

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Efeitos de 2ª Ordem nas Frequências Naturais de Vibração de  
Edifícios Altos**

**Ana Raíza Ciscoto Yoshioka**

Porto Alegre  
2023

ANA RAÍZA CISCOTO YOSHIOKA

**EFEITOS DE 2ª ORDEM NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE  
VIBRAÇÃO DE EDIFÍCIOS ALTOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia.

Porto Alegre  
2023

**ANA RAÍZA CISCOTO YOSHIOKA**

**EFEITOS DE 2ª ORDEM NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE  
VIBRAÇÃO DE EDIFÍCIOS ALTOS**

“Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.”

Porto Alegre, 20 de julho de 2023.

Prof. Marcelo Maia Rocha  
Dr. techn., Universität Innsbruck, Áustria  
Orientador

Prof. Dr. Lucas Festugato  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Alexandre de Macêdo Wahrhaftig (Poli-USP)**  
Dr, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Brasil

**Prof. Acir Mércio Loredou-Souza (UFRGS)**  
Dr., Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

**Prof. Mauro de Vasconcelos Real (UFRGS)**  
PhD., Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil

“Dedico este trabalho à minha mãe, Maria Madalena; a meu padrinho e avô Genésio Ciscoto (*in memoriam*); e aos demais familiares que sempre me apoiaram nesta trajetória acadêmica e profissional.”

## AGRADECIMENTOS

“Agradeço a Deus pela força, pela proteção e por se mostrar presente na angústia e na alegria.

Agradeço à minha família e aos meus amigos de longa data por me apoiarem em todas as dificuldades, pela paciência e compreensão durante minha vida acadêmica.

Agradeço ao Professor Marcelo Maia Rocha, excelente pesquisador, professor, engenheiro, músico e, além de tudo, nobre pessoa, pela orientação e amizade ao longo do curso. Grata principalmente por entender os desafios de conciliar o mestrado com a vida profissional.

Agradeço aos professores do PPGEC por contribuírem para minha formação; em especial, ao Prof. Dr. Acir M. Loredou-Souza (professor também na especialização UEL), Prof. Dr. Mauro de Vasconcelos Real e Prof. Dr. Alexandre de Macêdo Wahrhaftig pelas contribuições a este trabalho.

Agradeço ao Eng. Mauer Egas, amigo e mentor na Engenharia de Estruturas, pelo apoio e paciência durante este curso. Ao Prof. Dr. Rafael Alves de Souza (UEM) pelo constante incentivo e paixão pela profissão compartilhadas na minha iniciação profissional. E ao Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira (UTFPR), que acompanhou minha trajetória acadêmica e me apoiou nos momentos mais difíceis.

Agradeço aos engenheiros supervisores da Estrutural Engenharia, Valdir Zerbinati e Vitor Faustino Pereira, pela disponibilização das licenças originais dos programas de análise estrutural empregados na pesquisa. Grata também a Vitor Garbin, chefe de equipe, e Bárbara Mello, por me auxiliarem na reta final do curso.

Finalmente, sou grata a meus colegas de mestrado, colegas de trabalho da Wosniak Engenharia e a toda equipe da Estrutural Engenharia, por serem pacientes e compreensivos durante a conclusão desta etapa.

A todos vocês, minha eterna gratidão!”

Dias inteiros de calma, noites de ardência,  
dedos no leme e olhos no horizonte,  
descobri a alegria de transformar distâncias em tempo.

Um tempo em que aprendi  
a entender as coisas do mar,  
a conversar com as grandes ondas  
e não discutir com o mau tempo.

A transformar o medo em respeito,  
o respeito em confiança.  
Descobri como é bom chegar quando se tem paciência.  
E para se chegar aonde quer que seja,  
aprendi que não é preciso dominar a força, mas a razão.  
Preciso, antes de mais nada, querer.

*Trecho do livro “Cem Dias Entre Céu e Mar” – Amyr Klink*

## RESUMO

YOSHIOKA, A.R.C. **Efeitos de 2ª ordem nas frequências naturais de vibração de edifícios altos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Área de Concentração Estruturas) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2022.

A estabilidade global de edifícios é de grande importância no cotidiano de projetos de engenharia civil. Esta propriedade é influenciada pela geometria da estrutura, pela escolha do material (aço, concreto e/ou madeira), pelo processo construtivo e pelas condições meteorológicas do local de construção. Os principais métodos utilizados para a avaliação da estabilidade global são prescritos pela ABNT NBR 6118:2014 e por normas internacionais como a DIN 1045-1:2008, o EUROCODE 2 (EN 1992-1-1:2004), a AS 3600:2018 e o ACI 318-19. Neste trabalho, propõe-se a aplicação do Quociente de Rayleigh para verificar os efeitos de 2ª ordem em edifícios altos, a partir do lançamento da estrutura no programa *SAP2000* e rotina em linguagem Python, comparando-se os resultados com os parâmetros normativos de estabilidade global. Foram avaliados quatro casos de pórticos planos em altura crescente com diferentes concepções estruturais, a fim de visualizar a influência da rigidez e da simetria na estimativa do quociente de Rayleigh em duas situações: aumentando-se a intensidade do vento e aumentando-se a carga vertical. Os resultados permitiram verificar que o método é viável em situações controladas de carregamento.

Palavras-chave: efeitos de 2ª ordem; dinâmica das estruturas; edifícios altos; não linearidades; forças devidas ao vento.

## ABSTRACT

YOSHIOKA, A.R.C. **2<sup>nd</sup> order effects on vibration natural frequencies of tall buildings.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Área de Concentração Estruturas) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2022.

The global stability of buildings is of great importance in the daily life of civil engineering projects. This property is influenced by geometry of structure, choice of material (steel, concrete and/or timber), construction process and weather conditions at local construction. The main methods used to evaluate global stability are prescribed by ABNT NBR 6118:2014 and by international standards such as DIN 1045-1:2008, EUROCODE 2 (EN 1992-1-1:2004), AS 3600:2018 and ACI 318-19. In this work, we propose the application of the Rayleigh Quotient to verify the 2<sup>nd</sup> order effects in tall buildings, from structural launch in software *SAP2000* and routine in Python language, comparing results with standards parameters of global stability. Four cases of 2D frames in increasing height with different structural designs were evaluated in order to visualize stiffness influence and symmetry on computation of Rayleigh quotient in two situations: increasing wind intensity and increasing vertical load . The results allowed verifying that method is feasible in controlled situations of loading.

Keywords: 2<sup>nd</sup> order effects; dynamic of structures; tall buildings; nonlinearities; forces due to wind.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Comportamento real e idealizado de um material metálico sob carregamento e descarregamento. ....	24
Figura 2 - Módulos de deformação do concreto. ....	25
Figura 3 - Estimativa do módulo de elasticidade do concreto conforme normas. ....	26
Figura 4 - Pórtico plano a ser utilizado como exemplo para as aplicações de NLF e NLG. ....	29
Figura 5 - Pórtico plano simples submetido a forças verticais e horizontais. ....	33
Figura 6 - Representação idealizada do Processo P-Delta. ....	36
Figura 7 – (a) Esforços normais e (b) deslocamentos laterais, obtidos em análise de primeira ordem para o 2º caso do pórtico plano utilizado como exemplo. ....	38
Figura 8 - Pórticos planos submetidos à análise de colapso progressivo: (a) sistema estrutural inicial e (b) os modos de falha após a retirada de um elemento-chave. ....	43
Figura 9 - Sistema estrutural do Edifício PAFC de 600 metros de altura. ....	45
Figura 10 - Classificação das forças externas. ....	47
Figura 11 - Superposição das deformadas para uma barra de pórtico plano, constituída pelas funções de forma em cada grau de liberdade de uma barra isolada. ....	49
Figura 12 - Deslocamentos nodais e graus de liberdade dos elementos em seus referenciais locais. ....	51
Figura 13 - Coeficientes de rigidez (a) axial, (b) transversal, (c) flexional e (d) torcional. ....	52
Figura 14 - Exemplo de sistemas de eixos locais e globais para um pórtico plano. ....	53
Figura 15 - Ábaco para o cálculo dos coeficientes de arrasto em baixa turbulência. ....	63
Figura 16 - Variação da resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ) ao longo do edifício. ....	67
Figura 17 - Estrutura sob carga lateral de vento. ....	68
Figura 18 – Pórtico plano de 8 pavimentos e 1 vão: vista espacial, corte e seleção na planta do pavimento tipo. ....	70
Figura 19 – Pórtico plano de 12 pavimentos e 2 vãos: vista espacial e corte. ....	71
Figura 20 - Pórtico plano de 12 pavimentos e 2 vãos: seleção na planta do pavimento tipo. ..	71
Figura 21 – Pórtico plano de 20 pavimentos e 4 vãos: vista espacial e corte. ....	72
Figura 22 - Pórtico plano de 20 pavimentos e 4 vãos: seleção na planta do pavimento tipo. ..	73
Figura 23 – Pórtico plano de 30 pavimentos e 5 vãos: vista espacial e corte. ....	74
Figura 24 - Pórtico plano de 30 pavimentos e 5 vãos: seleção na planta do pavimento tipo. ..	75
Figura 25 - Fluxograma mostrando o funcionamento da rotina para o cálculo do Quociente de Rayleigh. ....	78

Figura 26 - Vento para o Caso 1.....	80
Figura 27 - Vento para o Caso 2.....	81
Figura 28 – Vento para o Caso 3.....	82
Figura 29 - Vento para o Caso 4.....	83
Figura 30 - Comparação entre os deslocamentos modais obtidos do SAP2000 e do Python com a deformada da estrutura na combinação ELS-1d, para os Casos 1 e 2. ....	86
Figura 31 - Comparação entre os deslocamentos modais obtidos do SAP2000 e do Python com a deformada da estrutura na combinação ELS-1d, para os Casos 3 e 4. ....	87
Figura 32 - Trecho do 28° ao 30° pavimento do Caso 4, mostrando o esforço axial das barras sob deslocamento modal.....	88
Figura 33 - Gráfico correspondente à Tabela 21. ....	89
Figura 34 – Gráfico correspondente à Tabela 22. ....	90
Figura 35 - Gráfico correspondente à Tabela 23. ....	91
Figura 36 – Gráfico correspondente à Tabela 24. ....	92
Figura 37 - Gráfico correspondente à Tabela 25. ....	93
Figura 38 - Gráfico correspondente à Tabela 26. ....	94
Figura 39 - Deformada do pórtico de 30 pavimentos para duas situações: no ELSF-2a (M=2) e no ELSF-2j (M=60), com deslocamentos U1 e U3 (lateral e vertical, respectivamente) mostrados em metros e R2 (rotação) em radianos.....	95
Figura 40 - Parâmetro Alfa em função do acréscimo de carga vertical. ....	96
Figura 41 - Gama-Z em função do acréscimo de carga vertical.....	96
Figura 42 - Reações de apoio do pilar à direita do pórtico do Caso 4, na combinação ELS-2j (M=60).....	97
Figura 43 - Deslocamentos de topo absolutos (em metros), aumentando-se a carga vertical. .	97
Figura 44 - Deslocamentos de topo relativos (%), aumentando-se a carga vertical.....	98
Figura 45 - QR1 em função do acréscimo de carga vertical. ....	98
Figura 46 - QR2 em função do acréscimo de carga vertical. ....	99
Figura 47 - Diferença entre QR1 e QR2 (%) devido ao fator M. ....	99
Figura 48 - Diminuição da frequência natural com o aumento da massa total do sistema. ...	100
Figura 49 - Diferenças gráficas entre o quociente de Rayleigh em 1ª ordem (QR1) e a frequência natural real $f(py)$ devido ao acréscimo de carga vertical. ....	101
Figura 50 - Frequência natural com NLG. ....	102
Figura 51 – Relação QR1 e Gama-Z. ....	103
Figura 52 - Relação QR2 e Gama-Z.....	103

Figura 53 - Relação entre as diferenças de 1ª e 2ª ordens e Gama-Z. ....	104
Figura 54 - Relação entre a frequência natural real e Gama-Z.....	104
Figura 55 - Relação entre Gama-Z e Alfa para os casos estudados. ....	105
Figura 56 - Relação entre QR1 e Alfa. ....	106
Figura 57 - Relação entre QR2 e Alfa. ....	107
Figura 58 - Relação das diferenças entre QR1 e QR2 com Alfa. ....	107
Figura 59 - Relação entre a frequência natural real e Alfa. ....	108

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Esforços e deslocamentos do pórtico plano apresentado na Figura 5, 1º caso.....	31
Tabela 2 – Esforços e deslocamentos do pórtico plano apresentado na Figura 5, 2º caso .....	31
Tabela 3 - Valores finais de esforços e deslocamentos, incluindo análise de 2ª ordem simplificada. ....	32
Tabela 4 - Momentos fletores de 1ª e 2ª ordens para o pórtico plano (2º caso). ....	32
Tabela 5 - Resultados do parâmetro de instabilidade alfa para o pórtico da Figura 5, casos 1 e 2. ....	35
Tabela 6 - Comparação entre $\gamma_z$ da Eq. 1 e aproximações a partir de $\alpha$ , na Eq. 3. ....	35
Tabela 7 - Cargas e deslocamentos obtidos em análise linear (1ª ordem) do pilar à direita, retirado do pórtico plano estudado. ....	38
Tabela 8 - Primeira iteração do Processo P-Delta para o 2º caso do pórtico plano.....	39
Tabela 9 - Segunda iteração do Processo P-Delta para o 2º caso do pórtico plano.....	39
Tabela 10 – Esforços e deslocamentos encontrados em análise não linear pelo programa <i>SAP2000</i> . ....	40
Tabela 11 - Comparação entre os métodos utilizados na análise não linear geométrica para o pórtico plano utilizado como exemplo. ....	40
Tabela 12 - Combinações de ações para a aplicação dos métodos de estabilidade global.....	64
Tabela 13 - Seções transversais e resistência característica correspondente do concreto. ....	66
Tabela 14 - Situações de carregamentos e suas intensidades para cada pórtico: fator $m$ para S3 e fator $M$ para o multiplicador da carga adicional.....	76
Tabela 15 - Fator S3 .....	79
Tabela 16 - Combinações dos carregamentos .....	84
Tabela 17 - Validação através da frequência do 1º modo de vibração para o Caso 1.....	85
Tabela 18 - Validação através da frequência do 1º modo de vibração para o Caso 2. ....	85
Tabela 19 - Validação através da frequência do 1º modo de vibração para o Caso 3. ....	85
Tabela 20 - Validação através da frequência do 1º modo de vibração para o Caso 4. ....	85
Tabela 21 - Gama-Z em função do fator S3. ....	89
Tabela 22 - Deslocamentos de topo, em metros.....	89
Tabela 23 - Deslocamento de topo, em porcentagem.....	90
Tabela 24 - QR1 em função do fator S3.....	92
Tabela 25 - QR2 em função do fator S3.....	93
Tabela 26 - Diferença entre QR1 e QR2 devido à variação do fator S3. ....	93

## LISTA DE SIGLAS

- ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas
- ACI – *American Concrete Institute* (do inglês, Instituto Americano do Concreto)
- AS – *Australian Standard* (do inglês, Norma Australiana)
- DIN - *Deutsches Institut für Normung* (do alemão, Instituto Alemão de Normatização)
- ELS – Estado Limite de Serviço
- ELU – Estado Limite Último
- EUROCODE – *European Standard* (do inglês, Norma Europeia)
- FAVt – Coeficiente de amplificação das forças horizontais
- FEM – *Finite Element Method* (do inglês, Método dos Elementos Finitos)
- GNSS – *Global Navigation Satellite System* (do inglês, Sistema de Navegação Global por Satélite)
- MULAXI – Coeficiente majorador da rigidez axial dos pilares
- NLC – Não linearidade de contato
- NLF – Não linearidade física
- NLG – Não linearidade geométrica
- PAFC – *Ping-An Finance Center* (edifício comercial situado na China)
- PPGEC – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
- RM1M2 – Fator de estabilidade global
- RQA – *Rayleigh Quotient Analysis* (do inglês, Análise pelo Quociente de Rayleigh)
- SAP – Programa de análise e dimensionamento estrutural
- TCC – *Timber concrete structures* (do inglês, estruturas de concreto e madeira)
- UFRGS – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras gregas

$\alpha$  – Parâmetro de instabilidade

$\alpha_{a1}$  – Desaprumo

$\alpha_1$  – Limite para  $\alpha$

$\alpha_E$  – Coeficiente que depende do tipo do agregado e que influencia o módulo de elasticidade longitudinal do concreto.

$\Delta, \Delta_i$  – Deslocamento do topo do edifício ou do topo do pilar

$\delta_b, \delta_s$  – Deslocamento do pilar na curva de flambagem

$\varepsilon$  – Deformação

$\phi$  – Modos de vibração; coeficiente de fluência; coeficiente para o cálculo da carga crítica

$\phi_s$  – Fator de correlação

$\gamma_c$  – Coeficiente de segurança minorador da resistência do concreto, em geral,  $\gamma_c = 1,4$

$\gamma_f$  – Coeficiente de segurança majorador das ações, sendo  $\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f2} \cdot \gamma_{f3}$

$\gamma_{f1}$  – Fator que considera a variabilidade das ações

$\gamma_{f2}$  – Fator que considera a simultaneidade das ações

$\gamma_{f3}$  – Coeficiente que inclui grandes desvios nas construções e aproximações de cálculo adotadas na fase de projeto

$\gamma_g$  – Coeficiente de segurança majorador das ações permanentes

$\gamma_q$  – Coeficiente majorador das ações acidentais

$\gamma_s$  – Coeficiente minorador da resistência característica do aço, em geral,  $\gamma_s = 1,15$

$\gamma_z$  – Coeficiente de estabilidade global e multiplicador dos esforços de 1ª ordem para obtenção dos esforços de 2ª ordem simplificados

$\xi$  – Amortecimento adimensional da estrutura

$\lambda$  – Índice de esbeltez; autovalor  $\lambda = \omega^2$

$\mu$  – Massa linear do elemento; deslocamento lateral

$\psi_0$  – Coeficiente de ponderação para as combinações últimas

$\psi_1, \psi_2$  – Coeficientes de ponderação para as combinações de serviço

$\rho$  – Peso específico

$\rho_c$  – Peso específico do concreto

$\sigma$  – Tensões normais no elemento

$\tau$  – Tensões de cisalhamento no elemento

$\theta$  – Rotação; desaprumo

$\theta_0(x)$  – Função de deslocamentos rotacionais

$\theta_1$  – Limite de desaprumo

$\omega$  – Frequência; quociente de Rayleigh

$\omega'$  – Quociente de Rayleigh em segunda ordem.

$\omega_n$  – Frequência natural

### **Letras Romanas Maiúsculas**

$A, S$  – Área

$A_c, A_g$  – Área da seção bruta de concreto

$A_s, A_s'$  - Área de aço dentro da seção de concreto, respectivamente, armadura tracionada e armadura comprimida

**C** – Matriz de amortecimento modal

$E$  – Módulo de elasticidade longitudinal (de qualquer material)

$E_c, E_{cs}, E_{ci}$  – Módulo de elasticidade longitudinal do concreto

$E_s$  – Módulo de elasticidade longitudinal do aço

$F, P, T, U, V, W$  – Forças e esforços solicitantes, dependendo do exemplo ou contexto

$G$  – Módulo de elasticidade transversal ou módulo de cisalhamento

$H, H_{TOT}$  – Altura total do edifício

$I_c$  – Momento de inércia de área da seção transversal bruta

$J$  – Momento de inércia polar de área da seção transversal

**K** – Matriz de rigidez modal

$L_e$  – Comprimento efetivo do pilar

**M** – Matriz de massa modal

$M$  – Multiplicador das cargas adicionais

$M_k$  – Momento fletor característico

$M_s, M_d, M_{Sd}$  – Momento fletor solicitante de cálculo

$N_e$  – Carga crítica de flambagem

$N(x)$  – Funções de forma

$N_d, N_{Sd}$  – Força normal solicitante de cálculo

$N_k$  – Força normal característica

$QR1$  – Quociente de Rayleigh em 1ª ordem

$QR2$  – Quociente de Rayleigh em 2ª ordem

$S(F)$  – Solicitação devida a uma força ou um conjunto de forças  $F$

$S_{d,tot}$  – Solicitação majorada pelos coeficientes de segurança ou solicitação de cálculo

$T_s, T_d, T_{sd}$  – Torção solicitante de cálculo

$T_{máx}$  – Energia cinética máxima

$V_k$  – Força cortante característica

$V_{sd}, V_d, V_s$  – Força cortante solicitante de cálculo

$V_{máx}$  – Energia potencial máxima

$V_0$  – Velocidade básica do vento

$V_k$  – Velocidade característica do vento

$V_{sp}$  – Autovetor do 1º modo de vibração extraído do SAP2000

$V_{py}$  – Autovetor do 1º modo de vibração obtido através do problema de autovalores e autovetores resolvido pelo algoritmo em Python

$Z_0$  – Amplitude inicial da resposta dinâmica

### **Letras Romanas Minúsculas**

$b_w$  – Dimensão da base da seção transversal de concreto armado

$c$  – Amortecimento; velocidade de propagação da onda no meio elástico

$d$  – Altura útil da seção de concreto armado, correspondendo à distância da fibra mais tracionada à armadura comprimida

$d'$  - Complemento da altura útil, sendo  $h = d + d'$

$d_i$  – Deslocamento do grau de liberdade  $i$

$diff_{1,2}$  – diferença entre os quocientes de Rayleigh em 1ª e 2ª ordens

$e, e_i$  – Excentricidade da força

$f_n$  – Frequência natural

$f(sp)$  – frequência natural da estrutura, fornecida pelo programa SAP2000

$f(py)$  – frequência natural da estrutura, obtida através do algoritmo em Python

$f(py2)$  – frequência natural da estrutura, em 2ª ordem, incluindo a matriz de rigidez geométrica

$f_{ck}$  – Resistência característica do concreto armado

$f_{cd}$  – Resistência de cálculo do concreto armado, em geral,  $f_{cd} = \gamma_c \cdot f_{ck} = 1,4 \cdot f_{ck}$

$g$  – Aceleração gravitacional,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

$h$  – Altura da seção transversal de concreto

$k$  – Coeficiente de rigidez; número de elementos de contraventamento; fator de multiplicação para o comprimento efetivo, dependendo da vinculação



$l_e$  – Comprimento equivalente

$m$  – Massa do elemento; período de recorrência, em anos, de uma intensidade de vento

$p(t)$  – Força dependente do tempo

$q_v$  – Carga horizontal distribuída representante do vento

$t$  – Tempo

$u_0(x)$  – Deslocamento axial do elemento

$u(t)$  – Deslocamento em uma direção predominante e dependente do tempo

$\dot{u}(t)$  – Velocidade em uma direção predominante e dependente do tempo

$\ddot{u}(t)$  – Aceleração em uma direção predominante e dependente do tempo

$v_0(x)$  – Deslocamento transversal do elemento

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>20</b>
1.1. JUSTIFICATIVA .....	21
1.2. OBJETIVOS .....	21
1.2.1. Geral.....	21
1.2.2. Específicos.....	21
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	22
<b>2 MÉTODOS DE ESTABILIDADE GLOBAL DE EDIFÍCIOS.....</b>	<b>23</b>
2.1. TIPOS DE NÃO LINEARIDADES NAS ESTRUTURAS .....	23
2.1.1 Não Linearidade Física (NLF).....	23
2.1.2. Não Linearidade Geométrica (NLG).....	27
2.2. MÉTODOS NORMATIVOS DE ESTABILIDADE ESTRUTURAL .....	28
2.2.1. Estabilidade Global com o Método Gama-Z.....	30
2.2.2. Parâmetro de Instabilidade Alfa ( $\alpha$ ) .....	33
2.2.3. Processo P-Delta – Método Iterativo da Carga Lateral Fictícia .....	35
2.3. ESTUDOS RECENTES SOBRE NÃO LINEARIDADES NAS ESTRUTURAS E ESTABILIDADE DE EDIFÍCIOS.....	41
<b>3 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DO QUOCIENTE DE RAYLEIGH.....</b>	<b>47</b>
3.1. CONCEITOS BÁSICOS DE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS ASSOCIADA AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	47
3.1.1. Forças externas .....	47
3.1.2. Funções de interpolação de deslocamentos .....	48
3.1.3. Propriedades dinâmicas das estruturas .....	50
3.2. QUOCIENTE DE RAYLEIGH NA AVALIAÇÃO DA ESTABILIDADE GLOBAL.....	56
3.2.1. Meio Contínuo.....	56
3.2.2. Meio Discretizado .....	57
<b>4 METODOLOGIA.....</b>	<b>61</b>
4.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS .....	61
4.2. CARREGAMENTOS.....	62
4.2.1. Vento.....	62

4.2.2. Sobrecarga Permanente .....	64
4.2.3. Combinações das ações .....	64
4.3. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E MECÂNICAS DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS .....	65
4.4. CÁLCULO DA RIGIDEZ EQUIVALENTE DO PARÂMETRO ALFA MEDIANTE VENTO DE CAMADA LIMITE .....	67
4.5. ESTUDOS DE CASOS .....	69
4.5.1. Pórtico de 8 Pavimentos e 1 Vão – Caso 1 .....	69
4.5.2. Pórtico de 12 Pavimentos e 2 Vãos – Caso 2 .....	70
4.5.3. Pórtico de 20 Pavimentos e 4 Vãos – Caso 3 .....	72
4.5.4. Pórtico de 30 Pavimentos e 6 Vãos – Caso 4 .....	73
4.6. PROCEDIMENTO DE ANÁLISE .....	75
4.7. ROTINA EM PYTHON PARA O CÁLCULO DO QUOCIENTE DE RAYLEIGH ..	76
<b>5 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>79</b>
5.1. INTENSIDADE DO VENTO .....	79
5.2. COMBINAÇÕES DE CARREGAMENTO .....	83
5.3. VALIDAÇÃO DO ALGORITMO.....	84
5.4. VARIAÇÃO DO PERÍODO DE RECORRÊNCIA .....	88
5.5. ACRÉSCIMO DE CARGA PERMANENTE.....	94
5.6. RELAÇÕES COM OS MÉTODOS NORMATIVOS .....	102
5.6.1. Coeficiente Gama-Z .....	102
5.6.2. Parâmetro Alfa.....	105
5.7. DISCUSSÕES .....	108
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>111</b>
6.1. CONCLUSÕES .....	111
6.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	112
REFERÊNCIAS .....	113
APÊNDICE A .....	119

# 1 INTRODUÇÃO

A concepção de edifícios altos precisa ter como critério principal a estabilidade global. Quanto maior a altura, maior será a influência dos efeitos dinâmicos do vento e mais elevada a dificuldade em conciliar os elementos estruturais de maneira a combater essas ações horizontais. Nos edifícios mais comuns, são adotadas as recomendações da ABNT NBR 6123:1988 para as cargas de vento, considerando-as como cargas estáticas, para simplificar os cálculos. Uma alternativa bastante utilizada em edificações com características específicas (e.g., arquitetura ousada, fator meteorológico crítico e/ou relevo muito acidentado), é o túnel de vento para obtenção do comportamento dinâmico e dos coeficientes de pressão para o dimensionamento dos elementos estruturais.

Para a avaliação da estabilidade global, são comumente utilizados os métodos normativos como o Gama-Z e o Parâmetro Alfa, avaliados com os limites de deslocamentos impostos pela mesma norma, ABNT NBR 6118:2014.

O objetivo da pesquisa é demonstrar o Método do Quociente de Rayleigh na análise de estabilidade global em pórticos planos, avaliando-se os efeitos em 2ª ordem do vento e da sobrecarga de utilização, comparando-o com os demais métodos normativos citados anteriormente. O método proposto calcula as energias potencial e cinética máximas da estrutura na posição deformada a partir de um carregamento prescrito, em 1ª e 2ª ordens, verificando-se a diferença entre as duas situações. O cálculo baseia-se nos princípios da Dinâmica das Estruturas, de Conservação de Energia, procedendo-se em sua forma contínua, através das integrais, e de maneira direta, através das matrizes formuladas pelo Método dos Elementos Finitos. Através de pórticos em concreto armado, a não-linearidade física foi considerada nos cálculos do Quociente de Rayleigh e do Gama-Z de maneira aproximada, por meio da redução da rigidez nos elementos respectivos, conforme recomenda a ABNT NBR 6118:2014, ou seja, utilizando-se o concreto armado como material de análise.

Partindo-se de pórticos planos processados no programa *SAP2000*, são extraídas tabelas de resultados, de maneira que o Quociente de Rayleigh seja calculado através de algoritmos em Python. Os resultados do algoritmo e os demais parâmetros normativos são comparados em planilhas em formato “.xml”. Portanto, neste trabalho, serão mostradas relações pertinentes entre os métodos normativos e o método proposto, verificando quais parâmetros mais influenciam na estabilidade global, sejam eles a rigidez dos elementos, o material utilizado, a magnitude das cargas horizontais ou a tipologia das cargas verticais e a geometria do edifício.

## 1.1. JUSTIFICATIVA

O estudo da estabilidade global é um tema de extrema importância na prática da Engenharia Estrutural, que preconiza não somente o equilíbrio da estrutura indeformada, mas também na posição deformada – onde se avaliam os efeitos de 2ª ordem. Aliada à Dinâmica das Estruturas, permite compreender o comportamento de edifícios altos, facilitando a concepção e o cotidiano de projeto.

O método do Quociente de Rayleigh vem trazer uma alternativa para avaliar a estabilidade global e difundir a importância de se considerar os efeitos dinâmicos em edifícios altos. O estudo também visa incentivar os engenheiros calculistas a aplicarem conceitos de dinâmica em seus projetos, a conhecerem as propriedades modais como frequência e amortecimento, principalmente porque a tendência atual é conceber estruturas cada vez mais esbeltas e com baixa rigidez – por exemplo, edifícios de lajes planas protendidas ou edifícios altos em perfis de aço.

Este trabalho baseia-se em normas nacionais e internacionais, bem como em outras referências bibliográficas que demonstrem aplicações relacionadas aos efeitos de não linearidades (física e geométrica), além de conceitos básicos para o entendimento do método apresentado.

## 1.2. OBJETIVOS

### 1.2.1. Geral

O principal objetivo deste trabalho é mostrar os principais métodos de estabilidade global praticados no Brasil e em demais países, comparando-os com o Método do Quociente de Rayleigh.

### 1.2.2. Específicos

Os objetivos específicos são:

- i) Verificar em quais situações o método do Quociente de Rayleigh é viável, frente a outros métodos de estabilidade global;
- ii) Observar como os métodos normativos e o Quociente de Rayleigh se comportam frente à variação de carga lateral e à variação de carga vertical;

- iii) Propor uma abordagem diferente para verificar os efeitos de 2ª ordem globais e locais.

### 1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em seis principais tópicos. Neste primeiro, a introdução para situar o leitor do tema e dos conhecimentos necessários ao entendimento da pesquisa. No segundo capítulo, são apresentados os fundamentos e a revisão bibliográfica do trabalho, passando pelos conceitos de não linearidade física e geométrica para mostrar, então, os métodos de estabilidade global da norma brasileira ABNT NBR 6118:2014. No terceiro capítulo, o objetivo foi introduzir alguns conceitos de Dinâmica das Estruturas e Método dos Elementos Finitos, de maneira que a apresentação do Método do Quociente de Rayleigh seja feita com bom embasamento teórico. No quarto capítulo, é mostrada a metodologia do trabalho, já propondo os estudos de caso e explicando os procedimentos aplicados na obtenção dos resultados. No capítulo cinco, são apresentados os resultados e as discussões, embasando-se em trabalhos publicados e estabelecendo-se as relações entre os métodos normativos de estabilidade global e o método proposto. O último capítulo tem a finalidade de concluir a pesquisa, fazendo um panorama sobre todos os métodos apresentados, além de propor novos estudos na área. O Apêndice A mostra, em ordem: as tabelas com os dados referentes ao acréscimo de carga permanente e a rotina em Python empregada. Por fim, não se dispensa a leitura e consulta às referências para complementar o entendimento dos conceitos apresentados.

## 2 MÉTODOS DE ESTABILIDADE GLOBAL DE EDIFÍCIOS

Neste capítulo, o foco será discutir sobre os métodos de estabilidade global existentes, os artigos e trabalhos publicados, bem como explicar com exemplos os métodos mais conhecidos na prática da Engenharia de Estruturas, de maneira específica no Brasil.

### 2.1. TIPOS DE NÃO LINEARIDADES NAS ESTRUTURAS

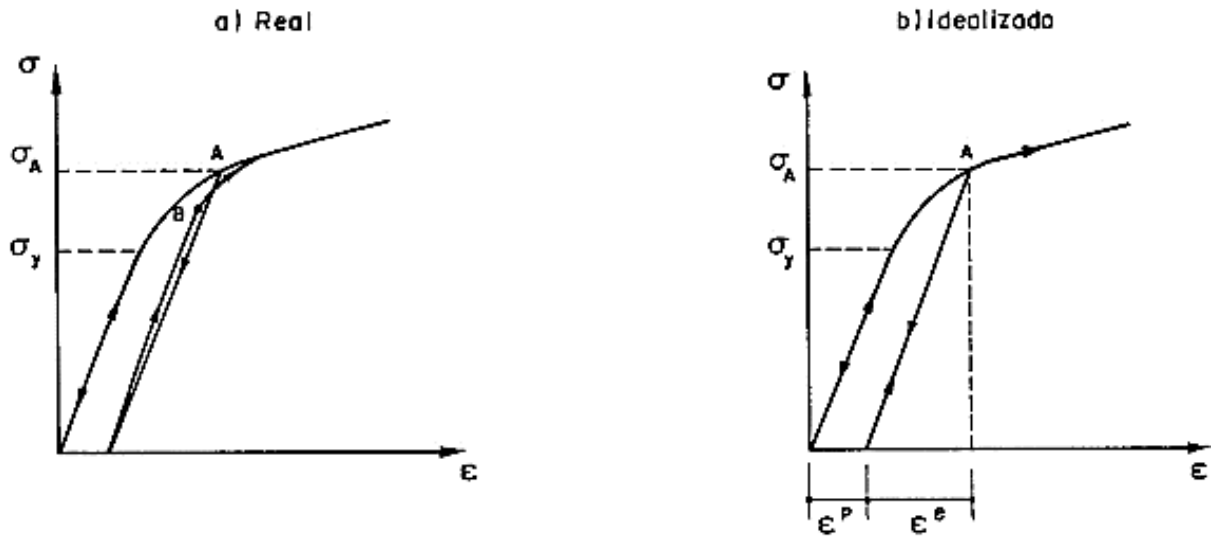
Entende-se como não linearidade toda alteração que possa ocasionar algum acréscimo de esforços e/ou tensões nos elementos estruturais. Uma alteração em uma ou mais variáveis do problema, como o módulo de elasticidade  $E$  ou até mesmo os coeficientes  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $k$ , é conhecida como não linearidade física (NLF). Já a não linearidade geométrica (NLG) é, obviamente por definição, uma alteração na geometria que acarreta um novo cálculo da condição de equilíbrio na posição deformada. Por fim, menos citada e aplicada na prática, vem a não linearidade de contato (NLC), proveniente de mudança nas condições de contorno ou de vinculação da estrutura, o que pode ocorrer, por exemplo, através flexibilização de uma ligação parafusada em vigas metálicas (PROENÇA, 2018). Serão abordadas somente a NLF e a NLG a seguir, que são as mais utilizadas na engenharia de projetos estruturais.

#### 2.1.1 Não Linearidade Física (NLF)

A não linearidade física dos materiais envolve conceitos do comportamento elástico ou plástico sob esforços de tração, compressão, cisalhamento, torção e flexão.

Proença (1988) demonstra alguns modelos matemáticos que descrevem o comportamento do concreto, citando ensaios em laboratório (e.g., tração e compressão uniaxiais), os quais auxiliam a compreender sobre a superfícies de ruptura e observar o concreto em seus estados bi e triaxiais. O autor comenta que o comportamento plástico de um material é notado pelo surgimento de deformações irreversíveis após retirada a carga solicitante. Por exemplo, na Figura 1, mostra-se o comportamento real, plástico e idealizado de um metal:

Figura 1 - Comportamento real e idealizado de um material metálico sob carregamento e descarregamento.



Fonte: Proença (1988).

Nota-se que o ciclo de carga, descarga e recarga ocorrem pautados nos limites de tensão:  $\sigma_y$  é a tensão que delimita o regime elástico linear, onde o caminho de descarga será sempre igual, sem deformações residuais; já a região delimitada pela  $\sigma_A$  é onde ocorre o regime plástico, ou seja, a descarga não acontece pelo mesmo percurso de carga, mas sim por uma trajetória aproximadamente paralela, cuja distância entre elas (no eixo das deformações, para um gráfico  $\sigma \times \varepsilon$ ) seja a deformação plástica residual  $\varepsilon^p$ . A diferença entre a situação real e a idealizada é que, na primeira, ocorre a recarga por um caminho ligeiramente diferente da descarga, configurando uma histerese – o que não acontece na situação idealizada, pois nesta a recarga ocorre de maneira linear e de forma paralela ao trecho linear. Tais ciclos de carga e descarga podem ser testados para diversos materiais e cada um apresentará seu comportamento na fase elástica e na fase plástica dependendo de suas propriedades químicas e mecânicas. De qualquer forma, a relação entre a tensão e a deformação fornece o módulo de elasticidade longitudinal (ou módulo de Young).

No caso do concreto, material escolhido para este trabalho, Leal *et al.* (2020) discutem acerca dos tipos de agregados utilizados na mistura, fazendo um comparativo com os valores tabelados da ABNT NBR 6118:2014, no que se refere ao módulo de elasticidade  $E$ . Como esta propriedade tem grande influência na não linearidade física, é importante destacar duas considerações aplicadas ao concreto:

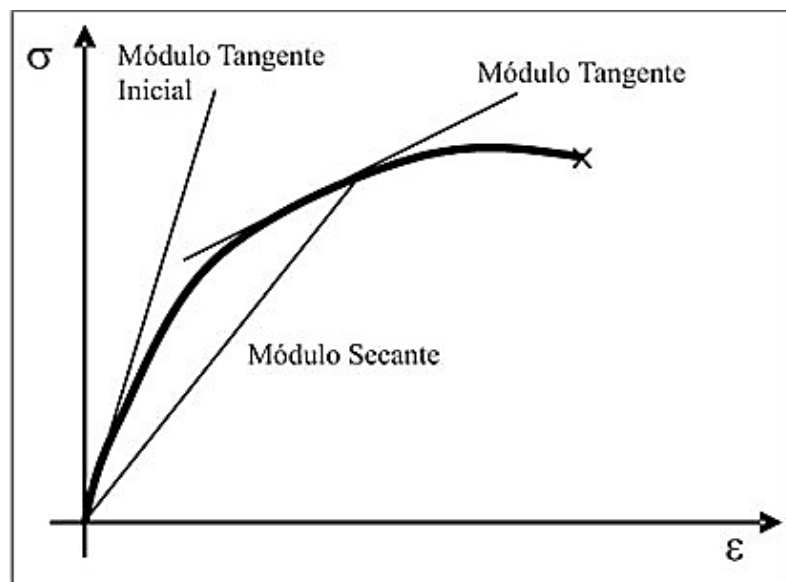
- i. O módulo de elasticidade (ou, mais corretamente, de deformação) pode ser obtido mediante ensaio prescrito pela ABNT NBR 8522:2017 ou através de



ensaios dinâmicos não destrutivos (como o ultrassom) e depende das características dos agregados, da consistência da mistura (relação água-cimento), tipo de cura, idade do concreto e configuração do ensaio (PACHECO et al., 2014).

- ii. Pode ser definido conforme os estágios de carregamento, como módulo tangente inicial, módulo tangente em um ponto genérico e módulo secante (Figura 2). Araújo *et al.* (2012) explicam que o módulo tangente inicial é a inclinação formada por uma reta tangente ao diagrama tensão-deformação e que passa pela origem, denominado na ABNT NBR 6118:2014 como  $E_{ci}$ ; se for tangente em um ponto genérico, não há necessidade de passar pela origem, tendo a função de simular cargas e descargas em diferentes fases da estrutura; e o módulo secante ( $E_{cs}$ ), muito comum na prática, sendo a inclinação formada por uma reta traçada entre dois pontos quaisquer do gráfico – em geral se escolhe o ponto correspondente à tensão de 0,5 MPa e o ponto cuja tensão é a metade da última. O módulo  $E_{cs}$  também é uma simplificação que a ABNT NBR 6118:2014 adota para avaliar o comportamento à tração e à compressão de um elemento estrutural ou seção transversal.

Figura 2 - Módulos de deformação do concreto.



Fonte: Araújo *et al.* (2012).

A ABNT NBR 6118:2014, estabelece  $E_{cs} = E_{ci}(0,8 + (f_{ck}/80))$  e recomenda alguns coeficientes para aumento ou redução de  $E_{cs}$  de acordo com

o agregado utilizado (sendo o  $f_{ck}$  a resistência característica do concreto, com  $f_{ck}$  e  $E_{cs}$  em MPa). Na Figura 3, o quadro retirado de Pacheco *et al.* (2014) mostra algumas expressões utilizadas em normas para a estimativa do módulo de elasticidade.

Figura 3 - Estimativa do módulo de elasticidade do concreto conforme normas.

NORMA	MÓDULO TANGENTE	MÓDULO SECANTE
ABNT NBR 6118:2007	$E_{ci} = 5600 * \sqrt{f_{ck}}$	$E_{cs} = 0,85 * E_{ci}$
ABNT NBR 6118:2014*	$E_{ci} = \alpha_E * 5600 * \sqrt{f_{ck}}$ para $f_{ck}$ de 20MPa a 50MPa $E_{ci} = 21,5 * 10^3 * \alpha_E * \left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25\right)^{1/2}$ para $f_{ck}$ de 55MPa a 90MPa	$E_{cs} = \alpha_i * E_{ci}$ $E_{cs} = \left[0,8 + 0,2 * \left(\frac{f_{ck}}{80}\right)\right] * E_{ci}$
<i>fib</i> MODEL CODE 2010*	$E_{ci} = 21,5 * 10^3 * \alpha_E * \left(\frac{f_{ck} + 8}{10}\right)^{1/2}$ $E_{ci}(t) = \left(e^{\left\{s * \left[1 - \left(\frac{28}{t}\right)^{0,5}\right]\right\}}\right)^{0,5} * E_{ci}$	$E_c = \alpha_i * E_{ci}$ $E_c = \left[0,8 + 0,2 * \left(\frac{f_{cm}}{88}\right)\right] * E_{ci}$
ACI 318 -14**	-	$E_c = 0,043 * \omega_c^{1,5} * f_c^{1/2}$ (MPa) para $\omega_c$ entre 1440 e 2560 kg/m <sup>3</sup> $E_c = 4732 * f_c^{1/2}$ (MPa) para concreto de massa específica normal
EUROCODE 2	$E_c = 1,05 * E_{cm}$ $E_{ci}(t) = 1,05 * \left(e^{\left\{s * \left[1 - \left(\frac{28}{t}\right)^{0,5}\right]\right\}}\right)^{0,3} * E_{cm}$	$E_{cm} = 22 * \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{0,3}$ ( $f_{cm}$ em MPa) $E_{cd} = E_{cm}/1,2$

\*  $\alpha_E = 1,2$  para basalto e diabásio;  $1,0$  para granito e gnaiss;  $0,9$  para calcário e  $0,7$  para arenito.

\*\*o item R19.2.2.1 traz a definição de  $E_c$  como a inclinação da reta traçada a partir da origem até a tensão de compressão de  $0,45 * f_c$  e que os valores de módulo de elasticidade obtidos através de ensaios podem variar de 80% a 120% dos valores previstos.

Fonte: Pacheco *et al.* (2014).

A fim de considerar a NLF na modelagem computacional das estruturas sem a necessidade de aplicar toda a teoria da plasticidade e da mecânica da fratura, é recomendada, pela ABNT NBR 6118:2014 (item 15.7.3), uma simplificação feita através da redução de rigidez de alguns elementos na obtenção dos esforços em análise de 2ª ordem, quando a estrutura possuir mais de quatro pavimentos e estiver definida como de nós móveis (conceito a ser comentado na sequência), de modo que:

- $(EI)_{sec} = 0,3E_{ci}I_C$ , para lajes;
- $(EI)_{sec} = 0,4E_{ci}I_C$ , para vigas cuja  $A'_s \neq A_s$ ;
- $(EI)_{sec} = 0,5E_{ci}I_C$ , para vigas cuja  $A'_s = A_s$ , sendo  $A'_s$  a armadura de compressão e

$A_s$  a armadura de tração;

-  $(EI)_{sec} = 0,8E_{ci}I_c$ , para pilares – em que  $I_c$  é a inércia bruta do concreto, incluindo as mesas colaborantes, quando for o caso, para todos os elementos citados.

Pinto (1997) discute a respeito de tais reduções de rigidez, partindo do princípio de que a seção fissurada do concreto armado apresenta uma redução na inércia em relação à seção original, mas ainda assim tem a capacidade de suportar tensões de tração e de cisalhamento. O autor modelou vigas de concreto armado biapoiadas e biengastadas, dimensionadas para o estado limite último (ELU) no Domínio 3, ambas de seção retangular 15x60 cm<sup>2</sup> e vão de 6 metros, cujo  $fck = 20 MPa$ . Foi observado que, para as vigas biapoiadas, o coeficiente de redução da rigidez  $(EI)_{sec}$  médio resultou em 0,5 e, para as biengastadas, o valor encontrado foi de 0,62 – demonstrando o efeito da redundância das vinculações. O mesmo foi feito para os pilares, admitidos com vinculação engaste-livre, submetidos à flexo-compressão e dimensionados no domínio 4. A seção adotada foi de 25x50 cm<sup>2</sup> e comprimento de 2,8 metros, com  $fck = 20 MPa$ . Observou-se que o coeficiente de redução varia entre 0,8 e 1,0, principalmente quando relação entre o momento fletor ( $\mu_d$ ) e a força normal ( $v_d$ ) adimensionais forem maiores que 0,3, isto é,  $\mu_d/v_d \geq 0,3$ . Por fim, o autor conclui que os valores recomendados pela então NB-1 (atual NBR 6118:2014) são seguros e dentro dos intervalos ensaiados.

Do ponto de vista da Dinâmica da Estruturas, nota-se que peças fissuradas têm a rigidez reduzida, o que pode, inclusive, reduzir a frequência natural e aumentar os deslocamentos (OWOLABI *et al.*, 2003). Portanto, a não linearidade física é fundamental para a obtenção dos efeitos de 2ª ordem, não somente pelo aumento dos esforços, mas também pelas alterações nas propriedades modais da estrutura.

### **2.1.2. Não Linearidade Geométrica (NLG)**

De acordo com Leal (2014), a não linearidade geométrica ocorre quando há carregamentos externos e alteração da configuração inicial de uma estrutura, ou seja, os esforços internos, deslocamentos e rotações são influenciados pela geometria na configuração deformada.

De maneira oposta, Pimenta (2006) explica que a linearidade geométrica pode ser admitida como o conjunto de hipóteses de pequenas rotações, de pequenos deslocamentos para pequenas deformações. Não é uma teoria perfeitamente real, embora seja muito prática, principalmente para estruturas rígidas e pouco sujeitas a instabilidades – não sendo aplicável a cabos e membranas, por exemplo.

Pimenta (2006) também descreve a teoria da elasticidade sob a não linearidade geométrica, de maneira exata, ou seja, pelas formulações matemáticas da Mecânica do Contínuo e dos Princípios Variacionais. São válidas as hipóteses de grandes deslocamentos, rotações, alongamentos e distorções, mostrando como a compreensão da NLG é fundamental para a construção da Teoria da Estabilidade de Sólidos e Estruturas. No problema estático, o autor define um campo de deslocamentos, passando pelo tensor de tensões Cauchy e pelo tensor das deformações de Green, até chegar a um Problema de Valor de Contorno (PVC), cuja solução satisfaça o campo de deslocamentos, tensões e deformações para uma configuração dada.

Pimenta & Yojo (1993) utilizam o modelo de uma barra para aplicarem a teoria não linear geométrica, de forma exata. Para isso, admitem algumas hipóteses: cinemática, onde as seções planas permanecem planas após a deformação; grandes deslocamentos e rotações; e a distorção por cisalhamento na flexão. Algumas vantagens da análise NLG exata são apontadas pelos autores: não é necessário aproximar as relações deslocamentos-deformações; as tensões e deformações são consistentemente definidas, assim como os deslocamentos e cargas externas; as equações de equilíbrio e de movimento são consistentemente derivadas tanto na forma fraca quanto na forma forte; as condições de contorno são obtidas pelos parâmetros variacionais; o princípio da objetividade é válido; e as leis conservativas de energia são satisfeitas.

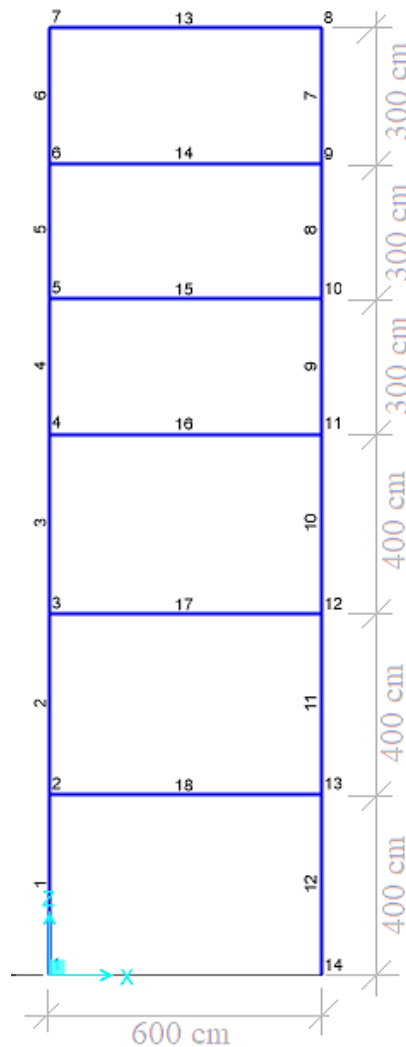
Portanto, embora a formulação exata seja vantajosa – não somente pelos motivos comentados, mas também para a compreensão das simplificações adotadas nas normas vigentes – a solução de um problema não linear geométrico por meio dela é demasiada complexa para o cotidiano da Engenharia de Estruturas. Mesmo assim, a teoria exata da NLG pode ser amplamente consultada e estudada não somente duas últimas referências anteriormente citadas, mas também em Romero (2008) e Simo & Vu-Quoc (1988). A seguir, serão mostrados os métodos normativos usuais para análise de 2ª ordem local e global, incluindo a NLG e a NLF.

## 2.2. MÉTODOS NORMATIVOS DE ESTABILIDADE ESTRUTURAL

Neste tópico, o enfoque será nos métodos preconizados por normas técnicas de estruturas. Por isso, a abordagem será, em boa parte, focada na ABNT NBR 6118:2014, através de um exemplo em pórtico plano, como ilustra a Figura 4, para mostrar os conceitos de estabilidade global.

No pórtico, foram considerados seis lances de pilares, dos quais os três primeiros medem, cada um,  $L = 4$  metros e nos últimos três lances, a altura considerada foi de  $L = 3$  metros, todos com seção transversal de  $30 \times 50 \text{ cm}^2$ . No modelo em SAP2000, os pilares foram submetidos a uma carga horizontal uniformemente distribuída ao longo do lance, sendo  $q_v = 0,8L$  (kN/m), representando o vento (por ora, uma simplificado), de modo que a flexão ocorra em torno do eixo de menor inércia (i.e., a menor dimensão é paralela ao plano), configurando o 1º caso. O pórtico é, então, formado pelas vigas de comprimento de 6 metros, cujas seções transversais são de  $20 \times 60 \text{ cm}^2$ , inicialmente submetidas a uma carga de  $12 \text{ kN/m}$  verticais, além de seu peso próprio. A numeração dos nós e barras pode ser visualizada a seguir:

Figura 4 - Pórtico plano a ser utilizado como exemplo para as aplicações de NLF e NLG.



As propriedades do concreto empregado são:  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ ;  $E_{cs} = 27 \text{ GPa}$ ; e  $\rho_c = 25 \text{ kN/m}^3$  (peso específico do concreto armado).

### 2.2.1. Estabilidade Global com o Método Gama-Z

Com a finalidade de simplificar a obtenção dos esforços de segunda ordem, Franco & Vasconcelos (1991) *apud* Carmo (1995) criaram o coeficiente  $\gamma_z$  para classificar uma estrutura em nós fixos ou nós móveis, além de permitir uma estimativa dos esforços finais, que incluem os esforços de 1ª e 2ª ordens.

O coeficiente foi incluído na norma brasileira de estruturas de concreto em 1994, então NB-1, atual ABNT NBR 6118:2014, que recomenda aplicar o método considerando a redução da rigidez em função das não linearidades físicas, conforme apresentado no item 2.1.1. Além disso, o método só é válido para estruturas acima de 4 pavimentos. Portanto, tem-se:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{tot,d}}{M_{1,tot,d}}} \quad (1)$$

Sendo:

$M_{1,tot,d}$  é o momento de tombamento, isto é, o somatório de todos os momentos fletores provocados pelas forças horizontais nas respectivas combinações e na direção considerada, admitidos com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura;

$\Delta M_{tot,d}$  é a soma dos produtos dos esforços verticais (valores de cálculo) pelos respectivos deslocamentos horizontais, obtidos em análise de 1ª ordem.

Uma estrutura é classificada como de nós fixos quando  $\gamma_z \leq 1,1$ , de maneira que seja possível dispensar os esforços globais de 2ª ordem. Quando for classificada como de nós móveis (i.e., para  $1,1 < \gamma_z \leq 1,3$ ), procede-se com a obtenção dos esforços finais majorando-se as cargas horizontais por  $0,95\gamma_z$ , na combinação considerada.

Vale ressaltar o item 15.3.1 da ABNT NBR 6118:2014, que considera os efeitos não lineares incluídos a partir da construção da relação momento-curvatura. Efeitos de 2ª ordem ( $S(F)$ ) são calculados utilizando-se a majoração das cargas apenas por  $\gamma_f/\gamma_{f3} = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f2}$ . Posteriormente, tais efeitos são majorados por  $\gamma_{f3} = 1,1$ , de tal forma que os esforços finais sejam  $S_{d,tot} = \gamma_{f3}S(F)$ , para que os esforços de cálculo estejam a favor da segurança. Entende-se por  $\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f2} \cdot \gamma_{f3}$ , sendo:  $\gamma_{f1}$  o fator que considera a variabilidade das ações;  $\gamma_{f2}$  que admite a simultaneidade das ações; e  $\gamma_{f3}$  o coeficiente que inclui os efeitos de grandes desvios nas construções e as aproximações de cálculo adotadas em fase de projeto. Moncayo (2011) apresenta um exemplo para essa recomendação da norma.

Para o exemplo corrente (Figura 5), os deslocamentos e esforços verticais, encontrados em análise através do programa *SAP2000*, são mostrados na Tabela 1 seguinte:

Tabela 1 - Esforços e deslocamentos do pórtico plano apresentado na Figura 5, 1º caso.

Nó	Deslocamento Horizontal [m]	Esforço normal no pilar direito [kN]
13	0,0067	408,33
12	0,0137	320,13
11	0,0187	237,94
10	0,0205	168,58
9	0,0216	105,28
8	0,0221	45,73
$\gamma_z =$		<b>1,032</b>

Aplicando-se a Equação (4), resulta em  $\gamma_z = 1,032$ , o que configura uma estrutura de nós fixos e dispensa análise de 2ª ordem.

Para o 2º caso, a fim de demonstrar a importância da rigidez, principalmente dos pilares, a seção transversal destes foi reduzida para 25x20 cm<sup>2</sup> (o que representa apenas 23,15% da inércia dos pilares anteriores, de 30x50) e a carga de vento foi alterada para  $q_{v2} = 1,2L$  (+50%). Os esforços e deslocamentos são mostrados na Tabela 2 abaixo:

Tabela 2 – Esforços e deslocamentos do pórtico plano apresentado na Figura 5, 2º caso

Nó	Deslocamento Horizontal [m]	Esforço normal no pilar direito [kN]
13	0,034	407,70
12	0,0632	311,88
11	0,0836	227,81
10	0,0901	159,15
9	0,0943	99,76
8	0,0962	45,83
$\gamma_z =$		<b>1,16</b>

Como se pode observar, a estrutura passa a ser de nós móveis e necessita de análise de 2ª ordem.

Vale ressaltar que nenhum dos deslocamentos apresentados para o nó 8 estão dentro dos limites estabelecidos na norma NBR 6118:2014 (p.77), cuja recomendação é evitar deslocamentos no topo do edifício maiores que  $H/1700$ , sendo  $H$  a altura total do edifício. O pórtico da Figura 5 tem 21 metros de altura e, portanto, o deslocamento permitido no topo seria de, no máximo, 1,23 cm.

Tabela 3 - Valores finais de esforços e deslocamentos, incluindo análise de 2ª ordem simplificada.

Nó	Deslocamento Horizontal [m]	Esforço normal no pilar direito [kN]
13	0,0375	419,79
12	0,0696	319,25
11	0,0921	231,66
10	0,0994	160,93
9	0,104	100,42
8	0,1061	45,94

Multiplicando-se a carga horizontal por  $0,95\gamma_z$ , é possível realizar uma análise de 2ª ordem simplificada, resultando em uma carga  $q_{v2'} = 1,3224L$ . Os esforços e deslocamentos finais são mostrados na Tabela 3, referente ao 2º caso. Os momentos fletores de primeira ordem e os obtidos com a análise de 2ª ordem são mostrados para os apoios do pórtico plano (2º caso), na Tabela 4, sem a majoração  $S_{d,tot} = 1,1 S(F)$ , para facilitar a compreensão dos resultados:

Tabela 4 - Momentos fletores de 1ª e 2ª ordens para o pórtico plano (2º caso).

Nó	Momento Fletor (1ª ordem) [kN.m]	Momento Fletor (2ª ordem) [kN.m]	Aumento [%]
1	-86,31	- 95,35	10,47
14	-84,48	- 92,36	9,33

Outra observação importante é que não foram aplicados os coeficientes de redução referentes à NLF, já que a intenção foi somente avaliar o efeito da carga horizontal e da rigidez dos pilares no método apresentado. Caso fossem considerados os coeficientes da NLF, com certeza os resultados de  $\gamma_z$  seriam maiores que os demonstrados.

Moncayo (2011) fez um comparativo de quais propriedades da estrutura mais influenciam na estabilidade global e concluiu que os principais são a rigidez, como já



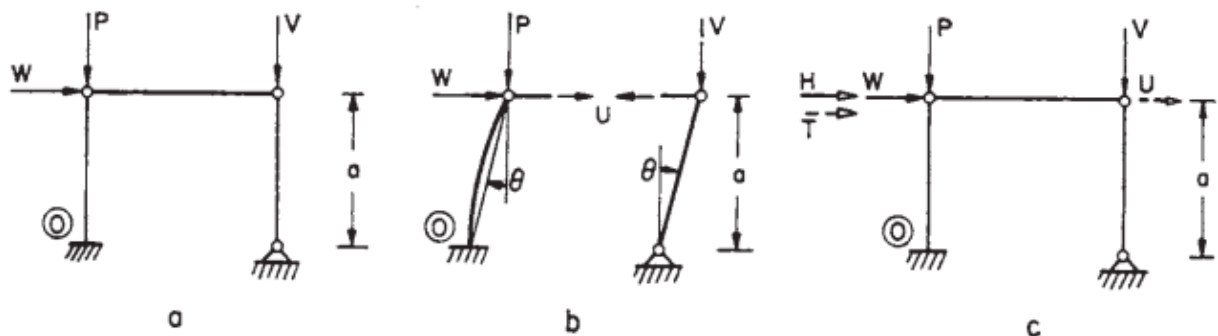
demonstrado, e a magnitude das ações verticais. Estas contribuem para a instabilidade do edifício à medida em que se elevam, já que matematicamente alteram apenas o valor de  $\Delta M_{tot,d}$  na Equação 4. Além disso, com o aumento da carga vertical, pode ocorrer a perda de estabilidade global em função da falha estrutural dos elementos, principalmente o esmagamento do concreto dos pilares. O autor cita que as cargas horizontais não influenciam nos valores de estabilidade global, como no cálculo do  $\gamma_z$ , pois alteram de modo equivalente os momentos considerados.

Mesmo assim, aumentou-se as cargas do pórtico analisado na Tabela 2 a fim de realizar um comparativo posterior com outros métodos de estabilidade a serem estudados na sequência.

### 2.2.2. Parâmetro de Instabilidade Alfa ( $\alpha$ )

O parâmetro de instabilidade  $\alpha$  foi introduzido por Beck & König (1966), que propuseram uma análise de segunda ordem de maneira simplificada, idealizando forças restritivas que representassem, de certa forma, a rigidez e a curvatura elástica da estrutura. Um primeiro exemplo mostrado pelos autores é um pórtico plano simples submetido às forças verticais V (na barra rotulada) e P (na barra engastada), agindo em conjunto com uma força horizontal de vento W (Figura 5):

Figura 5 - Pórtico plano simples submetido a forças verticais e horizontais.



Fonte: Beck & König (1966)

No pórtico da Figura 5a, nota-se que a barra engastada se flexiona em função da carga horizontal  $W$  e transfere esse deslocamento para a viga e para a barra rotulada. Conseqüentemente, a força  $V$  tem sua posição alterada, embora conserve sua magnitude e sentido. Observa-se que a força horizontal também gera um esforço normal ( $U$ ) na viga e, aliada à força  $P$  (agora excêntrica ao ponto  $O$ , Figura 5b), produz novas deflexões e novos esforços

internos até que a estrutura atinja sua condição de equilíbrio novamente. Na Figura 5c, aparece a força H que, junto à W, gera o momento fletor  $M_{II}^o$  no ponto O, que seria obtido através de análise de 2ª ordem. A força H é composta pela força normal U e pela força T – esta última representa a influência da força P no momento  $M_{II}^o$ . Isto é, se não houver a força P, H será igual a U. Portanto, H permite avaliar os efeitos de 2ª ordem nas estruturas, o que é cuidadosamente deduzido no artigo de Beck e König (1966).

A NBR 6118:2014 recomenda o uso do parâmetro  $\alpha \leq \alpha_1$  de acordo com:

$$\alpha = H_{tot} \sqrt{N_k / (E_{cs} I_c)} \quad (2)$$

Onde:

$H_{tot}$  é a altura da edificação a partir do topo da fundação;

$N_k$  é a soma de todas as forças verticais às quais a estrutura está submetida ao longo de  $H_{tot}$ ;

$E_{cs} I_c$  é a soma das rigidezes dos pilares na direção considerada, podendo ser substituída por uma rigidez equivalente no caso de estruturas complexas;

$\alpha_1$  é o valor limite, valendo  $\alpha_1 = 0,2 + 0,1n$  (para  $n \leq 3$ );  $\alpha_1 = 0,6$  para edifícios em geral e  $\alpha_1 = 0,5$  para estruturas compostas somente por pórticos (se  $n \geq 4$ ), sendo  $n$  o número de pavimentos da estrutura.

O cálculo da rigidez equivalente é uma tarefa relativamente fácil, que consiste em encontrar qual valor da rigidez de um pilar de seção constante permite o mesmo deslocamento de topo observado na estrutura, sob ação do mesmo carregamento horizontal, mantendo-se a altura e sendo engastado na base e livre no topo.

Retomando o exemplo do 1º caso descrito para o pórtico plano (Figura 4), tem-se a soma das cargas verticais, considerando peso próprio e a sobrecarga sobre as vigas, igual a 692,4 kN – desde que a massa específica do concreto seja 2500 kg/m³. Mantendo-se o módulo de elasticidade longitudinal  $E = 27000 \text{ MPa}$  e a altura de 21 metros, buscou-se aplicar a carga vertical correspondente às reações de apoio das vigas (devido ao peso próprio e sobrecarga delas) nos respectivos pontos e distribuiu-se o peso próprio dos pilares ao longo do pilar equivalente. Após, foram aplicadas as cargas de vento (de 3,2 e 2,4 kN/m) e buscou-se uma seção equivalente que resultasse no mesmo deslocamento de topo apresentado pelo pórtico.

Para o exemplo do 2º caso (Figura 4, Tabela 2), foi feito o mesmo procedimento, porém a soma das cargas verticais totalizou 589,4 kN, lembrando que agora as cargas de vento são de 4,8 e 3,6 kN/m, para os lances de pilares de 4 m e 3 m, respectivamente. Na Tabela 5, são mostrados os resultados da análise simplificada pelo parâmetro  $\alpha$ , conforme a Equação 2:

Tabela 5 - Resultados do parâmetro de instabilidade alfa para o pórtico da Figura 5, casos 1 e 2.

	Módulo de Elasticidade	Carga Vertical Total	Deslocamento de Topo	Seção Equivalente	$\alpha$
1º caso	27 GPa	692,4 kN	2,21 cm	120x70 cm <sup>2</sup>	0,335
2º caso	27 GPa	589,4 kN	9,62 cm	89x40 cm <sup>2</sup>	0,640

Com os dados apresentados, nota-se que os resultados do 1º caso não ultrapassaram o valor limite de estabilidade, confirmando ser uma estrutura de nós fixos. É interessante notar que, para o 2º caso,  $\alpha > \alpha_1 = 0,6$ , de modo que ambos os casos se demonstraram coerentes com a análise simplificada por  $\gamma_z$ .

Carmo (1995) utilizou uma amostra de 30 estruturas para obter 60 resultados, a fim de realizar uma comparação entre relação flecha-altura ( $a/H$ ),  $\alpha$  e  $\gamma_z$ . Concluiu-se que deve ser abandonado o cálculo de  $a/H$  para analisar os efeitos de segunda ordem, mantendo somente a verificação das deformações excessivas. Observou-se também que os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma_z$  se correlacionam empiricamente a partir dos dados dos edifícios estudados. Assim, a função que descreve tal correlação é escrita como:

$$\gamma_z = 0,90 + 0,52\alpha - 0,62\alpha^2 + 0,46\alpha^3 \quad (3)$$

sendo  $\gamma_z$  o índice da Equação 1 e  $\alpha$  o parâmetro da Equação 2.

Aplicando a Equação 3 ao exemplo de pórtico plano (Figura 5), tem-se os seguintes resultados:

Tabela 6 - Comparação entre  $\gamma_z$  da Eq. 1 e aproximações a partir de  $\alpha$ , na Eq. 3.

	$\alpha$	$\gamma_z$ - Eq. (1)	$\gamma_z$ - Eq. (3)	Erro Relativo (%)
1º caso	0,335	1,03	1,0219	0,78
2º caso	0,640	1,16	1,0994	5,22

Dessa forma, comparando-se os resultados de  $\gamma_z$  encontrados anteriormente pela Equação 1 aos resultados encontrados pela aproximação da Equação 3, é possível considerar que esta última equação é uma boa estimativa de  $\gamma_z$  a partir de  $\alpha$ .

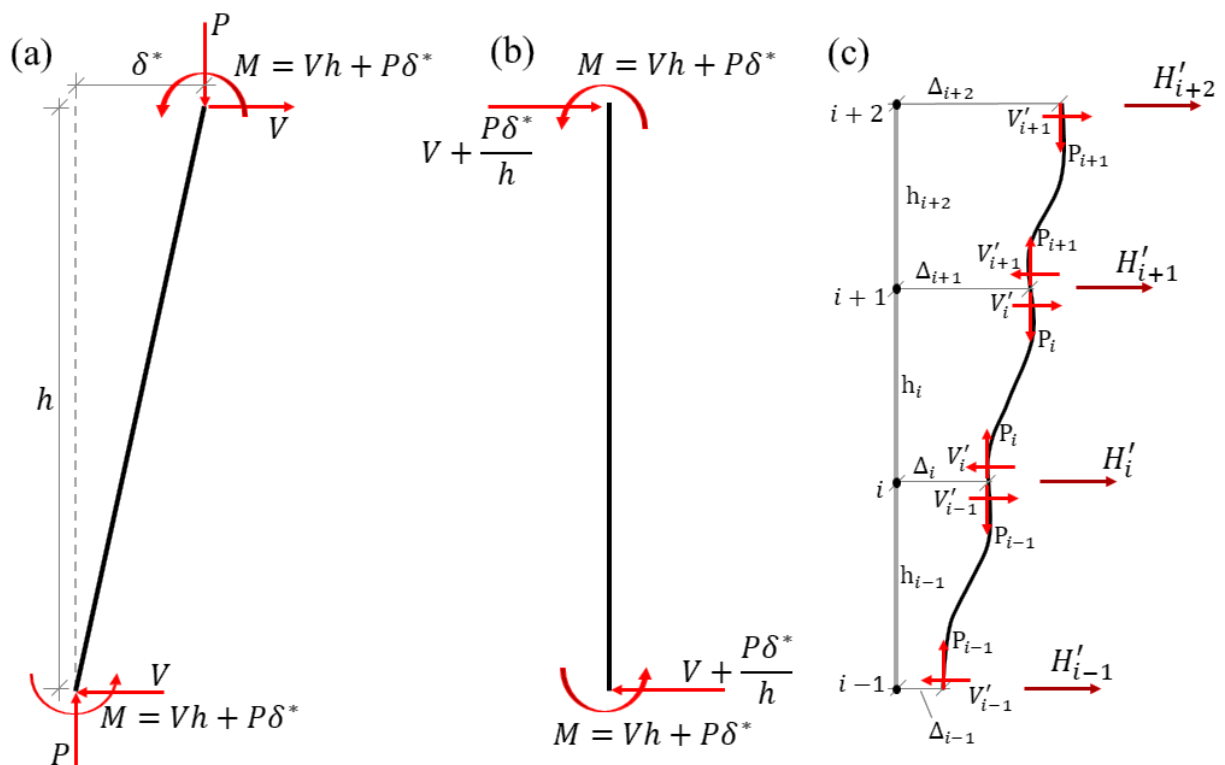
### 2.2.3. Processo P-Delta – Método Iterativo da Carga Lateral Fictícia

O processo P-Delta pode ser um método iterativo para a obtenção dos esforços de primeira e segunda ordem, não sendo útil como um parâmetro de estabilidade global, ou seja,

tal propriedade só pode ser avaliada depois de obtidos os deslocamentos finais da estrutura com os efeitos não lineares-geométricos. O conceito é utilizado sob diversas metodologias, porém o mais praticado e amplamente difundido é o Método da Carga Lateral Fictícia, também implementado nos diversos programas computacionais de análise e detalhamento de estruturas (MONCAYO, 2011).

Elementos submetidos a cargas axiais podem ser avaliados pelo Processo P-Delta. Mais ainda, em pilares de edifícios onde atuam cargas laterais – provenientes de ventos, empuxos, sismos e potenciais vibrações induzidas por equipamentos – causando uma excentricidade da ação gravitacional em relação ao eixo da peça e, por consequência, aumentando os momentos fletores devido a essa excentricidade, conforme Figura 6a, adaptada de Gaiotti & Smith (1989):

Figura 6 - Representação idealizada do Processo P-Delta.



Fonte: Adaptado de Gaiotti & Smith (1989).

Nas estruturas de pequeno porte e altura, como residências térreas e sobrados, pode-se desprezar o efeito P-Delta; ao passo que, quanto maior a altura da edificação e maiores são as sobrecargas, tais efeitos tornam-se cada vez mais importantes.

No método iterativo, a excentricidade nos pilares é transformada em etapas através de cargas laterais equivalentes (Figura 6c). Por exemplo, para o pilar engastado na base e livre no

topo (Figura 6a), a carga gravitacional  $P$  causa um momento na base com intensidade  $P\delta^*$ , que somado ao momento da carga horizontal  $V$  resulta em  $M^* = Vh + P\delta^*$ . Assim, pode-se considerar que a carga horizontal é composta por  $V + P\delta^*/h$  para incluir os efeitos de 2ª ordem (Figura 6b). No entanto, a obtenção de tais esforços depende de se encontrar o valor de  $\delta^*$ , o que é feito a partir de um incremento  $P\delta/h$  baseado na configuração de primeira ordem e, a cada iteração, são somados novos incrementos até que o deslocamento convirja para  $\delta^*$ , como ilustrado na Figura 6c (GAIOTTI & SMITH, 1989).

Em outras palavras, ainda na Figura 7c, entende-se que o incremento de carga lateral no pavimento  $i$  equivalente à excentricidade da força gravitacional  $P$  pode ser escrito por:

$$V'_i = \frac{\sum P_i}{h_i} (\Delta_{i+1} - \Delta_i) \quad (4)$$

Com:

$\sum P_i$  = soma das cargas verticais do pavimento  $i$ ;

$h_i$  = altura do lance;

$\Delta_{i+1}$  e  $\Delta_i$  são os deslocamentos laterais dos pavimentos  $i+1$  e  $i$ , respectivamente.

A carga lateral fictícia no pavimento  $i$  será encontrada pela seguinte expressão:

$$H'_i = V_{i-1} - V_i \quad (5)$$

Uma boa estimativa para os valores iniciais de  $\Delta$  pode ser obtida através da análise de primeira ordem, com as cargas atuantes no edifício. Assim, esses deslocamentos serão incluídos como um aumento na força lateral (Equação 4), cuja consequência será um aumento nos momentos fletores e, em seguida, novos deslocamentos surgirão para serem utilizados na próxima iteração. O processo iterativo cessará quando a diferença de momentos fletores finais e/ou deslocamentos entre uma iteração anterior ( $i - 1$ ) e a atual ( $i$ ) forem suficientemente pequenos (GAIOTTI & SMITH, 1989). Moncayo (2011) considera um bom critério de parada (ou convergência) a diferença relativa de 0,01% entre os esforços e deslocamentos da iteração atual e a anterior.

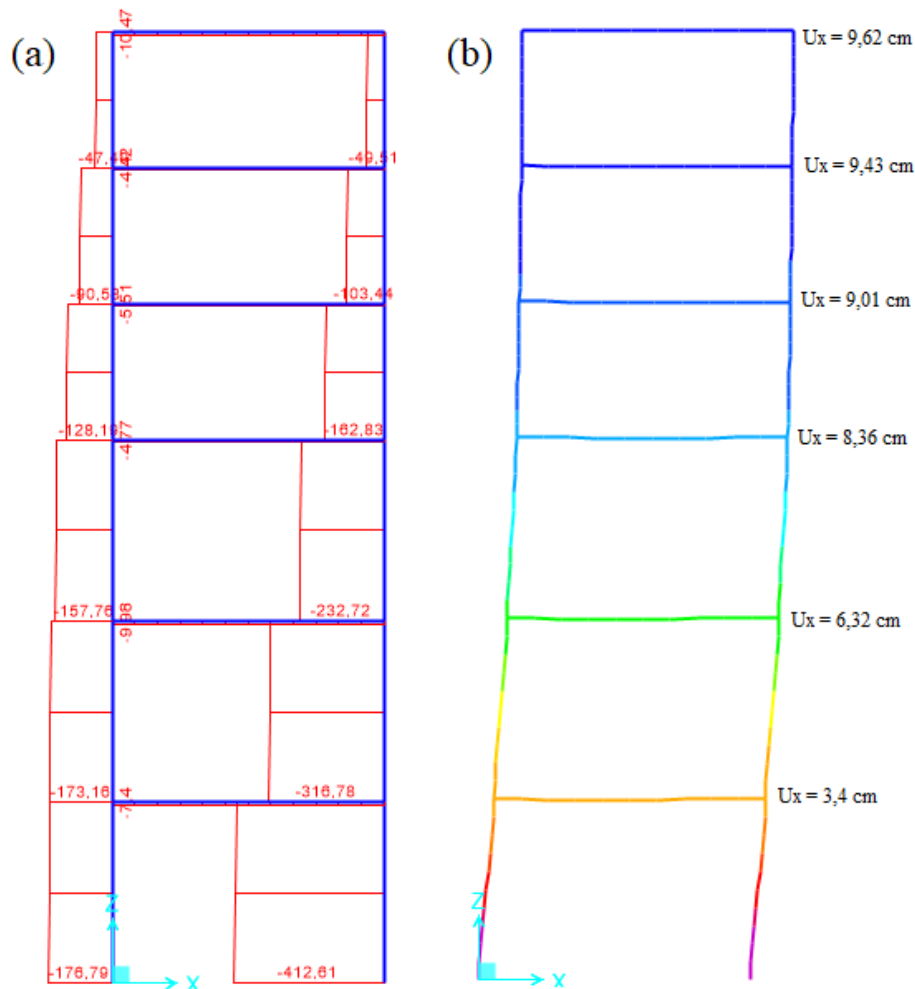
Para o exemplo corrente (pórtico plano, 2º caso, Tabela 2 e Figura 4), o processo P-Delta será aplicado pórtico inteiro, nos 6 lances. No entanto, como a carga de vento está distribuída ao longo da altura do pavimento, sua equivalente concentrada encontra-se no meio do lance, de forma que a altura considerada corresponde à diferença entre os níveis intermediários de pavimentos. O mesmo valerá para a soma das cargas verticais, que será computada na mesma altura de aplicação das cargas de vento. Ainda assim, para fins de

comparação, os deslocamentos considerados serão correspondentes aos nós no nível do pavimento, conforme mostra a análise de primeira ordem, apresentada na Tabela 7 e Figura 7 seguintes.

Tabela 7 - Cargas e deslocamentos obtidos em análise linear (1ª ordem) do pilar à direita, retirado do pórtico plano estudado.

Nós	Soma das Cargas Verticais (nível intermediário) [kN]	Altura do Lance [m]	Carga Horizontal [kN]	Deslocamentos nos nós [m]
7 e 8	93,33	3	10,8	0,0962
6 e 9	97,006	3	10,8	0,0943
5 e 10	97,008	3,5	10,8	0,0901
4 e 11	98,233	4	19,2	0,0836
3 e 12	99,458	4	19,2	0,0632
2 e 13	104,365	2	19,2	0,034
<b>TOTAL</b>	<b>589,4</b>	<b>19,5</b>	<b>90</b>	

Figura 7 – (a) Esforços normais e (b) deslocamentos laterais, obtidos em análise de primeira ordem para o 2º caso do pórtico plano utilizado como exemplo.



O processo P-Delta pode então ser aplicado, tendo como critério de parada 0,15% de diferença entre a iteração atual e a anterior. Os resultados são apresentados nas Tabelas 8 e 9, de modo que duas iterações se mostraram suficientes para a convergência do método. O procedimento foi baseado no primeiro exemplo didático demonstrado por Iglesia (2016).

Tabela 8 - Primeira iteração do Processo P-Delta para o 2º caso do pórtico plano.

Carga Fictícia [kN]	Carga Aplicada [kN]	Deslocamento [m]	Diferença (Iter. 1 – Iter 0) [%]
2,968	2,96789	0,1001	3,87841
2,985	0,01666	0,0978	3,46696
2,411	-0,57321	0,093	2,87356
1,805	-0,60631	0,0858	2,31293
1,211	-0,59413	0,0644	1,64271
0,851	-0,35995	0,0345	1,19760

Tabela 9 - Segunda iteração do Processo P-Delta para o 2º caso do pórtico plano.

Carga Fictícia [kN]	Carga Aplicada [kN]	Deslocamento [m]	Diferença (Iter. 2 – Iter. 1) [%]
3,08300	3,08300	0,1002	0,10091
3,08802	0,00502	0,0979	0,10471
2,48063	-0,60739	0,0931	0,11173
1,84678	-0,63385	0,0859	0,13298
1,23079	-0,61599	0,0644	0,00000
0,86114	-0,36965	0,0345	0,00000

Obtidos os deslocamentos, o momento fletor final incluindo efeitos de segunda ordem resultou em  $M_2 = 87,39 \text{ kN.m}$ . Cabe ressaltar, novamente, que nesta análise não foi considerada a redução de rigidez pela NLF, a fim de manter a coerência com os resultados encontrados pelo método  $\gamma_z$ . Também, em relação ao  $\gamma_z$ , os resultados de momento fletor na base do pilar direito pelo P-Delta resultaram em valores menores, o que foi constatado em Carmo (1995) – embora os dados de deslocamentos obtidos pela autora em análise de segunda ordem em P- $\Delta$  mostrassem-se maiores que os encontrados por  $\gamma_z$ .

Para fechar o exemplo do pórtico plano, foram obtidos esforços e deslocamentos através de análise não linear no programa *SAP2000*, que utiliza o método direto e exato a partir da matriz de rigidez geométrica, baseado em formulações envolvendo o Princípio dos Trabalhos Virtuais e Método dos Elementos Finitos, conforme explicado por Benjamin (1982) e Zermiani (1998). Portanto, seguem os valores encontrados pela análise não linear na Tabela 10:

Tabela 10 – Esforços e deslocamentos encontrados em análise não linear pelo programa *SAP2000*.

Nó	Deslocamento [m]	Esforço normal no pilar direito [kN]
13	0,0366	413,81
12	0,0678	315,02
11	0,0894	229,01
10	0,0961	159,5
9	0,1004	99,87
8	0,1023	45,85

Em síntese, as análises de 2ª ordem realizadas até então para o 2º caso do pórtico plano podem ser comparadas aos valores obtidos em análise de 1ª ordem, de acordo com a Tabela 11:

Tabela 11 - Comparação entre os métodos utilizados na análise não linear geométrica para o pórtico plano utilizado como exemplo.

		1ª ordem (referência)	2ª ordem					
			$\gamma_z$	Dif. (%)	$P-\Delta$	Dif. (%)	<i>SAP2000</i>	Dif. (%)
Deslocamentos (Nó, m)	13	0,034	0,0375	10,29	0,0345	1,47	0,0366	7,65
	12	0,0632	0,0696	10,13	0,0644	1,90	0,0678	7,28
	11	0,0836	0,0921	10,17	0,0859	2,75	0,0894	6,94
	10	0,0901	0,0994	10,32	0,0931	3,33	0,0961	6,66
	9	0,0943	0,104	10,29	0,0979	3,82	0,1004	6,47
	8	0,0962	0,1061	10,29	0,1002	4,16	0,1023	6,34
Momento no Pilar Direito (Nó, kN.m)	14	86,29	94,8	9,86	87,39	1,274	91,28	5,78

Nota-se que, em geral, o método  $\gamma_z$  forneceu resultados mais conservadores e a favor da segurança, para o caso apresentado. Pinto (1997) fez uma análise de 25 edifícios comparando o coeficiente  $\gamma_z$  (processo simplificado) com o método da matriz de rigidez geométrica (processo rigoroso) utilizado pelo programa *SAP2000* e constatou que em termos de forças normais e de momentos fletores nos pilares, a maioria dos resultados provenientes do método simplificado mostram-se maiores que o processo rigoroso. Também essa diferença pode variar conforme o intervalo de valores de  $\gamma_z$ : entre 1,15 e 1,20, a diferença do processo rigoroso comparado ao simplificado é da ordem de 3% contra a segurança em relação aos momentos fletores nos pilares próximos à base do edifício – o que pode ser observado de modo similar na



Tabela 11, em que a diferença entre o momento fletor entre o método  $\gamma_z$  e o processo rigoroso foi de 3,71%; já após  $\gamma_z > 1,20$ , as diferenças entre os métodos ficam em torno de 5% contra a segurança. O autor conclui que as diferenças entre os dois métodos também variam ao longo da altura do edifício, ou seja, o método  $\gamma_z$  mostra-se favorável à segurança para elementos estruturais próximos à base e próximos ao topo. Além disso, as análises de Pinto (1997) recomendam restringir o coeficiente  $\gamma_z$  em 1,2, a fim de manter não somente uma boa correlação entre os métodos de estabilidade global, mas também a manutenção dos deslocamentos dentro dos limites normativos.

Acerca dos resultados encontrados para o processo P-Delta na Tabela 11, observou-se que as diferenças entre os deslocamentos de 1ª e 2ª ordens foram aumentando conforme a altura do pórtico plano, sendo coerente com os acréscimos de carga horizontal ao longo das iterações – procedimento realizado também por Iglesia (2016).

### 2.3. ESTUDOS RECENTES SOBRE NÃO LINEARIDADES NAS ESTRUTURAS E ESTABILIDADE DE EDIFÍCIOS

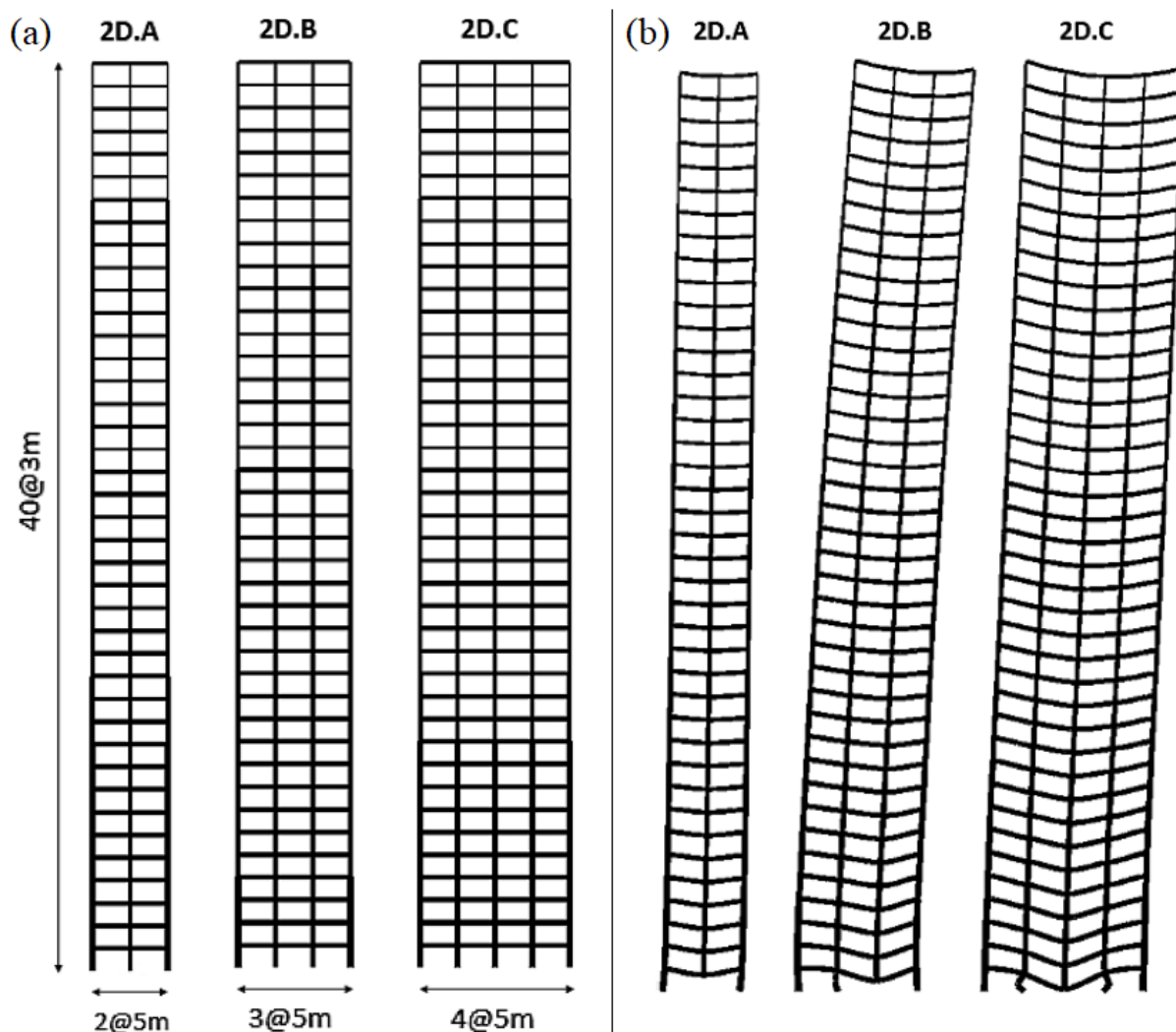
Os métodos de estabilidade global apresentados até então são apenas as principais aplicações normatizadas. No entanto, existem outras maneiras de verificação dos efeitos de 2ª ordem e o intuito deste tópico é difundir estudos mais recentes nesta área.

Rosso *et al.* (2016) estudaram a estabilidade global e local de paredes de concreto submetidas à carga cíclica, como ocorre em terremotos. A motivação da pesquisa surgiu da observação do colapso de paredes de concreto nos terremotos do Chile (2010) e da Nova Zelândia (2011). Como a falha estrutural ocasionada por fenômenos naturais não pode ser acompanhada ao longo do tempo, os pesquisadores utilizaram duas paredes de concreto para suas investigações: uma sujeita à carga unidirecional (no plano) e outra, bidirecional (paralela e perpendicular ao plano da parede). Na fundamentação teórica, é explicado que grandes deslocamentos fora do plano da parede, gerados pelas cargas impostas, são classificados como uma resposta não linear geométrica do sistema. Esta, a nível local, é provocada por um efeito inelástico, como as sucessivas aberturas e fechamentos de fissuras em função de cargas cíclicas, além de alterações nas propriedades do aço devidas à fadiga. Outra característica importante na estabilidade de paredes de concreto é a posição e detalhamento das armaduras, principalmente nas bordas livres, onde se inicia a flambagem local, e as vinculações de apoio do elemento – tanto nas laterais quanto no topo e base. No estudo, manteve-se apenas 5% de carga axial, variando-se em até 1% nos ciclos de carga e descarga. Foi observado que a principal causa de

deformação lateral das paredes de concreto corresponde à flambagem das barras de aço, provocando, assim, uma perda no elemento de 30% na resistência à compressão, quando o aumento de carga é de 1% e, logo após, o colapso.

Gerasimidis *et al.* (2017) apresentaram o comportamento não linear de edifícios construídos em perfis de aço sob dano fonte de colapso progressivo, através dos modos de falha. Os autores apontam a dificuldade em medir o potencial de um dano em causar o colapso da estrutura, visto que as edificações reais são projetadas para garantir a segurança e, na maioria dos casos, a hiperstaticidade promove uma redistribuição dos esforços; e, em segundo, a modelagem desse fenômeno requer atenção redobrada com os métodos de análise não linear, a fim de obter resultados confiáveis. O colapso progressivo é considerado como uma perda de estabilidade primeiramente local e, depois, global, devido à propagação da falha e à ação das cargas verticais. No caso de pilares de perfis metálicos, a ductilidade é uma propriedade determinante no modo de falha, podendo aumentar a resistência à ruína. Para a metodologia, os pesquisadores consideraram as imperfeições locais iniciais como cargas horizontais cujas magnitudes são relevantes somente se o edifício iniciar o colapso; ao passo que a maior importância se deve às cargas verticais. Os três pórticos estudados possuem, cada um, 40 pavimentos, com alinhamento de: dois (2D.A), três (2D.B) e quatro pórticos (2D.C) ao longo da largura do edifício (Figura 8a) – sendo “2D” a terminologia para pórtico plano. Respectivamente, o índice de esbeltez seria de 12 (2D.A), 8 (2D.B) e 6 (2D.C). As estruturas foram analisadas no programa *Abaqus*, utilizando elementos de casca e de barra e considerando as não linearidades física e geométrica, a partir da retirada de alguns elementos-chave (Figura 8b). Os autores concluíram que o modo de falha estrutural está associado não somente à posição do elemento retirado, mas também à capacidade de redistribuição dos esforços para os elementos adjacentes, isto é, quanto maior o número de pórticos associados lateralmente ou quanto menor a esbeltez do edifício, mais lenta será a perda de estabilidade global.

Figura 8 - Pórticos planos submetidos à análise de colapso progressivo: (a) sistema estrutural inicial e (b) os modos de falha após a retirada de um elemento-chave.



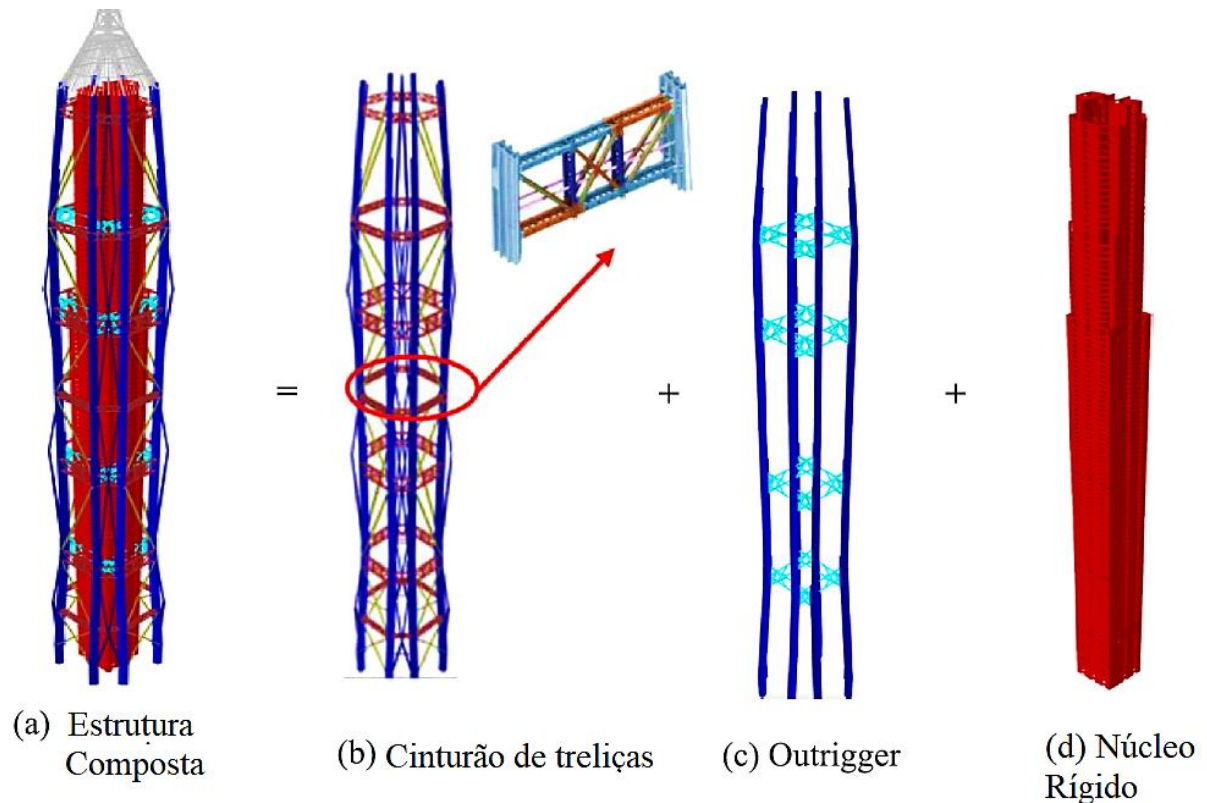
Fonte: Gerasimidis *et al.* (2017).

Quesada-Olmo *et al.* (2018) abordaram e utilizaram o monitoramento de edifícios por um sistema de navegação global por satélite (GNSS), instalando um referencial geodésico local com 4 antenas no topo do edifício Torre Espacio (Madrid, Espanha), para a transmissão dos dados de deslocamentos em tempo real. A metodologia permite identificar deslocamentos excessivos antes que a recorrência deles venha a provocar falhas graves na estrutura. A desvantagem é que, se não houver o tratamento adequado dos dados obtidos, os erros de medição podem trazer diagnósticos equivocados. No entanto, no estudo, houve um cuidado na calibração das antenas e na análise dos dados através de algoritmos gaussianos, assim, reduzindo em até 40% os erros nas medições. A precisão de medição dos deslocamentos ficou no intervalo de 2mm a 3 mm, sendo que o edifício teve um deslocamento máximo de aproximadamente 7,2 cm em seu topo com uma confiabilidade nos resultados de 99%. Foi

observado também que ventos de baixa magnitude (cerca de 5 km/h) não provocam deslocamentos detectáveis na estrutura.

Zhou *et al.* (2018) propuseram uma metodologia para instalação otimizada de um sistema estabilizador conhecido como *outrigger* em edifícios muito altos, como o exemplo estudado pelos autores, que possui 600 metros de altura e 118 pavimentos (Figura 9). O sistema *outrigger* melhora consideravelmente a resposta às ações laterais e às vibrações da estrutura. É constituído por vigas rígidas que ligam o núcleo rígido aos pilares externos do edifício e pode ser implementado em um ou mais pavimentos. Quando a estrutura é submetida a cargas laterais, a rotação do núcleo rígido é restringida pelas vigas e pilares externos, os quais recebem boa parte do esforço cortante. Assim, o *outrigger* contribui cerca de 30% na rigidez total e pode reduzir os deslocamentos laterais em cerca de 25 a 32%. A metodologia teve como base a elaboração de um modelo 3D pelo método dos elementos finitos (FEM), admitindo 28 etapas de construção e os efeitos de retração e fluência do concreto. A instalação dos *outriggers* foi avaliada nas fases construtivas, pois poderia haver uma redução temporária na estabilidade global pela ausência dos estabilizadores, fornecendo o quão mais tarde o sistema poderia ser instalado. Por outro lado, os *outriggers* foram verificados com a estrutura em serviço, identificando os acréscimos de tensão devidos à diferença de deformações entre o núcleo rígido e os pilares externos do edifício. As tensões aumentam quanto mais cedo forem executados os *outriggers*, pois os efeitos de retração e fluência impõem deformações axiais nos elementos. Assim, a situação em serviço determina o quão mais cedo poderá haver o travamento.

Figura 9 - Sistema estrutural do Edifício PAFC de 600 metros de altura.



Fonte: Adaptado de Zhou *et al.* (2018).

A estabilidade global do edifício foi avaliada nos esquemas de instalação dos *outriggers* durante as etapas construtivas, conforme a norma chinesa, e mediante o fator  $\gamma$  (diferente de  $\gamma_z$ ) escrito por:

$$\gamma = \frac{EJ_d}{\left(H^2 \sum_{i=1}^n G_i\right)} \leq 1,4 \quad (6)$$

sendo

$EJ_d$  a rigidez lateral equivalente;

$H$  a altura do edifício;

e  $G_i$  a carga vertical de projeto no  $i$ -ésimo pavimento.

Então, conforme os marcadores estabelecidos, o estudo de Zhou *et al.* (2018) permitiu estabelecer um planejamento de execução ótimo do sistema estabilizador, para evitar a instabilidade nas fases construtivas, bem como o acréscimo excessivo de tensões em serviço.

Foram apresentadas quatro metodologias que incluem a avaliação da estabilidade local e global de edifícios. Algumas bibliografias apresentadas como Carmo (1995) e Moncayo (2011), comparam os métodos da norma brasileira com os das normas estrangeiras; e além disso, há outros métodos de estabilidade global como o método de Vianello, apresentado por

Alsofi & Grahn (2017). Outra abordagem interessante é o estudo da influência dos tipos de fundações na estabilidade global, conforme mostra o estudo de Dhorajiwala & Owczarczyk (2018), e a estabilidade em edifícios de madeira, apresentada em Hein *et al.* (2016).

Em relação a esta pesquisa, o estudo de Rosso *et al.* (2016) mostra que não somente cargas de elevada magnitude podem causar instabilidade local nos elementos, mas também a variação cíclica, que culmina em fadiga; Gerasimidis *et al.* (2017) tem o propósito de mostrar como a concepção estrutural é um fator importante para a redistribuição das cargas em caso de colapso de algum dos elementos estruturais; Quesada-Olmo *et al.* (2018) mostraram que o monitoramento dos deslocamentos é uma ferramenta bastante útil para se verificar os efeitos da carga lateral de vento na estrutura; e, por fim, Zhou *et al.* (2018) mostra como os *outriggers* interferem na estabilidade global, assim como será mostrado nos exemplos deste trabalho.

Também, o objetivo da discussão a respeito dos diversos métodos é complementar o referencial teórico e mostrar as várias perspectivas de verificação das não linearidades nos edifícios. Na sequência, a teoria de dinâmica das estruturas será abordada em síntese, a fim de conduzir à metodologia a ser empregada neste trabalho.

### 3 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DO QUOCIENTE DE RAYLEIGH

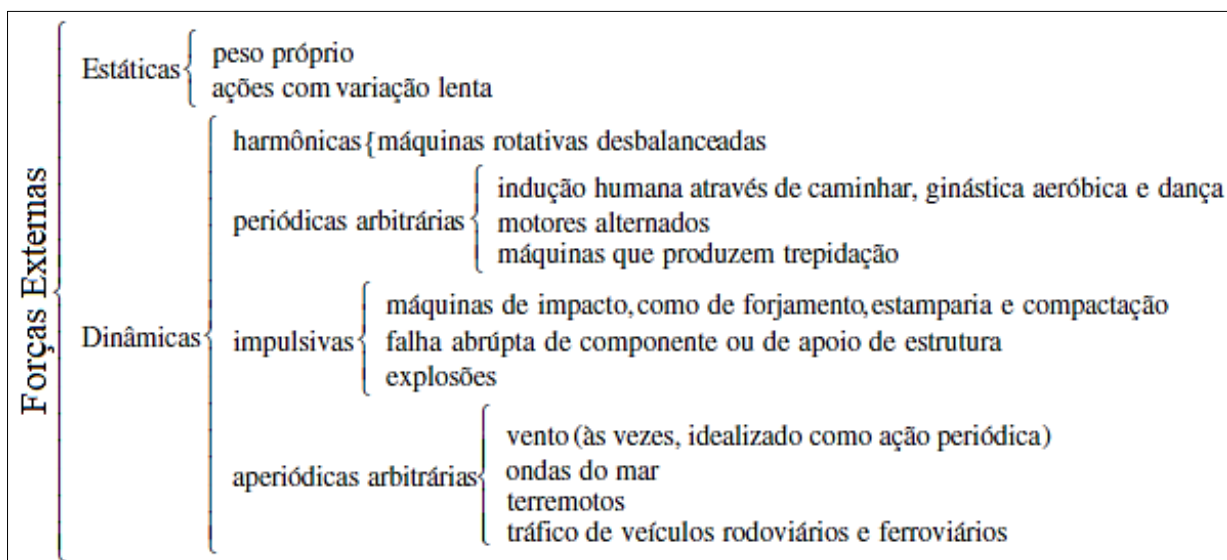
#### 3.1. CONCEITOS BÁSICOS DE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS ASSOCIADA AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A Dinâmica das Estruturas aliada ao Método dos Elementos Finitos é um tema relevante dentro da Engenharia Estrutural, trazendo aplicações diversas, como, por exemplo, na área de sismos e ações do vento, mas também no conforto ambiental das edificações e no reparo de estruturas danificadas. Este tópico tem a finalidade de discorrer alguns conceitos básicos da dinâmica estrutural que serão aplicados na obtenção dos resultados deste trabalho.

##### 3.1.1. Forças externas

As forças externas se dividem em estáticas e dinâmicas, embora muitas vezes as dinâmicas sejam admitidas como estáticas por simplificação. O esquema da Figura 10 mostra a classificação das forças:

Figura 10 - Classificação das forças externas.



Fonte: Adaptado de Soriano (2014).

A norma ABNT NBR 6120:2019 trata das cargas em edificações, recomendando os valores de peso específico para os materiais e as cargas referentes ao uso das edificações. Já para as ações dinâmicas, não há um consenso normativo no Brasil, de modo que as normas mais

relevantes nesse contexto são a ABNT NBR 6123:1988 (vento), a ABNT NBR 15421:2006 (estruturas resistentes a sismos) e a ABNT NBR 7188:2013 (cargas móveis).

No tocante a este trabalho, o vento é uma das cargas a serem verificadas na estrutura, pois é a ação lateral preponderante nos edifícios altos e em locais como o território brasileiro, onde os eventos sísmicos raramente ocorrem.

De acordo com Oliveira (2006), a resposta de edifícios altos ao vento pode ser dividida de duas maneiras: em relação ao tipo (estática ou flutuante) e à direção (longitudinal, transversal ou torcional). Quando a resposta do edifício está associada a flutuações na velocidade média, classifica-se em resposta estática; e quando ocorrem fortes rajadas e alta turbulência do vento, o edifício tende a apresentar resposta predominantemente dinâmica, ou seja, flutuante (*r.m.s.*). Na classificação quanto à direção, basicamente representa o ângulo de incidência do vento, cujas vibrações tendem a provocar modos de vibração flexionais (longitudinal e transversal) e torcionais (vento excêntrico).

Nas aplicações mostradas no Capítulo 4, o vento será admitido na estrutura como uma ação estática, utilizando os coeficientes de arrasto e as recomendações prescritas na ABNT NBR 6123:1988. Outras referências importantes sobre a Engenharia do Vento correlacionadas à norma são Davenport (1967), Gomes & Vickery (1978), Balendra (2012), Blessman (2013), Vallis *et al.* (2019) e Simiu & Yeo (2019).

### 3.1.2. Funções de interpolação de deslocamentos

No Método dos Elementos Finitos, conforme Martha (1999), existe a idealização do comportamento de barras, associando os esforços (axiais, transversais, de flexão e torção) às respectivas deformações, através de relações diferenciais. Na flexão, por exemplo, modelam-se as vigas ou pela Teoria de Navier ou pela Teoria de Timoshenko. No intuito de facilitar a obtenção das relações diferenciais e agilizar o cálculo das matrizes de rigidez, pode-se propor as funções de interpolação de deslocamentos, a fim de simular o comportamento contínuo das barras e assim poder calcular o deslocamento em qualquer ponto somente a partir dos valores correspondentes às extremidades aos graus de liberdade de cada barra.

Por exemplo, para um pórtico plano, os deslocamentos  $d'_1$  a  $d'_6$  ocorrem simultaneamente numa situação real e estão sobrepostos na Figura 11a. Assim, os deslocamentos  $d'_1$  e  $d'_4$  representam a função de deslocamento axial  $u_0(x)$ ;  $d'_2$  e  $d'_5$  são os deslocamentos transversais correspondentes a  $v_0(x)$  e  $\theta(x)$ ; e  $d'_3$  e  $d'_6$  são as rotações que definem também  $v(x)$  e  $\theta(x)$ . Cada uma das situações está representada pelas Figuras 11b a



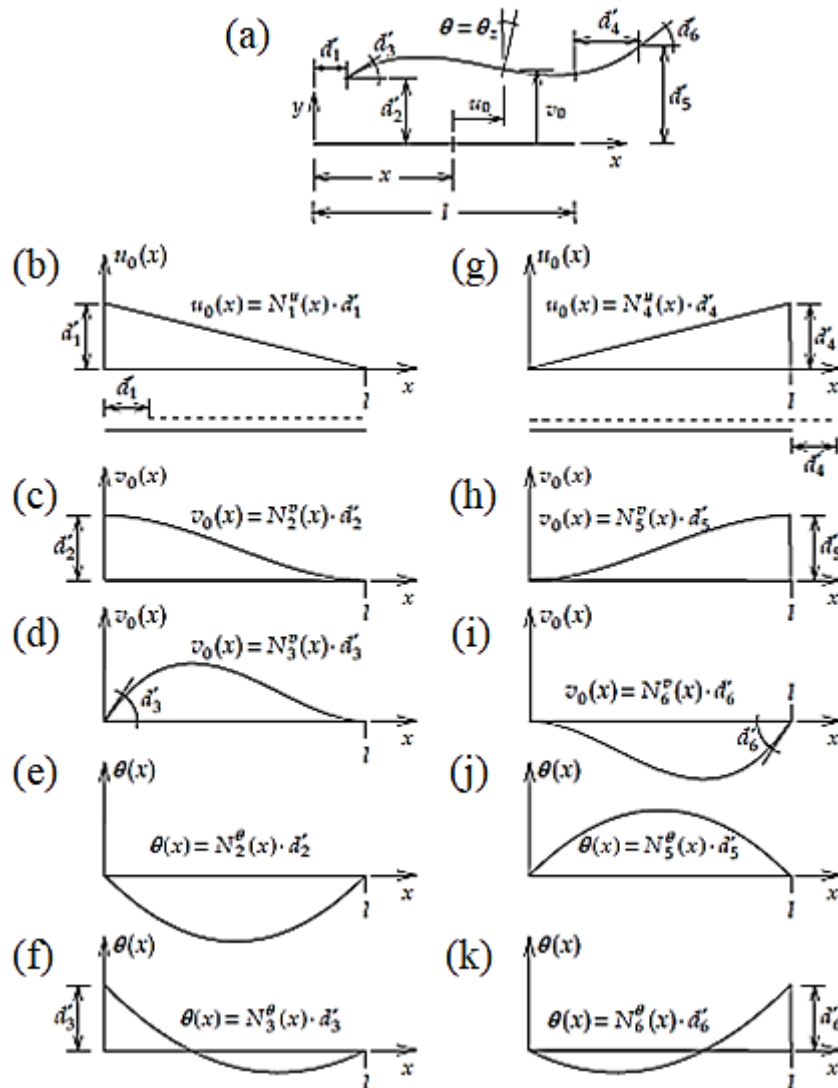
11k, de maneira que as funções  $u_0(x)$ ,  $v_0(x)$  e  $\theta(x)$  estejam associadas aos deslocamentos através das funções de forma  $N(x)$ . Portanto, para uma barra de pórtico plano, tem-se (MARTHA, 1999):

$$\begin{Bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u(x) & 0 & 0 & N_4^u(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2^v(x) & N_3^v(x) & 0 & N_5^v(x) & N_6^v(x) \\ 0 & N_2^\theta(x) & N_3^\theta(x) & 0 & N_5^\theta(x) & N_6^\theta(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Ou seja, condensando as matrizes da Equação 8, escreve-se:

$$\{u\} = [N]\{d'\} \quad (8)$$

Figura 11 - Superposição das deformadas para uma barra de pórtico plano, constituída pelas funções de forma em cada grau de liberdade de uma barra isolada.



A Equação 8 generaliza o conceito das funções de interpolação, fazendo com que as funções de forma apresentadas possam se estender para uma barra de pórtico espacial, considerando que cada nó de extremidade possui 6 graus de liberdade e, então, haverá 12 funções de forma que se relacionarão aos pares de deslocamentos axiais, rotações em duas direções por flexão, deslocamentos transversais em duas direções e rotações axiais por torção.

As funções de forma que descrevem o comportamento de uma barra de pórtico plano sob a teoria de Navier são (MARTHA, 1999):

$$N_1^u(x) = 1 - \frac{x}{l} \quad (9)$$

$$N_4^u(x) = \frac{x}{l} \quad (10)$$

$$N_2^v(x) = 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \quad (11)$$

$$N_3^v(x) = x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad (12)$$

$$N_5^v(x) = 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \quad (13)$$

$$N_6^v(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \quad (14)$$

$$N_2^\theta(x) = -6\frac{x}{l^2} + 6\frac{x^2}{l^3} \quad (15)$$

$$N_3^\theta(x) = 1 - 4\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2} \quad (16)$$

$$N_5^\theta(x) = 6\frac{x}{l^2} - 6\frac{x^2}{l^3} \quad (17)$$

$$N_6^\theta(x) = -2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2} \quad (18)$$

### 3.1.3. Propriedades dinâmicas das estruturas

Os materiais utilizados na construção civil (e.g., aço, concreto, madeira, cerâmica etc.) possuem propriedades dinâmicas tais como massa ( $m$ ), amortecimento ( $c$ ) e rigidez ( $k$ ), as

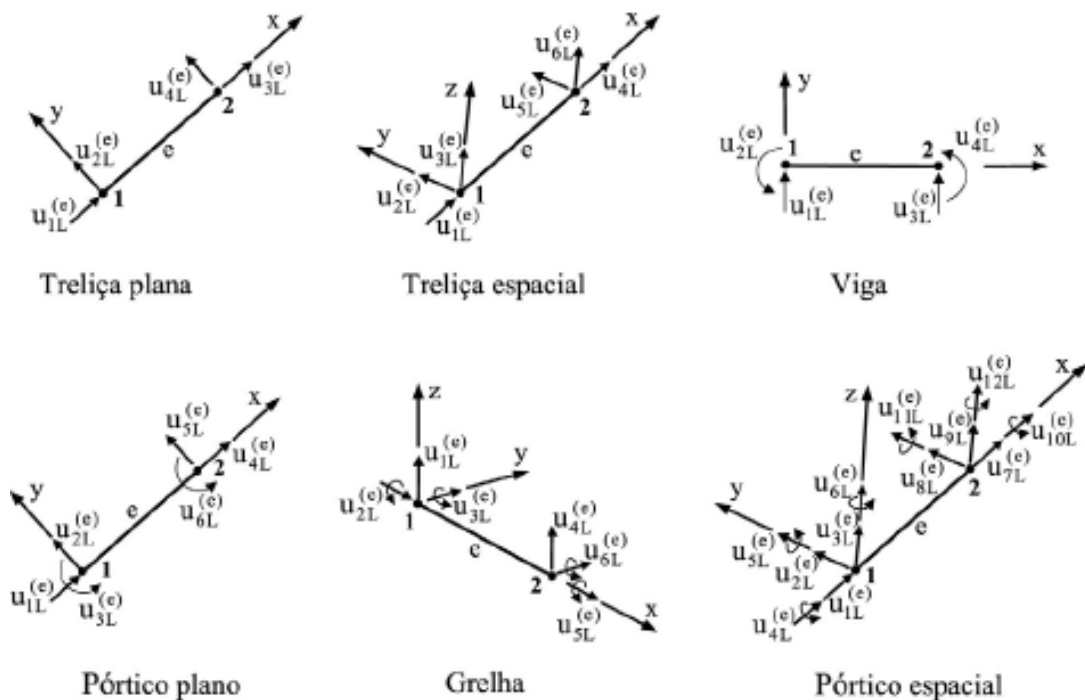
quais governam a clássica equação diferencial de movimento, descrita abaixo para sistemas de múltiplos graus de liberdade (MDOF) (Clough & Penzien, 1995):

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (19)$$

onde  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{p}(t)$  são, respectivamente, a aceleração, a velocidade, o deslocamento e a força atuante, todos em função do tempo.

Em sistemas de múltiplos graus de liberdade (MDOF), em grau discreto, as propriedades (massa, rigidez e amortecimento) são avaliadas em pontos da estrutura e, portanto, são escritas em matrizes que dependem da tipologia do sistema estrutural, ou seja, se são grelhas, pilares, pórticos planos, pórticos espaciais, entre outros (Figura 12). Assim, a estrutura pode ser dividida em vários “elementos finitos”, que recebem uma numeração junto com seus pontos nodais, de onde serão obtidos os coeficientes de rigidez e deslocamentos, de modo a equilibrá-la localmente e, após, globalmente.

Figura 12 - Deslocamentos nodais e graus de liberdade dos elementos em seus referenciais locais.



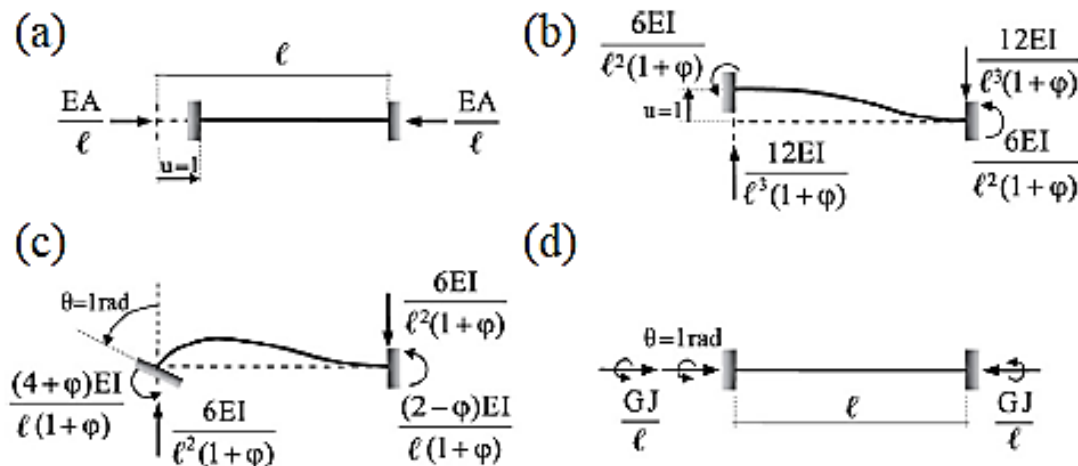
Fonte: Soriano (2014).

### 3.1.3.1. MATRIZ DE RIGIDEZ

A matriz  $[k]$  é escrita conforme os graus de liberdade (GDLs) considerados na discretização da estrutura (Figura 12), sendo cada elemento  $k_{ij}$  igual à força restritiva na direção

do  $i$ -ésimo deslocamento, quando este deslocamento imposto é unitário no grau  $j$ , mantendo os demais nulos (Figura 13). Esta formulação é a partir do Método dos Deslocamentos, que antecede o Método da Rigidez Direta, embora existam outras formulações na literatura, como se pode encontrar em Chandrupatla & Belegundu (2002) e Cook *et al.* (2002), através do Método de Rayleigh-Ritz ou pelo Método de Galerkin, por exemplo.

Figura 13 - Coeficientes de rigidez (a) axial, (b) transversal, (c) flexional e (d) torcional.



Fonte: Soriano (2014)

Na Figura 13, a propriedade  $\varphi$  é admitida em barras curtas, que consideram a deformação por esforço cortante, sendo expressa por:

$$\varphi_y = \frac{12EI_z f_y}{GA l^2} \quad \text{e} \quad \varphi_z = \frac{12EI_y f_z}{GA l^2} \quad (20)$$

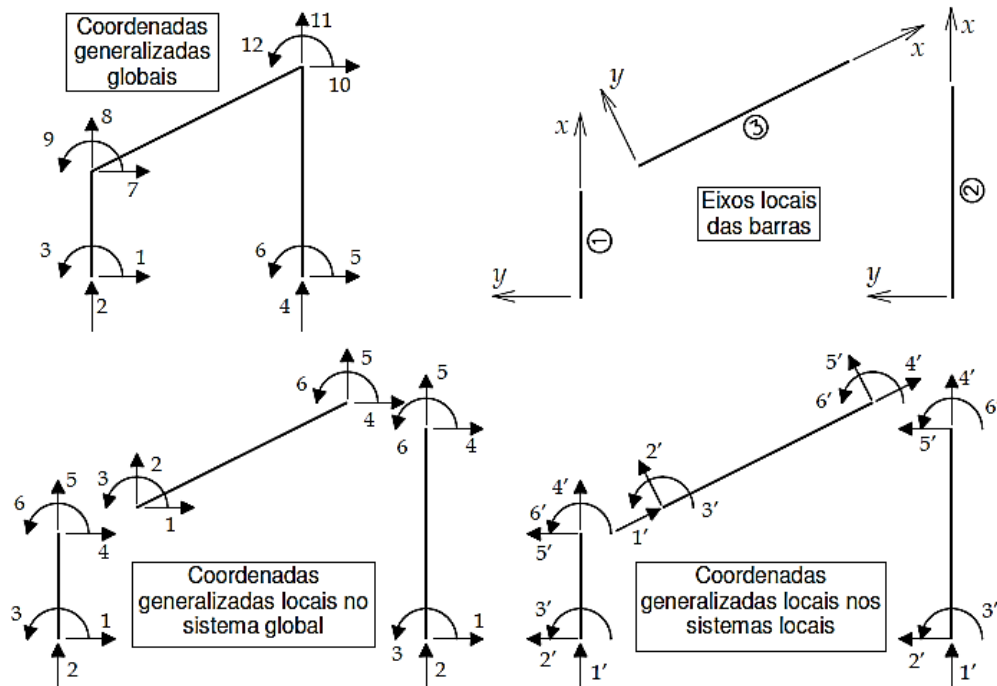
em que  $E$ ,  $I$  ( $I_z$  ou  $I_y$ ),  $G$ ,  $A$ ,  $l$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal, a inércia de área de seção transversal, o módulo de elasticidade transversal, a área da seção e o comprimento da barra. Já  $f_y$  e  $f_z$  são os fatores de cisalhamento.

Por exemplo, para uma barra de pórtico plano, são considerados 3 GDLs (flexional, axial e transversal) em cada nó, de maneira que a matriz de rigidez seja quadrada e simétrica, de ordem  $6 \times 6$ . Já para um pórtico espacial, são 6 GDLs em cada nó, ou seja, a matriz de rigidez terá ordem quadrada de  $12 \times 12$ .

Então, as matrizes de rigidez são escritas no sistema local (Figura 14) e transformadas para o sistema de coordenadas globais por uma matriz de rotação (de mesma ordem da matriz de rigidez), uma vez que cada elemento possui uma orientação diferente na estrutura. A matriz de rotação também serve para transformar deslocamentos e forças do sistema local para o

global. As expressões para matrizes de rigidez de pórticos, grelhas, vigas e treliças são facilmente encontradas em Martha (1999) e Soriano (2014).

Figura 14 - Exemplo de sistemas de eixos locais e globais para um pórtico plano.



Fonte: Martha (1999).

A realocação dos  $k_{ij}$  de cada matriz de rigidez de cada elemento finito, agora no sistema global, forma a matriz de rigidez global. Este procedimento é denominado como Método da Rigidez Direta e visa encontrar os esforços e deslocamentos aos quais a estrutura está submetida.

### 3.1.3.2. MATRIZ DE MASSA

É a matriz  $[m]$  que indica a massa dos elementos de maneira discreta ou consistente. Em ambas as expressões, utiliza-se o termo  $m' = \rho A$ , que representa a massa linear do elemento, igual ao produto da área da seção pela massa específica do material. Admite-se como discreta quando a massa de cada barra é concentrada em seus nós; e consistente quando é formulada pelo Método dos Elementos Finitos, a partir das funções de interpolação, vistas anteriormente (CLOUGH & PENZIEN, 1995).

### 3.1.3.3. MATRIZ DE AMORTECIMENTO

O amortecimento  $[c]$  é uma propriedade inerente ao material, mas também depende da geometria da estrutura. É responsável pela atenuação da resposta dinâmica, sendo classificado como viscoso ou histerético. No amortecimento viscoso, mais comum nas modelagens, a amplitude de vibração varia exponencialmente, ao passo que no histerético (Coulomb) a variação é linear.

O amortecimento viscoso pode ser calculado proporcionalmente pelas matrizes de massa e de rigidez, sendo conhecido como amortecimento proporcional de Rayleigh:

$$[c] = a_0[m] + a_1[k] \quad (21)$$

com as constantes  $a_0$  e  $a_1$  encontradas por meio de um sistema de equações de maneira que sejam conhecidas as frequências naturais de dois modos, isto é,  $\omega_m$  e  $\omega_n$  e a razão de amortecimento  $\xi$ . Então:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_m + \omega_n} \begin{Bmatrix} \omega_m \omega_n \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

O amortecimento adimensional  $\xi$  é estabelecido conforme análises experimentais, através da quantificação das amplitudes da resposta dinâmica. Dependendo da intensidade, há o conceito de amortecimento – em ordem crescente de dissipação de energia – subcrítico (subamortecido), crítico e supercrítico (superamortecido), que se relaciona com a propagação da resposta aos diversos tipos de carregamento dinâmico (harmônico, periódico, impulsivo etc.). Mais detalhes e definições sobre os tipos de amortecimento são encontrados em Clough & Penzien (1995), ainda que o mais comum seja o apresentado pelas Equações 21 e 22.

### 3.1.3.4. MODOS DE VIBRAÇÃO

A partir da Equação 19, é possível idealizar alguns modelos de vibração, classificando-os como amortecidos e não amortecidos; e, dependendo da natureza da excitação  $\mathbf{p}(t)$ , observar a configuração da resposta. Os modos de vibração são propriedade de cada estrutura em apresentar um formato de deslocamentos associado a uma frequência natural  $\omega_n$ . Para encontrar essas formas modais, recorre-se à idealização da estrutura sob vibração livre não amortecida, anulando-se alguns termos da Equação 19, da seguinte maneira (CLOUGH & PENZIEN, 1995):

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{k}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (23)$$

cuja solução homogênea é dada por

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}} \sin(\omega t + \theta) \quad (24)$$

com  $\hat{\mathbf{u}}$  sendo a forma modal do sistema e  $\theta$  o ângulo de fase.

Substituindo  $\mathbf{u}(t)$  e sua derivada segunda na Equação 23, escreve-se:

$$-\omega^2 \mathbf{m}\hat{\mathbf{u}} \sin(\omega t + \theta) + \mathbf{k}\hat{\mathbf{u}} \sin(\omega t + \theta) = \mathbf{0} \quad (25)$$

E rearranjando os termos:

$$[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (26)$$

Como  $\hat{\mathbf{u}}$  não pode ser nulo, estabelece-se o problema de autovalores e autovetores, em que os autovalores  $\lambda_n = \omega^2$  são as frequências naturais da estrutura e os autovetores são as formas modais  $\phi_n$ , isto é:

$$|\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}| = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{k} \phi_n = \omega_n^2 \mathbf{m} \phi_n \quad (27)$$

Ao proceder com as operações matemáticas, considerando a ortogonalidade dos modos de vibração, desacopla-se o sistema descrito pela Equação 19 e o transforma para o domínio modal. Assim, obtém-se uma matriz modal  $\Phi$ , associada a um vetor de autovalores  $\Lambda$ . A matriz modal tem em suas colunas as formas modais  $\phi_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), isto é,  $\Phi = \{\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_N\}$  e o vetor de autovalores  $\Lambda^T = \{\omega_1^2 \ \omega_2^2 \ \dots \ \omega_N^2\}$ . Em outras palavras, é como encontrar várias soluções para a Equação 27 e agrupá-las em uma matriz e um vetor. Dessa forma, pode-se trabalhar com as matrizes massa, rigidez e amortecimento modais – agora diagonais – respectivamente expressas abaixo (CLOUGH & PENZIEN, 1995; SORIANO, 2014):

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \Phi^T \mathbf{m} \Phi \\ \mathbf{K} &= \Phi^T \mathbf{k} \Phi \\ \mathbf{C} &= \Phi^T \mathbf{c} \Phi \end{aligned} \quad (28)$$

E a Equação 19 torna-se:

$$[\Phi^T \mathbf{m} \Phi] \ddot{\mathbf{u}}(t) + [\Phi^T \mathbf{c} \Phi] \dot{\mathbf{u}}(t) + [\Phi^T \mathbf{k} \Phi] \mathbf{u}(t) = \Phi^T \mathbf{p}(t) \quad (29)$$

$$\rightarrow \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{P}(t)$$

Neste t3pico 3.1, foram expostos os principais conceitos na avalia33o das propriedades din4micas das estruturas, a fim de introduzir o t3pico 3.2 a seguir, que explicar4 o m3todo a ser empregado na avalia33o da estabilidade global e tema principal deste trabalho: o Quociente de Rayleigh. Por enquanto, n4o foram apresentadas as matrizes de massa e de rigidez de algumas estruturas, pois o foco principal ser4o os p3rticos planos. Assim, tais matrizes ser4o demonstradas no pr3ximo t3pico para melhor compreens4o dos procedimentos a serem aplicados.

### 3.2. QUOCIENTE DE RAYLEIGH NA AVALIA33O DA ESTABILIDADE GLOBAL

Proposto por Rayleigh & Lindsay (1945), tem como objetivo n4o somente calcular a frequ4ncia natural de vibra33o de uma barra (ou de um conjunto de barras), mas tamb3m encontrar a carga axial limite de elementos submetidos 4 compress4o, uma vez que a frequ4ncia natural tende a zero quando a estrutura est4 sob carga cr4tica de flambagem. Baseia-se no princ4pio da conserva33o de energia, a qual permanecer4 constante num sistema em vibra33o livre n4o amortecida (CLOUGH & PENZIEN, 1995).

Dessa forma, o conceito ser4 demonstrado primeiro para elementos cont4nuos, como vigas e, depois, para elementos discretos, como estruturas reticuladas.

#### 3.2.1. Meio Cont4nuo

Conforme explicado em Clough & Penzien (1995), n4o h4 vantagem em se aplicar o m3todo num sistema de um 3nico grau de liberdade (SDOF), em particular o de massa-mola idealizado. Como se trata de um sistema em vibra33o livre n4o amortecida, para uma viga, por exemplo, pode-se admitir a seguinte fun33o de deslocamentos:

$$u(x, t) = N(x)Z_0 \sin(\omega t) \quad (30)$$

sendo  $Z_0$  a amplitude inicial e  $N(x)$  a fun33o de forma associada.

Com apenas uma fun33o  $N(x)$ , considera-se o sistema como SDOF e a frequ4ncia natural pode ser calculada obtendo-se a m4xima energia de deforma33o desenvolvida durante



o movimento na máxima energia cinética (CLOUGH & PENZIEN, 1995). Então, a máxima energia de deformação (ou energia potencial) é dada por:

$$V_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} Z_0^2 \int_0^L EI(x) [N''(x)]^2 dx \quad (31)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal e  $I(x)$  é a inércia de área de seção transversal, em função de  $x$  quando a seção transversal é variável ao longo do comprimento.

A máxima energia cinética é calculada por:

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} Z_0^2 \omega^2 \int_0^L m(x) [N(x)]^2 dx \quad (32)$$

Assim, igualando-se  $V_{m\acute{a}x} = T_{m\acute{a}x}$ , conforme o Princípio da Conservação de Energia, chega-se ao quociente de Rayleigh:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI(x) [N''(x)]^2 dx}{\int_0^L m(x) [N(x)]^2 dx} \quad (33)$$

com o numerador sendo a rigidez generalizada e o denominador, a massa generalizada.

De maneira universal, a expressão para o quociente de Rayleigh se torna:

$$\omega^2 = \frac{V_{m\acute{a}x}}{T_{m\acute{a}x}} \quad (34)$$

Para inserir o efeito de 2ª ordem na energia potencial elástica máxima, basta subtrair o efeito da carga axial nas barras (admitida como constante), de maneira que:

$$V_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \left[ \left( Z_0^2 \int_0^L EI(x) [N''(x)]^2 dx \right) - \left( \int_0^L P [N'(x)]^2 dx \right) \right] \quad (35)$$

sendo  $P$  a carga axial de compressão (sinal positivo) e  $N'(x)$  a rotação do elemento.

Novamente, calcula-se o quociente com efeito de 2ª ordem utilizando  $V_{m\acute{a}x}$  da Equação 35 e  $T_{m\acute{a}x}$  da Equação 32, substituindo-os na Equação 34.

### 3.2.2. Meio Discretizado

Como já mencionado, o aumento da carga axial tende a reduzir as frequências de vibração, pois ocorre também uma redução da rigidez dos elementos da estrutura. Portanto, estende-se o conceito do método de Rayleigh para sistemas MDOF, em meio discreto para facilitar o cálculo computacional. Desta forma, a função de deslocamentos é representada matricialmente por:

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j Z_0 \sin \omega t \quad (36)$$

em que  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j$  é o vetor da forma dos deslocamentos modais arbitrados para a condição de vibração livre, de acordo com os exemplos pontuados por Clough & Penzien (1995). Também  $\mathbf{u}(t)$  pode ser o resultado da ação de forças às quais a estrutura está submetida, se a deformada da estrutura assimilar-se a um dos modos de vibração, conforme será apresentado neste trabalho, embora as estimativas de frequência natural superem às exatas obtidas pelo método direto (resolução do problema de autovalores e autovetores, Equação 27).

As energias (potencial e cinética) máximas são, respectivamente (SORIANO, 2014):

$$V_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j^T \mathbf{K} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j \quad (37)$$

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j^T \mathbf{M} \hat{\boldsymbol{\varphi}}_j \quad (38)$$

sendo  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$ , respectivamente, as matrizes de rigidez e de massa globais. Para um pórtico plano, a matriz de rigidez de um elemento de barra é escrita da seguinte maneira:

$$[k_e] = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^3} & \frac{6I}{L^2} & 0 & -\frac{12I}{L^3} & \frac{6I}{L^2} \\ 0 & \frac{6I}{L^2} & \frac{4I}{L} & 0 & -\frac{6I}{L^2} & \frac{2I}{L} \\ -\frac{A}{L} & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^3} & -\frac{6I}{L^2} & 0 & \frac{12I}{L^3} & -\frac{6I}{L^2} \\ 0 & \frac{6I}{L^2} & \frac{2I}{L} & 0 & -\frac{6I}{L^2} & \frac{4I}{L} \end{bmatrix} \quad (39)$$

E a matriz de massa consistente é escrita como:

$$[m_e] = \frac{m'L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

E, analogamente, o quociente é escrito como (SORIANO, 2014):

$$\omega^2 = \frac{\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_j^T \mathbf{K} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_j}{\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_j^T \mathbf{M} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_j} \quad (41)$$

sendo  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  as matrizes de rigidez globais da estrutura, obtidas através do Método da Rigidez Direta, o qual insere adequadamente as matrizes de cada elemento ( $[m_e]$  e  $[k_e]$ ) para formar as respectivas matrizes globais.

Observa-se que na Equação 41, existe apenas um modo de vibração associado, já que  $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_j$  é um vetor e não uma matriz com as funções de forma. Assim, para considerar modos mais altos, adota-se uma função de deslocamentos da seguinte maneira (CLOUGH & PENZIEN, 1995):

$$\mathbf{u} = \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_1 Z_1 + \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_2 Z_2 + \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_3 Z_3 + \dots \quad (42)$$

De maneira geral:

$$\mathbf{u} = \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{Z} \quad (43)$$

sendo  $\mathbf{Z}$  o vetor com as amplitudes de deslocamentos.

No meio discreto, a consideração do efeito de 2ª ordem é feita de maneira similar ao apresentado na Equação 35, mas utilizando as funções de forma respectivas às rotações dos elementos, o que resulta na matriz de rigidez geométrica. Para uma barra pórtico plano, a matriz de rigidez geométrica é escrita da seguinte maneira (WAHRHAFTIG, 2008):

$$[k_g] = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (44)$$

com  $F$  sendo a força axial nos elementos de barra, tomada como positiva para compressão e negativa para tração.

Wahrhaftig (2008) apresenta, ainda, a rigidez geométrica como uma função do esforço normal atuante nos elementos estruturais, também no que se refere à instabilidade local dos elementos submetidos à compressão (ou seja, a flambagem). Portanto, para o meio discreto, calcula-se o quociente de Rayleigh de um pórtico plano, em segunda ordem, substituindo a matriz de rigidez global  $\mathbf{K}_{eq}$  por uma equivalente, escrita como:

$$\mathbf{K}_{eq} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_G \quad (45)$$

onde  $\mathbf{K}_G$  é a matriz de rigidez geométrica global, também obtida pelo Método da Rigidez Direta, para a estrutura completa.

Então:

$$\omega'^2 = \frac{\hat{\Phi}_j^T \mathbf{K}_{eq} \hat{\Phi}_j}{\hat{\Phi}_j^T \mathbf{M} \hat{\Phi}_j} \quad (46)$$

## 4 METODOLOGIA

Neste capítulo, serão apresentados os parâmetros a serem analisados para se estabelecer uma comparação entre os métodos normativos da ABNT NBR 6118:2014 e o método proposto. Dessa forma, os casos apresentados terão como objetivo mostrar a relação entre as variáveis determinantes para a estabilidade estrutural, como a esbeltez e resistência do concreto, e a redução da frequência natural conforme os esforços se aproximem do limite, no que se refere à perda do equilíbrio e esgotamento da capacidade resistente.

Todos os casos contemplarão pórticos planos, que podem ser admitidos, cada um, como parte de um edifício, cujas ações consideradas serão proporcionais à área de influência correspondente. Primeiramente, serão abordadas algumas premissas adotadas para todos os casos, referente aos métodos normativos e ao método proposto; os tipos de carregamentos e suas variações e/ou combinações; e os materiais e seções padrões em todos os pórticos.

Em segundo instante, serão mostrados os estudos de caso e seus parâmetros de análise. Por fim, haverá um fluxograma para a compreensão do algoritmo construído em Python, disponível na íntegra no Apêndice A.

### 4.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O estudo do Método do Quociente de Rayleigh com efeitos de 2ª ordem terá as principais premissas: desprezar-se-ão os efeitos construtivos dos edifícios ou Efeito Incremental, como explicado em Kimura (2007); não serão consideradas as deformações decorrentes do tempo, como a fluência e a retração do concreto; o desaprumo, permitido no item 11.3.3.4.1 da ABNT NBR 6118:2014, também será desprezado nas análises; e as não linearidades físicas (NLF) serão admitidas no método proposto e no Método  $\gamma_z$ , excluindo-se a consideração no parâmetro  $\alpha$ , conforme recomenda a bibliografia citada. É relevante retomar que a NLF é incluída nos modelos a partir da redução da rigidez dos elementos, na inércia (como ocorre no cálculo da seção fissurada nos Estádios II e III) ou no módulo de elasticidade. Nestes casos, serão adotadas as reduções para vigas e pilares, da seguinte maneira:  $0,8E_{cs}I_c$  para pilares e contraventamentos e  $0,4E_{cs}I_c$  para vigas – sendo  $E_{cs}$  o módulo de elasticidade secante respectivo à resistência à compressão do concreto ( $f_{ck}$ ) e  $I_c$  a inércia da seção bruta, calculada em relação ao eixo em torno do qual ocorre a flexão dos elementos.

## 4.2. CARREGAMENTOS

Os carregamentos adotados em todos os pórticos serão basicamente: o vento, a ser admitido gradualmente conforme a ABNT NBR 6123:1988; a sobrecarga permanente, podendo aumentar até o esgotamento da capacidade resistente do primeiro lance de pilares; e o peso próprio, inerente a todas as análises estruturais.

### 4.2.1. Vento

As cargas de vento serão inseridas de maneira gradativa no edifício, sempre na direção 0°, de maneira que se possa avaliar a influência das ações horizontais ao longo da altura. Ou seja, será calculado o vento integral admitido para as condições a serem apresentadas, com a finalidade de observar sua influência na estabilidade da edificação ao longo do tempo. Para todos os casos, serão adotados os seguintes parâmetros:  $V_0 = 45$  m/s, correspondente à cidade de Porto Alegre (RS, Brasil); fator  $S_1$  igual a 1,0 – terreno plano; fator  $S_2$  correspondente à Categoria V e classe dependente da geometria da estrutura a ser analisada, de tal modo que varie ao longo da altura (conforme Equação 54); e o fator  $S_3$  variando de acordo com a Equação 48, retirada do Anexo B da ABNT NBR 6123:1988.

Assim, a variação da intensidade do vento segundo o fator  $S_2$  é (ABNT NBR 6123:1988):

$$S_2 = b F_r (z/10)^p \quad (47)$$

Com:

$b$  e  $p$  obtidos da Tabela 1 ou Tabela 21 do Anexo A da respectiva norma, dependendo das dimensões da estrutura;

$F_r$  é o fator de rajada, válido somente para edificações de Categoria II – nos casos a serem apresentados,  $F_r = 1,0$ ;

$z$  é a cota vertical do edifício, em que atua o vento especificado, até o valor de  $z_g$  – que é a altura da camada limite atmosférica, conforme a classe e categoria da edificação.

Já o fator  $S_3$ , correspondente à velocidade de vento cuja rajada tem duração de 3 segundos a 10 metros de altura, é calculado por:

$$S_3 = 0,54 \left[ -\frac{\ln(1 - P_m)}{m} \right]^{-0,157} \quad (48)$$

Sendo:

$P_m$  a probabilidade de a velocidade básica do vento ser excedida em um período de  $m$  anos.

A Equação 47 pretende mostrar como a intensidade do vento se relaciona com a estabilidade da estrutura ao longo dos anos.

Então, calcula-se a força de arrasto (kN) de forma direta (ABNT NBR 6123:1988):

$$F_a = 6,13 \cdot 10^{-4} \cdot (S_1 S_2 S_3 \cdot V_0)^2 \cdot C_a \cdot A_e \quad (49)$$

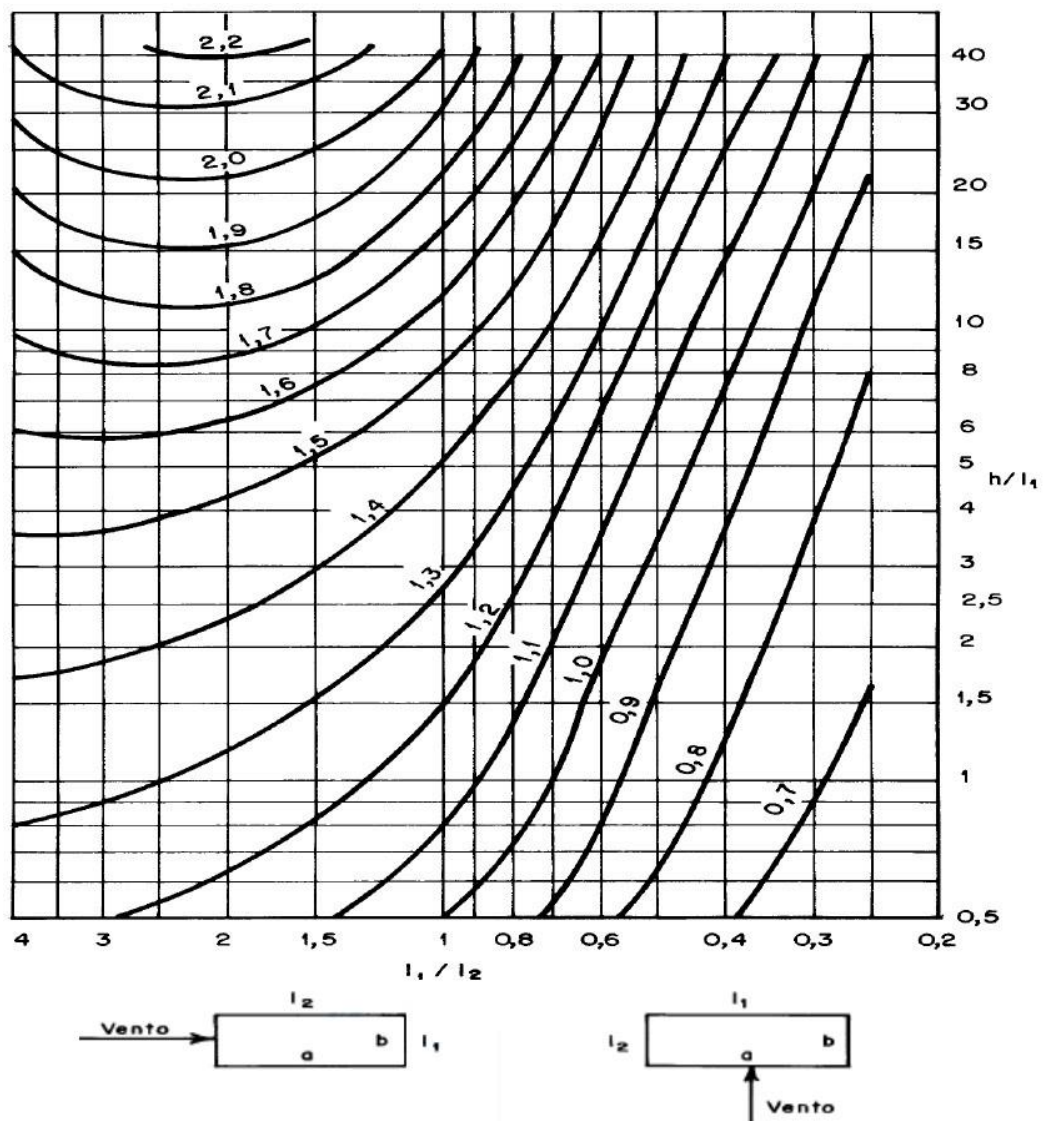
Onde:

$S_1 S_2 S_3 \cdot V_0 = V_k$ , ou seja, a velocidade característica do vento (m/s);

$C_a$  é o coeficiente de arrasto para os casos estudados e de acordo com a Figura 15;

$A_e$  é a área da face que recebe a ação do vento ( $m^2$ ).

Figura 15 - Ábaco para o cálculo dos coeficientes de arrasto em baixa turbulência.



### 4.2.2. Sobrecarga Permanente

Para a sobrecarga, serão aplicados valores crescentes de modo que se ultrapasse em até 27,5% o valor da carga limite para o dimensionamento de uma viga 20x50, em concreto C30, em armadura simples, que é a situação mais crítica de dimensionamento entre os pórticos estudados. Isto é: o máximo vão a ser considerado para os pórticos é de 6 metros, o mínimo  $f_{ck}$  apresentado é de 30 MPa e a mínima seção transversal é admitida como 20x50. Portanto, limitando-se a razão  $x/d = 0,45$  (ABNT NBR 6118:2014) para manter o dimensionamento em Domínio 3, tem-se uma carga de 3,53 tf/m característica, cujo momento fletor característico é de 15,9 tfm, resultando numa armadura de 13,72 cm<sup>2</sup>. Ultrapassando-se em 27,5% o valor limite considerado de 3,53 tf/m, resulta em aproximadamente 4,5 tf/m adicionais, para a mesma viga de 20x50, como será visto adiante através dos multiplicadores  $M$ . Assim, as vigas serão mantidas com a mesma seção transversal e o carregamento permanente será adicionado como múltiplo de 30% de seu peso próprio. Por exemplo, se uma viga tem 0,1 m<sup>2</sup> de área de seção transversal e o peso específico do concreto é 25 kN/m<sup>3</sup>, logo 30% de carga adicional é igual a 0,075 tf/m. Portanto, essa carga adicional será multiplicada por um fator  $M$  gradual (Tabela 14). Para simplificação das análises, conforme as combinações seguintes, não serão consideradas cargas acidentais verticais e todos os edifícios serão considerados como residenciais.

### 4.2.3. Combinações das ações

Para a aplicação dos métodos normativos e do método proposto, é necessário estabelecer as combinações de carregamentos. Portanto, para cada intensidade de sobrecarga e intensidade de vento aplicada à estrutura, admitem-se as combinações conforme a Tabela 12:

Tabela 12 - Combinações de ações para a aplicação dos métodos de estabilidade global.

MÉTODO	COMBINAÇÃO	NLF?
<b>Gama-Z (<math>\gamma_z</math>)</b>	Última Normal (ABNT NBR 8681:2003): $F_d = \sum_{i=1}^m \gamma_g F_{Gi,k} + \gamma_q \left[ F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n \psi_{0j} F_{Qj,k} \right] \quad (50)$ com todas as combinações ELU considerando o vento como variável principal.	Sim
<b>Parâmetro Alfa (<math>\alpha</math>)</b>	$F_k = F_{Gi,k} + \sum_{j=2}^n F_{Qj,k} \quad (51)$ Deslocamento horizontal com vento integral.	Não



<b>Quociente de Rayleigh (<math>f_{ray}</math>)</b>	$F_k = F_{Gi,k} + \sum_{i=1}^n F_{Qi,k} \quad (52)$	Sim
	Sendo $\sum_{i=1}^n F_{Qi,k}$ a soma da sobrecarga e do vento em seus valores característicos.	

Na Tabela 12, define-se:

$F_{Gi,k}$  e  $F_{Q1,k}$ , respectivamente, são as ações permanentes e a ação variável principal, ambas em seus valores característicos;

$\psi_{0j}F_{Qj,k}$  é o valor reduzido de cada ação variável secundária, na combinação última normal – com  $\psi_{0j} = 0,6$  para o vento que, no entanto, será inserido como ação variável principal e única.

$\gamma_g$  e  $\gamma_q$ , respectivamente, são os majoradores das ações permanentes e variáveis, sendo iguais a  $\gamma_g = 1,4$  e  $\gamma_q = 1,4$  (para o vento e ações variáveis consideradas conjuntamente).

Outra condição comumente observada na concepção de edifícios são os limites de deslocamentos, prescritos na Tabela 13.3 da ABNT NBR 6118:2014. Para os pórticos das análises correntes, será utilizada a combinação frequente do ELS, tendo como parâmetro os deslocamentos em  $H/1700$  no topo do edifício, cujo  $H$  é a altura total. A combinação frequente é escrita da seguinte forma:

$$F_{d,ser} = \sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + \psi_1 F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n \psi_{2j} F_{Qj,k} \quad (53)$$

onde  $\psi_1 = 0,3$ , para o vento e  $\psi_2 = 0,4$  para sobrecarga variável (quando houver).

### 4.3. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E MECÂNICAS DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS

Este tópico tem a finalidade de mostrar, de modo geral, as nomenclaturas das seções transversais utilizadas, dimensões e propriedades mecânicas. Em primeiro lugar, o módulo de elasticidade (em MPa) será calculado de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, através das expressões 54 e 55:

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (54)$$

Sendo:

$\alpha_E = 1,0$ , para os pórticos em estudo;

$f_{ck}$  entre 20 e 50 MPa.

Porém, de maneira mais conservadora que a ABNT NBR 6118:2014, será utilizado o módulo de elasticidade secante para a consideração da NLF, cuja expressão é:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (55)$$

Com:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot (f_{ck}/80) \leq 1,0, \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa};$$

As seções transversais retangulares escolhidas para os pórticos terão como critério algumas seções mais comuns adotadas em edifícios reais, cujas orientações em planta serão apresentadas adiante. São mostradas na Tabela 13:

Tabela 13 - Seções transversais e resistência característica correspondente do concreto.

<b>Tipo de Elemento</b>	<b>Dimensões (cm)</b>	<b><math>f_{ck}</math> (MPa)</b>
Viga	30x100	40, 45
Viga	20x80	40
Viga	20x50	30, 35, 40, 45
Pilar	70x30	30, 35, 40, 45
Pilar	90x30	35, 40, 45
Contraventamento	50x30	45
Contraventamento	70x30	35

Nota-se que há uma variação de resistência ( $f_{ck}$ ) para as mesmas seções (Figura 16). A ideia é reproduzir uma situação bastante comum na prática: estabelecer o primeiro pavimento com  $f_{ck} = 40$  ou  $45$  MPa; o segundo e terceiro pavimentos com  $f_{ck} = 35$  ou  $40$  MPa; e os demais, até o topo, com  $f_{ck} = 30$  ou  $35$  MPa. Isto é, a base do edifício conta com uma resistência maior em função das cargas axiais que devem ser transferidas às fundações. O último caso a ser mostrado, no entanto, terá  $f_{ck} = 45$  MPa para todos os elementos. No mais, o peso específico do concreto armado é recomendado pela respectiva norma, conforme citado anteriormente, sendo igual a  $\rho_c = 25$  kN/m<sup>3</sup>.

Figura 16 - Variação da resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ) ao longo do edifício.

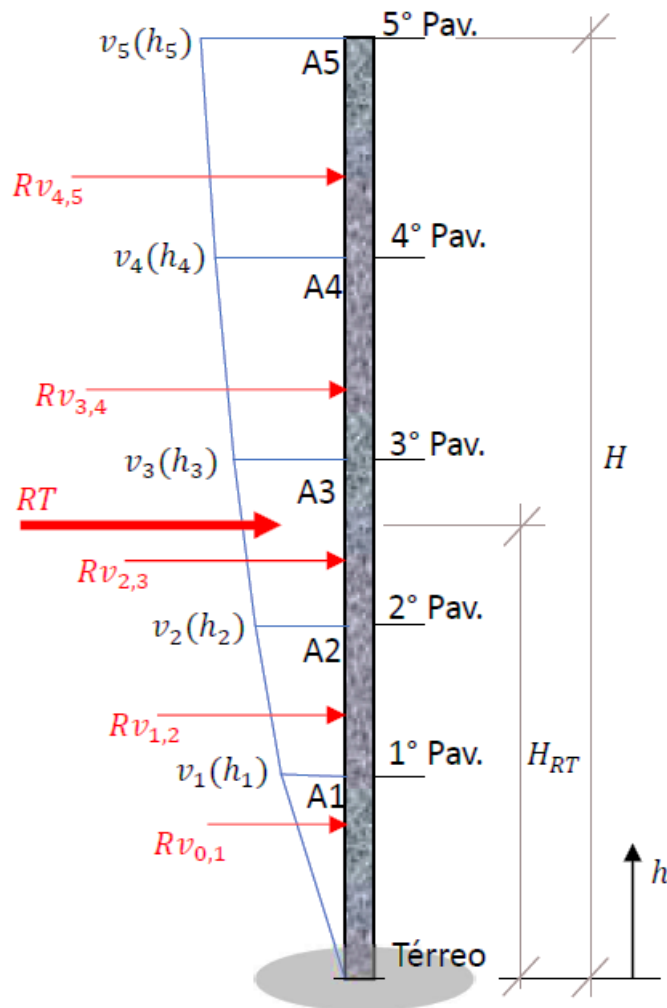


Fonte: Detalhe de “Corte Esquemático”, cedido por Estrutural Engenharia.

#### 4.4. CÁLCULO DA RIGIDEZ EQUIVALENTE DO PARÂMETRO ALFA MEDIANTE VENTO DE CAMADA LIMITE

Conforme apresentado na Equação 2 e de maneira que seja coerente com o carregamento aplicado, neste tópico é apresentado o cálculo da rigidez equivalente para os pórticos estudados. Portanto, seja uma estrutura vertical sob carregamento lateral de vento em função de camada limite atmosférica (Figura 17):

Figura 17 - Estrutura sob carga lateral de vento.



Pode-se encontrar facilmente o centroide ( $H_{RT}$ ) da área correspondente à resultante da carga distribuída ( $R_T$ ), aproximando-a por trechos lineares formados pelas intensidades de vento em cada pavimento ( $v_1(h_1)$ ,  $v_2(h_2)$ ...), uma vez que no programa *SAP2000* não é possível aplicar uma carga distribuída mediante uma função exponencial como a função da camada limite atmosférica. Concentra-se as resultantes de cada pavimento ( $Rv_{0,1}$ ) no centroide da carga triangular ou trapezoidal do pavimento, somando as de modo que:

$$R_T = Rv_{0,1} + Rv_{1,2} + \dots + Rv_{n-1,n} \quad (56)$$

sendo  $n$  o número de pavimentos.

Para encontrar a rigidez equivalente da estrutura, utiliza-se o deslocamento de topo, aqui denominado como  $\delta_H$ , relacionado à equação da linha elástica para a situação de uma carga posicionada a uma distância  $H_{RT}$  do apoio da barra (HIBBELER, 2008):

Então:

$$(EI)_{eq} = \frac{RT}{6\delta_H} [3H \cdot H_{RT}^2 - H_{RT}^3] \quad (57)$$

e assim se procede com o cálculo do parâmetro Alfa conforme foi mostrado na Equação 2.

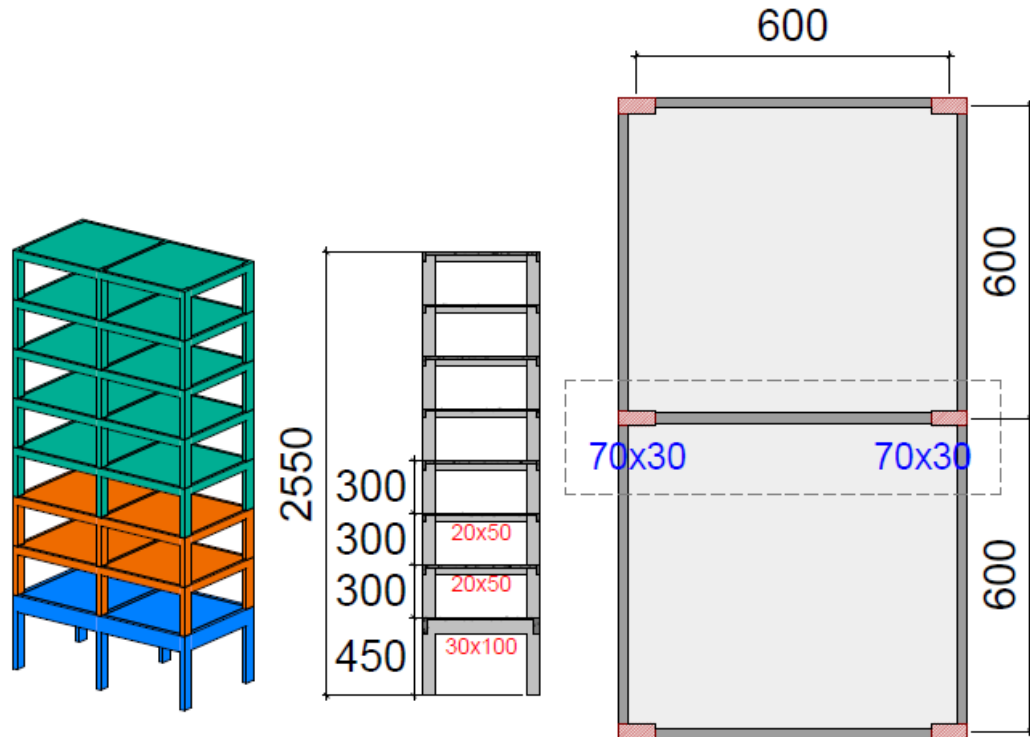
#### 4.5. ESTUDOS DE CASOS

Esta seção terá como foco mostrar os pórticos planos a serem empregados, suas características geométricas e as seções transversais escolhidas. Para o primeiro e segundo caso, os pórticos terão seu primeiro pavimento composto por vigas de seção 30x100 e pilares de geometria constante com seção indicada em azul nas Figuras 18 a 20, simulando um pavimento de transição, com *fck* igual a 40 MPa. Os dois pavimentos superiores serão compostos por vigas de 20x50 (com 35 MPa) e os demais pavimentos estruturados também com vigas de 20x50 (mas com 30 MPa). A mesma variação de resistência é admitida para os pilares (vide exemplo na Figura 16). Para o terceiro caso, aumentou-se em 5 MPa o intervalo de variação do *fck*, utilizando-se vigas de 30x100 no primeiro pavimento, 20x80 no segundo e terceiro pavimentos e 20x50 nos demais pavimentos; os pilares até o terceiro pavimento são todos de seção 90x30 e, no quarto pavimento, os pilares de borda diminuem para a seção 70x30 (Figuras 21 e 22). O último caso dispensou a variação de resistência, admitindo-a como constante, mas mantendo o padrão de geometria para as vigas, como foi feito nos dois primeiros casos. Nos dois últimos casos, os contraventamentos da estrutura foram bi-rotulados nas extremidades, a fim de reduzir a rotação dos nós. As Figuras 18 a 24 serão mostradas na mesma escala para fins de comparação de ordem de grandeza, com as medidas todas em centímetros.

##### 4.5.1. Pórtico de 8 Pavimentos e 1 Vão – Caso 1

Neste pórtico inicial, a ideia é visualizar o comportamento do vento para edifícios de pequeno porte. As dimensões do pórtico plano são mostradas na Figura 18, cujos pilares de todos os lances possuem seção 70x30, somente com variação de resistência.

Figura 18 – Pórtico plano de 8 pavimentos e 1 vão: vista espacial, corte e seleção na planta do pavimento tipo.



#### 4.5.2. Pórtico de 12 Pavimentos e 2 Vãos – Caso 2

Utilizando a mesma geometria da planta de fôrmas do primeiro edifício, mas aumentando-se a altura e adicionando-se um vão, tem-se o edifício de médio porte, com 12 pavimentos (Figuras 19 e 20):

Figura 19 – Pórtico plano de 12 pavimentos e 2 vãos: vista espacial e corte.

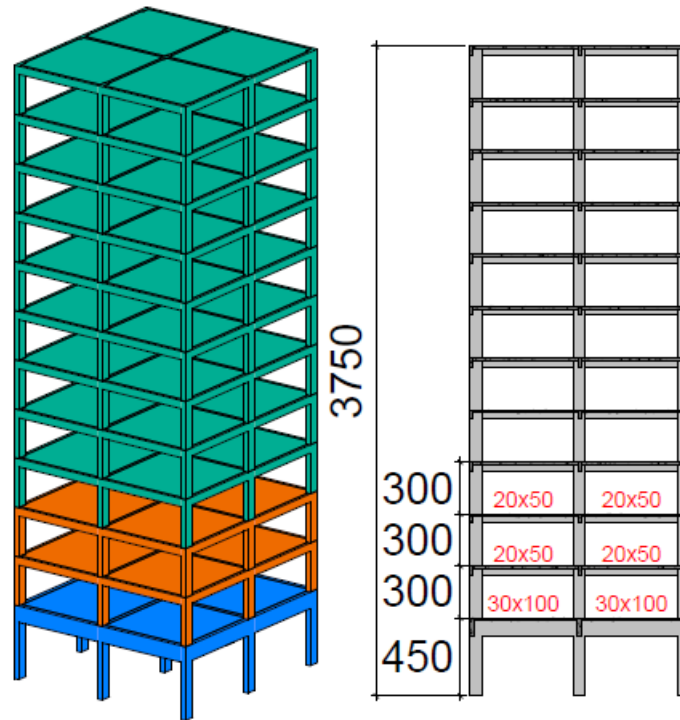
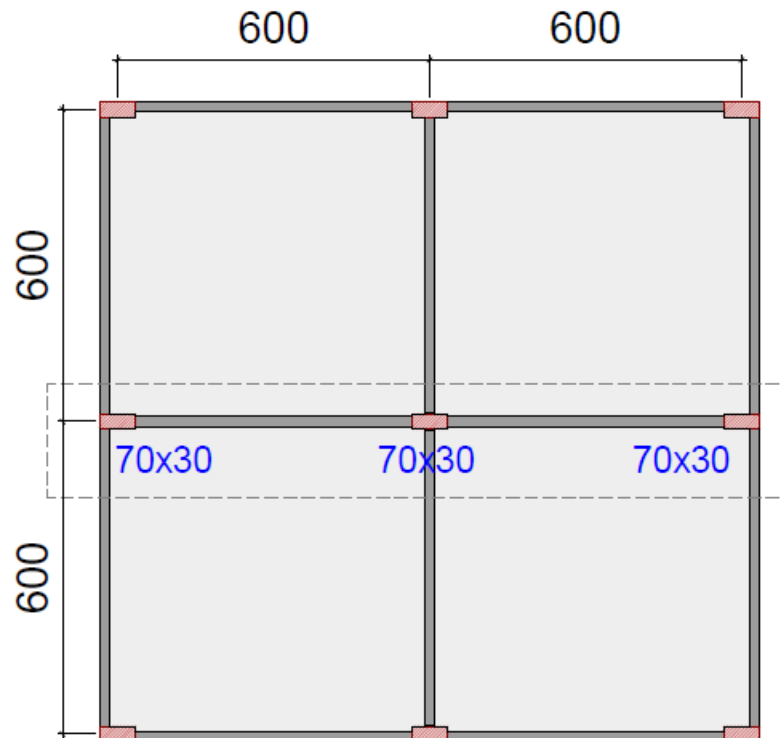


Figura 20 - Pórtico plano de 12 pavimentos e 2 vãos: seleção na planta do pavimento tipo.



### 4.5.3. Pórtico de 20 Pavimentos e 4 Vãos – Caso 3

Nesta estrutura (Figuras 21 e 22), tem-se representada a situação mais comum na maioria dos edifícios residenciais, com uma média de 20 pavimentos: a concentração dos pilares 90x30 no centro do edifício tem como objetivo simular um núcleo rígido, impedindo o deslocamento lateral excessivo da estrutura para situações comuns de carregamento. Nota-se que os pilares 70x30 só aparecem a partir do 4º pavimento, onde o  $f_{ck}$  é igual a 35 MPa. A fim de controlar ainda mais o deslocamento lateral, também há dois pavimentos compostos por *outriggers*: entre o 9º e o 10º e entre o 19º e o 20º pavimentos.

Referente ao  $f_{ck}$  da estrutura, aumentou-se 5 MPa para cada trecho do edifício (análogo à Figura 16): o 1º pavimento tem 45 MPa; o 2º e 3º têm 40 MPa; e os demais possuem 35 MPa.

Figura 21 – Pórtico plano de 20 pavimentos e 4 vãos: vista espacial e corte.

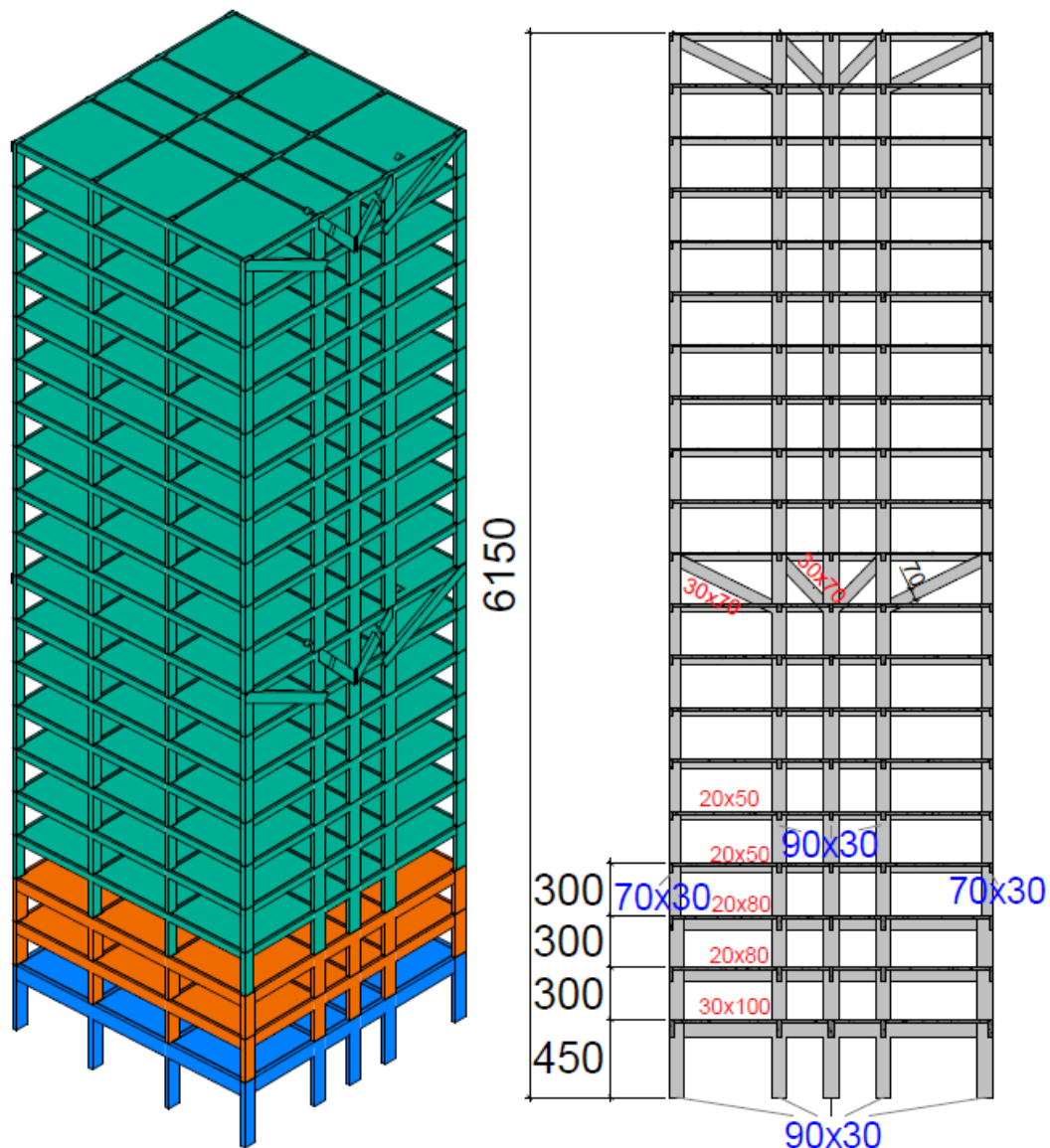
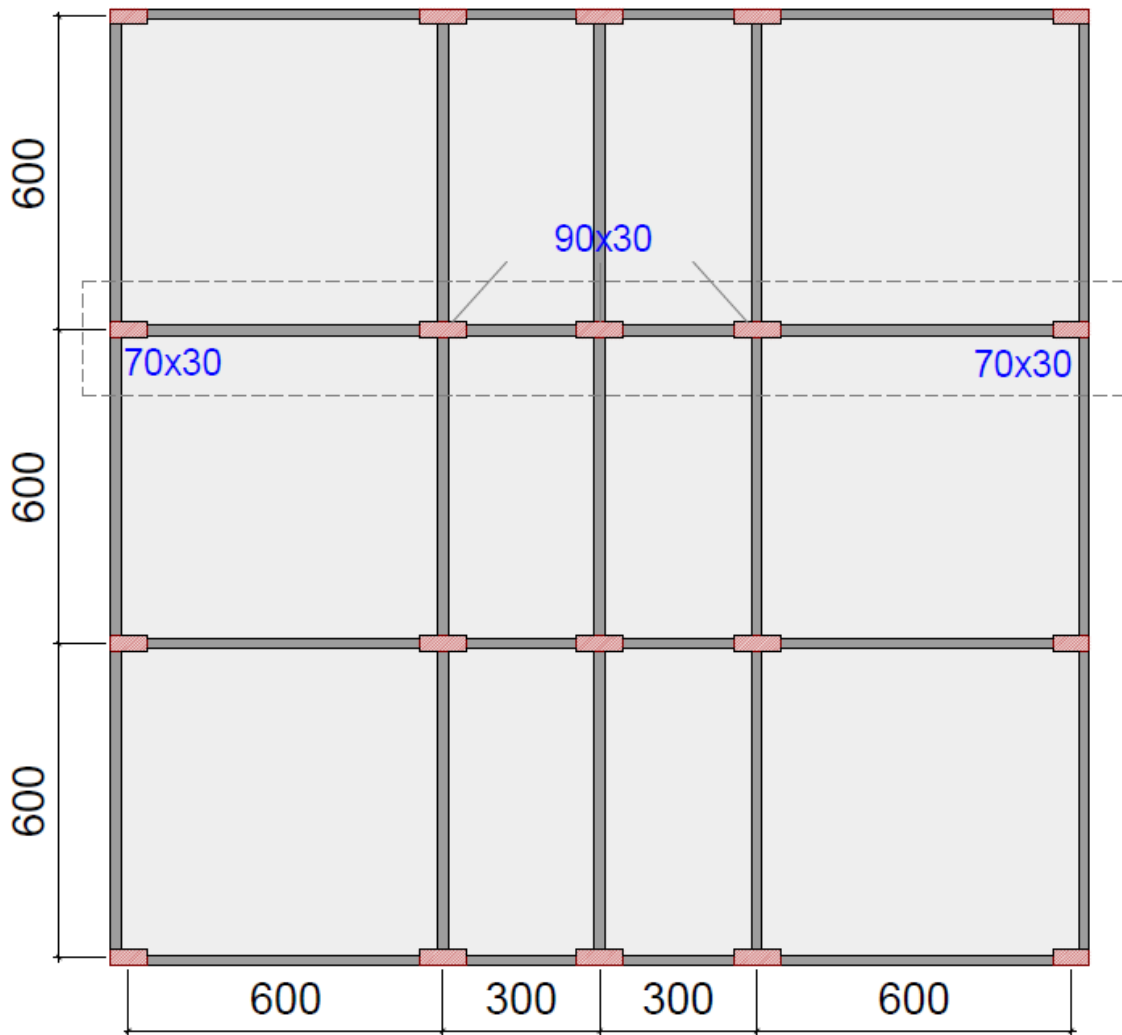




Figura 22 - Pórtico plano de 20 pavimentos e 4 vãos: seleção na planta do pavimento tipo.



#### 4.5.4. Pórtico de 30 Pavimentos e 6 Vãos – Caso 4

O aumento expressivo da altura torna necessário o aumento do número de vãos, a fim de manter os deslocamentos laterais não muito pronunciados, assim como nos casos anteriores. Edifícios com 30 ou mais pavimentos já são considerados muito altos e precisam de um maior cuidado na análise dos efeitos dinâmicos, bem como na distribuição dos elementos para a manutenção da estabilidade. As dimensões da estrutura são mostradas nas Figuras 23 e 24.

Figura 23 – Pórtico plano de 30 pavimentos e 5 vãos: vista espacial e corte.

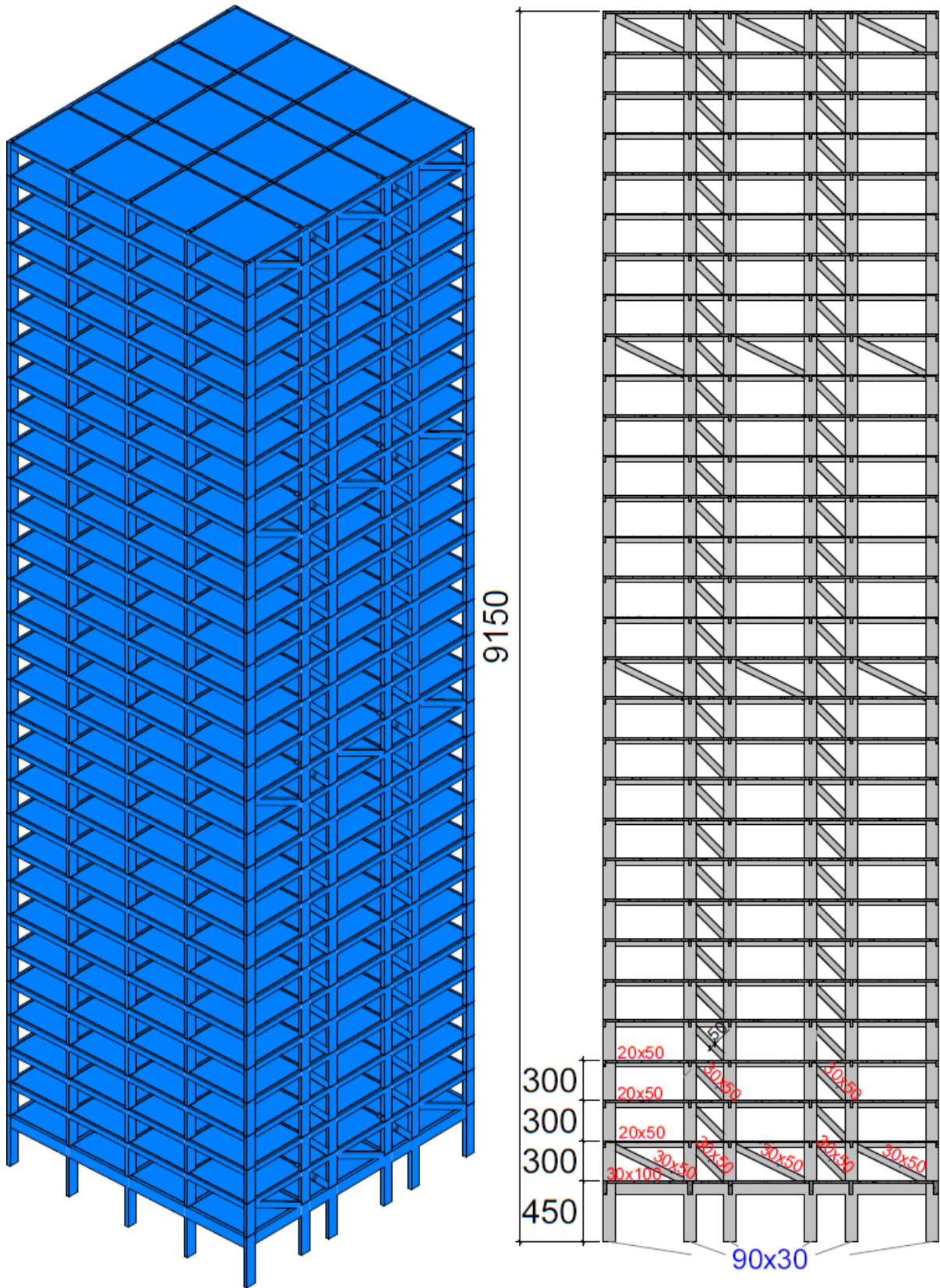
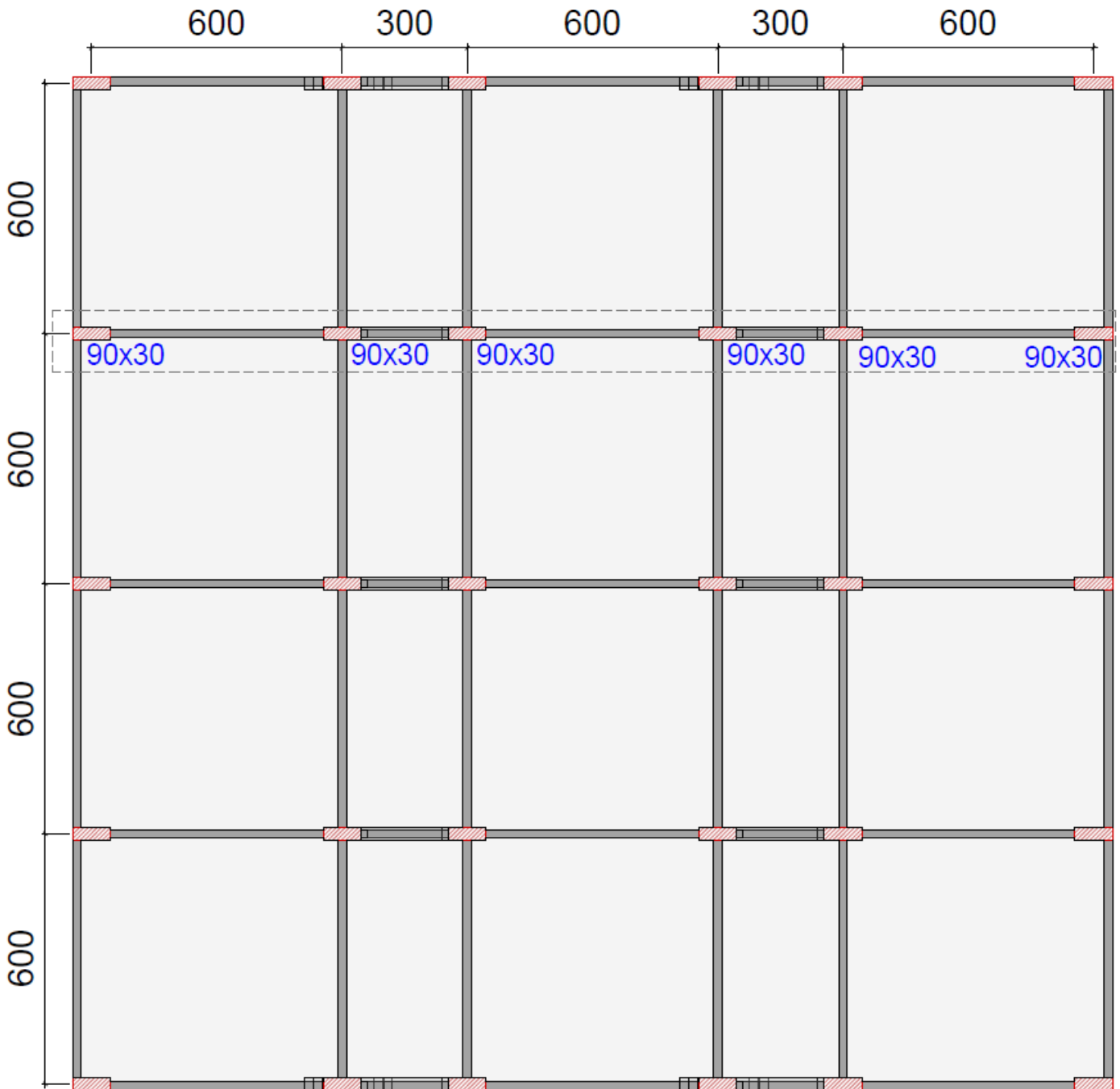


Figura 24 - Pórtico plano de 30 pavimentos e 5 vãos: seleção na planta do pavimento tipo.



#### 4.6. PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Apresentados os carregamentos e os edifícios dos quais serão analisados os respectivos pórticos planos, é necessário estabelecer um padrão de análise para fins comparativos. Então, cada pórtico será submetido a 15 situações em intensidades diferentes, conforme mostra a Tabela 14, de modo que sejam calculados o quociente de Rayleigh em cada uma delas. Importante lembrar que o vento dependerá principalmente de dois fatores: S2 para determinar

a geometria do carregamento ao longo da altura, aproximando-se do formato do vento de camada limite atmosférica; e S3 para estabelecer a intensidade do vento a uma probabilidade de 63% de ser excedida em função de  $m$  igual a 1, 5, 10, 50 e 100 anos (Equação 48). A carga permanente adicional a ser inserida é igual 30% do peso próprio da viga correspondente ao pavimento, ou seja, quando  $M=1$  (multiplicador de carga, Tabela 14), tem-se: 0,225 tf/m sobre as vigas de seção 30x100; 0,075 tf/m sobre as vigas de seção 20x50; e 0,12 tf/m, sobre as vigas de seção 20x80. Em outras palavras, se  $M=0$ , não se despreza o peso próprio dos elementos nos modelos SAP2000; e com  $M=1$ , por exemplo, tem-se o peso próprio dos elementos mais a carga adicional nas vigas. Por fim, serão calculados o coeficiente  $\gamma_z$ , o parâmetro de instabilidade  $\alpha$  e a relação deslocamento lateral no topo pela altura do edifício.

Tabela 14 - Situações de carregamentos e suas intensidades para cada pórtico: fator  $m$  para S3 e fator  $M$  para o multiplicador da carga adicional.

Situação	1	2	3	4	5	6	7
Fatores	$m = 1$ $M = 0$	$m = 5$ $M = 0$	$m = 10$ $M = 0$	$m = 50$ $M = 0$	$m = 100$ $M = 0$	$m = 50$ $M = 2$	$m = 50$ $M = 4$
8	9	10	11	12	13	14	15
$m = 50$ $M = 6$	$m = 50$ $M = 8$	$m = 50$ $M = 10$	$m = 50$ $M = 20$	$m = 50$ $M = 30$	$m = 50$ $M = 40$	$m = 50$ $M = 50$	$m = 50$ $M = 60$

Em relação às intensidades, o vento também será calculado para uma faixa de 6 metros de largura (faixa de influência), perpendicular à direção de sua incidência (vide plantas baixas dos edifícios). Vale ressaltar que, para fins de análise, será respeitada somente a Equação 48 para S3, dispensando-se o uso da Tabela 3 da ABNT NBR 6123:1988. As análises serão feitas no programa SAP2000, de maneira a oferecer os dados de entrada para o algoritmo do Método do Quociente de Rayleigh, conforme será explicado na seção seguinte.

#### 4.7. ROTINA EM PYTHON PARA O CÁLCULO DO QUOCIENTE DE RAYLEIGH

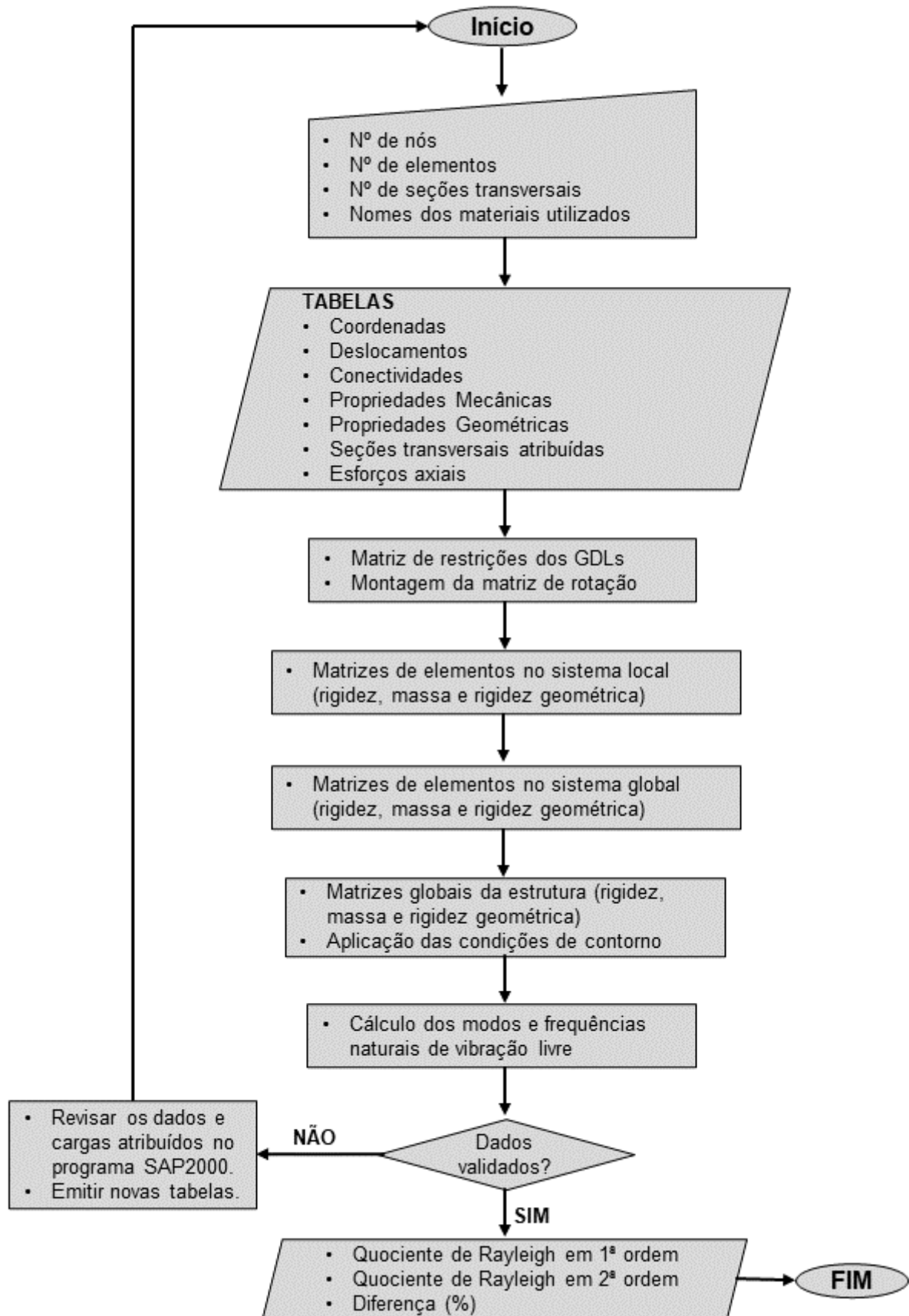
O desenvolvimento de um algoritmo em linguagem Python tem como objetivo calcular o quociente de Rayleigh a partir da análise no programa SAP2000. Portanto, no pós-processamento, são extraídas sete tabelas a serem lidas pelo algoritmo: coordenadas, deslocamentos, conectividades, propriedades mecânicas, propriedades geométricas, seções transversais atribuídas a cada barra e os esforços axiais dos elementos.

Para os dados de entrada, o usuário deverá especificar a quantidade de nós, de elementos e de seções transversais aplicada à estrutura plana, de modo que os cálculos possam ser automatizados por essas variáveis. Também é necessário especificar nas propriedades mecânicas quais materiais serão utilizados, por exemplo, se é concreto e/ou aço, conforme foi nomeado no programa.

Após, o algoritmo utiliza os dados de entrada para montar suas próprias matrizes de conectividade e estabelecer as condições de contorno. Dessa forma, é calculada a matriz de rotação das coordenadas locais para as globais e, em seguida, a matriz de rigidez dos elementos no sistema local. No próximo passo, transforma-se a matriz de rigidez local em global, a nível de elemento e, feita a operação para todas as barras, monta-se a matriz de rigidez global da estrutura. Procede-se da mesma forma para as matrizes de rigidez geométrica e para a matriz de massa consistente.

Dispostas as matrizes após a aplicação das condições de contorno, calcula-se os modos de vibração livre e as frequências naturais do pórtico, a fim de validar os dados com a análise modal realizada no programa SAP2000. Quando não validado, é necessário revisar os dados extraídos, a fim de verificar se houve inconsistência nas unidades de medida ou se o algoritmo está configurado de maneira equivocada. Por fim, feita a validação, é calculado o quociente de Rayleigh através dos deslocamentos laterais do pórtico em primeira ordem e, depois, utiliza-se, em conjunto, as cargas axiais para o cálculo do quociente em segunda ordem. O algoritmo será executado 15 vezes para cada pórtico, contemplando todas as intensidades de carga, o que totaliza 60 execuções. O fluxograma (Figura 25) ilustra o funcionamento do algoritmo.

Figura 25 - Fluxograma mostrando o funcionamento da rotina para o cálculo do Quociente de Rayleigh.



## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados os resultados da metodologia empregada, primeiramente mostrando-se as cargas resultantes para cada caso e as combinações aplicadas a todos os casos. Após, as análises realizadas utilizando-se os métodos normativos e o Quociente de Rayleigh serão apresentadas e percorridas para cada pórtico e, ao final, um resumo e as relações entre os métodos.

### 5.1. INTENSIDADE DO VENTO

Nas Figuras 26 a 29 serão mostradas as intensidades do vento para o fator  $S3 = 1,0$ , ou seja, admitindo-se um vento com período de recorrência de 50 anos. Para obter as intensidades de vento com períodos de recorrência de 1, 5, 10, e 100 anos e probabilidade de 63% de serem superadas, basta aplicar a Equação 48 e, então, tem-se o fator  $S3$  conforme a Tabela 15. Já em relação ao  $S2$ , os casos 1 e 2 foram classificados como Classe B ( $b=0,73$  e  $p=0,16$ ) e os casos 3 e 4 foram classificados como Classe C ( $b=0,71$  e  $p=0,175$ ). As intensidades de vento foram calculadas para a altura de cada pavimento, a fim de aproximar a geometria da camada limite atmosférica. Os coeficientes de arrasto considerados para todos os casos são próximos a 1,3, conforme será apresentado a seguir e foram calculados de acordo com as dimensões em planta dos edifícios (Figuras 18 a 24),  $S3=1,0$  e ábaco para vento de baixa turbulência (Figura 15).

Tabela 15 - Fator  $S3$

Período de Recorrência ( $m$ )	Fator $S3$
1	0,54
5	0,696
10	0,776
50	1,00
100	1,114

Portanto, seguem os gráficos mostrando a geometria dos carregamentos para os Casos 1 a 4:

Figura 26 - Vento para o Caso 1.

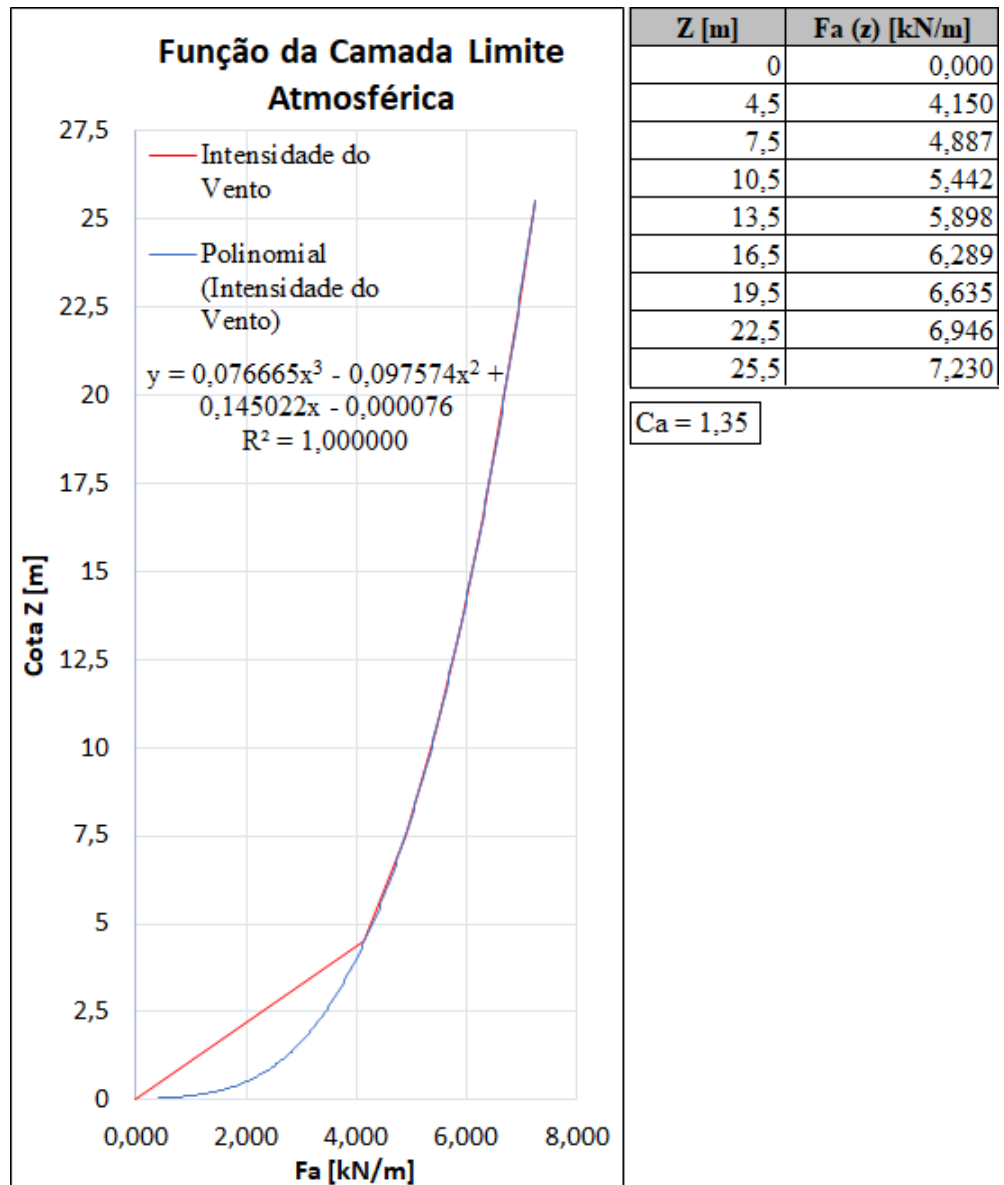




Figura 27 - Vento para o Caso 2.

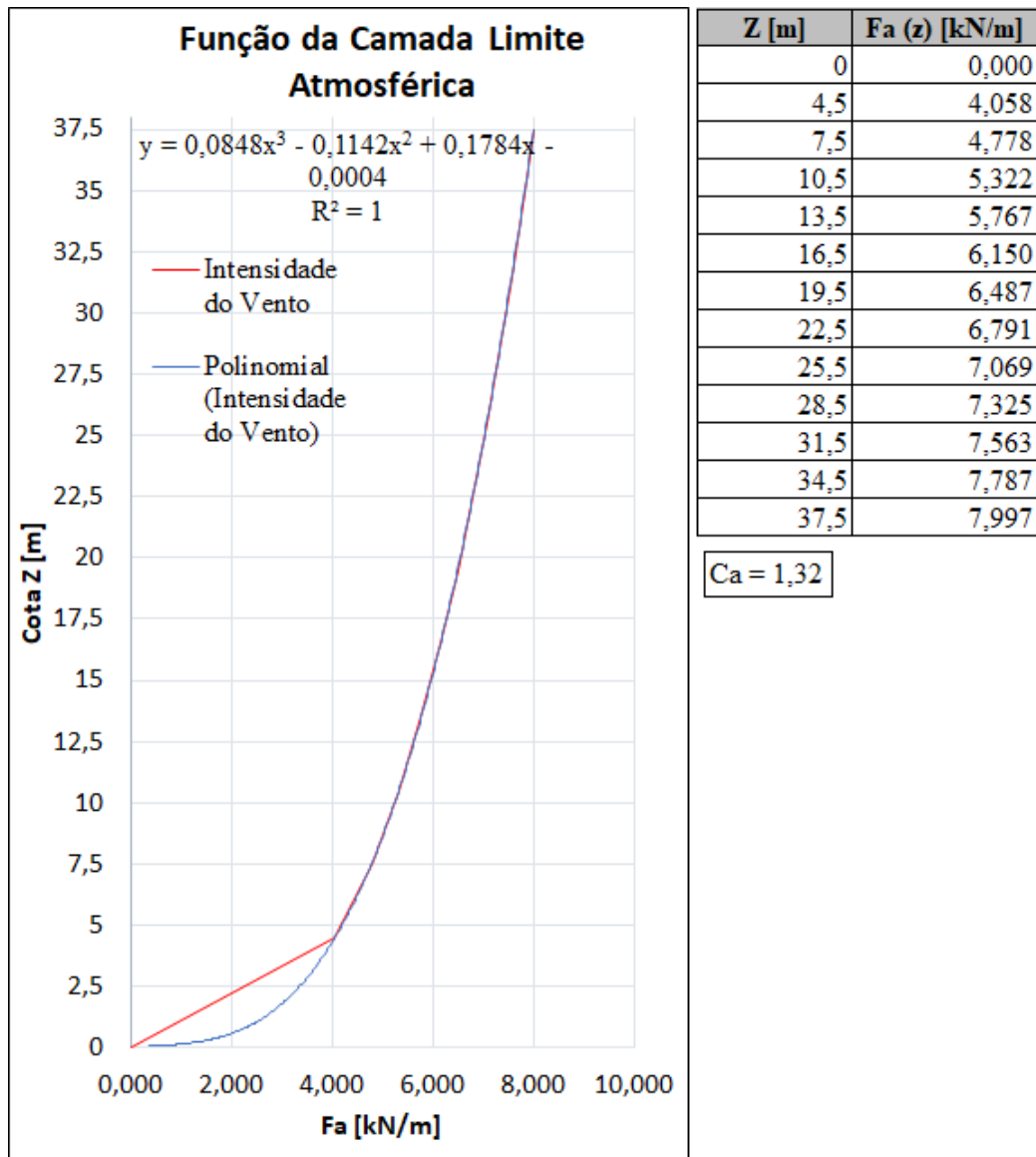


Figura 28 – Vento para o Caso 3.

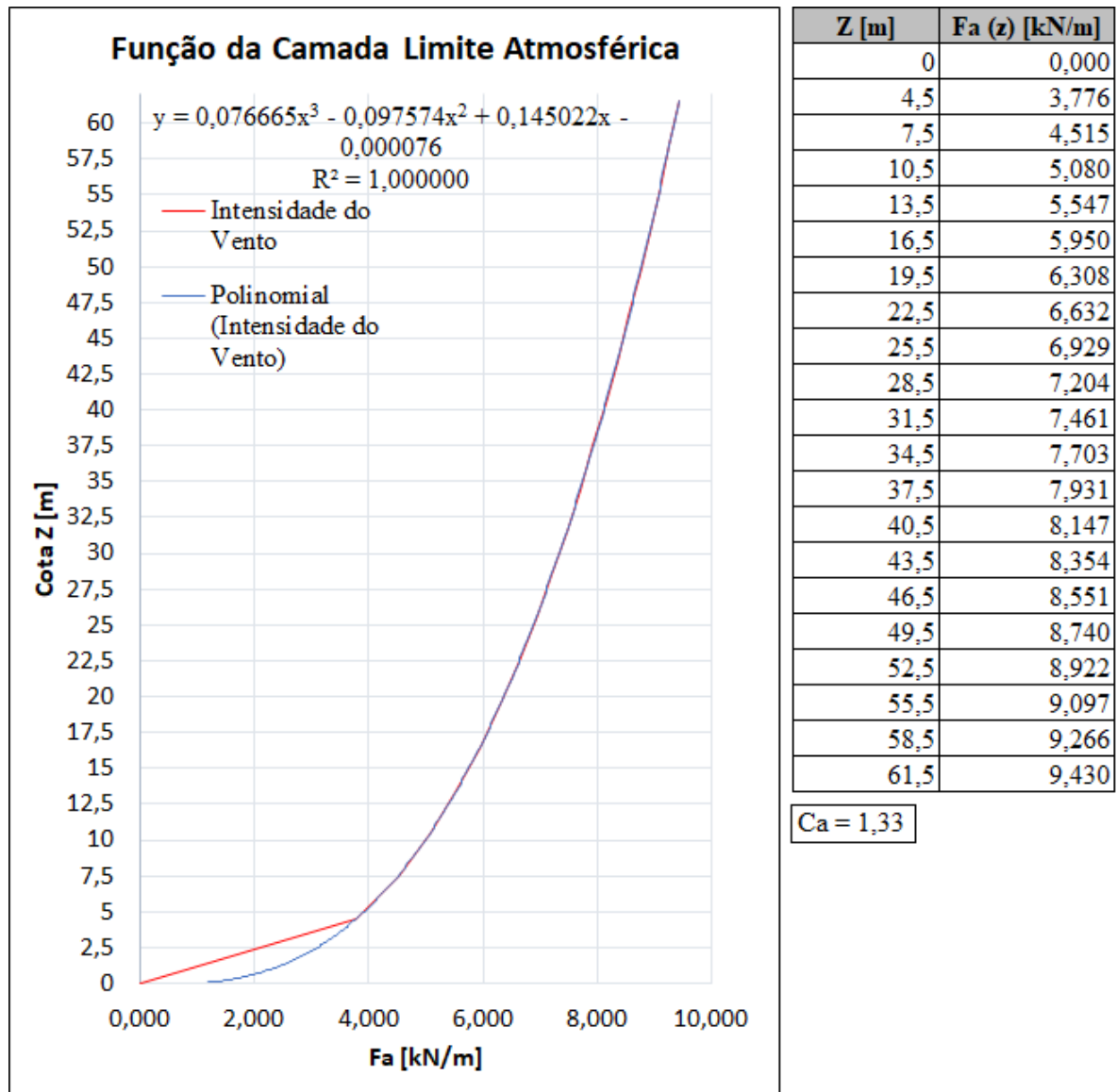
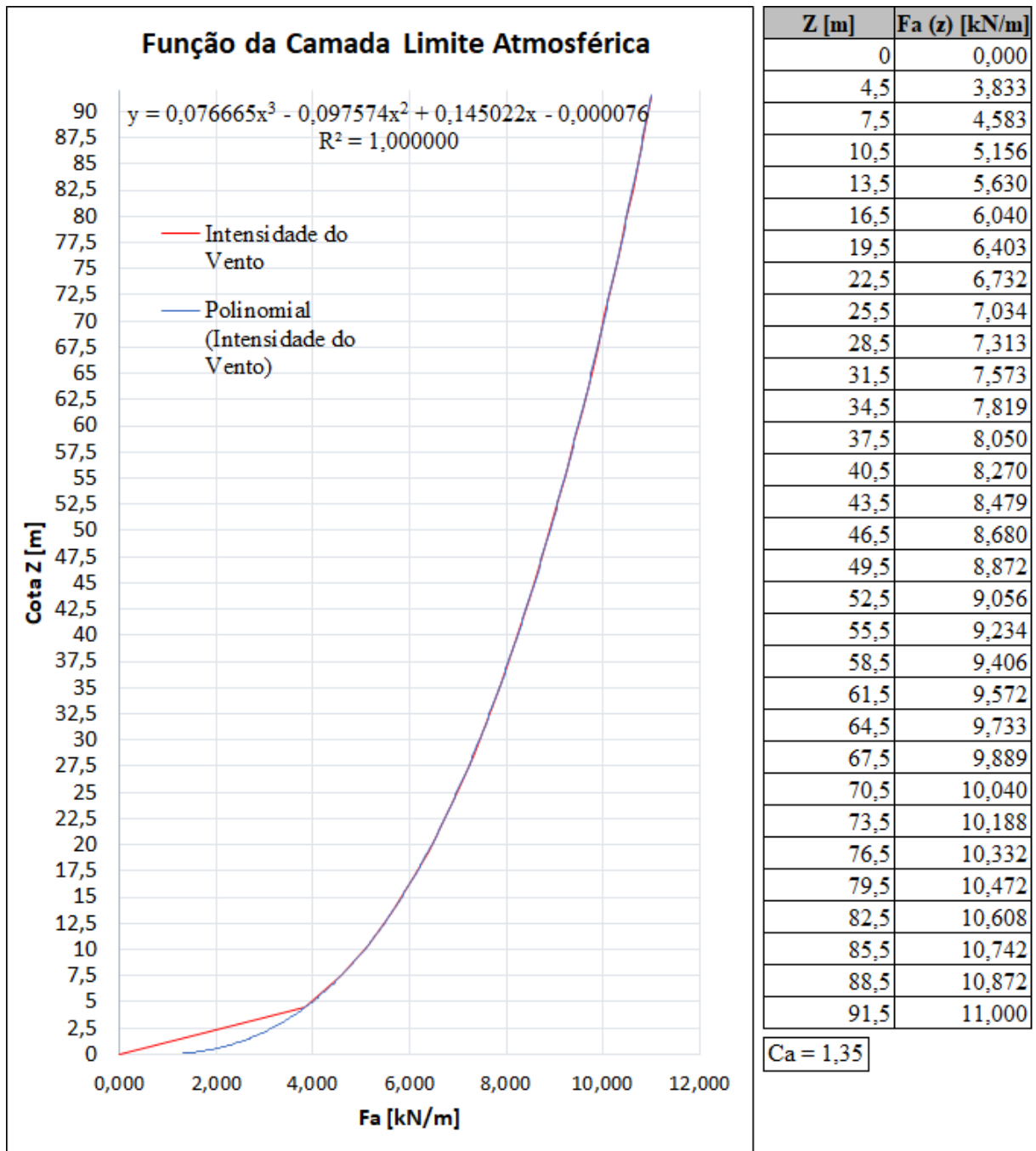


Figura 29 - Vento para o Caso 4.



## 5.2. COMBINAÇÕES DE CARREGAMENTO

Como em todos os projetos de edifícios, é trivial estabelecer as combinações dos carregamentos impostos. Dessa forma, utilizou-se a combinação última normal para calcular Gama-Z e a soma dos carregamentos com seus valores admitidos para cada situação, a fim de calcular o parâmetro Alfa e o Quociente de Rayleigh. Por fim, utilizou-se a combinação frequente do estado limite de serviço para calcular o deslocamento no topo da estrutura e

comparar ao limite estabelecido em norma (H/1700). As combinações são apresentadas com a numeração 1 e 2, referindo-se, respectivamente (conforme Tabela 14): à intensidade do vento, conforme o período de recorrência  $m$ , no total de 5 combinações (de “a” até “e”); e referente à magnitude das cargas adicionais, com o fator  $M$ , no total de mais 10 combinações (de “a” até “j”). O sufixo “F” é relativo à combinação frequente, conforme mostrado no capítulo anterior. Em todas as combinações, o vento foi tomado como variável principal. Nas notações: PP inclui os pesos próprios da estrutura de concreto; PPv é a sobrecarga permanente adicional (Tabela 14) e WD é a carga de vento (Figuras 26 a 29, Tabela 15). Novamente, é importante destacar que não há carga acidental vertical ( $Fq_k$ ), a fim de simplificar as análises. Nota-se, então, que há primeiro o aumento da intensidade do vento e, depois de estabilizado o vento para  $m = 50$  anos, aumenta-se a carga adicional permanente das vigas, como mostra a Tabela 16:

Tabela 16 - Combinações dos carregamentos

SITUAÇÕES	ELU NORMAL	ELS INTEGRAL	ELS FREQUENTE
1 a 5 (m=variável, M = 0)	ELU1 (a-e) - 1,4(PP+S3.WD)	ELS1 (a-e) - PP+S3.WD	ELSF1 (a-e) - PP+0,3.S3.WD
6 a 15 (m=50; M=variável)	ELU2 (a-j) - 1,4 (PP+S3.WD+PPv)	ELS2 (a-j) - PP+PPv+S3.WD	ELSF2 (a-j) - PP+PPv+0,3.S3.WD

### 5.3. VALIDAÇÃO DO ALGORITMO

O primeiro passo para a emissão dos resultados foi validar o algoritmo, a fim de verificar se as matrizes de massa e de rigidez montadas estavam corretas e se os dados foram importados corretamente do programa *SAP2000*.

Portanto, sabe-se que o próprio programa calcula as frequências naturais e os modos de vibração, aos quais aqui se intitulam, para o primeiro modo, de  $f(sp)$  e  $Vsp$ , respectivamente. Já o algoritmo em Python obtém os dados da estrutura, conforme mencionado, e resolve o problema de autovalor e autovetor elaborado com as matrizes de massa e de rigidez construídas, fornecendo as frequências e modos de vibração, para os quais se denominam ao 1º modo,  $f(py)$  e  $Vpy$ , respectivamente.

O procedimento de validação do algoritmo consiste em calcular o quociente de Rayleigh em 1ª e 2ª ordens (QR1 e QR2, respectivamente) utilizando como vetor de deslocamentos o próprio  $Vsp$ . Assim, pode-se comparar  $QR1(sp)$  com  $f(sp)$  (extraída diretamente do programa) e com  $f(py)$  resultante do algoritmo. Também se obtém  $QR2(sp)$ , que

é igual ou muito próxima a  $QR1(sp)$ , dependendo da concepção da estrutura. Nas Tabelas 17 a 20, será mostrado QR1 para a combinação ELS-1d, onde há somente o peso próprio e o vento correspondente a  $S3 = 1,0$ . Depois, são plotados os 1<sup>os</sup> modos de vibração extraídos do SAP2000, o calculado pelo algoritmo em Python e a deformada do pórtico quando submetido ao carregamento de vento em ELS-1d.

Tabela 17 - Validação através da frequência do 1º modo de vibração para o Caso 1.

FREQUÊNCIAS [Hz]		Diferença [%]
$f(sp)$ (*Referência)	1,354629218	
$f(py)$	1,376275643	1,5980
$QR1(sp)$	1,377041317	1,6545
$QR2(sp)$	1,377041317	1,6545
$QR1(ELS-1d)$	1,405248643	3,7368
Diferença $QR1(sp)$ e $QR2(sp)$ [%] =		4,01507e-12

Tabela 18 - Validação através da frequência do 1º modo de vibração para o Caso 2.

FREQUÊNCIAS [Hz]		Diferença [%]
$f(sp)$ (*Referência)	0,857977852	
$f(py)$	0,870196045	1,4241
$QR1(sp)$	0,870665036	1,4787
$QR2(sp)$	0,870665034	1,4787
$QR1(ELS-1d)$	0,89746977	4,6029
Diferença $QR1(sp)$ e $QR2(sp)$ [%] =		1,95571e-07

Tabela 19 - Validação através da frequência do 1º modo de vibração para o Caso 3.

FREQUÊNCIAS [Hz]		Diferença [%]
$f(sp)$ (*Referência)	0,691115251	
$f(py)$	0,715053116	3,4637
$QR1(sp)$	0,717898146	3,8753
$QR2(sp)$	0,7191230910	4,0526
$QR1(ELS-1d)$	0,794101989	14,9015
Diferença $QR1(sp)$ e $QR2(sp)$ [%] =		0,17063

Tabela 20 - Validação através da frequência do 1º modo de vibração para o Caso 4.

FREQUÊNCIAS [Hz]		Diferença [%]
$f(sp)$ (*Referência)	0,645644713	
$f(py)$	0,659255543	2,1081
$QR1(sp)$	0,660477544	2,2974
$QR2(sp)$	0,615025716	4,7424
$QR1(ELS-1d)$	0,861739624	35,1527
Diferença $QR1(sp)$ e $QR2(sp)$ [%] =		6,88166

Figura 30 - Comparação entre os deslocamentos modais obtidos do SAP2000 e do Python com a deformada da estrutura na combinação ELS-1d, para os Casos 1 e 2.

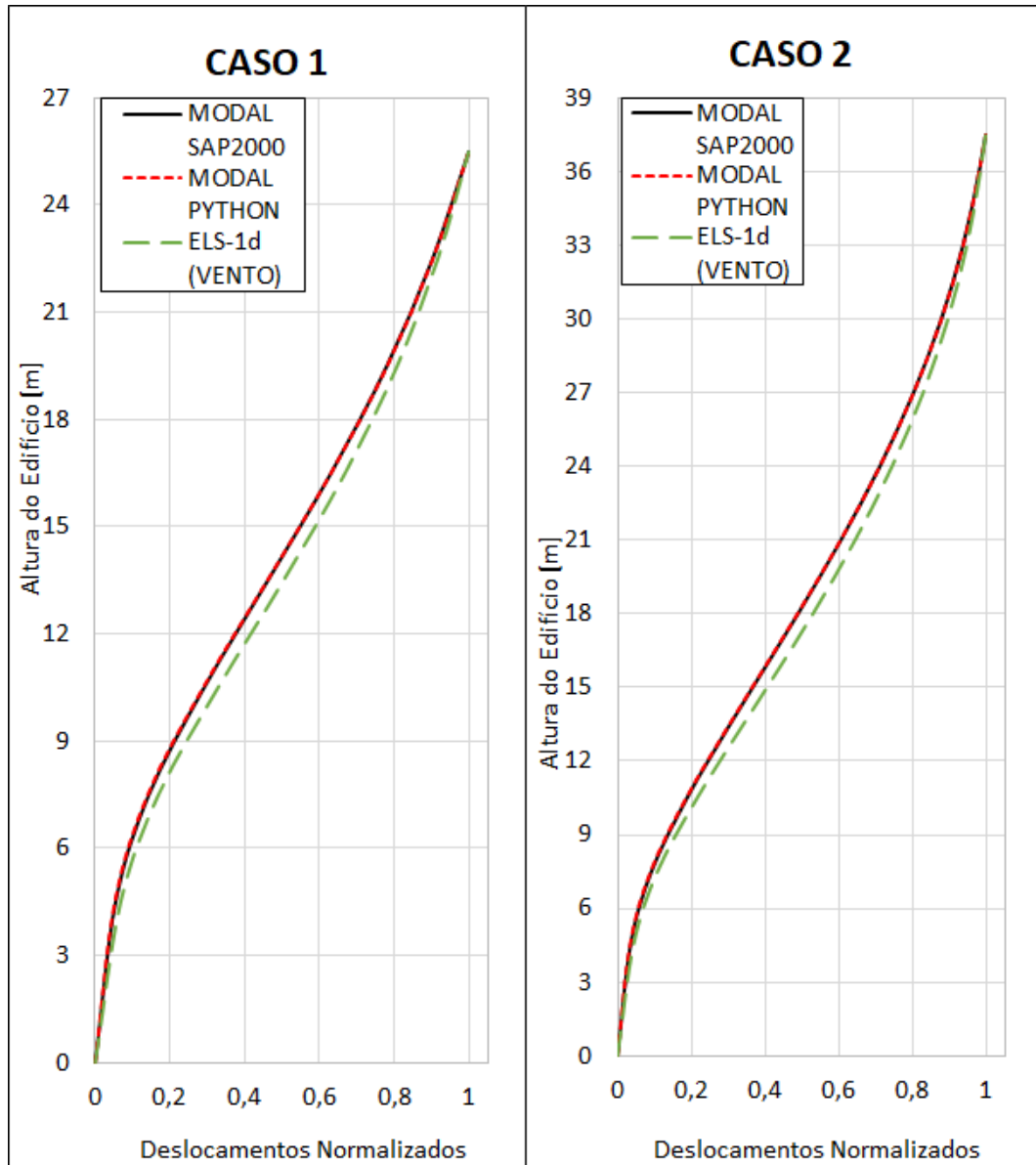
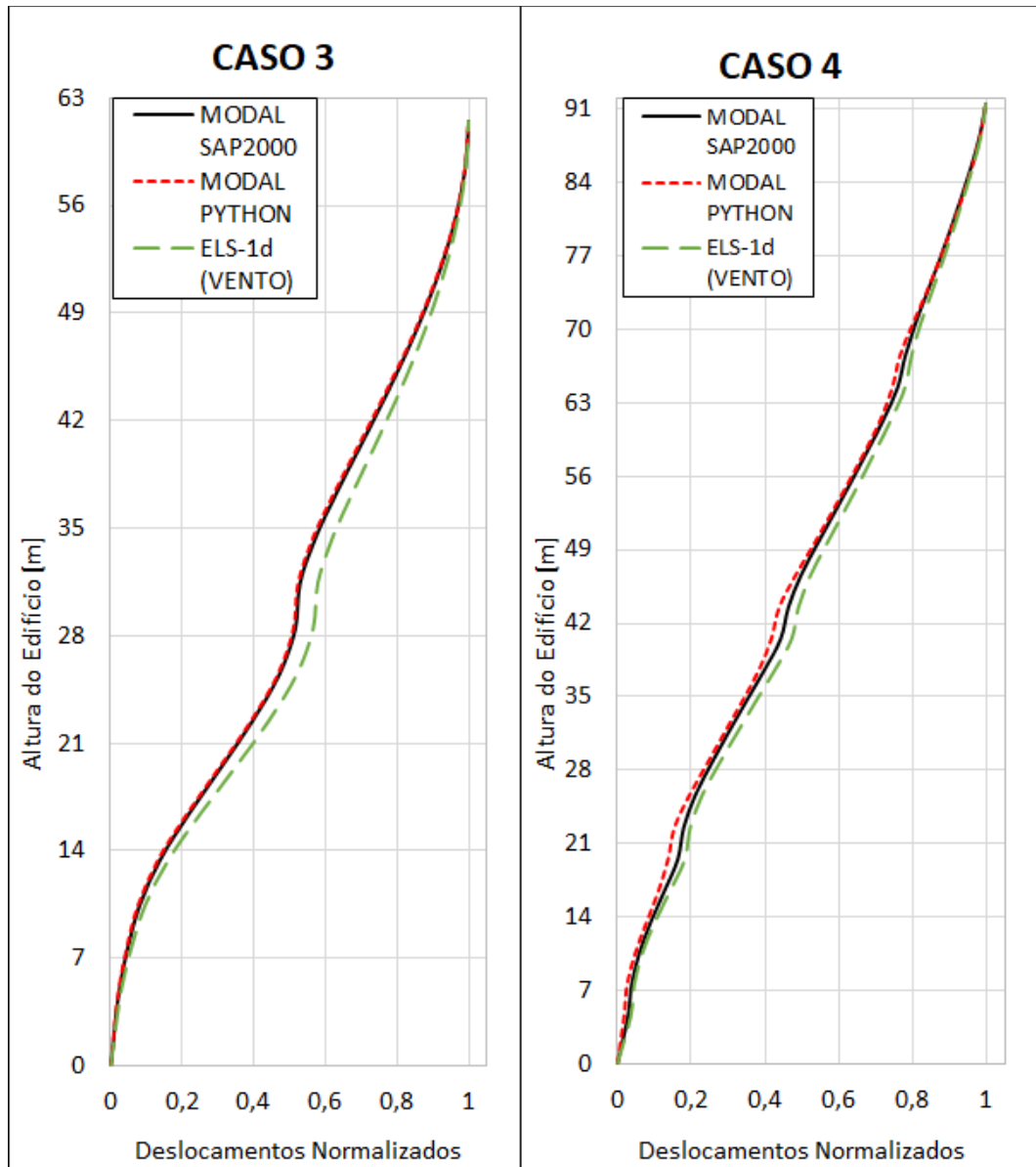


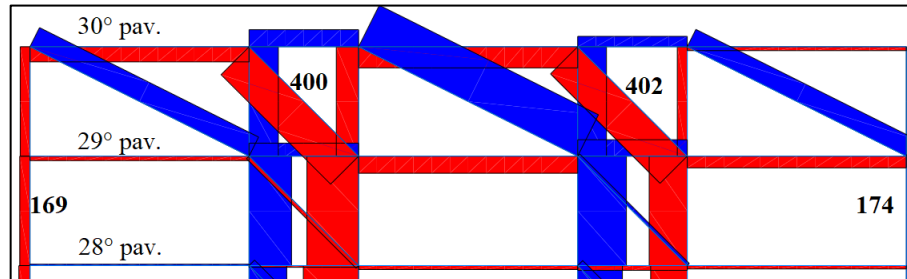
Figura 31 - Comparação entre os deslocamentos modais obtidos do SAP2000 e do Python com a deformada da estrutura na combinação ELS-1d, para os Casos 3 e 4.



Nota-se, portanto, o bom ajuste entre as curvas de deslocamentos dos três primeiros casos, também ratificada quando se verificam as frequências nas Tabelas 17 a 19. Nesses três primeiros, vale ainda destacar que os pórticos têm geometria simétrica em relação ao eixo vertical central, que pode influenciar a posição deformada e explica o porquê de a diferença entre  $QR1(sp)$  e  $QR2(sp)$  ser praticamente nula nos três primeiros e no último de 6,88% (Tabela 20). Isto é, quando se considera a força axial nos cálculos, a simetria do pórtico sob deslocamento modal permite que em uma barra à esquerda tenha compressão (em vermelho) e sua correspondente à direita, tração (em azul) – por exemplo, para as barras 169 e 174 do Caso

4 (Figura 32). Já as barras 400 e 402 estão na mesma distância do eixo vertical, porém as duas em esforço compressivo.

Figura 32 - Trecho do 28º ao 30º pavimento do Caso 4, mostrando o esforço axial das barras sob deslocamento modal.



Outra situação interessante de visualizar nos gráficos de deslocamentos é a influência dos *outriggers*. Na Figura 31, fica claro que a posição do *outrigger* tende a manter os deslocamentos constantes no trecho, resultando em deformadas mais irregulares que as dos Casos 1 e 2 (Figura 30).

Assim, a partir das formas modais, deslocamentos e valores de frequência calculados, entende-se que o algoritmo construído está correto para os casos avaliados.

#### 5.4. VARIACÃO DO PERÍODO DE RECORRÊNCIA

Neste tópico, serão mostrados os resultados dos métodos normativos e do quociente de Rayleigh para todos os pórticos, nas situações de 1 a 5, quando se tem  $m$  variável e carga adicional nula ( $M=0$ ). Como o parâmetro Alfa não depende de carga lateral (Equação 2), quando  $M=0$ , haverá somente o peso próprio da estrutura atuando como carga vertical e, portanto, Alfa permanecerá constante com o aumento da intensidade do vento.

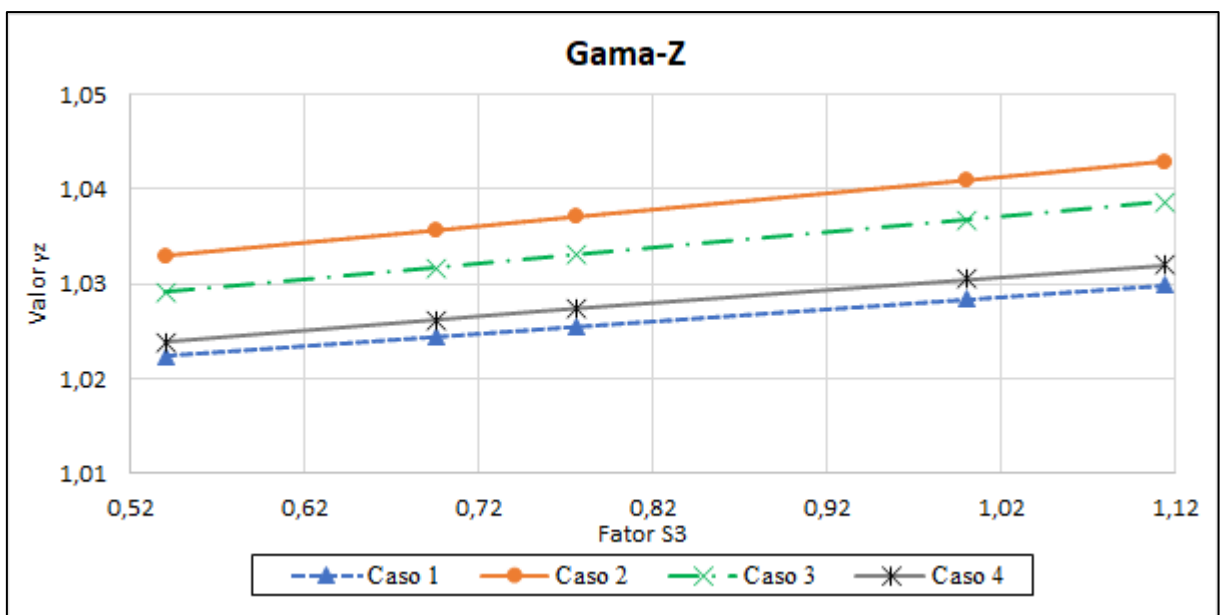
Em relação a Gama-Z, os valores mantiveram-se praticamente constantes independentemente da intensidade do vento, o que foi constatado em Moncayo (2011), cujas estruturas têm seus índices mais alterados em função da carga vertical do que em função da intensidade da carga lateral, também em função de sua equação governante (Equação 1). Na Tabela 21 e na Figura 33, são mostrados os resultados para Gama-Z.



Tabela 21 - Gama-Z em função do fator S3.

		GAMA-Z			
		CASO			
FATOR S3 ↓		8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0,54		1,0224	1,0329	1,0292	1,0238
0,696		1,0244	1,0356	1,0317	1,0262
0,776		1,0255	1,0370	1,0331	1,0274
1		1,0284	1,0409	1,0367	1,0305
1,114		1,0299	1,0428	1,0386	1,0320

Figura 33 - Gráfico correspondente à Tabela 21.



Em contrapartida, os deslocamentos de topo dependem exclusivamente da carga lateral. Nas Tabelas 22 e 23 tem-se os resultados de deslocamentos em metros (absolutos) e em porcentagem (relativos) para fins de comparação entre os pórticos.

Tabela 22 - Deslocamentos de topo, em metros.

		DESLOCAMENTOS DE TOPO (EM METROS, C. FREQUENTE)			
		CASO			
FATOR S3 ↓		8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0,54		0,012035	0,020871	0,018157	0,013338
0,696		0,015524	0,026919	0,023419	0,018340
0,776		0,017305	0,030008	0,026105	0,020895
1		0,022278	0,038630	0,033605	0,028027
1,114		0,024802	0,043006	0,037411	0,031646
<b>LIMITE H/1700</b>		<i>0,0150</i>	<i>0,0221</i>	<i>0,0362</i>	<i>0,0538</i>
<b>RAZÃO H/L</b>		<i>4,2500</i>	<i>3,1250</i>	<i>3,4167</i>	<i>3,8125</i>
<i>fck (MPa)</i>		<i>30, 40 e 45</i>	<i>30, 40 e 45</i>	<i>35, 40 e 45</i>	<i>45</i>

Figura 34 – Gráfico correspondente à Tabela 22.

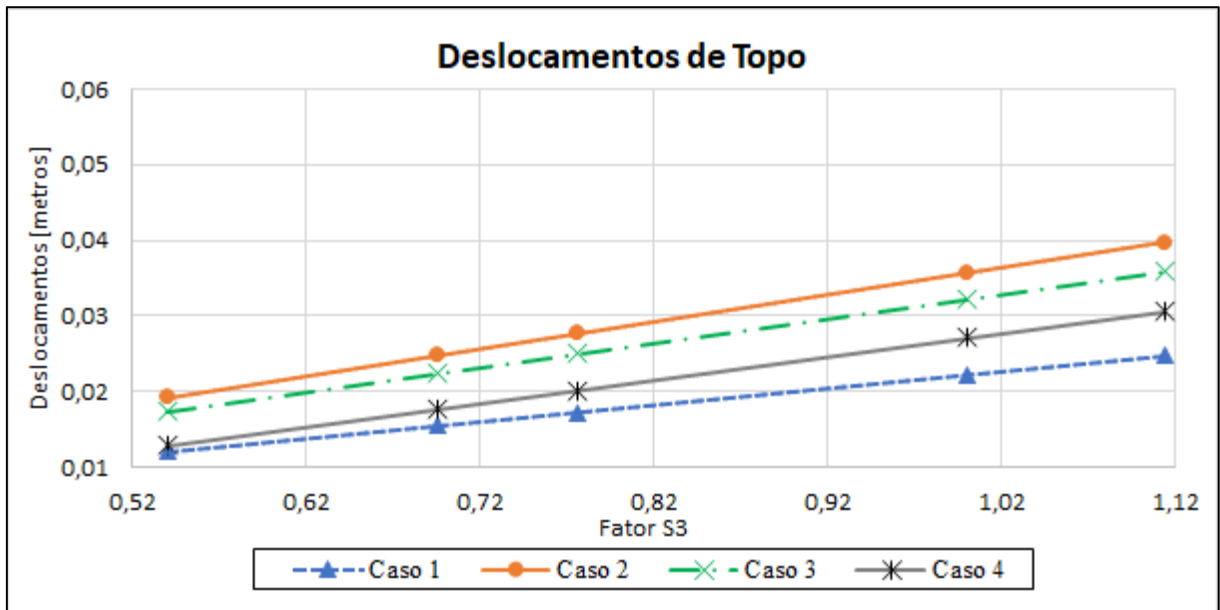
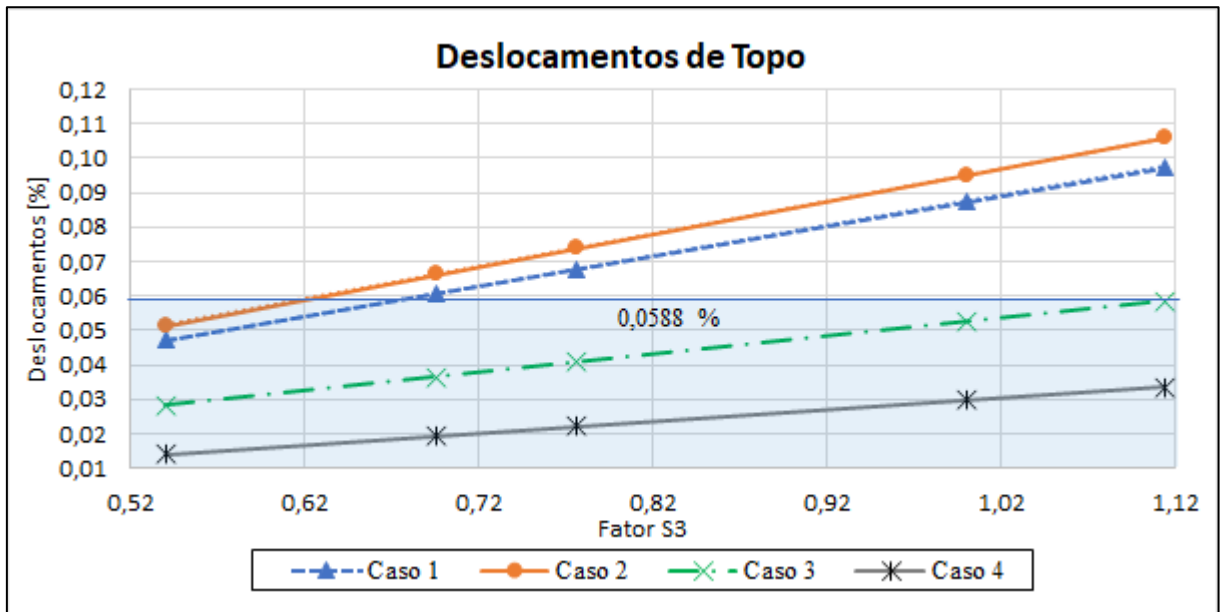


Tabela 23 - Deslocamento de topo, em porcentagem.

DESLOCAMENTOS DE TOPO (% , C. FREQUENTE)				
CASO				
FATOR S3 ↓	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0,54	0,047196	0,051360	0,028172	0,014035
0,696	0,060878	0,066243	0,036420	0,019344
0,776	0,067863	0,073843	0,040631	0,022056
1	0,087365	0,095059	0,052387	0,029626
1,114	0,097263	0,105827	0,058353	0,033468
<b>H [m]</b>	25,5	37,5	61,5	91,5
<b>Limite H/1700 [%]</b>	0,058824			

Figura 35 - Gráfico correspondente à Tabela 23.



Na Figura 35, o valor limite estabelecido pela ABNT NBR 6118:2014 é plotado no gráfico, indicando em quais situações e pórticos o deslocamento é considerado excessivo (valores em vermelho na Tabela 23). O deslocamento relativo permite também verificar o nível de rigidez da estrutura, sendo o Caso 2 o mais flexível e o Caso 4 o mais rígido dentre todos. Em específico, percebe-se que o pórtico do Caso 4 é tão rígido ao ponto de sua frequência natural  $f(sp)$  ser praticamente igual à do Caso 3 (Tabela 24), tendo 30 metros a mais de altura.

No tocante à frequência natural prática, Bachmann (1995) cita que, mediante ensaios experimentais, a seguinte relação foi encontrada:

$$f_a = \frac{46}{H} \quad (53)$$

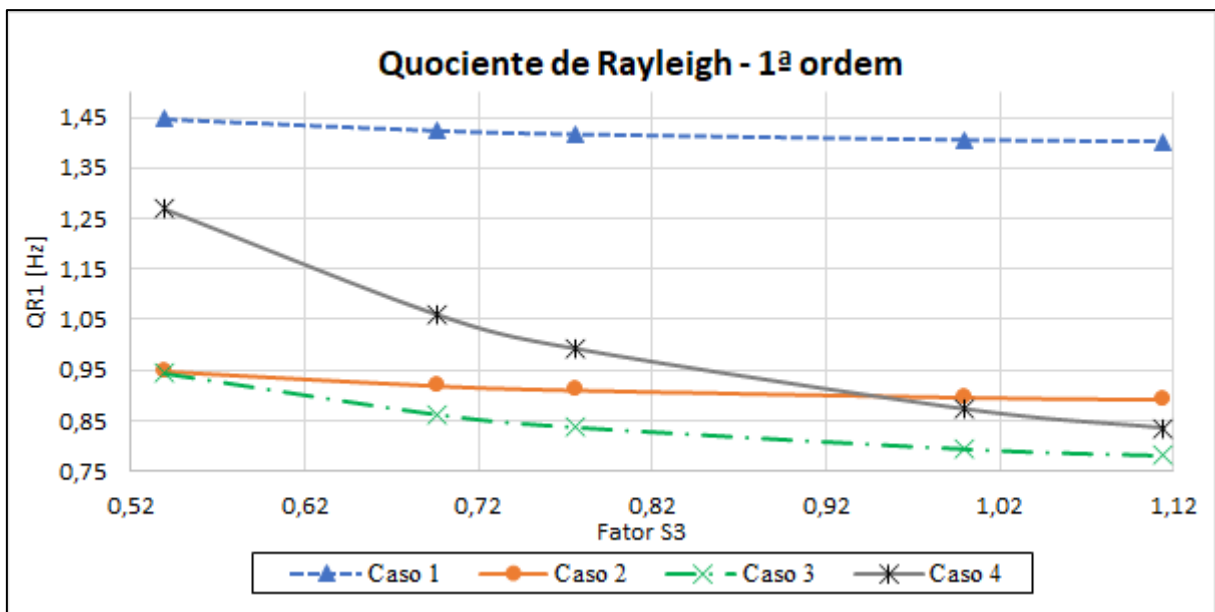
sendo  $f_a$  e  $H$  a frequência estimada e a altura do edifício, respectivamente. Em consequência, o esperado para o pórtico de 30 pavimentos é aproximadamente 0,5 Hz.

Para o quociente de Rayleigh, visualiza-se que nos casos 1 e 2, os valores são próximos à frequência real  $f(sp)$  ou  $f(py)$ , o que não acontece para os casos 3 e 4. No entanto, para todos os casos, a frequência obtida por QR1 é superior à real, conforme é mostrado em Clough (1995).

Tabela 24 - QR1 em função do fator S3.

FATOR S3 ↓	QUOCIENTE DE RAYLEIGH (1ª ORDEM, Hz)			
	CASO			
	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0,54	1,4463	0,9483	0,9445	1,2695
0,696	1,4233	0,9201	0,8632	1,0606
0,776	1,4165	0,9116	0,8377	0,9925
1	1,4052	0,8975	0,7941	0,8726
1,114	1,4019	0,8933	0,7808	0,8350
$f(sp)^{[1]}$ [Hz]	1,3546	0,8580	0,6911	0,6456
$f(py)$ [Hz]	1,3763	0,8702	0,7151	0,6593
QR1 (sp) [Hz]	1,3770	0,8707	0,7179	0,6605

Figura 36 – Gráfico correspondente à Tabela 24.



Nos casos estudados, a estimativa de QR1 piora com o aumento da altura dos pórticos, consequentemente alterando-se a massa, a carga e a rigidez totais – tendência observada também para QR2 (Figura 37). Nas Tabelas 25 e 26 e Figuras 37 e 38, observa-se que QR2 pouco varia em função do aumento da intensidade do vento para os pórticos de 8 e 12 pavimentos; já para os pórticos de 20 e 30 pavimentos, não somente a estimativa piora em 2ª ordem, mas também a diferença supera 100% (vide nota [2] de rodapé).

[1] Frequência de referência, conforme Tabelas 17 a 20.

Tabela 25 - QR2 em função do fator S3.

FATOR S3 ↓	QUOCIENTE DE RAYLEIGH (2ª ORDEM, Hz)			
	CASO			
	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0,54	1,3607	0,7402	0,5634	0,9418
0,696	1,3363	0,7037	0,4123	0,6261
0,776	1,3291	0,6926	0,3555	0,5006
1	1,3171	0,6739	0,2349	0,1641
1,114	1,3135	0,6683	0,1852	-0,1899 <sup>[2]</sup>
$f(py)$ [Hz]	1,3763	0,8702	0,7151	0,6593

Figura 37 - Gráfico correspondente à Tabela 25.

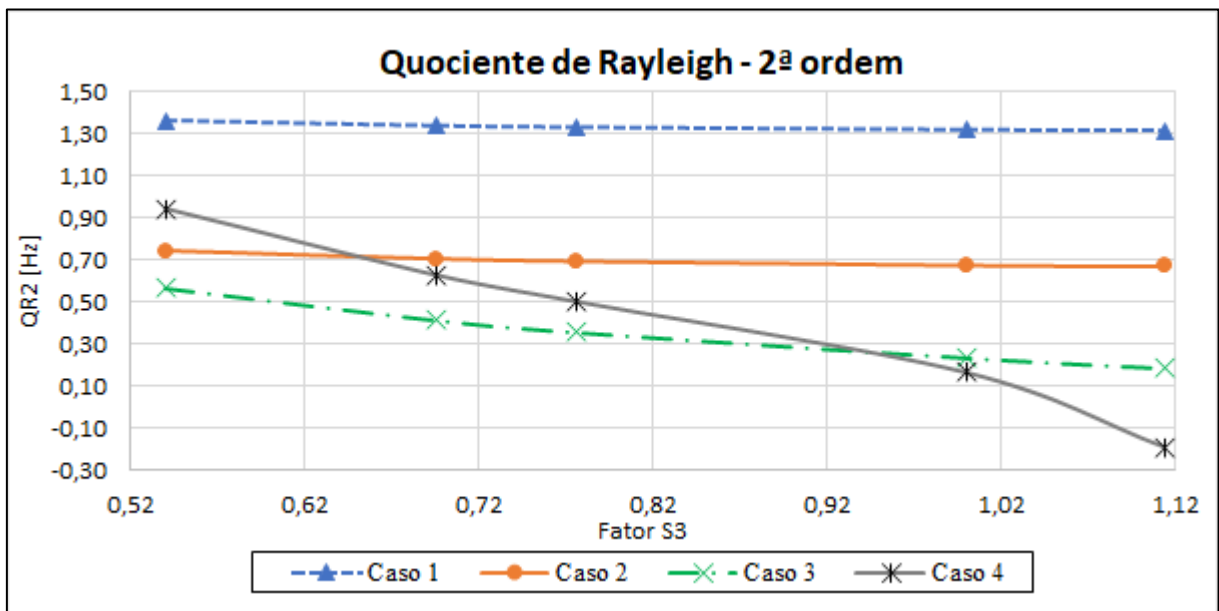
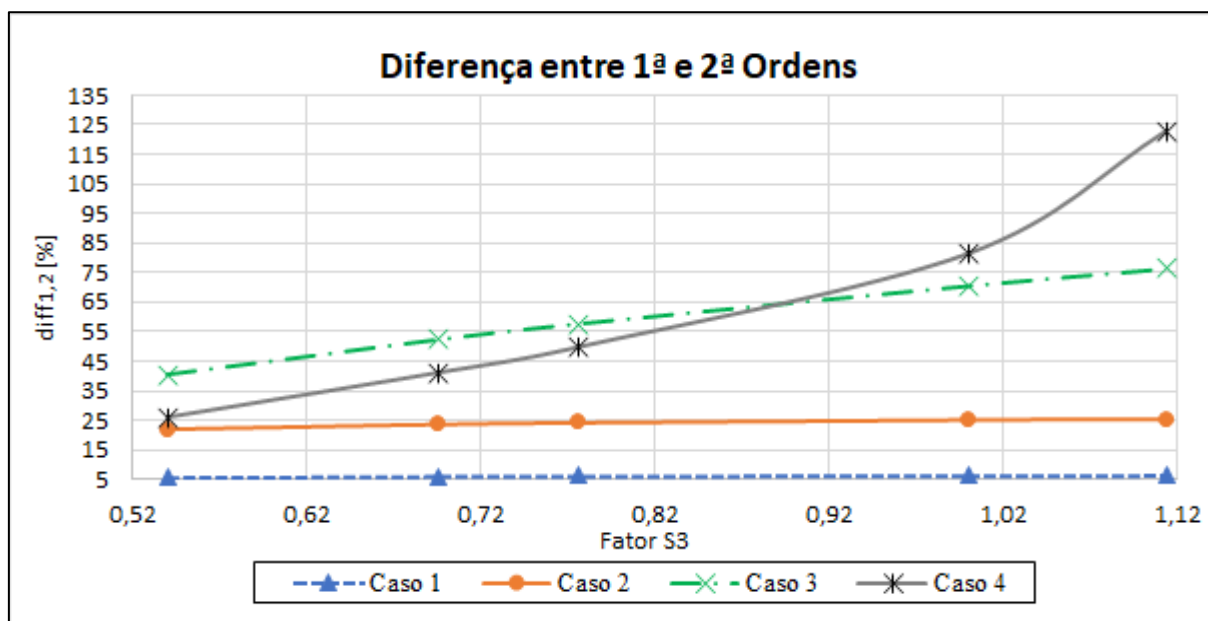


Tabela 26 - Diferença entre QR1 e QR2 devido à variação do fator S3.

FATOR S3 ↓	DIFERENÇA DE 1ª PARA 2ª ORDEM (Hz)			
	CASO			
	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0,54	5,9122	21,9364	40,3527	25,8167
0,696	6,1114	23,5141	52,2439	40,9665
0,776	6,1726	24,0256	57,5611	49,5582
1	6,2763	24,9144	70,4229	81,1931
1,114	6,3074	25,1886	76,2799	122,7436

<sup>[2]</sup> Não existe frequência natural negativa. O valor é o negativo da raiz quadrada do módulo resultante da Equação 46, dividido por  $2\pi$ , apenas tomado como parâmetro para medir a diferença para segunda ordem. Em tese, a frequência de segunda ordem terá zerado.

Figura 38 - Gráfico correspondente à Tabela 26.



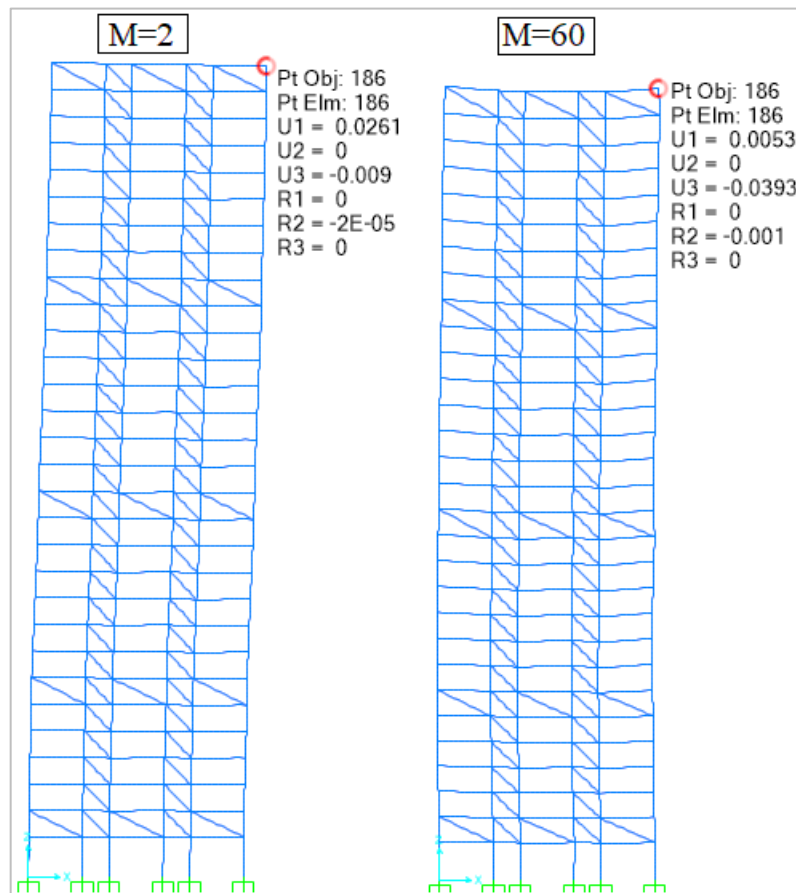
## 5.5. ACRÉSCIMO DE CARGA PERMANENTE

Neste tópico, serão mostrados os gráficos referentes ao acréscimo de carga permanente através do multiplicador  $M$ . Como as tabelas correspondentes aos gráficos são extensas, optou-se por disponibilizá-las no Apêndice A.

Nas Figuras 40 e 41, o parâmetro Alfa e Gama-Z apresentam o mesmo comportamento, embora as concavidades das respectivas funções sejam opostas, pode-se observar a mesma diferença de rigidez entre os pórticos em ambos os métodos. Em particular, o Caso 3 tem maior rigidez do que o Caso 2, em função do aumento do  $f_{ck}$  – o que não aconteceria se o  $f_{ck}$  se mantivesse com o mesmo padrão dos Casos 1 e 2.

Já no Caso 4, como o edifício é muito rígido, a carga lateral tende a ser insuficiente para provocar um deslocamento lateral preponderante ao efeito da carga vertical. Dessa forma, as vigas sofrem deformação por flexão e rotacionam o nó do topo do pilar para o sentido oposto ao do deslocamento da carga lateral, como se pode visualizar nas Figuras 39 e 42.

Figura 39 - Deformada do pórtico de 30 pavimentos para duas situações: no ELSF-2a ( $M=2$ ) e no ELSF-2j ( $M=60$ ), com deslocamentos  $U1$  e  $U3$  (lateral e vertical, respectivamente) mostrados em metros e  $R2$  (rotação) em radianos.



A condição mostrada na Figura 39 explica o motivo de Gama-Z diminuir perto de  $M=50$ , o que não condiz com um aumento de rigidez ou de estabilidade, já que a frequência natural diminui (Figura 44). Também se observa na Figura 42 que, quando  $M=60$ , o pilar mais à direita é o que está submetido ao maior momento fletor devido à carga lateral. Para essa condição (Figura 42), é possível admitir a maior taxa de armadura como 4% da área de seção transversal (ABNT NBR 6118:2014) e dimensionar o pilar através dos ábacos ou mais facilmente pelo aplicativo PCalc, verificando-se que os esforços excedem a capacidade resistente do pilar, mesmo com a máxima armadura. Ou seja, quando  $M=60$ , há a falha estrutural de vários elementos do pórtico.

Figura 40 - Parâmetro Alfa em função do acréscimo de carga vertical.

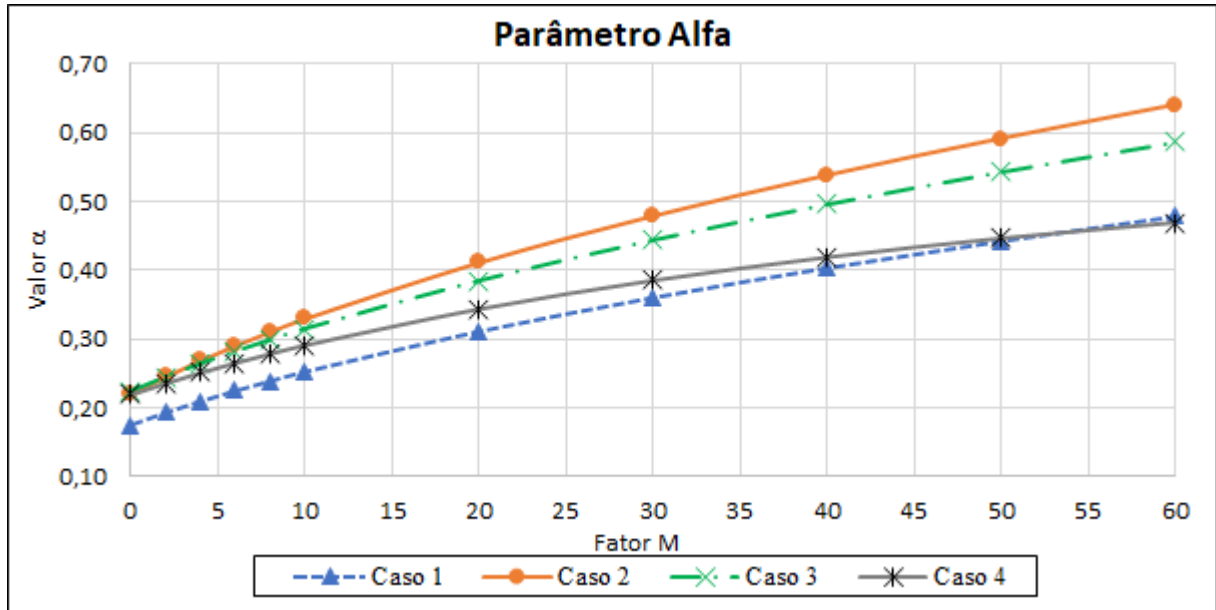


Figura 41 - Gama-Z em função do acréscimo de carga vertical.

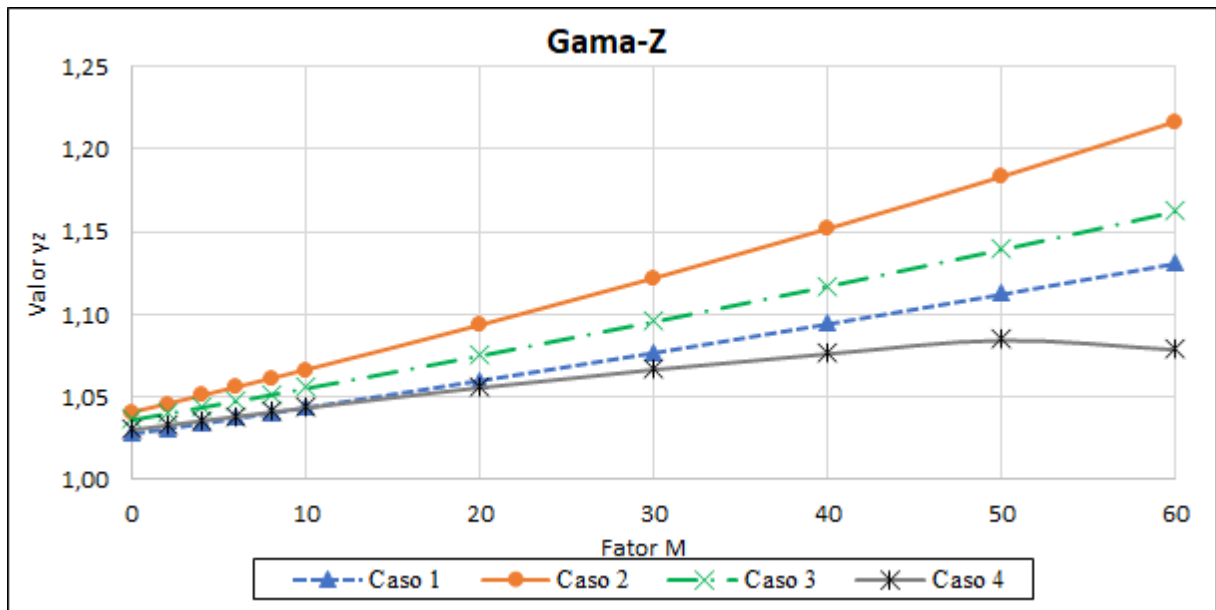




Figura 42 - Reações de apoio do pilar à direita do pórtico do Caso 4, na combinação ELS-2j (M=60).

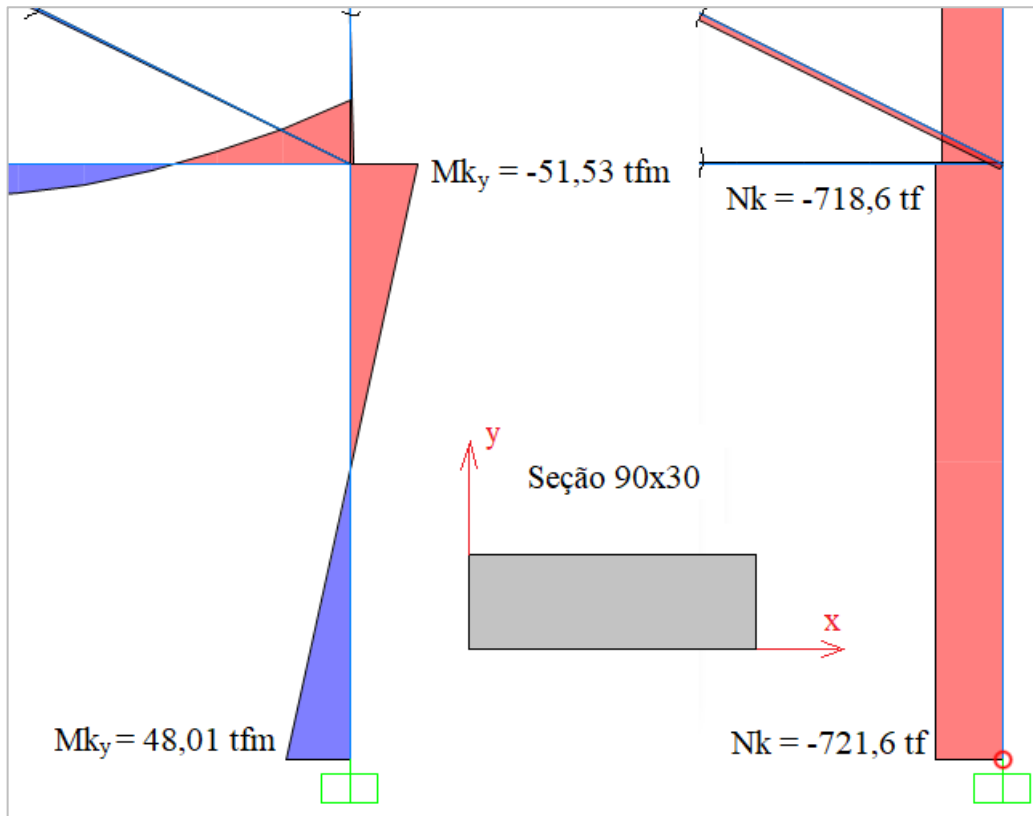
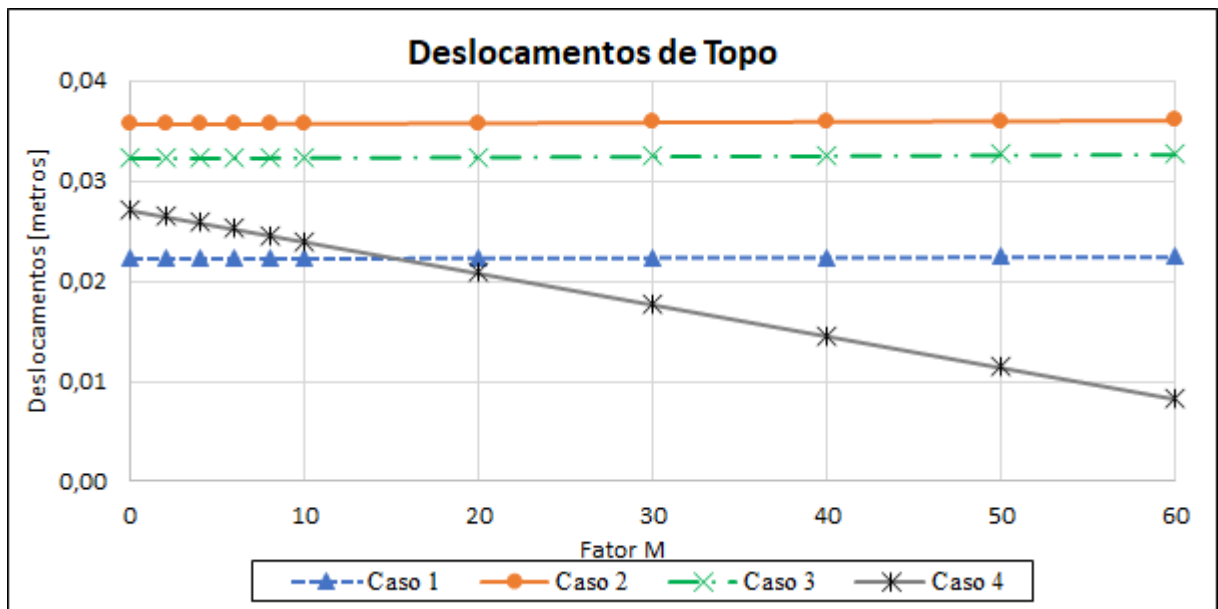


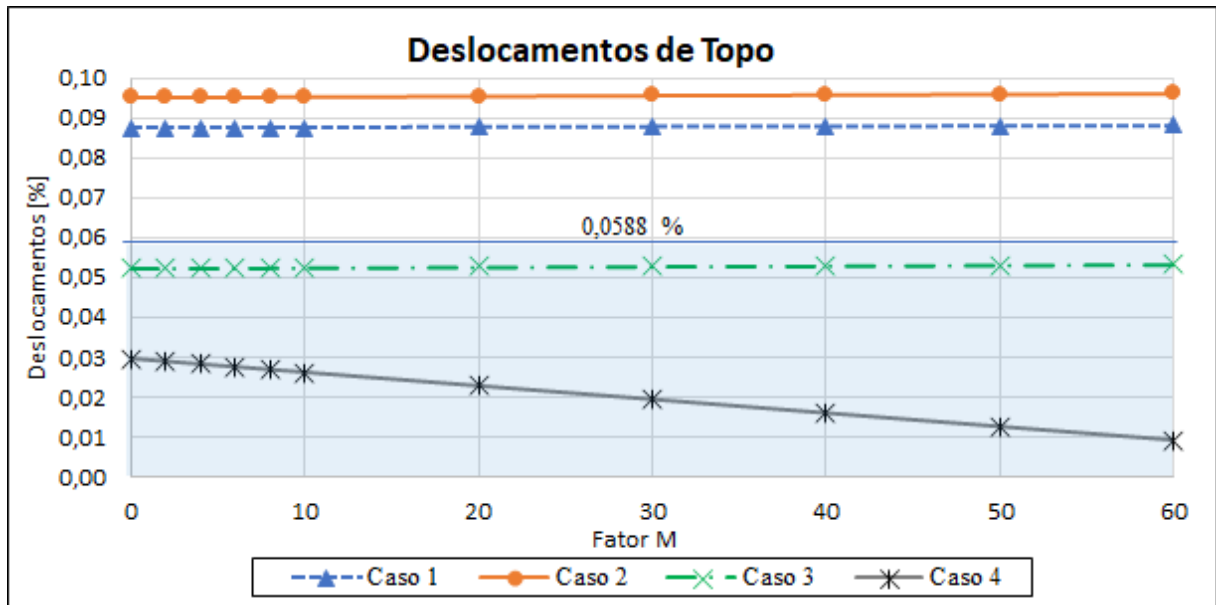
Figura 43 - Deslocamentos de topo absolutos (em metros), aumentando-se a carga vertical.



Na Figura 44, observa-se que todos os deslocamentos dos pórticos de 30 e de 20 pavimentos estão dentro do limite. A preponderância do efeito da carga lateral sobre a vertical

demonstra-se pelo gráfico praticamente constante para os três primeiros casos, o que não ocorre para o Caso 4.

Figura 44 - Deslocamentos de topo relativos (%), aumentando-se a carga vertical.



A peculiaridade do Caso 4 também influencia negativamente o comportamento de QR1 e QR2, quando comparados com os demais casos. Na Figura 45, observa-se que o quociente de Rayleigh atinge seu mínimo valor em M=50 (Caso 1), M=30 (Caso 2), M=10 (Caso 3) e M=2 (Caso 4), voltando a subir novamente.

Figura 45 - QR1 em função do acréscimo de carga vertical.

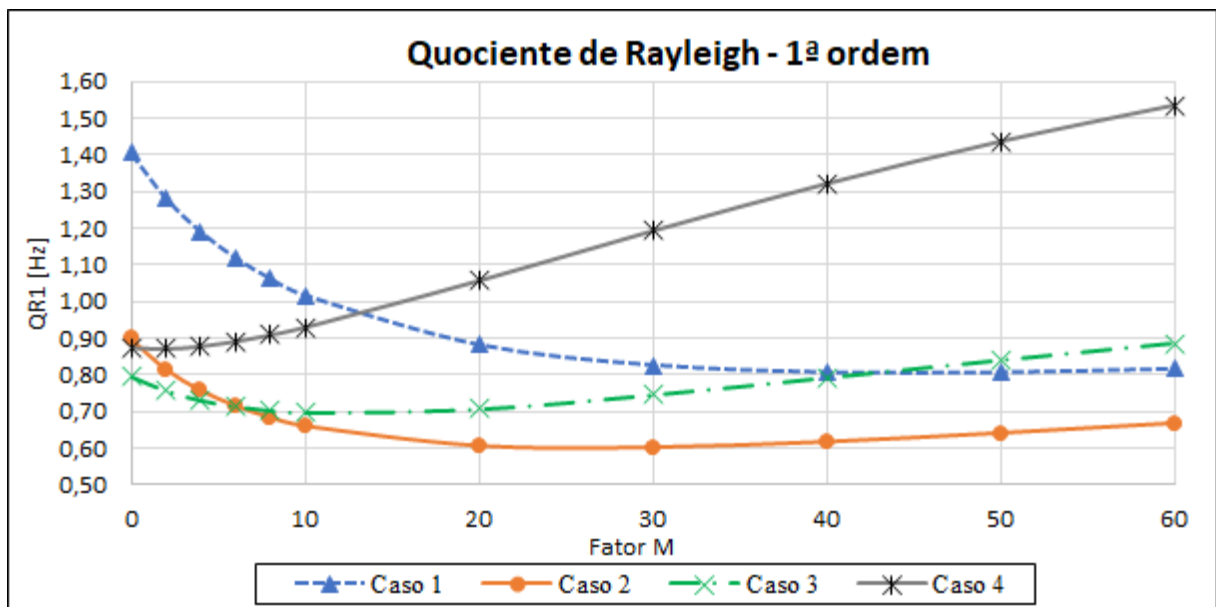
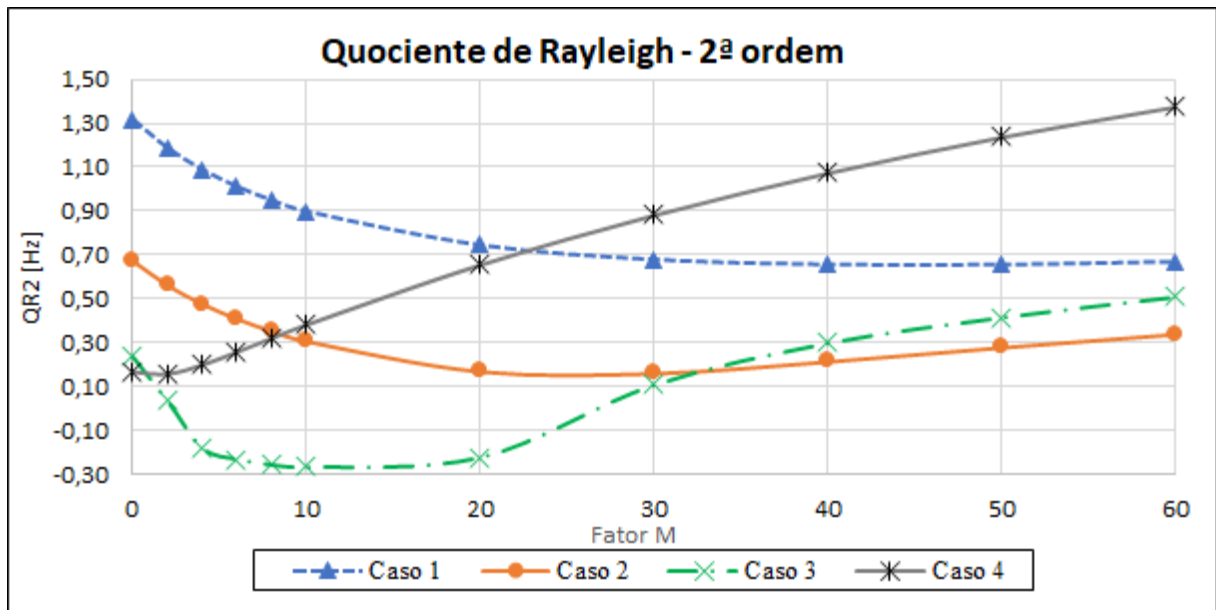
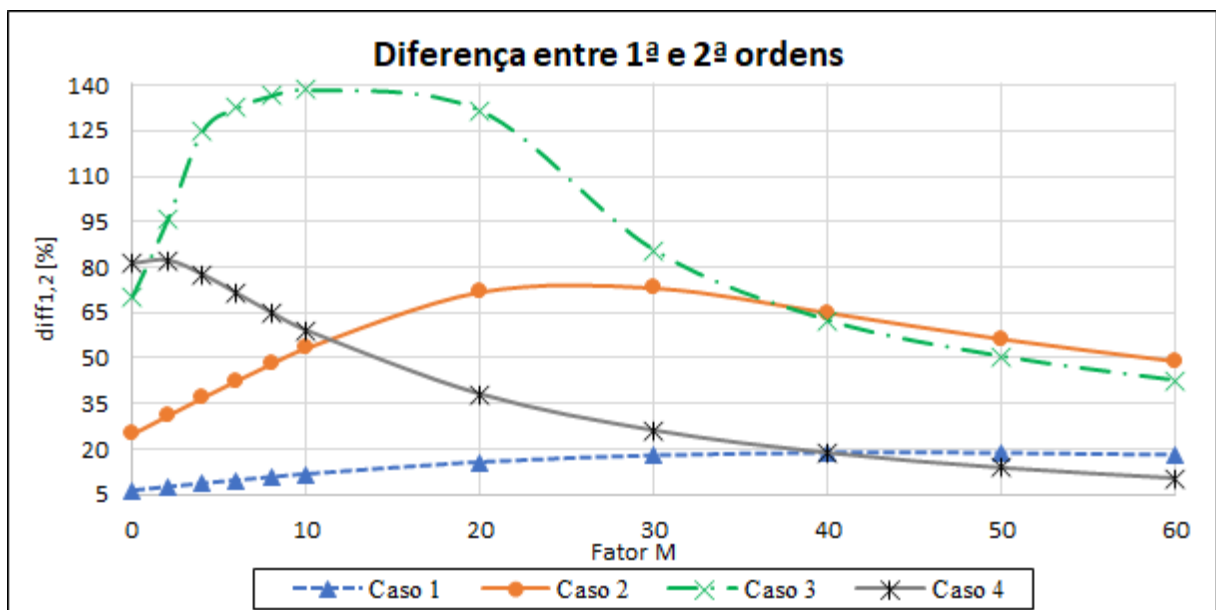


Figura 46 - QR2 em função do acréscimo de carga vertical.



Nos mínimos valores M mencionados ocorre o menor valor para o Quociente de 2ª ordem, chegando a zerar ou ultrapassar 100% de diferença nos três últimos casos, conforme mostram as Figuras 45 e 46. Quando a frequência em 2ª ordem se aproxima da nula, significa que o edifício não teria estabilidade na posição deformada e então a concepção deve ser repensada para melhorar sua rigidez global.

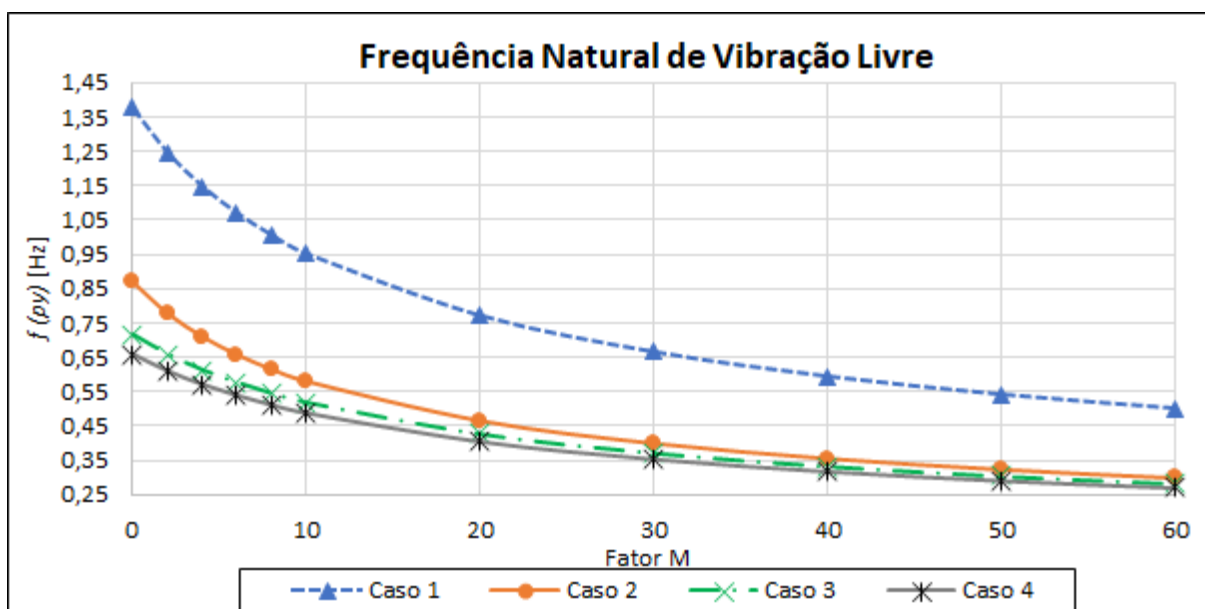
Figura 47 - Diferença entre QR1 e QR2 (%) devido ao fator M.



O aumento da altura dos pórticos também auxilia que o peso próprio seja naturalmente mais elevado e a correspondente carga vertical leva o Quociente de Rayleigh em 2ª ordem ter

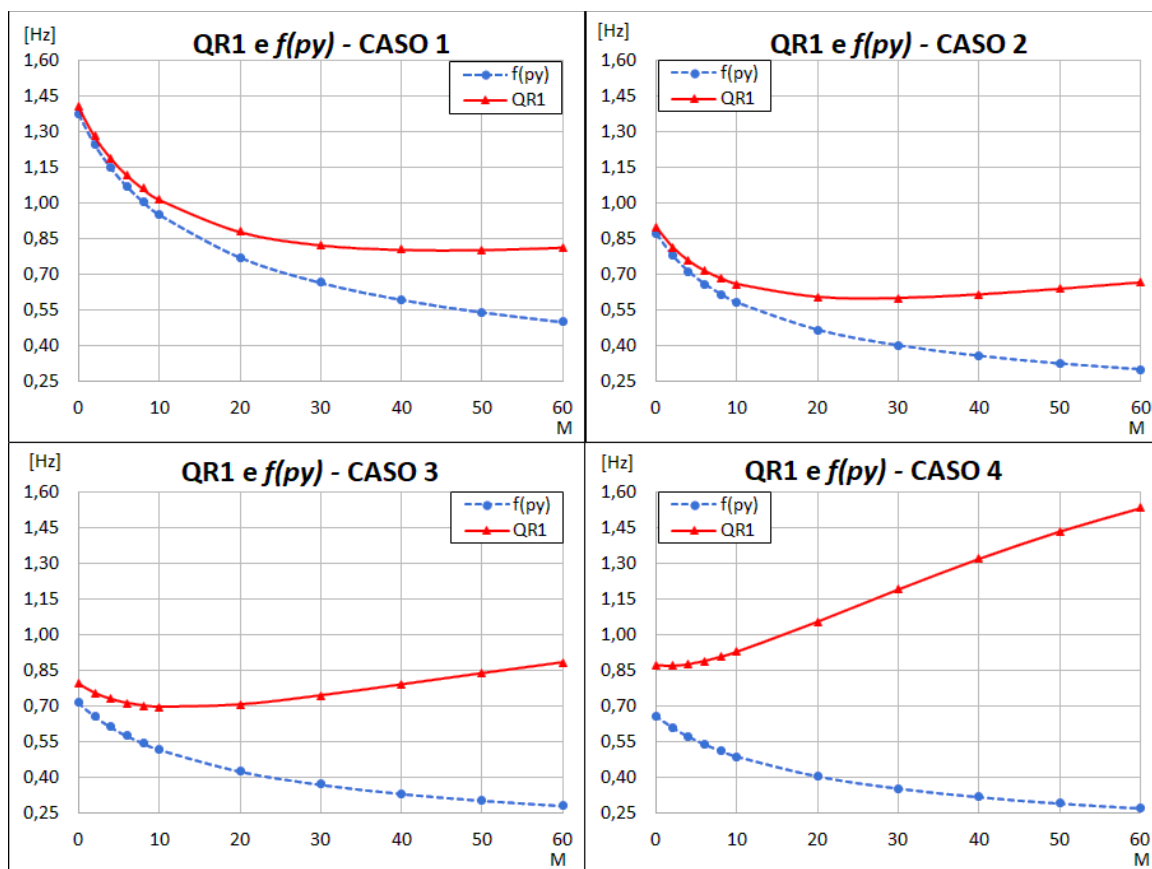
maior diferença quanto mais alto for o edifício. No entanto, pode-se dizer que as estimativas de QR1 e QR2 são plausíveis até o nível de carga mencionado, uma vez que a frequência real tende a sempre reduzir conforme o gráfico da Figura 48.

Figura 48 - Diminuição da frequência natural com o aumento da massa total do sistema.



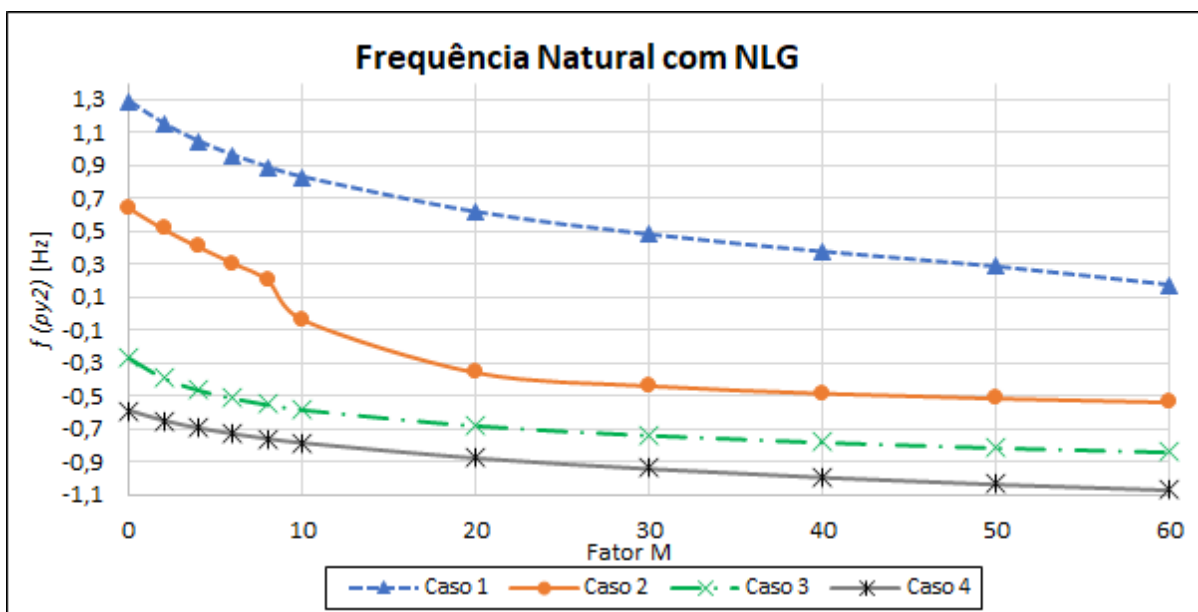
Na Figura 49, é possível perceber como a estimativa por Rayleigh se comporta comparada à frequência real. Vale destacar que, para o cálculo da frequência real, foi utilizada 100% da carga inserida no pórtico como massa adicional. Nos limites M mencionados, a diferença entre a frequência real e QR1 é, respectivamente de 48,6% (Caso 1), 49,8% (Caso 2), 34,5% (Caso 3) e 42,4% (Caso 4). Nota-se também que, quanto maior a altura do edifício, maior é a diferença inicial ( $M=0$ ) entre QR1 e  $f(py)$ .

Figura 49 - Diferenças gráficas entre o quociente de Rayleigh em 1ª ordem (QR1) e a frequência natural real  $f(py)$  devido ao acréscimo de carga vertical.



Finalmente, calculou-se a frequência de segunda ordem com a matriz de rigidez modificada ( $f(py2)$ ), ou seja, considerando a não linearidade geométrica (Figura 50). Observou-se que, dessa forma, as frequências em 2ª ordem são ainda mais conservadoras que QR2. A tabela com os respectivos valores e as diferenças para  $f(py)$  são mostradas no Apêndice A.

Figura 50 - Frequência natural com NLG.



## 5.6. RELAÇÕES COM OS MÉTODOS NORMATIVOS

A finalidade de se relacionar Gama-Z e Alfa é principalmente verificar até quais de seus valores o Quociente de Rayleigh é estável e mantém boa estimativa. A seguir, os gráficos para os quatro casos, separados por método.

### 5.6.1. Coeficiente Gama-Z

Em relação ao Gama-Z, observa-se nas Figuras 51 e 52 que as estimativas QR1 e QR2 começam a divergir – ou atingem seu mínimo - quando  $\gamma_z = 1,1$  para os Casos 1 e 2; e em torno de  $\gamma_z = 1,05$  para os Casos 3 e 4. O que pode ter influenciado a divergência com  $\gamma_z$  menor para os dois últimos casos foi principalmente: o aumento da altura; a diferença entre a forma modal real e a deformada para  $M=0$  e  $S3=1,00$ , ou seja na combinação ELS-1d; e a presença do contraventamento na estrutura.

Figura 51 – Relação QR1 e Gama-Z.

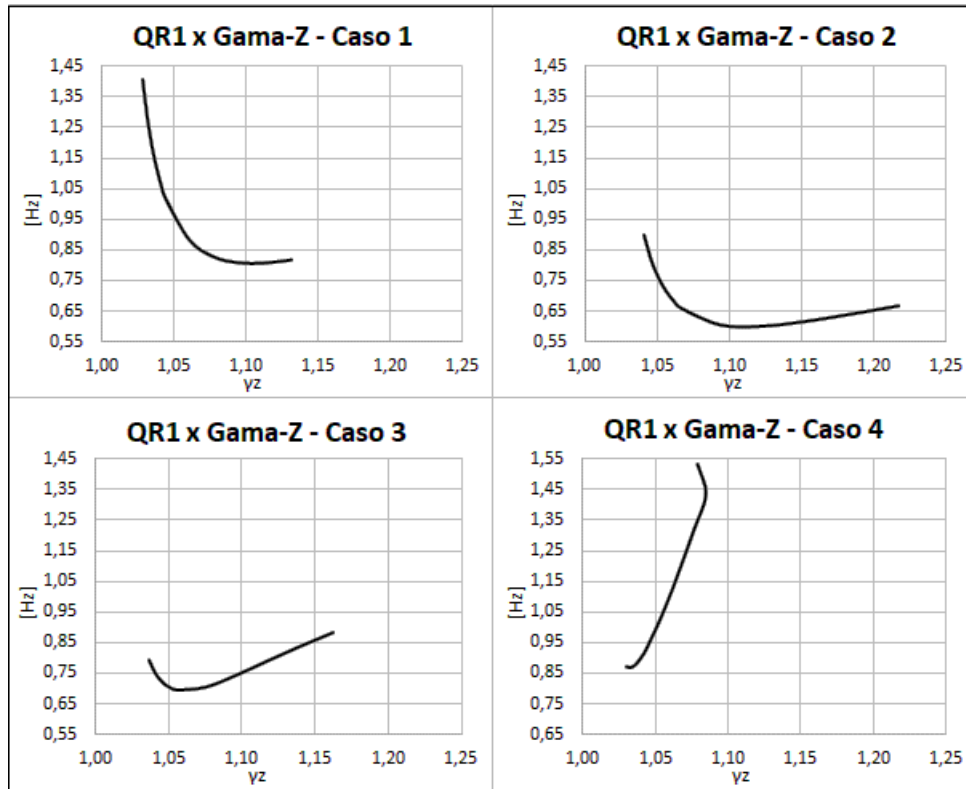


Figura 52 - Relação QR2 e Gama-Z

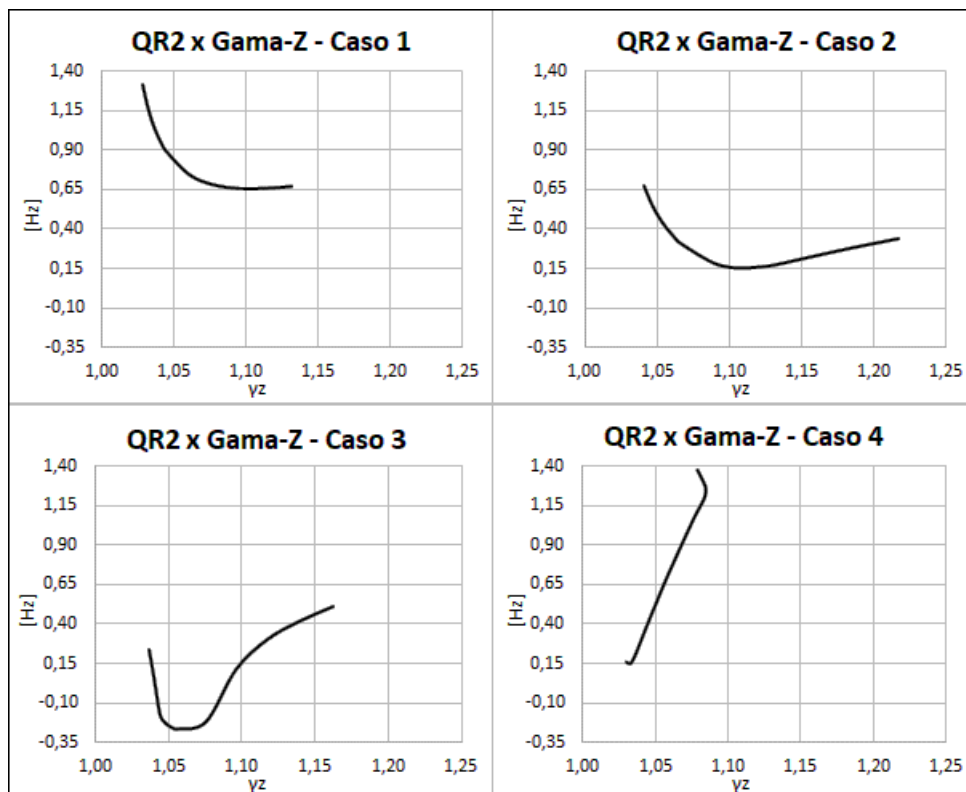


Figura 53 - Relação entre as diferenças de 1ª e 2ª ordens e Gama-Z.

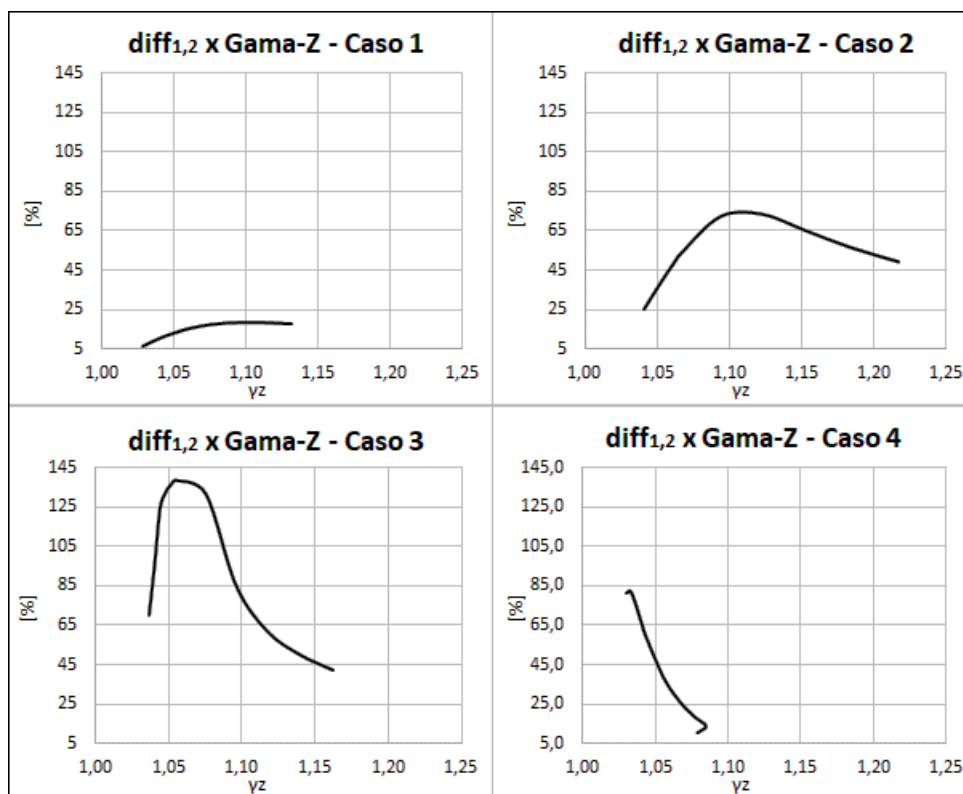
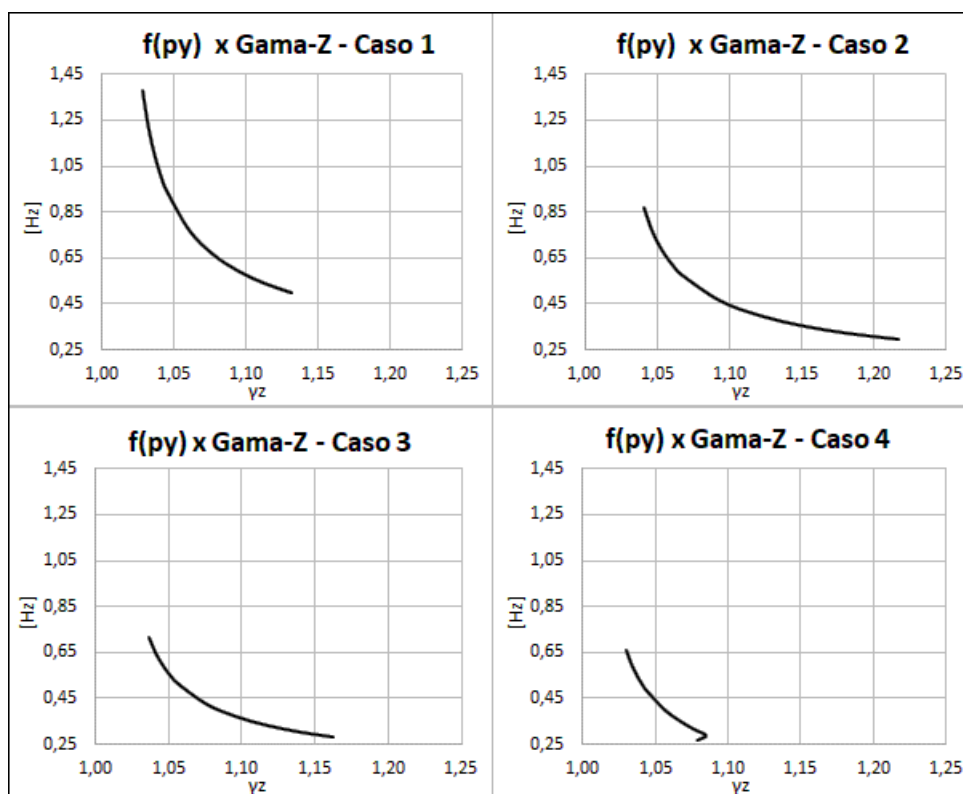


Figura 54 - Relação entre a frequência natural real e Gama-Z.



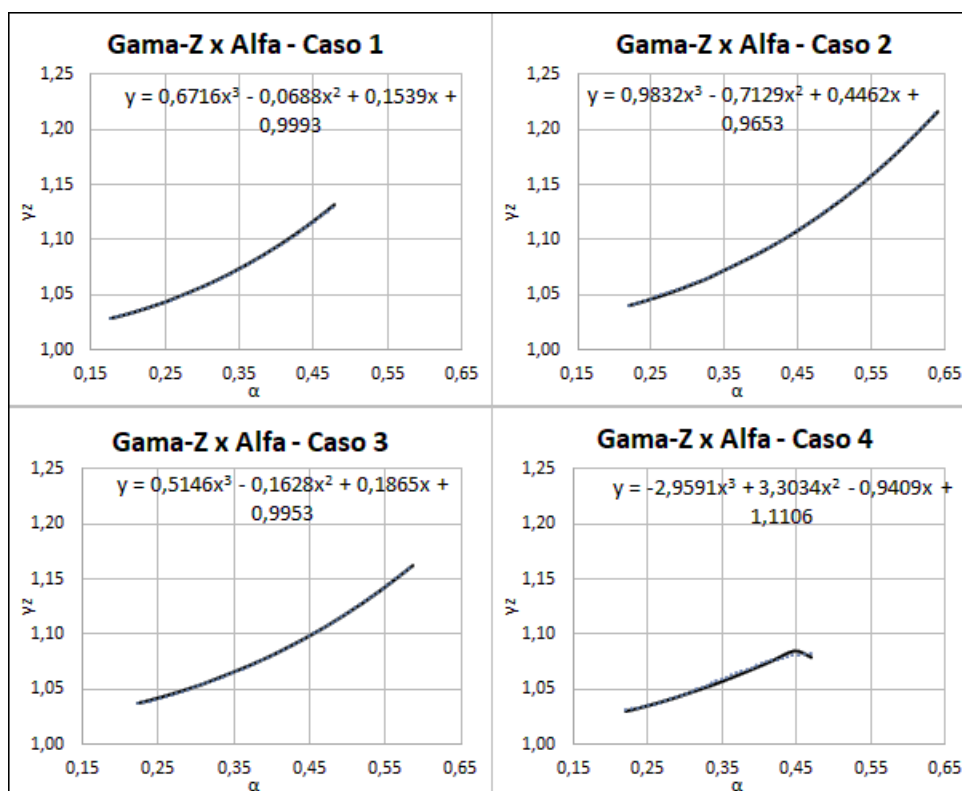


Para o Caso 4, todos os gráficos mostraram-se bem irregulares, visto que Gama-Z é observado decrescente a partir do nível de carga  $M = 50$ . Na Figura 54, prova-se que a frequência natural continua diminuindo e quase zero, em primeira ordem – situação em que o edifício perde estabilidade por falha estrutural de um ou mais elementos, uma vez que os esforços se redistribuem e poderiam gerar maiores esforços de 2ª ordem e maior  $\gamma_z$ . Outro indicativo na Figura 54 é que, para três primeiros pórticos, cujo comportamento é mais regular, a frequência real chega a aproximadamente 40% com o aumento da carga correspondente a  $\gamma_z = 1,1$  – não sendo, *a priori*, uma regra. Porém, deve-se observar que um pequeno acréscimo de massa pode, inicialmente, ocasionar uma perda significativa de estabilidade da estrutura.

### 5.6.2. Parâmetro Alfa

O parâmetro Alfa também apresentou configuração semelhante a Gama-Z, já que ambos se correlacionam através de uma função polinomial de 3º grau, o que é mostrado na Figura 55 e análogo ao que foi proposto por Carmo (1995).

Figura 55 - Relação entre Gama-Z e Alfa para os casos estudados.



Já referente a QR1 e QR2 (Figuras 56 a 58), tem-se a correspondência entre  $\alpha_1 = 0,5$  e  $\gamma_z = 1,1$ . Observa-se que para os Casos 1 a 3, QR1 e QR2 atingem seu mínimo valor no intervalo  $0,35 \leq \alpha \leq 0,45$ ; e no Caso 4, quando  $\alpha \approx 0,23$ .

Figura 56 - Relação entre QR1 e Alfa.

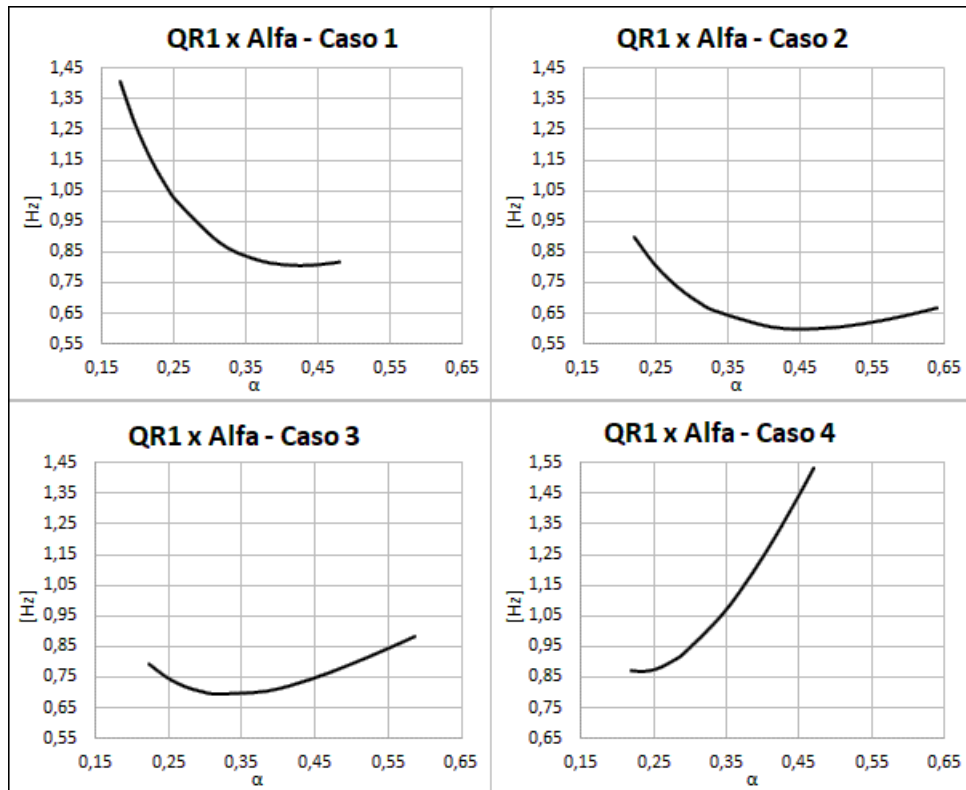


Figura 57 - Relação entre QR2 e Alfa.

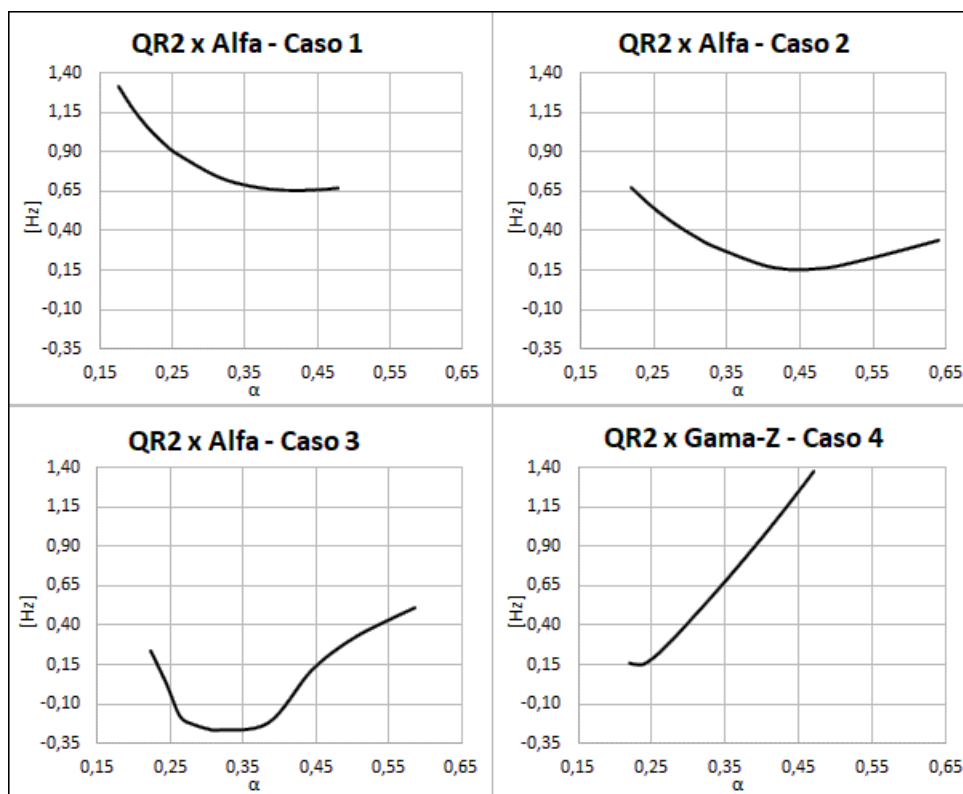
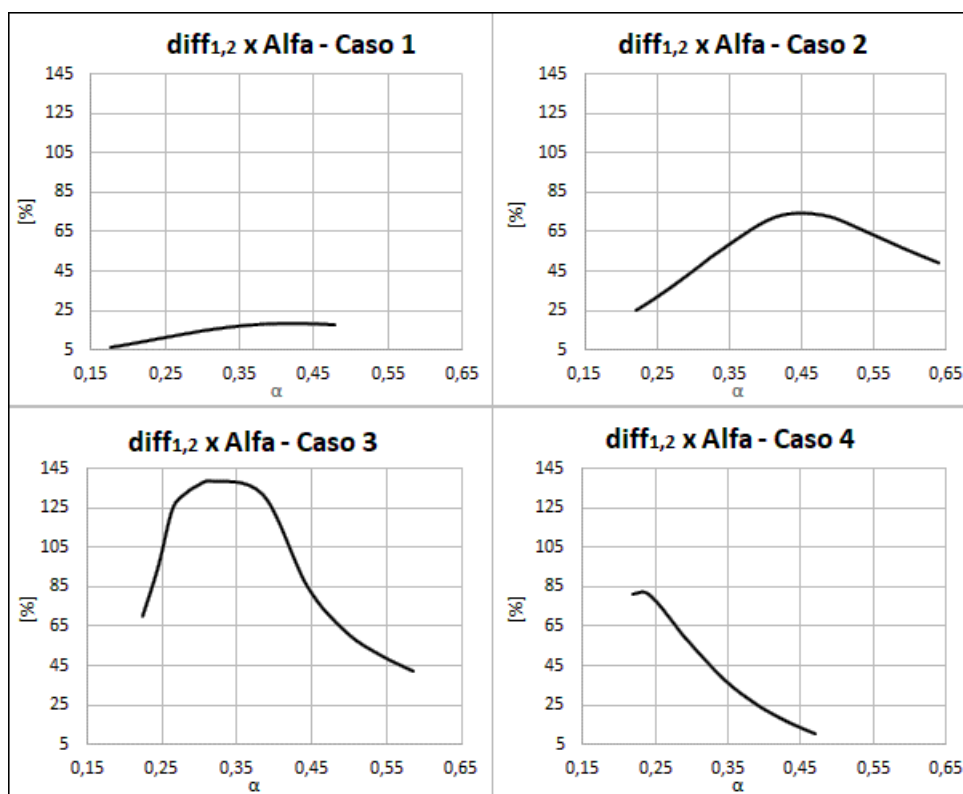
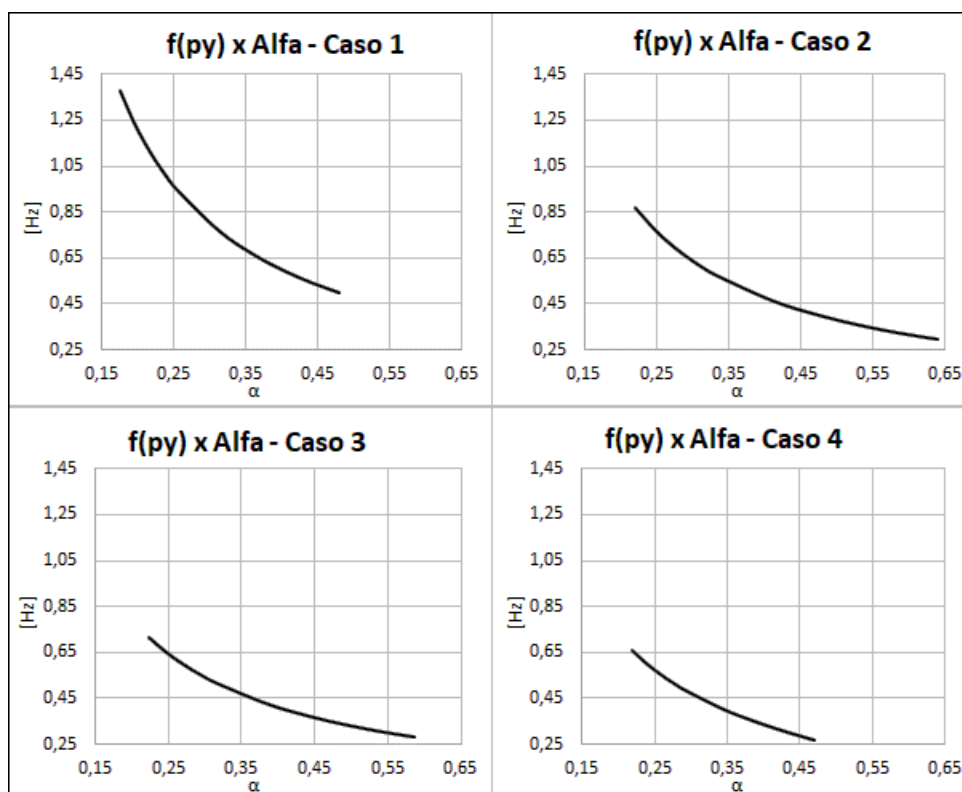


Figura 58 - Relação das diferenças entre QR1 e QR2 com Alfa.



Por fim, na Figura 59, observa-se a mesma situação retratada na Figura 49: para os valores perto do limite,  $f(py)$  reduz para 35 a 40% da frequência original. As relações podem ser verificadas nas tabelas correspondentes no Apêndice A.

Figura 59 - Relação entre a frequência natural real e Alfa.



## 5.7. DISCUSSÕES

O estudo dos pórticos com padrões diferentes de concepção teve o objetivo de verificar a influência dos parâmetros que contribuem para a rigidez global, como a adição de elementos de contraventamento e a alteração do  $fck$ . É válido lembrar que QR1, QR2 e Gama-Z foram calculados admitindo-se a NLF em função da aproximação recomendada pela norma ABNT NBR 6118:2014, embora utilizando  $E_{cs}$  em vez de  $E_{ci}$ , ao contrário do Parâmetro Alfa, que utilizou  $E_{cs}$  de maneira integral. Em todos os casos, verificou-se que Alfa foi menos conservativo, uma vez que se apresenta com valores próximos a 0,4 quando  $\gamma_z = 1,1$  (Figura 55).

Observados os resultados obtidos para os quatro pórticos, pode-se entender que o Método do Quociente de Rayleigh possui algumas limitações, sendo as principais:

- i. A elevada diferença da forma modal em relação à deformada por carga lateral tende a influenciar de modo negativo a estimativa, principalmente em estruturas assimétricas, quando calculado QR2.
- ii. Se a estrutura possui alta rigidez e a carga de vento não é preponderante à carga vertical (Caso 4), pode-se perder a estabilidade através de falha estrutural de pilares e/ou vigas, mesmo que nesta condição os parâmetros Alfa e Gama-Z diminuam, tendendo a reduzir também a frequência natural real, porém piorando cada vez mais a estimativa de QR1 e QR2;
- iii. Aparentemente, a estimativa funciona bem para estruturas mais baixas e de nós fixos, com pequenos deslocamentos. Essa diferença é relatada em Wahrhaftig (2008) em um dos modelos experimentais, quando medida a frequência natural e quando estimada a frequência considerando-se a carga compressiva, à medida que se houve aumento da altura do elemento.
- iv. Em edifícios reais, a assimetria também pode destacar a preponderância de modos torcionais, como é observado por Oliveira (2009) e Viera *et al.* (2017), levando a uma estimativa pouco confiável em relação à frequência de 1ª e 2ª ordens.

Em contrapartida, os casos estudados permitiram verificar que a frequência em segunda ordem atinge seus mínimos valores (ou zero) em um certo nível de carga, cujo valor é mais baixo quanto maior for a altura do edifício, principalmente porque as reações totais na base também são maiores. Tal condição mostra que o Método do Quociente de Rayleigh é bastante conservador em relação aos demais, quando comparados dentro de suas limitações.

Sendo assim, é necessária uma avaliação em edifícios reais com sistemas estruturais diferentes para observar a influência da assimetria e como o quociente de Rayleigh se comporta frente às cargas comuns praticadas, conforme a ABNT NBR 6120:2019.

Na prática cotidiana de projeto, é mais comum adotar o Efeito P-Delta para verificar a estabilidade global em 2ª ordem, não dispensando a validação dos coeficientes normativos e outros que venham a ser fornecidos por programas de cálculo estrutural, como o FAVt utilizado nos sistemas CAD/TQS. Na maioria dos edifícios de 30 ou mais pavimentos, a concepção estrutural tem por objetivo manter tais coeficientes normativos dentro dos limites estabelecidos – em geral, sendo  $1,1 \leq \gamma_z \leq 1,3$  e  $\alpha \leq \alpha_1$  – considerando também o valor da frequência natural como parâmetro de estabilidade, a fim de manter o equilíbrio na posição deformada. Outro ponto a ser destacado é que as lajes contribuem para a estabilidade global, o que poderia ser reproduzido adotando-se pórticos com barras horizontais rígidas, similarmente aos *shear buildings*. Em relação às vigas, o mais observado na prática é a combinação entre carregamento

permanente e acidental esteja na faixa de  $M=20$  a  $M=40$  (o que representaria uma carga adicional vertical de 6 a 12 vezes o seu peso próprio). Por exemplo, vigas de seção 19x60 ( $f_{ck} = 30$  MPa) suportam um momento fletor característico de aproximadamente 22,46 tfm com armadura simples no limite do Domínio 3, i.e. para  $x/d = 0,45$ . Se a viga atende ao parâmetro comum de pré-dimensionamento ( $h_{viga} = L_{vão}/12$ ), seu vão máximo é de 7,2m e, portanto, para a condição biapoiada, a carga uniforme distribuída para o momento fletor citado é de 3,47 tf/m – correspondente a  $M = 40,5$ . Dessa forma, entende-se que a utilização de cargas muito altas em relação às seções transversais de vigas e pilares é limitada por seu dimensionamento da área de aço para suas propriedades mecânicas e geométricas. Todos esses fatores podem atenuar a diferença entre QR1 e QR2 nos edifícios reais, visto que, nos casos estudados, os parâmetros levam a uma divergência entre a frequência real e as estimadas pelo Método de Rayleigh, quanto mais perto da falha se encontra a estrutura.

Por último, a validação da frequência natural  $f(py2)$ , obtida por autovalores e autovetores utilizando-se a matriz de rigidez geométrica, mostrou-se ainda mais conservadora e, de modo geral, mostrou-se parecida com QR2 nas situações mais regulares, nos edifícios mais baixos e com carga adicional também pequena. Já para edifícios mais altos, aparentemente esta medida de frequência tende a ser nula, uma vez que a frequência já em primeira ordem é baixa.

No geral, em relação à segunda ordem, pode-se concluir que as frequências (tanto QR2 quanto  $f(py2)$ ) tendem a cair bastante com um pequeno acréscimo de carga, frente a um deslocamento lateral e, como já mencionado, esse intervalo já é suficiente para o uso prático dos métodos aplicados neste trabalho, em relação a edifícios em torno de 12 a 15 pavimentos com comportamento regular.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1. CONCLUSÕES

Esta pesquisa teve o objetivo de comparar os métodos de estabilidade global consagrados na literatura com o Método do Quociente de Rayleigh, aplicado com e sem a consideração da matriz geométrica para se avaliar os efeitos de 2ª ordem nas frequências naturais.

Foram percorridos os conceitos principais utilizados atualmente no cotidiano de projeto, mostrando um exemplo de pórtico plano submetido ao cálculo de Alfa, Gama-Z, Efeito P-Delta e Análise Não Linear através de Elementos Finitos (calculada diretamente pelo programa *SAP2000*).

Os quatro casos avaliados mostraram-se com concepções diferentes, podendo-se comparar suas rigidezes através dos deslocamentos de topo, na situação de variação do período de recorrência. Foi interessante observar que os parâmetros de estabilidade global pouco se alteram com a variação da intensidade do vento, porém são muito sensíveis ao aumento da carga vertical, fato também observado por Moncayo (2011). Já a frequência natural mantém-se igual, obviamente porque não depende da carga lateral; porém é, de início, muito sensível ao acréscimo de carga, já que a função é assintótica tendendo a zero tão mais rápido quanto maior for a altura do edifício (Figura 48).

Em relação à aplicação do Quociente de Rayleigh em 1ª e 2ª ordens, o método se mostrou com restrições de aplicação para pórticos planos, principalmente com o aumento da altura. Ficou claro que a concepção pode afetar de forma negativa a estimativa, quando se tem a assimetria ou quando a forma modal e a frequência real divergem da deformada sob carga lateral e seu correspondente valor QR1 – situação observada para o pórtico de elevada rigidez global.

Durante a concepção dos pórticos planos, a calibração dos modelos consistiu em avaliar a frequência natural real e compará-la à QR1 advinda da carga de vento integral ( $S_3=1,0$ ). Tanto em situações mais flexíveis quanto nas mais rígidas, a estimativa mostrou-se distante da frequência real  $f(sp)$ .

Portanto, no que tangem os casos deste estudo, conclui-se que o Método do Quociente de Rayleigh funciona bem para estruturas mais baixas, de rigidez média e mais simétricas

quanto possível. Em específico, na literatura consultada, como em Wahrhaftig (2008), notou-se que a estimativa por Rayleigh funciona melhor para estruturas que possam ser modeladas por uma única barra discretizada, como torres de telecomunicação.

## 6.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Recomenda-se fortemente a aplicação do quociente de Rayleigh em estruturas de edifícios reais, sob a consideração (ou não) do efeito de diafragma rígido das lajes, bem como a variação dos sistemas estruturais empregados, equalizando-se a modelagem entre o *SAP2000* e sistemas CAD/TQS e utilizando-se as combinações de carregamento usuais da ABNT NBR 8681:2003.

Também é indicado verificar como o quociente de Rayleigh se comporta na presença de torção do edifício, sob vento excêntrico ou sob elevada assimetria.



## REFERÊNCIAS

ALSOFI, A; GRAHN, A. **Design Methodology for Evaluation of Global Stability in Structural Systems. Master's thesis in Structural Engineering and Building Technology.** Chalmers University of Technology, Sweden, 2017.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318-19: Building Code Requirements for Structural Concrete.** Farmington Hills, USA, 2019.

ARAÚJO, S.S.; GUIMARÃES, G.N.; GEYER, A.L.B. Influência do tipo de medição na determinação do módulo estático de elasticidade do concreto. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais.** Vol.5, nº5, p.555-575, 2012.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DA NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6123: Forças devidas ao vento em edificações – Procedimento.** Rio de Janeiro, 1988.

\_\_\_\_\_. **NBR 8681: Ações e segurança nas estruturas – Procedimento.** Rio de Janeiro, 2003.

\_\_\_\_\_. **NBR 15421: Projeto de estruturas resistentes a sismos – Procedimento.** Rio de Janeiro, 2006.

\_\_\_\_\_. **NBR 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios.** Rio de Janeiro, 2008.

\_\_\_\_\_. **NBR 7188: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas.** Rio de Janeiro, 2013.

\_\_\_\_\_. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento.** Rio de Janeiro, 2014.

\_\_\_\_\_. **NBR 8522: Concreto – Determinação dos módulos estáticos de elasticidade e de deformação à compressão.** Rio de Janeiro, 2017.

\_\_\_\_\_. **NBR 6120: Ações para o cálculo de estruturas de edificações**. Rio de Janeiro, 2019.

AUSTRALIAN STANDARDS. **AS 3600: Concrete Structures**. Sydney, 2018

BALENDRA, T. **Vibration of buildings to wind and earthquake loads**. Springer Science & Business Media, 2012.

BACHMANN, H. **Vibration problems in structures**. Basel; Boston; Berlin; Birkhauser. 1995.

BECK, H; KÖNIG, G. Restraining forces (Festhaltekräfte) in the analysis of tall buildings. In: **Tall Buildings**. Pergamon, 1967. p. 513-536.

BENJAMIN, A.C. **Análise Não-Linear Geométrica de Pórticos Tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos**. Dissertação – Mestrado. COPPE-UFRJ. Rio de Janeiro, 1982.

BLESSMANN, J. **O vento na engenharia estrutural**. Editora da UFRGS, 2013.

CARMO, R.M.S. **Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, EESC-USP. São Carlos, 1995.

CHANDRUPATLA, T.; BELEGUNDU, A. **Introduction to Finite Elements in Engineering**. 3rd Ed. Prentice Hall, New Jersey, 2002.

CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures, computers & structures**. New York, 1995.

COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E.; WITT, R.J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th Ed. John Wiley & Sons, Inc, 2002.

COVAS, N. GamaZ-FAVt. **Mensagem enviada à comunidade TQS**. São Paulo-SP, 200-?. Disponível em: <<https://docs.tqs.com.br/Docs/PrintAllReport/3368?language=pt-BR>>. Acesso em: 29.07.2022.

DAVENPORT, A. G. The dependence of wind loads on meteorological parameters. In: **Proceedings of the international research seminar on wind effects on buildings and structures**. University of Toronto Press, 1967. p. 19-82.

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. **DIN 1045-1: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton –Teil 1: Bemessung und Konstruktion**. Berlin, 2008.

DHORAJIWALA, H; OWCZARCZYK, A. **Global stability of high-rise buildings on foundation on piles**. Royal Institute of Technology. Sweden, 2018.

EUROPÉEN, C. **Eurocode 2: Design of concrete structures—Part 1-1: General rules and rules for buildings**. London: British Standard Institution, 2004.

FRANÇA, R. L. S.; KIMURA, A. E. Resultados de recentes pesquisas para o dimensionamento das armaduras longitudinal e transversal em pilares-parede. **Encontro Nacional de Engenharia e Consultoria Estrutural**, São Paulo, 2006.

FRANCO, M.; VASCONCELOS, A.C. Practical assesment of second order effects in tall buildings. In: **COLLOQUIUM ON THE CEB-FIP MC90, Rio de Janeiro, Proceedings**, p.307-324, 1991.

GAIOTTI, R.; SMITH, B.S. P-delta analysis of building structures. **Journal of Structural Engineering**, v. 115, n. 4, p. 755-770, 1989.

GERASIMIDIS, S.; DEODATIS, G.; YAN, Y.; ETTOUNEY, M. Global instability induced failure of tall steel moment frame buildings. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, n.o 2, pgs. 04016082, 2017.

GOMES, L.; VICKERY, B. J. Extreme wind speeds in mixed wind climates. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 2, n. 4, p. 331-344, 1978.

HEIN, C.; KALUZNI, L.; TWOHIG, B.; CHANG, W.S. Global stability of high-rise timber buildings. In: **2016 World Conference on Timber Engineering**, WCTE 2016. Vienna University of Technology, 2016.

IGLESIA, S.M. **O Efeito P-Delta nas Estruturas de Edifícios**. Mais Engenharia - AltoQi. 2016. Disponível em: <<https://maisengenharia.altoqi.com.br/estrutural/o-efeito-p-delta-nas-estruturas-de-edificios/>>. Acesso em: 25.05.2022.

KIMURA, A.E. **Informática Aplicada em Estruturas de Concreto Armado: Cálculo de Edifícios com o Uso de Sistemas Computacionais**. Editora Pini. São Paulo, 2007.

LEAL, L.A.A.S. **Análise elástica dos efeitos da não linearidade geométrica em estruturas de aço**. Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica (USP), São Paulo, 2014.

LEAL, C.E.F.; PARSEKIAN, G.A.; FERREIRA, F.G.S.; CHRISTOFORO, A.L. Comparação entre módulos de deformação de concretos nacionais produzidos com agregados graúdos de diferentes origens mineralógicas. **Revista Matéria**, v.25, nº4, 2020.

MARTHA, L.F. **Método da rigidez direta para modelos estruturais lineares e elásticos**. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro–PUC–Rio, 1999.

MONCAYO, W.J.Z. **Análise de segunda ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, EESC-USP. São Carlos, 2011.

OLIVEIRA, M.G.K. **Desenvolvimento de uma balança dinâmica de três graus de liberdade para estudo dos efeitos de flexo-torção em edifícios altos submetidos à ação do vento**. Tese de Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS. Porto Alegre, 2009.

OWOLABI, G.M.; SWAMIDAS, A.S.J.; SESHADRI; R. Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 265, p. 1-22, 2003.

PACHECO; J.; BILESKY, P.; MOARAI, T.R.; GRANDO, F.; HELENE, P. Considerações sobre o módulo de elasticidade do concreto. **Anais do 56º Congresso Brasileiro do Concreto (CBC 2014)**. Outubro de 2014.

PIMENTA, P.M.; YOJO, T. Geometrically exact analysis of spatial frames. **App. Mech. Reviews**, 46(11), Part 2, 1993.

PIMENTA, P.M. **Fundamentos de Mecânica dos Sólidos e das Estruturas**. Notas de Aula. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006.

PINTO, R.S. **Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 1997.

PROENÇA, S.P.B. **Sobre modelos matemáticos do comportamento não linear do concreto: análise crítica e contribuições**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 1988.

PROENÇA, S.P.B. **Análise não linear de estruturas**. Notas de Aula. Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP). São Carlos, 2018.

QUESADA-OLMO, N.; JIMENEZ-MARTINEZ, M.J.; FARJAS-ABADIA, M. Real-time high-rise building monitoring system using global navigation satellite system technology. **Measurement**, v. 123, p. 115-124, 2018.

RAYLEIGH, J. W. S.; LINDSAY, R. B. **The theory of sound**, 1st American ed. 1945.

ROMERO, I. A comparison of finite elements for nonlinear beams: the absolute nodal coordinate and geometrically exact formulations. **Multibody System Dynamics**, v. 20, n. 1, p. 51-68, 2008.

ROSSO, A.; ALMEIDA, J.P.; BEYER, K. Stability of thin reinforced concrete walls under cyclic loads: state-of-the-art and new experimental findings. **Bull Earthquake Engineering**, n° 14, p. 455-484, 2016.

SIMIUI, E.; YEO, D. **Wind effects on structures: Modern structural design for wind**. John Wiley & Sons, 2019.

SIMO, J.C.; VU-QUOC, L. On the dynamics in space of rods undergoing large motions—a geometrically exact approach. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 66, n. 2, p. 125-161, 1988.

SORIANO, H.L. **Introdução à dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

TQSDocs. **Efeito Incremental**. [S.l], 200-?. Disponível em: <<https://docs.tqs.com.br/Docs/Details?id=3154&language=pt-br>>. Acesso em: 05.03.2023.

VALLIS, M.B.; LOREDO-SOUZA, A. M.; FERREIRA, V.; NASCIMENTO, E.L. Classification and identification of synoptic and non-synoptic extreme wind events from surface observations in South America. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 193, p. 103963, 2019.

WAHRHAFTIG, A. M. **Uma avaliação experimental e numérica do efeito da rigidez geométrica na resposta dinâmica de estruturas esbeltas sujeitas à excitação de vento**. Tese de Doutorado - Área de Engenharia de Estruturas. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP). São Paulo, 2008.

ZERMIANI, F.L. **Contribuição à análise não-linear geométrica de pórticos planos**. Dissertação - Mestrado em Engenharia Mecânica. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Florianópolis, 1998.

ZHOU, K.; LUO, X.; LI, Q. Decision framework for optimal installation of outriggers in tall buildings. **Automation in Construction**, v. 93, p. 200-213, 2018.

## APÊNDICE A

### 1 TABELAS CORRESPONDENTES À SITUAÇÃO DE ACRÉSCIMO DE CARGA

Como foi mencionado anteriormente, as tabelas a seguir são referentes aos dados apresentados nas Figuras 40 a 50.

Tabela A1 – Dados correspondentes ao gráfico da Figura 40.

ALFA				
CASO				
FATOR M ↓	<i>8 pavimentos</i>	<i>12 pavimentos</i>	<i>20 pavimentos</i>	<i>30 pavimentos</i>
0	0,175489	0,220147	0,223731	0,219668
2	0,193467	0,246054	0,244661	0,236286
4	0,209905	0,269478	0,263934	0,251555
6	0,225147	0,291017	0,281888	0,265709
8	0,239419	0,311065	0,298763	0,278916
10	0,252882	0,329892	0,314732	0,291305
20	0,311576	0,411252	0,384725	0,343891
30	0,360815	0,478917	0,443768	0,385307
40	0,404071	0,538084	0,495784	0,418878
50	0,443093	0,591302	0,542798	0,446379
60	0,478928	0,640059	0,586021	0,468879

Tabela A2 – Dados correspondentes ao gráfico da Figura 41.

GAMA-Z				
CASO				
FATOR M ↓	<i>8 pavimentos</i>	<i>12 pavimentos</i>	<i>20 pavimentos</i>	<i>30 pavimentos</i>
0	1,0284	1,0409	1,0367	1,0305
2	1,0315	1,0459	1,0404	1,0332
4	1,0346	1,0510	1,0442	1,0360
6	1,0378	1,0561	1,0480	1,0387
8	1,0410	1,0613	1,0519	1,0413
10	1,0442	1,0666	1,0557	1,0439
20	1,0606	1,0936	1,0755	1,0562
30	1,0774	1,1220	1,0960	1,0672
40	1,0948	1,1519	1,1174	1,0768
50	1,1128	1,1835	1,1395	1,0849
60	1,1314	1,2169	1,1626	1,0792

Tabela A3 – Dados correspondentes ao gráfico da Figura 43.

DESLOCAMENTOS DE TOPO (EM METROS, C. FREQUENTE)				
CASO				
FATOR M ↓	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0	0,022278	0,035647	0,032218	0,027108
2	0,022285	0,035660	0,032234	0,026480
4	0,022291	0,035674	0,032250	0,025852
6	0,022297	0,035687	0,032267	0,025224
8	0,022303	0,035701	0,032283	0,024596
10	0,022309	0,035714	0,032300	0,023968
20	0,022339	0,035781	0,032382	0,020829
30	0,022370	0,035848	0,032464	0,017689
40	0,022400	0,035915	0,032545	0,014549
50	0,022431	0,035982	0,032627	0,011410
60	0,022461	0,036049	0,032709	0,008270
<b>LIMITE H/1700</b>	0,0150	0,0221	0,0362	0,0538
<b>RAZÃO H/L</b>	4,2500	3,1250	3,4167	3,8125
<b>fck (MPa)</b>	30, 40 e 45	30, 40 e 45	35, 40 e 45	45

Tabela A4 – Dados correspondentes ao gráfico da Figura 44.

DESLOCAMENTOS DE TOPO (% , C. FREQUENTE)				
CASO				
FATOR M ↓	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0	0,087365	0,095059	0,052387	0,029626
2	0,087392	0,095093	0,052413	0,028940
4	0,087416	0,095131	0,052439	0,028254
6	0,087439	0,095165	0,052467	0,027567
8	0,087463	0,095203	0,052493	0,026881
10	0,087486	0,095237	0,052520	0,026195
20	0,087604	0,095416	0,052654	0,022764
30	0,087725	0,095595	0,052787	0,019332
40	0,087843	0,095773	0,052919	0,015901
50	0,087965	0,095952	0,053052	0,012470
60	0,088082	0,096131	0,053185	0,009038
<b>H [m]</b>	25,5	37,5	61,5	91,5
<b>Limite H/1700 [%]</b>	0,058824			



Tabela A5 – Dados correspondentes ao gráfico da Figura 45.

FATOR M ↓	QUOCIENTE DE RAYLEIGH (1ª ORDEM, Hz)			
	CASO			
	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0	1,4052	0,8975	0,7941	0,8726
2	1,2819	0,8147	0,7558	0,8697
4	1,1899	0,7566	0,7301	0,8765
6	1,1185	0,7142	0,7132	0,8898
8	1,0618	0,6826	0,7027	0,9075
10	1,0159	0,6587	0,6968	0,9285
20	0,8806	0,6040	0,7067	1,0558
30	0,8250	0,5997	0,7447	1,1917
40	0,8053	0,6151	0,7908	1,3206
50	0,8047	0,6390	0,8379	1,4359
60	0,8149	0,6665	0,8837	1,5345
$f(sp) [Hz]^1$	1,3546	0,8580	0,6911	0,6456
$f(py) [Hz]$	1,3763	0,8702	0,7151	0,6593
$QR1(sp) [Hz]$	1,3770	0,8707	0,7179	0,6605

Tabela A6 – Dados correspondentes ao gráfico da Figura 46.

FATOR M ↓	QUOCIENTE DE RAYLEIGH (2ª ORDEM, Hz) <sup>3</sup>			
	CASO			
	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0	1,3171	0,6739	0,2349	0,1641
2	1,1865	0,5625	0,0328	0,1552
4	1,0878	0,4774	-0,1818	0,1970
6	1,0104	0,4093	-0,2328	0,2565
8	0,9483	0,3533	-0,2579	0,3192
10	0,8973	0,3065	-0,2692	0,3808
20	0,7436	0,1689	-0,2242	0,6546
30	0,6784	0,1600	0,1075	0,8814
40	0,6555	0,2146	0,2978	1,0744
50	0,6555	0,2786	0,4151	1,2389
60	0,6686	0,3394	0,5083	1,3771

Tabela A7 – Dados correspondentes ao gráfico da Figura 47.

FATOR M ↓	DIFERENÇA DE 1ª PARA 2ª ORDEM (Hz)			
	CASO			
	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0	6,2763	24,9144	70,4229	81,1931
2	7,4445	30,9535	95,6592	82,1548
4	8,5752	36,9074	124,8962	77,5266
6	9,6617	42,6969	132,6445	71,1697
8	10,6945	48,2402	136,6958	64,8268
10	11,6712	53,4648	138,6275	58,9827
20	15,5591	72,0342	131,7239	37,9959
30	17,7658	73,3153	85,5644	26,0356
40	18,6086	65,1126	62,3451	18,6391
50	18,5405	56,3957	50,4667	13,7191
60	17,9529	49,0763	42,4841	10,2578

Tabela A8 – Dados correspondentes ao gráfico da Figura 48.

FATOR M ↓	FREQUÊNCIA REAL $f(py)$ (Hz)			
	CASO			
	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0	1,3763	0,8702	0,7151	0,6593
2	1,2470	0,7789	0,6581	0,6109
4	1,1484	0,7114	0,6128	0,5718
6	1,0700	0,6588	0,5758	0,5393
8	1,0057	0,6164	0,5448	0,5119
10	0,9518	0,5813	0,5183	0,4882
20	0,7715	0,4663	0,4268	0,4052
30	0,6657	0,4004	0,3712	0,3539
40	0,5941	0,3563	0,3329	0,3181
50	0,5416	0,3241	0,3044	0,2914
60	0,5009	0,2994	0,2822	0,2705

Tabela A9 – Dados correspondentes ao gráfico da Figura 49.

FATOR M ↓	DIFERENÇA $f(py)$ E $QRI$ [%]			
	CASO			
	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0	2,1052	3,1342	11,0550	32,3624
2	2,7993	4,5973	14,8474	42,3755
4	3,6092	6,3605	19,1355	53,2913
6	4,5310	8,4105	23,8653	64,9721
8	5,5773	10,7368	28,9884	77,3020
10	6,7310	13,3197	34,4533	90,1886
20	14,1446	29,5242	65,5909	160,5518
30	23,9228	49,7962	100,6354	236,7553
40	35,5465	72,6518	137,5598	315,0954
50	48,5847	97,1352	175,2800	392,7401
60	62,6763	122,6268	213,1795	467,3624

Tabela A10 – Tabela correspondente à Figura 50.

FATOR M ↓	FREQUÊNCIA REAL $f(py2)$ (Hz) <sup>3</sup>			
	CASO			
	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0	1,2892	0,6426	-0,2702	-0,5913
2	1,1524	0,5153	-0,3922	-0,6517
4	1,0466	0,4080	-0,4641	-0,6962
6	0,9612	0,3085	-0,5142	-0,7313
8	0,8902	0,2029	-0,5522	-0,7603
10	0,8296	-0,0348	-0,5826	-0,7852
20	0,6177	-0,3554	-0,6797	-0,8760
30	0,4807	-0,4365	-0,7382	-0,9408
40	0,3762	-0,4818	-0,7806	-0,9921
50	0,2862	-0,5127	-0,8135	-1,0341
60	0,1746	-0,5364	-0,8399	-1,0688

Tabela A11 – Diferenças entre a frequência real e a frequência real com NLG.

FATOR M ↓	DIFERENÇA $f(py)$ E $f(py2)$ [%] <sup>3</sup>			
	CASO			
	8 pavimentos	12 pavimentos	20 pavimentos	30 pavimentos
0	-6,3243	-26,1559	-137,7939	-189,6888
2	-7,5860	-33,8435	-159,5979	-206,6776
4	-8,8670	-42,6425	-175,7176	-221,7633
6	-10,1683	-53,1777	-189,2940	-235,5980
8	-11,4908	-67,0783	-201,3594	-248,5443
10	-12,8355	-105,9816	-212,4048	-260,8265
20	-19,9320	-176,2062	-259,2396	-316,1948
30	-27,7878	-209,0130	-298,8407	-365,8465
40	-36,6867	-235,2170	-334,4568	-411,8635
50	-47,1548	-258,1778	-367,1929	-454,8586
60	-65,1356	-279,1658	-397,5914	-495,1720

<sup>3</sup> Não existe frequência real negativa. Valores tomados apenas como referência para estabelecer as diferenças entre primeira e segunda ordens.

## **2 ALGORITMO PARA O CÁLCULO DO QUOCIENTE DE RAYLEIGH**

# Efeito de segunda ordem na frequência fundamental de pórticos planos

```
In [ ]: #Importando módulos
import numpy as np
import pandas as pd
import scipy.linalg as sc
```

```
In [ ]: #ALGORITMO UTILIZANDO A FORMULAÇÃO MATRICIAL DE ELEMENTOS FINITOS
#Importando informações extraídas do SAP2000, onde o pórtico foi modelado e analisado

#nº de nós e elementos
nnos=105
nel=188

#Coordenadas
no = np.arange(nnos)
CrdData = pd.read_excel('dados/coordenadas.xlsx',
                        index_col=0,
                        header=1,
                        usecols=['Joint', 'GlobalX', 'GlobalZ'])

coord = ['GlobalX', 'GlobalZ']
nod=no+1
NOS=nod.astype(str)
coord_nos=CrdData.loc[NOS, coord]
crddat = np.transpose(coord_nos.to_numpy())
#print(crddat)
#Coordenadas x e y (em metros)
xx = crddat[0]
yy = crddat[1]

#Deslocamentos do SAP2000
DslData = pd.read_excel('dados/deslocamentos-modal.xlsx', #<<<<%%%%%%%%%%
                        index_col=0,
                        header=1,
                        usecols=['Joint', 'U1', 'U3', 'R2'])
                        #nrows=3)
XYZ=['U1', 'U3', 'R2'] #deslocamentos horizontal X, vertical Y e rotação Z
datt = DslData.loc[NOS, XYZ]
dat = datt.to_numpy() #converter um arquivo de dados em um array
dat[:,2]=-abs(dat[:,2])

#Conectividades do SAP2000
CntData = pd.read_excel('dados/conectividade.xlsx',
                        index_col=0,
                        header=1,
                        usecols=['Frame', 'JointI', 'JointJ'])

ff=np.arange(nel)+1
Frame = ff.astype(str)
cnct= ['JointI', 'JointJ']
cnt_nos=CntData.loc[Frame, cnct] #Nº da barra; Nó i; Nó j; Comprimento (m)
cntdat = cnt_nos.to_numpy() #converte os dados em um array de strings
cct=np.transpose([list(map(int, a)) for a in cntdat]) #somente transformar em número
# o padrão é string.
```

```

#print(cct)

#Propriedades Mecânicas do(s) Material(is)
PropMec = pd.read_excel('dados/propmec.xlsx',
                        index_col=0,
                        header=1,
                        usecols=['Material','UnitWeight','UnitMass','E1'])
matl = ['C35-P','C35-V','C40-P','C40-V','C45-P','C45-V'] #inserir os nomes dos materiais
matprop = ['UnitWeight','UnitMass','E1'] #kN/m3 ; tonf/m3; kPa
ppmec = PropMec.loc[matl, matprop]
propmec=ppmec.to_numpy()
#print(propmec)

#Propriedades Geométricas das Seções
nscs = 9 #quantidade de tipos de seções
PropGeom = pd.read_excel('dados/propgeom.xlsx',
                        index_col=0,
                        header=1,
                        usecols=['SectionName','Material','t3','t2','Area','I33','I22'])
sct = np.arange(nscs)+1
scsname = sct.astype(str)
scsatt = ['Material','t3','t2','Area','I33','I22']
ppgeom=PropGeom.loc[scsname, scsatt]
propgeom=ppgeom.to_numpy()
#print(propgeom)

#Seções utilizadas (nomear no SAP2000 de modo sequencial os n tipos, Ex.: "1","2",...)
ScsData = pd.read_excel('dados/secoes.xlsx',
                        index_col=0,
                        header=1,
                        usecols=['Frame','AnalSect'])
scstype = ['AnalSect']
scsdt = ScsData.loc[Frame,scstype] #Nº da barra; Tipo de Seção Atribuída
scsdatastr=scsdt.to_numpy()
scsdata=scsdatastr.astype(int)
#print(scsdata)

#Esforços do SAP2000
Axldata = pd.read_excel('dados/axial-modal.xlsx', #<<<<%%%%%%%%%% Alterar
                        index_col=0,
                        header=1,
                        usecols=['Frame','P'])
#nrows=3)
P_el = ['P']
axldatt = Axldata.loc[Frame, P_el]
axldat = 1000*axldatt.to_numpy()
#print(axldat) #fazer pela média

```

```

In [ ]: #Propriedades geométricas e mecânicas das seções

propgeomec=np.eye(nscs, 8)
prop_0=np.zeros((nscs,9)).astype(object)
for st in range(nscs):
    for mt in range(len(matl)):
        if matl[mt] in propgeom[st,0]:
            prop_0[st] = np.append(propmec[mt], propgeom[st])
            propgeomec[st]=np.delete(prop_0[st],3)
#print(propgeomec)
#propgeomec = np.array([[peso espec. kN/m3, rho_m tonf/m3, E1 kPa, t3 m, t2 m, Área I33 cm4, Área I22 cm4,
#                          peso espec. kN/m3, rho_m tonf/m3, E1 kPa, t3 m, t2 m, Área I33 cm4, Área I22 cm4,

```

```
In [ ]: #Cargas Permanentes nas Vigas como 30% de Massa Adicional
mm = 0
propgeomec[0,1]+=mm*0.3*propgeomec[0,1]
propgeomec[1,1]+=mm*0.3*propgeomec[1,1]
propgeomec[2,1]+=mm*0.3*propgeomec[2,1] #parâmetro pode ser desligado para validar
# não executar célula mais de uma vez sem reiniciar o kernel
# multiplicadores mm = 2, 4, 6, 8, 10, 20, 30, 40, 50, 60
```

```
In [ ]: print(propgeomec)
```

```
In [ ]: #Elementos: tipo de seção e respectivos nós -- conectividades
```

```
#conec = [nº do elem. tipo da seção nó_1 nó_2]
FF = ff.reshape(nel,1)
CONNECT = np.array([FF,
                    scsdata,
                    cct[0].reshape(nel,1),
                    cct[1].reshape(nel,1)])
conec = CONNECT.reshape(4,nel).T
#print(conec)
conct=(np.array([(conec[:, 2]),(conec[:,3])])).T
#print(conct) #somente as conectividades
```

```
In [ ]: #Condições de contorno
```

```
# GDL Livre = 0
# GDL restringido = 1

#print(dat) #dat são os deslocamentos obtidos do SAP2000
cond=np.zeros((3*nnos))
dat_aux=[] #guarda os deslocamentos globais em um array em linha
for i in range(nnos):
    dat_aux=np.concatenate((dat_aux, dat[i,:]), axis=None)
for i in range(3*nnos):
    if dat_aux[i]==0:
        cond[i]=1
#print(dat_aux)
#print(cond)

z=[] #guarda as posições dos graus de liberdade restringidos
for i in range (3*nnos):
    if cond[i]==1:
        z=np.concatenate((z,i), axis=None)
z=np.uint32(z)
#print(z)
```

```
In [ ]: #Deslocamentos dos graus de liberdade não restringidos
```

```
dat_aux=np.delete(dat_aux, np.where(dat_aux == 0))
#print(dat_aux)
```

```
In [ ]: #Matriz de rotação das coordenadas locais para globais
```

```
R = np.zeros((nel, 6, 6))
no1 = np.empty(shape=nel, dtype=np.int32)
no2 = np.empty(shape=nel, dtype=np.int32)
L = np.empty(shape=nel, dtype=np.float64)
ss = np.empty(shape=nel, dtype=np.float64)
cc = np.empty(shape=nel, dtype=np.float64)

for e1 in range(nel):
    no1[e1]=conec[e1, 2]-1
```



```

no2[el]=conec[el,3]-1
L[el]=np.sqrt(((xx[no2[el]]-xx[no1[el]])**2)+((yy[no2[el]]-yy[no1[el]])**2))
cc[el] = (xx[no2[el]]-xx[no1[el]])/L[el] #cosseno diretor da barra
ss[el] = (yy[no2[el]]-yy[no1[el]])/L[el] #seno diretor da barra
R[el,0,0]=cc[el]
R[el,0,1]=ss[el]
R[el,1,0]=-ss[el]
R[el,1,1]=cc[el]
R[el,2,2]=1
R[el,3,3]=cc[el]
R[el,3,4]=ss[el]
R[el,4,3]=-ss[el]
R[el,4,4]=cc[el]
R[el,5,5]=1
#print(R)

```

In [ ]: *#Matrizes de rigidez dos elementos no sistema Local*

```

A = np.empty(shape=nel)
E = np.empty(shape=nel)
Iz = np.empty(shape=nel)

kij=np.zeros((nel, 6, 6))
for el in range(0,nel):
    A[el]=propgeomec[conec[el,1]-1,5]
    E[el] = 1000*propgeomec[(conec[el,1]-1),2] #em Pa
    Iz[el] = propgeomec[(conec[el,1]-1),6]
    kij[el,0,0]=(E[el]*A[el])/L[el]
    kij[el,1,1]=(12*E[el]*Iz[el])/L[el]**3
    kij[el,1,2]=(6*E[el]*Iz[el])/L[el]**2
    kij[el,2,1]=(6*E[el]*Iz[el])/L[el]**2
    kij[el,2,2]=(4*E[el]*Iz[el])/L[el]
    kij[el,0,3]=-(E[el]*A[el])/L[el]
    kij[el,1,4]=-(12*E[el]*Iz[el])/L[el]**3
    kij[el,1,5]=(6*E[el]*Iz[el])/L[el]**2
    kij[el,2,4]=-(6*E[el]*Iz[el])/L[el]**2
    kij[el,2,5]=(2*E[el]*Iz[el])/L[el]
    kij[el,3,0]=-(E[el]*A[el])/L[el]
    kij[el,4,1]=-(12*E[el]*Iz[el])/L[el]**3
    kij[el,4,2]=-(6*E[el]*Iz[el])/L[el]**2
    kij[el,5,1]=(6*E[el]*Iz[el])/L[el]**2
    kij[el,5,2]=(2*E[el]*Iz[el])/L[el]
    kij[el,3,3]=(E[el]*A[el])/L[el]
    kij[el,4,4]=(12*E[el]*Iz[el])/L[el]**3
    kij[el,4,5]=-(6*E[el]*Iz[el])/L[el]**2
    kij[el,5,4]=-(6*E[el]*Iz[el])/L[el]**2
    kij[el,5,5]=(4*E[el]*Iz[el])/L[el]
#print(kij)

```

In [ ]: *#Matrizes de rigidez dos elementos no sistema Global*

```

Kij=np.zeros((nel,6,6))
for el in range(0,nel):
    Kij[el]=np.matmul(np.matmul(R[el].T,kij[el]),R[el])
#print(Kij)

```

In [ ]: *#Matriz de rigidez global da estrutura*

```

KG=np.zeros((3*nnos,3*nnos))
for el in range(nel):
    for j in range(2):
        for k in range(3):
            kgel1=3*conct[el,j]-3+k

```

```

        for l in range(2):
            for m in range(3):
                kgel2=3*conct[el,l]-3+m
                KG[kgel1,kgel2]=KG[kgel1,kgel2]+Kij[el,((3*j)+k),(3*1)+(m)]
#print(KG.shape)

```

In [ ]: *#Matriz de rigidez efetiva global da estrutura -- sem os termos respectivos aos GDL*

```

KGee=np.delete(KG, z, 0)
KGe=np.delete(KGee, z, 1)
print(KGe.shape)

```

In [ ]: *#Matriz de rigidez geométrica dos elementos no sistema Local*

```

gij = np.zeros((nel, 6, 6))
for el in range(nel):
    #gij[el,0,0]=(axldat[el]/L[el])
    #gij[el,0,3]=-(axldat[el]/L[el])
    gij[el,1,1]=(axldat[el]/L[el])*1.2
    gij[el,1,2]=(axldat[el]/L[el])*0.1*L[el]
    gij[el,1,4]=-(axldat[el]/L[el])*1.2
    gij[el,1,5]=(axldat[el]/L[el])*0.1*L[el]
    gij[el,2,2]=(axldat[el]/L[el])*((2*L[el]**2)/15)
    gij[el,2,4]=-(axldat[el]/L[el])*0.1*L[el]
    gij[el,2,5]=-(axldat[el]/L[el])*((L[el]**2)/30)
    #gij[el,3,0]=-(axldat[el]/L[el])
    #gij[el,3,3]=(axldat[el]/L[el])
    gij[el,4,4]=(axldat[el]/L[el])*1.2
    gij[el,4,5]=-(axldat[el]/L[el])*0.1*L[el]
    gij[el,5,5]=(axldat[el]/L[el])*((2*L[el]**2)/15)
#print(gij)

```

In [ ]: *#Matriz de rigidez geométrica dos elementos no sistema global*

```

Gij=np.zeros((nel,6,6))
for el in range(0,nel):
    Gij[el]=np.matmul(np.matmul(R[el].T,gij[el]),R[el])
#print(Gij)

```

In [ ]: *#Matriz de rigidez geométrica global da estrutura*

```

GG=np.zeros((3*nnos,3*nnos))
for el in range(nel):
    for j in range(2):
        for k in range(3):
            ggel1=3*conct[el,j]-3+k
            for l in range(2):
                for m in range(3):
                    ggel2=3*conct[el,l]-3+m
                    GG[ggel1,ggel2]=GG[ggel1,ggel2]+Gij[el,((3*j)+k),(3*1)+(m)]
#print(GG)

```

In [ ]: *#Matriz de rigidez geométrica efetiva global da estrutura -- sem os termos respecti*

```

GGee=np.delete(GG, z, 0)
GGe=np.delete(GGee, z, 1)
print(GGe.shape)

```

In [ ]: *#Matriz de massa consistente dos elementos no sistema Local*

```

mij = np.zeros((nel, 6, 6))
rho = np.empty(shape=nel)

```

```

for el in range(nel):
    rho[el]=1000*propgeomec[conec[el,1]-1,1] #massa em kg
    mij[el,0,0]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*140
    mij[el,0,3]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*70
    mij[el,1,1]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*156
    mij[el,1,2]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*(22*L[el])
    mij[el,1,4]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*54
    mij[el,1,5]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*(-13*L[el])
    mij[el,2,1]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*(22*L[el])
    mij[el,2,2]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*(4*L[el]**2)
    mij[el,2,4]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*(13*L[el])
    mij[el,2,5]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*(-3*L[el]**2)
    mij[el,3,0]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*70
    mij[el,3,3]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*140
    mij[el,4,1]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*54
    mij[el,4,2]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*(13*L[el])
    mij[el,4,4]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*156
    mij[el,4,5]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*(-22*L[el])
    mij[el,5,1]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*(-13*L[el])
    mij[el,5,2]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*(-3*L[el]**2)
    mij[el,5,4]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*(-22*L[el])
    mij[el,5,5]=((rho[el]*A[el]*L[el])/420)*(4*L[el]**2)

```

In [ ]: *#Matriz de massa consistente dos elementos no sistema global*

```

Mij=np.zeros((nel,6,6))
for el in range(0,nel):
    Mij[el]=np.matmul(np.matmul(R[el].T,mij[el]),R[el])
#print(Mij)

```

In [ ]: *#Matriz de massa consistente global da estrutura*

```

MG=np.zeros((3*nnos,3*nnos))
for el in range(nel):
    for j in range(2):
        for k in range(3):
            mgel1=3*conct[el,j]-3+k
            for l in range(2):
                for m in range(3):
                    mgel2=3*conct[el,l]-3+m
                    MG[mgel1,mgel2]=MG[mgel1,mgel2]+Mij[el,((3*j)+k),(3*l)+(m)]
#print(MG)

```

In [ ]: *#Matriz de massa consistente efetiva global da estrutura -- sem os termos respecti*

```

MGee=np.delete(MG, z, 0)
MGe=np.delete(MGee, z, 1)
print(MGe.shape)

```

In [ ]: *#Formas modais e frequências naturais da estrutura -- problema de autovalores e aut*

```

#-----
def vibration_modes(K, M):
    #Solução do problema de autovalores e autovetores
    w2, Phi = sc.eig(K, M)
    #Colocando os termos em ordem ascendente
    iw = w2.argsort()
    w2 = w2[iw]
    Phi = Phi[:,iw]

    #Autovalores e frequências
    wk = np.sqrt(np.real(w2))

```

```

fk = wk/2/np.pi
return fk, wk, Phi, w2
#-----
fG, wkG, phiG, w2G = vibration_modes(KGe, MGe)
print(fG[0])
#print(phiG[:,0:1])
#print(dat_aux)
#print((dat_aux/phiG[:,0]).reshape(300,1))

```

```

In [ ]: V2=KGe+GGe
fGm, wkGm, phiGm, w2Gm = vibration_modes(V2, MGe)
print(wkGm[0])
print(fGm[0])
print((abs(w2Gm[0])**0.5)/(2*np.pi))

```

```

In [ ]: #Quociente de Rayleigh a partir dos deslocamentos da estrutura -- 1ª ordem

f_ray1 = (np.matmul(np.matmul(dat_aux.T, KGe), dat_aux))/(np.matmul(np.matmul(dat_aux
QR1 = (f_ray1**0.5)/(2*np.pi)
print(QR1)

```

```

In [ ]: #Quociente de Rayleigh a partir dos deslocamentos da estrutura, com a matriz de rig

f_ray2 = (np.matmul(np.matmul(dat_aux.T, V2), dat_aux))/(np.matmul(np.matmul(dat_aux
QR2=(f_ray2**0.5)/(2*np.pi)
print(QR2)
#print(f_ray2)
QR2m=(abs(f_ray2)**0.5)/(2*np.pi)
print(QR2m)

```

```

In [ ]: diff=(100*(QR1-QR2))/QR1
print(diff)

```

```

In [ ]: #Separar os deslocamentos do autovetor por direção

dxp=phiG[:,0]
N=int(len(dxp)/3)
ux=np.zeros(N)
uy=np.zeros(N)
rr=np.zeros(N)
for i in range(N):
    ux[i]=dxp[3*i]
    uy[i]=dxp[(3*i)+1]
    rr[i]=dxp[(3*i)+2]
print(ux)
print(uy)
print(rr)
uxnos=np.zeros(20)
print(ux.shape)
for i in range(20):
    uxnos[i]=ux[(5*i)]
print(uxnos.reshape(20,1))

```

```

In [ ]:

```