

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

LUCÍOLA CAMPESTRINI

**CONTRIBUIÇÕES PARA MÉTODOS DE  
CONTROLE BASEADOS EM DADOS  
OBTIDOS EM APENAS UM  
EXPERIMENTO**

Porto Alegre  
2010

**LUCÍOLA CAMPESTRINI**

**CONTRIBUIÇÕES PARA MÉTODOS DE  
CONTROLE BASEADOS EM DADOS  
OBTIDOS EM APENAS UM  
EXPERIMENTO**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

ORIENTADOR: Prof. Dr. Alexandre Sanfelice  
Bazanella

Porto Alegre  
2010

**LUCÍOLA CAMPESTRINI**

**CONTRIBUIÇÕES PARA MÉTODOS DE  
CONTROLE BASEADOS EM DADOS  
OBTIDOS EM APENAS UM  
EXPERIMENTO**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC –  
Florianópolis, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral, UNICAMP  
Doutor pela Universidade Estadual de Campinas – Campinas, Brasil

Prof. Dr. Péricles Rezende Barros, UFCG  
Doutor pela University of Newcastle – Newcastle, Austrália

Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho, PUCRS  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS  
Doutor pela Université Paul Sabatier – Toulouse, França

Prof. Dr. Luís Fernando Alves Pereira, UFRGS  
Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil

Coordenador do PPGEE: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella

Porto Alegre, junho de 2010.

## RESUMO

Este trabalho apresenta algumas contribuições para métodos de controle baseados em dados obtidos em apenas um experimento, a fim de torná-los mais atrativos quanto à aplicação em processos industriais. A partir de dados obtidos em experimentos no processo, os métodos baseados em dados estimam os parâmetros de um controlador de estrutura fixa por meio da minimização do erro entre a saída do sistema real em malha fechada e uma saída desejada, dada por um modelo de referência. O método *Virtual Reference Feedback Tuning* - VRFT é o método mais expressivo na literatura que estima os parâmetros do controlador usando apenas uma batelada de dados, mas o mesmo apresenta alguns inconvenientes em sua formulação que limitam a sua aplicação. Neste trabalho, o método VRFT é modificado de forma que se obtém um método VRFT flexível, o qual minimiza um critério flexível, pelo qual são estimados tanto os parâmetros do controlador quanto os parâmetros do numerador do modelo de referência; assim, caso a planta que se deseja controlar seja de fase não-mínima, o critério é capaz de estimar esses zeros e os mesmos devem ser incluídos no modelo de referência que será utilizado no projeto do controlador. Além disso, em sistemas com ruído, o método VRFT necessita de uma variável instrumental para que a estimativa dos parâmetros do controlador seja não-polarizada. Para eliminar a necessidade de usar variáveis instrumentais, um novo método de controle baseado em dados é proposto, o qual é descrito sob a ótica de identificação. Este método pode ser visto como a identificação de um sistema, no qual a função de transferência do processo é reparametrizada em função do controlador ideal e do modelo de referência. Além disso, estende-se a teoria de projeto de experimento com solução baseada em restrições LMI para o caso da identificação do controlador ótimo. Todas essas contribuições são ilustradas através de simulações.

**Palavras-chave:** Controle baseado em dados, Identificação de sistemas, Processos de fase não-mínima, Projeto de experimentos.

## ABSTRACT

This work presents some contributions to data-based control methods where data is obtained in only one experiment, in order to make them more attractive to industrial process applications. Using data from experiments on the process, data-based methods estimate the parameters of fixed structure controller, through the minimization of the error between the closed loop response of the system and the desired response, given by a reference model. The Virtual Reference Feedback Tuning - VRFT method is the most expressive method in the literature that estimates the controller parameters using only one batch of data, but this method presents some inconveniences in its formulation which limit its application. In this work, the VRFT method is modified in order to obtain a flexible VRFT method, which minimizes a flexible criterion, and then obtains the controller parameters together with the parameters related to the reference model numerator; thus, if the plant which we want to control is non-minimum phase, then the criterion is able to estimate these zeros and they need to be included in the reference model that will be used in the control design. Besides, when dealing with noisy systems, the VRFT method needs an instrumental variable so the controller parameters estimate is unbiased. In order to eliminate this necessity, a new data-based control is proposed in this work, which is formulated using identification theory. This method can be seen as the identification of a system, where the process transfer function is reparameterized as a function of the ideal controller and the reference model. Besides, we extend the experimental design theory where the problem is solved using LMI constraints to the case of the optimal controller identification method. All these contributions are illustrated through simulations.

**Keywords:** Data-based control, System Identification, Non-minimum phase processes, Experiment design.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b> . . . . .	7
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	10
<b>LISTA DE ABREVIATURAS</b> . . . . .	11
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> . . . . .	13
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	14
<b>2 PROJETO DE CONTROLADORES BASEADO EM DADOS</b> . . . . .	18
<b>2.1 Introdução</b> . . . . .	18
<b>2.2 Definições do sistema</b> . . . . .	18
<b>2.3 Problema de controle baseado em otimização</b> . . . . .	20
2.3.1 Controle baseado em modelo de referência . . . . .	21
2.3.2 Controle de mínima variância . . . . .	23
<b>2.4 Controle baseado em dados</b> . . . . .	24
2.4.1 IFT - <i>Iterative Feedback Tuning</i> . . . . .	25
2.4.2 FDT - <i>Frequency Domain Tuning</i> . . . . .	26
2.4.3 CbT - <i>Correlation based Tuning</i> . . . . .	27
2.4.4 VRFT - <i>Virtual Reference Feedback Tuning</i> . . . . .	28
<b>2.5 Estruturas de controladores</b> . . . . .	32
2.5.1 Controladores baseados no princípio do modelo interno . . . . .	32
2.5.2 Controladores lineares nos parâmetros . . . . .	33
2.5.3 Controladores PI/PID . . . . .	33
<b>2.6 Considerações Finais</b> . . . . .	34
<b>3 CONCEITOS DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS</b> . . . . .	36
<b>3.1 Introdução</b> . . . . .	36
<b>3.2 Conjunto de dados</b> . . . . .	36
3.2.1 Restrições ao conjunto de dados . . . . .	37
3.2.2 Informação do conjunto de dados . . . . .	37
<b>3.3 Classe de modelos</b> . . . . .	38
3.3.1 Estruturas de modelos . . . . .	39
3.3.2 Restrições à classe de modelos escolhida . . . . .	39
3.3.3 Identificabilidade da estrutura de modelos (37) . . . . .	40
<b>3.4 Identificação por minimização do erro de predição</b> . . . . .	40
3.4.1 Estimativa de parâmetros . . . . .	41
3.4.2 Incertezas nas estimativas dos parâmetros . . . . .	42

<b>3.5</b>	<b>Projeto de experimento</b>	44
3.5.1	Sinais de entrada comumente aplicados	45
3.5.2	Minimização de variância	46
3.5.3	Projeto de experimento para controle robusto	47
3.5.4	Problema de dimensão finita	49
<b>3.6</b>	<b>Considerações Finais</b>	54
<b>4</b>	<b>MÉTODO DE SINTONIA BASEADO EM REFERÊNCIA VIRTUAL PARA PROCESSOS DE FASE NÃO-MÍNIMA</b>	56
<b>4.1</b>	<b>Introdução</b>	56
<b>4.2</b>	<b>Critério flexível para o método VRFT</b>	57
4.2.1	Aplicação do método em sistemas com ruído	59
4.2.2	Procedimento baseado em dois passos	60
<b>4.3</b>	<b>Exemplos ilustrativos</b>	62
4.3.1	Processo com um zero de fase não-mínima	62
4.3.2	Processo com dois zeros de fase mínima	69
<b>4.4</b>	<b>Considerações finais</b>	71
<b>5</b>	<b>IDENTIFICAÇÃO DO CONTROLADOR ÓTIMO</b>	73
<b>5.1</b>	<b>Introdução</b>	73
<b>5.2</b>	<b>Método de identificação do controlador ótimo</b>	73
5.2.1	Controle baseado em modelo de referência	74
5.2.2	Controle de mínima variância	75
<b>5.3</b>	<b>Propriedades da estimativa</b>	76
5.3.1	O caso ideal - $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$	77
5.3.2	O caso “quasi-ideal” - $\tilde{\mathcal{C}}_d \in \mathcal{C}$	83
<b>5.4</b>	<b>Características do método VRFT</b>	84
<b>5.5</b>	<b>Exemplos ilustrativos</b>	86
5.5.1	Controlador com estrutura fixa	86
5.5.2	Controlador com ação integral fixa	95
<b>5.6</b>	<b>Considerações finais</b>	98
<b>6</b>	<b>PROJETO DE EXPERIMENTO PARA IDENTIFICAÇÃO DO CONTROLADOR</b>	100
<b>6.1</b>	<b>Introdução</b>	100
<b>6.2</b>	<b>Formulação do problema</b>	100
6.2.1	Minimização da variância do parâmetro	101
6.2.2	Restrições de qualidade em regiões elipsoidais	101
<b>6.3</b>	<b>Exemplos ilustrativos</b>	103
6.3.1	Controlador PI - minimização da variância de cada parâmetro	103
6.3.2	Controlador PI - minimização da métrica $\Delta$ considerando regiões elipsoidais	106
6.3.3	Controlador PID - minimização da métrica $\Delta$ considerando regiões elipsoidais	108
<b>6.4</b>	<b>Considerações finais</b>	111
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES GERAIS</b>	112
	<b>REFERÊNCIAS</b>	114

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Sistema em malha fechada com controlador. . . . .	20
Figura 2:	Sistema utilizado para obtenção dos dados e construção da referência virtual. . . . .	29
Figura 3:	Sistema em malha fechada com controlador. . . . .	33
Figura 4:	Respostas ao degrau do modelo de referência fixo (139) ( $\bar{M}$ ), do modelo flexível $M(z, \hat{\eta}^{(i)})$ ( $M(\eta^i)$ ) e do sistema em malha fechada $T(z, \hat{\rho}^{(i)})$ ( $T(\rho^i)$ ) para o processo $G_1(z)$ com $\lambda = 0$ obtidos nas iterações 1 e 30. . . . .	64
Figura 5:	Respostas ao degrau obtidas no Passo 1: resposta do sistema em malha fechada obtida na iteração 30, igual à resposta do modelo de referência flexível $T(z, \hat{\rho}^{(30)}) = M(z, \hat{\eta}^{(30)})$ ( $T(\rho^{30}) \rightarrow \lambda = 0$ ); e no Passo 2: resposta do sistema em malha fechada $T(z, \hat{\rho})$ ( $T(\rho) \rightarrow \lambda = 1$ ) para $\lambda = 1$ obtida com o modelo de referência modificado (140) ( $\bar{M}_m$ ) para o Passo 2. . . . .	65
Figura 6:	Respostas ao degrau do modelo de referência fixo (141) ( $\bar{M}$ ), do modelo de referência flexível $M_f(z, \hat{\eta}^{(i)})$ ( $M(\eta^i)$ ) e do sistema em malha fechada $T(z, \hat{\rho}^{(i)})$ ( $T(\rho^i)$ ) para o processo $G_1(z)$ com $\lambda = 0$ nas iterações 1 e 30. . . . .	66
Figura 7:	Respostas ao degrau obtidas no Passo 1: resposta do sistema em malha fechada na iteração 30, a qual é bastante próxima da resposta do modelo de referência flexível $T(z, \hat{\rho}^{(30)}) \approx M_f(z, \hat{\eta}^{(30)})$ ( $T(\rho^{30}) \rightarrow \lambda = 0$ ); e no Passo 2: resposta em malha fechada $T(z, \hat{\rho})$ ( $T(\rho) \rightarrow \lambda = 1$ ) para $\lambda = 1$ obtida com o modelo de referência modificado (142) ( $\bar{M}_m$ ) para o Passo 2. . . . .	67
Figura 8:	Respostas ao salto do modelo de referência $M(z, \hat{\eta}^{(30)})$ ( $M(\eta^{30})$ - sem ruído) obtido através de dados sem ruído, do modelo de referência (143) ( $M(\eta^{80})$ - sem VI) e do controlador (145) ( $C(\rho^{80})$ - sem VI) obtidos através de dados com ruído e sem utilizar variáveis instrumentais e do modelo de referência (147) ( $M(\eta^{80})$ - com VI) e do controlador (149) ( $C(\rho^{80})$ - com VI) obtidos através de dados com ruído utilizando variáveis instrumentais. . . . .	70
Figura 9:	Respostas ao salto do modelo de referência fixo (152) ( $\bar{M}$ ), do modelo de referência flexível $M_f(z, \hat{\eta}^{(10)})$ ( $M(\eta^{10})$ ) obtido após 10 iterações no Passo 1 e do sistema em malha fechada $T(z, \hat{\rho})$ ( $T(\rho)$ ) obtido no Passo 2 sem modificar o modelo de referência. . . . .	72
Figura 10:	Respostas ao degrau do sistema em malha fechada $T(z, \rho)$ com o controlador PID obtida em um ensaio e do modelo de referência $M(z)$ . . . . .	88



Figura 11:	Sinal de controle dos sistemas em malha fechada apresentados na Figura 10. . . . .	89
Figura 12:	Asteriscos: parâmetros do controlador PID estimados pelo método de identificação do controlador ótimo para um sistema de estrutura ARX obtidos através de 100 ensaios Monte Carlo. Elipsoide: intervalo de 95% de confiança da estimativa de $\hat{\rho}$ , centrada em $\hat{\rho}_m$ representado por um ponto vermelho. . . . .	90
Figura 13:	Asteriscos: parâmetros do sistema ( $C(z, \rho)$ , $H(z, \xi)$ ) estimados pelo método de identificação do controlador ótimo para um sistema de estrutura BJ obtidos através de 100 ensaios Monte Carlo. Elipsoide: intervalo de 95% de confiança da estimativa de $\hat{\theta}$ , centrada em $\hat{\theta}_m$ representado por um ponto vermelho. . . . .	91
Figura 14:	Asteriscos: parâmetros do controlador estimados pelo método de identificação do controlador ótimo para um sistema de estrutura BJ obtidos através de 100 ensaios Monte Carlo. Elipse: intervalo de 95% de confiança da estimativa de $\hat{\rho}$ , centrada em $\hat{\rho}_m$ representado por um ponto vermelho. . . . .	92
Figura 15:	Respostas ao degrau do sistema em malha fechada $T(z, \rho)$ com o controlador PI obtida em um ensaio e do modelo de referência $M(z)$ . . . . .	93
Figura 16:	Respostas ao degrau do sistema em malha fechada $T(z, \rho)$ com o controlador PID obtida em um ensaio Monte-Carlo e do modelo de referência $M(z)$ . . . . .	95
Figura 17:	Sinal de controle dos sistemas em malha fechada apresentados na Figura 16. . . . .	96
Figura 18:	Diagramas de Bode dos controlador PID obtidos nos 100 ensaios Monte Carlo, do controlador obtido com o valor médio dos parâmetros $C(z, \hat{\rho}_m)$ ( $C(\rho_m)$ ) e do controlador ideal $C_d(z)$ ( $C_d$ ). . . . .	97
Figura 19:	Diagramas de Bode dos controladores genéricos obtidos nos 100 ensaios Monte Carlo e do controlador ideal $C_d(z)$ ( $C_d$ ). . . . .	99
Figura 20:	Magnitude do espectro do sinal de entrada obtido no projeto de experimento que garante uma precisão de 0.01 aos parâmetros identificados com o método de identificação do controlador ótimo. . . . .	105
Figura 21:	Asteriscos: parâmetros do controlador estimados pelo método de identificação do controlador ótimo para o sistema (269) obtidos através de 1000 ensaios Monte Carlo; Elipse vermelha: elipse projetada para intervalo de 95% de confiança; Elipse azul: intervalo de 95% de confiança da estimativa de $\hat{\rho}$ obtida aplicando-se o sinal projetado, centrada em $\hat{\rho}_m$ , representado por um ponto vermelho. . . . .	106
Figura 22:	Magnitude do espectro do sinal de entrada obtido no projeto de experimento do controlador PI que garante que 95% das estimativas estão dentro da restrição $\gamma = 0.1$ . . . . .	108
Figura 23:	Asteriscos: parâmetros do controlador estimados pelo método de identificação do controlador ótimo para o sistema (222) obtidos através de 1000 ensaios Monte Carlo; asteriscos azuis: parâmetros que respeitam a restrição imposta; asteriscos pretos: parâmetros que não respeitam a restrição. Elipse: intervalo de 95% de confiança da estimativa de $\hat{\rho}$ obtida aplicando-se o sinal projetado, centrada em $\hat{\rho}_m$ , representado por um ponto vermelho. Curva de nível $\gamma = 0.1$ . . . . .	109

Figura 24:	Magnitude do espectro do sinal de entrada obtido no projeto de experimento do controlador PID que garante que 95% das estimativas estão dentro da restrição $\gamma = 0.1$ . . . . .	110
Figura 25:	Asteriscos: parâmetros do controlador estimados pelo método de identificação do controlador ótimo para um sistema de estrutura BJ obtidos através de 1000 ensaios Monte Carlo. Elipsoide: intervalo de 95% de confiança da estimativa de $\hat{\rho}$ , centrada em $\hat{\rho}_m$ representado por um ponto vermelho. . . . .	111

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Estruturas de modelos SISO comumente utilizadas como casos especiais de (37). . . . .	40
Tabela 2:	Distribuição $\chi^2$ para alguns valores de probabilidades $\alpha$ e diferentes graus de liberdade $n$ . . . . .	44
Tabela 3:	Evolução de $M(z, \eta)$ , $C(z, \rho)$ (por meio de seus numeradores - ganhos e zeros) e $\tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}, \hat{\rho})$ (após aplicar (126) na coluna 3 e após (127) na coluna 5) no procedimento iterativo para o processo $G_1(z)$ . . . . .	63
Tabela 4:	Evolução de $M_f(z, \eta)$ , $C(z, \rho)$ (por meio de seus numeradores - ganhos e zeros) e $\tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}, \hat{\rho})$ (após aplicar (126) na coluna 3 e após (127) na coluna 5) no procedimento iterativo para o processo $G_1(z)$ . . . . .	66
Tabela 5:	Evolução de $M(z, \eta)$ , $C(z, \rho)$ (por meio de seus numeradores - ganhos e zeros) e $\tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}, \hat{\rho})$ (após aplicar (126) na coluna 3 e após (127) na coluna 5) no procedimento iterativo para o processo $G_2(z)$ . . . . .	71
Tabela 6:	Valor médio dos parâmetros estimados em 100 ensaios Monte Carlo, através do método de identificação do controlador ótimo e do método VRFT (sem utilizar variáveis instrumentais) para o controlador PID para o sistema (215) com diferentes valores de variância do ruído $\sigma_e^2$ . . . . .	89

## LISTA DE ABREVIATURAS

ARARMAX	<i>Autoregressive, autoregressive moving average model with exogenous input</i>
ARARX	<i>Autoregressive, autoregressive model with exogenous input</i>
ARMAX	<i>Autoregressive moving average model with exogenous inputs</i>
ARX	<i>Autoregressive model with exogenous input</i>
BIBO	<i>Bounded-input bounded output</i>
BJ	Box-Jenkins
BMI	<i>Bilinear matrix inequality</i>
CbT	<i>Correlation-based tuning</i>
<i>Cov</i>	Matriz de covariância
<i>deg</i>	Grau relativo
<i>den</i>	Denominador
ELS	<i>Extended least squares</i>
FDT	<i>Frequency domain tuning</i>
FIR	<i>Finite impulse response</i>
IFT	<i>Iterative feedback tuning</i>
KYP	Kalman-Yakubovic-Popov
LMI	<i>Linear matrix inequality</i>
LQG	<i>Linear quadratic Gaussian</i>
LQR	<i>Linear quadratic regulator</i>
MRAC	<i>Model reference adaptive control</i>
<i>num</i>	Numerador
OE	<i>Output error</i>
PDF	Probability density function
PI	Proporcional-integral
PID	Proporcional-integral-derivativo

PRBS	<i>Pseudorandom binary sequence</i>
SISO	<i>Single-input single-output</i>
<i>Var</i>	Variância
VI	Variável instrumental
VRFT	<i>Virtual reference feedback tuning</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A^T$	transposto de $A$
$A^{-1}$	inverso de $A$
$\hat{A}$	estimativa de $A$
$\det(A)$	determinante da matriz $A$
$\lambda_{\max}(A)$	autovalor máximo da matriz $A$
$\lambda_{\min}(A)$	autovalor mínimo da matriz $A$
$Tr(A)$	traço da matriz $A$
$\arg \min_x f(x)$	argumento que minimiza $f(x)$
$\delta(\tau)$	delta de Dirac
$\bar{E}(\cdot)$	valor esperado estimado
$J(\cdot)$	função custo
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	espaço euclidiano de ordem $n$
$\min_x f(x)$	minimização de $f(x)$ em relação a $x$
$res(x, 2)$	resíduo de $x$ dividido por 2
$z$	operador de avanço
$\Phi_a$	espectro do sinal $a$
$\nabla$	operador de derivada parcial
$\rho_m$	valor médio do parâmetro $\rho$
$\sigma_e^2$	variância do ruído branco
$\varphi(t)$	vetor regressor
$\chi^2(n)$	distribuição Qui-quadrado com $n$ graus de liberdade
$0_{n \times m}$	matriz de dimensão $n \times m$ com todos elementos nulos
$I_n$	matriz identidade de ordem $n$
$\ \cdot\ _\infty$	norma infinita

# 1 INTRODUÇÃO

Projetar um controlador para um sistema significa obter uma função matemática ou alguns parâmetros de um dispositivo industrial com o objetivo de fazer com que esse sistema se comporte de uma forma desejada, respeitando certos requisitos de desempenho. Técnicas de controle são aplicadas aos mais diversos sistemas, desde um simples controle de temperatura em uma sala ou em um processo químico, como em pilotos automáticos de aviões (QUEINNEC; TARBOURIECH; GARCIA, 2006) ou sistemas não-lineares como reatores CSTR (GAMBOA-TORRES; FLORES-TLACUAHUAC, 2000). Dessa forma, quanto mais complexo for o processo, mais informações são necessárias para que o sistema de controle seja capaz de fazer com que o sistema em malha fechada apresente o comportamento desejado. Conseqüentemente, em processos mais simples, ou cujos requisitos de desempenho são mais modestos, controladores com menor grau de complexidade são suficientes para atingir o objetivo desejado.

Nesse grupo encontram-se os controladores proporcional-integral-derivativo (PID), os quais são ajustados através de apenas três parâmetros. As fórmulas de Ziegler & Nichols (ZIEGLER; NICHOLS, 1993) para sintonia de controladores PID contribuíram na popularidade destes, uma vez que os ganhos do controlador são determinados com base no conhecimento de apenas algumas características do sistema, sem a necessidade de um modelo matemático do mesmo. Apesar da facilidade de aplicação dessas fórmulas, várias malhas de controle nas indústrias permanecem mal sintonizadas (ÅSTRÖM; HÄGG-LUND, 1995). Muitas vezes, os ganhos são sintonizados manualmente, provocando um desempenho do sistema bastante inferior do que seria no caso em que o controlador fosse sintonizado adequadamente. Além disso, a simplicidade da sintonia baseada nas fórmulas de Ziegler & Nichols acarreta, muitas vezes, em desempenhos com um sobrepasso elevado, o que normalmente não é o desejado para a resposta de um sistema de controle.

Métodos de controle adaptativo também surgem como uma possibilidade para o projeto de controladores quando não se conhece o modelo do processo. Uma abordagem interessante é conhecida por controle dual, a qual visa obter um compromisso entre o desempenho do sistema de controle e pequenos erros de estimação (ÅSTRÖM; WITTEN-MARK, 1989). Nesse método, as incertezas nos parâmetros estimados são consideradas no projeto do controlador. O problema é então formulado através da minimização de uma função custo, cuja solução é difícil de ser encontrada. Em alguns casos simples, esta função pode ser solucionada através da Equação de Bellman (ÅSTRÖM; WITTEN-MARK, 1989). Porém, nesses casos, o controle é dado por um estimador não-linear e uma realimentação de controle.

As dificuldades em atingir requisitos mais rígidos e controlar sistemas mais complexos impulsionaram o aparecimento de técnicas de controle baseadas em modelo. Nesse caso, o projeto do controlador consiste de dois passos: primeiramente, um modelo matemático

do sistema é obtido; a partir deste modelo, projeta-se o controlador baseado nos requisitos de desempenho. Este modelo pode ser obtido através da identificação do sistema baseada em dados obtidos do mesmo. Nesse caso, são necessárias algumas escolhas a fim de propiciar uma identificação de um modelo adequado: escolha do sinal de entrada a ser aplicado no sistema; escolha da classe de modelos a ser utilizada e escolha do método de identificação a ser utilizado. Essa metodologia de projeto é baseada em duas premissas (Van den Hof, 2001). Do ponto de vista de identificação, assume-se que o sistema real pode ser identificado exatamente a partir dos dados do experimento. E do ponto de vista de projeto de controle, essa situação significa que o controlador é baseado em um modelo que reflete exatamente o comportamento dinâmico do processo que se deseja controlar.

No entanto, garantir que o sistema real pertença à classe de modelos escolhida depende da escolha correta da estrutura de modelos bem como a ordem do processo. Muitas vezes uma ordem elevada é escolhida a fim de garantir que essa premissa seja satisfeita; no entanto, o projeto do controlador baseado em um modelo de ordem elevada normalmente necessita de um procedimento de redução de ordem, ou do modelo ou do controlador. Assim, a identificação de um modelo adequado para o projeto de controladores envolve bastante conhecimento por parte do projetista, que deve fazer diversas escolhas com o intuito de “tentar acertar” na escolha da classe de modelos. Esse procedimento é geralmente custoso e demorado, e nem sempre é possível aplicá-lo em ambientes industriais.

Por outro lado, se o modelo é apenas uma aproximação do sistema real, então a qualidade do modelo depende da aplicação ao qual o mesmo será submetido (GEVERS, 2006). Se o objetivo do modelo é servir de base para o projeto de um controlador, então o correto é projetar de experimento a fim de assegurar que o erro de modelagem seja tal que deteriore o projeto de controle o menos possível. No caso de identificação para controle, o que realmente importa é o desempenho obtido quando o controlador baseado no modelo é aplicado ao sistema real, e não a qualidade do modelo em relação ao processo real (GEVERS, 2005).

Idealmente, um procedimento de identificação para controle poderia ser formulado da seguinte forma: dado um objetivo de desempenho do sistema de controle, projetar o procedimento de identificação de forma que o desempenho atingido pelo controlador, que foi projetado baseado no modelo, aplicado ao sistema real seja o melhor possível (GEVERS, 2005).

Em uma abordagem parecida, surgiram os métodos de controle baseados em dados. Através de dados de entrada e saída coletados do sistema e com o objetivo de atingir um desempenho em malha fechada dado por um *modelo de referência*, o controlador é estimado; porém, o grande diferencial destes métodos é que os mesmos *não* utilizam o passo intermediário de obtenção do modelo do sistema. Apesar de não serem explicitamente tratados dessa forma, os métodos de controle baseados em dados podem ser vistos como *métodos de identificação do controlador*, já que os mesmos são baseados em um conjunto de dados, em uma classe de modelos candidatos (neste caso a classe de controladores) e em algum método que relacione os dois a fim de obter o controlador baseado no modelo de referência de malha fechada escolhido *a priori*.

Entre os métodos baseados em dados, existem métodos iterativos, que utilizam vários experimentos, e os métodos diretos, baseados em apenas um experimento. Os métodos iterativos (HJALMARSSON et al., 1998; KAMMER; BITMEAD; BARTLETT, 2000; KARIMI; MISKOVIĆ; BONVIN, 2003a) são considerados métodos mais seguros que os métodos diretos porque, a cada experimento, o controlador presente no sistema é resintonizado, de modo que os valores dos parâmetros não mudam drasticamente em cada



iteração. No entanto, muitas vezes, são necessários vários experimentos até que o método atinja o controlador ótimo, o que torna esses métodos bastante perturbadores do ponto de vista de produção. Na literatura, existe apenas um método de controle baseado em dados obtidos de apenas um experimento. É o método VRFT (*Virtual Reference Feedback Tuning*) (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002), o qual minimiza uma função custo quadrática a fim de obter os parâmetros de um controlador linear. Porém, este método ainda necessita de alguns ajustes para que possa ser utilizado em processos industriais, de forma que se tenha certas garantias de que o controlador resultante deste método não instabilize o sistema quando colocado em operação e proporcione o desempenho esperado. Devido a essa necessidade, o objetivo desta tese é elaborar certas melhorias, de modo que os métodos de controle baseados em apenas um experimento para obtenção dos dados sejam mais seguros e, portanto, mais bem aceitos para a sintonia de controladores de processos industriais.

A primeira contribuição deste trabalho é a inclusão de um critério flexível ao critério minimizado pelo método VRFT de maneira que o mesmo possa ser utilizado em plantas de fase não-mínima. Quando o projeto do controlador for baseado em um modelo de referência, é importante que os possíveis zeros de fase não-mínima do processo a ser controlado sejam incluídos no modelo de referência utilizado. Caso isto não seja feito, o sistema em malha fechada com o controlador projetado pode resultar inclusive em instabilidade. Assim, controladores baseados em dados, que por sua vez são baseados em modelo de referência, falham se a planta contém um ou mais zeros de fase não-mínima que não foram incluídos no modelo de referência. Caso a planta seja de fase não-mínima, é necessário o conhecimento desses zeros para sua inclusão no modelo de referência. Para solucionar este problema, este trabalho apresenta um procedimento que estima os zeros do modelo de referência, juntamente com os parâmetros do controlador. Assim, caso a planta contenha zeros de fase não-mínima, estes zeros aparecerão como zeros do modelo de referência. De posse desse conhecimento, o modelo de referência é corretamente escolhido e o método VRFT pode ser utilizado com segurança.

A segunda contribuição da tese envolve controle baseado em um experimento de dados, quando esses dados são afetados por ruído. Da maneira como é formulado o método VRFT, quando os dados utilizados são afetados por ruído, a estimativa dos parâmetros do controlador é *não-polarizada* somente quando é utilizada uma variável instrumental. Isso significa que um segundo experimento deve ser realizado, ou um modelo do processo deve ser obtido. Nesta tese, o problema de controle baseado em dados é formulado como um problema de identificação do controlador ótimo em um sistema afetado por ruído. Como será mostrado, as propriedades estatísticas como polarização e variância da estimativa dependem da estrutura do sistema e da classe de modelos. Uma vez que o sistema a ser controlado pertence à classe de modelos escolhida, então com apenas uma batelada de dados é possível obter uma estimativa não-polarizada do sistema. Além disso, como o projeto do controlador agora é um problema de identificação, a teoria de identificação de sistemas pode ser estendida e as técnicas para obtenção de melhorias nas estimativas podem ser usadas.

De fato, o projeto de experimento é uma ferramenta utilizada em identificação de sistemas com o objetivo de obter estimativas que respeitem certas restrições. Usualmente, projeta-se um experimento de forma a minimizar a variância da estimativa ou, de forma a garantir certas normas que consideram os modelos estimados. O projeto de experimento consiste basicamente em “escolher” as variáveis de um experimento, como por exemplo o sinal a ser aplicado e o seu tamanho. Além disso, uma formulação desse problema

baseada em restrições LMI é apresentada em (JANSSON, 2004). Assim, o projeto de experimento é estendido ao problema de identificação do controlador ótimo e, portanto, algumas aplicações de projeto de experimento, utilizando restrições LMI, são apresentadas.

Este trabalho é apresentado da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos base usados na formulação dos métodos baseados em dados, como a formulação de problemas de controle baseada em otimização e baseada em modelo de referência. Além disso, é apresentada uma revisão sobre os métodos existentes. Nesse caso, dá-se maior ênfase ao método VRFT, uma vez que este é um método que utiliza apenas um experimento para obtenção dos dados e é neste campo que se deseja contribuir. Uma revisão bibliográfica sobre alguns conceitos importantes de identificação de sistemas é apresentada no Capítulo 3. Apresentam-se as condições que devem ser respeitadas sobre os elementos de um problema de identificação a fim de que se possa estimar as propriedades da estimativa, como os erros de polarização e variância. Além disso, apresentam-se os conceitos de projeto de experimento, o qual é utilizado para uma possível minimização do erro da estimativa.

No Capítulo 4 é apresentado o método de sintonia baseado em referência virtual para processos de fase não-mínima. Apresenta-se a formulação do critério flexível que deve ser utilizado, o método iterativo para estimativa dos parâmetros, o procedimento proposto e alguns exemplos ilustrativos. O método de identificação do controlador ótimo é introduzido no Capítulo 5, onde são apresentadas as condições para se obter estimativas não-polarizadas e as fórmulas da variância, que pode ser reduzida através de um projeto de experimento. Vários exemplos ilustrativos são apresentados, mostrando a eficiência do método em estimar os controladores. Além disso, no Capítulo 6 é apresentada a extensão da teoria de projeto de experimento para o caso de identificação do controlador ótimo; alguns exemplos ilustram essa extensão. Por fim, as conclusões gerais são apresentadas no Capítulo 7.

## 2 PROJETO DE CONTROLADORES BASEADO EM DADOS

### 2.1 Introdução

O projeto de controle baseado em dados consiste em ajustar os parâmetros de um controlador com estrutura fixa usando dados de entrada e saída coletados de um processo. Estes dados podem ser obtidos através de ensaios específicos, ou, em alguns casos, apenas com o processo operando em malha fechada com algum controlador. Nesse caso, os *softwares* supervisórios utilizados no meio industrial já têm esses dados arquivados, o que incentiva o uso destes métodos por não ser necessário interromper a produção a fim de obter os dados para projetar um novo controlador.

O ajuste é feito diretamente, isto é, sem o uso intermediário de um modelo identificado do processo, e o objetivo é obter um controlador tal que a resposta do sistema em malha fechada seja tão próxima quanto possível de uma resposta desejada, dada por um modelo de referência. Os métodos de controle baseados em dados podem ser relacionados ao método de controle adaptativo baseado em modelo de referência (MRAC) (GOODWIN; SIN, 1984), pois utilizam a mesma formulação de otimização de um critério  $H_2$ . Porém, diferenciam-se conceitualmente do MRAC, pois o ajuste dos parâmetros do controlador não é feito a cada instante de tempo, mas somente após coletar uma batelada de dados.

Esses métodos são utilizados para projetar controladores com estrutura fixa, ou seja, a estrutura do controlador é escolhida *a priori* e um problema de otimização é solucionado para encontrar os parâmetros deste controlador. Dessa forma, esses métodos podem ser utilizados para sintonizar controladores PID, que são largamente encontrados na indústria, cujas malhas na maioria das vezes são mal sintonizadas (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995).

Neste capítulo são apresentadas as definições de sistemas, que serão utilizadas em todo este trabalho, alguns conceitos utilizados pelos métodos baseados em dados, os métodos baseados em dados existentes na literatura e algumas estruturas de controladores comumente utilizadas.

### 2.2 Definições do sistema

Considere um processo SISO (*single-input, single-output*) de tempo discreto e invariante no tempo

$$y(t) = G_0(z)u(t) + \nu(t), \quad (1)$$

onde  $z$  é o operador de avanço, definido como

$$zx(t) \triangleq x(t+1),$$

$G_0(z)$  é a função de transferência pulsada do processo,  $u(t)$  é a entrada de controle e  $\nu(t)$  é o ruído do processo.

Seja o operador  $\bar{E}[\cdot]$  definido por

$$\bar{E}[f(t)] \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E[f(t)]$$

com  $E[\cdot]$  denotando esperança (LJUNG, 1999). Um sinal é dito quasi-estacionário se a média e autocorrelação do mesmo convergem para um valor finito quando o tamanho da amostra cresce, conforme a definição a seguir.

**Definição 2.1** (LJUNG, 1999) *Um sinal  $s(t)$  é um processo quasi-estacionário se*

- $\bar{E}[s(t)] = m_s(t)$ ,  $|m_s| \leq C$ ,  $\forall t$ ;
- $\bar{E}[s(t)s(r)] = R_s(t, r)$ ,  $|R_s(t, r)| \leq C$ ,  $\forall t, r$ ;
- $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N R_s(t, t - \tau) = R_s(\tau)$ ,  $\forall \tau$ ,

onde  $m_s(t)$  é o valor médio do sinal  $s(t)$  e  $R_s(t, r)$  é a covariância do sinal  $s$  nos instantes  $t$  e  $r$ .

O ruído é um processo quasi-estacionário, que pode ser escrito como  $\nu(t) = H_0(z)e(t)$ , onde  $e(t)$  é ruído branco com variância  $\sigma_e^2$ . Ambas funções de transferência,  $G_0(z)$  e  $H_0(z)$ , são racionais e causais. Assume-se que  $H_0(\infty) = 1$ , ou seja, a resposta impulsiva do filtro  $H_0(z)$  satisfaz  $h(0) = 1$ .

Esse processo é controlado por um controlador linear e invariante no tempo que pertence a uma classe  $\mathcal{C}$  de funções de transferência lineares, definida pelo usuário, conforme apresentado na Figura 1. Essa classe é tal que  $C(z)G_0(z)$  tem grau relativo positivo para todo  $C(z) \in \mathcal{C}$ ; equivalentemente, o sistema em malha fechada possui necessariamente atraso. O controlador é parametrizado por um vetor de parâmetros  $\rho \in \mathbb{R}^n$ , de forma que a ação de controle  $u(t)$  pode ser escrita como

$$u(t) = C(z, \rho)(r(t) - y(t)), \quad (2)$$

onde  $r(t)$  é o sinal de referência, o qual assume-se ser quasi-estacionário e descorrelacionado com o ruído, ou seja

$$\bar{E}[r(t)e(s)] = 0 \quad \forall t, s.$$

O sistema (1)-(2) em malha fechada torna-se

$$\begin{aligned} y(t, \rho) &= T(z, \rho)r(t) + S(z, \rho)\nu(t), \\ T(z, \rho) &= \frac{C(z, \rho)G_0(z)}{1 + C(z, \rho)G_0(z)}, \\ S(z, \rho) &= \frac{1}{1 + C(z, \rho)G_0(z)}, \end{aligned}$$

onde é explicitada a dependência do vetor de parâmetros do controlador  $\rho$  no sinal de saída  $y(t, \rho)$ .

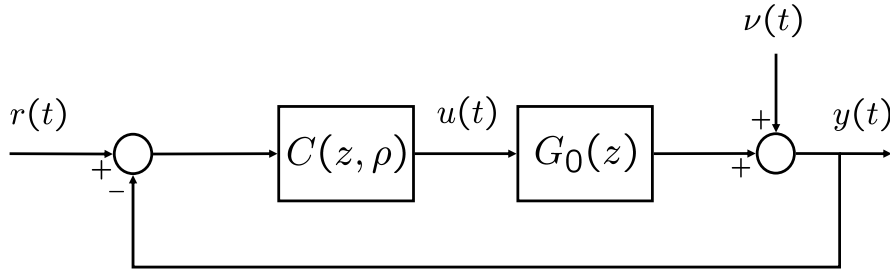


Figura 1: Sistema em malha fechada com controlador.

### 2.3 Problema de controle baseado em otimização

Um problema de controle pode ser definido em função de uma resposta desejada para o sistema em malha fechada. Dessa forma, deseja-se encontrar um controlador que, quando aplicado ao processo, produza uma resposta em malha fechada que seja tão próxima da resposta desejada quanto possível.

Uma maneira bastante comum de solucionar este problema é escrevê-lo como uma função custo a ser minimizada através de um problema de otimização. Assim, a função custo depende da diferença entre a saída do sistema em malha fechada e da saída desejada. Uma forma clássica de escrever a função custo é por meio do erro quadrático da diferença entre a saída do sistema em malha fechada e da saída desejada. (ANDERSON; MOORE, 1971). A função custo pode ser dada por

$$J(\rho) = \bar{E} \left\{ [y(t, \rho) - y_d(t)]^2 \right\}, \quad (3)$$

onde  $y_d(t)$  é a saída desejada do sistema.

Se for desejado que o problema de otimização minimize também o esforço de controle é possível acrescentar mais um termo nesta função custo

$$J(\rho) \triangleq \bar{E} \left\{ \lambda [y(t, \rho) - y_d(t)]^2 + (1 - \lambda) u(t, \rho)^2 \right\},$$

onde  $\lambda \in [0 \ 1]$  é uma constante pré-definida pelo projetista que determina um peso entre o seguimento do modelo de referência e a minimização do esforço de controle. Por outro lado, o esforço de controle pode ser minimizado indiretamente através da escolha de uma resposta em malha fechada desejada menos exigente. Por este motivo, neste trabalho será considerada a função custo (3), sem o termo relativo ao esforço de controle.

Este tipo de função custo é utilizado por muitos métodos de projeto de controladores baseados em modelo, tais como LQR/LQG (ANDERSON; MOORE, 1971; GOODWIN; GRAEBE; SALGADO, 1984) e controle preditivo generalizado (BITMEAD; GEVERS; WERTZ, 1990), nos quais a solução de (3) pode ser obtida utilizando ferramentas como equações de Riccati, Inequações Matriciais Lineares (LMI), Inequações Matriciais Bilineares (BMI) (BOYD et al., 1994).

Considerando que o sinal de referência e o ruído são descorrelacionados, a função custo (3) pode ser dividida em duas partes (GOODWIN; SIN, 1984; BAZANELLA et al., 2008):

$$J(\rho) = J^{MR}(\rho) + J^E(\rho), \quad (4)$$

onde cada termo representa um objetivo de controle conceitualmente diferente:

- seguimento de referência:

$$J^{MR}(\rho) = \bar{E} \left\{ [[T(z, \rho) - M(z)]r(t)]^2 \right\}, \quad (5)$$

onde  $M(z)$  é uma função de transferência escolhida pelo projetista cuja resposta é a desejada para o sistema em malha fechada, isto é,  $y_d(t) = M(z)r(t)$ .

- rejeição ao ruído:

$$J^E(\rho) = \bar{E} \{ [S(z, \rho)\nu(t)]^2 \}.$$

A partir de (4), verifica-se a possibilidade de minimizar somente uma parte do critério, o que é usualmente feito por diferentes métodos de controle. Se o objetivo é o seguimento de referência, então realiza-se um projeto de controle baseado em modelo de referência. Se o objetivo é apenas rejeição ao ruído, realiza-se o projeto de controle de mínima variância. Além disso, também é possível realizar o projeto do controlador que considera esses dois objetivos conjuntamente.

Escolhidos os objetivos de controle, o problema de otimização é solucionado através da minimização da função custo (3), apresentando como resultado os parâmetros do controlador. Assim, o projeto do controlador é definido por:

$$\min_{\rho} J(\rho) \tag{6}$$

$$J(\rho) \triangleq \bar{E} \{ [(y(t, \rho) - y_d(t))]^2 \}.$$

### 2.3.1 Controle baseado em modelo de referência

Em um sistema de controle, usualmente as especificações de desempenho são dadas em função de tempo de resposta, sobrepasso, tempo de subida da resposta do sistema em malha-fechada, entre outras (BAZANELLA; GOMES DA SILVA Jr, 2006). Por outro lado, todos estes requisitos de desempenho podem estar implicitamente especificados através de uma função de transferência de malha fechada, a qual é conhecida por *modelo de referência* na literatura, dada por  $M(z)$ .

Neste caso, em um problema de controle pode-se desejar que o sistema em malha fechada atinja certo desempenho, o qual é especificado através do modelo de referência:

$$y_d(t) = M(z)r(t), \tag{7}$$

onde  $y_d(t)$  denota a resposta desejada de malha fechada. Assim, o controlador deve ser tal que o sistema em malha fechada  $T(z, \rho)$  se aproxime o tanto quanto for possível do modelo de referência  $M(z)$ .

#### 2.3.1.1 Escolha de $M(z)$

Teoricamente, a escolha do modelo de referência parece uma tarefa fácil. Uma escolha bastante simples seria utilizar polos reais, de forma que o sistema não apresente sobrepasso e posicioná-los de forma a respeitar as restrições de tempo de acomodação. Na prática, porém, se o modelo de referência escolhido não considerar certas características do processo  $G_0(z)$ , o controlador obtido através de algum método baseado em modelo de referência pode provocar um comportamento indesejado ao sistema, podendo causar inclusive a instabilidade do mesmo.

Para analisar esses possíveis problemas, considera-se que o controlador tenha uma estrutura livre, de forma que o sistema em malha fechada com este controlador possa ser exatamente igual ao modelo de referência escolhido. Nesse caso, a primeira restrição que se deve respeitar é quanto ao grau relativo do modelo de referência, que deve ser igual ou maior ao grau relativo da planta  $G_0(z)$ , a fim de garantir a causalidade do controlador. Isso pode ser verificado no exemplo abaixo.

Seja o processo a ser controlado dado por

$$G_0(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)},$$

cujo grau relativo é 2, e o modelo de referência escolhido

$$M(z) = \frac{1-c}{z-c},$$

cujo grau relativo é 1. Nesse caso, o controlador que faria com que o sistema em malha fechada com o controlador fosse exatamente  $M(z)$  é

$$C(z) = \frac{(1-c)(z-a)(z-b)}{z-1},$$

que é um controlador não causal. Já no caso em que o processo é dado por

$$G_0(z) = \frac{1}{(z-a)}$$

e o modelo de referência é o mesmo apresentado anteriormente, ou seja, o modelo de referência tem o mesmo grau relativo que o processo, o controlador é então dado por

$$C(z) = \frac{(1-c)(z-a)}{z-1},$$

cuja propriedade de causalidade é mantida e o mesmo pode então ser aplicado em sistemas reais.

Além disso, outra situação indesejada em sistemas de controle é o cancelamento entre polos e zeros instáveis. Caso o processo contenha zeros de fase não-mínima, ou seja, zeros instáveis, então o modelo de referência deve conter os mesmos zeros instáveis da planta. Caso contrário, o controlador tende a cancelar esses zeros com polos instáveis. Essa situação é exemplificada a seguir.

Seja o processo dado por

$$G_0(z) = \frac{z-n}{(z-a)(z-b)}.$$

Se  $M(z)$  não contiver o zero  $z = n$ , então o controlador terá um polo neste lugar de forma a atingir o modelo de referência. Se este zero for de fase não-mínima, então o controlador será instável.

Assim, caso o modelo do processo seja desconhecido, a escolha do modelo de referência requer o conhecimento *a priori* de pelo menos um limitante superior do grau relativo do processo e da posição exata dos zeros instáveis, se os mesmos existirem. Através deste conhecimento, é possível escolher um modelo de referência, para o qual o controlador proporcionará um comportamento senão ideal, bastante próximo disto, sem enfrentar os problemas apresentados acima.

### 2.3.1.2 Projeto do controlador

Após escolhido o modelo de referência, parte-se então para o projeto do controlador. Considere o caso ideal, no qual o sistema não apresenta ruído. Além disso, considere que o objetivo de controle seja apenas o seguimento de referência. Assim, o *controlador ideal*

$C_d(z)$  é aquele que faz com que o sistema em malha fechada se comporte exatamente como o modelo de referência escolhido. Nesse caso, tem-se que

$$M(z) = \frac{C_d(z)G_0(z)}{1 + C_d(z)G_0(z)}, \quad (8)$$

e, isolando-se  $C_d(z)$  em (8), o controlador ideal é então dado por

$$C_d(z) = \frac{M(z)}{G_0(z)(1 - M(z))}. \quad (9)$$

Se o modelo do processo  $G_0(z)$  for conhecido e o controlador não tiver restrições quanto à sua estrutura, basta então aplicar a fórmula (9) para obter o controlador.

Porém, os sistemas reais usualmente se comportam de forma a violar essas premissas. Primeiramente, na maioria dos casos,  $G_0(z)$  não é conhecida e a mesma deve ser obtida através de modelagem matemática e/ou estimada através de algum método de identificação. Além disso, como nos sistemas reais normalmente há presença de ruído, a estimativa do modelo do processo terá certas variações devido ao mesmo e, nesse caso, o controlador obtido através de (9) não necessariamente fará com que o sistema em malha fechada se comporte como o modelo de referência previamente escolhido. Por fim, a estrutura dos controladores usados na prática raramente é flexível para garantir que (9) possa ser utilizada; em grande parte dos problemas de controle, a estrutura do controlador é fixa e apenas os ganhos do controlador podem ser ajustados.

Devido a essas características dos sistemas reais, o projeto de controladores normalmente não é baseado em (9); uma forma usual de se obter o controlador é através da minimização da função custo  $J^{MR}(\rho)$ . Esta função custo representa os requisitos de desempenho do sistema em malha fechada, de forma que quanto menor o custo, mais próximo está o sistema em malha fechada do comportamento que é desejado, sem necessariamente tentar impor que o mesmo seja exatamente igual ao modelo de referência escolhido.

Considerando  $\Gamma$  o conjunto de todos os parâmetros do controlador que tornam o sistema em malha fechada BIBO-estável, pode-se reescrever a parcela do seguimento de referência utilizando o teorema de Parseval. Se  $\rho \in \Gamma$ , então:

$$J^{MR}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T(e^{j\omega}, \rho) - M(e^{j\omega})|^2 \Phi_r(e^{j\omega}) d\omega. \quad (10)$$

onde  $\Phi_r(e^{j\omega})$  é o espectro de frequência do sinal de referência e  $T(e^{j\omega}, \rho)$  é a transformada de Fourier discreta (DFT) do sistema em malha fechada  $T(z, \rho)$ .

### 2.3.2 Controle de mínima variância

O projeto de controladores pela minimização do custo associado ao ruído -  $J^E(\rho)$  - é tópico clássico na literatura conhecido por *controle de mínima variância*. Uma versão adaptativa do problema é apresentada em (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1973). Dado um sistema com referência nula, deseja-se que o efeito do ruído  $\nu(t)$  presente no sistema seja atenuado. A solução para este problema, quando  $G_0(z)$  é de fase mínima, é dada pelo seguinte controlador (ÅSTRÖM, 1970):

$$C_e(z) = \frac{H_0(z) - 1}{G_0(z)}. \quad (11)$$



Novamente pode-se utilizar o teorema de Parseval para escrever a parcela da minimização de ruído, para  $\rho \in \Gamma$ , como:

$$J^E(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S(e^{j\omega}, \rho)|^2 \Phi_\nu(e^{j\omega}) d\omega.$$

onde  $\Phi_\nu(e^{j\omega})$  é o espectro de frequência do sinal do ruído.

## 2.4 Controle baseado em dados

Muitos métodos de controle baseados na solução de problemas de otimização necessitam do conhecimento completo do processo e das características das perturbações do mesmo. Frequentemente ainda é necessário que a estrutura do controlador possa ser livremente escolhida para que os métodos possam ser aplicados. Estes requisitos comumente não são observados na prática, o que motivou o desenvolvimento de métodos de projeto de controladores de estrutura fixa para processos dos quais os modelos são parcialmente ou completamente desconhecidos. Nestes métodos o problema de otimização é realizado diretamente a partir de dados coletados de um ou mais experimentos, o que motiva a denominação de *controle baseado em dados*.

Estes métodos podem ser classificados em dois grupos. Existem os métodos iterativos, nos quais são realizados um ou mais ensaios no processo, o controlador é atualizado e o processo se repete até que o valor da função custo atinja um valor mínimo. E existem métodos não iterativos, ou seja, através de uma única batelada de dados, o mesmo obtém os parâmetros do controlador.

Usualmente, métodos iterativos utilizam algoritmos do gradiente e/ou de Newton para encontrar os mínimos da função custo. O algoritmo do gradiente utiliza apenas informação do gradiente da função custo enquanto que os outros algoritmos necessitam de informações adicionais como a matriz Hessiana. O algoritmo do gradiente foi proposto inicialmente por Cauchy (CAUCHY, 1847; POLAK, 1973) para encontrar soluções de sistemas de equações não-lineares. Neste algoritmo as iterações são dadas por:

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \gamma_i \nabla J(\rho_i), \quad (12)$$

onde  $\nabla J(\rho) = \frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho}$  e  $\gamma_i > 0$  é o tamanho do passo dado a cada iteração. O raciocínio por trás deste algoritmo é simples: sucessivas atualizações são feitas no sentido do gradiente mas em sua direção oposta. Com isso, pelo menos para  $\gamma_i$  pequeno o suficiente, um valor menor do custo é alcançado a cada iteração.

Através do uso de métodos iterativos, pequenas modificações são feitas nos parâmetros do controlador a cada passo. Dessa forma, espera-se que o comportamento do sistema em malha fechada mude apenas um pouco a cada iteração. Essa operação possui vantagens do ponto de vista de segurança do processo, pois mudanças bruscas nos parâmetros do controlador podem ser vistas como perturbações no processo, que podem causar comportamentos indesejáveis. Porém, como esses métodos utilizam algum algoritmo iterativo também para o cálculo dos parâmetros, e a função custo raramente é convexa, os mesmos podem convergir para mínimos locais da função custo. Esse problema é estudado a fundo em (ECKHARD, 2008).

Dentre os diferentes métodos iterativos, podem ser citados o método IFT - *Iterative Feedback Tunning* (HJALMARSSON et al., 1998), o método FDT (*Frequency Domain Tuning*) (KAMMER; BITMEAD; BARTLETT, 2000) e o método CbT (*Correlation based Tuning*) (KARIMI; MISKOVIĆ; BONVIN, 2004). Basicamente, estes métodos diferem

entre si, pois os mesmos propõem metodologias diferentes para o cálculo do estimador do gradiente da função custo.

Por outro lado, existe também um método que não é iterativo. O método VRFT (*Virtual Reference Feedback Tuning*) (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002) utiliza apenas um ensaio para a obtenção dos parâmetros do controlador. Devido a sua formulação, este método minimiza uma função custo quadrática nos parâmetros para a obtenção do controlador. Assim, o mínimo da função é global e não há riscos de se obter mínimos locais como no caso dos métodos iterativos. Por este motivo, necessita de apenas um ensaio, sendo mais vantajoso que os métodos iterativos do ponto de vista de custo de produção.

A seguir, serão apresentadas as características principais de cada método citado acima.

#### 2.4.1 IFT - *Iterative Feedback Tuning*

O método de projeto de controladores *Iterative Feedback Tuning* foi proposto inicialmente em (HJALMARSSON; GUNNARSSON; GEVERS, 1994); uma discussão profunda é encontrada em (HJALMARSSON et al., 1998) e (HJALMARSSON, 2002), e a extensão que engloba características de robustez em (PROCHAZKA et al., 2005). O método utiliza um algoritmo iterativo para minimizar uma função custo  $H_2$ , como apresentada em (3), com o objetivo de encontrar um controlador baseado no modelo de referência escolhido previamente. Através da minimização de (3), o controlador encontrado será uma combinação de  $C_d(z)$  (9) e  $C_e(z)$  (11), já que o método minimiza o custo de seguimento de referência e de rejeição ao ruído conjuntamente.

Para isso, o método propõe a obtenção de um estimador não polarizado do gradiente da função custo diretamente de dados de experimentos realizados no processo operando em malha fechada. Esta estimativa do gradiente é utilizada no algoritmo do gradiente para encontrar um mínimo da função custo.

O gradiente da função custo (3) pode ser escrito como

$$\nabla J(\rho) = 2\bar{E}[\tilde{y}(t, \rho)\nabla\tilde{y}(t, \rho)]. \quad (13)$$

onde  $\nabla$  é o operador de derivada parcial com relação ao vetor de parâmetros do controlador  $\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}$  e

$$\tilde{y}(t, \rho) = y(t, \rho) - y_d(t). \quad (14)$$

Em (13), pode-se notar que  $\nabla J(\rho)$  depende de  $\tilde{y}(t, \rho)$ , que é a diferença entre a saída do sistema em malha fechada e a saída desejada, e do gradiente deste sinal,  $\nabla\tilde{y}(t, \rho)$ . A partir de um experimento realizado em malha fechada os dados são coletados e o sinal  $\tilde{y}(t, \rho)$  é obtido. O sinal do gradiente  $\nabla\tilde{y}(t, \rho)$  pode ser computado utilizando também dados coletados de experimentos realizados em malha fechada, como descrito a seguir.

Em relação a  $\nabla\tilde{y}(t, \rho)$ , derivando-se (14) tem-se a seguinte expressão (HJALMARSSON; GUNNARSSON; GEVERS, 1994):

$$\nabla\tilde{y}(\rho) = \frac{1}{C(z, \rho)}\nabla C(z, \rho)[T(z, \rho)r(t) - T(z, \rho)y(t, \rho)]. \quad (15)$$

Nessa expressão, as quantidades  $C(z, \rho)$ ,  $\nabla C(z, \rho)$  e  $r(t)$  são conhecidas *a priori*, enquanto que  $T(z, \rho)$  e  $y(t, \rho)$  dependem de informações do processo que é desconhecido. Assim, para o cálculo de  $\nabla\tilde{y}(\rho)$  é necessário obter informações sobre os termos  $T(z, \rho)y(t, \rho)$  e  $T(z, \rho)r(t)$  presentes em (15).

Para computar esses termos, o método IFT utiliza dois experimentos. O primeiro experimento é realizado em malha fechada, do qual se obtém o sinal de saída

$$y_1(t, \rho) = T(z, \rho)r(t) + S(z, \rho)v_1(t),$$

onde o índice 1 indica que o sinal foi obtido no primeiro experimento. O erro obtido entre o sinal de referência e este sinal de saída é utilizado como sinal de referência no segundo experimento, de forma a obter

$$y_2(t, \rho) = T(z, \rho)(r(t) - y_1(t, \rho)) + S(z, \rho)\nu_2(t).$$

Como pode-se ver, o sinal  $y_2(t, \rho)$  é composto pelos termos  $T(z, \rho)r(t)$  e  $T(z, \rho)y_1(t, \rho)$ , os quais procura-se conhecer, adicionado do ruído filtrado  $S(z, \rho)\nu_2(t)$ .

O sinal  $y_2(t, \rho)$  é então utilizado para gerar a seguinte estimativa:

$$\widehat{\nabla} \tilde{y}(t, \rho) = \frac{\nabla C(z, \rho)}{C(z, \rho)} y_2(t, \rho). \quad (16)$$

A partir dos sinais definidos acima, uma estimativa do gradiente  $\widehat{\nabla} J(\rho)$  pode ser obtida por

$$\widehat{\nabla} J(\rho) = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \tilde{y}(t, \rho) \widehat{\nabla} \tilde{y}(t, \rho).$$

Além disso, como  $\tilde{y}(t, \rho)$  é decorrelacionado de  $\widehat{\nabla} \tilde{y}(t, \rho)$ , uma vez que  $\tilde{y}(t, \rho)$  é obtido com dados do primeiro experimento e  $\widehat{\nabla} \tilde{y}(t, \rho)$  do segundo (ver (16)), tem-se que

$$E[\widehat{\nabla} J(\rho)] = \nabla J(\rho).$$

A partir desta informação, pode-se então aplicar um algoritmo iterativo (12) para obter os parâmetros do controlador.

## 2.4.2 FDT - *Frequency Domain Tuning*

O método de projeto de controladores *Frequency Domain Tuning* foi proposto primeiramente em (KAMMER; BITMEAD; BARTLETT, 2000). Este é um método iterativo utilizado para melhorar o desempenho de sistemas em malha fechada somente com relação ao ruído presente no mesmo. Dessa forma, o método considera sistemas com referência nula, ou seja, não trata do problema de seguimento de referência. A partir de uma análise espectral do problema, é proposto um estimador não polarizado para o gradiente da função custo.

Assim como o método IFT, o método FDT descreve um estimador para o gradiente da função custo. Porém, neste caso, a função custo é dada por:

$$J(\rho) = J^E(\rho).$$

A partir do Teorema de Parseval esta função custo pode ser descrita por

$$J(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_y(e^{j\omega}, \rho) d\omega.$$

Como a referência tem valor nulo,  $\Phi_y(e^{j\omega}, \rho)$  pode ser escrito como

$$\Phi_y(e^{j\omega}, \rho) = \left| \frac{H_0(e^{j\omega})}{1 + G_0(e^{j\omega})C(e^{j\omega}, \rho)} \right|^2 \sigma_e^2.$$

O gradiente da função custo é então calculado como (KAMMER; BITMEAD; BARTLETT, 2000):

$$\nabla J(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ -2\Phi_y(e^{j\omega}, \rho) \Re \left\{ \frac{G_0(e^{j\omega})}{1 + C(e^{j\omega}, \rho)G_0(e^{j\omega})} \frac{\partial C(e^{j\omega}, \rho)}{\partial \rho} \right\} \right] d\omega. \quad (17)$$

onde

$$\frac{G_0(e^{j\omega})}{1 + C(e^{j\omega}, \rho)G_0(e^{j\omega})}$$

é a parcela desconhecida a ser estimada.

Realizando um experimento em malha fechada com uma referência estacionária pode-se obter o espectro cruzado entre  $r(t)$  e  $y(t)$ :

$$\Phi_{yr}(e^{j\omega}, \rho) = \frac{C(e^{j\omega}, \rho)G_0(e^{j\omega})}{1 + C(e^{j\omega}, \rho)G_0(e^{j\omega})}\Phi_r(e^{j\omega}). \quad (18)$$

Assim, a partir de (18) pode-se obter a parcela desconhecida através de

$$\frac{G_0(e^{j\omega})}{1 + C(e^{j\omega}, \rho)G_0(e^{j\omega})} = \frac{\Phi_{yr}(e^{j\omega}, \rho)}{C(e^{j\omega}, \rho)\Phi_r(e^{j\omega})}.$$

Como todas as parcelas são conhecidas pode-se calcular o estimador para o gradiente da função custo utilizando-se (17). Esta estimativa é então utilizada no algoritmo do gradiente (12) para procurar um mínimo da função custo.

Em (KAMMER; BITMEAD; BARTLETT, 2000) também é apresentada uma forma de calcular uma estimativa para a matriz Hessiana da função custo de forma a utilizar o algoritmo de Newton em vez do algoritmo do gradiente.

### 2.4.3 CbT - Correlation based Tuning

O método de projeto de controladores *Correlation based Tuning* também é um método iterativo baseado em um problema de otimização utilizando o algoritmo do gradiente (KARIMI; MISKOVIĆ; BONVIN, 2004). Uma aplicação em um sistema de suspensão magnética é apresentado em (KARIMI; MISKOVIĆ; BONVIN, 2003a). A prova da convergência local do método é apresentada em (KARIMI; MISKOVIĆ; BONVIN, 2002). A ideia principal do método é minimizar a correlação cruzada entre o sinal de referência  $r(t)$  e o sinal  $\tilde{y}(t, \rho)$  (14), que é o erro entre a saída desejada e a saída efetiva do sistema, ao invés de procurar o critério que minimiza o custo  $H_2$ .

A aplicação do método é explicada da seguinte forma: seja um controlador inicial aplicado ao sistema real, o qual é excitado por um sinal de referência  $r(t)$ . Então, o sinal  $\tilde{y}(t, \rho)$  contém os efeitos de erro de modelagem e do ruído presente no sistema. Os erros de modelagem são correlacionados com o sinal de referência, diferentemente do erro devido à presença do ruído. Assim, a re-sintonia do controlador deve ser capaz de compensar o efeito de erro de modelagem ao ponto que o sinal  $\tilde{y}(t, \rho)$  contenha apenas ruído filtrado. Para isso, basta tornar  $\tilde{y}(t, \rho)$  independente do sinal de referência. Assim, o problema de otimização é baseado em encontrar os parâmetros do controlador que solucionam a seguinte equação de correlação

$$\sum_{i=1}^N \xi(t) \tilde{y}(t, \rho) = 0,$$

onde  $N$  é o tamanho dos dados do experimento e  $\xi(t)$  é uma variável instrumental que deve ser correlacionada com a referência e descorrelacionada com o ruído.

Este sistema de equações é não-linear e uma forma de solucioná-lo é utilizado o algoritmo do gradiente para encontrar o argumento que soluciona o sistema de equações. O gradiente é calculado como:

$$\nabla J(\rho) = \sum_{i=1}^N \xi(t, \rho) \tilde{y}(t, \rho).$$

A variável instrumental pode ser escolhida de diferentes maneiras, mas a que tem gerado melhores resultados é uma estimativa do gradiente do sinal de saída com relação aos parâmetros do controlador (KARIMI; MISKOVIĆ; BONVIN, 2003b). Neste caso, é obtido um modelo reduzido da planta e a variável instrumental é obtida através de

$$\xi(t, \rho) = \nabla \tilde{y}(t, \rho) = \frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)S(z, \rho) + \hat{B}(z)R(z, \rho)} \phi^T(t, \rho), \quad (19)$$

onde o modelo reduzido da planta é dado por  $\hat{G}(z) = \frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)}$ , o controlador presente na malha de controle quando realizado o ensaio é dado por  $C(z, \rho) = \frac{R(z, \rho)}{S(z, \rho)}$  e o vetor regressor é dado por  $\phi(t, \rho) = [-u(t-1) \dots -u(t-n_S) - y(t) \dots -y(t-n_R)]$ . Dessa forma, é utilizado o seguinte gradiente para a função custo

$$\nabla J(\rho) = \sum_{i=1}^N \tilde{y}(t, \rho) \nabla \tilde{y}(t, \rho). \quad (20)$$

Apesar desse método partir de uma ideia diferente dos métodos anteriores, sua implementação é muito parecida com o método IFT. A diferença entre os dois métodos está no modo pelo qual é computado o vetor  $\nabla \tilde{y}(t, \rho)$ . Enquanto que no método IFT esse vetor é calculado a partir de dados de dois experimentos, no método CbT ele é computado a partir de um modelo reduzido identificado do processo.

Como no método FDT, o método CbT também apresenta uma forma de estimar a Hessiana da função custo, de forma que o algoritmo de Newton pode ser utilizado para resolver o problema de otimização (KARIMI; MISKOVIĆ; BONVIN, 2004).

#### 2.4.4 VRFT - *Virtual Reference Feedback Tuning*

O método VRFT - *Virtual Reference Feedback Tuning*, que pode ser traduzido como “Método de sintonia baseado em referência virtual”, apresenta uma alternativa aos métodos iterativos para sintonia de controladores, o qual não apresenta esse problema de mínimos locais e ao mesmo tempo não requer iterações. Aliás, o fato do método necessitar de apenas um experimento o torna bastante atraente no sentido de que a produção é menos prejudicada em comparação aos métodos iterativos, quando é necessária a execução de vários experimentos. É, portanto, um método direto, cujo objetivo é minimizar o custo de seguimento de referência. O método VRFT consiste na minimização de uma função custo diferente, cujo mínimo é o mesmo do mínimo desejado (mínimo de  $J^{MR}(\rho)$ ) sob certas condições ideais. Essa nova função é quadrática, e portanto sua minimização é feita através da aplicação do método dos mínimos quadrados.

Este método foi primeiramente apresentado em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002). Em (LECCHINI; CAMPI; SAVARESI, 2002) foi apresentada uma extensão do método que minimiza também um custo relacionado à sensibilidade de malha fechada, porém a solução utiliza um controlador com dois graus de liberdade. O método foi então aplicado a um sistema físico (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2003), cujo problema de controle é solucionado através de um controlador de ordem elevada. Uma aplicação a um sistema de temperatura utilizando controlador PID é apresentada em (ECKHARD et al., 2009). E a extensão para processos não lineares é apresentada em (CAMPI; SAVARESI, 2006). Uma aplicação do método para processos multivariáveis é apresentada em (NAKAMOTO, 2005).

O método VRFT pode ser descrito como a seguir. Através de um experimento em malha aberta ou fechada são coletados dados de entrada  $u(t)$  e saída  $y(t)$  do processo,

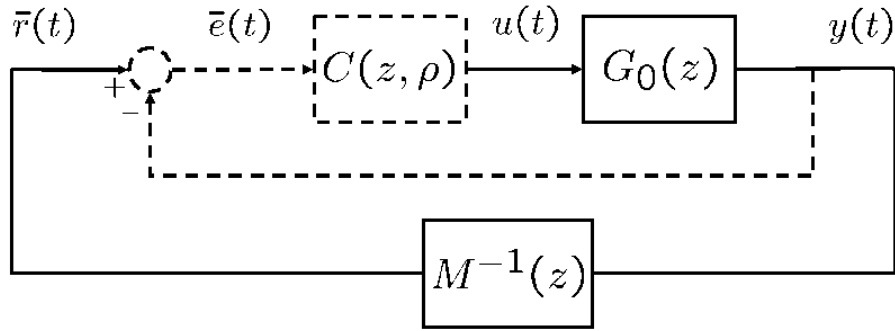


Figura 2: Sistema utilizado para obtenção dos dados e construção da referência virtual.

conforme apresentado na Figura 2. Dado o sinal medido  $y(t)$ , é definido o sinal de referência virtual  $\bar{r}(t)$ :

$$M(z)\bar{r}(t) = y(t).$$

Esse sinal é tal que, se o sistema estivesse em malha fechada com o controlador ideal e a referência virtual  $\bar{r}(t)$  fosse aplicada, então o experimento resultaria como sinal de saída o sinal  $y(t)$  obtido no experimento. Caso os dados tivessem sido coletados dessa forma, o erro de seguimento de referência seria dado por

$$\bar{e}(t) = \bar{r}(t) - y(t).$$

Esse sinal  $\bar{e}(t)$  é o sinal que deveria alimentar o controlador ideal nesse experimento virtual. Assim, estão disponíveis os dados de entrada e saída ( $\bar{e}(t)$  e  $u(t)$  respectivamente) do controlador ideal  $C_d(z)$  e estes dados podem ser usados para identificá-lo.

A identificação é realizada através da minimização do seguinte critério

$$\begin{aligned} J^{VR}(\rho) &= \bar{E} [u(t) - C(z, \rho)\bar{e}(t)]^2 \\ &= \bar{E} \left[ u(t) - \left( C(z, \rho) \frac{1 - M(z)}{M(z)} \right) y(t) \right]^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Seja o controlador  $C(z, \rho)$  linear em  $\rho$ , isto é

$$C(z, \rho) = \rho^T \beta(z),$$

então o critério em (21) é uma função quadrática do vetor de parâmetros  $\rho$  e portanto, a solução deste problema de otimização pode ser obtida através da aplicação do método de mínimos quadrados, isto é, através do seguinte cálculo:

$$\hat{\rho} = \bar{E} [\varphi(t)\varphi(t)^T]^{-1} \bar{E} [\varphi(t)u(t)] \quad (22)$$

onde  $\varphi(t) = \beta(z)\bar{e}(t)$ . Esta é a vantagem principal do critério VRFT (21) sobre o critério de seguimento de referência (3), e portanto, a vantagem do método VRFT sobre outros métodos baseados em dados, como o IFT e o CbT, os quais são iterativos.

Considere que o controlador ideal (9) pertença à classe de controladores considerada, isto é, que a seguinte premissa seja satisfeita.

**Premissa 2.1**  $C_d(z) \in \mathcal{C}$  ou, equivalentemente,

$$\exists \rho_d : C(z, \rho_d) = \rho_d^T \beta(z) = C_d(z).$$

Sob a Premissa 2.1, o valor do parâmetro  $\rho_d$  é o mínimo global para ambos os critérios, (3) e (21), uma vez que ambos resultam em zero quando  $\rho = \rho_d$ . Também é fácil de demonstrar que, sob essa premissa, o mínimo global é único, para ambos critérios, desde que o vetor regressor seja persistentemente excitante (BAZANELLA et al., 2008; CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002). Quando a Premissa 2.1 não for satisfeita, o mínimo dos dois critérios não é o mesmo. Com o intuito de tornar esses mínimos próximos, os autores sugerem o uso de um filtro nos sinais  $u(t)$  e  $\bar{e}(t)$ , como exposto a seguir.

#### 2.4.4.1 Projeto do filtro $L(z)$

Utilizando (8), após algumas manipulações, o critério de seguimento de referência (10) pode ser escrito como

$$J^{MR}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_0(e^{j\omega})|^2 \frac{|C(e^{j\omega}, \rho) - C_d(e^{j\omega})|^2}{|1 + G_0(e^{j\omega})C(e^{j\omega}, \rho)|^2} \frac{\Phi_r(e^{j\omega})}{|1 + G_0(e^{j\omega})C_d(e^{j\omega})|^2} d\omega.$$

Além disso, quando utilizado o filtro nos sinais  $u(t)$  e  $\bar{e}(t)$ , o critério  $J^{VR}(\rho)$  (21) é escrito na forma

$$\begin{aligned} J^{VR}(\rho) &= \bar{E} [L(z)(u(t) - C(z, \rho)\bar{e}(t))]^2, \\ &= \bar{E} \left[ L(z) \left( u(t) - \left( C(z, \rho) \frac{1 - M(z)}{M(z)} \right) y(t) \right) \right]^2, \end{aligned}$$

a qual, utilizando o Teorema de Parseval e algumas manipulações é reescrita na forma

$$J^{VR}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G_0(e^{j\omega})|^2 |C(e^{j\omega}, \rho) - C_d(e^{j\omega})|^2 |1 - M(e^{j\omega})|^2 \frac{|L(e^{j\omega})|^2}{|M(e^{j\omega})|^2} \Phi_u(\omega) d\omega.$$

Assim, para tornar  $J^{VR}(\rho) = J^{MR}(\rho)$ ,  $L(e^{j\omega})$  deve ser escolhido como (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002):

$$|L(e^{j\omega})|^2 = \frac{|M(e^{j\omega})|^2}{|1 + G_0(e^{j\omega})C(e^{j\omega}, \rho)|^2} \frac{\Phi_r}{\Phi_u}, \quad \forall \omega \in [-\pi; \pi],$$

onde  $\Phi_u$  é o espectro de potência do sinal  $u(t)$  e  $\Phi_r$  é o espectro de potência do sinal de referência  $r(t)$ . Porém, como  $G_0(z)$  é desconhecido, aproxima-se  $|1 + G_0(e^{j\omega})C(e^{j\omega}, \rho)|^2$  por  $|1 + G_0(e^{j\omega})C_d(e^{j\omega})|^2$  e o filtro utilizado no projeto é finalmente dado por

$$|L(e^{j\omega})|^2 = |1 - M(e^{j\omega})|^2 |M(e^{j\omega})|^2 \frac{\Phi_r}{\Phi_u}, \quad \forall \omega \in [-\pi; \pi]. \quad (23)$$

Nesse caso, o vetor de parâmetros  $\rho$  é estimado por

$$\hat{\rho} = \bar{E} [\varphi_L(t)\varphi_L(t)^T]^{-1} \bar{E} [\varphi_L(t)u_L(t)] \quad (24)$$

onde  $\varphi_L(t) = L(z)\varphi(t)$  e  $u_L(t) = L(z)u(t)$ .

A formulação do filtro  $L(z)$  (23) é baseada na aproximação  $|1 + G_0(z)C(z, \rho)|^2 \approx |1 + G_0(z)C_d(z)|^2$  (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002). O uso do filtro, então, é válido para casos em que o controlador ideal, apesar de não pertencer à classe escolhida, não seja muito diferente dos controladores pertencentes a esta. Assim, deve-se tomar cuidado quando utilizar o método VRFT nos casos em que a Premissa 2.1 não é satisfeita, pois caso essa aproximação não seja válida, o comportamento obtido com o controlador projetado pode ser bastante diferente do desejado.

#### 2.4.4.2 Uso de dados com ruído

A formulação do método VRFT é baseada em sistemas que não apresentam ruído. No caso de dados com ruído, a estimativa através de (22) ou (24) é polarizada, conforme apresentado mais adiante, no Capítulo 5; os autores sugerem a utilização de uma variável instrumental para obter uma estimativa não-polarizada (LJUNG, 1999; CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002). A variável instrumental é dada por

$$\zeta(t) = \beta(z) \left( M^{-1}(z) - 1 \right) y'(t). \quad (25)$$

Os parâmetros do controlador são então estimados por

$$\hat{\rho}^{IV} = E \left[ \zeta(t) \varphi(t)^T \right]^{-1} E \left[ \zeta(t) u(t) \right]. \quad (26)$$

Em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002), os autores propõem duas escolhas diferentes para obter  $y'(t)$ , a fim de obter a variável instrumental (25). A primeira garante que  $\hat{\rho}^{IV} = \hat{\rho}$  assintoticamente. Porém, é necessário um experimento adicional na planta. A segunda não garante que  $\hat{\rho}^{IV} = \hat{\rho}$  rigorosamente, mas presume-se que o erro residual seja pequeno. Nesse caso, não é necessário ensaio adicional na planta. As duas maneiras propostas podem ser descritas por:

- *Experimento adicional.* Realiza-se um segundo experimento na planta, utilizando o mesmo sinal de entrada  $\{u(t)\}_{t=1, \dots, N}$  e coleta-se a sequência de dados da saída correspondente  $\{y'(t)\}_{t=1, \dots, N}$ . Com estes dados, obtém-se a variável instrumental através de (25).

Nota-se que  $\{y'(t)\}_{t=1, \dots, N}$  é diferente de  $\{y(t)\}_{t=1, \dots, N}$ , uma vez que as duas sequências são afetadas por realizações diferentes de ruído. Assim, assume-se que os ruídos nos dois experimentos são descorrelacionados e, portanto, (25) proporciona  $\hat{\rho}$  assintoticamente, como no caso sem ruído.

- *Identificação da planta.* Identifica-se um modelo  $\hat{G}(z)$  da planta por meio dos dados  $\{u(t), y(t)\}_{t=1, \dots, N}$  e simula-se o sistema, obtendo  $y'(t) = \hat{G}(z)u(t)$ . Então, constrói-se a variável instrumental como em (25).

Devido ao erro na estimativa de  $\hat{G}(z)$ , este método não garante que a estimativa tenda assintoticamente para  $\hat{\rho}$ .

Outra forma de se obter uma estimativa não-polarizada é apresentada em (SALA; ESPARZA, 2005a). Neste trabalho, sugere-se a minimização do critério

$$J^{IVR}(\rho) = \bar{E} \left[ C^{-1}(z, \rho) L(z) u(t) - L(z) \bar{e}(t) \right]^2 \quad (27)$$



ao invés de minimizar (21). Nesse caso, o filtro  $L(z)$  é definido como

$$|L(z)|^2 = |M(z)|^4 \frac{\Phi_r}{\Phi_y};$$

os dados são obtidos em malha aberta e o controlador é obtido com algoritmos OE (SALA; ESPARZA, 2005a).

## 2.5 Estruturas de controladores

O projeto de controladores baseado em dados depende, além dos dados do ensaio no processo e de um modelo de referência de malha fechada, de uma classe pré-determinada de controladores que será utilizada no projeto. A escolha da classe do controlador nada mais é do que a determinação de uma estrutura que considera a ordem do controlador e a liberdade dos polos e zeros do mesmo.

Seguindo este raciocínio, uma classe de controladores menos restritiva é aquela na qual apenas a ordem do controlador é fixa, sendo que os polos e zeros do mesmo são determinados através da solução do problema de otimização. É possível, também, fixar alguns polos ou zeros do controlador. Por exemplo, se o desejo é o seguimento de referência tipo degrau, adiciona-se um polo em 1 no controlador, caso o processo não contenha este polo. E por fim, os controladores podem ter todos os polos fixos e apenas os zeros e o ganho serem determinados através do problema de otimização. Nesse caso, diz-se que os controladores são lineares nos parâmetros.

### 2.5.1 Controladores baseados no princípio do modelo interno

O princípio do modelo interno é uma das maneiras mais usuais de se garantir o seguimento de referência e a rejeição de perturbações. A ideia principal por trás deste princípio é gerar um sinal com as mesmas características do sinal de referência/perturbação dentro da malha de controle. Partindo do pressuposto que os sinais a serem seguidos/rejeitados são exatamente caracterizados, os polos instáveis (principalmente os marginalmente estáveis, isto é,  $|z| = 1$ ) do sinal a ser seguido/rejeitado são introduzidos no laço de controle.

**Teorema 2.1** (CHEN, 1970) *Considere o sistema realimentado dado por (1) e (2). O sinal de referência  $r(t)$  e o ruído  $v(t)$  são modelados como  $\hat{r}(z) = N_r(z)/D_r(z)$  e  $\hat{v}(z) = N_v(z)/D_v(z)$ . Seja  $\kappa(z)$  o mínimo denominador comum entre os polos instáveis de  $\hat{r}(z)$  e  $\hat{v}(z)$ . Se nenhuma raiz de  $\kappa(z)$  for um zero de  $G_0(z)$ , então existe um compensador com uma função de transferência própria tal que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável e atinge seguimento de referência e rejeição à perturbação assintoticamente.*

◇

Uma das vantagens desta formulação é que a garantia de seguimento/rejeição é insensível às variações paramétricas da planta, garantindo assim seguimento com erro nulo e rejeição de perturbações de maneira robusta.

O procedimento para o projeto do controlador consiste em dois passos:

1. introdução de  $1/\kappa(z)$ , o modelo dos sinais de referência e ruído, no laço de controle, o qual é conhecido como *princípio do modelo interno*;

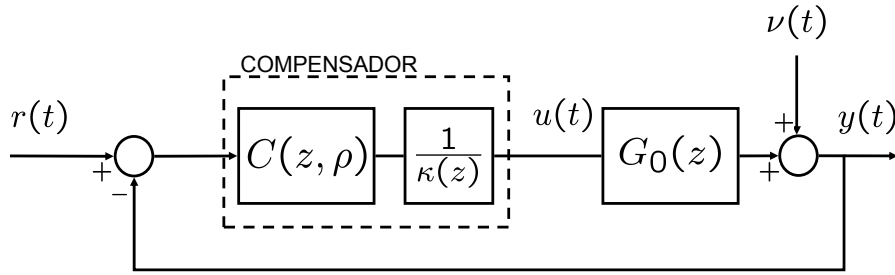


Figura 3: Sistema em malha fechada com controlador.

2. estabilização do sistema em malha fechada pela introdução do compensador  $C(z)$ .

O sistema em malha fechada com o controlador resultante é apresentado na Figura 3. Uma vez que os sinais de referência mais usualmente aplicados em problemas de controle são degraus, é apresentado a seguir o princípio do modelo interno aplicado a este caso particular, ou seja, a introdução de um integrador no controlador de forma a garantir o seguimento de referência.

Assim, o controlador é dado por

$$\begin{aligned} C(z, \rho) &= \frac{B_c(z, \rho)}{A_c(z, \rho)} \\ &= \frac{b_{c_1} z^n + b_{c_2} z^{n-1} + \dots + b_{c_{n+1}}}{(z^{m-1} + a_{c_1} z^{m-2} + \dots + a_{c_{m-1}})(z - 1)}, \end{aligned} \quad (28)$$

onde

$$\rho = [b_{c_1} \ b_{c_2} \ \dots \ b_{c_{n+1}} \ a_{c_1} \ \dots \ a_{c_{m-1}}]^T. \quad (29)$$

### 2.5.2 Controladores lineares nos parâmetros

Um controlador linear nos parâmetros é dado por

$$C(z, \rho) = \rho^T \beta(z), \quad \rho \in \mathbb{R}^p, \quad (30)$$

onde  $\beta(z)$  é um vetor coluna de funções racionais fixas. Assim, todos os polos do controlador são fixos e o vetor de parâmetros  $\rho$  determinam o ganho e os zeros do controlador. A grande vantagem de escolher uma classe onde os controladores são lineares nos parâmetros está na facilidade de solucionar o problema de minimização das funções custo. Por exemplo, no método VRFT, o fato do controlador ser linear nos parâmetros possibilita a aplicação do método dos mínimos quadrados para achar os parâmetros do controlador. Além disso, o cálculo do gradiente também é facilitado quando o controlador é linear nos parâmetros, no caso de se utilizar métodos iterativos.

De fato, qualquer controlador estável pode ser aproximado por uma base de funções estáveis dada por uma soma finita de modelos, como modelos de Laguerre, Kautz (WAHLBERG, 1991), ou GOBF (ROSA; CAMPELLO; AMARAL, 2009). Além disso, estruturas de controladores comumente utilizadas podem ser linearmente parametrizadas, como por exemplo o controlador PID com polo derivativo fixo.

### 2.5.3 Controladores PI/PID

Apesar da tecnologia atual proporcionar a aplicação de técnicas sofisticadas no projeto de controladores e, conseqüentemente, diferentes tipos de controladores, controladores proporcional-integral-derivativo (PID) ainda são largamente utilizados em laços de

controle na indústria. Estes controladores são suficientes para controlar diversos tipos de processos, particularmente nos quais os requisitos de desempenho são modestos (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 1995).

O controlador PID é capaz de eliminar erros de regime permanente, através da ação integral, bem como antecipar o comportamento do processo, por conter uma ação derivativa. Por sua vez, a ação proporcional faz com que o sistema reaja ao erro presente no sistema mais imediatamente quanto maior for seu valor (BAZANELLA; GOMES DA SILVA Jr, 2006). Assim, percebe-se a facilidade que um operador tem de entender a funcionalidade deste controlador, o que também é responsável pela manutenção de tais controladores na indústria.

Além disso, o controlador PID é facilmente descrito como uma função linear nos parâmetros. Uma forma de descrevê-lo é dada por

$$C(z, \rho) = [k_p \ k_i \ k_d] \begin{bmatrix} 1 & \frac{z}{z-1} & \frac{z-1}{z} \end{bmatrix}^T.$$

## 2.6 Considerações Finais

Métodos de controle baseados em dados são ferramentas interessantes do ponto de vista prático para a solução de problemas de controle de processos, cujos dados de operação normalmente são armazenados por *softwares supervisórios* e que podem, muitas vezes, ser utilizados no projeto. Dentre os métodos existentes, verifica-se que apenas o método VRFT não necessita de iterações na busca pelo controlador. A grande vantagem de um método direto, como o VRFT, está no fato de que a planta é utilizada para obtenção de dados o menor tempo possível: ou apenas uma batelada de dados é utilizada (duas no caso de sistemas com ruído para a construção da variável instrumental), ou os dados de operação já armazenados são utilizados. Nesse caso, a produção não é interrompida, proporcionando menores prejuízos.

Por outro lado, o método VRFT ainda precisa de algumas melhorias para ser utilizado na prática. Os problemas encontrados foram:

- A formulação do método é baseada na Premissa 2.1, sob a qual a função custo minimizada tem o mesmo mínimo da função que se quer minimizar. Se esta premissa não for satisfeita, utiliza-se o filtro  $L(z)$ , o qual depende de uma aproximação, e o controlador obtido pode proporcionar um desempenho bastante ruim ao sistema;
- O método não pode ser utilizado em processos de fase não-mínima. Caso o processo contenha um zero de fase não-mínima e o mesmo não estiver presente no modelo de referência, o controlador obtido pode causar até a instabilidade no sistema;
- Em sistemas com ruído, o VRFT depende do uso de uma variável instrumental a fim de obter uma estimativa não-polarizada do controlador.

Assim, verifica-se a possibilidade de contribuições na área de métodos diretos de controle baseado em dados. Por exemplo, uma solução para que o método VRFT seja utilizado em processos de fase não-mínima é apresentada em (SALA; ESPARZA, 2005b), onde é proposto que se realize uma identificação prévia do processo, para verificar a presença do zero de fase não-mínima a fim de incluí-lo no modelo de referência. Outra solução para este problema é apresentada no Capítulo 4, onde propõe-se a utilização de um procedimento iterativo no qual os zeros do controlador e do modelo de referência

são estimados conjuntamente, sem a necessidade de obtenção de um modelo prévio do processo.

Além disso, o método VRFT trata o problema de controle como *identificação do controlador*, através da utilização dos dados de entrada e saída do controlador. Por este motivo, alguns conceitos essenciais de identificação de sistemas são apresentados no próximo capítulo e um novo método direto baseado nesse conceito, formulado diretamente para dados com ruído, é apresentado no Capítulo 5. Nesse novo método, não é necessário o uso de filtros nem de variáveis instrumentais a fim de obter uma estimativa não-polarizada.

## 3 CONCEITOS DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

### 3.1 Introdução

O problema de identificação de sistemas pode ser visto como a construção de modelos matemáticos de sistemas dinâmicos baseada em dados coletados do sistema em operação. Para solucionar este problema são necessários basicamente três elementos (LJUNG, 1999):

1. Um conjunto de dados  $Z^N$  obtido do sistema em operação;
2. Uma classe de modelos candidatos  $\mathcal{M}$ ;
3. Uma regra (ou método) que relacione o modelo candidato com o conjunto de dados  $Z^N$ .

Além disso, para que o modelo matemático obtido seja adequado, existem certos requisitos sobre estes três elementos que devem ser satisfeitos.

Analisando estes elementos, pode-se dizer que os métodos de controle baseados em dados apresentados anteriormente são métodos de “identificação do controlador”, já que os mesmos são baseados em um conjunto de dados  $Z^N$ , em uma classe de modelos candidatos (neste caso  $\mathcal{C}$ ) e em algum método que relacione os dois a fim de obter o controlador baseado em um modelo de referência de malha fechada escolhido *a priori*. Consequentemente, os elementos envolvidos nestes métodos devem respeitar os mesmos requisitos de um problema de identificação já que o mesmo pode ser considerado como um problema de identificação do controlador.

Assim, devido a esta forte ligação entre controle baseado em dados e identificação de sistemas, serão apresentados neste capítulo os principais elementos da teoria de identificação de sistemas e suas características, a fim de possibilitar uma análise dos resultados obtidos com os métodos de controle baseados em dados como é feita nos problemas de identificação.

### 3.2 Conjunto de dados

O conjunto de dados de entrada e saída do processo pode ser coletado com o processo em operação ou também através de um experimento especialmente projetado para a identificação do mesmo. Nesse caso, o usuário pode determinar quais sinais medir e quando os medir, além de escolher o sinal de entrada a ser aplicado no experimento. Estas escolhas fazem parte do *projeto de experimento*, cujo objetivo é fazer com que os dados coletados tornem-se informativos ao máximo, considerando certas restrições existentes. Esse assunto merece uma atenção especial e será mais explorado na Seção 3.5.

Por outro lado, se o projeto de experimento não for considerado por algum motivo, ou seja, se os dados forem coletados com o processo em operação normal, o conjunto de dados utilizado na identificação deve ao menos respeitar certas condições para que a identificação seja possível.

### 3.2.1 Restrições ao conjunto de dados

O conjunto de dados coletado com o processo em operação (malha aberta ou fechada) é dado por

$$Z^N = \{u(1), y(1), \dots, u(N), y(N)\}.$$

Uma vez que a análise das propriedades da estimativa obtida no procedimento de identificação é realizada para  $N \rightarrow \infty$ , as condições necessárias aos dados são relacionadas ao conjunto  $Z^\infty$  (LJUNG, 1999).

**Premissa 3.1** *O conjunto de dados  $Z^\infty$  é tal que, para certos filtros  $\{d_t^{(i)}(k)\}$ , os sinais  $y(t)$  e  $u(t)$  podem ser descritos como*

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_t^{(1)}(k)r(t-k) + \sum_{k=0}^{\infty} d_t^{(2)}(k)e(t-k), \quad (31)$$

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_t^{(3)}(k)r(t-k) + \sum_{k=0}^{\infty} d_t^{(4)}(k)e(t-k), \quad (32)$$

ou seja, por uma soma dos sinais  $r(t)$  e  $e(t)$  filtrados por filtros lineares. Nesse caso,

1.  $r(t)$  é um sinal de entrada externo, limitado e determinístico;
2.  $e(t)$  é ruído branco com média zero e momentos de ordem  $4 + \delta$  limitados para algum  $\delta > 0$ .

Além disso,

3. a família de filtros  $\{d_t^{(i)}(k)\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $i = 1 - 4$ ;  $t = 1, 2, \dots$  é uniformemente estável;
4. os sinais  $y(t)$  e  $u(t)$  são conjuntamente quasi-estacionários.

Os sinais  $y(t)$  e  $u(t)$  são conjuntamente quasi-estacionários se os dois sinais são quasi-estacionários (ver definição 2.1) e se, além disso, a função de covariância cruzada

$$R_{yu} = \bar{E}\{y(t)u(t-\tau)\}$$

existe.

### 3.2.2 Informação do conjunto de dados

O conjunto de dados  $Z^N$  deve possibilitar a identificação do modelo adequado entre diferentes modelos em algum conjunto de modelos  $\mathcal{M}$  pré-determinado. Para isso, o sinal utilizado na identificação deve excitar o sistema e o forçar a mostrar suas propriedades. Em outras palavras, o conjunto de dados deve ser *suficientemente informativo* com relação ao conjunto de modelos  $\mathcal{M}$ . Um conjunto de dados é suficientemente informativo se o mesmo é capaz de distinguir o modelo adequado entre dois quaisquer modelos dentro da classe de modelos escolhida (LJUNG, 1999).

O conceito de conjunto de dados informativo está intimamente ligado ao conceito de persistência de excitação de um sinal.

### 3.2.2.1 Persistência de excitação

**Definição 3.1** (LJUNG, 1999) *Um sinal quasi-estacionário  $u(t)$ , com espectro  $\Phi_u(\omega)$  é dito persistentemente excitante de ordem  $n$  se, para todos os filtros da forma*

$$M_n(z) = m_1 z^{-1} + \dots + m_n z^{-n}$$

a relação

$$|M_n(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0 \text{ implica em } M_n(e^{j\omega}) \equiv 0.$$

Em outras palavras, o sinal é persistentemente excitante de ordem  $n$  se o seu espectro for diferente de zero em  $n$  frequências no intervalo  $-\pi < \omega \leq \pi$ . Considere, por exemplo, um sinal formado por uma soma de  $n$  senoides diferentes

$$u(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k \cos(\omega_k t), \quad \omega_k \neq \omega_j, \quad \forall k \neq j, \quad \omega_k \neq 0, \quad \omega_k \neq \pi \quad (33)$$

Cada senoide possui duas componentes no espectro em  $\omega_k$  e em  $-\omega_k$  (LJUNG, 1999). Portanto, este sinal é persistentemente excitante de ordem  $2n$ . Se alguma frequência for igual a zero ou  $\pi$ , a ordem de excitação do sinal cai para  $2n - 1$ , uma vez que a senoide apresenta apenas uma componente no espectro.

Outra forma de caracterizar a persistência de excitação de um sinal é em termos da função de covariância  $R_u(\tau)$  (LJUNG, 1999).

Seja  $u(t)$  um sinal quasi-estacionário, e seja  $R_{u_n}$  uma matriz  $n \times n$  definida por

$$R_{u_n} \triangleq \begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(1) & \dots & R_u(n-1) \\ R_u(1) & R_u(0) & \dots & R_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u(n-1) & R_u(n-2) & \dots & R_u(0) \end{bmatrix} \quad (34)$$

Então  $u(t)$  é persistentemente excitante de ordem  $n$  se e somente se  $R_{u_n}$  for não-singular.

Um requisito básico do experimento para obtenção dos dados é que o mesmo seja suficientemente informativo com respeito a todos modelos pertencentes à classe de modelos escolhida. Assim, a ordem necessária da persistência de excitação do sinal aplicado é igual ao número de parâmetros que devem ser estimados, de onde resulta o seguinte corolário:

**Corolário 3.1** (LJUNG, 1999) *Um experimento em malha aberta é suficientemente informativo se o sinal de entrada for persistentemente excitante.*

## 3.3 Classe de modelos

Uma classe de modelos é especificada por um conjunto de modelos dentro do qual será procurado o modelo que melhor represente o sistema que se quer identificar. Esta é a escolha mais difícil em um procedimento de identificação de sistemas. É nesta etapa que se torna necessário combinar todo conhecimento e intuição do engenheiro com relação ao processo “desconhecido” e as propriedades formais do modelo.

Uma classe de modelos pode ser escolhida de diferentes formas. Por exemplo, um modelo com parâmetros físicos desconhecidos é construído, através da aplicação de leis

físicas e outras relações. Em outros casos, modelos lineares podem ser usados, sem referência alguma aos princípios físicos envolvidos no processo. Essa classe de modelos é conhecida como “caixa preta”. E por fim, pode-se utilizar uma combinação dos dois tipos de modelos, cuja identificação é conhecida como identificação “caixa cinza”.

Em termos gerais, uma estrutura de modelo é um mapa parametrizado das entradas e saídas passadas  $Z^{t-1}$  no espaço de modelos:

$$\hat{y}(t|\theta) = g(\theta, Z^{t-1}),$$

onde  $\theta$  é um vetor de dimensão finita usado para parametrizar o mapa.

Seja o sistema a ser identificado linear e invariante no tempo, o modelo parametrizado pelo vetor de parâmetros  $\theta$  é dado por

$$y(t) = G(z, \theta)u(t) + H(z, \theta)e(t) \quad (35)$$

$$f_e(x, \theta) \text{ a PDF de } e(t); e(t) \text{ é ruído branco.} \quad (36)$$

### 3.3.1 Estruturas de modelos

Provavelmente a maneira mais intuitiva de parametrizar  $G$  e  $H$  é representá-las como funções racionais e colocar os parâmetros como coeficientes do numerador e denominador destas funções. Existem diferentes estruturas de modelos lineares possíveis de serem utilizadas, as quais podem ser representadas através de uma estrutura generalizada, dada por

$$A(z)y(t) = \frac{B(z)}{F(z)}u(t) + \frac{K(z)}{D(z)}e(t), \quad (37)$$

onde

$$\begin{aligned} A(z, \theta) &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}, \\ B(z, \theta) &= b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}, \\ F(z, \theta) &= 1 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{n_f} z^{-n_f}, \\ K(z, \theta) &= 1 + k_1 z^{-1} + \dots + k_{n_k} z^{-n_k}, \\ D(z, \theta) &= 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{n_d} z^{-n_d}. \end{aligned}$$

Porém, a estrutura (37) é geral demais para a maioria das aplicações. Um ou vários polinômios devem ser fixados em 1 nas aplicações em geral. Assim, os casos mais comuns de (37) são apresentados na Tabela 1 (LJUNG, 1999), onde os polinômios da primeira coluna são os polinômios que serão identificados de (37), sendo que os outros são fixados em 1.

### 3.3.2 Restrições à classe de modelos escolhida

A fim de que o procedimento de identificação de um sistema resulte em um modelo adequado, deve-se tomar alguns cuidados. Primeiramente, é necessário que o conjunto de dados (condições experimentais) seja suficientemente informativo, a fim de distinguir o modelo do sistema real dentro da classe de modelos. Além disso, a estrutura do modelo deve ser escolhida de forma que não existam diferentes valores de  $\theta$  que proporcionam modelos iguais. Esse fator está relacionado à *identificabilidade* do modelo. Assim, para que o procedimento de identificação resulte num modelo adequado ao sistema, é necessário que a estrutura de modelos escolhida seja identificável.



Tabela 1: Estruturas de modelos SISO comumente utilizadas como casos especiais de (37).

Polinômios em (37)	Nome da estrutura de modelos
B	FIR
AB	ARX
ABK	ARMAX
AK	ARMA
ABK	ARARX
ABKD	ARARMAX
BF	OE
BFKD	BJ

Assim, uma estrutura de modelo  $\mathcal{M}$  é *globalmente identificável em  $\theta^*$*  se

$$\mathcal{M}(\theta) = \mathcal{M}(\theta^*), \quad \theta \in D_{\mathcal{M}} \Rightarrow \theta = \theta^*, \quad (38)$$

onde  $D_{\mathcal{M}}$  é o conjunto de modelos no qual o procedimento de identificação seleciona o modelo mais adequado para o propósito em questão.

### 3.3.3 Identificabilidade da estrutura de modelos (37)

O fato de um modelo ser identificável relaciona-se diretamente com propriedades na estrutura de modelo escolhida. Esta relação é apresentada no Teorema a seguir.

**Teorema 3.1** (LJUNG, 1999) *Considere a estrutura de modelos  $\mathcal{M}$  correspondente a (37), onde  $\theta$  é o vetor de coeficientes dos polinômios envolvidos. Os graus dos polinômios são  $n_a$ ,  $n_b$  e assim por diante. Essa estrutura de modelos é globalmente identificável em  $\theta^*$  se, e somente se, as premissas (i) a (vi) são válidas.*

- i. Não existe fator comum entre  $z^{n_a} A^*(z)$ ,  $z^{n_b} B^*(z)$  e  $z^{n_k} K^*(z)$ .
- ii. Não existe fator comum entre  $z^{n_b} B^*(z)$  e  $z^{n_f} F^*(z)$ .
- iii. Não existe fator comum entre  $z^{n_k} K^*(z)$  e  $z^{n_d} D^*(z)$ .
- iv. Se,  $n_a \geq 1$ , então não deve existir fator comum entre  $z^{n_f} F^*(z)$  e  $z^{n_d} D^*(z)$ .
- v. Se,  $n_d \geq 1$ , então não deve existir fator comum entre  $z^{n_a} A^*(z)$  e  $z^{n_b} B^*(z)$ .
- vi. Se,  $n_f \geq 1$ , então não deve existir fator comum entre  $z^{n_a} A^*(z)$  e  $z^{n_k} K^*(z)$ .

Os polinômios demarcados por \* correspondem a  $\theta^*$ .

## 3.4 Identificação por minimização do erro de predição

Após escolhida a classe de modelos a ser utilizada para identificar o processo, é necessário então escolher qual será o método que relaciona esta classe com o conjunto de dados obtidos em um experimento, a fim de finalmente obter um modelo do processo. Em outras palavras, neste momento é decidido como será utilizada a informação contida em  $Z^N$  a fim de selecionar um valor adequado ao vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_N$ , e conseqüentemente, um

elemento  $\mathcal{M}(\hat{\theta}_N)$  adequado do conjunto  $\mathcal{M}^*$ . Escrevendo-se isso formalmente, deve-se determinar um mapeamento dos dados  $Z^N$  no conjunto  $D_{\mathcal{M}}$ :

$$Z^N \rightarrow \hat{\theta}_N \in D_{\mathcal{M}}.$$

Existem diferentes métodos que realizam este mapeamento, ou seja, métodos de estimação do parâmetro  $\hat{\theta}_N$ . Neste trabalho, será abordado talvez o método mais comumente utilizado, conhecido por *Minimização do Erro de Predição*.

### 3.4.1 Estimativa de parâmetros

Seja o sistema real  $\mathcal{S}$  descrito por (1), ou seja

$$y(t) = G_0(z)u(t) + H_0(z)e(t). \quad (39)$$

Este sistema é descrito pelo modelo paramétrico

$$\mathcal{M} : y(t) = G(z, \theta)u(t) + H(z, \theta)e(t), \quad (40)$$

onde  $e(t)$  representa ruído branco com média zero e variância  $\sigma_e^2$ , e as funções  $G$  e  $H$  têm formas racionais como descritas em (37).

Os polinômios  $A(z, \theta) - F(z, \theta)$  são parametrizados pelo vetor real  $\theta \in \mathbb{R}^n$  dado por

$$\theta = [a_1, \dots, a_{n_a}, b_1, \dots, b_{n_b}, k_1, \dots, k_{n_k}, d_1, \dots, d_{n_d}, f_1, \dots, f_{n_f}]^T. \quad (41)$$

A abordagem de erro de predição para a identificação de sistemas com critério quadrático tem como objetivo minimizar o erro de predição

$$\varepsilon(t, \theta) \triangleq y(t) - \hat{y}(t, \theta), \quad (42)$$

com respeito ao vetor de parâmetros, onde a predição um passo à frente para o modelo (40) é dada por

$$\hat{y}(t, \theta) = H^{-1}(z, \theta)G(z, \theta)u(t) + [1 - H^{-1}(z, \theta)]y(t). \quad (43)$$

O erro de predição é medido através da seguinte norma:

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} \varepsilon^2(t, \theta). \quad (44)$$

A estimativa  $\hat{\theta}_N$  é então definida como a minimização de (44):

$$\hat{\theta}_N = \arg \min V_N(\theta). \quad (45)$$

Devido a distúrbios desconhecidos e a quantidade limitada de dados, o modelo obtido sempre irá conter erros, mesmo nos casos em que a classe de modelos for suficientemente flexível para descrever o sistema. Alguns resultados de propriedades estatísticas da estimativa  $\hat{\theta}_N$  são apresentados a seguir.

### 3.4.2 Incertezas nas estimativas dos parâmetros

A qualidade das estimativas é comumente medida através de suas propriedades estatísticas. Para isto, é necessário que o tamanho do experimento  $N$  seja suficientemente grande, de forma que possam ser utilizadas expressões assintóticas para as propriedades estatísticas da estimativa.

Seja  $\theta^*$  o limite de convergência da minimização do erro de predição, isto é

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \theta^*. \quad (46)$$

Sejam os vetores

$$Q(z) = [G_0(z) H_0(z)]^T, \quad \hat{Q}_N(z) = [G(z, \hat{\theta}_N) H(z, \hat{\theta}_N)]^T. \quad (47)$$

A qualidade da estimativa pode ser calculada em termos da diferença (SOLARI, 2005)

$$\Delta Q_N(z) \triangleq \hat{Q}_N(z) - Q(z),$$

a qual pode ser separada em erro de polarização e erro de variância:

$$\Delta Q_N(z) \triangleq \underbrace{\hat{Q}_N(z) - Q^*(z)}_{\text{erro de variância}} + \underbrace{Q^*(z) - Q(z)}_{\text{erro de polarização}} \quad (48)$$

onde  $Q^*(z) = [G(z, \theta^*) H(z, \theta^*)]^T$ .

Se o experimento é realizado em malha aberta, ou seja, quando  $u(t)$  e  $e(t)$  são descorrelacionados e se  $G(z, \theta)$  e  $H(z, \theta)$  são parametrizados de forma independente, ou seja,

$$\theta = \begin{bmatrix} \rho \\ \eta \end{bmatrix}, \quad G(z, \theta) = G(z, \rho), \quad H(z, \theta) = H(z, \eta), \quad (49)$$

então  $G_0(z)$  pode ser estimada de forma consistente, independentemente de  $H_0(z)$  pertencer ou não à classe de modelos (LJUNG, 1999). Nesse caso, o erro entre o processo real e o modelo estimado é dado pelos erros de polarização e de variância da estimativa (GEVERS, 1995, 2006), onde

$$\text{erro de variância} = G(z, \hat{\theta}_N) - G(z, \theta^*), \quad (50)$$

$$\text{erro de polarização} = G(z, \theta^*) - G_0(z). \quad (51)$$

Dessa forma, o erro de polarização relaciona a diferença entre o modelo obtido em  $\theta^*$  (que é o melhor modelo que o algoritmo escolhido pode encontrar) e o processo real  $G_0(e^{j\omega})$ , enquanto que o erro de variância é a diferença entre o melhor modelo possível  $G(e^{j\omega}, \theta^*)$  e o modelo estimado  $G(e^{j\omega}, \hat{\theta}_N)$ . Esses erros podem ser considerados importantes propriedades da estimativa na análise do modelo obtido.

Claramente, o ideal na solução de um problema de identificação é obter um modelo do processo livre desses erros. Para tentar atingir esse ideal, existem diferentes escolhas que podem ser feitas, como o sinal que será utilizado no experimento, e a classe de modelos que será utilizada para caracterizar o processo. Conforme pode ser visto em (48), (51) e (50), o erro de polarização está ligado diretamente à escolha da classe de modelos: se a classe for tal que o sistema real pertença a esta classe e o sinal  $u(t)$  for persistentemente excitante, então o erro de polarização será zero, visto que  $G_0(z) = G(z, \theta^*)$  e

$H_0(z) = H(z, \theta^*)$ . Nesse caso, o modelo é capaz de representar exatamente o sistema real e esta situação é frequentemente chamada de *caso matched*. Já o erro de variância está associado ao sinal de entrada que é aplicado no experimento, variando com o tamanho do experimento e com a persistência de excitação do sinal, bem como na relação sinal ruído dos sinais, já que normalmente um sistema real apresenta algum tipo de ruído de medição.

Por outro lado, quando a classe de modelos escolhida não contém o processo a ser identificado, não se pode zerar o erro de polarização. Este é o *caso unmatched* e o objetivo da identificação é encontrar um modelo cujo comportamento mais se aproxime do comportamento do sistema real.

Seja o sistema real pertencente à classe de modelos ( $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ ), ou seja, existe um parâmetro  $\theta_0$  tal que  $G(z, \theta_0) = G_0(z)$  e  $H(z, \theta_0) = H_0(z)$ . Então sob algumas hipóteses (LJUNG, 1999), a estimativa  $\hat{\theta}_N$  possui uma distribuição assintótica, a qual respeita

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta_0) \rightarrow \mathcal{N}(0, P_\theta) \text{ quando } N \rightarrow \infty, \quad (52)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N(\hat{\theta}_N - \theta_0)(\hat{\theta}_N - \theta_0)^T = P_\theta, \quad (53)$$

$$P_\theta = \sigma_e^2 \left( \bar{E} \left[ \psi(t, \theta_0) \psi^T(t, \theta_0) \right] \right)^{-1}, \quad (54)$$

$$\psi(t, \theta_0) = \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{y}(t, \theta) |_{\theta=\theta_0}. \quad (55)$$

Neste caso,  $\mathcal{N}(0, P_\theta)$  denota uma distribuição normal com média 0 e variância  $P_\theta$ . Assim, quando o sistema real pertence à classe de modelos escolhida, a estimativa converge para  $\theta_0$  e a covariância da estimativa é dada por

$$\text{Cov} \hat{\theta}_N \sim \frac{1}{N} P_\theta.$$

### 3.4.2.1 Covariância dos parâmetros

Contudo, não é somente o tamanho do experimento que influencia a precisão da estimativa. O espectro  $\Phi_{\chi_0}$ , definido em (56) também influencia a precisão da estimativa, como mostrado no seguinte lema (GEVERS, 1995; JANSOON, 2004; BOMBOIS et al., 2004):

**Lema 3.1** *Seja o espectro*

$$\Phi_{\chi_0} = \begin{bmatrix} \Phi_u & \Phi_{ue} \\ \Phi_{ue}^* & \sigma_e^2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

onde  $\Phi_u$  é o espectro do sinal de entrada e  $\Phi_{ue}$  é o espectro cruzado entre  $u(t)$  e  $e(t)$ .

O inverso da matriz de covariância,  $P_\theta^{-1}$ , é uma função linear do espectro  $\Phi_{\chi_0}$  dada por

$$P_\theta^{-1} = \frac{1}{2\pi\sigma_e^2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}(e^{j\omega}, \theta_0) \begin{bmatrix} \Phi_u(\omega) & \Phi_{ue}(\omega) \\ \Phi_{ue}^*(\omega) & \sigma_e^2 \end{bmatrix} \mathcal{F}^*(e^{j\omega}, \theta_0) d\omega \quad (57)$$

onde

$$\mathcal{F}(e^{j\omega}, \theta_0) = \begin{bmatrix} H^{-1}(\theta_0) \frac{dG(\theta_0)}{d\theta} & H^{-1}(\theta_0) \frac{dH(\theta_0)}{d\theta} \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Como  $P_\theta$  é uma medida do tamanho dos erros nos parâmetros, o Lema 3.1 mostra exatamente como este erro está relacionado com o espectro  $\Phi_{\chi_0}$ , e especialmente com o espectro do sinal de entrada  $\Phi_u$  e o espectro cruzado  $\Phi_{ue}$ . É importante ressaltar que

somente  $\Phi_u$  e  $\Phi_{ue}$  são medidas que podem ser utilizadas para minimizar  $P_\theta$ . As outras medidas são dependentes do sistema desconhecido.

O espectro cruzado é zero quando o sistema opera em malha aberta, sob a hipótese de que o ruído é descorrelacionado com o sinal de entrada  $u(t)$ . Nesse caso, o espectro do sinal de entrada é a única medida que influencia a matriz de covariância.

### 3.4.2.2 Intervalo de confiança para os parâmetros identificados

Seja a estimativa  $\theta_N$  uma estimativa assintótica normal que respeite (52-55), então

$$(\hat{\theta}_N - \theta_0)P_N^{-1}(\hat{\theta}_N - \theta_0) \rightarrow \chi^2 \text{ quando } N \rightarrow \infty, \quad (59)$$

com

$$P_N = P_\theta/N \quad (60)$$

e portanto,

$$U_\theta = \left\{ \theta \mid (\hat{\theta}_N - \theta_0)P_N^{-1}(\hat{\theta}_N - \theta_0) \leq \chi_\alpha^2 \right\}. \quad (61)$$

onde  $\chi_\alpha^2$  é uma distribuição Qui-quadrado com probabilidade  $\alpha$ , ou seja, é um intervalo de confiança que inclui assintoticamente o parâmetro  $\theta_0$  com probabilidade  $\alpha$  (GEVERS, 1995; JANSSON, 2004). Com outras palavras, as estimativas são assintoticamente centradas em  $\theta_0$  e estão dentro de um elipsoide definido por  $P_N$  e  $\chi_\alpha^2$  com probabilidade  $\alpha$ . A Tabela 2 mostra alguns valores de  $\chi^2$  para alguns valores de probabilidades  $\alpha$  e diferentes graus de liberdade, ou seja, quantidade de parâmetros que serão identificados  $n$  (SPIEGEL, 1992).

Tabela 2: Distribuição  $\chi^2$  para alguns valores de probabilidades  $\alpha$  e diferentes graus de liberdade  $n$ .

$n \backslash \alpha$	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	4.6052	5.9915	7.3778	9.2104	10.5965
3	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381
4	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602
5	9.2363	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5475
7	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777

## 3.5 Projeto de experimento

Projeto de experimento pode ser visto como a *escolha das variáveis* a serem medidas e manipuladas quando for realizado o experimento para identificação do sistema. O objetivo é ajustar as condições de experimento a fim de que uma quantidade máxima de informação seja obtida através do experimento (ROJAS et al., 2007) a ser realizado com base nessas variáveis. Duas variáveis muito importantes são o sinal de entrada  $u(t)$  (ou  $r(t)$  no caso de um experimento em malha fechada) a ser aplicado bem como o seu tamanho  $N$ .

Dois aspectos diferentes são associados à escolha do sinal de entrada  $u(t)$ . Um é relacionado a propriedades de segunda ordem do sinal, como seu espectro de potência  $\Phi_u(\omega)$  e o espectro cruzado  $\Phi_{ue}(\omega)$  entre o sinal de entrada e o ruído de medição. O outro

aspecto relaciona-se com o “formato” do sinal. Pode-se trabalhar com sinais formados por somas de senoides, ruído branco filtrado, sinais pseudo-randômicos ou ainda sinais binários (LJUNG, 1999).

Por fim, ainda é necessário escolher o tamanho do experimento  $N$ , ou seja, o número de medidas de sinais de entrada e saída que serão coletados.

Uma vez que as incertezas das estimativas estão intimamente ligadas ao tamanho do experimento  $N$  e ao espectro dos sinais de entrada do processo  $\Phi_u$  e  $\Phi_{ue}$ , o projeto de experimento é a ferramenta que considera a alteração destas variáveis com o intuito de minimizar a incerteza do sistema identificado, em termos de suas funções de transferência  $G(z, \hat{\theta}_N)$  e  $H(z, \hat{\theta}_N)$  ou em termos do vetor de parâmetros  $\theta_N$ .

Para a identificação de sistemas lineares, existem três fatos básicos que governam a escolha dos sinais (LJUNG, 1999):

- as propriedades assintóticas da estimativa (polarização e variância) dependem somente do espectro do sinal de entrada  $\Phi_u$ , e não da forma de onda do sinal;
- o sinal de entrada deve ter amplitude limitada:  $\underline{u} \leq u(t) \leq \bar{u}$ .
- sinais periódicos podem ser compostos de acordo com a ordem de persistência de excitação necessária para a identificação do sistema.

### 3.5.1 Sinais de entrada comumente aplicados

Existem alguns sinais que são tipicamente aplicados em identificação de sistemas, os quais serão descritos a seguir, bem como suas principais vantagens e desvantagens.

#### 3.5.1.1 Ruído branco filtrado

Uma escolha simples de sinal é gerar ruído gaussiano e após filtrá-lo através de um filtro linear. Assim, é teoricamente possível atingir qualquer espectro do sinal através de uma escolha adequada do filtro. Como o sinal é gerado *off-line*, pode-se aplicar filtros não-causais e eliminar o efeito transiente do sinal, o que proporciona melhor comportamento espectral (LJUNG, 1999).

#### 3.5.1.2 Sinal binário randômico

Um sinal binário randômico é um processo randômico que assume apenas dois valores, e pode ser gerado de diferentes maneiras. A maneira mais simples de obtê-lo é gerar ruído branco gaussiano com média zero, filtrá-lo adequadamente e utilizar apenas o sinal (positivo ou negativo) do sinal obtido. Após isto, pode-se adequar o sinal à amplitude desejada. Porém, pegando-se apenas o sinal (positivo ou negativo) do sinal filtrado, o espectro de frequência é alterado. Isso não é desejável uma vez que o objetivo é modelar justamente o espectro do sinal. Dessa forma, é recomendável verificar o espectro obtido antes de aplicar o sinal ao sistema.

#### 3.5.1.3 Sinal binário pseudo-randômico, PRBS

Um sinal binário pseudo-randômico é um sinal periódico, determinístico com propriedades de ruído branco. É gerado através de

$$u(t) = \text{res}(A(z)u(t), 2) = \text{res}(a_1u(t-1) + \dots + a_nu(t-n), 2) \quad (62)$$

onde  $\text{res}(x, 2)$  é o resíduo de  $x$  dividido por 2. Dessa forma,  $u(t)$  assume valores entre 0 e 1. Após, é possível adequar os limites do sinal aos valores desejados. O vetor de entradas passadas  $[u(t-1) \dots u(t-n)]$  apresenta apenas  $2^n$  valores diferentes e a sequência  $u(t)$  é periódica, com um período máximo  $M = 2^n - 1$ . Desde que  $A(z)$  seja escolhido adequadamente (LJUNG, 1999), o sinal  $u(t)$  obtêm a máxima periodicidade  $M$ . O espectro deste sinal é dado por

$$\Phi_u(\omega) = \frac{2\pi\bar{u}^2}{M} \sum_{k=1}^M \delta(\omega - 2\pi k/M), \quad 0 \leq \omega < 2\pi. \quad (63)$$

Na faixa  $0 \leq \omega < 2\pi$  existem  $M - 1$  picos de frequência (excluindo-se  $\omega = 0$ ). Isto mostra que um sinal PRBS com período máximo  $M$  comporta-se como um “ruído gaussiano periódico”, e é persistentemente excitante de ordem  $M - 1$ .

#### 3.5.1.4 Múltiplas senoides

Uma escolha de sinal de entrada bastante natural e prática é um sinal formado por uma soma de senoides

$$u(t) = \sum_{k=1}^d a_k \cos(\omega_k t + \phi_k). \quad (64)$$

Desconsiderando os efeitos transitórios do sinal, o espectro é dado por

$$\Phi_u(\omega) = 2\pi \sum_{k=1}^d \frac{a_k^2}{4} [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)]. \quad (65)$$

Através da escolha de  $d$ ,  $a_k$  e  $\omega_k$  é possível aplicar a energia do sinal precisamente em frequências desejadas.

#### 3.5.1.5 Considerações sobre sinais periódicos

Alguns dos sinais descritos possuem uma característica inerente de periodicidade, como o sinal PRBS e a soma de senoides. Outros, porém, podem ser feitos periódicos por simples repetição. Sinais periódicos de período  $M$  podem ter um espectro de no máximo  $M$  frequências diferentes. Nesse sentido, sinais de entrada não-periódicos são mais excitantes se considerados o mesmo período de tempo.

Quando uma entrada periódica é aplicada ao sistema, seja  $K$  períodos de tamanho  $M$ , é recomendável que se trabalhe apenas com um período de dados. Assim, divide-se os dados em  $K$  bateladas, cada uma de tamanho  $M$ , e trabalha-se com a média obtida a partir dessas bateladas em cada instante de tempo. Isso permite utilizar menos dados para obter o modelo, fazendo com que a relação sinal/ruído seja aumentada por  $K$ , e o tamanho dos dados diminuído pelo mesmo fator (PINTELO; SCHOUKENS, 2001).

Além disso, um sinal de entrada periódico permite a estimativa do nível de ruído do sistema. Quando o sistema entra em regime permanente, as diferenças na resposta do sistema nos diferentes períodos podem ser atribuídas ao ruído.

### 3.5.2 Minimização de variância

Quando o método de identificação baseado em erro de predição é utilizado com uma estrutura de modelo de ordem completa, ou seja, quando o modelo é tal que  $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ , o vetor de parâmetros converge conforme (52)-(55), onde a matriz de covariância dos parâmetros  $P_\theta$  pode ser estimada através dos dados.

Seja  $\mathcal{X}$  um vetor que contém todas as variáveis a serem escolhidas associadas ao experimento. O objetivo do projeto de experimento é encontrar um conjunto para o qual a matriz de covariância  $P_\theta(\mathcal{X})$  seja minimizada. Assim, o problema de projeto de um sinal de entrada ótimo pode ser definido como

$$\min_{\mathcal{X} \in X} \beta(P_\theta(\mathcal{X})) \quad (66)$$

considerando restrições no sinal de entrada e/ou no sinal de saída.  $\beta(P)$  é uma medida escalar do tamanho da matriz  $P$  e  $X$  é um conjunto de projetos possíveis. Exemplos comuns dessa medida são (JANSSON, 2004; BARENTHIN, 2006; GEVERS, 1995, 2005)

$$\text{Tr } P_\theta \quad (67)$$

$$\lambda_{max}(P_\theta) \quad (68)$$

$$\det P_\theta \quad (69)$$

$$\text{Tr } W P_\theta, \quad (70)$$

onde  $W$  é uma matriz não-negativa.

A variância em determinado componente de  $\theta$  será pequena se o sistema identificado for sensível àquele componente. Assim, deve-se escolher as saídas  $y(t)$  e as entradas  $u(t)$  de tal forma que a saída do sistema seja sensível em relação aos parâmetros que são importantes para a aplicação em questão (LJUNG, 1999).

Apesar do experimento poder ser projetado diretamente com relação ao sinal de entrada no espaço do tempo ( $u(1), \dots, u(N)$ ), essa ideia gera um problema de otimização não-linear complexo envolvendo um grande número de variáveis. Este problema é simplificado significativamente se o sinal for quasi-estacionário, o qual pode ser representado por uma densidade espectral  $\Phi_u(\omega)$  (GEVERS; BOMBOIS, 2006).

De fato, em se tratando de identificação em malha aberta, o inverso da matriz de covariância pode ser escrita em função do espectro do sinal de entrada, pois o espectro cruzado é zero (veja (57)). Essa fórmula mostra que o tamanho do experimento  $N$  e o espectro do sinal de entrada  $\Phi_u(\omega)$  aparecem linearmente na expressão e que, para um dado tamanho  $N$  de experimento, o espectro do sinal de entrada é a única variável que pode ser manipulada a fim de manipular a matriz de covariância do parâmetro. Assim, uma abordagem de projeto de experimento bastante comum é minimizar alguma métrica de  $P_\theta$  com relação a  $\Phi_u(\omega)$ , respeitando alguma restrição em  $\Phi_u(\omega)$ . Consequentemente, um sinal de entrada ótimo é definido como uma realização de tamanho  $N$  de um sinal quasi-estacionário  $u(t)$  cuja densidade espectral é dada por  $\Phi_u^{opt}(\omega)$  (GEVERS; BOMBOIS, 2006).

A solução para o elevado número de variáveis necessárias para identificar um sinal de entrada adequado é parametrizar o espectro  $\Phi_u(\omega)$  de forma que o inverso da matriz de covariância possa ser expresso através de um número finito de parâmetros. Diferentes soluções foram apresentadas em (ZARROP, 1979; MEHRA, 1974), cujas propostas são utilizar momentos trigonométricos e espectro discreto, respectivamente.

### 3.5.3 Projeto de experimento para controle robusto

Critérios de estabilidade e desempenho robustos de um sistema em malha fechada com relação a incertezas de modelo são tipicamente descritos através de expressões com ponderações em frequência do erro de variância da função de transferência. Usualmente, uma restrição de estabilidade robusta é formulada por (GEVERS; BOMBOIS, 2006)

$$\text{Var } G(e^{j\omega}, \hat{\theta}_N) \leq b(e^{j\omega}) \quad \forall \omega, \quad (71)$$



onde  $b(e^{j\omega})$  é uma função de ponderação na frequência que considera as propriedades de malha fechada do sistema. Uma maneira bastante utilizada para expressar a covariância da função de transferência é através da aproximação pelo primeiro termo da série de Taylor:

$$\text{Var } G(e^{j\omega}, \hat{\theta}_N) \approx \frac{\partial G^*(e^{j\omega}, \theta_0)}{\partial \theta} P_\theta \frac{\partial G(e^{j\omega}, \theta_0)}{\partial \theta}. \quad (72)$$

Alguns problemas de projeto de experimento baseados nesta fórmula são apresentados em (JANSSON; HJALMARSSON, 2004a,b), onde mostra-se que diferentes projetos baseados no critério  $H_\infty$  podem ser reformulados como problemas sujeitos a restrições LMI. Um projeto de experimento em malha aberta ótimo pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} \min_{\Phi_u(\omega)} \quad & \max_{\omega} \text{Tr}[W(e^{j\omega})P_\theta] \\ \text{sujeito a} \quad & \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_u(\omega) d\omega \leq \alpha, \\ & \Phi_u(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega, \end{aligned} \quad (73)$$

onde  $\alpha$  é uma constante positiva e  $W(e^{j\omega})$  é função da estrutura do modelo e reflete os objetivos de robustez. Através da aplicação do complemento de Schur, o problema pode ser reformulado como um problema de otimização convexo, sujeito a restrições LMI. Além disso, o problema será de dimensão finita (e portanto solucionável) se o espectro do sinal de entrada  $\Phi_u(\omega)$  for parametrizado de forma finita. Uma forma de se obter um sinal de entrada parametrizado de forma finita é através do uso de ruído branco filtrado por filtros FIR (LINDQVIST; HJALMARSSON, 2001; JANSSON, 2004). Esta abordagem será apresentada mais detalhadamente na Seção 3.5.4.

Outra maneira de se formular um projeto de experimento para garantir robustez no projeto de controle é baseada no uso de regiões elipsoidais da incerteza, os quais dependem diretamente da matriz de covariância  $P_\theta$ , conforme apresentado em (61). Os resultados apresentados em (BOMBOIS; GEVERS; SCORLETTI, 2000; BOMBOIS et al., 2001; GEVERS et al., 2003) permitem a formulação de problemas de projeto de experimento para garantir robustez no projeto de controle em termos de alguma função de  $U_\theta$ . Assim, conecta-se medidas de estabilidade e desempenho robustos a regiões elipsoidais de incerteza  $U_\theta$  e evita-se utilizar a aproximação em série de Taylor ou o limite superior para definir a região, os quais introduzem conservadorismo no projeto.

Em (HILDEBRAND; GEVERS, 2001) é apresentado um projeto de experimento em malha aberta ótimo baseado diretamente no uso da região elipsoidal  $U_\theta$ . A estabilidade robusta é garantida neste caso utilizando o pior caso da métrica  $\nu$ -gap  $\delta_{WC}(G(z, \hat{\theta}_N), \mathcal{D})$  entre o modelo identificado  $G(z, \hat{\theta}_N)$  e todos os modelos obtidos por erro de predição contidos no conjunto  $\mathcal{D} \triangleq \{G(z, \theta) | \theta \in U_\theta\}$ :

$$\delta_{WC}(G(z, \hat{\theta}_N), \mathcal{D}) = \sup_{\theta \in U_\theta} \delta_\nu(G(z, \hat{\theta}_N), G(z, \theta)), \quad (74)$$

onde a métrica  $\nu$ -gap é definida em (VINNICOMBE, 1993). Uma vantagem de se usar essa métrica é que a mesma está diretamente relacionada ao tamanho da região dos controladores que estabilizam o sistema: quanto menor for o valor de  $\delta_{WC}(G(z, \hat{\theta}_N), \mathcal{D})$ , maior é o conjunto de controladores que estabilizam todos os modelos em  $\mathcal{D}$ .

### 3.5.4 Problema de dimensão finita

A maior contribuição do trabalho de (JANSSON, 2004) é a tradução dos problemas de projeto de experimento em programas de otimização convexa, ou seja, que podem ser solucionados através do uso de restrições LMI. Os projetos de experimento considerados no trabalho de Jansson são definidos por

$$\begin{aligned} & \min_{\Phi_{x_0}(\omega)} \quad \text{objetivo} \\ & \text{sujeito a} \quad \text{restrições de qualidade e} \\ & \quad \quad \quad \text{restrições no sinal} \end{aligned} \quad (75)$$

ou seja, podem ser formulados como problemas de otimização que incluem restrições na qualidade do modelo e nos sinais a serem aplicados. As restrições de qualidade geralmente são funções da matriz de covariância  $P$ . Dessa forma, é natural utilizar o espectro do sinal de entrada  $\Phi_u$  e algumas vezes o espectro cruzado  $\Phi_{ue}$  como variáveis de projeto. As restrições no sinal devem ser utilizadas para que os problemas não resultem em soluções de sinais com energia infinita. Essas restrições incluem restrições na energia do sinal bem como na escolha de faixa de frequência do mesmo.

Na forma original, a formulação dos problemas de projeto de experimento é intratável, por diversas razões:

- as restrições são tipicamente não-convexas, as quais são difíceis de solucionar através de problemas de otimização;
- as restrições são, em muitos casos, de dimensão infinita;
- o sinal de entrada deve ser escolhido de forma que o seu espectro de frequência seja adequado;
- a variância assintótica depende dos parâmetros reais do sistema, o que é desconhecido, ou seja  $P_\theta = P(\theta_0)$ .

A solução dos três primeiros itens é obtida através de algumas adaptações são realizadas em (JANSSON, 2004), de forma que o projeto de experimentos possa ser solucionado. Para isso, o espectro do sinal de entrada, e algumas vezes do espectro cruzado, é parametrizado de forma linear e de dimensão finita, tornando o problema de otimização convexo e, como consequência, tratável. Porém, não é possível solucionar o último item sem o conhecimento prévio do sistema, ou ao menos uma estimativa do mesmo.

Assim, o projeto de experimento é solucionado através de dois passos: primeiramente, um ensaio inicial é realizado para obtenção de uma estimativa do sistema; após, com esta estimativa, realiza-se o projeto de experimento que resulta no sinal “adequado” a ser aplicado ao sistema para obtenção do modelo final.

#### 3.5.4.1 Restrições no sinal de entrada

Para que os projetos de experimentos sejam factíveis é necessário incluir restrições no sinal. Diferentes tipos de restrições podem ser incluídas, desde que sejam lineares com relação ao espectro dos sinais envolvidos. Estas restrições podem ser na energia do sinal, dada por

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |W_u(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) d\omega \leq 1 \quad (76)$$

ou restrição na faixa de frequência

$$\alpha_u(\omega) \leq \Phi_u(\omega) \leq \beta_u(\omega) \quad \forall \omega. \quad (77)$$

Genericamente, o espectro do sinal de entrada pode ser descrito por

$$\Phi_u(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_k \mathcal{B}(e^{j\omega}) \quad (78)$$

para alguma base de funções  $\mathcal{B}$ . Sem perda de generalidade, assume-se que  $\mathcal{B}_{-k} = \mathcal{B}_k^*$ , de forma que  $c_{-k} = c_k$  e o espectro é caracterizado unicamente por  $c_0, c_1, c_2, \dots$ . Assume-se também que  $\mathcal{B}_k(e^{-j\omega}) = \mathcal{B}_k^*(e^{j\omega})$  de forma que  $c_k \in \mathbb{R}$ . Os coeficientes  $c_k$  precisam ser tais que

$$\Phi_u(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega. \quad (79)$$

Se a base de funções for do tipo  $\mathcal{B}_k(e^{j\omega}) = e^{-j\omega k}$ , então os coeficientes  $\tilde{c}_k$  são equivalentes à autocorrelação do sinal no instante  $k$

$$\tilde{c}_k = r_k \triangleq Eu(t)u(t-k). \quad (80)$$

Porém, para o problema de otimização ser tratável, o espectro (78) precisa ser caracterizado por uma realização de dimensão finita:

$$\Phi_u(\omega) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} \tilde{c}_{|k|} \mathcal{B}_k(e^{j\omega}). \quad (81)$$

Uma forma de se obter uma parametrização de dimensão finita para o espectro do sinal de entrada é através do uso de filtros FIR. Nesse caso, tem-se que  $\mathcal{B}_k = e^{j\omega k}$ . Esta abordagem é baseada no lema de Kalman-Yakubovich-Popov (lema KYP). A ideia é postular que o espectro possa ser realizado utilizando um filtro FIR de ordem  $M$ . Como qualquer espectro pode ser aproximado por um processo FIR, com qualquer precisão, esta abordagem é em princípio genericamente aplicável. Contudo, quando  $M$  se torna grande, a complexidade computacional se torna um problema.

A fim de garantir que o espectro seja positivo (79), usa-se o seguinte resultado:

**Lema 3.2** *Seja  $A, B, C, D$  uma realização controlável no espaço de estados da parte positiva real do espectro de entrada,  $\Psi(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M-1} c_k \mathcal{B}_k(e^{j\omega})$ . Então existe  $Q = Q^T$  tal que*

$$K(Q, A, B, C, D) = \begin{bmatrix} Q - A^T Q A & -A^T Q B \\ -B^T Q A & -B^T Q B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C^T \\ C & D + D^T \end{bmatrix} \geq 0 \quad (82)$$

se e somente se

$$\Phi_u(\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} c_k [\mathcal{B}_k(e^{j\omega}) + \mathcal{B}_k^*(e^{j\omega})] \geq 0$$

*Prova: Aplicação do lema KYP (YAKUBOVICH, 1962).*

A ideia é utilizar a realização no espaço de estados  $A, B, C, D$  da parte positiva do espectro onde os coeficientes  $c_k$  apareçam linearmente em  $C$  e  $D$ . O Lema acima então é utilizado para garantir a positividade do espectro, por meio da inequação linear matricial.

Quando a entrada é moldada por um filtro FIR a escolha natural da descrição no espaço de estados da parte positiva do espectro é

$$A = \begin{bmatrix} 0_{1 \times M-2} & 0 \\ I_{M-2} & 0_{M-2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (84)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{M-1} \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$D = c_0 \quad (86)$$

Com esta parametrização os parâmetros  $c_k$  aparecem linearmente em  $C$  e  $D$  e (82) torna-se uma LMI.

Com o espectro do sinal de entrada parametrizado de forma finita, o inverso da matriz de covariância  $P_\theta^{-1}$  é dada por uma função afim nas variáveis  $c_k$ , as quais parametrizam o espectro de entrada. Assim

$$P_\theta^{-1} = R_0(\theta_0) + \sum_{k=0}^{M-1} c_k B_k^P(\theta_0), \quad (87)$$

onde

$$B_k^P(\theta_0) = \frac{1}{2\pi\sigma_e^2} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_u(e^{j\omega}, \theta_0) [\mathcal{B}_k(e^{j\omega}) + \mathcal{B}_k^*(e^{j\omega})] \mathcal{F}_u^*(e^{j\omega}, \theta_0) d\omega, \quad (88)$$

e

$$R_0(\theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}_e(e^{j\omega}, \theta_0) \mathcal{F}_e^*(e^{j\omega}, \theta_0) d\omega. \quad (89)$$

#### 3.5.4.2 Restrições de qualidade em regiões elipsoidais

Em problemas de controle, usualmente são utilizadas métricas em frequência do erro da estimativa da função de transferência estimada. Uma dessas métricas é dada por (HJALMARSSON, 2005):

$$\Delta(e^{j\omega}, \theta) = T(e^{j\omega}) \frac{G_0(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega}, \theta)}{G(e^{j\omega}, \theta)}, \quad (90)$$

onde  $G_0(e^{j\omega})$  é o sistema real,  $G(e^{j\omega}, \theta)$  é o modelo estimado e  $T(e^{j\omega})$  é uma função de ponderação. Quando  $T(e^{j\omega})$  é a função de malha fechada desejada, a norma  $H_\infty$  de (90) é considerada uma medida de estabilidade e desempenho robustos (MORARI; ZAFIRIOU, 1989; ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1995; JANSSON, 2004); por exemplo,  $\|\Delta(\theta)\|_\infty < 1$  é uma condição de estabilidade robusta clássica. Uma vez que o modelo identificado  $G(e^{j\omega}, \theta)$  pertence a uma região de incerteza, torna-se adequado projetar o experimento de identificação tal que  $\Delta(\theta)$  seja minimizado para todos modelos pertencentes a essa região.

Considere a medida do pior caso de  $\Delta$  em um conjunto de modelos pertencente a um intervalo de confiança:

$$\max_{\omega, \theta \in U} |\Delta|^2, \quad (91)$$

$$U_\theta = \{\theta | N(\theta - \theta_0)^T P_\theta^{-1} (\theta - \theta_0) \leq \chi\}. \quad (92)$$

Considerando essa medida é possível garantir que certa porcentagem (definida por  $\chi$ ) de todos modelos identificados satisfaçam essa restrição de qualidade. Essa medida de qualidade pode ser escrita através da medida generalizada, definida como

$$\begin{aligned} F(\omega, \eta) &\leq \gamma, \quad \forall \omega \text{ \& } \forall \eta \in \Upsilon, \\ \Upsilon &= \left\{ \eta \mid (\eta - \eta_0)^T R (\eta - \eta_0) \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (93)$$

onde

$$F(\omega, \eta) = \frac{[W_n G(\eta) + X_n] * Y_n [W_n G(\eta) + X_n] + K_n}{[W_d G(\eta) + X_d] * Y_d [W_d G(\eta) + X_d] + K_d} \quad (94)$$

No caso em que  $W_n = W_d = Y_d = 1$ ,  $X_n = -G_0$ ,  $Y_n = T$  e  $X_d = K_n = K_d = 0$ , tem-se que

$$F(\omega, \eta) = \frac{|G(\eta) - G_0|^2 |T|^2}{|G(\eta)|^2} = |\Delta|^2. \quad (95)$$

A medida de qualidade (93) é uma restrição da norma máxima de  $F(\omega, \eta)$  com respeito a todo  $\omega$  e para todo  $\eta$  no elipsoide  $\Upsilon$ . Porém, para este problema ser tratável, deve-se formulá-lo como um problema convexo. Para isso, considere a estrutura de modelo (40), parametrizada pelo vetor  $\theta$ . Particiona-se  $\theta^T = [\eta^T \xi^T]$  de maneira que  $G(\theta) = G(\eta)$  e que  $G(\eta)$  seja parametrizada por

$$G(\eta) = \frac{Z_N(z)\eta}{1 + Z_D(z)\eta} \quad (96)$$

onde  $\eta^T = [a_1 \cdots a_{n_a} b_1 \cdots b_{n_b}]$  e

$$Z_N = z^{-n_k} [0 \cdots 0 \ 1 \ z^{-1} \cdots z^{-n_b+1}], \quad (97)$$

$$Z_D = [z^{-1} \cdots z^{-n_a} \ 0 \cdots 0 \ 1]. \quad (98)$$

e  $n_k$  é o atraso.

**Lema 3.3** *Seja  $F(\omega, \eta)$  definido por (93) e  $G(\eta)$  parametrizado por (96). Então*

$$F \leq \gamma \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \eta \\ 1 \end{bmatrix}^T (\gamma F_0(\omega) - F_1(\omega)) \begin{bmatrix} \eta \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (99)$$

onde  $F_0(\omega) = (M_d(\omega) + \overline{M_d(\omega)})$  e  $F_1(\omega) = (M_n(\omega) + \overline{M_n(\omega)})$  e onde

$$M_d(\omega) = Z_V^* x_d x_d^* Z_V, \quad (100)$$

$$M_n(\omega) = Z_V^* T(\omega) x_n x_n^* Z_V, \quad (101)$$

com

$$Z_V^* = \begin{bmatrix} Z_N^* & Z_D^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

$$x_d^* = \begin{bmatrix} 1 & X_d(e^{j\omega}) & X_d(e^{j\omega}) \end{bmatrix} \quad (103)$$

e  $x_n$  definido analogamente a  $x_d$ . Além disso  $f(\omega)$  é o mínimo múltiplo comum dos denominadores de  $M_d(\omega)$  e  $M_n(\omega)$ .

*Prova:* A prova deste lema é encontrada em (JANSSON, 2004).

Este lema é explorado no próximo teorema.

**Teorema 3.2** *Assume-se que  $F(\omega, \eta) < \infty$  para todo  $\omega$ . Assume-se ainda que  $\gamma F_0(\omega) - F_1(\omega)$  não é semi-definido positivo. Então as duas expressões seguintes são equivalentes*

1.

$$F(\omega, \eta) \leq \gamma \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi] \ \& \ \forall \eta \in \Upsilon, \quad (104)$$

$$\Upsilon = \left\{ \eta \mid (\eta - \eta_0)^T R (\eta - \eta_0) \leq 1 \right\}; \quad (105)$$

2.  $\exists \tau(\omega) > 0, \tau(\omega) \in \mathbb{R}$  tal que

$$\tau(\omega)(\gamma F_0(\omega) - F_1(\omega)) - E \geq 0 \quad \forall \omega, \quad (106)$$

$$E \triangleq \begin{bmatrix} -R & R\eta_0 \\ \eta_0 R & 1 - \eta_0^T R \eta_0 \end{bmatrix}. \quad (107)$$

*Prova: A prova deste teorema é encontrada em (JANSSON, 2004).*

Considerando o projeto do sinal de entrada, a variável  $R$  pode ser proporcional à inversa da matriz de covariância. Além disso, a inversa da matriz de covariância é afim no espectro do sinal de entrada  $\Phi_u$  e no espectro cruzado  $\Phi_{ue}$ . Com a parametrização linear do espectro,  $R$  também se torna linearmente parametrizada. Logo, este teorema estabelece que o pior caso da norma máxima da restrição de desempenho pode ser traduzido na condição do teorema, o qual é uma LMI em  $\tau$  e  $R$  para cada  $\omega$  quando  $\gamma$  é fixo.

Existem dois problemas associados a esta formulação. Primeiramente,  $\tau$  é uma função desconhecida de  $\omega$ . Além disso, esta é uma restrição de dimensão infinita, já que a restrição deve valer para qualquer frequência. Assim, o Lema 3.2 pode ser utilizado para transformar a restrição  $\tau(\omega) > 0$  em um problema de dimensão finita, o que permite reduzir (107) a uma LMI de dimensão finita.

**Lema 3.4** *Sejam  $F_0(\omega)$ ,  $F_1(\omega)$  e  $E$  como definidos anteriormente e seja introduzido*

$$\Lambda(\omega) \triangleq \tau(\omega)(\gamma F_0(\omega) - F_1(\omega)) - E. \quad (108)$$

*Quando  $\tau(\omega)$  é definido por*

$$\tau(\omega) = \Psi(e^{j\omega}) + \Psi^*(e^{j\omega}), \quad (109)$$

$$\Psi^*(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M_\tau-1} \tau_k \mathcal{B}_k(e^{j\omega}). \quad (110)$$

*para alguma base  $\mathcal{B}_k, k = 0, \dots, K-1$ , então existe uma sequência  $\Lambda_k$  tal que*

$$\Lambda(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \Leftrightarrow \sum_{k=0}^p \Lambda_k (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \quad \forall \omega, \quad (111)$$

*onde as variáveis  $\tau_k$  e os elementos de  $R$  aparecem linearmente em  $\Lambda_k$ .*

A partir de (111) pode-se utilizar o Lema 3.2 para transformar a restrição (93) em uma LMI.

**Teorema 3.3** *Assume-se que  $F(\omega, \eta) < \infty$  para todo  $\omega$ . Assume-se ainda que  $\gamma F_0(\omega) - F_1(\omega)$  não é semi-definido positivo. Seja  $\tau(\omega)$  como definido no Lema 3.4.*

*Então existe uma realização no espaço de estados  $A_\tau, B_\tau, C_\tau, D_\tau$  da parte real positiva de  $\tau(\omega)$  onde os parâmetros  $\tau_k$  aparecem linearmente em  $C_\tau, D_\tau$ . Similarmente, existe uma realização no espaço de estados  $A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda, D_\Lambda$  da parte real positiva de  $\Lambda(\omega)$  onde os parâmetros  $\tau_k$  e os elementos de  $R$  aparecem linearmente em  $C_\Lambda, D_\Lambda$ .*

*Além disso, tem-se que*

$$F(\omega, \eta) \leq \gamma \quad \forall \omega \ \& \ \forall \eta \in \Upsilon, \quad (112)$$

$$\Upsilon = \left\{ \eta \mid (\eta - \eta_0)^T R (\eta - \eta_0) \leq 1 \right\}, \quad (113)$$

se existem  $Q_\tau = Q_\tau^T$  e  $Q_\Lambda = Q_\Lambda^T$  tal que

$$K(Q_\tau, A_\tau, B_\tau, C_\tau, D_\tau) \geq 0, \quad (114)$$

$$K(Q_\Lambda, A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda, D_\Lambda) \geq 0. \quad (115)$$

Este teorema é bastante poderoso para problemas de projeto de experimentos. Note que (115) é LMI em  $Q_\tau, Q_\Lambda, \tau_k$   $k = 0, \dots, M_\tau - 1$  e nos elementos de  $R$ . Quando  $R = P_\theta^{-1}$ , esta quantidade se torna linearmente parametrizada se o espectro for linearmente parametrizado como proposto em (JANSSON, 2004).

Por fim, o problema de otimização para o projeto de experimento é dado por

$$\begin{aligned} \min_{Q_\tau, Q_\Lambda, \tau_0, \dots, \tau_{M_\tau}, c_0, \dots, c_M} \quad & \alpha & (116) \\ \text{sujeito a} \quad & K(Q_\tau, \{A_\tau, B_\tau, C_\tau, D_\tau\}) \geq 0 \\ & K(Q_\Lambda, \{A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda, D_\Lambda\}) \geq 0 \\ & K(Q, \{A, B, C, D\}) \geq 0 \\ & Q_\tau^T = Q_\tau \\ & Q_\Lambda^T = Q_\Lambda \\ & Q^T = Q \\ & c_0 \leq \alpha. \end{aligned}$$

Essa formulação será utilizada nos exemplos ilustrativos do Capítulo 6, com as devidas modificações para um projeto de experimento para o problema de identificação do controlador ótimo.

### 3.6 Considerações Finais

Através da análise dos conceitos de identificação de sistemas apresentados neste capítulo, verifica-se que a qualidade da estimativa está diretamente ligada às propriedades assintóticas da mesma, como variância e erro de polarização. Assim, formular o problema de controle baseado em dados como um problema de identificação do controlador facilita a análise destas propriedades bem como projetar o experimento a fim de melhorá-las.

No caso de considerar o problema de controle como identificação do controlador, é necessário considerar a presença do ruído desde o início da formulação do problema, visto que as propriedades assintóticas da estimativa estão diretamente ligadas à sua presença. Uma solução para isso, considerando o método VRFT, seria reformulá-lo considerando a

presença do ruído. Assim, seria possível obter uma expressão da variância da estimativa (caso fosse não-polarizada) e projetar um experimento baseado nesta expressão. Porém, como será visto no Capítulo 5, a estimativa obtida com o método VRFT é polarizada, inviabilizando o projeto de experimento com o intuito de melhorar a qualidade da estimativa.

Por outro lado, surge a possibilidade de formulação de um outro método, também baseado em apenas uma batelada de dados, onde o projeto do controlador nada mais é do que a identificação da planta reparametrizada em função do controlador ideal  $C_d(z)$  baseado em um modelo de referência  $M(z)$  escolhido previamente. Assim, pode-se aplicar os conceitos de identificação de sistemas, bem como pode-se realizar um projeto de experimento com o intuito de melhorar a qualidade da estimativa em relação a alguma métrica desejada, como uma métrica que garanta robustez, por exemplo. De fato, esse novo método é apresentado no Capítulo 5 e uma aplicação do projeto de experimento apresentado na Seção 3.5.4 (JANSSON, 2004) para este método é apresentada no Capítulo 6.



## 4 MÉTODO DE SINTONIA BASEADO EM REFERÊNCIA VIRTUAL PARA PROCESSOS DE FASE NÃO-MÍNIMA

### 4.1 Introdução

Sempre que o projeto de controladores baseado em modelo de referência for utilizado, é importante que os possíveis zeros de *fase não-mínima* do processo a ser controlado sejam incluídos no modelo de referência utilizado. Caso isto não seja feito, o sistema em malha fechada com o controlador projetado pode resultar inclusive em instabilidade. Constata-se, assim, que o conhecimento dos zeros de fase não-mínima da planta (quando existentes) é crucial para o sucesso do projeto.

Assim, controladores baseados em dados, que por sua vez são baseados em modelo de referência, falham se a planta contém um ou mais zeros de fase não-mínima que não foram incluídos no modelo de referência. É importante salientar que este obstáculo é devido à formulação do problema de controle baseado em modelo de referência e não da natureza do projeto baseado em dados. A única forma de se evitar este problema em projetos baseados em modelo de referência é através da inclusão dos zeros de fase não-mínima no modelo de referência. Portanto, no momento de escolher o modelo de referência que será utilizado, é necessário o conhecimento da posição exata deste zero. Essa mesma constatação é relatada em (SALA; ESPARZA, 2005b), onde os autores sugerem uma identificação do processo como primeiro passo e, caso encontrados zeros de fase não-mínima, a inclusão dos mesmos no modelo de referência a ser usado com o método VRFT.

A fim de superar esta dificuldade no caso do método IFT, foi proposto um procedimento em (LECCHINI; GEVERS, 2002). Este procedimento consiste na extensão da formulação do modelo de referência através da adição de um termo no critério clássico  $H_2$ , o qual penaliza o erro médio quadrático entre a saída obtida do sistema em malha fechada e um *modelo de referência flexível*, cujos polos são os mesmos do modelo de referência desejado porém os zeros são totalmente livres.

Na verdade, o polinômio do numerador deste modelo de referência flexível possui todos seus parâmetros livres. O critério global é uma versão na qual pode-se escolher o peso entre o critério clássico e este *critério flexível*: o critério contém os parâmetros do controlador e os coeficientes do modelo de referência flexível. Assim, o critério global é minimizado em relação a esses dois vetores de parâmetros. A análise de convergência deste critério IFT modificado é bastante difícil; uma análise foi feita em (LECCHINI; GEVERS, 2002) apenas para o caso no qual o controlador é projetado apenas para referências do tipo degrau. Mesmo assim, as simulações mostraram que este esquema modificado funciona notavelmente bem: no caso em que a planta contém zeros de fase não-mínima, as simulações mostram que os parâmetros do modelo de referência flexível convergem

para os valores que reproduzem os zeros de fase não-mínima da planta.

O primeiro objetivo do trabalho apresentado neste capítulo é investigar se uma ideia similar pode ser desenvolvida ao método VRFT (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002). A aplicação de um critério baseado em um modelo de referência flexível ao VRFT parece ser mais difícil, pois o método VRFT minimiza um critério diferente do critério que se deseja realmente minimizar. Porém, os resultados obtidos, apresentados neste capítulo, mostram que um modelo de referência flexível pode de fato ser adaptado ao método VRFT para a sintonia de controladores. Similarmente ao caso do método IFT com critério flexível, é proposto um critério VRFT flexível, o qual contém um modelo de referência cujo numerador é um polinômio parametrizado através de um vetor de parâmetros livre. Assim, este resultado é uma extensão do método VRFT para o caso de plantas de fase não-mínima, inspirado pela solução proposta ao método IFT para o mesmo caso.

## 4.2 Critério flexível para o método VRFT

Uma solução para a limitação da formulação do projeto de controle baseado em modelo de referência quando aplicado a processos de fase não-mínima foi proposta em (LECCHINI; GEVERS, 2002) para ser aplicada ao método IFT. Esta solução consiste em usar um modelo de referência cujo numerador é parametrizado, de forma que todos os zeros são livres. Um modelo de referência com estas características pode ser descrito como

$$M(z, \eta) = \eta^T F(z), \quad (117)$$

onde  $\eta \in \mathbb{R}^q$  é o vetor de parâmetros e  $F(z)$  é um vetor de ordem  $q$  de funções racionais. Assim, define-se uma classe de modelos de referência, ao invés de apenas um único modelo de referência. Quando se permite que o numerador do modelo de referência seja determinado, o processo de otimização pode “achar” os zeros do processo, e particularmente os zeros de fase não-mínima. Vale ressaltar que através desta formulação, apenas parte da função de transferência de malha fechada é fixada. Mais especificamente, o denominador é fixado e, se o número de parâmetros livres  $q$  for igual à ordem do numerador, então o numerador é completamente livre e esta formulação torna-se conceitualmente equivalente ao projeto de controladores por alocação de polos.

Utilizando esta ideia no critério VRFT, obtém-se o seguinte critério de otimização (CAMPESTRINI; GEVERS; BAZANELLA, 2009)

$$\begin{aligned} J_0^{VR}(\eta, \rho) &= \bar{E} \left\{ L(z) \left[ u(t) - \left( \frac{1 - M(z, \eta)}{M(z, \eta)} C(z, \rho) \right) y(t) \right] \right\}^2 \\ &= \bar{E} [u_L(t) - C(z, \rho) \bar{e}_L(\eta, t)]^2 \end{aligned} \quad (118)$$

onde  $\bar{e}_L(\eta, t) = L(z) \bar{e}(\eta, t)$ . Quando aplicado o método VRFT clássico, a premissa sobre o controlador ideal - Premissa 2.1 - é crucial. A análise para este novo critério de projeto requer uma premissa similar. A Premissa 4.1 abaixo diz que existe, dentro da classe de modelos de referência considerada, um modelo de referência para o qual existe um controlador ideal.

**Premissa 4.1** *Existe um par  $(\eta^*, \rho^*)$  tal que  $J_0^{VR}(\eta^*, \rho^*) = 0$ , ou, equivalentemente,*

$$\exists \eta^*, \rho^* : C(z, \rho^*) = \frac{M(z, \eta^*)}{[1 - M(z, \eta^*)]G_0(z)}. \quad (119)$$

Sob a Premissa 4.1,  $\min_{\eta, \rho} J_0^{VR}(\eta, \rho) = 0$  e  $\arg \min_{\eta, \rho} J_0^{VR}(\eta, \rho) = (\eta^*, \rho^*)$ . Assim, segue que

$$\arg \min_{\eta, \rho} J_0^{VR}(\eta, \rho) = \arg \min_{\substack{\eta, \rho \\ (\eta, \rho) \neq \{0, 0\}}} \tilde{J}_0^{VR}(\eta, \rho) \quad (120)$$

onde

$$\tilde{J}_0^{VR}(\eta, \rho) = \bar{E} [L(z)M(z, \eta)u(t) - L(z)C(z, \rho)(1 - M(z, \eta))y(t)]^2, \quad (121)$$

que foi obtido multiplicando  $J_0^{VR}(\eta, \rho)$  por  $M(z, \eta)$ .

Dada a parametrização linear do controlador e do modelo de referência, tem-se que

$$\tilde{J}_0^{VR}(0, 0) = 0.$$

Assim, a multiplicação por  $M(z, \eta)$  criou um mínimo global adicional - e não desejado - na origem. Esta é a razão pelo qual o lado direito de (120) é sujeito a uma restrição cujo objetivo é excluir este mínimo indesejado  $(\eta, \rho) = \{0, 0\}$ . Na maioria das aplicações de controle, porém, uma restrição natural existente automaticamente faz exatamente isto: o modelo de referência deve ter ganho em regime permanente  $M(1, \eta) = 1$ . Assim,  $M(z, \eta)$  pode ser parametrizado considerando essa restrição.

A seguir, é mostrado que a minimização de (120) resulta em um mínimo  $(\eta^*, \rho^*)$  tal que  $M(z, \eta^*)$  contém todos os zeros de fase não-mínima de  $G_0(z)$ .

**Teorema 4.1** *Seja  $B(z)$  o mínimo denominador comum dos elementos de  $\beta(z)$  e seja  $G_0(z) = \frac{n_G(z)}{d_G(z)}$  uma fatorização coprima de  $G_0(z)$ . Seja a Premissa 4.1 satisfeita. Então os zeros de fase não-mínima de  $G_0(z)$  são também zeros de  $M(z, \eta^*)$ .*

**Prova 4.1** *De (119) tem-se que*

$$C(z, \rho^*) = \frac{n_M(z, \eta^*)d_G(z)}{[d_M(z) - n_M(z, \eta^*)]n_G(z)}. \quad (122)$$

*Uma vez que  $G_0(z)$  tem ganho estático diferente de zero,  $n_G(z)$  não possui zeros em  $z = 1$ . Como os polos de  $C(z, \rho^*)$  (i.e. as raízes de  $B(z)$ ) estão ou em  $z = 1$  ou estritamente dentro do círculo de raio unitário, segue que  $B(z)$  e  $n_G(z)$  não possuem raízes instáveis comuns. Assim, visto que o lado esquerdo de (122) é estável, qualquer raiz instável de  $n_G(z)$  deve ser cancelada por uma raiz de  $n_M(z, \eta^*)$ .*

Assim, inserindo (117) em (121), pode-se escrever o custo como

$$\tilde{J}_0^{VR}(\eta, \rho) = \bar{E} \{ \eta^T F(z) [u_L(t) + \rho^T \beta(z) y_L(t)] - \rho^T \beta(z) y_L(t) \}^2 \quad (123)$$

A expressão em (123) é biquadrática nos parâmetros  $\eta$  e  $\rho$ . Isto quer dizer que, para um valor fixo de  $\rho$ , a minimização de (123) com respeito a  $\eta$  é obtida através do método dos mínimos quadrados, já que (123) é quadrático no parâmetro  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \eta^*(\rho) &\triangleq \arg \min_{\eta} \tilde{J}_0^{VR}(\eta, \rho) \\ &= \bar{E} \left\{ [F(z)w(\rho, t)][F(z)w(\rho, t)]^T \right\}^{-1} \bar{E} \{ [F(z)w(\rho, t)][C(z, \rho)L(z)y(t)] \} \end{aligned} \quad (124)$$

onde  $w(\rho, t) \triangleq L(z)[u(t) + \rho^T \beta(z)y(t)]$ . Nota-se que  $w(\rho, t)$  pode ser gerado a partir dos dados, pois  $u(t)$ ,  $y(t)$ ,  $L(z)$  e  $C(z, \rho)$  são todos conhecidos. Similarmente, para valores fixos de  $\eta$  a minimização de (123) com respeito a  $\rho$  é obtida através do método dos mínimos quadrados:

$$\begin{aligned} \rho^*(\eta) &\triangleq \arg \min_{\rho} \tilde{J}_0^{VR}(\eta, \rho) \\ &= \bar{E} \left\{ [\beta(z)v(\eta, t)][\beta(z)v(\eta, t)]^T \right\}^{-1} \bar{E} \left\{ [\beta(z)v(\eta, t)][M(z, \eta)L(z)u(t)] \right\} \end{aligned} \quad (125)$$

onde  $v(\eta, t) \triangleq L(z)[1 - \eta^T F(z)]y(t)$ .

Assim, como o argumento em (123) é bilinear em  $\eta$  e  $\rho$ , a minimização de  $\tilde{J}_0^{VR}(\eta, \rho)$  pode ser tratada como uma sequência de problemas de mínimos quadrados (LJUNG, 1999):

$$\hat{\eta}^{(i)} = \arg \min_{\eta} \tilde{J}_0^{VR}(\eta, \hat{\rho}^{(i-1)}) \quad (126)$$

$$\hat{\rho}^{(i)} = \arg \min_{\rho} \tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}^{(i)}, \rho) \quad (127)$$

onde cada passo de mínimos quadrados é solucionado através das expressões (124)-(125) acima.

Este método de mínimos quadrados sequencial converge garantidamente, pelo menos a um mínimo local (LJUNG, 1999; SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

**Teorema 4.2** *O algoritmo (126)-(127) converge a um extremo de  $\tilde{J}_0^{VR}(\eta, \rho)$ .*

**Prova 4.2** *A prova é baseada na teoria de Lyapunov, usando-se a função de Lyapunov  $\tilde{J}_0^{VR}(\eta, \rho)$ , que por definição é positiva definida. Fica claro a partir da própria definição do algoritmo que  $\tilde{J}_0^{VR}(\eta, \rho)$  é uma função estritamente decrescente da sequência  $\hat{\eta}^{(i)}$ ,  $\hat{\rho}^{(i)}$ . Assim, a convergência do algoritmo é um resultado clássico da teoria de Lyapunov (KHALIL, 1992).*

Quando os dados são obtidos com o sistema operando em malha fechada, é natural que se use os parâmetros do controlador que está na malha de controle durante o experimento como valor inicial do algoritmo, mas esta não é a única escolha possível. O algoritmo também necessita de um valor inicial para o filtro  $L(z)$ , o qual depende de  $M(z, \eta)$ . Uma possível escolha é usar  $\bar{M}(z)$  para este propósito. Além disso, é importante ressaltar que, apesar do algoritmo de minimização ser iterativo, os dados utilizados são coletados apenas uma vez, mantendo a propriedade do método VRFT de ser um método direto, não iterativo.

#### 4.2.1 Aplicação do método em sistemas com ruído

O método VRFT é formulado para sistemas que não apresentam ruído. Quando este se faz presente no sistema, os autores propõem a utilização de variáveis instrumentais para que a estimativa dos parâmetros do controlador seja não-tendenciosa. Seguindo este raciocínio, neste trabalho é proposta a utilização de variáveis instrumentais também para o critério VRFT flexível, quando os dados utilizados pelo mesmo são afetados por ruído.

Seja o critério VRFT flexível solucionado a partir de (124) e (125). Nesse caso, para o cálculo de  $\eta^*(\rho)$ , o vetor regressor é dado por

$$\begin{aligned} \varphi_{\eta}(t, \rho) &= F(z)w(t, \rho), \\ &= F(z)L(z)[u(t) + \rho^T \beta(z)y(t)]. \end{aligned} \quad (128)$$

Para que a estimativa seja não tendenciosa, a variável instrumental deve ser escolhida de forma que seja correlacionada com o vetor regressor, porém descorrelacionada com o ruído (LJUNG, 1999). Uma forma de se obter esse resultado é realizando dois ensaios em malha aberta no sistema, aplicando o mesmo sinal de entrada. No primeiro, são coletados os dados de entrada  $u(t)$  e de saída  $y(t)$ ; já no segundo, somente os dados de saída  $y'(t)$  são coletados, já que os dados de entrada são iguais. Assim, os dados de saída dos dois ensaios são diferentes um do outro devido aos ruídos presentes nos dois sinais serem descorrelacionados um do outro. A variável instrumental é então construída como

$$\begin{aligned}\xi_\eta(t, \rho) &= F(z)w^{IV}(t, \rho), \\ &= F(z)L(z)[u(t) + \rho^T \beta(z)y'(t)].\end{aligned}\quad (129)$$

No caso de um ensaio em malha fechada, como o vetor regressor é afetado também por  $u(t)$ , que contém ruído já que o mesmo é obtido em malha fechada, a variável instrumental deve ser computada como

$$\xi_\eta(t, \rho) = F(z)L(z)[u'(t) + \rho^T \beta(z)y'(t)],$$

onde  $u'(t)$  é o sinal de entrada do segundo experimento (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Este sinal é diferente do sinal de entrada do primeiro experimento devido aos ruídos presentes nos dois sinais serem descorrelacionados.

Analogamente, para o cálculo de  $\rho^*(\eta)$ , o vetor regressor é dado por

$$\begin{aligned}\varphi_\rho(t, \eta) &= \beta(z)v(t, \eta), \\ &= \beta(z)L(z)[1 - \eta^T F(z)]y(t).\end{aligned}\quad (130)$$

Portanto, a variável instrumental para este problema é dada por

$$\begin{aligned}\xi_\rho(t, \eta) &= \beta(z)v^{IV}(t, \eta), \\ &= \beta(z)L(z)[1 - \eta^T F(z)]y'(t),\end{aligned}\quad (131)$$

onde  $y'(t)$  é obtido como no caso anterior. Nota-se que neste caso, não faz diferença se o ensaio é realizado em malha aberta ou fechada, já que  $v(t, \eta)$  não depende de  $u(t)$ .

Assim, para o caso de sistemas com ruído, o algoritmo (126)-(127) é solucionado através de

$$\begin{aligned}\eta^*(\rho) &= \bar{E} \left\{ [\xi_\eta(t, \rho)\varphi_\eta^T(t, \rho)]^{-1} \xi_\eta(t, \rho)[C(z, \rho)L(z)y(t)] \right\} \\ &= \bar{E} \left\{ [F(z)w^{IV}(\rho, t)][F(z)w(\rho, t)]^T \right\}^{-1} \bar{E} \left\{ [F(z)w^{IV}(\rho, t)][C(z, \rho)L(z)y(t)] \right\}\end{aligned}\quad (132)$$

e

$$\begin{aligned}\rho^*(\eta) &= \bar{E} \left\{ [\xi_\rho(t, \eta)\varphi_\rho^T(t, \eta)]^{-1} \xi_\rho(t, \eta)[M(z, \eta)L(z)u(t)] \right\} \\ &= \bar{E} \left\{ [\beta(z)v^{IV}(\eta, t)][\beta(z)v(\eta, t)]^T \right\}^{-1} \bar{E} \left\{ [\beta(z)v^{IV}(\eta, t)][M(z, \eta)L(z)u(t)] \right\}\end{aligned}\quad (133)$$

#### 4.2.2 Procedimento baseado em dois passos

O método recém apresentado pode ser aplicado em plantas de fase não-mínima, nas quais a aplicação do método VRFT clássico falha. Por outro lado, quando o processo é de fase mínima, o projeto baseado em modelo de referência (polos e zeros fixos) é factível, o que permite ao projetista partir para o critério VRFT clássico, onde existe uma vantagem

considerável quanto à simplicidade do método. Porém, sem o conhecimento prévio do processo, o projetista não deve tomar nenhuma decisão quanto ao método que irá utilizar.

Para os casos nos quais não se sabe *a priori* se existem zeros de fase não-mínima ou não e quantos são, é proposto o seguinte procedimento baseado em dois passos. Para simplificar a apresentação deste procedimento e dos resultados de simulação na próxima seção, é definido o seguinte critério genérico de projeto inspirado em (LECCHINI; GEVERS, 2002):

$$J_{\lambda}^{VR}(\eta, \rho) = (1 - \lambda)J_0^{VR}(\eta, \rho) + \lambda J^{VR}(\rho). \quad (134)$$

onde  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$ . Quando  $\lambda = 1$ , este critério torna-se o critério VRFT clássico (21); quando  $\lambda = 0$ , este critério então representa o critério VRFT modificado para plantas de fase não-mínima (118).

O procedimento baseado em dois passos pode então ser descrito como a seguir.

**Passo 1.** Minimizar  $J_{\lambda}^{VR}(\eta, \rho)$  em (134) com  $\lambda = 0$ . Defina os parâmetros minimizados como  $(\hat{\eta}, \hat{\rho})$  e verifique os zeros de  $M(z, \hat{\eta})$ .

**Passo 2.** Se  $M(z, \hat{\eta})$  obtido no Passo 1 tem zeros de fase não-mínima, então modifique o modelo de referência  $\bar{M}(z)$  de forma que este contenha os zeros de fase não-mínima. Se não, mantenha o modelo de referência  $\bar{M}(z)$  escolhido previamente. Então, aplique o método VRFT clássico com  $\bar{M}(z)$ , i.e. use  $\lambda = 1$ .

Nota-se que se  $M(z, \hat{\eta})$  contém zeros de fase não-mínima, então quando é utilizado o modelo de referência modificado  $\bar{M}(z)$  no método VRFT clássico, é necessário lidar com um filtro instável, uma vez que a referência virtual é calculada utilizando o inverso de  $\bar{M}(z)$ . Uma maneira de lidar com esse empecilho é através do uso de um filtro passa-tudo  $L_a$ , com o qual o mínimo da função custo  $J^{VR}(\rho)$  (21) permanece igual (HJALMARSSON et al., 1998).

Seja  $\bar{M}(z)$  fatorado como

$$\bar{M}(z) = \frac{n_u(z)n_s(z)}{d(z)},$$

onde o fator  $n_u$

$$n_u(z) = \prod_{k=1}^m (z - x_k)$$

contém todos os zeros instáveis e nada mais. Seja  $L_a(z)$  o seguinte filtro passa-tudo

$$L_a(z) \triangleq \frac{n_u(z)}{n_u^*(z)}$$

ou seja, um filtro de módulo igual a 1 para todas as frequências, onde

$$n_u^*(z) = \prod_{k=1}^m (x_k z - 1).$$

Assim, o critério  $J^{VR}(\rho)$  é levemente modificado de forma que se possa utilizar um filtro estável para calcular a referência virtual. Seja

$$\bar{M}_a(z) = \frac{n_u^*(z)n_s(z)}{d(z)}$$

uma função de transferência de módulo igual ao módulo de  $\bar{M}(z)$ , porém com zeros estáveis. Então,

$$J_a^{VR}(\rho) = \bar{E} \left[ L_a(z)u(t) - \left( C(z, \rho) \frac{1 - \bar{M}_a(z)}{\bar{M}_a(z)} \right) L_a(z)y(t) \right]^2$$

é o custo a ser minimizado, cujo mínimo é igual ao mínimo de  $J^{VR}(\rho)$ , para encontrar os parâmetros do controlador quando o modelo de referência contém zeros de fase não-mínima.

### 4.3 Exemplos ilustrativos

Nesta seção são apresentados alguns resultados de simulação utilizando o método VRFT flexível proposto. Se a planta tem zeros de fase não-mínima, o método proposto estima estes zeros e então estes podem ser incluídos no modelo de referência fixo.

#### 4.3.1 Processo com um zero de fase não-mínima

Supõe-se um projeto de controlador para um processo cuja função de transferência é dada por

$$G_1(z) = \frac{(z - 1.2)(z - 0.4)}{z(z - 0.3)(z - 0.8)}. \quad (135)$$

Deseja-se controlar este processo com um controlador PID

$$C(z, \rho) = \rho^T \beta(z) = [\rho_1 \ \rho_2 \ \rho_3] \begin{bmatrix} \frac{z^2}{z^2 - z} \\ \frac{z}{z^2 - z} \\ \frac{1}{z^2 - z} \end{bmatrix}. \quad (136)$$

O experimento que gerou os dados para serem utilizados pelo método é um experimento em malha-fechada, onde um degrau é aplicado como sinal de referência, e o controlador presente na malha de controle é dado por

$$C_{init}(z) = \frac{-0.7(z - 0.4)(z - 0.6)}{z^2 - z}. \quad (137)$$

##### 4.3.1.1 A Premissa 4.1 é satisfeita

Considere o seguinte modelo de referência flexível, para o qual a Premissa 4.1 é satisfeita:

$$M(z, \eta) = \frac{\eta_1 z^2 + \eta_2 z + \eta_3}{(z - 0.885)(z^2 - 0.706z + 0.32)}. \quad (138)$$

Para o modelo de referência fixo, foram escolhidos os mesmos polos, porém todos os zeros foram posicionados na origem e utilizou-se ganho em regime permanente  $\bar{M}(1) = 1$ ,

$$\bar{M}(z) = \frac{0.07061z^2}{(z - 0.885)(z^2 - 0.706z + 0.32)}. \quad (139)$$

Tabela 3: Evolução de  $M(z, \eta)$ ,  $C(z, \rho)$  (por meio de seus numeradores - ganhos e zeros) e  $\tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}, \hat{\rho})$  (após aplicar (126) na coluna 3 e após (127) na coluna 5) no procedimento iterativo para o processo  $G_1(z)$ .

$i$	$\text{num}(M(z, \hat{\eta}^{(i)}))$	$\tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}^{(i)}, \hat{\rho}^{(i-1)})$ ( $\times 10^{-6}$ )	$\text{num}(C(z, \hat{\rho}^{(i)}))$	$\tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}^{(i)}, \hat{\rho}^{(i)})$ ( $\times 10^{-6}$ )
1	$-1.07760(z - 1.182)(z - 0.6404)$	1.6772616	$-0.76020(z - 0.7448)(z - 0.5292)$	12.928054
2	$-0.87825(z - 1.186)(z - 0.5686)$	6.4634327	$-0.71172(z - 0.7704)(z - 0.4509)$	1.8210199
10	$-0.63076(z - 1.196)(z - 0.4291)$	0.0104166	$-0.61096(z - 0.7963)(z - 0.3245)$	0.0086147
20	$-0.59617(z - 1.199)(z - 0.4061)$	0.0002024	$-0.59312(z - 0.7996)(z - 0.3038)$	0.0001776
21	$-0.59512(z - 1.200)(z - 0.4054)$	0.0001411	$-0.59256(z - 0.7997)(z - 0.3031)$	0.0001240
30	$-0.59084(z - 1.200)(z - 0.4022)$	0.0000064	$-0.59026(z - 0.8000)(z - 0.3004)$	0.0000057

Este é o modelo de referência desejado na ausência de qualquer conhecimento sobre o zero de fase não-mínima. Assim, se o critério VRFT clássico for utilizado, com o modelo de referência (139), o controlador obtido é

$$C(z, \rho) = \frac{-2.2693(z^2 - 1.655z + 0.7007)}{z^2 - z},$$

o qual causa um sistema em malha fechada instável, conforme pode ser visto na função de transferência de malha fechada

$$T(z, \rho) = \frac{-2.2693(z - 1.2)(z - 0.4)(z^2 - 1.655z + 0.7007)}{(z - 0.3909)(z^2 - 1.774z + 0.7905)(z^2 - 2.204z + 2.47)},$$

cujos polos são

$$p = \begin{bmatrix} 1.1020 + 1.1206j \\ 1.1020 - 1.1206j \\ 0.8872 + 0.0583j \\ 0.8872 - 0.0583j \\ 0.3909 \end{bmatrix}.$$

Essa instabilidade é causada devido à presença do zero de fase não-mínima no processo, mas não no modelo de referência. Assim, o modelo de referência fixo (139) deve ser abandonado.

A ideia é, então, utilizar o procedimento em dois passos proposto. Utiliza-se  $\lambda = 0$  em (134) e minimiza-se  $\tilde{J}_0^{VR}(\eta, \rho)$  em relação a  $\eta$  e  $\rho$  utilizando-se o procedimento iterativo (126)-(127). As respostas ao degrau de  $M(z, \hat{\eta}^{(i)})$  e do sistema em malha fechada  $T(z, \hat{\rho}^{(i)})$  obtidas nas iterações 1 e 30 são apresentadas na Figura 4. Nota-se que  $M(z, \hat{\eta}^{(30)})$  e  $T(z, \hat{\rho}^{(30)})$  são praticamente indistinguíveis. A Tabela 3 mostra a evolução dos parâmetros correspondentes, através dos numeradores do controlador e do modelo de referência flexível, obtidos em diferentes iterações.

Os valores de  $M(z, \hat{\eta}^{(30)})$  e  $C(z, \hat{\rho}^{(30)})$  na iteração 30 são:

$$M(z, \hat{\eta}^{(30)}) = \frac{-0.59084(z - 1.2)(z - 0.4022)}{(z - 0.885)(z^2 - 0.706z + 0.32)},$$

$$C(z, \hat{\rho}^{(30)}) = \frac{-0.59026(z - 0.8)(z - 0.3004)}{z^2 - z}.$$

Observa-se na Tabela 3 que  $M(z, \hat{\eta}^{(30)})$  reproduz os dois zeros de  $G_1(z)$  com boa precisão, e o controlador  $C(z, \hat{\rho}^{(30)})$  é tal que seus zeros cancelam os polos do processo.



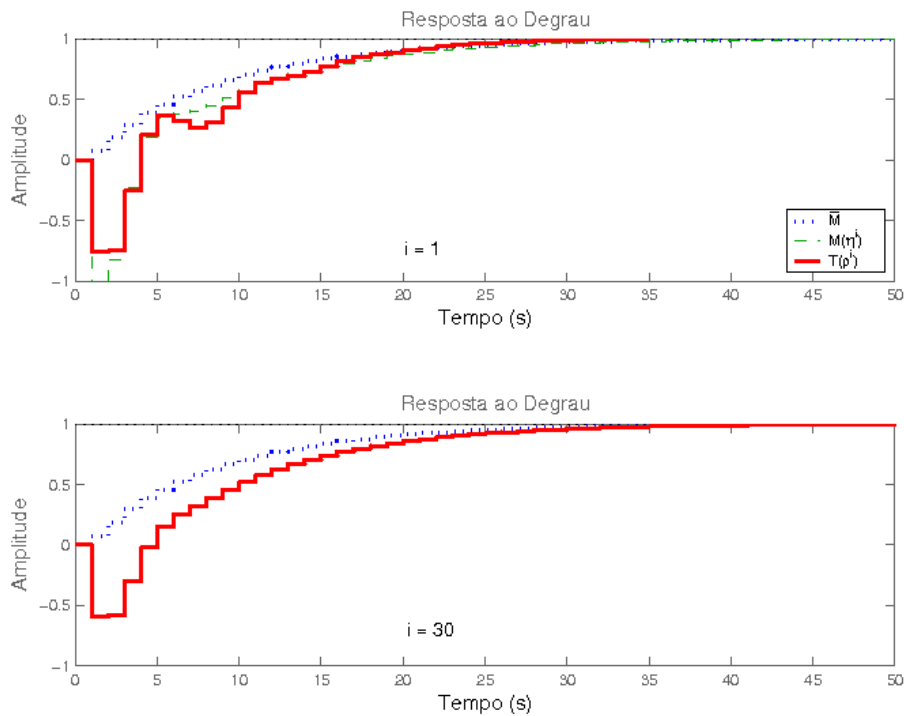


Figura 4: Respostas ao degrau do modelo de referência fixo (139) ( $\bar{M}$ ), do modelo flexível  $M(z, \hat{\eta}^{(i)})$  ( $M(\eta^i)$ ) e do sistema em malha fechada  $T(z, \hat{\rho}^{(i)})$  ( $T(\rho^i)$ ) para o processo  $G_1(z)$  com  $\lambda = 0$  obtidos nas iterações 1 e 30.

Nota-se ainda que uma boa estimativa do zero de fase não-mínima já se faz presente na iteração  $i = 21$ , enquanto que a convergência para o zero de fase mínima é mais lenta. Esta observação é consistente com os resultados apresentados em (MÅRTENSSON, 2007; MÅRTENSSON; HJALMARSSON, 2009), onde é mostrado que os zeros de fase não-mínima são mais fáceis de estimar que os zeros de fase mínima.

Este resultado é bastante satisfatório e mostra a eficiência do critério de projeto flexível para controlar processos com zeros de fase não-mínima. Enquanto que o controlador projetado através do método VRFT clássico causa a instabilidade do sistema em malha fechada, o controlador obtido através do método proposto proporciona um sistema em malha fechada estável cujo comportamento assemelha-se ao comportamento desejado, especificado pelo modelo de referência fixo.

Entretanto, pode-se fazer com que o comportamento em malha fechada seja ainda mais próximo do modelo de referência fixo. De fato, quando se aplica o modelo de referência flexível, os dois zeros do processo não são alterados e os mesmos aparecem na função de transferência em malha fechada. Mas apenas um desses zeros é de fase não-mínima e precisa estar presente; o outro zero de malha fechada pode ainda ser determinado pelo projetista. Assim, uma vez que se sabe que o processo realmente tem um zero de fase não-mínima e onde está localizado este zero,  $\bar{M}(z)$  é alterada a fim de incluir este zero de fase não-mínima e então é utilizado o critério (134) com  $\lambda = 1$ , ou seja, o método VRFT clássico. Este novo modelo de referência é definido por

$$\bar{M}_m(z) = \frac{-0.35303(z - 1.2)z}{(z - 0.885)(z^2 - 0.706z + 0.32)}, \quad (140)$$

onde o ganho é escolhido para garantir  $\bar{M}_m(1) = 1$ . A Figura 5 mostra as respostas ao

degrau obtidas no final do Passo 1 com  $T(z, \hat{\rho}^{(30)}) = M(z, \hat{\eta}^{(30)})$  e ao final do Passo 2 com  $T(z, \hat{\rho})$  onde  $\hat{\rho}$  minimiza (22), assim como a resposta ao degrau de  $\bar{M}_m(z)$ . Observa-se ainda que as respostas de  $T(z, \hat{\rho})$  e  $M_m(z)$  são bastante similares, porém para  $\lambda = 1$  é obtida uma resposta inversa menor.

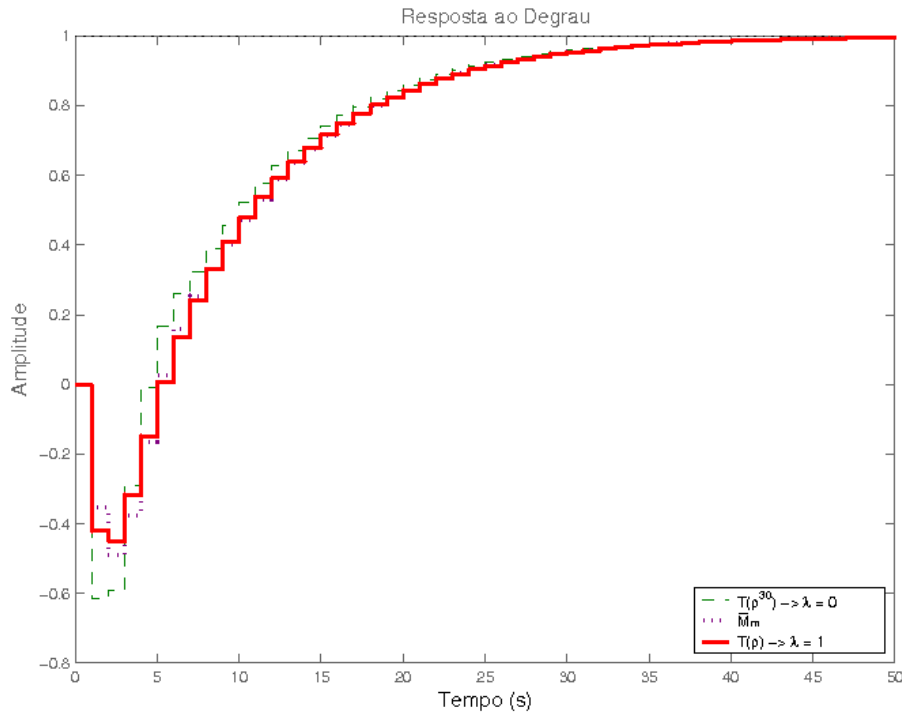


Figura 5: Respostas ao degrau obtidas no Passo 1: resposta do sistema em malha fechada obtida na iteração 30, igual à resposta do modelo de referência flexível  $T(z, \hat{\rho}^{(30)}) = M(z, \hat{\eta}^{(30)})$  ( $T(\rho^{30}) \rightarrow \lambda = 0$ ); e no Passo 2: resposta do sistema em malha fechada  $T(z, \hat{\rho})$  ( $T(\rho) \rightarrow \lambda = 1$ ) para  $\lambda = 1$  obtida com o modelo de referência modificado (140) ( $\bar{M}_m$ ) para o Passo 2.

#### 4.3.1.2 A Premissa 4.1 não é satisfeita

No exemplo anterior, o modelo de referência (138) foi escolhido de forma que a condição (119) é satisfeita para algum par  $(\eta^*, \rho^*)$ . Como o processo  $G_1(z)$  é desconhecido, não é garantido que o projetista possa escolher os polos de  $M(z, \eta)$  tal que a Premissa 4.1 seja satisfeita. Por isso, nesta seção analisa-se como o método comporta-se perante esta situação.

Supõe-se então que o mesmo processo (135) será controlado, porém é escolhido um modelo de referência fixo diferente

$$\bar{M}_f(z) = \frac{0.064z^2}{(z - 0.6)^3}, \quad (141)$$

onde o subscrito  $f$  significa mais rápido (do inglês *faster*), assim como um modelo de referência flexível, definido por

$$M_f(z, \eta) = \frac{\eta_1 z^2 + \eta_2 z + \eta_3}{(z - 0.6)^3},$$

para o qual a Premissa 4.1 não é satisfeita. Para  $\lambda = 0$  obtém-se, em 30 iterações,

Tabela 4: Evolução de  $M_f(z, \eta)$ ,  $C(z, \rho)$  (por meio de seus numeradores - ganhos e zeros) e  $\tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}, \hat{\rho})$  (após aplicar (126) na coluna 3 e após (127) na coluna 5) no procedimento iterativo para o processo  $G_1(z)$ .

$i$	$\text{num}(M_f(z, \hat{\eta}^{(i)}))$	$\tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}^{(i)}, \hat{\rho}^{(i-1)})$ ( $\times 10^{-6}$ )	$\text{num}(C(z, \hat{\rho}^{(i)}))$	$\tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}^{(i)}, \hat{\rho}^{(i)})$ ( $\times 10^{-6}$ )
1	$-0.95696(z - 1.136)(z - 0.5078)$	1.3176005	$-0.69039(z - 0.7452)(z - 0.2133)$	9.5254229
2	$-0.83134(z - 1.161)(z - 0.5205)$	4.6132843	$-0.66593(z - 0.7628)(z - 0.1892)$	1.7675536
10	$-0.63683(z - 1.194)(z - 0.4821)$	0.0731824	$-0.59054(z - 0.7870)(z - 0.0980)$	0.0683009
20	$-0.57682(z - 1.196)(z - 0.4349)$	0.0240805	$-0.54914(z - 0.7910)(z - 0.0352)$	0.0231907
30	$-0.54223(z - 1.197)(z - 0.4021)$	0.0108115	$-0.52336(z - 0.7932)(z + 0.0091)$	0.0105319

$$M_f(z, \hat{\eta}^{(30)}) = \frac{-0.54223(z - 1.197)(z - 0.4021)}{(z - 0.6)^3},$$

$$C(z, \hat{\rho}^{(30)}) = \frac{-0.52336(z - 0.7932)(z + 0.0091)}{z^2 - z}.$$

As respostas ao degrau obtidas nas iterações 1 e 30 são apresentadas na Figura 6. A Tabela 4 apresenta os numeradores do controlador e do modelo de referência flexível, obtidos em diferentes iterações. Nota-se que, apesar da Premissa 4.1 não ser satisfeita, o zero de fase não-mínima ainda é identificado com boa precisão através da minimização de  $\tilde{J}_0^{VR}(\eta, \rho)$ . Além disso, o sistema em malha fechada  $T(z, \hat{\rho}^{(30)})$  apresenta uma resposta que não é exatamente igual, mas muito próxima da resposta do modelo de referência  $M_f(z, \hat{\eta}^{(30)})$  (ver Figura 6). Neste caso, pode-se ainda aplicar o segundo passo do

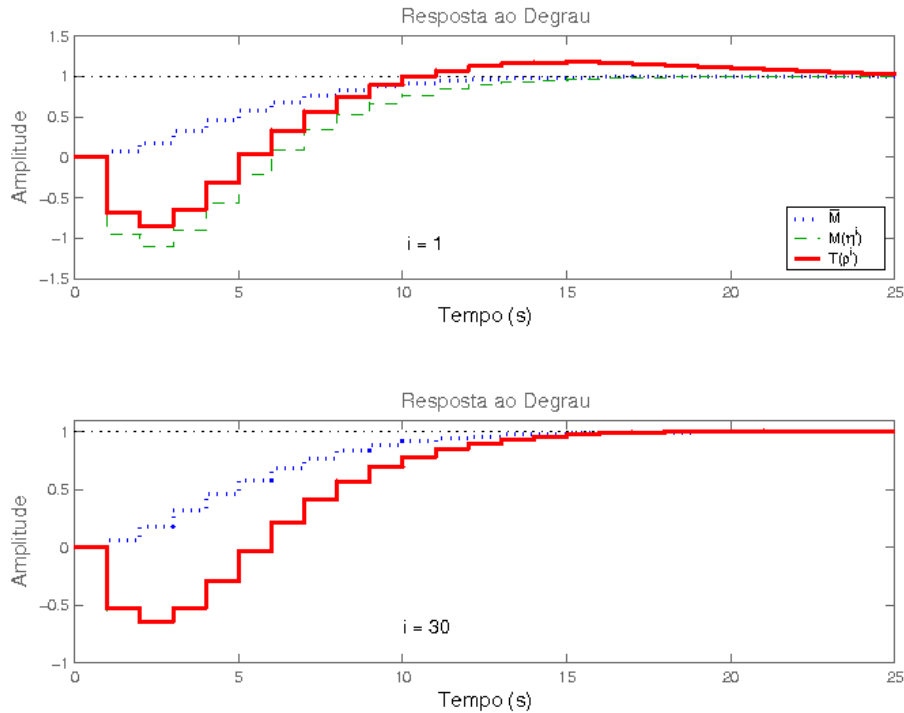


Figura 6: Respostas ao degrau do modelo de referência fixo (141) ( $\bar{M}$ ), do modelo de referência flexível  $M_f(z, \hat{\eta}^{(i)})$  ( $M(\eta^i)$ ) e do sistema em malha fechada  $T(z, \hat{\rho}^{(i)})$  ( $T(\rho^i)$ ) para o processo  $G_1(z)$  com  $\lambda = 0$  nas iterações 1 e 30.

procedimento proposto, modificando-se o modelo de referência fixo de forma a incluir o

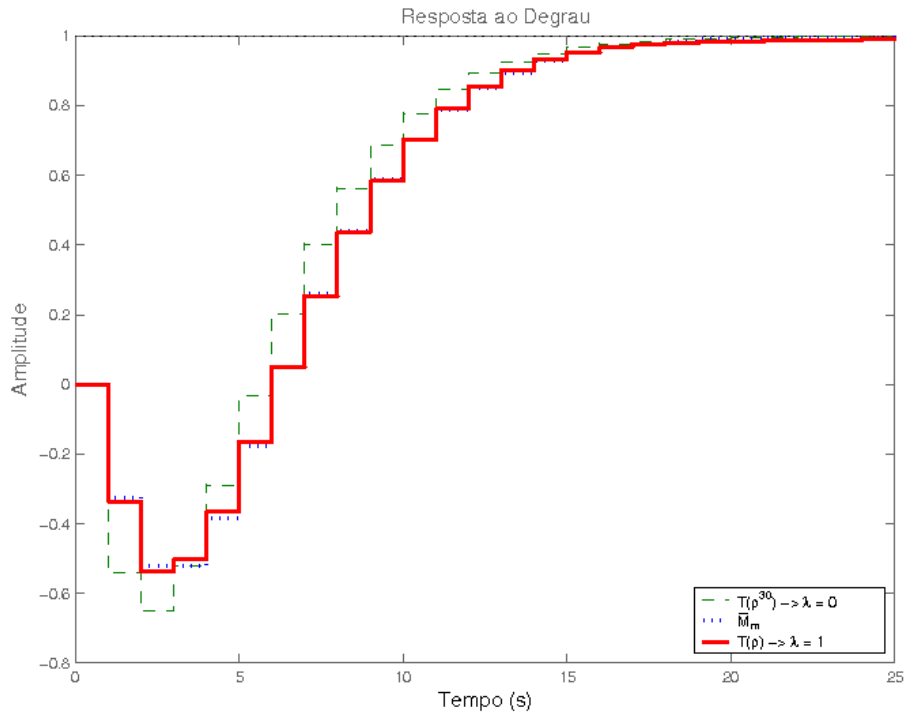


Figura 7: Respostas ao degrau obtidas no Passo 1: resposta do sistema em malha fechada na iteração 30, a qual é bastante próxima da resposta do modelo de referência flexível  $T(z, \hat{\rho}^{(30)}) \approx M_f(z, \hat{\eta}^{(30)})$  ( $T(\rho^{30}) \rightarrow \lambda = 0$ ); e no Passo 2: resposta em malha fechada  $T(z, \hat{\rho})$  ( $T(\rho) \rightarrow \lambda = 1$ ) para  $\lambda = 1$  obtida com o modelo de referência modificado (142) ( $\bar{M}_m$ ) para o Passo 2.

zero de fase não-mínima recém identificado. O modelo de referência fixo  $\bar{M}_{f,m}(z)$  deve então ser definido como

$$\bar{M}_{f,m}(z) = \frac{-0.3249z(z - 1.197)}{(z - 0.6)^3}. \quad (142)$$

Para  $\lambda = 1$ , encontra-se o seguinte controlador

$$C(z, \rho) = \frac{-0.33598(z + 0.5622)(z - 0.8066)}{z^2 - z}.$$

A Figura 7 apresenta as respostas ao degrau dos modelos de referência obtidos para  $\lambda = 0$  e  $\lambda = 1$ . Novamente,  $\bar{M}_{f,m}(z)$  permite que o sistema apresente uma resposta inversa menor, mais próxima à resposta especificada pelo modelo de referência original  $\bar{M}_f(z)$ .

#### 4.3.1.3 Dados afetados por ruído

Considere o processo  $G_1(z)$  (135), utilizado na Seção 4.3.1. Considere também o mesmo objetivo de controle apresentado na Seção 4.3.1.1, ou seja, deseja-se sintonizar um controlador PID (136) baseado no modelo de referência flexível (138), através da minimização do critério  $J_0^{VR}(\eta, \rho)$ .

Da mesma forma que no exemplo anterior, os dados são coletados com o sistema operando em malha fechada com o controlador (137). Porém agora os dados coletados são afetados na saída por ruído branco, cuja variância é  $\sigma_e^2 = 0.1$ .

O objetivo desta seção é demonstrar a aplicabilidade do método em sistemas com ruído. Assim, foi utilizado o exemplo apresentado anteriormente pelo fato de que o valor ótimo dos parâmetros já é conhecido, e o mesmo pode ser usado para comparar os resultados obtidos.

A fim de apresentar os resultados obtidos, foram utilizados 50 ensaios Monte Carlo<sup>1</sup> para calcular os valores médios e a variância de cada elemento dos parâmetros  $\eta$  e  $\rho$ . Além disso, o algoritmo (126)-(127) utilizou 80 iterações. Um número bem menor de iterações seria suficiente na maioria dos ensaios, mas um número alto foi escolhido a fim de garantir que os parâmetros já haviam convergido para  $(\eta^*, \rho^*)$  em cada ensaio Monte Carlo, já que estes são realizados automaticamente. Primeiramente, foi utilizado o algoritmo sem variáveis instrumentais, com o objetivo de comprovar que o resultado é polarizado. Nesse caso, foi obtido como valor médio de  $\hat{\eta}^{(80)}$ , considerando 80 iterações,

$$\hat{\eta}_m^{(80)} = [-0.1214 \quad -0.0787 \quad 0.2707]^T,$$

cujos modelo de referência correspondente é

$$M(z, \hat{\eta}_m^{(80)}) = \frac{-0.1214(z - 1.2039)(z + 1.8520)}{(z - 0.885)(z^2 - 0.706z + 0.32)}, \quad (143)$$

e a variância dessa estimativa é dada por

$$\text{var}_{\hat{\eta}} = \begin{bmatrix} 0.0277 & -0.0596 & 0.0318 \\ -0.0596 & 0.1280 & -0.0684 \\ 0.0318 & -0.0684 & 0.0366 \end{bmatrix}. \quad (144)$$

Da mesma forma, valor médio de  $\hat{\rho}^{(80)}$  correspondente é

$$\hat{\rho}_m^{(80)} = [-0.2808 \quad 0.1212 \quad 0.0836]^T,$$

cujos controlador correspondente é dado por

$$C(z, \hat{\rho}_m^{(80)}) = \frac{-0.2808(z - 0.8025)(z + 0.3708)}{z^2 - z}. \quad (145)$$

A variância dessa estimativa é dada por

$$\text{var}_{\hat{\rho}} = \begin{bmatrix} 0.0093 & -0.0161 & 0.0069 \\ -0.0161 & 0.0279 & -0.0121 \\ 0.0069 & -0.0121 & 0.0053 \end{bmatrix}. \quad (146)$$

Ao comparar (143) e (145) com os valores obtidos no exemplo anterior, apresentados na Tabela 3, percebe-se que o resultado obtido com dados com ruído é polarizado. Porém, o zero de fase não-mínima do processo é estimado com boa precisão; assim como o polo mais lento do controlador. Poder-se-ia pensar então que o efeito do ruído não é prejudicial, já que o objetivo desta etapa do projeto é identificar o zero de fase não-mínima e este foi estimado com sucesso. Porém, o outro zero do modelo de referência está muito longe do valor ótimo (que é igual ao outro zero do processo - 0.4). De fato, o valor encontrado

<sup>1</sup>Em sistemas reais, usualmente se observa apenas uma amostra de um certo tamanho  $N$ , que proporciona uma estimativa. Ensaios Monte Carlo são situações fictícias, onde é possível replicar a situação real  $M$  vezes. Assim, é possível calcular a estimativa  $M$  vezes e a distribuição dessas estimativas aproxima-se ao sistema real.

poderia ser até outro zero de fase não-mínima, e a inclusão deste no modelo de referência fixo seria prejudicial, já que o mesmo não é zero do processo.

Sendo assim, apresenta-se então os resultados obtidos aplicando o algoritmo (126)-(127), porém agora utilizando variáveis instrumentais. Assim, foi obtido como valor médio de  $\hat{\eta}^{(80)}$ , considerando 80 iterações,

$$\hat{\eta}_m^{(80)} = [-0.5957 \quad 0.95787 \quad -0.29157]^T,$$

cujo modelo de referência correspondente é

$$M(z, \hat{\eta}_m^{(80)}) = \frac{-0.5957(z - 1.2)(z - 0.4078)}{(z - 0.885)(z^2 - 0.706z + 0.32)}, \quad (147)$$

e a variância dessa estimativa é dada por

$$\text{var}_{\hat{\eta}} = \begin{bmatrix} 0.0204 & -0.0442 & 0.0238 \\ -0.0442 & 0.0958 & -0.0516 \\ 0.0238 & -0.0516 & 0.0278 \end{bmatrix}. \quad (148)$$

Da mesma forma, valor médio de  $\hat{\rho}^{(80)}$  correspondente é

$$\hat{\rho}_m^{(80)} = [-0.5944 \quad 0.6561 \quad -0.1444]^T,$$

cujo controlador correspondente é dado por

$$C(z, \hat{\rho}_m^{(80)}) = \frac{-0.5944(z - 0.8001)(z - 0.3037)}{z^2 - z}. \quad (149)$$

A variância dessa estimativa é dada por

$$\text{var}_{\hat{\rho}} = \begin{bmatrix} 0.0064 & -0.01074 & 0.0045 \\ -0.0107 & 0.0181 & -0.0076 \\ 0.0045 & -0.0076 & 0.00323 \end{bmatrix}. \quad (150)$$

Agora, ao comparar (147) e (149), obtidos com o uso de variáveis instrumentais, com os valores obtidos no exemplo anterior, apresentados na Tabela 3, constata-se que, neste caso, as estimativas dos parâmetros não são polarizadas, sendo que os resultados obtidos de dados com ruído é bastante próxima da obtida com dados sem ruído. Verifica-se assim que o uso de variáveis instrumentais é imprescindível nesta situação para que os zeros de fase não-mínima do processo sejam corretamente identificados. A partir do conhecimento destes zeros, parte-se então para o Passo 2, conforme proposto na Seção 4.2.2 e aplicado nos exemplos acima. As respostas ao salto do modelo de referência e do controlador obtidos com e sem o uso de variáveis instrumentais são apresentadas na Figura 8, comparadas com a resposta ao salto do modelo de referência obtido com sinais sem ruído  $M(z, \hat{\eta}^{(30)})$ . Verifica-se também, com este auxílio gráfico a vantagem de se utilizar variáveis instrumentais. Apesar de os dados apresentarem ruído, os resultados são apresentados como se o mesmo não estivesse presente no sistema para facilitar a análise dos resultados.

### 4.3.2 Processo com dois zeros de fase mínima

Finalmente, o método foi aplicado a um exemplo no qual os dois zeros da planta são de fase mínima:

$$G_2(z) = \frac{(z + 0.2)(z - 0.4)}{z(z - 0.3)(z - 0.8)}. \quad (151)$$

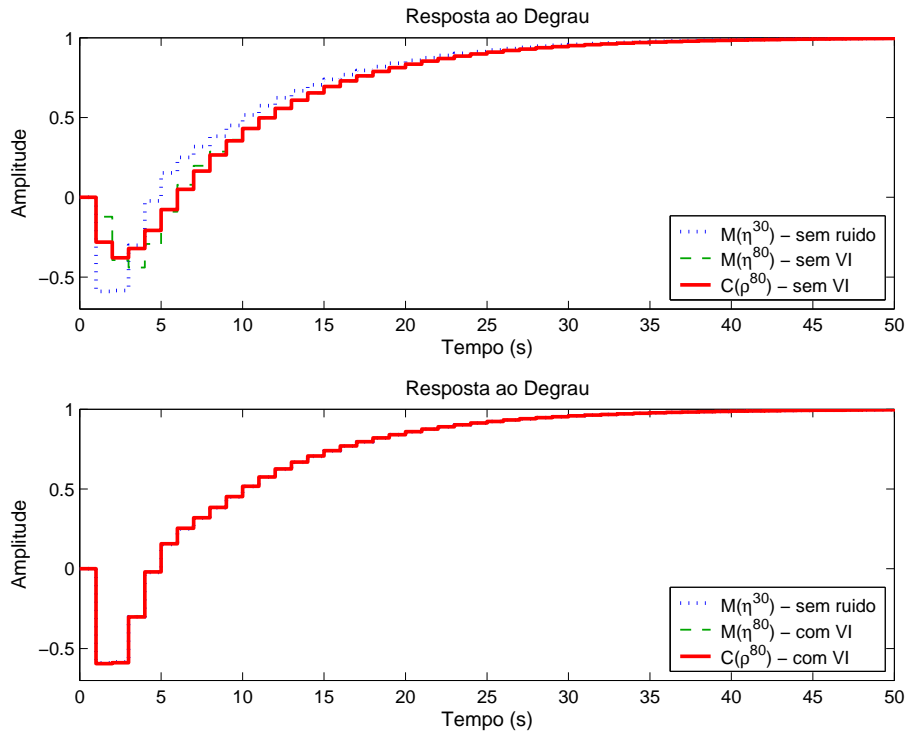


Figura 8: Respostas ao salto do modelo de referência  $M(z, \hat{\eta}^{(30)})$  ( $M(\eta^{30})$  - sem ruído) obtido através de dados sem ruído, do modelo de referência (143) ( $M(\eta^{80})$  - sem VI) e do controlador (145) ( $C(\rho^{80})$  - sem VI) obtidos através de dados com ruído e sem utilizar variáveis instrumentais e do modelo de referência (147) ( $M(\eta^{80})$  - com VI) e do controlador (149) ( $C(\rho^{80})$  - com VI) obtidos através de dados com ruído utilizando variáveis instrumentais.

A planta está inicialmente em malha fechada com um controlador PID

$$C_{init}(z) = \frac{0.7(z - 0.4)(z - 0.6)}{z^2 - z},$$

o qual se deseja re-sintonizar de forma que a resposta do sistema em malha fechada seja o mais próxima possível de um dado  $\bar{M}(z)$ , usando-se um controlador  $C(z, \rho)$  da forma apresentada em (136).

#### 4.3.2.1 A Premissa 4.1 é satisfeita

Neste caso, o modelo de referência fixo é dado por

$$\bar{M}(z) = \frac{0.46009z^2}{(z - 0.6673)(z^2 + 0.3063z + 0.07661)},$$

e o modelo de referência flexível é escolhido como

$$M(z, \eta) = \frac{\eta_1 z^2 + \eta_2 z + \eta_3}{(z - 0.6673)(z^2 + 0.3063z + 0.07661)},$$

para o qual a Premissa 4.1 é satisfeita. No Passo 1 os zeros de  $M(z, \eta)$ , estimados através de (126)-(127), convergem para os zeros de  $G_2(z)$ , porém mais lentamente que no caso de zeros de fase não-mínima: ver Tabela 5. Uma vez que  $M(z, \hat{\eta}^{(40)})$  não apresenta zeros de fase não-mínima, pode-se partir para o Passo 2 de forma segura, e usar o método VRFT clássico sem modificar o modelo de referência escolhido previamente.

Tabela 5: Evolução de  $M(z, \eta)$ ,  $C(z, \rho)$  (por meio de seus numeradores - ganhos e zeros) e  $\tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}, \hat{\rho})$  (após aplicar (126) na coluna 3 e após (127) na coluna 5) no procedimento iterativo para o processo  $G_2(z)$ .

$i$	$\text{num}(M(z, \hat{\eta}^{(i)}))$	$\tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}^{(i)}, \hat{\rho}^{(i-1)})$	$\text{num}(C(z, \hat{\rho}^{(i)}))$	$\tilde{J}_0^{VR}(\hat{\eta}^{(i)}, \hat{\rho}^{(i)})$
1	$0.68335(z - 0.4565)(z + 0.2618)$	31.3183375	$0.68557(z - 0.8190)(z - 0.2473)$	5.5740771
2	$0.68326(z - 0.4554)(z + 0.2584)$	5.4351676	$0.68539(z - 0.8189)(z - 0.2494)$	5.1229686
5	$0.68315(z - 0.4515)(z + 0.2483)$	4.2398648	$0.68498(z - 0.8180)(z - 0.2559)$	3.9979539
10	$0.68309(z - 0.4449)(z + 0.2330)$	2.8060046	$0.68441(z - 0.8155)(z - 0.2661)$	2.6413208
30	$0.68210(z - 0.4253)(z + 0.1933)$	0.4965922	$0.68219(z - 0.8074)(z - 0.2930)$	0.4657815
40	$0.68152(z - 0.4198)(z + 0.1833)$	0.2196505	$0.68134(z - 0.8052)(z - 0.2999)$	0.2075660

#### 4.3.2.2 A Premissa 4.1 não é satisfeita

Supõe-se agora que outro modelo de referência fixo seja escolhido:

$$\bar{M}_f(z) = \frac{0.216z^2}{(z - 0.4)^3}, \quad (152)$$

e um modelo flexível contendo os mesmos polos denotado por  $\bar{M}_f(z)$ :

$$M_f(z, \eta) = \frac{\eta_1 z^2 + \eta_2 z + \eta_3}{(z - 0.4)^3}.$$

Com  $M_f(z, \eta)$  e com o controlador (136), a Premissa 4.1 não é satisfeita. Então o Passo 1 leva a

$$M_f(z, \hat{\eta}^{(10)}) = \frac{0.68702(z^2 - 0.9865z + 0.3009)}{(z - 0.4)^3},$$

$$C_f(z, \hat{\rho}^{(10)}) = \frac{0.67926(z - 0.8134)(z - 0.1744)}{z^2 - z}.$$

Nota-se que  $M_f(z, \hat{\eta}^{(10)})$  está distante de  $\bar{M}_f(z)$  (ver Figura 9), porém o mesmo não apresenta zeros de fase não-mínima. Pode-se então, de forma segura, partir para o Passo 2 e aplicar o método VRFT clássico com o modelo de referência fixo (152). O controlador obtido é

$$C(z, \hat{\rho}) = \frac{0.19874(z + 0.5094)(z - 0.7791)}{z^2 - z}.$$

A resposta em malha fechada obtida com este controlador é comparada com a resposta do modelo de referência fixo  $\bar{M}_f(z)$  na Figura 9.

## 4.4 Considerações finais

Neste capítulo, foi apresentada uma extensão da metodologia de projeto VRFT com o objetivo de suprir as dificuldades quanto à aplicação do método a plantas de fase não-mínima. Este objetivo foi atingido através do uso de um critério de otimização flexível, no qual o numerador do modelo de referência não é totalmente especificado, ou seja, é parametrizado de forma que o mesmo se auto-ajuste de acordo com os zeros da planta.

Foi proposto um procedimento em dois passos no qual a possível presença de zeros de fase não-mínima no processo, bem como sua localização, é detectada no primeiro passo. O segundo passo é então a aplicação do método VRFT clássico, porém com um modelo de referência que considera a presença destes zeros de fase não-mínima, caso existirem, detectados no primeiro passo.



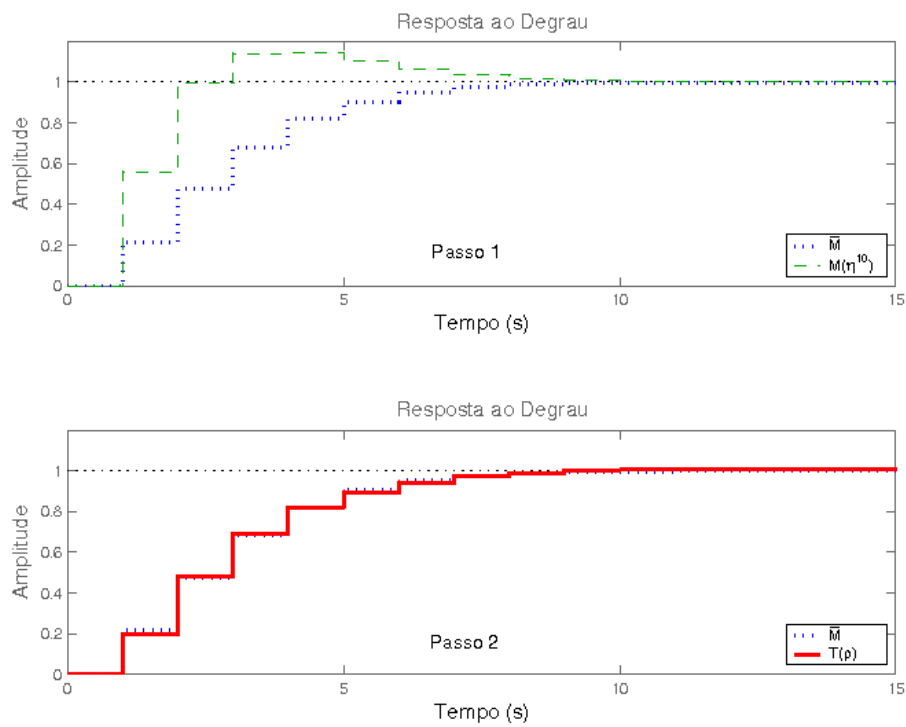


Figura 9: Respostas ao salto do modelo de referência fixo (152) ( $\bar{M}$ ), do modelo de referência flexível  $M_f(z, \hat{\eta}^{(10)})$  ( $M(\eta^{10})$ ) obtido após 10 iterações no Passo 1 e do sistema em malha fechada  $T(z, \hat{\rho})$  ( $T(\rho)$ ) obtido no Passo 2 sem modificar o modelo de referência.

Como continuação deste tópico, é possível a extensão da análise teórica ao caso em que o controlador ideal não pertença à classe de controladores, caso no qual as simulações já indicam bom desempenho do método.

Alguns destes resultados foram publicados em (CAMPESTRINI; GEVERS; BAZANELLA, 2009) e submetidos para a revista Automatica.

## 5 IDENTIFICAÇÃO DO CONTROLADOR ÓTIMO

### 5.1 Introdução

Conforme visto no Capítulo 2, métodos de controle baseados em dados são métodos de ajuste (ou reajuste) dos parâmetros do controlador com o objetivo, na maioria das vezes, de aproximar o desempenho do sistema em malha fechada com um modelo de resposta em malha fechada escolhido *a priori*. Porém, estes métodos também podem ser vistos como métodos de identificação da dinâmica de um controlador ideal. Essa abordagem é apresentada neste capítulo, onde apresenta-se a solução do problema de controle através da solução de um problema de identificação. Assim, utiliza-se os conceitos de identificação de sistemas apresentados no Capítulo 3 para embasar o método proposto.

De fato, o método VRFT apresentado em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002) trata o problema como um problema de identificação, onde o sinal de erro  $\bar{e}(t)$  é o sinal de entrada e  $u(t)$  é o sinal de saída da função de transferência do controlador que será identificada. A desvantagem deste método é que o mesmo é formulado para sistemas ideais, ou seja, que não apresentam sinais com ruído. Quando há ruído nos dados medidos, os autores sugerem o uso de variáveis instrumentais, o que torna o processo de identificação mais custoso, devido à necessidade de novos experimentos ou a obtenção de um modelo prévio do processo. Em (SALA; ESPARZA, 2005a), a possibilidade de identificar o inverso do controlador, ou seja  $\frac{1}{C(z,\rho)}$ , é levantada como solução para sistemas com ruído, porém ainda é necessário o uso de um filtro  $L(z)$ . Além disso, demonstra-se particular interesse no método VRFT por este ser um método direto, o qual não necessita de iterações para a obtenção do controlador.

Percebe-se então a vantagem de se formular um método direto de controle baseado em dados (ou identificação do controlador) que considere diretamente na formulação o fato do sistema ser afetado por ruído. Assim, pode-se utilizar toda teoria de identificação como estruturas de modelos, análise de propriedades estatísticas bem como realizar um projeto de experimento para que a estimativa esteja dentro de níveis desejados.

### 5.2 Método de identificação do controlador ótimo

Através de dados de entrada  $u(t)$  e dados de saída  $y(t)$  do processo (1), deseja-se identificar um controlador que faz com que a saída do processo comporte-se o mais próximo possível de uma resposta desejada. Além disso, deseja-se que este controlador seja encontrado sem a necessidade do uso de um procedimento iterativo. E por fim, o método é desenvolvido sob a ótica de identificação, com o intuito de possibilitar o uso de todos os conceitos e propriedades da estimativa existente nesta área.

A ideia do método é bastante simples: através de dados de entrada e saída obtidos em

algum experimento ou simples operação do processo (1), é realizada a identificação do sistema

$$y(t) = G_0(z)u(t) + H_0(z)e(t).$$

Porém,  $G_0(z)$  é parametrizada em função do controlador e do modelo de referência, tanto no caso de um controle baseado em modelo de referência, como no caso de um controle de mínima variância.

### 5.2.1 Controle baseado em modelo de referência

Assim como os outros métodos de controle baseados em dados apresentados no Capítulo 2, a resposta desejada em um critério de seguimento de referência é dada por uma função de transferência em malha fechada desejada, denotada por  $M(z)$ . Além disso, quando o projeto de controle é baseado em modelo de referência, o controlador ideal é dado por (9). Isso significa que, quando o controlador ideal é colocado na malha de controle, o desempenho do sistema é exatamente igual à resposta de  $M(z)$  considerando o objetivo de seguimento de referência, ou seja,  $J^{MR}(\rho) = 0$ .

Uma vez que o controlador ideal  $C_d(z)$  depende do processo  $G_0(z)$  (veja (9)), pode-se descrever o processo como uma função de  $C_d(z)$ , apenas manipulando (9):

$$G_0(z) = \frac{1}{C_d(z)} \frac{M(z)}{1 - M(z)}. \quad (153)$$

Substituindo (153) em (1), o sistema a ser identificado é dado por

$$y(t) = \frac{1}{C_d(z)} \frac{M(z)}{1 - M(z)} u(t) + H_0(z)e(t). \quad (154)$$

Seja

$$\tilde{C}_d(z) = \frac{1}{C_d(z)}, \quad (155)$$

e

$$\tilde{u}(t) = \frac{M(z)}{1 - M(z)} u(t). \quad (156)$$

Então (154) pode ser escrita como

$$\mathcal{S}_c : y(t) = \tilde{C}_d(z)\tilde{u}(t) + H_0(z)e(t). \quad (157)$$

Este é o sistema a ser identificado, ou seja, a função de transferência a ser identificada não é mais a função do processo  $G_0(z)$ , mas sim do controlador que proporciona exatamente o desempenho desejado, dado por  $y_d(t)$ . No caso do método proposto aqui, a função de transferência  $H_0(z)$  também deve ser identificada. Veja a semelhança de (157)-(158) e (39)-(40). Dessa forma, o próximo passo é escolher uma classe de modelos

$$\mathcal{M}_c : y(t, \theta) = \tilde{C}(z, \tilde{\rho})\tilde{u}(t) + H(z, \xi)e(t). \quad (158)$$

onde  $\theta = [\tilde{\rho} \ \xi]^T$ . Neste trabalho, considera-se que seja utilizado o método de minimização por erro de predição para estimar o vetor de parâmetros  $\theta$ .

Após escolhida a classe de modelos para  $\tilde{C}(z, \tilde{\rho})$  e  $H(z, \xi)$ , o método de otimização é utilizado para identificar os parâmetros destas duas funções de transferência. Quando a classe de modelos for escolhida de forma que o controlador ideal (9) pertença à classe, o controlador ótimo obtido será o próprio controlador ideal. Note que se  $G_0(z)$  for de fase não-mínima, então  $M(z)$  deve conter os zeros de fase não-mínima para que  $C_d(z)$  não seja instável.

### 5.2.2 Controle de mínima variância

Assim como no controle baseado em modelo de referência, no caso de projeto de um controlador de mínima variância, também pode-se definir uma função de sensibilidade desejada, onde  $y_d(t) = S_d(z)\nu(t)$ , e  $S_d(z)$  é dada por

$$S_d(z) = \frac{1}{1 + C_e(z)G_0(z)} \quad (159)$$

de onde se obtém o controlador ideal de mínima variância

$$C_e(z) = \frac{1 - S_d(z)}{S_d(z)G_0(z)}. \quad (160)$$

Veja que quando  $S_d(z)H_0(z) = 1$ , então (160) equivale ao controlador (11), apresentado no Capítulo 2. Similarmente ao caso do controlador ideal para seguimento de referência,  $C_e(z)$  é função de  $G_0(z)$  e do modelo de referência  $S_d(z)$  definido *a priori*. Parame-trizando a função de transferência do processo  $G_0(z)$  em função de  $C_e(z)$  manipulando (160), tem-se

$$G_0(z) = \frac{1}{C_e(z)} \frac{1 - S_d(z)}{S_d(z)}. \quad (161)$$

Logo, substituindo (161) em (1), o sistema a ser identificado é dado por

$$y(t) = \frac{1}{C_e(z)} \frac{1 - S_d(z)}{S_d(z)} u(t) + H_0(z)e(t). \quad (162)$$

Seja

$$\tilde{C}_e(z) = \frac{1}{C_e(z)}, \quad (163)$$

e

$$\tilde{u}(t) = \frac{1 - S_d(z)}{S_d(z)} u(t). \quad (164)$$

Então (162) pode ser escrita como

$$\mathcal{S}_{ce} : y(t) = \tilde{C}_e(z)\tilde{u}(t) + H_0(z)e(t). \quad (165)$$

Este é o sistema a ser identificado no caso de um controle de mínima variância. Tanto a função de transferência do controlador  $\tilde{C}_e(z)$  como  $H_0(z)$  devem ser identificados, como no caso anterior. No caso em que o desejado for  $S_d(z)H_0(z) = 1$ ,

$$G_0(z) = \tilde{C}_e(z)(H_0(z) - 1),$$

e, portanto, um método iterativo deve ser usado para obter  $\tilde{C}_e(z)$  e  $H_0(z)$ . A partir deste ponto, tratar-se-á apenas do problema de seguimento de referência. Na próxima seção, serão apresentadas as propriedades da estimativa obtida através deste método para dife-rentes classes de modelos.

### 5.3 Propriedades da estimativa

Como visto no Capítulo 3, a estimativa de um modelo depende basicamente do conjunto de dados obtido do processo, da classe de modelos escolhida e do algoritmo utilizado para obter a estimativa. Assim, sob certas restrições nestes elementos, as propriedades da estimativa podem ser mais facilmente analisadas.

**Premissa 5.1** *Seja o conjunto de dados*

$$Z^N = [u(1), y(1), \dots, u(N), y(N)]$$

*gerado de acordo com o sistema (1). Assume-se que os dados  $\{u(t), y(t)\}$  são processos quasi-estacionários para  $N \rightarrow \infty$ , que o sinal de entrada é persistentemente excitante e que o conjunto de dados  $Z^N$  é suficientemente informativo com respeito à classe de modelos escolhida  $\mathcal{M}_c$ .*

Considerando a Premissa 5.1, se os filtros  $\tilde{C}(z, \tilde{\rho})$  e  $H(z, \xi)$  forem funções suaves (diferenciáveis) do vetor de parâmetros  $\theta = [\tilde{\rho} \ \xi]$  e uniformemente estáveis (LJUNG, 1999; SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989), então

$$\hat{\theta}_N \rightarrow \arg \min_{\theta \in D_{\mathcal{M}_c}} \bar{V}(\theta), \quad \text{w.p. 1 as } N \rightarrow \infty. \quad (166)$$

onde

$$\bar{V}(\theta) = \bar{E} \frac{1}{2} \varepsilon^2(t, \theta). \quad (167)$$

O erro de predição  $\varepsilon(t, \theta)$  é dado por (42) e logo, no caso do método de identificação do controlador,  $\hat{y}(t, \theta)$  é dado por

$$\hat{y}(t, \theta) = H^{-1}(z, \xi) \tilde{C}(z, \tilde{\rho}) \tilde{u}(t) + [1 - H^{-1}(z, \xi)] y(t). \quad (168)$$

O resultado de convergência (166) afirma que a estimativa  $\hat{\theta}_N$  converge, quando  $N \rightarrow \infty$ , para a melhor aproximação possível do sistema disponível na classe de modelos (LJUNG, 1999). Uma vez que o algoritmo converge para um mínimo, deseja-se agora determinar como a estimativa do sistema difere do sistema real, através dos erros de polarização e de variância.

Seja  $\theta^*$  o ponto de convergência da estimativa do erro de predição, ou seja

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_N = \theta^*. \quad (169)$$

Sejam os vetores

$$Q_c(z) = [\tilde{C}_d(z) H_0(z)]^T, \quad \hat{Q}_{c_N}(z) = [\tilde{C}(z, \hat{\theta}_N) H(z, \hat{\theta}_N)]^T. \quad (170)$$

A qualidade da estimativa pode ser calculada em termos da diferença

$$\Delta Q_{c_N}(z) \triangleq \hat{Q}_{c_N}(z) - Q_c(z),$$

a qual pode ser separada em erro de polarização e erro de variância:

$$\Delta Q_{c_N}(z) \triangleq \underbrace{\hat{Q}_{c_N}(z) - Q_c^*(z)}_{\text{erro de variância}} + \underbrace{Q_c^*(z) - Q_c(z)}_{\text{erro de polarização}} \quad (171)$$

onde  $Q_c^*(z) = [C(z, \theta^*) H(z, \theta^*)]^T$ .

Assim como apresentado no Capítulo 3, se o experimento é realizado em malha aberta, ou seja, quando  $u(t)$  e  $e(t)$  são descorrelacionados e como  $C(z, \tilde{\rho})$  e  $H(z, \xi)$  são parametrizados de forma independente, então  $\tilde{C}_d(z)$  pode ser estimado de forma consistente, independentemente de  $H_0(z)$  pertencer ou não à classe de modelos. Nesse caso, o erro entre o controlador ideal e o controlador estimado é dado por

$$\text{erro de variância} = \tilde{C}(z, \hat{\theta}_N) - \tilde{C}(z, \theta^*), \quad (172)$$

$$\text{erro de polarização} = \tilde{C}(z, \theta^*) - \tilde{C}_d(z). \quad (173)$$

$$(174)$$

### 5.3.1 O caso ideal - $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$

Conforme pode ser visto em (171), o erro de polarização está ligado diretamente à escolha da classe  $\mathcal{M}_c$ , assim como apresentado no Capítulo 3. Quando a classe de modelos  $\mathcal{M}_c$  é escolhida de forma que  $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$ , o sistema (157) pode ser descrito como

$$\mathcal{S}_c : y(t, \theta_0) = \tilde{C}(z, \tilde{\rho}_d) \tilde{u}(t) + H(z, \xi_0) e(t), \quad (175)$$

onde

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_d \\ \xi_0 \end{bmatrix}. \quad (176)$$

O valor esperado do parâmetro estimado  $\hat{\theta}_N$  é uma variável cujo valor esperado difere do parâmetro  $\theta_0$ . No caso em que  $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$ , os erros de polarização e variância são dados diretamente em função dos parâmetros, ou seja

$$\text{erro de polarização} = \theta_0 - \theta^*, \quad (177)$$

$$\text{erro de variância} = \theta^* - \hat{\theta}_N. \quad (178)$$

Considere os seguintes conjuntos:

**Definição 5.1** *Sejam  $D_{\mathcal{M}_c}$  o conjunto de todos os parâmetros  $\theta$  que parametrizam (158), e  $D_{T_c}(\mathcal{S}_c, \mathcal{M}_c)$  o conjunto de todos parâmetros  $\theta$  cujo modelo é igual ao sistema real, ou seja*

$$D_{T_c}(\mathcal{S}_c, \mathcal{M}_c) = \left\{ \theta \in D_{\mathcal{M}_c} \mid \tilde{C}(e^{j\omega}, \theta) = \tilde{C}_d(e^{j\omega}); H(e^{j\omega}, \theta) = H_0(e^{j\omega}), -\pi \leq \omega \leq \pi \right\}.$$

Com o auxílio dessas definições, apresenta-se o seguinte teorema considerando a consistência da estimativa.

**Teorema 5.1** (LJUNG, 1999) *Suponha que o conjunto de dados  $Z^\infty$  seja obtido de um sistema linear e que satisfaça a Premissa 3.1. Seja  $\mathcal{M}_c$  uma classe de modelos lineares e estáveis tal que  $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$ . Assuma que  $Z^\infty$  é suficientemente informativo em relação a  $\mathcal{M}_c$ . Se o sistema opera em malha fechada, então assuma também que existe um atraso no controlador ou no processo. Então*

$$D_{\mathcal{S}_c} \triangleq \arg \min_{\theta \in D_{\mathcal{M}_c}} \bar{V}(\theta) = D_{T_c}(\mathcal{S}_c, \mathcal{M}_c).$$

Se, além disso, a classe de modelos é globalmente identificável em  $\theta_0 \in D_{T_c}(\mathcal{S}_c, \mathcal{M}_c)$ , então

$$D_{\mathcal{S}_c} = \{\theta_0\}.$$

Dessa forma, tem-se que  $\hat{\theta}_N \rightarrow D_{\mathcal{S}_c}$ , w.p. 1 quando  $N \rightarrow \infty$ , e portanto a estimativa é consistente ( $\theta^* = \theta_0$ ), ou seja,

$$\begin{aligned} \tilde{C}(z, \hat{\rho}_N) &\rightarrow \tilde{C}_d(z), \\ H(z, \hat{\xi}_N) &\rightarrow H_0(z), \quad \text{w.p. 1 quando } N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (179)$$

◇

A prova deste teorema segue a prova apresentada em (LJUNG, 1999), com as devidas substituições.

**Prova 5.1** Seja  $\theta_0 \in D_{T_c}$  e considere, para todo  $\theta \in D_{\mathcal{M}_c}$ ,

$$\bar{V}(\theta) - \bar{V}(\theta_0) = \bar{E} \{[\varepsilon(t, \theta) - \varepsilon(t, \theta_0)]\varepsilon(t, \theta_0)\} + \frac{1}{2}\bar{E}[\varepsilon(t, \theta) - \varepsilon(t, \theta_0)]^2. \quad (180)$$

Uma vez que  $\theta_0 \in D_{T_c}$ ,

$$\varepsilon(t, \theta_0) = -H_0^{-1}(z)\tilde{C}_d(z)\tilde{u}(t) + H_0^{-1}(z)y(t) = e(t),$$

de acordo com (175). Além disso, a diferença

$$\varepsilon(t, \theta) - \varepsilon(t, \theta_0) = \hat{y}(t|\theta) - \hat{y}(t|\theta_0)$$

depende apenas de dados de entrada e saída até o instante de tempo  $t - 1$  e, portanto, é independente de  $e(t)$ . Assim, o primeiro termo de (180) é zero. O segundo termo

$$\bar{E}[\varepsilon(t, \theta) - \varepsilon(t, \theta_0)]^2 = \bar{E}[\hat{y}(t|\theta_0) - \hat{y}(t|\theta)]^2$$

é estritamente positivo se  $\theta$  e  $\theta_0$  corresponderem a modelos diferentes, uma vez que o conjunto de dados é suficientemente informativo. Porém, como a classe de modelos é globalmente identificável em  $\theta_0$ , implica que  $D_{T_c} = \{\theta_0\}$ , fazendo com que  $\bar{V}(\theta) = \bar{V}(\theta_0)$ .

◇

Quando a estimativa é não-polarizada, o erro de variância é diretamente relacionado à matriz de covariância, dada por (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989; LJUNG, 1999)

$$P_\theta = \sigma_e^2[\bar{E}\psi(t, \theta_0)\psi^T(t, \theta_0)]^{-1}, \quad (181)$$

onde

$$\psi(t, \theta_0) = \frac{d}{d\theta}\varepsilon(t|\theta)|_{\theta=\theta_0}. \quad (182)$$

A matriz de covariância pode ser estimada através de um conjunto de dados por

$$\hat{P}_\theta = \hat{\sigma}_e^2 \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \psi(t, \hat{\theta}_N) \psi^T(t, \hat{\theta}_N) \right]^{-1} \quad (183)$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t, \hat{\theta}_N) \quad (184)$$

De (183) percebe-se que o erro de variância depende do tamanho do experimento  $N$  e da variância do ruído presente no sistema  $\sigma_e^2$ . A seguir, são analisadas as características da estimativa de acordo com diferentes escolhas de estruturas de modelos para estimar os parâmetros do controlador e do modelo do filtro do ruído.

### 5.3.1.1 Estrutura ARX

A grande vantagem em descrever um sistema utilizando uma estrutura ARX está no fato de que o método dos mínimos quadrados é utilizado para estimar os parâmetros do sistema. No caso de se utilizar uma estrutura ARX, a função  $V_N(\theta)$  (44) é uma função quadrática em relação aos parâmetros, e assim o mínimo global  $\theta_0$  é obtido sem a necessidade de iterações.

Seja o sistema real descrito através de um modelo ARX:

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)}u(t) + \frac{z^{n_a}}{A(z)}e(t), \quad (185)$$

com

$$\begin{aligned} A(z) &= z^{n_a} + a_1 z^{n_a-1} + \dots + a_{n_a}, \\ B(z) &= b_0 z^{n_b} + \dots + b_{n_b}, \end{aligned}$$

com  $n_b < n_a$ . Além disso, inserindo-se (156) em (158), tem-se que

$$y(t, \theta) = \tilde{C}(z, \tilde{\rho}) \frac{M(z)}{1 - M(z)} u(t) + H(z, \xi) e(t). \quad (186)$$

Portanto, para modelar o sistema (186) através de uma estrutura ARX basta definir

$$A(z, \theta) \triangleq \text{den} \left( \tilde{C}(z, \tilde{\rho}) \frac{M(z)}{1 - M(z)} \right), \quad (187)$$

$$B(z, \theta) \triangleq \text{num} \left( \tilde{C}(z, \tilde{\rho}) \frac{M(z)}{1 - M(z)} \right). \quad (188)$$

**Teorema 5.2** *Se a classe de modelos escolhida for de estrutura ARX, com  $A(z, \theta)$  e  $B(z, \theta)$  definidos por (187) e (188), se o sistema (157) for tal que  $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$  e se o sinal de entrada for informativo com relação à estrutura, então a estimativa  $\hat{\theta}_N$  é não-polarizada.*

**Prova 5.2** *Uma vez que  $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$ , se o modelo é definido por (187) e (188), então o sistema real deve ser dado por (185), onde*

$$A(z) \triangleq \text{den} \left( \tilde{C}_d(z) \frac{M(z)}{1 - M(z)} \right), \quad (189)$$

$$B(z) \triangleq \text{num} \left( \tilde{C}_d(z) \frac{M(z)}{1 - M(z)} \right), \quad (190)$$



e portanto, o modelo do filtro do ruído é dado por

$$H_0(z) = \frac{z^{n_a}}{A(z)} = \frac{z^{n_a}}{\text{den} \left( \tilde{C}(z, \tilde{\rho}_d) \frac{M(z)}{1-M(z)} \right)}. \quad (191)$$

Com essa estrutura,  $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$  e como o sinal de entrada é persistentemente excitante, a estimativa obtida  $\hat{\theta}_N$  é não-polarizada.

◇

A estrutura que  $H_0(z)$  deve ter para que a estimativa seja não-polarizada parece ser bastante restrita. Considerando que exista ruído presente na saída do sistema, o método dos mínimos quadrados produz uma estimativa não-polarizada somente se esta condição for satisfeita <sup>1</sup>.

Porém, como o problema de identificação do controlador ótimo nada mais é que a identificação de  $G_0(z)$  reparametrizada, a condição sob a estrutura do filtro do ruído ( $H_0(z) = \frac{z^{n_a}}{A(z)}$ ) é a mesma restrição do caso de identificação de sistemas de estrutura ARX.

O Teorema 5.2 pode ser ilustrado através do seguinte exemplo. Seja o processo de primeira ordem

$$G_0(z) = \frac{a}{z-b}$$

a ser controlado por um controlador do tipo PI

$$C(z, \rho) = \frac{\rho_1 z + \rho_2}{z-1} = \rho_1 \frac{z + \frac{\rho_2}{\rho_1}}{z-1}.$$

Deseja-se que o sistema em malha fechada comporte-se como

$$M(z) = \frac{1-d}{z-d}.$$

Nesse caso, o controlador ideal é dado por

$$C_d(z) = \frac{1-d}{a} \frac{z-b}{z-1}.$$

Assim, a fim de utilizar o método de identificação proposto, o controlador  $\tilde{C}(z)$  é dado por

$$\tilde{C}(z, \tilde{\rho}) = \frac{\frac{1}{\rho_1}(z-1)}{z + \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{\tilde{\rho}_1(z-1)}{z + \tilde{\rho}_2},$$

onde  $\tilde{\rho} = [\tilde{\rho}_1 \ \tilde{\rho}_2]^T$ ,  $\tilde{\rho}_d = [\frac{a}{1-d} \ -b]^T$  e

$$\frac{M(z)}{1-M(z)} = \frac{1-d}{z-1}.$$

Portanto, o sistema real deve ter

$$A(z) = \text{den} \left( \tilde{C}(z, \tilde{\rho}_d) \frac{M(z)}{1-M(z)} \right) = z-b,$$

<sup>1</sup>Considerando  $u(t)$  persistentemente excitante;  $\psi(t)$  e  $e(t)$  descorrelacionados.

e, como  $n_a = 1$ ,

$$H_0(z) = \frac{z}{A(z)} = \frac{z}{z - b}.$$

Assim, considerando que uma estrutura ARX é dada por (185), basta que  $H_0(z) = \frac{z^{n_a}}{A(z)}$  para que a estimativa seja não-polarizada. Uma vez que  $M(z)$  é conhecida, utiliza-se (156) para estimar  $\tilde{C}(z, \tilde{\rho})$ . A variância da estimativa é dada por (181).

### 5.3.1.2 Estrutura ARMAX

É uma estrutura mais flexível que a estrutura ARX, pois descreve a equação de erro como uma média móvel (*moving average*) do ruído branco. Neste caso, tem-se o sistema

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)}u(t) + \frac{K(z)}{A(z)}e(t), \quad (192)$$

com

$$K(z) = z^{n_a} + k_1 z^{n_a-1} + \dots + k_{n_a}.$$

Formula-se, então, o seguinte teorema:

**Teorema 5.3** *Se a classe de modelos escolhida for de estrutura ARMAX, com  $A(z, \theta)$  e  $B(z, \theta)$  definidos por (187) e (188), e*

$$K(z, \theta) = z^{n_a} + k_1 z^{n_a-1} + \dots + k_{n_a}; \quad (193)$$

*se o sistema (157) for tal que  $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$ ,  $\mathcal{M}_c$  for globalmente identificável em  $\theta^*$  e o sinal for informativo com relação à estrutura  $\mathcal{M}_c$ , então a estimativa  $\hat{\theta}_N$  é não-polarizada.*

**Prova 5.3** *Uma vez que  $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$ , se o modelo é definido por (187), (188) e (193), então o sistema real deve ser dado por (192), onde*

$$A(z) \triangleq \text{den} \left( \tilde{C}_d(z) \frac{M(z)}{1 - M(z)} \right), \quad (194)$$

$$B(z) \triangleq \text{num} \left( \tilde{C}_d(z) \frac{M(z)}{1 - M(z)} \right), \quad (195)$$

$$K(z) = z^{n_a} + k_1 z^{n_a-1} + \dots + k_{n_a}. \quad (196)$$

*e portanto, o modelo do filtro do ruído é dado por*

$$H_0(z) = \frac{K(z)}{A(z)} = \frac{K(z)}{\text{den} \left( \tilde{C}(z, \tilde{\rho}_d) \frac{M(z)}{1 - M(z)} \right)}. \quad (197)$$

*Com essa estrutura, garante-se que  $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$ .*

*Uma vez que  $\mathcal{M}_c$  é globalmente identificável em  $\theta^*$  (ver Teorema 3.1), garante-se que não há cancelamentos de polos e zeros e portanto  $\hat{\theta}_N = \theta^*$  é o mínimo global.*

*Assim, como o sinal de entrada é persistentemente excitante, a estimativa obtida  $\hat{\theta}_N$  é não-polarizada.*

◇

Se o modelo for sobreparametrizado (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989), ocorrem cancelamentos entre polos e zeros. Nesse caso, a função  $\bar{V}(\theta)$  tem um conjunto de mínimos globais e a matriz de informação  $\bar{E}\psi(t, \theta_0)\psi^T(t, \theta_0)$  é singular.

A identificação de estruturas ARMAX pode ser feita através do método dos mínimos quadrados estendido (ELS)(LJUNG, 1999). Nesse caso, o vetor regressor é dado por

$$\varphi(t) = K(z)\psi(t), \quad (198)$$

e o preditor é representado por

$$\hat{y}(t) = \varphi^T(t, \theta)\theta, \quad (199)$$

o qual é computado recursivamente. Se

$$\operatorname{Re} \frac{1}{K(e^{j\omega}, \theta_0)} \geq \frac{1}{2}, \quad \forall \omega \quad (200)$$

então o método ELS converge para  $\theta_0$  (LJUNG, 1999; GOODWIN; SIN, 1984). Isto pode ser visto como uma condição onde  $K(e^{j\omega}, \theta_0)$  é perto da unidade. Se isto for satisfeito, então a variância da estimativa é dada por (181).

### 5.3.1.3 Estrutura Box-Jenkins

As estruturas ARX e ARMAX, apresentadas anteriormente, correspondem a descrições do sistema nos quais as funções de transferência  $G(z)$  e  $H(z)$  possuem o polinômio  $A(z)$  como um fator comum em seus denominadores. Uma forma mais realista de modelar um sistema é parametrizando as funções de transferência do controlador  $G(z)$  e do ruído  $H(z)$  independentemente e como funções racionais. Esta forma é conhecida como estrutura Box-Jenkins (BJ) e é dada por

$$y(t) = \frac{B(z)}{F(z)}u(t) + \frac{K(z)}{D(z)}e(t), \quad (201)$$

com

$$\begin{aligned} F(z) &= z^{n_f} + f_1 z^{n_f-1} + \dots + f_{n_f}, \\ D(z) &= z^{n_d} + d_1 z^{n_d-1} + \dots + d_{n_d}. \end{aligned}$$

Para o método de identificação do controlador ótimo proposto, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{B(z)}{F(z)} &= \tilde{C}(z, \tilde{\rho}) \frac{M(z)}{1 - M(z)}, \\ \frac{K(z)}{D(z)} &= H(z, \xi). \end{aligned}$$

Nota-se que, neste caso, o modelo do ruído  $H(z, \xi)$  é completamente livre. Assim, não é necessária uma estrutura particular para  $H(z, \xi)$ , como acontece nos casos de se utilizar estruturas ARX e ARMAX, para que a estimativa seja não-polarizada. Porém, a estrutura Box-Jenkins tem a desvantagem da possibilidade da estimativa cair em algum mínimo local, já que a estimativa é computada iterativamente.

Enuncia-se, então, o seguinte teorema:

**Teorema 5.4** *Se o sistema (157) é modelado através de uma estrutura Box-Jenkins, se a estrutura de modelo for globalmente identificável em  $\theta^*$  e se o sinal de entrada for informativo, então a estimativa  $\hat{\theta}_N$  é não-polarizada.*

**Prova 5.4** *Uma vez que o filtro  $H(z, \xi)$  é independente do modelo do processo, a estrutura deste filtro não necessita ser de uma forma definida para que a estimativa seja não-polarizada. Como o sinal de entrada é persistentemente excitante, a estimativa  $\hat{\theta}_N$  será não polarizada se o modelo do sistema for globalmente identificável, conforme apresentado no Teorema 3.1.*

◇

Para que a estrutura de modelo seja globalmente identificável, a mesma deve respeitar as restrições apresentadas na Seção 3.3.3. A necessidade do modelo ser globalmente identificável motiva o uso de outras estruturas mais simples, pois se o sistema for do tipo ARX e um modelo BJ for utilizado na identificação, o mesmo não será globalmente identificável; existirá mais de um modelo que caracterize o sistema.

Estruturas de erro de saída (OE) são casos particulares de estruturas Box-Jenkins, para o caso em que  $H_0(z) = 1$ .

### 5.3.2 O caso “quasi-ideal” - $\tilde{C}_d \in \mathcal{C}$

No caso do método apresentado para identificação do controlador, usualmente são identificados tanto o controlador ideal  $C_d(z)$  como do filtro do ruído  $H_0(z)$ . Porém, o importante é identificar o controlador, que será inserido posteriormente na malha de controle; o filtro do ruído não é utilizado no projeto do controlador. Essa situação é tratada neste trabalho como o caso “quasi-ideal”, onde  $\tilde{C}_d \in \mathcal{C}$ , porém  $H_0(z) \notin \mathcal{M}_c$ .

Para que o controlador ideal seja identificado adequadamente, é necessário que algumas premissas sejam satisfeitas. Assim como no caso de identificação (LJUNG, 1999), tem-se então o seguinte resultado:

**Teorema 5.5** (LJUNG, 1999) *Suponha que o conjunto de dados  $Z^\infty$  seja obtido de um sistema linear e que satisfaça a Premissa 3.1. Seja  $\mathcal{M}_c$  uma classe de modelos lineares e estáveis, tal que  $\tilde{C}(z)$  e  $H(z)$  sejam independentemente parametrizados,*

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \tilde{\rho} \\ \xi \end{bmatrix} \quad \tilde{C}(z, \theta) = \tilde{C}(z, \tilde{\rho}), \quad H(z, \theta) = H(z, \xi)$$

e tal que o conjunto

$$D_c(\mathcal{S}, \mathcal{M}) = \{ \tilde{\rho} | \tilde{C}(z, \tilde{\rho}) = \tilde{C}_d(z) \}$$

não seja vazio.

Assuma que  $Z^\infty$  é suficientemente informativo em relação a  $\mathcal{M}_c$  e que os dados sejam obtidos do sistema operando em malha aberta, ou seja,  $u(t)$  e  $e(t)$  são descorrelacionados.

Seja

$$\hat{\theta}_N = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_N \\ \hat{\xi}_N \end{bmatrix}$$

obtido através do método de erro de predição. Então a estimativa de  $\tilde{C}(z, \hat{\theta}_N)$  é consistente, ou seja,

$$\tilde{C}(z, \hat{\theta}_N) \rightarrow \tilde{C}_d(z), \quad \text{w.p. 1 quando } N \rightarrow \infty. \quad (202)$$

A prova deste teorema segue a prova apresentada em (LJUNG, 1999), com as devidas substituições.

**Prova 5.5** Considere a função  $\bar{V}(\theta)$  dada por (44). Assim, o erro de predição no caso da identificação do controlador ótimo é dado por

$$\varepsilon(t, \theta) = H^{-1}(z, \xi)[y(t) - \tilde{C}(z, \tilde{\rho})\tilde{u}(t)] \quad (203)$$

$$= H^{-1}(z, \xi)[(\tilde{C}_d(z) - \tilde{C}(z, \tilde{\rho}))\tilde{u}(t) + H_0(z)e(t)] \quad (204)$$

$$= \tilde{u}_F(t, \xi, \tilde{\rho}) + e_F(t, \xi). \quad (205)$$

Uma vez que  $u(t)$  e  $e(t)$  são descorrelacionados, tem-se que

$$\bar{V}(\theta) = \bar{V}(\tilde{\rho}, \xi) = \frac{1}{2} \left[ \bar{E}\tilde{u}_F^2(t, \xi, \tilde{\rho}) + Ee_F^2(t, \xi) \right].$$

O primeiro termo é igual a zero quando  $\tilde{\rho} \in D_c(\mathcal{S}_c, \mathcal{M}_c)$ , e o segundo termo é independente de  $\tilde{\rho}$ . Assim

$$\arg \min_{\tilde{\rho}} \bar{V}(\tilde{\rho}, \xi) = D_c(\mathcal{S}_c, \mathcal{M}_c) = \{\tilde{\rho}_d\},$$

independentemente de  $H(z)$ .

Nota-se que, apesar de  $\tilde{C}(z, \tilde{\rho})$  e  $H(z, \xi)$  serem independentemente parametrizados em (158), quando se trata de estruturas ARX e ARMAX, a estrutura de  $H(z, \xi)$  depende do vetor de parâmetros  $\tilde{\rho}_d$ , o que mostra que estas estruturas não são independentemente parametrizadas nesses casos. Assim, estruturas do tipo ARX ou ARMAX irão produzir estimativas não-polarizadas somente no caso de  $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$ . Por outro lado, estruturas do tipo BJ e OE são independentemente parametrizadas e portanto, possuem a vantagem de que  $\tilde{C}(z, \tilde{\rho})$  é consistentemente estimado mesmo quando o modelo escolhido para o filtro do ruído não é capaz de reproduzir o sistema real (LJUNG, 1999).

## 5.4 Características do método VRFT

Assim como o método de identificação do controlador ótimo, o método VRFT é um método baseado em dados utilizados para a identificação do controlador que faz com que o comportamento do sistema em malha fechada seja o mais próximo possível de  $M(z)$ . Por esse motivo, é interessante analisar as propriedades estatísticas da estimativa obtida através deste método. Porém, uma grande diferença entre os dois métodos é que a formulação do método VRFT é baseada na utilização de sinais obtidos de um processo que não é afetado por ruído. Nesta seção será analisado o que acontece quando o sistema é afetado por ruído, onde a saída da planta  $y(t)$  é dada por (1), e o método VRFT é usado para estimar os parâmetros do controlador. De acordo com (21), o método VRFT considera  $u(t)$  como o sinal de saída de um problema de identificação do controlador, e  $\bar{e}(t)$  como o sinal de entrada.

Para essa análise, pode-se escrever (39) inversamente, considerando  $u(t)$  como o sinal de saída e  $y(t)$  como o sinal de entrada. Assim, tem-se que

$$\mathcal{S}_{inv} : u(t) = \frac{1}{G_0(z)}y(t) - \frac{1}{G_0(z)}H_0(z)e(t). \quad (206)$$

A fim de atingir o comportamento dado pelo modelo de referência  $M(z)$ , o método VRFT procura pelo controlador ideal dado por (9). Pode-se então representar  $G_0(z)$  como em (153). Dessa forma, o sistema representado por (206) pode ser escrito como

$$\mathcal{S}_{inv} : u(t) = C_d(z) \frac{1 - M(z)}{M(z)} y(t) - \frac{1}{G_0(z)} H(z) e(t), \quad (207)$$

e a classe de modelos é então definida como

$$\mathcal{M}_{inv} : u(t) = C(z, \rho) \frac{1 - M(z)}{M(z)} y(t) - \frac{1}{G_0(z)} H(z, \xi) e(t). \quad (208)$$

Se não existe ruído presente no sistema (207) ( $e(t) = 0$ ) e se o controlador for linearmente parametrizado, então (207) corresponde exatamente ao sistema que é identificado quando minimiza-se  $J^{VR}(\rho)$  (21). Nota-se que (207) e (154) são bastante semelhantes; a formulação é a mesma, apenas o tratamento dos sinais  $u(t)$  e  $y(t)$  como entrada e saída é invertido nas duas. Porém, o fato de tratar o sinal  $y(t)$ , quando afetado por ruído, como sinal de entrada, acarreta em certas desvantagens.

Formula-se então o seguinte teorema:

**Teorema 5.6** *Quando os dados são afetados por ruído, o método VRFT produz uma estimativa polarizada através de (22).*

**Prova 5.6** *Uma vez que  $y(t)$  é o sinal de entrada do sistema, o vetor regressor  $\varphi(t)$  será decorrelacionado com o ruído  $e(t)$  se for formado apenas por valores passados de  $y(t)$  (SöDERSTRÖM; STOICA, 1989), o que é possível somente se*

$$\frac{1}{G_0(z)} = C_d(z) \frac{1 - M(z)}{M(z)}$$

*for estritamente próprio. Porém, para  $\frac{1}{G_0(z)}$  ser estritamente próprio,  $G_0(z)$  deveria ser impróprio, o que é uma situação irreal. Assim, a estimativa obtida com o método VRFT será sempre polarizada se o sinal  $y(t)$  for afetado por ruído.*

◇

Por esse motivo, verifica-se a necessidade de se utilizar variáveis instrumentais para estimar os parâmetros do controlador sempre que o sistema for afetado por ruído, para que a estimativa seja não-polarizada. Esta é a solução proposta pelos autores em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002). Porém, vale ressaltar que o uso de variáveis instrumentais nem sempre é uma solução segura, pois, acima de tudo, acarreta na necessidade da escolha da variável instrumental, a qual pode ser obtida de diferentes maneiras.

Na Seção 2.4.4.2 do Capítulo 2, foram apresentadas duas opções escolhas para variáveis instrumentais. Uma solução é obter a variável instrumental através de um modelo do processo. Além de ser um procedimento custoso e que necessita de um certo conhecimento do engenheiro nas escolhas das variáveis de identificação, a obtenção de um modelo é justamente o que se quer evitar quando se usa um método de controle baseado em dados. Além disso, não é garantido que essa solução seja não-polarizada (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002). Outra solução seria realizar um ensaio adicional, o qual gera uma variável instrumental com a qual a estimativa é não-polarizada, porém nem sempre é possível realizar ensaios adicionais em um ambiente industrial, onde muitas vezes a produção não pode ser interrompida. Sendo assim, apesar de o uso de variáveis instrumentais ser uma solução para estimar parâmetros utilizando dados afetados por ruído, nem sempre é possível obter uma variável instrumental que garanta a consistência da estimativa.

No caso de usar variáveis instrumentais, a variância da estimativa é dada por

$$P_\rho = \sigma_e^2 \left\{ \bar{E}[\zeta(t, \rho_d) \varphi^T(t, \rho_d)] \right\}^{-1} \\ \times \left\{ \bar{E}[\zeta(t, \rho_d) \zeta^T(t, \rho_d)] \right\} \left\{ \bar{E}[\varphi(t, \rho_d) \zeta^T(t, \rho_d)] \right\}^{-1}. \quad (209)$$

## 5.5 Exemplos ilustrativos

Nesta seção são apresentados alguns exemplos de simulação utilizando o método de identificação do controlador ótimo para estimar o controlador baseado no modelo de referência escolhido e também para estimar a função de transferência  $H(z, \xi)$ . São apresentados exemplos com diferentes estruturas de controladores.

Primeiramente, são utilizados controladores com estrutura fixa. Nesse caso, são apresentados sistemas com diferentes estruturas: um sistema de estrutura ARX, para comparar com resultados obtidos aplicando o método VRFT; um sistema com estrutura BJ, onde identifica-se um modelo BJ e um modelo OE, para exemplificar os casos ideal e quasi-ideal; e também outro exemplo com controlador PID, no qual o sistema não está na classe de modelos escolhida. Por fim, é apresentado um exemplo onde é estimado um controlador de ordem cheia, no qual apenas a ação integral é fixa com o objetivo de garantir erro nulo em regime permanente.

### 5.5.1 Controlador com estrutura fixa

A formulação do método de identificação do controlador ideal permite utilizar controladores de estrutura fixa, como controladores PI ou PID, nos quais todos os polos são fixos. Além dos controladores PI e PID serem largamente utilizados na indústria, outro fato que colabora para o uso destes controladores é que os mesmos são lineares nos parâmetros, facilitando a identificação de seus parâmetros quando utilizados métodos de controle baseados em dados (HJALMARSSON, 2002; CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002). Nesses casos, tem-se que

$$C(z, \rho) = \frac{b_{c1} z^n + b_{c2} z^{n-1} + \dots + b_{c_{n+1}}}{z^{n-1}(z-1)}, \quad (210)$$

onde um controlador PI é obtido com  $n = 1$  e um controlador PID com  $n = 2$ . O controlador  $\tilde{C}(z, \tilde{\rho})$  correspondente é dado por

$$\tilde{C}(z, \rho) = \frac{1}{b_{c1}} \frac{z^{n-1}(z-1)}{z^n + \frac{b_{c2}}{b_{c1}} z^{n-1} + \dots + \frac{b_{c_{n+1}}}{b_{c1}}} \quad (211)$$

$$\tilde{C}(z, \tilde{\rho}) = K_c \frac{z^{n-1}(z-1)}{z^n + \tilde{b}_{c2} z^{n-1} + \dots + \tilde{b}_{c_{n+1}}} \quad (212)$$

onde

$$\tilde{\rho} = [K_c \tilde{b}_{c2} \dots \tilde{b}_{c_{n+1}}]^T. \quad (213)$$

Reescrevendo (157), tem-se então que

$$y(t) = K_c \frac{1}{z^n + \tilde{b}_{c2} z^{n-1} + \dots + \tilde{b}_{c_{n+1}}} \tilde{u}_F(t) + H(z, \xi) e(t). \quad (214)$$

onde  $\tilde{u}_F(t) = z^{n-1}(z-1)\tilde{u}(t)$ .

Para a obtenção dos dados nos exemplos mostrados a seguir, foi aplicado um sinal PRBS como sinal de entrada de um experimento em malha aberta com amplitude  $\pm 1$ , e foram coletados 1000 amostras dos sinais de entrada e saída do processo.

### 5.5.1.1 Controlador PID - estrutura ARX

Deseja-se projetar um controlador para um sistema afetado por ruído cujas funções de transferências são dadas por

$$G_0(z) = \frac{z}{(z-0.9)(z-0.8)}, \quad H_0(z) = \frac{z^2}{(z-0.9)(z-0.8)}, \quad (215)$$

ou seja, o sistema possui uma estrutura do tipo ARX, e a variância do ruído branco é  $\sigma_e^2 = 0.01$ . Note que  $H_0(z)$  possui um ganho alto em baixa frequência, e a variância do ruído  $\nu(t)$  é estimada em  $\hat{\sigma}_\nu^2 = 0.9$ . Deseja-se que o sistema em malha fechada comporte-se como um modelo de referência, escolhido *a priori*, dado por

$$M(z) = \frac{0.4}{z-0.6}. \quad (216)$$

Nesse caso, o controlador ideal é dado por

$$C_d(z) = \frac{0.4(z-0.9)(z-0.8)}{z^2-z}. \quad (217)$$

Nota-se que o controlador ideal é um controlador do tipo PID e portanto, o problema de identificação a ser solucionado pertence ao caso ideal. Além disso, como o sistema possui uma estrutura ARX, o método dos mínimos quadrados pode ser utilizado para estimar o controlador de forma consistente.

Uma vez que os dados são afetados por ruído, a análise da estimativa deve ser feita através da média e da variância da mesma, considerado um determinado número de realizações. Usualmente utiliza-se um número alto de realizações, já que a estimativa da variância é correta para  $N \rightarrow \infty$ . Nos exemplos apresentados nesse trabalho foi escolhido realizar apenas 100 ensaios Monte Carlo, para que os dados apresentados nas elipses e nos elipsoides sejam melhor visualizados. Por isso, foram realizados 100 ensaios Monte Carlo, para os quais foi obtido como valor médio do parâmetro

$$\hat{\rho}_m = [2.5000 \quad -1.6999 \quad 0.7199]^T, \quad (218)$$

cujo controlador correspondente é dado por

$$C(z, \hat{\rho}_m) = \frac{1}{2.5000} \frac{z^2 - 1.6999z + 0.7199}{z^2 - z} = \frac{0.4000(z - 0.9000)(z - 0.7999)}{z^2 - z}. \quad (219)$$

A variância dessa estimativa é dada por

$$\text{var}_{\hat{\rho}} = 1 \times 10^{-5} * \begin{bmatrix} 0.5005 & 0.0027 & -0.0005 \\ 0.0027 & 0.0402 & -0.0398 \\ -0.0005 & -0.0398 & 0.0401 \end{bmatrix}. \quad (220)$$

Porém, em uma aplicação prática, apenas um ensaio é realizado e o controlador obtido neste ensaio será inserido no sistema e não o controlador  $C(z, \hat{\rho}_m)$ . Assim, a Figura 10



mostra a resposta ao degrau do sistema em malha fechada com um controlador obtido em um desses ensaios, dado por

$$C(z, \hat{\rho}) = \frac{0.4005(z - 0.9003)(z - 0.7996)}{z^2 - z}. \quad (221)$$

Para fins de análise de desempenho, a Figura 10 apresenta a resposta em malha fechada do sistema com e sem ruído. Verifica-se que, se o sistema não tivesse ruído, o sistema em malha fechada obtido se comportaria exatamente como o modelo de referência. As variações apresentadas são devido ao ruído e não a um erro de projeto. Os sinais de controle desses sistemas (com e sem ruído) são apresentados na Figura 11.

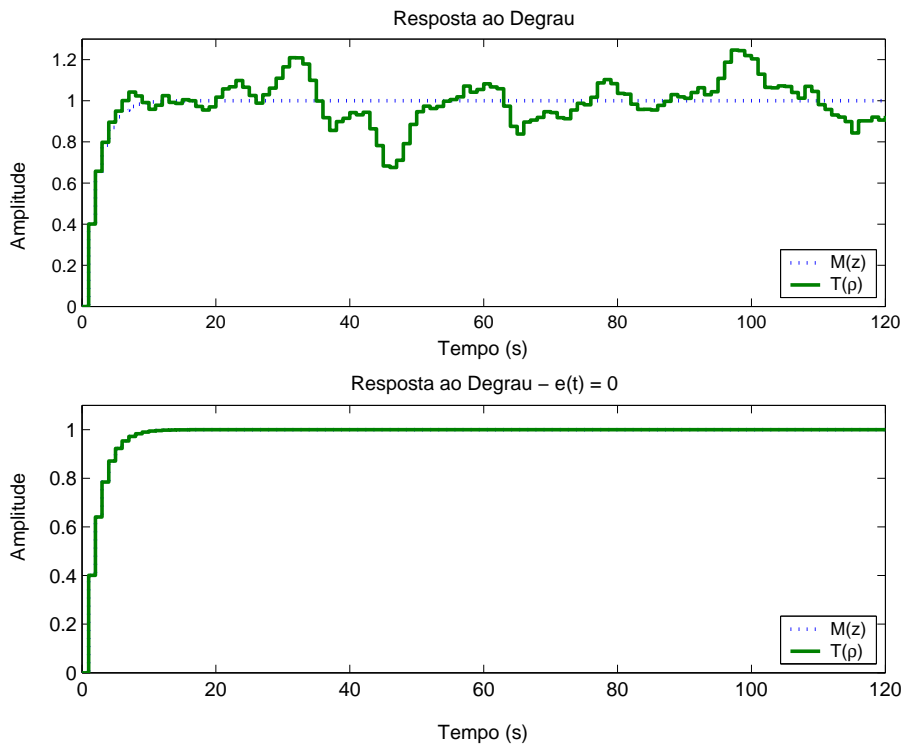


Figura 10: Respostas ao degrau do sistema em malha fechada  $T(z, \rho)$  com o controlador PID obtida em um ensaio e do modelo de referência  $M(z)$ .

Além disso, os resultados dos 100 ensaios Monte Carlo são apresentados na Figura 12. O parâmetro  $\hat{\rho}$  obtido em cada ensaio é representado por um asterisco e o valor médio  $\hat{\rho}_m$  é representado por um ponto vermelho. Na mesma figura, é apresentado o elipsoide que representa um intervalo de 95% de confiança, ou seja, 95% das estimativas estão dentro desse intervalo. Esse elipsoide é centrado em  $\hat{\rho}_m$  e representa a covariância dos parâmetros.

Suponha agora que o método VRFT seja utilizado para obter os parâmetros do controlador PID. A Tabela 6 mostra uma comparação dos valores médios dos parâmetros obtidos através do método proposto neste trabalho com o método VRFT, para diferentes valores de variância do ruído presente no sistema. Esses valores médios são obtidos através de 100 ensaios Monte Carlo, em ambos os casos. O método de identificação proposto estima  $\tilde{C}(z, \tilde{\rho})$ , cujos parâmetros são diferentes de  $C(z, \rho)$ ; a fim de comparar os resultados, o vetor  $\rho$  é calculado a partir de  $\tilde{\rho}$ , no caso do método de identificação do controlador,

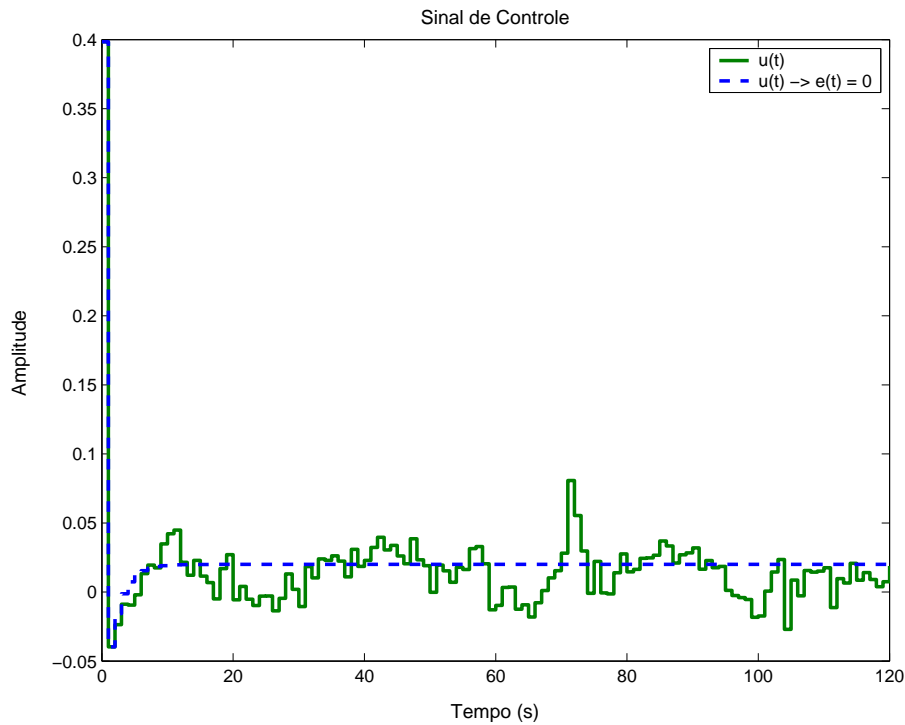


Figura 11: Sinal de controle dos sistemas em malha fechada apresentados na Figura 10.

através da relação:

$$\tilde{\rho} = [\tilde{\rho}_1 \ \tilde{\rho}_2 \ \tilde{\rho}_3]^T, \quad \rho = \left[ \frac{1}{\tilde{\rho}_1} \ \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}_1} \ \frac{\tilde{\rho}_3}{\tilde{\rho}_1} \right]^T.$$

Os dados apresentados mostram que quando a variância  $\sigma_e^2$  é pequena, o erro da estimativa obtida através do método VRFT é mínimo; porém, conforme a variância do ruído aumenta, o fato de que a estimativa é polarizada fica bastante explícito. Por outro lado, para qualquer valor de variância do ruído, o método de identificação do controlador ótimo apresenta um valor médio muito próximo ao valor ideal, o que comprova a propriedade de consistência da estimativa através da utilização deste método.

Tabela 6: Valor médio dos parâmetros estimados em 100 ensaios Monte Carlo, através do método de identificação do controlador ótimo e do método VRFT (sem utilizar variáveis instrumentais) para o controlador PID para o sistema (215) com diferentes valores de variância do ruído  $\sigma_e^2$ .

$\sigma_e^2$	Identificação do controlador ótimo	VRFT (sem VI)
0	$\rho_d = [0.4000 \ -0.6800 \ 0.2880]^T$	$\rho_d = [0.4000 \ -0.6800 \ 0.2880]^T$
0.01	$[0.3998 \ -0.6796 \ 0.2878]^T$	$[0.3960 \ -0.6728 \ 0.2848]^T$
0.1	$[0.4003 \ -0.6802 \ 0.2879]^T$	$[0.3638 \ -0.6174 \ 0.2611]^T$
0.25	$[0.3997 \ -0.6795 \ 0.2878]^T$	$[0.3194 \ -0.5407 \ 0.2282]^T$
0.5	$[0.3998 \ -0.6792 \ 0.2875]^T$	$[0.2661 \ -0.4492 \ 0.1892]^T$
1	$[0.3988 \ -0.6773 \ 0.2865]^T$	$[0.2008 \ -0.3386 \ 0.1428]^T$

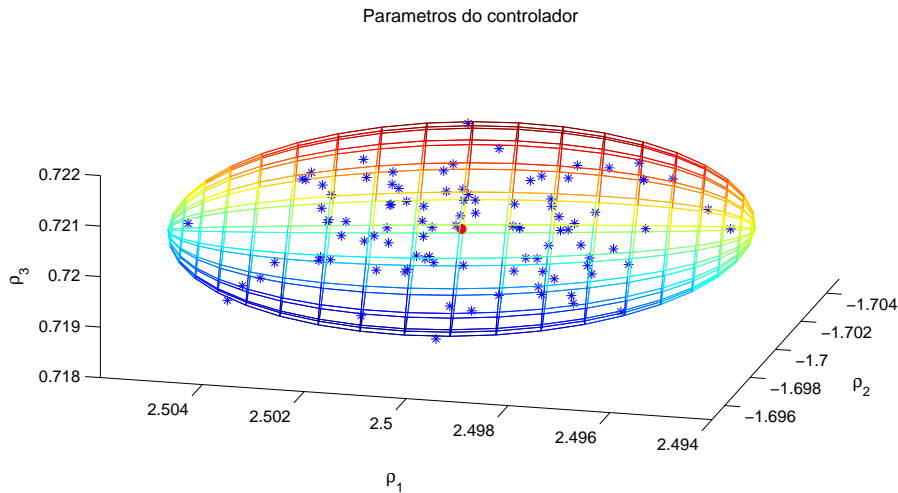


Figura 12: Asteriscos: parâmetros do controlador PID estimados pelo método de identificação do controlador ótimo para um sistema de estrutura ARX obtidos através de 100 ensaios Monte Carlo. Elipsoide: intervalo de 95% de confiança da estimativa de  $\hat{\rho}$ , centrada em  $\hat{\rho}_m$  representado por um ponto vermelho.

#### 5.5.1.2 Controlador PI - sistema com estrutura BJ

Neste caso, deseja-se projetar um controlador para um sistema afetado por ruído cujas funções de transferências são dadas por

$$G_0(z) = \frac{0.5}{z - 0.9}, \quad H_0(z) = \frac{z}{z - 0.3}, \quad (222)$$

ou seja, o sistema real possui uma estrutura do tipo BJ, e a variância do ruído branco é  $\sigma_e^2 = 0.005$ . Neste caso, a variância estimada de  $\nu(t)$  foi de  $\hat{\sigma}_\nu^2 = 0.02$ . Deseja-se que o sistema em malha fechada comporte-se o mais próximo possível de um modelo de referência, escolhido *a priori*, dado por

$$M(z) = \frac{0.4}{z - 0.6}.$$

Nesse caso, o controlador ideal é dado por

$$C_d(z) = \frac{0.8(z - 0.9)}{z - 1}. \quad (223)$$

Nota-se que o controlador ideal é um controlador do tipo PI. Para que o problema de identificação a ser solucionado pertença ao caso ideal, ou seja, para que  $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_e$ , o sistema foi modelado com uma estrutura BJ, onde a classe do controlador escolhida é do tipo PI

$$C(z, \rho) = \frac{\rho_1 z + \rho_2}{z - 1}, \quad (224)$$

e o modelo do ruído deve ser

$$H(z, \xi) = \frac{z}{z + \xi_1}. \quad (225)$$

A identificação foi realizada utilizando a função `bj` do `toolbox ident` do Matlab. Foram realizados 100 ensaios Monte Carlo, para os quais foi obtido como valor médio do parâmetro

$$\hat{\theta}_m = [1.2501 \quad -0.9000 \quad -0.2962]^T, \quad (226)$$

cujo controlador correspondente é dado por

$$C(z, \hat{\rho}_m) = \frac{1}{1.2501} \frac{z - 0.9000}{z - 1} = \frac{0.7999(z - 0.9000)}{z - 1}, \quad (227)$$

e o modelo do ruído obtido é

$$H(z, \hat{\xi}_m) = \frac{z}{z - 0.2962}. \quad (228)$$

Estes resultados são apresentados nas Figuras 13 e 14. A Figura 13 apresenta os parâmetros estimados em cada ensaio Monte Carlo, bem como o elipsoide que representa um intervalo de 95% de confiança da estimativa de  $\hat{\theta}$ , centrada em  $\hat{\theta}_m$ . A variância dessa estimativa é dada por

$$\text{var}_{\hat{\theta}} = 1 \times 10^{-3} * \begin{bmatrix} 0.0180 & 0.0011 & 0.0123 \\ 0.0011 & 0.0002 & 0.0012 \\ 0.0123 & 0.0012 & 0.7495 \end{bmatrix}. \quad (229)$$

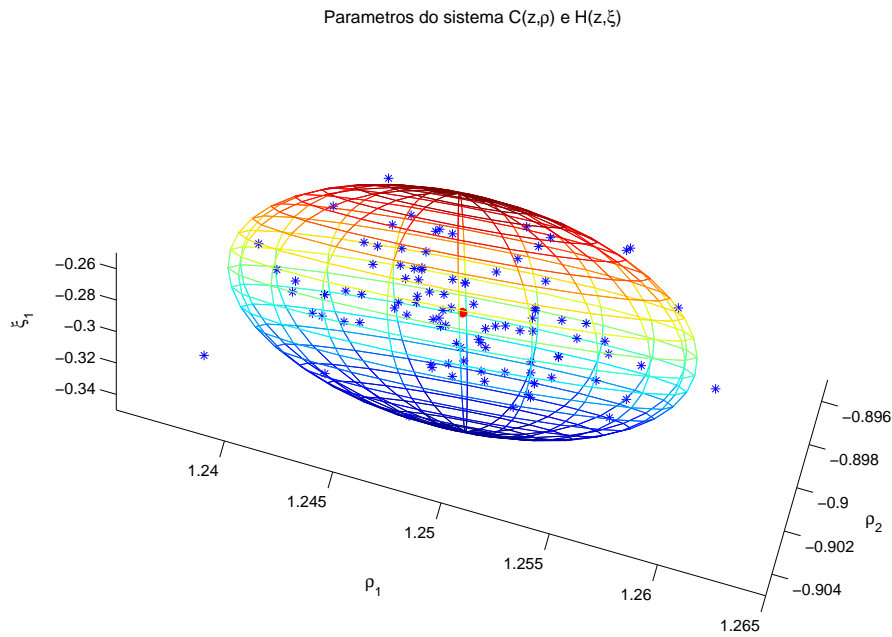


Figura 13: Asteriscos: parâmetros do sistema  $(C(z, \rho), H(z, \xi))$  estimados pelo método de identificação do controlador ótimo para um sistema de estrutura BJ obtidos através de 100 ensaios Monte Carlo. Elipsoide: intervalo de 95% de confiança da estimativa de  $\hat{\theta}$ , centrada em  $\hat{\theta}_m$  representado por um ponto vermelho.

Uma vez que o interesse do método proposto é a identificação do controlador, apesar do modelo  $H(z, \xi)$  ser corretamente estimado, o conhecimento do mesmo é irrelevante para o projeto de um controlador cujo objetivo é o seguimento de referência. Por esse motivo, apresenta-se na Figura 14 apenas os componentes do vetor  $\hat{\theta}$  relativos ao controlador, ou seja  $\hat{\rho}$ . Assim, são apresentados os parâmetros  $\hat{\rho}$  obtidos nos 100 ensaios Monte Carlo, o valor médio  $\hat{\rho}_m$  correspondente e a elipse que representa o intervalo de 95% de confiança.

A resposta ao degrau do sistema em malha fechada com um controlador obtido em um desses ensaios é apresentada na Figura 15. Novamente são apresentadas respostas com e

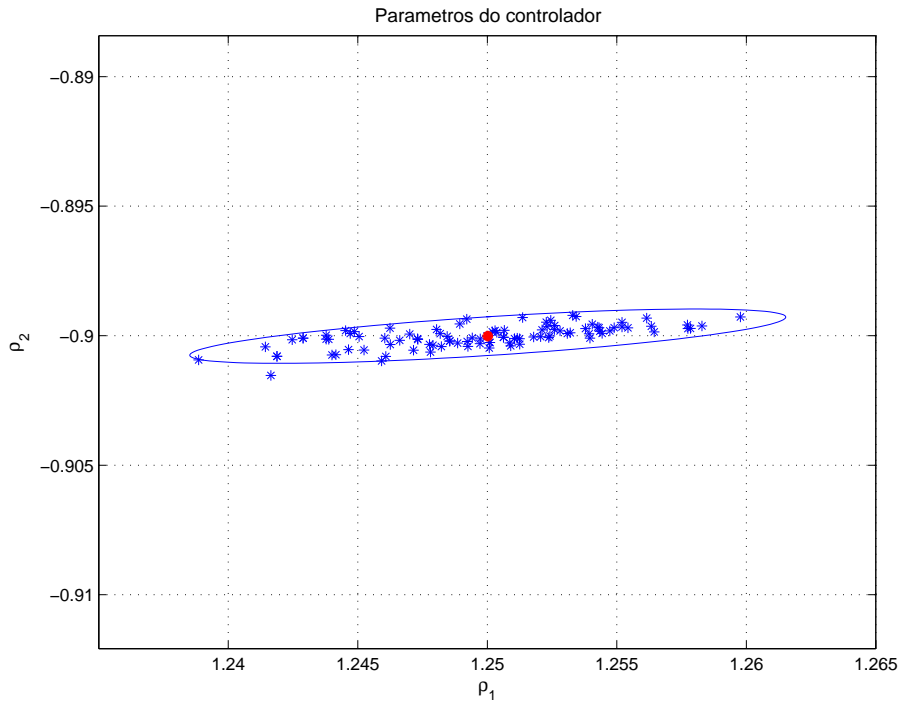


Figura 14: Asteriscos: parâmetros do controlador estimados pelo método de identificação do controlador ótimo para um sistema de estrutura BJ obtidos através de 100 ensaios Monte Carlo. Elipse: intervalo de 95% de confiança da estimativa de  $\hat{\rho}$ , centrada em  $\hat{\rho}_m$  representado por um ponto vermelho.

sem ruído, para fins de análise do desempenho do controlador identificado. O controlador utilizado neste caso foi

$$C(z, \hat{\rho}) = \frac{0.8017(z - 0.8999)}{z - 1}. \quad (230)$$

Verifica-se que, novamente, o controlador projetado faria o sistema em malha fechada, caso não houvesse ruído na saída, atingir exatamente o comportamento do modelo de referência escolhido.

Considere agora um caso diferente. Suponha que o modelo do ruído seja escolhido de forma que  $H(z, \xi_0) \notin \mathcal{M}_c$ , ou seja, apenas  $\tilde{C}_d \in \mathcal{C}$ , que caracteriza-se como um caso quasi-ideal. Na verdade, esse é o caso mais realista no caso do método proposto: já que o objetivo é identificar um controlador para seguimento de referência, o conhecimento de  $H_0(z)$  é irrelevante. De fato, se o experimento para obtenção dos dados for realizado em malha aberta, então o controlador ideal ainda pode ser identificado consistentemente, independentemente da estimativa de  $H(z, \xi)$  (ver Teorema 5.5).

Esse caso é apresentado a seguir. Seja o modelo do ruído escolhido como  $H(z, \xi) = 1$ , ou seja, o sistema possui uma estrutura BJ, mas é escolhido um modelo de estrutura OE para a identificação. Nesse caso, a identificação foi realizada utilizando a função `oe` do *toolbox ident* do Matlab. Novamente, foram realizados 100 ensaios Monte Carlo em um sistema com ruído cuja variância é igual ao caso anterior, ou seja,  $\sigma_e^2 = 0.005$ , para os quais foi obtido como valor médio do parâmetro

$$\hat{\rho}_m = [1.2501 \quad -0.9000]^T \quad (231)$$

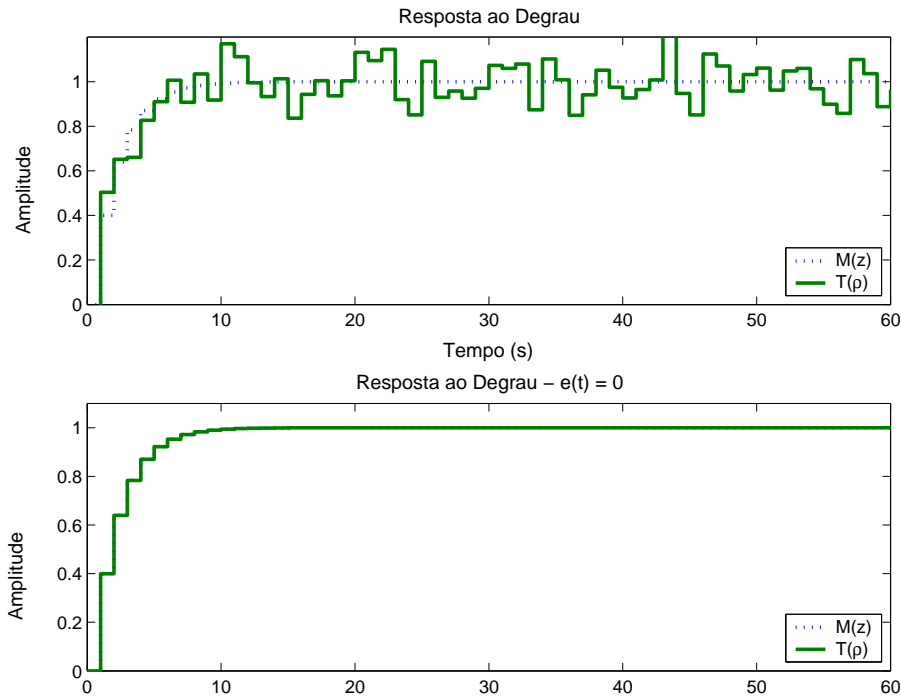


Figura 15: Respostas ao degrau do sistema em malha fechada  $T(z, \rho)$  com o controlador PI obtida em um ensaio e do modelo de referência  $M(z)$ .

cujo controlador correspondente é dado por

$$C(z, \hat{\rho}_m) = \frac{1}{1.2501} \frac{z - 0.9000}{z - 1} = \frac{0.7999(z - 0.9000)}{z - 1}, \quad (232)$$

exatamente igual ao valor obtido quando  $H(z, \xi)$  foi modelado e estimado corretamente. A variância dessa estimativa é dada por

$$\text{var}_{\hat{\rho}} = 1 \times 10^{-4} * \begin{bmatrix} 0.1687 & 0.0131 \\ 0.0131 & 0.0020 \end{bmatrix}. \quad (233)$$

Assim, mesmo que o modelo do filtro do ruído seja incorreto, o controlador ideal é identificado de maneira consistente e o sistema em malha fechada se comporta como o modelo de referência escolhido.

### 5.5.1.3 Controlador PID - $\tilde{C}_d \notin \mathcal{C}$

Supõe-se que, agora, deseja-se projetar um controlador para outro sistema, cujas funções de transferência são

$$G_0(z) = \frac{0.2(z - 0.7)}{(z - 0.9)(z - 0.5)}, \quad H_0(z) = \frac{z}{z - 0.3}. \quad (234)$$

e o ruído branco tem variância  $\sigma_e^2 = 0.1$ . Deseja-se que o sistema em malha fechada comporte-se como um modelo de referência, dado por

$$M(z) = \frac{0.36z}{(z - 0.6)^2}. \quad (235)$$

O controlador ideal neste caso é dado por

$$C_d(z) = \frac{0.8z(z - 0.9)(z - 0.5)}{(z - 1)(z - 0.36)(z - 0.7)}, \quad (236)$$

porém deseja-se projetar um controlador PID, parametrizado por

$$C(z, \rho) = \frac{\rho_1 z^2 + \rho_2 z + \rho_3}{z^2 - z}. \quad (237)$$

Está claro que o controlador ideal (236) não pertence à classe de controladores que será utilizada no projeto, que são controladores tipo PID. Além disso, o modelo do ruído é escolhido como  $H(z, \xi) = 1$ , também fazendo com que  $H_0(z)$  esteja fora da classe  $\mathcal{M}_c$ . Como  $H(z, \xi) = 1$ , foi aplicado o método proposto, utilizando uma estrutura OE a fim de obter  $C(z, \rho)$ . Portanto, a identificação foi realizada utilizando a função `oe` do *toolbox ident* do Matlab.

Foram realizados 100 ensaios Monte Carlo em um sistema com ruído cuja variância é de  $\sigma_e^2 = 0.1$  ( $\hat{\sigma}_v^2 = 0.1$ ), para os quais foi obtido como valor médio do parâmetro

$$\hat{\rho}_m = [0.9162 \quad -0.2987 \quad -0.3906]^T, \quad (238)$$

cujo controlador correspondente é dado por

$$C(z, \hat{\rho}_m) = \frac{1}{0.9162} \frac{z^2 - 0.2987z - 0.3906}{z - 1} = \frac{1.0915(z - 0.7919)(z + 0.4932)}{z^2 - z}. \quad (239)$$

A variância dessa estimativa é dada por

$$\text{var}_{\hat{\rho}} = \begin{bmatrix} 0.0028 & -0.0016 & -0.0014 \\ -0.0016 & 0.0021 & -0.0004 \\ -0.0014 & -0.0004 & 0.0020 \end{bmatrix}. \quad (240)$$

O controlador obtido em um desses ensaio é dado por

$$C(z, \hat{\rho}) = \frac{0.94301(z - 0.8402)(z + 0.4537)}{z^2 - z}, \quad (241)$$

e a Figura 16 apresenta as respostas ao degrau do modelo de referência  $M(z)$  e do sistema em malha fechada  $T(z, \rho)$  obtida com este controlador. Note que mesmo no gráfico sem ruído, o sistema em malha fechada não apresenta um comportamento igual ao modelo de referência, apenas próximo a este. Além disso, a Figura 17 apresenta os sinais de controle obtidos nesse projeto. Novamente, para fins de comparação, é apresentado também o sinal de controle em um sistema sem ruído, para verificar a influência deste no sinal. Uma vez que o controlador ideal não pertence à classe de controladores escolhida, não faz sentido apresentar o elipsoide de certo intervalo de confiança já que o parâmetro ideal e o parâmetro estimado não estão no mesmo espaço de parâmetros. Ao invés disto, compare-se a resposta em frequência dada pelo diagrama de Bode de cada controlador PID obtido com a resposta em frequência do controlador ideal (236). Assim, a Figura 18 apresenta os diagramas de Bode dos controladores obtidos  $C(z, \hat{\rho})$ , do controlador correspondente ao valor médio obtido do parâmetro estimado  $C(z, \hat{\rho}_m)$  e do controlador ideal  $C_d(z)$ . Note que o módulo da resposta em frequência dos controladores obtidos nos 100 ensaios Monte Carlo é bastante próximo ao módulo do  $C_d(z)$ ; já a fase é próxima à fase de  $C_d(z)$  até uma frequência de  $0.2 \text{ rad/s}$ , quando a diferença da mesma torna-se mais significativa.

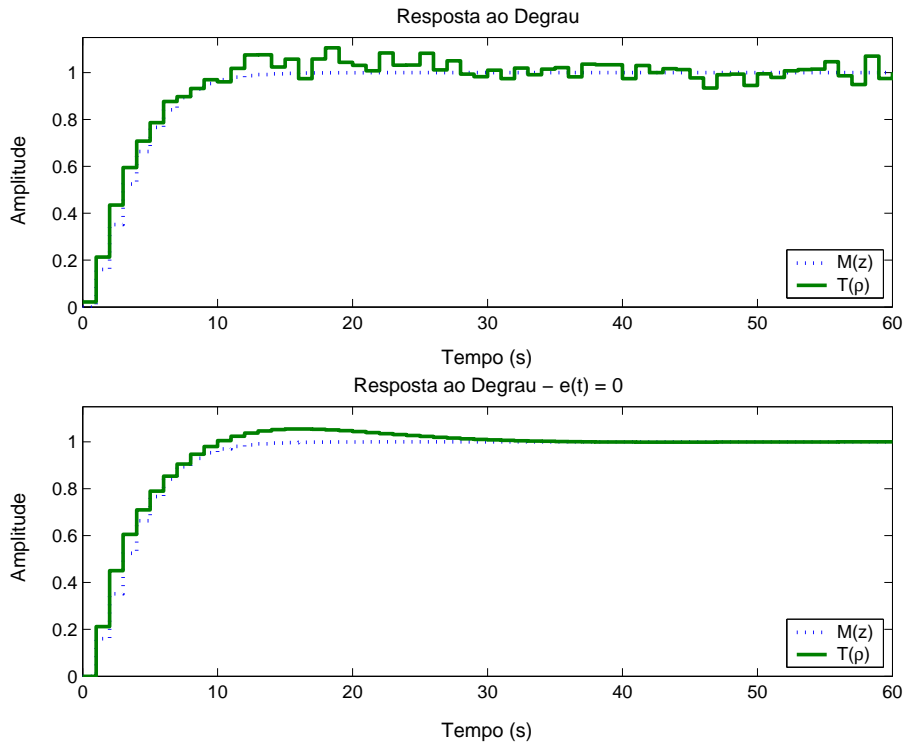


Figura 16: Respostas ao degrau do sistema em malha fechada  $T(z, \rho)$  com o controlador PID obtida em um ensaio Monte-Carlo e do modelo de referência  $M(z)$ .

### 5.5.2 Controlador com ação integral fixa

Normalmente, deseja-se que o sistema em malha fechada apresente erro nulo em regime permanente, ou seja,  $M(1) = 1$ . Uma vez que esse desempenho é obtido através da ação integral do controlador, pode-se definir o controlador com um polo fixo em 1. Veja que isto é exatamente o que ocorre em controladores PI e PID, utilizados no exemplo anterior. Seja

$$C(z, \rho) = \frac{B_c(z, \rho)}{A_c(z, \rho)} \quad (242)$$

$$= \frac{b_{c1}z^n + b_{c2}z^{n-1} + \dots + b_{c_{n+1}}}{(z^{m-1} + a_{c1}z^{m-2} + \dots + a_{c_{m-1}})(z - 1)}. \quad (243)$$

De (155) tem-se que

$$\tilde{C}(z, \rho) = \frac{1}{b_{c1}} \frac{(z^{m-1} + a_{c1}z^{m-2} + \dots + a_{c_{m-1}})(z - 1)}{z^n + \frac{b_{c2}}{b_{c1}}z^{n-1} + \dots + \frac{b_{c_{n+1}}}{b_{c1}}} \quad (244)$$

$$\tilde{C}(z, \tilde{\rho}) = K_c \frac{(z^{m-1} + a_{c1}z^{m-2} + \dots + a_{c_{m-1}})(z - 1)}{z^n + \tilde{b}_{c2}z^{n-1} + \dots + \tilde{b}_{c_{n+1}}} \quad (245)$$

onde

$$\tilde{\rho} = [K_c \ a_{c1} \ \dots \ a_{c_{m-1}} \ \tilde{b}_{c2} \ \dots \ \tilde{b}_{c_{n+1}}]^T. \quad (246)$$



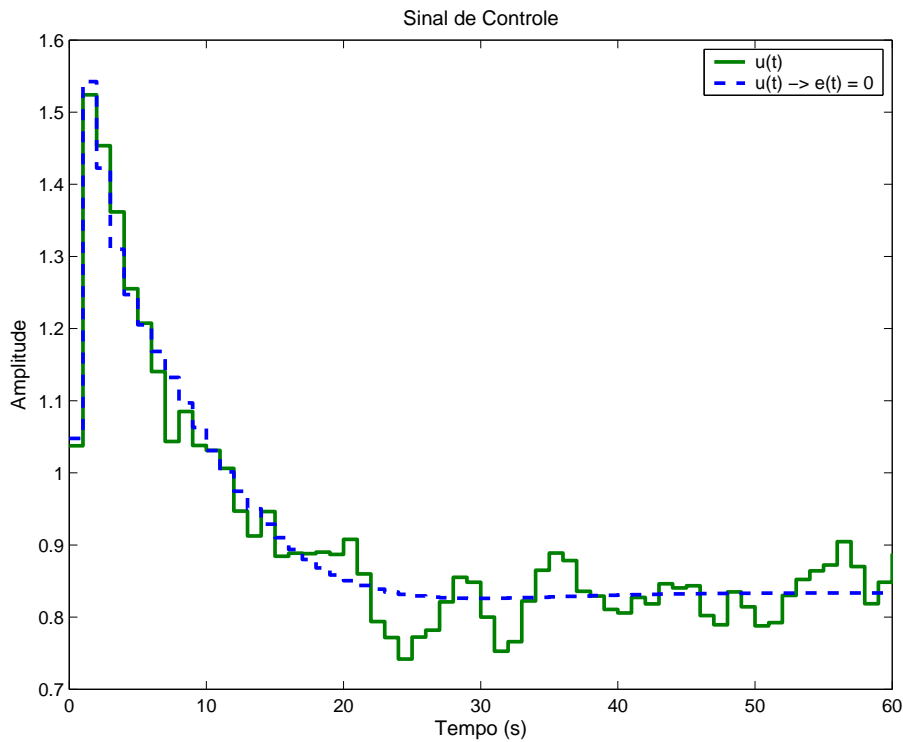


Figura 17: Sinal de controle dos sistemas em malha fechada apresentados na Figura 16.

Reescrevendo (157), tem-se que

$$y(t) = K_c \frac{z^{m-1} + a_{c1}z^{m-2} + \dots + a_{c_{m-1}}}{z^n + \tilde{b}_{c2}z^{n-1} + \dots + \tilde{b}_{c_{n+1}}} \tilde{u}_I(t) + H(z, \xi)e(t). \quad (247)$$

onde  $\tilde{u}_I(t) = (z - 1)\tilde{u}(t)$ .

### 5.5.2.1 Controlador de ordem cheia

Os exemplos apresentados anteriormente utilizam controlador PI e PID, por sua larga utilização na indústria, mas também pelo fato de serem bastante utilizados em trabalhos sobre controle baseado em dados. Como dito anteriormente, são largamente utilizados pela sua propriedade de serem lineares nos parâmetros. Porém o método de identificação do controlador ótimo apresentado aqui permite que sejam utilizados controladores cujos polos também podem ser estimados, não somente os zeros do controlador. Assim, para o projeto do controlador para o sistema (234), foi escolhida uma classe de controladores mais flexível que um controlador PID, de forma que o sistema a ser identificado pertença a essa classe. Seja o controlador ideal, obtido através de (9), escrito na forma

$$C_d(z) = \frac{0.8z(z - 0.9)(z - 0.5)}{(z - 1)(z - 0.36)(z - 0.7)},$$

então a classe de controladores é escolhida de forma que  $\tilde{C}_d \in \mathcal{C}$ , assim como o modelo do filtro do ruído.

Foram realizados 100 ensaios Monte-Carlo, cada um com tamanho  $N = 5000$  (devido ao maior número de parâmetros a ser identificados), de um sistema cuja variância do ruído  $\sigma_e^2 = 0.01$ , para os quais foi obtido como valor médio do parâmetro

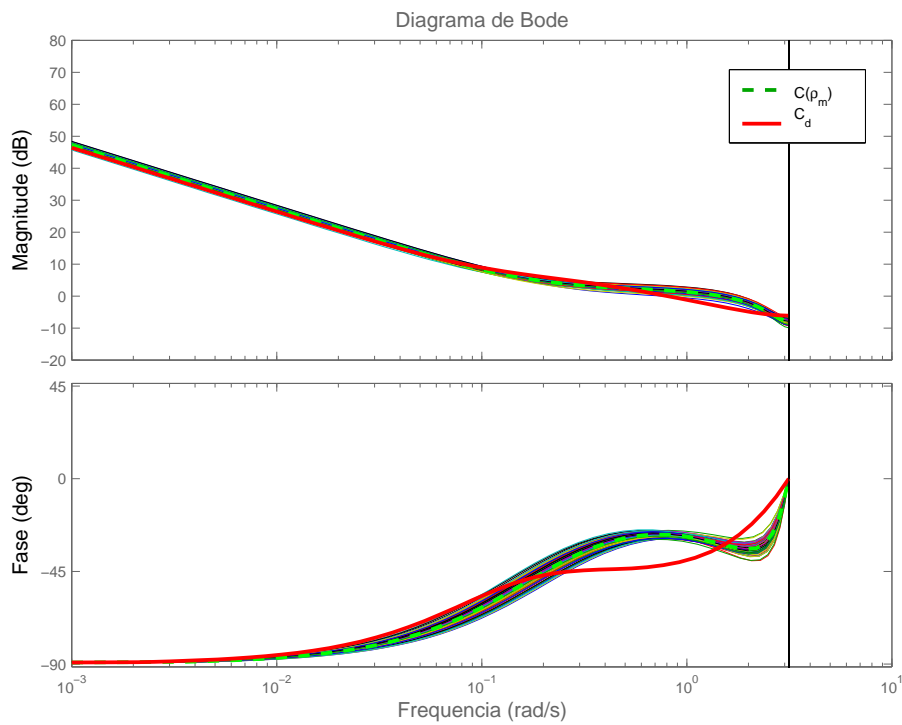


Figura 18: Diagramas de Bode dos controlador PID obtidos nos 100 ensaios Monte Carlo, do controlador obtido com o valor médio dos parâmetros  $C(z, \hat{\rho}_m)$  ( $C(\rho_m)$ ) e do controlador ideal  $C_d(z)$  ( $C_d$ ).

$$\hat{\theta}_m = \begin{bmatrix} 1.2488 \\ -0.8770 \\ 0.0387 \\ -1.0422 \\ 0.1072 \\ 0.0211 \\ -0.3000 \end{bmatrix} \quad (248)$$

cujo controlador correspondente é dado por

$$C(z, \hat{\rho}_m) = \frac{0.8007(z - 0.8964)(z - 0.2427)(z + 0.0969)}{(z - 1)(z - 0.6549)(z - 0.0474)}, \quad (249)$$

e o filtro do ruído por

$$H(z, \hat{\xi}_m) = \frac{z}{z - 0.3000}. \quad (250)$$

A variância dessa estimativa é dada por

$$\text{var}_{\hat{\theta}} = 1 \times 10^{-2} * \begin{bmatrix} 0.0086 & -0.0259 & 0.0082 & -0.0126 & 0.0078 & 0.0027 & -0.0004 \\ -0.0259 & 55.0657 & -33.7804 & 44.0443 & -41.8160 & 2.2544 & -0.0199 \\ 0.0082 & -33.7804 & 20.7517 & -27.0262 & 25.6867 & -1.4054 & 0.0117 \\ -0.0126 & 44.0443 & -27.0262 & 35.2443 & -33.4692 & 1.8105 & -0.0149 \\ 0.0078 & -41.8160 & 25.6867 & -33.4692 & 31.8195 & -1.7492 & 0.0135 \\ 0.0027 & 2.2544 & -1.4054 & 1.8105 & -1.7492 & 0.1180 & -0.0002 \\ -0.0004 & -0.0199 & 0.0117 & -0.0149 & 0.0135 & -0.0002 & 0.0141 \end{bmatrix}. \quad (251)$$

Nota-se que a variância dos parâmetros  $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_5$  é bastante elevada se comparadas aos valores dos outros parâmetros. De fato, o controlador  $C(z, \hat{\rho}_m)$  possui zeros e polos bastante diferentes dos zeros e polos do controlador ideal  $C_d(z)$ , dado em forma de zeros e polos em (236).

Seja um controlador obtido em um ensaio dado por

$$C(z, \hat{\rho}) = \frac{0.80427(z - 0.9318)(z - 0.8442)(z - 0.06151)}{(z - 1)(z - 0.9077)(z - 0.5759)}. \quad (252)$$

Pode-se perceber que tanto o ganho quanto o zero e o polo mais lentos são próximos ao valor destes parâmetros apresentados em  $C(z, \hat{\rho}_m)$  e em  $C_d(z)$ , sendo que os outros polos e zeros variam bastante. Apesar disso, a resposta em frequência dos controladores obtidos nos 100 ensaios Monte Carlo é bastante próxima, tanto se comparada entre os 100 controladores quando comparadas à resposta em frequência de  $C_d(z)$ , conforme apresentado na Figura 19.

## 5.6 Considerações finais

Neste capítulo é apresentado um método de controle baseado em dados direto (sem necessidade de iterações) que consiste na identificação do controlador ótimo, o qual faz com que o sistema em malha fechada comporte-se como um modelo de referência escolhido previamente. Esse problema é solucionado por uma identificação do sistema  $y(t) = G(z, \theta)u(t) + H(z, \theta)e(t)$ , onde  $G(z, \theta)$  é reparametrizada em função do controlador  $C(z, \rho)$  que se quer identificar e de uma parte fixa, dependente do modelo de referência  $M(z)$ .

Também é apresentada uma análise do método VRFT, que é o método baseado em dados direto existente na literatura. Verifica-se que, quando os dados são afetados por ruído, a estimativa é não-polarizada somente se for utilizada uma variável instrumental, sendo necessário um ensaio adicional no processo, ou a obtenção de um modelo para a criação da mesma. Além disso, se o controlador ideal não pertencer à classe de controladores escolhida  $C_d(z) \notin \mathcal{C}$ , é necessário o uso de um filtro  $L(z)$  que aproxima a função custo que é minimizada  $J^{VR}(\rho)$  com a função que se quer realmente minimizar  $J^{MR}(\rho)$ . Esse filtro é baseado em uma aproximação cuja validade depende de quão longe o controlador estimado está do controlador ideal, conforme apresentado no Capítulo 2.

Por outro lado, o método de identificação do controlador ótimo proposto neste trabalho não necessita de variáveis instrumentais; a estimativa obtida é não-polarizada desde que a classe de modelos ( $\mathcal{C}$  para experimentos em malha aberta e  $\mathcal{M}_c$  para experimentos em malha fechada) seja escolhida adequadamente, ou seja, de forma que o sistema real

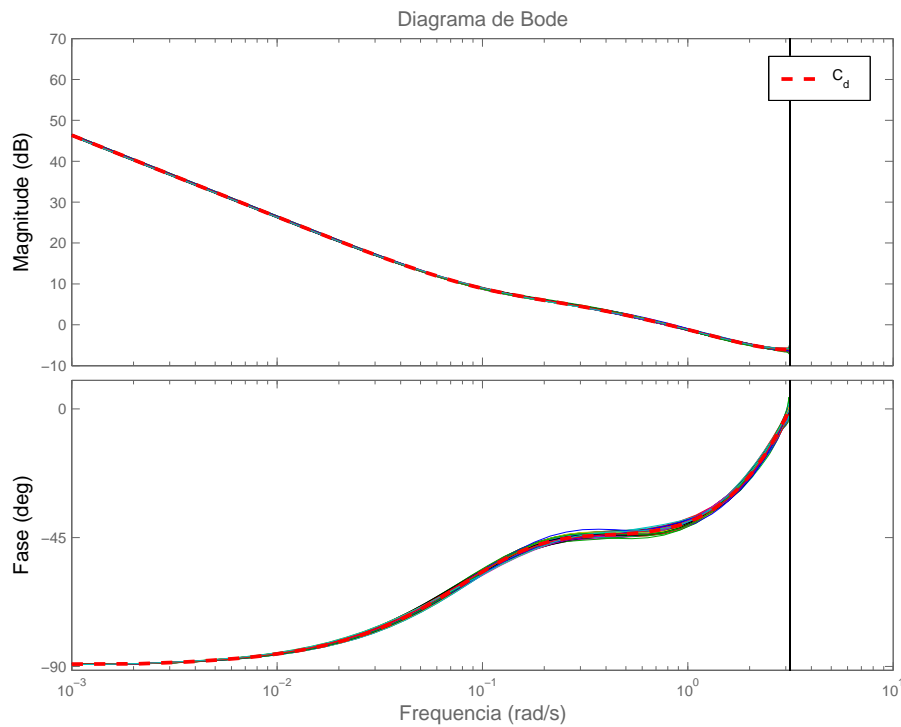


Figura 19: Diagramas de Bode dos controladores genéricos obtidos nos 100 ensaios Monte Carlo e do controlador ideal  $C_d(z)$  ( $C_d$ ).

pertença a essa classe. Essa é uma condição essencial em qualquer problema de identificação. Além disso, diferentemente do método VRFT, quando  $C_d(z) \notin \mathcal{C}$ , não é necessário projetar um filtro. O erro obtido do sistema em malha fechada em relação ao desempenho desejado é relacionado à escolha de um modelo incapaz de reproduzir o sistema real e não ao fato de se estar lidando com duas funções custo diferentes.

Outra vantagem do método proposto é que este permite escolhas mais amplas quanto à classe do controlador; é possível identificar controladores lineares nos parâmetros, controladores de ordem cheia (polos e zeros), controladores com alguns parâmetros fixos e outros livres, etc. Verificou-se que quanto maior o número de parâmetros a identificar, maior a covariância dos parâmetros; porém, as respostas em frequência de 100 ensaios Monte Carlo dada pelo diagrama de Bode (Figura 19) são muito próximas à resposta em frequência do controlador ideal. Verificou-se ainda que, os parâmetros relativos ao ganho e aos polo e zero mais lentos possuem uma variância menor, enquanto que os polos e zeros mais rápidos não são corretamente identificados.

Por fim, como a identificação do controlador ótimo nada mais é do que a identificação de  $G(z, \theta)$  reparametrizada, a aplicação de um projeto de experimento para melhorar a estimativa é direta. Alguns resultados dessa aplicação são apresentados no capítulo a seguir.

## 6 PROJETO DE EXPERIMENTO PARA IDENTIFICAÇÃO DO CONTROLADOR

### 6.1 Introdução

A grande vantagem de métodos diretos baseados em dados, como o VRFT e o método de identificação do controlador proposto neste trabalho, é o fato de que estes interferem menos na operação do processo em relação a métodos iterativos. Pensando nisso, o projeto de experimento é uma ferramenta interessante pelo fato de que permite a obtenção de um sinal de tamanho fixo que garanta que a estimativa obtida pertença a certo intervalo de confiança, de forma a minimizar o erro de variância da estimativa. Dessa forma, é possível fixar o tamanho do experimento  $N$ , por exemplo, e projetar o sinal  $u(t)$  com a menor energia possível (também com o intuito de minimizar as perturbações na operação), que garanta a qualidade da estimativa desejada.

Portanto, esse capítulo apresenta alguns exemplos onde são aplicados diferentes projetos de experimento para posterior uso do método de identificação do controlador ótimo com o sinal de entrada projetado, para garantir certa qualidade na estimativa da identificação.

### 6.2 Formulação do problema

Suponha que o método de identificação do controlador ótimo apresentado no Capítulo 5 seja utilizado para projetar um controlador. Suponha que seja realizado um experimento de tamanho limitado  $N$  no sistema real

$$y(t) = G_0(z)u(t) + H_0(z)e(t),$$

para obtenção dos dados  $\{u(t), y(t)\}$ .

O projeto do controlador ideal é a identificação de  $G(z, \theta)$  e  $H(z, \theta)$ , com  $G(z, \theta)$  reparametrizada em função do parâmetro do controlador  $\rho$ , tal que

$$G(z, \rho) = \tilde{C}(z, \tilde{\rho}) \frac{M(z)}{1 - M(z)}, \quad (253)$$

$$\triangleq \tilde{C}_v(z, \tilde{\rho}) \left[ \tilde{C}_f(z) \frac{M(z)}{1 - M(z)} \right], \quad (254)$$

onde  $\tilde{C}_v(z, \rho)$  é a parte do controlador dependente de  $\tilde{\rho}$  e  $\tilde{C}_f(z)$  é a parte fixa *a priori* (como um integrador para garantir erro de seguimento nulo em regime, por exemplo).

Deseja-se projetar um experimento em malha aberta com o objetivo de minimizar o erro de variância da estimativa (172). Conforme visto no Capítulo 5, esse erro é usualmente calculado através da matriz de covariância assintótica da estimativa, cuja inversa é dada por

$$P_{\theta}^{-1} = \left( \frac{1}{\sigma_e^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_u(e^{j\omega}, \theta_0) F_u(e^{j\omega}, \theta_0)^* \Phi_u(\omega) d\omega \right) + \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_e(e^{j\omega}, \theta_0) F_e(e^{j\omega}, \theta_0)^* d\omega \right), \quad (255)$$

onde

$$F_u(z, \theta_0) = H^{-1}(z, \xi_0) \tilde{C}_f(z) \frac{M(z)}{1 - M(z)} \frac{\partial \tilde{C}_v(z, \tilde{\rho})}{\partial \theta}, \quad (256)$$

$$F_e(z, \theta_0) = H^{-1}(z, \xi_0) \frac{\partial H(z, \xi)}{\partial \theta}. \quad (257)$$

Com essa formulação para o inverso da matriz de covariância, e parametrizando o espectro do sinal de entrada e consequentemente  $P_{\theta}^{-1}$  de forma finita, conforme apresentado na Seção 3.5.4 do Capítulo 3, pode-se aplicar o projeto de experimento proposto por (JANSSON, 2004) ao problema de identificação do controlador ótimo, com as devidas substituições. Diferentes métricas envolvendo a matriz de covariância da estimativa podem ser utilizadas no projeto de experimento.

A seguir, serão apresentadas duas métricas utilizadas: uma é a minimização do erro de variância de cada parâmetro do controlador e outra é a formulação para o problema que considera restrições de qualidade em regiões elipsoidais.

### 6.2.1 Minimização da variância do parâmetro

Neste caso, o objetivo do projeto de experimento é encontrar o sinal de entrada de duração fixa  $N$  e de menor energia, tal que  $\lambda_{\min}(P_{\theta}^{-1}) \geq \alpha_P I$  com certa probabilidade. Por exemplo, se  $\alpha_P = 10000$ , então os parâmetros identificados terão precisão igual ou melhor que

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_P}} = 0.01,$$

ou seja, os parâmetros estarão dentro de uma bola de raio 0.01 com probabilidade dada pela distribuição  $\chi^2$  (ver Tabela 2), conforme (61). O projeto de experimento é então formulado como:

$$\begin{aligned} \min_{\Phi_u} \quad & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_u(\omega) d\omega \\ \text{sujeito a} \quad & P_{\theta}^{-1} \geq \begin{bmatrix} \alpha_P & 0 \\ 0 & \alpha_P \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (258)$$

### 6.2.2 Restrições de qualidade em regiões elipsoidais

No caso da identificação do controlador ótimo, com  $G(z, \theta)$  definida por (253) e  $G_0(z)$  dada por

$$G_0(z) = \tilde{C}_d(z) \frac{M(z)}{1 - M(z)}, \quad (259)$$

onde  $\tilde{C}_d(z) \triangleq \frac{1}{C_d(z)}$ . Então, tem-se que (90) é dada por

$$\Delta(e^{j\omega}, \rho) = M(e^{j\omega}) \frac{\tilde{C}_d(e^{j\omega}) - \tilde{C}(e^{j\omega}, \tilde{\rho})}{\tilde{C}(e^{j\omega}, \tilde{\rho})}, \quad (260)$$

Note que essa métrica considera apenas o erro do controlador estimado, não importando o erro de  $H(z, \xi)$ . Em outras palavras, se o projeto de experimento é baseado nesta métrica, o mesmo contempla sinais que minimizam o erro de estimação do controlador e não do vetor de parâmetros completo (formado pelos parâmetros do controlador e do modelo do filtro do ruído).

Considere a medida do pior caso de  $\Delta$  em um conjunto de modelos pertencente a um intervalo de confiança:

$$\max_{\omega, \theta \in U} |\Delta|^2, \quad (261)$$

$$U = \{\theta | N(\theta - \theta_0)^T P_\theta^{-1}(\theta - \theta_0) \leq \chi\}. \quad (262)$$

Considerando essa medida é possível garantir que certa porcentagem (definida por  $\chi$ ) de todos modelos identificados satisfaçam essa restrição de qualidade. A formulação generalizada para essa medida é dada por

$$\begin{aligned} F(\omega, \rho) &\leq \gamma, \quad \forall \omega \text{ \& \; } \forall \eta \in \Upsilon, \\ \Upsilon &= \{\rho | (\rho - \rho_d)^T R(\rho - \rho_d) \leq 1\}, \end{aligned} \quad (263)$$

onde

$$F(\omega, \rho) = \frac{[W_n G(\rho) + X_n] * Y_n [W_n G(\rho) + X_n] + K_n}{[W_d G(\rho) + X_d] * Y_d [W_d G(\rho) + X_d] + K_d}. \quad (264)$$

No caso em que  $W_n = W_d = Y_d = 1$ ,  $X_n = -G_0$ ,  $Y_n = M$  e  $X_d = K_n = K_d = 0$ , tem-se que

$$F(\omega, \rho) = \frac{|G(\rho) - G_0|^2 |M|^2}{|G(\rho)|^2} = |\Delta|^2.$$

Note que  $U$  é um elipsoide em  $\theta$ , ou seja, que considera a qualidade da estimativa tanto de  $\tilde{C}(z, \tilde{\rho})$  quanto de  $H(z, \xi)$ . No entanto, como  $\Delta$  (260) é uma métrica apenas de  $\tilde{C}(z, \tilde{\rho})$ , utiliza-se o elipsoide  $\Upsilon$ , o qual considera somente a covariância do parâmetro  $\rho$ , dada por  $R$  ao invés de  $P_\theta^{-1}$ .

A medida de qualidade (263) é uma restrição da norma máxima de  $F(\omega, \rho)$  com respeito a todo  $\omega$  e para todo  $\rho$  no elipsoide  $\Upsilon$ . Porém, para este problema ser tratável, deve-se formulá-lo como um problema convexo. Para formular o problema como convexo, escreve-se  $G(\rho)$  como

$$G(\rho) = \frac{Z_N(z) \tilde{\rho}}{1 + Z_D(z) \tilde{\rho}} \quad (265)$$

onde  $\tilde{\rho}^T = [\tilde{a}_{c_1} \cdots \tilde{a}_{c_{n_a}} \tilde{b}_{c_1} \cdots \tilde{b}_{c_{n_b}}]$  é o vetor que parameteriza  $\tilde{C}_v(z, \tilde{\rho}) = \frac{B_c(z, \tilde{\rho})}{A_c(z, \tilde{\rho})}$  e

$$Z_N = z^{-n_k} \text{ num} \left( \tilde{C}_f(z) \frac{M(z)}{1 - M(z)} \right) [0 \cdots 0 \ 1 \ z^{-1} \cdots z^{-n_b+1}], \quad (266)$$

$$Z_D = \text{den} \left( \tilde{C}_f(z) \frac{M(z)}{1 - M(z)} \right) [z^{-1} \cdots z^{-n_a} \ 0 \cdots 0 \ 1]. \quad (267)$$

e  $n_k$  é o atraso.

Assim, utilizando os conceitos apresentados nos Lemas 3.3 e 3.4 e nos Teoremas 3.2 e 3.3, pode-se aplicar a formulação do projeto de experimento proposta por (JANSSON, 2004) para o caso da identificação do controlador ótimo.

O problema de otimização para o projeto de experimento do controlador ótimo é dado por

$$\begin{aligned}
 & \min_{Q_\tau, Q_\lambda, \tau_0, \dots, \tau_{M_\tau}, c_0, \dots, c_M} \alpha & (268) \\
 & \text{sujeito a} & K(Q_\tau, \{A_\tau, B_\tau, C_\tau, D_\tau\}) \geq 0 \\
 & & K(Q_\lambda, \{A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda\}) \geq 0 \\
 & & K(Q, \{A, B, C, D\}) \geq 0 \\
 & & Q_\tau^T = Q_\tau \\
 & & Q_\lambda^T = Q_\lambda \\
 & & Q^T = Q \\
 & & c_0 \leq \alpha,
 \end{aligned}$$

que é exatamente igual ao projeto de experimento apresentado no Capítulo 3 para o caso da identificação de  $G(z, \theta)$ ; porém, neste caso, utiliza-se  $G(z, \theta)$  reparametrizada de forma que apenas uma parte (relativa ao controlador ideal) deve ser identificada.

### 6.3 Exemplos ilustrativos

Nesta seção são apresentados alguns exemplos ilustrativos da aplicação de um projeto de experimento para ser utilizado com o método da identificação do controlador ótimo. É apresentado um exemplo considerando a minimização da variância de cada parâmetro da estimativa e dois exemplos (um para um controlador PI e outro para um controlador PID) considerando a minimização da métrica  $\Delta$  (260).

Note que para a realização do projeto de experimento, uma primeira estimativa do sistema ( $G_0(z)$  e  $H_0(z)$ ) seria necessária. No entanto, nos exemplos apresentados neste trabalho, o sistema real foi utilizado no lugar desta estimativa.

#### 6.3.1 Controlador PI - minimização da variância de cada parâmetro

Primeiramente é apresentado um projeto de experimento relativamente simples. Considere o sistema ARX, dado por

$$y(t) = \frac{0.5}{z - 0.9}u(t) + \frac{z}{z - 0.9}e(t), \quad (269)$$

onde  $e(t)$  é ruído branco com variância  $\sigma_e^2 = 0.1$ . Deseja-se identificar um controlador PI que faça com que o sistema em malha fechada comporte-se como um modelo de referência, dado por

$$M(z) = \frac{0.4}{z - 0.6}. \quad (270)$$

Assim, o controlador ideal para este problema é dado por

$$C_d(z) = \frac{0.8(z - 0.9)}{z - 1}. \quad (271)$$



O projeto de experimento para esse caso é descrito como a seguir. Seja o tamanho do experimento em malha aberta realizado em (269) igual a  $N = 5000$ . Deseja-se encontrar um sinal de entrada  $u(t)$  para que a identificação do controlador aplicando o método de identificação do controlador ótimo resulte em uma estimativa cuja precisão dos parâmetros seja igual ou melhor a 0.01. Dessa forma, aplica-se o projeto apresentado em (258), porém, para isso, é necessário parametrizar o espectro do sinal de entrada de forma finita. Nesse caso, o espectro foi parametrizado utilizando parametrização espectral de dimensão finita com base  $\mathcal{B}_k = e^{j\omega k}$ :

$$\Phi_u(\omega) = \sum_{k=0}^{19} c_k [e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}].$$

A restrição na covariância torna-se, conforme (87), em

$$P_\theta^{-1} = R_0 + \sum_{k=0}^{19} c_k B_k^P(\theta_0) > I * 10000. \quad (272)$$

Novamente para garantir a positividade do espectro é utilizado o Lema KYP. Como a parte real positiva é

$$\Psi(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{19} c_k e^{j\omega k}$$

uma realização deste sinal pode ser feita com

$$A = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 18} & 0 \\ I_{18} & 0_{18 \times 1} \end{bmatrix} \quad (273)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (274)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{19} \end{bmatrix} \quad (275)$$

$$D = c_0 \quad (276)$$

e a restrição de positividade pode ser definida por

$$K(Q, A, B, C, D) > 0$$

com  $Q = Q^T \in \mathbb{R}$ .

A parametrização da restrição em energia torna-se então

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_u(\omega) d\omega = c_0 < \alpha$$

Portanto o problema a ser solucionado é simplificado para

$$\begin{aligned} & \min_{c_0, \dots, c_{19}, Q} c_0 \\ & \text{sujeito a} \\ & R_0 + \sum_{k=0}^{19} c_k B_k^P(\theta_0) > I * 10000 \\ & K(Q, A, B, C, D) > 0 \end{aligned}$$

Solucionando este problema através do *LMI toolbox* do Matlab, o espectro do sinal  $u(t)$  é obtido, cujos coeficientes  $c_k$  são dados por

$$[c_0 \cdots c_{19}] = [3.7613 \quad -0.2674 \quad -0.2184 \quad -0.1779 \quad -0.1445 \quad -0.1169 \quad -0.0943 \\ -0.0757 \quad -0.0604 \quad -0.0479 \quad -0.0377 \quad -0.0295 \quad -0.0228 \quad -0.0173 \\ -0.0130 \quad -0.0095 \quad -0.0066 \quad -0.0044 \quad -0.0026 \quad -0.0011],$$

e a magnitude do espectro do sinal no espaço da frequência  $\Phi_u(\omega)$  é então apresentado na Figura 20. Note que o sinal é do tipo passa-alta, o que pode comprometer os atuadores caso esse sinal seja aplicado na prática. A aplicação de um lema KYP modificado apresentado em (IWASAKI; MEINSMA; FU, 2000), o qual permite especificar a faixa de frequência do sinal, poderia ser uma solução para esse tipo de problema.

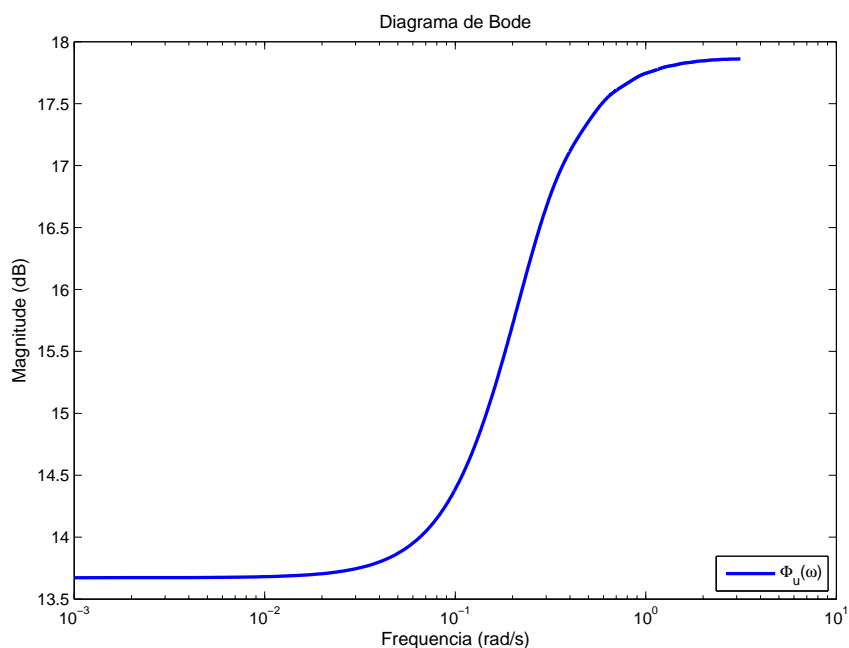


Figura 20: Magnitude do espectro do sinal de entrada obtido no projeto de experimento que garante uma precisão de 0.01 aos parâmetros identificados com o método de identificação do controlador ótimo.

Assim, o sinal formado por ruído branco filtrado pelo filtro FIR, cujo espectro é dado pelos coeficientes  $c_0 \cdots c_{19}$  encontrados, foi aplicado ao sistema (269) e foram realizados 1000 ensaios Monte Carlo. O resultado destes ensaios é apresentado na Figura 21. O valor médio do parâmetro  $\tilde{\rho}$  obtido foi

$$\hat{\rho}_m = [1.2499 \quad -0.9001]^T.$$

Através destes resultados, verifica-se que o sinal de entrada obtido com o projeto de experimento realmente proporciona a variância esperada de cada parâmetro do controlador. Uma vez que a identificação é realizada para um problema pertencente à classe de modelos escolhida (o sistema é ARX e a classe de modelos escolhida é tal que  $\mathcal{S}_c \in \mathcal{M}_c$ ), então minimizar a variância de cada parâmetro faz sentido.

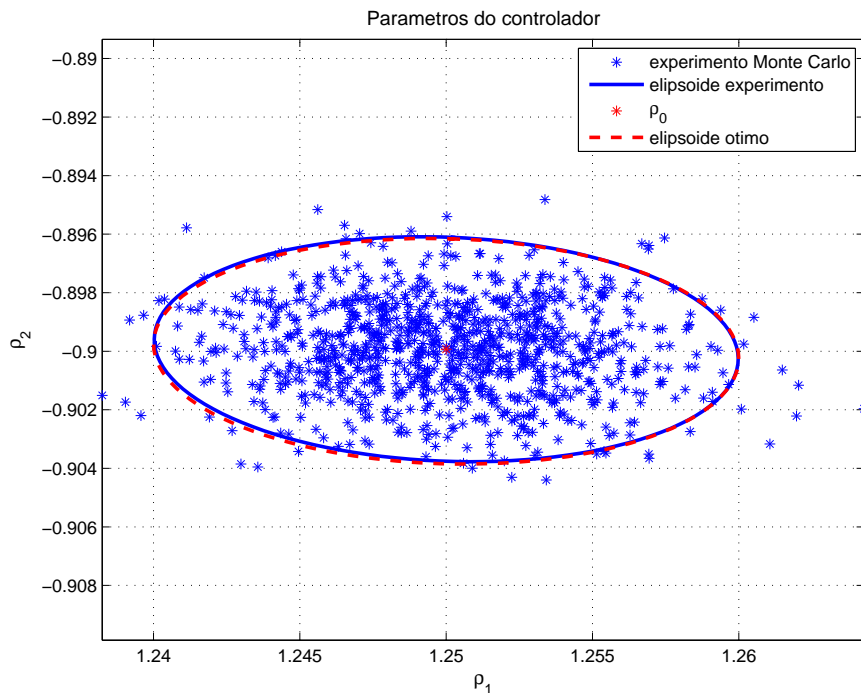


Figura 21: Asteriscos: parâmetros do controlador estimados pelo método de identificação do controlador ótimo para o sistema (269) obtidos através de 1000 ensaios Monte Carlo; Elipse vermelha: elipse projetada para intervalo de 95% de confiança; Elipse azul: intervalo de 95% de confiança da estimativa de  $\hat{\rho}$  obtida aplicando-se o sinal projetado, centrada em  $\hat{\rho}_m$ , representado por um ponto vermelho.

### 6.3.2 Controlador PI - minimização da métrica $\Delta$ considerando regiões elipsoidais

Considere agora o projeto de controle apresentado na Seção 5.5.1.2. Nesse problema é identificado um controlador PI para um sistema de estrutura Box-Jenkins.

O objetivo do projeto de experimento é encontrar o sinal de entrada de duração fixa  $N = 500$  amostras, de menor energia, tal que o controlador identificado respeite a restrição (260). O modelo de referência desejado é descrito por

$$M(z) = \frac{(1 - 0.6)z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}}.$$

O problema pode ser expressado por

$$\min_{\Phi_u} \alpha \quad (277)$$

$$\text{sujeito a} \quad \left\| M \frac{C_d - C(\rho)}{C(\rho)} \right\|^2 \leq 0.1^2 \quad \forall \omega \quad (278)$$

$$(\rho - \rho_d)^T P_N^{-1} (\rho - \rho_d) \leq 5.99 \quad (279)$$

$$\Phi_u \geq 0 \quad \forall \omega \quad (280)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_u(\omega) d\omega \leq \alpha. \quad (281)$$

Para escrever as restrições em forma LMI, parametriza-se o espectro do sinal de entrada utilizando parametrização espectral de dimensão finita com base  $\mathcal{B}_k = e^{j\omega k}$  com

$M = 20$ :

$$\Phi_u(\omega) = \sum_{k=0}^{19} c_k [e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}]$$

Novamente, para garantir a positividade do espectro é utilizado o Lema KYP. Como a parte real positiva é dada por

$$\Psi(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{19} c_k e^{j\omega k},$$

uma realização deste sinal pode ser obtida com

$$A = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 18} & 0 \\ I_{18} & 0_{18 \times 1} \end{bmatrix} \quad (282)$$

$$B = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T \quad (283)$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{19}] \quad (284)$$

$$D = c_0 \quad (285)$$

e a restrição de positividade pode ser definida por

$$K(Q, A, B, C, D) > 0$$

com  $Q = Q^T \in \mathbb{R}$ .

A parametrização da restrição em energia torna-se então

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_u(\omega) d\omega = c_0.$$

Utilizando o Teorema 3.3, pode-se escrever a condição de qualidade com restrição em regiões elipsoidais na forma de LMI, conforme (264). Para tornar a dimensão do problema finita,  $\tau(\omega)$  é parametrizado linearmente. Neste exemplo foi utilizada a seguinte parametrização

$$\tau(\omega) = \sum_{k=0}^{14} \tau_k (e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}).$$

Sabe-se que, quanto maior o número de coeficientes de  $\tau(\omega)$ , menos conservadora será a solução do problema (JANSSON, 2004). Portanto, o problema a ser solucionado é simplificado para

$$\begin{aligned} & \min_{c_0, \dots, c_{19}, \tau_0, \dots, \tau_{14}, Q, Q_\tau, Q_\lambda} c_0 \\ & \text{sujeito a} \\ & K(Q, A, B, C, D) > 0 \\ & K(Q_\tau, A_\tau, B_\tau, C_\tau, D_\tau) > 0 \\ & K(Q_\lambda, A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda) > 0 \end{aligned}$$

Solucionando-se esse problema de otimização, obtêm-se

$$\begin{aligned} [c_0 \ \cdots \ c_{19}] = & [0.0574 \ 0.1133 \ 0.1099 \ 0.1049 \ 0.0983 \ 0.0905 \ 0.0818 \\ & 0.0725 \ 0.0630 \ 0.0536 \ 0.0445 \ 0.0360 \ 0.0282 \ 0.0213 \\ & 0.0155 \ 0.0106 \ 0.0068 \ 0.0039 \ 0.0019 \ 0.0007], \end{aligned}$$

$$[\tau_0 \cdots \tau_{14}] = 10^4 * \begin{bmatrix} 0.9128 & 1.6831 & 1.5330 & 1.3830 & 1.2372 \\ 1.0977 & 0.9655 & 0.8409 & 0.7237 & 0.6135 \\ 0.5094 & 0.4103 & 0.3143 & 0.2182 & 0.1165 \end{bmatrix},$$

e a magnitude do espectro do sinal no espaço da frequência  $\Phi_u(\omega)$  é então apresentado na Figura 22. Novamente, o sinal formado por ruído branco filtrado pelo filtro FIR, cujo espectro é dado pelos coeficientes  $c_0 \cdots c_{19}$  encontrados, foi aplicado ao sistema (269) e foram realizados 1000 ensaios Monte Carlo. O resultado destes ensaios é apresentado na Figura 23. O valor médio do parâmetro  $\theta$  obtido foi

$$\hat{\theta}_m = [1.2524 \quad -0.8997 \quad -0.2945]^T.$$

Note que, apesar do projeto de experimento garantir uma certa qualidade ao parâmetro  $\rho$ , relativo ao controlador, quando o método de identificação do controlador ótimo é aplicado, identifica-se também o parâmetro relativo a  $H(z, \xi)$ .

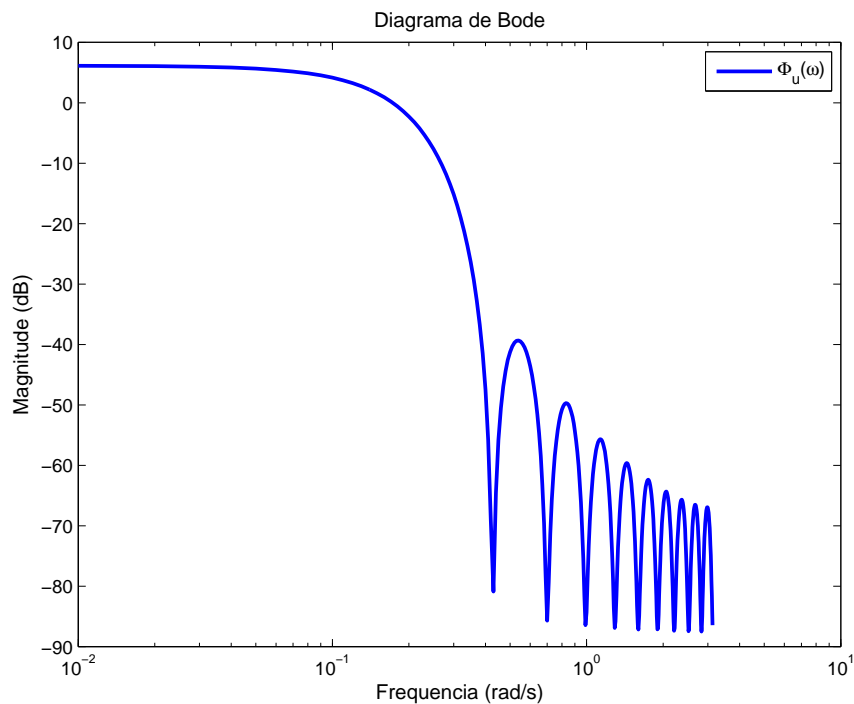


Figura 22: Magnitude do espectro do sinal de entrada obtido no projeto de experimento do controlador PI que garante que 95% das estimativas estão dentro da restrição  $\gamma = 0.1$ .

A Figura 23 apresenta a restrição que se quer respeitar, dada pela curva de nível  $\gamma = 0.1$  e os ensaios (dentro dos 1000 realizados) que resultaram em estimativas dentro e fora dessa restrição. Note que, apesar do projeto garantir que 95% das estimativas respeitem a restrição, os resultados obtidos são mais conservadores: estima-se que esse conservadorismo seja dependente do número de parâmetros de  $\tau(\omega)$ . Porém, realizar essa variável com um número maior de parâmetros foi inviável neste caso.

### 6.3.3 Controlador PID - minimização da métrica $\Delta$ considerando regiões elipsoidais

Por fim, apresenta-se aqui um projeto de experimento que considera a minimização de  $\Delta$  considerando a identificação de um controlador PID para um sistema com estrutura

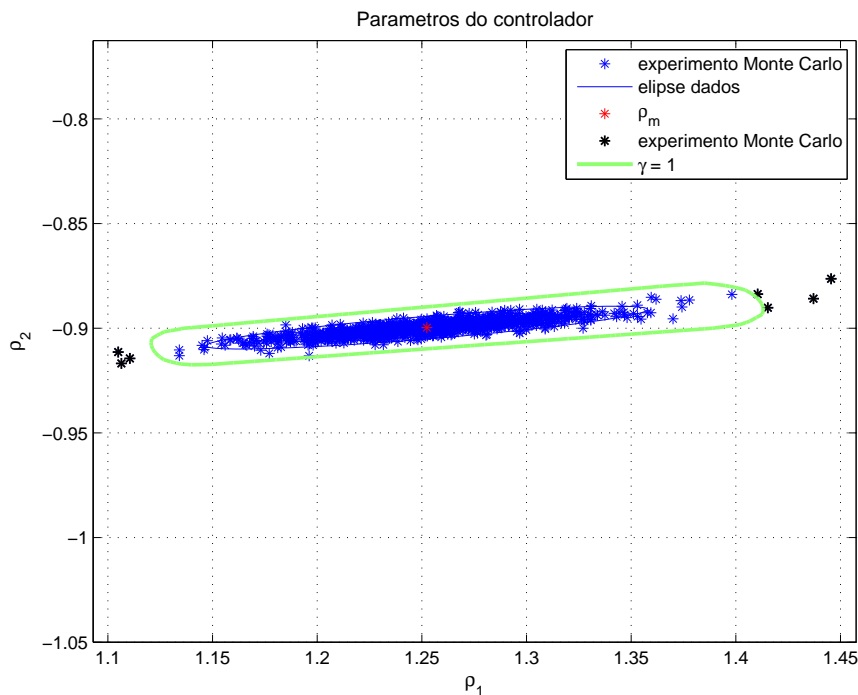


Figura 23: Asteriscos: parâmetros do controlador estimados pelo método de identificação do controlador ótimo para o sistema (222) obtidos através de 1000 ensaios Monte Carlo; asteriscos azuis: parâmetros que respeitam a restrição imposta; asteriscos pretos: parâmetros que não respeitam a restrição. Elipse: intervalo de 95% de confiança da estimativa de  $\hat{\rho}$  obtida aplicando-se o sinal projetado, centrada em  $\hat{\rho}_m$ , representado por um ponto vermelho. Curva de nível  $\gamma = 0.1$ .

ARX. Este é o problema apresentado na Seção 5.5.1.1.

Novamente, o objetivo do projeto de experimento é encontrar o sinal de entrada de duração fixa  $N = 500$ , de menor energia, tal que o controlador identificado respeite a restrição (260). O modelo de referência desejado é descrito por

$$M(z) = \frac{(1 - 0.6)z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}}.$$

O problema, nesse caso, pode ser expressado por

$$\min_{\Phi_u} \quad \alpha \quad (286)$$

$$\text{sujeito a} \quad \left\| M \frac{C_d - C(\rho)}{C(\rho)} \right\|^2 \leq 0.1^2 \quad \forall \omega \quad (287)$$

$$(\rho - \rho_d)^T P_N^{-1} (\rho - \rho_d) \leq 7.815 \quad (288)$$

$$\Phi_u \geq 0 \quad \forall \omega \quad (289)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_u(\omega) d\omega \leq \alpha. \quad (290)$$

Nesse caso, parametriza-se o espectro do sinal de entrada com  $M = 10$  e  $\tau(\omega)$  com  $M_\tau = 10$ . Novamente, a utilização de  $M_\tau$  maior com o objetivo de tornar a solução

menos conservadora tornou-se computacionalmente inviável. Solucionado o problema de otimização, foram obtidos

$$[c_0 \cdots c_9] = [0.3813 \ 0.5479 \ 0.3565 \ 0.1429 \ -0.0461 \\ -0.1760 \ -0.2313 \ -0.2164 \ -0.1525 \ -0.0702],$$

$$[\tau_0 \cdots \tau_9] = 10^5 * [0.8527 \ 1.6297 \ 1.4583 \ 1.2312 \ 0.9786 \\ 0.7244 \ 0.4883 \ 0.2871 \ 0.1343 \ 0.0389].$$

A magnitude do espectro do sinal no espaço da frequência  $\Phi_u(\omega)$  é apresentado na Figura 24. Novamente, o sinal formado por ruído branco filtrado pelo filtro FIR, cujo espectro é dado pelos coeficientes  $c_0 \cdots c_9$  encontrados, foi aplicado ao sistema (215) e foram realizados 1000 ensaios Monte Carlo. O resultado destes ensaios é apresentado na Figura 25. O valor médio do parâmetro  $\tilde{\rho}$  obtido foi

$$\hat{\rho}_m = [2.4994 \ -1.6999 \ 0.7199]^T.$$

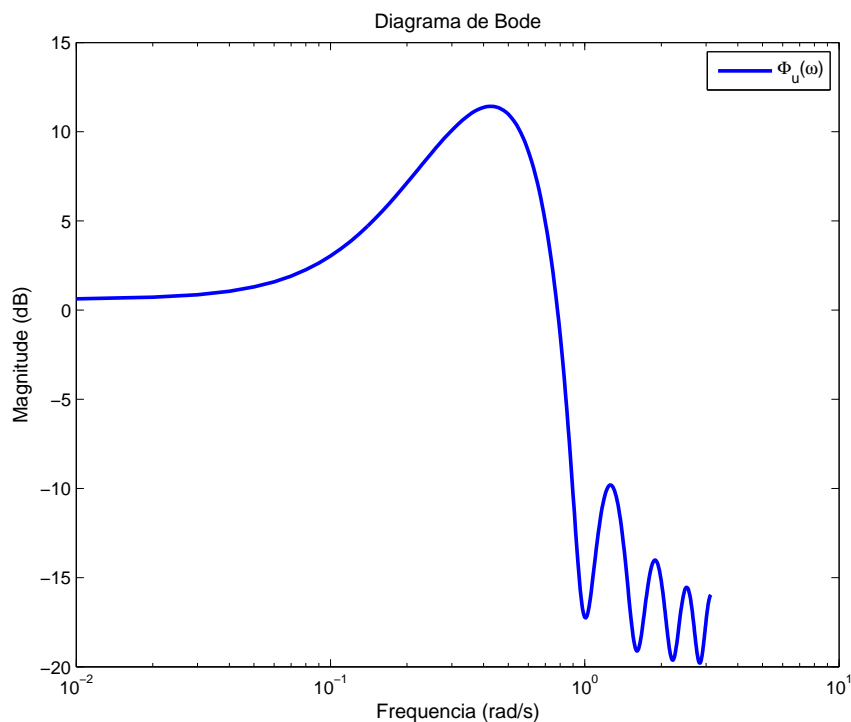


Figura 24: Magnitude do espectro do sinal de entrada obtido no projeto de experimento do controlador PID que garante que 95% das estimativas estão dentro da restrição  $\gamma = 0.1$ .

Por fim, a Figura 25 os parâmetros do controlador PID obtidos nos 1000 ensaios Monte Carlo realizados. Note que, apesar do projeto garantir que 95% das estimativas respeitem a restrição, os resultados obtidos são mais conservadores: 100% respeitou essa restrição, pois não existem asteriscos pretos, diferentemente do caso anterior (ver Figura 23). Note que para o projeto do experimento neste caso, o número de coeficientes de  $\tau(\omega)$  é ainda menor que no caso anterior (controlador PI).

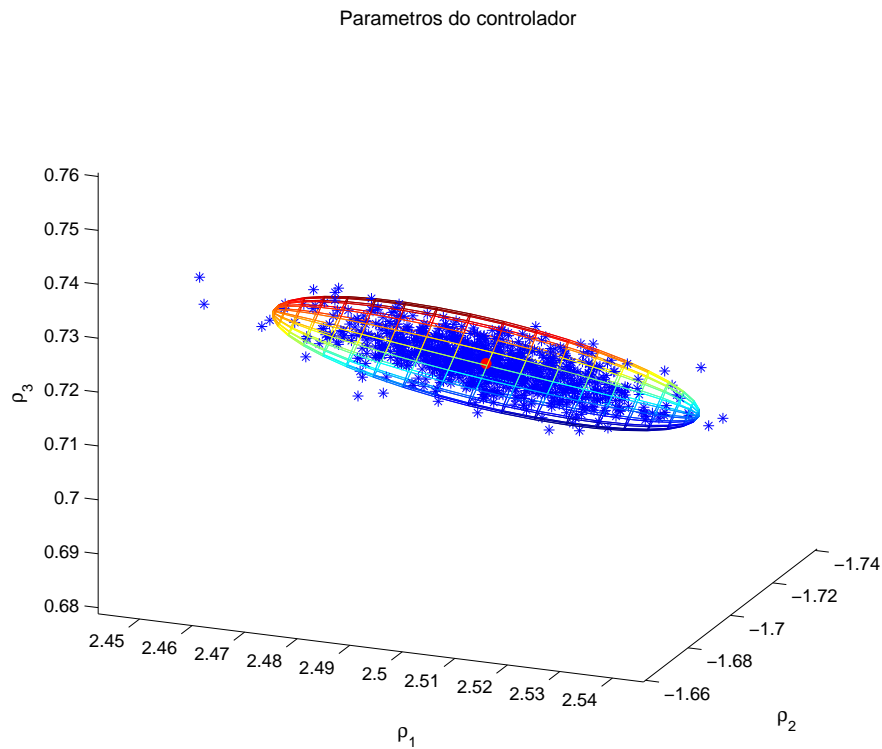


Figura 25: Asteriscos: parâmetros do controlador estimados pelo método de identificação do controlador ótimo para um sistema de estrutura BJ obtidos através de 1000 ensaios Monte Carlo. Elipsoide: intervalo de 95% de confiança da estimativa de  $\hat{\rho}$ , centrada em  $\hat{\rho}_m$  representado por um ponto vermelho.

## 6.4 Considerações finais

Através dos exemplos de aplicação de um projeto de experimento voltado ao método de identificação do controlador ótimo apresentado no Capítulo 5, verificou-se que o projeto de experimento é uma forma viável de garantir qualidade à estimativa, dada por certas métricas, principalmente em função da matriz de covariância da estimativa  $P_\theta$ .

Além disso, verificou-se que algumas soluções ainda são um pouco conservadoras (ou seja, resultam em sinais com energia maior que a necessária) devido à dificuldade de processamento computacional, principalmente em se tratando da minimização de  $\Delta$ , norma que garante certa robustez ao projeto.



## 7 CONCLUSÕES GERAIS

Neste trabalho, foram apresentadas algumas contribuições aos métodos baseados em dados que utilizam apenas um experimento. Essas contribuições visam a melhor aceitação destes métodos no meio industrial, de forma que sua aplicação seja segura, ou seja, que o resultado obtido com o controlador em malha fechada não seja muito diferente do esperado. Pode-se dizer que este trabalho apresentou duas grandes contribuições nessa área.

A primeira contribuição foi a adaptação do método VRFT de forma que este possa ser utilizado em processos de fase não-mínima. Constatou-se que, na sua formulação original, o método VRFT, quando aplicado a processos de fase não-mínima, proporciona um desempenho inadequado ao sistema, podendo inclusive levá-lo à instabilidade, o que seria um resultado desastroso. Porém, se aplicado o método proposto, o qual minimiza um critério flexível, é possível estimar os zeros de fase não-mínima do processo. Então, esses zeros são incluídos no modelo de referência e o projeto do controlador através do método VRFT é mais seguro. Além disso, todo esse procedimento é realizado com dados de apenas um experimento (ou dois no caso de sistemas com ruído, para obtenção da variável instrumental), mantendo a característica do método de perturbar pouco o sistema se este estiver em operação.

A segunda grande contribuição desta tese foi escrever o problema de controle baseado em dados como um problema de identificação do controlador ótimo. Assim, quando o sistema é afetado por ruído, o que acontece em praticamente todos os processos reais, as condições necessárias para que a estimativa seja não-polarizada são claramente verificadas. Nesse caso, não é necessário utilizar variáveis instrumentais, como no caso do método VRFT. Outra vantagem é a possibilidade de estimar controladores de estruturas variadas, não apenas lineares nos parâmetros. Além disso, quando o sistema a ser identificado não pertence à classe de modelos escolhida, o método de identificação do controlador ótimo não necessita de um filtro como no caso do método VRFT; apenas identifica um modelo aproximado do ideal, como no caso de identificação de sistemas.

Para finalizar, pelo fato do método de controle ser descrito como um método de identificação do controlador, é possível aplicar diversas ferramentas desenvolvidas para identificação com o intuito de melhorar as propriedades estatísticas da estimativa. Uma dessas ferramentas é o projeto do experimento. Assim, o problema de projeto de experimento com solução via restrições LMI foi estendido ao método de identificação do controlador ótimo. O sinal de entrada do experimento é projetado com o objetivo de minimizar a variância da estimativa ou garantir que alguma norma de robustez seja satisfeita.

A partir dos resultados obtidos neste trabalho, uma extensão interessante seria verificar a possibilidade de unir as duas contribuições, ou seja, incluir um modelo de referência flexível ao método de identificação do controlador ótimo. Dessa forma, seria possível

projetar controladores para sistemas de fase não-mínima e afetadas por ruído utilizando apenas um experimento para obtenção dos dados.

No caso da aplicação de projeto de experimento para o método de identificação do controlador, deve-se verificar a possibilidade de aplicação de outras métricas para minimizar a variância da estimativa, cujos resultados sejam menos conservadores que os resultados obtidos com a formulação para respeitar a restrição  $\Delta \leq \gamma$ .

Além disso, no caso do método de identificação do controlador, é necessário analisar matematicamente o caso em que o sistema não pertence à classe de modelos escolhida ( $\mathcal{S}_c \notin \mathcal{M}_c$ ). Assim, talvez seja possível prever o que acontece com o desempenho do sistema nesse caso e verificar as condições para minimizar os erros de variância e de *polarização*. Teoricamente, uma solução possível seria projetar um experimento cujo objetivo é minimizar esses dois erros. Atualmente, o projeto de experimento apresentado na literatura é formulado somente para o caso em que o sistema pertence à classe de modelos escolhida, e portanto não considera o erro de polarização.

## REFERÊNCIAS

ANDERSON, B.; MOORE, J. **Linear Optimal Control**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1971.

ÅSTRÖM, K. J. **Introduction to Stochastic Control Theory**. New York, NY: Academic Press, 1970.

ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. **PID Controllers: theory, design and tuning**. 2.ed. North Carolina, USA: Instrument Society of America, 1995.

ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. On self tuning regulators. **Automatica**, Tarrytown, NY, USA, v.9, n.2, p.185 – 199, 1973.

ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. **Adaptive Control**. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1989.

BARENTHIN, M. **On Input Design in System Identification for Control**. 2006. Tese (Doutorado) — Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden. 2006.

BAZANELLA, A. S.; GEVERS, M.; MISKOVIC, L.; ANDERSON, B. D. O. Iterative minimization of  $H_2$  control performance criteria. **Automatica**, Tarrytown, NY, USA, v.44, n.10, p.2549–2559, 2008.

BAZANELLA, A. S.; GOMES DA SILVA Jr, J. M. **Sistemas de Controle: princípios e métodos de projeto**. Porto Alegre, Brasil: UFRGS Editora, 2006.

BITMEAD, R. R.; GEVERS, M.; WERTZ, V. **Adaptive Optimal Control - The Thinking Man's GPC**. New York, NY: Prentice-Hall International, 1990.

BOMBOIS, X.; GEVERS, M.; SCORLETTI, G. A measure of robust stability for an identified set of parametrized transfer functions. **Transactions on Automatic Control**, Brookline, USA, v.45, n.11, p.2141–2145, 2000.

BOMBOIS, X.; GEVERS, M.; SCORLETTI, G.; ANDERSON, B. D. O. Robustness analysis tools for an uncertainty set obtained by prediction error identification. **Automatica**, Tarrytown, NY, USA, v.37, n.10, p.1629–1636, Oct 2001.

BOMBOIS, X.; SCORLETTI, G.; GEVERS, M.; HILDEBRAND, R.; HOF, P. Van den. Cheapest open-loop identification for control. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 2004, The Bahamas. **Proceedings...** New York; USA: IEEE, 2004. p.382–387. CD-ROM.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System & Control Theory**. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematic, 1994.

CAMPESTRINI, L.; GEVERS, M.; BAZANELLA, A. S. Virtual reference feedback tuning for non minimum phase plants. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2009, Budapest, Hungary. **Proceedings...** Paris; France: EUCA, 2009. v.1, p.1955–1960.

CAMPI, M. C.; LECCHINI, A.; SAVARESI, S. An application of the virtual reference feedback tuning method to a benchmark problem. **European Journal of Control**, London, UK, v.9, p.66–76, 2003.

CAMPI, M.; LECCHINI, A.; SAVARESI, S. Virtual reference feedback tuning (VRFT): a direct method for the design of feedback controllers. **Automatica**, Tarrytown, NY, USA, v.38, p.1337–1346, 2002.

CAMPI, M.; SAVARESI, S. Direct nonlinear control tuning design: the virtual reference feedback tuning approach. **Transactions on Automatic Control**, Brookline, USA, v.51, p.14–26, 2006.

CAUCHY, A. L. Méthode générale pour la résolution des systemes d'equations simultanées. **Comptes Rendus De L'academie Des Sciences**, Paris, v.25, p.536–538, 1847.

CHEN, C. **Linear System Theory and Design**. 2.ed. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston, 1970.

ECKHARD, D. **Projeto de Controladores Baseado em Dados: convergência dos métodos iterativos**. 2008. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil. 2008.

ECKHARD, D.; CAMPESTRINI, L.; BERGEL, M.; BAZANELLA, A. S. Data-based control design for a process class with guaranteed convergence to the globally optimum controller. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2009, Budapest, Hungary. **Proceedings...** Paris; France: EUCA, 2009. v.1, p.993–998.

GAMBOA-TORRES, A. E.; FLORES-TLACUAHUAC, A. Effect of process modeling on the nonlinear behaviour of a CSTR reactions  $A \rightarrow B \rightarrow C$ . **Chemical Engineering Journal**, Amsterdam, Netherlands, v.77, n.3, p.153–164, 2000.

GEVERS, M. Identification for control. In: SYMPOSIUM ON ADAPTIVE CONTROL AND SIGNAL PROCESSING, 5., 1995, Budapest, Hungary. **Proceedings...** Tarrytown; NY: IFAC, 1995. p.1–12.

GEVERS, M. Identification for control: from the early achievements to the revival of experiment design. **European Journal of Control**, London, UK, v.11, p.1–18, 2005.

GEVERS, M. A personal view of the development of system identification. **Control Systems Magazine**, Piscataway, USA, v.26, n.6, p.93–105, 2006.

GEVERS, M.; BOMBOIS, X. Input design: from open-loop to control-oriented design. In: SYMPOSIUM ON SYSTEM IDENTIFICATION, 14., 2006, Newcastle, Australia. **Proceedings...** Tarrytown; NY: IFAC, 2006. p.1329–1334. CD-ROM.

GEVERS, M.; BOMBOIS, X.; CODRONS, B.; SCORLETTI, G.; ANDERSON, B. D. O. Model validation for control and controller validation in a prediction error identification framework - part I: theory. **Automatica**, Tarrytown, NY, USA, v.39, n.3, p.403–415, Mar 2003.

GOODWIN, G. C.; GRAEBE, S. F.; SALGADO, M. E. **Control System Design**. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 1984.

GOODWIN, G. C.; SIN, K. S. **Adaptive Filtering Prediction and Control**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1984.

HILDEBRAND, R.; GEVERS, M. Identification for control: optimal input design with respect to a worst-case  $\nu$ -gap cost function. In: WORKSHOP ON SYSTEM IDENTIFICATION, 10., 2001, Cambridge, UK. **Proceedings...** Sweden: ERNSI, 2001.

HJALMARSSON, H. Iterative feedback tuning - an overview. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, Glasgow, UK, v.16, n.5, p.373–395, 2002.

HJALMARSSON, H. From experiment design to closed-loop control. **Automatica**, Tarrytown, NY, USA, v.41, p.393–438, 2005.

HJALMARSSON, H.; GEVERS, M.; GUNNARSSON, S.; LEQUIN, O. Iterative feedback tuning: theory and applications. **Control Systems Magazine**, Piscataway, USA, v.18, n.4, p.26–41, 1998.

HJALMARSSON, H.; GUNNARSSON, S.; GEVERS, M. A convergent iterative restricted complexity control design scheme. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, Orlando, Florida. **Proceedings...** New York; USA: IEEE, 1994. p.1735–1740.

IWASAKI, T.; MEINSMA, G.; FU, M. Generalized  $S$ -procedure and finite frequency KYP lemma. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, USA, v.6, n.2-3, p.305–320, 2000.

JANSSON, H. **Experiment Design with Applications in Identification for Control**. 2004. Tese (Doutorado) — Royal Institute of Technology (KTH). 2004.

JANSSON, H.; HJALMARSSON, H. Mixed  $H_\infty$  and  $H_2$  input design for identification. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 43., 2004, The Bahamas. **Proceedings...** New York; USA: IEEE, 2004. p.388–393. CD-ROM.

JANSSON, H.; HJALMARSSON, H. Convex computation of worst-case criteria with applications in identification and control. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 43., 2004, The Bahamas. **Proceedings...** New York; USA: IEEE, 2004. p.3132–3137. CD-ROM.

KAMMER, L.; BITMEAD, R.; BARTLETT, P. Direct iterative tuning via spectral analysis. **Automatica**, Tarrytown; NY, v.36, n.9, p.1301–1307, Sep 2000.

- KARIMI, A.; MISKOVIĆ, L.; BONVIN, D. Convergence analysis of an iterative correlation-based controller tuning method. In: IFAC WORLD CONGRESS, 15, 2002, Barcelona, Spain. **Anais...** Tarrytown; NY: IFAC, 2002. p.413–418.
- KARIMI, A.; MISKOVIĆ, L.; BONVIN, D. Iterative correlation-based controller tuning: application to a magnetic suspension system. **Control Engineering Practice**, Tarrytown; NY, v.11, n.9, p.1069–1078, 2003.
- KARIMI, A.; MISKOVIĆ, L.; BONVIN, D. Correlation-based tuning of a restricted-complexity controller for an active suspension system. **European Journal of Control**, London, UK, v.9, n.1, p.1177–1182, 2003.
- KARIMI, A.; MISKOVIĆ, L.; BONVIN, D. Iterative correlation-based controller tuning. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, Glasgow, UK, v.18, n.8, p.645–664, 2004.
- KHALIL, H. **Nonlinear Systems**. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1992.
- LECCHINI, A.; CAMPI, M.; SAVARESI, S. Virtual reference feedback tuning for two degree of freedom controllers. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, Glasgow, UK, v.16, p.355–371, 2002.
- LECCHINI, A.; GEVERS, M. On iterative feedback tuning for non-minimum phase plants. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 41., 2002, Las Vegas, USA. **Proceedings...** New York; USA: IEEE, 2002. p.4658–4663. CD-ROM.
- LINDQVIST, K.; HJALMARSSON, H. Identification for control: adaptive input design using convex optimization. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 40., 2001, Orlando, Florida. **Proceedings...** New York; USA: IEEE, 2001. p.4326–4331. CD-ROM.
- LJUNG, L. **System Identification: theory for the user**. 2.ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1999.
- MÅRTENSSON, J. **Geometric Analysis of Stochastic Model Errors in System Identification**. 2007. Tese (Doutorado) — Royal Institute of Technology (KTH). 2007.
- MÅRTENSSON, J.; HJALMARSSON, H. Variance error quantifications for identified poles and zeros. **Automatica**, Tarrytown, NY, USA, v.45, n.11, p.2512 – 2525, Nov 2009.
- MEHRA, R. K. Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems - survey and new results. **Transactions on Automatic Control**, Brookline, USA, v.AC-19, n.6, p.753–768, Dec 1974.
- MORARI, M.; ZAFIRIOU, E. **Robust Process Control**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- NAKAMOTO, M. An application of the virtual reference feedback tuning for an MIMO process. In: SICE ANNUAL CONFERENCE, 2005, Sapporo, Japan. **Proceedings...** New York; USA: IEEE, 2005. v.3, p.2208 – 2213.

- PINTELON, R.; SCHOUKENS, J. **System Identification: a frequency domain approach**. New Jersey: IEEE Press, 2001.
- POLAK, E. An historical survey of computational methods in optimal control. **SIAM review**, Philadelphia, USA, v.15, n.2, p.553–584, 1973.
- PROCHAZKA, H.; GEVERS, M.; ANDERSON, B. D. O.; FERREIRA, C. Iterative feedback tuning for robust controller design and optimization. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL - EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2005, Seville, Spain. **Proceedings...** New York; USA: IEEE, 2005. p.3602–3607.
- QUEINNEC, I.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Anti-windup design for aircraft flight control. In: COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEM DESIGN, INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INTELLIGENT CONTROL, 2006, Munich, Germany. **Proceedings...** New York; USA: IEEE, 2006. p.2541–2546.
- ROJAS, C. R.; WELSH, J. S.; GOODWIN, G. C.; FEUER, A. Robust optimal experiment design for system identification. **Automatica**, Tarrytown, NY, USA, v.43, p.993–1008, 2007.
- ROSA, A. da; CAMPELLO, R.; AMARAL, W. Exact Search Directions for Optimization of Linear and Nonlinear Models Based on Generalized Orthonormal Functions. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, [S.l.], v.54, n.12, p.2757–2772, dec. 2009.
- SALA, A.; ESPARZA, A. Extensions to “virtual reference feedback tuning: a direct method for the design of feedback controllers”. **Automatica**, Tarrytown, NY, USA, v.41, p.1473–1476, 2005.
- SALA, A.; ESPARZA, A. Virtual reference feedback tuning in restricted complexity controller design of non-minimum phase systems. In: TRIENNIAL WORLD CONGRESS, 16., 2005, Prague, Czech Republic. **Proceedings...** Tarrytown: NY: IFAC, 2005. p.235–240.
- SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. **System Identification**. Hemel Hempstead, Hertfordshire: Prentice-Hall International, 1989.
- SOLARI, G. E. **Iterative Model-free Controller Tuning**. 2005. Tese (Doutorado) — Université Catholique de Louvain-la-Neuve (UCL), Louvain-la-Neuve, Belgium. 2005.
- SPIEGEL, M. R. **Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas de Matemática**. 2.ed. São Paulo, Brasil: Mc Graw Hill, 1992.
- Van den Hof, P. Identification of experimental models for control design. In: INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT TECHNOLOGY CONFERENCE, 2001, Budapest, Hungary. **Proceedings...** New York; USA: IEEE, 2001. p.1155–1162.
- VINNICOMBE, G. Frequency domain uncertainty and the graph topology. **Transactions on Automatic Control**, Brookline, USA, v.AC-38, p.1371–1383, 1993.
- WAHLBERG, B. System identification using laguerre models. **Transactions on Automatic Control**, Brookline, USA, v.36, n.5, p.551–562, 1991.

YAKUBOVICH, V. A. Solution of certain matrix inequalities occurring in the theory of automatic control. **Dokladi Akademii Nauk. SSSR**, Russia, v.1, n.143, p.1304–1307, 1962.

ZARROP, M. **Optimal Experiment Design for Dynamic System Identification**. New York, NY: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 21, Springer Verlag, 1979.

ZHOU, K.; DOYLE, J.; GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, New York, NY, v.115, n.2B, p.220–222, 1993.