UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# VISUALIZAÇÃO COM MATEMÁTICA DINÂMICA: UM ESTUDO COM PROJEÇÃO ORTOGONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA

**LUCAS DANIEL RETORE**

Porto Alegre
2023

**LUCAS DANIEL RETORE**

# VISUALIZAÇÃO COM MATEMÁTICA DINÂMICA: UM ESTUDO COM PROJEÇÃO ORTOGONAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de conclusão de curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre
2023

CIP - Catalogação na Publicação

Retore, Lucas Daniel
Visualização com Matemática Dinâmica: um estudo com projeção ortogonal na Educação Básica / Lucas Daniel Retore. -- 2023.
123 f.
Orientadora: Márcia Rodrigues Notare Meneghetti.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Licenciatura em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2023.

1. GeoGebra. 2. Habilidades espaciais. 3. Matemática Dinâmica. 4. Projeção ortogonal. 5. Visualização. I. Meneghetti, Márcia Rodrigues Notare, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática

**Visualização com Matemática Dinâmica: um estudo com projeção ortogonal na Educação Básica**

Lucas Daniel Retore

Banca examinadora:

Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS

Profª. Drª. Andréia Dalcin
Faculdade de Educação da UFRGS

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS

Dedico este trabalho à minha mãe Mirian Maria Rossi Retore que, pelo exemplo e com todo o carinho, me mostrou a beleza que há em ser prof.

**AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais Darci e Mirian por todo amor e carinho que me deram ao longo dos anos, por não medirem esforços para garantir que eu estivesse feliz mesmo longe de casa, e por terem incentivado e acreditado na minha trajetória acadêmica por todo esse tempo. Aos meus irmãos André e Pedro pelo companheirismo e por sempre fazerem eu me sentir acolhido e tranquilo, como se não houvesse problemas que um tererê não resolvesse.

Agradeço à minha prima Rúbia e à minha tia Carla que me acolheram nos anos de faculdade e que compartilharam muitos momentos de alegria e de cansaço, mas também muitos brigadeiros e pizzas assistindo a séries de gosto questionável.

Agradeço à minha orientadora Márcia por todas as reuniões e conselhos, pela animação que demonstrava quando eu (inseguro) apresentava as atividades planejadas ou (desesperado) relatava uma aula do estágio e pelas palavras de incentivo desmedidas ao longo do trabalho. Aos professores da banca, Andréia e Marcus, por terem aceitado o convite e por todas as aulas inspiradoras dos laboratórios e dos estágios que muito contribuíram para o tipo de professor que tenho me tornado.

Agradeço aos meus amigos e colegas que me acompanharam ao longo dos semestres de ERE e presenciais, que tornaram o curso mais fácil e divertido. Em especial, agradeço ao grupinho do Math∞: o Thiago, a Gislaine, o João e o Pedro, com os quais vivi os melhores momentos do curso e que logo serão as lembranças mais queridas, e aos colegas de bolsa, meus “estagiários” Nath e Luan, que me auxiliaram e compartilharam risadas, cafés e ansiedades nos últimos meses.

Agradeço também à minha querida colega Júlia, que compartilhou todas as emoções da reta final do curso e os surtos na escrita do TCC, pelas centenas de áudios trocados, as dúvidas sanadas e as fofocas contadas.

Por fim, agradeço aos meus amigos e familiares de Vila Manchinha que também estiveram presentes nessa caminhada, às primas Val e Vero pelas brincadeiras e aulas experimentais, à best Carol pelas conversas e conselhos e aos Divos que nunca perdem a piada e deixam de me perguntar da formatura.

Todos vocês tornaram este trabalho possível e, por isso, os agradeço.

## RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar de que modo a matemática dinâmica do software GeoGebra contribui para o desenvolvimento da visualização espacial. O referencial teórico utilizado aborda a visualização espacial, os ambientes de matemática dinâmica, os softwares que proporcionam este tipo de ambiente e suas ferramentas. A investigação foi de natureza qualitativa e os dados produzidos se deram na forma de capturas de tela, registros fotográficos, gravações de áudio, anotações no caderno de campo do pesquisador, respostas escritas e produções dos alunos no software. O experimento prático ocorreu com a participação de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública estadual de Porto Alegre, ao longo de seis semanas, em cinco encontros: Introdução ao GeoGebra, Conhecendo a projeção ortogonal, Atividades I, II e III, Atividade IV, e Retomada e entrevista. Com a análise dos dados produzidos, por meio do reconhecimento de habilidades de visualização e de modalidades do recurso do arrastar do GeoGebra empregadas pelos participantes, foram identificadas contribuições desse software de matemática dinâmica à visualização dos alunos no contexto das atividades realizadas, em especial, foi constatado que a interação com os objetos dinâmicos apresentados na tela dos aparelhos dá sustento tanto ao processo de criação de imagens mentais pelo reconhecimento de propriedades e relações invariantes quanto ao processo de tradução das imagens em representações externas.



Palavras-chave: GeoGebra. Habilidades espaciais. Matemática Dinâmica. Projeção Ortogonal. Visualização.

## ABSTRACT

This research aimed to investigate how the dynamic mathematics of the GeoGebra software contributes to the development of spatial visualization. The theoretical framework used addresses spatial visualization, dynamic mathematics environments, software that provide this type of environment and its tools. The investigation was of a qualitative nature and the data produced took the form of screen captures, photographic records, audio recordings, notes in the researcher's field notebook, written answers and productions of the students in the software. The practical experiment occurred with the participation of eighth grade students of Elementary School in a public state school from Porto Alegre, over six weeks, in five encounters: Introduction to GeoGebra, Getting to know the orthogonal projection, Activities I, II and III, Activity IV, and Review and interview. With the analysis of the data produced, through the recognition of visualization abilities and modalities of GeoGebra's drag feature used by the participants, contributions of this dynamic mathematics software to students' visualization in the context of the activities carried out were identified, in particular, it was observed that the interaction with the dynamic objects presented on the screen of the devices sustains both the process of creating mental images by recognizing invariant properties and relationships and the process of translating the images into external representations.



Key-words: GeoGebra. Spatial Abilities. Dynamic Mathematics. Orthogonal Projection. Visualization.

LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

# 1. INTRODUÇÃO

Sempre tive[1] gosto pela Matemática e, dentro da disciplina, a área da Geometria sempre foi a que mais me despertou prazer em estudar. Apesar disso, a licenciatura não era uma escolha óbvia para mim, pois ao longo dos anos criei muitos estigmas acerca da profissão que me afastaram da escolha pela docência. Algumas das barreiras que criei surgiram da minha experiência como estudante em aulas tradicionais e desmotivadoras. Foi somente após anos vivenciando diferentes tipos de aulas na universidade que esses estigmas foram superados e me permiti ir atrás do que realmente gosto. Então, em 2019 tomei a decisão de cursar licenciatura em matemática.

Algumas dessas aulas que mudaram minha visão sobre a docência aconteceram já na graduação, mas antes da licenciatura, ao cursar engenharia, em cadeiras como geometria descritiva, mecânica aplicada, introdução à programação e desenho técnico. Além de abordarem a Geometria, o que já despertava meu gosto pelas cadeiras por si só, eram aulas em que nós, alunos, passávamos mais tempo resolvendo as atividades do que ouvindo e acompanhando o/a professor/a. Além disso, eram atividades diferentes, nas quais precisávamos visualizar e interpretar um problema e, então, programar no software ou utilizar as ferramentas de desenho, as manuais e as computacionais.

Outras aulas que renovaram o gosto que tenho pela matemática foram tomadas nas cadeiras da licenciatura em matemática, das quais as que envolviam Tecnologias Digitais e Geometria outra vez eram as que mais me empolgavam. Por este motivo, essa afinidade, ao longo do curso busquei aprofundar meus conhecimentos sobre essa tendência da Educação Matemática e essa área em particular. Logo nos primeiros semestres do curso, que vieram a ser remotos devido à pandemia da covid-19, fui introduzido ao software GeoGebra. Passei a fazer uso recorrente e, em certo ponto, tornou-se natural utilizá-lo para o preparo de aulas, a resolução de questões ou até para compartilhar ideias com os colegas durante chamadas de vídeo. Muitas dessas ideias eram evidenciadas por simples construções estáticas, outras precisavam de movimento para fazerem sentido, de qualquer forma, elas auxiliavam e traziam clareza aos problemas que discutíamos.

[1] Por se tratar de uma narrativa pessoal, adotarei a primeira pessoa do singular nesta abertura de capítulo.

Partindo deste contexto, tomamos[2] a decisão de realizar uma pesquisa com o GeoGebra no estudo da Geometria.

A pergunta diretriz da pesquisa começou a ser formulada durante a cadeira Pesquisa em Educação Matemática cursada ao final de 2022, mas foi redigida somente após algumas reuniões com a professora orientadora, já em 2023, nas quais delimitamos o tema e determinamos os objetivos da investigação. Posteriormente, algumas alterações se fizeram necessárias por motivos que serão relatados nos capítulos seguintes e a escrita da pergunta passou a ser "**como a matemática dinâmica pode contribuir para o desenvolvimento da visualização espacial?**". Essa questão traduz o objetivo da pesquisa, o de investigar as potencialidades do uso do GeoGebra para a mobilização de habilidades espaciais durante o estudo da projeção ortogonal. Além disso, dois objetivos específicos foram destacados: identificar a mobilização (ou não) de habilidades espaciais por parte dos alunos, e apontar a participação do software GeoGebra no desenvolvimento dessas habilidades de visualização.

Vemos a Matemática como uma ciência diversa que compreende áreas com objetos de interesse próprios, mas que, ao mesmo tempo, são inter-relacionadas. Sendo a Geometria uma dessas, seu estudo é fundamental para um bom entendimento da Matemática, contudo, muitos educadores deixam de ensiná-la adequadamente nas escolas devido a uma série de fatores que incluem precária formação, falta de incentivo ou condições adequadas de trabalho, pouca afinidade com a área e desvalorização da Geometria em relação às outras áreas da matemática (LORENZATO, 1995; INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION, 2022). Aqueles que não reconhecem a importância da Geometria não percebem que o pensamento geométrico é capaz de facilitar a lida com problemas da escola e do cotidiano dos alunos que se apresentam ou podem ser organizados de forma geometrizada, ou que auxilia na expressão clara e esquematizada das ideias ou, ainda, que há problemas que a álgebra e aritmética não resolvem, como faz a geometria pela visualização de um objeto (LORENZATO, 1995).

Tampouco os livros didáticos apresentam um bom material para embasar o estudo da Geometria visto que prevalecem as representações canônicas ou

[2] A partir deste ponto adotaremos a primeira pessoa do plural, pois concebemos esta pesquisa pela cooperação entre o pesquisador e sua orientadora.

prototípicas (SIBEMBERG, 2019; INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION, 2022). Sua, Gutiérrez e Jaime (2021) apontam que esse recurso acaba por limitar a compreensão de conceitos e relações da Geometria, pois até ao melhor dos livros didáticos, da forma que os conhecemos hoje, falta movimento, informações são perdidas pela estaticidade das imagens e pela representação bidimensional de objetos tridimensionais.

Por outro lado, os autores afirmam que “nos ambientes computacionais, tem-se visto uma possibilidade para apoiar o reconhecimento de relações em representações gráficas ou as representações de um objeto geométrico” (SUA; GUTIÉRREZ; JAIME, 2021, p. 580). Um desses ambientes computacionais mencionados é proporcionado pelo GeoGebra. Por exemplo, com a Calculadora 3D do software é possível fazer construções dinâmicas de objetos geométricos e as manipular em “janelas de visualização” bidimensional ou tridimensional, ou, ainda, no modo realidade aumentada, quando utilizando a versão para dispositivos móveis. Gutiérrez e Jaime (2021) reforçam que programas como o GeoGebra facilitam a visualização de conceitos geométricos, algébricos e funcionais e permitem modificar e relacionar esses conceitos para, com isso, descobrir propriedades.

Com base nisso, buscamos investigar a contribuição do software GeoGebra no desenvolvimento de habilidades espaciais de visualização pelos alunos, quando resolvendo atividades que abordam conteúdos próprios da geometria, como a projeção ortogonal. Esperamos que as atividades descritas no trabalho inspirem outros professores a fazer uso semelhante das tecnologias empregadas, propondo aos alunos experiências mais ricas que as questões dos livros didáticos e que são de grande importância para sua formação, pois “sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida” (LORENZATO, 1995, p. 5).

O presente trabalho está estruturado em cinco capítulos, incluindo este, a Introdução. Os demais capítulos consistem em Considerações Teóricas, Metodologia, Descrição dos Encontros e Análise de Dados, e Conclusão. O segundo capítulo é dividido em duas seções, a seção Referenciais Adotados, que aborda os dois pilares dessa investigação, a saber, a Matemática Dinâmica e a Visualização Espacial, e a seção Trabalhos Correlatos. O terceiro capítulo trata dos aspectos metodológicos da pesquisa, em três seções. A primeira, Pesquisa Qualitativa, caracteriza a investigação, a segunda, Contexto do Experimento Prático descreve o local e os participantes da pesquisa, e a terceira, Encontros e Atividades apresenta o planejamento dos encontros do experimento prático. No quarto capítulo, Descrição dos Encontros e Análise dos Dados, são sistematizadas e analisadas as produções dos alunos e suas manifestações sobre as atividades, em cinco sessões. Por fim, no quinto capítulo são apresentadas as considerações feitas a partir de todo o trabalho realizado.

# 2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Neste capítulo revisamos a literatura em busca de fundamentação para a pesquisa. Optamos por dividir o capítulo em duas seções: na primeira, abordamos os dois pilares sobre os quais a pesquisa foi construída, a saber, a matemática dinâmica e a visualização espacial, os quais são abordados separadamente em duas subseções; na segunda, sistematizamos trabalhos correlatos que fazem uso dos conceitos das seções anteriores e do software GeoGebra.

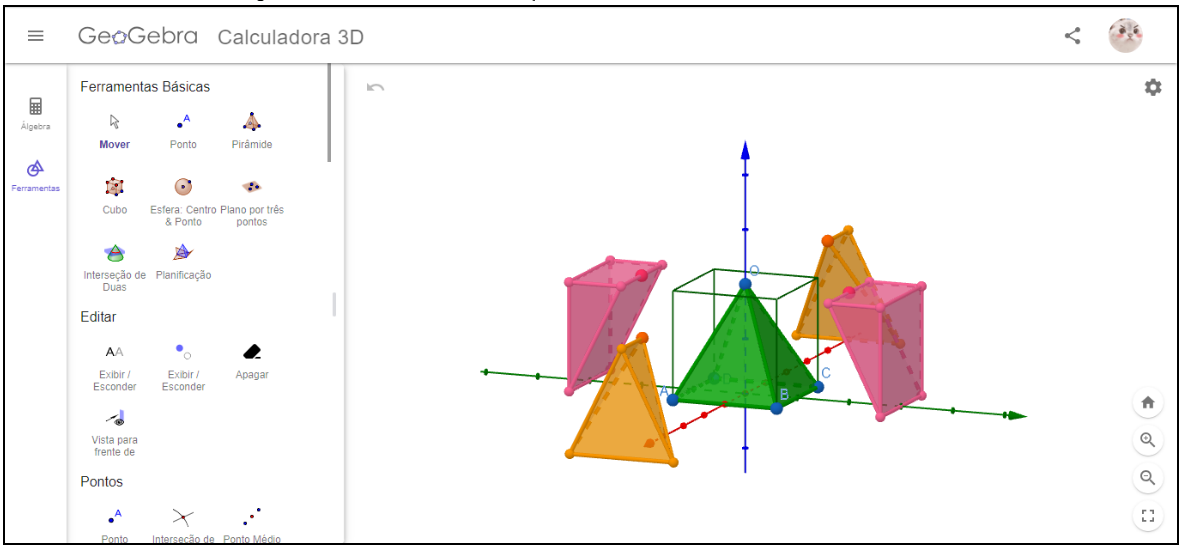
## 2.1. REFERENCIAIS ADOTADOS

### 2.1.1. Matemática Dinâmica

A preocupação com o ensino de Geometria para promover um amplo entendimento da Matemática aos alunos da Educação Básica remonta a algumas décadas, porém, é nos últimos anos que se observa o estudo da Geometria sendo encorajado com maior destaque no currículo de vários países (INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION, 2022) e um número crescente de publicações cuja temática consiste no ensino e na aprendizagem da Geometria (BASSO; NOTARE, 2015; 2016). Basso e Notare (2015) concebem este aumento expressivo às novas possibilidades de se fazer matemática com o advento das tecnologias digitais e os recursos de matemática dinâmica (MD) que possuem. Ambientes de MD possibilitam dar um novo sentido à atividade escolar, um que permite ao aluno abandonar a postura passiva que geralmente adota em aulas de matemática tradicionais e assumir um papel ativo em atividades voltadas à investigação dos conteúdos estudados.

O GeoGebra é um software livre, gratuito e multiplataforma desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2002 (JANZEN, 2011) que se encontra disponível para acesso online ou local mediante download do aplicativo. Apresenta diferentes versões do software na forma de aplicativos, cada qual conta com uma gama de recursos de Geometria, Álgebra, Estatística e Cálculo, e podem ser acessados separadamente ou por um único aplicativo, o Suíte GeoGebra em dispositivos móveis. Para a realização das atividades descritas neste trabalho foram utilizados os aplicativos Calculadora 3D, em sua versão online (Figura 01) e para dispositivos móveis, e Geometria.

Figura 01 - Interface do aplicativo GeoGebra Calculadora 3D




Fonte: Produção do pesquisador

Para além das diversas ferramentas disponíveis, o GeoGebra se destaca por conceber um ambiente de MD em uma interface de fácil compreensão, o que faz dele uma das melhores opções para a realização de atividades nesse tipo de ambiente. Alguns dos principais benefícios do uso de softwares de MD são apontados por King e Schattschneider (1997, p. xi, apud JANZEN, 2011, p. 46):

> (i) a precisão de construções e a capacidade de visualização das relações geométricas; (ii) a possibilidade de exploração das construções e descoberta de relações e propriedades geométricas; (iii) a busca de prova de teoremas, de forma experimental e heurística; (iv) a geração de transformações e lugares geométricos; e (v) a possibilidade de simulação e de construção de micromundos com características próprias.

Além disso, Gravina (2001) aponta o potencial dos softwares de MD para o estudo da Geometria por meio de construções de objetos geométricos que obedecem às propriedades que os definem, propiciadas pelas ferramentas dos softwares, que oferecem régua e compasso virtuais. Por sua vez, Notare e Basso (2016) afirmam que, com o surgimento de ambientes dinâmicos voltados para a aprendizagem da Matemática, tornaram-se possíveis novas formas de lidar com problemas matemáticos, capazes de tornar acessíveis objetos que até então eram abstratos e tratados de maneira estática. Em Basso e Notare (2015), os autores escrevem que a afirmação de uma propriedade geométrica torna-se a descrição de um fenômeno acessível à observação, e um conceito geométrico pode ser visualizado pelo estudo de propriedades invariantes de uma construção enquanto são movimentados seus componentes.

Assim, a rotação de uma figura em torno de um ponto, por exemplo, em um caderno ou livro didático pode ser representada por dois desenhos ou duas imagens em posições diferentes, mas à mesma distância de um ponto, com uma seta curva indicando a transformação. No GeoGebra, uma possibilidade é a construção de um controle deslizante *c* e utilizar a ferramenta Rotação em Torno de um Ponto, selecionando a figura, um ponto P qualquer e atribuindo *c* ao ângulo de rotação. Com isso, ao manipular *c*, é possível acompanhar a rotação da figura como um movimento circular em torno de P. Além disso, ativando a opção "exibir rastro" da figura, é possível acompanhar as posições que esta assumiu durante o movimento, pois o GeoGebra cria imagens estáticas da figura em tais posições.

Com a utilização de um ambiente dinâmico, a distinção entre desenho e figura fica mais evidente. Gravina (2001, p. 88) atribui o termo figura a um "objeto matemático inserido no modelo euclidiano, dado pelas propriedades que lhe são impostas, por via de construção geométrica". A estas, Janzen (2011) confere um status de distinção, por constituírem exemplos genéricos e passíveis à exploração dinâmica de suas propriedades. Já o termo desenho é reservado à "representação do componente figural, quer seja ela um desenho em papel, quer seja um desenho na tela do computador" (GRAVINA, 2001, p. 88-89). Essa distinção torna-se importante ao se trabalhar com a Geometria, pois muitos dos conceitos dessa área são abstratos e acabam sendo limitados ou distorcidos por desenhos que, por serem estáticos, não são capazes de representar todas as propriedades do objeto. Nesse sentido, Notare e Basso (2016, p. 4) comentam que

> O uso de manipulações permite que os alunos possam experimentar suas ideias, analisar e refletir sobre elas, para modificá-las quando necessário. O uso apenas de desenhos para explorar a geometria espacial não é suficiente, pois desenhos estáticos no papel não representam objetos concretos e manipuláveis, ou seja, não é possível agir sobre o desenho de forma ampla e flexível, com o realismo necessário para apoiar a construção de imagens mentais[3] adequadas. Nestas situações, acreditamos que o uso de construções em ambientes de geometria dinâmica pode auxiliar os alunos a construir imagens conceituais menos restritas.

Ao defenderem a exploração da Geometria em ambientes de MD, os autores pressupõem a movimentação dos objetos em estudo, visto que esta pode ser

[3] este conceito será abordado na próxima seção do capítulo

considerada uma das funções determinantes de tais ambientes. No GeoGebra essa função é realizada pela ferramenta "mover", com a qual é possível arrastar os objetos construídos na tela do aparelho. Para Janzen (2011, p. 49), a função de arrastar transforma a matemática ao revelar novas formas de operar e pensar Geometria, "alterando sua ontologia, constituída agora não mais de objetos geométricos senão de relações geométricas". A autora salienta que, ao arrastar objetos mantendo suas propriedades, alguns elementos são arrastados juntos por se tratarem de elementos dependentes das construções geométricas, do objeto como um todo. Assim, há uma distinção entre elementos arrastáveis, como os pontos básicos, ou iniciais, e elementos não arrastáveis, dependentes de construções anteriores, que se faz presente em ambientes dinâmicos, mas que não fariam sentido em ambientes estáticos como no caderno (JANZEN, 2011). Ainda, há elementos semi-arrastáveis, quando o espaço em que lhes é permitido o movimento é limitado por alguma restrição própria da construção destes elementos, como, por exemplo, um ponto construído sobre uma reta pode ser movido apenas sobre esta.

Gravina (2001, p. 83) concebe o conjunto das figuras que apresentam certas propriedades ou dependências em ambientes de MD como "uma coleção de 'desenhos em movimento' que guarda certos invariantes geométricos, declarados ou não no procedimento de construção". Estes invariantes decorrem das dependências de certos elementos construídos em MD. Assim, com o arrastar de elementos iniciais, sobre os quais foram construídos os demais elementos constituintes de uma certa figura, transforma-se o desenho na tela do aparelho, porém as relações impostas à construção inicial e as propriedades da figura são preservadas, visto que os elementos dependentes arrastam-se junto dos iniciais conferindo "estabilidade sob ação de movimento". Tal funcionalidade permite, por exemplo, que isometrias e homotetias sejam obtidas com o simples arrastar de um ponto.

Com uma série de experimentos, Arzarello *et al.* (2002) buscaram identificar as contribuições da função do arrasto para o processo cognitivo em atividades de investigação matemática. Os autores identificaram diferentes modalidades do arrastar de um ponto sendo utilizadas pelos estudantes, em concordância aos objetivos das etapas de uma atividade realizada com o apoio de um software de MD. Tais modalidades são apresentadas no Quadro 01.

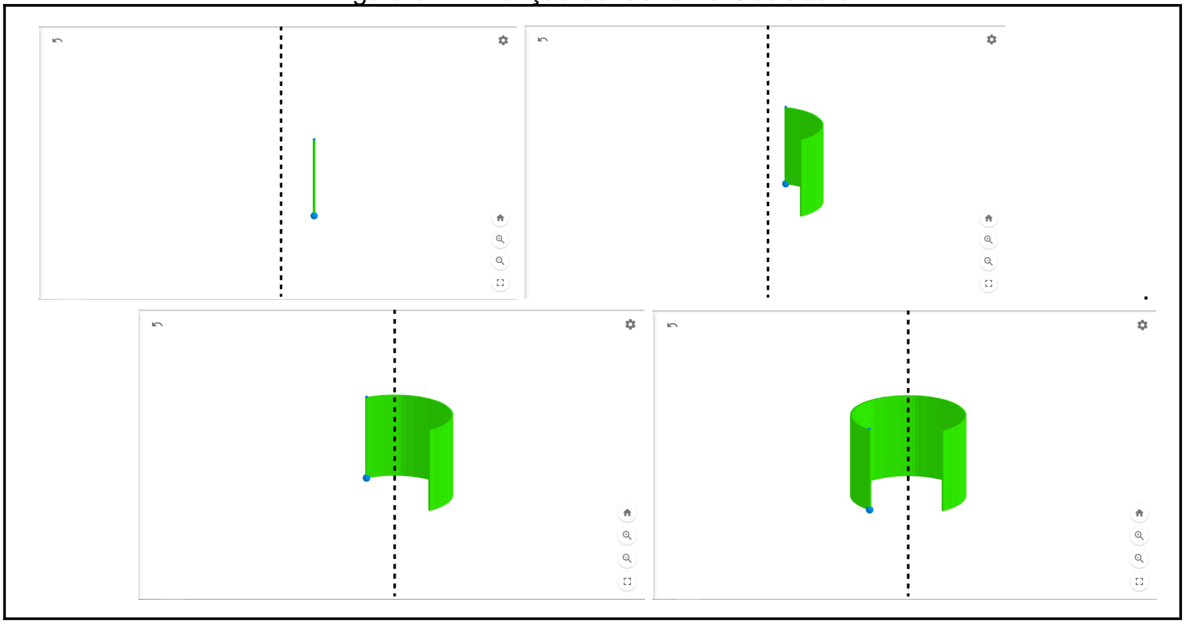
Quadro 01 - Modalidades do arrastar

| Arrastar | Exemplo de situação em que é empregado |
|---|---|
| Arrastar Vagueando | Mover os pontos básicos na tela de maneira aleatória, sem um plano, para descobrir configurações interessantes ou regularidades nos desenhos |
| Arrastar vinculado | Mover um ponto semi-arrastável (o qual já está ligado a um objeto) |
| Arrastar guiado | Arrastar os pontos básicos de um desenho para conferir a ele uma determinada forma |
| Arrastar por um lugar geométrico | Mover um ponto básico de modo que o desenho *mantenha* uma propriedade descoberta; o ponto movido segue um caminho, mesmo que o usuário não o perceba: o lugar geométrico não é aparente e não "salta aos olhos" dos estudantes, que nem sempre percebem que estão arrastando ao longo de tal |
| Arrastar por uma linha | Construir novos pontos ao longo de uma linha para manter a regularidade da figura |
| Arrastar ligado | Ligar um ponto a um objeto e movê-lo sobre o mesmo |
| Testar arrastando | Mover pontos arrastáveis ou semi-arrastáveis para ver se o desenho mantém as propriedades iniciais. Se sim, então a figura passa no teste; se não, o desenho não foi construído de acordo com as propriedades geométricas que você gostaria que ele tivesse |

Fonte: Arzarello *et al.* (2002, p. 67)

Os três primeiros tipos de arrastar citados pelos autores aparecem com maior frequência em atividades exploratórias, em que os alunos arrastam na busca por regularidades. O arrastar por um lugar geométrico evidencia o início de uma abstração, pois alguma relação, propriedade ou invariância é percebida pelo aluno, já o arrastar por uma linha explicita o tipo anterior por fazer construções sobre o caminho tomado. No GeoGebra, com o recurso do rastro é possível observar essa linha, porém não interagir, uma vez que os pontos apresentados na tela não são construções, apenas desenhos. A Figura 02 ilustra essa função com o arrastar de um segmento em torno de um eixo. O arrastar ligado e o testar arrastando, por sua vez, costumam ser utilizados para testar conjecturas sobre objetos construídos segundo alguma propriedade (ARZARELLO *et al.*, 2002).

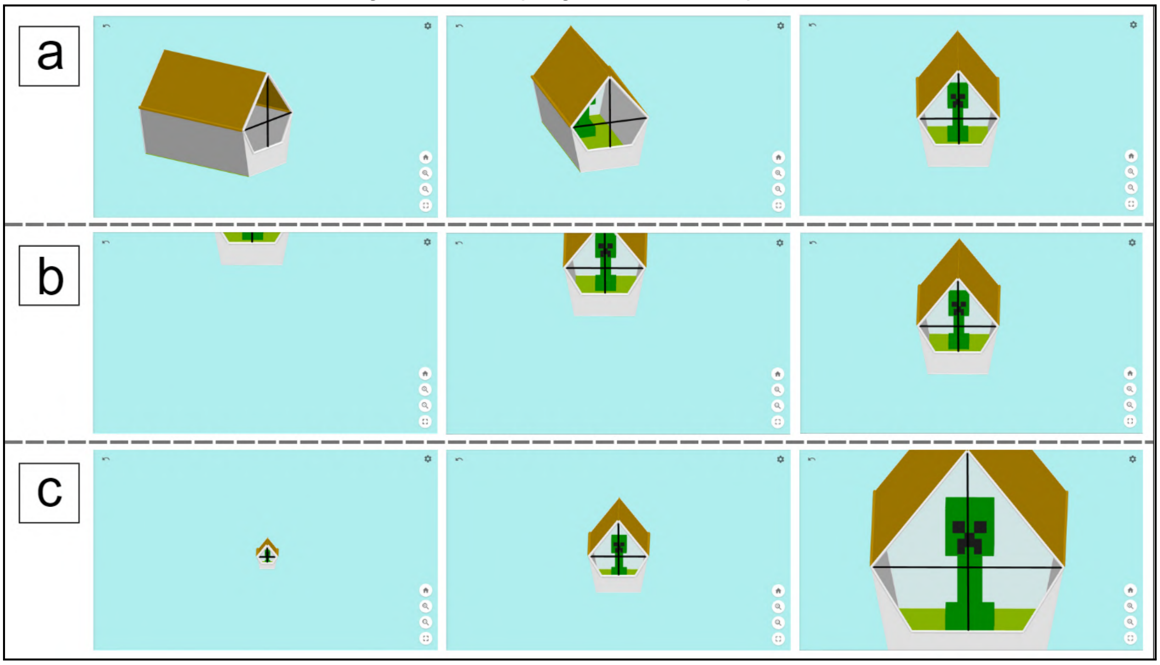
Figura 02 - A função do rastro no GeoGebra



Fonte: Produção do pesquisador

Com softwares de MD que permitem exibição tridimensional, acrescentamos outra funcionalidade do arrastar que não aparece no quadro de Arzarello *et al.* (2002), o arrastar para observar. Nos referimos ao potencial do arrastar para alterar a exibição dos objetos na tela, que pode ser interpretado como uma mudança no referencial do observador ou das posições das dos elementos virtuais. A Figura 03 apresenta o emprego do arrastar para observar: em Figura 03 (a) ele é utilizado para rotacionar os objetos e é empregado pelos botões do mouse, do *touchpad* ou pela ferramenta Girar Janela de Visualização 3D; em Figura 03 (b) ele é utilizado para transladar os objetos que pode ser feito pela ferramenta Mover Janela de Visualização; e em Figura 03 (c) é utilizado para ampliar os objetos, mas também poderia ser para reduzir seu tamanho, e é empregado pelo *touchpad* ao tocar e arrastar com dois dedos.

Figura 03 - Empregos do arrastar para observar




Fonte: Produção do pesquisador

Este modo de arrastar é importante por permitir ao observador tornar visíveis ou destacar elementos de interesse que podem ser melhor observados quando os objetos exibidos na tela do aparelho são posicionados em uma nova configuração, o que também é de grande proveito para o desenvolvimento de habilidades de visualização e o pensamento espacial. Na seção a seguir abordaremos a visualização espacial, seus elementos constituintes e possíveis contribuições dos softwares de MD para o desenvolvimento desse tipo de pensamento.

### 2.1.2. Visualização Espacial

Para se resolver um problema matemático é necessário, antes de tudo, interpretar e gerir as informações dadas. Muitas vezes, essas informações são visuais, relativas a figuras ou imagens apresentadas nos problemas, ou podem ser organizadas por esquemas espaciais e geométricos e, neste caso, o tipo do raciocínio que se faz necessário é visual (MORA; GUTIÉRREZ, 2021). Ao longo da década de 1990, Gutiérrez (1992, 1996) buscou sistematizar diferentes conceitos que autores da época empregavam em suas pesquisas acerca da visualização, de modo a construir um quadro teórico completo para futuros trabalhos em torno desse tema.

Como resultado desse esforço, Gutiérrez (1996, p. 9) define a visualização no contexto da matemática como “o tipo de atividade de pensamento baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, realizada para resolver problemas ou provar propriedades”. O autor também considera que termos como raciocínio espacial, pensamento visual e visualização espacial, no contexto da matemática, se tratam de conceitos muito semelhantes e os toma como sinônimos para fazer menção “ao uso de elementos, habilidades ou competências, vocabulário e gestos que tenham a ver com características de conceitos matemáticos que são percebidos pela visão” (Gutiérrez, 2018, p. 165). Apesar da predisposição da relação entre visualização e visão, um dos cinco sentidos, alguns autores, incluindo Gutiérrez (1996), ressaltam que não necessariamente o termo visual remete ao ato de ver o que está diante dos olhos, que ele pode estar relacionado a propriedades mentais e percepções de relações espaciais (SANTOS, 2014).

Conforme Gutiérrez *et al.* (2018), dois tipos de elementos se fazem presentes na visualização: externos e internos. Os elementos externos são principalmente objetos, como imagens ou modelos geométricos, e informações verbais, sejam elas escritas ou orais. Já os elementos internos são elementos visuais, conceituados como imagens mentais. A comunicação entre estes elementos ocorre por meio de processos de visualização e do emprego de várias habilidades de visualização. Desse modo, Gutiérrez (1996) aponta os quatro elementos que constituem a visualização: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização.

Destes, o autor considera as imagens mentais como os elementos bases da visualização. Uma imagem mental, segundo o autor, é “qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou uma propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais” (GUTIÉRREZ, p. 9). Tais representações não necessariamente possuem uma base pictórica, visto que muitas das imagens mentais utilizadas na matemática são baseadas em diagramas, tabelas, gráficos e outros elementos simbólicos (MORA, GUTIÉRREZ, 2021). As representações externas pertinentes à visualização, por sua vez, são definidas por Gutiérrez (1996, p. 9-10) como “quaisquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo imagens, desenhos, diagramas, etc. que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e a conceber o raciocínio visual”. Tais representações também constituem o principal produto da atividade dos alunos ao resolverem problemas de visualização e, portanto, é sobre elas que os pesquisadores e professores fundamentam suas análises.

Na visualização, imagens mentais e representações externas interagem segundo processos de visualização (Gutiérrez, 1996), os quais são ações físicas ou mentais que concebem este raciocínio. Na década de 1980, Bishop (1983) conceituou os dois processos que ocorrem na visualização, apesar de se referir a eles como habilidades. O primeiro deles é o processamento visual (VP) que, de acordo com o autor, "envolve as ideias de visualização, de tradução de relações abstratas e dados não figurais em termos visuais, a manipulação e extrapolação de imagens visuais, e a transformação de uma imagem visual em outra”. O outro processo é a interpretação figural da informação (IFI), o qual “envolve o conhecimento das convenções visuais e do ‘vocabulário’ espacial usado em trabalhos geométricos, gráficos, tabelas e diagramas de todos os tipos” (BISHOP, 1983, p. 177). É um processo que trata do conteúdo e do contexto, pela “leitura” e interpretação das imagens visuais, sejam mentais ou externas.

Gutiérrez (1996, p. 10), ao sistematizar o trabalho de Bishop (1983) com os de outros autores, define os dois processos como a "interpretação visual da informação", correspondente ao VP, utilizado para criar imagens mentais, e a "interpretação de imagens mentais", semelhante ao IFI, da qual destaca três subprocessos: a observação e análise de imagens mentais, a transformação de imagens mentais em outras imagens mentais, e a transformação de imagens mentais em outros tipos de informação.

Ao elaborar sobre a capacidade subjetiva de visualizar, Bishop (1983) ressalta outro fator importante: o conhecimento do contexto do problema e sua representação. Para ilustrar, o autor relata uma experiência que vivenciou na década de 1970, na Papua Nova Guiné. Ao propor atividades que buscavam desenvolver a capacidade de processamento visual dos estudantes locais, o autor identificou que obstáculos culturais impediam os alunos de resolver corretamente, que a falta de contato com os objetos representados nas atividades, ou as convenções da sua representação, os impedia de interpretar e criar imagens mentais satisfatórias. No entanto, ao utilizar objetos do seu cotidiano, os alunos tiveram um desempenho melhor nos testes. Desse modo, o autor afirma que, em alguns casos, o verdadeiro problema está na falta de familiaridade com as muitas convenções espaciais e visuais usadas nos testes (BISHOP, 1983).

Se por um lado a falta de conhecimento de um objeto pelo contexto apresentado configura um empecilho à visualização, por outro, um contexto que faz menção ao “mundo real” pode dar diferentes significados a um conceito matemático. A isso, Santos (2014, p. 35-36) atribui a expressão “visualização contextualizada”, que pode ser melhor compreendida por meio de um exemplo trazido pela autora:

> Quando argumentamos que um lado do triângulo é uma base, estamos fazendo referência ao mundo real. Da mesma forma, se dissermos que um triângulo que está apoiado no vértice vai cair, estamos novamente fazendo referência ao mundo real-físico, ele pode cair pela ação da gravidade, pela posição em que está, etc. Tender a cair não é uma propriedade do triângulo, é uma propriedade do triângulo por estar “neste local” e “nesta posição”.

Além dos processos de visualização, Gutiérrez (1996) descreve que na visualização ocorre o emprego de diferentes habilidades espaciais, ou habilidades de visualização, as quais precisam ser adquiridas e desenvolvidas para serem mobilizadas durante os processos mentais necessários a cada problema. Essas habilidades podem ser de natureza psico-fisiológicas, como a coordenação motora dos olhos, ou intelectuais, como a memória visual. O Quadro 02 apresenta as habilidades de visualização que Gutiérrez (1992, 1996) sistematiza e que considera necessárias para a visualização na matemática.

Quadro 02 - Habilidades de visualização

| Habilidade Espacial | Exemplo de situação em que é empregada |
|---|---|
| Coordenação Motora dos Olhos | Habilidade de acompanhar com os olhos o movimento de um objeto de forma ágil e eficaz |
| Identificação Visual | Habilidade de reconhecer uma figura isolando-a de seu contexto |
| Conservação da Percepção | Habilidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) independem de tamanho, cor, textura ou posição, mesmo que deixe de ser visto total ou parcialmente, por exemplo, por ter sido girado ou ocultado; e de não se confundir quando observando um objeto ou figura por diferentes orientações |
| Reconhecimento de Posições Espaciais | Habilidade de relacionar a posição de um objeto com si mesmo (o observador) ou com outro objeto, que atua como um ponto de referência |
| Reconhecimento de Relações Espaciais | Habilidade que permite identificar corretamente as características de relações entre diversos objetos situados no espaço ou consigo mesmo (observador) |
| Discriminação Visual | Habilidade que permite comparar vários objetos, figuras e/ou imagens mentais identificando suas semelhanças e diferenças |

| | |
|---|---|
| Memória Visual | Habilidade de recordar características visuais e posicionais que tinham em um momento dado um conjunto de objetos que estavam à vista mas que já não se veem ou que tenham sido mudados de posição |
| Rotação Mental | Habilidade de produzir imagens mentais dinâmicas e visualizar uma configuração em movimento |

Fonte: Gutiérrez (1992; 1996)

Quanto ao uso das habilidades de visualização durante a resolução de um problema de matemática, Mora e Gutiérrez (2021) apontam que seu emprego não garante a resolução correta, mas o não emprego das habilidades certamente leva ao erro. Os autores observaram durante a realização de um experimento prático que muitos alunos utilizam as habilidades necessárias para a resolução de certo problema, mas, por não terem domínio dessas habilidades, não conseguem resolvê-lo com êxito.

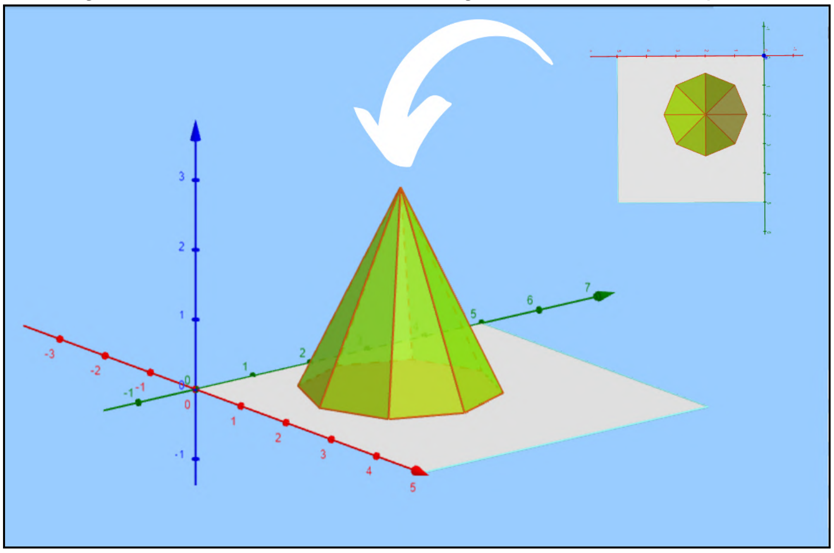
De acordo com Gutiérrez (1996), não é trivial estimar o quão bem os alunos são capazes de visualizar, pois suas imagens mentais são percebidas somente através de representações externas e, no entanto, não é recomendado que se pergunte aos alunos para descreverem seu raciocínio durante a resolução de um problema, pois estes podem não estar cientes das suas próprias imagens mentais ou, se estiverem, o diálogo certamente distorce a linha de pensamento. Segundo o autor, os processos de visualização, por sua vez, também não providenciam informações relevantes quanto ao comportamento dos estudantes e seus conceitos geométricos mentais, pois ocorrem continuamente durante a resolução de um problema.

De uma perspectiva metodológica, as habilidades espaciais, por serem mais perceptivas nas representações externas, constituem o material de análise das pesquisas em torno da visualização na matemática (GUTIÉRREZ *et al.*, 2018). Dessa forma, expressões gráficas como respostas escritas, esquemas e desenhos são utilizados para analisar o raciocínio visual e alcance matemático de crianças (GUTIÉRREZ, 2018), contudo, por não estarem acostumadas com a prática de registrar seu raciocínio, muitas vezes se faz necessária a complementação da representação gráfica pela verbal, que se dá por meio de entrevistas (MORA, GUTIÉRREZ, 2021). Com o advento das tecnologias digitais, as construções em softwares de MD como GeoGebra passam a constituir outro material de análise, um recurso ao qual se pode acessar e acompanhar o desenvolvimento das ações do aluno frente a um problema, dado ao encadeamento dos objetos construídos segundo sua ordem de construção.

Gutiérrez (1996) reforça a potencialidade dos computadores no auxílio da aquisição e no desenvolvimento de habilidades de visualização no contexto da geometria espacial. O autor explica que ao manusear um sólido real fazendo rotações do objeto, o movimento realizado é tão natural, rápido e inconsciente, que há pouca reflexão sobre essa ação, por outro lado, em softwares nos quais os movimentos são limitados, é necessário elaborar estratégias de movimento e antecipar as possíveis ações. O uso de softwares de MD, como apresentado na seção anterior, apresenta várias vantagens no estudo da geometria, e o mesmo se aplica ao desenvolvimento da visualização. A precisão das construções e a possibilidade de explorá-las de diferentes pontos de referência são algumas das vantagens mais evidentes desses softwares que apresentam um grande potencial visualizador. A natureza dinâmica das construções realizadas nestes softwares também confere novos estímulos à criação de imagens mentais dos objetos ali representados.

Nesse sentido, o autor escreve que, com softwares de MD, alunos podem observar poliedros e outros sólidos em diferentes posições, muitas mais que nos livros didáticos. Como consequência, terão mais propriedade para a criação de imagens mentais dinâmicas, mais ricas em significado, e a compreensão de que uma representação estática corresponde apenas a uma dentre um “continuum” de imagens atribuídas a certo objeto observado (GUTIÉRREZ, 1996). A título de ilustração, o autor traz que um aluno que teve contato apenas com representações estáticas em recursos impressos provavelmente teria mais dificuldade em interpretar uma vista superior de uma pirâmide, como a da Figura 04, do que um aluno que explorou materiais em softwares de MD, devido às limitações das representações nos recursos físicos e ao número reduzido de representações disponíveis nestes recursos.

Figura 04 - Pirâmide de base octogonal e uma vista superior



Fonte: Produção do pesquisador

Ainda assim, Gutiérrez (1996) aponta que, como as imagens de um livro, algumas das construções apresentadas na tela do computador são representações planas de objetos espaciais e, portanto, algumas das dificuldades que os alunos encontram ao resolverem problemas de visualização com recursos físicos também são percebidas em ambientes computacionais. Esse problema pode ser contornado por uma das ferramentas que o GeoGebra possui, a realidade aumentada (RA), disponível na versão do software para dispositivos móveis desde 2013 (OLIVEIRA, 2021). A Figura 05 ilustra o uso da ferramenta de RA do GeoGebra com a sobreposição de elementos construídos no software (uma pirâmide, um cone e uma escadaria em espiral) sobre as imagens capturadas pela câmera do celular do pesquisador.

Figura 05 - Construções do GeoGebra em RA

Fonte: Produção do pesquisador

De acordo com Andrade (2017, p. 23), a RA é “uma técnica avançada de interface computacional que permite a sobreposição de objetos virtuais sobre uma imagem do mundo real”, que ocorre de forma fluida e aparentemente instantânea dando a impressão de coexistência de elementos de diferentes realidades. Na matemática, Oliveira (2021) aponta para o uso da RA como uma ferramenta que possibilita aos alunos visualizar formas tridimensionais virtuais no ambiente que se encontram, até mesmo podendo interagir com essas formas tocando na tela do dispositivo que utilizam. Apesar de ainda ser pouco utilizada em salas de aula, cada vez mais se tem percebido os benefícios de seu uso na educação, em especial ao promover a “exploração, descoberta, observação e construção de novo conhecimento” (ANDRADE, 2017, p. 27) acerca do objeto em estudo.

Reconhecendo as potencialidades dos softwares de MD e da RA para a aquisição e desenvolvimento de habilidades de visualização, utilizamos os conceitos neste capítulo apresentados para fundamentar a presente pesquisa. Na próxima seção passaremos a relatar uma das etapas iniciais da pesquisa, que teve caráter exploratório e foi fundamental para a delimitação da problemática.

## 2.2. TRABALHOS CORRELATOS

Com o intuito de explorar o perfil das pesquisas já realizadas em torno do tema de nossa investigação, realizamos buscas por trabalhos correlatos em duas plataformas digitais, o Google Acadêmico[4] e o Lume[5], repositório digital da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Os termos utilizados nas primeiras buscas por monografias, dissertações e artigos foram “GeoGebra”, “realidade aumentada”, “projeção ortogonal”, “geometria descritiva” e “perspectiva”. Dentre os primeiros resultados, encontravam-se dois trabalhos sobre geometria descritiva, uma monografia datada de 2010, escrita por uma graduanda em Matemática pela UFRGS, e uma dissertação de 2016, elaborada por uma mestranda em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), os quais não são descritos neste texto, visto que o foco de nossa pesquisa foi se direcionando ao uso do GeoGebra e sua ferramenta de realidade aumentada, tecnologias que não estavam presentes nos trabalhos citados.

Em pesquisas posteriores não utilizamos os termos “geometria descritiva” e “perspectiva”. Dos trabalhos consultados, selecionamos cinco que, semelhante ao que propomos em nossa pesquisa, utilizaram o GeoGebra em seus experimentos práticos. Abaixo apresentamos o Quadro 03, o qual sintetiza algumas informações dos trabalhos que passaremos a detalhar, a saber, os autores do texto, o título, a instituição a que pertencem os autores e o ano da publicação.

Quadro 03 - Trabalhos correlatos selecionados

| Autor(es) | Título | Instituição | Ano |
|---|---|---|---|
| Lucas Siviero Sibemberg | GeoGebra 3D no Ensino Médio: uma Possibilidade Para a Aprendizagem de Projeção Ortogonal | Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) | 2019 |
| Odailson Gonçalves de Oliveira | O Uso do GeoGebra 3D com Realidade Aumentada no Ensino de Geometria Espacial | Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) | 2021 |
| Renata Teófilo de Sousa, Italândia Ferreira de Azevedo e Francisco Régis Vieira Alves | O GeoGebra 3D no Estudo de Projeções Ortogonais Amparado Pela Teoria das Situações Didáticas | Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE) | 2021 |
| Camilo Sua Flórez, Ángel Gutiérrez Rodríguez e Adela Jaime | Análisis de una Actividad de Visualización en un Entorno de Geometría Dinámica 3D y Realidad Aumentada: Alineando Puntos en el Espacio | Universidade de Valência (UV) | 2021 |
| Thiago Ossamu Uchiumi | A Visão de Estudantes sobre Formas Geométricas: uma Abordagem Via Fotografias e GeoGebra | Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) | 2021 |

Fonte: Produção do pesquisador

[4] https://scholar.google.com.br/
[5] https://lume.ufrgs.br/

Por sugestão da orientadora, iniciamos a busca por um trabalho que havia orientado em 2019 e que em muito se assemelhava ao que pretendíamos realizar. Este trabalho relata uma pesquisa realizada por Sibemberg (2019) que teve como pergunta de que modo o software GeoGebra 3D poderia potencializar a compreensão da projeção ortogonal e que contou com uma oficina de sete encontros com alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola estadual de Porto Alegre. As atividades envolveram: construção de poliedros, exploração de vistas, projeções ortogonais de pontos e segmentos no espaço cartesiano e resolução de questões do ENEM. Para responder a sua pergunta, Sibemberg referenciou Gutiérrez e as habilidades espaciais e analisou os dados produzidos durante as práticas em forma de gravações de áudio, fotografias, anotações no caderno de campo e produções dos alunos. O autor destacou a dinamicidade do software, que possibilitou explorar simultaneamente as representações bi e tridimensional das construções dos alunos e, no entanto, considerou que o uso frequente do computador tenha sido maçante para os alunos e que a interpretação de projeções ortogonais poderia ter sido mais enfatizada durante a oficina. Em nossa pesquisa também averiguamos a mobilização das habilidades espaciais por parte dos alunos ao explorarem atividades de projeção ortogonal com o software GeoGebra e atentamos às reflexões do pesquisador sobre suas práticas para melhor elaborar as atividades que foram propostas aos alunos durante o experimento prático.

Nesta mesma perspectiva, Sousa, Azevedo e Alves (2021) investigaram como o software GeoGebra 3D contribui para a compreensão de uma questão de ENEM envolvendo projeção ortogonal. Os autores fizeram uso da versão do software em aparelhos celulares como recurso para a transposição didática frente à emergência das aulas remotas, e propuseram uma situação didática na qual os alunos construíram e conjecturaram acerca do problema apresentado. A partir dos depoimentos dos alunos, que apontaram o GeoGebra 3D como facilitador da aprendizagem, os autores concluíram que sua proposta contribuiu para a compreensão da questão. Em nossa pesquisa também propomos atividades que utilizaram o GeoGebra em sua versão para dispositivos móveis, mas com a pretensão de utilizar a ferramenta de RA.

Na pesquisa que realizou em vistas de elaborar seu trabalho de conclusão de curso, Uchiumi (2021) também propôs que os alunos utilizassem aparelhos celulares. Buscando responder à pergunta "como o uso do GeoGebra pode potencializar a aprendizagem de formas geométricas com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental?", o pesquisador propôs uma sequência didática com alunos de uma escola estadual de Gravataí, cidade da região metropolitana de Porto Alegre, e analisou os hábitos de pensamento desses alunos, atividades mentais que envolvem fazer conjecturas, reconhecer padrões, descrever relações e processos, ao interagirem com o software durante as atividades. O GeoGebra foi utilizado em sua versão online, nos três computadores da biblioteca da escola, e na lousa digital da sala multimídia, na qual os alunos inseriram fotografias da escola para construir figuras geométricas sobre as mesmas. Em suas conclusões, Uchiumi considerou que o software contribuiu para a visualização, criação e testagem de conjecturas acerca do conteúdo explorado. Além da já mencionada pretensão de utilizar a RA com os aparelhos celulares dos alunos, realizamos uma atividade em que os alunos inseriram imagens no GeoGebra para construir sobre elas, de modo similar ao que Uchiumi realizou em sua pesquisa.

Por sua vez, o artigo de Sua, Gutiérrez e Jaime (2021) traz uma proposta que faz uso da realidade aumentada. Com alunos do ensino superior da Universidade de Valência realizaram duas atividades, uma das quais descrevem no texto. O objetivo da atividade era alinhar pontos no espaço, fazendo uso da matemática dinâmica e da RA com o GeoGebra em dispositivos móveis. Os autores gravaram as interações dos alunos com o ambiente utilizando uma câmera fixa na sala e as interações dos alunos com o software utilizando a gravação de tela dos próprios dispositivos. Em sua análise, identificaram seis estratégias utilizadas pelos alunos, dentre elas, alinhar os pontos tomando uma referência externa como os frisos do piso da sala de aula, e escolher um ponto e posicionar os demais atrás deste. Além da manipulação dos pontos, os alunos deveriam justificar oralmente porque os pontos estavam alinhados, e com base nessas justificativas os autores fizeram a análise da compreensão dos alunos ao criarem imagens mentais tridimensionais a partir de representações bidimensionais. Reconhecendo o potencial dessa atividade, nos inspiramos para propor uma atividade semelhante, na qual os alunos utilizaram a RA e justificaram a solução do problema proposto oralmente.

Por fim, outra pesquisa que fez uso da RA com o software GeoGebra foi a realizada por Oliveira (2021) em seu mestrado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), que teve como objetivo geral “investigar as contribuições do uso do aplicativo Calculadora Gráfica GeoGebra 3D, com RA, para o estudo de conceitos e propriedades relacionadas a prismas, pirâmides e corpos redondos, e cálculo de volume desses sólidos”. Para tanto, foram realizados quatro encontros remotos com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática nos quais os alunos fizeram construções seguindo estudos dirigidos elaborados para cada conteúdo abordado e enviaram capturas de tela de seus dispositivos ao longo da prática. Também responderam questionários antes e depois das práticas de cada encontro, fazendo uso opcional da RA para investigar as propriedades dos sólidos construídos e, então, julgar as afirmativas nos questionários. Não elaboramos questionários para averiguar a compreensão do conteúdo de projeção ortogonal, demos ênfase ao desenvolvimento das atividades pela análise dos materiais produzidos pelos alunos, contudo, assim como o pesquisador, adotamos a abordagem dos estudos dirigidos para as atividades propostas no GeoGebra.

Com base nas propostas descritas dos trabalhos acima apresentados e nos referenciais teóricos adotados, explanados na seção anterior, elaboramos a pesquisa relatada neste texto. Passaremos agora a descrever seus aspectos metodológicos e as atividades que propusemos.

# 3. METODOLOGIA

Com o objetivo de identificar como o software de matemática dinâmica GeoGebra pode contribuir para o desenvolvimento da visualização espacial realizamos uma pesquisa na qual os participantes realizaram construções no software e exploraram o conteúdo de projeção ortogonal. Neste capítulo, descreveremos a natureza desta pesquisa, o contexto em que ela se deu e os dados produzidos. Na sequência, apresentamos as atividades do experimento prático que ocorreram ao longo da investigação, desde seu planejamento até as adaptações necessárias.

## 3.1. PESQUISA QUALITATIVA

Concebemos nossa investigação como uma pesquisa qualitativa, por apresentar aspectos considerados por Bogdan e Biklen (1994) como característicos de uma pesquisa desta natureza. Segundo os autores, uma pesquisa qualitativa pode ser identificada por cinco aspectos: 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; 2. A investigação qualitativa é descritiva; 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Uma vez que nossa pesquisa não buscou identificar um produto final, mas sim evidências de um processo cognitivo realizado pelos alunos ao resolverem problemas e fazerem construções geométricas em um software de MD, optamos por analisar dados de natureza qualitativa. Assim, os dados que foram produzidos e analisados nesta investigação são compostos por fotografias das telas dos aparelhos utilizados pelos alunos, por anotações no caderno de campo do pesquisador, gravações de áudios das intervenções realizadas junto aos grupos de alunos e entregas dos alunos na forma de registros escritos, capturas de tela e arquivos com extensão “.ggb”, formato padrão dos arquivos criados no GeoGebra.

A sistematização de diferentes dados, ou triangulação de dados, de acordo com Araújo e Borba (2019), contribui para aumentar a credibilidade de uma pesquisa, isto é, a plausibilidade dos resultados e das interpretações do pesquisador. As abstrações são feitas a partir do conjunto dos dados produzidos com a análise de narrativas que busca continuamente questionar os sujeitos da investigação, preferencialmente respeitando a forma em que os dados foram registrados ou transcritos (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Em nossa pesquisa, a produção dos dados com diferentes registros foi pensada com o intuito de melhor descrever as ações, produções e manifestações dos alunos, para que a análise realizada posteriormente fosse melhor fundamentada.

## 3.2. CONTEXTO DO EXPERIMENTO PRÁTICO

O experimento prático, no qual foram produzidos os dados analisados nesta pesquisa, deu-se no contexto do estágio obrigatório no Ensino Fundamental do pesquisador, em que este assumiu a regência das aulas de matemática de uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental, no período de junho a agosto de 2023. A escola onde o estágio foi realizado localiza-se na região central de Porto Alegre e pertence à rede pública estadual, com oferta de turmas do Ensino Fundamental no turno da manhã e turmas do Ensino Médio na modalidade EJA no turno da noite. A escolha por essa escola deu-se pelo contato que o pesquisador tinha com a mesma desde o início do ano letivo, por atuar como bolsista no programa Laboratório de Matemática em Escolas Públicas e realizar atividades no laboratório de matemática da escola junto às turmas do Ensino Fundamental. Além disso, a escola contava com a infraestrutura necessária para a realização das atividades do experimento prático, isto é, um laboratório de informática (Figura 06) com *chromebooks* suficientes para os vinte e sete alunos da turma e acesso à internet. O consentimento da realização da pesquisa foi conferido pela assinatura do termo de consentimento da escola (Apêndice A) no período anterior ao experimento prático.

Figura 06 - O laboratório de informática

Fonte: Produção do pesquisador

Embora o laboratório de informática tenha sido o local em que se deu a maior parte do experimento prático, o laboratório de matemática da escola também foi utilizado, e, dele, os modelos de sólidos geométricos em acrílico, materiais para realização das atividades de desenho e o projetor. E, ainda que não tenham sido analisadas nesta pesquisa, cabe apontar que entre os dias das aulas nos laboratórios ocorreram aulas expositivas na sala de aula da turma, referentes a outros conteúdos de geometria, devido a três motivos: o laboratório estava reservado nos períodos do estágio por outros professores, o deslocamento e a organização dos aparelhos tomavam muito tempo das aulas de um período, e levando em conta o apontado por Sibemberg (2019) quanto ao enfado dos alunos após uma sequência longa de aulas no laboratório.

Em seguida neste capítulo, descreveremos as atividades e os encontros planejados, bem como as adaptações que se fizeram necessárias.

## 3.3. ENCONTROS E ATIVIDADES

Ao iniciarmos o planejamento do experimento prático, algumas decisões foram prontamente tomadas, como a de realizar atividades de construção no GeoGebra, evidentemente, pelos objetivos da pesquisa. Além disso, considerando que os alunos poderiam desconhecer o software e/ou não estar acostumados a frequentar o laboratório de informática, planejamos uma aula introdutória na qual algumas ferramentas de construção seriam apresentadas aos alunos. Em seguida, decidimos abordar a projeção ortogonal nas aulas do experimento, por seu potencial no desenvolvimento da visualização espacial dos alunos, reconhecida nos trabalhos correlatos e na vivência acadêmica do pesquisador. Assim, planejamos realizar uma aula, anterior às atividades com o GeoGebra, para introduzir a projeção ortogonal e outra, após as atividades, para que os alunos pudessem se manifestar sobre elas. Além disso, a utilização da ferramenta de RA em algumas das atividades também foi um elemento discutido durante o planejamento.

Muitas propostas de atividades foram consideradas durante essa etapa da pesquisa e vários materiais chegaram a ser preparados, mas não foram utilizados em função das circunstâncias do trabalho. Após discutirmos o cronograma do experimento prático, enfim montamos um quadro programático com seis encontros, organizados como mostrado no Quadro 04, que seriam realizados dentro do prazo máximo de cinco semanas.

Quadro 04 - Cronograma do experimento prático

| Encontro | Duração | Descrição/Atividade |
|---|---|---|
| Introdução ao GeoGebra | 2 períodos | Primeiro contato com o software: atividades de construção de retas, de arrastar ponto, de medições de triângulos para determinar a congruência, e uma atividade com RA |
| Conhecendo a Projeção Ortogonal | 2 períodos | Aula expositiva com conceituação, história e aplicações da projeção ortogonal em diferentes contextos; atividade com RA e desenhos em papel |
| Atividade I - Topografia | 1 período | Construção da projeção ortogonal de um sólido composto por prismas hexagonais sobre um plano paralelo às bases |
| Atividade II - Cilindro;<br>Atividade III - Arco da Redenção | 2 períodos | Construção das projeções ortogonais de um cilindro em três planos de projeção com o recurso do rastro;<br>construção de segmentos sobre um modelo do arco do Parque Farroupilha |
| Atividade IV - Arte com Projeção Ortogonal | 4 períodos | Construção de segmentos no espaço a partir de uma imagem poligonal bidimensional |
| Retomada | 1 período | Exposição das atividades e produções dos alunos para discussão |

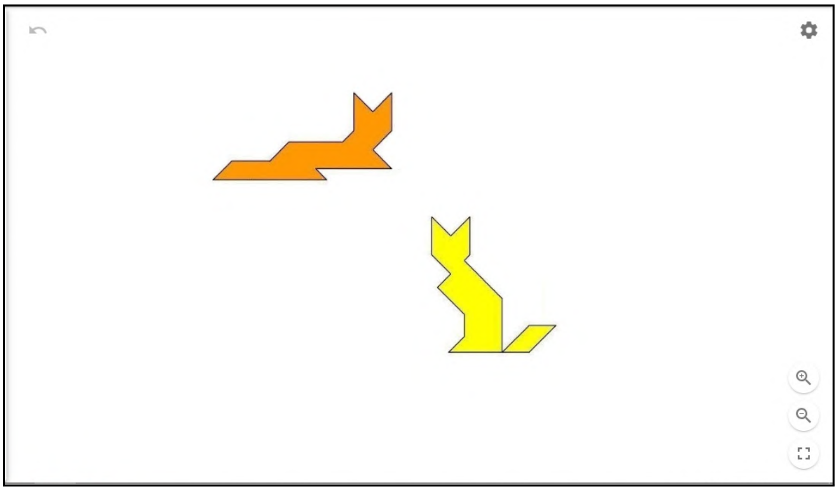
Fonte: Produção do pesquisador

O primeiro encontro, Introdução ao GeoGebra, inicialmente foi planejado como dois encontros em que no primeiro exploraríamos a interface do GeoGebra na versão online e, no segundo, a interface do GeoGebra na versão para dispositivos móveis, fazendo o uso inclusive da ferramenta de RA. Para o primeiro, prepararíamos atividades em que os alunos explorariam e construiriam figuras, sólidos geométricos, pontos e retas no plano e no espaço e iriam averiguar suas posições no sistema cartesiano e posições relativas dados dois elementos. Já no segundo, utilizando a ferramenta de RA com a câmera do celular, os alunos fariam construções tomando como referência algum objeto da escola e depois o decomporiam utilizando novamente a versão online do software. Contudo, ao iniciar o estágio, o pesquisador percebeu certa defasagem no estudo de Geometria da turma, e que as atividades precisariam ser concentradas apenas nos conteúdos que o pesquisador abordara nas aulas anteriores às idas ao laboratório.

Desse modo, dos dois encontros fez-se um, que contava três atividades: a primeira, uma atividade de construção de retas paralelas, concorrentes e perpendiculares sobre uma dada imagem; a segunda, uma atividade de arrastar controles deslizantes para observar na tela diferentes tipos de triângulos; e a terceira, uma atividade de medição de segmentos e ângulos para averiguar congruência de triângulos.

Com a primeira atividade de construção de retas (Figura 07), esperávamos que os alunos demonstrassem a compreensão de que um segmento de reta pertence a uma reta e, portanto, uma reta poderia ser construída sobre o segmento. Além disso, buscávamos introduzir as ferramentas de reta paralela e reta perpendicular do GeoGebra, para que tivessem um primeiro contato com construções dinâmicas que preservam suas propriedades ao movimentá-las. O enunciado da atividade pedia que os alunos construam sobre os gatos da imagem pelo menos um par de retas paralelas, um par de retas concorrentes e um par de retas perpendiculares.

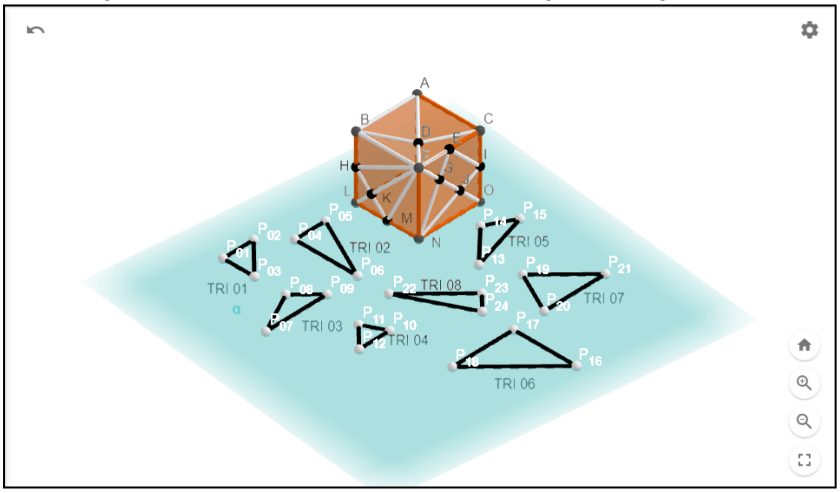
Figura 07 - Atividade de construir retas



Fonte: Produção do pesquisador

Com a segunda atividade buscávamos apresentar outra função do GeoGebra, a do controle deslizante, para apresentar outro modo de conferir movimento às construções. Com o arrastar em três controles deslizantes era possível modificar o tamanho dos lados de um triângulo. A atividade pedia que os alunos apresentassem na tela três tipos de triângulos e fizessem uma captura de tela de cada um. Por sua vez, com a terceira atividade buscávamos introduzir o GeoGebra Calculadora 3D, e as ferramentas de medição de segmentos e de ângulos. Em uma aula anterior os alunos haviam realizado medições com o transferidor e haviam recebido uma folha resumo com os casos de congruência de triângulos. Nessa atividade (Figura 08), com as medições dos ângulos e dos segmentos, os alunos deveriam identificar congruência de dois triângulos do plano com dois triângulos identificados nas faces de um cubo. Pensamos que essa atividade era muito oportuna para identificar a habilidade espacial de identificação visual, pela qual o observador identifica certo objeto abstraindo-o de seu contexto.

Figura 08 - Atividade de identificar triângulos congruentes



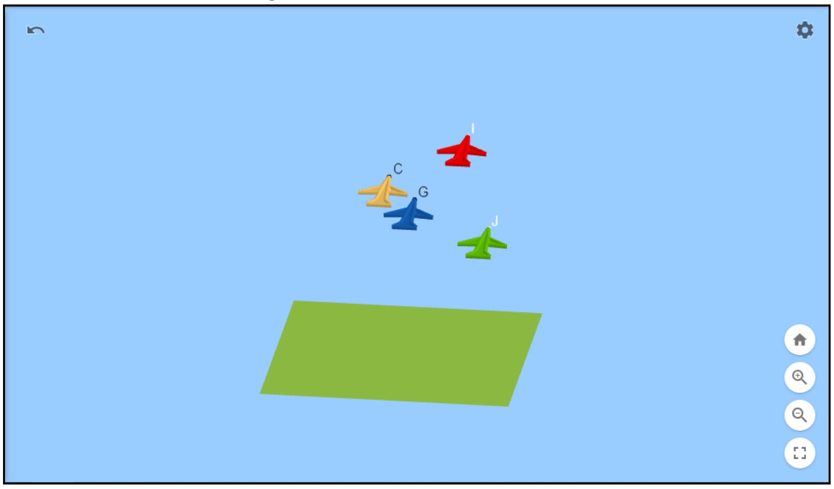

Fonte: Produção do pesquisador

Neste primeiro encontro, os enunciados das atividades foram entregues aos alunos por meio de um formulário eletrônico do Google[6], com campos destinados às entregas dos arquivos de suas construções ou capturas de tela realizadas em cada atividade. Contudo, durante a realização do encontro, constatamos que o acesso ao formulário não era trivial aos alunos e que seu preenchimento apresentava problemas uma vez que todos os *chromebooks* estavam conectados ao e-mail da escola. Por este motivo, nos encontros seguintes os alunos receberam os enunciados das atividades impressos em folhas de ofício e, após cada aula, o pesquisador copiou para seu pendrive as construções dos alunos, salvas nos *chromebooks* no formato .ggb, as atividades I, II e IV, ou .jpg, a atividade III.

O segundo encontro, intitulado Conhecendo a Projeção Ortogonal, foi planejado para ocorrer no laboratório de matemática, pois faz uso do projetor para a apresentação do conteúdo e inicia com uma atividade diferenciada, na qual, os alunos precisam responder à pergunta de qual avião está à frente dos demais com a ferramenta de RA. O arquivo entregue aos alunos contava apenas com os aviões, sem o plano verde da Figura 09, e sem eixos de orientação para que os alunos buscassem um referencial no mundo real, assim como fizeram os participantes da pesquisa de Sua, Gutiérrez e Jaime (2021).

6 https://docs.google.com/forms/

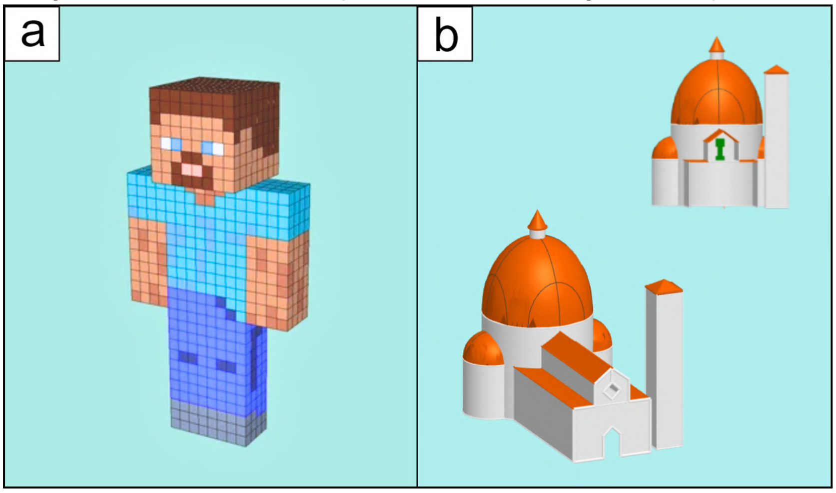
Figura 09 - Atividade com RA



Fonte: Produção do pesquisador

Em seguida, é iniciada a apresentação da projeção ortogonal, que se faz presente implicitamente na resolução da atividade proposta anteriormente. Com a definição da projeção ortogonal apresentamos exemplos de aplicações em diversos contextos - no esporte, na arte, na geografia, na engenharia e na arquitetura. Planejamos também introduzir a geometria descritiva desenvolvida por Gaspard Monge ao final do século XVIII e realizar duas atividades de desenho, em que são solicitadas vistas ortográficas superiores de objetos que aparentam tridimensionalidade: o Steve (Figura 10 (a)), uma personagem do Minecraft, apresentado para a turma com o projetor, e um modelo da catedral de Santa Maria del Fiore, de Florença, Itália, (Figura 10 (b)) construído pelo pesquisador para ser explorado pelos alunos com seus celulares utilizando a ferramenta de RA. Dentro deste modelo, também foi construída outra personagem do Minecraft, para que os alunos a observassem pela janela utilizando a RA. Durante a apresentação, são utilizados materiais do laboratório de matemática, como maquetes para ilustrar as posições relativas entre uma reta e um plano e dados de papel para acompanhar as vistas ortográficas introduzidas com a geometria descritiva, além dos materiais para as atividades de desenho, os lápis de cor e o papel quadriculado. Com essas atividades, buscávamos analisar como os alunos representam as vistas ortogonais dos objetos, apenas utilizando as habilidades espaciais, na primeira, e com o apoio da interação com o material virtual do GeoGebra, na segunda atividade.

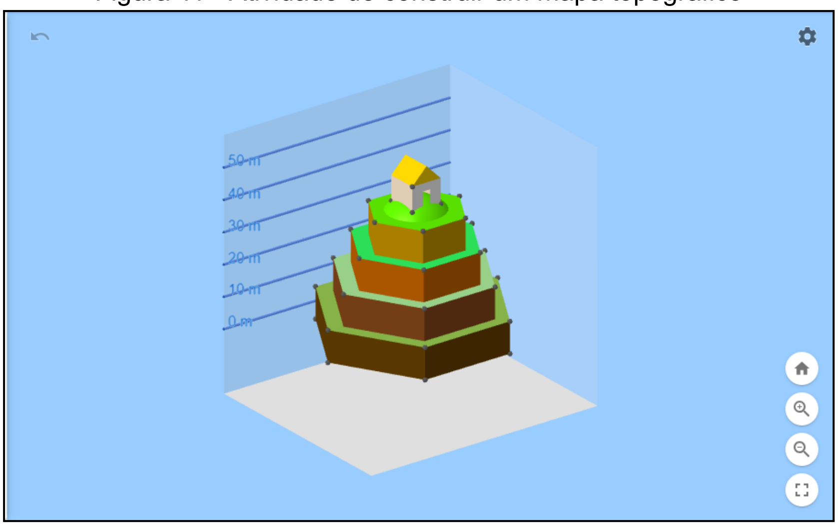
Figura 10 - Atividade de representar vistas ortográficas superiores




Fonte: Produção do pesquisador

O encontro seguinte dá início às construções no GeoGebra utilizando os *chromebooks* do laboratório de informática. A primeira atividade planejada foi sobre a construção de um mapa topográfico de uma colina (Figura 11), semelhante aos exemplos apresentados na aula anterior. Para isso, os alunos precisam projetar ortogonalmente os vértices dos prismas hexagonais que representam cada nível da colina terraceada sobre um plano paralelo às bases dos prismas, para, ligando as projeções dos pontos com segmentos, obter um mapa com curvas de nível. Em seguida, devem interpretar a altitude de cada curva para identificá-las no mapa construído e, por fim, responder qual a altitude da casa que se encontra sobre a colina.

Figura 11 - Atividade de construir um mapa topográfico

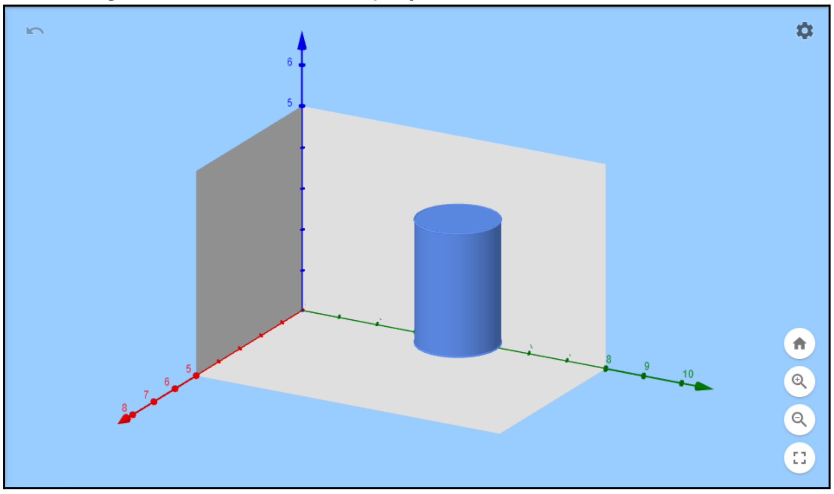



Fonte: Produção do pesquisador

Com essa atividade, esperávamos que os alunos realizassem construções encadeadas segundo as técnicas da projeção ortogonal, movimentassem a tela para conseguir observar e construir com os elementos ocultos ao referencial de observação inicial, e, utilizando habilidades espaciais como o reconhecimento de posições espaciais e o reconhecimento de relações espaciais, interpretassem as informações disponíveis para enriquecer suas construções, e para responder corretamente à pergunta da atividade.

O quarto encontro dá sequência às atividades de construção em ambiente de MD, com duas atividades propostas. A primeira pede que os alunos construam as projeções ortogonais de um cilindro em três planos de projeção (Figura 12) e respondam a três perguntas relativas à discriminação visual deste sólido com base nas suas projeções. Para relembrar os alunos da nomenclatura de alguns sólidos geométricos, nesse encontro também são apresentados alguns modelos em acrílico ao início da aula. As construções no GeoGebra são feitas utilizando o recurso do rastro, uma vez que não há vértices no cilindro para serem feitas construções como na atividade anterior. Para isso, os alunos constroem pontos sobre o cilindro, as projeções desses pontos nos planos do arquivo e, então, permitem a exibição do rastro das projeções. Assim, movendo os pontos sobre o cilindro, constroem simultaneamente as vistas ortográficas nos planos de projeção.

Figura 12 - Atividade de projetar com o recurso do rastro



Fonte: Produção do pesquisador

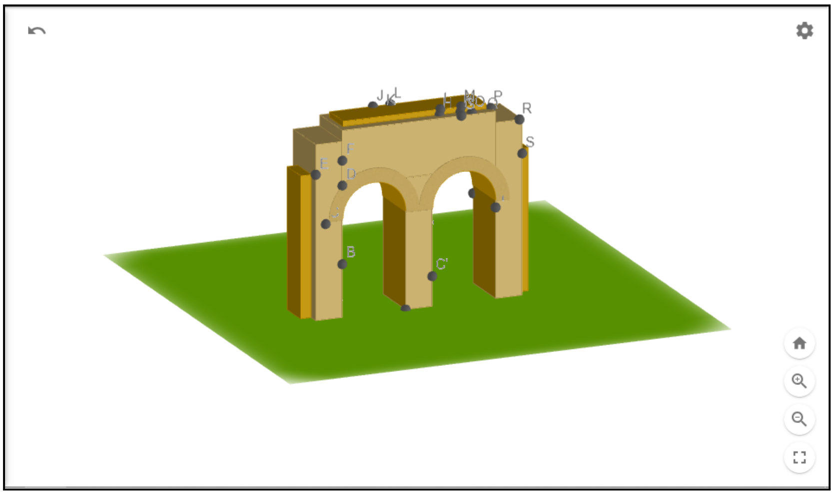
Nesse processo de construção descrito, esperamos identificar vários tipos de arrastar mobilizados: o arrastar vinculado, visto que o ponto é construído sobre o cilindro, limitando o espaço de arrasto à superfície que se encontra; o arrastar vagueando, em um primeiro momento, quando se está apenas movendo o ponto na superfície do cilindro; o arrastar guiado, uma vez que a figura gerada pelo rastro da projeção é identificada e se tem consciência de onde é preciso arrastar o ponto a fim de completá-la; e o arrastar por uma linha, visto que o recurso do rastro evidencia as posições ocupadas pelo ponto projetado, traçando o caminho seguido ao ser movido.

Após realizadas as construções no GeoGebra, os alunos deveriam responder a três perguntas: quais as figuras que as projeções ortogonais do cilindro formam nos planos de projeção? Observando apenas as projeções laterais, é possível concluir que se trata de um cilindro? E qual o número mínimo de projeções necessárias para identificar esse sólido geométrico?[7]. Inicialmente havíamos planejado que os alunos também realizassem as projeções ortogonais de um prisma e de um cone sobre os mesmos três planos, porém, devido ao perfil da turma e o cronograma das atividades, esses dois sólidos foram retirados do arquivo.

A segunda atividade desse encontro propõe que os alunos construam segmentos sobre o arco do Parque Farroupilha, ligando os pontos segundo a ordem alfabética para descobrir uma mensagem (Figura 13). Com essa atividade, esperávamos que os alunos utilizassem as habilidades espaciais de identificação visual e coordenação motora dos olhos, além do arrastar observando a tela para mudar o ponto de referência e conseguir identificar a imagem procurada. Essa atividade também introduz a seguinte, pois explora a ideia de uma posição do observador, que se faz necessária para a visualização correta da imagem.

[7] Na segunda pergunta, consideramos as projeções laterais do cilindro como as projeções ortogonais sobre os dois planos perpendiculares aos planos das bases do cilindro que se encontram no arquivo. Na terceira pergunta, consideramos a identificação do cilindro como a discriminação visual deste em relação aos outros sólidos geométricos apresentados aos alunos na aula.

Figura 13 - Atividade de construção de segmentos

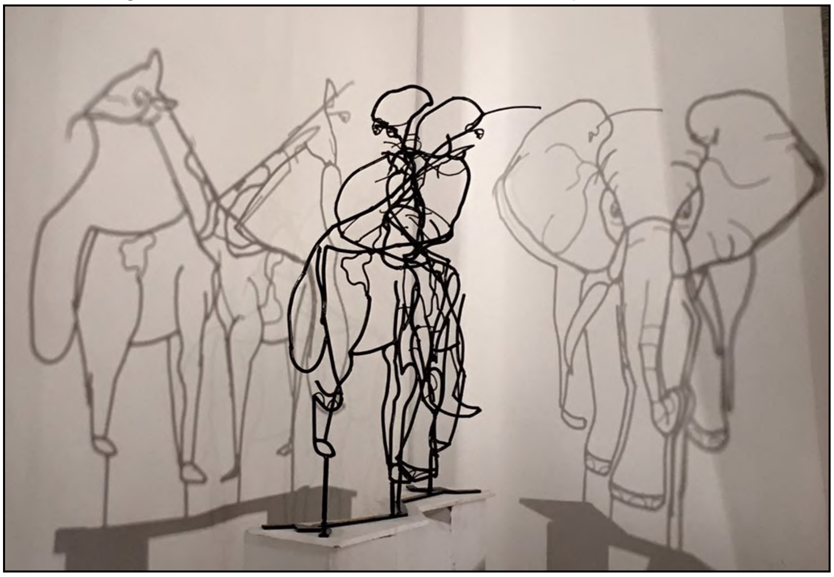


Fonte: Produção do pesquisador

No quinto encontro, planejamos realizar uma das primeiras atividades pensadas para o experimento prático. A ideia surgiu quando o pesquisador encontrou em uma rede social o perfil do artista francês Matthieu Robert-Ortis e, em suas obras anamórficas, encontrou inspiração para uma atividade de projeção ortogonal. As esculturas de arame do artista “brincam” com a perspectiva do observador, que só é capaz de identificar a imagem formada pela escultura ao observá-la de certa posição. A obra Eléphant-Girafes (Figura 14), de 2016, é a mais conhecida e se trata de uma escultura metamórfica, isto é, ao circundar a escultura de arame, o observador identifica uma imagem transformando-se em outra. Na obra mencionada, um elefante dá lugar a duas girafas. Planejamos iniciar este encontro visitando o site do artista[8] para comentar algumas de suas obras.

[8] https://cargocollective.com/matthieu-robert-ortis

Figura 14 - A escultura metamórfica Eléphant-Girafes



Fonte: Leona Creo[9]

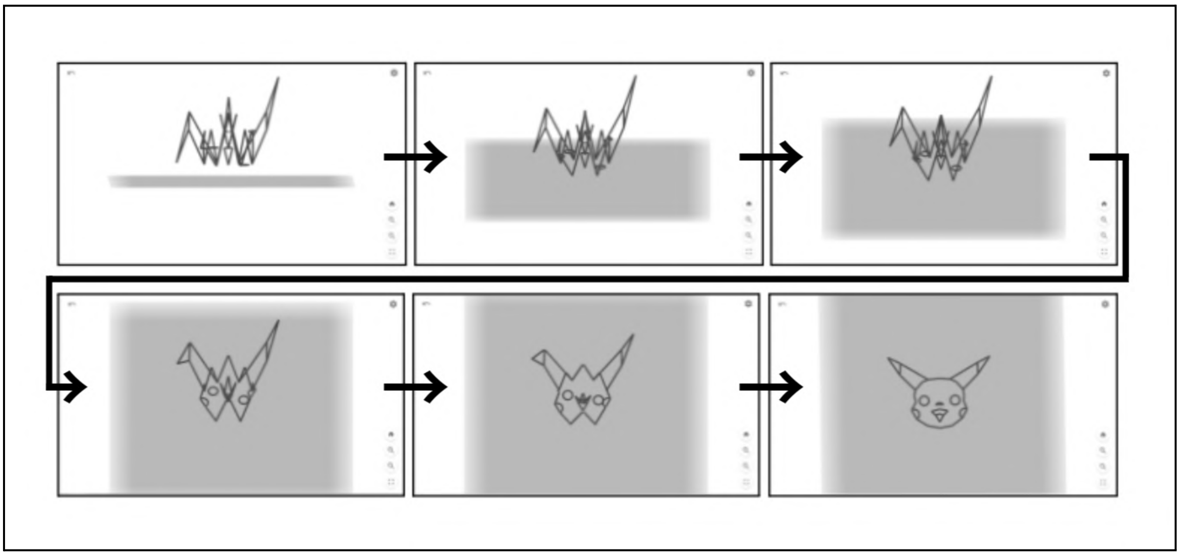
Ainda que o artista utilize a perspectiva na construção de suas obras, planejamos uma atividade em que as construções são feitas com base na projeção ortográfica, configuração padrão da janela de visualização do GeoGebra Calculadora 3D. Além disso, a atividade se assemelha mais às esculturas anamórficas do artista, que formam uma única imagem ao observá-las de uma certa posição. A proposta, enfim, consiste na escolha de uma imagem poligonal do acervo preparado pelo pesquisador para a construção de pontos sobre os vértices da imagem, utilizando o GeoGebra Geometria. Essa versão do software se faz necessária pela impossibilidade de inserir imagens na Calculadora 3D, por não possuir a ferramenta nesta versão. Após salvarem o arquivo com os pontos construídos no plano xy, os alunos devem abrir o arquivo no GeoGebra Calculadora 3D para, então, construir novos pontos e segmentos no espaço. As construções dos novos pontos são feitas sobre retas perpendiculares ao plano xy que passam por cada um dos pontos do plano. Por fim, os alunos ocultam as retas e pontos do plano, que foram utilizados apenas para a construção dos elementos no espaço.

Com a sequência de construções descrita acima, buscávamos remeter ao processamento visual realizado na criação de uma imagem mental de um objeto espacial a partir da observação de uma representação plana, no caso, uma projeção ortogonal desse objeto. Visto que uma única projeção ortogonal não permite formar uma imagem mental apropriada de um objeto espacial, devido à falta de informações

[9] Disponível em: https://leonacreo.com/sculptures-by-matthieu-robert-ortis/. Acesso em: 13 ago. 2023.

de uma terceira dimensão não presente no plano, a posição dos pontos sobre as retas perpendiculares não poderia ser determinada. No entanto, para a atividade em questão, esse fato não compromete a construção, visto que posições diversas dos pontos sobre as retas são até mesmo desejáveis para que a identificação da imagem seja possível apenas ao observá-la por um determinado referencial. A Figura 15 ilustra o produto final almejado e o que dele se observa por diferentes posições, em um movimento de rotação ascendente.

Figura 15 - Construções conforme a Atividade IV por diferentes posições



Fonte: Produção do pesquisador

Desta atividade, também descartamos ideias propostas no planejamento inicial, devido ao perfil da turma e às dificuldades encontradas logo ao início do experimento prático, dentre as quais citamos o intuito de trabalhar com coordenadas de pontos em função de um controle deslizante e a realização de uma mostra das produções dos alunos utilizando a ferramenta de RA. Explorar as potencialidades da ferramenta de RA do GeoGebra foi de especial interesse do autor durante o planejamento dessa pesquisa, no entanto, a incompatibilidade dos aparelhos dos alunos com essa ferramenta foi um dos principais motivos - embora não o único - para que o planejamento fosse alterado, diminuindo a utilização da RA nos encontros do experimento prático.

O sexto e último encontro, segundo o cronograma do planejamento, é uma retomada das aulas, com exposição das produções dos alunos e respostas das atividades de cada encontro, para que os alunos possam opinar e justificar o que fizeram durante o experimento prático. Após a realização desse encontro, o pesquisador sentiu que poderia questionar mais os alunos com perguntas referentes ao conteúdo das aulas e que os estimulassem a complementar suas manifestações feitas na aula da retomada. Como apontado por Mora e Gutiérrez (2021), uma entrevista possibilita a complementação dos dados quando há essa eventual necessidade, portanto, foi planejada uma entrevista que seria realizada com os participantes do experimento prático, mas apenas aqueles que aceitaram participar da pesquisa.

Esse consentimento se deu pela assinatura dos termos que foram entregues aos alunos dias antes do início da pesquisa. Foram destinados aos responsáveis o termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice B) e aos alunos foi entregue o termo de assentimento da sua participação (Apêndice C). Nesses documentos, foram esclarecidos detalhes da pesquisa, como a ocasião em que se daria, seus objetivos e que os usos posteriores dos dados produzidos seriam feitos sem a identificação dos alunos, além de disponibilizarem informações de contato para o esclarecimento de eventuais dúvidas. Os responsáveis por doze alunos permitiram sua participação na pesquisa e a utilização dos dados e da imagem dos mesmos, que foram identificados pelos códigos AA, AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, AI, AJ, AK e AL e referenciados pelos pronomes ele(s)/dele(s) a fim de manter seu anonimato durante a descrição dos encontros e análise dos dados. Ainda que nesta pesquisa analisamos os trabalhos e manifestações de doze alunos, lembramos que todos os vinte e sete alunos da turma participaram dos encontros e realizaram as atividades do experimento prático, pois essas se deram nas aulas de matemática regulares.

# 4. DESCRIÇÃO DOS ENCONTROS E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo passaremos a descrever os encontros realizados e a analisar os dados produzidos pela turma durante os mesmos. Analisamos apenas os dados produzidos pelos alunos que assentiram participar da pesquisa e retornaram os termos devidamente assinados por seus responsáveis. Estes encontros ocorreram nos meses de junho, julho e agosto de 2023, durante o exercício do estágio obrigatório do pesquisador e, embora tenham sido planejados seis encontros como descritos no capítulo anterior, surgiram alguns imprevistos que modificaram o cronograma, alterando o número de períodos de alguns encontros mas mantendo a sequência planejada. Esses imprevistos são naturais do ambiente escolar e muitos fogem do controle do professor. Foi o caso das alterações no cronograma do experimento que se fizeram necessárias devido a um fenômeno meteorológico que causou o cancelamento de um passeio da escola e das aulas do dia seguinte, nas vésperas do recesso escolar de inverno.

O Quadro 05 abaixo apresenta a organização dos encontros como de fato se deram, com as datas dos dias em que ocorreram e sua duração. O Apêndice D, além dessas informações, contém o registro de frequência dos doze alunos que participaram da pesquisa em cada encontro. Também pode-se observar pelo quadro algumas das modificações feitas no cronograma, como o aumento dos períodos do segundo encontro, a junção das atividades I, II e III em um terceiro encontro, a diminuição dos períodos da atividade IV e a necessidade da entrevista complementar, que se deu após o recesso escolar com alguns dos alunos.

**Quadro 05** - Organização dos encontros

| **Encontro** | | **Data** | **Duração** |
|---|---|---|---|
| Introdução ao GeoGebra | | 22/06/2023 | 100 minutos |
| Conhecendo a Projeção Ortogonal | Início | 26/06/2023 | 50 minutos |
| | Finalização | 28/06/2023 | 95 minutos |
| Atividades de Construção no GeoGebra I, II e III | Atividade I | 03/07/2023 | 50 minutos |
| | Atividade II | 05/07/2023 | 45 minutos |
| | Atividade III | 06/07/2023 | 50 minutos |
| Atividade IV | Início | | 50 minutos |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Finalização | 10/07/2023 | 50 minutos |
| Retomada | | 17/07/2023 | 50 minutos |
| Entrevista | | 02/08/2023 | 15 minutos |

Fonte: Produção do pesquisador

Nas seções deste capítulo descrevemos os cinco encontros realizados, organizados como no quadro acima, e analisamos os dados produzidos pelos alunos participantes em cada um deles.

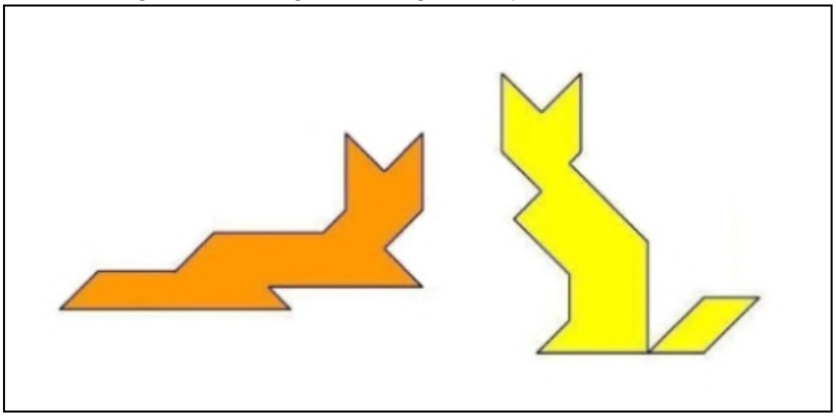
## 4.1. PRIMEIRO ENCONTRO - INTRODUÇÃO AO GEOGEBRA

Na manhã do dia 22 de junho iniciamos o experimento prático com o encontro Introdução ao GeoGebra, no qual os alunos iriam realizar as atividades apresentadas no capítulo anterior. Os alunos estavam animados e um pouco agitados pois raramente visitavam o laboratório de informática e era a primeira vez que faziam isso em uma aula de matemática. O pouco contato com a tecnologia, em especial com os *chromebooks*, ficou evidente pela dificuldade que os alunos apresentaram ao realizar tarefas relativamente simples como acessar o link que o pesquisador escrevera no quadro da sala, seja por não saberem onde inserir o link ou por não encontrarem as teclas desejadas no teclado.

Durante todo o primeiro período dessa aula, o pesquisador ficou em função de auxiliar os alunos a acessar o link com os enunciados das atividades e a abrir o aplicativo GeoGebra, ou de fazer o download do aplicativo nos poucos *chromebooks* em que não estava instalado. Ocorreram outros contratempos também, pois os alunos não conseguiam fazer login no perfil do pesquisador para encontrar os arquivos das atividades, nem responder ao formulário eletrônico com suas respostas, uma vez que em todos os aparelhos do laboratório estava sincronizada a mesma conta Google. Desse modo, ao preencher um formulário em um *chromebook*, as respostas apareciam no formulário que estava sendo preenchido em outro *chromebook*. Utilizar outro e-mail, pareceu ao pesquisador naquele momento, uma alternativa não muito eficaz pois tomaria tempo para os alunos realizaram o login e nem todos possuíam um e-mail pessoal. Portanto, o pesquisador tomou a decisão de recolher as produções dos alunos em um pendrive e, nos encontros seguintes, não mais utilizou formulários eletrônicos.

Transcorrido o primeiro período, ao iniciar o segundo, os alunos passaram a realizar as atividades no GeoGebra. Por desconhecerem o software foi reservado o início da aula para que explorassem algumas ferramentas como as de construção de pontos, segmentos e retas em construções livres. Em seguida, os alunos iniciaram a primeira atividade (Figura 16), de construção de retas paralelas, concorrentes e perpendiculares.

Figura 16 - Os gatos, imagem da primeira atividade



Fonte: Adaptado de Meu Cantinho Preferido[10]

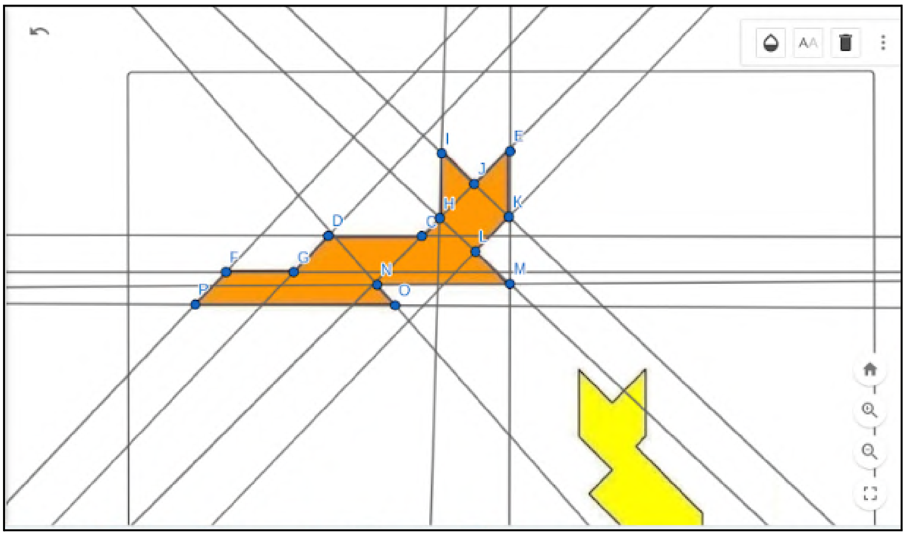
Percebemos que os alunos, ainda não acostumados com o software, permaneceram na mesma ferramenta de construção de reta que utilizaram na construção livre e, mesmo com as intervenções do pesquisador para orientá-los na utilização das ferramentas “reta perpendicular” e “reta paralela”, não fizeram uso destas, talvez por não compreenderem no que se diferenciam da ferramenta de construção de reta qualquer que estavam utilizando, visto que tal distinção é mais perceptível quando as construções são postas sob ação de movimento preservando relações e os alunos ainda desconheciam o recurso do arrastar. Ao sugerir o uso das ferramentas, o pesquisador enfatizou a precisão das relações entre as retas construídas pelas mesmas, um dos principais benefícios dos softwares de MD como apontado por King e Schattschneider (1997, apud JANZEN, 2011), e que não é assegurada nas construções feitas com a ferramenta “reta” utilizada pelos alunos. Contudo, apenas um aluno deu indícios de ter reconhecido essa característica das construções, e o fez apenas no encontro da retomada.

---

[10] Disponível em: https://cantinhopreferidodamah.blogspot.com/2018/05/figuras-com-tangram.html. Acesso em: 20 ago. 2023.

Identificamos, a partir das capturas de tela que os alunos realizaram de suas construções, quatro estratégias empregadas nesta atividade: 1) a construção de pontos em todos os vértices da imagem e, então, a construção de retas passando por esses pontos; 2) a construção de retas sobre os segmentos da imagem de um gato de modo a criar retas em todo o seu contorno; 3) a construção de retas apenas sobre os segmentos que aparentavam ser paralelos e horizontais; 4) a construção de pontos e segmentos de forma a criar um desenho como um rosto ou uma casa para os gatos da imagem. A segunda estratégia, exemplificada na Figura 17 pelas construções do aluno AH, foi a mais empregada pelos alunos, possivelmente por não terem compreendido a atividade ou por pensarem que construindo retas sobre todos os segmentos acabariam realizando o que pedia a atividade, visto que em seu enunciado escrevemos “pelo menos um par de retas”.

Figura 17 - Construções de retas sobre o contorno do gato

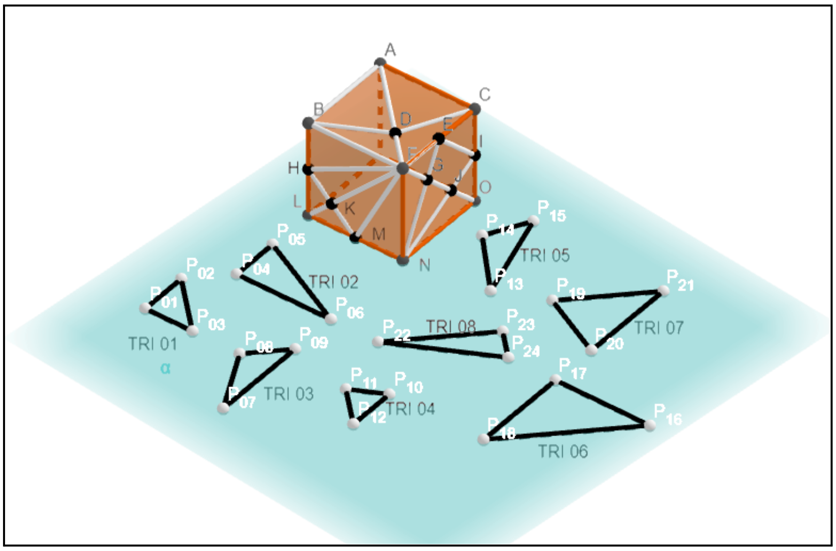



Fonte: Dados da pesquisa

A maior parte dos alunos da turma não chegou a construir sobre a segunda imagem dessa atividade antes de passar às atividades seguintes. A segunda atividade explorava triângulos pelo arrastar de um controle deslizante e pouco contribuiu à nossa pesquisa por se tratar de uma atividade majoritariamente exploratória, sem construções próprias dos alunos. Não analisamos essa atividade nesta pesquisa e passamos à terceira atividade realizada pelos alunos no primeiro encontro.

A atividade de medição de ângulos e de segmentos para averiguar congruência entre triângulos (Figura 18) foi realizada por poucos alunos da turma, e quase sua totalidade não chegou a resolvê-la como proposto no enunciado. Durante a aula, o pesquisador observou que grande parte dos alunos encontrava dificuldade no uso do software por ainda não estarem habituados a este, e sugeriu que os alunos apenas averiguassem congruências entre ângulos, dos triângulos do plano α com dos triângulos das faces do cubo. Dos doze alunos participantes da pesquisa, apenas cinco chegaram a realizar esta atividade.

Figura 18 - Triângulos no plano e no cubo

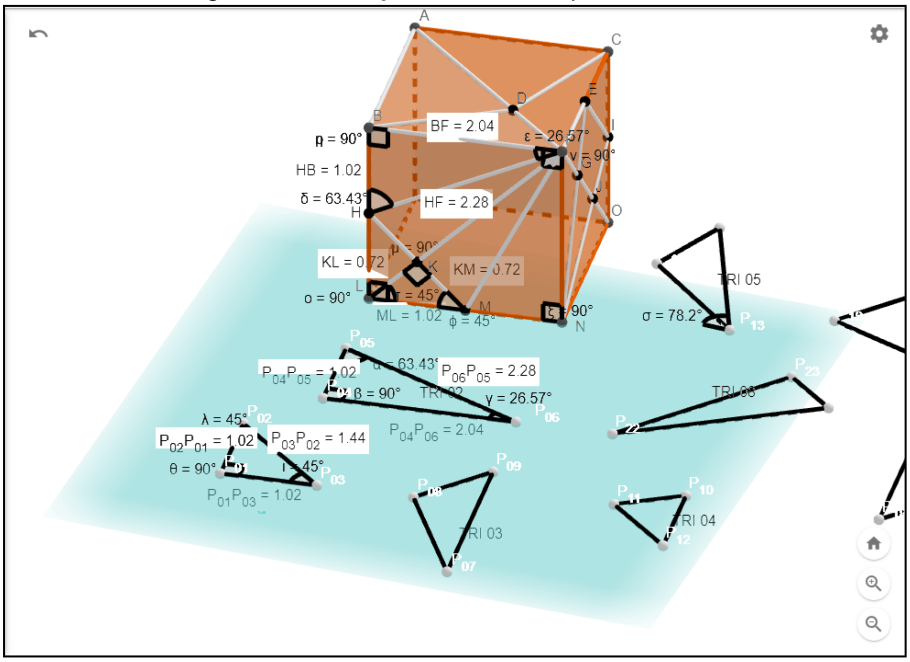



Fonte: Produção do pesquisador

O aluno AA mediu os ângulos de dois triângulos do plano, mas não conseguiu identificar nas faces do cubo algum triângulo que possuísse os mesmos ângulos internos. O aluno AB mediu um ângulo de cada triângulo do plano e dois ângulos dos triângulos do cubo. O enunciado da atividade pedia que encontrassem dois pares de triângulos congruentes, então, acreditamos que este aluno tenha considerado que dois pares de ângulos congruentes fosse suficiente para a atividade adaptada. O aluno AL mediu todos os ângulos dos triângulos do plano e alguns ângulos dos triângulos do cubo, evidentemente, encontrando alguns ângulos congruentes. Por sua vez, o aluno AD mediu os ângulos de alguns triângulos do plano e praticamente todos os ângulos dos triângulos do cubo, deixando sua captura de tela incompreensível.

O aluno AI foi exceção e resolveu a atividade como solicitada em seu enunciado, averiguando a congruência dos ângulos e segmentos de dois triângulos congruentes, com as ferramentas “ângulo” e “distância, comprimento”. A Figura 19 mostra as construções deste aluno. Observamos, durante o experimento, que esse aluno utilizou o arrastar para observar os objetos de diferentes posições e alterou o zoom para aproximar, construir e distinguir melhor os elementos do arquivo. Analisando a ordem de construção dos elementos pelo arquivo entregue pelo aluno, assumimos que o mesmo empregou a habilidade espacial de identificação visual (GUTIÉRREZ, 1992) para reconhecer triângulos aparentemente congruentes antes de começar a fazer as medições. Isto pois, logo que foram medidos os ângulos do triângulo TRI02 do plano α, o aluno mediu os ângulos de um triângulo congruente a este no cubo, o triângulo BFH. Em seguida, iniciou a procura por um triângulo congruente ao TRI01, medindo alguns ângulos retos na face do cubo mais aparente e, por fim, fez as medições dos lados dos triângulos congruentes identificados. Interpretamos que o aluno AI tenha considerado o triângulo KLM como congruente ao TRI01, no entanto, estes triângulos são semelhantes, não congruentes.

Figura 19 - Medições realizadas pelo aluno AI



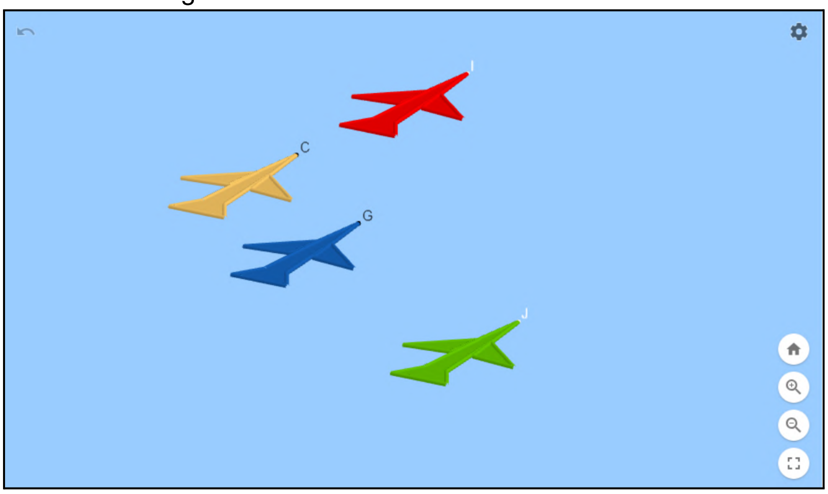

Fonte: Dados da pesquisa

Observamos neste primeiro encontro o processo de apropriação do GeoGebra por parte dos alunos. Em seu primeiro contato, por desconhecerem as funcionalidades das ferramentas, muitas vezes os alunos não conseguiam realizar o que pretendiam, como observado na primeira atividade quando uma aluna gostaria de selecionar um ponto, mas, por estar utilizando a ferramenta reta, acabava por construir um novo ponto, e na segunda atividade quando uma aluna media seguidamente o mesmo ângulo por acidentalmente clicar nos mesmos elementos. Em encontros seguintes, situações semelhantes voltaram a acontecer porque a habituação a uma nova tecnologia é um processo que demanda tempo e o contato destes alunos com o software deu-se exclusivamente nos encontros aqui relatados. Por outro lado, essa interação proporcionada exclusivamente no experimento prático nos permitiu acompanhar o processo de aquisição de habilidades no GeoGebra por parte dos alunos da turma.

## 4.2. SEGUNDO ENCONTRO - CONHECENDO A PROJEÇÃO ORTOGONAL

O segundo encontro ocorreu no laboratório de matemática da escola e teve início no dia 26 de junho, mas, por se tratar de uma aula de um período, foi continuado no dia 28 do mesmo mês, sendo realizado em três períodos de aula. Os três períodos se fizeram necessários, pois a atividade proposta no início do encontro acabou tomando mais tempo do que o planejado. A atividade consistia na proposta com RA descrita no capítulo anterior, em que os alunos deveriam identificar qual dos aviões estava à frente dos demais (Figura 20). Contudo, assim como no encontro anterior, a maior parte da aula foi utilizada para que os alunos conseguissem acessar o arquivo da atividade.

Figura 20 - Os aviões voando em sincronia



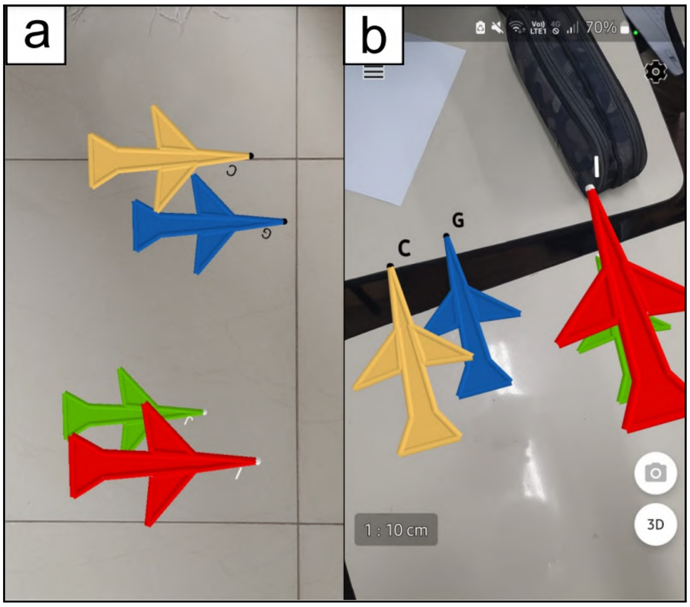

Fonte: Produção do pesquisador

Apesar dos avisos em aulas anteriores de que o aplicativo Suíte GeoGebra seria utilizado neste encontro e que os alunos deveriam fazer o download do mesmo em seus aparelhos celulares, poucos de fato o fizeram. Assim, no início da aula o pesquisador precisou orientar os alunos a fazerem o download do aplicativo, auxiliando-os em pequenos grupos, pois estavam outra vez agitados. Logo, fazendo uso de nova versão do software, outra vez demonstraram estar desabituados com a interface do GeoGebra e mais orientações foram necessárias para que os alunos conseguissem acessar o perfil do pesquisador e o material da aula. Infelizmente, constatamos que na maioria dos aparelhos dos alunos a ferramenta de RA não estava disponível. Ao discutirmos sobre este ocorrido, a orientadora sugeriu que os aparelhos não contavam com a funcionalidade devido à falta do pacote ARCore, agora, Google Play Services para RA.

Desse modo, a RA foi utilizada para a resolução da atividade apenas nos aparelhos de dois alunos nos quais estava disponível. Os demais utilizaram o aplicativo GeoGebra em seus aparelhos, sem a ferramenta de RA. Aqueles que a utilizaram foram os alunos AC, AF e AJ, em um aparelho, e os alunos AK e AL, no outro. Os primeiros resolveram a tarefa observando os aviões por cima, já os segundos observaram pelo lado para concluir qual dos aviões estava à frente dos demais.

A Figura 21 (a) apresenta uma vista superior dos aviões em RA na qual se observa que o avião azul é o que está à frente. Essa imagem foi produzida pelo pesquisador a fim de contrastar com a imagem da Figura 21 (b), que mostra como os alunos AC, AF e AJ resolveram a atividade. A captura de tela foi feita pelos alunos que observaram os aviões por cima, mas permanecendo sentados, até que o pesquisador propôs que se levantassem de suas cadeiras para visualizarem melhor. Ainda assim, mesmo em pé, pela posição que se encontrava o celular no momento da captura, o avião vermelho aparece mais à frente que o azul e a constatação feita pelos alunos de que o azul está à frente não é percebida na imagem.

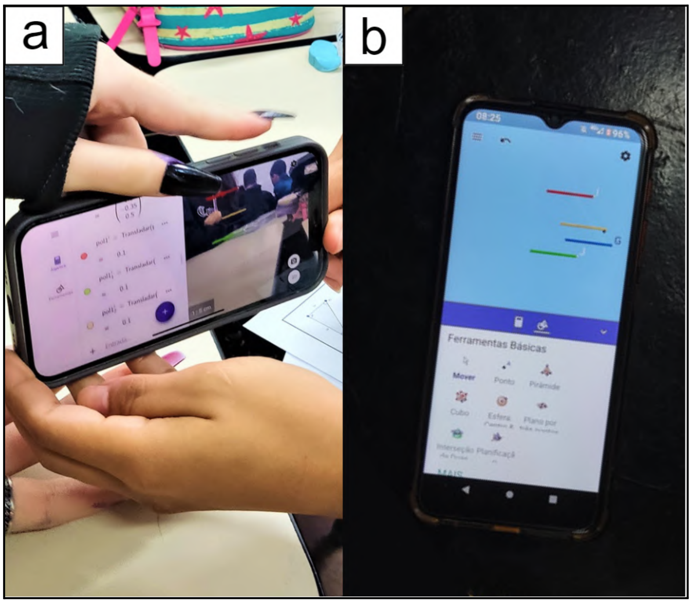
Figura 21 - Capturas de tela mostrando os aviões em RA por cima




Fonte: Produção do pesquisador e dados da pesquisa

A Figura 22 (a) mostra o ângulo pelo qual os alunos AK e AL observaram os aviões para constatar sua resposta, apesar de que no momento do registro o avião azul havia sido ocultado pela janela de álgebra do aplicativo GeoGebra. Já a Figura 22 (b) apresenta um registro do aparelho celular do aluno AH que serve como exemplo da tela observada pela maioria dos alunos, que não utilizaram a ferramenta de RA, mas resolveram a atividade interagindo com o aplicativo.

Figura 22 - Captura de tela e registro dos aviões observados de lado




Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que os alunos não estavam acostumados a interagir com RA, pois posicionaram os elementos virtuais sobre suas mesas e os observaram através de seus aparelhos por um referencial fixo, como se estivessem olhando para uma imagem estática como um desenho de um livro. Não exploraram as construções movendo-se em seu entorno, como era esperado que o fizessem e, portanto, arriscamos afirmar que a RA, da forma que foi utilizada, não ocasionou a superação das limitações da representação bidimensional na tela dos aparelhos como defendido por Oliveira (2021) e não contribuiu para a visualização e resolução da atividade tanto quanto poderia ter contribuído caso os alunos a utilizassem de outra forma.

Ao indagar os alunos sobre de que forma é preciso observar os aviões para concluir qual está à frente dos demais, o pesquisador obteve respostas, que naquele momento não foram questionadas porque isto seria feito ao início da aula seguinte, algumas das quais são apresentadas no Quadro 06. A letra P ao início de uma frase indica uma pergunta feita pelo pesquisador.

Quadro 06 - Respostas à pergunta “qual avião está à frente dos demais?”

| |
|---|
| AK: O azul.<br><br>*P: E como tem que olhar para os aviõezinhos?*<br><br>AK: Bem de lado.<br><br>*P: Só de lado que funciona, pra ver que o azul está à frente?*<br><br>AK: Funciona melhor, quer dizer… |
| AB: É que depende do lado, né.<br><br>AI: É o azul.<br><br>AB: É porque ele colocou de um lado, assim, que era o amarelo. |
| AH: Eu acho que é o G (avião azul), porque nesse ângulo aqui ó, olha só (mostra ao pesquisador em seu aparelho celular)<br><br>*P: Tá, está certo. Mas não é de qualquer jeito que dá para ver que é o azul, né. Como é que tem que ser?*<br><br>AH: Hmm… Totalmente reto. |
| AF: É o azul, porque ele tá na frente.<br><br>*P: Observando de qualquer ângulo?* |

| |
|---|
| AF: De qualquer ângulo. |
| AC: De cima sim, né. |
| AF: De cima e de baixo. |

Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que a maior parte dos alunos conseguiu identificar que o avião azul estava à frente dos demais, e que para identificar isso seria necessário observar de um referencial que fosse perpendicular à direção do voo dos aviões, embora isso não esteja explícito em nenhuma das respostas e os alunos não terem considerado que tanto uma vista superior ou inferior quanto uma vista lateral permite essa constatação, manifestando em suas respostas apenas uma, ou outra. As referências “de cima”, “de baixo” e “de lado” aparecem tanto nas respostas dos alunos que utilizaram a RA quanto os que não a utilizaram, embora assumimos que estes últimos o tenham feito pelo fato de que todos os aviões foram construídos como modelos planos paralelos, e a rotação dos objetos pelo arrastar para observar do GeoGebra é limitado na direção vertical a 90° em cada sentido, assim, possibilitando estabelecer uma referência de "cima" e "baixo", e de "lado", por consequência. Embora possa parecer uma limitação do software, um aluno capaz de reconhecer e estabelecer referenciais espaciais, sem qualquer construção ou eixo de referência, dá indícios de possuir habilidades espaciais como o reconhecimento de posições no espaço a partir de relações espaciais, não de objetos observados, o que mostra como a visualização é muito mais que o ato de ver (GUTIÉRREZ, 1992; 1996).

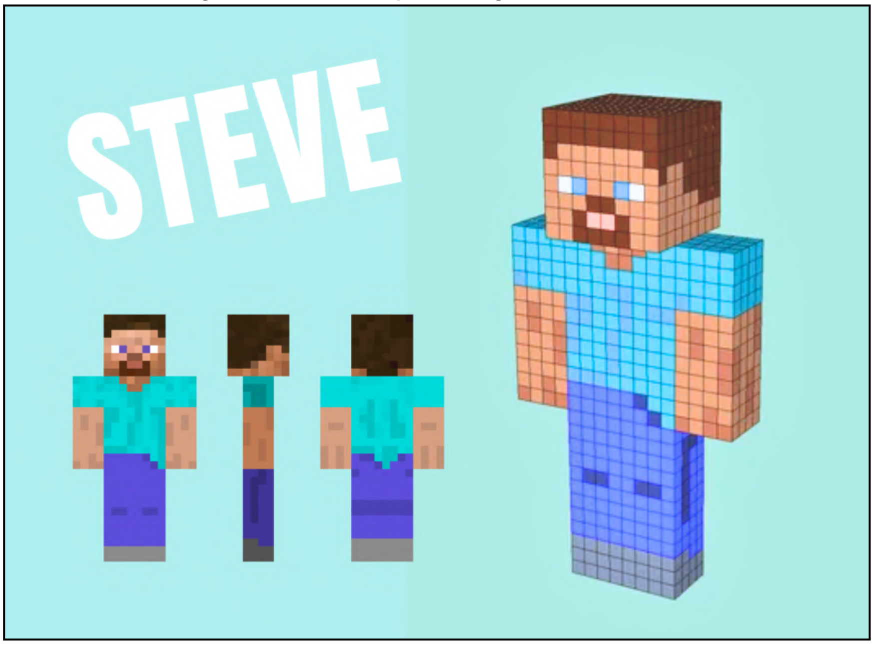
Ainda assim, acreditamos que o aluno AB não tenha constatado a necessidade de observar perpendicularmente à direção de voo dos aviões, pois o aluno comentou “depende do lado” e considerou tanto o avião azul quanto o amarelo. O mesmo acontece com o aluno AK, o qual respondeu que "bem de lado" a observação da resposta "funciona melhor". Por fim, ainda que o aluno AF tenha respondido que "de qualquer ângulo" é possível constatar a resposta, acreditamos que ele estava se referindo às duas posições de observação que menciona em seguida, "de cima" e "de baixo", a segunda, apontamos como uma antecipação do aluno que faz uso das habilidades de reconhecimento de posições espaciais e de conservação da percepção (GUTIÉRREZ, 1992; 1996), visto que ele estava utilizando a ferramenta de RA e em nenhum momento posicionou o celular de forma a observar daquele referencial.

Devido a este primeiro contato com a ferramenta de RA do GeoGebra, que não transcorreu como esperado, visto que muito tempo foi despendido para a instalação do aplicativo e, depois, foi constatado que em poucos aparelhos a RA poderia ser utilizada, muitos alunos não tiveram uma boa impressão desse recurso. Além disso, pelo fato de poucos poderem a utilizar, nas aulas seguintes a presença da RA foi reduzida das atividades planejadas, tendo sido sugerida novamente apenas na continuação desse encontro, que se deu na aula seguinte.

Iniciamos a aula do dia 28 de junho retomando a atividade realizada na aula anterior. Porém, com receio de que a apresentação planejada não fosse concluída nos dois períodos desse dia e o encontro se prolongasse demais, o pesquisador não reservou muito tempo para a discussão da atividade com RA. As estratégias dos alunos foram relembradas e a conclusão de que tanto observar de cima ou de baixo quanto de lado, desde que perpendicularmente, seriam possibilidades para a resolução correta partiu do próprio pesquisador. Após este momento, o pesquisador iniciou uma aula expositiva utilizando o projetor da sala, com o qual foram apresentados exemplos de situações similares à atividade dos aviões e, em seguida, como a técnica de projeção ortogonal está presente nestas situações. A projeção ortogonal, então, foi introduzida aos alunos, com exemplos de projeções de pontos, segmentos e figuras no espaço, e possíveis aplicações em contextos diversos, como nos esportes, nas artes, na geografia e na arquitetura e, ao fim do primeiro período, a projeção ortogonal foi apresentada como uma ferramenta gráfica da geometria descritiva. Posteriormente, foi proposto aos alunos que desenhassem vistas ortográficas superiores dos objetos apresentados: o Steve (Figura 23), personagem do Minecraft[11], e um modelo da catedral de Santa Maria del Fiore feito pelo pesquisador no GeoGebra Calculadora 3D.

[11] Franquia midiática centrada no jogo eletrônico de mesmo nome.

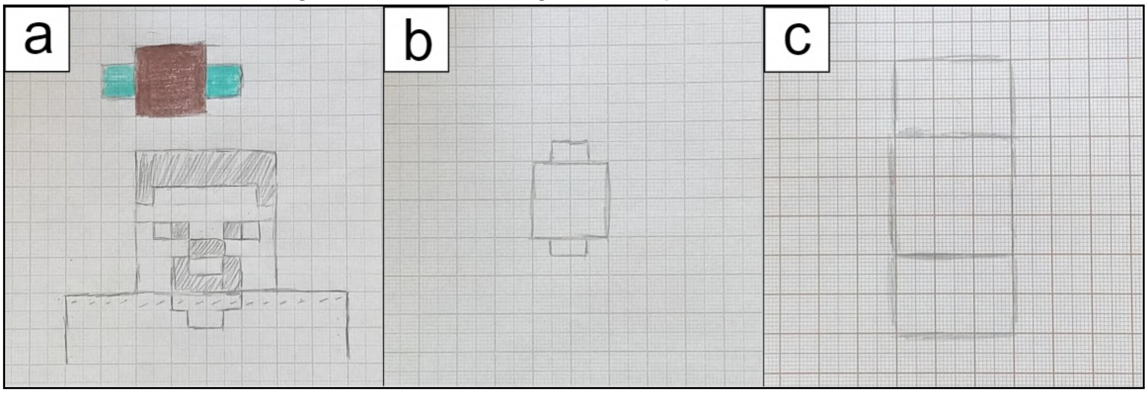
Figura 23 - Steve, personagem do Minecraft




Fonte: Produção do pesquisador

A Figura 24 apresenta os desenhos que os alunos AC, AF e AI fizeram para representar a vista superior do Steve, os quais expõem os padrões identificados nas representações dos alunos. O desenho Figura 24 (a), feito pelo aluno AI, apresenta uma vista superior correta, além de colorida conforme a imagem apresentada, e o início de uma vista frontal da personagem. A maioria dos alunos cujos dados analisamos representou dessa maneira, com três quadrados, em que o lado do quadrado central mede o dobro do lado dos outros. Nessa representação identificamos que os alunos foram capazes de empregar a habilidade espacial de rotação mental, pois reconheceram as figuras observadas em uma vista superior sem estarem, de fato, observando por esse referencial. O desenho Figura 24 (b), feito pelo aluno AC, apresenta uma vista superior na qual os ombros do Steve foram desenhados como retângulos. Os alunos que assim desenharam foram capazes de visualizar que a largura e a profundidade dos ombros são menores que as da cabeça, mas não perceberam que são do mesmo tamanho, dando indícios de que realizaram uma rotação mental, porém não dominam completamente esta habilidade, de modo que a construção da imagem mental a partir observação da representação externa, segundo o processo de interpretação visual da informação, não permitiu uma visualização adequada da vista superior (GUTIÉRREZ, 1996). O desenho Figura 24 (c), feito pelo aluno AF, apresenta uma vista superior em que os ombros também são retângulos, no entanto, a representação indica que os alunos que assim desenharam não perceberam que a cabeça e os ombros têm profundidades diferentes, nem conseguiram reconhecer a proporção entre as larguras, dando indícios de que a habilidade espacial supracitada da rotação mental, assim como a discriminação visual (GUTIÉRREZ, 1992; 1996), ainda estão pouco desenvolvidas.

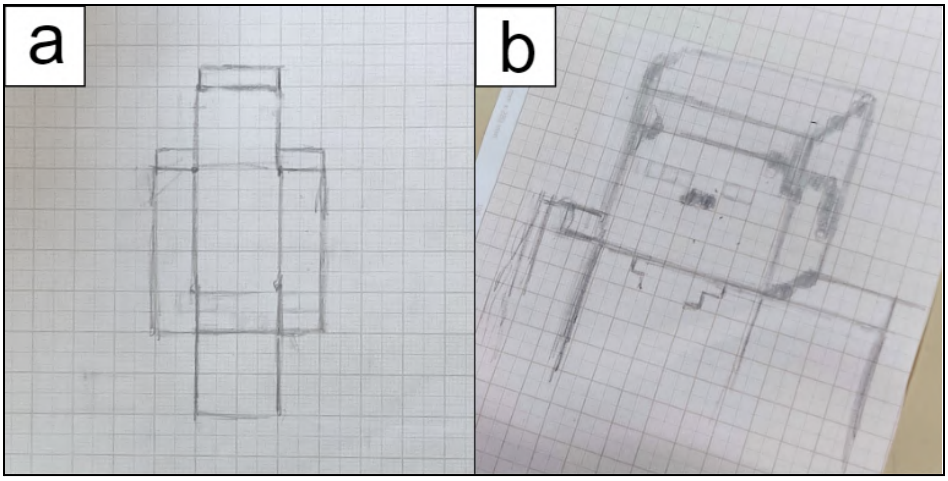
Figura 24 - Vistas ortográficas superiores do Steve




Fonte: Dados da pesquisa

Por sua vez, o desenho da Figura 25 (a), feito pelo aluno AB, apresenta uma vista que não foi a solicitada, mas sim a observada por um referencial frontal elevado. No entanto, as proporções do desenho estão corretas, no que diz respeito aos tamanhos da cabeça e dos ombros. Esta é a segunda versão do desenho do aluno, pois na primeira (Figura 25 (b)) ele havia desenhado exatamente como observado na apresentação e o pesquisador sugeriu recomeçar para desenhar uma vista “superior” como solicitado.

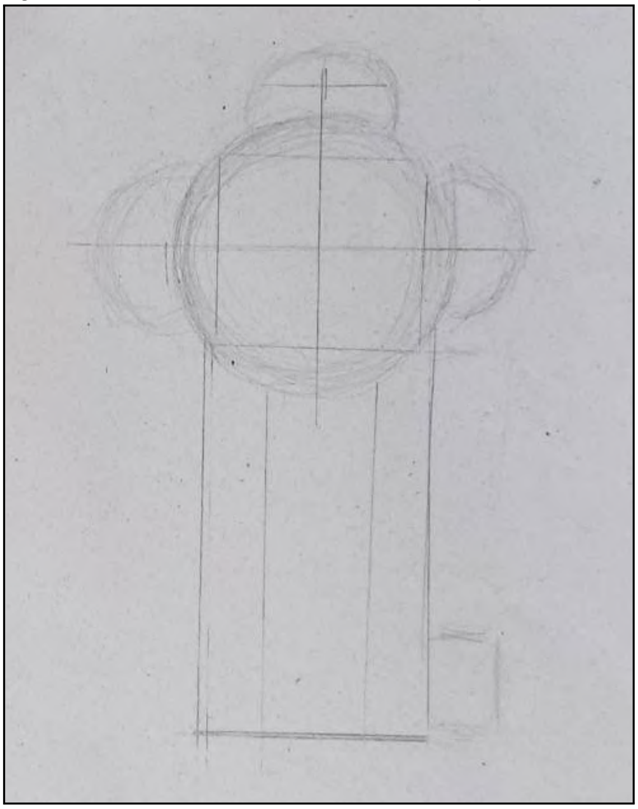
Figura 25 - Vistas do Steve desenhadas pelo aluno AB




Fonte: Dados da pesquisa

Interpretamos que este aluno, apesar de não ter realizado a atividade como solicitada, possui a habilidade espacial de rotação mental com certo grau de domínio, pois foi capaz de desenhar vistas do Steve que preservam proporções e, na atividade seguinte, desenhou uma vista superior da catedral de Florença como solicitado (Figura 26), mesmo sem interagir com o modelo da catedral no GeoGebra, que foi permitido. Acreditamos que o aluno tenha compreendido essa atividade, e não a primeira, apenas por desconhecer o vocabulário matemático utilizado pelo pesquisador, que na primeira atividade solicitou oralmente que os alunos desenhassem vistas superiores, mas na segunda, para explicar de outra maneira utilizou a expressão “planta baixa”. Essa suposição vai ao encontro do que Bishop (1983) aponta sobre o obstáculo cultural à visualização, de que a falta de contato com convenções de representações impede a construção de imagens mentais satisfatórias.

Figura 26 - Vista da catedral desenhada pelo aluno AB



Fonte: Dados da pesquisa

Quanto à vista superior da catedral de Florença, apenas cinco alunos chegaram a fazer, sem muito cuidado e às pressas, por conta do horário em que foi proposta, nos quinze minutos finais da manhã de aula. Durante a proposta, foi sugerido aos alunos que acessassem o arquivo do modelo pelo aplicativo GeoGebra em seus aparelhos celulares e que utilizassem a ferramenta de RA. No entanto, os alunos optaram por não a utilizar visto que os cinco alunos que desenharam não eram os que possuíam os aparelhos em que a RA funcionou na aula anterior. Todos os desenhos são semelhantes ao do aluno AB, diferindo apenas no sombreamento dos telhados e no desenho da torre afastada do prédio principal.

Desse modo introduzimos à turma a projeção ortogonal, com uma apresentação e com atividades no laboratório de matemática, nas quais foi percebido que alguns alunos conseguiram observar vistas ortográficas dos objetos e imagens apresentados, mas outros cometeram erros em suas representações que dão sinais da habilidade espacial de rotação mental não estar dominada. Além disso, não sabemos se ficou claro aos alunos de que forma a projeção ortogonal estava presente na atividade com RA, e não pudemos concluir qual o papel dessa ferramenta para a visualização dos alunos nessa atividade. Como comentado, nas atividades posteriores ela não foi mais utilizada, então, encerramos neste encontro as análises feitas quanto à contribuição da ferramenta de realidade aumentada do GeoGebra ao desenvolvimento da visualização espacial dos alunos, um dos objetivos iniciais de nossa pesquisa.

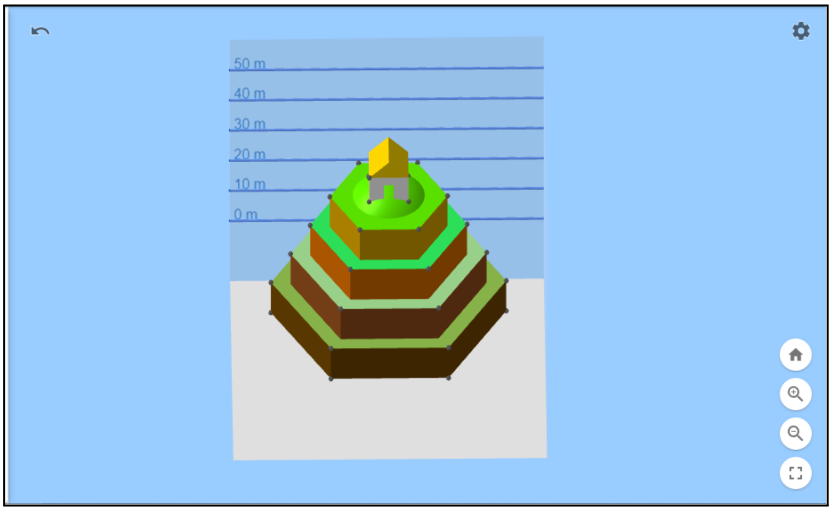
## 4.3. TERCEIRO ENCONTRO - ATIVIDADES I, II e III

Optamos por organizar o terceiro encontro em três subseções, uma para cada atividade de construção no GeoGebra que foi realizada em um único período de aula. Assim, as Atividades I, II e III apresentadas no capítulo anterior são descritas e analisadas em sequência.

### 4.3.1. Atividade I - Topografia

A primeira atividade de construção no GeoGebra calculadora 3D ocorreu no dia 03 de julho, no laboratório de informática, com a proposta da construção de um mapa topográfico da colina terraceada construída pelo pesquisador com prismas hexagonais (Figura 27). Diferentemente dos encontros anteriores, os alunos não tiveram dificuldade em acessar o arquivo da atividade pela versão online do software, e apenas as alunas AD e AL utilizaram o aplicativo GeoGebra instalado no *chromebook*. O enunciado da atividade (Apêndice E) foi entregue impresso aos alunos e o pesquisador reforçou as orientações da atividade relembrando a projeção ortogonal que foi apresentada cinco dias antes, no segundo encontro.

Figura 27 - A colina em níveis

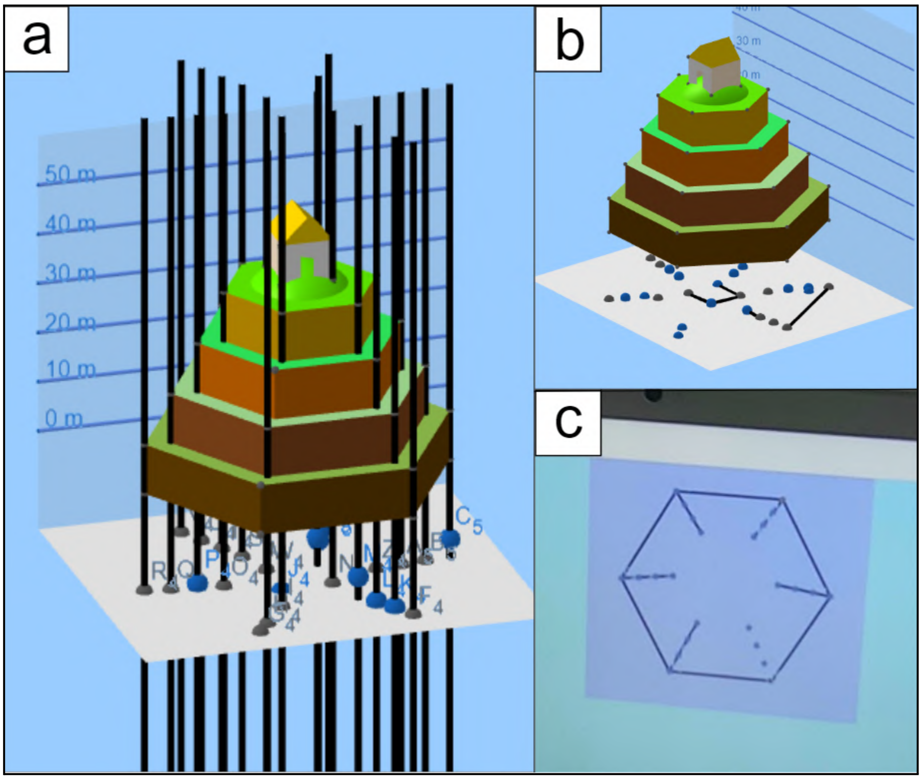



Fonte: Produção do pesquisador

Inicialmente, foram necessárias indicações de como utilizar as ferramentas para realizar as construções, mas logo os alunos se habituaram ao seu uso, visto que as construções necessárias nessa atividade eram feitas repetitivamente. Ainda assim, alguns alunos apontaram o mesmo obstáculo em suas construções quando tentavam fazer as projeções dos vértices dos prismas que se encontravam próximos aos dois planos laterais do arquivo, perpendiculares ao plano de projeção em que deveriam construir o mapa. A ação que tinham dificuldade em realizar era a construção de retas perpendiculares ao plano de projeção passando por estes vértices, que estavam escondidos do ponto de vista inicial e demandavam um arrastar para observar por outro ângulo. A rotação que realizaram foi apenas no sentido horizontal, isto é, em torno de um eixo paralelo ao eixo z, e, portanto, à frente dos vértices se encontrava um plano lateral translúcido que era selecionado acidentalmente pelos alunos ao utilizarem a ferramenta "reta perpendicular". Um dos planos laterais continha as informações das altitudes das curvas de nível da colina, porém o outro não continha informação alguma e, a pedido dos alunos, o pesquisador ocultou este plano nos arquivos em que os alunos estavam trabalhando.

Apesar de terem utilizado o arrastar para observar, os alunos o fizeram em apenas uma direção, não utilizando como esperado nessa atividade e encontrando o obstáculo descrito. Após construírem retas perpendiculares ao plano de projeção passando por cada um dos vértices dos prismas, os alunos utilizaram novamente esse arrastar para observar o plano de projeção “por baixo”, a fim de melhor acessar as interseções das retas com o plano para construir, nelas, pontos. Nem todos fizeram desse modo, e tiveram dificuldade em construir os pontos de interseção. Foi o caso dos alunos AG, AA e AE, que construíram pontos semi-arrastáveis sobre as retas ou sobre o plano, mas não nas interseções. Estes pontos se distinguem visualmente por serem azuis, já os pontos de interseção são cinzas, e fixos por estarem ligados às construções. Os alunos AD e AL, por terem utilizado o GeoGebra na versão aplicativo, também construíram pontos semi-arrastáveis, pois nesta versão do software não é possível antecipar o tipo de ponto que será construído ao passar o cursor sobre os elementos, enquanto na versão online a construção é antecipada por uma esfera para um ponto qualquer ou por um octaedro para um ponto de interseção. Mesmo assim, os alunos não perceberam que construíram dois tipos de pontos, pois em nenhum momento tentaram arrastá-los e essa distinção, para além da cor, é apenas evidenciada quando há a tentativa de movimentá-los. A Figura 28 (a) apresenta as construções que o aluno AG fez durante a aula. Nela, observamos os dois tipos de pontos construídos.

Figura 28 - Construções dos alunos AG, AA, AE, e AF

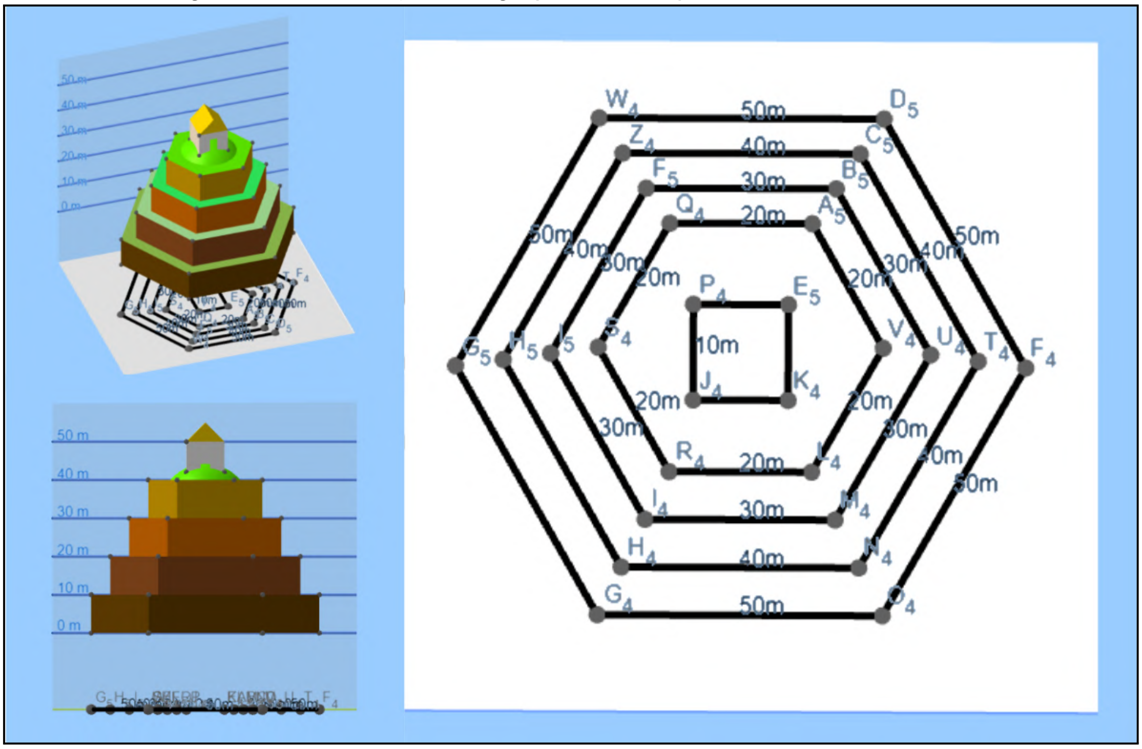



Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 28 (b) são mostradas as construções realizadas pela dupla constituída pelos alunos AA e AE. Após construírem as projeções dos vértices, os alunos ocultaram as retas perpendiculares e iniciaram as construções dos segmentos conforme as curvas de nível. Podemos observar que estes alunos também construíram pontos semi-arrastáveis e também a construção de um segmento de forma incorreta. Por sua vez, a imagem da Figura 28 (c) apresenta as construções do aluno AF, que construiu segmentos, porém de forma equivocada, não condizente ao objeto representado. A este aluno, por suas construções, assumimos que lhe faltou o emprego das habilidades espaciais de identificação visual, visto que foi incapaz de reconhecer na imagem da colina os hexágonos que deveria construir com as projeções dos vértices, e discriminação visual, uma vez construídos os segmentos, para reconhecer que a imagem do plano de projeção não condizia com nenhuma observada no arquivo.

Alguns alunos conseguiram representar os hexágonos das curvas de nível. No entanto, também construíram segmentos com as projeções dos vértices da base da casa, formando um quadrado que leva à interpretação incorreta de outra curva de nível. As curvas de nível de um mapa topográfico representam altitudes equidistantes, então, se os hexágonos representam as altitudes de dez, vinte, trinta e quarenta metros, respectivamente, do maior para o menor, a curva “da casa” representaria a altitude de cinquenta metros, o que está de acordo com o colina observada. A estes alunos, foi solicitado que rotulassem as curvas de nível com as altitudes por elas representadas, obtendo as informações do plano lateral do arquivo. O aluno AC realizou a tarefa corretamente, mas o grupo formado pelos alunos AB, AH e AI não o fez. O aluno AB, responsável por rotular as curvas, o fez em cada um dos segmentos, mas rotulou de forma incorreta. A Figura 29 apresenta as construções desse grupo e a rotulagem realizada pelo aluno AB, que confundiu as informações e atribuiu a maior altitude à curva mais exterior e a menor altitude à curva "da casa".

Figura 29 - Construções do grupo formado pelos alunos AB, AH e AI




Fonte: Dados da pesquisa

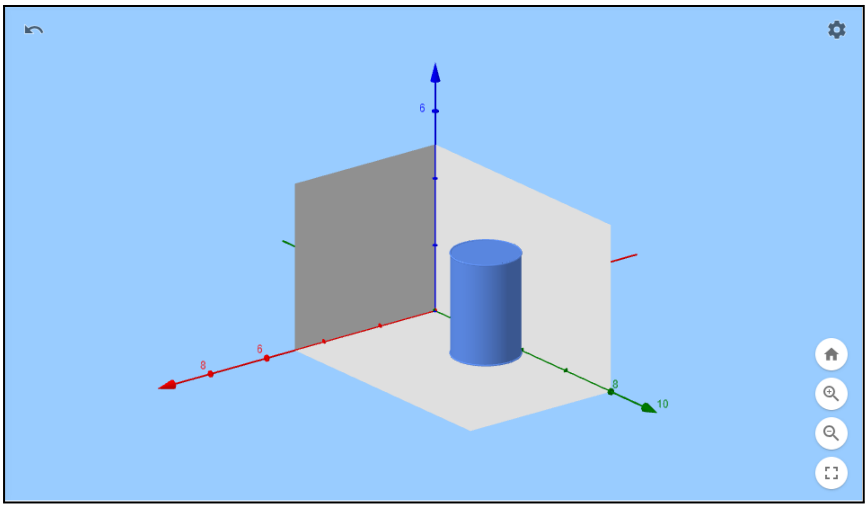
Ainda que os vértices da base da casa (mantidos no arquivo enquanto os demais vértices da casa foram ocultos) pudessem levar os alunos a fazer suas projeções no plano pelo entendimento de que as construções deveriam ser feitas a partir de todos os pontos aparentes, a interpretação equivocada das altitudes das curvas só pode ser atribuída ao não emprego de habilidades espaciais como o reconhecimento de posições e relações de objetos no espaço. Um visualizador que faz uso dessas habilidades perceberia que a casa está acima da montanha, ou, que os prismas estão sobrepostos do maior ao de menor tamanho. A percepção dessas relações espaciais só pode ser constatada pelo pesquisador pela rotulagem das altitudes das curvas conforme os elementos do arquivo - a representação externa da visualização que pode ser acessada nesta etapa da atividade. Tal rotulagem, por sua vez, só é possível pela compreensão, por parte do aluno, das posições espaciais dos elementos e pela interpretação de que a base inferior do maior prisma, mais próxima do plano de projeção, corresponde à altitude zero. Em uma imagem estática isso poderia se apresentar como um obstáculo à visualização, mas no GeoGebra, onde os elementos podem ser rotacionados pelo arrastar para observar, é possível observar a colina à frente do plano que contém as informações das altitudes, como uma vista ortográfica frontal, de modo a evidenciar a correspondência entre as informações do plano e as curvas de nível da colina, como também apresentado na Figura acima.

Ao final da aula, o pesquisador solicitou que os alunos tentassem responder à pergunta entregue junto do enunciado da atividade, mas apenas dois alunos responderam. O aluno AC, que realizou as construções da atividade como esperado e rotulou as curvas de nível corretamente, respondeu que a casa estava à altitude de quarenta e sete metros, e o aluno AG, que não chegou a construir os segmentos, respondeu cinquenta e dois metros. A altitude da casa é de quarenta e três metros, como pode ser observado na Figura 29. Acreditamos que o aluno AC tenha percebido que a base se encontra acima dos quarenta metros e abaixo dos cinquenta metros e tenha arriscado um palpite entre estes valores, já o aluno AG, que tenha considerado a ponta do telhado da casa para responder à pergunta. Mora e Gutiérrez (2021) apontam que o emprego de uma habilidade não garante a resolução correta de uma atividade e, portanto, reconhecemos nas respostas dos alunos o emprego das habilidades espaciais mencionadas no parágrafo anterior, ainda que não tenham acertado a questão, pois os valores são próximos da altitude exata. Não sabemos, contudo, se os alunos responderam com base no mapa por eles construído, pelo posicionamento da colina em frente ao plano ou se bastou observar o objeto representado tridimensionalmente, mas acreditamos que a interação com os objetos pelo software durante a aula tenha contribuído para as respostas aproximadas. Ainda que outros alunos não tenham respondido à pergunta nesta aula, mais tarde o fizeram, como será comentado na seção 4.5.1.

### 4.3.2. Atividade II - Cilindro

A segunda atividade deste encontro ocorreu na aula do dia 5 de julho, em que os alunos iriam realizar projeções ortogonais de um cilindro em três planos de projeção (Figura 30). Antes da aula, o pesquisador já havia organizado os chromebooks sobre as mesas, distribuído os enunciados impressos e acessado o arquivo da atividade, desse modo, os alunos dispuseram de todo o período para realizar as construções. Em aulas anteriores o tempo tinha se mostrado ser um dos principais fatores que impediam os alunos de concluir suas construções, nesta atividade não foi diferente e poucos alunos conseguiram realizar as projeções do cilindro nos três planos, como solicitado no enunciado.

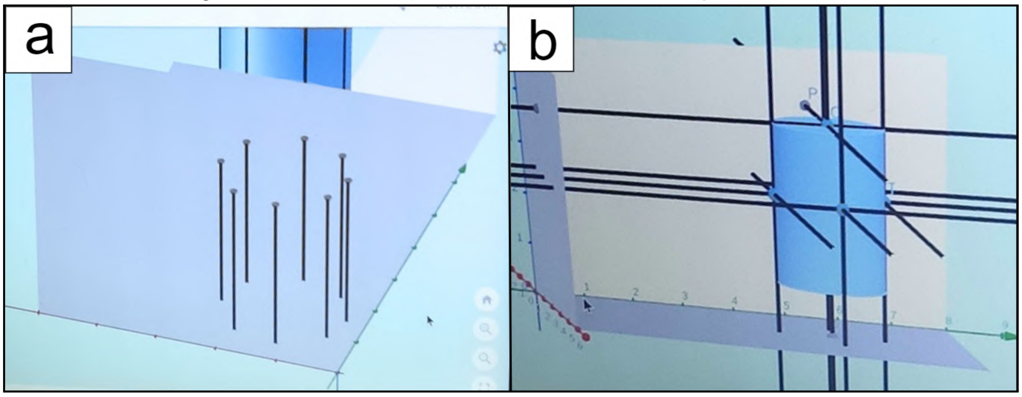
Figura 30 - O cilindro da Atividade II



Fonte: Produção do pesquisador

A função do rastro presente nessa atividade foi uma novidade para os alunos e demandou auxílio individual do pesquisador, que teve de explicar como ativá-lo algumas vezes. Por sua vez, a projeção dos pontos sobre o cilindro no plano paralelo às bases foi realizada sem grandes dificuldades pelos alunos, pois já haviam repetido esse procedimento algumas vezes na aula anterior. Aliás, pensando se tratar do mesmo procedimento da atividade do mapa topográfico, o aluno AI construiu alguns pontos sobre a circunferência da base superior do cilindro e as projeções desses pontos no plano paralelo às bases como apresentado na Figura 31 (a). O aluno não demonstrou ter reconhecido que sua construção estava incorreta quando a exibiu ao pesquisador, nem quando lhe foi mostrado o procedimento de construção com o rastro. Também nesta aula, seu *chromebook* apresentou problemas e a atividade precisou ser reiniciada, situação que também ocorrera no primeiro encontro com este e outros alunos. Tendo que recomeçar a atividade duas vezes, o arquivo final com as construções realizadas pelo aluno AI conta apenas com uma projeção de um ponto na lateral do cilindro e duas projeções de um ponto na base superior desse sólido.

Figura 31 - Construções do aluno AI e da dupla AA e AE

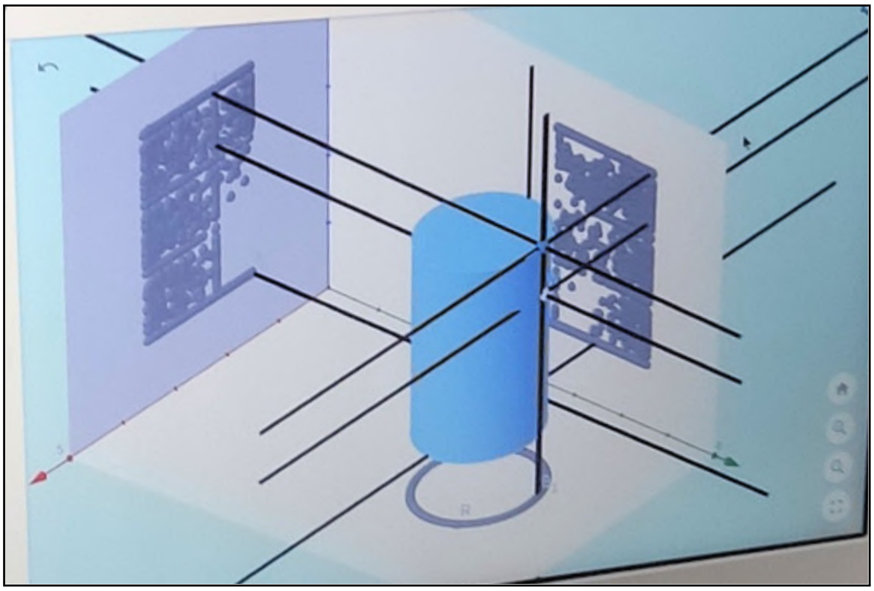



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos AC, AD, AF e AK não tiveram esse problema e mesmo assim fizeram apenas duas projeções, uma para um ponto na base superior e uma para um ponto na lateral do cilindro. Por sua vez, os alunos AA, AE e AH construíram projeções ortogonais do cilindro nos três planos do arquivo como solicitado. A dupla AA e AE inicialmente construiu um ponto na base superior e quatro pontos na superfície lateral do cilindro, com retas perpendiculares aos três planos passando por cada um destes pontos, como exibido na Figura 31 (b). Com a sugestão do pesquisador de arrastarem os pontos sobre o cilindro, os alunos perceberam que não havia necessidade de quatro pontos sobre a superfície lateral e apagaram três deles.

O aluno AH, cujas construções são apresentadas na Figura 32, construiu um ponto sobre cada circunferência das bases do cilindro e um ponto sobre a superfície lateral, bem como as projeções destes três pontos nos planos de projeção. Ao ser questionado sobre as figuras formadas pelos rastros das projeções, o aluno respondeu que se tratavam de quadrados e ovais, mas reformulou para retângulos e círculos, com relutância, pois estranhou que as projeções das bases formaram "apenas o contorno". Isto ocorreu porque os pontos que o aluno AH construiu sobre as circunferências das bases permitiram apenas o arrastar ligado sobre estas construções, que no GeoGebra são diferenciadas da região interna do círculo como um elemento à parte.

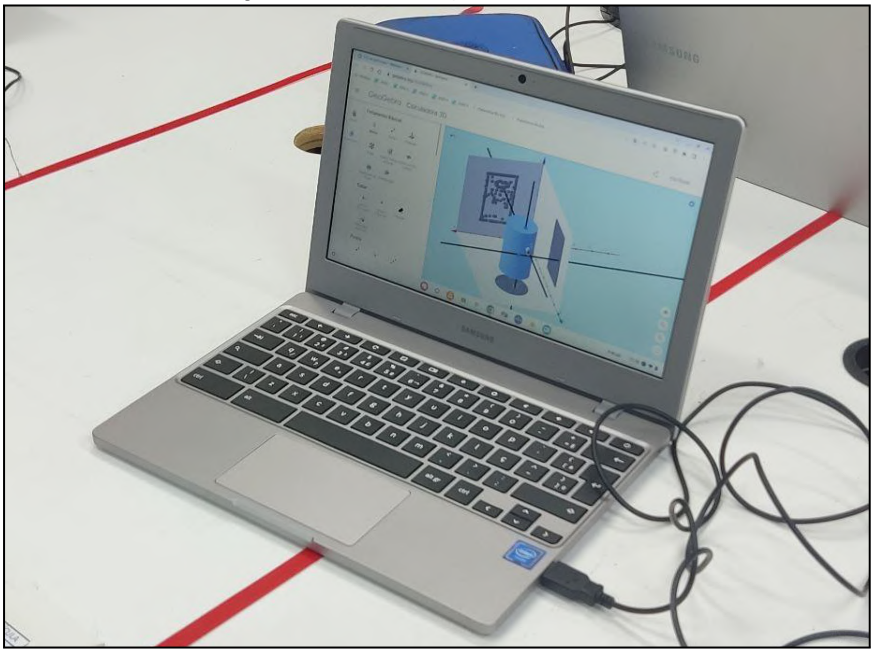
Figura 32 - Construções do aluno AH



Fonte: Dados da pesquisa

Das construções que permitiram o arrastar a fim de pintar a região interna das figuras com o rastro, pudemos observar que os alunos não chegaram a completar a pintura, apenas moveram os pontos sobre o cilindro até identificá-las em uma ação de arrastar vagueando sobre o cilindro. O ponto da projeção, no plano, sujeito ao arrastar ligado pela construção da reta perpendicular, concebe também o arrastar por um lugar geométrico pois, mesmo que o aluno não perceba, o ponto é arrastado apenas sobre a região da figura, do retângulo ou do círculo. É evidente que o ponto sobre o cilindro também é arrastado por um lugar geométrico, mas destacamos essa ação no ponto de projeção pois acreditamos que a atenção do aluno esteja voltada mais àquele movimento. Essa suposição tem fundamento nas construções do aluno AF (Figura 33), em que identificamos o arrastar guiado utilizado pelo aluno para conferir a forma de um retângulo à segunda projeção lateral construída.

Figura 33 - Construções do aluno AF



Fonte: Dados da pesquisa

Um número considerável de alunos não realizou a projeção ortogonal sobre os dois planos laterais, apenas sobre um, mas não por anteciparem que a segunda projeção seria idêntica à primeira, e sim por não terem tido tempo para construí-la. Os minutos finais da aula foram reservados às perguntas da folha do enunciado da atividade (Apêndice F) que fora entregue junto aos *chromebooks*, as quais os alunos deveriam responder com base em suas construções. Alguns alunos continuaram as construções até o fim do período, outros estavam dispersos e, por isso, apenas quatro responderam às perguntas. O Quadro 07 apresenta as respostas desses alunos.

Quadro 07 - Perguntas e respostas da Atividade II - Cilindro

| |
|---|
| P1: Quais figuras geométricas as projeções ortogonais do cilindro formam sobre os planos? |
| AC: retângulo, círculo<br><br>AH: retângulos e círculos<br><br>AI: círculo, retângulo X2 |
| P2: Apenas observando as projeções laterais, é possível concluir que se trata de um cilindro? Por quê? |
| AA: não porque teríamos que observar de cima também<br><br>AC: sim porque de lado fica um retângulo e de cima um círculo |

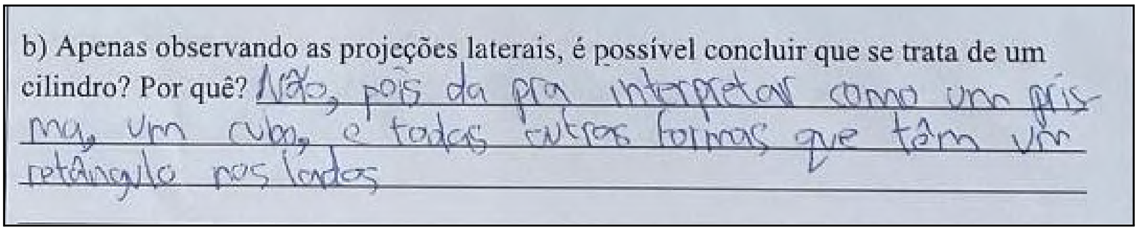
| |
|---|
| AH: não, pois da para interpretar como um prisma, um cubo, e todas outras formas que têm um retângulo nos lados<br><br>AI: no, pq são retângulos |
| P3: Qual é o número mínimo de projeções necessárias para identificar esse sólido geométrico? Explique. |
| AC: 2 lado e de cima<br><br>AH: duas, a de baixo e uma lateral. A de baixo por si pode ser interpretada como o lado de baixo de uma pirâmide circular. A lateral já foi explicada<br><br>AI: 3, pq o resto n da |

Fonte: Dados da pesquisa

Com as respostas da primeira pergunta, observamos que os alunos foram capazes de identificar as figuras que as projeções dos pontos formaram com seus rastros, o que reforça a interpretação das construções do aluno AF com o arrastar guiado feita anteriormente. À segunda pergunta quatro alunos responderam e, embora o aluno AI tenha apenas apontado as figuras que as projeções laterais formaram, os outros alunos tentaram justificar suas respostas. A resposta do aluno AA em um primeiro momento havia sido afirmativa, porém foi alterada após uma intervenção do pesquisador que apresentou ao aluno um paralelepípedo em acrílico, um dos três sólidos expostos sobre a mesa do professor durante toda a aula (os outros dois eram um cilindro e um cone), mas que provavelmente só foram percebidos pelo aluno AA, quando alcançados pelo pesquisador. Interpretamos a resposta afirmativa desse aluno por este não conseguir discriminar a imagem mental do cilindro com as imagens mentais de outros sólidos geométricos, talvez por não as possuir, já que na presença do sólido conseguiu realizar a distinção, ou pelo precário desenvolvimento das habilidades espaciais memória visual e discriminação visual.

A resposta do aluno AC leva a duas suposições nossas. A primeira é de que o aluno não tenha compreendido a pergunta ou identificado quais são os planos laterais, embora tenha escrito "de lado" em sua resposta dando a entender que reconhece as relações espaciais do cilindro com os planos. A segunda é que tenha interpretado que a pergunta tratava das projeções *da superfície lateral*, e por isso escreveu que a projeção "de lado" é um retângulo e "de cima" é um círculo, o que condiz com as projeções da superfície, se considerarmos círculo como sinônimo de circunferência. Por fim, a resposta do aluno AH (Figura 34) demonstra que este consegue discriminar o cilindro de outros sólidos e reconhece a insuficiência dessas projeções para identificá-lo. Ainda que possa ter sido um descuido do aluno AH, por citar o cubo entre as opções de sólidos possíveis, não descartamos a hipótese de que essa habilidade espacial não esteja de todo desenvolvida, visto que o cubo não é um dos sólidos cujas projeções ortogonais nos planos laterais são retângulos, quando feitas simultaneamente. Não obstante, percebemos que o aluno tem conhecimento de outras formas geométricas - ao mencionar "todas as outras formas que têm um retângulo nos lados" provavelmente está evocando imagens mentais de poliedros de maior complexidade que se adequam às projeções em questão.

Figura 34 - Resposta do aluno AH à segunda pergunta

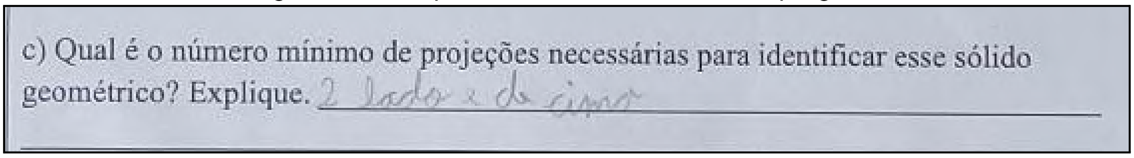

b) Apenas observando as projeções laterais, é possível concluir que se trata de um cilindro? Por quê? Não, pois da pra interpretar como um prisma, um cubo, e todas outras formas que têm um retângulo nos lados

Fonte: Dados da pesquisa

Tomamos o deslize do aluno AH para ilustrar como o GeoGebra é capaz de auxiliar na construção de imagens mentais de um objeto geométrico e na resolução desse problema: neste caso, as projeções ortogonais do cilindro em planos de projeção paralelos às bases ou às suas geratrizes são evidentes pelas construções realizadas pelo aluno. Na ausência do software, a identificação das projeções ortogonais de outros sólidos posicionados de maneira similar ao cilindro, para decidir se poderiam ser as mesmas nos planos laterais, exige um raciocínio que mobiliza algumas habilidades espaciais, por exemplo: memória visual, para lembrar das projeções do cilindro e das projeções de outros objetos espaciais visualizados por meio de imagens mentais, tomando uma ou mais projeções simultaneamente; identificação visual, para reconhecer as projeções ortogonais das imagens mentais; discriminação visual, para comparar as projeções do cilindro com as outras; rotação mental, para considerar outras projeções quando as imagens mentais estão configuradas de outro modo; e conservação da percepção, para reconhecer as relações espaciais entre os elementos das imagens mentais e suas projeções ortogonais. Este raciocínio não é nada trivial, mais ainda ao considerarmos que essas habilidades podem ser mobilizadas ao mesmo tempo e conjuntas.

Quanto à terceira pergunta, o aluno AI respondeu que seriam necessárias três projeções, apesar de ter construído apenas duas, e justificou dizendo que "porque o resto não dá". Não compreendemos o que o aluno quis dizer com "o resto", mas uma possibilidade é que ele tenha concluído que os outros sólidos que este aluno tem conhecimento não gerariam as três figuras dos planos de projeção quando projetados ortogonalmente. A resposta do aluno AC é ambígua pela sua escrita (Figura 35). O aluno pode ter escrito com o sentido de "2: de lado e de cima" ou "de 2 lados e de cima". Não conseguimos concluir sobre qual seria o sentido que o aluno deu à frase.

Figura 35 - Resposta do aluno AC à terceira pergunta


c) Qual é o número mínimo de projeções necessárias para identificar esse sólido geométrico? Explique. 2 lados e de cima

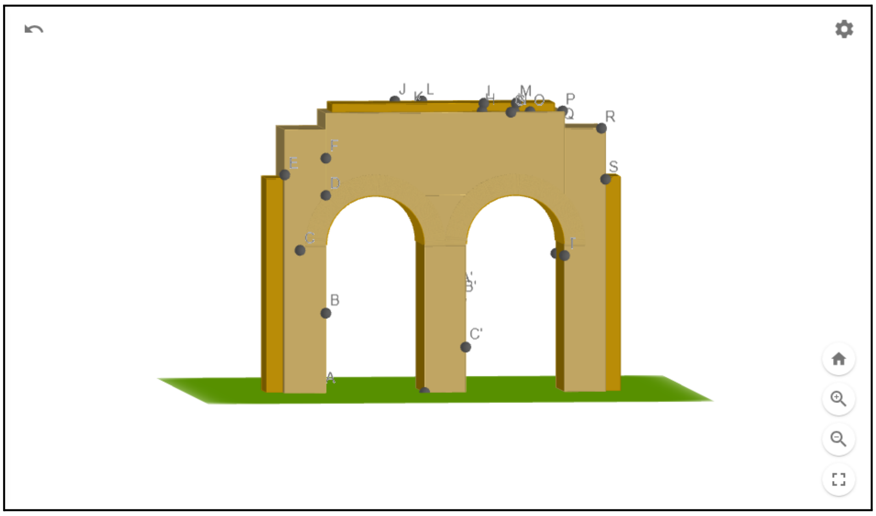
Fonte: Dados da pesquisa

Já o aluno AH respondeu que duas vistas são suficientes, mas apenas uma não. Apesar de não possuir o domínio da linguagem matemática, é claro que o aluno percebeu que apenas uma vista superior seria insuficiente para identificar que se trata de um cilindro, visto que a mesma vista poderia ser atribuída a um cone, chamado pelo aluno de pirâmide circular. Este é outro indício de que o aluno possui e emprega a habilidade espacial de discriminação visual necessária para a resolução correta dessa atividade.

### 4.3.3. Atividade III - Arco da Redenção

No dia 06 de julho ocorreu a terceira atividade de construções com o GeoGebra Calculadora 3D, na qual os alunos construíram segmentos sobre um modelo do arco do Parque Farroupilha, também conhecido por Redenção (Figura 36), a fim de obter o caminho percorrido por uma lagartixa (contexto lúdico do enunciado da atividade) e descobrir o que ela ofereceu aos alunos. A mensagem foi identificada pela imagem formada pelos segmentos construídos em ordem alfabética, mais os pontos A', B', C' e D', isto é, pelos segmentos AB, BC, CD, ..., YZ, ZA', A'B', B'C', C'D'.

Figura 36 - O arco da Redenção



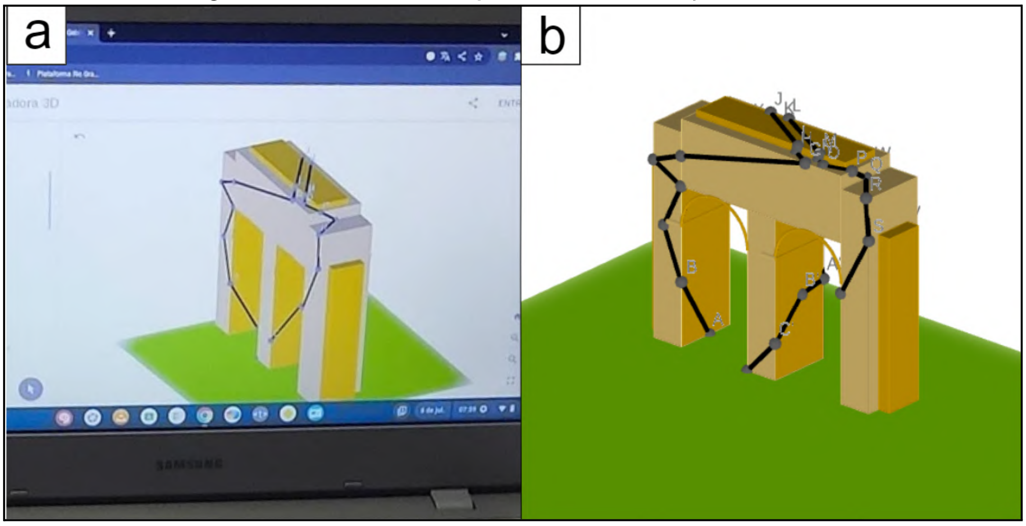
Fonte: Produção do pesquisador

Os alunos já estavam habituados a acessar os arquivos e a construir segmentos, visto que essa foi uma das ferramentas utilizadas nas três aulas anteriores que ocorreram no laboratório de informática. Por consequência, todos os alunos conseguiram construir o caminho de acordo com os pontos, como solicitado nessa atividade, mostrando que já possuem certa habilidade no uso do GeoGebra e que são capazes de realizar três ações com o mouse: a construção dos segmentos com o botão esquerdo, o arrastar para observar com o botão direito e o controle do zoom com o *scroll*, a rodinha do mouse.

Após a construção do caminho, foi solicitado aos alunos que respondessem na folha entregue com o enunciado da atividade (Apêndice E) qual a mensagem deixada pela lagartixa, o que ela oferecia aos alunos. A maioria dos alunos respondeu "uma cuia", pois conseguiram identificar a posição correta de visualização do arquivo para evidenciar a imagem de uma cuia de chimarrão que os segmentos construídos formaram sobre o arco. Os que assim responderam foram os alunos AD, AF, AG, AH e AL, enquanto a dupla formada pelos alunos AC e AJ, que realizaram a construção exibida na Figura 37 (a), respondeu "chimarrão", que tem o mesmo sentido de cuia.

As respostas que divergem um pouco dessa escrita (mas ainda reconhecem a imagem formada) foram "uma cuia 'torta'", da dupla composta pelos alunos AA e AE, e "uma cuia torta <3 (é meme sor, tá linda)" do aluno AI. Esses três alunos realizaram a atividade sentados lado a lado e acreditamos que a dupla tenha ouvido a resposta do colega e escrito do mesmo modo. Essa suposição é feita com base nas gravações de áudio feitas pelo pesquisador e porque a captura de tela realizada pela dupla apresenta a mesma imagem que os alunos que responderam "uma cuia", não havendo motivo aparente para ser caracterizada como torta. Por outro lado, a captura de tela feita pelo aluno AI nos leva a assumir que o aluno tenha chamado a cuia de torta pelo fato de não ter conseguido posicioná-la devidamente e, portanto, ter apenas observado a imagem como exibida na Figura 37 (b).

Figura 37 - As duas soluções encontradas pelos alunos




Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos AA e AE tiveram dificuldade em encontrar a mensagem deixada pela lagartixa. Enquanto rotacionavam as construções em busca da mensagem, algumas vezes passaram pelo ponto de vista que permitia a identificação da imagem da cuia, mas não a identificaram. Quando já estavam desistindo de procurar e pararam de arrastar, o pesquisador deu uma dica: "está perto", e então perceberam que a imagem já era aparente no referencial que se encontravam e exclamaram incrédulos e exaltados “é uma cuia?!”, alertando toda a turma da imagem que deveriam procurar. A dupla conseguiu identificar a imagem, mas somente após a dica do pesquisador, não percebendo sozinhos a imagem se formar e deformar na medida em que rotacionavam as construções horizontalmente; apenas foram capazes de abstrair a imagem de seu contexto quando as construções estavam paradas em uma posição que permitia a observação da imagem pouco deformada. Por isso, apontamos que a habilidade de identificação visual destes alunos não estava propriamente desenvolvida, assim como as do aluno AI, que tampouco reconheceu a possibilidade de rotacionar um pouco os objetos com o arrastar para observá-los de uma posição em que a imagem estaria mais nítida.

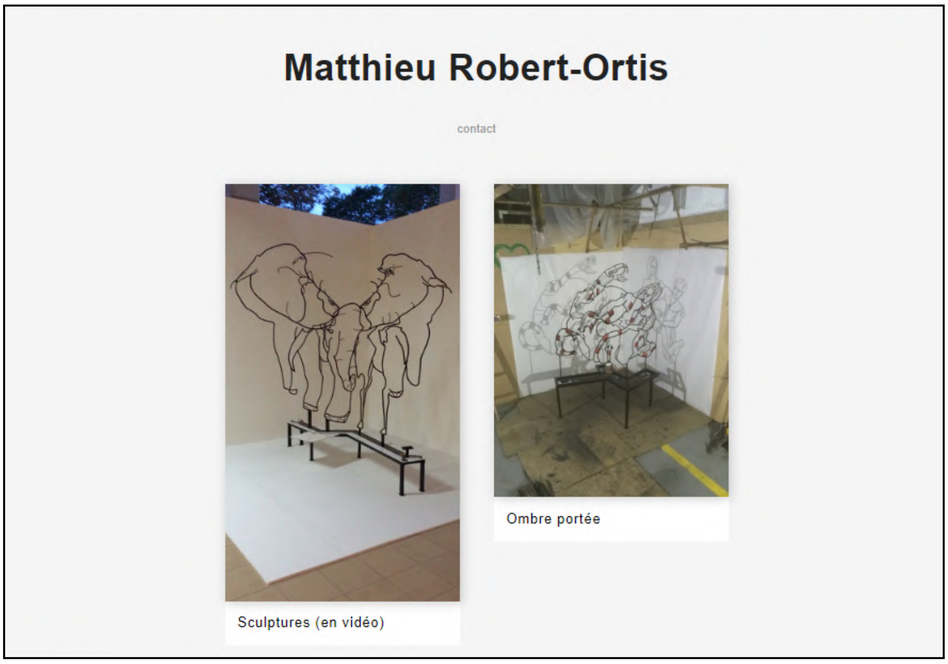
Esta atividade de construção marca o fim do terceiro encontro, mas também introduz a atividade seguinte, a IV - Arte com Projeção Ortogonal, que teve início no mesmo dia, após a finalização da primeira.

## 4.4. QUARTO ENCONTRO - ATIVIDADE IV - ARTE COM PROJEÇÃO ORTOGONAL

Planejada para ocorrer em quatro períodos de aula, a atividade IV - Arte com Projeção Ortogonal ocorreu em apenas dois: na continuação da aula do dia 6 de julho e na aula do dia 10 de julho, devido a dois imprevistos da semana que se iniciava que ocasionaram o cancelamento de algumas aulas. Optamos por organizar as atividades III e IV em encontros distintos pela segunda ter ocorrido em duas manhãs e por ter sido planejada como uma atividade de destaque no experimento da pesquisa, a qual envolveria diferentes etapas, a saber, a observação das obras de Matthieu Robert-Ortis no acervo digital do artista, a construção de uma obra inspirada utilizando a projeção ortogonal com o auxílio do GeoGebra e a apresentação das construções dos alunos em uma mostra com RA. Ainda que a terceira etapa não tenha ocorrido devido a alterações no cronograma e no planejamento, as duas primeiras ocorreram.

Assim, após finalizada a atividade III, na manhã do dia 6 de julho, o pesquisador entregou aos alunos uma folha com orientações para a realização da atividade IV (Apêndice G), que também foi explicada verbalmente à turma. Por ser de intenção que todos começassem a atividade simultaneamente, os primeiros alunos a terminarem a atividade anterior ficaram à espera dos demais, conversando e jogando em seus chromebooks. Pouco depois, o pesquisador teve dificuldade em conseguir fazer estes alunos se atentarem à aula. Ainda assim, foi solicitado a todos que acessassem o link indicado na folha do enunciado para observarem as obras de Matthieu Robert-Ortis no site do artista (Figura 38).

Figura 38 - Página inicial do site




Fonte: Matthieu Robert-Ortis[12]

Era de intenção do pesquisador tomar nota das manifestações dos alunos ao observarem as obras, assim como foi feito o registro da exclamação do aluno AA ao observar a imagem da esquerda da Figura 38 que, confuso, disse: “que horror, isso é um elefante ou o que? Um cachorro?”. Contudo, os comentários dos alunos foram menos informativos, e mais parecidos com o do aluno AJ, que apenas comentou “bonito, achei bonito”. O pesquisador, então, decidiu fazer uma intervenção e questionar os alunos sobre alguns pontos que poderiam ser elaborados. Ainda assim, os alunos pouco se manifestaram, pois, como já apontado, estavam dispersos neste momento. O Quadro 08 apresenta os diálogos que ocorreram nesta intervenção.

[12] Disponível em: https://cargocollective.com/matthieu-robert-ortis. Acesso em: 20 ago. 2023.

Quadro 08 - Discussão das obras observadas

| |
|---|
| *P: O que vocês estão vendo aí nas imagens?*<br><br>AI: Leão, um leão… Um elefante e uma-<br><br>AA: Um elefante e uma girafa.<br><br>AH: Uma cobra e duas pessoas.<br><br>Alguns alunos manifestaram que ainda não haviam observado todas as obras. Após um momento, o pesquisador voltou a questionar.<br><br>*P: Como vocês viram as imagens?*<br><br>AA e AE, em uníssono: Uma cobra e dois homens.<br><br>Como não responderam à pergunta do pesquisador, ele a reformulou.<br><br>*P: E o que tem que fazer para "ver"?*<br><br>AA: mudar o ângulo.<br><br>Apenas os alunos mais próximos do pesquisador responderam às perguntas, e o faziam um pouco inseguros de suas respostas. O pesquisador não insistiu nessa e fez a pergunta seguinte.<br><br>*P: Parece com o que a gente vem fazendo?*<br><br>AA: É.<br><br>AI: Sim.<br><br>AC acena que não com a cabeça.<br><br>*P: Não?*<br><br>AJ: Não.<br><br>AI: parece sim, ué!<br><br>Aproveitando a participação de mais alunos, o pesquisador os instigou a completarem suas respostas.<br><br>*P: Por que parece e por que não parece?*<br><br>AI: O negócio da corrida dos avião, lá, que tu mudava o ângulo, mudava o que ganha.<br><br>AA: A gente tinha que mexer pra transformar na tela. |

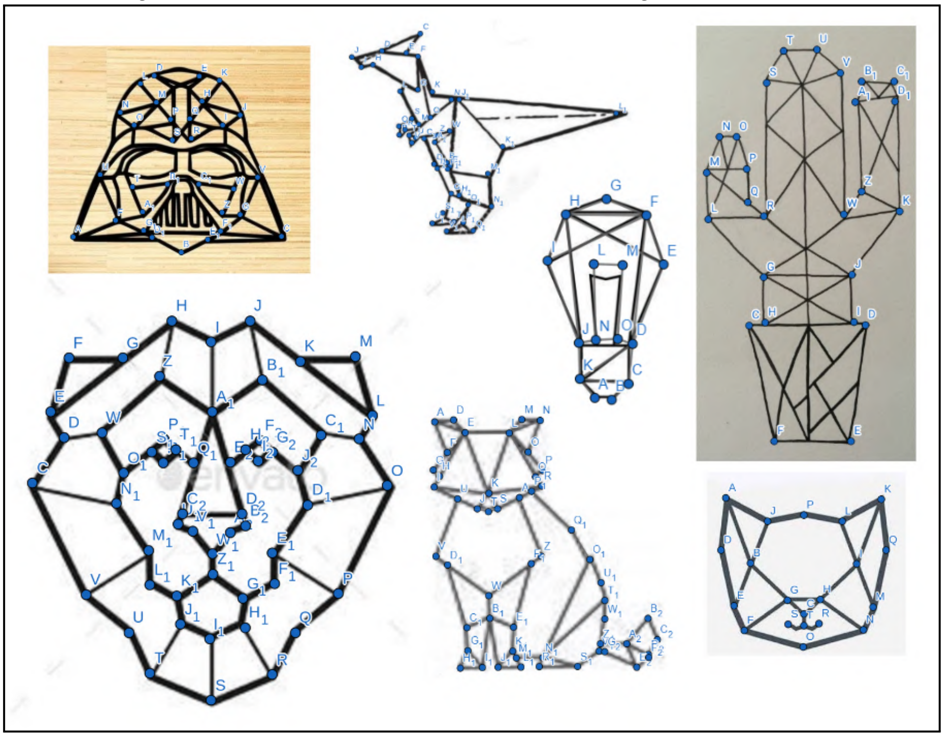
Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que os alunos AA e AI reconheceram nos vídeos em que o artista caminha em torno das obras gravando com seu celular uma ação similar à realizada na atividade do segundo encontro, em que os alunos deveriam observar os aviões de um determinado referencial para obter a resposta desejada. A associação com essa atividade seria mais clara caso estes alunos tivessem feito o uso da RA nesse encontro, mas não o fizeram. O aluno AC, que utilizou a RA, por outro lado, respondeu que não reconhecia semelhança entre as atividades realizadas e os vídeos observados, mas não quis justificar sua resposta.

Para encerrar esta etapa da atividade, o pesquisador fez uma analogia entre as obras e as atividades realizadas pelos alunos no encontro anterior, segundo a qual os arames seriam como os objetos tridimensionais, e as sombras nas paredes como as projeções desses objetos em planos de projeção. Com essa analogia também foi explicada a atividade que iniciaram a seguir: a partir das sombras - imagens nos planos de projeção - os alunos construíram os arames - objetos no espaço que, projetados ortogonalmente, formariam aquelas imagens.

A primeira tarefa foi a escolha das imagens dentre uma seleção feita pelo pesquisador. Vários alunos queriam escolher a imagem de um gato por ser uma das de menor complexidade, mas foi sugerido que escolhessem outra para evitar a repetição de imagens e produzir um acervo variado. Por conta das configurações de restrição de downloads dos *chromebooks*, o pesquisador precisou configurar cada um dos aparelhos dos alunos, que não estavam conseguindo fazer baixar a imagem escolhida. Enquanto fazia isso, os primeiros alunos auxiliados começavam as construções dos pontos sobre a imagem, inserida por eles no GeoGebra Geometria, de modo que, assim que o pesquisador terminava de configurar os últimos aparelhos para permitir o download, outros alunos solicitavam orientações de como salvar o arquivo de suas construções e como abri-lo na versão do GeoGebra Calculadora 3D. A Figura 39 apresenta as imagens escolhidas pelos alunos que participaram da pesquisa, já com os pontos construídos sobre elas.

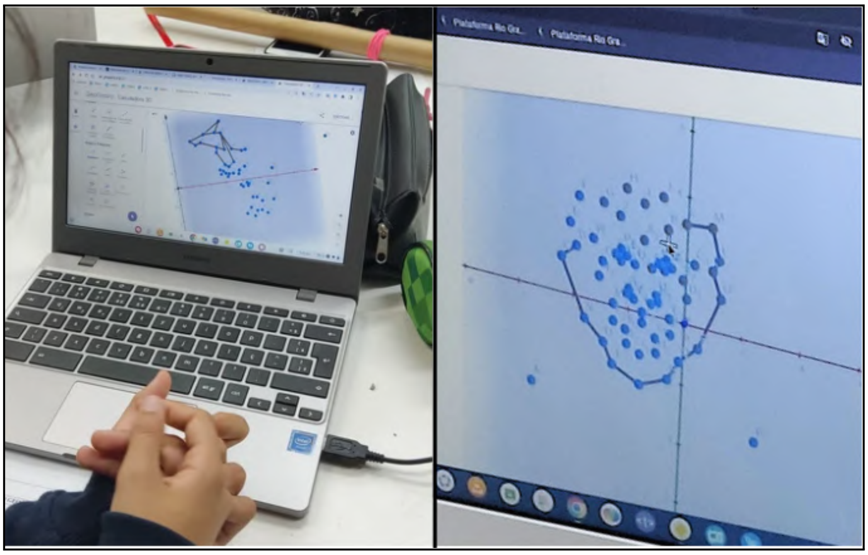
Figura 39 - Pontos construídos sobre as imagens escolhidas



Fonte: Dados da pesquisa

Constatamos que nesta atividade os alunos estavam muito dependentes das orientações do pesquisador, que passou boa parte do período respondendo à pergunta dos alunos “tá, e agora, o que a gente faz?”. Lembramos que a turma era do oitavo ano e não costumava utilizar o laboratório de informática, nem conheciam o GeoGebra antes do experimento prático, portanto, talvez tenham se sentido inseguros frente à atividade que não aparentava ser tão simples. As orientações individuais e a falta de autonomia de alguns alunos acabaram fazendo com que a atividade fosse realizada em ritmos variados e a pressa para realizar a atividade sem dar a devida atenção a seu enunciado fez com que alguns alunos construíssem elementos não solicitados, como segmentos dos arquivos mostrados na Figura 40, construídos pelo aluno AI, à esquerda, e pela dupla de alunos AA e AE, à direita. Ainda que não solicitados, os segmentos não atrapalhariam a atividade, por isso os alunos AD e AL, que também os construíram, mantiveram os segmentos em seu arquivo até terminarem as demais construções, enquanto os alunos AI, AA e AE optaram por apagá-los.

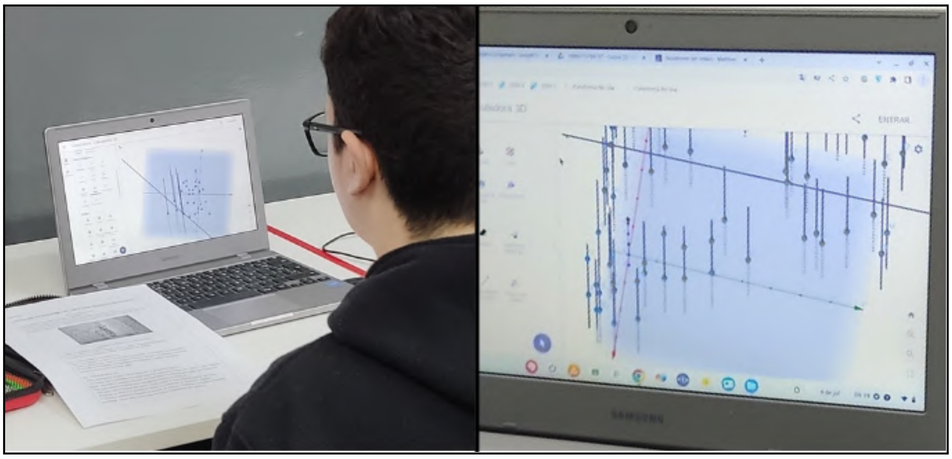
Figura 40 - Segmentos coplanares não solicitados



Fonte: Dados da pesquisa

Apesar de conseguirem utilizar as ferramentas com mais facilidade que nas primeiras aulas, ainda ocorreram construções equivocadas, seja por descuido dos alunos ou por ainda não terem tanta habilidade que os permitisse corrigir as construções indesejadas. Quando identificavam um objeto destoante, os alunos solicitavam ajuda do pesquisador para corrigi-lo ou apagá-lo, como fizeram os alunos AG e AH em relação às retas não perpendiculares ao plano mostradas na Figura 41.

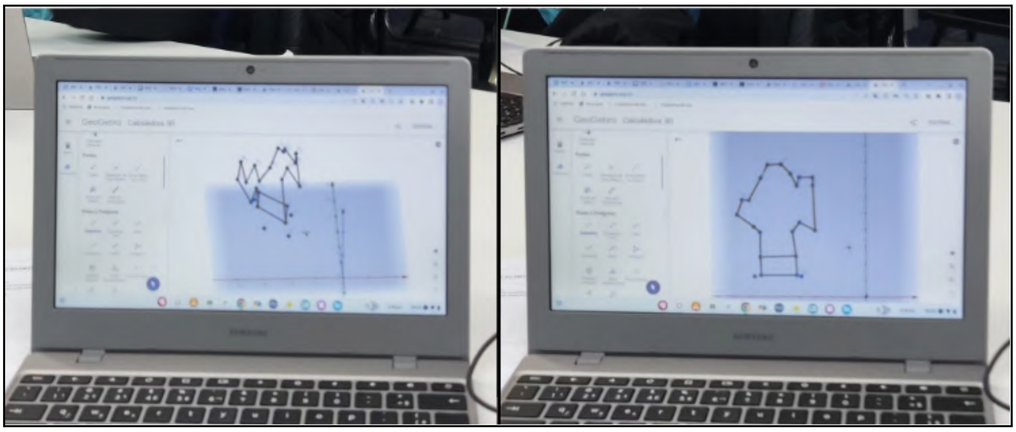
Figura 41 - Retas construídas equivocadamente



Fonte: Dados da pesquisa

Como comentado anteriormente, os alunos realizaram a atividade em ritmos diversos. Assim, ao final do primeiro dia, enquanto os alunos AC e AJ apenas iniciavam as construções das retas perpendiculares, o aluno AF tinha praticamente terminado a atividade. A Figura 42 mostra as construções desse aluno ao final da aula. Ainda que tenha realizado todas as etapas de construção, observamos que os segmentos não foram construídos de forma fiel à imagem, talvez por ter realizado a atividade apressadamente ou por não ter habilidades de visualização bem desenvolvidas, não conseguindo associar os elementos de suas construções aos da imagem escolhida. Lembramos que na atividade I este aluno também não construiu hexágonos de acordo com a colina, o que reforça nossa segunda interpretação.

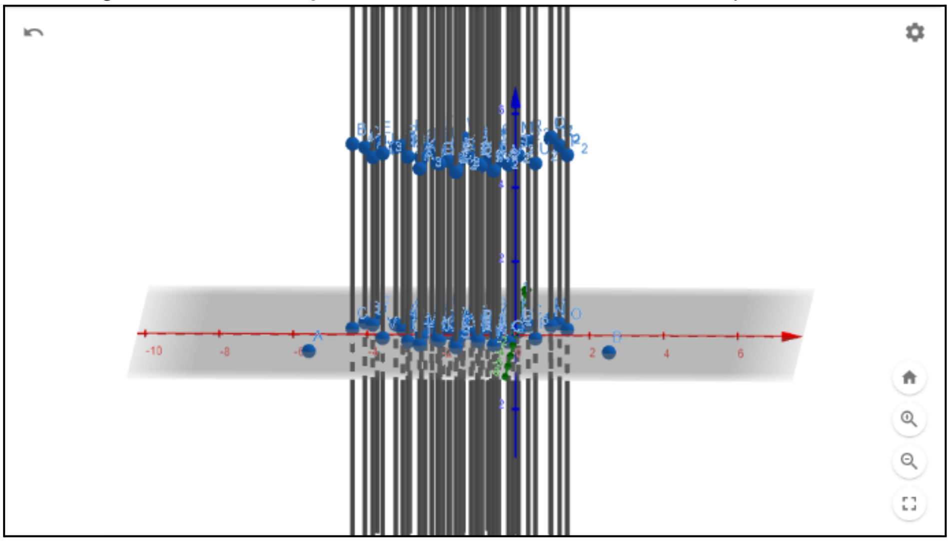
Figura 42 - Construções do aluno AF ao fim do primeiro dia



Fonte: Dados da pesquisa

Apesar de não introduzir ferramentas novas, esta atividade apresentou certa complexidade nas construções, pois exigiu que o aluno identificasse os elementos já selecionados a cada etapa de construção, o que, dependendo da escolha da imagem, foi pouco ou muito desafiador. As construções da dupla AA e AE, exibidas na Figura 43, evidenciam o quão complicado essa atividade pode ser. Os alunos estavam, no momento deste registro, construindo um ponto sobre cada uma das retas e foi nesse processo que encerraram as construções do primeiro dia, tendo que continuar a partir de aí na aula seguinte. Nesta atividade a organização é imprescindível e, também, indissociável da identificação visual, habilidade empregada pelos alunos ao identificar os elementos sobre os quais outros já haviam sido construídos e os que ainda não, mas viriam a ser. Todos os alunos construíram as retas perpendiculares passando por cada um dos pontos e os pontos sobre estas retas, ainda que alguns tomaram mais tempo que outros nessa etapa e que nem em todos os pontos tenham sido construídas as retas, por descuido dos alunos.

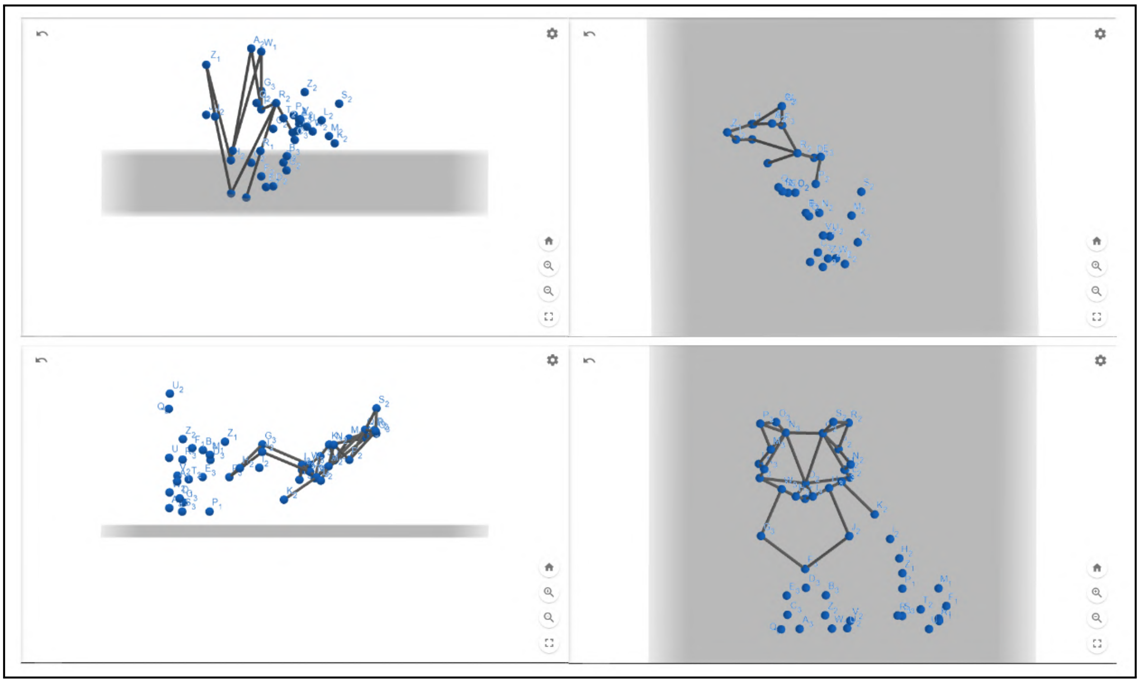
Figura 43 - Construções dos alunos AA e AE ao fim do primeiro dia



Fonte: Dados da pesquisa

A continuação da atividade se deu na aula seguinte, do dia 10 de julho, e mais uma vez o tempo se mostrou curto para a finalização das atividades, por se tratar de uma aula de um período e parte dela ser tomada para a organização dos *chromebooks* e a devolutiva dos arquivos, que foram salvos no pendrive do pesquisador ao final da aula anterior. Ainda assim, alguns alunos conseguiram finalizar suas construções, como o aluno AF, que estava adiantado e a quem foi sugerido que fizesse ajustes em suas construções para ficar mais semelhante à imagem escolhida. Outros, como os alunos AI e AH, não conseguiram terminar, ainda que estivessem dedicados à atividade, pois levaram um bom tempo escolhendo a imagem e construindo pontos sobre as retas perpendiculares. As construções destes alunos são apresentadas na Figura 44, que exibe duas vistas das obras dos alunos AI e AH, um dinossauro e um gato, respectivamente, as da esquerda sendo vistas laterais e as da direita, vistas superiores. Ainda que não tenham finalizado, percebemos que os alunos estavam realizando a atividade corretamente nas construções dos segmentos conforme as imagens e nas posições dos pontos sobre as retas com distâncias variadas em relação ao plano.

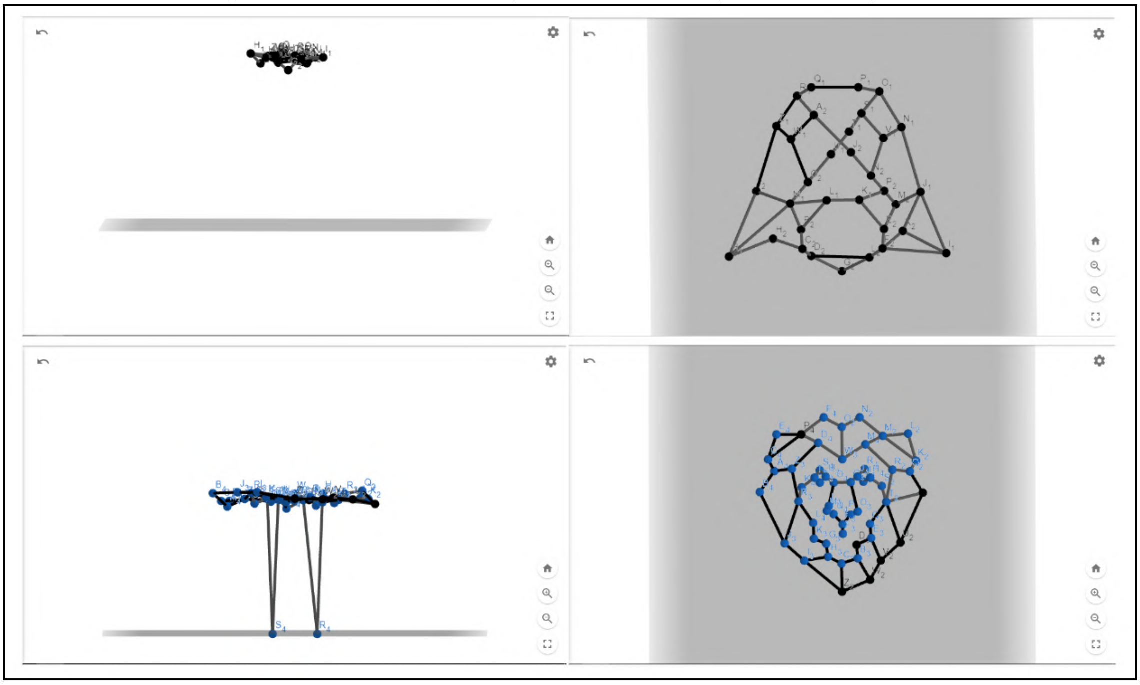
Figura 44 - Construções não finalizadas



Fonte: Dados da pesquisa

Dentre as obras finalizadas, reconhecemos que duas apresentaram um padrão semelhante de construção. Os trabalhos do aluno AG e da dupla AA e AE apresentam os elementos no espaço como se fossem construídos em um plano paralelo ao plano de projeção. A Figura 45 exibe as obras desses alunos, em duas vistas organizadas como na Figura anterior, um capacete do Darth Vader construído pelo aluno AG e um leão construído pelos alunos AA e AE. Observamos que nas construções da dupla há dois pontos ainda sobre o plano, os quais foram adicionados posteriormente enquanto os alunos construíram os segmentos e quando perceberam a ausência dos pontos. Ainda durante a aula, o pesquisador fez a sugestão de construírem retas perpendiculares e pontos nestas retas, da mesma maneira que fizeram com os demais pontos construídos no espaço, mas os alunos optaram por manter deste modo e brincaram que esses segmentos seriam os pilares da obra. Assim, passaram a estilizar as construções mudando a cor dos pontos e segmentos até o fim do período.

Figura 45 - Construções aproximadamente paralelas ao plano

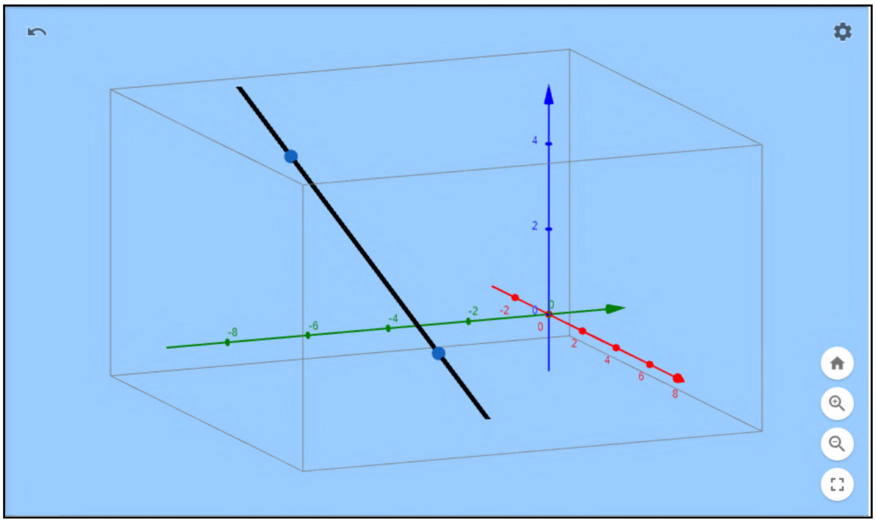


Fonte: Dados da pesquisa

Acreditamos que essas construções quase paralelas ao plano são apenas uma consequência do modo que o GeoGebra exibiu as retas perpendiculares, observadas pelos alunos de um único referencial. No GeoGebra, as retas são representadas por segmentos que se prolongam ou encurtam conforme o referencial do observador, devido ao limite de recorte[13] do software, a região interna de um paralelepípedo na qual os objetos são visíveis e manipuláveis pelo usuário (Figura 46).

[13] Clipping boundary.

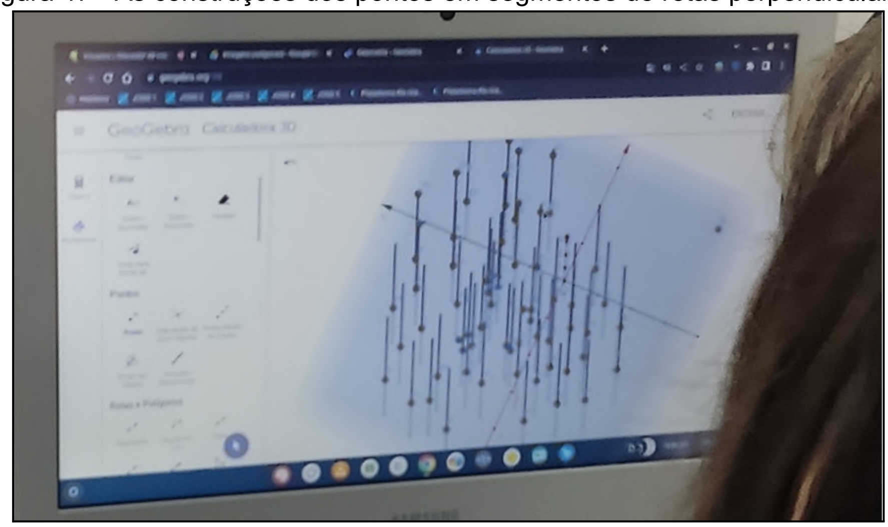
Figura 46 - O limite de recorte do GeoGebra



Fonte: Produção do pesquisador

Desse modo, entendemos que, ao construir pontos sobre as retas perpendiculares ao plano, o aluno AA os fez na extremidade superior do segmento aparente, construindo todos os pontos quase à mesma distância do plano, como pode ser observado no registro da Figura 47, e que o mesmo tenha se passado com as construções do aluno AG. Isso poderia ter sido evitado caso os alunos tivessem arrastado para observar os elementos por diferentes pontos de vista durante a construção desses pontos ou arrastados pontos sobre as retas quando já construídos para conferir à obra um emaranhamento de objetos como observado nos arames das esculturas anamórficas ao início da atividade.

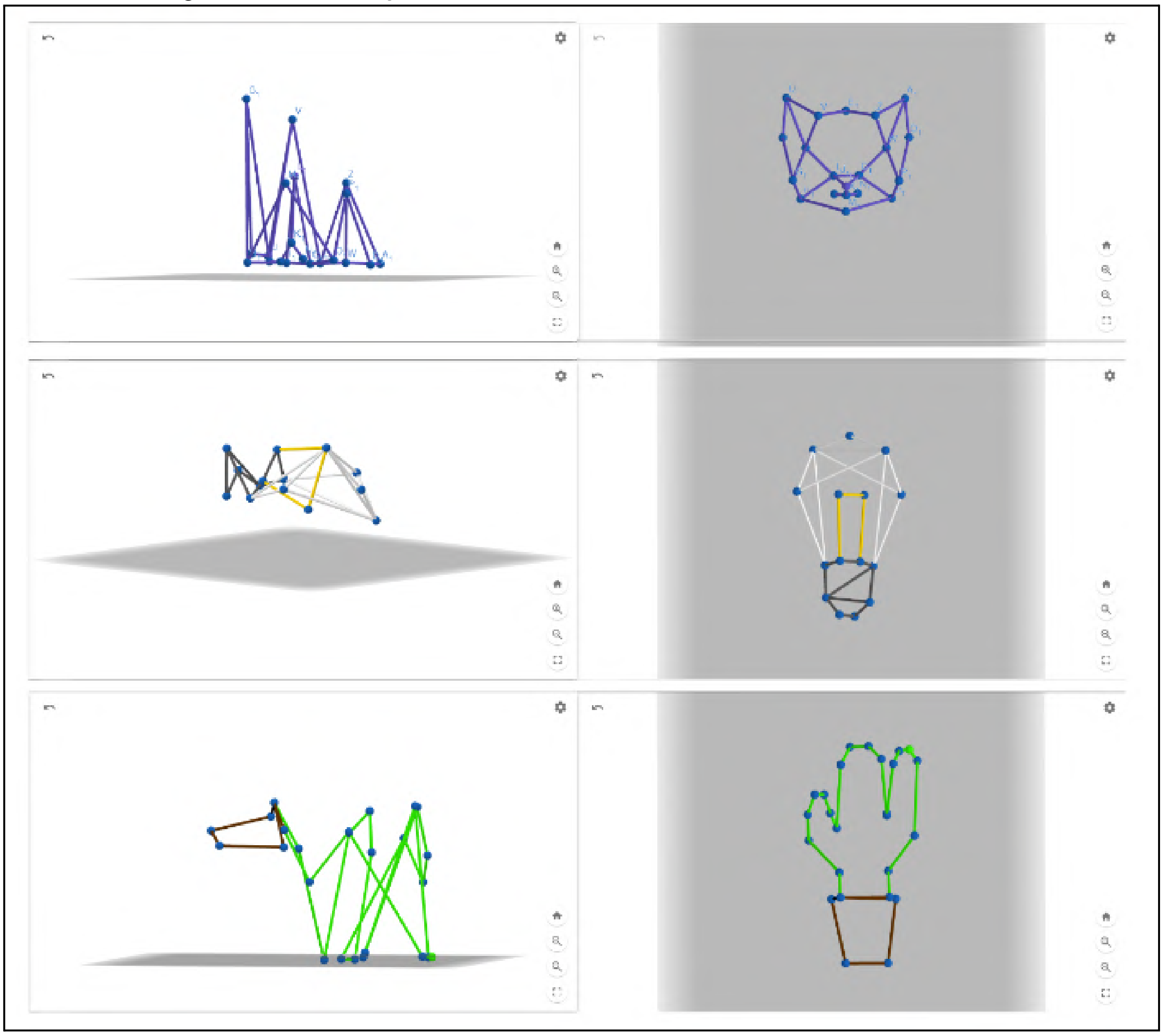
Figura 47 - As construções dos pontos em segmentos de retas perpendiculares



Fonte: Dados da pesquisa

Por sua vez, os alunos AC, AF, AJ e AL conseguiram finalizar devidamente suas obras e até mesmo as estilizaram, colorindo pontos e segmentos. A Figura 48 apresenta as construções desses alunos: um gato, pela dupla AD e AL, uma lâmpada, pela dupla AC e AJ, e um cacto, pelo aluno AF. Com um pouco de imaginação podemos até mesmo considerar as obras desses alunos como metamórficas, com o gato transformando-se em montanhas, a lâmpada em um peixinho e o cacto em um camelo.

Figura 48 - Construções finalizadas: as obras metamórficas dos alunos



Fonte: Dados da pesquisa

Apontamos que o aluno AF fez as edições sugeridas pelo pesquisador e seu trabalho final ficou mais semelhante à imagem por ele escolhida. Acreditamos também que com mais períodos destinados a essa atividade, outros alunos também conseguiriam terminar suas obras ou editá-las, como fez o aluno AF. No entanto, após esta aula e anterior ao recesso escolar havia apenas um período o qual foi utilizado para o quinto encontro.

## 4.5. QUINTO ENCONTRO - RETOMADA E ENTREVISTA

O quinto e último encontro iniciou no dia 17 de julho, a última aula anterior ao recesso escolar, no laboratório de matemática da escola, do qual o pesquisador utilizou o projetor para fazer uma retomada das atividades realizadas apresentando algumas produções dos alunos e do próprio pesquisador. Pelas circunstâncias da aula os alunos estavam outra vez agitados, conversavam bastante, mas não se manifestaram tanto em relação às atividades apresentadas. Por isso, para complementar e esclarecer os depoimentos dos alunos, bem como para questioná-los de propriedades da projeção ortogonal que se fizeram implicitamente presentes nas atividade com o GeoGebra, no dia 02 de agosto, após o recesso escolar, o pesquisador realizou uma entrevista apenas com aqueles alunos que haviam concordado em participar da pesquisa.

### 4.5.1. Retomada

Foram apresentadas aos alunos algumas de suas produções e suas manifestações foram registradas em uma gravação de áudio, posteriormente transcrita pelo pesquisador, mas por conta das conversas muitas das manifestações dos alunos terminam incompreensíveis e seus depoimentos foram perdidos.

Ao início da apresentação, o pesquisador perguntou sobre a experiência dos alunos no laboratório de informática com o GeoGebra. Os alunos AA e AK responderam que havia sido o primeiro contato com o software e o acharam "legal", já o aluno AI apontou os problemas que os *chromebooks* que utilizou durante o experimento apresentaram: "olha, eu achei, assim, levemente lagado, né. O PC não tava tankando." Com a manifestação, compreendemos que o aluno se referia ao baixo processamento dos aparelhos que algumas vezes encerravam inesperadamente o aplicativo do GeoGebra ou demoravam a realizar os comandos dos alunos. O descontentamento dos alunos frente a estes problemas também aparece nas manifestações deles quando o pesquisador apresentou a atividade do primeiro encontro em que deveriam averiguar a congruência de triângulos. O Quadro 09 apresenta as falas dos alunos.

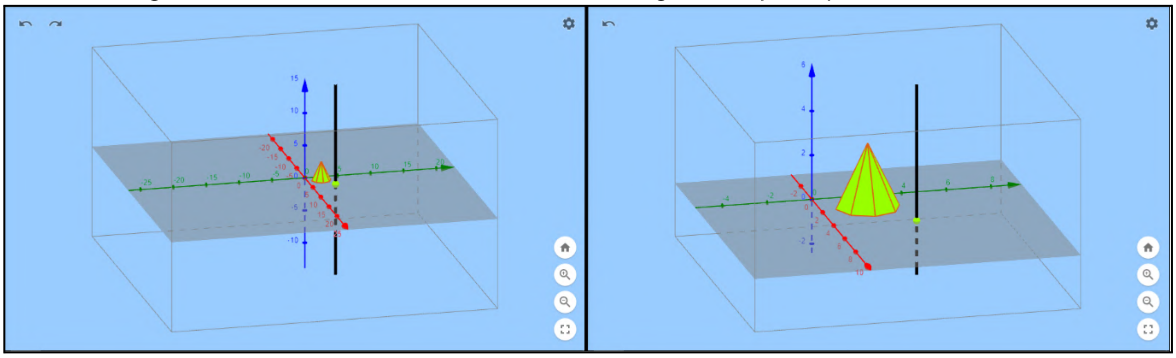
Quadro 09 - Manifestações dos alunos quanto aos problemas técnicos

| |
|---|
| *P: E essa atividade aqui?* |
| AI: Ah eu odiei, não consegui fazer nada, foi uma porc... não consegui. |
| AA: Odiei com todas as minhas forças. Quando trancava, eu queria tacar o computador na parede. |
| AI: Sim! Tava lagando, o meu só trancava o bagulho. |
| *P: Foi difícil então?* |
| AI: Pro PC principalmente. Coitado. |
| AK: Pssor, eu quase morri com esse negócio aí. |

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que as falas dos alunos se referem principalmente aos problemas técnicos apresentados pelos *chromebooks*, mas a fala do aluno AK também pode se dever ao estranhamento que sentiram frente à nova tecnologia naquele primeiro encontro. Também reconhecemos que as atividades propostas talvez foram desafiadoras para os alunos, que estavam no oitavo ano e que tinham pouco contato com essa tecnologia. Ainda do segundo encontro, foram apresentadas algumas construções de retas sobre as imagens dos gatos que os alunos realizaram. Sobre estas, a única manifestação foi do aluno AI, que comentou que um par de retas aparentemente paralelas na realidade eram concorrentes visto que, nas palavras do aluno, "depois elas vão fazer um ponto". Essa manifestação dá indícios de que o aluno possui uma imagem mental do que são retas paralelas que contempla o entendimento de que as representações reais não dão conta deste conceito abstrato, e que os objetos existem para além da sua representação, podendo as retas serem prolongadas até que se evidencie um ponto de interseção. O GeoGebra, mesmo que não apareça na fala do aluno, pode ter contribuído para a formação dessa imagem mental ao apresentar na tela do *chromebook* retas como segmentos de tamanho invariável enquanto o referencial do observador é alterado, aproximando ou se distanciando das construções. A Figura 49 ilustra essa interpretação: os mesmos objetos são apresentados nas duas imagens, porém, em momentos distintos, de modo que da esquerda à direita houve uma alteração no zoom da janela de observação fazendo com que o tamanho da pirâmide aumentasse, enquanto o do segmento que representa uma reta permanece inalterado. Essa suposição é apoiada por Gutiérrez (1996), quando o autor aponta que os softwares de MD permitem aos alunos a observação de objetos em diferentes posições, compondo, assim, um "continuum" de imagens que fundamentam a criação de imagens mentais dinâmicas.

Figura 49 - Invariabilidade do tamanho do segmento que representa uma reta



Fonte: Produção do pesquisador

Ao relembrar o segundo encontro, o pesquisador perguntou aos alunos se alguém poderia explicar do que se trata a projeção ortogonal. O aluno AH começou a responder "é uma projeção 2D de um", mas o aluno AI o interrompeu com sua resposta "é você projetar um negocinho, de um negócio 3D, né?". Antes que o pesquisador pudesse respondê-los os outros alunos começaram uma algazarra que tomou a sua atenção, e a resposta dos dois alunos só foi questionada na entrevista. Quando a atividade com RA foi apresentada, os alunos AH e AI disseram ter gostado da atividade, mas tanto o AI quanto o aluno AA também manifestaram que não utilizariam a realidade aumentada para a resolução da atividade caso pudessem escolher, pois a consideram difícil de utilizar. Vale lembrar que nenhum destes alunos utilizou a ferramenta na atividade do segundo encontro e, portanto, admitimos que suas opiniões estavam sustentadas pelo desconforto sentido frente a uma tecnologia desconhecida.

Retomando as atividades do terceiro encontro, foram apresentadas as construções dos mapas topográficos de alguns alunos. Ao reconhecer o mapa feito pelo seu grupo, o aluno AI explicou aos colegas, que haviam rotulado as curvas de nível incorretamente: "É o contrário, a borda de fora representa o estágio mais baixo da montanha. Ó, que aqui ela é menor" e apontou para o mapa apresentado. Ainda que tenha reconhecido o equívoco das construções de seu grupo, quando o pesquisador questionou a turma sobre a altitude da casa sobre a colina, o aluno AI respondeu "é 50, não é… ah eu não lembro. Não é exatamente 50, é 50 e poucos!" Apenas quando a colina foi posicionada frente ao plano com as informações das altitudes, o aluno corrigiu sua resposta: "é 42, 43. É, eu tinha falado, lembra? Ô professor, é pra falar a altura que ela começa né? Então é 43, e ela termina em 52". Por mais que o aluno tenha confundido altura com altitude e tenha respondido mais do que foi solicitado, a fala do aluno AI indica que este é capaz de interpretar as informações do arquivo e reconhecer posições e relações dos elementos espaciais contidos nele.

Ao serem apresentadas as produções dos alunos da atividade II - cilindro, alguns alunos relembraram as dificuldades que encontraram durante a construção. O Quadro 10 apresenta as manifestações dos alunos AI e AK.

Quadro 10 - Discussão da Atividade II - Cilindro

| |
|---|
| AK: Quase morri fazendo esse negócio aí, ó. O estresse que eu passei… |
| *P: Difícil?* |
| AK: Eu ia encaixar as bolinhas ali em baixo e daí saía- |
| AI: Ficava errado! Sim. |
| AK: É, ficava errado! |
| *P: Como assim?* |
| AI: A bolota ficava no lugar errado, a gente tinha que ficar arrastando um mês o negócio de volta. Aí no retângulo, foi pior. |

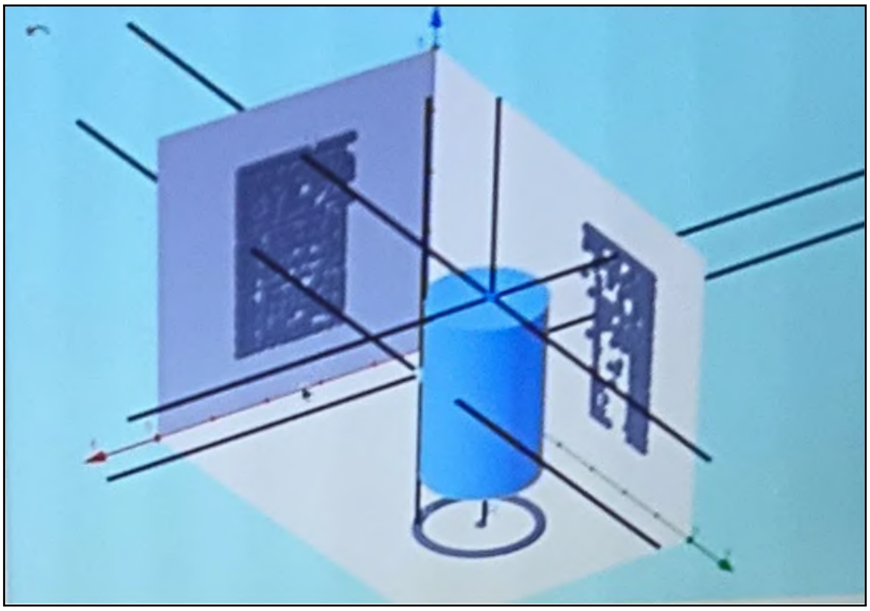
Fonte: Dados da pesquisa

Nas falas dos alunos, "bolinhas" e "bolota" referem-se aos pontos, que no GeoGebra são representados por pequenas esferas. A dificuldade relatada pelos alunos foi sentida durante a construção das projeções ortogonais da superfície lateral do cilindro, quando os alunos tentavam arrastar o ponto até a parte não visível da superfície. O software não permite que um ponto seja arrastado à parte oculta de uma superfície de revolução, pois é incapaz de distinguir se o usuário deseja que o ponto seja arrastado “pela frente” ou “por trás”. Desse modo, os alunos deveriam rotacionar as construções até que a região inicialmente oculta se tornasse visível aos seus olhos, para então arrastar o ponto sobre a superfície. Apesar da dificuldade relatada pelo aluno AK, no encontro após essa atividade em que ele esteve presente, o aluno perguntou ao pesquisador se utilizariam o recurso do rastro, pois havia gostado de construir com ele.

As produções desta atividade também foram comentadas na aula quando apresentadas aos alunos. Uma delas exibia as construções equivocadas que o aluno AI inicialmente fizera ao construir oito pontos sobre a circunferência da base do cilindro. O próprio aluno reconheceu que desse modo não seria possível obter a projeção do círculo no plano de projeção e o aluno AH completou dizendo que caso fizesse daquele modo, a projeção seria referente a um prisma octogonal. Esse aluno já havia demonstrado reconhecer vários sólidos quando mencionou, em suas respostas, "todas as outras formas que têm um retângulo nos lados". Compreendemos que o aluno AH já tenha construído imagens mentais destes poliedros e que possua as habilidades espaciais necessárias para visualizar um prisma octogonal a partir das projeções dos oito pontos, dentre as quais destacamos a identificação e a discriminação visual.

A outra imagem exibida foi das construções finais dos alunos AA e AE, como apresentado na Figura 50. Ela gerou discussão pois o aluno AI apontou que não havia rastro entre a circunferência no plano de projeção e a posição em que o ponto se encontrava, ao centro da circunferência. Apenas após alguns minutos de contemplação, percebeu que a circunferência não foi formada pelo rastro da projeção do ponto que se encontra na base do cilindro, mas sim do ponto que foi construído sobre a superfície lateral. O aluno demonstrou possuir a habilidade de memória visual ao apontar que o arrastar por uma linha é contínuo e que deveriam existir indícios do caminho percorrido pelo ponto, da circunferência ao centro. As três perguntas da atividade também foram retomadas, mas não geraram comentários e apenas o aluno AI as respondeu, todas corretamente.

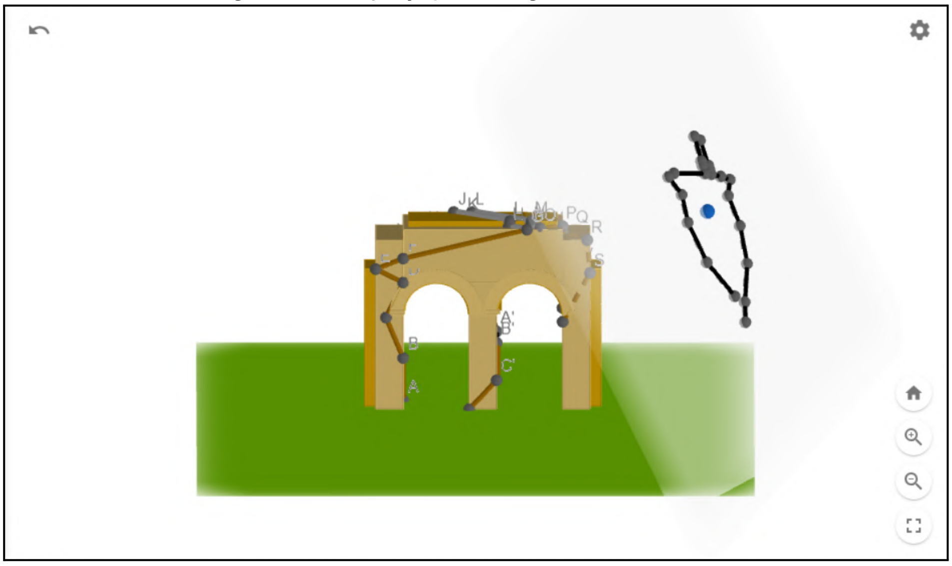
Figura 50 - Projeções dos pontos do cilindro comentadas



Fonte: Dados da pesquisa

A atividade III - arco da redenção foi apresentada mas não houve comentários ou discussões, apenas exclamações empolgadas quando o pesquisador apresentou um arquivo que exibia as projeções ortogonais da cuia em um plano de projeção que girava em torno do arco, alternado as projeções conforme sua posição, como mostrado na Figura 51.

Figura 51 - A projeção ortogonal evidenciada



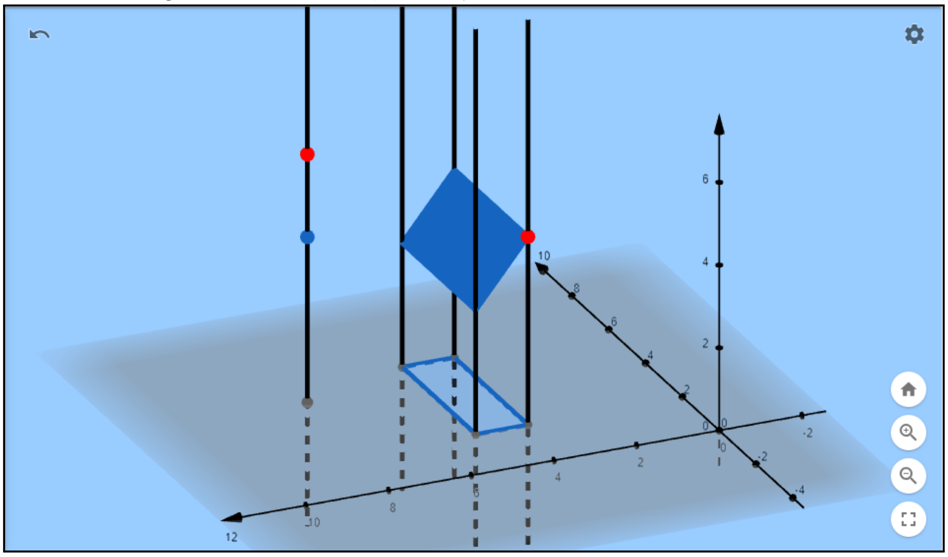
Fonte: Produção do pesquisador

Por fim, a atividade IV, que outra vez foi prejudicada pelo tempo, pois a sua apresentação precisou ser feita às pressas ao final da aula e não foram feitos comentários pelos alunos, que já estavam agitados e se preparando para deixar a sala do laboratório. O pesquisador abriu os arquivos dos alunos, e outros preparados por ele mesmo, para realizar uma dinâmica em que os alunos precisavam adivinhar as imagens que as obras de arte formavam quando observadas por uma vista superior. As únicas manifestações dos alunos foram exclamações animadas, durante a dinâmica, quando reconheciam suas obras. Não houve tempo para questioná-los sobre as construções dos pontos sobre as retas perpendiculares, mas isto foi feito como uma pergunta durante a entrevista.

### 4.5.2. Entrevista

A entrevista ocorreu no dia 02 de agosto, após o recesso escolar, durante uma aula no laboratório de informática, na qual o pesquisador fez algumas perguntas referentes à projeção ortogonal a seis dos alunos que concordaram em participar da pesquisa. Era da intenção do pesquisador entrevistar todos os alunos, mas, por conta da organização da aula, apenas os alunos AA, AB, AC, AE, AH e AI foram entrevistados, em dois grupos de três. A entrevista foi pensada após a aula da retomada, pois o pesquisador sentiu que as manifestações dos alunos não foram muito reveladoras quanto ao entendimento do conteúdo estudado nas últimas quatro semanas e que algumas falas dos alunos poderiam ser questionadas e complementadas. Assim, as perguntas da entrevista semi-estruturada foram elaboradas em vistas de questionar os alunos sobre propriedades da projeção ortogonal e concepções da mesma. Enquanto a turma realizava uma atividade no GeoGebra, os alunos entrevistados foram chamados a um canto da sala, em trios, para responderem às perguntas oralmente, podendo explorar as construções preparadas pelo pesquisador, exibidas na Figura 52.

Figura 52 - Construções exploradas durante a entrevista



Fonte: Produção do pesquisador

Os dois grupos que responderam a pesquisa foram, primeiro, os alunos AB, AH e AI e, segundo, os alunos AA, AC e AE. Destes seis alunos, apenas dois - os alunos AH e AI - sentiram-se confortáveis para responder às perguntas sem receios de julgamentos. O pesquisador iniciou a entrevista apresentando o ponto vermelho no espaço e sua projeção no plano, para, em seguida, questionar os alunos sobre a projeção de um outro ponto construído sobre a reta perpendicular ao plano que passava pelo ponto vermelho. O Quadro 11 apresenta as respostas dos alunos.

Quadro 11 - Discussão das projeções ortogonais dos pontos

*P: Ok, e se eu construir um outro ponto sobre essa reta, como vai ser a projeção desse outro ponto?*

AH: No outro… na outra parede né?

*P: Não, nesse mesmo plano.*

AH: Ué, vai ser…

AI: A mesma coisa.

AH: Eu ia dizer, a mesma coisa.

AI: Ele é perpendicular, igual à reta.

Do segundo grupo, o aluno AA foi o único a responder e, depois de confirmada a sua resposta, o pesquisador o questionou.

P: E isso ocorre por que…?

| |
|---|
| AA: Por causa da reta. Vai alinhar com o vermelho. Mas acho que isso não tem a ver… |

Fonte: Dados da pesquisa

Gostaríamos de destacar a menção que os alunos fazem à reta perpendicular em suas respostas, dando indícios de terem percebido com ela as relações espaciais entre os dois pontos e o plano, na manifestação do aluno AA pela noção de alinhamento e na caracterização equivocada do aluno AI do ponto como "perpendicular" ao plano, característica da reta a que o ponto pertence, observada na tela do *chromebook*. A relação entre um ponto do espaço e sua projeção ortogonal no plano é, portanto, evidenciada por uma reta perpendicular no GeoGebra, de modo que a relação posicional entre os pontos, característica dessa projeção, é explicitada pela construção. Este é apenas um exemplo do que Notare e Basso (2016) se referem ao afirmar que os ambientes de MD, como o GeoGebra, tornam acessíveis objetos que fora desses ambientes são tratados como abstratos.

Neste mesmo trecho da entrevista, apontamos a fala do aluno AH que indaga sobre uma “outra parede”. O pesquisador não questionou essa expressão por ter considerado uma incorreção do vocabulário matemático do aluno, ou uma analogia a um elemento do mundo real para se referir a um plano vertical, como conceituado por Santos (2014) como uma visualização contextualizada. Mais adiante na entrevista fica mais claro porque o aluno questionou em que plano considerar a projeção do segundo ponto. Essa manifestação ocorreu após o pesquisador questionar os alunos sobre que compreensão tinham da projeção ortogonal, como apresentado no Quadro 12.

Quadro 12 - Discussão da compreensão da projeção ortogonal

| |
|---|
| *P: No dia que fizemos uma revisão, perguntei a vocês o que entendiam por projeção ortogonal e algum de vocês disse que era transformar algo 3D em algo 2D.* |
| AI: 3D em 2D. |
| *P: É o caso aqui? A projeção de um ponto foi outro ponto.* |
| AI: Não sei como dizer, mas daí o ponto não vai ficar…? Ah, não sei explicar! Tipo assim... esse ponto aqui… |
| AH: Ele é 1D. Um ponto só, não… um segmento é 1D, só que um ponto é 0D. |

| |
|---|
| *P: Então não é "transformar algo 3D em 2D", certo?* |
| AI: Tá. Então é projetar algo pelo ponto de vista que tem embaixo, de cima, no caso? |
| AH: É que projeção ortogonal eu tava interpretando como se fosse todos os planos, em vez de só esse. |
| AI: Exato, eu também! É a projeção que tu tem de acordo com o plano que tu tá visualizando. |
| AH: Sim, e daí seria uma projeção, hã, 2D de algo 3D, ou 1D, ou 2D. |

Fonte: Dados da pesquisa

Interpretamos, pelas manifestações dos alunos, que pela forma como foram elaborados os arquivos das atividades I e II do terceiro encontro e as ilustrações apresentadas durante a exposição do conteúdo da projeção ortogonal no segundo, com três quadriláteros representando três planos de projeção, que os alunos podem ter sido levados a criar uma imagem mental da projeção ortogonal na qual os três "planos" estão presentes. Também identificamos a alusão ao *visualizar*, que neste caso pode ter sentido de observar vistas ortogonais dos objetos, semelhante ao que foi feito nas atividades com o GeoGebra contribuindo para a construção de uma imagem mental da projeção ortogonal como a técnica empregada na geometria descritiva que utiliza os três planos.

Dando sequência à entrevista, o pesquisador questionou a projeção ortogonal de um segmento perpendicular ao plano e quais posições relativas do segmento estão relacionadas a outras projeções do mesmo. Em seguida, ocorreu a discussão da projeção do retângulo presente no arquivo, inicialmente apresentado sem as retas e sem sua projeção ortogonal, a qual é exibida no Quadro 13.

Quadro 13 - Discussão da projeção ortogonal do retângulo, pelos alunos AH e AI

| |
|---|
| *P: Temos aqui um retângulo no espaço. Ele é 2D…* |
| AH: Aham. |
| *P: E a sua projeção…?* |
| AH: Vai ser também um retângulo! |
| AI: É? É. |

*P: É?*

AH: Pera…

O aluno AH assume o controle do mouse e realiza a rotação do retângulo no espaço em torno do lado paralelo ao plano, ao qual o vértice que permite arrasto (o ponto vermelho na Figura 52) não pertence.

AH: Uôu!

AI: A projeção dele pode ser um segmento.

*P: Quando?*

AI: Quando ele é-

AH: Pode ser um segmento, assim, ó.

O aluno faz o movimento de rotação aos poucos, até obter a posição que deseja conferir ao retângulo.

AI: Não, um pouquinho mais pro lado. Não, mas não tanto também.

AH: Aí, viu?

AI: Dá pra ser um segmento, eu não tô louco.

AH: Assim.

Fonte: Dados da pesquisa

Em um primeiro momento, os alunos assumiram que a projeção do retângulo seria outro retângulo independentemente de sua posição e, quando moveram o objeto no GeoGebra e constataram que a projeção poderia também ser um segmento, não contiveram uma exclamação de surpresa. A constatação desse fato não se deu simplesmente pela observação na tela do aparelho, visto que chegaram à conclusão antes mesmo de conferir a posição perpendicular ao retângulo, a qual produziria uma projeção acumulada no plano. Nessa passagem, os alunos pretendiam realizar o arrastar guiado para conferir uma determinada posição ao retângulo, mas, ao constatarem a propriedade, passaram a testar arrastando, até se convencerem de que realmente a projeção do retângulo poderia resultar em objetos diferentes. O movimento permitido pelo ponto era limitado ao lugar geométrico de uma circunferência e, portanto, o retângulo podia apenas ser rotacionado em torno de um eixo fixo, talvez por isso os alunos não constataram que a projeção ortogonal do mesmo retângulo poderia ainda ser outro quadrilátero, caso estivesse posicionado no espaço em outra configuração.

Além disso, os alunos AH e AI não chegaram a responder oralmente a pergunta do pesquisador, pois estavam mais empenhados a mostrar sua resposta com o GeoGebra. Na entrevista realizada com o segundo grupo, a resposta foi verbalizada, pois os alunos, acanhados, sequer utilizaram o software. O Quadro 14 apresenta as respostas desse grupo.

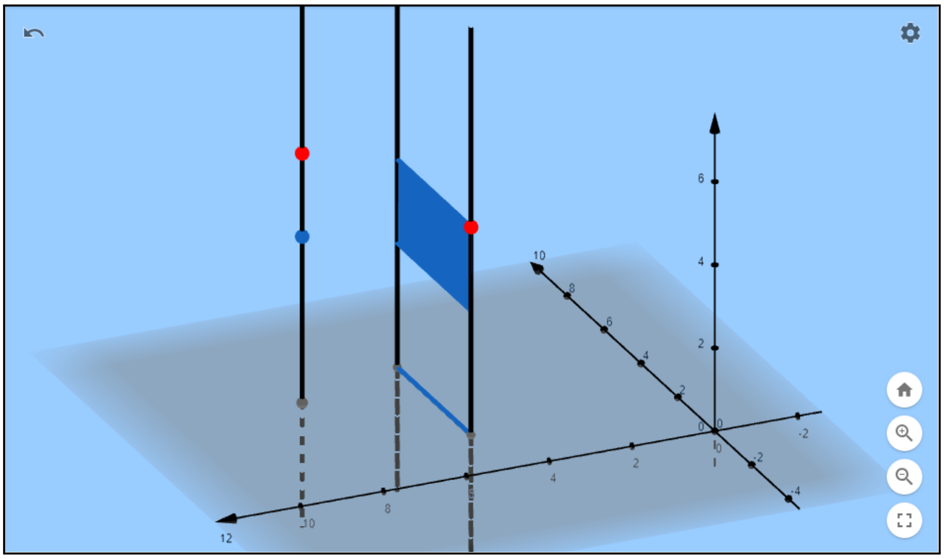
Quadro 14 - Discussão da projeção ortogonal do retângulo, pelos alunos AA e AE

| |
|---|
| *P: A projeção desse retângulo é sempre um retângulo?* |
| AA: Não. É… é… ou não, peraí. |
| AE: Não é, não! |
| *P: Quando que não é?* |
| AA: Quando chega na mesma reta ali ó… quando ele tá virado de lado. |
| *P: Quando tá virado como?* |
| AA: Ah, eu não sei explicar. |

Fonte: Dados da pesquisa

Ainda que não tenha sido elaborada, a resposta do aluno AA indica que este antecipou a projeção do retângulo como outra figura quando posicionado perpendicularmente ao plano, “de lado” nas palavras do aluno. Essa configuração da figura é atribuída quando rotacionada até a posição em que dois de seus lados sobrepõem as retas projetivas de seus vértices, como mostrado na Figura 53, e esse entendimento aparece na fala do aluno AA como “quando chega na mesma reta”.

Figura 53 - O retângulo na posição perpendicular



Fonte: Produção do pesquisador

A continuação da entrevista foi feita com perguntas que questionavam o tamanho dos retângulos. Os alunos AH e AI mostraram ter percebido que a área da projeção ortogonal do retângulo, no movimento de rotação realizado, poderia ser menor ou igual à área do retângulo no espaço, dependendo da posição que este se encontrava, mas não poderia ser maior. Os demais alunos entrevistados não se manifestaram quanto a estas perguntas. Assim, foi finalizada a entrevista, o quinto encontro e, com ele, o experimento prático.

# 5. CONCLUSÃO

Iniciamos nossa pesquisa com a pergunta "como a matemática dinâmica pode contribuir para o desenvolvimento da visualização espacial?" e, antes de propormos o experimento que nos daria meios de respondê-la, precisamos revisitar a literatura em busca da fundamentação teórica que embasaria toda a investigação, recorremos a autores que discorrem sobre a matemática dinâmica e sobre a visualização espacial e também a trabalhos correlatos nos quais se fez uso do software GeoGebra. Posteriormente, planejamos o experimento prático que se deu em cinco encontros que buscaram: o primeiro, introduzir o software, o segundo, apresentar o objeto de estudo da Geometria, o terceiro, realizar atividades de construções em um ambiente de MD, o quarto, realizar uma atividade que aliasse a matemática com as artes e, por fim, o quinto, fazer uma síntese dos trabalhos concretizados.

A descrição dos encontros e a análise dos dados produzidos pelos participantes da pesquisa nos permitiram apontar algumas evidências de como o software GeoGebra, que concebe um ambiente de MD, contribui para o desenvolvimento da visualização espacial, seja na completude de uma atividade em que os alunos empregaram habilidades espaciais, ou na tentativa de completá-la, seja nas manifestações dos próprios alunos ou nas interpretações dadas pelos pesquisadores às suas produções.

No primeiro encontro averiguamos que os alunos, recém apresentados ao GeoGebra, fizeram uso do software como um ambiente estático, embora um aluno já tenha dado indícios de empregar habilidades espaciais na resolução da terceira atividade. No segundo encontro, a atividade com RA revelou que a turma não estava preparada para essa ferramenta, em questões técnicas, por não dispor de muitos aparelhos em que a RA operasse e, talvez por consequência, em questões comportamentais, por ainda não saberem interagir com a ferramenta da maneira mais proveitosa. As atividades de desenho, que não fizeram uso do software, indicaram que os alunos possuem, em diferentes graus de desenvolvimento, as habilidades espaciais de rotação mental e discriminação visual. A primeira delas, no terceiro encontro, passa a ser uma ferramenta do GeoGebra, ou uma ação pelo recurso do arrastar para observar, de modo que os alunos encontram apoio no mundo real para terem um maior controle da habilidade, que na ausência do software seria compreendida apenas no imaginário.

Outras habilidades também se amparam no potencial evidenciador do GeoGebra que permite aos alunos explorar e observar propriedades e relações de objetos geométricos na tela dos aparelhos. Dentre elas destacamos quatro que foram intencionalmente associadas às atividades do terceiro encontro: o reconhecimento de posições e de relações espaciais na atividade I - Topografia, a discriminação visual na atividade II - Cilindro e a identificação visual na atividade III - Arco da Redenção. Na primeira atividade observamos alunos capazes de realizar todas as construções corretamente, mas incapazes de relacionar as informações do arquivo com os objetos construídos, um indicativo do baixo desenvolvimento da habilidade de reconhecimento de relações espaciais. Na segunda, alunos capazes de utilizar as ferramentas do GeoGebra a seu favor, que pelo arrastar guiado evidenciam a figura antecipada na projeção do cilindro, e alunos que discriminam visualmente sólidos geométricos a partir de suas projeções ortogonais. Também dedicamos um parágrafo a ilustrar como o GeoGebra toma parte na resolução desta atividade, isto é, como colabora à visualização em um exercício de discriminação visual.

Na terceira atividade observamos os alunos mais apropriados do software e utilizando ferramentas e recursos a fim de melhor observar as construções com que interagiam. No quarto encontro damos destaque à habilidade espacial de identificação visual que se fez presente durante as etapas de construção das obras dos alunos, e enfrentamos talvez a maior ou mais persistente das adversidades aos encontros do experimento prático: a falta de tempo. Esse obstáculo já era conhecido pelos trabalhos correlatos e havia sido levado em conta no planejamento das atividades, mesmo assim não se pode antever todas as variáveis que podem contribuir ou atrapalhar o transcorrer de uma aula, e certos imprevistos exigiram adaptações no cronograma da pesquisa.

No quinto encontro tivemos poucas manifestações da turma a respeito de suas produções, ainda assim em suas falas há mais evidências das visualizações que realizaram e considerações quanto aos problemas que os *chromebooks* apresentaram e as dificuldades que os alunos tiveram durante a apropriação do

GeoGebra. Na entrevista complementar, identificamos outra contribuição do GeoGebra à visualização, que ocorre pela complementação das manifestações dos alunos por elementos gráficos apresentados na tela, os quais são apontados com dedos ou manipulados pelos alunos com as ferramentas do software, de modo a exibir aquilo que não conseguem pôr em palavras no processo de tradução das imagens mentais em representações externas.

Também interpretamos que o GeoGebra contribui ao processamento visual e à criação das imagens mentais por permitir ao aluno observar como os objetos em estudo se comportam ou aparentam ao serem movidos, girados, aproximados ou distanciados. Essa interação possibilitada no ambiente de MD contribui aos processos da visualização com uma gama de informações referentes aos objetos de estudo, as quais serão utilizadas na criação e na interpretação de imagens mentais dos mesmos. Assim, as atividades realizadas com o GeoGebra poderão sustentar os processos de visualização dos participantes na medida em que se constituem experiências ricas em representações externas dinâmicas que serão utilizadas para lidar com imagens mentais, mesmo na ausência do software.

Ao refletirmos sobre o experimento prático, como um todo, não podemos deixar de apontar algumas reformulações que gostaríamos de ter feito. Uma delas diz respeito ao cronograma, que apesar de ter se estendido a nove aulas, acreditamos que seria de grande proveito aumentar os períodos de cada atividade para que todos os alunos tivessem a oportunidade de concluí-las e debatê-las. Aliás, as discussões sobre as atividades, a visitação ao acervo de Matthieu Robert-Ortis e as obras produzidas pelos alunos poderiam ter sido enfatizadas pelo pesquisador, visto as escassas manifestações dos alunos que se limitaram a um pequeno grupo. Por fim, acreditamos que a ferramenta da RA poderia ter tido grande impacto na investigação caso a decisão de mantê-la nas atividades fosse tomada e a instalação dos pacotes necessários aos aparelhos celulares dos alunos fosse orientada. Por conta das circunstâncias da pesquisa, no entanto, não foi esta a decisão do pesquisador.

Mas em trabalhos futuros certamente fará uso dessa ferramenta, bem como das demais tecnologias digitais, pois encontrou na vivência dessa investigação inspiração para fazer matemática acontecer também nos laboratórios de informática das escolas públicas. O processo de criar atividades foi muito significativo para o pesquisador, que encontrou no experimento a chance de compartilhar um pouco de si, do lugar em que vive e de seus interesses, e de mostrar a matemática junto das coisas que o inspiram. Mas ainda maior foi sua satisfação ao ver os alunos se divertindo com as atividades, ouvir seus comentários e expressões ao descobrirem algo novo, presenciar seu empenho e interesse de explorar a matemática com o GeoGebra, de estudar a Geometria de uma forma não convencional.

Com essa investigação encontramos evidências de como o GeoGebra participa da visualização espacial dos alunos e como contribui para o desenvolvimento das habilidades espaciais mobilizadas nos processos de visualização. Dessa forma, acreditamos ter atingido os objetivos da investigação, ainda que estes tenham se adequado ao abreviamento da realidade aumentada nas atividade propostas, conseguimos apontar potencialidades do software GeoGebra para a visualização da projeção ortogonal.

## REFERÊNCIAS

ANDRADE, V. G. **O Desenvolvimento do Aplicativo RA.Geo:** Contribuições da Realidade Aumentada para o Ensino de Geometria Espacial. 2017. 95 f. Dissertação (Mestrado em Educação para Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Goiás, Jataí, 2017.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. São Paulo: Grupo Autêntica, 2019.

ARZARELLO, F. *et al*. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 34, p. 66-72, 2002.

BASSO, M. V. A.; NOTARE, M. R. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 13, n. 2, dez. 2015.

BISHOP, A. J. Spatial Abilities and Mathematical Thinking. In: **Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Education**. Boston: Birkhäuser, p. 176-178 1983.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GUTIÉRREZ, Á. R. Procesos y Habilidades en Visualización Espacial. **Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría**. México: CINVESTAV-PNFAPM, p. 44-59, 1992.

GUTIÉRREZ, Á. R. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In: GUTIÉRREZ, Á. R.; PUIG, L. (Eds.). **Proceedings of the 20th PME Conference**. Valência: Addenda, v. 1, p. 3-19, 1996.

GUTIÉRREZ, Á. R. Visualization in school mathematics analyzed from two points of view. In: Mix, K. S.; Battista, M. T. (Eds.). **Visualizing mathematics. The role of spatial reasoning in mathematical thought**. Cham: Springer, p. 165-169, 2018.

GUTIÉRREZ, Á. R.; JAIME, A. Desafíos actuales para la Didáctica de las Matemáticas. **Revista Innovaciones Educativas**. San José: UNED, v.23, n.34, p. 198-203, jun. 2021.

GUTIÉRREZ, Á. R. *et al.* Visualization abilities and complexity of reasoning in mathematically gifted students' collaborative solutions to a visualization task. A networked analysis. In: Mix, K. S.; Battista, M. T. (Eds.). **Visualizing**

**mathematics. The role of spatial reasoning in mathematical thought**. Cham: Springer, p. 309-337, 2018.

INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICAL INSTRUCTION. **The 26th ICMI study: advances in geometry education**. 2022.

JANZEN, E. A. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de Geometria Dinâmica.** 2011. 194 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática Em Revista**. Blumenau: SBEM, v.3, n.4, p. 3-13, 1995.

MORA, M.; GUTIÉRREZ, Á. R. Habilidades de visualización en niños de primaria con alta capacidad matemática. In: GUTIÉRREZ, Á. R. et al. (Eds.). **Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática**. Logroño: Universidad de La Rioja, p. 107-114, 2021.

NOTARE, M. R.; BASSO, M. V. de A. Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. **RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 14, n. 2, dez. 2016.

OLIVEIRA, O. G. de. **O Uso do GeoGebra 3D Com Realidade Aumentada no Ensino de Geometria Espacial**. 2021. 139 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2021.

SANTOS, A. H. dos. **Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização**. 2014, 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

SIBEMBERG, L. S. **Geogebra 3D no ensino médio: uma possibilidade para a aprendizagem de projeção ortogonal**. 2019. 142 f. TCC (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

SOUSA, R. T. de; AZEVEDO, I. F. de; ALVES, F. R. V. O GeoGebra 3D no estudo de projeções ortogonais amparado Pela Teoria das Situações Didáticas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, Londrina, v. 14, n. 1, p. 92-98, 2021.

SUA, C. F.; GUTIÉRREZ, Á. R.; JAIME, A. Análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica 3d y realidad aumentada. Em Diago, P. D.; Yáñez, D. F.; González-Astudillo, M. T.; Carrillo, D. (Eds.). **Investigación en Educación Matemática XXIV**. Valencia: SEIEM, p. 579-586, 2021.

UCHIUMI, T. O. **A visão de estudantes sobre formas geométricas: uma abordagem via fotografias e GeoGebra**. 2021. 67 f. TCC (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A - Termo de Consentimento da Escola

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**
Av. Bento Gonçalves 9500 - Agronomia – 91509-900 Porto Alegre – RS - BRASIL
Tel: (051)3316-6189/3316-6225 FAX: (051)3316-7301
e-mail: matematica@mat.ufrgs.br Internet: www.mat.ufrgs.br

TERMO DE CONSENTIMENTO DA ESCOLA

A Escola ________________________________________________, neste ato representada pela direção por intermédio do presente instrumento, autoriza Lucas Daniel Retore, brasileiro, estudante, CPF XXX.XXX.XXX-XX, a aplicar a proposta de ensino: *Visualizando a projeção ortogonal: matemática dinâmica e realidade aumentada* com alunos de 8º ano do Ensino Fundamental. A Escola está ciente de que a referida proposta de ensino é base para a elaboração da monografia para o trabalho de conclusão de curso do Lucas Daniel Retore, a qual é uma exigência parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, e que é orientado pela Prof.ª Dr.ª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti.

O autorizado, por sua vez, se obriga a manter em absoluto sigilo a identidade dos discentes da escola que participarão da aplicação da proposta de aula.

Porto Alegre, ___ de ____________ de 2023.

__________________________________
Estudante

__________________________________
Orientadora

__________________________________
Direção da Escola

# APÊNDICE B - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido


**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**
Av. Bento Gonçalves 9500 - Agronomia – 91509-900 Porto Alegre – RS - BRASIL
Tel: (051)3316-6189/3316-6225 FAX: (051)3316-7301
e-mail: matematica@mat.ufrgs.br Internet: www.mat.ufrgs.br


## Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Convite para participação em pesquisa

Prezado(a) Sr(a). ____________________________________________,

O(A) aluno(a) ______________________________________________, está sendo convidado(a) a participar voluntariamente da pesquisa *Visualizando a projeção ortogonal: matemática dinâmica e realidade aumentada* que está sendo desenvolvida pelo pesquisador Lucas Daniel Retore, o qual é estudante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Essa pesquisa é orientada pela Prof.ª Dr.ª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem você poderá contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (XX) XXXXX-XXXX ou e-mail XXXXXXXXXXXX@ufrgs.br.

A pesquisa está sendo desenvolvida para compor a monografia do trabalho de conclusão de curso do pesquisador, exigência parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. O objetivo da pesquisa é investigar as potencialidades do uso do software GeoGebra e da modalidade realidade aumentada para a mobilização de habilidades espaciais na resolução de atividades de geometria com projeção ortogonal.

Para isto, solicitamos a especial colaboração do(a) aluno(a) na participação da pesquisa, a qual ocorrerá por meio de atividades em aula, das quais seu trabalho, suas discussões com os colegas e suas produções serão analisadas sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. Estima-se que sejam investidas 10 horas para a realização das atividades propostas, organizadas em 6 aulas de duração de 1 hora e 40 minutos.

O uso das informações decorridas da participação dele(a) (produção escrita/atividades desenvolvidas no computador/gravação em áudio) será feito apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas por um código alfanumérico (como, por exemplo, “o aluno A-12”). No caso de fotos e filmagens, elas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Av. Bento Gonçalves 9500 - Agronomia – 91509-900 Porto Alegre – RS - BRASIL
Tel: (051)3316-6189/3316-6225 FAX: (051)3316-7301
e-mail: matematica@mat.ufrgs.br Internet: www.mat.ufrgs.br

também serão utilizadas exclusivamente em atividades acadêmicas, editadas para manter o anonimato. Todas as informações fornecidas pelo(a) aluno(a) serão armazenadas sob responsabilidade do pesquisador por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Ao participar da pesquisa, o(a) aluno(a) não correrá riscos de saúde e caso venha a se sentir desconfortável ou tenha dificuldade em utilizar o software e resolver as questões, saiba que o pesquisador estará acompanhando o desenvolvimento das atividades e poderá esclarecer dúvidas e orientar possíveis caminhos de resolução.

Já com relação aos benefícios da pesquisa, o(a) aluno(a) terá a oportunidade de aprender conteúdos da Geometria de uma maneira diferente ao fazer investigações utilizando o computador e o celular. Poderá conhecer e utilizar o software GeoGebra, fazer construções com matemática dinâmica e assim aprofundar conteúdos já vistos na escola, além de resolver problemas e aprender sobre a projeção ortogonal, uma técnica de representação gráfica empregada em diversas profissões e que está presente em situações cotidianas e tem sido tema recorrente de questões do ENEM.

A participação do(a) aluno(a) não envolve nenhum tipo de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Sua participação é muito importante e é voluntária. O(A) aluno(a) poderá recusar a participar da pesquisa a qualquer momento, não havendo prejuízo de nenhuma forma para ele(a) se essa for sua decisão. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por você assinado e do Termo de Assentimento assinado pelo(a) aluno(a).

Caso necessite de qualquer esclarecimento, peço que entre em contato comigo, o pesquisador, a qualquer momento pelo telefone (XX) XXXXX-XXXX ou pelo e-mail XXXXXXXX@gmail.com. Estou disponível para prestar informações adicionais.

Caso tenha dúvidas acerca de procedimentos éticos, você também poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone +55 (51) 3308-3738 e-mail etica@propesq.ufrgs.br.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Av. Bento Gonçalves 9500 - Agronomia – 91509-900 Porto Alegre – RS - BRASIL
Tel: (051)3316-6189/3316-6225 FAX: (051)3316-7301
e-mail: matematica@mat.ufrgs.br Internet: www.mat.ufrgs.br

Obrigado pela sua colaboração.

Eu, ________________________________________, R.G. _______________, responsável pelo(a) aluno(a) _____________________________________, da turma ________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada *Visualizando a projeção ortogonal: matemática dinâmica e realidade aumentada*, desenvolvida pelo pesquisador Lucas Daniel Retore.

Autorização do Uso de Imagem:

( ) SIM, autorizo a divulgação de imagem do(a) aluno(a) _________________ _______________, com uso de efeitos para a não identificação da sua pessoa, em atividades acadêmicas.

( ) NÃO autorizo a divulgação de imagem do(a) aluno(a) ________________ _______________.

Porto Alegre, ____ de _____________ de _____.

Assinatura do(a) Responsável: _______________________________________

Assinatura do Pesquisador: ___________________________________

Assinatura da Orientadora: ___________________________________

## APÊNDICE C - Termo de Assentimento

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**
Av. Bento Gonçalves 9500 - Agronomia – 91509-900 Porto Alegre – RS - BRASIL
Tel: (051)3316-6189/3316-6225 FAX: (051)3316-7301
e-mail: matematica@mat.ufrgs.br Internet: www.mat.ufrgs.br

### Termo de Assentimento

Convite para participação em pesquisa

Prezado(a) Aluno(a),

Você está sendo convidado(a) a participar voluntariamente da pesquisa *Visualizando a projeção ortogonal: matemática dinâmica e realidade aumentada* que está sendo desenvolvida pelo pesquisador Lucas Daniel Retore, o qual é estudante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Essa pesquisa é orientada pela Prof.ª Dr.ª Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem você poderá contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (XX) XXXXX-XXXX ou e-mail XXXXXXXXXXXX@ufrgs.br.

A pesquisa está sendo desenvolvida para compor a monografia do trabalho de conclusão de curso do pesquisador, exigência parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. O objetivo da pesquisa é investigar as potencialidades do uso do software GeoGebra e da modalidade realidade aumentada para a mobilização de habilidades espaciais na resolução de atividades de geometria com projeção ortogonal.

Para isto, solicitamos sua especial colaboração na participação da pesquisa, a qual ocorrerá por meio de atividades em aula, das quais seu trabalho, suas discussões com os colegas e suas produções serão analisadas sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. Estima-se que sejam investidas 10 horas para a realização das atividades propostas, organizadas em 6 aulas de duração de 1 hora e 40 minutos.

O uso das informações decorridas de sua participação (produção escrita/atividades desenvolvidas no computador/gravação em áudio) será feito apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas por um código alfanumérico (como, por exemplo, “o aluno A-12”). No caso de fotos e filmagens, elas também serão utilizadas exclusivamente em atividades acadêmicas, editadas para manter seu

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
Av. Bento Gonçalves 9500 - Agronomia – 91509-900 Porto Alegre – RS - BRASIL
Tel: (051)3316-6189/3316-6225 FAX: (051)3316-7301
e-mail: matematica@mat.ufrgs.br Internet: www.mat.ufrgs.br

anonimato. Todas as informações fornecidas por você serão armazenadas sob responsabilidade do pesquisador por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Ao participar da pesquisa, você não correrá riscos de saúde e caso venha a se sentir desconfortável ou tenha dificuldade em utilizar o software e resolver as questões, saiba que o pesquisador estará acompanhando o desenvolvimento das atividades e poderá esclarecer suas dúvidas e orientar possíveis caminhos de resolução.

Já com relação aos benefícios da pesquisa, você terá a oportunidade de aprender conteúdos da Geometria de uma maneira diferente ao fazer investigações utilizando o computador e o celular. Poderá conhecer e utilizar o software GeoGebra, fazer construções com matemática dinâmica e assim aprofundar conteúdos já vistos na escola, além de resolver problemas e aprender sobre a projeção ortogonal, uma técnica de representação gráfica empregada em diversas profissões e que está presente em situações cotidianas e tem sido tema recorrente de questões do ENEM.

Sua participação não envolve nenhum tipo de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Sua participação é muito importante e é voluntária. Você poderá recusar a participar da pesquisa a qualquer momento, não havendo prejuízo de nenhuma forma para você se essa for sua decisão. Sua colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por você assinado e do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido assinado por um de seus responsáveis.

Caso necessite de qualquer esclarecimento, peço que entre em contato comigo, o pesquisador, a qualquer momento, pelo telefone (XX) XXXXX-XXXX ou pelo e-mail XXXXXXXX@gmail.com. Estou disponível para prestar informações adicionais.

Caso tenha dúvidas acerca de procedimentos éticos, você também poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone +55 (51) 3308-3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br.

Obrigado pela sua colaboração.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**
Av. Bento Gonçalves 9500 - Agronomia – 91509-900 Porto Alegre – RS - BRASIL
Tel: (051)3316-6189/3316-6225 FAX: (051)3316-7301
e-mail: matematica@mat.ufrgs.br Internet: www.mat.ufrgs.br

Eu, ______________________________________________, declaro por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada *Visualizando a projeção ortogonal: matemática dinâmica e realidade aumentada*, desenvolvida pelo pesquisador Lucas Daniel Retore.

Autorização do Uso de Imagem:
( ) SIM, autorizo a divulgação de minha imagem, com uso de efeitos para a não identificação da minha pessoa, em atividades acadêmicas.
( ) NÃO autorizo a divulgação de minha imagem.

Porto Alegre, ____ de ______________ de _____.

Assinatura do(a) Aluno(a): ____________________________________
Assinatura do Pesquisador: ____________________________________
Assinatura da Orientadora: _____________________________________

## APÊNDICE D - Cronograma do Experimento Prático e Frequência dos Participantes

| Encontro | | Data | Duração | AA | AB | AC | AD | AE | AF | AG | AH | AI | AJ | AK | AL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Introdução ao GeoGebra | | 22/06 | 100 min | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P |
| Conhecendo a projeção ortogonal | Início | 26/06 | 50 min | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | F |
| | Finalização | 28/06 | 95 min | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | F | P |
| Atividades de construção no GeoGebra I, II e III | Atividade I | 03/07 | 50 min | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | F | P |
| | Atividade II | 05/07 | 45 min | P | F | P | P | P | P | F | P | P | P | P | P |
| | Atividade III | 06/07 | 50 min | P | F | P | P | P | P | P | P | P | P | F | P |
| Atividade IV | Início | 06/07 | 50 min | P | F | P | P | P | P | P | P | P | P | F | P |
| | Finalização | 10/07 | 50 min | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P |
| Retomada | | 17/07 | 50 min | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P | P |
| Entrevista | | 02/08 | 15 min | P | P | P | - | P | - | - | P | P | - | - | - |

Presença (ALUNX)

## APÊNDICE E - Enunciados das Atividades I - Topografia e III - Arco da Redenção

| GRUPO: |
|---|
| **ATIVIDADE NO GEOGEBRA 3D – TOPOGRAFIA** |
| COMO ACESSAR O MATERIAL DA ATIVIDADE?<br>- Escrever e acessar pelo navegador: geogebra.org/u/tccdoproflucas<br>- Abrir o arquivo TOPOGRAFIA clicando nas reticências e em "abrir com GeoGebra App" |
| ENUNCIADO DA ATIVIDADE:<br>- Fazer a projeção ortogonal da montanha sobre o plano alfa para obter um mapa topográfico.<br>- Utilizar a ferramenta "reta perpendicular" para construir as projeções sobre o plano.<br>- Colocar as informações sobre a altitude da montanha em cada curva de nível<br>- Baixar o arquivo no formato .ggb com o nome dos alunos do grupo.<br><br>- Responder: qual a altitude aproximada da casa sobre a montanha? _______________ |

| GRUPO: |
|---|
| **ATIVIDADE NO GEOGEBRA 3D – ARCO DA REDENÇÃO** |
| COMO ACESSAR O MATERIAL DA ATIVIDADE?<br>- Acessar pelo navegador: geogebra.org/u/tccdoproflucas<br>- Abrir o arquivo ARCO DA REDENÇÃO clicando nas reticências e em "abrir com GeoGebra App" |
| ENUNCIADO DA ATIVIDADE:<br>Sobre o arco da Redenção caminhou uma lagartixa, deixando um rastro por onde passava. Construa esse caminho que ela fez sobre o arco. Com o rastro que deixou pelo caminho ela ofereceu algo, o que era? ____________________________<br><br>- Construir segmentos ligando os pontos sobre o arco, em ordem alfabética.<br>- Encontrar a mensagem deixada pela lagartixa movendo a tela.<br>- Baixar o arquivo no formato .png mostrando a mensagem e renomear a foto com o nome dos alunos do grupo. |

## APÊNDICE F - Enunciado da Atividade II - Cilindro

GRUPO:

**ATIVIDADE NO GEOGEBRA 3D – PROJEÇÃO DE SÓLIDO GEOMÉTRICO**

COMO ACESSAR O MATERIAL DA ATIVIDADE?
- Escrever e acessar pelo navegador: geogebra.org/u/tccdoproflucas
- Abrir o arquivo CILINDRO clicando nas reticências e em "abrir com GeoGebra App"

ENUNCIADO DA ATIVIDADE:
- Fazer as projeções ortogonais do cilindro sobre os planos do arquivo para obter suas vistas ortográficas. Para isso...

- Utilizar a ferramenta "ponto em objeto" para construir um ponto no cilindro;
- Utilizar a ferramenta "reta perpendicular" para construir a projeção desse ponto sobre um plano;
- Marcar o ponto ao pé da perpendicular – este ponto é a projeção ortogonal do ponto no cilindro;
- Clicar no ponto da projeção, e nas reticências selecionar "exibir rastro";
- Utilizar a ferramenta "mover" para arrastar o ponto sobre o cilindro.

- Baixar o arquivo no formato .ggb com o nome dos alunos do grupo.
- Responder:

a) Quais figuras geométricas as projeções ortogonais do cilindro formam sobre os planos? ______________________________________________________________
______________________________________________________________

b) Apenas observando as projeções laterais, é possível concluir que se trata de um cilindro? Por quê? ______________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

c) Qual é o número mínimo de projeções necessárias para identificar esse sólido geométrico? Explique. ______________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________
______________________________________________________________

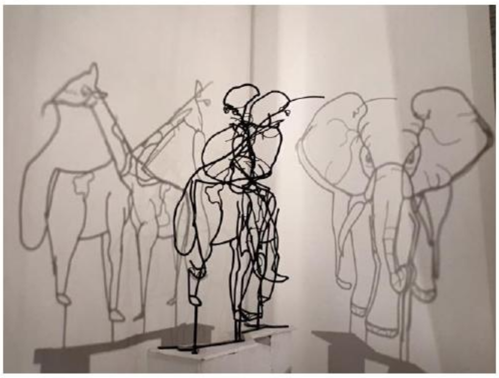
## APÊNDICE G - Enunciado da Atividade IV - Arte com Projeção Ortogonal

GRUPO:

**ATIVIDADE NO GEOGEBRA 3D – ARTE COM PROJEÇÃO ORTOGONAL**

PRÉ-ATIVIDADE:

- Acessar pelo navegador: https://is.gd/fh0u6U
- Abrir o Documento com o link para redirecionar ao site do artista
- Observar as obras de Matthieu Robert-Ortis, artista francês que cria esculturas metamórficas em arame. Vamos nos inspirar nas obras dele para criar uma arte com projeção ortogonal. ☺



ORIENTAÇÕES DA ATIVIDADE:

I – ESCOLHENDO A ARTE

- Volte ao primeiro link acessado e abra a pasta “imagens poligonais”
- Escolha uma das imagens e faça o download da mesma

II – GEOGEBRA GEOMETRIA

- Pelo navegador acesse o GeoGebra Geometria ( geogebra.org/geometry )
- Com a ferramenta “inserir imagem” insira a imagem escolhida e baixada
- Em cada extremidade de segmento da imagem, construa um ponto
- Baixe o arquivo no formato .ggb

III – GEOGEBRA 3D

- Pelo navegador acesse o GeoGebra 3D ( geogebra.org/3d )
- No menu (as 3 barrinhas no canto superior esquerdo) clique em “abrir” e em “arquivo local”. Escolha o arquivo baixado do GeoGebra Geometria para abrir na versão 3D
- Em cada ponto construa uma reta perpendicular ao plano xy
- Em cada reta construa um ponto. Tente variar a altura desses pontos nas retas
- Esconda as retas e os pontos do plano xy utilizando a “Janela de álgebra”
- Construa segmentos ligando os pontos do espaço conforme a imagem poligonal escolhida (dica: uma certa vista facilita a visualização dos pontos)