respostas substancialmente divergentes entre os membros de um mesmo grupo, analisamos cada questão apenas de forma conjunta, devido à similaridade das respostas dos alunos.

6.1 Questão 1

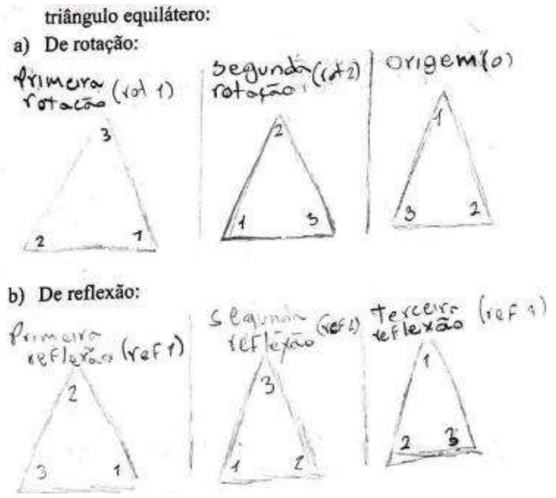
Na questão 1, pedimos para que os alunos nomeassem e desenhassem as simetrias do triângulo equilátero que foram encontradas utilizando o material em MDF. Era esperado que os alunos encontrassem as seis diferentes simetrias: origem, as outras duas provenientes de rotação e também as três de reflexão.

Anteriormente a esta tarefa os alunos participaram de uma aula expositiva (ver apêndice C) na qual eles foram apresentados a diversos exemplos de simetria, ou seja, a diversos resíduos de enunciação sobre o conceito de simetria. Dito isto, queremos analisar se e de que forma os alunos encontraram as mesmas utilizando o material disponibilizado.

6.1.1 Grupo 1

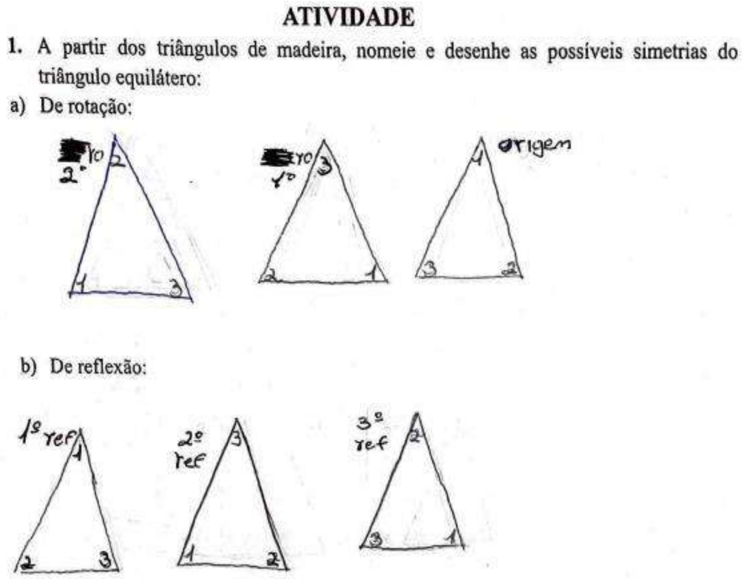
Começamos exibindo as resoluções individuais dos alunos do Grupo 1. As Figuras 9 a 13 apresentam estas resoluções na mesma enumeração dada aos alunos em seu respectivo grupo. Isto também pode ser evidenciado pelo título de cada uma destas figuras.

Figura 10 - Q1G1A1



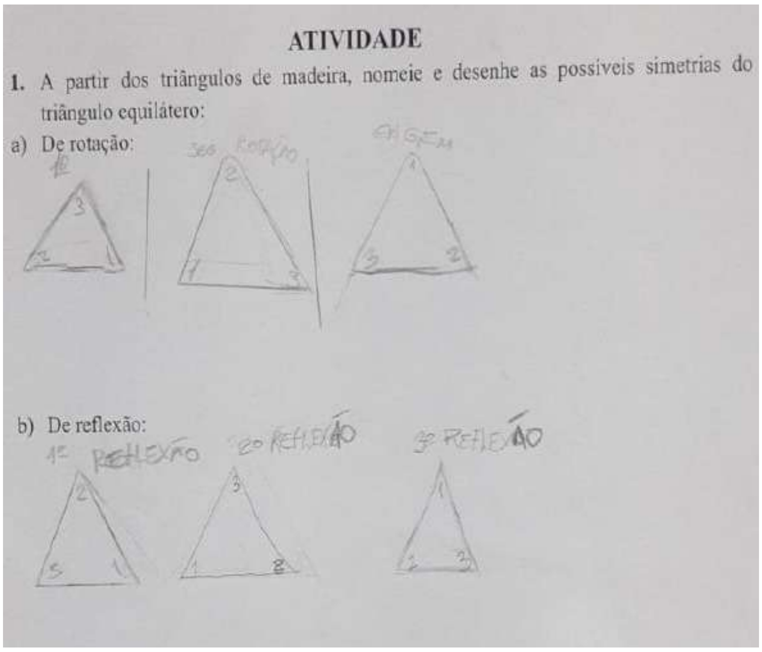
Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 11 - Q1G1A2



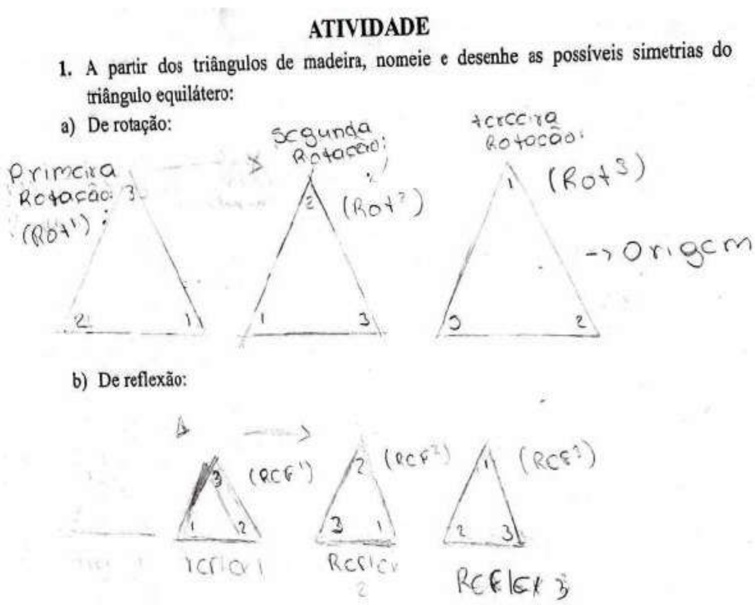
Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 12 - Q1G1A3



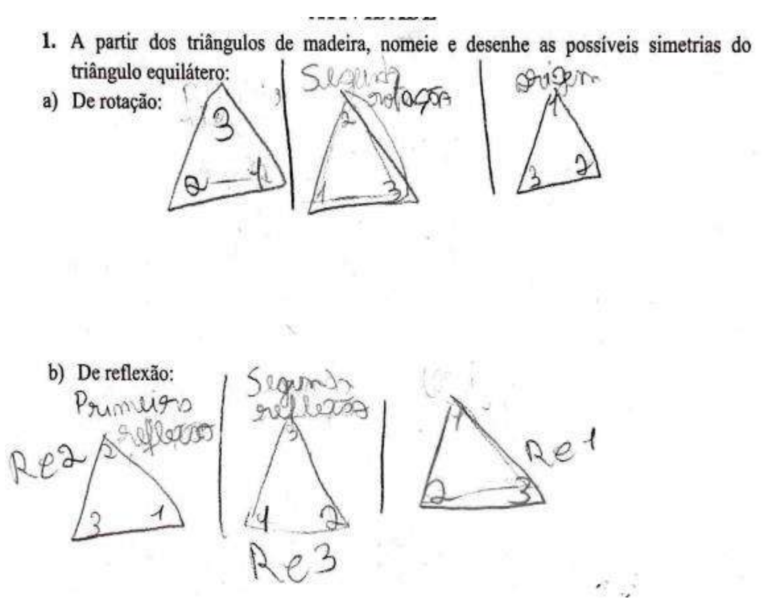
Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 13 - Q1G1A4



Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 14 - Q1G1A5



Fonte: Acervo do Autor (2023)

Como esperado, os alunos do grupo 1 foram capazes de encontrar as seis simetrias do triângulo. É possível afirmar também que as respostas dos alunos foram influenciadas pela aula, uma vez que os nomes que os alunos deram para cada uma das simetrias é muito parecido com o presente na Figura 65 - *Slide 7 APRESENTAÇÃO I*. Outro ponto importante também a mencionar é o fato de os alunos terem estabelecido uma ordem entre as simetrias, já que utilizaram as palavras: primeira, segunda e terceira.

Durante o primeiro encontro, foi registrado um breve diálogo referente à questão 1 com este grupo:

G1A4: Sor, eu achei seis. Como eu faço pra saber se não tem mais?

Professor: Por quê? Você encontrou alguma nova?

G1A4: Sim, mas ela é igual a uma das outras.

Professor: Então ela é uma nova?

G1A4: Sim, por que eu estou girando mais vezes.

Professor: Mas a posição dos vértices é diferente?

G1A4: Não, mas assim, eu encontrei a origem na terceira rotação, e depois continua repetindo.

Professor: Se ela repete, você encontrou uma nova?

G1A4: Não, entendi.

Professor: E para as de reflexão, como fizeram?

G1A3: Virei o triângulo e achei.

Professor: Virou como?

G1A3: Igual o quadrado.

A partir deste diálogo, podemos entender o modo de produzir significado do aluno G1A4, que, para encontrar as simetrias de rotação, usa a expressão “girando”; ou seja, do ponto de vista do aluno, para encontrar as simetrias de rotação do triângulo equilátero basta girá-lo.

É interessante também ressaltar que em nenhum momento foi mencionado pelos alunos ou perguntado ao professor sobre quantos graus o triângulo deveria ser girado, mesmo que esta informação tenha aparecido durante a aula expositiva, não que isto fosse necessário, mas notamos a ausência desta observação por parte dos alunos. Simplesmente nos parece que os alunos apenas giraram o necessário para a figura ficar na mesma orientação.

Isto não aparenta gerar problemas, uma vez que a sua justificação, mesmo que não seja a de que: “O objeto em questão está sendo rotacionado em tantos graus a fim de se tornar invariante no espaço”, ainda sim produz as possíveis simetrias de rotação do triângulo equilátero.

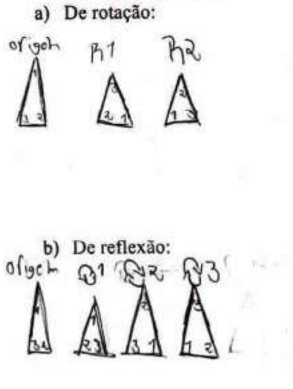
Algo semelhante ocorre para as simetrias de reflexão. Os alunos utilizam apenas a expressão “virar” sem menção ao ente geométrico a que o triângulo é “virado”. Também notamos a influência da aula na produção de significado do aluno G1A3, conforme o diálogo acima.

Cabe destacar que os alunos deste grupo solicitaram que as respostas coletivas fossem as mesmas dadas pelo aluno G1A1.

6.1.2 Grupo 2

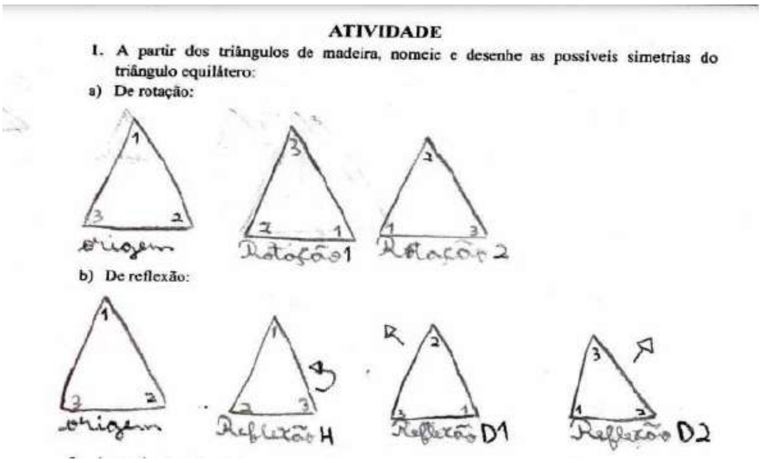
Começamos exibindo as resoluções individuais dos alunos do Grupo 2. As Figuras 14 a 18 apresentam estas resoluções na mesma enumeração dada aos alunos em seu respectivo grupo. A Figura 19 traz a resolução coletiva deste grupo.

Figura 15 - Q1G2A1



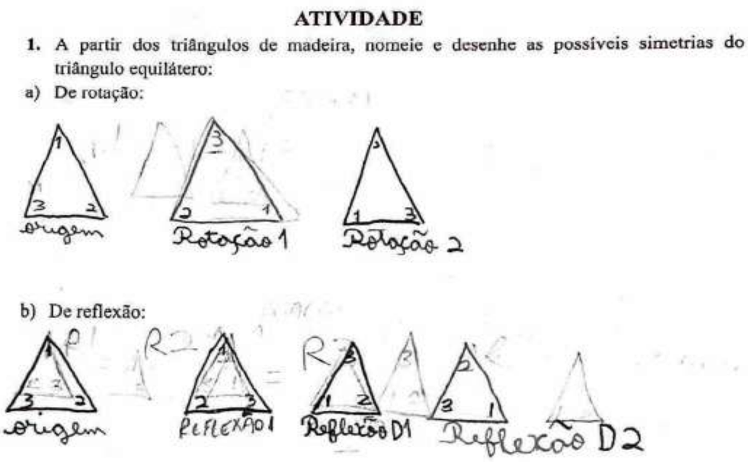
Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 16 - Q1G2A2



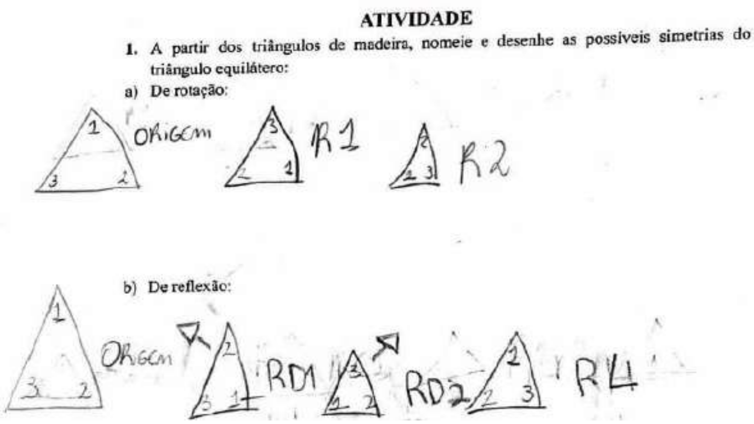
Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 17 - Q1G2A3



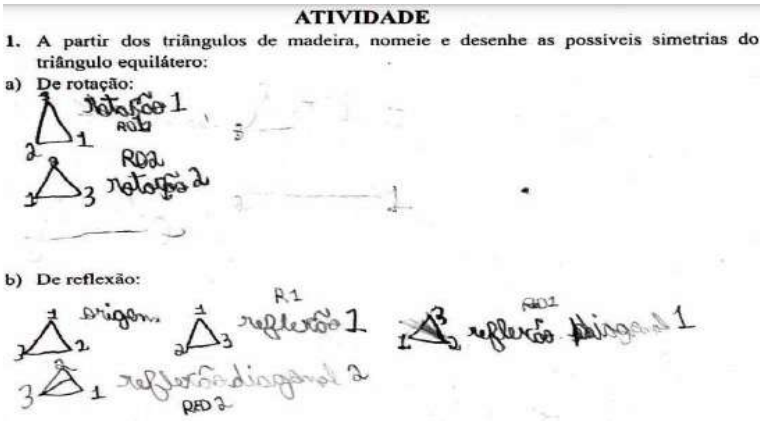
Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 18 - Q1G2A4



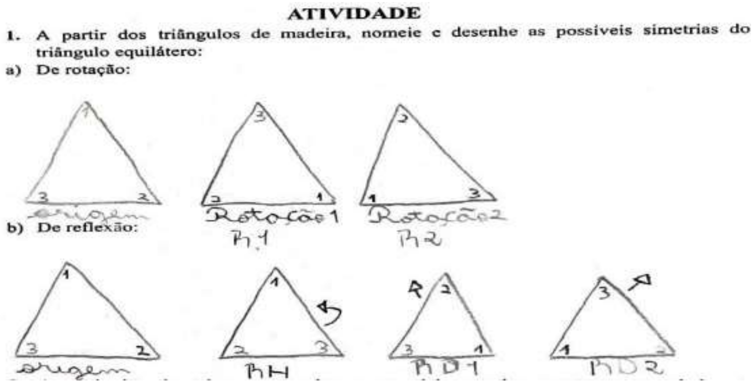
Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 19 - Q1G2A5



Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 20 - Q1G2



Fonte: Acervo do Autor (2023)

Os alunos do grupo 2 também conseguiram encontrar as seis simetrias do triângulo equilátero, porém alguns encontraram duas vezes a simetria origem. Quando perguntado aos alunos o motivo para isto, ocorreu o seguinte diálogo:

Professor: Por que tem duas origens?

G2A3: Achei duas origens, porque dá para encontrar a origem girando o triângulo e também virando ele ao contrário.

Professor: Mas a origem para os dois não é a mesma?

G2A3: Dá a mesma coisa, mas achei de duas formas diferentes, então tem a origem para rotação e para reflexão.

Professor: Mas a origem não é o triângulo em seu estado inicial?

G2A3: Sim sor, mas dá para voltar pro estado inicial girando ou virando o triângulo.

Professor: Então a origem é uma simetria ao mesmo tempo de rotação e de reflexão?

G2A3: Não sei, só sei que dá pra achar ela dos dois jeitos.

G2A4: Então a gente tem que tirar uma das duas?

Professor: Ela está repetindo?

G2A4: Sim, então é igual quando a gente gira e começa a repetir?

Professor: Como assim?

G2A4: Que daí tenho que ignorar quando repete.

Professor: Sim.

Novamente, o modo de produzir significado para as simetrias de rotação e reflexão está relacionado com a palavra "girando". Aqui aparece também a palavra "virando", no sentido de virar o triângulo de madeira com a sua parte traseira para frente. Mais ainda, novamente a noção de ângulo de rotação não está presente na justificação da crença-afirmação dos alunos acerca da simetria de rotação.

Outro ponto importante a destacar acerca das respostas dos alunos do grupo 2, é o nome que os alunos deram às simetrias de reflexão, referindo-se a elas como reflexões em torno das "diagonais" (alturas) do triângulo. Quando questionados sobre, o aluno G2A1 responde da seguinte forma:

G2A1: Eu pensei em virar o triângulo em torno das diagonais dele.

Professor: Como assim diagonais?

G2A1: Igual o sor fez com o quadrado.

Professor: Mas o triângulo possui diagonais?

G2A1: Sim, é só sair de uma ponta e chegar até o outro lado.

Professor: É assim que ocorre no quadrado?

G2A1: Não, mas tentei fazer algo parecido.

Professor: Tudo bem, mas para esclarecer o triângulo não possui diagonais, o que você chamou de diagonais na verdade são as alturas referentes aos lados do triângulo.

G2A1: Ah tá, eu tenho que mudar o nome então?

Professor: Só se preferir.

Um ponto importante deste diálogo reside na justificação do aluno sobre a crença-afirmação referente às simetrias de reflexão. Como também sua falta de clareza a respeito do que de fato é a diagonal, o que foi explicado posteriormente pelo professor para este aluno.

Assim fica evidente a tentativa do aluno em adaptar o resíduo de enunciação do professor a sua justificação; desta forma, o aluno está tentando operar no mesmo campo semântico do professor. Sobre isto, Lins (1994) afirma:

> O que é internalizado são precisamente modos de produzir significado, isto é, o que é internalizado são campos semânticos O que esta afirmação implica é que através da interação o sujeito possivelmente apre(e)nde dos interlocutores que certos modos de produzir significado são legítimos, que têm sentido para ele, sujeito, e ao engajar-se na prática de produzir significado dentro destes campos semânticos o sujeito se insere no social a que pertencem os interlocutores, ao mesmo tempo que abre a possibilidade de orientar a si próprio dali para a frente nas atividades em questão (LINS, 1994, p.33).

Outro detalhe presente nas respostas dos alunos é a reflexão R_H, que o aluno G2A1 afirma ser a "reflexão horizontal" no seguinte contexto:

G2A1: É a reflexão horizontal, porque o lado horizontal do triângulo inverte.

Professor: Mas reflexões não são em torno de retas?

G2A1: Sim, e foi isso que fiz.

Professor: Mas então não seria em torno da reta vertical que passa pelo centro do triângulo?

G2A1: Não sei, para mim parece que é em torno do lado horizontal.

Professor: Mas, se fosse em torno deste lado, o triângulo não ficaria de cabeça para baixo?

G2A1: Ficaria, mas é estranho, parece que está certo o que eu fiz.

Professor: O resultado não está errado, mas isso aconteceu ao acaso, você justificou da maneira errada.

G2A1: Então seria em torno da altura do lado horizontal?

Professor: Isso.

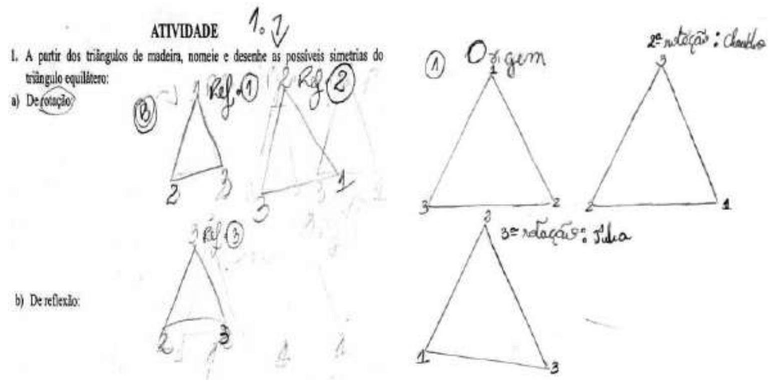
A partir deste diálogo é possível afirmar que o aluno G2A1, mesmo operando em um campo semântico igual ao do professor, expressa-se equivocadamente: para ele as simetrias de reflexão estão de alguma forma relacionadas entre a permutação dos vértices de um mesmo lado. Talvez tal justificação venha do que é explicado na Figura 67 - Slide 9 APRESENTAÇÃO I.

O único aluno que tem sua resposta um pouco divergente do restante do grupo é o G2A5. Ele não encontrou duas origens diferentes e isto provavelmente aconteceu pois o aluno ainda não tinha terminado esta questão no momento em que ocorreu o primeiro diálogo desta subseção. Desta forma o aluno foi induzido pelas palavras do professor a deixar apenas uma como sendo a simetria origem.

6.1.3 Grupo 3

Diferentemente dos grupos 1 e 2, este grupo foi formado por alunos que não estavam interagindo muito entre si. E isto atrapalhou na experiência como um todo, pois a atividade tinha um caráter colaborativo.

Figura 21 - Q1G3A1

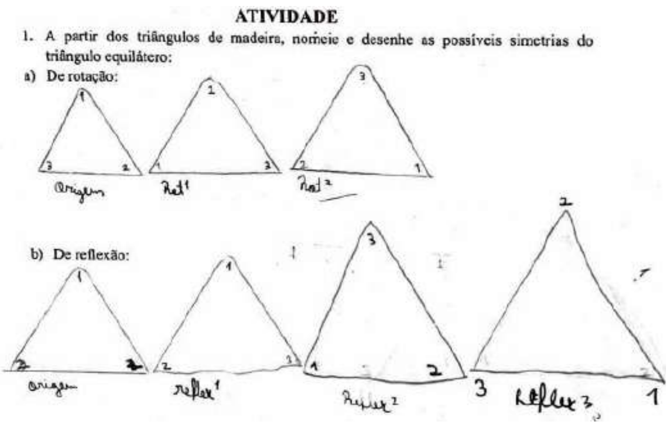


Fonte: Acervo do Autor (2023)

De forma esperada, o aluno G3A1 encontrou as seis simetrias do triângulo equilátero. Infelizmente não temos dados suficientes para analisar as justificações às crenças-afirmações deste aluno, uma vez que este tinha uma postura muito reclusa.

Um ponto inesperado, mas interessante a destacar é o fato de o aluno ter levado “ao pé da letra” a expressão “nomeie” presente no enunciado da questão: ele nomeou a segunda e a terceira simetrias de rotação, respectivamente como Claudio e Julia.

Figura 22 - Q1G3A2



Fonte: Acervo do Autor (2023)

O aluno G3A2, de forma semelhante aos alunos do grupo 2, encontrou também duas simetrias origem. Sua justificação está presente no seguinte diálogo:

Professor: Por que duas origens?

G3A2: É que eu a encontrei nos dois tipos, então desenhei para os dois.

Professor: Elas não são a mesma?

G3A2: São, mas elas vêm de maneiras diferentes.

Professor: Que maneiras?

G3A2: Girando o triângulo e também quando viro o lado dele.

Professor: Mas a origem não é o estado inicial?

G3A2: Até que é, mas não sei em qual das duas colocar.

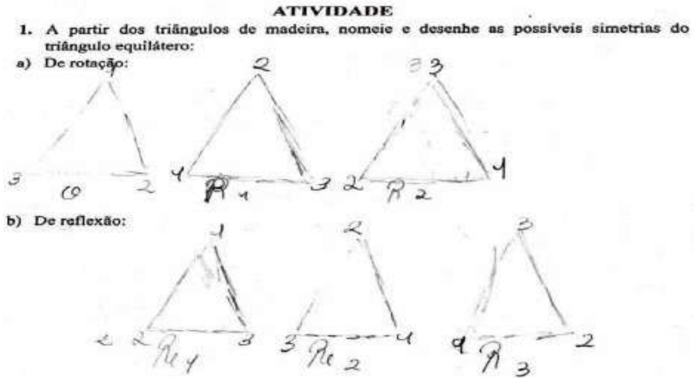
Professor: Em qualquer uma.

G3A2: Entendi.

A partir do diálogo acima podemos entender que o modo de produzir significado para a simetria de rotação novamente está relacionado com a palavra "girar". Desta forma, o campo semântico que o aluno G3A2 está operando é o mesmo dos alunos do grupo 1.

Contudo, quando analisamos as simetrias de reflexão, o aluno traz uma perspectiva nova: a de "virar o lado do triângulo". Mais precisamente, virar o lado no sentido de o triângulo ter um lado da frente e outro de trás. Isto pode ter sido induzido pelo fato de termos utilizado prismas triangulares (ver apêndice E) para representar os triângulos equiláteros.

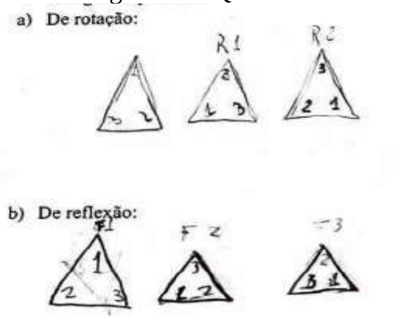
Figura 23 - Q1G3A3



Fonte: Acervo do Autor (2023)

O aluno G3A3 possui respostas semelhantes ao aluno G3A2, o que é condizente, pois observamos que os dois trabalhavam de forma conjunta. Também é possível notar que o mesmo apagou uma das simetrias de reflexão. Acreditamos que isto foi induzido pelo diálogo acima, uma vez que este ocorreu antes do aluno G3A3 terminar sua atividade, situação semelhante à relatada na subseção anterior.

Figura 24 - Q1G3A4



Fonte: Acervo do Autor (2023)

Como o aluno G3A4 não compareceu ao primeiro encontro, foi realizado uma breve apresentação dos conceitos da primeira aula expositiva para ele no segundo encontro. Após isto, foi-lhe entregue a atividade. Felizmente, o aluno teve uma boa compreensão da mesma e conseguiu responder à questão de forma satisfatória.

A partir do caderno de campo, quando perguntado pelo professor como o aluno fez para encontrar as simetrias, o aluno respondeu da seguinte forma:

Professor: Conseguiu entender o que era para fazer?

Aluno G3A4: Sim, é só girar de um jeito que o triângulo fique igual para as rotações e virar ele ao contrário como se fosse espelhar para as reflexões.

Professor: Isso aí, muito boa sua resposta.

Novamente, para responder sobre as simetrias de rotação o aluno está operando no campo semântico “girar”. O que surge de novo na resposta deste aluno é o conceito de “espelhamento”. Portanto, podemos afirmar que ele está operando em um novo campo semântico referente às simetrias de reflexão.

Figura 25 - Q1G3

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Aqui surge um ponto estranho a ser destacado: o resultado do grupo está muito diferente do que cada um dos alunos respondeu em suas anotações individuais. Nesta resposta apareceram duas simetrias origem. Além disto, o mais peculiar é o fato de ter apenas duas simetrias de reflexão, com nomes respectivos de F_2 e F_3. Temos a impressão de que os alunos se confundiram ao responderem, já que os participantes foram capazes de realizar a atividade individualmente.

6.2 Questão 2

Na segunda questão, foi solicitado aos alunos construir a tabela de composição das simetrias do triângulo equilátero com base nas simetrias encontradas na primeira questão.

Nesta tarefa, vamos analisar os modos de produção de significado desenvolvidos pelos alunos no que diz respeito à operação de composição. Para a análise desta questão, fazemos bastante uso da "leitura plausível", conceito pertinente ao MCS e que foi discutido durante a seção 4.1.

Os alunos tiveram como materiais de apoio os triângulos de madeira e os slides da aula expositiva. No que se refere ao conceito de composição, esta é a primeira vez que os alunos foram introduzidos a ele, o que foi confirmado pelos próprios alunos como também pelo professor responsável pela disciplina de matemática da turma.

Antes do início desta atividade, observamos que os alunos não tinham a devida noção de como completar a tabela solicitada. Assim sendo, os alunos foram instruídos pelo professor a como dispor as simetrias encontradas na questão 1 nas células da primeira linha e da primeira coluna da tabela de simetrias da questão 2.

Mais ainda, a partir de um "exemplo concreto" envolvendo a soma de números inteiros, também foi explicado aos alunos como proceder para "completar a tabela de forma correta", ou seja, que cada célula da tabela era o resultado da composição da simetria que estava na primeira coluna daquela linha com a simetria que estava na primeira linha daquela coluna, obedecendo a esta ordem.

6.2.1 Grupo 1

Figura 26 - Q2G1A1

Composição	O	rot 1	rot 2	ref 1	ref 2	ref 3
O	O	rot 1	rot 2	ref 1	ref 2	ref 3
rot 1	rot 1	rot 2	O	ref 2	ref 3	ref 1
rot 2	rot 2	O	rot 1	ref 3	ref 1	ref 2
ref 1	ref 1	ref 3	ref 2	O	rot 2	rot 1
ref 2	ref 2	ref 1	ref 3	rot 1	O	rot 2
ref 3	ref 3	ref 2	ref 1	rot 2	rot 1	O

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Os resultados obtidos pelo aluno G1A1 são excelentes, a tabela está completa e correta. Para entender em que campo semântico o aluno estava operando, temos o seguinte diálogo registrado no caderno de campo:

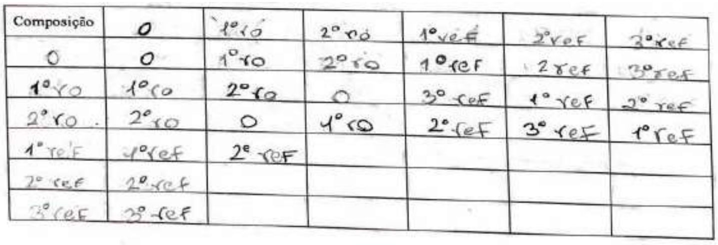
G1A1: Sor, tá certo?

Professor: Depende do nome que você deu para suas simetrias, como você fez?

G1A1: Eu primeiro olhei a que estava lá em cima, daí mexia para deixar igual no desenho e depois fazia a que estava lá do lado.

A partir do diálogo acima, é possível ver que o aluno produziu um significado muito natural para a composição, que é fazer uma ação e depois fazer outra.

Figura 27 - Q2G1A2

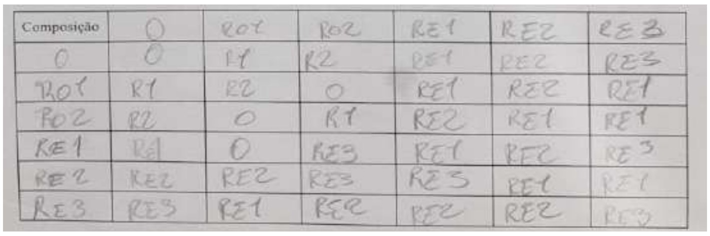


Composição	0	1º ro	2º ro	1º ref	2º ref	3º ref
0	0	1º ro	2º ro	1º ref	2 ref	3º ref
1º ro	1º ro	2º ro	0	3º ref	1º ref	2º ref
2º ro	2º ro	0	1º ro	2º ref	3º ref	1º ref
1º ref	1º ref	2º ref				
2º ref	2º ref					
3º ref	3º ref					

Fonte: Acervo do Autor (2023)

O aluno G1A2 apresentou um resultado parcial da questão 2 muito conciso. Infelizmente ocorreu do aluno se ausentar no terceiro encontro e isto acarretou na impossibilidade de ele terminar a atividade. Contudo, considerando os resultados apresentados, podemos concluir que ele produziu significado para a operação de composição.

Figura 28 - Q2G1A3



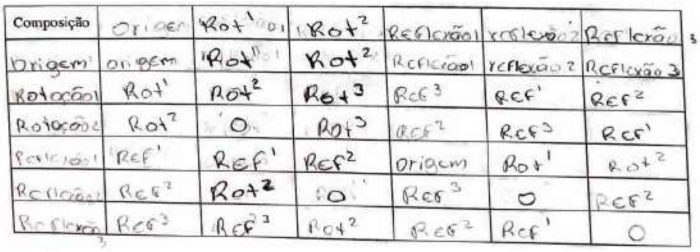
Composição	0	RO1	RO2	RE1	RE2	RE3
0	0	R1	R2	RE1	RE2	RE3
RO1	R1	R2	0	RE1	RE2	RE1
RO2	R2	0	R1	RE2	RE1	RE1
RE1	R1	0	RE3	RE1	RE2	RE3
RE2	RE2	RE2	RE3	RE3	RE1	RE1
RE3	RE3	RE1	RE2	RE2	RE2	RE3

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Aqui aparece um resultado um tanto quanto curioso, pois existem nomes diferentes para a mesma simetria. Para fins desta análise, vamos identificar RO_1 com R_1, e analogamente RO_2 com R_2.

Mesmo fazendo esta correção na busca de tentarmos entender o que o aluno estava pensando, não é possível afirmar que o aluno produziu significado para a composição como um todo. Desta forma, deparamo-nos com o que o MCS considera como um obstáculo epistemológico, ou seja, temos um “[...] processo no qual um aluno operando dentro de um campo semântico, poderia potencialmente produzir significado para uma afirmação, mas não produz” (LINS, 1993 *apud* HENRIQUES 2011, p.57).

Figura 29 - Q2G1A4



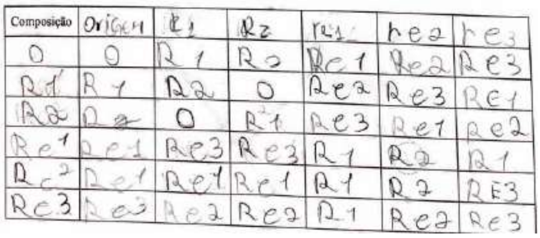
Composição	Origem	Rot^1	Rot^2	Reflexão 1	reflexão 2	Reflexão 3
Origem	origem	Rot^1	Rot^2	Reflexão 1	reflexão 2	Reflexão 3
Rotação 1	Rot^1	Rot^2	Rot^3	Ref^3	Ref^1	Ref^2
Rotação 2	Rot^2	O	Rot^3	Ref^2	Ref^3	Ref^1
Reflexão 1	Ref^1	Ref^1	Ref^2	origem	Rot^1	Rot^2
Reflexão 2	Ref^2	Rot^2	O	Ref^3	O	Ref^2
Reflexão 3	Ref^3	Ref^3	Rot^2	Ref^2	Ref^1	O

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Novamente, outro caso que necessita atenção quanto aos nomes dos elementos da tabela ao analisarmos a questão 1. O aluno atribui três diferentes nomes para uma das simetrias do triângulo equilátero (terceira rotação, Rot^3 e origem); contudo, vamos analisar todas como sendo a mesma.

Mesmo assim, concluímos que o aluno não construiu significado acerca da operação de composição. Aqui evidenciamos o primeiro caso de limite epistemológico, isto é, trata-se da "[...] impossibilidade de um aluno produzir significado para uma afirmação ou um resíduo de enunciação, numa certa direção, devido à sua maneira de operar cognitivamente" (LINS, 1993 *apud* HENRIQUES 2011, p.57).

Figura 30 - Q2G1A5



Composição	Origem	R1	R2	re1	re2	re3
O	O	R1	R2	Re1	Re2	Re3
R1	R1	R2	O	Re2	Re3	Re1
R2	R2	O	R1	Re3	Re1	Re2
Re^1	Re1	Re3	Re3	R1	R2	R1
Re^2	Re1	Re1	Re1	R1	R2	RE3
Re3	Re3	Re2	Re2	R1	Re2	Re3

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Aqui é evidente que o aluno estava atribuindo significado para a composição, mas a partir do momento em que o aluno compõe as simetrias de reflexão, parece existir certo bloqueio cognitivo. Novamente, percebemos um obstáculo epistemológico.

6.2.2 Grupo 2

Começamos exibindo as resoluções individuais dos alunos do Grupo 2. As Figuras 30 a 34 apresentam estas resoluções na mesma enumeração dada aos alunos em seu respectivo grupo. A Figura 35 traz a resolução coletiva deste grupo.

Figura 31 - Q2G2A1

Composição	ori	R1	R2	G1	G2	G3
ori	ori	Ro1	Ro2	Go1	Go2	Go3
R1	Ro1	R2	ori	G3	G3	G1
R2	Ro2	ori	R1	G3	G1	G2
G1	G1	G2	G3	ori	R2	R1
G2	G2	G3	G1	R2	ori	R1
G3	G3	G4	G2	R1	R2	ori

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 32 - Q2G2A2

Composição	O	R1	R2	RH	RD1	RD2
O	O	R1	R2	RH	RD1	RD2
R1	R1	R2	O	RD1	RD2	RH
R2	R2	O	R1	RD2	RH	RD1
RH	RH	RD2	RD1	O	R2	R1
RD1	RD1	RH	RD2	R1	O	R2
RD2	RD2	RD1	RH	R2	R1	O

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 33 - Q2G2A3

Composição	ORIGEM	R1	R2	RE1	RD1	RD2
ORIGEM	ORIGEM	R1	R2	RE1	RD1	RD2
R1	R1	R2	ORIGEM	RD2	RE1	RD1
R2	R2	ORIGEM	R1	RD1	RD2	R1
RE1	RE1	RD2	RD1	ORIGEM	R2	R1
RD1	RD1	RE1	RD2	R1	ORIGEM	R2
RD2	RD2	RD1	RE1	R2	R1	ORIGEM

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 34 - Q2G2A4

Composição	O	R1	R2	RD1	RD2	RH
O	O	R1	R2	RD1	RD2	RH
R1	R1	R2	O	RD2	RH	RD1
R2	R2	O	R1	RH	RD1	RH
RD1	RD1	RH	RD2	O	R2	R2
RD2	RD2	RD2	RH	R1	O	R2
RH	RH	RD2	RD1	R2	RD2	O

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 35 - Q2G2A5

Composição	O	RO1	RO2	RE1	RED1	RED2
O	O	RO1	RO2	RE1	RED1	RED2
RO1	RO1	RO2	O	RED2	RE1	RED1
RO2	RO2	O	RO1	RED1	RED1	RE1
RE1	RE1	RED1	RED2	O	RO1	RE01
RED1	RED1	RED2	RE1	RO2	O	RO1
RED2	RED2	RED1	RE1	RO1	RED1	O

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 36 - Q2G2

Composição	O	R1	R2	RH	RD1	RD2
O	O	R1	R2	RH	RD1	RD2
R1	R1	R2	O	RD1	RD2	RH
R2	R2	O	R1	RD2	RH	RD1
RH	RH	RD2	RD1	O	R2	R1
RD1	RD1	RH	RD2	R1	O	R2
RD2	RD2	RD1	RH	R2	R1	O

Fonte: Acervo do Autor (2023)

De todos os diálogos registrados no caderno de campo, consideramos o que vem a seguir como o mais surpreendente:

G2A4: Sor, a gente notou algumas coisas na tabela.

Professor: Diga.

G2A3: Não sei se está certo, mas a gente percebeu que não repete e uma hora vai dar a origem.

Professor: Como assim não repete?

G2A4: Se a gente olha pra uma linha, o resultado é sempre diferente um do outro.

G2A3: E para a coluna também.

G2A4: E também sempre dá uma simetria que a gente já tinha.

Professor: Por que você acha que acontece isso?

G2A4: Sei lá, sor, a gente tá girando e virando o triângulo, se a gente achou todas antes, não tem como aparecer uma nova agora, né?

G2A3: E outra coisa também, se a gente encontrasse, não ia ter lugar pra colocar ela na tabela né, só tem seis espaços.

Professor: Excelentes observações.

O momento relatado foi muito inesperado, pois não havíamos pressuposto este nível de constatações por parte dos alunos. A partir deste diálogo os alunos já haviam resolvido, mesmo sem saber, quase toda a questão 3.

Portanto, a partir do resíduo de enunciação das tabelas e do diálogo acima, concluímos que os alunos construíram significado à operação de composição.

6.2.3 Grupo 3

Figura 37 - Q2G3A1

Composição	Θ	2º rotação	3º rotação	Ref 1	Ref 2	Ref 3
Θ	Θ	ROT2	ROT3	Ref 2	Ref 2	Ref 3
2º rotação	ROT1.2	ROT 3	Ref 1	Ref 2	Rot 2	Ref 3
3 rotação	3Rot	Θ	Rot 3	Θ	Rot 3	Ref 2
Ref 1	1 Ref	REF 2	RoF 3	Ref 2	Rot 2	Ref 3
Ref 2	2 Ref	REF3	Ref 1	Ref 3	Ref 2	Ref 3
Ref 3	Rot 3	Ref 2	Ref 1	Ref 2	Ref 3	RO1

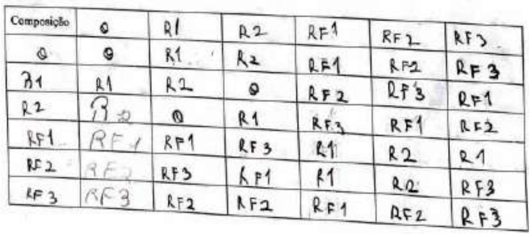
Fonte: Acervo do Autor (2023)

Para aprimorar a análise da questão 2 apresentada pelo aluno G3A1, adotamos uma leitura plausível com o objetivo de aprofundar nossa compreensão do raciocínio subjacente aos resultados por ele apresentados.

Inicialmente, consideramos que "2ª rotação" equivale ao mesmo conceito que "Rot2" e generalizamos esse entendimento para possíveis erros de natureza semelhante.

No entanto, apesar de nossos esforços para esclarecer a resposta do aluno, torna-se evidente que ele não conseguiu atribuir um significado à composição de simetrias. Nesse sentido, podemos concluir que o aluno alcançou um limite epistemológico.

Figura 38 - Q2G3A2



Composição	Θ	R1	R2	RF1	RF2	RF3
Θ	Θ	R1	R2	RF1	RF2	RF3
R1	R1	R2	Θ	RF2	RF3	RF1
R2	R2	Θ	R1	RF3	RF1	RF2
RF1	RF1	RF1	RF3	R1	R2	R1
RF2	RF2	RF3	RF1	R1	R2	RF3
RF3	RF3	RF2	RF2	RF1	RF2	RF3

Fonte: Acervo do Autor (2023)

No caso do aluno G3A2, apesar da presença de respostas incorretas em sua tabela, é notável que o aluno também apresenta um número significativo de respostas corretas. Esse êxito só seria possível se o aluno tivesse sido capaz de desenvolver um entendimento sólido da operação em questão.

Portanto, podemos concluir que o aluno efetivamente construiu um significado para a composição de simetrias.

Figura 39 - Q2G3A3

Composição	Θ	R1	R2	Re1	Re2	Re3
Θ	Θ	R1	R2	Re1	Re2	Re3
R1	R1	R2	Θ	[illegible]	Θ	R3
R2	R2	Θ	R1	R2	R1	R3
Re1	R1	Re2	R3	Θ	R1	R3
Re2	Re2	R2	R2	R2	R3	R2
Re3	Re3	Re2	Re3	R2	R2	R2

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Com base nas respostas apresentadas na tabela pelo aluno G3A3, chegamos à conclusão de que ele atingiu um limite epistemológico. Isso se deve ao fato de que a abordagem adotada pelo aluno para realizar a operação é incorreta, mesmo que haja ocasiões em que o aluno acerte. Portanto, não podemos afirmar que o aluno tenha efetivamente desenvolvido um entendimento sólido da composição de simetrias.

Figura 40 - Q2G3A4

Composição	0	R1	R2	F1	F2	F3
0	0	R1	R2	F1	F2	F3
R1	R1	R2	0	F2	F3	F1
R2	R2	0	R1	F1	F3	F2
F1	F1	F2	F3	0	R2	R1
F2	F2	F3	F1	R2	0	R1
F3	F3	F1	F2	R1	R2	0

Fonte: Acervo do Autor (2023)

O aluno G3A4 se destacou em seu grupo ao preencher corretamente toda a tabela de simetrias. É evidente, com base no resíduo de enunciação da tabela, que o aluno atribuiu significado ao conceito de composição.

Figura 41 - Q2G3

Composição	0	R1	R2	F1	F2	F3
0	0	R1	R2	F1	F2	F3
R1	R1	R2	0	F2	0	F1
R2	R2	0	R1	F2	R1	F2
F1	F1	F2	R3	R2	R1	R1
F2	F2	R2	R2	R2	R3	R1
F3	F3	F2	F3	F3	F2	0

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Houve, mais uma vez, uma lacuna na comunicação entre os membros do Grupo 3. O aluno G3A4 respondeu à questão de forma bastante concisa; entretanto, suas respostas não foram incluídas aqui.

6.3 Questão 3

O objetivo da questão 3 consiste em consolidar os resultados obtidos nas atividades precedentes e, com base neles, verificar determinadas condições indispensáveis para a configuração de um grupo.

Esta atividade (ver apêndice B) foi entregue após a segunda aula expositiva (ver apêndice D). Nesta aula os alunos foram apresentados aos conceitos iniciais da teoria de grupos. Mais precisamente, foram mostradas aos alunos as condições necessárias que um conjunto, munido de uma operação, deve satisfazer para que o par (conjunto, operação) constitua um grupo.

Os alunos foram orientados a proceder da seguinte forma: se sim, verifique as condições de fecho, elemento neutro e elementos inversos. Caso contrário, justifique sua resposta.

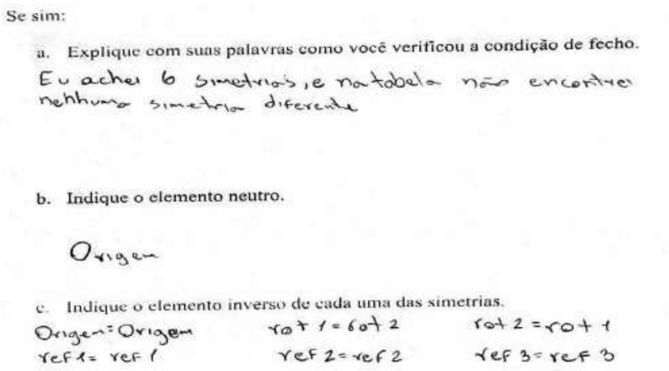
A título de exemplo de grupo, foi utilizado o par consistindo do conjunto dos números inteiros junto da operação de adição. Esta escolha se deve à familiaridade dos alunos com os mesmos.

Para fins desta análise, dizemos que o aluno construiu significado à estrutura algébrica grupo quando o mesmo foi capaz de construir significado para todas as etapas de verificação.

6.3.1 Grupo 1

O aluno G1A5 não compareceu ao quarto encontro. Desta forma, não há figura nem análise referente a este aluno para esta questão.

Figura 42 - Q3G1A1:


Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.

Eu achei 6 simetrias, e na tabela não encontrei nenhuma simetria diferente

b. Indique o elemento neutro.

Origem

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.

Origem = Origem	rot 1 = rot 2	rot 2 = rot 1
ref 1 = ref 1	ref 2 = ref 2	ref 3 = ref 3

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Aqui o aluno traz uma visão bem pertinente sobre o conceito de fecho: “Eu achei 6 simetrias e na tabela não encontrei nenhuma diferente”. Podemos, então, entender que o campo semântico em que o aluno está operando é o de não encontrar nenhuma simetria diferente.

A resposta acerca do elemento neutro aparece em um diálogo breve com o professor:

G1A1: Sor, então a origem é como se fosse o 0?

Professor: Depende da operação, quando estamos somando sim, mas e quando multiplicamos?

G1A1: Daí é o 1.

Professor: Certo.

G1A1: Então a origem é como se multiplicássemos por 1?

Professor: Ela altera a posição dos vértices do triângulo?

G1A1: Não.

Professor: Então?

G1A1: Ah, então é.

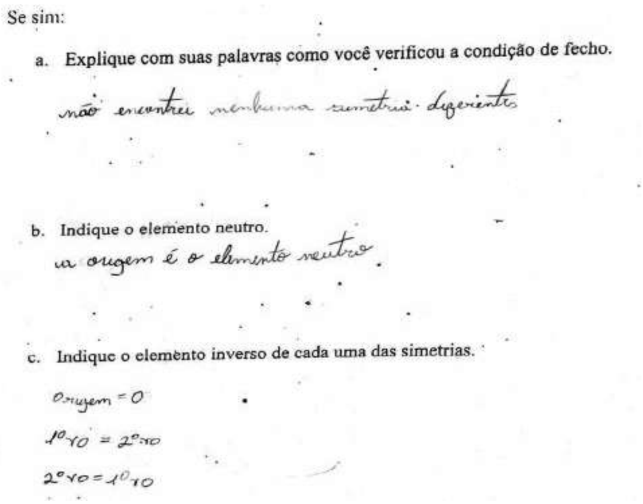
O diálogo acima evidencia o campo semântico em que o aluno está trabalhando: o elemento neutro é aquele que não causa alterações no elemento com o qual está sendo operado.

Por fim, na questão do elemento inverso, o aluno afirma que “este elemento = elemento inverso”, o que é estranho de se pensar. Então, utilizando o conceito de leitura plausível, entendemos que o aluno quis utilizar o sinal de igualdade da seguinte forma: o elemento inverso do elemento à esquerda da igualdade é igual ao elemento à direita da igualdade.

Assim como ele afirma na sua respectiva tabela da questão 2, cada composição destes elementos separados pelo símbolo de igualdade dá como resultado o elemento neutro. Desta forma, vemos que o aluno estava operando no campo semântico: um elemento é inverso do outro se quando operamos os dois temos o elemento neutro como resultado.

Concluímos então, que o aluno produziu significado para a estrutura algébrica.

Figura 43 - Q3G1A2


Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.

não encontrei nenhuma simetria diferente

b. Indique o elemento neutro.

a origem é o elemento neutro.

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.

Origem = O

1ºro = 2ºro

2ºro = 1ºro

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Para análise da questão 3 do aluno G1A2, devemos nos atentar ao fato de este não ter concluído a questão 2, o que era indispensável à sua realização.

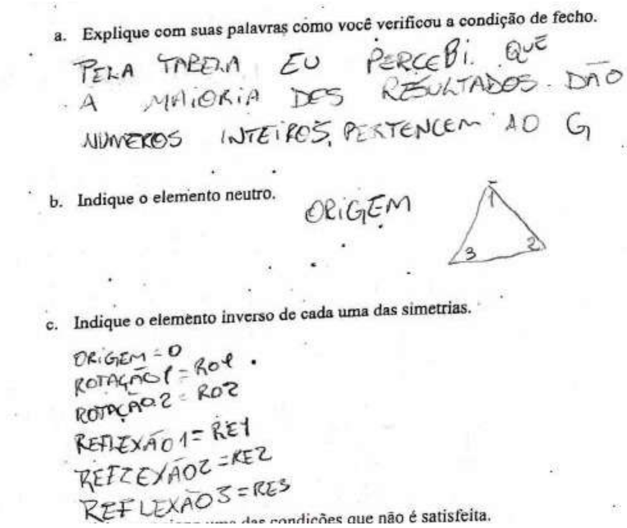
Mesmo tendo a tabela de simetrias incompleta, ele afirma a condição de grupo, utilizando a mesma justificação do aluno G1A1. Não vamos analisar o que diz respeito à condição de fecho já que a tabela estava incompleta.

Para a questão do elemento neutro, o fato de a tabela estar incompleta não interferiu, visto que as células que o aluno preencheu eram suficientes para responder esta questão.

Por fim, o aluno afirma, utilizando a mesma linguagem do aluno G1A1, quais são os inversos de algumas simetrias. Notamos que isto somente ocorre no caso em que o aluno completa alguma das células da tabela com a simetria origem. Assim sendo, evidenciamos mais uma vez um aluno operando no campo semântico (ainda que parcialmente): um elemento é inverso do outro se quando operamos os dois temos o elemento neutro como resultado.

Concluímos então, que para construir significado para os conceitos de elemento neutro e elementos inversos, não era necessário que o aluno calculasse todas as células da tabela de simetrias. Entretanto, para que o aluno verificasse as condições pedidas, era necessário finalizar a questão 2, o que não ocorreu. Portanto, não é possível afirmar que o aluno produziu significado à estrutura de grupo.

Figura 44 - Q3G1A3


a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.

PELA TABELA EU PERCEBI QUE A MAIORIA DOS RESULTADOS DÃO NUMEROS INTEIROS, PERTENCEM AO G

b. Indique o elemento neutro.

ORIGEM

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.

ORIGEM = O
ROTAÇÃO 1 = RO1
ROTAÇÃO 2 = RO2
REFLEXÃO 1 = RE1
REFLEXÃO 2 = RE2
REFLEXÃO 3 = RE3

Fonte: Acervo do Autor (2023)

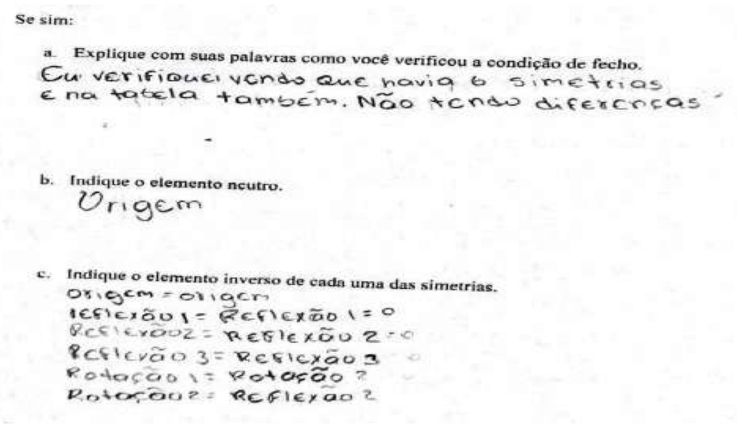
Mesmo que o aluno G1A3 estivesse operando em um campo semântico relacionado ao fecho, fica evidente que, para ele, este conceito é intrínseco aos números inteiros. Isto pode ter ocorrido por uma tentativa do aluno de tentar relacionar as simetrias com o exemplo (da aula expositiva) do par ($\mathbb{Z}$, +). Diante disto, concluímos que o aluno não atribuiu significado para o fecho.

Assim como seus colegas de grupo, o aluno afirma que a origem é o elemento neutro e está operando no campo semântico: não faz nada com o objeto. Isto condiz com sua resposta para a questão 2.

Já para a questão sobre os elementos inversos, não é possível afirmar que o aluno produziu significado, uma vez que suas respostas na tabela não são coerentes com as respostas apresentadas na questão 3.

Concluímos então, que o aluno não produziu significado para a estrutura algébrica grupo.

Figura 45 - Q3G1A4



Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.
Eu verifiquei vendo que havia 6 simetrias e na tabela tambem. Não tendo diferenças

b. Indique o elemento neutro.
Origem

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.
Origem = origem
Reflexão 1 = Reflexão 1 = 0
Reflexão2 = Reflexão 2 = 0
Reflexão 3 = Reflexão 3
Rotação 1 = Rotação 2
Rotação2 = Reflexao 2

Fonte: Acervo do Autor (2023)

O aluno faz sua justificação da questão sobre o fecho da seguinte maneira: “eu verifiquei vendo que havia 6 simetrias e na tabela também. Não tendo diferenças”. Analisamos a resposta do aluno da seguinte forma: foi verificado conferindo que havia seis simetrias e na tabela também havia apenas seis distintas, não havendo distinção entre as simetrias encontradas na questão 1 com as encontradas após calcular a tábua de simetrias. A justificação do aluno é muito parecida com os alunos G1A1 e G1A2. Desta forma podemos afirmar que estavam operando em um mesmo campo semântico, que é o não conseguir encontrar uma simetria nova.

Para o elemento neutro, o aluno opera no mesmo campo semântico dos alunos G1A1 e G1A2, tendo sua justificação também na questão 2.

No que diz respeito aos elementos inversos, o aluno consulta na tabela as composições que resultam na origem. Mesmo que o elemento inverso da sua rotação 2 esteja incorreto, é possível afirmar que o aluno produziu significado para o elemento inverso e estava operando no mesmo campo semântico do professor: um elemento é inverso do outro se quando operamos os dois temos o elemento neutro como resultado.

Por fim, fica evidente que o aluno conseguiu produzir significado à estrutura de grupo, ainda que estivesse com a tabela preenchida de forma incorreta.

6.3.2 Grupo 2

Começamos exibindo as resoluções individuais dos alunos do Grupo 2. As Figuras 45 a 49 apresentam estas resoluções na mesma enumeração dada aos alunos em seu respectivo grupo. A Figura 50 traz a resolução coletiva deste grupo.

Figura 46 - Q3G2A1

Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.
Mesmo operando diversas vezes, sempre dará um resultado já existente

b. Indique o elemento neutro.
origem

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.
O = O
R1 = R2
R2 = R1
R4 = R4
RD1 = RD1
RD2 = RD2

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 47 - Q3G2A2

Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.
Mesmo operando entre elas sempre irá cair uma das simetrias já encontrado

b. Indique o elemento neutro.
Origem

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.
O∘O R1∘R2 R2∘R1
RH∘RH RD1∘RD1 RD2∘RD2

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 48 - Q3G2A3

Se sim:

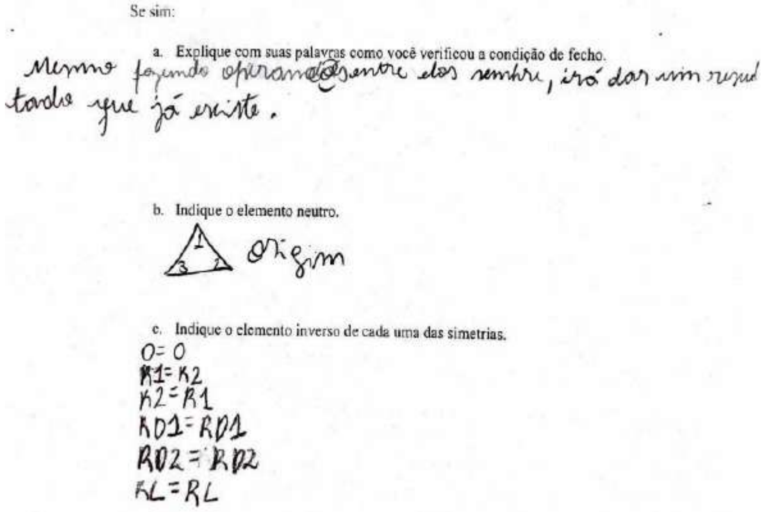
a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.
MESMO OPERANDO DIVERSAS SEMPRE OPERANDO ENTRE ELAS VAI DAR UM RESULTADO QUE JÁ EXISTE

b. Indique o elemento neutro.
ORIGEM

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.
O.O R1.R2 RD1.RD2 R2.R1
RD2.RD1

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 49 - Q3G2A4



Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.

Mesmo fazendo operações entre elas sempre, irá dar um resultado que já existe.

b. Indique o elemento neutro.

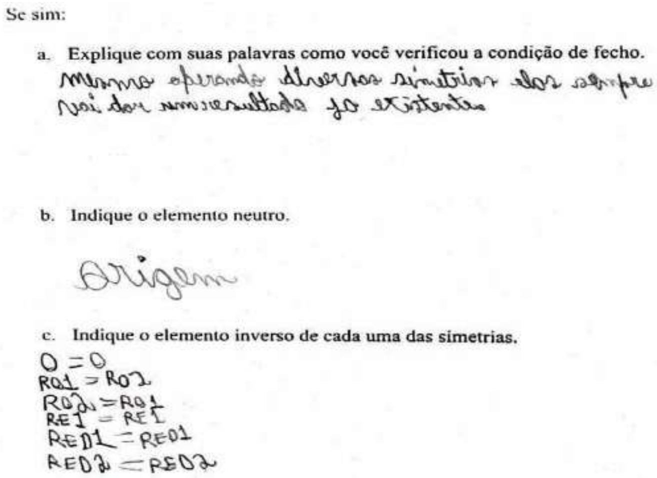
Origem

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.

O=O
R1=R2
R2=R1
RD1=RD1
RD2=RD2
RL=RL

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 50 - Q3G2A5



Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.

Mesmo operando diversas simetrias elas sempre vai dar um resultado já existentes

b. Indique o elemento neutro.

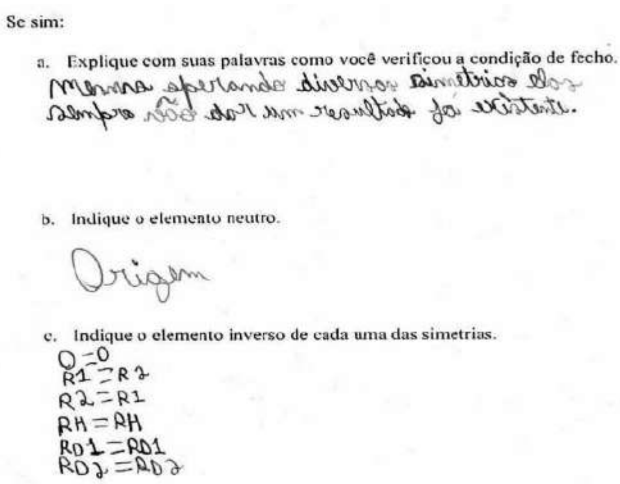
Origem

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.

O=O
RO1=RO2
RO2=RO1
RE1=RE1
RED1=RED1
RED2=RED2

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Figura 51 - Q3G2



Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.

Mesmo operando diversas simetrias elas sempre vão dar um resultado já existente.

b. Indique o elemento neutro.

Origem

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.

O=O
R1=R2
R2=R1
RH=RH
RD1=RD1
RD2=RD2

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Todos os integrantes do grupo 2 operaram no mesmo campo semântico, que foi o de encontrar um resultado já existente; o que, de fato, já havia sido confirmado pelos integrantes do grupo na questão 2, durante o diálogo que consta na página XX.

Sobre a questão do elemento neutro, como todos os integrantes completaram a tabela de forma correta, atribuímos a isto sua justificação para esta questão.

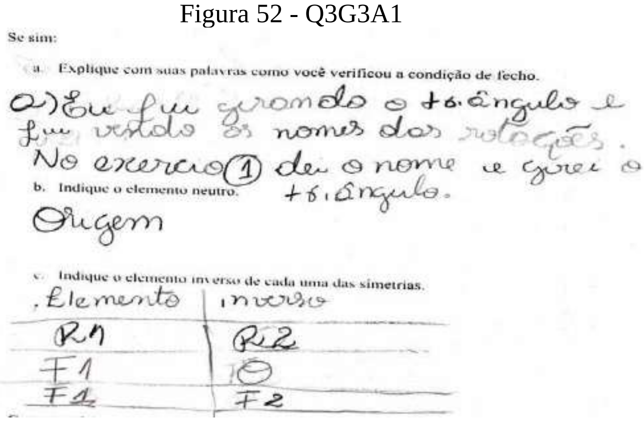
Por fim, note que, no que diz respeito aos elementos inversos, temos duas respostas apresentadas de formas diferentes entre os integrantes do grupo. Os alunos G2A1, G2A4 e G2A5, apresentam assim como o aluno G1A1 o símbolo de igualdade para se referir a um elemento como sendo o inverso do outro.

Já os alunos G2A2 e G2A3 estão operando no campo semântico do professor, uma vez que utilizam da mesma notação dada na aula expositiva para sua justificação. Estranhamente falta "= origem" nas suas respostas.

Entretanto, analisando o contexto e nos baseando na questão 2, fica evidente que os alunos do grupo 2 construíram significado às três condições solicitadas e, portanto, à estrutura de grupo.

6.3.3 Grupo 3

Figura 52 - Q3G3A1


Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.

a) Eu fui girando o triângulo e fui vendo os nomes das rotações. No exercício (1) dei o nome e girei o triângulo.

b. Indique o elemento neutro.

Origem

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.

Elemento	inverso
R1	R2
F1	O
F1	F2

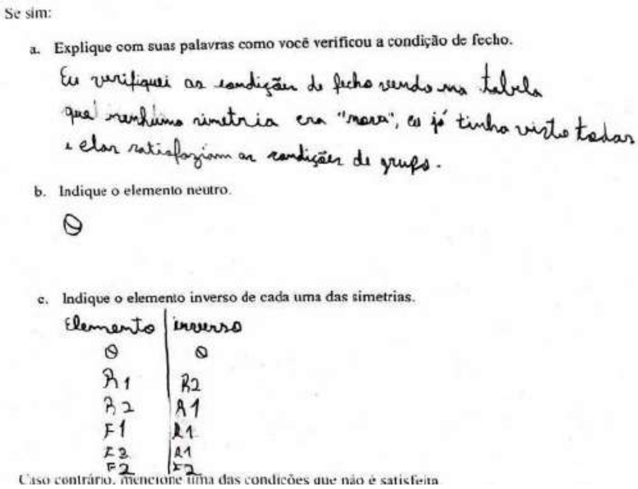
Fonte: Acervo do Autor (2023)

Primeiramente, a justificação dada para o fecho se baseia na ideia de que o objeto foi girado e, de alguma forma, exibe os nomes das rotações da questão 1. No entanto, essa justificação faz sentido apenas no contexto das simetrias de rotação.

Posteriormente, o aluno elabora uma tabela na qual lista um elemento e, na coluna ao lado, indica o seu inverso. No entanto, essa tabela não coincide com os resultados apresentados pelo aluno G3A1 em sua questão 2. Isso nos leva à conclusão de que o aluno não conseguiu atribuir significado ao conceito de elemento inverso.

Ao considerar as justificações fornecidas pelo aluno, é possível inferir que ele só conseguiu construir um entendimento para o elemento neutro. Portanto, não foi capaz de atribuir significado à estrutura de grupo.

Figura 53 - Q3G3A2


Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.

Eu verifiquei as condições de fecho vendo na tabela que nenhuma simetria era "nova", eu já tinho visto todas e elas satisfaziam as condições de grupo.

b. Indique o elemento neutro.

O

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.

Elemento	inverso
O	O
R1	R2
R2	R1
F1	R1
F2	R1
F2	F2

Caso contrário, mencione uma das condições que não é satisfeita

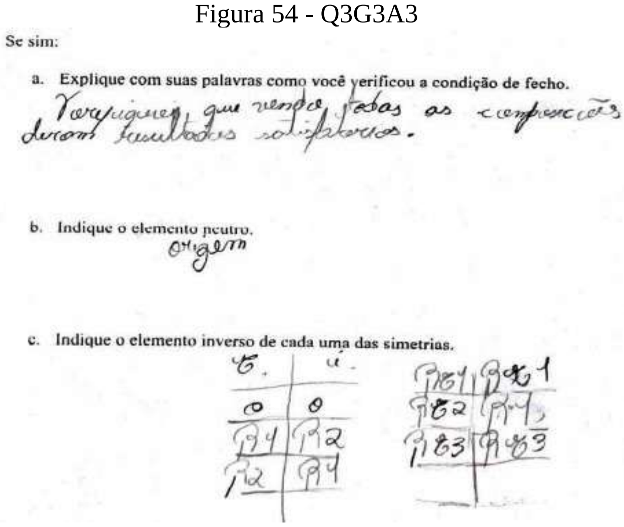
Fonte: Acervo do Autor (2023)

A justificação do aluno acerca do fecho é de fato plausível. Porém, o aluno apresenta a ideia de que (somente) as simetrias satisfazem a condição, o que é um problema, pois para satisfazer a condição de grupo é necessário observar a operação também. Aqui vemos mais um caso de um aluno operando no campo semântico de: não encontrar nenhuma simetria nova.

Novamente, o aluno está correto em afirmar que o elemento neutro é o que ele denominou de origem.

Entretanto, não é possível afirmar que o aluno construiu significado para o elemento inverso, uma vez que sua tabela da questão 3 não condiz com a tabela apresentada na questão 2. Concluímos então, que o aluno não construiu significado para a estrutura algébrica grupo.

Figura 54 - Q3G3A3


Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.

Verifiquei que vendo todas as composições deram resultados satisfatórios.

b. Indique o elemento neutro.

origem

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.

E.	i.
O	O
R4	R2
R2	R4
R84	R81
R82	R4
R83	R83

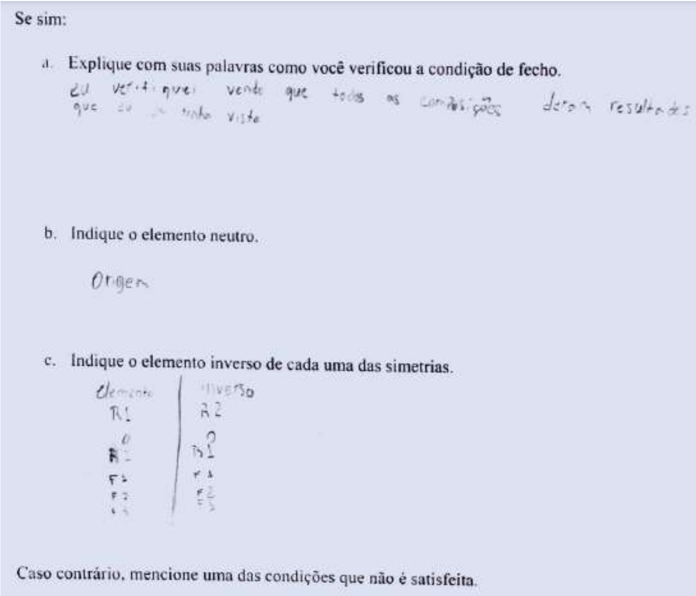
Fonte: Acervo do Autor (2023)

A justificação dada para o fecho é a seguinte: “Verifiquei que ao observar todas as composições, elas apresentaram resultados satisfatórios”. Ao interpretar essa explicação de forma plausível, entendemos que o aluno se refere ao fato de que todas as combinações resultaram em simetrias já conhecidas.

O aluno demonstra claramente na tabela da questão 2 que a simetria de origem é o elemento neutro. Ele também relaciona os resultados que encontra como origem para determinar qual elemento é o inverso de outro; entretanto para simetria Re_3, o aluno afirma nesta questão que seu inverso é ele mesmo, o que não condiz com o que foi apresentado na tabela da questão 2.

Dessa forma, podemos concluir que o aluno não construiu um significado sólido da estrutura algébrica.

Figura 55 - Q3G3A4



Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.

eu verifiquei vendo que todas as composições deram resultados que eu já tinha visto

b. Indique o elemento neutro.

Origem

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.

Elemento	Inverso
R1	R2
O	O
R2	R1
F1	F1
F2	F2
F3	F3

Caso contrário, mencione uma das condições que não é satisfeita.

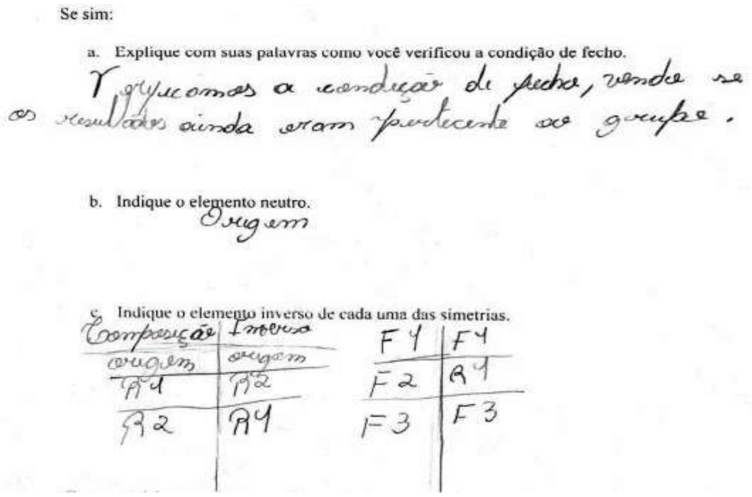
Fonte: Acervo do Autor (2023)

O aluno G3A4, novamente demonstra os resultados mais concisos do grupo. Primeiramente na sua justificação da condição de fecho. Aqui ele apresenta estar operando no campo semântico de não conseguir encontrar uma simetria nova.

Depois, afirma a origem como sendo o elemento neutro, o que pode ser evidenciado em sua tabela da questão 2.

Por fim, o aluno constrói uma tabela com os elementos e seus inversos; se observamos a sua resposta da questão 2, notamos que a composição destes elementos resulta na origem. Aqui fica evidente que o aluno está operando no mesmo campo semântico do professor, que é: um elemento é inverso do outro se quando operamos os dois temos o elemento neutro como resultado. Desta forma, concluímos que o aluno construiu significado à estrutura algébrica.

Figura 56 - Q3G3



Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.

Verificamos a condição de fecho, vendo se os resultados ainda eram pertencente ao grupo.

b. Indique o elemento neutro.

Origem

c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.

Composição	Inverso
origem	origem
R1	R2
R2	R1
F1	F1
F2	R1
F3	F3

Fonte: Acervo do Autor (2023)

Neste grupo, ocorre novamente uma discrepância: apesar de um dos membros (G3A4) fornecer respostas mais concisas, o grupo opta por apresentar uma resposta incorreta. Neste caso, coincide com a do aluno G3A3. Portanto, podemos aplicar a mesma análise feita anteriormente para o grupo.

7. CONCLUSÕES

Este trabalho, por meio de uma abordagem *IBL*, buscou introduzir os conceitos iniciais da teoria de grupos no contexto do ensino básico. Isto foi feito utilizando como referencial teórico o MCS para realizar as análises dos resultados obtidos, que foram os significados matemáticos construídos pelos alunos em relação aos conceitos matemáticos abordados durante a pesquisa.

É importante ressaltar que a pergunta de pesquisa deste estudo de caso não visava confirmar uma hipótese; mas, sim, analisar a construção de significados por meio da abordagem e análise do pesquisador. O trabalho trouxe contribuições significativas para futuras pesquisas que busquem investigar conceitos de álgebra e explorar o uso de uma abordagem *IBL* podendo ou não ser combinada com o MCS.

Assim sendo, foi possível evidenciar por meio da análise de dados que alguns alunos construíram significados muito sólidos acerca dos conceitos matemáticos abstratos apresentados. Cabe destacar também o empenho dos alunos durante a realização das atividades, a interação e produção em grupo, a construção do conhecimento de uma maneira coletiva e, o mais importante de tudo: a construção do conhecimento por parte do aluno mediante atividades que valorizam uma postura autônoma e protagonista do aluno.

Os dois principais desafios encontrados durante a aplicação da prática foram: a adaptação à dinâmica dos alunos, que estão mais acostumados a uma abordagem mais tradicional/passiva, e o conteúdo apresentado, que aborda conceitos mais abstratos da matemática.

Para futuros trabalhos, recomendamos atividades que dependam de respostas mais descritivas e/ou gravação de áudio, pois a análise segundo o MCS é enriquecida quando temos mais dados sobre o que o aluno estava pensando no momento das atividades. Nós fizemos uso apenas do caderno de campo e isto foi um ponto limitante em nossa análise de dados.

Mais ainda, com o intuito de potencializar futuros trabalhos, também recomendamos que, ao utilizar a abordagem *IBL,* sejam incorporados materiais manipuláveis e/ou lúdicos para dinamizar as atividades de matemática.

A pesquisa destacou a relevância da abordagem *IBL*, especialmente quando combinada com o MCS, não apenas para o estudo de grupos e simetria, mas também para elaboração de trabalhos que visem trabalhar outros conceitos no campo da álgebra, fornecendo um exemplo de como inserir conceitos menos convencionais no ensino básico e oferecendo ferramentas para análises qualitativas que valorizam a produção de conhecimento dos alunos.

Em conclusão, o trabalho contribuiu ao apresentar uma nova abordagem para o ensino de simetria e teoria de grupos no ensino básico, enfatizando a possibilidade de trabalhar conteúdos matemáticos não tradicionais que têm uma presença significativa no cotidiano dos alunos.

8. REFERÊNCIAS

BANCHI, Heather; BELL, Randy. **The Many Levels of Inquiry. Science and Children**, p. 26-29, 2008.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. **Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning.** Journal for Research in Mathematics Education, v. 36, p. 412-446, 2005. DOI: 10.2307/30034944.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa Em Educação**: Uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução: Maria João Alvarez; Sara Bahia dos Santos; Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1999. 335 p. (Colecção Ciências da Educação). Título original: Qualitative Research for Education. ISBN: 9720341122.

BORGES, Gislaine Teixeira. **Ornamentos e grupos.** Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Curso de Matemática, Florianópolis, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em Acesso em 21 Jul. 2023.

COELHO, Flávio; AGUIAR, Marcia. **A História da Álgebra e o Pensamento Algébrico: Correlações com o Ensino. Estudos Avançados**, v. 32, p. 171-187, 2018. DOI: 10.1590/s0103-40142018.3294.0013.

COUTINHO, Severino C. **Números Inteiros e Criptográfica RSA**. 2ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

ERNST, Dana C.; HODGE, Angie; YOSHINOBU, Stan. What Is Inquiry-Based Learning? Notices of the AMS, v. 64, n. 6, p. 570-572, 2017. Disponível em: https://www.ams.org/journals/notices/201706/rnoti-p570.pdf Acesso em 14 Jul. 2023.

HENRIQUES, Marcílio Dias. **Um estudo sobre a produção de significados de estudantes do Ensino Fundamental para Área e Perímetro**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto De Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2011.

HOOVER, Wesley A. (1996). **The practice implications of constructivism.** SEDLetter IX(3). 2007. Disponível em: http://www.sedl.org/pubs/sedletter/v09n03/practice.html Acesso em 22 Jul. 2023.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LINS, Romulo Campos. **O Modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico**. Revista Dynamis. Blumenau, abril/junho, 1994 (a) p. 29 - 39.

____. **Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática**. In: BICUDO, M.A.V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p .75 – 94.

____. ***A framework for understanding what algebraic thinking is***. *Phd Thesis*. Inglaterra: *University of Notttingham* – UK, 1992.

____. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, C.L. et al (org**.). Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012.

MOURA, Francisco Antonio Gudemberg Almeida. **Estudo da Aplicação do "Inquiry-Based Learning" Através da Ferramenta Experimental "Photonics Explorer Kit" como complemento ao Ensino da Ótica no Nível Básico**. Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, 2018.

OLIVEIRA, V. C. A. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Rio Claro, Brasil: UNESP, 2002.

PEDASTE, M.; MÄEOTS, M.; SIIMAN, L.A.; JONG, T. **Phases of inquiry-based learning:** definitions and the inquiry cycle. Educational Research Review, n.14, p. 47-61, 2015.

SANTOS, José Plínio O.; BOVO, Eduardo. **O Teorema de Burnside e Aplicações**. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004. Disponível em: http://www.bienasbm.ufba.br/M37.pdf Acesso em 6 Jul. 2023.

SOUZA, Rodrigo Luiz de. **Uma breve introdução à teoria de grupos.** Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2014.

SPRONKEN-SMITH, Rachel. **Experiencing the Process of Knowledge Creation: The Nature and Use of Inquiry-Based Learning in Higher Education**. University of Otago, New

Zealand. Disponível em: https://ako.ac.nz/assets/Knowledge-centre/inquiry-based-dddlearning/SUMMARY-REPORT-Inquiry-based-Learning.pdf Acesso em 15 Jul. 2023.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987.

WAWRO, M. et al**. An Inquiry-Oriented Approach to Span and Linear Independence: The Case of the Magic Carpet Ride Sequence.** PRIMUS, v. 22, n. 8, p. 577-599, 2012. DOI: 10.1080/10511970.2012.667516.

APÊNDICE A: ATIVIDADE I

Figura 57 - ATIVIDADE I

ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO BÁSICA DOLORES ALCARAZ CALDAS
Rua Afonso Celso Pupe da Silveira, 25 Cep.: 91360-020
Porto Alegre – RS – Tel/Fax: 3341-5955/ (051)991034166

Estudante:_______________________________________ Turma:8A Data:___/___/_______

Professor(a): Jeremy Ortiz Moretto Componente curricular: Matemática

ATIVIDADE

1. A partir dos triângulos de madeira, nomeie e desenhe as possíveis simetrias do triângulo equilátero:

a) De rotação:

b) De reflexão:

2. A partir das simetrias encontradas no exercício anterior, construa uma tabela que compõe as simetrias entre si:

Composição						

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

APÊNDICE B: ATIVIDADE II

Figura 58 - ATIVIDADE II

ESCOLA ESTADUAL DE EDUCAÇÃO BÁSICA DOLORES ALCARAZ CALDAS
Rua Afonso Celso Pupe da Silveira, 25 Cep.: 91360-020
Porto Alegre – RS – Tel/Fax: 3341-5955/ (051)991034166

Estudante:____ Turma:8A Data:___/___/_______

Professor(a): Jeremy Ortiz Moretto Componente curricular: Matemática

3. Considere o conjunto de todas as simetrias do triângulo equilátero e a tabela obtida no exercício anterior. Esse conjunto, junto da operação de composição, satisfaz as condições de grupo?

Se sim:

a. Explique com suas palavras como você verificou a condição de fecho.

b. Indique o elemento neutro.

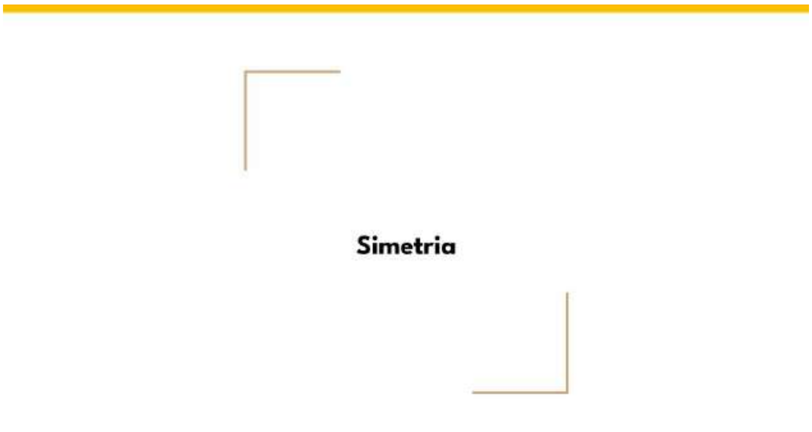
c. Indique o elemento inverso de cada uma das simetrias.

Caso contrário, mencione uma das condições que não é satisfeita.

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

APÊNDICE C: APRESENTAÇÃO I

Figura 59 - Slide 1 APRESENTAÇÃO I

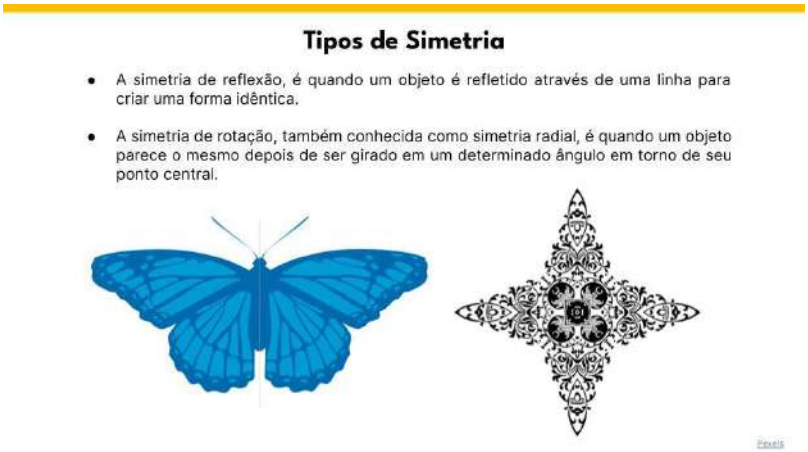


Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 60 - Slide 2 APRESENTAÇÃO I

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 61 - Slide 3 APRESENTAÇÃO I



Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 62 - Slide 4 APRESENTAÇÃO I

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

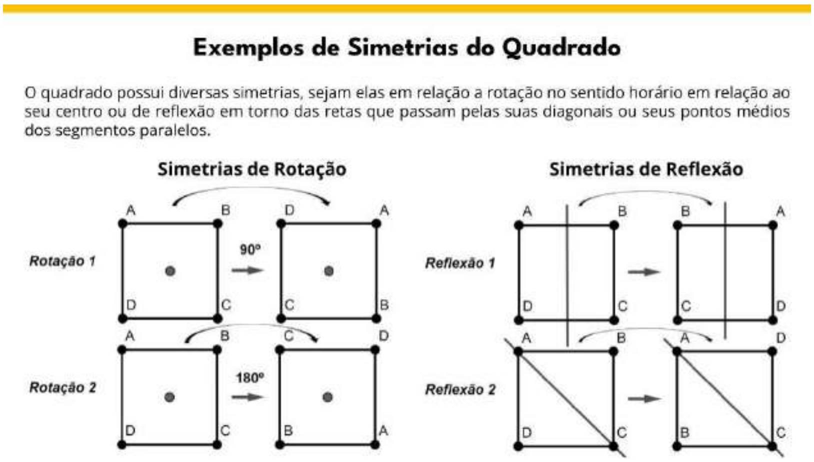
Figura 63 - Slide 5 APRESENTAÇÃO I

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 64 - Slide 6 APRESENTAÇÃO I

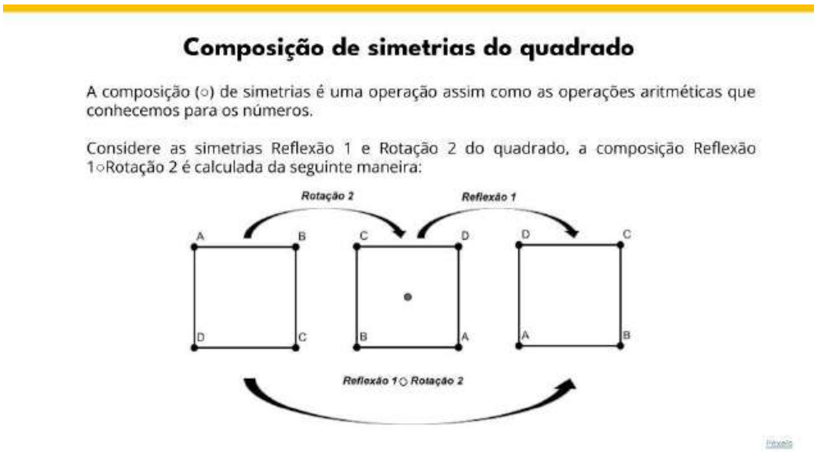
Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 65 - Slide 7 APRESENTAÇÃO I



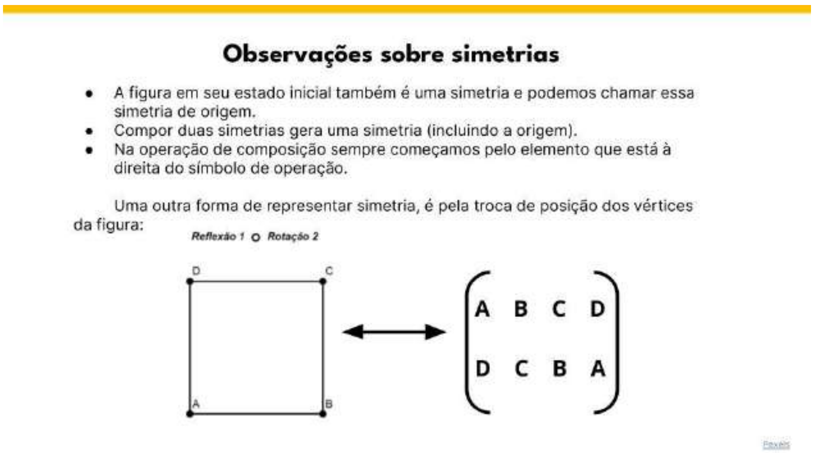
Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 66 - Slide 8 APRESENTAÇÃO I



Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 67 - Slide 9 APRESENTAÇÃO I



Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

APÊNDICE D: APRESENTAÇÃO II

Figura 68 - Slide 1 APRESENTAÇÃO II

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

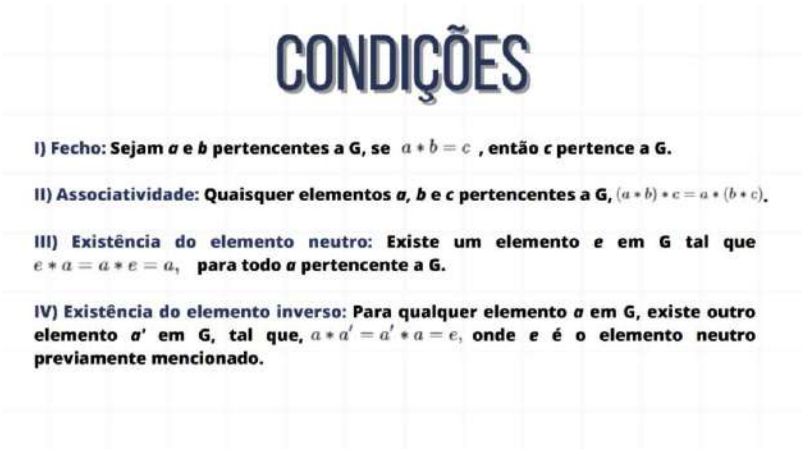
Figura 69 - Slide 2 APRESENTAÇÃO II

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 70 - Slide 3 APRESENTAÇÃO II

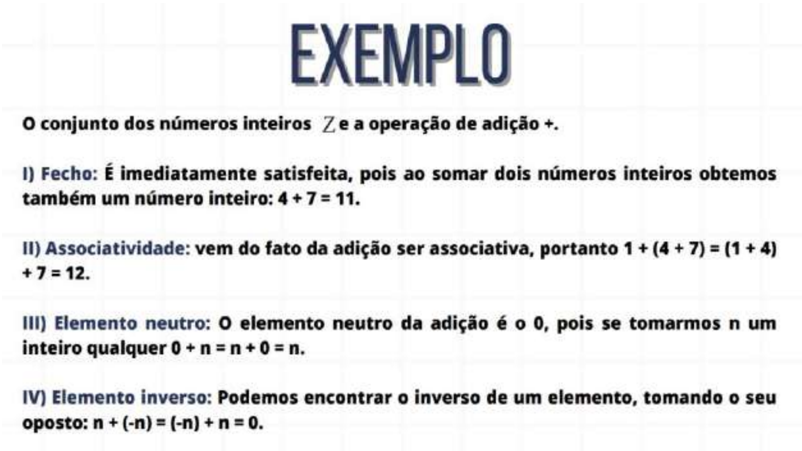
Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 71 - Slide 4 APRESENTAÇÃO II



Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 72 - Slide 5 APRESENTAÇÃO II



Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 73 - Slide 6 APRESENTAÇÃO II

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 74 - Slide 7 APRESENTAÇÃO II

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 75 - Slide 8 APRESENTAÇÃO II

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 76 - Slide 9 APRESENTAÇÃO II

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 77 - Slide 10 APRESENTAÇÃO II

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 78 - Slide 11 APRESENTAÇÃO II

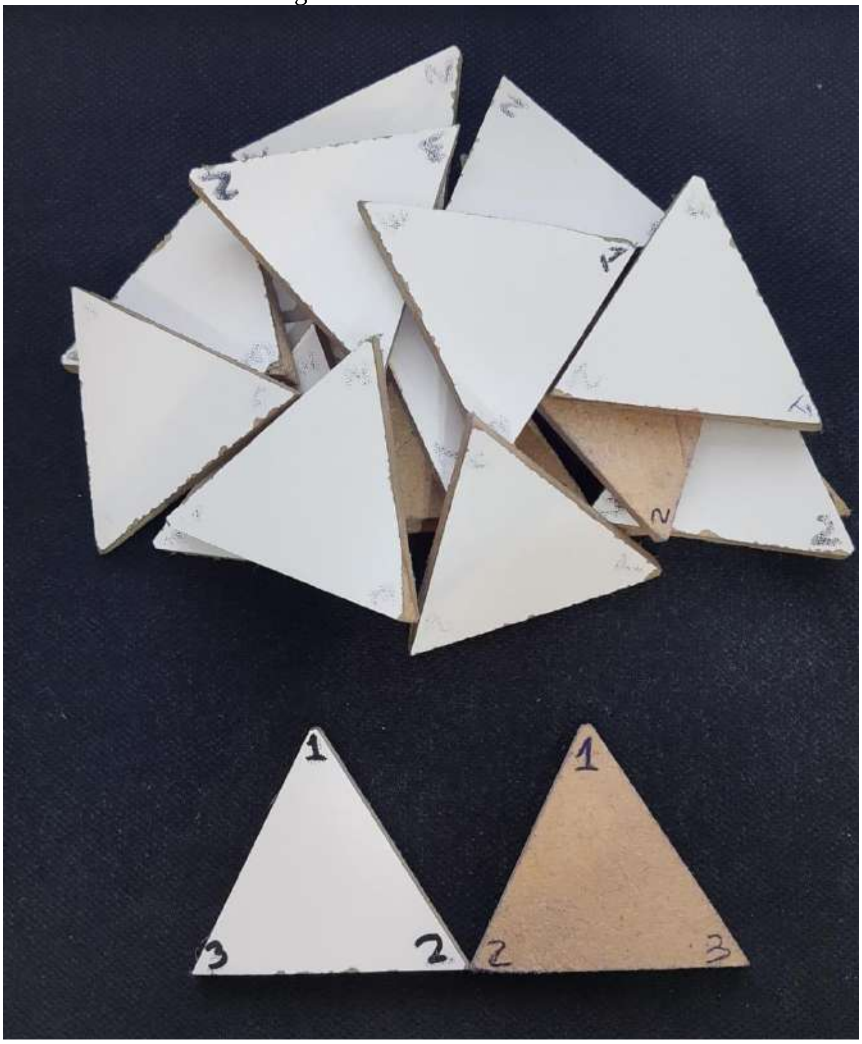
Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

Figura 79 - Slide 12 APRESENTAÇÃO II

Fonte: Produzido pelo Autor (2023)

APÊNDICE E: MATERIAL EM MDF

Figura 80 - Material em MDF



Fonte: Acervo do Autor (2023)

APÊNDICE F: CARTA DE ANUÊNCIA DA ESCOLA

O(A) Diretor(a) da escola E. E. E. B. Dolores Alcaraz Caldas, localizada na cidade de Porto alegre/RS declara estar ciente e de acordo com a participação dos estudante(s) e/ou professor(es) desta escola nos termos propostos no projeto de pesquisa intitulado “INTRODUÇÃO A TEORIA DE GRUPOS NO ENSINO BÁSICO EM UMA *ABORDAGEM INQUIRY BASED LEARNING*”, que tem como objetivos entender: quais resultados matemáticos são produzidos por alunos do ensino básico ao explorar o conceito de simetria, utilizando material manipulável, em uma *abordagem inquiry-based learning* (IBL)?. Este projeto de pesquisa encontra-se sob responsabilidade do(a) professor (a)/pesquisador(a) João Matheus Jury Giraldi, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e é desenvolvido pelo(a) acadêmico(a) Jeremy Ortiz Moretto vinculado(a) ao Instituto de Matemática e Estatística.

A presente autorização está condicionada ao cumprimento dos requisitos das resoluções 466/2012 e 510/2016 do Conselho Nacional da Saúde, Ministério da saúde, comprometendo-se os pesquisadores a usar os dados pessoais dos sujeitos da pesquisa exclusivamente para fins científicos, mantendo o sigilo e garantindo a não utilização das informações em prejuízo dos sujeitos.

Porto Alegre, _____ de ________________ 2023.

Nome do(a) Diretor(a): Elizabeth Martiny.

Assinatura ____

Professor/Pesquisador responsável (UFRGS): João Matheus Jury Giraldi.

Assinatura ____

APÊNDICE G: TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ____________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRUPOS NO ENSINO BÁSICO EM UMA ABORDAGEM INQUIRY BASED LEARNING (IBL), desenvolvida pelo pesquisador Jeremy Ortiz Moretto. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por João Matheus Jury Giraldi, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone 51 3308-6211 ou e-mail joaomjg@gmail.com.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são entender: quais resultados matemáticos são produzidos por alunos do ensino básico ao explorar o conceito de simetria, utilizando material manipulável, em uma abordagem *inquiry-based learning (IBL)*?

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação

Esperamos obter diversos benefícios por meio deste estudo, pois ele nos permitirá gerar informações importantes sobre a participação dos alunos em uma prática que busca apresentar uma abordagem matemática com viés mais criativo e participativo em sua elaboração, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável no endereço Antônio Francisco Lisboa, 397, Porto Alegre/RS, telefone 51-

995825063, e-mail Jeremytos2009@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ 2023.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE H: TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TALE

Você está sendo convidado(a) a participar como voluntário do projeto de pesquisa "INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRUPOS NO ENSINO BÁSICO EM UMA ABORDAGEM *INQUIRY BASED LEARNING* (IBL)" sob responsabilidade do professor/pesquisador da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) Jeremy Ortiz Moretto. O estudo será realizado com material manipulável em MDF e os alunos serão separados em grupos e deverão realizar as atividades solicitadas pelo professor. As atividades serão realizadas no Laboratório de Matemática no horário normal das aulas de Matemática. Eventualmente os alunos serão fotografados durante a prática e no final da pesquisa serão recolhidas as folhas de respostas desenvolvidas por eles, para entender: quais resultados matemáticos são produzidos por alunos do ensino básico ao explorar o conceito de simetria, utilizando material manipulável, em uma abordagem *inquiry based learning (IBL)*?

Com relação aos riscos da pesquisa, elenca-se um eventual constrangimento relacionado a uma eventual dificuldade em realizar as tarefas propostas. No entanto, você receberá todo o apoio do professor/pesquisador no sentido de minimizar estes riscos, tais como monitorar o participante no sentido de auxiliá-lo durante o processo da realização das atividades.

Os seus pais (ou responsáveis) autorizaram você a participar desta pesquisa, caso você deseje. Você não precisa se identificar e está livre para participar ou não. Caso inicialmente você deseje participar, posteriormente você também está livre para, a qualquer momento, deixar de participar da pesquisa. O responsável por você também poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento.

Você não terá nenhum custo e poderá consultar o(a) pesquisador(a) responsável sempre que quiser, por e-mail ou pelo telefone da instituição, para esclarecimento de qualquer dúvida.

Todas as informações por você fornecidas e os resultados obtidos serão mantidos em sigilo, e estes últimos só serão utilizados para divulgação em reuniões e revistas científicas. Você será informado de todos os resultados obtidos, independentemente do fato de estes poderem mudar seu consentimento em participar da pesquisa. Você não terá quaisquer benefícios ou direitos financeiros sobre os eventuais resultados decorrentes da pesquisa. Esperamos obter diversos benefícios por meio deste estudo, pois ele nos permitirá gerar informações importantes sobre a participação dos alunos em uma prática que busca apresentar uma abordagem matemática com viés mais criativo e participativo em sua elaboração, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

Diante das explicações, se você concorda em participar deste projeto de pesquisa, forneça o seu nome e coloque sua assinatura a seguir.

Nome: ____

Data: Porto Alegre, ______ de ________________ 2023.

_____________________________________ _____________________________________

Participante Pesquisador(a) responsável

OBS.: Termo apresenta duas vias, uma destinada ao participante e a outra ao pesquisador.

Nome Pesquisador: Jeremy Ortiz Moretto
Cargo/função: Aluno
E-mail: jeremytos2009@gmail.com
Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Endereço: Antônio Francisco Lisboa nº 397, Porto Alegre/RS
Telefone: 51-995825063