Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Teorema de Goldie para Álgebras Alternativas

por

TIAGO MARTINS DA SILVA

Dissertação de Mestrado

Porto Alegre, 9 de Abril de 2010.

Dissertação submetida por Tiago Martins da Silva [1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Wagner de Oliveira Cortes (UFRGS)

Banca Examinadora:

Dr. Maria de Lourdes Merlini Giuliani (UFABC)
Dr. Miguel Angel Alberto Ferrero (UFRGS)
Dr. Alveri Alves Sant'ana (UFRGS)

Data da Defesa: 9 de Abril de de 2010.

[1] Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao Pai Celestial, pelo seu amor, bondade e ajuda e pela oportunidade de fazer este curso.

Agradeço aos meus pais, Odécio e Marlene, e irmãos Cristiane e Samuel pelo grande apoio aos estudos, exemplo e amor que recebi deles desde a tenra idade.

Agradeço a minha família de Porto Alegre, Ecilda, Augusto e Bianca, pela forma como me acolheram em seu lar e me ajudaram ao longo deste curso.

Agradeço aos professores Maria de Lourdes e Wagner pela orientação que tornou possível a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos e colegas que estiveram lado a lado comigo.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeito.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o Teorema de Goldie no contexto associativo e alternativo. Sabemos que o socle de um anel semiprimo de Goldie é gerado por um idempotente central e que um anel primo de Goldie com socle não-nulo é um anel artiniano simples. Nesse trabalho exibimos a prova da extensão desses resultados para álgebras alternativas, além de um análogo do teorema de Goldie para álgebras alternativas.

ABSTRACT

In this work we study Goldie's theorem in the context of alternative and associative algebras. It is well known that the socle of a semiprime Goldie ring is generated by a central idempotent and a prime Goldie ring with non-zero socle is a simple artinian ring. In this work we show the extension of these results to alternative algebras. Moreover, we show an analogue of Goldie's theorem for alternative algebra.

Conteúdo

Introdução

O Teorema de Goldie é certamente um dos resultados fundamentais da teoria de anéis associativos. Este teorema trata da existência de anéis quocientes.

A teoria de anéis quocientes tem suas origens no período entre 1930 e 1940 com os trabalhos de Ore e Asano sobre a construção de um anel total de frações. Ore estabeleceu uma condição necessária e suficiente para que um anel R tenha um anel clássico de quocientes à esquerda $Q(R)$, a saber, para todos $a, b \in R$, com a regular, existem $c, d \in R$, com c regular, tal que $cb = da$. Se $Q(R)$ é o anel clássico de quocientes de R então dizemos que R é uma ordem em $Q(R)$.

No final da década de 50 Goldie caracterizou anéis que são ordens clássicas à esquerda em anéis semi-simples artinianos. Este resultado ficou conhecido como o Teorema de Goldie.

O Teorema de Goldie no contexto não associativo foi estabelecido por Kaidi e Essannouni em 1994 para anéis noetherianos. Em 1994, os mesmos autores estabeleceram o Teorema de Goldie para anéis alternativos sem elementos de ordem 3 no ideal associador. Para os anéis associativos, o socle de um anel de Goldie semiprimo é gerado por um idempotente central, um anel de Goldie primo com socle não nulo é um anel artiniano simples e estes resultados foram estendidos, ver [1]. Neste trabalho iremos estudar os resultados sobre o Teorema de Goldie em anéis alternativos.

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos que serão utilizados ao longo deste trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos um exemplo de uma álgebra de divisão, que é uma álgebra alternativa e é conhecida como a álgebra de Cayley.

No Capítulo 3, estudamos o Teorema de Goldie no contexto associativo, cuja demonstração não segue as técnicas usuais apresentadas nos livros tradicionais da Teoria de Anéis Associativos.

No Capítulo 4, apresentamos definições, resultados básicos de álgebras alternativas e a Teoria básica de radicais no contexto não-associativo para uma melhor compreensão para o estudo do teorema principal deste trabalho.

No Capítulo 5, abordamos o Teorema de Goldie no contexto alternativo e para isso estudamos as generalizações de resultados na Teoria de goldie Clássica para o contexto alternativo.

1 Definições e Pré-requisitos

Neste capítulo apresentamos algumas definições que serão utilizadas nos capítulos posteriores e que são necessárias para a compreensão do que segue.

Definição 1.1. Um anel é uma terna $(R, +, \cdot)$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $(R, +)$ é um grupo abeliano;
2. $a(bc) = (ab)c$, $\forall\ a, b, c \in R$;
3. $a(b+c) = ab + ac$ e $(a+b)c = ac + bc$, $\forall\ a, b, c \in R$.

Se $ab = ba$ para quaisquer $a, b \in R$, então dizemos que o anel R é comutativo.

Definição 1.2. Um elemento $a \in R$ é dito *regular* se $ac = 0 \Rightarrow c = 0$ e $ba = 0 \Rightarrow b = 0$, para $b, c \in R$.

Definição 1.3. Um anel R é dito *primo* se para quaisquer ideais I e J de R, tais que $IJ = (0)$ então $I = (0)$ ou $J = (0)$.

Definição 1.4. Um anel R é dito um anel *semiprimo* se R não contém ideais nilpotentes não nulos.

Definição 1.5. Um anel R é dito um anel *noetheriano à direita (à esquerda)* se, para qualquer cadeia ascendente $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$, de ideais à direita (à esquerda) de R, existe n tal que $I_n = I_{n+p}$, para todo $p \in N$.

Definição 1.6. R é dito um anel *artiniano à direita (à esquerda)* se, para qualquer cadeia descendente $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$, de ideais à direita (à esquerda) de R, existe n tal que $I_n = I_{n+p}$, para todo $p \in N$.

Definição 1.7. Um ideal à direita I de R é dito *essencial* se para qualquer ideal não nulo à direita J de R, temos que $I \cap J \neq (0)$.

Definição 1.8. Um ideal à direita I de R é dito um *ideal nil* se para qualquer $a \in I$, existe um número natural $n \geq 1$ tal que $a^n = 0$.

Definição 1.9. O *socle* de um anel R é a soma de todos os ideais minimais à direita de R.

Definição 1.10. Um ideal I de R é dito um *ideal minimal* se para qualquer ideal J de R, tal que $J \subsetneqq I$, temos que $J = 0$.

Definição 1.11. Um anel R é *semi-simples à direita (à esquerda)* se, para qualquer ideal à direita (à esquerda) I de R, existe um ideal à direita (à esquerda) J de R tal que $I \oplus J = R$. Um anel R é dito semi-simples se é semi-simples à esquerda e à direita.

Definição 1.12. Sejam R um anel qualquer e S um subconjunto não-vazio de R. Definimos $r(S) = \{x \in R; sx = 0, \forall\ s \in S\}$ o *anulador à direita* de S em R. Analogamente definimos $l(S) = \{x \in R; xs = 0, \forall\ s \in S\}$ o *anulador à esquerda* de S em R.

Definição 1.13. Um anel $Q(R) \supseteq\ R$ é dito um *anel de quocientes à direita* de R se as seguintes condições são satisfeitas:

1. Todo elemento regular de R é inversível em $Q(R)$.

2. Para todo $x \in Q(R)$, x é da forma $x = ba^{-1}$, onde $a, b \in R$ e a é regular.

Se $Q(R)$ é um anel quociente à direita de R, dizemos que R é uma ordem à direita em $Q(R)$.

Definição 1.14. Um anel R é dito um *anel de Goldie à direita* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. R satisfaz a condição de cadeia ascendente para anuladores à direita.

2. R não contém uma soma direta infinita de ideais à direita não-nulos.

Definição 1.15. Um anel *alternativo* é uma terna $(R, +, \cdot)$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $(R, +)$ é um grupo abeliano

2. A multiplicação é distributiva em relação à adição: $a(b+c) = ab + ac$ e $(a+b)c = ac + bc$, $\forall\ a, b, c \in R$.

3. $x(xy) = x^2y$ e $(xy)y = xy^2$, $\forall\ x, y \in R$.

É fácil ver que todos os anéis associativos são anéis alternativos. No capítulo seguinte veremos um exemplo de um anel alternativo que não é um anel associativo.

Duas funções importantes da teoria de anéis alternativos são o comutador e o associador.

Definição 1.16. Seja R um anel alternativo. Definamos para todo $a, b, c \in R$, $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ o *associador* e para todo $a, b \in R$, $[a, b] = ab - ba$ o *comutador*.

É fácil ver que essas funções são lineares em cada um de seus argumentos, ou seja, se a_1, a_2, b e c são elementos de uma álgebra R, temos que $(a_1 + a_2, b, c) = (a_1, b, c) + (a_2, b, c)$.

Desde que $x(xy) = x^2y$ e $(xy)y = xy^2$ é válida nos anéis alternativos, temos que:

1. $(x, x, y) = (xx)y - x(xy) = 0$

2. $(x, y, y) = (xy)y - x(yy) = 0$, $\forall\ x, y \in R$

Agora iremos definir o núcleo de uma álgebra alternativa.

Definição 1.17. O *núcleo* de uma álgebra alternativa R é $N(R) = \{a \in R; (a, x, y) = (x, a, y) = (x, y, a) = 0, \forall\ x, y \in R\}$ e o *centro* de R é $Z(R) = \{a \in N(R); [a, x] = 0, \forall\ x \in R\}$.

A linearização é uma ferramenta fundamental e extremamente útil na teoria de álgebra não-associativa. Por exemplo, substituindo x por $x + z$ na identidade $(x, x, y) = 0$, obtemos que $0 = (x + z, x + z, y) = (x, x, y) + (x, z, y) + (z, x, y) + (z, z, y)$, e com isto $(x, z, y) + (z, x, y) = 0$, ou seja, numa álgebra alternativa $(x, z, y) = -(z, x, y)$, $\forall\ x, y, z \in R$.

Analogamente, linearizando $(x, y, y) = 0$, temos que $(x, y, z) = -(x, z, y)$. Em particular, álgebras alternativas satisfazem a identidade flexível, $(x, y, x) = 0$. Essa identidade é imediata a partir da identidade $(x, x, y) = 0$.

Definição 1.18. Seja R uma álgebra alternativa. A função de Kleinfeld é a função $f : R^4 \to R$ definida por: $f(w,x,y,z) = (wx,y,z) - x(w,y,z) - (x,y,z)w$.

A função de Kleinfeld desempenha um papel muito importante ao longo deste trabalho, sendo muito utilizada nas demonstrações.

2 Exemplo de Álgebra Alternativa

Neste capítulo apresentamos um exemplo de uma álgebra alternativa e que não é uma álgebra associativa (os números de Cayley).

A primeira álgebra de divisão não-comutativa foi descoberto em 1843 por William Rowan Hamilton e é denotado por $H(\mathbb{R})$ em sua homenagem. Essa álgebra é um espaço vetorial de dimensão 4 sobre os números reais e é chamada de álgebra dos quatérnios reais, com base $\{1, i, j, k\}$. Seus elementos, chamados quatérnios, são somas da forma:

$$q = a + bi + cj + dk,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. A soma entre dois números quatérnios é feita coordenada por coordenada, e a multiplicação segue a seguinte regra:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j.$$

Da mesma forma que nos números complexos, existe nos números quatérnios a noção de norma, isto é, para qualquer $q = a + bi + cj + dk \in H(\mathbb{R})$,

$$\|q\| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Essa álgebra desempenha um papel historicamente significativo porque produz um exemplo de álgebra associativa real na qual todo elemento não-nulo é invertível, mas que não é comutativo. Assim, o surgimento da teoria de anéis não-comutativos é frequentemente atribuído à descoberta desta álgebra.

Definição 2.1. Se $q = a+bi+cj+dk \in H(\mathbb{R})$, o conjugado de q é o elemento $\overline{q} = a - bi - cj - dk$.

Um cálculo direto mostra que

$$q\overline{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \qquad \text{e} \qquad \overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1},$$

para quaisquer $q_1, q_2 \in H(\mathbb{R})$.

Definição 2.2. Uma involução de uma álgebra A é uma aplicação linear $a \mapsto \overline{a}$ de A que satisfaz

$$\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a} \qquad \text{e} \qquad \overline{\overline{a}} = a,$$

para quaisquer $a, b \in A$.

Definição 2.3. Se $q \in H(\mathbb{R})$, definimos a norma de q por $n(q) = q\overline{q}$.

É fácil ver que a conjugação da álgebra dos números quatérnios reais é um involução e que a norma é multiplicativa, ou seja, $n(q_1q_2) = n(q_1)n(q_2)$.

O primeiro exemplo de uma álgebra alternativa que não é associativa é os números de Cayley que foi descoberto por J. T. Graves em 1843. Da mesma forma que os números quatérnios, os números de Cayley formam uma álgebra de divisão na qual a multiplicação não é comutativa. Entretanto, diferentemente que nos números quartérnios, os números de Cayley não são associativos.

Os números de Cayley, que são denotados por $\mathcal{C}$, podem ser construídos à partir dos números quartérnios reais da mesma forma que os números complexos são construídos à partir dos números reais.

Definição 2.4. Um número de Cayley é um elemento da forma $a + bl$, onde $a, b \in H(\mathbb{R})$ e l é uma indeterminada.

A soma de dois elementos de $\mathcal{C}$ é dada pela regra

$$(a + bl) + (c + dl) = (a + c) + (b + d)l,$$

e a multiplicação é dada pela regra

$$(a + bl)(c + dl) = (ac - \overline{d}b) + (da + b\overline{c})l,$$

onde $a, b, c, d \in H(\mathbb{R})$. A aplicação $a + bl \mapsto \overline{a} - bl$ é um involução em $\mathcal{C}$ e $n(w) = w\overline{w}$, para $w \in \mathcal{C}$, define uma norma multiplicativa.

Os números de Cayley formam uma álgebra de dimensão 8 sobre os números reais, com base:

$$\{1, i, j, k\} \cup \{l, il, jl, kl\}, \text{ onde } \{1, i, j, k\} \text{ denota a base usual para } H(\mathbb{R}).$$

Iremos mostrar que os números de Cayley não é uma álgebra associativa. De fato, sejam $x = a + bl$, $y = c + dl$ e $z = e + fl$, onde $a, b, c, d, e, f \in H(\mathbb{R})$. É fácil ver que

$$(xy)z = (ace - \overline{d}be - \overline{f}da - \overline{f}b\overline{c}) + (fac - f\overline{d}b + da\overline{e} + b\overline{c}\overline{e})l$$

e que

$$x(yz) = (ace - a\overline{f}d - \overline{b}\overline{c}b - \overline{d}eb) + (fca + d\overline{e}a + b\overline{c}\overline{e} - bf\overline{d})l.$$

Assim, os números de Cayley não é uma álgebra associativa.

No entanto, os números de Cayley formam uma álgebra de divisão, isto é, todo elemento não-nulo de $\mathcal{C}$ é inversível. Seja $w = a + bl \in \mathcal{C}$ não-nulo. É fácil ver que $n(w) = w\overline{w} = a\overline{a} + \overline{b}b$ e que

$$(a + bl)(\tfrac{\overline{a}}{a\overline{a}+\overline{b}b} - \tfrac{b}{a\overline{a}+\overline{b}b}l) = (\tfrac{\overline{a}}{a\overline{a}+\overline{b}b} - \tfrac{b}{a\overline{a}+\overline{b}b}l)(a + bl) = 1.$$

Portanto, para todo $w = a + bl \in \mathcal{C}$ não-nulo, temos que

$$w^{-1} = \tfrac{\overline{a}}{n(w)} - \tfrac{b}{n(w)}l = \tfrac{\overline{a}}{a\overline{a}+\overline{b}b} - \tfrac{b}{a\overline{a}+\overline{b}b}l.$$

Assim, os números de Cayley formam uma álgebra de divisão.

3 Teorema de Goldie para Álgebras Associativas

Neste capítulo abordamos alguns resultados da teoria das álgebras associativas que são necessários para demonstrar o Teorema de Goldie, apresentamos uma demonstração deste teorema e de sua recíproca. Durante esta seção, todos os anéis são associativos.

O próximo teorema é conhecido como o Teorema de Ore,

Teorema 3.1. *Uma condição necessária e suficiente para que R tenha um anel quociente à direita é que para cada $a, b \in R$, com b regular, então existem $a_1, b_1 \in R$, com b_1 regular, tais que $ab_1 = ba_1$.*

Demonstração. Suponhamos que exista $Q(R)$ e sejam $a, b \in R$, com b um elemento regular de R. Então existe $b^{-1} \in Q(R)$ e consideramos $x = b^{-1}a \in Q(R)$. Pelo item 2 da definição 1.13, existe $a_1, b_1 \in R$, com b_1 regular, tal que $x = b^{-1}a = a_1b_1^{-1}$. Assim, multiplicando à esquerda por b e à direita por b_1 em ambos os lados, obtemos que $ab_1 = ba_1$.

Suponhamos que vale a condição de Ore em R. Mostraremos que existe um anel quociente à direita de R. De fato, seja $\mathcal{M} = \{(a, b); a, b \in R,\ b$ regular$\}$. Em $\mathcal{M}$ definimos a relação $(a, b) \sim (c, d)$ se $ad_1 = cb_1$, onde $bd_1 = db_1$. Afirmamos que isso independe da escolha de b_1 e d_1. Seja $db_2 = bd_2$. Pela condição de Ore existe e_1 e e_2 elementos regulares tais que $b_2e_2 = b_1e_1$. Assim

$$b(d_2e_2) = bd_2e_2 = db_2e_2 = db_1e_1 = bd_1e_1 = b(d_1e_1).$$

Como b é regular, então $d_2e_2 = d_1e_1$.

De $ad_1 = cb_1$, temos que

$$(ad_2)e_2 = ad_1e_1 = cb_1e_1 = cb_2e_2 = (cb_2)e_2.$$

e desde que e_2 é regular, temos que $ad_2 = cb_2$. Assim, $(a, b) \sim (c, d)$ independe da escolha de b_1 e d_1.

É fácil verificar que a relação definida em $\mathcal{M}$ acima é uma relação de equivalência. Denotaremos a classe de (a,b) por a/b. Seja M o conjunto de classes de equivalência de $\mathcal{M}$. Em M introduzimos as seguintes operações:

1. $a/b + c/d = (ad_1 + cb_1)/db_1$, onde $db_1 = bd_1$.

2. $a/b \cdot c/d = ca_1/bg_1$, onde $ag_1 = da_1$.

Agora fica fácil ver que com estas operações o conjunto construído é um anel associativo com unidade e o denotamos por $Q(R)$. $\square$

Lema 3.2. *Sejam $x_1, x_2, ..., x_k \in Q(R)$. Então existem $1 \leq i \leq k$ e um elemento regular $a \in R$, tais que $x_i = b_i a^{-1}$.*

Demonstração. Para $i = 1$ o resultado é claro. Suponhamos por indução que seja válido para $1 \leq i \leq k-1$, isto é, $x_i = b_i c^{-1}$, com c regular, e consideramos $x_k = b_k c_k^{-1}$. Pelo Teorema 3.1, existem $r, s \in R$, com s regular, tais que $c_k s = cr$. Assim, temos que $x_k = b_k c_k^{-1} = b_k s s^{-1} c_k^{-1} = (b_k s)(c_k s)^{-1}$. Por outro lado, $(b_i r)(c_k s)^{-1} = (b_i r)(cr)^{-1} = b_i c^{-1} = x_i$, $1 \leq i \leq k-1$ e como $a = c_k s \in R$ é um elemento regular, obtemos o resultado. $\square$

Lema 3.3. *Sejam R um anel qualquer e $S \subset R$ um subconjunto não-vazio de R. Então são válidas:*

1. *Todo anulador à direita é um ideal à direita de R e todo anulador à esquerda é um ideal à esquerda de R.*

2. *Se $S_1 \subset S_2$ então $r(S_1) \supset r(S_2)$ e $l(S_1) \supset l(S_2)$.*

3. *$S \subset l(r(S))$ e $S \subset r(l(S))$.*

4. *Se $A = r(S)$ então $A = r(l(A))$ e se $A = l(S)$ então $A = l(r(A))$.*

Demonstração.

1. Sejam $x \in r(S)$ e $a \in R$, onde S é um subconjunto qualquer não-vazio de R. Como $x \in r(S)$ temos que $sx = 0, \forall\ s \in S$. Então $s(xa) = (sx)a = 0$ e com isto $xa \in r(S)$. Assim, $r(S)$ é um ideal à direita de R. Analogamente se prova que $l(S)$ é um ideal à esquerda de R.

2. Seja $x \in r(S_2)$. Então, $s_2 x = 0, \forall\ s_2 \in S_2$. Como $S_1 \subset S_2$, temos que $\forall\ s_1 \in S_1 \subset S_2$, $s_1 x = 0$. Assim, $x \in r(S_1)$. Logo, $r(S_1) \supset r(S_2)$.

3. Sejam $x \in l(S)$ e $s \in S$. Então $xs = 0$ e temos que $s \in r(l(S))$. Assim $S \subset r(l(S))$. De maneira análoga mostramos que $S \subset l(r(S))$.

4. Seja $A = r(S)$. Do item 3 temos que $A \subset r(l(A))$. Aplicando o item 2 em $S \subset l(r(S))$, obtemos que $r(l(r(S))) \subset r(S)$. Assim $r(l(A)) \subset A$. Logo, $A = r(l(A))$. De maneira análoga temos que se $A = l(S)$ então $A = l(r(A))$.

□

Observação 3.4. A condição de cadeia ascendente para anuladores à direita é equivalente a condição de cadeia descendente para anuladores à esquerda.

Demonstração. Suponhamos que R satisfaça a condição de cadeia ascendente para anuladores à direita e que exista uma cadeia descendente infinita e própria de anuladores à esquerda de R, isto é, $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \supset \cdots$, com $I_j \neq I_{j+1}$, para todo $j > 1$, $I_j = l(A_j)$, onde A_j é um subconjunto não-vazio de R. Do Lema 3.3, obtemos que $r(l(A_1)) \subset r(l(A_2)) \subset \cdots \subset r(l(A_k)) \subset \cdots$, com $r(l(A_j)) \neq r(l(A_{j+1}))$, o que contradiz o fato que R satisfaz a condição de cadeia ascendente para anuladores à direita. Assim, não existe uma cadeia infinita e própria de anuladores à esquerda de R. A prova da recíproca é análoga. □

Lema 3.5. *Seja R um anel semiprimo satisfazendo a condição de cadeia ascendente para anuladores à direita. Se A, B são ideais à direita de R tais que $A \supset B$ e $l(A) \neq l(B)$, então existe $a \in A$ tal que $aA \neq (0)$ e $aA \cap B = (0)$.*

Demonstração. Como R satisfaz a condição da cadeia ascendente para anuladores à direita, então pela Observação 3.4, temos que R satisfaz a condição da cadeia descendente para anuladores à esquerda. Pelo item 2 do Lema 3.3 temos que $l(A) \subset l(B)$ e, por hipótese, essa inclusão é própria. Pelo Lema de Zorn, existe um $U \subset R$ anulador à esquerda minimal com respeito a estar contido em $l(B)$ e conter propriamente $l(A)$. Assim, $UA \neq (0)$, pois se $UA = (0)$ então $U \subset l(A)$, o que implica $U = l(A)$, o que contradiz a escolha de U. Pelo fato que R é semiprimo e $UA \neq (0)$, temos que $UAUA \neq (0)$. Seja $au \in AU$ tal que $UauA \neq (0)$. Mostraremos que $auA \cap B = (0)$. De fato, seja $x \in A$ com $aux \in auA \cap B$. Como $x \in A$, então $l(A) \subset l(x)$. Notamos que $U \cap l(x)$ é um anulador à esquerda, pois é a intersecção de anuladores à esquerda. Desde que, $l(A) \subset U$ e $l(A) \subset l(x)$, então $l(A) \subset U \cap l(x)$. Usando o fato que $aux \in B$ e $U \subset l(B)$, obtemos que $Uaux = (0)$, pois $UB = (0)$, o que implica que $Uau \subset l(x)$. Além disso, $Uau \not\subset l(A)$, pois $UauA \neq (0)$.

Assim, $l(x) \neq l(A)$ e segue que $l(x) \supsetneqq l(A)$. Desta maneira $U \cap l(x) \supsetneqq l(A)$ e $U \cap l(x) \subsetneqq l(B)$ e pela minimalidade de U, $U \cap l(x) = U$. Assim $U \subset l(x)$ e segue que $Ux = (0)$. Logo, $aux = 0$ e portanto, $auA \cap B = (0)$. $\square$

Esse lema tem dois corolários importantes.

Corolário 3.6. *Seja R um anel que satisfaz a condição de cadeira ascendente sobre anuladores à direita. Se xR e yR são ideais à direita essenciais então yxR é essencial.*

Demonstração. Sejam A um ideal à direita não-nulo de R e $\overline{A} = \{r \in R; yr \in A\}$. Como yR é essencial então $yR \cap A \neq (0)$ e, com isto, $\overline{A} \neq (0)$. É fácil ver que $y\overline{A} = yR \cap A$ e $r(y) \subset \overline{A}$. Desde que $y\overline{A} \neq (0)$ e $yr(y) = (0)$, então $l(\overline{A}) \neq l(r(y))$ e deste modo, pelo Lema 3.5 existe $(0) \neq T \subset \overline{A}$ ideal à direita de R tal que $T \cap r(y) = (0)$. Seja $\overline{T} = \{r \in R; xr \in T\}$. Pela essencialidade de xR, temos que $xR \cap T \neq (0)$. Assim, $\overline{T} \neq (0)$ e é fácil ver que $x\overline{T} = xR \cap T$. Mostraremos que $yxR \cap A \neq (0)$. De fato, se $yx\overline{T} = (0)$ então $x\overline{T} \subset r(y)$ e isto implica que $T \subset r(y)$, pois $x\overline{T} = xR \cap T$. Desde que $T \neq (0)$ então $T \cap r(y) \neq (0)$, o que contradiz o fato de que $T \cap r(y) = 0$. Assim, $yx\overline{T} \neq (0)$ e é fácil ver que $yx\overline{T} = yxR \cap yT$. Logo, $(0) \neq yx\overline{T} = yxR \cap yT \subset yxR \cap y\overline{A} = yxR \cap yR \cap A$ e portanto, $yxR \cap A \neq (0)$. $\square$

Corolário 3.7. *Seja R um anel nas mesmas condições do lema anterior. Se aR é um ideal à direita essencial de R então a é um elemento regular de R.*

Demonstração. Temos que mostrar que $l(a) = r(a) = (0)$. De fato, se $l(R) \neq l(aR)$, então pelo Lema 3.5 existe $(0) \neq T \subset R$ e $T \cap aR = (0)$, o que não ocorre pois aR é um ideal à direita essencial de R. Assim, $l(aR) = l(R) = (0)$ e é fácil ver que $l(a) \subset l(aR)$, pois para todo $x \in l(a)$, $xa = 0$, o que implica que $(xa)R = x(aR) = (0)$. Deste modo $x \in l(aR)$, e com isso, $l(a) \subset l(aR) = l(R) = (0)$. Como aR é um ideal à direita essencial de R, pelo Lema 3.5, temos que a^nR é essencial. Pelo item 2 da Observação 3.3 temos que $r(a) \supset r(a^2) \supset r(a^3) \supset ... \supset r(a^n) \supset r(a^{n+1}) = ...$ e como R satisfaz a condição de cadeira descendente sobre anuladores à direita pela Observação 3.4, existe $n \geq 1$ tal que $r(a^n) = r(a^{n+p})$, para todo $p \geq 0$. Se $x \in r(a) \cap a^nR$ então $ax = 0$ e $x \in a^ny$, para algum $y \in R$, de onde vem que $0 = ax = a(a^ny) = a^{n+1}y$. Assim, $y \in r(a^{n+1}) = r(a^n)$. Logo $0 = a^ny = x$ e segue que $r(a) \cap a^nR = (0)$. Como a^nR é essencial, então $r(a) = (0)$. $\square$

Para o restante desta seção $\mathcal{R}$ será um anel de Goldie à direita semiprimo.

Lema 3.8. *$\mathcal{R}$ satisfaz a condição de cadeia descendente para anuladores à direita.*

Demonstração. Decorre diretamente da Observação 3.4. $\square$

No Corolário 3.7 nós vimos que a essencialidade de um ideal à direita principal implica na regularidade de seu elemento gerador. Nós iremos mostrar a seguir que se c é um elemento regular à direita então c gera um ideal à direita essencial de R.

Lema 3.9. *Se $r(c) = (0)$ então $c\mathcal{R}$ é um ideal à direita essencial de $\mathcal{R}$.*

Demonstração. Seja A um ideal à direita não-nulo de $\mathcal{R}$. Como $r(c) = (0)$, então afirmamos que $\sum_{n\geq 0} c^n A$ é uma soma direta. De fato, se $a_0 + ca_1 + c^2 a_2 + ... + c^n a_n = 0$ então $a_0 = -c(a_1 + ca_2 + ... + c^{n-1}a_n) \in A \cap c\mathcal{R} = (0)$. Como $r(c) = (0)$, temos que $a_1 + ca_2 + ... + c^{n-1}a_n = 0$ e,com isto, $a_0 = 0$. Repetindo esse argumento, obtemos que $a_i = 0$, para todo $i \in \{0, 1, ..., n\}$. Logo, por hipótese $c\mathcal{R} \cap A \neq (0)$. $\square$

Do Corolário 3.7 e do Lema 3.9, segue a seguinte equivalência:

Corolário 3.10. *$a\mathcal{R}$ é um ideal à direita essencial de $\mathcal{R}$ se, e somente se, a é um elemento regular de $\mathcal{R}$.*

Definição 3.11. Um ideal bilateral S de $\mathcal{R}$ é dito um ideal anulador se S é o anulador à direita de algum ideal à direita T de $\mathcal{R}$.

Suponhamos que S seja um ideal de R e $S = r(T)$, onde T é um ideal de S. De $TS = (0)$, temos que $(ST)^2 = STST = (0)$ e, como $\mathcal{R}$ é semiprimo, $ST = (0)$.

À partir de agora nosso objetivo será obter resultados sobre os subanéis primos de um anel semiprimo.

Lema 3.12. *Um ideal anulador minimal não-nulo S de $\mathcal{R}$ é um anel de Goldie primo. Além disso, existe uma soma direta finita destes ideais que é um ideal à direita essencial de $\mathcal{R}$.*

Demonstração. Seja $(0) \neq S$ um ideal anulador minimal. Então existe um ideal não-nulo à direita T de S tal que $TS \neq 0$, pois $\mathcal{R}$ é semiprimo. Desde que, $TS \subset T$ é um ideal à direita de $\mathcal{R}$, então imediatamente obtemos que

S não contém uma soma direta infinita de ideais à direita. Como os subanéis de $\mathcal{R}$ herdam a condição de cadeia ascendente de anuladores à direita, concluímos que S é um anel de Goldie.

Mostraremos que S é primo. De fato, sejam A, B ideais de S tais que $BA = (0)$, com $A \neq (0)$. Então, $BSA \subset BA = (0)$, pois $BS \subset B$, e segue que $A \subset r(BS) \cap S$. Como $r(BS) \cap S$ é um ideal anulador, então pela minimalidade de S concluímos que $S \subset r(BS)$, e com isso, $BSBS \subset BSS = (0)$. Assim, $(BS)^2 = (0)$ e, como $\mathcal{R}$ é semiprimo, $BS = (0)$. Logo, $B = (0)$, e com isto, S é um anel de Goldie primo.

Seja $A = S_1 \oplus S_2 \oplus ... \oplus S_n$ uma soma direta maximal de ideais anuladores minimais. Afirmamos que A é um ideal essencial de $\mathcal{R}$. De fato, se $A \cap K = (0)$, onde $(0) \neq K$ é um ideal à direita de $\mathcal{R}$ então $KA \subset A \cap K = (0)$ e com isto $(0) \neq K \subset l(A)$. Desde que $\mathcal{R}$ é semiprimo, então $A \cap l(A) = (0)$, e segue que em $l(A)$ podemos encontrar um ideal anulador minimal não-nulo S_{n+1}, tal que $A \cap S_{n+1} = (0)$. Assim, poderíamos aumentar o comprimento da soma direta de ideais anuladores minimais, contradizendo a escolha de A. Logo A é um ideal essencial de $\mathcal{R}$. $\square$

Lema 3.13. *Se I é um ideal à direita essencial de $\mathcal{R}$ então I contém um elemento regular de $\mathcal{R}$.*

Demonstração. Primeiramente provaremos no caso em que $\mathcal{R}$ é um anel primo. De fato, pelo Lema 3.8, existe $a \in I$ tal que $r(a)$ seja minimal. Se a é regular então a tese se verifica. Se a não é um elemento regular então, pelo Corolário 3.7, $a\mathcal{R}$ não é um ideal à direita essencial de $\mathcal{R}$ e segue que $a\mathcal{R} \cap J = (0)$ para algum ideal à direita J não-nulo de $\mathcal{R}$. Como I é essencial, então $I \cap J \neq (0)$ e, podemos supor que $J \subset I$, pois do contrário, basta tomar $J' = J \cap I \subset I$.

Se $x \in J$ e $b \in r(a + x)$ então $(a + x)b = 0$ e temos que $ab = -xb \in a\mathcal{R} \cap J = (0)$. Assim, $b \in r(a) \cap r(x)$. Pela minimalidade de $r(a)$ nós temos que $r(a) \subset r(a) \cap r(x) \subset r(x)$, o que implica que $xr(a) = (0)$ para todo $x \in J$. Como $\mathcal{R}$ é um anel primo, $Jr(a) = (0)$ onde J é um ideal à direita não-nulo de $\mathcal{R}$, e segue que $r(a) = (0)$. Pelo Lema 3.9, a é um elemento regular de $\mathcal{R}$. Logo, o lema vale para um anel de Goldie primo.

Agora, suponhamos que $\mathcal{R}$ seja um anel semiprimo. Seja $A = S_1 \oplus S_2 \oplus ... \oplus S_n$ como no Lema 3.12. É fácil ver que $I \cap S_i$ é um ideal à direita essencial em S_i e que S_i é primo, então pelo argumento usado acima $I \cap S_i$ contém um elemento s_i regular em S_i. Afirmamos que $s = s_1 + ... + s_n$ é um elemento regular em $\mathcal{R}$.

De fato, se $r(s) \neq (0)$, então pela essencialidade de A temos que $A \cap r(s) \neq (0)$. Seja $0 \neq t \in A \cap r(s)$. Então, existe $t_i \in S_i$ tal que $t = t_1 + ... + t_n$. Desde que $t \in r(s)$, segue que $0 = st = s_1t_1 + ... + s_nt_n$ e pelo fato que a soma $S_1 \oplus ... \oplus S_n$ é direta vem que $s_it_i = 0$. Como s_i é regular em S_i, então $t_i = 0$ e com isto $t = 0$, uma contradição. Logo, $r(s) = (0)$. Pelo Lema 3.9, temos que $s\mathcal{R}$ é um ideal à direita essencial de $\mathcal{R}$, e pelo Corolário 3.7 temos que s é um elemento regular de $\mathcal{R}$. $\square$

Estamos prontos para enunciar e demonstrar o Teorema de Goldie.

Teorema 3.14. *Seja $\mathcal{R}$ um anel de Goldie à direita semiprimo, então existe $Q(\mathcal{R})$ um anel de quociente à direita de $\mathcal{R}$.*

Demonstração. Iremos mostrar que existe $Q(\mathcal{R})$ provando que $\mathcal{R}$ satisfaz a condição de Ore, ou seja, sejam $a, b \in \mathcal{R}$, com b regular, precisamos encontrar $a_1, b_1 \in \mathcal{R}$, com b_1 regular tal que $ab_1 = ba_1$.

De fato, sejam $a, b \in \mathcal{R}$, com b regular e I um ideal à direita de $\mathcal{R}$ tal que $aI \subset b\mathcal{R}$ e este ideal existe I, pois podemos tomar em particular $I = (0)$. Se I é um ideal à direita essencial de $\mathcal{R}$, então pelo Lema 3.13 existe $b_1 \in I$, regular, e com isso $ab_1 = ba_1$, para algum $a_1 \in \mathcal{R}$. Se I não é um ideal à direita essencial de $\mathcal{R}$, então existe J ideal à direita não-nulo de $\mathcal{R}$ tal que $I \cap J = (0)$. Pelo Lema 3.9, $b\mathcal{R}$ é um ideal à direita essencial de $\mathcal{R}$ e temos que $J \cap b\mathcal{R} \neq (0)$.

Seja $a(J \cap b\mathcal{R})$ um ideal à direita de $\mathcal{R}$. Se $a(J \cap b\mathcal{R}) = 0$ então $a(I \oplus I_1) \subset b\mathcal{R}$, com $I_1 = J \cap b\mathcal{R}$. Se $a(J \cap b\mathcal{R}) \neq 0$ então $a(J \cap b\mathcal{R}) \cap b\mathcal{R} \neq 0$ e com isto devemos escolher outro I_1. Seja $y \in J \cap b\mathcal{R}$ com $0 \neq ay \in b\mathcal{R}$. Então, $I_1 = y\mathcal{R}$ é um ideal à direita não-nulo de $\mathcal{R}$. Assim, temos que $aI_1 = a(y\mathcal{R}) = (ay)\mathcal{R} \subset b\mathcal{R}$ e $I \cap I_1 \subset I \cap J = 0$ e segue que, $a(I \oplus I_1) \subset b\mathcal{R}$. Se $I \oplus I_1$ é um ideal à direita essencial de $\mathcal{R}$ então paramos. Se não, existe I_2 um ideal à direita não-nulo de $\mathcal{R}$ tal que $a(I \oplus I_1 \oplus I_2) \subset b\mathcal{R}$.

Como $\mathcal{R}$ não contém uma soma direta infinita de ideais à direita não-nulos, este processo deve parar e quando isso ocorre temos que existe um ideal à direita essencial K de $\mathcal{R}$ tal que $aK \subset b\mathcal{R}$. Logo, existem $b_1 \in K$, b_1 regular e $a_1 \in \mathcal{R}$ tais que $ab_1 = ba_1$. Logo, $\mathcal{R}$ satisfaz a condição de Ore e portanto, pelo Teorema 3.1, existe $Q(\mathcal{R})$. $\square$

Lema 3.15. *Em $Q(\mathcal{R})$ as seguintes propriedades são válidas:*

1. *Se I é um ideal à direita de Q então $I = Q(I \cap \mathcal{R})$.*

2. *Se $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ é uma soma direta de ideais à direita em $\mathcal{R}$ então $A_1Q + ... + A_nQ$ é uma soma direta de ideais à direita em Q.*

Demonstração. (1) Sejam I um ideal à direita de $Q(\mathcal{R})$ e $y \in I$. Então existem $a, b \in \mathcal{R}$, com b regular, tal que $y = ab^{-1}$ e com isto $yb = a$. Assim, $yb = a \in I \cap \mathcal{R}$, pois I é um ideal à direita de $Q(\mathcal{R})$. Logo $y \in Q(I \cap \mathcal{R})$. É fácil ver que $Q(I \cap \mathcal{R}) \subset I$. Portanto, $I = Q(I \cap \mathcal{R})$.

(2) Seja $a_1x_1+...+a_nx_n = 0$, onde $a_i \in A_i$ e $x_i \in Q$. Pelo Lema 3.2, existe $b_i, a \in \mathcal{R}$, com a regular, tais que $x_i = b_ia^{-1}$ e com isto, $0 = a_1(b_1a^{-1}) + ... + a_n(b_na^{-1}) = (a_1b_1 + ... + a_nb_n)a^{-1}$. Assim, $a_1b_1 + ... + a_nb_n = 0$. Como A_i é um ideal à direita de $\mathcal{R}$, então $a_ib_i \in A_i$ e da soma direta $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ temos que $a_ib_i = 0$, $\forall\ i$. Logo, para todo i, obtemos que:

$$0 = (a_ib_i)a^{-1} = a_i(b_ia^{-1}) = a_ix_i.$$

Portanto $A_1Q + ... + A_nQ$ é uma soma direta de ideais à direita de Q. □

O Próximo resultado determina a estrutura explícita de $Q(\mathcal{R})$.

Teorema 3.16. *$Q(\mathcal{R})$ é um anel semisimples artiniano à direita.*

Demonstração. Seja I um ideal à direita não-nulo de $Q(\mathcal{R})$. Então existe um ideal à direita K em R tal que $(I \cap \mathcal{R}) \oplus K$ é um ideal à direita essencial de $\mathcal{R}$. Pelo Lema 3.13 existe $a \in (I \cap \mathcal{R}) \oplus K$, com a um elemento regular de $\mathcal{R}$ e com isto, $1 = aa^{-1} \in Q[(I \cap \mathcal{R}) \oplus K]$. Assim, $Q(\mathcal{R}) = Q[(I \cap \mathcal{R}) \oplus K]$ e, pelo Lema 3.15, $Q[(I \cap \mathcal{R}) \oplus K] = I \oplus KQ$.

Seja $1 = i + k$, com $i \in I$ e $k \in KQ$. Então $i^2 = i$, $k^2 = k$ e $ik = 0$. Se $x \in I$, $x = 1.x = (i + k)x = ix + kx = ix$, então $I = iI \subset iQ \subset I$. Assim, $I = iQ$, isto é, I é gerado por um idempotente.

Em particular, todo ideal à direita de $Q(\mathcal{R})$ é principal, logo $Q(\mathcal{R})$ é um anel noetheriano à direita. Pelo fato de que todo ideal à direita de $Q(\mathcal{R})$ é gerado por um idempotente nós temos que $Q(\mathcal{R})$ não tem ideais à direita nilpotentes não-nulos, e com isto, $Q(\mathcal{R})$ é semiprimo.

Seja I um ideal à direita não-nulo de $Q(\mathcal{R})$. Como vimos anteriormente $I = eQ$, onde $e^2 = e$. Agora $l(eQ) = l(e) = Q(1 - e)$ e $r(l(eQ)) = r(Q(1 - e)) = eQ = I$. Logo, todo ideal à direita de $Q(\mathcal{R})$ é um anulador à direita. Pelo Lema 3.8, $Q(\mathcal{R})$ satisfaz a condição de cadeia descendente para anuladores à direita, e segue que satisfaz também para ideais à direita e, portanto, $Q(\mathcal{R})$ é um anel semisimples artiniano à direita. □

O seguinte teorema é a recíproca do Teorema de Goldie.

Teorema 3.17. *Seja R uma ordem à direita de Q, onde Q é um anel semisimples artiniano. Então R é um anel de Goldie semiprimo. Além disso, se Q é simples então R é primo.*

Demonstração. Mostremos que R é um anel de Goldie à direita. De fato, como Q é um anel artiniano semisimples, então todo ideal à direita de Q é gerado por um idempotente e com isto, Q satisfaz a condição de cadeia ascendente para ideais à direita e, em particular, a condição de cadeia ascendente para anuladores à direita. Como essa última condição é herdada por todos os sub-anéis de Q, temos que R satisfaz a condição de cadeia ascendente para anuladores à direita.

Seja $I_1 \oplus I_2 \oplus ... \oplus I_k$ uma soma direta de ideais à direita de R. Mostraremos que $I_1Q + I_2Q + ... + I_kQ$ é uma soma direta de ideais à direita de Q. De fato, seja $a_1q_1 + a_2q_2 + ... + a_kq_k = 0$, com $a_j \in I_j$ e $q_j \in Q$. Pelo Lema 3.2 existe um elemento regular $d \in R$ e $b_j \in R$ tal que $q_j = b_jd^{-1}$. Assim, $(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k)d^{-1} = 0$ e, como d é um elemento regular em R, $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k = 0$. Assim $a_jb_j = 0$ e segue que $a_jq_j = a_jb_jd^{-1} = 0$. Desta maneira, $I_1Q, I_2Q, ..., I_kQ$ formam uma soma direta de ideais à direita de Q. Logo, podemos concluir que a ausência em Q de somas diretas infinitas de ideais à direita de Q implica na ausência em R de somas diretas infinitas de ideais à direita de R e portanto, R é um anel de Goldie.

Seja N um ideal nilpotente de R, com $N^m = (0)$ e $N^{m-1} \neq (0)$. O ideal QNQ de Q é não-nulo. Como Q é artiniano e semisimples, $QNQ = Qe$, onde e é um idempotente central em Q e podemos escrever então $e = \sum a_iu_ib_i$, onde $a_ib_i \in Q$ e $u_i \in N$. Pelo Lema 3.2 existe um elemento regular $a \in R$ regular, $c_i \in R$ tais que $b_i = c_ia^{-1}$, e com isto, $e = \sum a_iu_ib_i = (\sum a_iu_ic_i)a^{-1} = (\sum a_iw_i)a^{-1}$, onde $w_i = u_ic_i \in N$.

Como e é um elemento central em Q, $ae = ea$, então $aeN^{m-1} = eaN^{m-1} = [(\sum a_iw_i)a^{-1}]aN^{m-1} = (\sum a_iw_i)N^{m-1} = (0)$, pois $w_iN^{m-1} \subset N^m = (0)$. Pelo fato que a é regular, temos que $eN^{m-1} = (0)$. Desde que, $(QN^{m-1})^2 = QN^{m-1}QN^{m-1} \subset QNQN^{m-1} = QeN^{m-1} = (0)$ e Q é semisimples, segue que não há em Q ideais à direita nilpotentes. Logo $QN^{m-1} = (0)$, o que implica que $N^{m-1} = (0)$ e essa contradição prova que $N = (0)$. Portanto, R é semiprimo.

Iremos mostrar que se Q é simples então R é primo. De fato, seja A um ideal não-nulo de R. Então $QAQ = Q$ pois $QAQ \neq (0)$. Como $QAQ = Q$, temos que $1 = \sum b_ia_ic_i$, onde $b_ic_i \in Q$ e $a_i \in A$. Pelo Lema 3.2, existe $b \in R$ regular e $d_i \in R$ tais que $c_i = d_ib^{-1}$. Se para algum ideal B de R

nós tivéssemos $AB = (0)$, então $QAB = (0)$. Desde que $1 = \sum b_i a_i c_i = (\sum b_i a_i d_i) b^{-1}$, então $b = 1.b = \sum b_i a_i d_i \in QA$. Assim $bB \subset QAB = (0)$. Logo, $B = 0$ e, portanto, R é um anel primo. $\square$

4 Álgebra Alternativa

Neste capítulo abordamos alguns resultados sobre álgebras alternativas. Exibimos uma propriedade da função de Kleinfeld, que é skew-simétrica em seus argumentos e também apresentamos e demonstramos as identidades de Moufang. Também colocamos uma seção de Teoria de Radicais, cujo nosso objetivo principal ao fazer isso é demonstrar que o radical de Baer $\mathcal{B}(A)$ de A é nilpotente.

Ao longo deste capítulo, A será uma álgebra alternativa.

Lema 4.1. *Em A vale a identidade de Teichmuller:*

$$(wx, y, z) - (w, xy, z) + (w, x, yz) - w(x, y, z) - (w, x, y)z = 0$$

para quaisquer $w, x, y, z \in A$.

Demonstração. Notamos que

$$\begin{gathered}(wx, y, z) - (w, xy, z) + (w, x, yz) - w(x, y, z) - (w, x, y)z = \\ ((wx)y)z - (wx)(yz) - (w(xy)z) + w((xy)z) + (wx)(yz) - w(x(yz)) - \\ w((xy)z) + w(x(yz)) - ((wx)y)z + (w(xy))z = 0.\end{gathered}$$

□

Definição 4.2. Em A definimos a Função de Teichmuller como $g(w, x, y, z) = (wx, y, z) - (w, xy, z) + (w, x, yz) - w(x, y, z) - (w, x, y)z$.

Observação 4.3. De forma análoga ao caso associativo se mostra que se X é um subconjunto de A então $r(X) = r(l(r(X)))$ e $l(X) = l(r(l(X)))$ e se $a \in N(A)$ então $r(a)$ é um ideal à direita de A e $l(a)$ é um ideal à esquerda de A.

Lema 4.4. *Sejam $x, y, z \in A$ e $n \in N(A)$. Então em A são válidas as seguintes relações:*

1. *n(x,y,z)=(nx,y,z)*

2. *(xn,y,z)=(x,ny,z)*

3. *(x,y,z)n=(x,y,zn)*

Demonstração. Pelo Lema 4.1 e pelo fato de que $n \in N(A)$, temos que:

$$0 = g(n,x,y,z) = (nx,y,z) - (n,xy,z) + (n,x,yz) - n(x,y,z) - (n,x,y)z = (nx,y,z) - n(x,y,z).$$

Logo, $(nx,y,z) = n(x,y,z)$. Analogamente se mostra os demais itens do lema. $\square$

Lema 4.5. *O núcleo e o centro são subálgebras de A.*

Demonstração. Como o comutador e o associador são funções lineares em seus argumentos, o núcleo e o centro são subgrupos aditivos de $(A,+)$. Se $w,x \in N(A)$, então segue da identidade de Teichmuller que $g(w,x,y,z) = (wx,y,z) = 0$, para todo $y,z \in A$. Assim, $wx \in N(A)$, e segue que $N(A)$ é também fechado para a multiplicação. Logo, $N(A)$ é um subálgebra. Finalmente, seja $w,x \in Z(A)$. Então $w,x,wx \in N(A)$, com isto, $(wx)y = w(xy) = w(yx) = (wy)x = (yw)x = y(wx)$, para todo $y \in A$. Portanto, $wx \in Z(A)$. $\square$

Teorema 4.6. *A função de Kleinfeld $f(w,x,y,z)$ é uma função skew-simétrica em seus argumentos.*

Demonstração. Sejam $z,w,x,y \in A$. Então $f(z,w,x,y) = f(z,w,x,y) - g(w,x,y,z)$, onde $g(w,x,y,z)$ é a identidade de Teichmuller. Assim,

$$f(z,w,x,y) = (zw,x,y) - w(z,x,y) - (w,x,y)z -$$

$$(wx,y,z) + (w,xy,z) - (w,x,yz) + w(x,y,z) - (w,x,y)z =$$

$$= (zw,x,y) - (wx,y,z) + (w,xy,z) - (w,x,yz).$$

Desta maneira $f(z,w,x,y) = (zw,x,y) - (wx,y,z) + (xy,z,w) - (yz,w,x)$, pois $(w,xy,z) = (xy,z,w)$ e $(w,x,yz) = (yz,w,x)$ e segue que,

$$f(w,x,y,z) = (wx,y,z) - (xy,z,w) + (yz,w,x) - (zw,x,y) = -f(z,w,x,y).$$

Linearizando a identidade $f(w,x,y,y) = (wx,y,y) - x(w,y,y) - (x,y,y)w = 0$ temos que,

$$0 = f(w,x,y+z,y+z) =$$
$$(wx,z,y) + (wx,y,z) - x(w,z,y) - x(w,y,z) - (x,z,y)w - (x,y,z)w =$$

$$= f(w,x,y,z) + f(w,x,z,y).$$

Logo, $f(w,x,y,z) = -f(w,x,z,y)$. □

Corolário 4.7. $f(w,x,y,z) = ([w,x],y,z) + ([y,z],w,x)$.

Demonstração. Basta mostrar que $(xy,z,w)+(zw,x,y)+(xw,z,y)+(zy,x,w) = 0$. Essa identidade é válida pois é a linearização da identidade $(xy,x,y) = 0$, onde $x \mapsto x+z$ e $y \mapsto y+w$. Assim $f(w,x,y,z) = ([w,x],y,z) + ([y,z],w,x)$. □

Observação 4.8. Como consequência do Corolário 4.7, temos a seguinte identidade

$$(wx,y,z) - x(w,y,z) - (x,y,z)w = ([w,x],y,z) + ([y,z],w,x).$$

Lema 4.9. *Sejam a, b elementos da álgebra A tal que $(a,b,A) = (0)$. Então $[a,b] \subset N(A)$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in A$. Então $f(x,y,a,b) = (xy,a,b) - y(x,a,b) - (y,a,b)x = 0$. Pelo Corolário 4.7, temos que $([a,b],x,y) = f(a,b,x,y) - (a,b,[x,y]) = 0$. Assim $[a,b] \subset N(A)$. □

Corolário 4.10. *As seguintes identidades são válidas:*

1. $(x^2,y,z) = x(x,y,z) + (x,y,z)x$
2. $(xy,x,z) = (y,x,z)x$
3. $(yx,x,z) = x(y,x,z)$
4. $(xyx)z = x(y(xz))$ *Identidade de Moufang à esquerda*
5. $((xy)z)y = x(yzy)$ *Identidade de Moufang à direita*
6. $(xy)(zx) = (x(yz))x$ *Identidade de Moufang meio*

Demonstração. As primeiras 3 identidades são imediatas à partir do Teorema 4.6. Para demonstrar o item 4, faremos uso dos itens de 1-3. Notamos que

$$((xy)x)z - x(y(xz)) = ((xy)x)z - (xy)(xz) + (xy)(xz) - x(y(xz)) =$$

$$= (xy,x,z) + (x,y,xz) = (y,x,z)x + (xz,x,y) = (y,x,z)x + (z,x,y)x = 0.$$

Assim, $((xy)x)z = x(y(xz))$.

os itens 5 e 6 seguem das seguintes identidades:

$$((xy)z)y - x((yz)y) = ((xy)z)y - (xy)(zy) + (xy)(zy) - x((yz)y) =$$

$$= (xy, z, y) + (x, y, zy) = -(xy, y, z) - (zy, y, x) = -y(x, y, z) - y(z, y, x) = 0$$

e

$$(xy)(zx) - (x(yz))x = (xy)(zx) - ((xy)z)x + ((xy)z)x - (x(yz))x =$$

$$= -(xy, z, x) + (x, y, z)x = (xy, x, z) + (x, y, z)x = (y, x, z)x + (x, y, z)x = 0.$$

□

Lema 4.11. *Se X é um ideal à esquerda (direita) de A então $r(X)(l(X))$ é um ideal à direita (esquerda) de A. Se X é um ideal de A então $r(X)$ e $l(X)$ são ideais de A.*

Demonstração. Sejam $x \in X$, $a \in A$ e $y \in r(X)$. Precisamos mostrar que $ya \in r(X)$, ou seja, $x(ya) = 0$, para todo $x \in X$. Notamos que $(x, y, a) = (xy)a - x(ya) = -x(ya)$. Por outro lado, $(x, y, a) = -(x, a, y) = (a, x, y) = (ax)y - a(xy) = (ax)y = 0$, pois X é um ideal à esquerda de A. Assim, $x(ya) = 0$. As outras afirmações são provadas de maneira análoga. □

Definição 4.12. Sejam S e T subconjutos quaisquer de A. Nós denotamos por $\{STS\}$ o submódulo do Φ-módulo A gerado por todos os possíveis elementos da forma sts, onde $s \in S$ e $t \in T$, onde Φ é um anel comutativo.

Seja A uma álgebra sobre um anel comutativo Φ. Consideramos o anel Φ como um módulo sobre si próprio. Como Φ tem unidade 1, então $\Phi = \Phi \cdot 1$. Consideramos a soma direta $A^\sharp = A \oplus \Phi \cdot 1$ e definimos a multiplicação da seguinte maneira:

$$(a + \alpha \cdot 1)(b + \beta \cdot 1) = ((ab + \alpha b + \beta a), \alpha\beta \cdot 1),$$

onde $\alpha, \beta \in \Phi$ e $a, b \in A$. Chamamos a álgebra $A^\sharp$ de a álgebra obtida pela adjunção formal de um elemento identidade para a álgebra A.

Ao longo deste trabalho, para nós $A^\sharp = A \oplus \mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z}$ são os números inteiros e $1_{A^\sharp} = (0, 1)$.

Observação 4.13. É fácil ver que se A é uma álgebra alternativa, então $A^\sharp = A \oplus \mathbb{Z}$ também é uma álgebra alternativa.

Definição 4.14. Sejam I e J ideais de A e $A^\sharp$, respectivamente. Definimos $P(I) = \{IA^\sharp I\}$ e $T(I) = \{IJI\}$.

Teorema 4.15. *Sejam I e J ideais de A. Então o produto IJ é também um ideal de A.*

Demonstração. Sejam $i \in I$, $j \in J$ e $a \in A$. Então,

$$(ij)a = i(ja) + (i, j, a) = i(ja) - (i, a, j) \in IJ$$

$$a(ij) = (ai)j - (a, i, j) = (ai)j + (i, a, j) \in IJ.$$

Logo, IJ é um ideal da álgebra A. $\square$

Teorema 4.16. *Sejam I e J ideais quaisquer de A. Então o conjunto $\{IJI\}$ é um ideal de A.*

Demonstração. Definimos $\{xyz\} = (xy)z + (zy)x = x(yz) + z(yx)$. Sejam $i, i' \in I$ e $j \in J$. Então,

$$\{iji'\} = (ij)i' + (i'j)i = (ij)i' + (i'j)i + iji - iji + i'ji' - i'ji' =$$

$$= (i + i')j(i + i') - iji - i'ji' \in \{IJI\}.$$

Pelas identidades de Moufang, temos:

$$(iji)a = i[j(ia)] = i[j(ia)] + (ia)(ji) - (ia)(ji) = \{ij(ia)\} - i(aj)i \in \{IJI\}.$$

para todo $a \in A$. Analogamente se mostra que $a(iji) \in \{IJI\}$. $\square$

Corolário 4.17. *Seja I um ideal de A. Então, os conjuntos $P(I) = \{IA^\sharp I\}$ e $T(I) = \{IJI\}$ são ideais de A. Além disso, $[P(I)]^2 \subset T(I) \subset P(I)$.*

Demonstração. Notamos que I é também um ideal da álgebra $A^\sharp$, e pelo Teorema 4.16, o conjunto $P(I)$ é um ideal da álgebra $A^\sharp$. Como $P(I) \subset A$, então $P(I)$ é um ideal da álgebra A e pelo Teorema 4.16, temos que $T(I)$ é um ideal da álgebra A. Além disso, é fácil ver que $T(I) \subset P(I)$. Resta provar que $[P(I)]^2 \subset T(I)$. Escreveremos $x \equiv y$ se $x - y \in T(I)$. Sejam $i, j \in I$, $a, b \in A^\sharp$. Pelas identidades de Moufang e suas linearizações, temos que:

$$(iai)(jbj) = \{(ia)(ij)(bj)\} - (bj \cdot i)(j \cdot ia) \equiv$$

$$\equiv -(bj \cdot i)(j \cdot ia) = -b\{ji(j \cdot ia)\} + ([b(j \cdot ia)]i)j \equiv$$

$$\equiv ([b(j \cdot ia)]i)j = \{b(j \cdot ia)i\}j - ([i(j \cdot ia)]b)j =$$

$$= b[(j \cdot ia)(ij)] + i[(j \cdot ia)(bj)] - ([(iji)a]b)j \equiv$$

$$\equiv b[j(iai)j] + i[j(ia \cdot b)j] \equiv 0.$$

Isso prova o corolário. □

Lema 4.18. *Seja I um ideal não-nulo de A. Se I não contém ideais nilpotentes não-nulos de A, então $T(I) \neq (0)$.*

Demonstração. Assumimos que $T(I) = (0)$. Pelo Corolário 4.17, temos que $[P(I)]^2 = (0)$. Como $P(I) \subset I$ e $P(I)$ é um ideal de A, então, por hipótese, $P(I) = (0)$. Logo, $I = (0)$ e isso contradiz a hipótese do lema. Portanto, $T(I) \neq (0)$. □

Lema 4.19. *A seguinte identidade é válida:*

$$(z, t, yxy) = (z, \{xyt\}, y) + (z, yty, x)$$

onde $\{xyt\} = (xy)t + (ty)x$.

Demonstração. Iremos mostrar que $(z, x, yxy) = (z, xyx, y)$. de fato, pois aplicando as identidades de Moufang à esquerda e à direita, obtemos

$$(z, x, yxy) = (zx)(yxy) - z(xyxy) = [z(xyx)]y - z(xyxy) = (z, xyx, y).$$

Agora, linearizando essa identidade por $x \mapsto x + t$, obtemos que

$$(z, t, yxy) = (z, \{xyt\}, y) + (z, yty, x).$$

□

Lema 4.20. *Seja I um ideal de A. Se $(m, I, I) = (0)$ para algum $m \in A$, então $(m, A, A) \subset r(T(I))$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.19, para elementos $i, j \in I$ e $a \in A$, temos que

$$(m, iji, a) = -(m, iai, j) + (m, i, \{jia\}) = 0.$$

Assim,

$$(m, T(I), A) = (0) \qquad (1)$$

Se $b \in A$, então, por (1)

$$f(a, b, m, iji) = (ab, m, iji) - b(a, m, iji) - (b, m, iji)a = 0.$$

Logo,

$$(iji)(a,b,m) = -f(a,iji,b,m) + (a(iji),b,m) - (iji,b,m)a = 0$$

e portanto, $(m, A, A) \subset r(T(I))$. $\square$

4.1 Teoria de Radicais

Definição 4.21. Sejam $\mathfrak{R}$ uma classe de álgebras fechada com respeito aos ideais e às imagens homomórficas, $\mathcal{R}$ uma subclasse da classe $\mathfrak{R}$, $A \in \mathcal{R}$ e I um ideal de A. Se I é uma $\mathcal{R}$-álgebra então chamamos I de $\mathcal{R}$-Ideal. A classe $\mathcal{R}$ é chamada radical na classe de álgebras $\mathfrak{R}$ se as seguintes condições são satisfeitas:

1. A imagem homomórfica de uma $\mathcal{R}$-álgebra é uma $\mathcal{R}$-álgebra.
2. Cada álgebra de $\mathcal{R}$ contém um $\mathcal{R}$-ideal $\mathcal{R}(A)$, que contém todos os $\mathcal{R}$-ideais da álgebra A.
3. A álgebra quociente $A/\mathcal{R}(A)$ não contém $\mathcal{R}$-ideais não-nulos.

Nesse caso a aplicação $A \longmapsto \mathcal{R}(A)$ é chamada um radical na classe de álgebras $\mathfrak{R}$. O ideal $\mathcal{R}(A)$ da álgebra A é chamado $\mathcal{R}$-radical de A. Se $A = \mathcal{R}(A)$, então a álgebra A é dita $\mathcal{R}$-radical. Se $\mathcal{R}(A) = 0$, então A é dito $\mathcal{R}$-semisimples. A classe $\mathcal{P}$ de todas as álgebras $\mathcal{R}$-semisimples da classe $\mathfrak{R}$ é chamada de classe semisimples do radical $\mathcal{R}$.

Um radical não é unicamente determinado somente pela sua classe radical, mas também pela sua classe semisimples, como vemos no seguinte resultado:

Teorema 4.22. *Uma classe radical $\mathcal{R}$ é uma coleção de álgebras de $\mathfrak{R}$ que não são mapeadas homomorficamente em álgebras da classe $\mathcal{P}$.*

Demonstração. Se $A \in \mathcal{R}$, então, pela condição 1 da Definição 4.21, A não pode ser mapeada homomorficamente em álgebras da classe $\mathcal{P}$. Se $A \notin \mathcal{R}$, então $A \neq \mathcal{R}(A)$ e $A/\mathcal{R}(A)$ é uma imagem homomórfica da álgebra A e $A/\mathcal{R}(A) \in \mathcal{P}$ pois $\mathcal{R}(A/\mathcal{R}(A)) = 0$. $\square$

Teorema 4.23. *A classe $\mathcal{R}$ é radical se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *A imagem homomórfica de uma $\mathcal{R}$-álgebra é uma $\mathcal{R}$-álgebra.*

2. *Se toda imagem homomórfica não-nula da álgebra A contém um $\mathcal{R}$-ideal não-nulo, então A é uma $\mathcal{R}$-álgebra.*

Demonstração. Se $\mathcal{R}$ é uma classe radical, então a condição 1 está satisfeita. Suponhamos que existe um $\mathcal{R}$-ideal não-nulo em cada imagem homomórfica não-nula da álgebra A e seja a aplicação $A \longmapsto A/\mathcal{R}(A)$. Então, pelo item 3 da Definição 4.21, $A/\mathcal{R}(A)$ não contém $\mathcal{R}$-ideais não-nulos, e isso significa que $A/\mathcal{R}(A) = 0$. Assim, $A = \mathcal{R}(A)$, e A é uma $\mathcal{R}$-álgebra.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{R}$ satisfaça as condições de 1 e 2. Iremos provar que $\mathcal{R}$ é radical. De fato, consideremos o ideal R que é a soma de todos os $\mathcal{R}$-ideais da álgebra A e R é um $\mathcal{R}$-ideal, pois se R não é um $\mathcal{R}$-ideal, então, pelo item 2, temos que existe uma imagem homomórfica não-nula R/I da álgebra R que não contém R-ideais não-nulos e isto é impossível pois, como $I \neq R$, então existe um $\mathcal{R}$-ideal B da álgebra A que não está contido em I. Desde que, $B \subset R$, B é um $\mathcal{R}$-ideal da álgebra R, então pelo segundo teorema do homomorfismo $B + I/I \cong B/B \cap I$, e pela condição 1, $B + I/I$ é um $\mathcal{R}$-ideal não-nulo de R/I. Logo, a condição 2 da Definição 4.21 está satisfeita.

Seja A uma álgebra qualquer. Pelo que vimos acima, existe em A um $\mathcal{R}$-ideal R contendo todos os $\mathcal{R}$-ideais da álgebra A. Suponhamos que A/R contenha um $\mathcal{R}$-ideal não-nulo M/R. Iremos mostrar que $M \in R$ e obteremos com essa contradição que $M \nsubseteq R$. De fato, seja M/N uma imagem homomórfica da álgebra M. Se $R \subset N$ então M/N é uma imagem homomórfica da R-álgebra M/R, e com isto é uma $\mathcal{R}$-álgebra. Se $R \nsubseteq N$, então pelo segundo teorema do homomorfismo $N + R/N \cong R/R \cap N$, e pela condição 1, $N + R/N$ é um $\mathcal{R}$-ideal não-nulo da álgebra M/N. Assim, M satisfaz a condição 3 do Teorema 4.23, e portanto, $M \in R$. Logo, o item 3 está satisfeito. $\square$

Teorema 4.24. *Uma classe $\mathcal{P}$ que não contém a álgebra zero é uma classe semisimples para alguma classe radical $\mathcal{R}$ se, e somente se, $\mathcal{P}$ satisfaz as seguintes condições:*

1. *Todo ideal não-nulo de uma álgebra de $\mathcal{P}$ pode ser mapeado homomorficamente numa álgebra de $\mathcal{P}$.*

2. *Se todo ideal não-nulo de uma álgebra A pode ser mapeado homomorficamente numa álgebra de $\mathcal{P}$, então $A \in \mathcal{P}$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{P}$ uma classe semisimples de algum radical $\mathcal{R}$, $A \in \mathcal{P}$ e I um ideal de A. Como A é $\mathcal{R}$-semisimples, o ideal I não é $\mathcal{R}$-radical e, pelo Teorema 4.22, pode ser mapeado homomorficamente numa álgebra de $\mathcal{P}$. Desta maneira o item 1 está provado. Se $A \notin \mathcal{P}$, então $\mathcal{R}(A) \neq (0)$, e $\mathcal{R}(A)$ é um ideal que não pode ser mapeado homomorficamente numa álgebra de $\mathcal{P}$. Com isto o item 2 está provado.

Reciprocamente, seja $\mathcal{P}$ uma classe de álgebras de $\mathfrak{R}$ satisfazendo as condições 1 e 2 e não contendo a álgebra zero. Denotamos por $\mathcal{R}$ a classe de álgebras que não podem ser mapeadas homomorficamente em álgebras de $\mathcal{P}$. Iremos mostrar que $\mathcal{R}$ é uma classe radical e $\mathcal{P}$ é a classe semisimples do radical $\mathcal{R}$. De fato, é fácil ver que a condição 1 do Teorema 4.23 é válida. Seja A uma álgebra tal que existe um $\mathcal{R}$-ideal não-nulo em qualquer imagem homomórfica não-nula de A. Se $A \notin \mathcal{R}$, então A pode ser mapeado homomorficamente numa álgebra $A^{'} \in \mathcal{P}$ e por hipótese, a álgebra $A^{'}$ possui um $\mathcal{R}$-ideal $I \neq (0)$. Assim, pelo item 1, I pode ser mapeado homomorficamente numa álgebra de $\mathcal{P}$, isto contradiz o fato de que $I \in \mathcal{R}$. Logo, a classe $\mathcal{R}$ é radical.

Resta provar que $\mathcal{P}$ é a classe semisimples desse radical. Se A é uma álgebra de $\mathcal{P}$, então, pelo item 1, nenhum ideal da álgebra A é radical. Consequentemente, A é uma álgebra $\mathcal{R}$-semisimples. Se A é uma álgebra $\mathcal{R}$-semisimples, então não existe ideal não-nulo de A que seja $\mathcal{R}$-radical. Assim, todo ideal não-nulo da álgebra A pode ser mapeado homomorficamente numa álgebra de $\mathcal{P}$. Logo, pelo item 2 segue que $A \in \mathcal{P}$ e portanto, $\mathcal{P}$ é a classe semisimples de $\mathcal{R}$. $\square$

Definição 4.25. Seja $\mathfrak{R}$ uma classe arbitrária de álgebras fechada com respeito aos ideais e às imagens homomórficas. Em cada álgebra $A \in \mathfrak{R}$, definimos a seguinte cadeia de ideais, a qual chamamos de Cadeia de Baer. Definimos $\mathcal{B}_0 = (0)$ e $\mathcal{B}_1 = \sum I_t$, onde I_t são os ideais nilpotentes da álgebra A. Assumimos que os ideais $\mathcal{B}_\alpha$ estão definidos para todos ordinais α menores que um ordinal β. Se β é um limite ordinal, definimos $\mathcal{B}_\beta(A) = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{B}_\alpha(A)$. Se β não é um limite ordinal, então existe um ordinal $\beta - 1$, e definimos $\mathcal{B}_\beta(A)$ como o ideal:

$$\mathcal{B}_\beta(A)/\mathcal{B}_{\beta-1}(A) = \mathcal{B}_1(A/\mathcal{B}_{\beta-1}(A)).$$

Se β é um limite ordinal e $\gamma > \beta$, então $\mathcal{B}_\gamma(A) = \mathcal{B}_\beta(A)$. Denotamos $\mathcal{B}_\beta(A)$ por $\mathcal{B}(A)$.

Teorema 4.26. *A álgebra quociente $A/\mathcal{B}(A)$ não contém ideais nilpotentes não-nulos e $\mathcal{B}(A)$ é o menor ideal com essa propriedade.*

Demonstração. A álgebra quociente $A/\mathcal{B}(A)$ não contém ideais nilpotentes não-nulos pela própria construção do ideal $\mathcal{B}(A)$. Seja o conjunto $\{I_\alpha\}$ de todos os ideais da álgebra A tal que A/I_α é uma álgebra sem ideais nilpotentes não-nulos. É fácil ver que $I = \bigcap I_\alpha$ é o menor ideal desse conjunto. Se $I \subsetneq \mathcal{B}(A)$, então existe um ordinal minimal δ tal que $\mathcal{B}_\delta(A) \nsubseteq I$. É claro que δ não é o limite ordinal e que $\mathcal{B}_{\delta-1}(A) \subset I$. Assim, na álgebra $\overline{A} = A/\mathcal{B}_{\delta-1}(A)$ existe um ideal nilpotente $\overline{K} \neq (0)$ não contido em $\overline{I} = \mathcal{B}_{\delta-1}(A)$. Seja K a imagem inversa completa de $\overline{K}$ na álgebra A. Então, $K \nsubseteq I$ e como, $K^2 \subset \mathcal{B}_{\delta-1}(A) \subset I$, então obtemos um ideal nilpotente não-nulo $K + I/I$ em A/I, o que contradiz a hipótese sobre A/I. Logo, $\mathcal{B}(A) = I$. □

Observação 4.27. (i) A álgebra quociente $A/\mathcal{B}(A)$ é uma soma subdireta de álgebras primas. (ii) Como as álgebras semiprimas não contém ideais nilpotentes não-nulos, então se A é uma álgebra semiprima temos que $\mathcal{B}(A) = (0)$. Assim, pelo item (i) da Observação 4.27, A é uma soma subdireta de álgebras primas.

Teorema 4.28. *Sejam A uma álgebra alternativa semiprima e I um ideal de A. Então $N(I) = I \cap N(A)$.*

Demonstração. Pela Observação 4.27, a álgebra A é uma soma subdireta de álgebras primas. Se $N(I) \nsubseteq N(A)$, então existe $n \in N(I)$, $a, b \in A$ tais que $(n, a, b) \neq 0$ e com isto podemos encontrar uma imagem homomórfica prima $\overline{A}$ de A tal que $(\overline{n}, \overline{a}, \overline{b}) \neq \overline{0}$. É claro que a imagem $\overline{I}$ do ideal I é diferente de zero. Pelo Lema 4.18, temos que $T(\overline{I}) \neq (\overline{0})$. O anulador à direita do ideal $T(\overline{I})$ é um ideal em $\overline{A}$, que é igual a zero pois $\overline{A}$ é primo. Observamos que $\overline{n} \in \overline{N(I)} \subset N(\overline{I})$, e pelo Lema 4.20, $(\overline{n}, \overline{a}, \overline{b}) \in r(T(\overline{I})) = (\overline{0})$ e isto contradiz a escolha de $(\overline{n}, \overline{a}, \overline{b})$. Logo, $N(I) \subset N(A)$, ou seja, $N(I) \subset I \cap N(A)$. A outra inclusão é óbvia. □

Lema 4.29. *Sejam A uma álgebra alternativa, $n \in N(A)$ e $nA^\sharp n = (0)$. Então $(n)^2 = (0)$, onde (n) é o ideal de A gerado pelo elemento n.*

Demonstração. Iremos mostrar que $(n) = A^\sharp n A^\sharp$. De fato, é fácil ver que $A^\sharp n A^\sharp \subset (n)$. Para provar que $(n) \subset A^\sharp n A^\sharp$ é suficiente mostrar que o conjunto $A^\sharp n A^\sharp$ é um ideal de A. Sejam $r \in A$ e $s, t \in A^\sharp$. Então, temos que

$$r \cdot snt = rs \cdot nt - (r, s, nt) = rs \cdot nt - n(r, s, t) \in A^\sharp n A^\sharp,$$

e analogamente se mostra que $snt \cdot r \in A^\sharp n A^\sharp$. Logo, $A^\sharp n A^\sharp$ é um ideal de A.

Afirmamos que $(n)^2 = (0)$. De fato, sejam $r, s, t, v \in A^\sharp$. Então,

$$rns \cdot tnv = r \cdot (ns)(tnv) + (r, ns, tnv) =$$

$$= r[(ns)(tn) \cdot v] - r(ns, tn, v) + n(r, s, tnv) =$$

$$= r[n(st)n \cdot v] - r \cdot n(s, t, v)n + (r, s, n \cdot tnv) = 0.$$

Isso prova o lema. □

Exibiremos uma condição que deve ser satisfeita para qual classe de álgebras $\mathfrak{R}$, a aplicação $\mathcal{B} : A \to \mathcal{B}(A)$ seja radical em $\mathfrak{R}$.

Teorema 4.30. *A aplicação $\mathcal{B}$ é radical na classe de álgebras $\mathfrak{R}$ se, e somente se, todo ideal não-nulo de uma álgebra semiprima de $\mathfrak{R}$ pode ser mapeada homomorficamente numa álgebra semiprima.*

Demonstração. A condição necessária e suficiente é, em particular, a condição 1 do Teorema 4.24 para a classe $\mathcal{P} = \{A \in \mathfrak{R}; \mathcal{B}(A) = (0)\}$. Iremos mostrar que vale a condição 2 do Teorema 4.24 para a classe $\mathcal{P}$. De fato, se cada ideal não-nulo de uma álgebra A pode ser mapeado homomorficamente numa álgebra sem ideais nilpotentes não-nulos, então não pode haver ideais nilpotentes não-nulos na álgebra A, e assim, $A \in \mathcal{P}$. Pelo Teorema 4.24, $\mathcal{P}$ é a classe semisimples de algum radical, para o qual, pelo Teorema 4.22, a classe radical em $\mathfrak{R}$ consiste de álgebras que não podem ser mapeadas homomorficamente em álgebras sem ideais nilpotentes não-nulos. Pelo Teorema 4.26, concluímos que $\mathcal{R} = \{A \in \mathfrak{R}; A = \mathcal{B}(A)\}$ e a condição suficiente está provada.

A condição necessária é também clara, porque se $\mathcal{B}$ é um radical, então sua classe semisimples é $\mathcal{P}$, e a condição 1 do Teorema 4.24 é válida para $\mathcal{P}$. □

Observação 4.31. Se a aplicação $\mathcal{B}$ é radical, então esse radical é chamado de radical de Baer. Em vista do Teorema 4.30, para que a aplicação $\mathcal{B}$ seja um radical na classe de álgebras alternativas é suficiente mostrar que todo ideal I de uma álgebra alternativa semiprima A é uma álgebra semiprima.

Lema 4.32. *Sejam A uma álgebra alternativa semiprima, I um ideal de A e V um ideal nilpotente da álgebra I. Então os submódulos $A^\sharp V$ e $VA^\sharp$ são também ideais nilpotentes da álgebra I.*

Demonstração. Iremos mostrar que $A^\sharp V$ é um ideal de I. De fato, seja $a \in A^\sharp$, $i \in I$ e $v \in V$. Então,

$$(av)i = a(vi) + (a, v, i) = a(vi) - (a, i, v) \in A^\sharp V,$$

$$i(av) = (ia)v - (i, a, v) = (ia)v + (a, i, v) \in A^\sharp V.$$

Assim, $A^\sharp V$ é um ideal de I. Analogamente se mostra que $VA^\sharp$ é um ideal de I.

Como V é um ideal nilpotente de I, então para todo $u, v \in V$, $x \in I$, temos que $(x, u, v) = (xu)v - x(uv) = 0$ e $uv = vu = 0$, e com isto, se $u, v \in V$, $i \in I$, $a, b \in A$, temos que

$$f(a, i, u, v) = ([a, i], u, v) + (a, i, [u, v]) = 0.$$

Pela Observação 4.8, temos que

$$i(a, u, v) = (ai, u, v) - (i, u, v)a = 0$$

e, deste modo, $(a, u, v) \in r(I)$. Desde que, $(a, u, v) = -(u, a, v) \in I$, A é semiprimo e $I \cap r(I) = (0)$, então $(a, u, v) = 0$. Assim,

$$(A, V, V) = (AV)V = (0) \qquad (1)$$

Como $\quad 0 = f(b, v, i, u) = (bv, i, u) - v(b, i, u) - (v, i, u)b \quad$ e

$$0 = f(i, v, b, u) = (iv, b, u) - v(i, b, u) - (v, b, u)i,$$

então $(bv, i, u) = (v, i, u)b - (iv, b, u) + (v, b, u)i$. Por (1), temos que

$$(bv, i, u) = (v, i, u)b - (iv, b, u) + (v, b, u)i = 0$$

Desta maneira,

$$(AV, I, V) = (0) \qquad (2)$$

De (2) e do Lema 4.9 segue que $[AV, V] \subset N(I)$, e de (1) e do Teorema 4.28, temos que

$$VAV \subset N(A). \qquad (3)$$

Usando as seguintes igualdades

$$0 = f(b, v, i, u) = (bv, i, u) - v(b, i, u) - (v, i, u)b$$

$$f(b, i, v, u) = (bi, v, u) - i(b, v, u) - (i, v, u)b,$$

obtemos que $v(i, b, u) = -i(v, b, u) + (i, bv, u) + (v, bi, u)$ e com isto, por (2) e (1), temos

$$v(i,b,u) = -i(v,b,u) + (i,bv,u) + (v,bi,u) = 0.$$

Assim,

$$V(I,A,V) = (0) \qquad (4)$$

Sejam $w = uav$ e $i = ua$. Então $w \in V$, $w^2 = 0$. Por (3), $w \in N(A)$ e por (4)

$$wbw = w[b(iv)] = w[(bi)v] - w(b,i,v) = 0.$$

e segue que $w \in N(A)$ e $wA^\sharp w = (0)$. Pelo Lema 4.29, w gera um ideal nilpotente na álgebra A, e com isto, $w = 0$. Desta maneira,

$$VAV = (0) \qquad (5)$$

De (2), (1) e (5), temos que

$$f(i,a,bv,u) = ([i,a],bv,u) + (i,a,[bv,u]) = 0$$

e de (2),

$$(a,u,bv)i = (ia,u,bv) - a(i,u,bv) = 0,$$

isto é, $(a,u,bv) \in l(I)$. Como $(a,u,bv) \in I$ e A é semiprimo, então $(a,u,bv) = 0$, e com isto

$$(A,V,AV) = (0) \qquad (6)$$

De (1), (5) e (6) segue que $(A^\sharp V)^2 = (0)$. Analogamente obtemos que $(VA^\sharp)^2 = (0)$. $\square$

Teorema 4.33. *Seja A uma álgebra alternativa semiprima. Então todo ideal I de A é uma álgebra semiprima.*

Demonstração. Suponhamos que I não seja uma álgebra semiprima, isto é, existe um ideal $0 \neq U$ nilpotente. Denotamos por $\mathcal{U}$ o conjunto de todos os ideais nilpotentes não-nulos da álgebra I contendo U. O conjunto $\mathcal{U} \neq \emptyset$, pois $U \in \mathcal{U}$. Além disso, $\mathcal{U}$ é um conjunto parcialmente ordenado pela inclusão. Pelo Lema de Zorn, $\mathcal{U}$ contém um elemento maximal V. Pelo Lema 4.32, $A^\sharp V \in \mathcal{U}$, e segue que, $AV \subset V$. Analogamente, $VA \subset V$. Consequentemente, V é um ideal da álgebra A e como A é uma álgebra semiprima, então $V = (0)$. Logo, $U = (0)$ e esta contradição prova o teorema. $\square$

Lema 4.34. *Sejam A uma álgebra alternativa, B e I ideais de A, com $B^2 \subset I$ e I um ideal nilpotente. Se a álgebra A satisfaz a condição da cadeia ascendente para ideais contidos em B, então B é um ideal nilpotente.*

Demonstração. Iremos provar por indução sobre k a existência de um número $f(k)$ tal que

$$B^{f(k)} \subset I^k.$$

Assim o lema estará provado pois $I^n = (0)$ para algum n e, consequentemente, $B^{f(n)} = (0)$. Claramente, se $k = 1$ a condição é satisfeita. Suponhamos que vale $B^{f(k)} \subset I^k$ e que não existe $f(k+1)$ tal que $B^{f(k+1)} \subset I^{k+1}$. Seja P um ideal de A. Definimos

$$E_0(P) = \{x \in B; Px \subset I^{k+1}\}, \qquad E_i(P) = E_0((P, B)_i).$$

É fácil ver que $E_i(P)$ são ideais de A. Desta maneira, temos a seguinte cadeia ascendente de ideais de A:

$$E_0(P) \subset E_1(P) \subset \cdots E_i(P) \subset \cdots$$

Como $E_i(P) \subset B$, temos, por hipótese, que existe n tal que $E_n(P) = E_{n+1}(P) = \cdots$. Denotamos $E_n(P)$ por $E(P)$. Como $B^{f(k)} \subset I^k$ e pela escolha de k, temos que

$$E(I^k) \neq B.$$

Seja $E(C)$ o elemento maximal do conjunto de ideais $\{E(C_\alpha); C_\alpha \subset I^k, E(C_\alpha) \neq B\}$. Considerando em lugar de C, se necessário, o ideal $(C, B)_i$ para um i adequado, podemos assumir que

$$E_0(C) = E_1(C) = \cdots E(C).$$

Além disso, colocando no lugar de C, o ideal $C + I^{k+1}$, podemos também assumir que $I^{k+1} \subset C$.

Seja $b \in E(C)$. Então $(CB)b \nsubseteq I^{k+1}$. Consideramos o conjunto $D = (CB)b + I^{k+1}$ e iremos provar que D é um ideal de A. De fato, escrevemos $u \equiv v$ se $u - v \in I^{k+1}$. Sejam $c \in C$, $x, y \in B$ e $a \in A$. Note que pelas identidades de Moufang, temos as seguintes relações:

$$(cx)y \equiv -(cy)x, \qquad (1)$$

$$[(cx)y]a \equiv -[(ca)y]x. \qquad (2)$$

Assim,

$$[(cx)b]a \equiv -[(ca)b]x \equiv [(ca)x]b = (c_1x)b,$$

onde $c_1 \in C$. Com isto, D é um ideal à direita de A. Além disso,

$$a[(cx)b] \equiv -a[(cb)x] = a[(xb)c] - [(ac)b]x - [(ax)b]c \equiv$$

$$\equiv -[(ac)b]x \equiv [(ac)x]b = (c_2x)b,$$

onde $c_2 \in C$ e com isto, D é um ideal à esquerda de A. Logo, D é um ideal de A.

Como $D \subset C$, então $E(C) \subset E(D)$. Desde que, $b \in E(D)$, temos que $E(D) \neq E(C)$. Consequentemente, $E(D) = B$. Desta maneira,

$$(D, B)_q \subset I^{k+1}$$

para algum q e por (1) temos que

$$(C, B)_q b \subset I^{k+1},$$

o que contradiz a escolha de b. $\square$

Definição 4.35. Sejam A uma álgebra alternativa e os seguintes subconjuntos de A, $A^{(1)} = A^2$ e $A^{(n)} = (A^{(n-1)})^2$. Chamamos a álgebra A de uma *álgebra solúvel* se $A^{(n)} = (0)$, para algum n.

Teorema 4.36. *Seja A uma álgebra alternativa que satisfaz a condição de cadeia ascendente para ideais. Então o radical de Baer $\mathcal{B}(A)$ de A é nilpotente.*

Demonstração. Seja B o ideal solúvel maximal da álgebra A. Como a álgebra quociente A/B não contém contém ideais nilpotentes não-nulos, então $B = \mathcal{B}(A)$. Consideramos a cadeia

$$B \supset B^{(1)} \supset \cdots \supset B^{(n)} = (0).$$

É claro que $B^{(n-1)}$ é um ideal nilpotente. Pelo Lema 4.34, podemos concluir que o ideal $B^{(n-2)}$ também é nilpotente. Aplicando o Lema 4.34 tantas vezes quantas foram necessárias, teremos que o ideal B é nilpotente. $\square$

5 Teorema de Goldie para Álgebras Alternativas

Neste capítulo abordamos o Teorema de Goldie para álgebras alternativas. Demonstramos que, analogamente ao caso associativo, sob algumas hipóteses adicionais, todo ideal à direita de uma álgebra alternativa semiprima contém um elemento regular e, além disso, o socle de uma álgebra alternativa semiprima é gerado por um elemento idempotente central. Finalmente, apresentamos o teorema de Goldie no contexto alternativo e exibimos uma demonstração deste teorema.

Por Slater [4], temos o seguinte resultado:

Lema 5.1. *Sejam R uma álgebra alternativa semiprima e A um ideal à direita de R. Então $3A \subset N(R)$ ou $A \cap Z(R) \neq (0)$.*

À partir deste momento, ao longo deste capítulo, todos os resultados que serão apresentados são do artigo [1].

Do Lema 5.1, segue o seguinte resultado

Lema 5.2. *Seja R uma álgebra alternativa semiprima. Se $3(a, b, c) = 0$ implicar $(a, b, c) = 0$, para todo associador (a, b, c) em R, então, para todo ideal à direita A de R, temos que $A \subset N(R)$ ou $A \cap Z(R) \neq (0)$.*

Lema 5.3. *Suponhamos uma álgebra alternativa semiprima R que satisfaça as seguintes condições:*

1. $3(a, b, c) = 0$ *implica* $(a, b, c) = 0$*, para todo associador* (a, b, c) *em* R.

2. *R satisfaz a condição de cadeia ascendente para anuladores à direita da forma $r(a)$, $a \in N(R)$.*

Então qualquer ideal à esquerda ou à direita não-nulo de R contém um elemento não-nilpotente de $N(R)$.

Demonstração. Seja I um ideal unilateral não-nulo de R e suponhamos que todo elemento de $I \cap N(R)$ seja nilpotente. Como R é semiprimo, então $I \cap Z(R) = (0)$ e pelo Lema 5.2, temos que $I \subset N(R)$. Se $0 \neq a_1 \in I$, então existe $x \in R$ tal que $a_2 = a_1 x a_1 \neq 0$, pois se $0 = a_1 R a_1$, temos que $a_1 R \subset l(a_1) \subset l(a_1 R)$. Desde que R é semiprimo e $a_1 R = 0$, então $a_1 = 0$, o que contradiz o fato que $a_1 \neq 0$. É fácil ver que $r(a_1) \subset r(a_2)$. Iremos mostrar que $r(a_1) \neq r(a_2)$. De fato, suponhamos que I seja um ideal à direita de R. Então $0 \neq a_1 x \in I$ e com isto existe $n \geq 1$ tal que $(a_1 x)^n \neq 0$ e $(a_1 x)^{n+1} = 0$. Se $n = 1$ então $x \in r(a_2)$ e $x \notin r(a_1)$. Suponhamos que $n \geq 2$. Nesse caso $x(a_1 x)^{n-1} \in r(a_2)$ e $x(a_1 x)^{n-1} \notin r(a_1)$.

Suponhamos que I seja um ideal à esquerda de R. Então existe $n \geq 1$ tal que $(xa_1)^n \neq 0$ e $(xa_1)^{n+1} = 0$. Agora temos 2 casos a considerar: (1) Se $n = 1$ então $xa_1 \in r(a_2)$ e $xa_1 \notin r(a_1)$. (2) Para o caso $n \geq 2$, temos que se $a_1(xa_1)^n = 0$ então $(xa_1)^{n-1} \in r(a_2)$ e notamos que $(xa_1)^{n-1} \notin r(a_1)$. Se $a_1(xa_1)^n \neq 0$, então $(xa_1)^n \in r(a_2)$ e notamos que $(xa_1) \notin r(a_1)$. Assim, $r(a_1) \subsetneq r(a_2)$.

Repetindo esse argumento, encontramos elementos $0 \neq a_i \in I$ tais que $r(a_1) \subsetneq r(a_2) \subsetneq \cdots \subsetneq r(a_i) \subsetneq \cdots$ e isto contradiz o item 2. Logo, $I \cap N(R)$ contém pelo menos um elemento que não é nilpotente. $\square$

O próximo corolário é uma consequência imediata do último lema e por isso omitiremos a prova.

Corolário 5.4. *Seja R como no Lema 5.3. Então R não possui ideais nis unilaterais não-nulos.*

Corolário 5.5. *Seja A uma álgebra alternativa noetheriana sobre um corpo F contendo o elemento* $1/3$. *Então qualquer ideal nil unilateral de A é nilpotente.*

Demonstração. Seja I um ideal nil unilateral de A. Pelo Corolário 5.4, $I \subset \mathcal{B}(A)$, onde $\mathcal{B}(A)$ é o radical de Baer de A. Pelo Teorema 4.36, $\mathcal{B}(A)$ é nilpotente. Logo, I é nilpotente. $\square$

Corolário 5.6. *Sejam R como no Lema 5.3 e K um ideal à direita essencial de R. Então $l(K) = (0)$.*

Demonstração. Seja $a \in l(K) \cap N(R)$. Então $r(a) \subset r(a^2) \subset ...$, e existe $n \geq 1$ tal que $r(a^n) = r(a^{n+1}) = ...$ Notamos que $ak = 0$, para todo $k \in K$ e com isto, $K \subset r(a) \subset r(a^n)$. Assim, $r(a^n)$ é um ideal à direita essencial de R. Seja $y \in a^nR \cap r(a^n)$. Então, $y = a^nx$, para algum $x \in R$ e temos que $0 = a^ny = a^n(a^nx) = a^{2n}x$. Desta maneira, $x \in r(a^{2n}) = r(a^n)$, o que implica que $y = a^nx = 0$. Assim, $a^nR \cap r(a^n) = (0)$. Como $r(a^n)$ é um ideal à direita essencial de R, então $a^nR = (0)$ e segue que $a^n = 0$. Logo, pelo Lema 5.3 $l(K) = (0)$. □

Lema 5.7. *Sejam R uma álgebra alternativa que não contém uma soma direta infinita de ideais à direita não-nulos e $c \in N(R)$ um elemento regular à direita de R. Então cR é um ideal à direita essencial de R.*

Demonstração. Sejam I um ideal à direita de R tal que $I \cap cR = (0)$, $x = c^ny \in c^nI$ e $r \in R$. Então, $xr = (c^ny)r$. Como $c \in N(R)$ temos que $(c^ny)r = c^n(yr) \in c^nI$. Assim, c^nI é um ideal à direita de R para todo n. Mostraremos que a soma $I + cI + c^2I + ...$ é direta.

De fato, seja $x_0 + cx_1 + c^2x_2 + ... + c^nx_n = 0$, onde $x_i \in I$. Então,

$$x_0 = -(cx_1 + c^2x_2 + ... + c^nx_n) = -c(x_1 + c^1x_2 + ... + c^{n-1}x_n) \in I \cap cR = (0).$$

Desta maneira, $x_1 + c^1x_2 + ... + c^{n-1}x_n = 0$, pois c é um elemento regular à direita em R. Repetindo esse processo $n - 1$ vezes temos que $x_i = 0$, $1 \leq i \leq n$. Logo, $I + cI + c^2I + ...$ é uma soma direta e segue que existe $n \geq 1$ tal que $c^nI = (0)$. Portanto, $I = (0)$, e com isso, cR é um ideal à direita essencial de R. □

Lema 5.8. *Seja R uma álgebra alternativa semiprima que safisfaz as seguintes condições:*

1. $3(a, b, c) = 0$ *implica* $(a, b, c) = 0$*, para todo associador* (a, b, c) *em* R.
2. *R satisfaz a condição de cadeia ascendente para anuladores à direita da forma $r(a)$, $a \in N(R)$.*
3. *R não contém uma soma direta infinita de ideais à direita não-nulos.*

Então todo elemento de $N(R)$ que é regular à direita em R é regular em R.

Demonstração. Seja $c \in N(R)$ tal que c é um elemento regular à direita de R. Iremos mostrar que $l(c) = (0)$. De fato, pela Lema 5.7 temos que cR é um ideal à direita essencial de R, e com isto, pelo Corolário 5.6 temos que $l(cR) = (0)$. Se $x \in l(c)$, então $xc = 0$, o que implica que $(0) = (xc)R = x(cR)$, pois $c \in N(R)$, e segue que $x \in l(cR)$. Notamos que $l(c) \subset l(cR) = (0)$, pois é fácil ver que $l(c) = l(cR)$, desde que $c \in N(R)$. Assim, $l(c) = (0)$ e com isso c é um elemento regular em R. □

Teorema 5.9. *Sejam R como no Lema 5.8 e K um ideal à direita essencial de R. Então K contém um elemento de $N(R)$ que é regular em R.*

Demonstração. Pelo Lema 5.3, existe $a_1 \in K \cap N(R)$ um elemento não-nilpotente e suponhamos que $r(a_1)$ seja maximal. Claramente $r(a_1) \subset r(a_1^2)$ e a_1^2 é um elemento não-nilpotente de $K \cap N(R)$ e com isto, $r(a_1) = r(a_1^2)$. Se $r(a_1) = (0)$, então pelo Lema 5.8, $l(a_1) = (0)$ e segue que a_1 é um elemento regular de R e o teorema está provado.

Suponhamos que $r(a_1) \neq (0)$, $r(a_1) \cap K \neq 0$. Seja $a_2 \in r(a_1) \cap K \cap N(R)$ um elemento não-nilpotente com $r(a_2)$ maximal. Então $r(a_2) = r(a_2^2)$. Iremos mostrar que a soma $a_1R + a_2R$ é direta. De fato, seja $a_1x + a_2y = 0$, com $x, y \in R$. Então, $a_1x = -a_2y$, o que implica que $a_1(a_1x) = -a_1(a_2y) = -(a_1a_2)y = 0$, pois $a_2 \in r(a_1)$. Assim $a_1^2x = a_1(a_1x) = 0$ e segue que, $x \in r(a_1^2) = r(a_1)$, o que implica $a_1x = 0$. Logo $a_2y = 0$. Desta maneira, a soma $a_1R + a_2R$ é direta. É fácil ver que $r(a_1 + a_2) = r(a_1) \cap r(a_2)$. Se $r(a_1 + a_2) = (0)$, pelo mesmo argumento utilizado acima, o teorema está provado.

Se $r(a_1 + a_2) \neq (0)$, podemos tomar $a_3 \in r(a_1 + a_2) \cap K \cap N(R)$ um elemento não-nilpotente com $r(a_3)$ o maior possível. Então $r(a_3) = r(a_3^2)$ e a soma $a_1R + a_2R + a_3R$ é direta. Assim $r(a_1 + a_2 + a_3) = r(a_1) \cap r(a_2) \cap r(a_3)$.

Como R não contém uma soma direta infinita de ideais à direita não-nulos, esse processo deve parar, e quando isso ocorre temos os elementos $a_1, ..., a_n$ de $K \cap N(R)$ tal que $r(a_1 + ... + a_n) = 0$. Logo, $a = a_1 + ... + a_n \in K \cap N(R)$ é um elemento regular à direita de R e pelo Lema 5.8 a é um elemento regular de R. $\square$

Teorema 5.10. *Sejam R como no Lema 5.8 e S o socle de R. Então existe um elemento idempotente central e de R tal que $S = eR$.*

Demonstração. De maneira análoga ao caso associativo, existe um ideal à direita T de R tal que $S \cap T = 0$ e $S \oplus T$ é um ideal à direita essencial de R. Pelo Teorema 5.9 existe $s \in S$ e $t \in T$ tal que $c = s + t \in N(R)$ e c é um elemento regular de R. De maneira análoga ao caso associativo, temos que S é um ideal de R e com isto, $TS \subset T \cap S = 0$. Assim, $cS \subset S$.

Suponhamos que $cS \neq S$. Então para todo $n \geq 0$ existe um ideal à direita não-nulo A_n de R tal que $c^nS = A_n \oplus c^{n+1}S$. É fácil ver que a soma $A_0 + A_1 + A_2 + ...$ é direta e é infinita, contradizendo as hipóteses do teorema. Desta maneira, $cS = S$ e segue que existe $e \in S$ tal que $s = ce$. Claramente temos que $ce = se + te = se = ce^2$ e com isto temos que $e = e^2$. Além disso, para todo $x \in S$, temos que $cx = sx + tx = sx = (ce)x = c(ex)$. Assim, $x = ex$. Logo, $S = eR$.

Mostraremos que $e \in N(R)$. De fato, seja $x, y \in R$. Então, temos que $0 = (c, x, y) = (s, x, y) + (t, x, y)$. Como $T \cap S = 0$, então $(s, x, y) = 0$. Assim, $s \in N(R)$ e obtemos que $c(e, x, y) = (ce, x, y) = (s, x, y) = 0$. Desta maneira, $e \in N(R)$. Seja $x \in R$. Como $xe \in S$ e $S = eR$, então $xe = exe$. Por outro lado $(exe - ex)eR = 0$, o que implica que $(exe - ex) \in S \cap l(S) = 0$, pois R é semiprimo. Logo, $ex = exe = xe$ e, portanto, $e \in Z(R)$. □

Teorema 5.11. *Seja R uma álgebra alternativa prima que satisfaz as condições $1 - 3$ do Lema 5.8 e que tem socle não-nulo. Então R é uma álgebra alternativa simples e artiniana.*

Demonstração. Sejam I um ideal não-nulo de R e A um ideal à direita de R tais que $I \cap A = (0)$. Como $AI \subset A \cap I$, então $AI = (0)$. Mostraremos que $(RA)I = (0)$. De fato, desde que $AI = (0)$ então $A \subset l(I)$ e como I é um ideal, então pelo Lema 4.11, $l(I)$ é um ideal à esquerda e com isso, $RA \subset l(I)$. Assim, $(RA)I = (0)$. É fácil ver que $A + RA$ é o ideal gerado por A em R e $(A + RA)I = AI + (RA)I = (RA)I = (0)$. Assim, $A = (0)$, pois $I \neq 0$ e R é primo. Desta maneira, todo ideal não-nulo de R é um ideal à direita essencial e, com isto, $S = soc(R) \subset I$.

Pelo Teorema 5.9, existe um elemento regular $c \in S \cap N(R)$. Assim, pelo mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema 5.10, temos que $S = cS$. Como $cR \subset S$, temos que $cR = cS$. Logo, $R = S$ e com isto, $I = R$. Desta maneira, R é simples. A igualdade $R = S$ e a condição 3 mostra que R é uma álgebra artiniana à direita e, portanto, R é artiniano. □

Definição 5.12. Seja $S = \{a \in N(R);\ a \text{ é regular em } R\}$ e suponhamos que $S \neq \emptyset$. Uma álgebra alternativa Q com 1 é chamada uma álgebra quociente à direita de R em relação a S se:

1. R é uma sub-álgebra de Q.
2. Todo elemento de S é inversível em Q.
3. Todo elemento $q \in Q$ pode ser escrito da forma $q = xa^{-1}$, onde $x \in R$ e $a \in S$.

Lema 5.13. *Se Q é uma álgebra quociente à direita de R com relação a S então $N(R) \subset N(Q)$ e para todo $a \in S$, $a^{-1} \in N(Q)$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.1, temos que em qualquer álgebra alternativa vale a seguinte identidade

$$x(y,z,t)+(x,y,z)t=(xy,z,t)-(x,yz,t)+(x,y,zt) \tag{1}$$

e pelo Corolário 4.7, em qualquer álgebra alternativa vale

$$(xy,z,t)-y(x,z,t)-(y,z,t)x=([x,y],z,t)+(x,y,[z,t]). \tag{2}$$

Assim, por (2), temos que

$$(a^{-1},x,y)a=(aa^{-1},x,y)-a^{-1}(a,x,y)-([a,a^{-1}],x,y)-(a,a^{-1},[x,y])=0.$$

para cada $a\in S$ e $x,y\in R$. Desta maneira,

$$(a^{-1},x,y)=0, \qquad a\in S,\ x,y\in R. \tag{3}$$

Seja $n\in N(R)$, $a\in S$, $x,y\in R$. Então, por (1) e (3), temos

$$(n,x,ya^{-1})=n(x,y,a^{-1})+(n,x,y)a^{-1}-(nx,y,a^{-1})+(n,xy,a^{-1})=0.$$

e segue que

$$(n,x,q)=0, \qquad n\in N(R),\ x\in R,\ q\in Q. \tag{4}$$

Seja $a\in S$, $q\in Q$, $x\in R$. Então, por (1) e (4) temos que

$$a(a^{-1},q,x)=(aa^{-1},q,x)-(a,a^{-1}q,x)+(a,a^{-1},qx)-(a,a^{-1},q)x=0.$$

Assim,

$$(a^{-1},q,x)=0, \qquad a\in S,\ q\in Q,\ x\in R. \tag{5}$$

Seja $n\in N(R)$, $a\in S$, $x\in R$, $q\in Q$. Então, por (4) e (5), obtemos que

$$(n,q,xa^{-1})=n(q,x,a^{-1})+(n,q,x)a^{-1}-(nq,x,a^{-1})+(n,qx,a^{-1})=0$$

e com isto,

$$(n,q,q^{'})=0, \qquad n\in N(R),\ q,q^{'}\in Q. \tag{6}$$

Logo, $N(R)\subset N(Q)$. Além disso, para cada $a\in S$ e $q,q^{'}\in Q$ temos que

$$a(a^{-1},q,q^{'})=(aa^{-1},q,q^{'})=0.$$

e segue que $a^{-1}\in N(Q)$. □

Lema 5.14. *A álgebra de quociente à direita de R com relação a S, se existe, é única a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Suponhamos que Q_1 e Q_2 sejam álgebras quocientes à direita de R com relação a S. Sejam $x, y \in R$ e $a, b \in S$. Então, pelo Lema 5.13 temos que se a igualdade $xa^{-1} = yb^{-1}$ é válida em Q_1, então é também válida em Q_2. Consideremos $\sigma : Q_1 \to Q_2$ tal que $\sigma(xa^{-1}) = xa^{-1}$, onde $x \in R$ e $a \in S$. É fácil ver que σ é o isomorfismo desejado. $\square$

Lema 5.15. *R tem uma álgebra quociente à direita com relação a S se, e somente se, R satisfaz a condição de Ore à direita com respeito a S, isto é, para cada $x \in R$ e $a \in S$, existe $y \in R$ e $b \in S$ tal que $xb = ay$.*

Demonstração. A demonstração desse lema é análoga ao do caso associativo, como visto no Teorema 3.1. $\square$

Teorema 5.16. *Seja R é uma álgebra alternativa semiprima que satisfaz as seguintes condições:*

1. *$3(a, b, c) = 0$ implica $(a, b, c) = 0$, para todo associador (a, b, c) em R.*

2. *R satisfaz a condição de cadeia ascendente para anuladores à direita da forma $r(a)$, $a \in N(R)$.*

3. *R não contém uma soma direta infinita de ideais à direita não-nulos.*

Então a álgebra quociente à direita de R com relação a S existe e é semisimples e artiniana.

Demonstração. Como R é um ideal à direita essencial de R, pelo Teorema 5.9, $S \neq \emptyset$. Iremos provar que R satisfaz a condição de Ore com relação à S, ou seja, dado $x \in R$ e $c \in S$, existem $y \in R$, $b \in S$ tal que $xb = cy$. De fato, seja I ideal à direita de R tal que $xI \subset cR$. Se I é um ideal à direita essencial de R, então pelo Teorema 5.9, existe $d \in I \cap S$ tal que $xd = cy$, $y \in R$. Suponhamos que I não é essencial. Então existe um ideal à direita não-nulo J de R tal que $I \cap J = (0)$. Pelo Lema 5.7, cR é um ideal à direita essencial de R e, com isto, $J \cap cR \neq (0)$. Pelo Lema 5.2, $J \cap cR \cap Z(R) \neq (0)$ ou $J \cap cR \subset N(R)$. Se $J \cap cR \subset N(R)$, a demonstração segue de forma análoga a demonstração do Teorema 3.14.

Suponhamos que $J \cap cR \cap Z(R) \neq (0)$. Seja $0 \neq z \in J \cap cR \cap Z(R)$. Então $I_1 = zR$ é um ideal não-nulo de R, pois R é semiprimo e com isto, temos $I_1 \subset J \cap cR$ e $xI_1 = x(zR) = (xz)R = (zx)R = z(xR) \subset cR$. Como $I \cap I_1 \subset I \cap J = (0)$, temos que $x(I \oplus I_1) \subset cR$.

Assim, em ambos casos, existe um ideal à direita não-nulo I_1 de R tal que $x(I \oplus I_1) \subset cR$. Se $I \oplus I_1$ é essencial, então a tese se verifica. Se $I \oplus I_1$ não é essencial, então existe um ideal à direita não-nulo I_2 de R tal que $x(I \oplus I_1 \oplus I_2) \subset cR$, e assim sucessivamente. Como R não contém uma soma direta infinita de ideais à direita não-nulos, esse processo deve parar, e quando isso ocorre, existe um ideal à direita essencial K de R tal que $xK \subset cR$. Desta maneira, R satisfaz a condição de Ore com respeito à S. Pelo Lema 5.15, existe uma álgebra de quociente à direita Q de R com relação à S.

Sejam I um ideal à direita de Q e $x = ab^{-1} \in I$. Então, $xb = a \in I \cap R$. Se $I \cap R = (0)$, então $I = (0)$ e segue que Q é semiprimo. Se $I \cap R \neq 0$, então existe um ideal à direita A de R tal que $(I \cap R) \oplus A$ é um ideal à direita essencial de R. Seja $c \in S \cap (I \cap R) \oplus A$ tal que $c = x + a$, onde $x \in I \cap R$ e $a \in A$. Consideramos

$$J = AQ = \{bq; b \in A, q \in Q\} = \{bs^{-1}; b \in A, s \in S\}.$$

É fácil ver que J é o ideal à direita de Q gerado por A. Notamos que $1 = cc^{-1} = xc^{-1} + ac^{-1} = e + f$, com $e = xc^{-1} \in I$ e $f = ac^{-1} \in J$. Como $I \cap J = (0)$, então $Q = I \oplus J$ e com isso, $fe = e - e^2 \in I \cap J = (0)$. Assim, $e^2 = e$ e, também $f^2 = f$. Sejam $q, q' \in Q$. É claro que $0 = (1, q, q') = (e + f, q, q') = (e, q, q') + (f, q, q')$. Logo, $(e, q, q') \in I \cap J = (0)$ e portanto, $e \in N(Q)$ e $f \in N(Q)$.

Seja $x \in I$, $x = ex + fx$. Então, $fx = x - ex \in I \cap J = (0)$. Dessa maneira, $x = ex$, para todo $x \in I$. Assim, $I = eQ$ e com isto, temos provado que todo ideal à direita de Q é gerado por um elemento idempotente e, com $e \in N(Q)$.

Como para todo ideal à direita I de Q existe um ideal à direita J de Q tal que $I \oplus J = Q$, então temos que se $I_1 \supset I_2$ são dois ideais à direita de Q então existe um ideal à direita A de Q tal que $I_1 = I_2 \oplus A$. Suponhamos que exista $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ uma cadeia descendente estrita de ideais à direita de Q. Para cada $n \geq 1$ existe um ideal à direita não-nulo A_n de Q tal que $I_n = I_{n+1} \oplus A_n$. A soma $A_1 + A_2 + \cdots$ infinita é direta e desta maneira, $(A_1 \cap R) \oplus (A_2 \cap R) \oplus \cdots$ é uma soma direta infinita de ideais à direita de R, o que contradiz a hipótese. Logo, Q é artiniano à direita.

Seja I um ideal de Q, então existe $e \in N(Q)$ tal que $e^2 = e$ e $I = eQ$. Mostraremos que $e \in Z(Q)$, isto é, para todo $x \in Q$, $ex = xe$. De fato, como I é um ideal de Q, segue que $xe \in I$, $\forall\ x \in Q$ e isto implica, como visto acima, que $xe = e(xe) = exe$. Desde que,

$$(exe - ex)I = (exe - ex)eQ = (exe - exe)Q = (0),$$

então $(exe - ex) \in I \cap l(I) = (0)$, pois Q é semiprimo, como visto acima.

Logo, $exe - ex = 0$, o que implica que $exe = ex$. Como, $xe = exe$, então $xe = exe = ex$, para todo $x \in Q$, isto é, $e \in Z(Q)$. Consequentemente, existe um ideal J de Q tal que $I \oplus J = Q$, e com isso, Q é semisimples. $\square$

Referências

[1] H. Essannouni and A. Kaidi, Goldie's Theorem for Alternative Rings, Proceedings of the american mathematical society, vol. 121, number 1, May 1994, pp. 39-45.

[2] H. Essannouni and A. Kaidi, Semiprime alternative rings with a.c.c., Lecture Notes in Math., vol. 1328, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1988, pp. 82-93.

[3] A. I. Shirshov, A.M. Slin'ko, I. P. Shestakov e K.A. Zhevlakov, Rings that are nearly associative, Academic Press, New York, 1982

[4] M. Slater, Ideals in semiprime alternative rings, J. Algebra 8 (1968), 60-76.

[5] M. Slater, The socle of an alternative ring, J. Algebra 14 (1970), 443-463.