

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Recuo Gravitacional na Fusão de Buracos Negros em Centros Galácticos: O Caso de NGC 5236*

Guilherme Gonçalves Ferrari

Dissertação realizada sob orientação do Professor Dr. Horácio Alberto Dottori e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre

Maior, 2010

*Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Ao meu pai Julival (*in memoriam*)

À minha mãe Graça

Aos meus irmãos Gustavo e George

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha Mãe. Sem o seu apoio nada disso seria possível.

Ao professor Horácio Dottori pela orientação, amizade e todas as oportunidades que tem proporcionado para o meu crescimento profissional. Não posso deixar de agradecer-lhe também pela sua ajuda quando precisei fazer a mudança de apartamento.

Ao colega Tarcísio Nunes Teles, pela amizade e por ter facilitado a minha chegada e o primeiro ano de estadia em Porto Alegre.

À professora Márcia Barbosa por ter garantido a minha vaga na PG enquanto eu terminava a graduação na UEMS.

Ao meu ex-orientador Rainer Madejsky e meus ex-professores de graduação, por oferecerem o nível de formação necessário para encarar este desafio.

Aos professores do Instituto de Física da UFRGS, em particular a Alba e o Ziebell.

Aos professores e colegas da Astronomia, em particular Tibério, José Andrés, Ângelo, Rogério, Rodrigo.

Ao Centro Nacional de Supercomputação (CESUP-UFRGS) pela disponibilidade de recursos computacionais.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Guilherme Gonçalves Ferrari

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Maio 2010

Resumo

A crescente evidência de que a maior parte das galáxias hospedam buracos negros supermassivos (SMBHs) em seu centro e a aceitação geral de um paradigma hierárquico de formação galáctica indica que galáxias e SMBHs devem ter evoluído concorrentemente. Este cenário tem levado a uma intensa busca por subprodutos desta evolução, entre eles o recuo gravitacional, um fenômeno que ocorre durante a fusão de SMBHs, e que pode gerar uma explosão observável de ondas gravitacionais, com a subsequente expulsão de um dos SMBHs do centro galáctico. Um dos candidatos mais interessantes apresentando a “assinatura” de um recuo gravitacional é o rádio-quasar J133658.3-295105, um objeto à distância de NGC 5236 que aparece projetado sobre o corpo desta galáxia em um sugestivo alinhamento com outras fontes de rádio e o núcleo óptico da galáxia, que também aparece deslocado em relação ao centro cinemático de NGC 5236.

Neste trabalho nós estudamos as circunstâncias no qual o rádio-quasar teria sido ejetado da região central de NGC 5236. Nós analisamos diferentes tipos de colisões de SMBHs binários e triplos por meio de simulações numéricas usando uma aproximação Pós-Newtoniana de ordem $7/2$ ($\sim 1/c^7$). Para isso, nós desenvolvemos um código de N-corpos especialmente construído para integrar numericamente as equações de movimento Pós-Newtonianas. Experimentos numéricos demonstram que o código é robusto o suficiente para tratar praticamente qualquer razão de massas entre partículas.

Nós mostramos que, dentro da atual aproximação Pós-Newtoniana, o cenário com três SMBHs é o mais adequado para explicar a ejeção de J133658.3-295105 e, simultaneamente, provocar o deslocamento do núcleo óptico de NGC 5236. Nossos modelos mostram que o deslocamento do núcleo óptico pode estender-se por uma distância radial de $\sim 30 - 200$ pc sobre uma escala de tempo de $\sim 2 \times 10^7$ anos, em razoável acordo com o valor observado em NGC 5236 (~ 60 pc). Nós mostramos também que o deslocamento do núcleo óptico só pode ser explicado em um cenário de recuo gravitacional se a velocidade de recuo do SMBH for até cerca de ~ 1.5 vezes a dispersão de velocidades das estrelas no centro da galáxia.

Os diferentes conjuntos de simulações permite-nos ainda distinguir entre dois tipos de recuo gravitacional em sistemas com SMBHs triplos, o primeiro ocorrendo por uma troca energética entre um dos SMBHs e a binária recém formada durante interação com os outros dois SMBHs, e o segundo ocorrendo por consequência da emissão anisotrópica de ondas gravitacionais durante a coalescência dos SMBHs. Nossas simulações mostram que o primeiro tipo de recuo gravitacional deve ocorrer muito antes que o par de SMBHs mais fortemente ligado possa atingir o regime de radiação. As limitações do nosso modelo, contudo, não permite-nos afirmar qual deles ocorreu em NGC 5236, embora o primeiro seja mais provável.

Abstract

The growing evidence that most galaxies host supermassive black holes (SMBHs) at its center, and general acceptance of a paradigm of hierarchical galaxy formation states that galaxies and SMBHs must have evolved concurrently. This scenario has led to an intense search by-products of this evolution, including the gravitational recoil, a phenomenon that occurs during the merger of SMBHs, which can generate an observable outburst of gravitational waves and the subsequent expulsion of one of the SMBHs of galaxy center. One of the most interesting candidates showing the “signature” of a gravitational recoil is the radio-quasar J133658.3-295105, an object at distance of NGC 5236 that appears projected onto the body of this galaxy in a suggestive alignment with other sources of radio and optical nucleus of galaxy, which also appears displaced from the kinematic center of NGC 5236.

In this work we study the circumstances in which the radio-quasar would have been ejected from the central region of NGC 5236. We analyze different types of collisions of binary and triple SMBHs by numerical simulations using a Post-Newtonian approximation of order $7/2$ ($\sim 1/c^7$). For this, we developed a N-body code specially built for numerically integrate the Post-Newtonian equations of motion. Numerical experiments show that the code is robust enough to handle virtually any mass ratio between particles.

We show that within the current Post-Newtonian approximation, the scenario with three SMBHs is best suited to explain the ejection of J133658.3-295105, while causing the displacement of the optical nucleus of NGC 5236. Our models show that the displacement of the optical nucleus can extend over a radial distance of $\sim 30 - 200$ pc on a timescale of $\sim 2 \times 10^7$ years, in reasonable agreement with the observed value in NGC 5236 (~ 60 pc). We also show that the displacement of the optical nucleus can only be explained in a scenario of gravitational recoil if the velocity of recoil of the SMBH is up to about ~ 1.5 times the velocity dispersion of stars in the galactic center.

The different sets of simulations allows us to distinguish between two types of gravitational recoil on systems with SMBHs triple, the first occurring by an energy exchange between one of the SMBHs and the newly formed binary during interaction with the other two SMBHs, and the second occurring as a consequence the anisotropic emission of gravitational waves during the coalescence of SMBHs. Our simulations show that the first type of gravitational recoil should occur long before the pair of SMBHs more tightly bound to achieve the regime of radiation. The limitations of our model, however, does not allow us to say which of them occurred in NGC 5236, although the former is more likely.

Sumário

Agradecimentos	ii
Sumário	v
Lista de Tabelas	vii
Lista de Figuras	viii
Lista de Abreviaturas	xi
1 Introdução	1
1.1 Recuo Gravitacional em NGC 5236?	2
1.2 Objetivos e Organização do Trabalho	6
2 Métodos Numéricos	7
2.1 Conceitos Básicos	10
2.2 Métodos de Integração Simplética	13
2.3 Regularização Algoritmica das Equações de Movimento	18
2.4 Correções Relativísticas via Expansões Pós-Newtonianas	21
2.5 Incorporando Termos Pós-Newtonianos ao Integrador	25
3 Modelando o Recuo Gravitacional em NGC 5236	30
3.1 Experimentos Numéricos	30
3.1.1 O Problema de Kepler	31
3.1.2 O Problema de Kepler com Correções Pós-Newtonianas	33
3.1.3 Testes com Sistemas de N-Corpos	35
3.2 Estudando o Recuo Gravitacional com SMBHs Isolados	36
3.2.1 SMBHs Binários	38
3.2.2 SMBHs Triplos	41
3.3 Simulações de N-corpos com SMBHs	47
4 Conclusão	55

Apêndice A Equações Pós-Newtonianas	57
Apêndice B Implementação dos Termos Pós-Newtonianos	61
Referências	66

Lista de Tabelas

3.1	Colunas: 1) tipo de sistema; 2) denominação do modelo (números referem-se a razão de massas); 3) unidade de massa; 4) unidade de comprimento; 5) velocidade da luz dividida pela unidade de velocidade (definida pela escolha de $[M]$ e $[L]$).	43
3.2	Colunas: 1) denominação do modelo (modelos com sufixo “a” ou “b” diferem apenas pela sequência de números aleatórios usada em sua construção); 2) número total de partículas (estrelas + SMBHs); 3) razão entre massa total em SMBHs e massa total do aglomerado (estrelas + SMBHs); 4) unidade de massa; 5) unidade de comprimento; 6) velocidade da luz dividida pela unidade de velocidade (definida pela escolha de $[M]$ e $[L]$).	48
3.3	Velocidades no momento da ejeção de um dos SMBHs para os diferentes modelos, dadas em km/s e em unidades da dispersão de velocidades inicial do aglomerado, σ_0 . Os valores são apresentados na forma “X(Y)”, onde “X” corresponde à binária e “Y” ao SMBH expulso da região central.	53

Lista de Figuras

- 1.1 O grupo de Hydra-Centaurus é grosseiramente dividido em dois sub-grupos. O painel a esquerda mostra o sub-grupo de NGC 5236, distante de 4.56 Mpc. No painel a direita temos o sub-grupo de NGC 5128, distante de 3.94 Mpc. 3
- 1.2 Região central de NGC 5236; contornos mostram o mapa de emissão de CO. O núcleo óptico (ON) é visto como um pico laranja, enquanto o centro cinemático (KC) é marcado com o sinal “+”. A pequena galáxia canibalizada, obscurecida pela poeira, aparece como um núcleo oculto (HN) próximo do pico mais intenso de emissão CO. Note a elipse parcial descrevendo o arco de intensa formação estelar, provavelmente uma cauda de maré da galáxia canibalizada. Figura adaptada de Sakamoto et al. (2004). 4
- 1.3 A imagem mostra o alinhamento de J133658.3-295105 (RS 28/XS 39) e seus rádio-lóbulos, RS 27 e RS 29, com outras fontes de rádio e o núcleo óptico de NGC 5236. Fontes de raios-X são mostradas na cor magenta, emissão H_α em verde e emissão rádio em 6 cm em vermelho. A estrutura completa cobre $\sim 100''$ (2 kpc) sobre o céu. Nenhuma destas rádio-fontes são remanescentes de super-novas nem parecem estar associadas a regiões HII (Maddox et al., 2006). Figura retirada de Dottori et al. (2010). 5
- 3.1 Comparação do nível de conservação da energia, pelo método simplético $\mathcal{S}_2(\tau)$ (painel esquerdo) e pelo método (não-simplético) de Runge-Kutta (painel direito), durante a integração de uma binária Kepleriana ($e = 0.9$) por $T = 1000$ períodos orbitais (P). Em ambos os casos, $\tau = cte$. O erro local (em vermelho) refere-se ao valor instantâneo de $\frac{\Delta E}{U}(t)$, enquanto o erro global (em azul) refere-se a média instantânea $\langle \frac{\Delta E}{U}(t) \rangle = \frac{\tau}{t} \sum_{s=0}^t \frac{\Delta E}{U}(s)$. Note, neste exemplo particular, que o método de Runge-Kutta falha desastrosamente. 31
- 3.2 Nível de conservação da energia para o método \mathcal{S}_2 com passos de tempo variáveis. O painel a esquerda mostra o resultado da imposição de um critério *ad-hoc* e o painel a direita mostra o resultado após o procedimento de simetrização (2.34). 32

3.3	O painel a esquerda mostra o nível de conservação da energia na integração da binária Kepleriana pelo método de regularização algorítmica, Eq.'s (2.41)-(2.47). O painel a direita (retirado de Mikkola (2008)) ilustra como o método trabalha na prática, para uma órbita elíptica sobre o plano XY.	33
3.4	O painel a esquerda mostra o nível de conservação da energia para uma binária Kepleriana ($e = 0.9$) integrada na presença de termos PNs conservativos. No painel a direita nós apresentamos somente as primeiras ≈ 10 revoluções para ilustrar a precessão orbital.	33
3.5	O painel a esquerda mostra a evolução orbital de nossa binária PN. Aqui nós mostramos somente a fase final do espiralamento orbital pela emissão de radiação gravitacional. Para comparação, o painel a direita (retirado de Boyle et al. (2007)) mostra a evolução de um sistema similar usando relatividade numérica.	34
3.6	O painel à esquerda mostra a separação orbital de uma binária PN em espiralamento circular. O painel à direita destaca o momento em que a aproximação PN perde a validade, comparado ao comportamento esperado da Relatividade Geral. O sinal “+” representa uma separação equivalente a $3R_{Sch}$ e corresponde ao momento que a simulação da Fig. 3.5 foi interrompida.	35
3.7	O painel a esquerda mostra o erro na energia total para um sistema com $N = 1024$ partículas distribuídas em um perfil de Plummer. A direita temos o raio virial mostrando que o equilíbrio dinâmico inicial é aproximadamente mantido por nosso método.	36
3.8	O painel a esquerda (retirado de Hughes et al. (2005)) ilustra como o recuo gravitacional aparece como consequência do campo de radiação gerado por uma binária assimétrica. O painel a direita (retirado de Campanelli (2005)) mostra a velocidade de recuo como função da razão de massas, para partículas sem spin.	37
3.9	Os painéis superiores mostram a evolução orbital de SMBHs binários em órbitas circulares ($e = 0$, esquerda) e excêntricas ($e = 0.9$, direita), partindo de condições iniciais em regime relativístico. Trajetória em vermelho (verde) corresponde ao SMBH com massa m_1 (m_2). Os painéis inferiores destacam a região central onde pode-se ver a trajetória do centro de massa (mostrado em azul) durante o recuo gravitacional.	39
3.10	Painéis superiores: evolução temporal da separação orbital para SMBHs binários com excentricidade $e = 0$ (esquerda) e $e = 0.9$ (direita). Painéis inferiores: evolução do recuo do centro de massa vista no plano posição \times velocidade para os casos $e = 0$ (esquerda) e $e = 0.9$ (direita).	40

3.11	Painel superior: condições iniciais para 3 corpos descrevendo uma órbita em forma de oito: $m_1 = m_2 = m_3 = 1$; $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2 = 0.97000436\hat{x} - 0.24308753\hat{y}$, $\mathbf{r}_3 = 0$; $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2 = -2\mathbf{v}_3 = -0.93240737\hat{x} - 0.86473146\hat{y}$. Paineis inferiores: esquerda: condições iniciais para o problema Pitagórico (velocidades iniciais são nulas); direita: solução numérica no caso puramente Newtoniano.	42
3.12	Painel esquerdo: evolução orbital durante $\sim 1.05 \times 10^{10}$ anos para o modelo M111a. Painel direito: evolução orbital para o modelo M111b, onde a fusão dos SMBHs ocorre em ~ 44.4 anos.	43
3.13	Evolução orbital para o modelo M345a. A simulação tem duração de $\sim 5.27 \times 10^5$ anos. A fase final da coalescência do par de SMBHs mais massivos é destacada no painel a direita, onde tempo de coalescência foi de 7.38×10^4 anos, contado desde o momento de sua formação.	44
3.14	Evolução orbital para o modelo M345b. A simulação tem duração de ~ 2646 anos. A fase final da coalescência do par de SMBHs mais massivos é destacada no painel a direita, onde tempo de coalescência foi de ~ 7.1 anos, contado desde o momento de sua formação.	45
3.15	Os painéis mostram uma sequência temporal para a simulação do modelo M345-8k-25. O tempo aumenta da esquerda para direita e de cima para baixo. Cada painel tem comprimento lateral de 250 pc. A seta verde indica a posição do SMBH ejetado para três instantes da simulação.	49
3.16	Paineis mostram a posição radial de cada SMBH (coluna esquerda) e a posição relativa de cada par de SMBHs (coluna direita) durante a simulação para os diferentes modelos M111.	50
3.17	O mesmo que a Fig. 3.16, mas para os modelos M345.	51

Lista de Abreviaturas

c velocidade da luz $\approx 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

G constante gravitacional $\approx 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

M_{\odot} uma massa solar $\approx 1.988 \times 10^{30} \text{ kg}$

NGC *new general catalog*

pc um *parsec* $\approx 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$

PN Pós-Newtoniano(a)

RS *radio source*

R_{Sch} Raio de Schwarzschild

SMBH *supermassive black hole*

XS *x-ray source*

Capítulo 1

Introdução

The universe is still a place of mystery and wonder.

– Martin Rees

Há pelo menos quatro décadas a existência de núcleos ativos de galáxias já tinha sido sugerida como uma evidência da presença de buracos negros supermassivos (doravante SMBHs, acrônimo para *supermassive black holes*) no centro das galáxias (Lynden-Bell, 1969). A questão de como e quando os SMBHs se formaram é, ainda hoje, um tópico de intensa pesquisa. Rees (1984) traça basicamente dois possíveis cenários, partindo de uma nuvem de gás para um SMBH. Um deles conecta os SMBHs aos buracos negros de massa intermediária, remanescentes de sucessivas colisões físicas entre estrelas massivas em aglomerados densos (Ebisuzaki et al., 2001, Portegies Zwart et al., 2004), enquanto a outra possibilidade é que as “sementes” dos SMBHs tenham sido buracos negros de massa muito menor, remanescentes da primeira geração de estrelas (Madau & Rees, 2001, Volonteri & Rees, 2005, Bromm et al., 1999, 2002, 2009).

A despeito de qual caminho a natureza tenha escolhido, sabe-se hoje que essencialmente todas as galáxias hospedam um SMBH em seu centro (Kormendy & Richstone, 1995, Magorrian, 1998). Observações mostram que a massa típica desses objetos, inferida via dinâmica do gás e estrelas dentro de uns poucos *parsecs* centrais, situa-se entre $M_{BH} \sim 10^6 - 10^9 M_{\odot}$ e correlaciona-se fortemente com a massa da componente esferoidal*, M_{spher} , da galáxia hospedeira, sendo a razão $M_{BH}/M_{spher} \sim 0.001 - 0.006$ em cada galáxia (Kormendy & Richstone, 1995, Magorrian, 1998, Ferrarese & Merritt, 2000, McLure & Dunlop, 2002). Além disso, a massa do SMBH correlaciona-se também com a dispersão de velocidades das estrelas do esferoide, σ_{spher} , com $M_{BH} \propto \sigma_{spher}^n$, $n = 3.7 - 5.3$ (Ferrarese & Merritt, 2000, Gebhardt et al., 2000, Merritt & Ferrarese, 2001, Tremaine et al., 2002).

*O termo “esferoide” refere-se ao sistema completo no caso de galáxias elípticas, mas somente ao bojo no caso de galáxias com uma significativa componente discoidal.

Estas relações apontam uma conexão entre a física da formação do esferoide e aquela do crescimento do SMBH (Milosavljević & Merritt, 2001).

Sob o atualmente favorecido paradigma hierárquico de formação galáctica, no qual galáxias maiores são formadas a partir da fusão de galáxias menores (White & Rees, 1978, Springel et al., 2006), a simples correlação entre as propriedades do esferoide e a massa do SMBH central emerge naturalmente (Volonteri et al., 2003a,b, Di Matteo et al., 2005, Robertson et al., 2006). Cada vez que duas galáxias fusionam para formar um sistema maior, seus buracos negros espiralam para o centro da nova galáxia devido a fricção dinâmica e eventualmente coalescem, criando um buraco negro proporcionalmente maior. Este cenário (veja Begelman et al. 1980), contudo, requer um eficiente replechimento do cone de perda[†] do par de SMBHs para que seu decaimento possa persistir como resultado de repetidas ejeções de estrelas, uma questão que tem sido conhecida como o “problema do último *parsec*” (Milosavljević & Merritt, 2003). Não obstante, essa excitante possibilidade tem renovado o interesse na dinâmica e evolução de núcleos galácticos uma vez que o mergulho final dos SMBHs para a coalescência poderia gerar uma explosão observável de ondas gravitacionais (Phinney, 2000, Madau et al., 2009).

Diferentemente do análogo Newtoniano, em Relatividade Geral (RG) o problema de dois corpos é um problema muito rico e complicado, para o qual uma solução analítica não existe. Enquanto técnicas perturbativas tem sido desenvolvidas para lidar com certos estágios do problema, a própria solução numérica do conjunto completo das equações de campo é, por si só, um tema bastante complexo e muito esforço tem sido dispendido pela comunidade para resolver numericamente espaços-tempo genéricos. Nos últimos 5 anos, a relatividade numérica tem passado por uma revolução, tal que agora diversos códigos são capazes de evoluir *estavelmente* o decaimento e até mesmo a completa coalescência de dois buracos negros (Brügmann et al., 2004, Pretorius, 2005, Campanelli et al., 2006a,b, Baker et al., 2006a,b). Como já previsto analiticamente por Peres (1962), Bekenstein (1973), Fitchett (1983), Fitchett & Detweiler (1984), qualquer propriedade de uma órbita resultando na emissão anisotrópica de ondas gravitacionais poderia, via conservação do momentum linear, dar um “chute” no buraco negro remanescente. Um importante resultado astrofísico de tais simulações é que este recuo gravitacional pode atingir velocidades de até 4000 km s^{-1} (Campanelli et al., 2007a,b, Dain et al., 2008), dependendo da razão de massas e da orientação dos spins dos SMBHs relativo ao plano orbital, o que implica que o SMBH resultante poderia facilmente ser ejetado, mesmo nas galáxias mais massivas.

Recuos desta magnitude poderiam levar a uma mensurável população de buracos negros extragalácticos. Isto tem maiores implicações tanto para o crescimento de SMBHs em cenários hierárquicos (Volonteri et al., 2005, Volonteri & Perna, 2005, Libeskind et al.,

[†]O cone de perda é tradicionalmente visualizado como o domínio do espaço de fase no qual o campo das componentes individuais do par de SMBHs é suficientemente intenso para causar a captura ou a ejeção gravitacional de estrelas.

2006, Volonteri, 2007, Berti & Volonteri, 2008, Blecha & Loeb, 2008) quanto para a evolução de “sementes” de SMBHs e buracos negros de massa intermediária (Mouri & Taniguchi, 2002, O’Leary et al., 2006). Não obstante, existe uma intensa busca por buracos negros expulsos do centro das galáxias (Komossa et al., 2008, Bogdanović et al., 2009, Boroson & Lauer, 2009, Dotti et al., 2009, Shields et al., 2009a,b, Vivek et al., 2009). Um dos candidatos mais interessantes é o rádio-quasar J133658.3-295105 (Díaz et al., 2007, Dottori et al., 2008), para o qual nos voltamos agora.

1.1 Recuo Gravitacional em NGC 5236?

A fonte J133658.3-295105 emite raios-X e é também resolvida em rádio, apresentando dois radio-lóbulos (Cowan et al., 1994). Embora não exista uma contraparte óptica associada, J133658.3-295105 tem sido caracterizada como uma rádio-galáxia do tipo Fanaroff-Riley II em *redshift* cosmológico ($z \geq 1$; Soria & Wu (2003), Maddox et al. (2006)) e aparece projetada sobre o corpo da galáxia espiral NGC 5236 (M 83) em cerca de 1–2 kpc do núcleo óptico da galáxia, em um sugestivo alinhamento com outras fontes de rádio. NGC 5236 e NGC 5128 (Cen A), distantes de ~ 4 Mpc ($z \approx 0.0018$)[‡], são as maiores galáxias em uma das regiões mais ativas do universo próximo, o grupo de Hydra-Centaurus. A Figura 1.1 mostra os sub-grupos associados a ambas as galáxias, que demonstram indícios de transformações internas devido a frequentes processos de fusão.

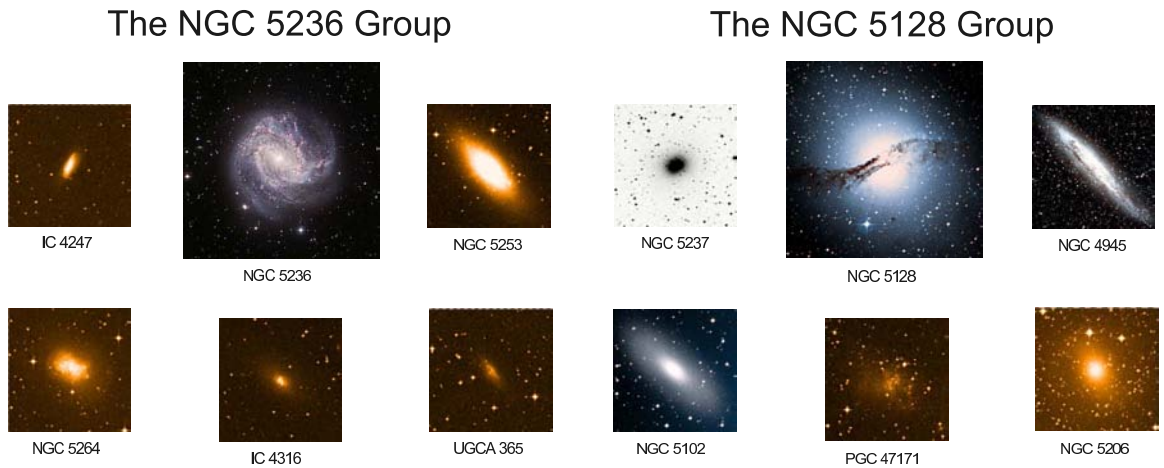


Figura 1.1: O grupo de Hydra-Centaurus é grosseiramente dividido em dois sub-grupos. O painel a esquerda mostra o sub-grupo de NGC 5236, distante de 4.56 Mpc. No painel a direita temos o sub-grupo de NGC 5128, distante de 3.94 Mpc.

NGC 5236 tem sido alvo de vários estudos observacionais. Sua região central tem ganhado uma crescente atenção desde que foi identificada como um dos mais brilhantes e mais

[‡]fonte: <http://nedwww.ipac.caltech.edu/>

próximos complexos de regiões HII gigantes (Arsenault & Roy, 1986), hospedando também sítios de violenta formação estelar surgindo no ambiente rico em gás desta galáxia. Diversos estudos morfológicos e cinemáticos têm demonstrado que a região nuclear de NGC 5236 está sofrendo uma forte evolução dinâmica (Gallais et al., 1991, Elmegreen et al., 1998, Thatte et al., 2000, Sakamoto et al., 2004, Díaz et al., 2006a,b). De fato, como visto na Figura 1.2, o próprio núcleo óptico (ON) de NGC 5236 encontra-se deslocado por $\sim 3''$ (60 pc) com relação ao centro das isofotas externas do bojo, onde Thatte et al. (2000) tem encontrado um centro cinemático (KC). Uma terceira concentração, obscurecida pela poeira, aparece como um núcleo oculto (HN) a $\sim 7''$ (140 pc) do centro cinemático, sendo interpretada como uma pequena galáxia canibalizada (Mast et al., 2006). Ao lado dessas três concentrações existe ainda um arco de regiões HII com intensa formação estelar (Díaz et al., 2006a), que tem sido interpretado como uma cauda de maré desgarrada da galáxia canibalizada. A massa do núcleo óptico tem sido determinada como $\sim 4 \times 10^6 M_{\odot}$ (Elmegreen et al., 1998, Thatte et al., 2000), enquanto o centro cinemático tem $\sim 60 \times 10^6 M_{\odot}$ (Dottori et al., 2007) e a pequena galáxia canibalizada tem $\sim 16 \times 10^6 M_{\odot}$ (Díaz et al., 2006a). Simulações numéricas mostram que as três concentrações e o arco de formação estelar coalescerão dentro de umas poucas centenas de milhões de anos (Rodrigues et al., 2009).

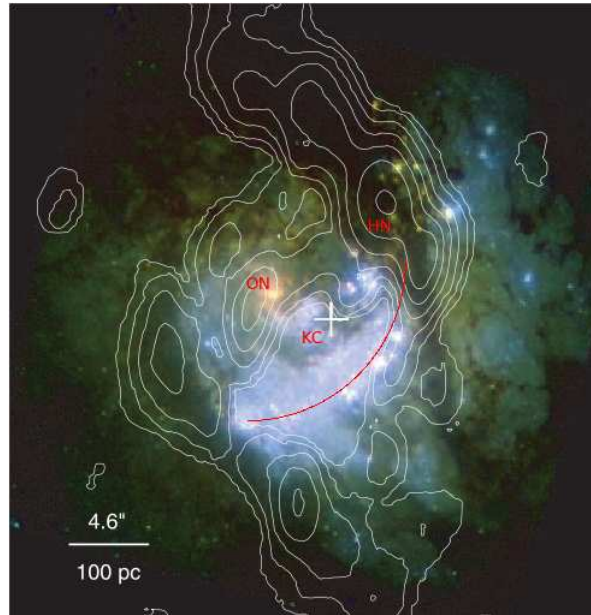


Figura 1.2: Região central de NGC 5236; contornos mostram o mapa de emissão de CO. O núcleo óptico (ON) é visto como um pico laranja, enquanto o centro cinemático (KC) é marcado com o sinal “+”. A pequena galáxia canibalizada, obscurecida pela poeira, aparece como um núcleo oculto (HN) próximo do pico mais intenso de emissão CO. Note a elipse parcial descrevendo o arco de intensa formação estelar, provavelmente uma cauda de maré da galáxia canibalizada. Figura adaptada de Sakamoto et al. (2004).

Além desta riqueza cinemática que aponta a transformação futura dos 300 pc centrais, o curioso alinhamento de J133658.3-295105 com outras fontes de rádio e o núcleo óptico de NGC 5236 parece emergir como um jato da região nuclear (veja a Figura 1.3), como tinha originalmente sido proposto por Cowan et al. (1994). Um possível problema com a interpretação de um jato é que ele não aponta em direção ao verdadeiro núcleo da galáxia, o centro cinemático. Por outro lado, a morfologia geral das fontes RS 27, RS 28 e RS 29 na Figura 1.3 é também sugestiva de uma rádio-galáxia de fundo do tipo Fanaroff-Riley II, com RS 27 e RS 29 sendo os rádio-lóbulos e RS 28 (J133658.3-295105) o caroço central, como proposto por Soria & Wu (2003) e Maddox et al. (2006). Contudo, não existe evidências observacionais contundentes, tal como uma medida da velocidade radial de J133658.3-295105, que dêem suporte ao argumento de Soria & Wu (2003) e Maddox et al. (2006), o que abre a possibilidade para outros cenários.

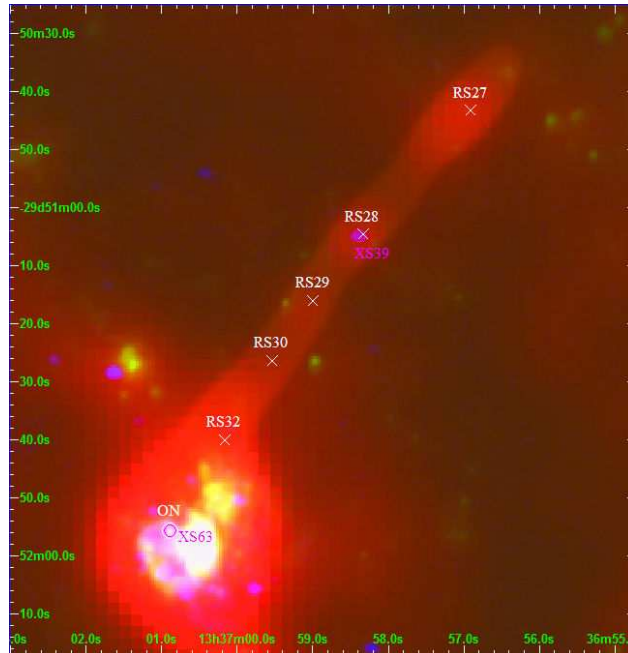


Figura 1.3: A imagem mostra o alinhamento de J133658.3-295105 (RS 28/XS 39) e seus rádio-lóbulos, RS 27 e RS 29, com outras fontes de rádio e o núcleo óptico de NGC 5236. Fontes de raios-X são mostradas na cor magenta, emissão H_{α} em verde e emissão rádio em 6 cm em vermelho. A estrutura completa cobre $\sim 100''$ (2 kpc) sobre o céu. Nenhuma destas rádio-fontes são remanescentes de super-novas nem parecem estar associadas a regiões HII (Maddox et al., 2006). Figura retirada de Dottori et al. (2010).

Por causa da riqueza de fenômenos ocorrendo dentro dos 300 pc centrais de NGC 5236, Dottori et al. (2008) usou a peculiar configuração de radio-fontes para determinar mais precisamente a distância de J133658.3-295105, visando a possibilidade de que este seja um objeto local que foi ejetado do núcleo de NGC 5236 por um recuo gravitacional que ocorreu durante uma fusão prévia. Estes autores têm detectado H_{α} em emissão, embora com um

baixo S/R, com uma velocidade radial no plano da galáxia de $V_r \approx 130 \pm 40 \text{ km s}^{-1}$ com relação ao núcleo óptico de NGC 5236, um resultado que indica que J133658.3-295105 é uma fonte próxima e que está se afastando da galáxia. Mais recentemente, buscando melhor vincular a distância de J133658.3-295105, Dottori et al. (2010) tem reanalisado as observações previamente discutidas por Soria & Wu (2003), mostrando que J133658.3-295105 apresenta uma linha de Fe- K_α em emissão (com S/R entre 1 – 2) em um *redshift* muito mais baixo do que previamente sugerido por Soria & Wu (2003) e Maddox et al. (2006), compatível com a distância de NGC 5236.

Segundo os modelos de Fujita (2008, 2009), a falta de uma componente óptica detectável caracteriza J133658.3-295105, para todos os propósitos práticos, como um buraco negro “nu” ejetado do núcleo, cuja alimentação dependeria da sua velocidade de ejeção bem como da densidade e dispersão de velocidades do meio que ele cruzou durante seu vôo. Além disso, a luminosidade em raios-X de J133658.3-295105 ($L_X \approx 2.1 \pm 0.4 \times 10^{38} \text{ erg s}^{-1}$; Dottori et al. (2010)) indica que ele não está em um ambiente tão denso quanto o disco e que sua massa também não deveria ser muito maior do que $10^6 - 10^7 M_\odot$, embora Dottori et al. (2008) tenha sugerido massas muito menores $\sim 10^3 - 10^4 M_\odot$. Estas observações tem nos dado alguma confiança de que J133658.3-295105 é uma fonte na distância de NGC 5236, provavelmente ejetada de seu núcleo. Neste caso o motor que teria ejetado os rádio-lóbulos RS 27 e RS 29 seria um disco de acreção produzido durante o trânsito de J133658.3-295105 pelo disco galáctico. A razão por que RS 27 e RS 29 estão ao longo da linha aparente do *kick-off*, contudo, permanece obscura.

1.2 Objetivos e Organização do Trabalho

Embora mais observações sejam necessárias para inequivocamente determinar a natureza e distância de J133658.3-295105, a possibilidade de que este seja um SMBH ejetado por um recuo gravitacional do centro de NGC 5236 em uma fusão prévia permanece aberta.

O objetivo deste trabalho é modelar numericamente este fenômeno através de simulações de N-corpos. Tendo em vista a enorme dificuldade de tratar este problema, tanto teórica quanto numericamente, usando a Relatividade Geral, a dissipação de energia orbital devido a emissão de ondas gravitacionais será tratada via expansões pós-Newtonianas, que incorporam correções relativísticas em ordens de $1/c^2$, onde c é a velocidade da luz.

Dentre as questões que a modelagem se propõe a (ao menos qualitativamente) responder estão: (i) Qual a influência das correções pós-Newtonianas sobre a dinâmica dos SMBHs? (ii) Quantos SMBHs deveriam fundir (e com qual razão de massas) para reproduzir o recuo gravitacional observado? (iii) Qual a velocidade de ejeção do SMBH em J133658.3-295105? (iv) Sob quais condições o recuo gravitacional produziria a ruptura de

parte do núcleo galáctico original, que viria a formar o núcleo óptico atualmente deslocado do centro cinemático? (v) Qual o sinal das ondas gravitacionais que tal evento produziria?

No Capítulo 2 nós apresentamos os métodos numéricos e introduzimos as correções pós-Newtonianas, discutindo a maior parte das questões de implementação. O Capítulo 3 é dedicado a apresentação dos resultados, comparação com as observações e discussão. Finalmente, no Capítulo 4 apresentamos nossas conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Métodos Numéricos: Simulações de N-Corpos com Correções Pós-Newtonianas

One reason that life is complex is that it has a real part and an imaginary part.

– Andrew Koenig

Desde o tempo de Newton já se sabia que o problema gravitacional de N-corpos admite uma solução exata somente no caso de duas partículas interagentes. Tudo que sabemos com certeza além disso é que, na ausência de agentes externos, existe dez integrais de movimento. A saber, a energia (E), o centro de massa (\mathbf{R}), o momentum linear (\mathbf{P}) e o momentum angular (\mathbf{J}) do sistema. Uma vez que tais grandezas são frequentemente usadas para verificar a exatidão de uma simulação, é conveniente defini-las matematicamente:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i, \quad (2.4)$$

onde \mathbf{r}_i e \mathbf{v}_i são, respectivamente, a posição e a velocidade da partícula de massa m_i , $M = \sum_{i=1}^N m_i$ é a massa total do sistema e G é a constante gravitacional Newtoniana. Os dois termos na Eq. (2.1) representam, respectivamente, a energia cinética (T) e a energia

potencial (U) do sistema. Naturalmente, um bom esquema numérico para sistemas conservativos deveria manter o valor das dez constantes de movimento em um nível de exatidão aceitável em todos os tempos de interesse durante uma simulação. Infelizmente, erros estão sempre presentes em qualquer esquema de integração numérica. Uma vez que sua influência sobre o resultado dos cálculos deveria ser minimizada, cabe discutir com mais detalhe alguns aspectos do sistema físico que conspiram contra este objetivo.

Nos últimos 50 anos o desenvolvimento de códigos para simulações de N-corpos tem se deparado com alguns fatos bastante desagradáveis no que diz respeito a faixa de escalas de tempo e comprimento inerentes em todos os sistemas estelares. As mais curtas escalas de tempo e comprimento de interesse na evolução de aglomerados globulares e núcleos galácticos são postas por seus subsistemas mais compactos. Por exemplo, um sistema binário de estrelas de neutrons, cujo período orbital é tipicamente de uns poucos milisegundos, quando comparado com a idade de um aglomerado globular, $\sim 10^{10}$ anos, resulta em uma discrepância em escalas de tempo de cerca de 20 ordens de magnitude! Um problema similar ocorre quando comparamos escalas de comprimento. O diâmetro de uma estrela de neutrons, ~ 10 km, quando expresso em unidades do raio de maré de um aglomerado globular, tipicamente ~ 100 pc, é da ordem de 10^{-15} .

Quando se deseja estudar justamente a evolução de sistemas compactos, tais como pares de estrelas de neutrons ou buracos negros, embebidos em núcleos galácticos surge pelo menos dois principais problemas numéricos. Primeiro, considere o uso de um método de integração relativamente sofisticado que emprega passos de tempo variáveis. Tomando como exemplo um sistema em equilíbrio virial composto somente por estrelas individuais, então a integração numérica deve proceder com um passo de tempo médio em torno de alguma fração do *crossing time* (veja abaixo). Contudo, com a eventual formação dinâmica de tais subsistemas compactos durante a simulação, o resultado é que o processo de integração efetivamente “congela”, uma vez que o passo de tempo deve automaticamente diminuir a ponto de capturar a dinâmica correta e manter a conservação das integrais de movimento. Em outras palavras, a aparição do primeiro evento dinamicamente interessante torna a simulação impraticável! O outro problema, que diz respeito as escalas de comprimento, aparece principalmente por causa da representação finita de números de ponto flutuante, que mesmo em precisão dupla (64-bit) tipicamente carregam uma mantissa de somente 15 dígitos significantes, o que pode facilmente tornar o cálculo sem qualquer sentido nos estágios finais da coalescência de buracos negros, por exemplo.

Considerando que simulações realísticas deveriam, em última instância, levar em conta todas as escalas de tempo e comprimento, bem como os processos físicos envolvidos, à primeira vista modelar aglomerados globulares ou núcleos galácticos – estrela por estrela – pareceria desesperançoso não fosse pela ingenuidade e persistência de Sverre Aarseth, que têm dedicado a sua vida como pesquisador para fornecer uma série métodos (e.g. Aarseth

(2003)) e implementações eficientes com o qual este e outros problemas semelhantemente intrinsecamente difíceis podem ser atacados. A resposta de Aarseth para estes problemas pode ser resumida em duas palavras-chave: passos de tempo individuais e regularização de coordenadas. Estas melhorias algorítmicas fizeram mais pela velocidade dos cálculos do que décadas de avanço tecnológico em *hardware*.

Atualmente, depois de significantes desenvolvimentos, o problema numérico de N-corpos encontra-se maturado e estamos agora entrando em uma excitante nova era, quando o *hardware* começa a acompanhar os avanços algorítmicos, por exemplo com a implementação da arquitetura GRAPE (*GRAVity piPE*; Sugimoto et al. (1990), Makino et al. (2003), Makino (2008)) e, mais recentemente, com o advento das GPUs (*graphics processing units*; Portegies Zwart et al. (2007), Belleman et al. (2008)). Estes avanços tem permitido atingir uma performance computacional na casa dos Tera-Flops (10^{12} operações de ponto flutuante por segundo), que se traduz na possibilidade de simulações com até $N \sim 10^5$ partículas. A maior atração em métodos de N-corpos é que eles são livres de suposição, de modo que todas as interações estelares são incluídas automaticamente sem a necessidade de aproximações simplificadoras. O preço disto é o alto custo computacional, $\mathcal{O}(N^2)$ por passo de tempo.

Neste trabalho nós adotamos uma abordagem numérica diferente daquela que têm sido usada pela grande maioria dos simuladores de aglomerados globulares e núcleos galácticos. A grande diferença está no método de integração. NBODY4 (e.g. Aarseth (2003)) e STARLAB (Portegies Zwart et al., 2001) têm sido a ferramenta de escolha para simulações detalhadas de aglomerados globulares e núcleos galácticos por mais que 20 anos. Ambos os códigos são resultado de notáveis esforços e têm se mostrado bastante robustos (Anders et al., 2009). Uma característica comum a ambos os códigos é o tratamento da evolução estelar, em adição a integração numérica de N-corpos que é implementada através do método de Hermite (Makino, 1991, Makino & Aarseth, 1992), um esquema eficiente que foi desenvolvido para ter uma performance ótima na arquitetura GRAPE. Contudo, como a grande maioria dos outros métodos de integração, o esquema de Hermite não foi idealizado sobre bases físicas e assim não respeita a estrutura Hamiltoniana das equações de movimento. Em outras palavras, ele não conserva as dez integrais de movimento, tendo como característica o fato que o desvio na energia total do sistema cresce linearmente com o tempo durante a simulação. Enquanto este problema pode, em última instância, ser “resolvido” simplesmente diminuindo o parâmetro que controla a precisão do cálculo, não se pode garantir o mesmo com relação a estrutura microscópica do sistema, ou seja, com relação as órbitas individuais das estrelas. Além disso, como ficará evidente mais adiante a correção relativística de ordem mais baixa nas expansões pós-Newtonianas é proporcional a $1/c^2$, onde c é a velocidade da luz, o que pode em muitos casos ser suprimida pelo próprio erro do integrador. Consequentemente, faz-se necessário um método numérico extremamente preciso para evitar tais situações. Por esses motivos, nós fizemos aqui a escolha pelos métodos de integração

simplética, que são construídos sobre bases físicas respeitando, portanto, a estrutura Hamiltoniana do sistema. Nós, adicionalmente, implementamos um método de regularização, via uma transformação temporal, que resulta num integrador tão preciso quanto a precisão da máquina. Só então as correções pós-Newtonianas são adicionadas ao método. Antes de descrevê-los, contudo, nós brevemente delineamos alguns conceitos básicos que serão de interesse em discussões futuras.

2.1 Conceitos Básicos

A evolução dinâmica interna pode levar sistemas estelares a estágios de alta densidade central, tornando propícias freqüentes interações entre estrelas, sistemas binários, buracos negros e outros objetos astrofísicos eminentemente observáveis. Para muitos aglomerados de estrelas e núcleos galácticos, a escala de tempo no qual isto ocorre é significativamente menor que a idade do universo. Em um sistema auto-gravitante existe duas escalas de tempo fundamentais. O *crossing time*, t_{cr} , é indubitavelmente a mais intuitiva delas, e é também a escala no qual o sistema estabelece o equilíbrio virial, $2T + U = 0$. Para um sistema em equilíbrio dinâmico ele é definido como,

$$t_{cr} = \frac{2R_V}{\sigma}, \quad (2.5)$$

onde $R_V = -GM^2/2U$ é o raio virial e σ é a dispersão de velocidades. Em um estado de equilíbrio virial, $\sigma^2 \simeq GM/2R_V$, o que resulta em

$$\begin{aligned} t_{cr} &\simeq 2\sqrt{2} \left(\frac{R_V^3}{GM} \right)^{1/2}, \\ &\sim 4.7 \times 10^5 \text{ yr} \left(\frac{M}{10^6 M_\odot} \right)^{-1/2} \left(\frac{R_V}{10 \text{ pc}} \right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde, para referência, algumas escalas astrofísicas relevantes tem sido introduzidas. Alternativamente, uma conveniente definição formal do *crossing time* em termos de quantidades conservadas é dada por

$$t_{cr} = \frac{GM^{5/2}}{(-2E)^{3/2}}, \quad (2.7)$$

que pode ser derivada da Eq. (2.6) notando-se que em equilíbrio virial, $E = U/2$.

Aqui é conveniente introduzir nossa escolha de unidades, uma vez que muitos de nossos resultados serão escalados para sistemas reais através delas. Seguindo Heggie & Mathieu (1986) nós adotamos unidades no qual G , M e R_V são todos iguais a unidade. Dada esta escolha as Eq.'s acima implicam que $\sigma^2 = 1/2$, $t_{cr} = 2\sqrt{2}$ e $E = -1/4$. Consequentemente,

a menos que dito de outro modo, todos os resultados numéricos apresentados neste trabalho tiveram suas condições iniciais apropriadamente escaladas para estas unidades antes da simulação ser executada.

A segunda escala de tempo fundamental em um sistema auto-gravitante é o *half-mass relaxation time*, t_{rh} , sobre o qual encontros entre dois corpos transferem energia entre estrelas individuais, levando o sistema a se aproximar do equilíbrio térmico. Em outras palavras, é o tempo para que mudanças na velocidade quadrática média das estrelas, surgindo de deflexões por pequenos ângulos, tornem-se comparável a dispersão de velocidades inicial. Para todos os propósitos práticos o tempo de relaxação pode ser definido como (Binney & Tremaine, 2008)

$$t_{rh} = n_{rh} t_{cr}, \quad (2.8)$$

onde t_{cr} é o *crossing time* definido acima e n_{rh} é o número de vezes que uma estrela tem que cruzar o sistema para que a mudança em sua velocidade seja $\Delta v^2 \sim \sigma^2$. Esta escala serve como uma referência útil para o tempo no qual significantes mudanças dinâmicas afetam o aglomerado ou núcleo galáctico como um todo, embora não exista uma correspondente quantidade numericamente bem definida. Uma aproximação comumente utilizada é (cf. Aarseth (2003))

$$t_{rh} \simeq \frac{N}{22 \ln(\gamma N)} t_{cr}, \quad (2.9)$$

onde o fator γ tem sido determinado empiricamente como cerca de 0.11 – 0.15 para um sistema com partículas de massas iguais (Hénon (1975), Giersz & Heggie (1994); veja também a derivação analítica em Binney & Tremaine (2008), para o qual $\gamma = 1$). Embora este fator entre somente através do termo $\ln(\gamma N)$, ele pode ainda fazer uma significativa diferença em comparações numéricas. A despeito disso, a Eq. (2.9) mostra que a relaxação via encontros entre dois corpos é cada vez menos importante quanto maior o número de partículas, uma vez que o potencial torna-se mais suave. Consequentemente, aparece uma distinção natural entre sistemas *não-colisionais*, cujo longo tempo de relaxação implica que eles não sofrem significativa evolução dinâmica interna durante a idade do universo, e sistemas *colisionais*, que evoluem significativamente em menos que um tempo de Hubble. Galáxias enquadram-se na primeira categoria, uma vez que com $\sim 10^{11}$ estrelas distribuídas em um raio de ~ 10 kpc, possuem um tempo de relaxação de $\sim 10^{16}$ anos, enquanto aglomerados globulares e alguns núcleos galácticos caem na segunda categoria, com $t_{rh} \sim 10^{10}$ anos. Nós limitaremos aqui nossa discussão à sistemas colisionais. Um conceito útil em dinâmica colisional é a definição da escala de distância de um encontro próximo. Seguindo Aarseth & Lecar (1975) nós definimos esta como $R_{cl} = 2G\langle m \rangle / \sigma^2$, onde $\langle m \rangle = M/N$ é a massa média das partículas do

sistema. Em equilíbrio virial esta expressão assume a forma

$$R_{cl} \simeq \frac{4R_V}{N}, \quad (2.10)$$

que será de interesse durante a escolha do parâmetro de *softening*, que é um parâmetro artificial utilizado para evitar divergência numérica durante as simulações, e que será introduzido posteriormente.

Um último conceito que será útil em futuras discussões diz respeito a fricção dinâmica. O conceito de fricção dinâmica foi introduzido por Chandrasekhar (1943), quem elucidou a tendência sistemática de que um objeto de massa m_* seja desacelerado na direção de seu movimento como consequência direta da flutuação da força atuando sobre este, devido a variação na distribuição de vizinhos próximos. Se o objeto é muito mais massivo que as estrelas de campo, $m_i \ll m_* \ll M$, membros de um sistema muito maior, então quando m_* se move com velocidade \mathbf{v}_* através das estrelas com distribuição de velocidades $f(\mathbf{v}_i)$, a deflexão das estrelas por m_* aumenta a densidade estelar, ρ , em sua retaguarda e, conseqüentemente, a sua atração gravitacional, causando a fricção dinâmica. A aceleração friccional sobre m_* pode ser escrita de forma geral como (e.g. Binney & Tremaine (2008))

$$\frac{d\mathbf{v}_*}{dt} = -4\pi G^2 \rho m_* \ln \Lambda \int d^3\mathbf{v}_i f(\mathbf{v}_i) \frac{\mathbf{v}_* - \mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_* - \mathbf{v}_i|^3}, \quad (2.11)$$

onde Λ é o logaritmo de Coulomb, tipicamente $\sim (M/m_*)(r_*/R)$, sendo r_* o seu raio orbital e R o tamanho do sistema, e $\int d^3\mathbf{v}_i f(\mathbf{v}_i) = n$ é a densidade numérica de estrelas de campo. Se $f(\mathbf{v}_i) = \frac{n}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-\mathbf{v}_i^2/2\sigma^2}$, uma distribuição Maxwelliana com dispersão de velocidades σ , então a Eq. (2.11) torna-se

$$\frac{d\mathbf{v}_*}{dt} = -\frac{4\pi G^2 \rho m_* \ln \Lambda}{v_*^3} \left[\operatorname{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} e^{-X^2} \right] \mathbf{v}_*, \quad (2.12)$$

onde $X \equiv v_*/(\sqrt{2}\sigma)$ e erf é a função erro.

Como exemplo, consideremos o decaimento orbital de um SMBH com massa m_* e velocidade circular v_c , devido a fricção dinâmica. Aproximando o núcleo galáctico por um perfil de densidade de Jaffe (1983) em $r \rightarrow 0$ ou, mais simplesmente, por uma esfera isotérmica singular (e.g. Binney & Tremaine (2008)), para o qual $\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}$ e assumindo $X = v_c/(\sqrt{2}\sigma) = 1$, então a força friccional, $F = m_* |d\mathbf{v}_c/dt|$, sobre o SMBH, como dada pela Eq. (2.12), resulta em

$$F \simeq 0.428 \ln \Lambda \frac{Gm_*^2}{r^2}, \quad (2.13)$$

que é uma força tangencial e oposta à velocidade do SMBH, causando uma perda de momentum angular orbital dada por

$$\frac{dL}{dt} = -Fr \simeq -0.428 \ln \Lambda \frac{Gm_*^2}{r}, \quad (2.14)$$

levando o SMBH a espiralar em direção ao centro da galáxia. Uma vez que $L = r m_* v_c$, substituindo na Eq. (2.14) e resolvendo a equação diferencial resultante para t , é possível mostrar (para detalhes, veja Binney & Tremaine (2008)) que o tempo necessário para que o SMBH chegue ao centro galáctico pode ser escrito como

$$t_{fric} = \frac{1.17}{\ln \Lambda} \frac{M(r)}{m_*} t_{cr}, \quad (2.15)$$

onde $M(r) = v_c^2 r / G$ é a massa interna ao raio r e t_{cr} é o *crossing time* definido acima. Para valores típicos de $\ln \Lambda \simeq 6$ e $m_* = 10^8 M_\odot$ a partir de um raio orbital ~ 5 kpc com $\sigma \simeq 200 \text{ km s}^{-1}$, resulta em $t_{fric} \sim 3$ Gyr, mostrando que SMBHs normalmente deveriam ser encontrados no centro das galáxias.

Uma vez que o SMBH chegue a distâncias $\lesssim 1$ pc surge então o chamado “problema do último *parsec*”, visto que o contínuo decaimento via fricção dinâmica torna-se ineficiente. Uma possível solução à este problema, oferecida por Begelman et al. (1980), é que a acreção do gás passaria a dominar o decaimento orbital até o regime de radiação gravitacional ser atingido, levando a coalescência dos SMBHs. Por causa da enorme diferença de massas entre estrelas e SMBHs, é necessário um alto número de partículas ($\gtrsim 10^6$) para modelar corretamente os processos de relaxação em torno dos SMBHs. Além disso, é necessário também algum método de regularização para lidar com as elevadas razões de massas envolvidas. A grande diversidade de fenômenos físicos presentes em núcleos galácticos também colocam uma séria dificuldade para modelagem realística de qualquer processo neste ambiente. Consequentemente, simular o endurecimento de pares de SMBHs até a coalescência é extremamente desafiador, tanto algoritmicamente quanto computacionalmente. Embora nossas simulações estejam limitadas computacionalmente a um número de partículas menor que 10^4 e a física implementada seja a mais básica possível, alguns resultados interessantes foram também obtidos. Uma parte deles foi possível graças ao nosso esforço com relação aos algoritmos utilizados, que são o tema das próximas seções.

2.2 Métodos de Integração Simplética

Integradores simpléticos têm tornado-se populares nos últimos anos porque eles preservam certas propriedades que são intrínsecas a sistemas Hamiltonianos como, por exemplo, o problema gravitacional Newtoniano de N-corpos. Como dito anteriormente, um método

numérico deveria respeitar todas as simetrias do problema matematicamente exato. Conservação do momentum angular e linear e da energia total do sistema são exemplos de tais simetrias e são também frequentemente usados como indicadores da qualidade de um algoritmo de integração. Contudo, existe ainda uma outra lei de conservação seguindo da dinâmica Hamiltoniana, a conservação da forma simplética sobre o espaço de fase. Integradores simpléticos conservam *exatamente* a forma simplética $d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$ (Channell & Scovel, 1990, Candy & Rozmus, 1991, Yoshida, 1992), onde (\mathbf{q}, \mathbf{p}) são as coordenadas canônicas do espaço de fase. A conservação desta propriedade implica a conservação do volume do espaço de fase e, de fato, é isto que garante a vantagem dos integradores simpléticos quando aplicados a sistemas Hamiltonianos, comparado com outros métodos numéricos. Mais especificamente, integradores simpléticos resolvem exatamente um problema Hamiltoniano substituído com $\tilde{H} = H + H_{err}$, sendo H o verdadeiro Hamiltoniano do sistema físico e H_{err} uma série formal em passos de tempo, τ , representando os primeiros termos no desvio em H durante a evolução temporal. A existência de \tilde{H} conseqüentemente implica que para τ suficientemente pequeno, o erro na energia total do sistema possui um limite bem definido e seu valor absoluto não aumenta com o tempo.

Métodos simpléticos são bem conhecidos na integração numérica do sistema solar desde os trabalhos pioneiros de Wisdom & Holman (1991), Kinoshita et al. (1991), Saha & Tremaine (1992), sendo frequentemente altamente eficientes e tipicamente mostrando um alto grau de estabilidade a longo prazo (Channell & Scovel, 1990). As vantagens dos métodos simpléticos aplicam-se também a sistemas com um número muito maior de corpos. De fato, mesmo simulações cosmológicas com bilhões de partículas usam integradores simpléticos por causa de suas características (Springel, 2005). Outros exemplos de sua aplicação incluem física de plasmas e dinâmica molecular (e.g. Hockney & Eastwood (1988)). Contudo, uma vez que integradores simpléticos são designados para usar passos de tempo constantes, nem todas de suas características são mantidas quando o passo de tempo é variado de algum modo durante a integração (Skeel & Gear, 1992, Lee et al., 1997). Como resultado, não é possível simplesmente diminuir τ , afim de resolver um encontro próximo, sem perder a propriedade simplética do método, o que, em outras palavras, o tornaria “tão ruim” quanto qualquer outro método de integração ordinário. A solução para este problema será discutida na seção 2.3. Por enquanto vamos nos ater a discutir os métodos simpléticos considerando, como usual, τ uma constante suficientemente pequena. É interessante ver como o algoritmo simplético surge naturalmente do formalismo canônico (e.g. Goldstein (1950)).

De um ponto de vista bastante geral, muitas equações da física, desde mecânica clássica, eletrodinâmica, mecânica estatística, até mecânica quântica, têm todas a forma genérica,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathcal{H}\xi, \quad (2.16)$$

onde $\xi = \xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv \xi(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ é uma quantidade dinâmica dependendo do conjunto completo das variáveis de fase e \mathcal{H} é o operador associado ao Hamiltoniano H , definido por

$$\mathcal{H} \equiv \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_i} \right). \quad (2.17)$$

A Eq. (2.16) admite a seguinte solução formal,

$$\xi(t + \tau) = e^{\tau \mathcal{H}} \xi(t), \quad (2.18)$$

que é analiticamente não-integrável. Em muitos casos, contudo, o Hamiltoniano H pode ser decomposto em duas ou mais partes analiticamente integráveis. Por exemplo, no caso do problema gravitacional Newtoniano o Hamiltoniano é independente do tempo e é idêntico a energia total do sistema, como dada pela Eq. (2.1), que pode ser decomposta em uma energia cinética, T , e uma energia potencial, U . Uma vez que H seja escrito como $H = T + U$, pode-se, em analogia a Eq. (2.17), definir os operadores \mathcal{T} e \mathcal{U} associados a T e U , respectivamente. Dessa forma a Eq. (2.18) torna-se

$$\xi(t + \tau) = e^{\tau(\mathcal{T} + \mathcal{U})} \xi(t), \quad (2.19)$$

permanecendo analiticamente não-integrável. Contudo, usualmente $e^{\tau \mathcal{T}}$ e $e^{\tau \mathcal{U}}$ podem ser resolvidos exatamente,

$$e^{\tau \mathcal{T}} \xi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = \xi(\mathbf{q}_0 + \tau \mathbf{p}_0/m, \mathbf{p}_0) \equiv \xi(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0), \quad (2.20)$$

$$e^{\tau \mathcal{U}} \xi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = \xi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0 + \tau \mathbf{F}_0) \equiv \xi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_1), \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{F} = -\nabla U$ é a força atuando sobre a partícula de massa m e os subscritos 0 e 1 indicam os valores iniciais e finais das variáveis de fase. Uma vez que $e^{\tau \mathcal{T}}$ e $e^{\tau \mathcal{U}}$ em geral não comutam, segue que $e^{\tau(\mathcal{T} + \mathcal{U})} \neq e^{\tau \mathcal{T}} e^{\tau \mathcal{U}} \neq e^{\tau \mathcal{U}} e^{\tau \mathcal{T}}$. Consequentemente, para construir um integrador nós aproximamos o verdadeiro operador de evolução, $e^{\tau(\mathcal{T} + \mathcal{U})}$, através do produto (composição) de termos como $e^{\tau \mathcal{T}}$ e $e^{\tau \mathcal{U}}$, via a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff (Casas & Murua, 2009),

$$e^{\tau \mathcal{T}} e^{\tau \mathcal{U}} = e^{\tau(\mathcal{T} + \mathcal{U} + \frac{\tau}{2}[\mathcal{T}, \mathcal{U}] + \mathcal{O}(\tau^2))}, \quad (2.22)$$

$$\equiv e^{\tau \tilde{H}}, \quad (2.23)$$

a partir do qual se vê que

$$\tilde{H} = H + H_{err}, \quad (2.24)$$

com

$$H_{err} = \frac{\tau}{2}[\mathcal{T}, \mathcal{U}] + \mathcal{O}(\tau^2), \quad (2.25)$$

onde $[\cdot, \cdot]$ é um comutador. O simples integrador dado pelo lado esquerdo da Eq. (2.22), denotado por $\mathcal{S}_1(\tau)$, consiste de primeiro avançar o sistema dinâmico por um intervalo τ sobre influência de \mathcal{U} somente, e então avançar por τ sobre influência de \mathcal{T} somente. Uma vez que o erro associado H_{err} é $\mathcal{O}(\tau)$, segue que o erro em um simples passo de tempo é $\mathcal{O}(\tau^2)$ e assim o integrador é de primeira ordem. A generalização do procedimento acima para se obter métodos de ordens mais altas pode ser sistematizado como segue. Fatorando $e^{\tau(\mathcal{T}+\mathcal{U})}$ como

$$e^{\tau(\mathcal{T}+\mathcal{U})} = \prod_{p=1}^P e^{a_p \tau \mathcal{T}} e^{b_p \tau \mathcal{U}} + \mathcal{O}(\tau^{K+1}), \quad (2.26)$$

então, segue que o lado direito na Eq. (2.26) tem a expansão geral

$$\prod_{p=1}^P e^{a_p \tau \mathcal{T}} e^{b_p \tau \mathcal{U}} = e^{(e_{\mathcal{T}} \tau \mathcal{T} + e_{\mathcal{U}} \tau \mathcal{U} + e_{\mathcal{T}\mathcal{U}} \tau^2 [\mathcal{T}, \mathcal{U}] + e_{\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{U}} \tau^3 [\mathcal{T}, [\mathcal{T}, \mathcal{U}]] + e_{\mathcal{U}\mathcal{T}\mathcal{U}} \tau^3 [\mathcal{U}, [\mathcal{T}, \mathcal{U}]] + \dots)}, \quad (2.27)$$

$$\equiv e^{\tau \tilde{H}}, \quad (2.28)$$

onde a última igualdade define uma expressão geral para H_{err} . Os termos $e_{\mathcal{T}}$, $e_{\mathcal{U}}$, $e_{\mathcal{T}\mathcal{U}}$, $e_{\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{U}}$, $e_{\mathcal{U}\mathcal{T}\mathcal{U}}$, etc, são, em geral, expressões complicadas envolvendo os coeficientes a_p e b_p , e definem as condições de ordem do integrador (veja Yoshida (1990), Omelyan et al. (2003)). O objetivo da fatorização é manter $e_{\mathcal{T}} = e_{\mathcal{U}} = 1$ e forçar todos os outros $e_{\mathcal{T}\mathcal{U}}$, $e_{\mathcal{T}\mathcal{T}\mathcal{U}}$, $e_{\mathcal{U}\mathcal{T}\mathcal{U}}$, etc, para zero, de modo a maximizar a ordem K do integrador para um dado valor de P .

O caso $P = 2$ tem solução imediata $a_1 = a_2 = 1/2$, $b_1 = 1$ e $b_2 = 0$ e resulta em um integrador de segunda ordem, denotado por $\mathcal{S}_2(\tau) \equiv e^{\frac{1}{2}\tau \mathcal{T}} e^{\tau \mathcal{U}} e^{\frac{1}{2}\tau \mathcal{T}}$. Explicitamente, a transformação $\mathcal{S}_2(\tau) : \xi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \mapsto \xi(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$ é dada por

$$e^{\frac{1}{2}\tau \mathcal{T}} \xi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = \xi(\mathbf{q}_0 + \frac{1}{2}\tau \mathbf{p}_0/m, \mathbf{p}_0) \equiv \xi(\mathbf{q}_{1/2}, \mathbf{p}_0), \quad (2.29)$$

$$e^{\tau \mathcal{U}} \xi(\mathbf{q}_{1/2}, \mathbf{p}_0) = \xi(\mathbf{q}_{1/2}, \mathbf{p}_0 + \tau \mathbf{F}_{1/2}) \equiv \xi(\mathbf{q}_{1/2}, \mathbf{p}_1), \quad (2.30)$$

$$e^{\frac{1}{2}\tau \mathcal{T}} \xi(\mathbf{q}_{1/2}, \mathbf{p}_1) = \xi(\mathbf{q}_{1/2} + \frac{1}{2}\tau \mathbf{p}_1/m, \mathbf{p}_1) \equiv \xi(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1), \quad (2.31)$$

onde $\mathbf{F}_{1/2} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{q}_{1/2})$ é a força calculada na metade do passo de integração. Uma importante característica da composição (2.26) é que o mapa simplético das partículas no espaço de fase é mantido exatamente. Isto segue do fato que a evolução independente das posições e velocidades (Eq.'s (2.29, 2.30, 2.31)) não alteram o volume no espaço de fase. A propriedade $\mathcal{S}^{-1}(\tau) = \mathcal{S}(-\tau)$ de reversibilidade temporal do operador $\mathcal{S}(\tau) = e^{\tau(\mathcal{T}+\mathcal{U})}$ pode também

ser reproduzida impondo condições auto-adjuntas aos coeficientes a_p e b_p ; nominalmente, $a_p = a_{P-p+1}$, $b_p = b_{P-p}$, $b_P = 0$, ou $a_1 = 0$, $a_{p+1} = a_{P-p+1}$, $b_p = b_{P-p+1}$. Isso implica que os subpropagadores associados a \mathcal{T} e \mathcal{U} entram simetricamente na composição (2.26), fornecendo a reversibilidade requerida automaticamente. Além disso a existência de um método adjunto $\mathcal{S}_2^\dagger(\tau) \equiv e^{\frac{1}{2}\tau\mathcal{U}}e^{\tau\mathcal{T}}e^{\frac{1}{2}\tau\mathcal{U}}$ surge como uma consequência natural. Note também que $\mathcal{S}_2(\tau) = \mathcal{S}_1(\tau/2)\mathcal{S}_1^\dagger(\tau/2)$ e $\mathcal{S}_2^\dagger(\tau) = [\mathcal{S}_1(\tau/2)\mathcal{S}_1^\dagger(\tau/2)]^\dagger = \mathcal{S}_1^\dagger(\tau/2)\mathcal{S}_1(\tau/2)$, visto que $\mathcal{S}_1(\tau) \equiv e^{\tau\mathcal{T}}e^{\tau\mathcal{U}}$ e $\mathcal{S}_1^\dagger(\tau) \equiv e^{\tau\mathcal{U}}e^{\tau\mathcal{T}}$.

Métodos de ordem mais alta são também diretos de se obter a partir da Eq. (2.26), e compartilham das mesmas propriedades gerais de $\mathcal{S}_2(\tau)$, embora seja um processo consideravelmente mais tedioso. Note, contudo, que a condição de simetria temporal restringe à existência de métodos de ordem $2n$ somente, para um número inteiro $n \geq 1$. Por exemplo, para que as condições de ordem sejam satisfeitas, um método de quarta ordem requer $P \geq 3$, enquanto que para sexta ordem é necessário $P \geq 7$. Dada a complexidade das condições de ordem, frequentemente programas como **Maple** e **Mathematica** são utilizados para resolver simultaneamente o conjunto de P equações não-lineares acopladas (veja por exemplo Omelyan et al. (2003)). Um método prático desenvolvido por Yoshida (1990) permite aumentar a ordem do integrador para, em geral, $2n + 2$ simplesmente através da composição simétrica de métodos de ordem $2n$. Um integrador de quarta ordem, $\mathcal{S}_4(\tau)$, pode por exemplo ser obtido como

$$\mathcal{S}_4(\tau) = \mathcal{S}_2(z_0\tau)\mathcal{S}_2(z_1\tau)\mathcal{S}_2(z_0\tau), \quad (2.32)$$

onde os coeficientes $z_0 = 1/(2 - 2^{1/3})$ e $z_1 = 1 - 2z_0$ são facilmente obtidos analiticamente. É possível também obter um método de sexta ordem, $\mathcal{S}_6(\tau)$, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_6(\tau) &= \mathcal{S}_4(z'_0\tau)\mathcal{S}_4(z'_1\tau)\mathcal{S}_4(z'_0\tau), \\ &= \mathcal{S}_2(w_0\tau)\mathcal{S}_2(w_1\tau)\mathcal{S}_2(w_2\tau)\mathcal{S}_2(w_3\tau)\mathcal{S}_2(w_2\tau)\mathcal{S}_2(w_1\tau)\mathcal{S}_2(w_0\tau), \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde agora os w 's são encontrados somente por vias numéricas, através da solução do conjunto de condições de ordem. Os valores fornecidos por Yoshida (1990), com precisão de 15 casas decimais, são

$$\begin{aligned} w_0 &\approx +0.784513610477557, \\ w_1 &\approx +0.235573213359358, \\ w_2 &\approx -1.177679984178871, \\ w_3 &= 1 - 2(w_0 + w_1 + w_2). \end{aligned}$$

Uma vez que se tenha a forma explícita para $\mathcal{S}_2(\tau)$ é relativamente trivial implementar numericamente $\mathcal{S}_4(\tau)$ e $\mathcal{S}_6(\tau)$ e/ou seus adjuntos. Vale dizer que os métodos obtidos com o

procedimento prático de Yoshida (1990) são apenas um subconjunto dos possíveis algoritmos que derivam da composição dada pela Eq. (2.26). De fato, Omelyan et al. (2003) tem feito um estudo extensivo partindo de uma composição ainda mais geral que a Eq. (2.26), encontrando e classificando cerca de 50 novos métodos, mostrando que alguns deles resultam em algoritmos muito superiores àqueles previamente conhecidos, ao custo de ter que calcular o gradiente de $|\mathbf{F}|^2$, em adição a própria força. Uma vez que seria demasiado trabalhoso calcular tal gradiente para os ~ 200 termos das expansões pós-Newtonianas, nós optamos por continuar usando os integradores descritos acima, cuja precisão e eficiência foram suficientes para os nossos propósitos.

Como dito anteriormente, um problema afetando todos os integradores simpléticos diz respeito a necessidade de usar um passo de tempo variável. Integradores simpléticos são, por construção, designados a utilizar passos de tempo constantes e qualquer tentativa de diminuir τ , por exemplo durante um encontro próximo de duas partículas, resulta na perda de suas boas propriedades de conservação, tornando-os equivalentes ou piores que métodos de integração ordinários. Tal problema, primeiramente identificado por Gladman et al. (1991), Skeel & Gear (1992), tem sido atacado por vários autores e algumas interessantes soluções têm sido propostas (Lee et al., 1997, Duncan et al., 1998, Preto & Tremaine, 1999, Mikkola & Tanikawa, 1999a,b, Mikkola & Aarseth, 2002). Na próxima seção nós discutimos a solução oferecida por Mikkola & Aarseth (2002), que é matematicamente equivalente a formulação de Preto & Tremaine (1999), Mikkola & Tanikawa (1999a,b), embora na prática seja a única capaz de lidar com elevadas razões de massas sem grandes perdas de precisão. Uma característica notável do método resultante é que as equações de movimento tornam-se regularizadas.

2.3 Regularização Algorítmica das Equações de Movimento

Primeiramente, deixe-nos discutir a origem do problema de se usar passos de tempo variáveis, $\tau(t)$, em um integrador simplético. Seja $\varphi(\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ qualquer critério para a escolha de $\tau(t)$; por exemplo, $\varphi(\xi) \propto |\mathbf{r}|/|\mathbf{v}|$, $\varphi(\xi) \propto |\mathbf{p}|/|\mathbf{F}|$, ou $\varphi(\xi) \propto |\mathbf{F}|/|\dot{\mathbf{F}}|$ são critérios comumente utilizados, onde $\dot{\mathbf{F}} \equiv d\mathbf{F}/dt$. Então, partindo de condições iniciais dada por $\xi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$, uma tentativa de se construir um integrador com passo de tempo variável $\mathcal{S}_2(\tau(t))$ deve proceder como segue:

- escolha $\tau(0) = \varphi(\xi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0))$; aplique $\mathcal{S}_2(\tau(0))$ para obter $\xi(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$;
- escolha $\tau(1) = \varphi(\xi(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1))$; aplique $\mathcal{S}_2(\tau(1))$ para obter $\xi(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2)$;
- escolha $\tau(2) = \varphi(\xi(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2))$; aplique $\mathcal{S}_2(\tau(2))$ para obter $\xi(\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_3)$;
- escolha $\tau(3) = \varphi(\xi(\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_3))$; ...

Se agora revertermos a direção temporal, o procedimento acima deve resultar em

- ... aplique $\mathcal{S}_2(-\tau'(3))$ para obter $\xi(\mathbf{q}'_3, \mathbf{p}'_3)$;
- escolha $\tau'(2) = \varphi(\xi(\mathbf{q}'_3, \mathbf{p}'_3))$; aplique $\mathcal{S}_2(-\tau'(2))$ para obter $\xi(\mathbf{q}'_2, \mathbf{p}'_2)$;
- escolha $\tau'(1) = \varphi(\xi(\mathbf{q}'_2, \mathbf{p}'_2))$; aplique $\mathcal{S}_2(-\tau'(1))$ para obter $\xi(\mathbf{q}'_1, \mathbf{p}'_1)$;
- escolha $\tau'(0) = \varphi(\xi(\mathbf{q}'_1, \mathbf{p}'_1))$; aplique $\mathcal{S}_2(-\tau'(0))$ para obter $\xi(\mathbf{q}'_0, \mathbf{p}'_0)$;

É então evidente que a simetria temporal não é respeitada, resultando que $\xi(\mathbf{q}'_0, \mathbf{p}'_0) \neq \xi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$. A quebra da simetria temporal, portanto, destrói a característica simplética do integrador e este torna-se comparável ou pior que outros métodos não simpléticos (Gladman et al., 1991, Skeel & Gear, 1992). Uma primeira tentativa, proposta por Hut et al. (1995), para solucionar tal problema é escolher o passo de tempo implicitamente através de

$$\tau_{n+1/2} = \frac{1}{2}[\varphi(\xi_n) + \varphi(\xi_{n+1})]. \quad (2.34)$$

Isso restaura a simetria temporal – e portanto a conservação da energia – embora não faça o mesmo com relação a sua simpleticidade. A razão é que o mapa $\xi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \mapsto \xi(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$ torna-se implícito e não satisfaz a condição de simpleticidade (Goldstein, 1950),

$$\tilde{A}^T J \tilde{A} = J, \quad (2.35)$$

onde $\tilde{A} \equiv \left(\frac{\partial \xi(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)}{\partial \xi(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)} \right)$ é a matriz jacobiana da transformação e $J \equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz anti-simétrica. A implicação é que a estabilidade a longo prazo do integrador é comprometida.

Por outro lado, uma vez que a maior parte dos métodos de integração numérica perdem precisão principalmente por conta da singularidade $\sim 1/r^2$ devido a força mútua entre dois corpos, um importante ingrediente em qualquer método de integração para sistemas colisionais é o uso de algum algoritmo de regularização para tratar realisticamente o problema do encontro de dois ou mais corpos. Existem basicamente dois diferentes tipos de métodos: (i) usar uma transformação de coordenadas, e.g. pela aplicação da transformação de Kustaanheimo & Stiefel (Aarseth, 2003), e (ii) algoritmos que produzem resultados regulares via transformação temporal somente (Preto & Tremaine, 1999, Mikkola & Tanikawa, 1999a,b, Mikkola & Aarseth, 2002), sem necessidade de transformar coordenadas. A razão por que nós escolhemos o segundo método se reflete na necessidade de tratar as grandes razões de massas entre SMBHs e estrelas, e o método de Mikkola & Aarseth (2002), ainda que parcialmente, é o único capaz de fazê-lo sem grandes perdas de precisão.

A idéia básica consiste em considerar a transformação

$$ds = \Omega(\mathbf{r})dt, \quad (2.36)$$

onde $\Omega(\mathbf{r})$ é uma função positiva arbitrária e $s = \int_0^t \Omega(\mathbf{r}) dt$ é a nova variável independente. O uso desta transformação no mapa \mathcal{S}_2 é não-trivial, uma vez que isso resultaria em um sistema de equações implícito. Contudo, introduzindo uma nova variável auxiliar, $W = \Omega$, de modo que $\dot{W} = \mathbf{v} \cdot \nabla \Omega$, é possível escrever equações de movimento explícitas ($' \equiv \frac{d}{ds}$),

$$t' = \frac{1}{W}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{v}}{W}, \quad (2.38)$$

$$W' = \frac{\mathbf{v}}{\Omega} \cdot \nabla \Omega, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{a}}{\Omega}, \quad (2.40)$$

onde agora (t, \mathbf{r}) e (W, \mathbf{v}) são tratados como variáveis de mesma categoria e $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ é a aceleração. Chamando $\mathbf{Q} = (t, \mathbf{r})$ e $\mathbf{P} = (W, \mathbf{v})$, então a aplicação de $\mathcal{S}_2(h) : \xi(\mathbf{Q}_0, \mathbf{P}_0) \mapsto \xi(\mathbf{Q}_1, \mathbf{P}_1)$ com passo de tempo constante h pode ser escrita explicitamente como

$$t_{1/2} = t_0 + \frac{h}{2} \frac{1}{W_0}, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{r}_{1/2} = \mathbf{r}_0 + \frac{h}{2} \frac{\mathbf{v}_0}{W_0}, \quad (2.42)$$

$$W_{1/2} = W_0 + \frac{h}{2} \frac{\mathbf{v}_0}{\Omega(\mathbf{r}_{1/2})} \nabla \Omega(\mathbf{r}_{1/2}), \quad (2.43)$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + h \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}_{1/2})}{\Omega(\mathbf{r}_{1/2})}, \quad (2.44)$$

$$W_1 = W_{1/2} + \frac{h}{2} \frac{\mathbf{v}_1}{\Omega(\mathbf{r}_{1/2})} \nabla \Omega(\mathbf{r}_{1/2}), \quad (2.45)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{1/2} + \frac{h}{2} \frac{\mathbf{v}_1}{W_1}, \quad (2.46)$$

$$t_1 = t_{1/2} + \frac{h}{2} \frac{1}{W_1}, \quad (2.47)$$

onde se deveria notar que tanto a força, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, quanto a função de transformação, $\Omega(\mathbf{r})$, não tem sido especificada até então, de modo que o integrador acima, em teoria, poderia ser aplicado a qualquer sistema de equações diferenciais de segunda ordem que não contém primeiras derivadas (Mikkola & Aarseth, 2002).

Uma vez que nós estamos interessados em resolver o problema gravitacional de N-corpos, uma conveniente função de transformação temporal que não trata os corpos diferentemente dependendo de sua massa é, como sugerido por Mikkola & Aarseth (2002),

$$\Omega = \sum_{i < j} \frac{\Omega_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|}, \quad (2.48)$$

onde Ω_{ij} são constantes ajustáveis; pode-se escolher por exemplo $\Omega_{ij} = 1$ se existem grandes razões de massas ou, alternativamente, $\Omega_{ij} = m_i m_j$ se as massas são comparáveis. Neste último caso, Ω reduz-se à energia potencial $-U$ (tomando a constante gravitacional $G = 1$) e o presente algoritmo torna-se matematicamente equivalente ao método LogH de Preto & Tremaine (1999), Mikkola & Tanikawa (1999a,b). O método LogH fornece um tipo de regularização por algoritmo, sem a necessidade de uma transformação de coordenadas, gerando uma solução exata no caso do problema de dois corpos. Uma vez que a regularização é consequência da dependência $1/r$, resulta que o algoritmo acima gera soluções regulares independente do valor da constante Ω_{ij} , o que é bastante oportuno ao nosso problema que requer $\Omega_{ij} = 1$ para tratar elevadas razões de massas.

Uma consequência sutil deste método, além da regularização, é que o passo de tempo “físico” é efetivamente variável e é dado por

$$\tau = \int_s^{s+h} \frac{ds}{\Omega(\mathbf{r})}. \quad (2.49)$$

Note contudo que tal variação é intrínseca ao algoritmo, de modo que não é introduzida *ad-hoc* como mostrado no início desta seção. A consequência disso é que a simplicidade do método é preservada. A razão por que isso é verdade é que a integração de fato ocorre em um espaço de fase aumentado com um passo de tempo constante, h , de modo que sua projeção sobre o espaço de fase usual leva a uma variação efetiva no passo de tempo “físico”, como dado pela equação acima.

Alguns testes numéricos com o algoritmo descrito aqui e sua comparação com outros métodos será deixada para a seção 3.1. Nas próximas seções nós introduzimos as correções pós-Newtonianas da Relatividade Geral e mostramos como foi feita sua implementação ao integrador.

2.4 Correções Relativísticas via Expansões Pós-Newtonianas

O problema do movimento e da radiação gravitacional de objetos compactos em aproximações pós-Newtonianas da Relatividade Geral é de importância crucial por pelo menos três razões. Primeiro, o movimento de N-corpos na primeira aproximação pós-Newtoniana ($1PN$, correspondendo a ordem $\sim 1/c^2$) é rotineiramente levado em conta para descrever a dinâmica do sistema solar (Newhall et al., 1983). Segundo, a força de reação à radiação gravitacional, que aparece nas equações em ordem $2.5PN$ ($\sim 1/c^5$), tem sido verificada experimentalmente, pela observação da aceleração secular no movimento orbital do pulsar binário PSR 1913+16 (Taylor et al., 1979, Taylor & Weisberg, 1982, Taylor, 1993). Terceiro, mas não menos importante, a emergente detecção e análise de ondas gravitacionais emitidas durante o espiralamento de binárias compactas – duas estrelas de neutrons ou dois

buracos negros em coalescência devido a emissão de radiação gravitacional – necessitará o conhecimento prévio das equações de movimento e do campo de radiação até elevadas ordens pós-Newtonianas.

Já em 1917, Lorentz e Droste, e mais tarde, Einstein, Infeld e Hoffmann, entre outros, começaram a desenvolver métodos de aproximação pós-Newtoniana (doravante PN). Estes são baseados no limite de campo fraco no qual a métrica é próxima a métrica de Minkowski e a suposição de que a velocidade típica, v , em um sistema, dividida pela velocidade da luz, c , é muito pequena. O desvio da métrica plana pode ser caracterizada pelo potencial Newtoniano Φ , de modo que para um sistema binário, por exemplo, $\Phi/c^2 \sim v^2/c^2 \sim \epsilon^2$, com a aproximação PN reduzindo-se às equações de Newton o limite apropriado, $\epsilon \rightarrow 0$. Posteriormente a estes primeiros trabalhos, numerosas investigações de ambas, aproximações PNs e pós-Minkowskianas*, tem aparecido, com expansões formais em ordens de $1/c$ (veja, por exemplo, Hawking & Israel (1987)).

No final de 1990, motivados pelo objetivo de obter modelos de alta precisão para análise de dados da rede internacional de detectores interferométricos de ondas gravitacionais LIGO-VIRGO-LISA, dois grupos embarcaram na derivação da equações de movimento a um nível $3PN$ ($\sim 1/c^6$). Um grupo usou o formalismo Hamiltoniano de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) da Relatividade Geral (Jaranowski & Schäfer, 1998, 1999, 2001, Damour et al., 2000, 2001b,c, 2002), trabalhando em um correspondente sistema de coordenadas, do tipo-ADM. Um outro grupo usou diretamente uma iteração pós-Newtoniana das equações de movimento em coordenadas harmônicas (Blanchet & Faye, 2000a,b, 2001a,b, de Andrade et al., 2001, Blanchet & Iyer, 2003). O resultado dessas duas abordagens tem mostrado ser fisicamente equivalentes (de Andrade et al., 2001, Damour et al., 2001b, 2002). No entanto, ambas as abordagens, mesmo depois de explorar todas as simetrias e forçar ao máximo seus métodos, baseados em regularização de Hadamard (Blanchet & Faye, 2000a), tem deixado indeterminado um parâmetro adimensional no termo correspondente a ordem $3PN$. A aparição deste parâmetro desconhecido foi relacionada com a escolha do método de regularização usado para tratar as divergências de auto-campo de partículas pontuais. A conclusão das equações de movimento em ordem $3PN$ foi possível somente recentemente, graças a uma regularização dimensional do auto-campo, que pôde fixar unicamente o valor do parâmetro de ambiguidade (Damour et al., 2001a, Blanchet et al., 2004). Este resultado está também em completa concordância com os trabalhos de Itoh & Futamase (2003), Itoh (2004a), que derivaram as equações de movimento em ordem $3PN$ no calibre harmônico usando uma abordagem de “integrais de superfície” sem a necessidade de usar nenhuma espécie de regularização de auto-campo. Finalmente, os termos $3.5PN$, que constituem a

*Aproximações pós-Minkowskianas diferenciam-se das PNs por não assumir $v \ll c$, de modo que no limite apropriado a aproximação pós-Minkowskiana reduz-se às equações da Relatividade Especial.

correção de primeira ordem ao termo $2.5PN$ da força de reação a radiação, tem sido adicionados por Iyer & Will (1993, 1995), Jaranowski & Schäfer (1997), Pati & Will (2002), Königsdörffer et al. (2003), Nissanke & Blanchet (2005), Itoh (2009). Embora todos esses trabalhos derivem as equações de movimento para dois corpos somente, aqui nós propomos que tal expressão possa ser generalizada para o caso de N -corpos,

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_{j \neq i}^N \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \left[(1 + \mathcal{A}) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} + \mathcal{B} \mathbf{v}_{ij} \right], \quad (2.50)$$

onde os símbolos tem o significado usual e os termos \mathcal{A} e \mathcal{B} são funções de $(m_i, m_j, r_i, r_j, v_i, v_j)$ contendo as diferentes ordens PNs,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{c^2} \mathcal{A}_{1PN} + \frac{1}{c^4} \mathcal{A}_{2PN} + \frac{1}{c^5} \mathcal{A}_{2.5PN} + \frac{1}{c^6} \mathcal{A}_{3PN} + \frac{1}{c^7} \mathcal{A}_{3.5PN} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^8}\right), \quad (2.51)$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{c^2} \mathcal{B}_{1PN} + \frac{1}{c^4} \mathcal{B}_{2PN} + \frac{1}{c^5} \mathcal{B}_{2.5PN} + \frac{1}{c^6} \mathcal{B}_{3PN} + \frac{1}{c^7} \mathcal{B}_{3.5PN} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^8}\right). \quad (2.52)$$

Estritamente falando, tal aproximação para N -corpos não é completamente válida, tendo em vista que a Relatividade Geral é uma teoria essencialmente não linear, de modo que o princípio de superposição não vale. Contudo, uma vez que não existe uma formulação prática de tal equação para o caso de N -corpos (veja, por exemplo, Chu (2009)), e uma vez que colisões entre partículas, durante o qual as correções tornam-se relevantes, devem ocorrer em sua maioria par a par, nós assumimos a Eq. (2.50) como uma primeira aproximação. De qualquer forma, durante as simulações, as correções PNs são aplicadas somente nas interações em que pelo menos um dos buracos negros esteja envolvido, ou seja, interações estrela-estrela são tratadas Newtonianamente.

O ponto principal com relação à modelagem do espiralamento de binárias compactas é que o modelo constitui-se de duas partículas pontuais, ou seja, partículas sem estrutura, caracterizadas somente por dois parâmetros de massa m_1 e m_2 (e possivelmente dois spins[†]). De fato, a maior parte dos efeitos não gravitacionais usualmente presentes na dinâmica de sistemas binários, tais como efeitos do campo magnético, de um meio interestelar, etc., são dominados pelos efeitos gravitacionais. Contudo, a justificativa real para um modelo com partículas pontuais é que os efeitos devidos ao tamanho finito dos corpos compactos são pequenos; estes deveriam ser comparáveis, numericamente, à correção PN de magnitude $\sim 1/c^{10}$, nominalmente a ordem $5PN$ (Damour, 1983). Esta é uma ordem PN muito mais elevada do que aquela atualmente existente nas equações de movimento, i.e., ordem $3.5PN$. Mas note que para objetos não compactos ou moderadamente compactos, tais como

[†]Por simplicidade neste trabalho nós consideramos partículas sem spin. Efeitos de spin deveriam aparecer como um termo de acoplamento spin-orbita em ordem $1.5PN$ e acoplamento spin-spin em ordem $2PN$ e também nos termos de reação a radiação, ordens $2.5PN$ e $3.5PN$.

anãs brancas, o seu tamanho finito causaria a interação de maré Newtoniana, que poderia dominar a evolução orbital.

Nós implementamos em nosso código numérico precisamente a equação (11.4) em Itoh (2004a), que contém termos até ordem $3PN$, acrescidas do termo $3.5PN$ dado pela equação (65) em Itoh (2009), que, como já dito, está em completa concordância com as equações de movimento obtidas por outros autores. Para conveniência do leitor nós anexamos no Apêndice A as páginas destas referências que contém tais equações e mostramos no Apêndice B a nossa implementação numérica. Os detalhes de sua derivação estão muito além do escopo deste trabalho e podem ser encontrados na extensa literatura mencionada no decorrer desta seção. Contudo, é válido destacar aqui algumas de suas propriedades. Primeiramente, deixe-nos esclarecer o efeito de cada termo nas Eq.'s (2.51, 2.52). Os termos \mathcal{A} e \mathcal{B} referem-se às partes estática e cinética, respectivamente, das equações de movimento. Correções de ordens inteiras, tais como $1PN$, $2PN$ e $3PN$, são responsáveis por causar o avanço do periélio no caso de um sistema binário, e são conservativos, ou seja, não causam uma variação secular do semi-eixo maior orbital. As correções de ordens semi-inteiras, $2.5PN$ e $3.5PN$, são as responsáveis pela dissipação da energia orbital na forma de ondas gravitacionais, sendo portanto aqueles que geram a força de reação à radiação. O procedimento de iteração PN para encontrar as sucessivas ordens PNs consiste de encontrar a métrica (geralmente uma ordem além das eq.'s de movimento) associada com o tensor momentum-energia construído com funções delta, e então tratar as divergências de auto-campo por meio de técnicas de regularização. As equações de movimento são, portanto, equações geodésicas associadas a uma métrica regularizada. Embora as sucessivas aproximações PNs sejam realmente uma consequência da Relatividade Geral, as equações de movimento resultantes devem ser interpretadas de uma maneira Newtoniana (Blanchet, 2006), ou seja, uma vez que um conveniente sistema de coordenadas (Catesianas) seja escolhido, pode-se expressar os resultados em termos das posições, velocidades e acelerações dos corpos, e visualizar as trajetórias das partículas no espaço Euclidiano absoluto de Newton. Mas, uma vez que as equações de movimento são realmente relativísticas, elas devem

- (i) permanecer invariantes – no sentido de uma transformação de Lorentz expandida pós-Newtonianamente;
- (ii) possuir o limite perturbativo correto, dado pela geodésica da métrica de Schwarzschild (expandida pós-Newtonianamente), quando uma das massas tende à zero; e
- (iii) ser conservativas, i.e., admitir uma formulação Lagrangiana ou Hamiltoniana, quando os termos de reação a radiação são “desligados”.

No que se refere ao formalismo de geração de ondas gravitacionais, o problema básico está em relacionar a forma assintótica da onda gravitacional, h_{ij} , gerada por alguma fonte

ao tensor energia-momentum, $T^{\alpha\beta}$, dos campos de matéria. Para a ordem mais baixa, no limite Newtoniano, $v/c \rightarrow 0$, a geração das ondas é descrita pela fórmula quadrupolar de Einstein (veja Landau & Lifshitz (1975)), que expressa a “luminosidade” gravitacional total, \mathcal{L} , da fonte em termos de derivadas temporais do momentum de quadrupolo Newtoniano associado, e que dá a taxa de decaimento da energia orbital,

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{L}, \quad (2.53)$$

onde E é a energia no referencial do centro de massa da binária Newtoniana. Para ordens mais altas que a Newtoniana, a geração de ondas gravitacionais envolve muitas interações não-lineares entre multipolos, porque os momentos da fonte se misturam uns com os outros quando eles se “propagam” da fonte para o detector. Tais interações multipolares incluem, por exemplo, efeitos de caudas de ondas e caudas de caudas de ondas durante a geração e propagação do sinal de onda gravitacional, bem como sobre a própria dinâmica da fonte. As interações multipolares não-lineares tem sido calculadas dentro do presente formalismo de geração de ondas gravitacionais até ordem $3PN$ por Blanchet & Damour (1992), Blanchet (1998b,a). O primeiro termo da força de reação a radiação na ordem $2.5PN$ inclui a aproximação quadrupolar, e tem sido mostrado que o efeito de caudas de ondas gravitacionais contribui para a reação a radiação precisamente em ordem “relativa” $1.5PN$, o que de fato corresponde a ordem “absoluta” $4PN$ nas equações de movimento (Blanchet & Damour, 1988).

É interessante notar que tais aproximações de alta ordem são realmente necessárias na preparação para a análise de dados do LIGO-VIRGO-LISA. Para detectar ondas gravitacionais diretamente com alto sinal/ruído e extrair qualquer informação astrofísica relevante da onda, modelos de ordem $4PN$, pelo menos, são necessários (Futamase & Itoh, 2007). Como será mostrado na seção 3.1, mesmo com equações de movimento em ordem $3.5PN$, que é tudo que se conhece atualmente, a aproximação PN já falha em descrever a dinâmica orbital de binárias compactas para distâncias orbitais abaixo de $5 R_{Sch}$, podendo em alguns casos chegar a $3 R_{Sch}$, dependendo da geometria orbital. Contudo, isso não representa um grande problema para nossa modelagem da região central de NGC 5236, principalmente porque o número de partículas que foi possível utilizar nas simulações de N-corpos ($< 10^4$) não foi alto o suficiente para que a fricção dinâmica levasse os buracos negros até níveis relativísticos extremos. Caso a distância de duas partículas fosse menor que $3 R_{Sch}$ a simulação seria imediatamente encerrada.

2.5 Incorporando Termos Pós-Newtonianos ao Integrador

Agora que temos um método de integração simplética com passos de tempo variáveis que na prática gera soluções exatas para o caso de sistemas binários e ainda possui uma precisão e

estabilidade a longo prazo bastante razoável para o caso de N-corpos (veja seção 3.1), surge a questão de como incorporar os termos PNs ao integrador, sem comprometer suas boas propriedades de conservação dos invariantes físicos do problema. Como descrito na seção 2.2, a idéia básica para a construção de um método simplético repousa sobre separabilidade do Hamiltoniano do sistema. No caso Newtoniano isto é claramente evidente. Mas no caso geral, em particular o PN, o Hamiltoniano de fato é não-separável em termos de funções de r e v , e não existe uma transformação de coordenadas conhecida que torne isso possível. Portanto, não existe um modo de construir um método simplético para a integração numérica das equações de movimento PNs. No entanto, nós vimos na seção 2.3 que um método simétrico garante, ao menos, a propriedade de conservação da energia total do sistema. Sendo assim, nesta seção nós mostramos como simetrizar a incorporação dos termos PNs ao integrador \mathcal{S}_2 (consequentemente \mathcal{S}_4 e \mathcal{S}_6), bem como sua forma regularizada, dada pelas Eq.'s (2.41)-(2.47).

O Hamiltoniano (ou a Lagrangiana) PN pode ser encontrado nas diversas referências dadas na seção 2.4, mas aqui é suficiente escrevê-lo na forma genérica,

$$H(r, v) = T(v) + \tilde{U}(r, v), \quad (2.54)$$

onde $T(v)$ permanece sendo a energia cinética definida da maneira usual e $\tilde{U}(r, v)$ contém a energia potencial Newtoniana, $U(r)$, e outros termos cruzados de (r, v) que aparecem do processo de iteração PN. O nosso procedimento aqui é interpretar o Hamiltoniano acima como

$$H(t) = T + \tilde{U}(t), \quad (2.55)$$

e construir um integrador da maneira usual (seção 2.2), aplicando o operador de decomposição de exponenciais ordenadas temporalmente (veja Hatano & Suzuki (2005) e suas referências). Para um operador $\mathcal{H}(t)$ associado ao Hamiltoniano $H(t)$, a equação de evolução,

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi(t) = \mathcal{H}(t) \xi(t), \quad (2.56)$$

tem a solução formal,

$$\xi(t + \tau) = \mathfrak{T} \left[\exp \int_t^{t+\tau} \mathcal{H}(s) ds \right] \xi(t). \quad (2.57)$$

A exponencial ordenada não somente tem a expansão convencional (e.g. Sakurai (1985)),

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} \left[\exp \int_t^{t+\tau} \mathcal{H}(s) ds \right] &= 1 + \int_t^{t+\tau} \mathcal{H}(s_1) ds_1 \\ &+ \int_t^{t+\tau} ds_1 \int_t^{s_1} ds_2 \mathcal{H}(s_1) \mathcal{H}(s_2) \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (2.58)$$

mas pode também ser interpretada de uma forma mais intuitiva para os nossos propósitos,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} \left[\exp \int_t^{t+\tau} \mathcal{H}(s) ds \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{T}(e^{(\tau/n) \sum_{i=1}^n \mathcal{H}(t+i(\tau/n))}), \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(\tau/n) \mathcal{H}(t+\tau)} \dots e^{(\tau/n) \mathcal{H}(t+2\tau/n)} \\ &\quad \times e^{(\tau/n) \mathcal{H}(t+\tau/n)}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Por outro lado, Suzuki provou que (veja Hatano & Suzuki (2005)),

$$\mathfrak{T} \left[\exp \int_t^{t+\tau} \mathcal{H}(s) ds \right] = e^{\tau[\mathcal{H}(t)+\mathcal{D}]}, \quad (2.60)$$

onde $\mathcal{D} \equiv \overleftarrow{\partial} / \partial t$ é o operador de derivação temporal avançada, tal que para funções dependentes do tempo $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$,

$$\begin{aligned} A(t) e^{\tau \mathcal{D}} B(t) &= A(t+\tau) B(t), \\ A(t) e^{\tau \mathcal{D}} B(t) e^{\tau \mathcal{D}} C(t) &= A(t+2\tau) B(t+\tau) C(t). \end{aligned} \quad (2.61)$$

De fato, invocando a fórmula (2.26), a prova requer somente duas linhas,

$$\begin{aligned} e^{\tau[\mathcal{H}(t)+\mathcal{D}]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{(\tau/n) \mathcal{H}(t)} e^{(\tau/n) \mathcal{D}})^n, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(\tau/n) \mathcal{H}(t+\tau)} \dots e^{(\tau/n) \mathcal{H}(t+2\tau/n)} \\ &\quad \times e^{(\tau/n) \mathcal{H}(t+\tau/n)}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

onde a propriedade (2.61) tem sido usada repetidamente e cumulativamente.

Redefinindo o Hamiltoniano de modo que seus operadores associados possam ser escritos como,

$$\tilde{\mathcal{H}}(t) = \tilde{\mathcal{T}} + \tilde{\mathcal{U}}(t), \quad (2.63)$$

onde $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} + \mathcal{D}$, e notando-se que \mathcal{T} e \mathcal{D} satisfazem a relação de comutação, $[\mathcal{T}, \mathcal{D}] = 0$, então eles fatorizam exatamente, $e^{\tau \tilde{\mathcal{T}}} = e^{\tau \mathcal{T}} e^{\tau \mathcal{D}} = e^{\tau \mathcal{D}} e^{\tau \mathcal{T}}$. Com isso, estamos agora em

posição de construir um integrador do tipo $\mathcal{S}_2(\tau)$, que será denotado por $\tilde{\mathcal{S}}_2(\tau)$,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}_2(\tau) &= e^{\frac{1}{2}\tau\tilde{T}} e^{\tau\tilde{\mathcal{U}}(t)} e^{\frac{1}{2}\tau\tilde{T}}, \\ &= e^{\frac{1}{2}\tau\mathcal{D}} e^{\frac{1}{2}\tau\mathcal{T}} e^{\tau\tilde{\mathcal{U}}(t)} e^{\frac{1}{2}\tau\mathcal{D}} e^{\frac{1}{2}\tau\mathcal{T}}, \\ &= e^{\frac{1}{2}\tau\mathcal{T}} e^{\tau\tilde{\mathcal{U}}(t+\frac{1}{2}\tau)} e^{\frac{1}{2}\tau\mathcal{T}}.\end{aligned}\quad (2.64)$$

Como $\tilde{\mathcal{U}}(t) = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1(t)$, sendo \mathcal{U}_0 a parte puramente Newtoniana e $\mathcal{U}_1(t)$ a parte contendo somente as correções PNs, então podemos decompor o sub-propagador associado a $\tilde{\mathcal{U}}(t)$, de modo que nosso método resultante fica escrito como,

$$\tilde{\mathcal{S}}_2(\tau) = e^{\frac{1}{2}\tau\mathcal{T}} e^{\frac{1}{2}\tau\mathcal{U}_0} e^{\tau\mathcal{U}_1(t+\frac{1}{2}\tau)} e^{\frac{1}{2}\tau\mathcal{U}_0} e^{\frac{1}{2}\tau\mathcal{T}}. \quad (2.65)$$

Embora não seja simplético por conta da não separabilidade dos termos cruzados em (r, v) em $\mathcal{U}_1(t)$, o método acima é simétrico e de segunda ordem, e pode diretamente ser utilizado em composições tipo-Yoshida (1990) para se obter métodos de ordens mais altas. Em particular, o método de regularização descrito na seção 2.3 também se aplica e é dado explicitamente por,

$$t_{1/2} = t_0 + \frac{h}{2} \frac{1}{W_0}, \quad (2.66)$$

$$\mathbf{r}_{1/2} = \mathbf{r}_0 + \frac{h}{2} \frac{\mathbf{v}_0}{W_0}, \quad (2.67)$$

$$W_{1/2} = W_0 + \frac{h}{2} \frac{\mathbf{v}_0}{\Omega(\mathbf{r}_{1/2})} \nabla\Omega(\mathbf{r}_{1/2}), \quad (2.68)$$

$$\mathbf{v}'_{1/2} = \mathbf{v}_0 + \frac{h}{2} \frac{\mathbf{a}_N(\mathbf{r}_{1/2})}{\Omega(\mathbf{r}_{1/2})}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{v}''_{1/2} = \mathbf{v}'_{1/2} + \frac{h}{2} \frac{\mathbf{a}_{PN}(\mathbf{r}_{1/2}, \mathbf{v}''_{1/2})}{\Omega(\mathbf{r}_{1/2})}, \quad \circlearrowleft \quad (2.70)$$

$$\mathbf{v}_{1/2} = \mathbf{v}''_{1/2} + \frac{h}{2} \frac{\mathbf{a}_{PN}(\mathbf{r}_{1/2}, \mathbf{v}''_{1/2})}{\Omega(\mathbf{r}_{1/2})}, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{1/2} + \frac{h}{2} \frac{\mathbf{a}_N(\mathbf{r}_{1/2})}{\Omega(\mathbf{r}_{1/2})}, \quad (2.72)$$

$$W_1 = W_{1/2} + \frac{h}{2} \frac{\mathbf{v}_1}{\Omega(\mathbf{r}_{1/2})} \nabla\Omega(\mathbf{r}_{1/2}), \quad (2.73)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{1/2} + \frac{h}{2} \frac{\mathbf{v}_1}{W_1}, \quad (2.74)$$

$$t_1 = t_{1/2} + \frac{h}{2} \frac{1}{W_1}, \quad (2.75)$$

onde \mathbf{a}_N e \mathbf{a}_{PN} denotam as acelerações Newtonianas e as correções PNs, respectivamente, e o símbolo \circlearrowleft na Eq. (2.70) enfatiza que neste ponto ocorre o procedimento de simetrização

da solução numérica através de um método iterativo. Isto implica que o integrador acima é implícito. Mas tomando $\mathbf{v}_{1/2}'' = \mathbf{v}_{1/2}'$ como uma primeira aproximação, o método requer somente 2 – 3 iterações para atingir a convergência, estimada como

$$\frac{|\mathbf{v}_{1/2}^{(k)} - \mathbf{v}_{1/2}^{(k-1)}|}{|\mathbf{v}_{1/2}^{(k)}|} \leq \delta, \quad (2.76)$$

onde δ é da ordem da precisão da máquina e k denota o número da iteração.

Para verificar a conservação da energia em uma simulação com correções PNs deve-se integrar uma equação adicional para a variação na energia devido a força externa,

$$\Delta E_{PN} = \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{PN} dt. \quad (2.77)$$

Convertida para a forma regularizada apropriada, esta equação pode ser integrada da mesma forma que a variável W nas Eq.'s (2.68) e (2.73), a um custo computacional praticamente desprezível.

Isso encerra a apresentação dos métodos numéricos utilizados neste trabalho. No próximo capítulo nós passamos à apresentação dos resultados e discussão. Primeiramente apresentamos alguns experimentos numéricos para demonstrar que o método trabalha como esperado, seguindo com a modelagem do recuo gravitacional observado em NGC 5236, inicialmente com buracos negros isolados e depois adicionando os efeitos de fricção dinâmica causados pela interação de N-corpos.

Capítulo 3

Modelando o Recuo Gravitacional em NGC 5236

As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality.

– Albert Einstein

Este capítulo é dedicado à apresentação de nossos resultados e discussão. Buscando fundamentar teoricamente o emergente cenário (Dottori et al., 2010) de um recuo gravitacional no centro de NGC 5236, nós apresentamos aqui um estudo computacional afim de vincular as condições sob o qual tal fenômeno teria ocorrido. Antes, porém, nós apresentamos brevemente alguns experimentos numéricos para demonstrar que o nosso método, descrito no capítulo anterior, trabalha como esperado.

3.1 Experimentos Numéricos

Aqui é conveniente introduzir alguns parâmetros numéricos, definidos pelo usuário como parâmetros de entrada para o integrador. O primeiro é o parâmetro de precisão, η , que controla o tamanho do passo de tempo, i.e., $\tau \propto \eta$. Portanto, quanto menor o valor de η melhor a precisão do cálculo, mas também mais alto é o custo computacional. Em seguida temos o parâmetro de *softening*, ε , que é frequentemente utilizado para evitar divergências numéricas quando duas partículas sofrem um encontro próximo. Tal objetivo é alcançado substituindo-se o potencial $\sim 1/r$ por $\sim 1/(r^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$, de modo que no limite $\varepsilon \rightarrow 0$ as equações de movimento derivadas deste potencial modificado reduzem-se às equações originais para partículas pontuais. Nós seguimos a prática usual (e.g. Aarseth (2003)) em simulações de sistemas colisionais e escolhemos ε igual a escala de distância de um encontro próximo, definida na Eq. (2.10), de modo que em nosso sistema de unidades adimensionais

(veja seção 2.1), $\varepsilon \equiv 4/N$. Logicamente, em simulações com buracos negros, onde as correções PNs estão presentes, nós fazemos $\varepsilon = 0$ em qualquer interação em que pelo menos um dos buracos negros esteja envolvido; assim, somente interações estrela-estrela usam $\varepsilon \neq 0$. Uma consequência do uso de um parâmetro de *softening* é que ele também evita uma relaxação espúria devido a um número muito baixo de partículas utilizadas para modelar um sistema real com tipicamente $> 10^6$ estrelas. Em cálculos PNs são necessários ainda mais três parâmetros: *clight* é o valor adotado para a velocidade da luz, definindo, portanto, a intensidade das correções PNs. Aqui vale salientar que, ao contrário do caso puramente Newtoniano, uma vez fixado o valor de *clight* a invariância de escala é perdida. Os outros dois parâmetros são: *ipn* (*Integer Post-Newtonian terms*; p.ex., *1PN*, *2PN*, *3PN*) e *hipn* (*Half-Integer Post-Newtonian terms*; p.ex., *2.5PN*, *3.5PN*). Estes são “*flags*” definidas pelo usuário, que ativam as diferentes ordens PNs, com *ipn* = *hipn* = 0 representando um cálculo puramente Newtoniano independente do valor de *clight*.

3.1.1 O Problema de Kepler

Nós começamos com o clássico problema de Kepler, comparando a nossa implementação com um método não simplético. Como usual, nós utilizamos o erro na energia total do sistema como indicador da qualidade da integração. Nós construímos condições iniciais para (\mathbf{r}, \mathbf{v}) tal que a binária, com massas $m_1 = m_2 = 1$, descreva uma órbita com excentricidade $e = 0.9$ e semi-eixo maior $a = 20/19 \approx 1.0526$ (i.e., distância relativa inicial, $d_0 = 2$). A Fig. 3.1 apresenta o comportamento do erro na energia total da binária durante a integração utilizando o método \mathcal{S}_2 e um integrador do tipo Runge-Kutta de 2ª ordem, ambos com

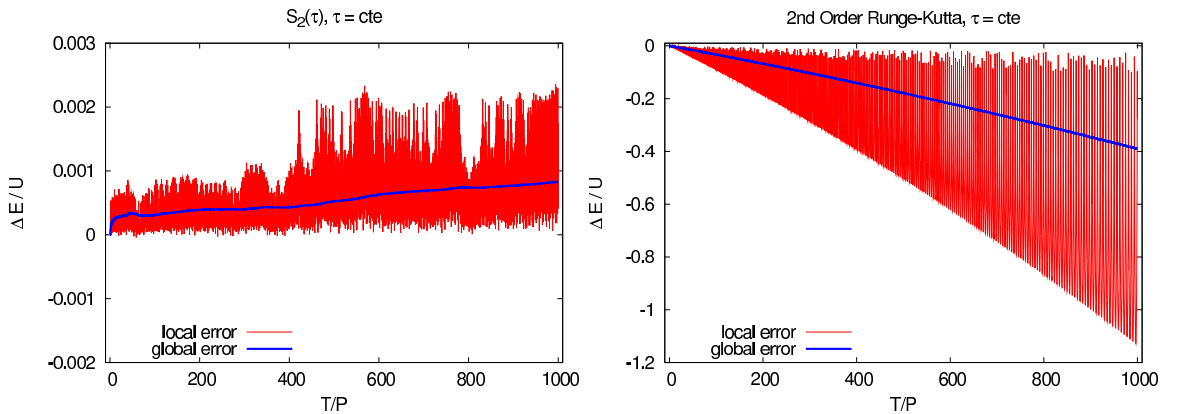


Figura 3.1: Comparação do nível de conservação da energia, pelo método simplético $\mathcal{S}_2(\tau)$ (painel esquerdo) e pelo método (não-simplético) de Runge-Kutta (painel direito), durante a integração de uma binária Kepleriana ($e = 0.9$) por $T = 1000$ períodos orbitais (P). Em ambos os casos, $\tau = cte$. O erro local (em vermelho) refere-se ao valor instantâneo de $\frac{\Delta E}{U}(t)$, enquanto o erro global (em azul) refere-se a média instantânea $\langle \frac{\Delta E}{U}(t) \rangle = \frac{\tau}{t} \sum_{s=0}^t \frac{\Delta E}{U}(s)$. Note, neste exemplo particular, que o método de Runge-Kutta falha desastrosamente.

passos de tempo constante (o valor de η foi selecionado tal que o custo computacional fosse aproximadamente o mesmo em ambos os métodos). Nota-se claramente que o método não-simplético gera uma solução cujo erro secular na energia aumenta linearmente com o tempo, enquanto que o método simplético \mathcal{S}_2 trabalha como esperado. O crescimento do erro secular na energia em integradores não-simpléticos têm como consequência o aumento (ou decréscimo) do semi-eixo maior orbital, resultando em sérias dificuldades para a modelagem de sistemas com estabilidade a longo prazo, como por exemplo, o caso do sistema solar. Em particular, quando se leva em conta correções PNs, onde a radiação gravitacional de fato ocasiona uma variação secular no semi-eixo orbital, é importante garantir que esta seja devido a física do problema e não a artefatos numéricos.

Na Fig. 3.2 nós apresentamos uma integração do mesmo sistema acima, dessa vez utilizando apenas o integrador \mathcal{S}_2 , mas permitindo que o passo de tempo possa variar afim de resolver a evolução orbital no momento de máxima aproximação. A figura mostra o comportamento da solução numérica quando se impõe um critério *ad-hoc* para mudar o valor do passo e quando se aplica o procedimento (2.34) para restaurar a simetria temporal da solução. Vê-se que o uso de passos de tempo variáveis introduz um erro secular que aumenta linearmente com o tempo. Por outro lado, o procedimento de simetrização temporal restaura a conservação da energia, embora a solução de fato não seja simplética e o custo computacional tenha aumentado afim de satisfazer a relação implícita (2.34).

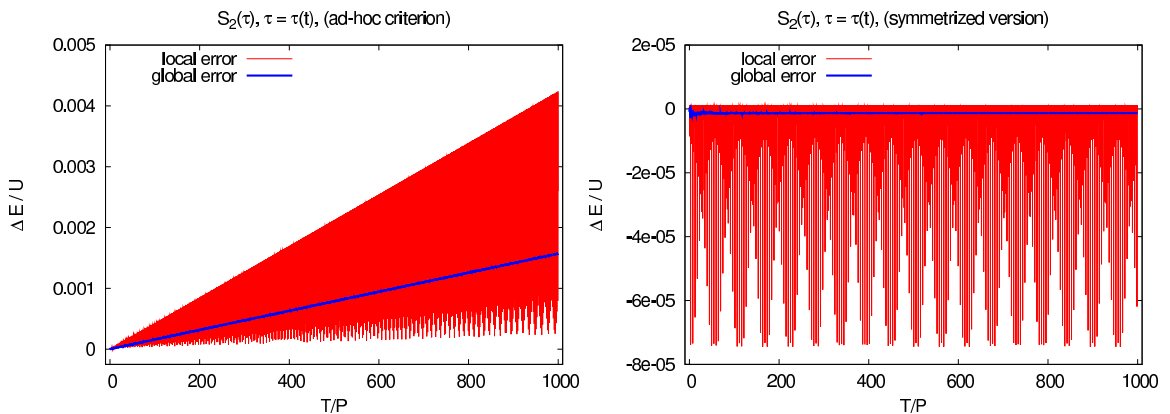


Figura 3.2: Nível de conservação da energia para o método \mathcal{S}_2 com passos de tempo variáveis. O painel a esquerda mostra o resultado da imposição de um critério *ad-hoc* e o painel a direita mostra o resultado após o procedimento de simetrização (2.34).

Para alguns sistemas este último método já seria bastante razoável, mas é possível fazer ainda melhor. Na Fig. 3.3 nós mostramos o nível de exatidão com que é possível integrar o problema de Kepler quando feito pelo método de regularização algorítmica, Eq.'s (2.41)-(2.47). É notável que este método gera, à menos da precisão da máquina, uma solução exata para a evolução orbital de uma binária Kepleriana. No painel a direita pode-se ver como o método trabalha na prática: os pontos fora da elipse referem-se às coordenadas na

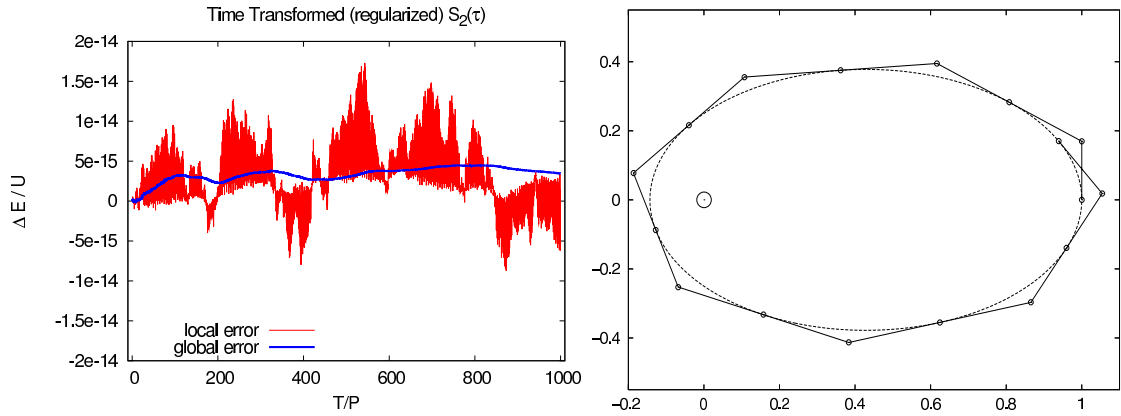


Figura 3.3: O painel a esquerda mostra o nível de conservação da energia na integração da binária Kepleriana pelo método de regularização algorítmica, Eq.'s (2.41)-(2.47). O painel a direita (retirado de Mikkola (2008)) ilustra como o método trabalha na prática, para uma órbita elíptica sobre o plano XY.

metade do passo (i.e., $\mathbf{r}_{1/2}$), enquanto os pontos inicial e final (\mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1) estão exatamente sobre a elipse. Tendo demonstrado que a nossa implementação trabalha como esperado no caso Newtoniano, partimos agora para o caso PN.

3.1.2 O Problema de Kepler com Correções Pós-Newtonianas

Nós agora consideramos a introdução de correções PNs à integração numérica do problema de Kepler. Para melhor demonstrar o efeito dos termos PNs, nós integramos dois sistemas binários. Primeiramente, nós consideramos as mesmas condições iniciais da seção anterior e integramos aquele sistema na presença de termos PNs conservativos somente (i.e., $ipn = 3$, $hipn = 0$). Isso permite-nos acessar o nível de conservação de energia do nosso método,

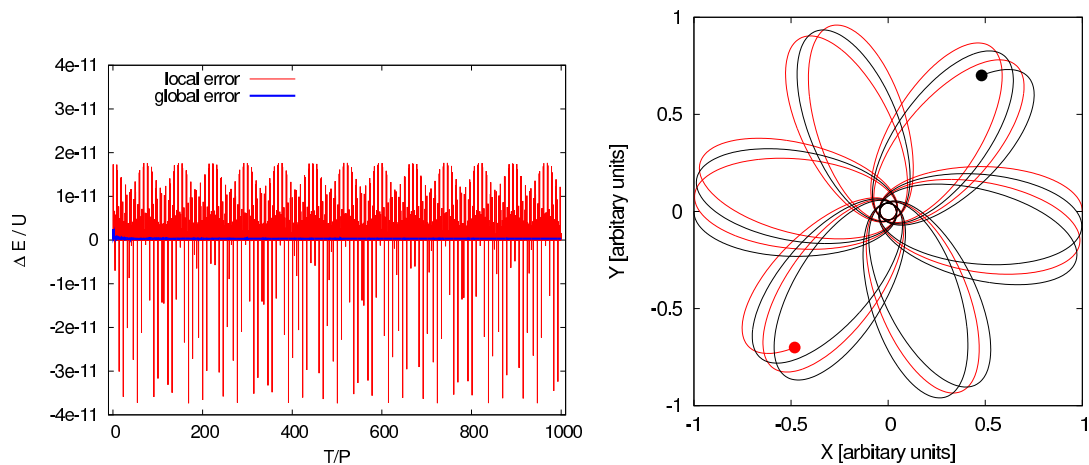


Figura 3.4: O painel a esquerda mostra o nível de conservação da energia para uma binária Kepleriana ($e = 0.9$) integrada na presença de termos PNs conservativos. No painel a direita nós apresentamos somente as primeiras ≈ 10 revoluções para ilustrar a precessão orbital.

Eq.'s (2.66)-(2.75), e ilustrar a precessão orbital causada pelas correções PNs. Aqui nós escolhemos arbitrariamente $clight = 16^*$. Pode-se ver na Fig. 3.4 que, embora o integrador não seja explicitamente simplético (veja discussão na seção 2.5), ele é robusto o suficiente para conservar, estavelmente, a energia da binária melhor que uma parte em 10^{10} . Isso garante que na ausência de termos de radiação o semi-eixo orbital de fato não sofre variação secular e, como esperado, a binária não decai.

Agora nós consideramos as correções PNs por completo (i.e., $ipn = 3$, $hipn = 2$). Neste caso, é interessante observar o decaimento orbital devido a presença dos termos de radiação gravitacional, além daqueles que dão conta da precessão. Para isso nós partimos de uma binária em órbita inicialmente circular. Note contudo que condições puramente Keplerianas não garantem a circularidade inicial da órbita na presença dos termos PNs. Para isso é preciso construir uma órbita circular de forma PN. Considerando que os membros de massas $m_1 = m_2 = 1$ estejam inicialmente separados por $d_0 = 2$, então necessita-se apenas encontrar as velocidades PNs iniciais. Uma vez que $v = \omega r$, o procedimento padrão é escrever as equações de movimento PNs (veja Apêndice A) em termos relativos, $dv/dt = (d/dt)(v_1 - v_2)$, e extrair o valor da frequência angular orbital ω através da comparação com a equação de um oscilador harmônico, $dv/dt = -\omega^2 r + \frac{1}{c^5} a_{2.5PN} + \frac{1}{c^7} a_{3.5PN}$. A expressão completa para ω é dada por Itoh (2004b). Feito isso, podemos integrar numericamente o sistema, agora com $clight = 8$, i.e., ainda mais relativístico. A Fig. 3.5 apresenta a solução obtida (painel esquerdo) e, para comparação, a evolução de um sistema similar (painel direito), usando relatividade numérica (retirado de Boyle et al. (2007)). A partir desta

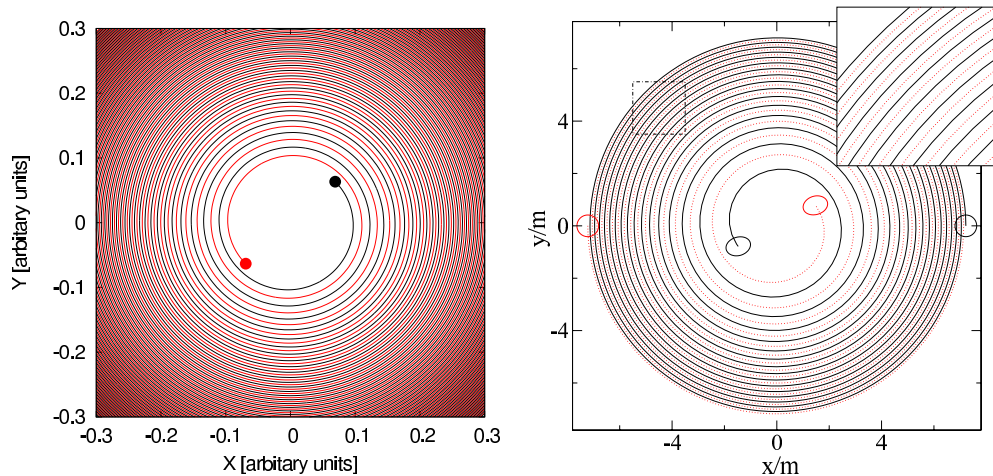


Figura 3.5: O painel a esquerda mostra a evolução orbital de nossa binária PN. Aqui nós mostramos somente a fase final do espiralamento orbital pela emissão de radiação gravitacional. Para comparação, o painel a direita (retirado de Boyle et al. (2007)) mostra a evolução de um sistema similar usando relatividade numérica.

*Para fins de comparação, uma binária com massa $m = 10^6 M_\odot$ e separação $d_0 = 1$ pc resulta, em nosso sistema de unidades adimensionais, $clight \approx 4571$.

figura fica evidente que a nossa implementação trabalha como esperado, dando uma solução qualitativamente similar a que se obtém com relatividade numérica. As diferenças são principalmente devidas à crescente perda de validade da aproximação PN com o decaimento do semi-eixo orbital. Isto está ilustrado na Fig. 3.6, que mostra a separação orbital da binária durante a simulação. Esta figura corresponde ao mesmo sistema mostrado no painel esquerdo da Fig. 3.5, exceto que alí a integração foi interrompida quando a separação orbital foi menor que $3R_{Sch}$. Este valor é marcado com um sinal “+” no painel direito da Fig. 3.6 e nos dá uma boa margem de segurança com relação a fase em que o erro na aproximação PN torna-se crítico. Assim, todas as simulações PNs que se seguem são interrompidas caso duas partículas se aproximem mais que $3R_{Sch}$, sendo assumido que alí tenha ocorrido a fusão do objetos.

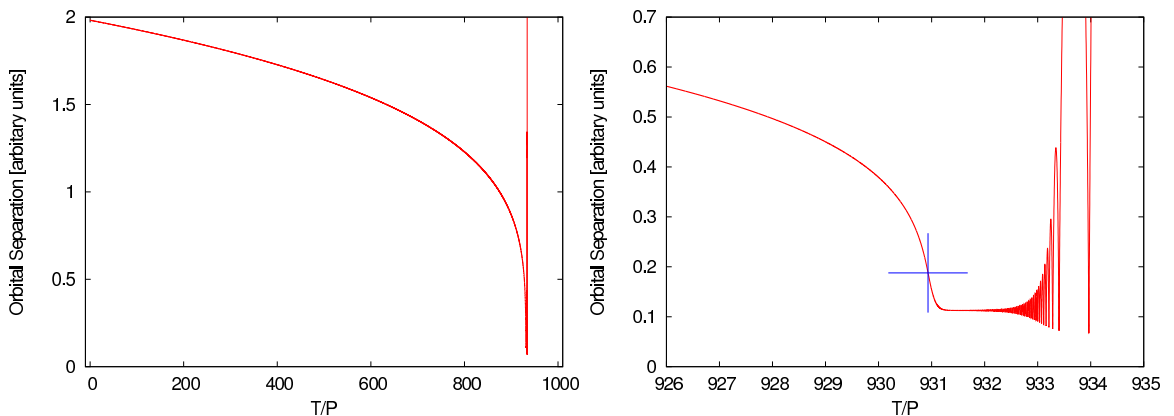


Figura 3.6: O painel à esquerda mostra a separação orbital de uma binária PN em espiralamento circular. O painel à direita destaca o momento em que a aproximação PN perde a validade, comparado ao comportamento esperado da Relatividade Geral. O sinal “+” representa uma separação equivalente a $3R_{Sch}$ e corresponde ao momento que a simulação da Fig. 3.5 foi interrompida.

3.1.3 Testes com Sistemas de N-Corpos

Para finalizar esta seção de testes numéricos nós apresentamos uma integração com um sistema de N-corpos. Nós consideramos um sistema com $N = 1024$ partículas inicialmente distribuídas segundo o perfil de densidade de Plummer aproximadamente em equilíbrio virial (Aarseth et al., 1974). Aqui todas as partículas tem massas iguais e nenhum buraco negro está presente, ou seja, todas as interações são Newtonianas. A Fig. 3.7 mostra o comportamento da energia total e o raio virial do sistema. Pode-se notar que o integrador é também relativamente robusto neste caso, embora seja necessário ainda implementar passos de tempo individuais e agregar uma regularização via transformação de coordenadas (ver Aarseth (2003)) em adição à regularização algorítmica, para obter melhor performance computacional (o presente cálculo levou cerca de 2 horas em um processador *Intel core*

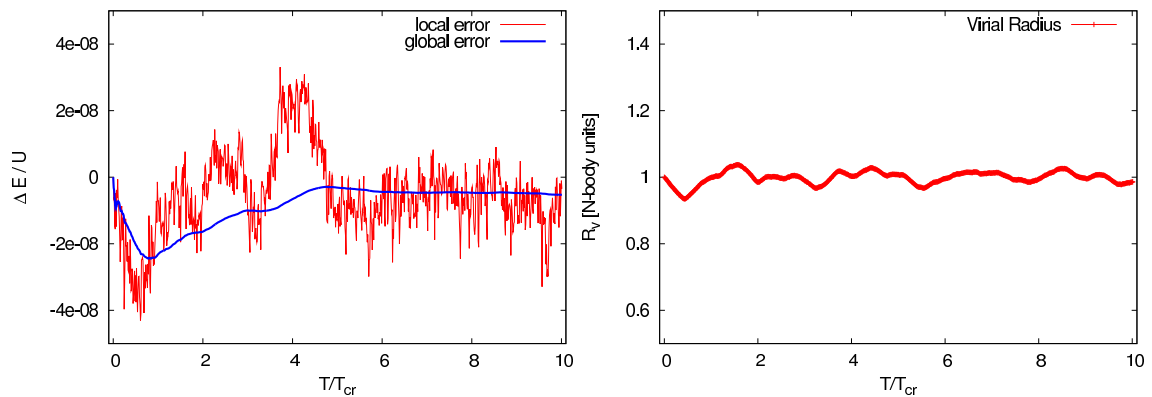


Figura 3.7: O painel a esquerda mostra o erro na energia total para um sistema com $N = 1024$ partículas distribuídas em um perfil de Plummer. A direita temos o raio virial mostrando que o equilíbrio dinâmico inicial é aproximadamente mantido por nosso método.

2 *duo* 2 GHz)[†], o que será feito futuramente. O raio virial do sistema, no painel direito da figura, mostra também que o equilíbrio virial é aproximadamente mantido pelo nosso método, como visto pela constância da curva. Além disso, o centro de massa e o momento angular do sistema são conservados exatamente (não mostrado aqui).

Como será visto na seção 3.3, a presença de SMBHs binários ou triplos em tais sistemas modifica dramaticamente sua evolução dinâmica, podendo inclusive levar à completa dissolução do sistema estelar com a ejeção simultânea dos SMBHs. Nosso objetivo principal é estudar as condições sob as quais o recuo gravitacional observado em NGC 5236 ocorreu. Para isso, vamos primeiramente apresentar um estudo da evolução dinâmica de dois ou três SMBHs isolados, afim de entender melhor o efeito das correções PNs, e só então partir para as simulações com SMBHs embebidos em sistemas estelares.

3.2 Estudando o Recuo Gravitacional com SMBHs Isolados

Nós iniciamos aqui a modelagem do recuo gravitacional em NGC 5236. A primeira questão a ser analisada é a influência das correções PNs sobre a evolução orbital dos SMBHs. Nós já vimos na seção anterior que em condições relativísticas extremas a dinâmica de sistemas binários é dramaticamente modificada pelas correções PNs. Naquele caso, contudo, nós utilizamos binárias simétricas ($m_1 = m_2$) e, como esperado, nenhum recuo gravitacional foi observado.

Em relatividade numérica, já é bem estabelecido que a velocidade do recuo é estritamente dependente da razão de massas em sistemas sem spin, como pode-se ver no painel direito da Fig. 3.8. No painel esquerdo desta figura nós temos uma ilustração mostrando

[†]Nosso código utiliza a biblioteca MPI (*Message Passing Interface*) para paralelização mas, neste exemplo, apenas um núcleo de processamento foi empregado.

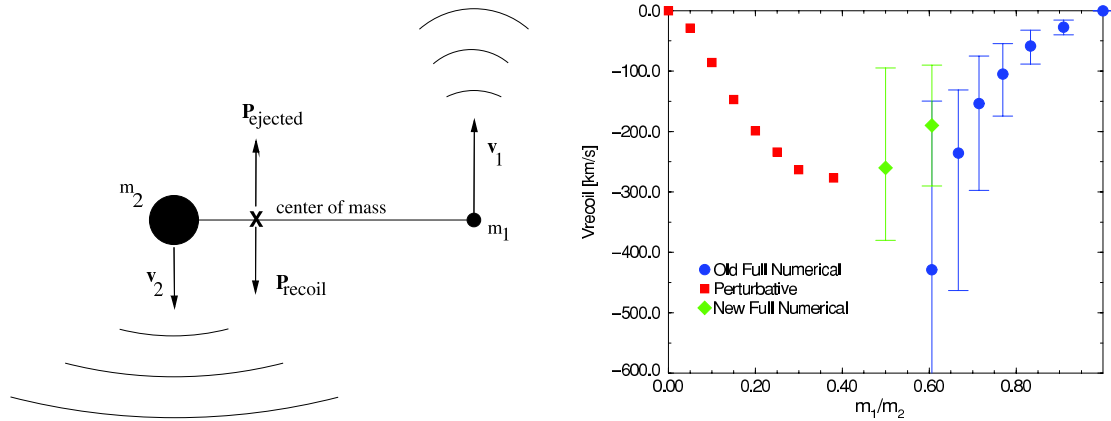


Figura 3.8: O painel a esquerda (retirado de Hughes et al. (2005)) ilustra como o recuo gravitacional aparece como consequência do campo de radiação gerado por uma binária assimétrica. O painel a direita (retirado de Campanelli (2005)) mostra a velocidade de recuo como função da razão de massas, para partículas sem spin.

como o recuo gravitacional ocorre como consequência do campo de radiação gerado por uma binária assimétrica. Alí o membro de menor massa, m_1 , movimenta-se com uma velocidade maior que o membro de maior massa, m_2 , e assim é mais efetivo em irradiar seu padrão de onda. Isto significa que existe um fluxo instantâneo líquido de momentum ejetado do sistema paralelo à velocidade de m_1 , com um recuo resultante na direção oposta por conservação do momentum total. Durante uma órbita, contudo, a direção do recuo muda continuamente e, assim, se a órbita for perfeitamente circular não haverá nenhum efeito interessante, ou seja, o centro de massa da binária descreveria um círculo e o recuo líquido seria nulo. Entretanto, quando a emissão de radiação gravitacional é intensa, a órbita não é perfeitamente circular. A evolução secular dissipativa da energia e momentum angular da binária faz com que os buracos negros espiralem um em direção ao outro e, uma vez que a órbita não fecha, o recuo líquido é não-nulo. Assim, o recuo acumula-se até que os buracos negros se fundem e estabelecem um estado de equilíbrio, “desligando” o fluxo de momentum. Com isso, a velocidade de recuo esperada para buracos negros sem spin atinge até cerca de 300 km s^{-1} como pode-se ver no painel direito da Fig. 3.8. A previsão teórica de tal resultado têm sido feita por Fitchett (1983), com a velocidade de recuo máxima ocorrendo em $m_1/m_2 \approx 0.382$. Sistemas com spin não-nulo, em contraste, podem exibir velocidades de até 4000 km s^{-1} (Campanelli et al., 2007a,b, Dain et al., 2008). Entretanto, como a velocidade radial (no plano da galáxia) de J133658.3-295105 determinada por Dottori et al. (2008) é cerca de $\approx 130 \text{ km s}^{-1}$, fica então justificado a nossa aproximação de usar equações PNs sem spin, tendo em vista que mesmo que J133658.3-295105 tenha sido ejetado a um ângulo de 60° do plano galáctico o módulo de sua velocidade ainda seria de $\approx 260 \text{ km s}^{-1}$.

Como um estudo prévio às simulações de N-corpos, nós analisamos aqui alguns casos com 2 ou 3 SMBHs isolados afim de vincular o tipo de sistema que melhor se adequa

à situação observada em NGC 5236. Pela discussão acima é óbvio que o “chute” gravitacional deve ocorrer justamente na fase final da colisão dos SMBHs, quando o fluxo de momentum atinge um máximo antes da fusão dos membros da binária. Uma vez que estamos limitados à dinâmica orbital para separações maiores que $3R_{Sch}$, nosso interesse aqui é buscar uma configuração cuja distância percorrida durante o recuo seja significativa, antes que a simulação tenha que ser interrompida. Com isso, pode-se esperar que provavelmente a fase mais interessante do recuo não seja capturada dentro da atual aproximação PN, sendo necessário o desenvolvimento do próximo termo, ordem $4PN$.

3.2.1 SMBHs Binários

Nós simulamos dois casos envolvendo SMBHs binários. Em ambos, nós utilizamos a razão de massas que maximiza a velocidade de recuo ($m_1/m_2 \approx 0.382$; ver Fitchett (1983)), partindo das mesmas condições iniciais, exceto pela excentricidade inicial que foi escolhida como $e = 0$ ou $e = 0.9$. A construção das condições iniciais PNs para o caso $e = 0$ segue o mesmo procedimento descrito na seção 3.1.2, enquanto que o caso $e = 0.9$ é obtido simplesmente multiplicando as velocidades iniciais por $\sqrt{1 - e^{\ddagger}}$, como no caso de uma binária Kepleriana. Com isso, nós somos capazes de construir uma binária PN já em regime relativístico, ao invés de ter que integrar o sistema desde condições puramente Keplerianas.

Nós escolhemos os seguintes parâmetros físicos para os SMBHs binários: massa total $m = 10^7 M_{\odot}$, com $m_1/m_2 \approx 0.382$ e separação inicial $d_0 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 2 \times 10^{-4} \left(\frac{0.1}{1-e} \right)$ pc. O fator entre parênteses é introduzido apenas por conveniência, tendo em vista que no caso circular a fase de emissão intensa de radiação gravitacional teria que aguardar o lento espiralamento da binária (como na Fig. 3.5), e demoraria muito mais tempo (veja abaixo) para ocorrer do que no caso com $e \lesssim 1$, onde ocorre a cada passagem pelo periélio. Em outras palavras, nós estamos adotando parâmetros físicos tais que o semi-eixo orbital seja o mesmo em ambos os casos ($e = 0$ e $e = 0.9$), embora computacionalmente a separação orbital seja a mesma. Como resultado o parâmetro *light*, que dá a intensidade das correções PNs, assume os valores ≈ 6.46 ($e = 0$) e ≈ 20.44 ($e = 0.9$). Fazendo assim nós teremos uma binária circular em condições relativísticas similares à uma binária excêntrica no momento da passagem pelo periélio, com aproximadamente o mesmo tempo de coalescência (quando convertidos em unidades físicas).

Na Fig. 3.9 nós mostramos a evolução orbital dos SMBHs binários para os casos $e = 0$ e $e = 0.9$. A trajetória do centro de massa da binária é mostrada em azul nesta figura, e nós vemos que mesmo assumindo as condições iniciais mais favoráveis para a ocorrência do recuo gravitacional, este é ainda completamente insignificante dentro de nossa (i.e., da PN) aproximação, comparado ao que se observa em NGC 5236. Isso mostra que o próximo

[‡] Isso não resulta em uma binária PN com excentricidade exatamente igual a e , mas é suficiente para o nosso interesse.

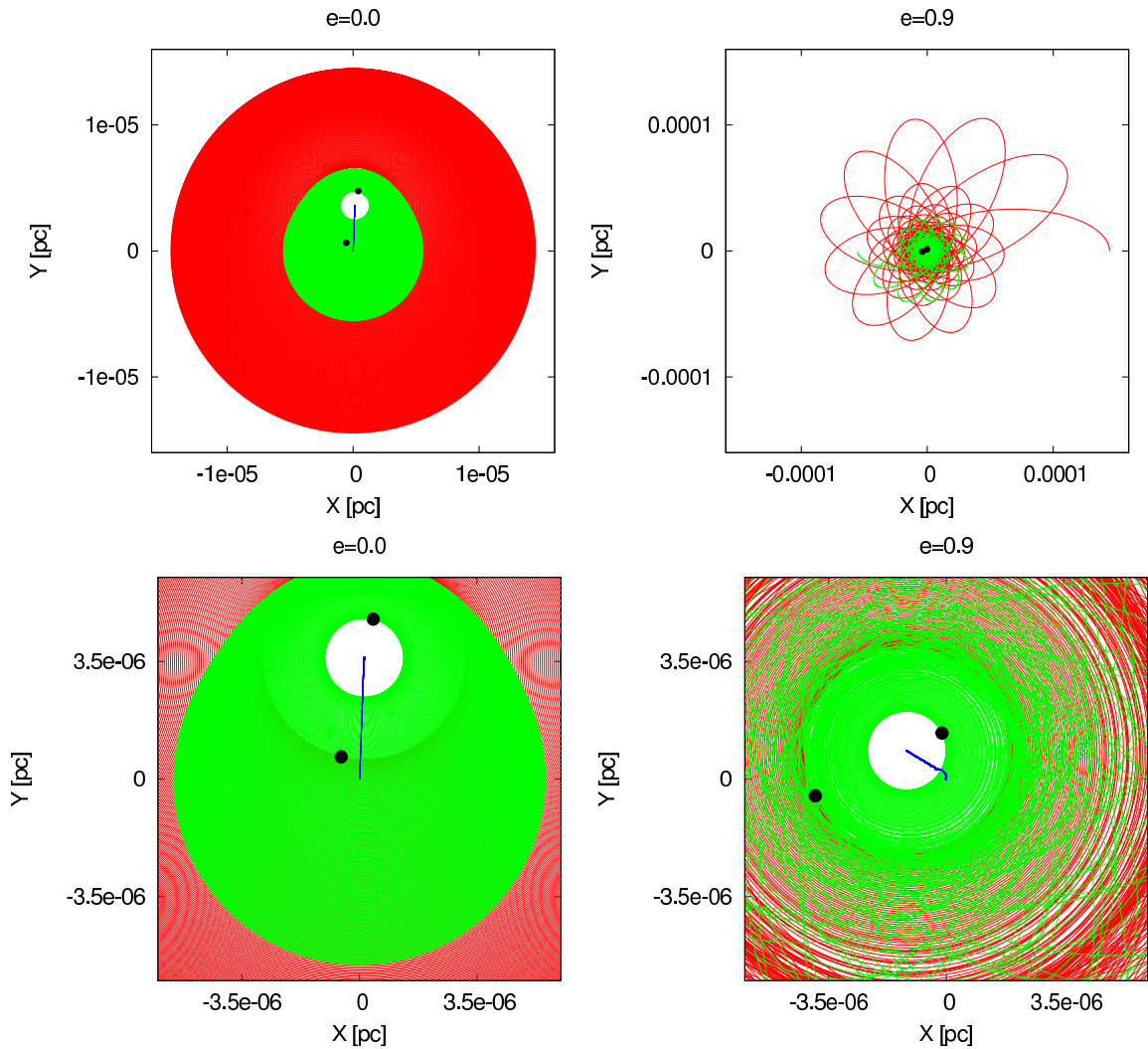


Figura 3.9: Os painéis superiores mostram a evolução orbital de SMBHs binários em órbitas circulares ($e = 0$, esquerda) e excêntricas ($e = 0.9$, direita), partindo de condições iniciais em regime relativístico. Trajetória em vermelho (verde) corresponde ao SMBH com massa m_1 (m_2). Os painéis inferiores destacam a região central onde pode-se ver a trajetória do centro de massa (mostrado em azul) durante o recuo gravitacional.

termo, ordem $4PN$, é realmente necessário para que se possa modelar realisticamente o recuo gravitacional em um sistema binário quando a separação orbital torna-se menor que $\sim 3R_{Sch}$, caso contrário somente através de relatividade numérica. O problema é que o impulso provocado pela emissão da radiação gravitacional torna-se significativo somente em tais separações, justamente quando o cálculo tem que ser interrompido, como visto na Fig. 3.10. A Fig. 3.10 mostra a evolução temporal da separação orbital da binária e a evolução do recuo do centro de massa no plano $R_{CM} \times V_{CM}$. Como pode-se ver nos painéis superiores desta figura, a escala de tempo de coalescência para este sistema é tão baixo

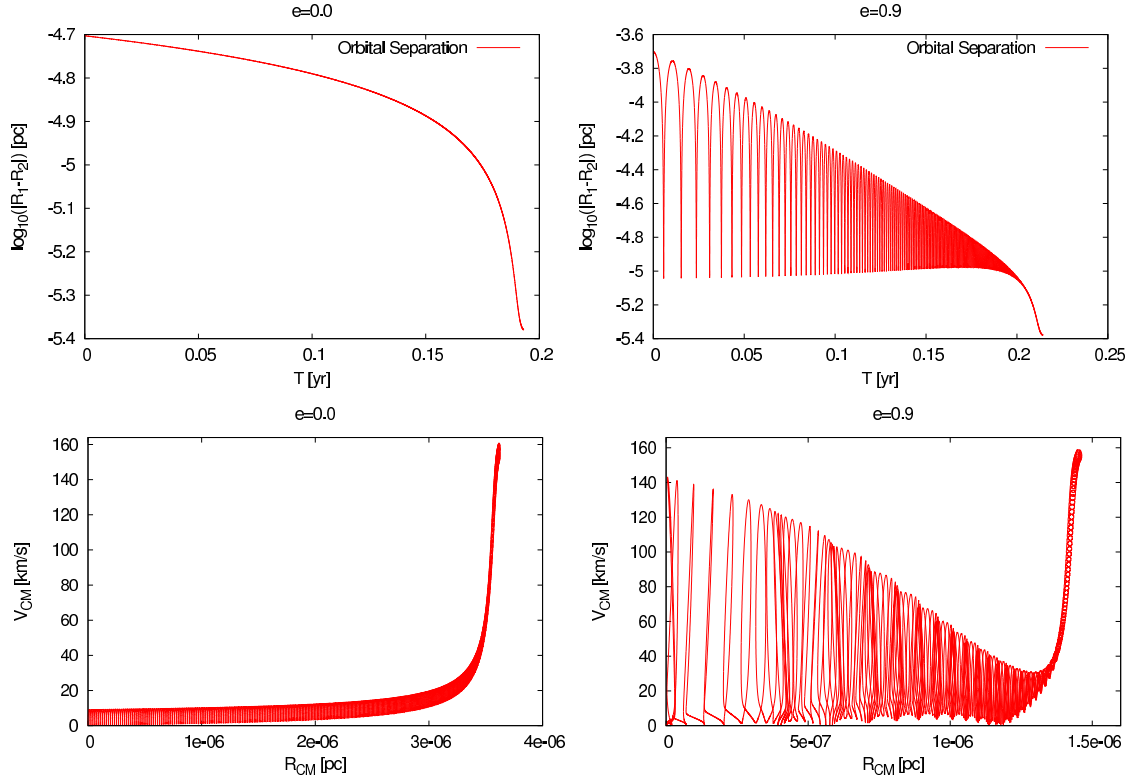


Figura 3.10: Painéis superiores: evolução temporal da separação orbital para SMBHs binários com excentricidade $e = 0$ (esquerda) e $e = 0.9$ (direita). Painéis inferiores: evolução do recuo do centro de massa vista no plano posição \times velocidade para os casos $e = 0$ (esquerda) e $e = 0.9$ (direita).

quanto ~ 0.2 anos, que pode ser comparada a previsão de Peters (1964),

$$t_{coal} = \frac{5}{64F(e)} \frac{c^5}{G^3} \frac{a^4}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}, \quad (3.1)$$

onde

$$F(e) = (1 - e^2)^{-7/2} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right). \quad (3.2)$$

Assim, se nós tivéssemos de fato integrado a binária circular partindo de $d_0 = 2 \times 10^{-4}$ pc ao invés de ter parametrizado pelo fator $\left(\frac{0.1}{1-e}\right)$, o tempo de coalescência esperado para o painel superior esquerdo na Fig. 3.10 seria $\sim 0.2 \left(\frac{1-e}{0.1}\right)^4$, com $e = 0$, o que resultaria em ~ 2000 anos, que concorda com a fórmula de Peters (1964) dentro de um fator 4. O caso $e = 0.9$, por outro lado, não precisa ser reescalado e está em acordo com a fórmula de Peters (1964) dentro de um fator 2. Convém salientar, no entanto, que a expressão (3.1)-(3.2) é derivada baseada em uma expansão quadrupolar apenas, o que corresponderia grosseiramente à ordem $2.5PN$.

Nos painéis inferiores da Fig. 3.10 nós vemos a evolução do recuo do centro de massa da binária no plano $R_{CM} \times V_{CM}$. Pode-se notar que em ambos os casos a velocidade de recuo chega a atingir $\sim 160 \text{ km s}^{-1}$ na fase final do cálculo mas, dada a necessidade de interromper a simulação, a distância percorrida pelo centro de massa durante um tempo relativamente curto é astrofisicamente desprezível. Uma vez que o recuo é um efeito cumulativo, poderia-se esperar que a evolução orbital anterior ao momento em que nós iniciamos o cálculo contribuiria para aumentar o nível de recuo, mas o que se pode inferir destas figuras é que tal aumento provavelmente seria de apenas umas poucas vezes o valor observado para R_{CM} . Assim o “chute” gravitacional deve ocorrer realmente na fase final da coalescência.

Um outro ponto interessante aqui é a diferença no padrão de onda emitido pelos sistemas com diferentes excentricidades. Embora nós não fomos capazes de extrair o sinal da onda gravitacional destes sistemas, de alguma forma ele se reflete nos diferentes comportamentos vistos no plano $R_{CM} \times V_{CM}$ para os casos mostrados. O fato de a binária circular emitir radiação gravitacional regularmente provavelmente explica o recuo por um fator ~ 2.3 a mais do que a binária excêntrica, onde a radiação é emitida intermitentemente (principalmente durante a passagem pelo periélio). A fase final onde a velocidade de recuo inicia o seu rápido crescimento é, contudo, bastante similar em ambos os casos porque a emissão de radiação gravitacional tende a dissipar qualquer excentricidade inicial e naquele momento a binária inicialmente excêntrica encontra-se em órbita quase circular. Vale notar que após a coalescência seria possível substituir a binária por um objeto com a massa da binária e posição e velocidade do seu centro de massa e continuar a simulação, mas nós ainda não implementamos esta sofisticação em nosso código. Isso provavelmente resultaria em um objeto com velocidade suficiente para escapar de alguns centros galácticos e será feito em um trabalho futuro. Com isso, passamos agora ao estudo do caso com 3 SMBHs.

3.2.2 SMBHs Triplos

Por causa de sua natureza caótica, seria relativamente difícil varrer todo o espaço de parâmetros em um estudo com SMBHs triplos. Assim, nos limitamos aqui a análise de dois sistemas com 3 SMBHs. Nós escolhemos condições iniciais relativamente artificiais, mas cuja evolução orbital Newtoniana é bem conhecida. Assim nós podemos construir um modelo pictórico da influência das correções PNs quando mais que 2 SMBHs estão presentes. Além disso, estes sistemas são de fato bastantes distintos do ponto de vista de estabilidade orbital. O primeiro deles corresponde a uma solução recentemente descoberta para o problema Newtoniano de 3 corpos (Moore, 1993, Chenciner & Montgomery, 2000), no qual os objetos com massas idênticas descrevem uma órbita em forma de oito, que é extremamente robusta com relação a pequenas perturbações e se mantém por longos períodos de tempo. A Fig. 3.11 ilustra as condições iniciais para este sistema, com a órbita descrita pelos 3 corpos.

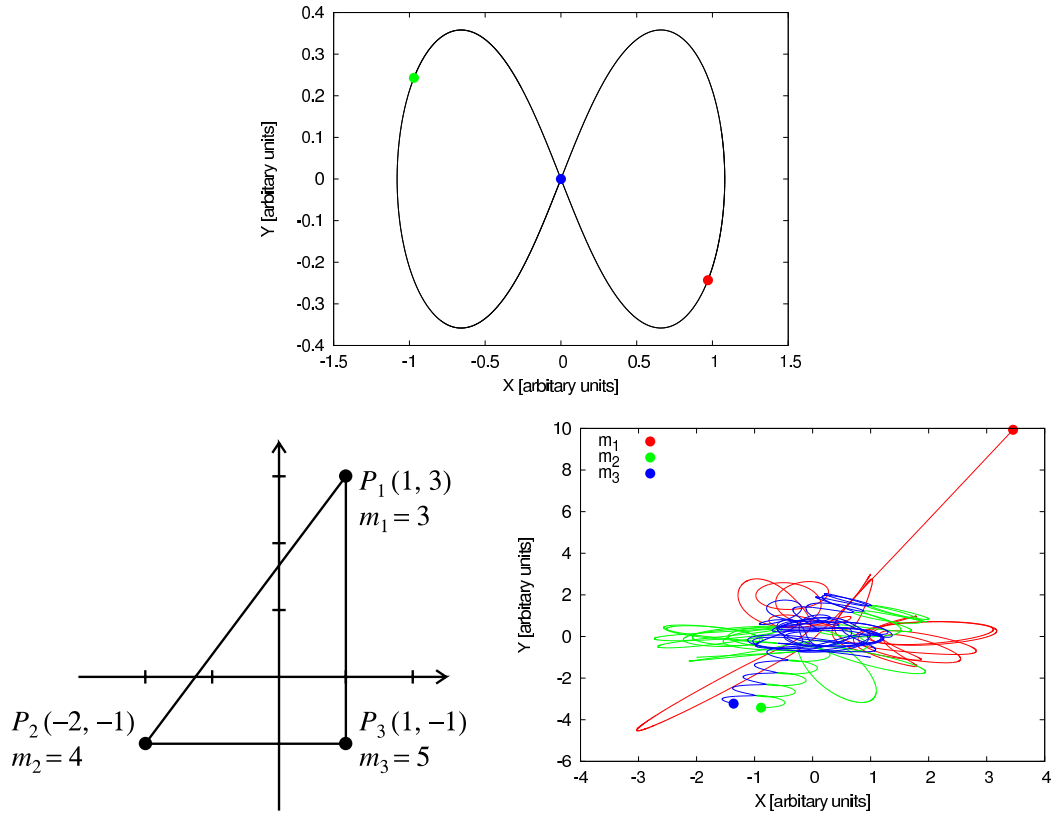


Figura 3.11: Painel superior: condições iniciais para 3 corpos descrevendo uma órbita em forma de oito: $m_1 = m_2 = m_3 = 1$; $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2 = 0.97000436\hat{x} - 0.24308753\hat{y}$, $\mathbf{r}_3 = 0$; $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2 = -2\mathbf{v}_3 = -0.93240737\hat{x} - 0.86473146\hat{y}$. Painéis inferiores: esquerda: condições iniciais para o problema Pitagórico (velocidades iniciais são nulas); direita: solução numérica no caso puramente Newtoniano.

O segundo sistema corresponde ao chamado problema Pitagórico, onde corpos com massas 3:4:5 estão dispostos nos vértices de um triângulo, cujos lados têm valor igual a massa que encontra-se no vértice oposto. As condições iniciais para o problema Pitagórico estão ilustradas na Fig. 3.11, onde também é mostrado a solução obtida em uma integração puramente Newtoniana. Como pode-se ver, este sistema exibe uma complicada evolução orbital com várias colisões entre os diferentes pares de partículas, resultando na ejeção do corpo de menor massa e a formação de uma binária seguindo na direção oposta.

Nós realizamos duas simulações para cada um destes sistemas, variando apenas o parâmetro *clight*, que define a intensidade das correções PNs. Na Tab. 3.1 nós apresentamos as unidades físicas escolhidas e o correspondente valor de *clight* para cada simulação. A Fig. 3.12 mostra a evolução orbital para os modelos M111. Nós vemos que no caso de M111a, onde a integração foi realizada por um período de $\sim 1.05 \times 10^{10}$ anos, a órbita dos 3 SMBHs difere apenas ligeiramente do caso puramente Newtoniano. Isso mostra que deveria haver algum mecanismo externo que levasse tal sistema a um regime de radiação gravitacional mais intenso para que ocorra a fusão dos SMBHs. Isso vale também para

Tabela 3.1: Colunas: 1) tipo de sistema; 2) denominação do modelo (números referem-se a razão de massas); 3) unidade de massa; 4) unidade de comprimento; 5) velocidade da luz dividida pela unidade de velocidade (definida pela escolha de $[M]$ e $[L]$).

Sistema	Modelo	$[M]$ (M_{\odot})	$[L]$ (pc)	c_{light}
Figura Oito	M111a	10^6	1	≈ 4571
	M111b	10^8	0.001	≈ 14.45
Problema Pitagórico	M345a	10^6	1	≈ 4571
	M345b	10^6	0.1	≈ 1445

sistemas binários. Se, por exemplo, a fricção dinâmica que produz o espiralamento de SMBHs durante fusões entre galáxias não for efetiva o suficiente para levá-los até separações $\lesssim 0.1$ pc, então provavelmente eles não poderiam coalescer em menos que um tempo de Hubble, e isso implicaria que deveríamos observar diversos casos de centros galácticos com SMBHs múltiplos. Essa questão seria menos problemática se os SMBHs pudessem chegar a tais separações estando aproximadamente em órbita de colisão mas, de forma geral, isso não necessariamente ocorre e a construção de um cenário mais conclusivo depende de simulações de N-corpos de alta resolução ($N \gtrsim 10^6$).

Por outro lado, supondo que de algum modo os SMBHs cheguem ao regime radiação gravitacional intensa, nós simulamos o modelo M111b (Fig. 3.12) afim de mostrar o que poderíamos esperar neste limite. Neste modelo nós aumentamos a escala de massas por um fator 100 e diminuimos a escala de comprimento por um fator 1000 em relação ao M111a, de modo que o sistema emite radiação gravitacional até a coalescência em ~ 44.4 anos. Nesta simulação os SMBHs triplos começam “espiralando” sobre a órbita em forma de oito que, interessantemente, é aproximadamente mantida durante a fase inicial de recuo até pouco antes da coalescência entre dois dos SMBHs, quando o eixo-maior do oito gira rapidamente devido ao efeito dos termos PNs de precessão, provocando a colisão dos SMBHs. Neste

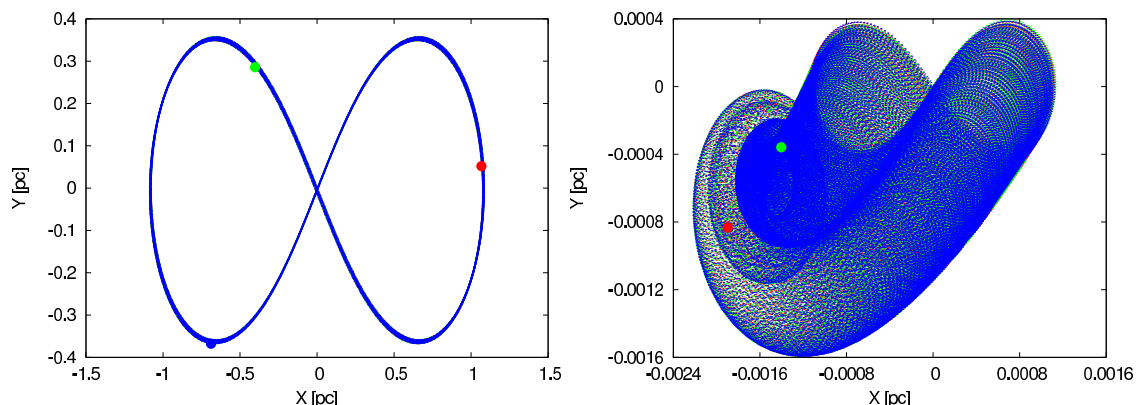


Figura 3.12: Painel esquerdo: evolução orbital durante $\sim 1.05 \times 10^{10}$ anos para o modelo M111a. Painel direito: evolução orbital para o modelo M111b, onde a fusão dos SMBHs ocorre em ~ 44.4 anos.

momento a simulação teve que ser interrompida mas as componentes da velocidade do terceiro SMBH indicam que ele provavelmente fusionaria com os outros. Pode-se notar que o fato das massas dos 3 SMBHs serem iguais não anula o recuo gravitacional como no caso de SMBHs binários. Isso porque a presença do terceiro SMBH introduz alguma assimetria na emissão da radiação. Contudo, neste caso o recuo total ainda não é significativo, dentro da atual aproximação PN, para ser compatível com o observado em NGC 5236.

As simulações para os modelos M345 são apresentadas nas Fig.'s 3.13 e 3.14. Estes modelos são particularmente interessantes para o nosso objetivo de modelar o recuo em NGC 5236, pois eles demonstram de forma bastante evidente o que provavelmente ocorreu no centro desta galáxia. O modelo M345a (Fig. 3.13) segue uma evolução orbital inicialmente bastante similar ao caso puramente Newtoniano, mas devido às várias colisões com parâmetros de impacto de algumas centenas a dezenas de R_{Sch} , o efeito das correções PNs aos poucos leva os SMBHs a órbitas distintas, até a última colisão tripla que resulta na ejeção do menor SMBH com a binária seguindo na direção oposta. Note, contudo, que a ejeção do SMBH deu-se (casualmente) na direção oposta ao modelo Newtoniano, por conta das órbitas parcialmente modificadas durante toda a evolução do sistema. A binária, por outro lado, recua por conservação do momentum mas, dada a elevada excentricidade no momento de sua formação, esta acaba atingindo o regime de radiação gravitacional a cada passagem pelo periélio e coalesce dentro de $\sim 7.38 \times 10^4$ anos, quando a simulação é interrompida. A duração total da simulação foi de $\sim 5.27 \times 10^5$ anos. A comparação do tempo de coalescência da binária com a fórmula de Peters (1964), Eq.'s (3.1)-(3.2), nos dá que sua excentricidade no momento de formação foi tão alta quanto $e \sim 0.999 - 0.9999^{\S}$.

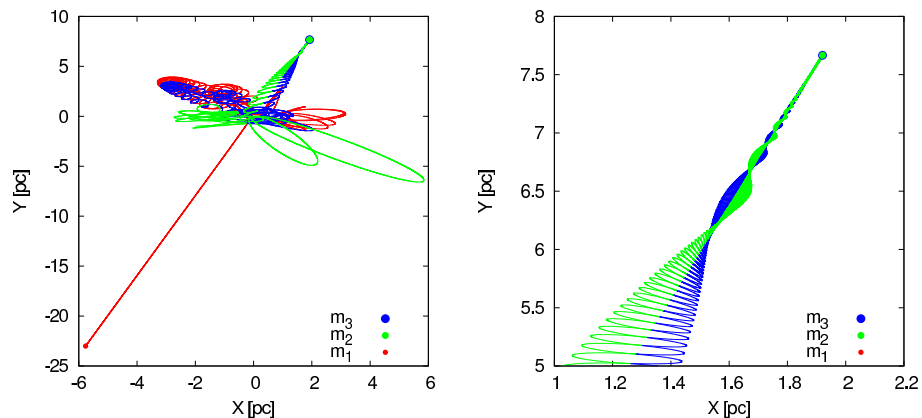


Figura 3.13: Evolução orbital para o modelo M345a. A simulação tem duração de $\sim 5.27 \times 10^5$ anos. A fase final da coalescência do par de SMBHs mais massivos é destacada no painel a direita, onde tempo de coalescência foi de 7.38×10^4 anos, contado desde o momento de sua formação.

[§]Esta faixa de valores é obtida assumindo que a divergência da fórmula de Peters (1964) com relação a nossa determinação numérica seja de um fator 2.

A velocidade do SMBH de menor massa no momento de ejeção foi de $\sim 253 \text{ km s}^{-1}$ mas ao final da simulação esta já encontrava-se em $\sim 64 \text{ km s}^{-1}$ para um raio de $\sim 25 \text{ pc}$. Isso mostra que em um sistema real tal SMBH provavelmente ficaria preso ao poço de potencial do centro galáctico e decairia novamente por consequência da fricção dinâmica. Por outro lado, a binária recua na direção oposta com velocidade inicial de $\sim 84 \text{ km s}^{-1}$, caindo para $\sim 21 \text{ km s}^{-1}$ até pouco antes da fase final de coalescência, onde aumenta novamente devido a emissão de radiação gravitacional para cerca de $\sim 97 \text{ km s}^{-1}$ (de forma similar ao que se observa nos painéis $R_{CM} \times V_{CM}$ da Fig. 3.10). Uma vez que a velocidade do “chute” gravitacional provavelmente aumentaria ainda mais durante o mergulho final para a coalescência (abaixo dos $3 R_{Sch}$), então o cenário que podemos montar é que o rádio-quasar J133658.3-295105 provavelmente é um objeto derivado de um par de SMBHs coalescidos que recuaram gravitacionalmente do centro de NGC 5236 de forma similar ao que se observa nestas simulações, enquanto que o deslocamento do núcleo óptico de NGC 5236 estaria associado à ejeção do terceiro SMBH. Se este for o caso, então o nosso modelo implica que a fonte J133658.3-295105 deve estar associada a um SMBH com massa da ordem de $\sim 10^7 M_{\odot}$, que está em forte acordo com a escala de massas propostas por Fujita (2008, 2009) para explicar a emissão em raios-X de SMBHs recuados de galáxias espirais.

A Fig. 3.14 mostra a simulação para o modelo M345b. Neste caso os SMBHs começam a interagir a partir de distâncias da ordem de 0.1 pc , que foi suficiente para causar a fusão do par mais massivo após umas poucas colisões. A duração da simulação foi ~ 2646 anos e o tempo de coalescência da binária, desde o momento de sua formação, foi ~ 7.1 anos que, comparado a fórmula de Peters (1964), nos dá uma excentricidade inicial de $e \sim 0.967 - 0.977$. Nesta simulação nós encontramos um comportamento interessante, como visto no painel direito da Fig. 3.14. Alí pode-se notar que embora os SMBHs colidam quase frontalmente, o recuo ocorre efetivamente na direção perpendicular a direção de encontro.

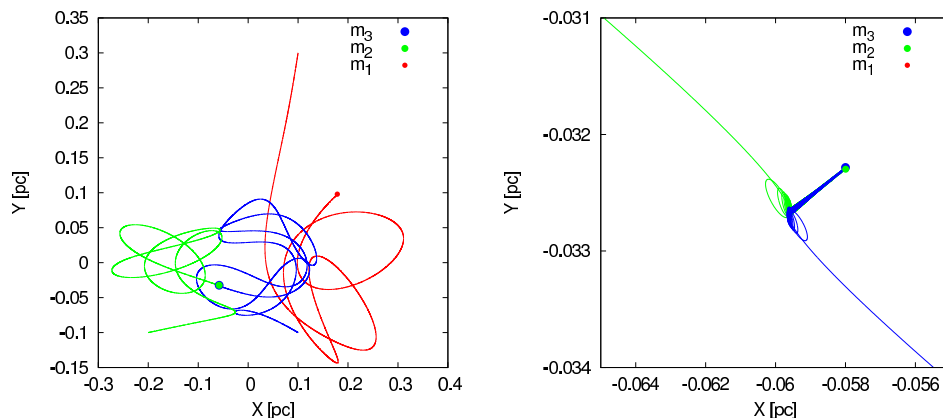


Figura 3.14: Evolução orbital para o modelo M345b. A simulação tem duração de ~ 2646 anos. A fase final da coalescência do par de SMBHs mais massivos é destacada no painel a direita, onde tempo de coalescência foi de ~ 7.1 anos, contado desde o momento de sua formação.

Esse comportamento deve ser consequência de vários efeitos. No caso de SMBHs binários em órbita quase circular a direção de recuo é basicamente definida pela direção da velocidade relativa inicial entre os objetos. Assim, se os SMBHs têm velocidades iniciais $\pm v_y$ ($v_x = v_z = 0$) a direção de recuo fica sobre o eixo y . Entenda-se aqui a direção de recuo como uma média sobre o período orbital, já que instantaneamente ela muda continuamente. É difícil dizer precisamente o que ocorre no caso de órbitas excêntricas, mas o painel inferior direito na Fig. 3.9 mostra que provavelmente existe alguma dependência na direção de recuo com a excentricidade inicial. Finalmente, devemos notar que o terceiro SMBH deve exercer um importante papel nesse sentido, pelo seguinte motivo. A partir de um certo momento os SMBHs binários formam um sistema tão compacto que a influência (Newtoniana) do terceiro SMBH sobre sua evolução orbital é praticamente desprezível. Contudo, devemos lembrar (veja Apêndice A) que a aceleração PN depende não só das massas e distâncias mas também das velocidades relativa e absoluta dos corpos. Assim, a medida que a binária torna-se mais compacta a velocidade absoluta de seus membros aumenta e, portanto, as velocidades relativas entre eles e o terceiro SMBH aumenta. Com isso, o terceiro SMBH pode de fato contribuir para o recuo da binária, principalmente na fase final onde a velocidade absoluta dos membros da binária chegou a atingir $\sim 0.16c$ nesta simulação. Isso provavelmente explica também o fato que a velocidade de recuo do centro de massa da binária no momento em que a simulação foi interrompida chegou a $\sim 371 \text{ km s}^{-1}$, mesmo a razão de massas da binária não sendo a que maximiza o recuo (ver Fig. 3.8). Se levarmos em conta que esse valor deve aumentar ainda mais durante o mergulho para a coalescência (abaixo de $3 R_{Sch}$), então parece evidente que tal objeto recuaria com velocidade alta o suficiente para ser “chutado” de um centro galáctico, o que reforça nosso cenário para o rádio-quasar J133658.3-295105 em NGC 5236. Por outro lado, uma vez que o terceiro SMBH sofre o efeito contrário devido a interação com a binária este deveria recuar na direção oposta com velocidade $\sim -123 \text{ km s}^{-1}$ (o sinal negativo apenas enfatiza uma direção de recuo oposta a da binária). De fato, nós medimos no fim da simulação uma velocidade de somente $\sim -13 \text{ km s}^{-1}$ para o recuo do terceiro SMBH pois no momento da colisão dos outros SMBHs este se afastava deles e foi efetivamente freiado pela interação com a binária relativística. Este é um fenômeno interessante que deverá ser investigado em futuros trabalhos.

Nós lembramos que a dispersão de velocidades em um aglomerado globular é tipicamente $\sim 20 \text{ km s}^{-1}$. Assim, um SMBH que eventualmente resulte de um processo de recuo gravitacional com velocidades $10 - 30 \text{ km s}^{-1}$, como nos casos acima, provavelmente levaria consigo parte das estrelas do aglomerado. Este é basicamente o cenário que se propõe para explicar o deslocamento do núcleo óptico de NGC 5236 com relação ao seu centro cinemático. Na próxima seção nós analisamos esse problema através de simulações de N-corpos.

3.3 Simulações de N-corpos com SMBHs

Nós realizamos um conjunto de simulações de N-corpos com SMBHs afim de mostrar que o deslocamento do núcleo óptico de NGC 5236 com relação ao seu centro cinemático é consequência da interação dos SMBHs. As condições iniciais para as simulações são construídas como segue.

Primeiramente nós construímos uma distribuição esférica de estrelas seguindo um perfil de densidade de Hernquist (1990) com um raio de *cutoff* correspondente à 99% da massa total do perfil e geramos uma distribuição de velocidades isotrópica tal que o sistema esteja inicialmente em equilíbrio virial (o método utilizado é similar ao descrito em Aarseth et al. (1974) para um perfil de densidade de Plummer). Por simplicidade nós consideramos que todas as estrelas têm massas iguais. Em seguida nós inserimos alguma configuração de SMBHs dentro de um raio menor que o raio virial do aglomerado, mas tal que o centro de massa dos SMBHs coincida com o centro de potencial[¶] do aglomerado, e reajustamos as velocidades das estrelas (não dos SMBHs) de modo que o equilíbrio virial do sistema como um todo (estrelas + SMBHs) seja reestabelecido. Assim nós garantimos que a inserção dos SMBHs não provoca um eventual colapso do aglomerado. Em todos os casos nós consideramos os mesmos sistemas de SMBHs triplos analisados na seção anterior. Note que para inserir os SMBHs dentro do raio virial do aglomerado (que em nossas unidades adimensionais é igual a um) nós reescalamos suas massas e posições de modo que a razão m/r dos SMBHs permaneça constante e, assim, a invariância de escala do movimento se mantenha. Na prática, uma vez definido o sistema de SMBHs (M111 ou M345, ver seção 3.2.2) nós simplesmente escolhemos a massa total em SMBHs relativa ao aglomerado como um todo (estrelas + SMBHs) e o reescalamento nas posições via $m/r = cte$ é feito automaticamente. Por fim, nós reajustamos o centro de massa do aglomerado para que este coincida com a origem das coordenadas (note que isso não necessariamente implica que o centro de potencial também esteja na origem, mas, em geral, a discrepância é menor quanto maior o número de partículas, dada a simetria esférica do aglomerado). Na Tab. 3.2 nós apresentamos um resumo dos modelos simulados. Estas simulações fizeram uso dos recursos computacionais do Centro Nacional de Supercomputação (CESUP-UFRGS), sendo que cada uma delas levou cerca de 20–60 dias de processamento paralelo em 4 CPUs^{||}. Nós adotamos um parâmetro de precisão η tal que o máximo erro na energia total do sistema fosse sempre menor que 10^{-6} durante toda a simulação e um parâmetro de *softening* para estrelas de $\varepsilon = 4/N$ (ver seção 2.1).

[¶]Frequentemente utiliza-se o centro de densidade nestes casos, mas como nós temos um número de partículas relativamente pequeno ($N \sim 4000$) foi preferível usar o centro de potencial por ser uma grandeza menos sensível ao valor de N .

^{||}Nosso código poderia ser distribuído sobre um número maior de CPUs mas devido a alguns problemas com gerenciador de processos do cluster nós ficamos limitados a 4 CPUs somente.

Tabela 3.2: Colunas: 1) denominação do modelo (modelos com sufixo “a” ou “b” diferem apenas pela sequência de números aleatórios usada em sua construção); 2) número total de partículas (estrelas + SMBHs); 3) razão entre massa total em SMBHs e massa total do aglomerado (estrelas + SMBHs); 4) unidade de massa; 5) unidade de comprimento; 6) velocidade da luz dividida pela unidade de velocidade (definida pela escolha de $[M]$ e $[L]$).

Modelo	N	$M_{BH}/M_{cluster}$	$[M]$ (M_{\odot})	$[L]$ (pc)	$clight$
M111-4k-20a	4096	0.2	10^7	10	≈ 4571
M111-4k-20b	4096	0.2	10^7	10	≈ 4571
M111-4k-25a	4096	0.25	8×10^6	10	≈ 5111
M111-4k-25b	4096	0.25	8×10^6	10	≈ 5111
M111-8k-25	8192	0.25	8×10^6	10	≈ 5111
M345-4k-20a	4096	0.2	10^7	10	≈ 4571
M345-4k-20b	4096	0.2	10^7	10	≈ 4571
M345-4k-25a	4096	0.25	8×10^6	10	≈ 5111
M345-4k-25b	4096	0.25	8×10^6	10	≈ 5111
M345-8k-25	8192	0.25	8×10^6	10	≈ 5111

A Fig. 3.15 mostra uma sequência temporal de uma das simulações de mais alta resolução que nós realizamos, o modelo M345-8k-25. A simulação tem duração de $\sim 2.13 \times 10^7$ anos, mas a sequência na Fig. 3.15 foca somente a primeira metade onde pode-se ver a ejeção do SMBH de massa intermediária ($m_2 = 4$), com o recuo da binária ($m_1 + m_3 = 8$) levando o aglomerado na direção oposta. Apesar do número menor de partículas, os modelos com $N = 4096$ também apresentam um comportamento similar ao observado na Fig. 3.15, com exceção que agora é o SMBH de menor massa ($m_1 = 3$) que é ejetado em todos os casos. Essa diferença pode ser interpretada de duas formas. A primeira vem da natureza caótica de um sistema de N-corpos, onde condições iniciais ligeiramente diferentes levam a resultados distintos. Mas a segunda, e talvez mais importante, é que isso mostra que o número de partículas que foi possível utilizar nas simulações é ainda muito baixo; basta notar que a maior razão de massas entre estrelas e SMBHs presente nos cálculos é de somente $M/m \sim 853$, o que mostra que a influência de uma estrela individual sobre a dinâmica dos SMBHs é muito maior que em um sistema real (onde $M/m \sim 10^6$) e, por consequência, o efeito de fricção dinâmica deve não ser bem descrito em nossos cálculos. Isso, contudo, não invalida nossa simulação, uma vez que nosso interesse aqui se restringe ao estudo do recuo do aglomerado. Os modelos com SMBHs com massas iguais (M111) também mostram comportamentos bastante parecidos com o que se vê na Fig. 3.15, ejetando um dos membros e deixando o par resultante recuando na direção contrária e carregando parte do aglomerado. A única exceção aqui foi o modelo M111-4k-25b, onde ocorreu a ejeção simultânea de 1 + 2 SMBHs com o aglomerado permanecendo aproximadamente no centro, embora este tenha sofrido uma considerável expansão devido a súbita perda de massa.

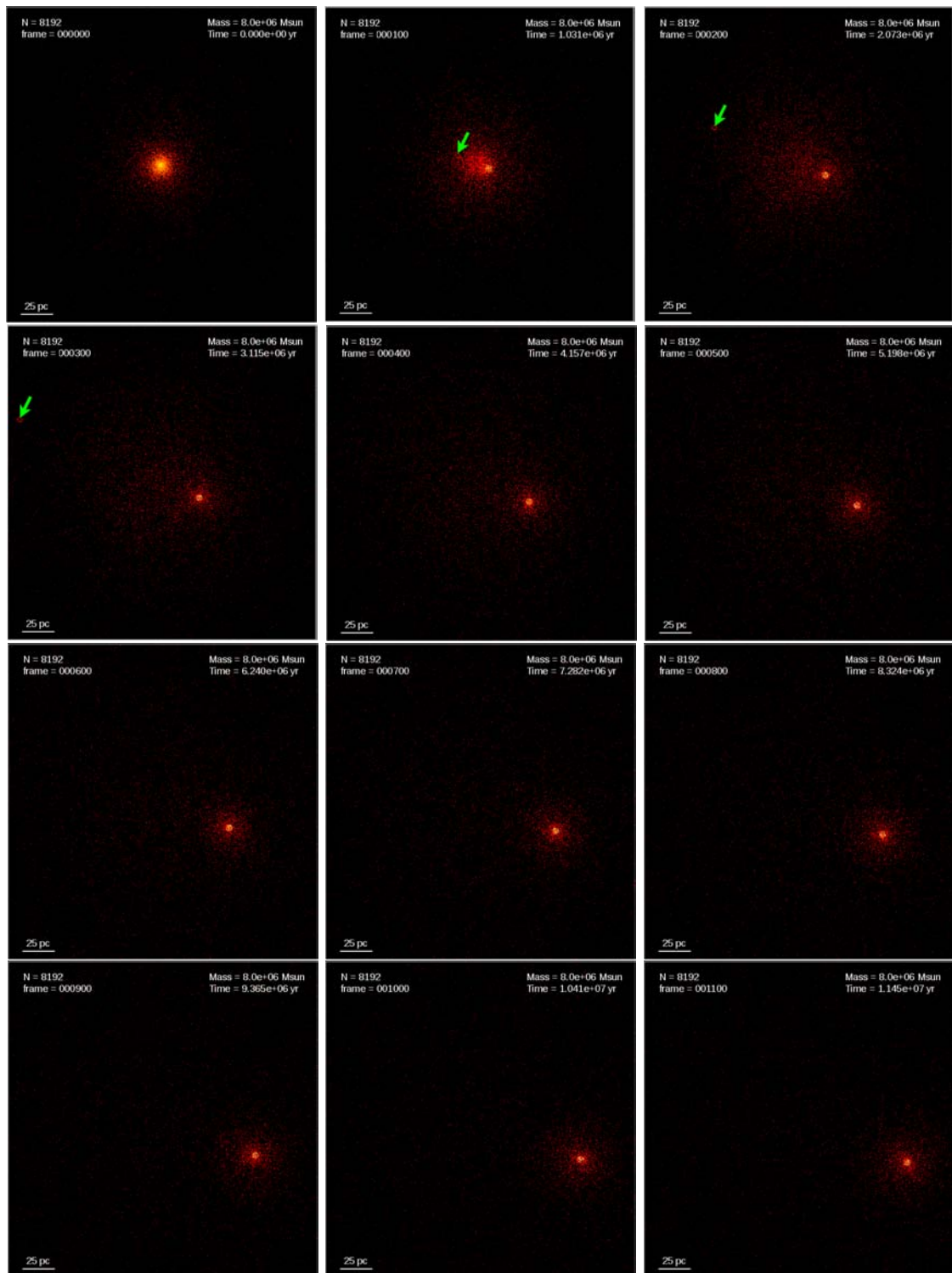


Figura 3.15: Os painéis mostram uma sequência temporal para a simulação do modelo M345-8k-25. O tempo aumenta da esquerda para direita e de cima para baixo. Cada painel tem comprimento lateral de 25 pc. A seta verde indica a posição do SMBH ejetado para três instantes da simulação.

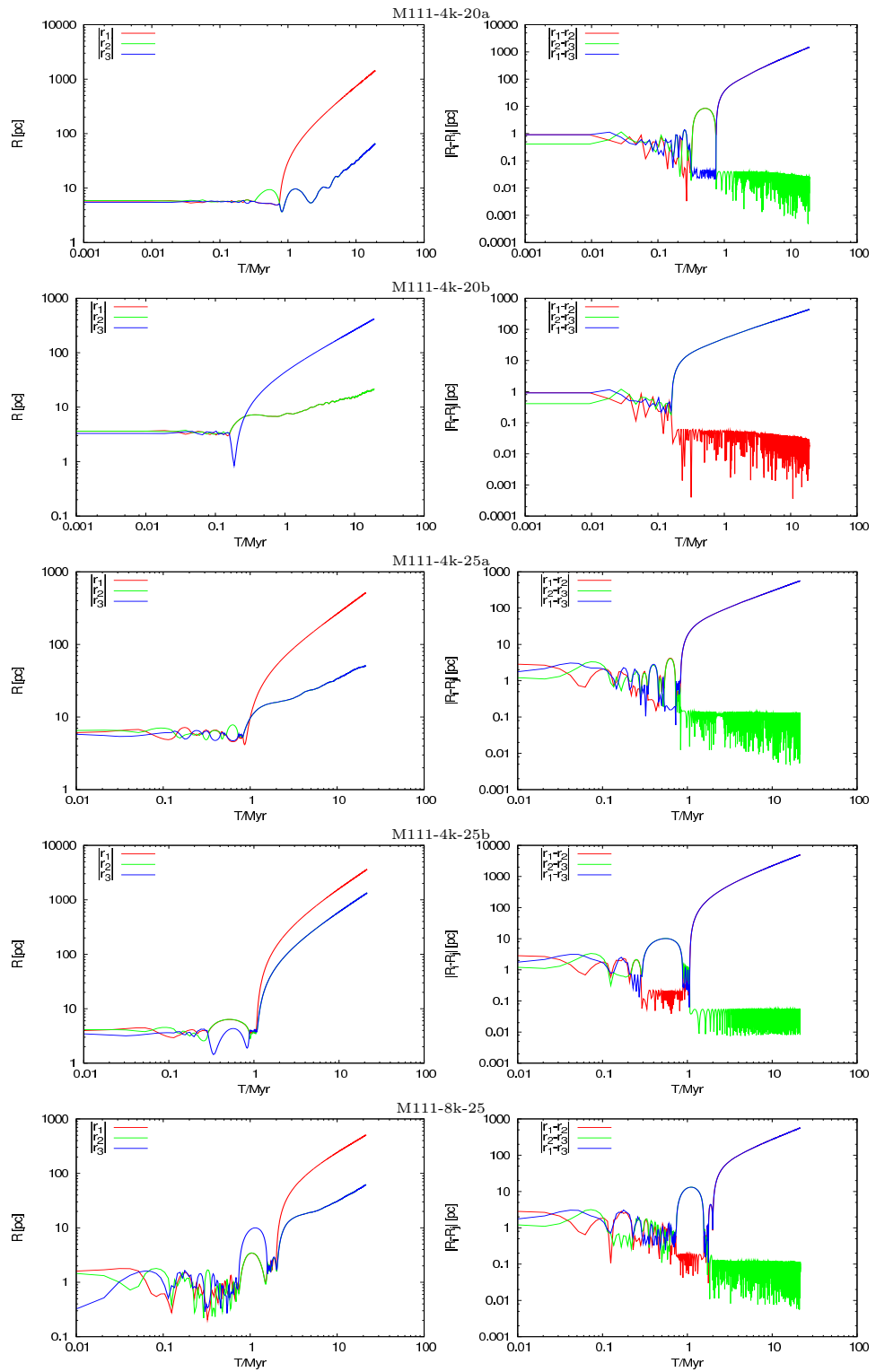


Figura 3.16: Painéis mostram a posição radial de cada SMBH (coluna esquerda) e a posição relativa de cada par de SMBHs (coluna direita) durante a simulação para os diferentes modelos M111.

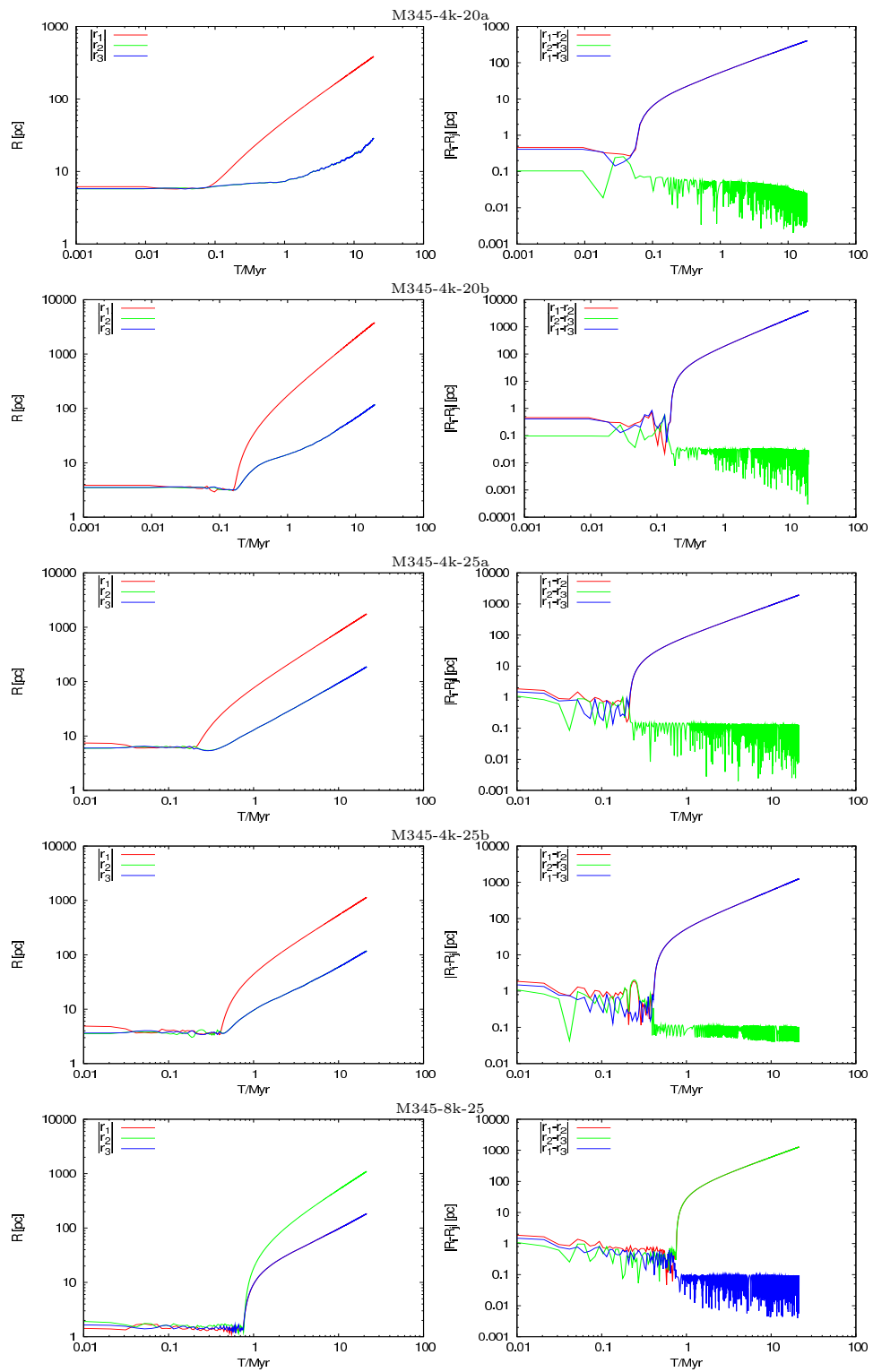


Figura 3.17: O mesmo que a Fig. 3.16, mas para os modelos M345.

Estes comentários tornam-se mais claros com as Fig.'s 3.16 e 3.17, onde são mostradas a posição radial de cada SMBH e a posição relativa de cada par de SMBHs durante as simulações para os diferentes modelos. Pode-se notar nestas figuras que a escala de tempo para que ocorra a ejeção de um dos SMBHs é tão curta quanto $\sim 0.1 - 2 \times 10^6$ anos, com a separação média dos SMBHs estando em torno de 1 pc no início da simulação. Como mostrado na coluna de painéis a esquerda nas Fig.'s 3.16 e 3.17, em todos os modelos o recuo da binária reponsável pelo deslocamento do aglomerado varia de $\sim 30 - 200$ pc, enquanto o SMBH ejetado da região central atinge uma distância radial de $\sim 0.4 - 4$ kpc após $\sim 2 \times 10^7$ anos de simulação, a única exceção sendo o modelo M111-4k-25b, cuja dinâmica resultou na expulsão de 1 + 2 SMBHs para distâncias maiores que 1 kpc, deixando o aglomerado praticamente no centro.

Uma grandeza interessante para mostrar que o aglomerado de fato acompanha os SMBHs binários durante seu recuo é o centro de massa das estrelas gravitacionalmente ligadas a eles, mas na prática não é tão simples extrair essa informação dos dados das simulações. Embora existam algoritmos especializados em encontrar grupos de partículas ligadas em simulações de N-corpos (Eisenstein & Hut, 1998) nós não o empregamos aqui. Isso deverá ser feito em futuras análises com simulações de mais alta resolução. Contudo, tomando o caso do modelo M345-8k-25 (Fig. 3.15) como exemplo, onde nota-se que o aglomerado acompanha o recuo dos SMBHs por ~ 200 pc (Fig. 3.17, painel inferior esquerdo), então fica claro por comparação com este caso que os outros modelos também demonstram um comportamento similar. De fato, o acompanhamento de uma animação gráfica da simulação mostra que isso realmente ocorre.

Com relação aos painéis da coluna direita nas Fig.'s 3.16 e 3.17, pode-se ver que os SMBHs começam a interagir a partir de distâncias relativas de ~ 1 pc com a formação de um par de SMBHs mais fortemente ligado gravitacionalmente e a expulsão do terceiro SMBH após cerca de $0.1 - 2 \times 10^6$ anos. Aqui fica claro que a energia responsável pela ejeção de um dos SMBHs da região central tem origem puramente gravitacional, extraída na formação da binária. Ou seja, pode-se dizer que a contribuição da radiação gravitacional para a ejeção do SMBH foi desprezível, tendo em vista que as distâncias envolvidas naquele momento foram $\sim 0.01 - 0.1$ pc, o que, para nossas unidades, é cerca de $10^3 - 10^4$ vezes maior que as distâncias necessárias para que o regime de radiação gravitacional torne-se apreciável. Isso deve explicar também o fato que a distância entre os membros da binária praticamente não decai (ou decai muito lentamente em alguns casos) dentro do tempo restante da simulação. Outro ponto que podemos notar é que não foi observado nenhuma colisão física entre os SMBHs em nenhum dos modelos simulados (compare p.ex. com o caso de SMBHs isolados na seção 3.2.2). Isso provavelmente deve-se ao fato de que a influência de estrelas individuais sobre a dinâmica dos SMBHs foi muito maior do que em um sistema real, o que, mais uma

Tabela 3.3: Velocidades no momento da ejeção de um dos SMBHs para os diferentes modelos, dadas em km/s e em unidades da dispersão de velocidades inicial do aglomerado, σ_0 . Os valores são apresentados na forma “X(Y)”, onde “X” corresponde à binária e “Y” ao SMBH expulso da região central.

	M111-4k-20a	M111-4k-20b	M111-4k-25a	M111-4k-25b	M111-8k-25
V (km/s)	89(191)	58(116)	49(104)	97(193)	48(96)
V/σ_0	1.35(2.91)	0.88(1.77)	0.84(1.77)	1.65(3.29)	0.81(1.63)
	M345-4k-20a	M345-4k-20b	M345-4k-25a	M345-4k-25b	M345-8k-25
V (km/s)	51(153)	69(219)	43(129)	39(113)	62(125)
V/σ_0	0.78(2.33)	1.05(3.34)	0.73(2.20)	0.66(1.92)	1.05(2.13)

vez, indica que deveríamos aumentar o número de partículas na simulação para tornar a modelagem mais realística.

Na Tab. 3.3 nós mostramos as velocidades de ejeção de um dos SMBHs e da binária em recuo, em unidades da dispersão de velocidades inicial do aglomerado, σ_0 . Nós vemos que na maioria dos casos os SMBHs binários recuam com velocidade menor ou da ordem de σ_0 . Isso confirma o nosso argumento anterior de que nestes casos o (ou parte do) aglomerado acompanha os SMBHs durante o recuo, enquanto o terceiro SMBH é ejetado praticamente despido de algum envoltório estelar. Os únicos casos em que a binária recua com velocidade maior que σ_0 são nos modelos M111-4k-25b e M111-4k-20a. No modelo M111-4k-25b, como dito anteriormente, de fato todos os SMBH são expulsos da região central com o aglomerado permanecendo aproximadamente em sua posição original. No modelo M111-4k-20a, por outro lado, o recuo do aglomerado junto com os SMBHs ainda é observado. Isso indica que a evolução dinâmica dos SMBHs antes da ejeção deve ter contribuído para aumentar a dispersão de velocidades do aglomerado em relação ao valor inicial. Assim, dentro das limitações do nosso modelo, pode-se dizer que o deslocamento do núcleo óptico de NGC 5236 com relação ao seu centro cinemático só pode ser explicado em um cenário de recuo gravitacional se a velocidade do SMBH em recuo for até cerca de ~ 1.5 vezes a dispersão de velocidades do aglomerado.

Por fim, deixe-nos fazer uma síntese de nossos resultados e discutir sua conexão com o que observamos em NGC 5236. Na seção 3.2 nós estudamos a evolução dinâmica de SMBHs binários e triplos em regime de radiação gravitacional e mostramos que dentro da atual aproximação PN um sistema de SMBHs triplos seria mais adequado para explicar o suposto recuo gravitacional em NGC 5236. Naquele caso nós concluimos ainda que o rádio-quasar J133658.3-295105 seria um subproduto de um sistema binário de SMBHs coalescidos durante o recuo gravitacional da região central, enquanto o terceiro SMBH seria ejetado com velocidade baixa o suficiente para permanecer dentro de umas poucas dezenas de *parsecs* centrais, sendo o provável responsável pelo deslocamento do núcleo óptico de NGC 5236 em relação ao seu centro cinemático. Na presente seção, por outro lado, nossas simulações com

N-corpos mostraram de fato que é o terceiro SMBH (frequentemente o de menor massa) que é ejetado da região central, enquanto a binária mais massiva recua na direção oposta carregando parte do aglomerado. Essas simulações também mostram que a ejeção do SMBH menos massivo deve ocorrer muito antes da binária atingir o regime de radiação gravitacional. Assim é possível identificar basicamente dois fenômenos ocorrendo nestas simulações. O primeiro, observado nos modelos com N-corpos, é o chamado “*gravitational slingshot*” onde há a expulsão de um dos SMBHs por troca energética com os outros dois. Assim, qualquer iteração adicional desta categoria tenderia a modificar a energia de ligação da binária, tipicamente tornando-a mais fortemente ligada. O segundo fenômeno, observado nos modelos com SMBHs isolados, é o chamado “*gravitational rocket*” (ou também “chute gravitacional”), onde a própria binária recuaria por consequência da emissão anisotrópica de ondas gravitacionais durante a coalescência. Nossos resultados mostram que o cenário de um recuo gravitacional é adequado para descrever a fonte J133658.3-295105 e, simultaneamente, o deslocamento do núcleo óptico de NGC 5236 como seus subprodutos. Dentro das limitações do nosso modelo, contudo, nós não podemos afirmar ainda qual fenômeno (“*slingshot*” ou “*rocket*”) foi de fato o responsável pelo recuo gravitacional observado em NGC 5236. Isso deverá ser analisado futuramente com simulações mais realísticas.

Capítulo 4

Conclusão

It is impossible to explain honestly the beauties of the laws of nature without some deep understanding of mathematics.

– Richard Feynman

Buscando fundamentar teoricamente o emergente cenário de um recuo gravitacional no centro de NGC 5236, neste trabalho nós estudamos diferentes tipos de colisões entre SMBHs por meio de simulações numéricas com sistemas binários e triplos usando uma aproximação Pós-Newtoniana de ordem $7/2$ ($\sim 1/c^7$).

Nós desenvolvemos um código de N-corpos especialmente construído para integrar as equações de movimento Pós-Newtonianas. Este é baseado em um método de integração simplética com passos de tempo variáveis e regularizado via uma transformação temporal. Nossos experimentos numéricos demonstram que o código é robusto, podendo tratar qualquer razão de massas entre partículas. Em particular, este gera soluções exatas (na precisão da máquina) no caso de sistemas binários.

Nossas simulações com SMBHs isolados mostram que um sistema de SMBHs triplos é mais adequado que um sistema binário para explicar o suposto recuo gravitacional em NGC 5236. Com base nestes cálculos nós concluímos que o rádio-quasar J133658.3-295105 seria um subproduto de um sistema binário de SMBHs ($M \sim 10^7 M_\odot$) coalescidos durante o recuo gravitacional da região central, enquanto o terceiro SMBH seria ejetado com velocidade baixa o suficiente para deslocar o núcleo óptico de NGC 5236, permanecendo dentro dos ~ 100 pc centrais. Este resultado, se confirmado através de futuras simulações mais realísticas, estaria em forte acordo com os modelos de Fujita (2008, 2009).

A modelagem com N-corpos, por outro lado, mostra que frequentemente é o SMBH menos massivo que é expulso do centro da galáxia, com a binária massiva recuando na direção oposta e deslocando o aglomerado de sua posição central. Estes modelos mostram que o recuo do aglomerado estende-se por $\sim 30 - 200$ pc, o que é compatível com o valor

observado para o núcleo óptico em NGC 5236 (~ 60 pc). Além disso, nós mostramos que o deslocamento do núcleo óptico só pode ser explicado em um cenário de recuo gravitacional se a velocidade de recuo do SMBH for até cerca de ~ 1.5 vezes a dispersão de velocidades do aglomerado.

Os resultados destes dois conjuntos de simulações deveriam ser encarados não como uma discordância entre os modelos. Ao contrário, eles são complementares pois abordam os regimes de radiação forte e fraca, respectivamente. Assim, é possível distinguir dois tipos de recuo gravitacional, i) o chamado “*gravitational slingshot*”, observado nas simulações de N-corpos, onde a ejeção de um dos SMBHs ocorre por troca energética com a binária recém formada, e ii) o chamado “*gravitational rocket*”, parcialmente observado nos modelos com SMBHs isolados, onde a própria binária deve recuar por consequência da emissão anisotrópica de ondas gravitacionais durante a coalescência. Dentro das limitações do nosso modelo, contudo, nós não podemos afirmar ainda qual tipo de recuo (“*slingshot*” ou “*rocket*”) foi o que de fato ocorreu em NGC 5236. Isso deverá ser analisado futuramente com simulações mais realísticas.

Apêndice A

Equações de Movimento Pós-Newtonianas

Neste Apêndice nós anexamos as equações de movimento pós-Newtonianas utilizadas neste trabalho. Estas foram obtidas em Itoh (2004a, 2009).

EQUATION OF MOTION FOR RELATIVISTIC COMPACT . . .

 PHYSICAL REVIEW D **69**, 064018 (2004)

Note that this redefinition of the representative points does not affect the existence of the energy conservation, as was shown by Eq. (8.6). We can examine the effect of this redefinition onto the equation of motion using Eq. (8.5) (use $\delta_{A\ln}^i$ instead of $\delta_{A\Theta}^i$). Thence we have

$$\begin{aligned}
 m_1 a_1^i |_{\delta_{A\ln}} &= -\epsilon^6 \frac{3m_1 \delta_{2\ln}^k}{r_{12}^3} n_{12}^{(ik)} + \epsilon^6 \frac{3m_2 \delta_{1\ln}^k}{r_{12}^3} n_{12}^{(ik)} - \epsilon^6 \frac{d^2 \delta_{1\ln}^i}{d\tau^2} \\
 &= -\frac{44m_1^4 m_2}{3r_{12}^5} n_{12}^i \ln\left(\frac{r_{12}}{\epsilon R_1}\right) + \frac{44m_1^2 m_2^3}{3r_{12}^5} n_{12}^i \ln\left(\frac{r_{12}}{\epsilon R_2}\right) \\
 &\quad - \frac{22m_1^3 m_2}{r_{12}^4} [5(\vec{n}_{12} \cdot \vec{V})^2 n_{12}^i - V^2 n_{12}^i - 2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{V}) \\
 &\quad \times V^i] \ln\left(\frac{r_{12}}{\epsilon R_1}\right) + \frac{22m_1^3 m_2}{3r_{12}^4} \left(\frac{m_1}{r_{12}} n_{12}^i + \frac{m_2}{r_{12}} n_{12}^i \right. \\
 &\quad \left. - V^2 n_{12}^i + 8(\vec{n}_{12} \cdot \vec{V})^2 n_{12}^i - 2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{V}) V^i\right). \quad (11.2)
 \end{aligned}$$

Comparing the above equation with Eq. (10.4), we easily conclude that the representative point z_A^i of the star A defined by

$$\begin{aligned}
 D_{A\Theta, \text{New}}^i(\tau) &= \epsilon^{-6} \int_{B_A} d^3 y [y^i - z_A^i(\tau)] \Theta_N^{\tau\tau}(\tau, y^k) \\
 &= \epsilon^4 \delta_A^i(\tau) \quad (11.3)
 \end{aligned}$$

obeys an equation of motion free from logarithms and hence free from any ambiguity up to 3PN order inclusively.

We mention here that Blanchet and Faye [40] have already noticed that in their 3PN equation of motion a suitable coordinate transformation removes (parts of) logarithmic dependences of arbitrary parameters corresponding (roughly) to our body zone radii.⁷ It is well known that choosing different values of dipole moments corresponds to the coordinate transformation.

By adding $m_1 a_1^i |_{\delta_{A\ln}}$ to Eq. (10.4), we obtain our 3PN equation of motion for two spherical compact stars whose representative points are defined by Eq. (11.3).

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{dv_1^i}{d\tau} &= -\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} n_{12}^i + \epsilon^2 \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} n_{12}^i \left[-v_1^2 - 2v_2^2 + 4(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + \frac{3}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 + \frac{5m_1}{r_{12}} + \frac{4m_2}{r_{12}} \right] \\
 &\quad + \epsilon^2 \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} V^i [4(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) - 3(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)] + \epsilon^4 \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} n_{12}^i \left[-2v_2^4 + 4v_2^2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - 2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 + \frac{3}{2}v_1^2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{9}{2}v_2^2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 - 6(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) - \frac{15}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^4 - \frac{57}{4} \frac{m_1^2}{r_{12}^2} - 9 \frac{m_2^2}{r_{12}^2} - \frac{69}{2} \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m_1}{r_{12}} \left(-\frac{15}{4}v_1^2 + \frac{5}{4}v_2^2 - \frac{5}{2}(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + \frac{39}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 - 39(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) + \frac{17}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m_2}{r_{12}} [4v_2^2 - 8(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + 2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 - 4(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) - 6(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2] \right] \\
 &\quad + \epsilon^4 \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} V^i \left[\frac{m_1}{r_{12}} \left(-\frac{63}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) + \frac{55}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) \right) + \frac{m_2}{r_{12}} [-2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) - 2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)] + v_1^2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) \right. \\
 &\quad \left. + 4v_2^2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) - 5v_2^2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) - 4(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)(\vec{n}_{12} \cdot \vec{V}) - 6(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 + \frac{9}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^3 \right] \\
 &\quad + \epsilon^5 \frac{4m_1^2 m_2}{5r_{12}^3} \left[n_{12}^i(\vec{n}_{12} \cdot \vec{V}) \left(-6 \frac{m_1}{r_{12}} + \frac{52}{3} \frac{m_2}{r_{12}} + 3V^2 \right) + V^i \left(2 \frac{m_1}{r_{12}} - 8 \frac{m_2}{r_{12}} - V^2 \right) \right] \\
 &\quad + \epsilon^6 \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} n_{12}^i \left[\frac{35}{16}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^6 - \frac{15}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^4 v_1^2 + \frac{15}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^4(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + 3(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 - \frac{15}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^4 v_2^2 \right]
 \end{aligned}$$

⁷Unlike our case, their coordinate transformation does not remove the logarithmic dependences of their free parameters completely. The remaining logarithmic dependence was used to make their equation of motion conservative.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 v_1^2 v_2^2 - 12(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) v_2^2 - 2(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 v_2^2 + \frac{15}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 v_2^4 + 4(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) v_2^4 - 2v_2^6 \\
 & + \frac{m_1}{r_{12}} \left(-\frac{171}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^4 + \frac{171}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^3 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) - \frac{723}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 + \frac{383}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^3 \right. \\
 & - \frac{455}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^4 + \frac{229}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 v_1^2 - \frac{205}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) v_1^2 + \frac{191}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 v_1^2 - \frac{91}{8}v_1^4 \\
 & - \frac{229}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + 244(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - \frac{225}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + \frac{91}{2}v_1^2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - \frac{177}{4}(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 \\
 & \left. + \frac{229}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 v_2^2 - \frac{283}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) v_2^2 + \frac{259}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 v_2^2 - \frac{91}{4}v_1^2 v_2^2 + 43(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) v_2^2 - \frac{81}{8}v_2^4 \right) \\
 & + \frac{m_2}{r_{12}} \left[-6(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 + 12(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^3 + 6(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^4 + 4(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \right. \\
 & + 12(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + 4(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 - 4(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) v_2^2 - 12(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 v_2^2 - 8(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) v_2^2 + 4v_2^4 \left. \right] \\
 & + \frac{m_2^2}{r_{12}^2} \left(-(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 + 2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) + \frac{43}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 + 18(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - 9v_2^2 \right) \\
 & + \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \left(\frac{415}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 - \frac{375}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) + \frac{1113}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 \right. \\
 & \left. - \frac{615\pi^2}{64}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{V})^2 + 18v_1^2 + \frac{123\pi^2}{64}V^2 + 33(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - \frac{33}{2}v_2^2 \right) \\
 & + \frac{m_1^2}{r_{12}^2} \left(-\frac{2069}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 + 543(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) - \frac{939}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 + \frac{471}{8}v_1^2 - \frac{357}{4}(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + \frac{357}{8}v_2^2 \right) \\
 & + \frac{16m_1^3}{r_{12}^3} + \frac{m_1^2 m_2}{r_{12}^2} \left(\frac{547}{3} - \frac{41\pi^2}{16} \right) - \frac{13m_1^3}{12r_{12}^3} + \frac{m_1 m_2^2}{r_{12}^3} \left(\frac{545}{3} - \frac{41\pi^2}{16} \right) \\
 & + \epsilon^6 \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} V^i \left[\frac{15}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^4 - \frac{45}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^5 - \frac{3}{2}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^3 v_1^2 + 6(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \right. \\
 & - 6(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^3 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - 2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 - 12(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 v_2^2 + 12(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^3 v_2^2 \\
 & + (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) v_1^2 v_2^2 - 4(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) v_2^2 + 8(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) v_2^2 + 4(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) v_2^4 - 7(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) v_2^4 \\
 & \left. + \frac{m_2}{r_{12}} \left[-2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) + 8(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 + 2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^3 \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + 4(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - 2(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) v_2^2 - 4(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) v_2^2 \right] \right. \\
 & + \frac{m_1}{r_{12}} \left(-\frac{243}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^3 + \frac{565}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) - \frac{269}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 - \frac{95}{12}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^3 + \frac{207}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) v_1^2 \right. \\
 & \left. - \frac{137}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) v_1^2 - 36(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + \frac{27}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + \frac{81}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) v_2^2 + \frac{83}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) v_2^2 \right) \\
 & \left. + \frac{m_2^2}{r_{12}^2} \left[4(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) + 5(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) \right] + \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \left(-\frac{307}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) + \frac{479}{8}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) + \frac{123\pi^2}{32}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{V}) \right) \right. \\
 & \left. + \frac{m_1^2}{r_{12}^2} \left(\frac{311}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) - \frac{357}{4}(\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) \right) \right] + O(\epsilon^7), \tag{11.4}
 \end{aligned}$$

YOUSUKE ITOH

 PHYSICAL REVIEW D **80**, 124003 (2009)

$$\begin{aligned}
 (m_1 a_1^i)_{\leq 3.5 \text{ PN}} = & (m_1 a_1^i)_{\leq 3 \text{ PN}} + \frac{m_1^4 m_2}{r_{12}^5} \left[n_{12}^i \left\{ \frac{3992}{105} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) - \frac{4328}{105} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) \right\} - \frac{184}{21} V^i \right] + \frac{m_1^3 m_2^2}{r_{12}^5} \left[\frac{6224}{105} V^i \right. \\
 & + n_{12}^i \left\{ \frac{2872}{21} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) - \frac{13576}{105} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) \right\} \left. \right] + \frac{m_1^3 m_2}{r_{12}^4} V^i \left[-\frac{132}{35} v_1^2 - \frac{48}{35} v_2^2 + \frac{52}{15} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 \right. \\
 & + \frac{152}{35} (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - \frac{56}{15} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) - \frac{44}{15} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 \left. \right] + \frac{m_1^3 m_2}{r_{12}^4} n_{12}^i \left[-\frac{4888}{105} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) v_1^2 \right. \\
 & + \frac{5056}{105} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) v_1^2 - \frac{1028}{21} v_2^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) + 48 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^3 + \frac{5812}{105} v_2^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) + \frac{2056}{21} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \\
 & - \frac{2224}{21} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - \frac{696}{5} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) + \frac{744}{5} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 - \frac{288}{5} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^3 \left. \right] \\
 & + \frac{m_1^2 m_2^3}{r_{12}^5} \left[\frac{6388}{105} V^i - \frac{3172}{21} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{V}) n_{12}^i \right] + \frac{m_1^2 m_2}{r_{12}^3} V^i \left[\frac{334}{35} v_1^4 + \frac{654}{35} v_2^2 v_1^2 - \frac{1336}{35} (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) v_1^2 + \frac{292}{35} v_2^4 \right. \\
 & - \frac{348}{5} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 V^2 + 60 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{V})^4 - \frac{1252}{35} v_2^2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + \frac{684}{5} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) V^2 + \frac{1308}{35} (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 \\
 & - 66 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 V^2 \left. \right] + \frac{m_1^2 m_2}{r_{12}^3} n_{12}^i \left[-\frac{246}{35} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{V}) v_1^4 - \frac{534}{35} v_2^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) v_1^2 + \frac{90}{7} v_2^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) v_1^2 \right. \\
 & + \frac{1068}{35} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) v_1^2 - \frac{984}{35} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) v_1^2 - \frac{204}{35} v_2^4 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) + 60 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^3 V^2 \\
 & - 56 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{V})^5 + \frac{24}{7} v_2^4 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) + \frac{984}{35} v_2^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - \frac{732}{35} v_2^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \\
 & - 180 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) V^2 - \frac{1068}{35} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 + 174 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 V^2 \\
 & + \frac{180}{7} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2 - 54 V^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^3 \left. \right] + \frac{m_1^2 m_2^2}{r_{12}^4} V^i \left[-\frac{152}{21} v_1^2 - \frac{1768}{105} v_2^2 + \frac{454}{15} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 \right. \\
 & + \frac{2864}{105} (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) - \frac{372}{5} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) + \frac{854}{15} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 \left. \right] + \frac{m_1^2 m_2^2}{r_{12}^4} n_{12}^i \left[\frac{1432}{35} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) v_2^2 \right. \\
 & - \frac{5752}{105} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) v_2^2 - \frac{582}{5} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^3 + \frac{3568}{105} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{V}) v_1^2 - \frac{2864}{35} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \\
 & \left. + \frac{10048}{105} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) + \frac{1746}{5} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2) - \frac{1954}{5} (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_1) (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 + 158 (\vec{n}_{12} \cdot \vec{v}_2)^3 \right], \quad (65)
 \end{aligned}$$

where the acceleration up to the 3 PN order is given in Paper III.

Equation (65) is in perfect agreement with the previous works in harmonic coordinates [34,38], the result in the ADMTT coordinate [10,15] by a suitable gauge transformation, and also the results from the energy balance argument [16–18]. We have used the local conservation law of the stress energy tensor of the matter and the gravitational field and the surface integral approach to derive our 3.5 PN equations of motion. We have not *a priori* assumed that the star follows a geodesic in any sense. The strong field point particle limit enables us to realize a point particle with strong internal gravity without using a Dirac delta functional. Nissanke *et al.* [38] assumed that a star follows a geodesic regularized by the Hadamard Parti Finie regularization (or any other regularization method that gives the same result, such as the dimensional regularization). Thereby, the perfect agreement between our present work and that work [38] confirms that a self-gravitating star

follows the regularized geodesic at least up to the 3.5 PN order inclusively.

ACKNOWLEDGMENTS

I am grateful to the anonymous referee who carefully read the original manuscript and kindly gave comments that have substantially improved this paper. This paper is a part of the outcome of the Japan Society of the Promotion of Science (JSPS) Global Center of Excellence (COE) Program (G01): Weaving Science Web beyond Particle-Matter Hierarchy at Tohoku University, Japan. Extensive use of the algebraic computation software programs Mathematica and MathTensor has been made.

APPENDIX A: χ PART

This section shows the functional expressions of $P_{A\chi}^r$ in terms of m_A , v_A^i , $V^i = v_1^i - v_2^i$, and r_{12}^i . Here we defined

Apêndice B

Implementação Numérica dos Termos Pós-Newtonianos

Listing B.1: Fragmento de código, escrito em linguagem C, mostrando a implementação numérica dos termos pós-Newtonianos, como dado por Itoh (2004a, 2009) (veja o Apêndice A), para a interação de cada par de partículas. A sub-rotina retorna o valor dos termos \mathcal{A} e \mathcal{B} necessários para o cálculo da aceleração na Eq. (2.50). Símbolos como m , x , ..., v_x , ..., possuem seu significado usual, com exceção que aqui as variáveis x , y , z são as componentes do vetor unitário $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Grandezas acompanhadas por i ou j denotam propriedades da partícula i ou j . Aquelas que não são acompanhadas por i ou j denotam grandezas relativas, por exemplo, $\mathbf{v}_x = v_{xi} - v_{xj}$. $\text{rinv} \equiv 1/r$, $\text{rinv2} \equiv 1/r^2$ e $\text{PI2} \equiv \pi^2$. bhi e bhj denotam os índices das partículas i e j . ipn e hipn são “*flags*” definidas pelo usuário, que “ativam” as diferentes ordens pós-Newtonianas, com ipn referindo-se aos termos conservativos (ordens inteiras) e hipn referindo-se aos termos de reação a radiação (ordens semi-inteiras). $\text{c\text{light.invn}} \equiv 1/c^n$, onde c é a velocidade da luz. Todas as frações foram substituídas por seu equivalente em ponto flutuante afim de reduzir o custo computacional. No caso de frações irreduzíveis como $\approx 1.292952381e+2$ o valor exato é dado logo ao lado como um comentário `/* 13576/105 */` afim de facilitar comparações. Outras grandezas são apropriadamente definidas no código.

```

1  #include "clibs.h"      /* include ANSI-C libraries */
2  #include "mydefs.h"    /* include PNTERMS struct definition, etc... */
3
4  PNTERMS
5  PNGravityTerms (int ipn, int hipn, int bhi, int bhj,
6                  double mi, double mj,
7                  double rinv, double rinv2,
8                  double x, double y, double z,
9                  double vx, double vy, double vz,
10                 double vi2,
11                 double vxi, double vyi, double vzi,
12                 double vj2,
13                 double vxj, double vyj, double vzj)
14 {
15     PNTERMS pn1, pn2, pn25, pn3, pn35;
16     double mi2, mj2, mimj, v2, vi4, vj4, vivj, vivjvivj,
17            nv, nvnv, nvi, nvj, nvi2, nvj2, nvinvj, GM_R2;
18
19     /* Form useful scalars */
20     mi2 = mj2 = mimj = v2 = vi4 = vj4 = vivj = vivjvivj
21     = nv = nvnv = nvi = nvj = nvi2 = nvj2 = nvinvj = 0.0;
22     if ((ipn > 0) || (hipn > 0)) {
23         mi2 = mi * mi;
24         mj2 = mj * mj;
25         mimj = mi * mj;
26         v2 = vx * vx + vy * vy + vz * vz;

```

```

27     vi4      = vi2 * vi2;
28     vj4      = vj2 * vj2;
29     vivj     = vxi * vxj + vyi * vyj + vzi * vzj;
30     vivjvivj = vivj * vivj;
31     nvi      = x * vxi + y * vyi + z * vzi;
32     nvi2     = nvi * nvi;
33     nvj      = x * vxj + y * vyj + z * vzj;
34     nvj2     = nvj * nvj;
35     nv       = x * vx + y * vy + z * vz;
36     nvnv    = nv * nv;
37     nvinvj   = nvi * nvj;
38 }
39
40 /* Include 1PN terms (6+2 == 8 terms) */
41 if (ipn > 0) {
42     pn1.a = - vi2
43           - 2.0 * vj2
44           + 4.0 * vivj
45           + 1.5 * nvj2
46           + rinvs * ( + 5.0 * mi
47                     + 4.0 * mj );
48     pn1.a *= clight.inv2;
49     pn1.b = + 4.0 * nvi
50           - 3.0 * nvj;
51     pn1.b *= clight.inv2;
52 }
53 else {
54     pn1.a = 0.0;
55     pn1.b = 0.0;
56 }
57
58 /* Include 2PN terms (21+10 == 31 terms) */
59 if (ipn > 1) {
60     pn2.a = - 2.0 * ( + vj4
61                   + vivjvivj )
62           + 4.0 * vj2 * vivj
63           + nvj2 * ( + 1.5 * vi2
64                   + 4.5 * vj2
65                   - 6.0 * vivj
66                   - 1.875 * nvj2 )
67           - rinvs2 * ( + 14.25 * mi2
68                     + 9.0 * mj2
69                     + 34.5 * mimj )
70           + rinvs * ( + mi * ( - 3.75 * vi2
71                           + 1.25 * vj2
72                           - 2.5 * vivj
73                           + 19.5 * nvi2
74                           - 39.0 * nvinvj
75                           + 8.5 * nvj2 )
76                   + mj * ( + 4.0 * vj2
77                           - 8.0 * vivj
78                           + 2.0 * nvi2
79                           - 4.0 * nvinvj
80                           - 6.0 * nvj2 ) );
81     pn2.a *= clight.inv4;
82     pn2.b = + rinvs * ( + mi * ( - 15.75 * nvi
83                           + 13.75 * nvj )
84               - mj * 2.0 * ( + nvi
85                           + nvj ) )
86           + vi2 * nvj
87           - vivj * nv * 4.0
88           + vj2 * ( + 4.0 * nvi
89                   - 5.0 * nvj )
90           + nvj2 * ( - 6.0 * nvi
91                   + 4.5 * nvj );
92     pn2.b *= clight.inv4;
93 }
94 else {
95     pn2.a = 0.0;
96     pn2.b = 0.0;
97 }
98
99 /* Include 2.5PN terms (3+3 == 6 terms) */
100 if (hipn > 0) {

```

```

101     pn25.a = nv * ( + rinv * ( - 4.8 * mi
102             + 1.3866666666666667e+1 * mj )
103             + 2.4 * v2 );
104     pn25.a *= (mi * rinv) * clight.inv5;
105     pn25.b = - v2
106             + rinv * ( + 1.6 * mi
107             - 6.4 * mj );
108     pn25.b *= (mi * rinv) * clight.inv5;
109 }
110 else {
111     pn25.a = 0.0;
112     pn25.b = 0.0;
113 }
114
115 /* Include 3PN terms (66+37 == 103 terms) */
116 if (ipn > 2) {
117     pn3.a = + nvj2 * ( + 3.0 * vivjvivj
118                     + 1.5 * vi2 * vj2
119                     - 12.0 * vivj * vj2
120                     + 7.5 * vj4
121                     + nvj2 * ( + 7.5 * ( + vivj
122                                 - vj2
123                                 - 0.25 * vi2 )
124                                 + 2.1875 * nvj2 ) )
125     + 2.0 * vj2 * ( - vivjvivj
126                     + vj2 * ( + 2.0 * vivj
127                               - vj2 ) )
128     + mi * rinv * ( + nvi * ( + nvj * ( + 244.0 * vivj
129                                     - 102.5 * vi2
130                                     - 141.5 * vj2
131                                     + 191.5 * nvj2 )
132                                     + nvi * ( + 57.25 * ( + vi2
133                                                 + vj2
134                                                 - 2.0 * vivj )
135                                                 - 180.75 * nvj2
136                                                 + nvi * ( + 85.5 * ( + nvj
137                                                         - 0.25 * nvi ) ) ) )
138     + nvj2 * ( + 47.75 * vi2
139               + 64.75 * vj2
140               - 112.5 * vivj
141               - 56.875 * nvj2 )
142     + vivj * ( + 45.5 * vi2
143               + 43.0 * vj2
144               - 44.25 * vivj )
145     - 11.375 * vi2 * ( + vi2
146                       + 2.0 * vj2 )
147     - 10.125 * vj4 )
148     + mj * rinv * 4.0 * ( + vj4
149                         + nvj * ( + nvi * ( + vivj
150                                     - vj2 )
151                                     + nvj * ( + 3.0 * ( + vivj
152                                                 - vj2 )
153                                                 - 1.5 * nvi2
154                                                 + nvj * ( + 3.0 * nvi
155                                                         + 1.5 * nvj ) ) ) )
156     + vivj * ( + vivj
157               - 2.0 * vj2 ) )
158     + mj2 * rinv2 * ( - nvi2
159                     + 2.0 * nvinvj
160                     + 21.5 * nvj2
161                     + 18.0 * vivj
162                     - 9.0 * vj2 )
163     + mimj * rinv2 * ( + 51.875 * nvi2
164                     - 93.75 * nvinvj
165                     + 139.125 * nvj2
166                     + 18.0 * vi2
167                     + PI2 * ( + 1.921875 * v2
168                               - 9.609375 * nvnv )
169                     + 33.0 * ( + vivj
170                               - 0.5 * vj2 ) )
171     + mi2 * rinv2 * ( - 258.625 * nvi2
172                     + 543.0 * nvinvj
173                     - 234.75 * nvj2
174                     + 58.875 * vi2

```



```

175             + 44.625 * ( + vj2
176                 - 2.0 * vivj ) )
177 + rin v * rin v2 * ( + 16.0 * m j * m j2
178                 + mi2 * m j * ( + 1.823333333333333333333333e+2 /* 547/3 */
179                 - 2.5625 * PI2 )
180                 - 1.083333333333333333333333 * mi * mi2 /* 13/12 */
181                 + mi * m j2 * ( + 1.816666666666666666667e+2 /* 545/3 */
182                 - 2.5625 * PI2 ) );
183
184 pn3.a *= c light.inv6;
185 pn3.b = + nvj * ( + vj2 * ( + vi2
186                 + 8.0 * vivj
187                 - 7.0 * vj2 )
188         - 2.0 * vivjvivj
189         + nvj * ( + 6.0 * nvi * ( + vivj
190                 - 2.0 * vj2 )
191                 + nvj * ( + 6.0 * ( + 2.0 * vj2
192                 - vivj
193                 - 0.25 * vi2 )
194                 + nvj * ( + 7.5 * ( + nvi
195                 - 0.75 * nvj ) ) ) ) )
196
197 + 4.0 * nvi * ( + vj4
198                 - vivj * vj2 )
199 + m j * rin v * ( + nvj * ( + 4.0 * ( + vivj
200                 - vj2
201                 - 0.5 * nvi2 )
202                 + nvj * ( + 2.0 * ( + 4.0 * nvi
203                 + nvj ) ) )
204
205 + 2.0 * nvi * ( + vivj
206                 - vj2 ) )
207 + mi * rin v * ( + nvi * ( + 25.875 * vi2
208                 + 10.125 * vj2
209                 - 36.0 * vivj
210                 - 67.25 * nvj2
211                 + nvi * ( + 141.25 * nvj
212                 - 60.75 * nvi ) )
213                 + nvj * ( + 10.375 * vj2
214                 + 6.75 * vivj
215                 - 17.125 * vi2
216                 - 7.9166666666666666667 * nvj2 ) ) /* 95/12 */
217
218 + rin v2 * ( + m j2 * ( + 4.0 * nvi
219                 + 5.0 * nvj )
220                 + mi2 * ( + 77.75 * nvi
221                 - 89.25 * nvj )
222                 + mimj * ( + 59.875 * nvj
223                 - 38.375 * nvi
224                 + 3.84375 * PI2 * nv ) );
225
226 pn3.b *= c light.inv6;
227 }
228
229 else {
230     pn3.a = 0.0;
231     pn3.b = 0.0;
232 }
233
234 /* Include 3.5PN terms (40+25 == 65 terms) */
235 if (hipn > 1) {
236     pn35.a = + mi2 * rin v2 * ( + 3.8019047619047619048e+1 * nvi /* 3992/105 */
237                 - 4.1219047619047619048e+1 * nvj ) /* 4328/105 */
238             + mimj * rin v * rin v2 * ( - 1.2929523809523809524e+2 * nvi /* 13576/105 */
239                 + 1.367619047619047619e+2 * nvj ) /* 2872/21 */
240             + m j2 * rin v * rin v2 * ( - 1.5104761904761904762e+2 * nv ) /* 3172/21 */
241             + mi * rin v * ( + nvi * ( + 48.0 * nvi2
242                 - 4.6552380952380952381e+1 * vi2 /* 4888/105 */
243                 + 9.7904761904761904762e+1 * vivj /* 2056/21 */
244                 - 4.8952380952380952381e+1 * vj2 ) /* 1028/21 */
245             + nvinvj * ( - 139.2 * nvi /* 696/5 */
246                 + 148.8 * nvj ) /* 744/5 */
247             + nvj * ( - 57.6 * nvj2 /* 288/5 */
248                 + 4.8152380952380952381e+1 * vi2 /* 5056/105 */
249                 - 1.0590476190476190476e+2 * vivj /* 2224/21 */
250                 + 5.5352380952380952381e+1 * vj2 ) ) /* 5812/105 */
251             + m j * rin v * ( + nvi * ( - 116.4 * nvi2 /* 582/5 */
252                 - 8.1828571428571428571e+1 * vivj /* 2864/35 */
253                 + 4.0914285714285714286e+1 * vj2 ) /* 1432/35 */
254             + nvinvj * ( + 349.2 * nvi /* 1746/5 */

```


Referências

- [1] AARSETH, S. J. **Gravitational N-Body Simulations**: Nov. 2003.
- [2] AARSETH, S. J.; HENON, M.; WIELEN, R. A comparison of numerical methods for the study of star cluster dynamics. **Astronomy and Astrophysics**, v. 37, p. 183–187, Dec. 1974.
- [3] AARSETH, S. J.; LECAR, M. Computer simulations of stellar systems. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 13, p. 1–21, 1975.
- [4] ANDERS, P.; BAUMGARDT, H.; BISSANTZ, N.; PORTEGIES ZWART, S. How well do STARLAB and NBODY4 compare? I. Simple models. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 395, p. 2304–2316, Jun. 2009.
- [5] ARSENAULT, R.; ROY, J.-R. Integrated H-alpha profiles of giant extragalactic H II regions. **Astronomical Journal**, v. 92, p. 567–579, Sep. 1986.
- [6] BAKER, J. G.; CENTRELLA, J.; CHOI, D.-I.; KOPPITZ, M.; VAN METER, J. Binary black hole merger dynamics and waveforms. **Physical Review D**, v. 73, n. 10, p. 104002–+, May 2006a.
- [7] BAKER, J. G.; CENTRELLA, J.; CHOI, D.-I.; KOPPITZ, M.; VAN METER, J. Gravitational-Wave Extraction from an Inspiring Configuration of Merging Black Holes. **Physical Review Letters**, v. 96, n. 11, p. 111102–+, Mar. 2006b.
- [8] BEGELMAN, M. C.; BLANDFORD, R. D.; REES, M. J. Massive black hole binaries in active galactic nuclei. **Nature**, v. 287, p. 307–309, Sep. 1980.
- [9] BEKENSTEIN, J. D. Gravitational-Radiation Recoil and Runaway Black Holes. **Astrophysical Journal**, v. 183, p. 657–664, Jul. 1973.
- [10] BELLEMAN, R. G.; BÉDORF, J.; PORTEGIES ZWART, S. F. High performance direct gravitational N-body simulations on graphics processing units II: An implementation in CUDA. **New Astronomy**, v. 13, p. 103–112, Feb. 2008.

- [11] BERTI, E.; VOLONTERI, M. Cosmological Black Hole Spin Evolution by Mergers and Accretion. **Astrophysical Journal**, v. 684, p. 822–828, Sep. 2008.
- [12] BINNEY, J.; TREMAINE, S. **Galactic Dynamics: Second Edition**: Princeton University Press, 2008.
- [13] BLANCHET, L. Gravitational-wave tails of tails. **Classical and Quantum Gravity**, v. 15, p. 113–141, Jan. 1998a.
- [14] BLANCHET, L. Quadrupole-quadrupole gravitational waves. **Classical and Quantum Gravity**, v. 15, p. 89–111, Jan. 1998b.
- [15] BLANCHET, L. Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiral-ing Compact Binaries. **Living Reviews in Relativity**, v. 9, p. 4–+, Jun. 2006.
- [16] BLANCHET, L.; DAMOUR, T. Tail-transported temporal correlations in the dy-namics of a gravitating system. **Physical Review D**, v. 37, p. 1410–1435, Mar. 1988.
- [17] BLANCHET, L.; DAMOUR, T. Hereditary effects in gravitational radiation. **Phy-sical Review D**, v. 46, p. 4304–4319, Nov. 1992.
- [18] BLANCHET, L.; DAMOUR, T.; ESPOSITO-FARÈSE, G. Dimensional regulariza-tion of the third post-Newtonian dynamics of point particles in harmonic coordinates. **Physical Review D**, v. 69, n. 12, p. 124007–+, Jun. 2004.
- [19] BLANCHET, L.; FAYE, G. Hadamard regularization. **Journal of Mathematical Physics**, v. 41, p. 7675–7714, Nov. 2000a.
- [20] BLANCHET, L.; FAYE, G. On the equations of motion of point-particle binaries at the third post-Newtonian order. **Physics Letters A**, v. 271, p. 58–64, Jun. 2000b.
- [21] BLANCHET, L.; FAYE, G. General relativistic dynamics of compact binaries at the third post-Newtonian order. **Physical Review D**, v. 63, n. 6, p. 062005–+, Mar. 2001a.
- [22] BLANCHET, L.; FAYE, G. Lorentzian regularization and the problem of point-like particles in general relativity. **Journal of Mathematical Physics**, v. 42, p. 4391–4418, Sep. 2001b.
- [23] BLANCHET, L.; IYER, B. R. Third post-Newtonian dynamics of compact binaries: equations of motion in the centre-of-mass frame. **Classical and Quantum Gravity**, v. 20, p. 755–776, Feb. 2003.

- [24] BLECHA, L.; LOEB, A. Effects of gravitational-wave recoil on the dynamics and growth of supermassive black holes. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 390, p. 1311–1325, Nov. 2008.
- [25] BOGDANOVIĆ, T.; ERACLEOUS, M.; SIGURDSSON, S. SDSS J092712.65+294344.0: Recoiling Black Hole or a Subparsec Binary Candidate? **Astrophysical Journal**, v. 697, p. 288–292, May 2009.
- [26] BOROSON, T. A.; LAUER, T. R. A candidate sub-parsec supermassive binary black hole system. **Nature**, v. 458, p. 53–55, Mar. 2009.
- [27] BOYLE, M.; BROWN, D. A.; KIDDER, L. E.; MROUÉ, A. H.; PFEIFFER, H. P.; SCHEEL, M. A.; COOK, G. B.; TEUKOLSKY, S. A. High-accuracy comparison of numerical relativity simulations with post-Newtonian expansions. **Physical Review D**, v. 76, n. 12, p. 124038–+, Dec. 2007.
- [28] BROMM, V.; COPPI, P. S.; LARSON, R. B. Forming the First Stars in the Universe: The Fragmentation of Primordial Gas. **Astrophysical Journal Letters**, v. 527, p. L5–L8, Dec. 1999.
- [29] BROMM, V.; COPPI, P. S.; LARSON, R. B. The Formation of the First Stars. I. The Primordial Star-forming Cloud. **Astrophysical Journal**, v. 564, p. 23–51, Jan. 2002.
- [30] BROMM, V.; YOSHIDA, N.; HERNQUIST, L.; MCKEE, C. F. The formation of the first stars and galaxies. **Nature**, v. 459, p. 49–54, May 2009.
- [31] BRÜGMANN, B.; TICHY, W.; JANSEN, N. Numerical Simulation of Orbiting Black Holes. **Physical Review Letters**, v. 92, n. 21, p. 211101–+, May 2004.
- [32] CAMPANELLI, M. Understanding the fate of merging supermassive black holes. **Classical and Quantum Gravity**, v. 22, p. 387–+, May 2005.
- [33] CAMPANELLI, M.; LOUSTO, C.; ZLOCHOWER, Y.; MERRITT, D. Large Merger Recoils and Spin Flips from Generic Black Hole Binaries. **Astrophysical Journal Letters**, v. 659, p. L5–L8, Apr. 2007a.
- [34] CAMPANELLI, M.; LOUSTO, C. O.; MARRONETTI, P.; ZLOCHOWER, Y. Accurate Evolutions of Orbiting Black-Hole Binaries without Excision. **Physical Review Letters**, v. 96, n. 11, p. 111101–+, Mar. 2006a.
- [35] CAMPANELLI, M.; LOUSTO, C. O.; ZLOCHOWER, Y. Last orbit of binary black holes. **Physical Review D**, v. 73, n. 6, p. 061501–+, Mar. 2006b.

- [36] CAMPANELLI, M.; LOUSTO, C. O.; ZLOCHOWER, Y.; MERRITT, D. Maximum Gravitational Recoil. **Physical Review Letters**, v. 98, n. 23, p. 231102–+, Jun. 2007b.
- [37] CANDY, J.; ROZMUS, W. A Symplectic Integration Algorithm for Separable Hamiltonian Functions. **Journal of Computational Physics**, v. 92, p. 230–+, Jan. 1991.
- [38] CASAS, F.; MURUA, A. An efficient algorithm for computing the Baker-Campbell-Hausdorff series and some of its applications. **Journal of Mathematical Physics**, v. 50, n. 3, p. 033513–+, Mar. 2009.
- [39] CHANDRASEKHAR, S. Dynamical Friction. I. General Considerations: the Coefficient of Dynamical Friction. **Astrophysical Journal**, v. 97, p. 255–+, Mar. 1943.
- [40] CHANNELL, P. J.; SCOVEL, C. Symplectic integration of Hamiltonian systems. **Nonlinearity**, v. 3, p. 231–259, May 1990.
- [41] CHENCINER, A.; MONTGOMERY, R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. **ArXiv Mathematics e-prints**, Oct. 2000.
- [42] CHU, Y.-Z. n-body problem in general relativity up to the second post-Newtonian order from perturbative field theory. **Physical Review D**, v. 79, n. 4, p. 044031–+, Feb. 2009.
- [43] COWAN, J. J.; ROBERTS, D. A.; BRANCH, D. Radio observations of M83 and its supernova remnants. **Astrophysical Journal**, v. 434, p. 128–135, Oct. 1994.
- [44] DAIN, S.; LOUSTO, C. O.; ZLOCHOWER, Y. Extra-large remnant recoil velocities and spins from near-extremal-Bowen-York-spin black-hole binaries. **Physical Review D**, v. 78, n. 2, p. 024039–+, Jul. 2008.
- [45] DAMOUR, T. Gravitational radiation and the motion of compact bodies. In: GRAVITATIONAL RADIATION, N. Deruelle & T. Piran, , editor, p. 58–+, 1983.
- [46] DAMOUR, T.; JARANOWSKI, P.; SCHÄFER, G. Poincaré invariance in the ADM Hamiltonian approach to the general relativistic two-body problem. **Physical Review D**, v. 62, n. 2, p. 021501–+, Jul. 2000.
- [47] DAMOUR, T.; JARANOWSKI, P.; SCHÄFER, G. Dimensional regularization of the gravitational interaction of point masses. **Physics Letters B**, v. 513, p. 147–155, Jul. 2001a.

- [48] DAMOUR, T.; JARANOWSKI, P.; SCHÄFER, G. Equivalence between the ADM-Hamiltonian and the harmonic-coordinates approaches to the third post-Newtonian dynamics of compact binaries. **Physical Review D**, v. 63, n. 4, p. 044021–+, Feb. 2001b.
- [49] DAMOUR, T.; JARANOWSKI, P.; SCHÄFER, G. Erratum: Poincaré invariance in the ADM Hamiltonian approach to the general relativistic two-body problem [Phys. Rev. D 62, 021501(R) (2000)]. **Physical Review D**, v. 63, n. 2, p. 029903–+, Jan. 2001c.
- [50] DAMOUR, T.; JARANOWSKI, P.; SCHÄFER, G. Erratum: Equivalence between the ADM-Hamiltonian and the harmonic-coordinates approaches to the third post-Newtonian dynamics of compact binaries [Phys. Rev. D 63, 044021 (2001)]. **Physical Review D**, v. 66, n. 2, p. 029901–+, Jul. 2002.
- [51] DE ANDRADE, V. C.; BLANCHET, L.; FAYE, G. Third post-Newtonian dynamics of compact binaries: Noetherian conserved quantities and equivalence between the harmonic-coordinate and ADM-Hamiltonian formalisms. **Classical and Quantum Gravity**, v. 18, p. 753–778, Mar. 2001.
- [52] DI MATTEO, T.; SPRINGEL, V.; HERNQUIST, L. Black Holes in Galaxy Mergers. In: GROWING BLACK HOLES: ACCRETION IN A COSMOLOGICAL CONTEXT, A. Merloni, S. Nayakshin, & R. A. Sunyaev, , editor, p. 340–345, 2005.
- [53] DÍAZ, R.; DOTTORI, H.; MAST, D.; AGÜERO, M. P.; GUNTARDT, G. Kick-off supermassive black hole, microquasar outside the MW, or the large radio galaxy at high redshift? **Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata Argentina**, v. 50, p. 239–242, 2007.
- [54] DÍAZ, R. J.; DOTTORI, H.; AGÜERO, M. P.; MEDIAVILLA, E.; RODRIGUES, I.; MAST, D. Hidden Trigger for the Giant Starburst Arc in M83? **Astrophysical Journal**, v. 652, p. 1122–1128, Dec. 2006a.
- [55] DÍAZ, R. J.; DOTTORI, H.; MEDIAVILLA, E.; AGÜERO, M.; MAST, D. 3D NIR spectroscopy at subarcsecond resolution. **New Astronomy Review**, v. 49, p. 547–552, Jan. 2006b.
- [56] DOTTI, M.; MONTUORI, C.; DECARLI, R.; VOLONTERI, M.; COLPI, M.; HAARDT, F. SDSSJ092712.65+294344.0: a candidate massive black hole binary. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 398, p. L73–L77, Sep. 2009.

- [57] DOTTORI, H.; DÍAZ, R.; RODRIGUES, I.; AGÜERO, M. P.; MAST, D. The central 80-200 pc of M83: how many black holes and how massive are they? In: IAU SYMPOSIUM, V. Karas & G. Matt, , editor, v. 238 of **IAU Symposium**, p. 277–280, Apr. 2007.
- [58] DOTTORI, H.; DÍAZ, R. J.; FACUNDO ALBACETE-COLOMBO, J.; MAST, D. The Missing Goliath’s Slingshot: Massive Black Hole Recoil at M83. **Astrophysical Journal Letters**, v. 717, p. L42–L46, Jul. 2010.
- [59] DOTTORI, H.; DÍAZ, R. J.; MAST, D. IS J 133658.3-295105 A Radio Source at $z \geq 1.0$ or at the Distance of M 83? **Astronomical Journal**, v. 136, p. 2468–2472, Dec. 2008.
- [60] DUNCAN, M. J.; LEVISON, H. F.; LEE, M. H. A Multiple Time Step Symplectic Algorithm for Integrating Close Encounters. **Astronomical Journal**, v. 116, p. 2067–2077, Oct. 1998.
- [61] EBISUZAKI, T.; MAKINO, J.; TSURU, T. G.; FUNATO, Y.; PORTEGIES ZWART, S.; HUT, P.; MCMILLAN, S.; MATSUSHITA, S.; MATSUMOTO, H.; KAWABE, R. Missing Link Found? The “Runaway” Path to Supermassive Black Holes. **Astrophysical Journal Letters**, v. 562, p. L19–L22, Nov. 2001.
- [62] EISENSTEIN, D. J.; HUT, P. HOP: A New Group-Finding Algorithm for N-Body Simulations. **Astrophysical Journal**, v. 498, p. 137–+, May 1998.
- [63] ELMEGREEN, D. M.; CHROMEY, F. R.; WARREN, A. R. Discovery of a Double Circumnuclear Ring and Minibar in the Starburst Galaxy M83. **Astronomical Journal**, v. 116, p. 2834–2840, Dec. 1998.
- [64] FERRARESE, L.; MERRITT, D. A Fundamental Relation between Supermassive Black Holes and Their Host Galaxies. **Astrophysical Journal Letters**, v. 539, p. L9–L12, Aug. 2000.
- [65] FITCHETT, M. J. The influence of gravitational wave momentum losses on the centre of mass motion of a Newtonian binary system. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 203, p. 1049–1062, Jun. 1983.
- [66] FITCHETT, M. J.; DETWEILER, S. Linear momentum and gravitational waves - Circular orbits around a Schwarzschild black hole. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 211, p. 933–942, Dec. 1984.
- [67] FUJITA, Y. X-Ray Emission from a Supermassive Black Hole Ejected from the Center of a Galaxy. **Astrophysical Journal Letters**, v. 685, p. L59–L62, Sep. 2008.

- [68] FUJITA, Y. Long-Term Evolution of and X-Ray Emission from a Recoiling Super-massive Black Hole in a Disk Galaxy. **Astrophysical Journal**, v. 691, p. 1050–1057, Feb. 2009.
- [69] FUTAMASE, T.; ITOH, Y. The Post-Newtonian Approximation for Relativistic Compact Binaries. **Living Reviews in Relativity**, v. 10, p. 2–+, Mar. 2007.
- [70] GALLAIS, P.; ROUAN, D.; LACOMBE, F.; TIPHENE, D.; VAUGLIN, I. The nuclear starburst activity in M83 - Imaging at near-IR wavelengths. **Astronomy and Astrophysics**, v. 243, p. 309–318, Mar. 1991.
- [71] GEBHARDT, K.; BENDER, R.; BOWER, G.; DRESSLER, A.; FABER, S. M.; FILIPPENKO, A. V.; GREEN, R.; GRILLMAIR, C.; HO, L. C.; KORMENDY, J.; LAUER, T. R.; MAGORRIAN, J.; PINKNEY, J.; RICHSTONE, D.; TREMAINE, S. A Relationship between Nuclear Black Hole Mass and Galaxy Velocity Dispersion. **Astrophysical Journal Letters**, v. 539, p. L13–L16, Aug. 2000.
- [72] GIERSZ, M.; HEGGIE, D. C. Statistics of N-Body Simulations - Part One - Equal Masses Before Core Collapse. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 268, p. 257–+, May 1994.
- [73] GLADMAN, B.; DUNCAN, M.; CANDY, J. Symplectic integrators for long-term integrations in celestial mechanics. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 52, p. 221–240, Sep. 1991.
- [74] GOLDSTEIN, H. **Classical mechanics**: 1950.
- [75] HATANO, N.; SUZUKI, M. Finding Exponential Product Formulas of Higher Orders. In: LECTURE NOTES IN PHYSICS, BERLIN SPRINGER VERLAG, A. Das & B. Chakrabarti, , editor, v. 679 of **Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag**, p. 37–68, 2005.
- [76] HAWKING, S. W.; ISRAEL, W. **Three hundred years of gravitation**: 1987.
- [77] HEGGIE, D. C.; MATHIEU, R. D. Standardised Units and Time Scales. In: THE USE OF SUPERCOMPUTERS IN STELLAR DYNAMICS, P. Hut & S. L. W. McMillan, , editor, v. 267 of **Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag**, p. 233–+, 1986.
- [78] HÉNON, M. Two Recent Developments Concerning the Monte Carlo Method. In: DYNAMICS OF THE SOLAR SYSTEMS, A. Hayli, , editor, v. 69 of **IAU Symposium**, p. 133–+, 1975.

- [79] HERNQUIST, L. An analytical model for spherical galaxies and bulges. **Astrophysical Journal**, v. 356, p. 359–364, Jun. 1990.
- [80] HOCKNEY, R. W.; EASTWOOD, J. W. **Computer simulation using particles**: 1988.
- [81] HUGHES, S. A.; FAVATA, M.; HOLZ, D. E. How black holes get their kicks: radiation recoil in binary black hole mergers. In: **GROWING BLACK HOLES: ACCRETION IN A COSMOLOGICAL CONTEXT**, A. Merloni, S. Nayakshin, & R. A. Sunyaev, , editor, p. 333–339, 2005.
- [82] HUT, P.; MAKINO, J.; MCMILLAN, S. Building a better leapfrog. **Astrophysical Journal Letters**, v. 443, p. L93–L96, Apr. 1995.
- [83] ITOH, Y. Equation of motion for relativistic compact binaries with the strong field point particle limit: Third post-Newtonian order. **Physical Review D**, v. 69, n. 6, p. 064018–+, Mar. 2004a.
- [84] ITOH, Y. On the equation of motion of compact binaries in the post-Newtonian approximation. **Classical and Quantum Gravity**, v. 21, p. 529–+, Mar. 2004b.
- [85] ITOH, Y. Third-and-a-half order post-Newtonian equations of motion for relativistic compact binaries using the strong field point particle limit. **Physical Review D**, v. 80, n. 12, p. 124003–+, Dec. 2009.
- [86] ITOH, Y.; FUTAMASE, T. New derivation of a third post-Newtonian equation of motion for relativistic compact binaries without ambiguity. **Physical Review D**, v. 68, n. 12, p. 121501–+, Dec. 2003.
- [87] IYER, B. R.; WILL, C. M. Post-Newtonian gravitational radiation reaction for two-body systems. **Physical Review Letters**, v. 70, p. 113–116, Jan. 1993.
- [88] IYER, B. R.; WILL, C. M. Post-Newtonian gravitational radiation reaction for two-body systems: Nonspinning bodies. **Physical Review D**, v. 52, p. 6882–6893, Dec. 1995.
- [89] JAFFE, W. A simple model for the distribution of light in spherical galaxies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 202, p. 995–999, Mar. 1983.
- [90] JARANOWSKI, P.; SCHÄFER, G. Radiative 3.5 post-Newtonian ADM Hamiltonian for many-body point-mass systems. **Physical Review D**, v. 55, p. 4712–4722, Apr. 1997.

- [91] JARANOWSKI, P.; SCHÄFER, G. Third post-Newtonian higher order ADM Hamilton dynamics for two-body point-mass systems. **Physical Review D**, v. 57, p. 7274–7291, Jun. 1998.
- [92] JARANOWSKI, P.; SCHÄFER, G. Binary black-hole problem at the third post-Newtonian approximation in the orbital motion: Static part. **Physical Review D**, v. 60, n. 12, p. 124003–+, Dec. 1999.
- [93] JARANOWSKI, P.; SCHÄFER, G. Erratum: Third post-Newtonian higher order ADM Hamilton dynamics for two-body point-mass systems [Phys. Rev. D 57, 7274 (1998)]. **Physical Review D**, v. 63, n. 2, p. 029902–+, Jan. 2001.
- [94] KINOSHITA, H.; YOSHIDA, H.; NAKAI, H. Symplectic integrators and their application to dynamical astronomy. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 50, p. 59–71, 1991.
- [95] KOMOSSA, S.; ZHOU, H.; LU, H. A Recoiling Supermassive Black Hole in the Quasar SDSS J092712.65+294344.0? **Astrophysical Journal Letters**, v. 678, p. L81–L84, May 2008.
- [96] KÖNIGSDÖRFFER, C.; FAYE, G.; SCHÄFER, G. Binary black-hole dynamics at the third-and-a-half post-Newtonian order in the ADM formalism. **Physical Review D**, v. 68, n. 4, p. 044004–+, Aug. 2003.
- [97] KORMENDY, J.; RICHTSTONE, D. Inward Bound—The Search For Supermassive Black Holes In Galactic Nuclei. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 33, p. 581–+, 1995.
- [98] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The classical theory of fields**: 1975.
- [99] LEE, M. H.; DUNCAN, M. J.; LEVISON, H. F. Variable Time Step Integrators for Long-Term Orbital Integrations. In: COMPUTATIONAL ASTROPHYSICS; 12TH KINGSTON MEETING ON THEORETICAL ASTROPHYSICS, D. A. Clarke & M. J. West, , editor, v. 123 of **Astronomical Society of the Pacific Conference Series**, p. 32–+, 1997.
- [100] LIBESKIND, N. I.; COLE, S.; FRENK, C. S.; HELLY, J. C. The effect of gravitational recoil on black holes forming in a hierarchical universe. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 368, p. 1381–1391, May 2006.
- [101] LYNDEN-BELL, D. Galactic Nuclei as Collapsed Old Quasars. **Nature**, v. 223, p. 690–694, Aug. 1969.

- [102] MADAU, P.; ABEL, T.; BENDER, P. L.; DI MATTEO, T.; HAIMAN, Z.; HUGHES, S. A.; LOEB, A.; PHINNEY, E. S.; PRIMACK, J. R.; PRINCE, T. A.; REES, M. J.; RICHSTONE, D. O.; SCHUTZ, B. F.; THORNE, K. S.; VOLONTERI, M. Massive Black Holes Across Cosmic Time. In: AGB STARS AND RELATED PHENOMENA: NASTRO2010: THE ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS DECADAL SURVEY, v. 2010 of **Astronomy**, p. 189–+, 2009.
- [103] MADAU, P.; REES, M. J. Massive Black Holes as Population III Remnants. **Astrophysical Journal Letters**, v. 551, p. L27–L30, Apr. 2001.
- [104] MADDOX, L. A.; COWAN, J. J.; KILGARD, R. E.; LACEY, C. K.; PRESTWICH, A. H.; STOCKDALE, C. J.; WOLFING, E. A Study of Compact Radio Sources in Nearby Face-on Spiral Galaxies. I. Long-Term Evolution of M83. **Astronomical Journal**, v. 132, p. 310–320, Jul. 2006.
- [105] MAGORRIAN, J. ET AL. The Demography of Massive Dark Objects in Galaxy Centers. **Astronomical Journal**, v. 115, p. 2285–2305, Jun. 1998.
- [106] MAKINO, J. Optimal order and time-step criterion for Aarseth-type N-body integrators. **Astrophysical Journal**, v. 369, p. 200–212, Mar. 1991.
- [107] MAKINO, J. Current Status of GRAPE Project. In: IAU SYMPOSIUM, E. Vesperini, M. Giersz, & A. Sills, , editor, v. 246 of **IAU Symposium**, p. 457–466, May 2008.
- [108] MAKINO, J.; AARSETH, S. J. On a Hermite integrator with Ahmad-Cohen scheme for gravitational many-body problems. **Publications of the Astronomical Society of Japan**, v. 44, p. 141–151, Apr. 1992.
- [109] MAKINO, J.; FUKUSHIGE, T.; KOGA, M.; NAMURA, K. GRAPE-6: Massively-Parallel Special-Purpose Computer for Astrophysical Particle Simulations. **Publications of the Astronomical Society of Japan**, v. 55, p. 1163–1187, Dec. 2003.
- [110] MAST, D.; DÍAZ, R. J.; AGÜERO, M. P. Double Nucleus in M83. **Astronomical Journal**, v. 131, p. 1394–1404, Mar. 2006.
- [111] MCLURE, R. J.; DUNLOP, J. S. On the black hole-bulge mass relation in active and inactive galaxies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 331, p. 795–804, Apr. 2002.
- [112] MERRITT, D.; FERRARESE, L. Black hole demographics from the M_{\bullet} - σ relation. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 320, p. L30–L34, Jan. 2001.

- [113] MIKKOLA, S. Regular Algorithms for the Few-Body Problem. In: LECTURE NOTES IN PHYSICS, BERLIN SPRINGER VERLAG, S. J. Aarseth, C. A. Tout, & R. A. Mardling, , editor, v. 760 of **Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag**, p. 31–+, 2008.
- [114] MIKKOLA, S.; AARSETH, S. A Time-Transformed Leapfrog Scheme. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 84, p. 343–354, Dec. 2002.
- [115] MIKKOLA, S.; TANIKAWA, K. Algorithmic regularization of the few-body problem. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 310, p. 745–749, Dec. 1999a.
- [116] MIKKOLA, S.; TANIKAWA, K. Explicit Symplectic Algorithms For Time-Transformed Hamiltonians. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 74, p. 287–295, Aug. 1999b.
- [117] MILOSAVLJEVIĆ, M.; MERRITT, D. Formation of Galactic Nuclei. **Astrophysical Journal**, v. 563, p. 34–62, Dec. 2001.
- [118] MILOSAVLJEVIĆ, M.; MERRITT, D. Long-Term Evolution of Massive Black Hole Binaries. **Astrophysical Journal**, v. 596, p. 860–878, Oct. 2003.
- [119] MOORE, CRISTOPHER. Braids in classical dynamics. **Phys. Rev. Lett.**, v. 70, n. 24, p. 3675–3679, Jun 1993.
- [120] MOURI, H.; TANIGUCHI, Y. Runaway Merging of Black Holes: Analytical Constraint on the Timescale. **Astrophysical Journal Letters**, v. 566, p. L17–L20, Feb. 2002.
- [121] NEWHALL, X. X.; STANDISH, E. M.; WILLIAMS, J. G. DE 102 - A numerically integrated ephemeris of the moon and planets spanning forty-four centuries. **Astronomy and Astrophysics**, v. 125, p. 150–167, Aug. 1983.
- [122] NISSANKE, S.; BLANCHET, L. Gravitational radiation reaction in the equations of motion of compact binaries to 3.5 post-Newtonian order. **Classical and Quantum Gravity**, v. 22, p. 1007–1031, Mar. 2005.
- [123] O’LEARY, R. M.; RASIO, F. A.; FREGEAU, J. M.; IVANOVA, N.; O’SHAUGHNESSY, R. Binary Mergers and Growth of Black Holes in Dense Star Clusters. **Astrophysical Journal**, v. 637, p. 937–951, Feb. 2006.
- [124] OMELYAN, I. P.; MRYGLOD, I. M.; FOLK, R. Symplectic analytically integrable decomposition algorithms: classification, derivation, and application to molecular

- dynamics, quantum and celestial mechanics simulations. **Computer Physics Communications**, v. 151, p. 272–314, Apr. 2003.
- [125] PATI, M. E.; WILL, C. M. Post-Newtonian gravitational radiation and equations of motion via direct integration of the relaxed Einstein equations. II. Two-body equations of motion to second post-Newtonian order, and radiation reaction to 3.5 post-Newtonian order. **Physical Review D**, v. 65, n. 10, p. 104008–+, May 2002.
- [126] PERES, A. Classical Radiation Recoil. **Physical Review**, v. 128, p. 2471–2475, Dec. 1962.
- [127] PETERS, P. C. Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses. **Physical Review**, v. 136, p. 1224–1232, Nov. 1964.
- [128] PHINNEY, E. S. The LISA Experiment and Predictions of What It Will See. In: BULLETIN OF THE AMERICAN ASTRONOMICAL SOCIETY, v. 32 of **Bulletin of the American Astronomical Society**, p. 1267–+, Oct. 2000.
- [129] PORTEGIES ZWART, S. F.; BAUMGARDT, H.; HUT, P.; MAKINO, J.; MCMILLAN, S. L. W. Formation of massive black holes through runaway collisions in dense young star clusters. **Nature**, v. 428, p. 724–726, Apr. 2004.
- [130] PORTEGIES ZWART, S. F.; BELLEMAN, R. G.; GELDOLF, P. M. High-performance direct gravitational N-body simulations on graphics processing units. **New Astronomy**, v. 12, p. 641–650, Nov. 2007.
- [131] PORTEGIES ZWART, S. F.; MCMILLAN, S. L. W.; HUT, P.; MAKINO, J. Star cluster ecology - IV. Dissection of an open star cluster: photometry. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 321, p. 199–226, Feb. 2001.
- [132] PRETO, M.; TREMAINE, S. A Class of Symplectic Integrators with Adaptive Time Step for Separable Hamiltonian Systems. **Astronomical Journal**, v. 118, p. 2532–2541, Nov. 1999.
- [133] PRETORIUS, F. Evolution of Binary Black-Hole Spacetimes. **Physical Review Letters**, v. 95, n. 12, p. 121101–+, Sep. 2005.
- [134] REES, M. J. Black Hole Models for Active Galactic Nuclei. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 22, p. 471–506, 1984.
- [135] ROBERTSON, B.; HERNQUIST, L.; COX, T. J.; DI MATTEO, T.; HOPKINS, P. F.; MARTINI, P.; SPRINGEL, V. The Evolution of the M_{BH} - σ Relation. **Astrophysical Journal**, v. 641, p. 90–102, Apr. 2006.

- [136] RODRIGUES, I.; DOTTORI, H.; DÍAZ, R. J.; AGÜERO, M. P.; MAST, D. Kinematics and Modeling of the Inner Region of M 83. **Astronomical Journal**, v. 137, p. 4083–4090, May 2009.
- [137] SAHA, P.; TREMAINE, S. Symplectic integrators for solar system dynamics. **Astronomical Journal**, v. 104, p. 1633–1640, Oct. 1992.
- [138] SAKAMOTO, K.; MATSUSHITA, S.; PECK, A. B.; WIEDNER, M. C.; IONO, D. Molecular Gas around the Double Nucleus in M83. **Astrophysical Journal Letters**, v. 616, p. L59–L62, Nov. 2004.
- [139] SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics**: 1985.
- [140] SHIELDS, G. A.; BONNING, E. W.; SALVIANDER, S. Comment on the Black Hole Recoil Candidate Quasar SDSS J092712.65+294344.0. **Astrophysical Journal**, v. 696, p. 1367–1373, May 2009a.
- [141] SHIELDS, G. A.; ROSARIO, D. J.; SMITH, K. L.; BONNING, E. W.; SALVIANDER, S.; KALIRAI, J. S.; STRICKLER, R.; RAMIREZ-RUIZ, E.; DUTTON, A. A.; TREU, T.; MARSHALL, P. J. The Quasar SDSS J105041.35+345631.3: Black Hole Recoil or Extreme Double-Peaked Emitter? **Astrophysical Journal**, v. 707, p. 936–941, Dec. 2009b.
- [142] SKEEL, R. D.; GEAR, C. W. Does variable step size ruin a symplectic integrator? **Physica D Nonlinear Phenomena**, v. 60, p. 311–313, Nov. 1992.
- [143] SORIA, R.; WU, K. Properties of discrete X-ray sources in the starburst spiral galaxy M 83. **Astronomy and Astrophysics**, v. 410, p. 53–74, Oct. 2003.
- [144] SPRINGEL, V. The cosmological simulation code GADGET-2. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 364, p. 1105–1134, Dec. 2005.
- [145] SPRINGEL, V.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M. The large-scale structure of the Universe. **Nature**, v. 440, p. 1137–1144, Apr. 2006.
- [146] SUGIMOTO, D.; CHIKADA, Y.; MAKINO, J.; ITO, T.; EBISUZAKI, T.; UEMURA, M. A special-purpose computer for gravitational many-body problems. **Nature**, v. 345, p. 33–35, May 1990.
- [147] TAYLOR, J. H. Pulsar timing and relativistic gravity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 10, p. 167–+, Dec. 1993.
- [148] TAYLOR, J. H.; FOWLER, L. A.; MCCULLOCH, P. M. Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR 1913+16. **Nature**, v. 277, p. 437–440, Feb. 1979.

- [149] TAYLOR, J. H.; WEISBERG, J. M. A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16. **Astrophysical Journal**, v. 253, p. 908–920, Feb. 1982.
- [150] THATTE, N.; TECZA, M.; GENZEL, R. Stellar dynamics observations of a double nucleus in M 83. **Astronomy and Astrophysics**, v. 364, p. L47–L53, Dec. 2000.
- [151] TREMAINE, S.; GEBHARDT, K.; BENDER, R.; BOWER, G.; DRESSLER, A.; FABER, S. M.; FILIPPENKO, A. V.; GREEN, R.; GRILLMAIR, C.; HO, L. C.; KORMENDY, J.; LAUER, T. R.; MAGORRIAN, J.; PINKNEY, J.; RICHSTONE, D. The Slope of the Black Hole Mass versus Velocity Dispersion Correlation. **Astrophysical Journal**, v. 574, p. 740–753, Aug. 2002.
- [152] VIVEK, M.; SRINANAND, R.; NOTERDAEME, P.; MOHAN, V.; KURIAKOSDE, V. C. SDSS J092712.64+294344.0: recoiling blackhole or merging galaxies? **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 400, p. L6–L9, Nov. 2009.
- [153] VOLONTERI, M. Gravitational Recoil: Signatures on the Massive Black Hole Population. **Astrophysical Journal Letters**, v. 663, p. L5–L8, Jul. 2007.
- [154] VOLONTERI, M.; HAARDT, F.; MADAU, P. The Assembly and Merging History of Supermassive Black Holes in Hierarchical Models of Galaxy Formation. **Astrophysical Journal**, v. 582, p. 559–573, Jan. 2003a.
- [155] VOLONTERI, M.; MADAU, P.; HAARDT, F. The Formation of Galaxy Stellar Cores by the Hierarchical Merging of Supermassive Black Holes. **Astrophysical Journal**, v. 593, p. 661–666, Aug. 2003b.
- [156] VOLONTERI, M.; MADAU, P.; QUATAERT, E.; REES, M. J. The Distribution and Cosmic Evolution of Massive Black Hole Spins. **Astrophysical Journal**, v. 620, p. 69–77, Feb. 2005.
- [157] VOLONTERI, M.; PERNA, R. Dynamical evolution of intermediate-mass black holes and their observable signatures in the nearby Universe. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 358, p. 913–922, Apr. 2005.
- [158] VOLONTERI, M.; REES, M. J. Rapid Growth of High-Redshift Black Holes. **Astrophysical Journal**, v. 633, p. 624–629, Nov. 2005.
- [159] WHITE, S. D. M.; REES, M. J. Core condensation in heavy halos - A two-stage theory for galaxy formation and clustering. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 183, p. 341–358, May 1978.

- [160] WISDOM, J.; HOLMAN, M. Symplectic maps for the n-body problem. **Astronomical Journal**, v. 102, p. 1528–1538, Oct. 1991.
- [161] YOSHIDA, H. Construction of higher order symplectic integrators. **Physics Letters A**, v. 150, p. 262–268, Nov. 1990.
- [162] YOSHIDA, H. Symplectic Integrators for Hamiltonian Systems: Basic Theory. In: CHAOS, RESONANCE, AND COLLECTIVE DYNAMICAL PHENOMENA IN THE SOLAR SYSTEM, S. Ferraz-Mello, , editor, v. 152 of **IAU Symposium**, p. 407–+, 1992.