Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

TEORIA DE GALOIS PARA K_β-ANÉIS

Tese de Doutorado

CHRISTIAN MICHEL DA CUNHA GARCIA

Porto Alegre, junho de 2023

Tese submetida por Christian Michel da Cunha Garcia*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:
Prof.ª Dra. Thaísa Raupp Tamusiunas (UFRGS)

Banca examinadora:
Prof. Dr. Antonio Paques
Prof.ª Dra. Bárbara Seelig Pogorelsky (UFRGS)
Prof. Dr. Dirceu Bagio (UFSC)
Prof. Dr. Héctor Pinedo Tapia (Universidad Industrial de Santander)
Prof. Dr. Wagner de Oliveira Cortes (UFRGS)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) no período de 02/2019 à 05/2023

Agradecimentos

Aos meus pais, pela educação e amor.

À minha namorada Isadora, por dividir os melhores e piores momentos comigo.

A todos os meus colegas, pelas longas horas de conversa, nas quais solucionamos grandes questões da humanidade, da vida, do universo e tudo o mais. Infelizmente o mesmo não se pode dizer sobre as listas de exercícios. Mas se não mudamos o mundo, tenho certeza que mudamos a nós mesmos.

À professora Thaísa Tamusiunas, pela orientação, pelos ensinamentos, por ter me apontado os caminhos da pesquisa Matemática e me apresentado as teorias de Galois.

Ao professor Antonio Paques, por ter aceitado me orientar no início do doutorado. Seu trabalho formou as bases para que minha pesquisa pudesse ser realizada.

À banca examinadora, por terem aceitado ler meu trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma teoria de Galois para ação de grupoides sobre anéis não necessariamente comutativos. Apresentamos dois teoremas de correspondência, um para ações de grupoides finitos e outro para ações de grupoides de qualquer ordem. Este trabalho estende os resultados de Chase, Harrison e Rosenberg em [7], H. F. Kreimer em [13] e T. Tamusiunas e A. Paques em [20].

Palavras-chave: Teoria de Galois sobre anéis, grupoides, ações de grupoide, K_β-anéis, correspondência de Galois.

Abstract

In this work, we present a Galois theory for groupoids acting on noncommutative rings. We present two correspondence theorems, one for the action of finite groupoids and another for the action of an arbitrary order groupoid. This work extends the results of Chase, Harrison, and Rosenberg in [7], H. F. Kreimer in [13], and T. Tamusiunas and A. Paques in [20].

Keywords: Galois theory on rings, groupoids, groupoid actions, K_β-rings, Galois correspondence.

Índice

Introdução

As ideias de Galois tiveram um grande impacto na matemática desde o seu surgimento em meados do século XIX. Ele lançou as bases de uma teoria que resolveu um dos grandes problemas da época: a insolubilidade de equações de quinto grau por meio de seus radicais. A solução desse problema da álgebra clássica abriu caminho para o desenvolvimento da álgebra abstrata moderna, contribuindo significativamente para a teoria de corpos, teoria dos grupos, álgebra linear, álgebra comutativa, teoria algébrica dos números e novas teorias de Galois.

Um dos elementos mais importantes da teoria de Galois é a existência do Teorema Fundamental, que estabelece uma correspondência entre as extensões intermediárias $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{L}$ de uma extensão finita e galoisiana $\mathbb{L}$ de um corpo $\mathbb{K}$ e subgrupos de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$, que são os automorfismos de $\mathbb{L}$ que deixam fixo o corpo $\mathbb{K}$.

Com o objetivo de entender e estender a teoria de Galois, alguns trabalhos se concentraram no desenvolvimento de versões do Teorema Fundamental para estruturas algébricas mais gerais.

Um desses trabalhos foi apresentado em 1965 por S. U. Chase, D. K. Harrison e A. Rosenberg em [7], onde eles introduziram a Teoria de Galois para anéis comutativos. Eles apresentaram os conceitos de extensão de Galois para anéis comutativos e a noção de subalgebra G-forte. Tais objetos permitiram exibir uma versão do Teorema Fundamental, uma correspondência bijetiva entre subgrupos do grupo de

Galois G e subálgebras separáveis e G-fortes. Dentre as generalizações obtidas a partir do trabalho de Chase, Harrison e Rosenberg, destacam-se duas delas como as principais referências para este trabalho.

A primeira é devida a H. F. Kreimer, que em 1966 apresenta uma teoria de Galois que estende a feita em [7] para anéis não necessariamente comutativos. Em [13], dado um anel A e seu grupo de automorfismos G, se A for o que o autor define como K-anel, é apresentado um teorema de correspondência entre subgrupos de G e subanéis que o autor define como G-admissíveis.

Por outro lado, em [3], D. Bagio e A. Paques apresentaram uma generalização do conceito de extensão galoisiana para ações de grupoides. Grupoides são uma generalização natural de grupos para operações parcialmente definidas, mas que possuem propriedades de associatividade, elemento neutro e inverso. As extensões galoisianas apresentadas em [3] foram usadas por T. Tamusiunas e A. Paques em [20] para elaborar uma teoria de Galois que estende a teoria apresentada em [7] para álgebras comutativas sobre a ação de um grupoide $\mathcal{G}$. Em [20], os autores estenderam a noção de G-forte para o que chamaram de β-forte e demonstraram uma correspondência bijetiva entre as subálgebras separáveis e β-fortes e subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma teoria de Galois que generaliza as teorias apresentadas em [13] e [20] para a ação de grupoides sobre anéis não necessariamente comutativos. Com a teoria proposta, é possível obter os teoremas de correspondência apresentados em [13] e [20] como corolários.

Destacamos que outros trabalhos também vão em direção a propor uma Teoria de Galois para anéis não comutativos sob ação de grupoides. Em [21] T. Tamusiunas e A. Paques apresentam condições para que uma álgebra não necessariamente comutativa, mas galoisiana sobre seu centro, possua uma correspondência de Galois bijetiva. No entanto tal classificação é possível para anéis específicos. Em [24] T. Tamusiunas e J. Pedrotti apresentam, sob condições mais gerais, condições para que a aplicação de Galois seja injetiva. Outras questões referentes à teoria de Galois, como caracterizações de extensões Galois-Azumaya, Hirata separabilidade, ou até mesmo correspondências para anéis quaisquer, ainda seguem em aberto.

Este trabalho esta organizado da seguinte maneira: no Capítulo 1 apresentamos os conceitos e notações relacionados a grupoides, além de introduzir a noção de ação global de grupoides sobre anéis. Também são apresentadas no Capítulo 1 certas propriedades das classes laterais, que são necessárias para o desenvolvimento da teoria proposta.

No Capítulo 2, é desenvolvida uma Teoria de Galois para anéis não necessariamente comutativos sob a ação de grupoides finitos. São estabelecidos os conceitos de β-admissível e K_β-anel, a fim de estender os conceitos de G-admissível e K-anel apresentados em [13] e β-forte apresentado em [20]. A discussão sobre essas generalizações é feita na seção 2.5. Então, apresentamos um teorema de correspondência que relaciona de forma biunívoca os subanéis β-admissíveis de um K_β-anel A com os subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$.

No Capítulo 3, é apresentado um teorema de correspondência para a ação de grupoides de ordem qualquer. Para obter uma correspondência biunívoca, é adicionada a $\mathcal{G}$ uma estrutura de espaço topológico, e é mostrada uma correspondência entre subgrupoides amplos e fechados nesta topologia com os K_β-subanéis do K_β-anel A.

Por todo este trabalho, os anéis e as álgebras são associativos e unitários.

Capítulo 1

Grupoides, Classes Laterais e Grupoide Quociente

A estrutura de grupoide generaliza o conceito de grupo, e é por meio dela que vamos estender a Teoria de Galois desenvolvida por H. F. Kreimer em [13]. Trabalharemos com ações globais de grupoide sobre anéis, que foram definidas por D. Bagio e A. Paques em [3].

Por ter uma importância central neste trabalho, este capítulo é dedicado a apresentar os conceitos e notações acerca de grupoides e ação de grupoides sobre anéis, com foco nas propriedades que serão utilizadas para desenvolver os resultados dos capítulos seguintes. A primeira seção é destinada a propriedades usualmente encontradas na literatura, enquanto na segunda seção serão apresentados resultados, parte deles originais, a respeito de classes laterais e grupoide quociente. Todos os resultados encontrados na literatura estarão referenciados.

1.1 Pré-requisitos sobre grupoides

Um grupoide é usualmente definido, em linguagem categórica, como uma categoria pequena em que todos os morfismos são isomorfismos. Tal definição pode ser encontrada em [16]. No entanto, neste trabalho usaremos a definição algébrica equivalente, como segue.

Definição 1.1.1. [20, Section 2] Um grupoide $\mathcal{G}$ é um conjunto não vazio equipado com uma operação binária, que será denotada pela concatenação, definida parcialmente e fechada, satisfazendo:

(i) Para quaisquer $g, h, l \in \mathcal{G}$, existe $(gh)l$ se e somente se existe $g(hl)$ e neste caso $(gh)l = g(hl)$;

(ii) Para quaisquer $g, h, l \in \mathcal{G}$, existe $(gh)l$ se e somente se existem gh e hl;

(iii) Para todo $g \in \mathcal{G}$, existem elementos $d(g), r(g) \in \mathcal{G}$ tais que existem $gd(g)$, $r(g)g$ e neste caso $r(g)g = g = gd(g)$;

(iv) Para todo $g \in \mathcal{G}$, existe $g^{-1} \in \mathcal{G}$ tal que existem $g^{-1}g$ e gg^{-1}, e neste caso $g^{-1}g = d(g)$ e $gg^{-1} = r(g)$.

Para um grupoide $\mathcal{G}$ e quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$, escrevemos $\exists gh$ sempre que o produto gh estiver definido. Dizemos que um elemento $e \in \mathcal{G}$ é uma identidade se, sempre que $\exists eg$ então $eg = g$ e $\exists he$ então $he = h$. Nesse caso, se $e, e' \in \mathcal{G}$ são identidades tais que $\exists ee'$, então $e = e'$. Portanto, os elementos $d(g), r(g)$ do item (iii) da definição de grupoide são únicos. Logo, dizemos que um elemento $e \in \mathcal{G}$ é uma identidade se $e = d(g)$ ou $e = r(g)$, para algum $g \in \mathcal{G}$. Além disso, dizemos que $d(g)$ é a identidade domínio de g e $r(g)$ é chamada identidade imagem de g.

Denotaremos por $\mathcal{G}^2$ o conjunto de todos os pares $(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ tais que $\exists gh$, e por $\mathcal{G}_0$ o conjunto das identidades de $\mathcal{G}$.

Exemplo 1.1.2. [12, Section 3.1] Todo grupo G é um grupoide, onde o produto gh é dado pela operação do grupo. Note que a operação está definida para quaisquer $g, h \in G$ e denotando por 1_G a identidade do grupo, temos que $r(g) = d(g) = 1_G$, para todo $g \in G$.

Exemplo 1.1.3. [6, Example 1] Considere $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de grupos disjuntos, onde Λ é um conjunto de índices. A união disjunta $\mathcal{G} = \dot{\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda}} G_\lambda$ define um grupoide com a operação:

$$\exists gh \text{ se e somente se } g, h \in G_\lambda, \text{ para algum } \lambda \in \Lambda.$$

E neste caso gh é o produto do grupo G_λ e $d(g) = r(g) = 1_{G_\lambda}$.

Exemplo 1.1.4. [12, Example 3.2] Considere I um conjunto não vazio. O conjunto $I \times I$ possui uma estrutura de grupoide com a operação:

$$\exists (i,j)(l,k) \text{ se e somente se } j = l \text{ e neste caso } (i,j)(l,k) = (i,k),$$

para quaisquer $(i,j), (l,k) \in I \times I$. Além disso, $(i,j)^{-1} = (j,i)$, $d((i,j)) = (j,j)$ e $r((i,j)) = (i,i)$.

Exemplo 1.1.5. [16, Example 2] Considere um anel A. Chamaremos de isomorfismo parcial de A todo isomorfismo de anéis entre ideais de A. Com isto, o conjunto $\mathcal{G}$ de todos os isomorfismos parciais de A é um grupoide com a operação dada pela composição de funções. Observe que, para quaisquer $g : E_1 \to E_2$ e $h : E_3 \to E_4$ em $\mathcal{G}$. temos que,

$$\exists gh \Leftrightarrow E_2 = E_3 \Leftrightarrow id_{E_2} = id_{E_3} \Leftrightarrow d(g) = r(h).$$

Além disso, $d(g) = id_{E_3}$ e $r(g) = id_{E_4}$.

A seguir apresentaremos alguns conceitos e resultados importantes acerca da estrutura de grupoide. Por exemplo, diferente de grupos que possuem apenas um idempotente, dado pela identidade do grupo, para um grupoide temos o lema a seguir.

Lema 1.1.6. [16, Proposition 1.1.2] *O conjunto dos elementos idempotentes de $\mathcal{G}$ é precisamente $\mathcal{G}_0$.*

Demonstração. Seja $g \in \mathcal{G}$ um idempotente, ou seja, $g^2 = g$. Portanto, temos que $gg = g = gd(g) = r(g)g$, mas as identidades de g são únicas, logo $g = d(g) = r(g)$. Reciprocamente, começamos notando que

$$d(g)d(g) = (g^{-1}g)(g^{-1}g) = g^{-1}(gg^{-1})g = g^{-1}(r(g)g) = g^{-1}g = d(g). \tag{1.1}$$

Analogamente, $r(g)r(g) = r(g)$. Logo, as identidades são idempotentes. Dessa forma, o conjunto dos idempotentes é $\mathcal{G}_0$. □

Na demonstração acima, a equação (1.1) nos diz o seguinte fato para as identidades: $d(d(g)) = r(d(g)) = d(g)$ e $d(r(g)) = r(r(g)) = r(g)$. Usaremos isto para provar uma importante propriedade. As identidades caracterizam quando dois elementos de $\mathcal{G}$ são operáveis. Este resultado e alguns fatos interessantes que decorrem deste serão apresentados a seguir.

Proposição 1.1.7. [16, Proposition 1.1.1 and Lemma 3.1.1] *Para qualquer grupoide $\mathcal{G}$, temos que:*

(i) *$\exists gh$ se e somente se $d(g) = r(h)$ e neste caso $d(gh) = d(h)$ e $r(gh) = r(g)$, para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$;*

(ii) *O elemento g^{-1} é único e $(g^{-1})^{-1} = g$, para todo $g \in \mathcal{G}$;*

(iii) *$\exists gh$ se e somente se $\exists h^{-1}g^{-1}$ e neste caso $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$, para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$.*

Demonstração. Fixados $g, h \in \mathcal{G}$ no qual $\exists gh$, temos que $gh = r(gh)gh$ e, por outro lado, $gh = r(g)gh$, logo $r(gh)gh = r(g)gh$ e como a identidade deve ser única, então $r(gh) = r(g)$. Analogamente, $d(gh) = d(h)$. Com isto, para todo $l \in \mathcal{G}$ temos que

$$r(l) = d(r(l)) = d(ll^{-1}) = d(l^{-1}). \tag{1.2}$$

Por outro lado, $gh = (gd(g))(r(h)h) = g(d(g)r(h))h$, portanto pelo axioma (ii) da definição de grupoide, existe o produto $d(g)r(h)$. Logo, utilizando o fato de $r(h)$ ser um idempotente, temos que

$$(d(g)r(h))\, r(h) = d(g)(r(h)r(h)) = d(g)r(h).$$

Então, $d(d(g)r(h)) = r(h)$ e analogamente $r(d(g)r(h)) = d(g)$. Assim,

$$d(g)r(h) = r(d(g)r(h))r(h) = (d(g)r(h))(d(g)r(h))^{-1}r(h) = d(g)r(h)((d(g)r(h))^{-1}r(h)).$$

Mas como a identidade domínio de $d(g)r(h)$ é única, então $(d(g)r(h))^{-1}r(h) = r(h)$ e como a identidade imagem de $r(h)$ é única, temos que $(d(g)r(h))^{-1} = r(h)$. Por fim, utilizando este fato e (1.2) temos que

$$d(g) = r(d(g)r(h)) = d((d(g)r(h))^{-1}) = d(r(h)) = r(h).$$

Reciprocamente, se $d(g) = r(h)$, então $d(g) = d(g)d(g) = d(g)r(h) = g^{-1}ghh^{-1}$, portanto $\exists gh$.

Os itens (ii) e (iii) decorrem imediatamente do item (i). $\square$

O item (i) da Proposição anterior permite concluir que se o grupoide possuir apenas uma identidade, então para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$ teremos que $d(g) = r(h)$, portanto $\exists gh$, para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$. Ou seja, todos elementos de $\mathcal{G}$ são operáveis e nesse caso $\mathcal{G}$ é um grupo. Argumento análogo a este motiva a definição a seguir.

Definição 1.1.8. [20, Section 2] Fixado uma identidade $e \in \mathcal{G}_0$, definimos o grupo $\mathcal{G}_e = \{g \in G : d(g) = r(g) = e\}$, chamado de grupo de isotropia associado ao elemento e.

Lema 1.1.9. [8, Lemma 2.1] *Para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$, existe $l \in \mathcal{G}$ tal que $g = hl$ se e somente se $r(g) = r(h)$.*

Demonstração. Se $g = hl$, então pela Proposição 1.1.7 $r(g) = r(h)$. Reciprocamente, como $r(g) = d(g^{-1})$ e por hipótese $r(g) = r(h)$, então pela Proposição 1.1.7 temos que $\exists g^{-1}h$, e novamente pela Proposição 1.1.7, $l = (g^{-1}h)^{-1} = h^{-1}g$ é tal que $r(l) = r(h^{-1}) = d(h)$, portanto $\exists hl$. Logo,

$$hl = h(g^{-1}h)^{-1} = hh^{-1}g = r(h)g = r(g)g = g.$$

□

Definição 1.1.10. [20, Section 2] Seja $\mathcal{H}$ um subconjunto não vazio de $\mathcal{G}$. Dizemos que $\mathcal{H}$ é um subgrupoide de $\mathcal{G}$ se satisfaz as seguintes condições:

(i) Para quaisquer $g, h \in \mathcal{H}$ tais que $\exists gh$, então $gh \in \mathcal{H}$;

(ii) Se $g \in \mathcal{H}$, então $g^{-1} \in \mathcal{H}$, para todo $g \in \mathcal{H}$.

Dizemos que um subgrupoide $\mathcal{H}$ de um grupoide $\mathcal{G}$ é amplo se $\mathcal{H}_0 = \mathcal{G}_0$.

Exemplo 1.1.11. [20, Example 3.2] O conjunto $\mathcal{G}_0$ das identidades é um subgrupoide de $\mathcal{G}$.

Exemplo 1.1.12. [20, Example 3.5] O conjunto $\mathcal{H} = \{h \in \mathcal{G} : d(h) = r(h)\}$ é um subgrupoide de $\mathcal{G}$. Note que $\mathcal{H}$ é um subgrupoide amplo formado pela união dos grupos de isotropia de $\mathcal{G}$.

Exemplo 1.1.13. [20, Example 3.3] Considere $\mathcal{G} = \dot{\cup}_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ a união disjunta de grupos dado no Exemplo 1.1.3 e tome uma família $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega} \subseteq \mathcal{G}$, onde $\Omega \subseteq \Lambda$ é um subconjunto não vazio e cada H_ω é um subgrupo de G_ω, para algum $\omega \in \Omega$. Então, $\mathcal{H} = \dot{\cup}_{\omega \in \Omega} H_\omega$ é um subgrupoide de $\mathcal{G}$. Note que se $\Omega = \Lambda$, então $\mathcal{H}$ é amplo.

Exemplo 1.1.14. [12, Example 3.3.3] Sejam I um conjunto não vazio e $I \times I$ o grupoide apresentado no Exemplo 1.1.4. Um subconjunto não vazio $J \subseteq I$ define o subgrupoide $J \times J$ de $I \times I$. Note que $J \times J$ é amplo se $(i, i) \in J \times J$, para todo $i \in I$, e isto só ocorre se $I = J$.

Definição 1.1.15. Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupoides e uma função $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Dizemos que ψ é um homomorfismo de grupoides se,

(i) $(\psi(g), \psi(h)) \in \mathcal{H}^2$, para todo $(g, h) \in \mathcal{G}^2$;

(ii) $\psi(gh) = \psi(g)\psi(h)$, para todo $(g, h) \in \mathcal{G}^2$.

Dizemos que ψ é um isomorfismo de grupoides se ψ for uma função bijetora.

Dedicaremos o final desta seção ao conceito de ação global de grupoide e algumas de suas propriedades, principalmente as referentes ao subanel dos invariantes por esta ação.

Definição 1.1.16. [3, Section 1] Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e A um anel. Uma ação de $\mathcal{G}$ sobre A é um par

$$\beta = (\{E_g\}_{g \in \mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g \in \mathcal{G}}),$$

onde $g \in \mathcal{G}$, $E_g = E_{r(g)}$ é um ideal de A e $\beta_g : E_{g^{-1}} \to E_g$ é um isomorfismo de anéis, satisfazendo:

(i) β_e é a aplicação identidade id_{E_e} de E_e, para todo $e \in \mathcal{G}_0$;

(ii) $\beta_g(\beta_h(r)) = \beta_{gh}(r)$, para todo $(g, h) \in \mathcal{G}^2$ e todo $r \in E_{h^{-1}} = E_{(gh)^{-1}}$.

A definição acima é conhecida na literatura como ação global de $\mathcal{G}$ sobre A. Neste trabalho vamos nos referir simplesmente como ação de $\mathcal{G}$ sobre A. Vejamos um exemplo deste conceito.

Exemplo 1.1.17. [3, Example 2.2] Considere o grupoide $\mathcal{G} = \{d(g), r(g), g, g^{-1}\}$ e o anel definido por $A = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3 \oplus Re_4$, onde R é um anel com unidade e e_1, e_2, e_3 e e_4 são idempotentes dois a dois ortogonais cuja soma é 1_A. Fixe os ideais de A, $E_{d(g)} = E_{g^{-1}} = Re_1 \oplus Re_2$ e $E_{r(g)} = E_g = Re_3 \oplus Re_4$. Defina $\beta_{d(g)} = id_{E_{d(g)}}$, $\beta_{r(g)} = id_{E_{r(g)}}$, $\beta_g(ae_1 + be_2) = ae_3 + be_4$ e $\beta_{g^{-1}}(ae_3 + be_4) = ae_1 + be_2$, para quaisquer $a, b \in R$. Então, $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ é uma ação do grupoide $\mathcal{G}$ sobre A.

Lema 1.1.18. [20, Theorem 4.1] *Fixe $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ uma ação de um grupoide $\mathcal{G}$ em um anel A da forma $A = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e$ e $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Então, o par $\beta_{\mathcal{H}} = (\{E_h\}_{h\in\mathcal{H}}, \{\beta_h\}_{h\in\mathcal{H}})$ define uma ação do subgrupoide $\mathcal{H}$ em A.*

Lema 1.1.19. [20, Lemma 2.1] *Seja $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ uma ação de $\mathcal{G}$ em um anel A, onde cada E_g é um ideal com unidade, denotada por 1_g. Então, para todo subconjunto T de A o conjunto*

$$\mathcal{H}_T = \{g \in \mathcal{G} : \beta_g(t1_{g^{-1}}) = t1_g, \text{ para todo } t \in T\},$$

é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$.

Demonstração. Veja que $\mathcal{H}_T$ não é vazio pois claramente $\beta_{d(g)}(t1_{d(g)}) = t1_{d(g)}$, para todo $d(g) \in \mathcal{G}_0$. Logo, $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{H}_T$.

Para quaisquer $g, h \in \mathcal{H}_T$ tais que $\exists gh$, temos:

$$\begin{aligned}
\beta_{gh}(t1_{(gh)^{-1}}) &= \beta_{gh}(t1_{h^{-1}g^{-1}}) = \beta_{gh}(t1_{h^{-1}}) = \beta_g\left(\beta_h(t1_{h^{-1}})\right) \\
&= \beta_g\left(\beta_h(t1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}\right) = \beta_g(t1_h 1_{g^{-1}}) = \beta_g(t1_{r(h)}1_{g^{-1}}) \\
&= \beta_g(t1_{d(g)}1_{g^{-1}}) = \beta_g(t1_{g^{-1}}1_{g^{-1}}) = \beta_g(t1_{g^{-1}}) \\
&= t1_g = t1_{r(g)} = t1_{r(gh)} = t1_{gh},
\end{aligned}$$

para todo $t \in T$, logo $gh \in \mathcal{H}_T$. Além disso,

$$\beta_{g^{-1}}(t1_g) = \beta_{g^{-1}}(\beta_g(t1_{g^{-1}})) = \beta_{g^{-1}g}(t1_{g^{-1}}) = \beta_{d(g)}(t1_{g^{-1}}) = t1_{g^{-1}},$$

para todo $t \in T$, logo $g^{-1} \in \mathcal{H}_T$. Portanto, $\mathcal{H}_T$ é um subgrupoide de $\mathcal{G}$. Agora, pela observação feita no começo, $\mathcal{H}_T$ é amplo, ou seja, $(\mathcal{H}_T)_0 = \mathcal{G}_0$ $\square$

Com a notação do Lema 1.1.19, fixado um subconjunto T de A, dizemos que $\mathcal{H}_T$ é o subgrupoide formado pelos elementos de $\mathcal{G}$ que deixam os elementos de T fixos.

Na Teoria de Galois clássica, um dos conceitos fundamentais é a noção de "corpo fixo". Esse conceito aparece quando se considera uma extensão $\mathbb{L}$ de um corpo $\mathbb{K}$ e se define o corpo fixo como o conjunto de elementos de $\mathbb{L}$ que são fixados pela ação do grupo de automorfismos da extensão. Em generalizações da teoria clássica, conceitos análogos são igualmente importantes. Para definirmos tais generalizações, fixemos $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ uma ação do grupoide $\mathcal{G}$ sobre um anel $A = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e$, onde cada E_g é um ideal com unidade, denotada por 1_g. Dessa forma, definimos o subanel dos elementos invariantes pela ação de β, por

$$A^\beta = \{a \in A : \beta_g(a1_{g^{-1}}) = a1_g, g \in \mathcal{G}\}.$$

Observe que o conjunto A^β é, de fato, subanel de A. Com efeito, $1_A \in A^\beta$, pois

$$\beta_g(1_A 1_{g^{-1}}) = \beta_g(1_{g^{-1}}) = 1_g = 1_A 1_g.$$

E as operações são fechadas, como segue

$$\begin{aligned}\beta_g((a-b)1_{g^{-1}}) &= \beta_g(a1_{g^{-1}} - b1_{g^{-1}}) = \beta_g(a1_{g^{-1}}) - \beta_g(b1_{g^{-1}})\\ &= a1_g - b1_g = (a-b)1_g.\end{aligned}$$

e

$$\beta_g(ab1_{g^{-1}}) = \beta_g(a1_{g^{-1}}b1_{g^{-1}}) = \beta_g(a1_{g^{-1}})\beta_g(b1_{g^{-1}}) = a1_g b1_g = ab1_g,$$

para quaisquer $a, b \in A^\beta$ e $g \in \mathcal{G}$.

Pelo Lema 1.1.18, se $\mathcal{H}$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, então existe uma ação $\beta_{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$ sobre A. Dessa forma, denotaremos de forma análoga o conjunto dos invariantes sobre a ação de $\beta_{\mathcal{H}}$ por

$$A^{\beta_{\mathcal{H}}} = \{a \in A : \beta_h(a1_{h^{-1}}) = a1_h, h \in \mathcal{H}\}.$$

Proposição 1.1.20. *Se $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ é uma ação de $\mathcal{G}$ em A, então as seguintes afirmações são verdadeiras.*

(i) *Se $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$ são subgrupoides de $\mathcal{G}$, então $A^{\beta_{\mathcal{H}_2}} \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}_1}}$;*

(ii) *Se $B_1 \subseteq B_2$ são subanéis de A, então $\mathcal{H}_{B_2} \subseteq \mathcal{H}_{B_1}$.*

Demonstração. Para o item (i), se $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}_2}}$, então $\beta_{h_2}(a1_{h_2^{-1}}) = a1_{h_2}$, para todo $h_2 \in \mathcal{H}_2$. Em particular, como $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$ então, para todo $h_1 \in \mathcal{H}_1$, temos que $\beta_{h_1}(a1_{h_1^{-1}}) = a1_{h_1}$. Logo, $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}_1}}$, portanto $A^{\beta_{\mathcal{H}_2}} \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}_1}}$.

Para o item (ii), se $g \in \mathcal{H}_{B_2}$, então $\beta_g(b_2 1_{g^{-1}}) = b_2 1_g$, para todo $b_2 \in B_2$. Mas $B_1 \subseteq B_2$ então, em particular, $\beta_g(b_1 1_{g^{-1}}) = b_1 1_g$ para todo $b_1 \in B_1$. Logo, $g \in \mathcal{H}_{B_1}$ e portanto, $\mathcal{H}_{B_2} \subseteq \mathcal{H}_{B_1}$. □

1.2 Classes Laterais e Grupoide Quociente

Nesta seção, apresentaremos propriedades de certas classes laterais e analisaremos em quais situações o quociente do grupoide $\mathcal{G}$ por um subgrupoide amplo $\mathcal{H}$ possui uma estrutura de grupoide com a operação induzida pela operação de $\mathcal{G}$. Ao longo desta seção, $\mathcal{G}$ sempre representará um grupoide qualquer, salvo menção contrária.

Definição 1.2.1. [12, Section 6.1] Seja $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Definimos à relação de equivalência à esquerda por

$$g \sim_E l \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{H} : \exists gh \text{ e } l = gh,$$

para quaisquer $g, l \in \mathcal{G}$.

Vejamos que, de fato, a relação acima define uma relação de equivalência. Começamos pela propriedade reflexiva: $g \sim_E g$, pois como $\mathcal{H}$ é amplo existe $d(g) \in \mathcal{H}$ tal que $g = gd(g)$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Para a propriedade de simetria, dados $g, l \in \mathcal{G}$ tais que $g \sim_E l$, então $\exists h \in \mathcal{H}$ tal que $\exists gh$ e $l = gh$. Como $\mathcal{H}$ é um subgrupoide, então $h^{-1} \in \mathcal{H}$ e portanto $g = lh^{-1}$, isto é, $l \sim_E g$.

Resta a transitividade. Para tal, fixados $g, l, k \in \mathcal{G}$ tais que $g \sim_E l$ e $l \sim_E k$, temos que $\exists h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ tais que $\exists gh_1$, $\exists lh_2$, $l = gh_1$ e $k = lh_2$. Nesse caso, temos que $d(h_1) = d(gh_1) = d(l) = r(h_2)$, logo $\exists h_1h_2$ e $h_1h_2 \in \mathcal{H}$ é tal que $k = gh_1h_2$, portanto $g \sim_E k$.

De forma análoga podemos definir à relação de equivalência à direita ([12, Section.1]) por

$$g \sim_D l \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{H} : \exists hg \text{ e } l = hg,$$

para quaisquer $g, l \in \mathcal{G}$. Esta define uma relação de equivalência, e para verificar tal fato basta realizar um raciocínio análogo ao feito para a relação de equivalência à esquerda. Com essas relações podemos definir as classes laterais como segue abaixo.

Definição 1.2.2. [12, Definition 6.1] Seja $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$.

(i) Para a relação $\sim_E$ definimos a classe lateral à esquerda de um elemento $g \in \mathcal{G}$ por $g\mathcal{H} = \{gh : h \in \mathcal{H}, r(h) = d(g)\}$;

(ii) Para a relação $\sim_D$ definimos a classe lateral à direita de um elemento $g \in \mathcal{G}$ por $\mathcal{H}g = \{hg : h \in \mathcal{H}, r(g) = d(h)\}$.

Neste trabalho restringiremos nosso estudo às classes laterais à esquerda. Entretanto, um argumento análogo pode ser feito para classes laterais à direita. Dito isto, denotaremos o conjunto das classes laterais à esquerda de $\mathcal{G}$ por $\mathcal{H}$ por $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ e e denotaremos este conjunto por conjunto quociente.

A seguir vamos estudar algumas propriedades das classes laterais. Começamos por observar que para $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$ e algum $g \in \mathcal{G}$ é de imediata verificação que o conjunto $g\mathcal{H}$ é formado por todos os elementos de $\mathcal{G}$ que são equivalentes a g. Dessa forma, é fácil ver que o conjunto $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ de todas as classes laterais à esquerda define uma partição de $\mathcal{G}$. Dizemos que $\{g_i\}$ é um sistema de representantes se contém exatamente um elemento em cada subconjunto da partição; no caso de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, se tem um representante de cada classe de equivalência.

Ainda, definimos o índice de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$ como a cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda e denotaremos por $(\mathcal{G} : \mathcal{H})$. Dizemos que $\mathcal{H}$ tem índice finito em $\mathcal{G}$ quando a cardinalidade de $(\mathcal{G} : \mathcal{H})$ for finita. A cardinalidade de qualquer sistema de representantes das classes laterais de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$ é igual a $(\mathcal{G} : \mathcal{H})$.

Embora a construção das classes laterais se assemelhe a feita para grupos, muitas das propriedades não se traduzem de forma análoga. Lembremos o Teorema de Lagrange para grupos: "*Se G é um grupo finito e H um subgrupo de G, então todas as classes laterais possuem a mesma cardinalidade e $|G| = (G : H)|H|$.*" Esta propriedade não é válida para grupoides, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.3. Considere o conjunto $I = \{i, j, k\}$ e $I \times I$ o grupoide com a operação apresentada no Exemplo 1.1.4. Fixe o subgrupoide amplo

$$\mathcal{H} = \{(i,i), (i,j), (j,i), (j,j), (k,k)\}.$$

Obtemos $(\mathcal{G} : \mathcal{H}) = 6$, onde as classes laterais são precisamente: $(i,k)\mathcal{H} = \{(i,k)\}$, $(j,k)\mathcal{H} = \{(j,k)\}$, $(k,i)\mathcal{H} = \{(k,i),(k,j)\}$, $(i,i)\mathcal{H} = \{(i,i),(i,j)\}$, $(j,j)\mathcal{H} = \{(j,j),(j,i)\}$ e $(k,k)\mathcal{H} = \{(k,k)\}$. Note que o análogo ao Teorema de Lagrange não vale, pois $|(j,k)\mathcal{H}| \neq |(k,i)\mathcal{H}|$ e $|\mathcal{G}| = 9 \neq 6 \cdot 5 = (\mathcal{G} : \mathcal{H})|\mathcal{H}|$.

Uma generalização do Teorema de Lagrange para grupoides pode ser encontrada em [4, Theorem 4.8].

Vejamos um lema que será importante para os resultados que apresentaremos posteriormente.

Lema 1.2.4. *Sejam $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}$ subgrupoides amplos de um grupoide $\mathcal{G}$ tais que $(\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $(\mathcal{H} : \mathcal{L})$ são índices finitos. Se os conjuntos $\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ e $\{h_j \in \mathcal{H} : 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})\}$ são sistemas de representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$ e $\mathcal{L}$ em $\mathcal{H}$, respectivamente, então*

$$\{g_i h_j : r(h_j) = d(g_i), 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}) \text{ e } 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})\}$$

é um sistema de representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{G}$.

Demonstração. Note que $\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ é um sistema de representantes, ou seja,

$$\mathcal{G} = \bigcup_{1 \leq i \leq (\mathcal{G}:\mathcal{H})} g_i\mathcal{H} \text{ e } g_i\mathcal{H} \cap g_l\mathcal{H} = \emptyset, \text{ para quaisquer } 1 \leq i, l \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}) \text{ e } i \neq l.$$

Analogamente, como $\{h_j \in \mathcal{H} : 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})\}$ é um sistemas de representantes, temos que

$$\mathcal{H} = \bigcup_{1 \leq j \leq (\mathcal{H}:\mathcal{L})} h_j\mathcal{L} \text{ e } h_j\mathcal{L} \cap h_k\mathcal{L} = \emptyset, \text{ para quaisquer } 1 \leq j, k \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L}) \text{ e } j \neq k.$$

Se $g \in \mathcal{G}$, temos que $g \in g_i\mathcal{H}$, para algum $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$, logo existe $h \in \mathcal{H}$ com $d(g_i) = r(h)$ tal que $g = g_i h$. Além disso, como $h \in \mathcal{H}$, então $h \in h_j\mathcal{L}$, para algum $1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})$, logo existe $l \in \mathcal{L}$ com $r(h) = r(h_j)$ tal que $h = h_j l$. Dessa forma, $g = g_i h_j l$, para algum $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})$ com $l \in \mathcal{L}$ e $r(h_j) = r(h) = d(g_i)$. Portanto, temos que $\mathcal{G} \subseteq \bigcup g_i h_j \mathcal{L}$ e como a inclusão contrária é evidente, temos que $\mathcal{G} = \bigcup g_i h_j \mathcal{L}$.

Resta mostrar que as classes são mutuamente disjuntas. Fixe $1 \leq j, k \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})$ e $1 \leq i, l \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$, onde $i \neq l$ ou $j \neq k$ tais que $g \in g_i h_j \mathcal{L} \cap g_l h_k \mathcal{L}$. Dessa forma, existem $l, l' \in \mathcal{L}$ tais que $g = g_i h_j l = g_l h_k l'$. Se $i \neq l$ temos um absurdo, pois $g_i\mathcal{H} \cup g_l\mathcal{H} = \emptyset$. Caso contrário, se $i = l$, então $j \neq k$ e como $\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ é um sistema de representantes temos que $g_i = g_l$, logo $h_j l = h_k l'$. Novamente temos um absurdo, pois $h_j\mathcal{L} \cup h_k\mathcal{L} = \emptyset$. Portanto, $g_i h_j \mathcal{L} \cap g_l h_k \mathcal{L} = \emptyset$ e $\{g_i h_j : r(h_j) = d(g_i), 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})\}$ é um sistema de representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{G}$. □

Encerraremos este capítulo apresentando o conceito de subgrupoide normal e mostrando que este é suficiente para que o quociente possua estrutura de grupoide. Também apresentaremos algumas propriedades destes conceitos e que serão utilizados posteriormente.

Definição 1.2.5. [9, Chapter 12] Se $\mathcal{H}$ é um subgrupoide de $\mathcal{G}$, dizemos que $\mathcal{H}$ é um **subgrupoide normal** se $\mathcal{H}_0 = \mathcal{G}_0$ e $g^{-1}\mathcal{H}_{r(g)}g \subseteq \mathcal{H}_{d(g)}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Observação 1.2.6. Com a notação da Definição 1.2.5 acima, temos que a condição $g^{-1}\mathcal{H}_{r(g)}g \subseteq \mathcal{H}_{d(g)}$ é suficiente para que $g^{-1}\mathcal{H}_{r(g)}g = \mathcal{H}_{d(g)}$. De fato, se $h \in \mathcal{H}_{d(g)}$, então $d(h) = r(g^{-1})$ e $r(h) = d(g)$. Então, $\exists ghg^{-1}$ e $ghg^{-1} \in \mathcal{H}_{r(g)}$, e portanto $h = g^{-1}(ghg^{-1})g \in g^{-1}\mathcal{H}_{r(g)}g$. Assim, segue que $g^{-1}\mathcal{H}_{r(g)}g = \mathcal{H}_{d(g)}$.

Exemplo 1.2.7. [23, Exemplo 1.1.15] O conjunto das identidades $\mathcal{G}_0$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$. De fato, para todo $g \in \mathcal{G}$, temos que $(\mathcal{G}_0)_{r(g)} = \{r(g)\}$. Logo,

$$g^{-1}(\mathcal{G}_0)_{r(g)}g = \{g^{-1}r(g)g\} = \{d(g)\} = (\mathcal{G}_0)_{d(g)}.$$

Exemplo 1.2.8. [23, Exemplo 1.1.16] Considere o grupoide $\mathcal{G} = \dot{\bigcup}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ apresentado no Exemplo 1.1.3 e uma família $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, onde cada H_λ é um subgrupo normal de G_λ. Então, $\mathcal{H} = \dot{\bigcup}_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$.

Exemplo 1.2.9. [23, Exemplo 1.1.18] Seja $\mathcal{H}$ um subgrupoide normal de um grupoide $\mathcal{G}$. Então, o subgrupoide $\mathcal{L} = \{h \in \mathcal{H} : d(h) = r(h)\}$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$. De fato, pelo Exemplo 1.1.12, temos que $\mathcal{L}$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{H}$, e como $\mathcal{H}$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, então $\mathcal{L}$ é subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Para verificar a normalidade, basta notar que, para todo $g \in \mathcal{G}$, temos que $\mathcal{L}_{r(g)} = \mathcal{H}_{r(g)}$. Logo,

$$g^{-1}\mathcal{L}_{r(g)}g = g^{-1}\mathcal{H}_{r(g)}g = \mathcal{H}_{d(g)} = \mathcal{L}_{d(g)},$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Note que $\mathcal{H}$ é a união dos grupos de isotropia de $\mathcal{G}$.

Definição 1.2.10. Um subgrupoide normal que é a união disjunta dos seus grupos de isotropia é chamado de subgrupoide estritamente normal.

O subgrupoide $\mathcal{H}$ apresentado no Exemplo 1.2.9 é um subgrupoide estritamente normal.

Lema 1.2.11. *Seja $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ uma ação de um grupoide $\mathcal{G}$ em um anel A, onde cada ideal E_g é unitário com unidade 1_g. Se T é um subconjunto de A tal que $\beta_g(T1_{g^{-1}}) \subseteq T1_g$, para todo $g \in \mathcal{G}$, então o conjunto*

$$\mathcal{H}_T = \{g \in \mathcal{G} : \beta_g(t1_{g^{-1}}) = t1_g, \text{ para todo } t \in T\},$$

é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$.

Demonstração. Pelo Lema 1.1.19 temos que $\mathcal{H}_T$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Agora, dados $g^{-1}hg \in g^{-1}(\mathcal{H}_T)_{r(g)}g$ e $t \in T$, como $\beta_{g^{-1}}(T1_g) \subseteq T1_{g^{-1}}$ temos que $\beta_g(t1_{g^{-1}}) = t'1_g$, para algum $t' \in T$. Logo,

$$\begin{aligned}
\beta_{g^{-1}hg}(t1_{(g^{-1}hg)^{-1}}) &= \beta_{g^{-1}}(\beta_h(\beta_g(t1_{g^{-1}}))) = \beta_{g^{-1}}(\beta_h(t'1_g)) \\
&= \beta_{g^{-1}}(\beta_h(t'1_{h^{-1}})) = \beta_{g^{-1}}(t'1_h) \\
&= \beta_{g^{-1}}(t'1_g) = \beta_{g^{-1}}(\beta_g(t1_{g^{-1}})) \\
&= \beta_{g^{-1}g}(t1_{g^{-1}}) = \beta_{r(g^{-1})}(t1_{r(g^{-1})}) \\
&= t1_{r(g^{-1})} = t1_{(g^{-1}hg)}.
\end{aligned}$$

Então, $g^{-1}hg \in \mathcal{H}_T$ e portanto $\mathcal{H}_T$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$. □

Uma propriedade das classes laterais para grupos que possui sua versão adaptada para grupoides é a seguinte:

Lema 1.2.12. *Seja $\mathcal{H}$ é um subgrupoide normal de um grupoide $\mathcal{G}$. Então, temos que $g\mathcal{H}_{d(g)} = H_{r(g)}g$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Além disso, se $\mathcal{H}$ é a união disjunta de grupos, então $g\mathcal{H} = \mathcal{H}g$.*

Demonstração. Pela Observação 1.2.6 acima, fixado $g \in \mathcal{G}$ tal que $gh \in g\mathcal{H}_{d(g)}$, então $ghg^{-1} = h' \in \mathcal{H}_{r(g)}$, ou ainda, $gh = h'g \in H_{r(g)}g$. Então, $g\mathcal{H}_{d(g)} \subseteq \mathcal{H}_{r(g)}g$ e analogamente temos que $\mathcal{H}_{r(g)}g \subseteq g\mathcal{H}_{d(g)}$. Portanto, $g\mathcal{H}_{d(g)} = \mathcal{H}_{r(g)}g$.

Se $\mathcal{H}$ é a união disjunta de grupos, então $g\mathcal{H} = g\mathcal{H}_{d(g)} = \mathcal{H}_{r(g)}g = \mathcal{H}g$, para todo $g \in \mathcal{G}$. □

Em [9], o autor trata de grupoides no contexto categórico e apresenta uma estrutura de grupoide para o quociente $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. Inspirados em tal resultado, apresentamos a prova do mesmo em um contexto substancialmente algébrico.

Proposição 1.2.13. *Se $\mathcal{H}$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$, então $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ é um grupoide com a operação parcial dada por*

$$\exists g_1\mathcal{H}g_2\mathcal{H} \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{H} : \exists g_1hg_2 \text{ e neste caso, } g_1\mathcal{H}g_2\mathcal{H} = g_1hg_2\mathcal{H},$$

para quaisquer $g_1\mathcal{H}, g_2\mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Demonstração. Primeiramente, vamos verificar que a operação está bem definida. Sejam $g_1\mathcal{H} = g_1'\mathcal{H}$ e $g_2\mathcal{H} = g_2'\mathcal{H}$ tais que $\exists g_1\mathcal{H}g_2\mathcal{H}$. Assim, temos que $g_1' \in g_1\mathcal{H}$ e $g_2' \in g_2\mathcal{H}$, ou seja, $\exists h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ tais que $g_1' = g_1h_1$ e $g_2' = g_2h_2$. Além disso, a existência dos produtos entre as classes implica que $\exists h \in \mathcal{H}$ tal que $\exists g_1hg_2$, então $\exists g_1'h_1^{-1}hg_2'h_2^{-1}$. Em particular, $\exists g_1'h_1^{-1}hg_2' = g_1'h'g_2'$, logo $\exists g_1'\mathcal{H}g_2'\mathcal{H}$. Além disso,

$$g_1'h'g_2'\mathcal{H} = g_1h_1h'g_2h_2\mathcal{H} = g_1hh^{-1}h_1h'g_2\mathcal{H} = (g_1hg_2)({g_2}^{-1}h^{-1}h_1h'g_2)\mathcal{H}.$$

Note que $h^{-1}h_1h' \in \mathcal{H}$ e

$$r(h^{-1}h_1h') = r(h^{-1}) = d(h) = r(g_2) = r(g_2') = d(h') = d(h^{-1}h_1h').$$

Como $\exists {g_2}^{-1}h^{-1}h_1h'g_2$, segue que $h^{-1}h_1h' \in \mathcal{H}_{r(g_2)}$. Uma vez que $\mathcal{H}$ é normal, ${g_2}^{-1}\mathcal{H}_{r(g_2)}g_2 \subseteq \mathcal{H}_{d(g_2)}$, então ${g_2}^{-1}h^{-1}h_1h'g_2 \in \mathcal{H}$. Portanto, $g_1\mathcal{H}g_2\mathcal{H} = g_1'\mathcal{H}g_2'\mathcal{H}$.

Agora vamos provar a lei da associatividade. Sejam $g_1\mathcal{H}, g_2\mathcal{H}, g_3\mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Então,

$$\begin{aligned}
\exists g_1\mathcal{H}(g_2\mathcal{H}g_3\mathcal{H}) &\Leftrightarrow \exists h, l \in \mathcal{H} : \exists g_1 l(g_2hg_3) \text{ and } g_1\mathcal{H}(g_2\mathcal{H}g_3\mathcal{H}) = g_1l(g_2hg_3)\mathcal{H} \\
&\Leftrightarrow \exists (g_1lg_2)hg_3 \text{ e neste caso } g_1l(g_2hg_3) = (g_1lg_2)hg_3 \\
&\Leftrightarrow \exists (g_1\mathcal{H}g_2\mathcal{H})g_3\mathcal{H} \text{ e } g_1\mathcal{H}(g_2\mathcal{H}g_3\mathcal{H}) = (g_1\mathcal{H}g_2\mathcal{H})g_3\mathcal{H}.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\exists g_1\mathcal{H}(g_2\mathcal{H}g_3\mathcal{H}) &\Leftrightarrow \exists h, l \in \mathcal{H} : \exists g_1lg_2 \text{ e } \exists g_2hg_3 \\
&\Leftrightarrow \exists g_1\mathcal{H}g_2\mathcal{H} \text{ e } \exists g_2\mathcal{H}g_3\mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Mostraremos a existência de identidades domínio e imagem. Para todo $g\mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$, fixemos $d(g)\mathcal{H}, r(g)\mathcal{H}$, $d(g), r(g) \in \mathcal{H}$. Como existem $\exists gd(g)d(g)$ e $\exists r(g)r(g)g$. Então, $g\mathcal{H}d(g)\mathcal{H} = gd(g)d(g)\mathcal{H} = g\mathcal{H}$ e $r(g)\mathcal{H}g\mathcal{H} = r(g)r(g)g\mathcal{H} = g\mathcal{H}$, o que conclui que $d(g\mathcal{H}) = d(g)\mathcal{H}$ e $r(g\mathcal{H}) = r(g)\mathcal{H}$.

Para provar a existência de inverso, basta observar que para todo $g \in \mathcal{G}$, existe $g^{-1} \in \mathcal{G}$ e $d(g), r(g) \in \mathcal{H}$ tais que $\exists gd(g)g^{-1}$ e $\exists g^{-1}r(g)g$, então $g\mathcal{H}g^{-1}\mathcal{H} = gd(g)g^{-1}\mathcal{H} = r(g)\mathcal{H}$ e $g^{-1}\mathcal{H}g\mathcal{H} = g^{-1}r(g)g\mathcal{H} = d(g)\mathcal{H}$. Logo, $(g\mathcal{H})^{-1} = g^{-1}\mathcal{H}$.

□

Corolário 1.2.14. *Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide, $\mathcal{H}$ um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$ de forma que $\{g_i : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ seja um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$. Então, $\{g_i^{-1} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ é um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Como $\mathcal{H}$ é normal, então pela Proposição 1.2.13 temos que $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ é um grupoide. Fixemos as classes de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ representadas por $\{g_i : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$. Ou seja, $\mathcal{G}/\mathcal{H} = \{g_i\mathcal{H} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$. Vamos mostrar que $\{g_i^{-1} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ é um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$. Ou seja, vamos verificar que $\mathcal{G} = \bigcup_{1 \leq i \leq (\mathcal{G}:\mathcal{H})} g_i^{-1}\mathcal{H}$ e $g_i^{-1}\mathcal{H} \cap g_j^{-1}\mathcal{H} = \emptyset$, onde $1 \leq i, j \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $i \neq j$.

Se $g \in \mathcal{G}$, então $g \in g_i\mathcal{H}$, para algum $1 \leq j \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$. Como $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ é um grupoide, temos que $g_i\mathcal{H}$ é inverso de um elemento $g_j\mathcal{H}$, para algum $1 \leq j \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$. Logo, a menos de uma substituição do representante, podemos escrever $g_i\mathcal{H} = g_j^{-1}\mathcal{H}$. Portanto, $g \in g_j^{-1}\mathcal{H}$, para algum $1 \leq j \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$. Assim, $\mathcal{G} = \bigcup_{1 \leq i \leq (\mathcal{G}:\mathcal{H})} g_i^{-1}\mathcal{H}$.

Seja $g \in g_i^{-1}\mathcal{H} \cap g_j^{-1}\mathcal{H}$, onde $1 \leq i, j \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $i \neq j$. Então, existem $h_i, h_j \in \mathcal{H}$ tais que $g = g_i^{-1}h_i = g_j^{-1}h_j$, ou ainda, $g_i^{-1} = g_j^{-1}h_jh_i^{-1}$. Logo, $g_i^{-1}\mathcal{H} = g_j^{-1}\mathcal{H}$. Mas, nesse caso, teríamos que $g_i\mathcal{H} = g_j\mathcal{H}$, o que é um absurdo, pois $i \neq j$. Portanto $g_i^{-1}\mathcal{H} \cap g_j^{-1}\mathcal{H} = \emptyset$. $\square$

Capítulo 2

Teoria de Galois finita

Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e $\beta = (\{E_g\}_{g\in G}, \{\beta_g\}_{g\in G})$ uma ação global de $\mathcal{G}$ sobre A. Neste capítulo introduziremos os conceitos de anel β-admissível e de K_β-anel, bem como apresentaremos demais conceitos e resultados com objetivo de enunciar e demonstrar um teorema de correspondência para $\mathcal{G}$ agindo sobre o anel A que tem a propriedade de ser um K_β-anel. Nesta correspondência, assumiremos $\mathcal{G}$ finito e estabeleceremos uma relação biunívoca entre certos subanéis de A e todos os subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$. Com este objetivo, fixaremos os seguintes elementos e notações que utilizaremos ao longo do capítulo:

- $\mathcal{G}$ é um grupoide finito;
- $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ é uma ação de $\mathcal{G}$ sobre um anel A da seguinte forma $A = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e$, onde cada E_e é um ideal unitário, para $e \in \mathcal{G}_0$. Representaremos por 1_g a unidade de E_g, para cada $g \in \mathcal{G}$. Com essas notações, temos que $1_g = 1_{r(g)}$ e $1_{g^{-1}} = 1_{d(g)}$, para todo $g \in \mathcal{G}$ e $1_A = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} 1_e$;
- Para R e S anéis quaisquer, denotaremos por $\mathrm{Hom}(R, S)$ o conjunto das funções $f : R \to S$ que preservam a soma.

2.1 Aplicação traço e ações independentes

O lema a seguir, mostrado em [3], traz uma propriedade fundamental para o desenvolvimento da teoria de Galois: a invariância do traço. A função traço é a função dada por $tr_\beta : A \to A$, onde $tr_\beta(a) = \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(a1_{g^{-1}})$, para todo $a \in A$.

Lema 2.1.1. *[3] Se $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ é uma ação do grupoide $\mathcal{G}$ no anel A, as afirmações abaixo são válidas.*

(i) *Se $g, h \in \mathcal{G}$ são tais que $r(g) \neq d(h)$, então $\beta_g(a1_{g^{-1}})1_{h^{-1}} = 0$;*

(ii) *$tr_\beta(A) \subseteq A^\beta$.*

Demonstração. Observe que $\beta_g(a1_{g^{-1}})1_{h^{-1}} \in E_g \cap E_{h^{-1}} = E_{r(g)} \cap E_{d(h)}$, para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$. Dessa forma, se $r(g) \neq d(h)$, como $A = \bigoplus_{e\in G_0} E_e$, então temos que $\beta_g(a1_{g^{-1}})1_{h^{-1}} = 0$.

Para o item (ii), utilizando (i) e o Lema 1.1.9, temos

$$\begin{aligned}
\beta_h(tr_\beta(a)) &= \beta_h\left(\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(a1_{g^{-1}})\right) 1_{h^{-1}}\right) \\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_h\left(\beta_g\left(a1_{g^{-1}}\right) 1_{h^{-1}}\right) \\
&= \sum_{r(g)=d(h)} \beta_{hg}\left(a1_{(hg)^{-1}}\right) 1_h \\
&= \sum_{r(l)=r(h)} \beta_l\left(a1_{l^{-1}}\right) 1_h \\
&= \sum_{l\in\mathcal{G}} \beta_l\left(a1_{l^{-1}}\right) 1_h.
\end{aligned}$$

Ou seja, $tr_\beta(a) = \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(a1_{g^{-1}}) \in A^\beta$. □

Um importante resultado para a teoria de Galois é o Lema de Dedekind, o qual enuncia o fato de que, fixados dois corpos $\mathbb{K}$ e $\mathbb{L}$, todo conjunto de homomorfismos de corpos distintos de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{L}$ é linearmente independente sobre $\mathbb{K}$. Nós trabalharemos com uma noção generalizada deste contexto.

Observação 2.1.2. O conjunto $\mathrm{Hom}(A, A)$ é um anel com a soma e produto dados pela soma e composição de funções, respectivamente. Além disso, um elemento $a \in A$ define as funções $a_L : A \to A$, por $a_L(c) = ac$ e $a_R : A \to A$ por $a_R(c) = ca$, para todo $c \in A$. Com estas notações, temos que a seguinte aplicação $\sigma : A \to \mathrm{Hom}(A, A)$ definida por $\sigma(a) = a_L$, para todo $a \in A$, define um homomorfismo injetivo de anéis. De fato,

$$\sigma(a+b)(c) = (a+b)_L(c) = (a+b)c = ac + bc = a_L(c) + b_L(c) = (\sigma(a) + \sigma(b))\,(c);$$
$$\sigma(ab)(c) = (ab)_L(c) = (ab)c = a(bc) = a_L(bc) = a_L(b_L(c)) = (\sigma(a) \circ \sigma(b))\,(c);$$
$$\sigma(a) = \sigma(b) \Rightarrow a = a_L(1_A) = \sigma(a)(1_A) = \sigma(b)(1_A) = b_L(1_A) = b,$$

para quaisquer $a, b, c \in A$. Portanto, $A \simeq \sigma(A)$, então podemos identificar cada elemento de A como uma função aditiva de A. Um raciocínio análogo pode ser feito para $\psi : A \to \mathrm{Hom}(A, A)$ definida por $\psi(a) = a_R$, para todo $a \in A$. Com isso, para qualquer anel B o conjunto $\mathrm{Hom}(A, B)$ é um B-módulo à esquerda via $b \cdot f = b_L \circ f$, para quaisquer $b \in B$ e $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$.

Mais ainda, $(1_g)_L = (1_g)_R$ para toda identidade $1_g \in E_g$ e $g \in \mathcal{G}$. De fato,

$$(1_g)_L(a) = 1_g a = (1_g a)1_g = 1_g(a1_g) = a1_g = (1_g)_R(a),$$

para todo $a \in A$. Assim, denotaremos por simplicidade: $1_g = (1_g)_L = (1_g)_R$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Usaremos estas notações para apresentar a próxima definição.

Definição 2.1.3. Dizemos que a ação β é independente sempre que a relação

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} (a_g)_L \circ \beta_g \circ 1_{g^{-1}} = 0,$$

onde $g \in \mathcal{G}$ e $a_g \in E_g$, implicar que $a_g = 0$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Definição 2.1.4. Se B é um subanel de A, dizemos que a ação β restrita a B é fortemente independente se, para todo subconjunto $S \subseteq \mathcal{G}$ tal que $\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h\in S}$ são todos distintos, existir $(x_i, y_i) \in B \times A$, onde $1 \leq i \leq n$, tais que:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_h(x_i 1_{h^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,h}1_e,$$

para todo $h \in S$. Neste caso, dizemos que B é um subanel β-independente de A.

Mostraremos que se a ação β restrita a A é fortemente independente, então a ação β é independente. Mas para isso precisaremos dos lemas a seguir.

Lema 2.1.5. *Se o anel A é ele próprio β-independente, então, com a notação da Definição 2.1.4, temos que*

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_g(y_i 1_{g^{-1}})x_i = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_e,$$

para todo $g \in \mathcal{G}$.

Demonstração. Uma vez que A é β-independente, então existem $x_i, y_i \in A$, para $1 \leq i \leq n$ tais que $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\beta_h(x_i 1_{h^{-1}}) = \sum\limits_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,h}1_e$, para todo $h \in \mathcal{G}$. Além disso, é de imediata verificação que $\sum\limits_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_e \neq 0$ se e somente se $\sum\limits_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g^{-1}}1_e \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \beta_g(y_i 1_{h^{-1}})x_i 1_g &= \sum_{i=1}^{n} \beta_g\left(y_i 1_{g^{-1}})\beta_{r(g)}(x_i 1_g\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_g\left(y_i 1_{g^{-1}}\right)\beta_{gg^{-1}}(x_i 1_g) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta_g\left(y_i 1_{g^{-1}}\right)\beta_g(\beta_{g^{-1}}(x_i 1_g)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_g\left(y_i \beta_{g^{-1}}(x_i 1_g)\right) \\
&= \beta_g\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_{g^{-1}}(x_i 1_g)\right) = \beta_g\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g^{-1}}1_e\right) \\
&= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_e,
\end{aligned}$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. $\square$

Lema 2.1.6. *Sejam A um anel β-independente, $\mathcal{G}_0 = \{e_j : 1 \leq j \leq |\mathcal{G}_0|\}$ e $U = \{h_j \in \mathcal{G} : d(h_j) = e_j, \forall 1 \leq j \leq |\mathcal{G}_0|\}$ um subconjunto de $\mathcal{G}$ com $|\mathcal{G}_0|$ elementos (podendo ser, inclusive, $\mathcal{G}_0$). Então, para todo $g \in \mathcal{G}$ temos que,*

(i) *Existem $(y_i, z_i) \in A \times A$, onde $1 \leq i \leq n$, tais que*

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \beta_g(z_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{h_j \in U} \delta_{h_j, g} 1_{r(h_j)},$$

(ii) *Existem $(w_i, x_i) \in A \times A$, onde $1 \leq i \leq n$, tais que*

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_g(w_i 1_{g^{-1}}) x_i = \sum_{h_j \in U} \delta_{h_j, g} 1_{r(h_j)},$$

Demonstração. Como A é β-independente, existem $(x_i, y_i) \in A \times A$, onde $1 \leq i \leq n$, tais que $\sum_{i=1}^{n} y_i \beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{e_j \in \mathcal{G}_0} \delta_{e_j, g} 1_{e_j}$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Por hipótese, para cada $e_j \in \mathcal{G}_0$, existe um único $h_j \in U$ tal que $e_j = d(h_j) = r({h_j}^{-1})$. Com isso, fixemos $z_i = \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}_0|} \beta_{{h_j}^{-1}}(x_i 1_{h_j})$. Note que, para cada $g \in \mathcal{G}$, existe um único $h_k \in U$ tal que $r({h_k}^{-1}) = d(g)$, para algum $1 \leq k \leq |\mathcal{G}_0|$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i \beta_g(z_i 1_{g^{-1}}) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \beta_g \left(\left(\sum_{j=1}^{|\mathcal{G}_0|} \beta_{{h_j}^{-1}}(x_i 1_{h_j}) \right) 1_{g^{-1}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i \beta_g \left(\sum_{j=1}^{|\mathcal{G}_0|} \beta_{{h_j}^{-1}}(x_i 1_{h_j}) 1_{g^{-1}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i \beta_g \left(\beta_{{h_k}^{-1}}(x_i 1_{h_k}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i \beta_{g{h_k}^{-1}}(x_i 1_{h_k}) \\
&= \sum_{h_j \in U} \delta_{e_j, g{h_k}^{-1}} 1_{e_j} \\
&= \sum_{h_j \in U} \delta_{h_j, g} 1_{r(h_j)}.
\end{aligned}$$

Note que, no cálculo acima, $\delta_{e_j,{gh_k}^{-1}} = 1_A$ se e somente se $e_j = g{h_k}^{-1}$, ou ainda, $h_k = g$. Portanto, $r(h_k) = r(g) = e_j$. Como o cálculo acima é válido para todo $g \in \mathcal{G}$, temos o resultado.

Para o item (ii), usando a notação acima, pelo Lema 2.1.5 temos a igualdade $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_g(y_i 1_{g^{-1}})x_i = \sum\limits_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_e$. Com isso, definindo $w_i = \sum_{j=1}^{|\mathcal{G}_0|} \beta_{h_j^{-1}}(y_i 1_{h_j})$ e realizando um raciocínio análogo ao anterior, temos a igualdade pretendida: $\sum_{i=1}^{n} \beta_g(w_i 1_{g^{-1}})x_i = \sum_{h_j\in U} \delta_{h_j,g}1_{r(h_j)}$, para todo $g \in \mathcal{G}$. $\square$

Com estes resultados estamos em condições de provar que fortemente independente implica independente.

Proposição 2.1.7. *Se A é β-independente, ou seja, a ação β restrita a A é fortemente independente, então a ação β é independente.*

Demonstração. Seja $\sum_{g\in\mathcal{G}} (a_g)_L \circ \beta_g \circ 1_{g-1} = 0$, onde $a_g \in E_{r(g)}$. Como o anel A é β-independente, usando o Lema 2.1.5 temos que existem $(x_i, y_i) \in A \times A$, onde $1 \leq i \leq n$ tais que $\sum_{i=1}^{n} \beta_g(y_i 1_{g^{-1}})x_i = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_e$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{i=1}^{n} a_g\beta_g(y_i 1_{g^{-1}})x_i &= \sum_{g\in\mathcal{G}} a_g \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_g(y_i 1_{g^{-1}})x_i\right) \\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} a_g \left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_g\right) \\
&= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} a_e.
\end{aligned}$$

Por outro lado, por hipótese, temos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{i=1}^{n} a_g\beta_g(y_i 1_{g^{-1}})x_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\beta_g(y_i 1_{g^{-1}})\right) x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} (a_g)_L \circ \beta_g \circ 1_{g-1}\right)(y_i)\right) x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{e\in\mathcal{G}_0} a_e = 0$. Mas como $A = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e$, ou seja, A é uma soma direta interna de ideais, então cada elemento possui uma escrita única como soma de elementos destes ideias. Logo, $a_e = 0$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Dessa forma, a equação inicial pode ser reescrita como

$$0 = \sum_{g\in\mathcal{G}} (a_g)_L \circ \beta_g \circ 1_{g-1} = \sum_{g\in(\mathcal{G}-\mathcal{G}_0)} (a_g)_L \circ \beta_g \circ 1_{g-1}.$$

Resta mostrar que $a_g = 0$, para $g \in \mathcal{G} - \mathcal{G}_0$. Para tal, seja $h \in \mathcal{G} - \mathcal{G}_0$ e indexemos o conjunto das identidades por $\mathcal{G}_0 = \{e_j : 1 \leq j \leq |\mathcal{G}_0|\}$, onde $d(h) = e_1$. Fixando o conjunto $U = \{h_j \in \mathcal{G} : h_1 = h \text{ e } h_j = e_j, 2 \leq j \leq |\mathcal{G}_0|\}$, então pelo Lema 2.1.6 item (ii), temos que existem $(w_i, x_i) \in A \times A$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_g(w_i 1_{g^{-1}}) x_i = \sum_{h_j\in U} \delta_{h_j,g} 1_{e_j},$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Note que, como $h_l = e_l$, para $2 \leq l \leq |\mathcal{G}_0|$, então por cálculo anterior $a_{h_l} = 0$, para $2 \leq l \leq |\mathcal{G}_0|$. Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{g\in\mathcal{G}} \sum_{i=1}^{n} a_g \beta_g(w_i 1_{g^{-1}}) x_i &= \sum_{g\in\mathcal{G}} a_g \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_g(w_i 1_{g^{-1}}) x_i \right) = \sum_{g\in\mathcal{G}} a_g \left(\sum_{h_j\in U} \delta_{h_j,g} 1_g \right) \\ &= \sum_{h_j\in U} a_{h_j} = a_h.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{g\in\mathcal{G}} \sum_{i=1}^{n} a_g \beta_g(w_i 1_{g^{-1}}) x_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g \beta_g(w_i 1_{g^{-1}}) \right) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} (a_g)_L \circ \beta_g \circ 1_{g-1} \right) (w_i) \right) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i = 0.\end{aligned}$$

Logo, $a_h = 0$. Repetindo este argumento de forma indutiva, temos que $a_g = 0$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Portanto, a ação é β é independente. $\square$

2.2 Anéis β-admissíveis

Utilizando as definições anteriores, apresentaremos um conceito central deste trabalho, a definição de anel β-admissível.

Definição 2.2.1. Dizemos que um subanel B de A é β-admissível se:

(i) $A^\beta \subseteq B$;

(ii) B é β-independente;

(iii) A^β é um somando direto de B como A^β-módulo à esquerda.

Na subseção 2.4 apresentamos um exemplo de anel não comutativo e β-admissível. ∎

A definição acima é inspirada na definição de G-admissível apresentada em [13] e generaliza a mesma para o caso de grupoides. Quando o grupoide for, em particular, um grupo, então temos exatamente o conceito de G-admissível [13, Definition 2.5]. Os anéis β-admissíveis são os que aparecerão na correspondência de Galois desenvolvida neste trabalho. Um fato que cabe ressaltar é que, tratando-se de correspondência de Galois, tenta-se relacionar os subanéis separáveis sobre o anel dos invariantes com as subestruturas da estrutura algébrica agindo sobre o anel. Nesse sentido, mostraremos que um anel β-admissível A é separável sobre A^β.

Definição 2.2.2. [10, Definition 2] Seja A um anel unitário qualquer. Dizemos que A é uma extensão separável de A^β (ou A^β-separável) se existe um elemento $\sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i \in A \otimes_{A^\beta} A$ tal que $\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} c y_i \otimes x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i c$, para todo $c \in A$.

Proposição 2.2.3. *Se A é um anel β-admissível, então A é uma extensão separável de A^β.*

Demonstração. Seja $S \subseteq \mathcal{G}$ maximal em relação a propriedade de que as funções $\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_A\}_{h\in S}$ são todas distintas. Observe que $\mathcal{G}_0 \subseteq S$. Se $\mathcal{G} = S$, não há o que fazer, pois as aplicações $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_A\}_{g\in\mathcal{G}} = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}\}_{g\in\mathcal{G}}$ são trivialmente distintas. Caso contrário, fixe $g \in \mathcal{G} - S$. Então, pela maximalidade de S, temos que existe $l \in S$ tal que $\beta_g \circ 1_{g^{-1}}(a) = \beta_l \circ 1_{l^{-1}}(a)$, para todo $a \in A$. Como A é β-admissível, existem $(x_i, y_i) \in A \times A$, onde $1 \le i \le n$, tais que $\sum_{i=1}^n y_i\beta_h(x_i 1_{h^{-1}}) = \sum\limits_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,h}1_e$, para todo $h \in S$. Mas se $g \in \mathcal{G} - S$, temos $\beta_g \circ 1_{g^{-1}} = \beta_l \circ 1_{l^{-1}}$ para algum $l \in S$, então a igualdade $\sum_{i=1}^n y_i\beta_h(x_i 1_{h^{-1}}) = \sum\limits_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,h}1_e$, vale para todo $h \in \mathcal{G}$.

Agora, fixando o elemento $d = \sum_{i=1}^n y_i \otimes x_i \in A \otimes A$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n y_i x_i &= \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i\right) 1_A = \left(\sum_{i=1}^n y_i x_i\right)\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} 1_e\right) \\
&= \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{i=1}^n y_i x_i 1_e = \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{i=1}^n y_i \beta_e(x_i 1_e) \\
&= \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{f\in\mathcal{G}_0} \delta_{f,e}1_f = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} 1_e \\
&= 1_A.
\end{aligned}$$

Para mostrarmos que $\sum_{i=1}^n cy_i \otimes x_i = \sum_{i=1}^n y_i \otimes x_i c$, para todo $c \in A$. Precisaremos da seguinte relação:

$$\begin{aligned}
cy_i &= cy_i 1_A = cy_i\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} 1_e\right) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} cy_i 1_e = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \beta_e(cy_i 1_e) \\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}}\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_e\right)\beta_g(cy_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{j=1}^n y_j\beta_g(x_j 1_{g^{-1}})\beta_g(cy_i 1_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{j=1}^n y_j\beta_g(x_j c y_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{j=1}^n y_j\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(x_j c y_i 1_{g^{-1}})\right) \\
&= \sum_{j=1}^n y_j tr_\beta(x_j c y_i 1_{g^{-1}}).
\end{aligned}$$

Com a relação acima, usando o fato de $tr_\beta(A) \subseteq A^\beta$ e a Observação 2.1.5, temos

$$\sum_{i=1}^n cy_i \otimes x_i = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n y_j tr_\beta(x_j c y_i 1_{g^{-1}}) \otimes x_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} tr_\beta(x_j c y_i 1_{g^{-1}}) \right) \otimes x_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} tr_\beta(x_j c y_i 1_{g^{-1}}) \right) x_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(x_j c y_i 1_{g^{-1}}) \right) \right) x_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes \sum_{i=1}^{n} \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(x_j c y_i 1_{g^{-1}}) x_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes \sum_{i=1}^{n} \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(x_j c 1_{g^{-1}}) \beta_g(y_i 1_{g^{-1}}) x_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(x_j c 1_{g^{-1}}) \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_g(y_i 1_{g^{-1}}) x_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(x_j c 1_{g^{-1}}) \left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g} 1_e \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \beta_e(x_j c 1_e) \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes x_j c.
\end{aligned}
$$

Portanto, A é uma extensão separável de A^β. □

Corolário 2.2.4. *Se B é um subanel β-admissível de A, então B é A^β-separável.*

Demonstração. Pela Proposição 2.2.3 B é B^β-separável. Mostraremos que $B^\beta = A^\beta$. Como B é um subanel de A é de imediata verificação que $B^\beta \subseteq A^\beta$. Por outro lado, B ser β-admissível implica que A^β é um somando direto de B como A^β-módulo à esquerda, então $B = A^\beta \oplus M$, onde M é um A^β-módulo à esquerda. Portanto, $A^\beta \subseteq B^\beta$. Logo, $B^\beta = A^\beta$. □

Definição 2.2.5. Dizemos que A é um K_β-anel se todo subconjunto finito de A está contido em um subanel β-admissível de A.

Os resultados a seguir serão úteis para a demonstração do Teorema de Correspondência e permitirão mostrar que o item (iii) da Definição 2.2.1 é supérfluo sob a hipótese de A ser um K_β-anel.

Lema 2.2.6. *Seja B um subanel de A. Se existir $c \in B$ tal que $tr_\beta(c) = 1_A$ e $A^\beta \subseteq B$, então A^β é um somando direto de B como A^β-módulo à esquerda.*

Demonstração. Primeiramente, fixemos $\phi : B \to A^\beta$ definida por $\phi = tr_\beta \circ (c)_R$, ou seja, $\phi(b) = tr_\beta(bc) = \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(bc1_{g^{-1}})$, para todo $b \in B$. Note que a aplicação ϕ está bem definida pelo Lema 2.1.1. Além disso, ϕ é um homomorfismo de A^β-módulos à esquerda. Com efeito, para quaisquer $a, b \in B$ e $a' \in A^\beta$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi(a'a+b) &= tr_\beta((a'a+b)c) = tr_\beta(a'ac+bc)\\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g((a'ac+bc)1_{g^{-1}}) = \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(a'ac1_{g^{-1}} + bc1_{g^{-1}})\\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} (\beta_g(a'ac1_{g^{-1}}) + \beta_g(bc1_{g^{-1}})) = \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(a'ac1_{g^{-1}}) + \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(bc1_{g^{-1}})\\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(a'1_{g^{-1}})\beta_g(ac1_{g^{-1}}) + tr_\beta(bc) = \sum_{g\in\mathcal{G}} a'1_g\beta_g(ac1_{g^{-1}}) + \phi(b)\\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} a'\beta_g(ac1_{g^{-1}}) + \phi(b) = \sum_{g\in\mathcal{G}} a'\beta_g(ac1_{g^{-1}}) + \phi(b)\\
&= a'\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(ac1_{g^{-1}})\right) + \phi(b) = a'\phi(a) + \phi(b),
\end{aligned}$$

Como $A^\beta \subseteq B$, podemos considerar o homomorfismo de A^β-módulos dado por $i : A^\beta \to B$, onde $i(a) = a$, para todo $a \in A^\beta$. Dessa forma, resta observarmos que ϕ é uma inversa à esquerda para inclusão. Com efeito,

$$\begin{aligned}
(\phi\circ i)(a) = \phi(a) &= \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(ac1_{g^{-1}}) = \sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(a1_{g^{-1}})\beta_g(c1_{g^{-1}})\\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}} a1_g\beta_g(c1_{g^{-1}}) = a\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(c1_{g^{-1}})1_g\right) = a1_A = a.
\end{aligned}$$

Portanto, $B = Im(i) \bigoplus Nuc(\phi) = A^\beta \bigoplus Nuc(\phi)$. $\square$

Proposição 2.2.7. *Sejam A um K_β-anel e B um subanel β-independente de A tal que $A^\beta \subseteq B$. Então, existe um elemento $d \in B$ tal que $tr_\beta(d) = 1_A$.*

Demonstração. Como B é β-independente, existem $(x_i, y_i) \in B \times A$, onde $1 \leq i \leq n$, tais que

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{e,g} 1_e,$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Como A é um K_β-anel, o conjunto finito $\{y_i : 1 \leq i \leq n\}$ está contido em um subanel β-admissível C de A.

Como C é β-admissível, então $A^\beta \subseteq C$ e por hipótese $A^\beta \subseteq B$. Então, C e B tem estrutura de A^β-módulo à esquerda e à direita, respectivamente, com a ação dada pelo produto do anel. Assim, podemos considerar os grupos abelianos dados pelos produtos tensoriais $C \otimes_{A^\beta} B$ e $C \otimes_{A^\beta} A^\beta$.

Vamos definir em $C \otimes_{A^\beta} B$ e $C \otimes_{A^\beta} A^\beta$ estruturas de C-módulos à esquerda com as ações dadas, respectivamente, por $c'(c \otimes b) = c'c \otimes b$ e $c'(c \otimes a) = c'c \otimes a$, para todos $c' \in C$, $c \otimes b \in C \otimes_{A^\beta} B$ e $c \otimes a \in C \otimes_{A^\beta} A^\beta$.

Como $1_A \in A^\beta$, a tese da proposição será provada ao garantirmos que a função $\psi : B \to A^\beta$, definida por $\psi = tr_\beta|_B$, é sobrejetiva. Primeiro, note que a aplicação ψ está bem definida pelo Lema 2.1.1. Ainda, um cálculo análogo ao feito no Lema 2.2.6 mostra que ψ é um homomorfismo de A^β-módulos à esquerda. Dessa forma, temos o homomorfismo de grupos aditivos $id_C \otimes \psi : C \otimes_{A^\beta} B \to C \otimes_{A^\beta} A^\beta$ definido por $(id_C \otimes \psi)(c \otimes b) = c \otimes \psi(b)$, para todo $c \otimes b \in C \otimes_{A^\beta} B$. Agora, vamos mostrar que $id_C \otimes \psi$ é sobrejetora.

Se $c \otimes a \in C \otimes_{A^\beta} A^\beta$, então considerando $\sum_{i=1}^{n} cay_i \otimes x_i \in C \otimes_{A^\beta} B$ e usando o Lema 2.1.1, temos que

$$(id_C \otimes \psi) \sum_{i=1}^{n} (cay_i \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{n} cay_i \otimes \psi(x_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} cay_i\psi(x_i) \otimes 1_A \\
&= ca\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\psi(x_i) \otimes 1_A\right) \\
&= \left(ca\sum_{i=1}^{n} y_i\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} \beta_g(x_i 1_{g^{-1}})\right) \otimes 1_A\right) \\
&= ca\left(\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) \otimes 1_A\right) \\
&= ca\left(\sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g} 1_e \otimes 1_A\right) \\
&= ca\,(1_A \otimes 1_A) \\
&= ca \otimes 1_A \\
&= c \otimes a.
\end{aligned}
$$

Como $id_C \otimes \psi$ é sobrejetora, então

$$\frac{C \otimes_{A^\beta} A^\beta}{Im(id_C \otimes \psi} \simeq \{0\}. \tag{2.1}$$

Por outro lado,

$$\frac{C \otimes_{A^\beta} A^\beta}{Im(id_C \otimes_{A^\beta} \psi)} = \frac{C \otimes_{A^\beta} A^\beta}{C \otimes_{A^\beta} \psi(B)} \simeq C \otimes_{A^\beta} \frac{A^\beta}{\psi(B)}. \tag{2.2}$$

Verifiquemos o isomorfismo acima., para tal consideremos a aplicação definida por $f : C \times A^\beta \to C \otimes_{A^\beta} (A^\beta/\psi(B))$, onde $f((c, a)) = c \otimes \overline{a}$, para todo $(c, a) \in C \times A^\beta$. É de imediata verificação que f esta bem definida. Da mesma forma, pelas propriedades de produto tensorial de $C \otimes_{A^\beta} (A^\beta/\psi(B))$ temos que f é A^β-bilinear e A^β-balanceada. Dessa forma, pela propriedade universal do produto tensorial, existe um homomorfismo dos grupos aditivos $f' : C \otimes_{A^\beta} A^\beta \to C \otimes_{A^\beta} (A^\beta/\psi(B))$, onde $f'(c \otimes a) = c \otimes \overline{a}$, para todo $c \otimes a \in C \otimes_{A^\beta} A^\beta$.

Veja que f' também é um homomorfismo de A^β-módulos e o conjunto $C \otimes_{A^\beta} \psi(B) \subseteq Ker(f')$, portanto pelo Teorema do homomorfismo [26, pg. 41] existe

$\overline{f} : (C \otimes_{A^\beta} A^\beta)/(C \otimes_{A^\beta} \psi(B)) \to C \otimes_{A^\beta} (A^\beta/\psi(B))$ tal que $\overline{f}(\overline{c \otimes a}) = c \otimes \overline{a}$, para todo $\overline{c \otimes a} \in (C \otimes_{A^\beta} A^\beta)/(C \otimes_{A^\beta} \Psi(B))$.

Agora vamos definir a inversa da aplicação $\overline{f}$. Para tal, defina a função $g : C \times (A^\beta/\psi(B)) \to (C \otimes_{A^\beta} A^\beta)/(C \otimes_{A^\beta} \psi(B))$, por $g((c, \overline{a})) = \overline{c \otimes a}$, para todo $(c, \overline{a}) \in C \times (A^\beta/\psi(B))$. Vejamos que esta aplicação esta bem definida. Se $(c_1, \overline{a_1}) = (c_2, \overline{a_2})$, então $c_1 = c_2$ e $\overline{a_1} = \overline{a_2}$. Logo, $\overline{a_1 - a_2} = 0$ então $a_1 - a_2 \in \psi(B)$. Dessa forma, $c_1 \otimes (a_1 - a_2) \in C \otimes_{A^\beta} \psi(B)$. Logo, $\overline{c_1 \otimes a_1 - a_2} = 0$, ou ainda, $\overline{c_1 \otimes a_1} = \overline{c_1 \otimes a_2}$. Logo $\overline{c_1 \otimes a_1} = \overline{c_1 \otimes a_2} = \overline{c_2 \otimes a_2}$, o que mostra a boa definição de g. O fato de g ser A^β-bilinear e balanceada decorrem das propriedades de $(C \otimes_{A^\beta} A^\beta)/(C \otimes_{A^\beta} \psi(B))$. Dessa forma, existe um homomorfismo de grupos aditivos $\overline{g} : C \otimes (A^\beta/\psi(B)) \to (C \otimes_{A^\beta} A^\beta)/(C \otimes_{A^\beta} \psi(B))$, onde $\overline{g}(c \otimes \overline{a}) = \overline{c \otimes a}$. Agora, é de imediata verificação que $\overline{g}$ é um homomorfismo de A^β-módulos. Assim, $\overline{f}$ e $\overline{g}$ são mutuamente inversas.

Portanto, por 2.1 e 2.2, temos que $C \otimes_{A^\beta} (A^\beta/Im(\psi)) \simeq \{0\}$. Note que, como C é β-admissível, então A^β é um somando direto de C como A^β-módulo à esquerda. Daí, é de imediata verificação que A^β também é um somando direto de C como A^β-módulo à direita. Portanto, existe um A^β-módulo à direita C' tal que $C = A^\beta \oplus C'$. Logo, utilizando as propriedades de produto tensorial, temos que

$$\begin{aligned} \{0\} &\simeq C \otimes_{A^\beta} \frac{A^\beta}{Im(\psi)} = (A^\beta \oplus C') \otimes_{A^\beta} \frac{A^\beta}{Im(\psi)} \\ &\simeq \left(A^\beta \otimes_{A^\beta} \frac{A^\beta}{Im(\psi)}\right) \oplus \left(C' \otimes_{A^\beta} \frac{A^\beta}{Im(\psi)}\right). \end{aligned}$$

Dessa forma, tomando a primeira parcela da soma direta acima, temos que

$$\{0\} \simeq A^\beta \otimes_{A^\beta} \frac{A^\beta}{Im(\psi)} \simeq \frac{A^\beta}{Im(\psi)}.$$

Portanto, $A^\beta/Im(\psi) \simeq \{0\}$ e então $Im(\psi) = A^\beta$. Ou seja, ψ é sobrejetora. Assim, como $1_A \in A^\beta$, existe $d \in B$ tal que $\sum_{g \in \mathcal{G}} \beta_g(d1_{g^{-1}}) = 1_A$. $\square$

Corolário 2.2.8. *Seja A um K_β-anel. Então, B é um subanel β-admissível de A se e somente se $A^\beta \subseteq B$ e B for β-independente.*

Demonstração. Se B é β-admissível, por definição temos que $A^\beta \subseteq B$ e a ação de β restrita a B é β-independente.

Reciprocamente, pelo Lema 2.2.7, o fato de B ser β-independente implica que existe $c \in B$ tal que $tr_\beta(c1_{g^{-1}}) = 1_A$. Portanto, pelo Lema 2.2.6 temos que A^β é um somando direto de B como A^β-módulo à esquerda. Daí, B é β-admissível. $\square$

2.3 Teorema de correspondência de Galois

Nessa seção o principal objetivo é enunciar e demonstrar o Teorema de Correspondência, que relaciona de forma biunívoca os subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ e os subanéis β-admissíveis de A. Precisamente, mostraremos que as aplicações a seguir estão bem definidas e são mutuamente inversas:

$$\Phi : \{\text{subgrupoides amplos de } \mathcal{G}\} \longrightarrow \{\text{subanéis } \beta\text{-admissíveis de } A\}$$
$$\mathcal{H} \longmapsto \Phi(\mathcal{H}) = A^{\beta_\mathcal{H}}$$

e

$$\Psi : \{\text{subanéis } \beta\text{-admissíveis de } A\} \longrightarrow \{\text{subgrupoides amplos de } \mathcal{G}\}$$
$$B \longmapsto \Psi(B) = \mathcal{H}_B.$$

Lema 2.3.1. *Sejam A um K_β-anel, $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$ e B um subanel β-admissível de A tal que $\mathcal{H}_B \subseteq \mathcal{H}$. Então, $A^{\beta_\mathcal{H}}$ é um subanel β-admissível de A.*

Demonstração. Primeiramente, como $\mathcal{H}$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, a Proposição 1.1.20 nos diz que $A^\beta \subseteq A^{\beta_\mathcal{H}}$. Agora, vamos provar que o subanel $A^{\beta_\mathcal{H}}$ é β -independente. Para tal, fixemos $\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ e $\{h_j \in \mathcal{H} : 1 \leq j \leq$

$(\mathcal{H} : \mathcal{H}_B)\}$ sistemas de representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}_B$ em $\mathcal{H}$, respectivamente, de tal forma que as classes que contêm as identidades sejam representadas pelas mesmas. Pelo Lema 1.2.4, temos que

$$S = \{g_i h_j : r(h_j) = d(g_i), 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}) \text{ e } 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{H}_B)\},$$

é um sistema de representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$.

Como B é β-admissível, em particular, é β-independente. Daí, para utilizarmos a propriedade de β-independente sobre S devemos garantir que, de fato, para quaisquer $g_i h_j, g_u h_v \in S$, se $g_i h_j \neq g_u h_v$, então $(\beta_{g_i h_j} \circ 1_{(g_i h_j)^{-1}})|_B \neq (\beta_{g_u h_v} \circ 1_{(g_u h_v)^{-1}})|_B$.

Sejam $g_i h_j, g_u h_v \in C$ tais que $g_i h_j \neq g_u h_v$. Primeiramente consideremos o caso em que $r(g_i) \neq r(g_u)$. Nesse caso, basta tomar $1_A \in A^\beta \subseteq B$. Assim,

$$\beta_{g_i h_j}(1_A 1_{(g_i h_j)^{-1}}) = 1_{g_i h_j} = 1_{g_i} \neq 1_{g_u} = 1_{g_u h_v} = \beta_{g_u h_v}(1_A 1_{(g_u h_v)^{-1}}).$$

Ou seja, $\beta_{g_i h_j} \circ 1_{(g_i h_j)^{-1}} \neq \beta_{g_u h_v} \circ 1_{(g_u h_v)^{-1}}$.

Agora considere o caso em que $r(g_i) = r(g_u)$. Então, $\exists g_i^{-1} g_u$ e $\exists h_j^{-1} g_i^{-1} g_u h_v$. Com isso e supondo que $\beta_{g_i h_j} \circ 1_{(g_i h_j)^{-1}}|_B = \beta_{g_u h_v} \circ 1_{(g_u h_v)^{-1}}|_B$, ou seja, $\beta_{g_i h_j}(b 1_{(g_i h_j)^{-1}})$ $= \beta_{g_u h_v}(b 1_{(g_u h_v)^{-1}})$, para todo $b \in B$, temos:

$$\begin{aligned}
\beta_{h_j^{-1} g_i^{-1} g_u h_v}(b 1_{(h_j^{-1} g_i^{-1} g_u h_v)^{-1}}) &= \beta_{h_j^{-1} g_i^{-1} g_u h_v}(b 1_{(h_v)^{-1}}) = \beta_{h_j^{-1} g_i^{-1}}\big(\beta_{g_u h_v}(b 1_{(g_u h_v)^{-1}})\big) \\
&= \beta_{(g_i h_j)^{-1}}\big(\beta_{g_u h_v}(b 1_{(g_u h_v)^{-1}})\big) = \beta_{(g_i h_j)^{-1}}\big(\beta_{g_i h_j}(b 1_{(g_i h_j)^{-1}})\big) \\
&= \beta_{d(g_i h_j)}(b 1_{d(g_i h_j)}) = b 1_{d(g_i h_j)} \\
&= b 1_{d(h_v^{-1} g_u^{-1} g_i h_j)} = b 1_{h_j^{-1} g_i^{-1} g_u h_v},
\end{aligned}$$

para todo $b \in B$. Ora, neste caso $h_j^{-1} g_i^{-1} g_u h_v \in \mathcal{H}_B$ e, mais ainda, teríamos que $g_u h_v = g_i h_j (h_j^{-1} g_i^{-1} g_u h_v) \in g_i h_j \mathcal{H}_B$, o que é um absurdo, pois $g_i h_j$ e $g_u h_v$ são representantes de classes laterias distintas, o que significa que são elementos que não estão relacionados. Portanto, $\beta_{g_i h_j} \circ 1_{(g_i h_j)^{-1}}|_B \neq \beta_{g_u h_v} \circ 1_{(g_u h_v)^{-1}}|_B$, para quaisquer $g_i h_j, g_u h_v \in S$ tais que $g_i h_j \neq g_u h_v$.

Dessa forma, como B é β-independente, existem $(x_k, y_k) \in B \times A$, onde $1 \leq k \leq n$, tais que

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i h_j}(x_k 1_{(g_i h_j)^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e, g_i h_j} 1_e,$$

para quaisquer $g_i h_j \in S$. Agora provaremos que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é β-independente. Para tal fixemos $(w_k, y_k) \in A^{\beta_{\mathcal{H}}} \times A$, onde

$$w_k = \sum_{h \in \mathcal{H}} \beta_h(x_k 1_{h^{-1}}),$$

para $1 \leq k \leq n$. Note que de fato $w_k \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, para $1 \leq k \leq n$, pelo Lema 2.1.1. E, utilizando novamente o Lema 2.1.1, temos que se $r(h) \neq d(g_i)$, para $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $h \in \mathcal{H}$, então $b_h(x_k 1_{h^{-1}}) 1_{g_i^{-1}} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i}(w_k 1_{g_i^{-1}}) &= \sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i} \left(\left(\sum_{h \in \mathcal{H}} \beta_h(x_k 1_{h^{-1}}) \right) 1_{g_i^{-1}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i} \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} \beta_h(x_k 1_{h^{-1}}) 1_{g_i^{-1}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i} \left(\sum_{r(h) = d(g_i)} \beta_h(x_k 1_{h^{-1}}) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\sum_{r(h) = d(g_i)} \beta_{g_i h}(x_k 1_{(g_i h)^{-1}}) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{r(h) = d(g_i)} y_k \beta_{g_i h}(x_k 1_{(g_i h)^{-1}}) \\
&= \sum_{r(h) = d(g_i)} \sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i h}(x_k 1_{(g_i h)^{-1}}) \\
&= \sum_{r(h) = d(g_i)} \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e, g_i h} 1_e,
\end{aligned}$$

Note que, uma vez fixado g_i, onde $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $e \in \mathcal{G}_0$, temos que $\delta_{e, g_i h} = 1_A$ se e somente se $g_i h = e$. Por sua vez, $g_i h = e$ se e somente se, ou $g_i = h = e$ ou $g_i = h^{-1} \neq e$. Mas o segundo caso não ocorre, pois se fosse o caso teríamos que $e \in g_i\mathcal{H}$ e fixamos que as classes laterais que contêm as identidades seriam representadas pelas mesmas. Portanto, $\delta_{e,g_ih} = 1_A$ se e somente se $g_i = h = e$, logo

$$\sum_{k=1}^{n} y_k\beta_{g_i}(w_k 1_{g_i^{-1}}) = \sum_{r(h)=d(g_i)} \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g_ih}1_e = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g_i}1_e$$

Em síntese, $\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ é um sistema de representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{H}$ tal que existem $(w_k, y_k) \in A^{\beta_{\mathcal{H}}} \times A$, onde $1 \leq k \leq n$ e

$$\sum_{k=1}^{n} y_k\beta_{g_i}(w_k 1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g_i}1_e.$$

Resta mostrarmos que esta propriedade mostra o resultado desejado, ou seja, vamos mostrar que A^{β_H} é β-independente. Com efeito, suponha $\{z_l\} \subseteq \mathcal{G}$, onde $1 \leq l \leq m$ e $\{\beta_{z_l} \circ 1_{z_l^{-1}}|_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}}\}_{1\leq l\leq m}$ são todos distintos. Note que $z_l \in g_i\mathcal{H}$, para todo $1 \leq l \leq m$ e algum $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$, ou seja, existe $h_l \in \mathcal{H}$ tal que $z_l = g_ih_l$, para todo $1 \leq l \leq m$ e algum $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$. Então, para todo $w \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ temos que

$$\beta_{z_l}(w1_{z_l^{-1}}) = \beta_{g_ih_l}(w1_{(g_ih_l)^{-1}}) = \beta_{g_i}\left(\beta_{h_l}(w1_{h_l^{-1}})\right) = \beta_{g_i}\left(w1_{h_l}\right) = \beta_{g_i}\left(w1_{g_i^{-1}}\right). \quad (2.3)$$

Portanto, para todo w_k, onde $1 \leq k \leq n$,

$$\sum_{k=1}^{n} y_k\beta_{z_l}\left(w_k1_{z_l^{-1}}\right) = \sum_{k=1}^{n} y_k\beta_{g_i}\left(w_k1_{g_i}\right) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g_i}1_e.$$

Veja que, com as notações acima, $z_l = e$ se e somente se $g_i = e$. De fato, se $z_l = e$ então $e \in g_iH$ e pela escolha feita, $g_i = e$. Reciprocamente, se $z_l \neq e$ e $g_i = e$, por (2.3) temos que $\beta_{z_l} \circ 1_{z_l^{-1}}|_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}} = \beta_e \circ 1_e|_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}}$, o que é uma contradição. Então, $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é β-independente. Por fim, pelo Corolário 2.2.8 temos que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é β-admissível. $\square$

Proposição 2.3.2. *Se A é um K_β-anel e $\mathcal{H}$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, então $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um subanel β-admissível de A.*

Demonstração. Suponha que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ não é um subanel β-admissível de A. Fixando F_1 um subconjunto finito de $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, temos que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{F_1}$. De fato, se $h \in \mathcal{H}$, então

$\beta_h(a1_{h^{-1}}) = a1_h$, para todo $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, em particular vale para todo $a \in F_1$. Com isto, pela Proposição 1.1.20, temos que $A^{\beta_{\mathcal{H}_{F_1}}} \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}}}$.

Como A é um K_β-anel, existe um subanel β-admissível B de A tal que $F_1 \subseteq B$. Novamente pela Proposição 1.1.20, temos $\mathcal{H}_B \subseteq \mathcal{H}_{F_1}$. Logo, o Lema 2.3.1 nos diz que $A^{\beta_{\mathcal{H}_{F_1}}}$ é um subanel β-admissível de A, portanto $A^{\beta_{\mathcal{H}_{F_1}}} \neq A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, ou seja, existe $c \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ tal que $c \notin A^{\beta_{\mathcal{H}_{F_1}}}$.

Fixe $F_2 = F_1 \cup \{c\}$. Então $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{F_2} \subseteq \mathcal{H}_{F_1}$ e repetindo o argumento anterior indutivamente, obtemos a seguinte cadeia descendente de subgrupoides de $\mathcal{G}$

$$\mathcal{H}_{F_1} \supsetneq \mathcal{H}_{F_2} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{H}_{F_n} \supsetneq \dots$$

Note que, se $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{F_i}$, para algum $i \geq 1$, teríamos que $A^{\beta_{\mathcal{H}}} = A^{\beta_{F_i}}$ e nesse caso teríamos uma contradição com a suposição de $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ não ser β-admissível. Logo, $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{H}_{F_i}$, para todo $i \geq 1$. Mas neste caso $\mathcal{H}$ não seria finito, o que é uma contradição. Portanto, $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um subanel β-admissível de A. □

Corolário 2.3.3. *O anel A é um K_β-anel se e somente se A é β-independente e A^β é um somando direto de A como A^β-módulo à esquerda.*

Demonstração. Sendo A um K_β-anel, o subgrupoide $\mathcal{G}_0$, formado pelas identidades de $\mathcal{G}$, é tal que $A^{\beta_{\mathcal{G}_0}} = A$. De fato, a inclusão $A^{\beta_{\mathcal{G}_0}} \subseteq A$ é evidente. Reciprocamente, se $a \in A$, como $\beta_e(a1_e) = a1_e$ para todo $e \in \mathcal{G}_0$, então $A \subseteq A^{\beta_{\mathcal{G}_0}}$.

Pela Proposição 2.3.2, temos que A é β-admissível, então por definição temos que A é β-independente e A^β é um somando direto de A como A^β-módulo à esquerda.

Reciprocamente, note que $A^\beta \subseteq A$ juntamente com a hipótese significa que A é β-admissível, portanto todo conjunto finito de A esta contido em um subanel β-admissível (o próprio A) de A. □

Lema 2.3.4. *Sejam A um K_β-anel, $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$ e B um subanel β-admissível de A tal que $\mathcal{H}_B \subseteq \mathcal{H}$. Então, A é um $K_{\beta_{\mathcal{H}}}$-anel.*

Demonstração. Observe que na prova do Lema 2.3.1 mostramos que, para $w_k = \sum_{h\in\mathcal{H}} \beta_h(x_k 1_{h^{-1}})$, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i}(w_k 1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g_i} 1_e,$$

onde $\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ é um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$. Se $g_i \notin \mathcal{H}$, em particular $g_i \notin \mathcal{G}_0$, logo $\sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i}(w_k 1_{g^{-1}}) = 0$. Então, $g_i \notin \mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}}$. Como $\mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}} \subseteq \mathcal{H}$ e, uma vez que a inclusão inversa é imediata, temos que $\mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}} = \mathcal{H}$.

Agora, se $\mathcal{H} = \mathcal{G}$, não há o que fazer. Se $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$, para cada $g \in \mathcal{G} - \mathcal{H}$, fixemos $a_g \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ tal que $\beta_g(a_g 1_{g^{-1}}) \neq a_g 1_g$. Observe que a_g existe, pois caso contrário $\beta_g(a 1_{g^{-1}}) = a 1_g$, para todo $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, então $g \in \mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}} = \mathcal{H}$. Dessa forma, fixemos $T_1 = \{a_g\}_{g\in(\mathcal{G}-\mathcal{H})}$. Por construção, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{T_1} \subseteq \mathcal{H}$, logo $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{T_1}$.

Seja F um subconjunto finito de A e fixemos

$$\beta_g\left((T_1 \cup F)\, 1_{g^{-1}}\right) = \{\beta_g(x 1_{g^{-1}}) : x \in T_1 \cup F\}.$$

Então consideremos o conjunto:

$$T_2 = \bigcup_{g\in\mathcal{G}} \beta_g\left((T_1 \cup F)\, 1_{g^{-1}}\right) \cup T_1 \cup F \cup \{0\}.$$

Logo, $F \subseteq T_2 \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}_{T_2}}}$ e $\beta_g(T_2 1_{g^{-1}}) \subseteq T_2 1_g$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Com efeito, se $t \in \bigcup_{g\in\mathcal{G}} \beta_g\left((T_1 \cup F)\, 1_{g^{-1}}\right)$, então existe $h \in \mathcal{G}$ e $a \in T_1 \cup F$ tal que $t = \beta_h(a 1_{h^{-1}})$. Então, para todo $g \in \mathcal{G}$, se $d(g) = r(h)$ temos que

$$\beta_g(t 1_{g^{-1}}) = \beta_g\left(\beta_h\left(a 1_{h^{-1}}\right) 1_g\right) = \beta_g\left(\beta_h\left(a 1_{h^{-1}}\right)\right) = \beta_{gh}\left(a 1_{(gh)^{-1}}\right).$$

Se $g \in \mathcal{G}$ é tal que $d(g) \neq r(h)$, então

$$\beta_g(t 1_{g^{-1}}) = \beta_g\left(\beta_h\left(a 1_{h^{-1}}\right) 1_g\right) = \beta_g\left(0\right) = 0.$$

Além disso, se $t \in T_1$ ou $t \in F$, então é imediato que $\beta_g(t1_{g^{-1}}) \in T_2$. Portanto, pelo Lema 1.2.11, temos que $\mathcal{H}_{T_2}$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$. Agora, consideremos $\mathcal{L} = \{h \in \mathcal{H}_{T_2} : d(h) = r(h)\}$. Pelo Exemplo 1.2.9, $\mathcal{L}$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}_{T_2}$, temos que $F \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}_{T_2}}} \subseteq A^{\beta_{\mathcal{L}}}$. Provaremos que $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ é $\beta_{\mathcal{H}}$-admissível. Para tal, a Proposição 2.3.2 nos diz que $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ é um subanel β-admissível de A. Portanto, $A^{\beta} \subseteq A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ e a ação β restrita a $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ é β-independente, portanto é $\beta_{\mathcal{H}}$-independente. Resta mostrar que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um somando direto de $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ como $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$-módulo.

Como a ação β restrita a $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ é β-independente, pelo Lema 2.2.7 existe $c \in A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ tal que

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} \beta_g(c1_{g^{-1}}) = 1_A. \tag{2.4}$$

Por outro lado, fixemos $\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$ e $\{h_j \in \mathcal{H} : 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})\}$ um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{L}$. Pelo Corolário 1.2.14 temos que $\{h_j^{-1} \in \mathcal{H} : 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L}\}$ também é um sistema de representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{H}$. Logo, pelo Lema 1.2.4 o conjunto $\{g_i h_j^{-1} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})\}$ é um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{G}$. Além disso, novamente pelo Lema 1.2.11, temos que

$$\{h_j g_i^{-1} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}) \text{ e } 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})\}$$

também é um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{G}$. Com isto, para cada $g \in \mathcal{G}$, temos que $g \in h_j g_i^{-1}\mathcal{L}$. Logo, indexando os elementos de $\mathcal{L}$ de forma que $\mathcal{L} = \{l_k\}$, para $1 \leq k \leq |\mathcal{L}|$, temos $g = h_j g_i^{-1} l_k$, onde $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}), 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})$ e $1 \leq k \leq |\mathcal{L}|$ com $r(l_k) = d(g_i^{-1})$ e $r(g_i^{-1}) = d(h_j)$.

Então, pelo Lema 2.1.1, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in\mathcal{G}}\beta_g(c1_{g^{-1}}) &= \sum_{h_jg_i^{-1}l_k\in\mathcal{G}}\beta_{h_jg_i^{-1}l_k}(c1_{(h_jg_i^{-1}l_k)^{-1}})\\
&= \sum_{j=1}^{(\mathcal{H}:\mathcal{L})}\beta_{h_j}\left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})}\beta_{g_i^{-1}}\left(\sum_{k=1}^{|\mathcal{L}|}\beta_{l_k}\left(c1_{l_k^{-1}}\right)1_{g_i}\right)1_{h_j^{-1}}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{(\mathcal{H}:\mathcal{L})}\beta_{h_j}\left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})}\beta_{g_i^{-1}}\left(\left(\sum_{k=1}^{|\mathcal{L}|}c1_{l_k}\right)1_{g_i}\right)1_{h_j^{-1}}.\right)
\end{aligned}$$

Portanto, por (2.4) temos que

$$\sum_{j=1}^{(\mathcal{H}:\mathcal{L})}\beta_{h_j}\left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})}\beta_{g_i^{-1}}\left(\left(\sum_{k=1}^{|\mathcal{L}|}c1_{l_k}\right)1_{g_i}\right)1_{h_j^{-1}}\right) = 1_A. \tag{2.5}$$

Fixemos $b=\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})}\beta_{g_i^{-1}}(c1_{g_i})$ e vejamos que $b\in A^{\beta_{\mathcal{L}}}$. De fato, se $l\in\mathcal{L}$, como $\mathcal{L}$ é um subgrupoide normal formado pela união disjunta de grupos, então pelo Lema 1.2.12, $\mathcal{L}g_i^{-1}=g_i^{-1}\mathcal{L}$. Logo, existe $l_i\in\mathcal{L}$ tal que $lg_i^{-1}=g_i^{-1}l_i$, para todo $1\leq i\leq(\mathcal{G}:\mathcal{H})$, onde $r(l_i^{-1})=d(g_i^{-1})$. Com isto e utilizando o Lema 2.1.1 temos que

$$\begin{aligned}
\beta_l\left(b1_{l^{-1}}\right) = \beta_l\left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})}\beta_{g_i^{-1}}(c1_{g_i})1_{l^{-1}}\right) &= \sum_{r(g_i^{-1})=d(l)}\beta_{lg_i^{-1}}(c1_{(lg_i^{-1})^{-1}})\\
&= \sum_{d(g_i^{-1})=r(l_i)}\beta_{g_i^{-1}l_i}(c1_{(g_i^{-1}l_i)^{-1}}) = \sum_{d(g_i^{-1})=r(l_i)}\beta_{g_i^{-1}}\left(\beta_{l_i}(c1_{l_i^{-1}})1_{g_i}\right)\\
&= \sum_{d(g_i^{-1})=r(l_i)}\beta_{g_i^{-1}}\left(c1_{l_i}1_{g_i}\right) = \sum_{r(g_i^{-1})=d(l)}\beta_{g_i^{-1}}\left(c1_{g_i}\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})}\beta_{g_i^{-1}}(c1_{g_i})\right)1_l = b1_l.
\end{aligned}$$

Observe que, para cada $l_k\in\mathcal{H}$, se g_i^{-1} for tal que $\exists g_i^{-1}l_k$, pelo Lema 1.2.12 existe $l_{k'}\in\mathcal{L}$ tal que $g_i^{-1}l_k=l_{k'}g_i^{-1}$. Ou seja, para cada $l_k\in\mathcal{L}$ tal que $\beta_{g_i^{-1}}(c1_{g_i})1_{l_k}\neq 0$ existe $l_{k'}\in\mathcal{L}$ tal que $\beta_{g_i^{-1}}(c1_{g_i})1_{l_k}=\beta_{g_i^{-1}}(c1_{g_i})=\beta_{g_i^{-1}}(c1_{k'}1_{g_i})$. Logo,

$$\sum_{k=1}^{|\mathcal{L}|}\left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})}\beta_{g_i^{-1}}(c1_{g_i})\right)1_{l_k} = \sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})}\beta_{g_i^{-1}}\left(\left(\sum_{k=1}^{|\mathcal{L}|}c1_{l_{k^{-1}}}\right)1_{g_i}\right). \tag{2.6}$$

Portanto, utilizando (2.5) e (2.6) temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{h\in\mathcal{H}} \beta_h(b1_{h^{-1}}) &= \sum_{h_jl_k\in\mathcal{H}} \beta_{h_jl_k}(b1_{(h_jl_k)^{-1}}) \\
&= \sum_{j=1}^{(H:\mathcal{L})} \beta_{h_j}\left(\left(\sum_{k=1}^{|\mathcal{L}|} \beta_{l_k}(b1_{l_k^{-1}})\right)1_{h_j^{-1}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{(H:\mathcal{L})} \beta_{h_j}\left(\left(\sum_{k=1}^{|\mathcal{L}|} b1_{l_k}\right)1_{h_j^{-1}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{(H:\mathcal{L})} \beta_{h_j}\left(\left(\sum_{k=1}^{|\mathcal{L}|}\left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i^{-1}}(c1_{g_i})\right)1_{l_k}\right)1_{h_j^{-1}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{(\mathcal{H}:\mathcal{L})} \beta_{h_j}\left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i^{-1}}\left(\left(\sum_{k=1}^{|\mathcal{L}|} c1_{l_{k^{-1}}}\right)1_{g_i}\right)1_{h_j^{-1}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{(\mathcal{H}:\mathcal{L})} \beta_{h_j}\left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i^{-1}}\left(\left(\sum_{k=1}^{|\mathcal{L}|} c1_{l_k}\right)1_{g_i}\right)1_{h_j^{-1}}\right) \\
&= 1_A.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2.6, $A^{\beta_\mathcal{H}}$ é um somando direto de $A^{\beta_\mathcal{L}}$ como $A^{\beta_\mathcal{H}}$-módulo à esquerda. Portanto, F é um subconjunto finito qualquer de A e $A^{\beta_\mathcal{L}}$ é $\beta_\mathcal{H}$-admissível tal que $F \subseteq A^{\beta_\mathcal{L}}$. Ou seja, A é um $K_{\beta_\mathcal{H}}$-anel. $\square$

Proposição 2.3.5. *Sejam A um K_β-anel e B um subanel β-admissível de A. Então, $B = A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$ e B é finitamente gerado como A^β-módulo à esquerda e projetivo.*

Demonstração. Primeiramente, se $b \in B$ então trivialmente $\beta_h(b1_{h^{-1}}) = b1_h$, para todo $h \in \mathcal{H}_B$. Logo, $B \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$.

Note que, como B é β-admissível existem $(x_j, y_j) \in B \times A$, onde $1 \leq j \leq n$, tais que $\sum_{j=1}^n y_j\beta_g(x_j1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_e$, para todo $g \in S$ onde $S = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ são todos distintos.

Fixemos o conjunto $\{y_j : 1 \leq j \leq n\}$. Pelo Lema 2.3.4 temos que A é um $K_{\beta_{\mathcal{H}_B}}$-anel, portanto existe um subanel $\beta_{\mathcal{H}_B}$-admissível B_1 de A satisfazendo que $\{y_i : 1 \leq j \leq n\} \subseteq B_1$. Como A é $K_{\beta_{\mathcal{H}_B}}$-anel e B_1 é $\beta_{\mathcal{H}_B}$-admissível, pela Proposição 2.2.7 existe $c \in B_1$ tal que

$$\sum_{h\in\mathcal{H}_B} \beta_h(c1_{h^{-1}}) = 1_A.$$

Fixando $z_j = \sum_{h\in\mathcal{H}_B} \beta_h(cy_j1_{h^{-1}})$, o Lema 2.1.1 nos diz que $z_j \in A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$ para todo $1 \leq j \leq n$. Agora, vejamos que valem as seguintes relações:

$$\sum_{j=1}^{n} z_jx_j1_e = \sum_{f\in\mathcal{G}_0} \delta_{f,e}1_f, \text{ para todo } e \in \mathcal{G}_0, \tag{2.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j\beta_g(x_j1_{g^{-1}}) = 0, \text{ para todo } g \in \mathcal{G} - \mathcal{H}_B, \tag{2.8}$$

para todo $1 \leq j \leq n$. Com efeito, se $e \in \mathcal{G}_0$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} z_j\beta_e(x_j1_e) &= \sum_{j=1}^{n} z_jx_j1_e = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{h\in\mathcal{H}_B} \beta_h\left(cy_j1_{h^{-1}}\right)\right)x_j1_e \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{h\in\mathcal{H}_B} \beta_h\left(cy_j1_{h^{-1}}\right)x_j1_e = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r(h)=e} \beta_h\left(cy_j1_{h^{-1}}\right)x_j1_e \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{r(h)=e} \beta_h\left(cy_j1_{h^{-1}}\right)\beta_h(x_j1_{h^{-1}}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r(h)=e} \beta_h\left(cy_jx_j1_{h^{-1}}\right) \\
&= \sum_{r(h)=e} \beta_h\left(c\left(\sum_{j=1}^{n} y_jx_j1_{h^{-1}}\right)\right) = \sum_{r(h)=e} \beta_h\left(c\left(\sum_{f\in\mathcal{G}_0} \delta_{f,h^{-1}}1_{h^{-1}}\right)\right) \\
&= \sum_{r(h)=e} \beta_h\left(c1_{h^{-1}}\right)\left(\sum_{f\in\mathcal{G}_0} \delta_{f,e}1_e\right) = \left(\sum_{r(h)=e} \beta_h\left(c1_{h^{-1}}\right)\right)\left(\sum_{f\in\mathcal{G}_0} \delta_{f,e}1_e\right) \\
&= \left(\sum_{h\in\mathcal{H}_B} \beta_h\left(c1_{h^{-1}}\right)\right)\left(\sum_{f\in\mathcal{G}_0} \delta_{f,e}1_e\right) = 1_A\left(\sum_{f\in\mathcal{G}_0} \delta_{f,e}1_e\right) \\
&= \sum_{f\in\mathcal{G}_0} \delta_{f,e}1_e.
\end{aligned}$$

Isto prova (2.5). Para (2.6), sejam $g \in \mathcal{G} - \mathcal{H}_B$ e $\{g_i : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)\}$ um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}_B$ em $\mathcal{G}$, de forma que as classes que representam as identidades sejam representadas pelas mesmas. Então, $g = g_i l$, onde $l \in \mathcal{H}_B$ e $g_i \in \mathcal{G} - \mathcal{H}_B$, para algum $1 \leq i \leq n$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} z_j \beta_g(x_j 1_{g^{-1}}) &= \sum_{j=1}^{n} z_j \beta_{g_i l}(x_j 1_{(g_i l)^{-1}}) = \sum_{j=1}^{n} z_j \beta_{g_i}(\beta_l(x_j 1_{l^{-1}})) \\
&= \sum_{i=1}^{n} z_i \beta_{g_i}(x_i 1_{g_i^{-1}}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{h \in \mathcal{H}_B} \beta_h(c y_i 1_{h^{-1}}) \beta_{g_i}(x_i 1_{g_i^{-1}}) \right).
\end{aligned}$$

Note que, $\beta_h(cy_i 1_{h^{-1}})\beta_{g_i}(x_i 1_{g_i^{-1}}) \in E_h \cap E_{g_i} = E_{r(h)} \cap E_{r(g_i)}$. Se $r(h) \neq r(g_i)$, então $\beta_h(cy_i 1_{h^{-1}})\beta_{g_i}(x_i 1_{g_i^{-1}}) = 0$. Por outro lado, no caso em que $r(h) = r(g_i)$ temos que $g_i = r(g_i) g_i = r(h) g_i = h h^{-1} g_i$ e $h^{-1} g_i \notin \mathcal{H}_B$, pois caso contrário $h^{-1} g_i = h' \in \mathcal{H}_B$, logo $g_i = hh' \in \mathcal{H}_B$ e nesse caso como as identidades são representadas pelas mesmas, teríamos que $g_i \in \mathcal{G}_0$ o que não ocorre pela escolha feita. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} z_j \beta_g(x_j 1_{g^{-1}}) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{h \in \mathcal{H}_B} \beta_h(c y_j 1_{h^{-1}}) \beta_{g_i}(x_j 1_{g_i^{-1}}) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r(h)=r(g_i)} \beta_h(c y_j 1_{h^{-1}}) \beta_{hh^{-1}g_i}(x_j 1_{g_i^{-1}}) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r(h)=r(g_i)} \beta_h\left(c y_j 1_{h^{-1}}\right) \beta_h\left(\beta_{h^{-1}g_i}\left(x_j 1_{g_i^{-1}}\right)\right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r(h)=r(g_i)} \beta_h\left(c y_j 1_{h^{-1}} \beta_{h^{-1}g_i}\left(x_j 1_{g_i^{-1}}\right)\right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\beta_h \left(\sum_{r(h)=r(g_i)} c y_j \beta_{h^{-1}g_i}\left(x_j 1_{(h^{-1}g_i)^{-1}}\right) \right) \right) \\
&= \sum_{r(h)=r(g_i)} \left(\beta_h \left(c \sum_{j=1}^{n} y_j \beta_{h^{-1}g_i}\left(x_j 1_{(h^{-1}g_i)^{-1}}\right) \right) \right) \\
&= \sum_{r(h)=r(g_i)} \left(\beta_h\left(0\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Com as relações e notações acima, fixemos as aplicações $f_j : A^{\beta_{\mathcal{H}_B}} \to A^\beta$ definidas por $f_j(b) = tr_\beta(bcy_j)$, para todo $1 \leq j \leq n$. Note que cada f_j esta bem definida pelo Lema 2.1.1.

Além disso, é de imediata verificação que cada f_j é um homomorfismo de A^β-módulos à esquerda. Agora, fixando $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_B) = n$, $b \in A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$, usando (2.5) e (2.6) temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} f_j(b)x_j &= \sum_{j=1}^{n} tr_\beta(bcy_j)x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{g \in \mathcal{G}} \beta_g(bcy_j 1_{g^{-1}}) \right) x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i} \left(\sum_{h \in \mathcal{H}_B} \beta_h(bcy_j 1_{h^{-1}} 1_{g_i^{-1}}) \right) \right) x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i} \left(\sum_{h \in \mathcal{H}_B} \beta_h(b1_{h^{-1}}) \beta_h(cy_i 1_{h^{-1}} 1_{g_i^{-1}}) \right) \right) x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i} \left(\sum_{h \in \mathcal{H}_B} b\beta_h(cy_i 1_{h^{-1}} 1_{g_i^{-1}}) \right) \right) x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i} \left(b \left(\sum_{h \in \mathcal{H}_B} \beta_h(cy_i 1_{h^{-1}}) \right) 1_{g_i^{-1}} \right) \right) x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(bz_j 1_{g_i^{-1}}) \right) x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(bz_j 1_{g_i^{-1}}) x_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(bz_j 1_{g_i^{-1}}) \beta_{g_i} \left(\beta_{g_i^{-1}} (x_j 1_{g_i}) \right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i} \left(bz_j \beta_{g_i^{-1}} (x_j 1_{g_i}) \right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i} \left(b1_{g_i^{-1}} \right) \beta_{g_i} \left(z_j \beta_{g_i^{-1}} (x_j 1_{g_i}) \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i} \left(b1_{g_i^{-1}} \right) \beta_{g_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(z_j \beta_{g_i^{-1}} (x_j 1_{g_i}) \right) \right) \\
&= \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \beta_e(b1_e) \beta_e \left(\sum_{j=1}^{n} z_j x_j 1_e \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} b1_e \left(\sum_{j=1}^{n} z_j x_j 1_e\right)\\
&= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} b1_e \left(\sum_{f\in\mathcal{G}_0} \delta_{f,e} 1_f\right)\\
&= b\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} 1_e\right)\\
&= b1_A = b.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, $\sum_{i=1}^{n} f_j(b)x_j \in B$, pois $f_j(b) \in A^{\beta}$ e $x_j \in B$. Portanto, $B = A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$ e B é finitamente gerado e projetivo como $A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$-módulos à esquerda. $\square$

Proposição 2.3.6. *Sejam A um K_β-anel e $\mathcal{H}$ um subgrupoide de $\mathcal{G}$. Então, $\mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}} = \mathcal{H}$.*

Demonstração. Observe que se $h \in \mathcal{H}$ e $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, então $\beta_h(a1_{h^{-1}}) = a1_h$, ou ainda, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}}$. Mostraremos a inclusão contrária. Seja $\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$, de forma que as classes que contêm as identidades sejam representadas pelas mesmas. Pela Proposição 2.3.2 temos que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um subanel β-admissível de A, portanto existem $(x_j, y_j) \in A^{\beta_{\mathcal{H}}} \times A$, para $1 \leq j \leq n$ tais que $\sum_{j=1}^{n} y_j\beta_{g_i}(x_j 1_{g_i^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g_i} 1_e$, para todo $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$. Se $h \notin \mathcal{H}$, então $h \in g_i\mathcal{H}$, para algum $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$ tal que $g_i \notin \mathcal{G} - \mathcal{G}_0$, ou seja, existe $h' \in \mathcal{H}$ tal que $h = g_i h'$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} y_j\beta_h(x_j 1_{h^{-1}}) &= \sum_{j=1}^{n} y_j\beta_{g_i h'}(x_j 1_{(g_i h')^{-1}}) = \sum_{j=1}^{n} y_j\beta_{g_i}\left(\beta_{h'}(x_j 1_{h'^{-1}})1_{g_i^{-1}}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j\beta_{g_i}(x_j 1_{h'} 1_{g_i^{-1}}) = \sum_{j=1}^{n} y_j\beta_{g_i}(x_j 1_{g_i^{-1}}) = 0.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, se $h \in \mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}} = \{g \in \mathcal{G} : \beta_g(b1_{g^{-1}}) = b1_g, b \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}\}$, teríamos que

$$
\sum_{j=1}^{n} y_j\beta_h(x_j 1_{h^{-1}}) = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j 1_h = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,h} 1_e = 1_h,
$$

o que é uma contradição. Portanto, se $h \notin \mathcal{H}$, então $h \notin \mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}}$, ou seja, se $h \in \mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}}$, então $h \in \mathcal{H}$. $\square$

Com os resultados anteriores estamos em condições de enunciar e demonstrar o seguinte Teorema de Correspondência.

Teorema 2.3.7. ***(Teorema de Correspondência de Galois)*** *Seja A um K_β-anel. Então, existe uma correspondência bijetiva entre os subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ e os subanéis β-admissíveis de A.*

Demonstração. Defina as aplicações:

$$\begin{aligned} \Phi : \{\text{subgrupoides amplos de } \mathcal{G}\} &\longrightarrow \{\text{subanéis } \beta\text{-admissíveis de } A\} \\ \mathcal{H} &\longmapsto \Phi(\mathcal{H}) = A^{\beta_{\mathcal{H}}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Psi : \{\text{subanéis } \beta\text{-admissíveis de } A\} &\longrightarrow \{\text{subgrupoides amplos de } \mathcal{G}\} \\ B &\longmapsto \Psi(B) = \mathcal{H}_B. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.3.2 e Lema 1.1.19 temos que Φ e Ψ estão bem definidas, respectivamente. Além disso, $\Phi(\Psi(B)) = B$ pela Proposição 2.3.5 e $\Psi(\Phi(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$ pela Proposição 2.3.6, o que conclui a demonstração. $\square$

Terminamos esta seção apresentando uma ação do grupoide quociente $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ sobre A, onde $\mathcal{H}$ é um subgrupoide estritamente normal de $\mathcal{G}$.

Proposição 2.3.8. *Seja A um K_β-anel com respeito a $\mathcal{G}$.*

(i) *Se $\mathcal{H}$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$ formado pela união de subgrupos dos grupos de isotropia de $\mathcal{G}$, então existe uma ação $\overline{\beta}$ de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ em $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ tal que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é $\overline{\beta}$-admissível;*

(ii) *Seja* $\mathcal{G}' = \bigcup_{e\in\mathcal{G}_0}\mathcal{G}_e$. *Se* F *é um subconjunto finito de* A, *então existe um subanel* B *de* A *tal que* $F \subseteq B$, $\mathcal{H}'_B = \{g \in \mathcal{G}' : \beta_g(b1_{g^{-1}}) = b1_g, b \in B\}$ *é estritamente normal em* $\mathcal{G}'$ *e* B *é um* $K_{\overline{\beta}'}$*-anel, onde* $\overline{\beta}'$ *é a ação de* $\mathcal{G}'/\mathcal{H}'_B$ *em* B.

Demonstração. Começaremos definindo uma ação $\overline{\beta}$ de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ em $A^{\beta_\mathcal{H}}$. Para tal, defina o conjunto $E_{\overline{g}} = E_g \cap A^{\beta_\mathcal{H}}$, para todo $\overline{g} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Note que $E_{\overline{g}}$ é um ideal unitário de $A^{\beta_\mathcal{H}}$ com identidade 1_g. Com efeito, se $b \in E_{\overline{g}}$, então $b \in E_g$ e $b \in A^{\beta_\mathcal{H}}$, dessa forma para cada $a \in A^{\beta_\mathcal{H}}$ temos que $ab \in E_g$ e $ab \in A^{\beta_\mathcal{H}}$ e $ba \in E_g$ e $ba \in A^{\beta_\mathcal{H}}$. Logo, $ab, ba \in E_{\overline{g}}$. Para a identidade, dados $g \in \mathcal{G}$ e $h \in \mathcal{H}$ analisemos os seguintes casos: se $r(g) = d(h)$, como $\mathcal{H}$ é formado pela união disjunta de grupos, temos que $r(g) = d(h) = r(h)$, logo $\beta_h(1_g1_{h^{-1}}) = \beta_h(1_{h^{-1}}) = 1_h = 1_g1_h$; se $r(g) \neq d(h)$, então $r(g) \neq d(h)$ e $\beta_h(1_g1_{h^{-1}}) = \beta_h(0) = 0 = 1_g1_h$. Além disso, embora não faça parte da definição de ação global, observamos que $A^{\beta_\mathcal{H}}$ também é soma direta de seus ideais, pois como $\mathcal{H}$ é normal temos que $\mathcal{H}_0 = \mathcal{G}_0$. Então,

$$A^{\beta_\mathcal{H}} = A \cap A^{\beta_\mathcal{H}} = \left(\bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e\right) \cap A^{\beta_\mathcal{H}} = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0}\left(E_e \cap A^{\beta_\mathcal{H}}\right) = \bigoplus_{\overline{e}\in(\mathcal{G}/\mathcal{H})_0} E_{\overline{e}}.$$

Agora, defina $\beta_{\overline{g}} : E_{\overline{g^{-1}}} \to E_{\overline{g}}$, por $\beta_{\overline{g}}(a) = \beta_g(a)$, para quaisquer $\overline{g} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ e $a \in E_{\overline{g^{-1}}}$. Vejamos a boa definição destas funções, para todo $\overline{g} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$. De fato, $\beta_{\overline{g}}(a) = \beta_g(a) \in E_g$, para todo $a \in E_{\overline{g^{-1}}}$, e como $\mathcal{H}$ é a união disjunta de grupos, então $d(h) = r(h)$, para todo $h \in \mathcal{H}$ e, pelo Lema 1.2.12, temos que $hg = gh'$, para algum $h' \in \mathcal{H}$. Logo,

$$\begin{aligned}\beta_h(\beta_{\overline{g}}(a)1_{h^{-1}}) &= \beta_h(\beta_g(a)1_{h^{-1}}) = \beta_h(\beta_g(a)) = \beta_{hg}(a)\\ &= \beta_{gh'}(a) = \beta_g(\beta_{h'}(a)) = \beta_g(\beta'_h(a1_{h'^{-1}})\\ &= \beta_g(a1_{h'}) = \beta_g(a)1_h = \beta_{\overline{g}}(a)1_h,\end{aligned}$$

para todo $h \in \mathcal{H}$ e $a \in E_{\overline{g^{-1}}}$. Logo, $\beta_{\overline{g}}(a) \in A^{\beta_\mathcal{H}}$ e portanto $\beta_{\overline{g}}(a) \in E_{\overline{g}}$. Além disso, se $a \in E_{\overline{g^{-1}}}$, escrevendo $a = b$, temos que $\beta_{\overline{g}}(a) = \beta_g(a) = \beta_g(b) = \beta_{\overline{g}}(b)$. Portanto, $\beta_{\overline{g}}$ está bem definida, para todo $\overline{g} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Agora, vejamos que as funções definidas acima são isomorfismos.

$$\beta_{\overline{g}}(a+b) = \beta_g(a+b) = \beta_g(a) + \beta_g(b) = \beta_{\overline{g}}(a) + \beta_{\overline{g}}(b)$$
$$\beta_{\overline{g}}(ab) = \beta_g(ab) = \beta_g(a)\beta_g(b) = \beta_{\overline{g}}(a)\beta_{\overline{g}}(b),$$

para quaisquer $a, b \in E_{\overline{g}}$ e $\overline{g} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Além disso, $\beta_{\overline{g}}(a) = \beta_{\overline{g}}(b)$ implica que $\beta_g(a) = \beta_g(b)$ e como β_g é um isomorfismo, então $a = b$. Portanto, $\beta_{\overline{g}}$ é um homomorfismo injetor de anéis. Resta mostrar a sobrejetividade. Suponha $a \in E_{\overline{g}}$, então $a \in E_g$, portanto existe $b \in E_{g^{-1}}$ tal que $\beta_g(b) = a$, logo $\beta_{\overline{g}}(b) = a$. Ainda resta mostrar que $b \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$. Como $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ e $\mathcal{H}$ é normal e união disjunta de grupos, então $g\mathcal{H}_{d(g)}g^{-1} = \mathcal{H}_{r(g)}$ e $d(h) = r(h)$, para todo $h \in \mathcal{H}$. Utilizando isto, temos que $\beta_{gh}(b) = \beta_{ghg^{-1}}(\beta_g(b)) = \beta_{ghg^{-1}}(a) = a = \beta_g(b)$, para todo $h \in \mathcal{H}$ tal que $d(h) = r(g^{-1})$. Com isto, se $h' \in \mathcal{H}$ é tal que $r(h') = d(g)$, então,

$$\beta_{h'}(b1_{h'^{-1}}) = \beta_{h'}(b) = \beta_{g^{-1}gh'}(b) = \beta_{g^{-1}}(\beta_{gh'}(b)) = \beta_{g^{-1}}(\beta_g(b)) = \beta_{d(g)}(b) = b = b1'_h. \tag{2.9}$$

Por outro lado, se $r(h') \neq d(g)$, então $b \notin E_g$, logo pelo Lema 2.1.1 temos que

$$\beta_{h'}(b1_{h'^{-1}}) = \beta_{h'}(0) = 0 = b1_{h'}. \tag{2.10}$$

Por (2.9) e (2.10), temos que $b \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, portanto $b \in E_{\overline{g}}$ e $\beta_{\overline{g}}$ é sobrejetora. Agora, segue do fato de β ser uma ação de $\mathcal{G}$ sobre A que $\beta_{\overline{e}}$ é a aplicação identidade de $E_{\overline{e}}$, para todo $e \in (\mathcal{G}/\mathcal{H})_0$. Como $\mathcal{H}$ é normal, $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ possui a estrutura de grupoide apresentada na Proposição 1.2.13. Dessa forma, dados $(\overline{g_1}, \overline{g_2}) \in (\mathcal{G}/\mathcal{H})^2$, existe $h \in \mathcal{H}$ tal que $\overline{g_1}\,\overline{g_2} = \overline{g_1 h g_2}$. Como $\mathcal{H}$ é união disjunta de grupos, $r(g_1) = d(h) = r(h) = d(g_2)$, logo

$$\beta_{\overline{g_1}}(\beta_{\overline{g_2}}(a)) = \beta_{g_1}(\beta_{g_2}(a)) = \beta_{g_1}(\beta_{g_2}(a)1_h)$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta_{g_1}(\beta_h(\beta_{g_2}(a)1_{h^{-1}})) = \beta_{g_1}(\beta_h(\beta_{g_2}(a)))\\
&= \beta_{\overline{g_1 h g_2}}(a) = \beta_{\overline{g_1}\,\overline{g_2}}(a),
\end{aligned}
$$

para todo $a \in E_{\overline{g_2{}^{-1}}}$. Resta mostrar que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é $\overline{\beta}$-admissível. É de imediata verificação que $(A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\overline{\beta}} \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}}}$. Agora, vamos verificar que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é $\overline{\beta}$-independente

Pela Proposição 2.3.2, temos que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é β-admissível, portanto existem $(x_j, y_j) \in A^{\beta_{\mathcal{H}}} \times A$, onde $1 \leq j \leq n$, tais que

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \beta_g(x_j 1_{g^{-1}}) = \delta_{e,g} 1_e,$$

para quaisquer $e \in \mathcal{G}_0$ e $g \in \mathcal{G}$. Pelo Lema 2.3.4 temos que A é um $K_{\beta_{\mathcal{H}}}$-anel, portanto fixando o conjunto $\{x_j : 1 \leq j \leq n\}$, existe um subanel B de A que é $\beta_{\mathcal{H}}$-admissível e $\{x_j : 1 \leq j \leq n\} \subseteq B$. Então, pela Proposição 2.2.7, existe $c \in B$ tal que

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} \beta_h(c 1_{h^{-1}}) = 1_A.$$

Fixemos $z_j = \sum_{h \in \mathcal{H}} \beta_h(x_j c 1_{h^{-1}})$. Pelo Lema 2.1.1, temos que $z_j \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ para $1 \leq j \leq n$. Dessa forma, temos que $(y_j, x_j) \in A^{\beta_{\mathcal{H}}} \times A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, satisfazendo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} y_j \beta_{\overline{e}}(z_j 1_e) &= \sum_{j=1}^{n} y_j \beta_e(z_j 1_e)\\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j z_j 1_e\\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} \beta_h(x_j c 1_{h^{-1}}) \right) 1_e\\
&= \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} \sum_{j=1}^{n} y_j \beta_h(x_j c 1_{h^{-1}}) \right) 1_e\\
&= \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} \sum_{j=1}^{n} y_j 1_h \beta_h(x_j c 1_{h^{-1}}) \right) 1_e\\
&= \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} \sum_{j=1}^{n} \beta(y_j 1_{h^{-1}}) \beta_h(x_j c 1_{h^{-1}}) \right) 1_e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} \sum_{j=1}^{n} \beta_h(y_j x_j 1_{h^{-1}}) \beta_h(c 1_{h^{-1}}) \right) 1_e \\
&= \sum_{h \in \mathcal{H}} \left(\beta_h \left(\sum_{j=1}^{n} y_j x_j 1_{h^{-1}} \right) \right) \beta_h(c 1_{h^{-1}}) 1_e \\
&= \sum_{h \in \mathcal{H}} \beta_h \left(1_{h^{-1}} \right) \beta_h(c 1_{h^{-1}}) 1_e \\
&= \sum_{h \in \mathcal{H}} \beta_h(c 1_{h^{-1}}) 1_e \\
&= 1_A 1_e \\
&= 1_e.
\end{aligned}
$$

Se $\overline{g} \in \mathcal{G}/\mathcal{H} - (\mathcal{G}/\mathcal{H})_0$, então $g \notin \mathcal{H}$, logo para todo $h \in \mathcal{H}$ temos que $gh \notin \mathcal{H}$. Utilizando isto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} y_j \beta_{\overline{g}}(z_j 1_{\overline{g^{-1}}}) &= \sum_{j=1}^{n} y_j \beta_g(z_j 1_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \beta_g \left(\sum_{h \in \mathcal{H}} \beta_h(x_j c 1_{h^{-1}}) 1_{g^{-1}} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{r(h)=d(g)} \beta_{gh} \left(x_j c 1_{gh^{-1}} \right) \right) \\
&= \sum_{r(h)=d(g)} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \beta_{gh} \left(x_j c 1_{gh^{-1}} \right) \right) \\
&= \sum_{r(h)=d(g)} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \beta_{gh} \left(x_j 1_{gh^{-1}} \right) \right) \beta_{gh}(c 1_{gh^{-1}}) \\
&= \sum_{r(h)=d(g)} 0 \cdot \beta_{gh}(c 1_{gh^{-1}}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é $\overline{\beta}$-independente. Finalmente, resta verificar que $(A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\overline{\beta}}$ é um somando direto de $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ como $(A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\overline{\beta}}$-módulo à esquerda. Para tal, mostraremos primeiro que $(A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\overline{\beta}} = (A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\beta}$. Se $a \in (A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\beta}$, temos que

$$
\beta_{\overline{g}}(a 1_{\overline{g^{-1}}}) = \beta_g(a 1_{g^{-1}}) = a 1_g = a 1_{\overline{g}},
$$

para todo $\overline{g} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$, logo $a \in (A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\overline{\beta}}$. Reciprocamente, dados $a \in (A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\overline{\beta}}$ e $l \in \mathcal{G}$, note que $l \in g\mathcal{H}$ para algum $g \in \mathcal{G}$ e existe $h \in \mathcal{H}$ tal que $l = gh$. Logo,

$$\begin{aligned}\beta_l(a1_{l^{-1}}) &= \beta_{gh}(a1_{(gh)^{-1}}) = \beta_g(\beta_h(a1_{h^{-1}})) = \beta_g(a1_{g^{-1}})\\ &= \beta_{\overline{g}}(a1_{\overline{g^{-1}}}) = a1_{\overline{g}} = a1_g = a1_l.\end{aligned}$$

Então, $a \in (A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\beta}$, portanto $(A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\overline{\beta}} = (A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\beta}$. Note que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um K_β-anel. De fato, pela Proposição 2.3.2 temos que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é β-admissível, portanto todo subconjunto finito de $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ está contido em um subanel β-admissível de $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, no caso, o próprio $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$. Dessa forma, pelo Corolário 2.3.3 temos que $(A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\beta}$ é um somando direto de $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ como $(A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\beta}$-módulo à esquerda. Portanto, como $(A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\overline{\beta}} = (A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\beta}$, temos que $(A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\overline{\beta}}$ é um somando direto de $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ como $(A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\overline{\beta}}$-módulo à esquerda. Portanto, $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é $\overline{\beta}$-admissível.

Para provar (ii), considere F um subconjunto finito de A. Então, fixe o conjunto finito $T = \{\beta_g(a1_{g^{-1}}) : a \in F \text{ e } g \in \mathcal{G}'\} \cup F \cup \{0\}$. Note que T é invariante pela ação de $\mathcal{G}'$. De fato, se $t \in T$, então existem $h \in \mathcal{G}'$ e $a \in F$ tal que $t = \beta_h(a1_{h^{-1}})$. Logo, para todo $g \in \mathcal{G}'$ tal que $d(g) = r(h)$, temos que

$$\beta_g(t1_{g^{-1}}) = \beta_g\left(\beta_h\left(a1_{h^{-1}}\right)1_g\right) = \beta_g\left(\beta_h\left(a1_{h^{-1}}\right)\right) = \beta_{gh}\left(a1_{(gh)^{-1}}\right).$$

Assim, $\beta_g(t1_{g^{-1}}) = \beta_{gh}\left(a1_{(gh)^{-1}}\right) \in T$. Se $g \in \mathcal{G}'$ é tal que $d(g) \neq r(h)$, temos que

$$\beta_g(t1_{g^{-1}}) = \beta_g\left(\beta_h\left(a1_{h^{-1}}\right)1_g\right) = \beta_g\left(0\right) = 0.$$

Então, $\beta_g(t1_{g^{-1}}) = 0 \in T$. Se $a \in F$, então claramente $\beta_g(a1_{g^{-1}}) \in T$, para todo $g \in \mathcal{G}'$. Portanto, pelo Lema 1.2.11, $\mathcal{H}'_T = \{g \in \mathcal{G}' : \beta_g(t1_{g^{-1}}) = t1_g, t \in T\}$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}'$. Com isso, denotando $B = A^{\beta_{\mathcal{H}'_T}}$, temos $F \subseteq B$ e $\mathcal{H}'_B = \{g \in \mathcal{G}' : \beta_g(b1_{g^{-1}}) = b1_g, b \in B\}$ é estritamente normal em $\mathcal{G}'$, e pelo Teorema 2.3.7 (restrito a $\mathcal{G}'$), $\mathcal{H}'_T = \Psi(B) = \Psi(A^{\beta_{\mathcal{H}'_T}}) = \Psi(\Phi(\mathcal{H}'_B)) = \mathcal{H}'_B$. Portanto, pelo item (i) existe uma ação $\overline{\beta}'$ de $\mathcal{G}'/\mathcal{H}_B$ em B tal que B é $\overline{\beta}'$-admissível. Então, todo subconjunto finito de B está contido em um anel $\overline{\beta}'$-admissível (o próprio B). Ou seja, B é um $K_{\overline{\beta}'}$-anel. $\square$

2.4 Exemplo

Nessa seção exemplificaremos a correspondência estabelecida pelo Teorema 2.3.7. Para tal, seguiremos os seguintes passos: primeiramente fixaremos o anel A, em seguida o grupoide $\mathcal{G}$ e a ação β de $\mathcal{G}$ em A. O terceiro passo será mostrar que A é um K_β-anel. Por fim, listaremos todos subgrupoides de $\mathcal{G}$ e todos os subanéis β-admissíveis correspondentes.

1º Passo: Fixaremos $A = M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i))$, com a soma e produto definidos coordenada a coordenada, onde $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ é o corpo de decomposição do polinômio $x^2 + 2$ sobre $\mathbb{Q}$.

Note que $A = (M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)))$, onde cada parcela é um ideal de A. Denotaremos por $(1,0)$ e $(0,1)$ as identidades de $M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \times \{0\}$ e $\{0\} \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i))$, no qual 1 denota a matriz identidade de $M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i))$ e 0 denota a matriz nula.

2º Passo: Vamos estabelecer o grupoide $\mathcal{G}$ agindo sobre A utilizando automorfismos dos ideais $M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \times \{0\}$, $\{0\} \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i))$ e os isomorfismos entre eles. Para o que segue, utilizaremos a seguinte observação.

Observação 2.4.1. Sejam A_1 e A_2 anéis quaisquer e $f : A_1 \to A_2$ um isomorfismo de anéis. Então, f induz um isomorfismo $\bar{f} : M_n(A_1) \to M_n(A_2)$, definido por $\bar{f}([a_{ij}]) = [f(a_{ij})]$, para todo $[a_{ij}] \in M_n(A_1)$ e $1 \leq i, j \leq n$.

Lembremos que, o conjunto dos $\mathbb{Q}$-automorfismos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ é dado pelo grupo de Klein de 4 elementos, formado por:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) &\to \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \\
\sqrt{2} &\mapsto \sqrt{2} \\
i &\mapsto i
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\sigma_2 : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) &\to \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \\
\sqrt{2} &\mapsto -\sqrt{2} \\
i &\mapsto i
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\sigma_3 : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) &\to \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \\ \sqrt{2} &\mapsto \sqrt{2} \\ i &\mapsto -i\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}\sigma_4 : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) &\to \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \\ \sqrt{2} &\mapsto -\sqrt{2} \\ i &\mapsto -i.\end{aligned}$$

Ou seja, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 = \sigma_2\sigma_3\}$. Agora, considere os seguintes isomorfismos parciais:

$$\begin{aligned}\tau_j : M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \times \{0\} &\to M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \times \{0\} \\ \left(\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) &\mapsto \left(\begin{bmatrix} \sigma_j(p_1) & \sigma_j(p_2) \\ \sigma_j(p_3) & \sigma_j(p_4) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_j : \{0\} \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) &\to \{0\} \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \\ \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} \right) &\mapsto \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_j(p_1) & \sigma_j(p_2) \\ \sigma_j(p_3) & \sigma_j(p_4) \end{bmatrix} \right),\end{aligned}$$

onde $1 \leq i \leq 4$. Além disso, consideramos também

$$\begin{aligned}\gamma : M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \times \{0\} &\to \{0\} \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \\ \left(\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) &\mapsto \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} \right).\end{aligned}$$

Note que a boa definição desses isomorfismos é assegurados pela Observação 2.4.1 e estes isomorfismos definem um grupoide, cuja operação parcial é definida pela composição de funções. Explicitamente:

$$\mathcal{G} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \gamma, \gamma^{-1}, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \gamma\tau_2, \gamma\tau_3, \gamma\tau_4, \gamma^{-1}\theta_2, \gamma^{-1}\theta_3, \gamma^{-1}\theta_4\}.$$

No grupoide acima, temos que $(\gamma\tau_j)^{-1} = \gamma^{-1}\theta_j$, para todo $1 \leq j \leq 4$. Além disso, uma vez que $\mathcal{G}$ foi definido por automorfismos dos ideais $E_{\tau_1} = M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \times \{0\}$, $E_{\theta_1} = \{0\} \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i))$ e os isomorfismos entre eles, então a ação $\beta =$

$\{\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}}\}$ de $\mathcal{G}$ sobre A está definida, onde os isomorfismos parciais passam a indexar os elementos da ação β, por exemplo, $\beta_\gamma = \gamma : E_1 \to E_2$ e $E_\gamma = E_{d(\gamma)} = E_{id_{E_1}} = E_1$.

3º Passo: Vamos mostrar que A é um $K_\beta-$anel. Pelo Corolário 2.3.3 basta mostrar que A é $\beta-$independente e A^β é um somando direto de A como A^β-módulo à esquerda. Com efeito, começaremos por mostrar que A é β-independente. Fixe os pares:

$$(x_1, y_1) = \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$(x_2, y_2) = \left(\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$(x_3, y_3) = \left(\left(\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{8} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$(x_4, y_4) = \left(\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{8} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{8} \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$(x_5, y_5) = \left(\left(\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} \frac{-i}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$(x_6, y_6) = \left(\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-i}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{4} \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$(x_7, y_7) = \left(\left(\begin{bmatrix} \sqrt{2}i & 0 \\ 0 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}i}{8} & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}i}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$(x_8, y_8) = \left(\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2}i & 0 \\ 0 & \sqrt{2}i \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}i}{8} & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}i}{8} \end{bmatrix}\right)\right)$$

É de direta verificação que os pares $(y_i, x_i) \in A \times A$, onde $1 \leq i \leq 4$ são tais que:

$$\sum_{i=1}^{4} y_i \beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g} 1_e,$$

para todo $g \in \mathcal{G}$.

Agora, vamos mostrar que A^β é um somando direto de A como A^β-módulo à esquerda. Para tal, devemos analisar quatro casos. No primeiro caso, se $g \in \mathcal{G}$ é tal que $1_g = 1_{g^{-1}} = (1,0)$, para algum $1 \leq i \leq 4$, então temos que $g = \tau_j$, para algum $1 \leq j \leq 4$, com isso

$$\begin{aligned}\beta_{\tau_j}\left(\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right) 1_{g^{-1}}\right) &= \beta_{\tau_j}\left(\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} \sigma_j(a_1) & \sigma_j(a_2) \\ \sigma_j(a_3) & \sigma_j(a_4) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right) 1_{\tau_j} = \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right). \tag{2.11}$$

A fim de obter os elementos de A^β, pelo cálculo acima, temos que $\tau_j(a_k) = a_k$ para $1 \leq j, k \leq 4$.

Repetindo um raciocínio análogo para os demais casos elementos de $\mathcal{G}$ obtemos que os elementos de A^β são as matrizes cujas entradas são os elementos que ficam fixos pelos automorfismos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$. Portanto,

$$A^\beta = \left\{\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Com isso, fixe:

$$c = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}\right).$$

Note que $c \in A^\beta$ e $\sum_{g \in \mathcal{G}} \beta_g(c 1_{g^{-1}}) = (1,1) = 1_A$. Logo, pela Lema 2.2.6, temos que A^β é um somando direto de A como A^β-módulo à esquerda.

Portanto, A é um K_β-anel. Agora podemos explicitar a correspondência estabelecida pelo Teorema 2.3.7. Na tabela a seguir, listamos todos os subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ e os respectivos anéis β-admissíveis correspondentes.

Subgrupoide	Subanel
$\mathcal{G}$	$\{(M, M) \in M_2(\mathbb{Q}) \times M_2(\mathbb{Q})\}$
$\{\tau_1, \tau_2, \gamma, \gamma^{-1}, \theta_1, \theta_2, \gamma\tau_2, \gamma^{-1}\theta_2\}$	$\{(M, M) \in M_2(\mathbb{Q}(i)) \times M_2(\mathbb{Q}(i))\}$
$\{\tau_1, \tau_3, \gamma, \gamma^{-1}, \theta_1, \theta_3, \gamma\tau_3, \gamma^{-1}\theta_3\}$	$\{(M, M) \in M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))\}$
$\{\tau_1, \alpha_4, \gamma, \gamma^{-1}, \theta_1, \theta_4, \gamma\tau_4, \gamma^{-1}\theta_4\}$	$\{(M, M) \in M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}i))\}$
$\{\alpha_1, \gamma, \gamma^{-1}, \theta_1\}$	$\{(M, M) \in A\}$
$\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$	$M_2(\mathbb{Q}) \times M_2(\mathbb{Q})$
$\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \theta_1, \theta_2\}$	$M_2(\mathbb{Q}) \times M_2(\mathbb{Q}(i))$
$\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \theta_1, \theta_3\}$	$M_2(\mathbb{Q}) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$
$\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \theta_1, \theta_4\}$	$M_2(\mathbb{Q}) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}i))$
$\{\tau_1, \tau_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$	$M_2(\mathbb{Q}(i)) \times M_2(\mathbb{Q})$
$\{\tau_1, \tau_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \times M_2(\mathbb{Q})$
$\{\tau_1, \tau_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)) \times M_2(\mathbb{Q})$
$\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \theta_1\}$	$M_2(\mathbb{Q}) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i))$
$\{\tau_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \times M_2(\mathbb{Q})$
$\{\tau_1, \tau_2, \theta_1, \theta_2\}$	$M_2(\mathbb{Q}(i)) \times M_2(\mathbb{Q}(i))$
$\{\tau_1, \tau_2, \theta_1, \theta_3\}$	$M_2(\mathbb{Q}(i)) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$
$\{\tau_1, \tau_2, \theta_1, \theta_4\}$	$M_2(\mathbb{Q}(i)) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}i))$
$\{\tau_1, \tau_3, \theta_1, \theta_2\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \times M_2(\mathbb{Q}(i))$
$\{\tau_1, \tau_3, \theta_1, \theta_3\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$
$\{\tau_1, \tau_3, \theta_1, \theta_4\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}i))$

$\{\tau_1, \tau_4, \theta_1, \theta_2\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)) \times M_2(\mathbb{Q}(i))$
$\{\tau_1, \tau_4, \theta_1, \theta_3\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$
$\{\tau_1, \tau_4, \theta_1, \theta_4\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}i))$
$\{\tau_1, \tau_2, \theta_1\}$	$M_2(\mathbb{Q}(i)) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i))$
$\{\tau_1, \tau_3, \theta_1\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i))$
$\{\tau_1, \tau_4, \theta_1\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i))$
$\{\tau_1, \theta_1, \theta_2\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \times M_2(\mathbb{Q}(i))$
$\{\tau_1, \theta_1, \theta_3\}$	$M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)) \times M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$
$\{\tau_1, \theta_1\}$	A

2.5 Aplicação em anéis comutativos

Nesta seção mostraremos que a correspondência apresentada na Seção 2.3 recobre a correspondência de Galois apresentada em [20, Teorema 4.6] para anéis comutativos. Continuamos trabalhando no contexto onde o grupoide $\mathcal{G}$ é finito.

Definição 2.5.1. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e β uma ação de $\mathcal{G}$ em A. Dizemos que A é uma extensão β-Galois de A^β se existem $x_i, y_i \in A$, $1 \leq i \leq n$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g} 1_e,$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Nesse caso, dizemos que $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ é um sistema de coordenadas de Galois de A sobre A^β.

Definição 2.5.2. Sejam A um anel comutativo e unitário, $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ uma ação de $\mathcal{G}$ em A. Dizemos que um subanel B de A é $\beta-$forte se para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$ com $r(g) = r(h)$, $g^{-1}h \notin \mathcal{H}_T$ e para qualquer idempotente não nulo $e \in E_g = E_h$, existir um elemento $b \in B$ tal que $\beta_g(b1_{g^{-1}})e \neq \beta_h(b1_{h^{-1}})e$.

Em [20] foi provado que se R é uma extensão comutativa e β-Galois de R^β, então existe uma relação bijetiva entre o conjunto de subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ e o conjunto das R^β-subalgebras de R que são separáveis e β-fortes. Assumindo que A é comutativo, provaremos que um subanel B de A é β-admissível se e somente se for A^β-separável e β-forte.

Proposição 2.5.3. *Seja β uma ação de $\mathcal{G}$ em um anel comutativo A e B um subanel de A tal que $A^\beta \subseteq B$, B é A^β-separável e β-forte. Então, B é β-admissível.*

Demonstração. Começaremos por observar que B e A são A^β-módulos com a ação dada pelo produto do anel. Então, podemos considerar os produtos tensoriais $B \otimes_{A^\beta} B$ e $B \otimes_{A^\beta} A$. É de imediata verificação que estes são anéis comutativos com os produtos dados, respectivamente, por $(b_1 \otimes b_2)(b_3 \otimes b_4) = b_1b_3 \otimes b_2b_4$, para quaisquer $b_1 \otimes b_2, b_3 \otimes b_4 \in B \otimes_{A^\beta} B$ e $(b_1 \otimes a_1)(b_2 \otimes a_2) = b_1b_2 \otimes a_1a_2$, para quaisquer $b_1 \otimes a_1, b_2 \otimes a_2 \in B \otimes_{A^\beta} A$. Podemos então fixar os homomorfismos de anéis dados por:

- $id \otimes i : B \otimes_{A^\beta} B \to B \otimes_{A^\beta} A$ definido por $(id \otimes i)(b_1 \otimes b_2) = b_1 \otimes b_2$;
- $\pi : B \otimes_{A^\beta} A \to A$, por $\pi(b \otimes a) = ba$;
- $id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}) : B \otimes_{A^\beta} A \to B \otimes_{A^\beta} A$, por $(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(b \otimes a) = b \otimes \beta_g(a1_{g^{-1}})$,

para todo $b_1 \otimes b_2 \in B \otimes_{A^\beta} B$, $b \otimes a \in B \otimes_{A^\beta} A$ e $g \in \mathcal{G}$. Como B é A^β-separável, existe um idempotente de separabilidade $e = \sum_{i=1}^n y_i \otimes x_i \in B \otimes_{A^\beta} B$, ou seja, e é um idempotente tal que $\sum_{i=1}^n y_i x_i = 1_A$ e $\sum_{i=1}^n cy_i \otimes x_i = \sum_{i=1}^n y_i \otimes x_i c$, para todo $c \in B$. Com isso, para cada $g \in \mathcal{G}$ defina

$$e_g = (\pi \circ (id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}})) \circ (id \otimes i))(e) = \sum_{i=1}^n y_i \beta_g(x_i 1_{g^{-1}}).$$

Note que, e_g é um idempotente de B. Com efeito,

$$\begin{aligned} e_g^2 &= ((\pi \circ (id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}})) \circ (id \otimes i))(e))((\pi \circ (id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}) \circ (id \otimes i))(e)) \\ &= (\pi \circ (id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}})) \circ (id \otimes i))(e^2) \end{aligned}$$

$$= (\pi \circ (id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}})) \circ (id \otimes i))(e)$$
$$= e_g.$$

Além disso, usando o fato de e ser um idempotente de separabilidade, temos a seguinte propriedade

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} by_i\beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) &= (\pi \circ (id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}})) \circ (id \otimes i)) \left(\sum_{i=1}^{n} by_i \otimes x_i\right) \\ &= (\pi \circ (id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}})) \circ (id \otimes i)) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i b\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i\beta_g(x_i b 1_{g^{-1}}).\end{aligned}$$

Usando a relação acima, temos que

$$\beta_{r(g)}(b1_{r(g)})e_g = \beta_g(b1_{g^{-1}})e_g, \tag{2.12}$$

para todo $b \in B$. De fato,

$$\begin{aligned}\beta_{r(g)}(b1_{r(g)})e_g &= b1_g e_g = b1_g \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_g(x_i 1_{g^{-1}})\right) \\ &= b\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_g(x_i 1_{g^{-1}})\right) = \sum_{i=1}^{n} by_i\beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i\beta_g(x_i b 1_{g^{-1}}) = \sum_{i=1}^{n} y_i\beta_g(x_i 1_{g^{-1}})\beta_g(b1_{g^{-1}}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_g(x_i 1_{g^{-1}})\right)\beta_g(b1_{g^{-1}}) = \beta_g(b1_{g^{-1}})\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_g(x_i 1_{g^{-1}})\right) \\ &= \beta_g(b1_{g^{-1}})e_g.\end{aligned}$$

Seja $S \subseteq \mathcal{G}$ tal que $\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h\in S}$ são todos distintos. Como B é β-forte, se $h \in S - H_B$ é tal que e_h é um idempotente não nulo, então existe $b \in B$ tal que $\beta_{r(h)}(b1_{r(h)})e_h \neq \beta_h(b1_{h^{-1}})e_h$, o que é uma contradição com (2.12), logo $e_h = 0$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_h(x_i 1_{h^{-1}}) = e_h = 0. \tag{2.13}$$

Por outro lado, se $h \in H_B \cap S$, então $h \in \mathcal{G}_0$. Com efeito, $\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_T$ e $\beta_{r(h)} \circ 1_{r(h)}|_T$ tem o mesmo domínio, contradomínio e $\beta_h(b1_{h^{-1}}) = b1_h = b1_{r(h)} = \beta_{r(h)}(b1_{r(h)})$, para todo $b \in B$. Como $\mathcal{G}_0 \subseteq H_T$ e $\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_T\}_{h \in S}$ são todos distintos temos que $h \in \mathcal{G}_0$. Portanto, $H_B \cap S = \mathcal{G}_0 \subseteq S$, logo

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \beta_e(x_i 1_e) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i 1_e = \left(\sum_{j}^{n} y_j x_j\right) 1_e = 1_A 1_e \tag{2.14}$$

$$= \left(\sum_{f \in \mathcal{G}_0} 1_f\right) 1_e = \sum_{f \in \mathcal{G}_0} \delta_{f,e} 1_e, \tag{2.15}$$

para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Portanto, pelo cálculo acima e por (2.13), temos que existem $(x_i, y_i) \in B \times A$, onde $1 \leq i \leq n$, tais que

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \beta_h(x_j 1_{h^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,h} 1_e,$$

para todo $h \in S$. Ou seja, a ação de β em B é β-independente.

Resta mostrar que A^β é um somando direto de B como B^β-módulo à esquerda. Para tal, por [3, Corollary 5.4], o fato de A ser comutativo implica que $tr_\beta(A) = A^\beta$. Portanto, existe $c \in A$ tal que $tr_\beta(c) = 1_A$, logo pelo Corolário 2.2.6 temos que A^β é um somando direto de A como A^β-módulo à esquerda, ou seja, existe um A^β-submódulo M de A tal que $A = A^\beta \oplus M$. Por outro lado, como $A^\beta \subseteq B$ temos que B é um A^β-submódulo à esquerda de A. Vamos mostrar que $B = A^\beta \oplus (M \cap B)$. Note que $B = A \cap B = (A^\beta + M) \cap B$. Portanto, para provar o pretendido, basta mostrar que $(A^\beta + M) \cap B = A^\beta + (M \cap B)$.

Se $t \in (A^\beta + M) \cap B$, então existe uma escrita, digamos $t = a + m$, onde $a \in A^\beta$ e $m \in M$. Como $A^\beta \subseteq B$, então $a \in B$, portanto $m = t - a \in B$, ou seja, $m \in M \cap B$ e $t = a + m \in A^\beta + (M \cap B)$. Reciprocamente, se $t = a + m \in A^\beta + (M \cap B)$ é tal que $a \in A^\beta$ e $m \in M \cap B$, como $A^\beta \subseteq B$ temos que $a \in B$, logo $a + m \in B$, ou ainda, $a + m \in (A^\beta + M) \cap B$. Por fim,

$$A^\beta \cap (M \cap B) = (A^\beta \cap M) \cap B = \{0\} \cap T = \{0\}.$$

Logo, $B = A^\beta \oplus (M \cap B)$, ou seja, A^β é um somando direto de B como A^β-módulo à esquerda. Portanto, B é β-admissível. $\square$

Proposição 2.5.4. *Seja β uma ação de $\mathcal{G}$ em um anel comutativo A e B um subanel β-admissível de A. Então, B é A^β-separável e β-forte.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.2.4 temos que B é A^β-separável. Resta mostrar que B é β-forte.

Sejam $g, h \in \mathcal{G}$ tais que $r(g) = r(h)$ e $g^{-1}h \notin \mathcal{H}_T$. Se $e \in E_g = E_h$ é um idempotente não nulo tal que $\beta_g(b1_{g^{-1}})e = \beta_h(b1_{h^{-1}})e$, para todo $b \in B$, então $b\beta_{g^{-1}}(e) = \beta_{g^{-1}h}(b1_{h^{-1}})\beta_{g^{-1}}(e1_{g^{-1}})$, para todo $b \in B$. Portanto,

$$\begin{aligned}\beta_{g^{-1}}(e) = 1_A\beta_{g^{-1}}(e) &= \left(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right)\beta_{g^{-1}}(e)\\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \beta_{g^{-1}}(e) = \sum_{i=1}^{n} y_i \beta_{g^{-1}h}(x_j 1_{h^{-1}})\beta_{g^{-1}}(e) = 0,\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de $g^{-1}h \notin \mathcal{H}_T$, portanto $g^{-1}h \notin \mathcal{G}_0$. Logo $\beta_{g^{-1}}(e) = 0$, o que implica $e = 0$, uma contradição. $\square$

Corolário 2.5.5. [20, Theorem 4.6] *Seja A uma extensão β-Galois de A^β. Então existe uma correspondência bijetiva entre os subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ e os subanéis A^β-separáveis e β-fortes de A.*

Demonstração. O resultado segue do Teorema 2.3.7 e das Proposições 2.5.3 e 2.5.4. $\square$

Terminamos este capítulo complementando [3, Theorem 5.3] para ações globais, dando duas equivalências a mais para a definição de extensão β-Galois.

Teorema 2.5.6. *Seja A um anel comutativo. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A é uma extensão β-Galois de A^β;

(ii) A é β-admissível;

(iii) A é uma extensão separável e β-forte de A^β.

Demonstração. A equivalência entre (ii) e (iii) seguem das Proposições 2.5.3 e 2.5.4.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Como A é uma extensão β-Galois de A^β, então existem $(x_i, y_i) \in A$, onde $1 \leq i \leq n$, tais que

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g} 1_e,$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Um argumento análogo ao usado na prova da Proposição 2.5.4 prova que $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in A \otimes_{A^\beta} A$ é um idempotente de separabilidade de A sobre A^β e que A é β-forte.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Seja $o = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i \in A \otimes_{A^\alpha} A$ um idempotente de separabilidade de A sobre A^β. Defina $\mu : A \otimes_{A^\beta} A \to A$ por $\mu(a \otimes b) = ab$. Como A é comutativo, μ é um homomorfismo de anéis. Logo, A é um $A \otimes_{A^\beta} A$-módulo via $(a \otimes b) \cdot c = \mu(a \otimes b)c$, para quaisquer $a, b, c \in A$. Vamos provar que $\mu(o) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 1_A$ e $ao = oa$, isto é, $(a \otimes 1_A - 1_A \otimes a)o = 0$, para todo $a \in A$. Para todo $g \in \mathcal{G}$, fixemos $o_g = \mu(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o) \in E_g$. Então,

$$\begin{aligned}
o_g^2 &= \mu(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o) \cdot \mu(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o) \\
&= \mu(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}})(o) \cdot (id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o)) \\
&= \mu(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o^2) \\
&= \mu(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o) = o_g,
\end{aligned}$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Ou seja, o_g é um idempotente.

Além disso, para todo $a \in A$, temos que

$$ao_g = a1_g \mu(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu(a \otimes 1_g)\mu(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o) \\
&= \mu((a \otimes 1_g)(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o)) \\
&= \mu((id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(a \otimes 1_A)(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o)) \\
&= \mu((id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))((a \otimes 1_A)o)) \\
&= \mu((id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))((1_A \otimes a)o)) \\
&= \mu((id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(1_A \otimes a)(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o)) \\
&= \mu((1_A \otimes \beta_g(a1_{g^{-1}}))(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o)) \\
&= (1_A \otimes \beta_g(a1_{g^{-1}})) \cdot \mu((id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o)) \\
&= (1_A \otimes \beta_g(a1_{g^{-1}})) \cdot o_g = \beta_g(a1_{g^{-1}})o_g.
\end{aligned}
$$

Note que $ao_g = \beta_{r(g)}(a1_{r(g)})o_g$. Portanto, como A é β-forte, se $g \notin \mathcal{G}_0$, temos que $o_g = 0$. Logo, $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1_A$ o que implica que $\sum_{i=1}^n y_i x_i 1_e = 1_e$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Então, $\sum_{i=1}^n y_i \beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) = \mu(id \otimes (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}))(o) = o_g = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g} 1_e$, o que conclui que $\{y_i, x_i\}_{i=1}^n$ é um sistema de coordenadas de Galois de A sobre A^β. $\square$

Capítulo 3

Teoria de Galois infinita

A Teoria de Galois clássica sobre corpos nos diz que dado $\mathbb{E}$ uma extensão de corpo finita e galoisiana de um corpo $\mathbb{K}$, existe uma correspondência entre as extensões intermediárias $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{E}$ e subgrupos de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{E})$ dos automorfismos de $\mathbb{E}$ que mantém o corpo $\mathbb{K}$ fixo.

No entanto, em geral, quando passamos a considerar extensões infinitas, tal correspondência não é verdadeira. O primeiro a estabelecer uma correspondência análoga para extensões infinitas foi o matemático W. Krull. Em seu trabalho, Krull considera uma topologia em $\mathrm{Aut}_{\mathbb{L}}(\mathbb{E})$ e verifica que os subgrupos que correspondem a extensões intermediarias de $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{E}$ são exatamente os subgrupos fechados nesta topologia. Em [13] H. F. Kreimer estende essa correspondência para ação de grupos sobre um anel não comutativo. Inspirados nessas ideias, equiparemos o grupoide $\mathcal{G}$ com uma topologia e mostraremos uma correspondência bijetiva entre os subgrupoides amplos e fechados de $\mathcal{G}$ e os K_β-subanéis de A, que além de estender a correspondência dada por Kreimer, também estende o Teorema 2.3.7 apresentado no capítulo anterior.

3.1 Pré-requisitos sobre Topologia

Nessa primeira seção, apresentaremos os conceitos topológicos e as notações necessárias para o desenvolvimento dos resultados que serão exibidos na sequência. Iniciaremos com a definição clássica de um espaço topológico.

Definição 3.1.1. [17, Seção 3.3] Uma topologia em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados os subconjuntos abertos (segundo a topologia τ) satisfazendo as seguintes condições:

(i) X e o subconjunto vazio $\emptyset$ são abertos;

(ii) A união de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;

(iii) A interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

Dizemos que (X, τ) é um espaço topológico, onde X é um conjunto e τ é uma topologia em X, e por vezes nos referimos aos elementos de X por *pontos de* X. Por simplicidade, diremos que o conjunto X é um espaço topológico, mencionando τ somente quando necessário.

Definição 3.1.2. [25, Definition 6.1] Se (X, τ) é um espaço topológico e $E \subseteq X$, então $\tau' = \{E \cap U : U \in \tau\}$ é uma topologia para E. Dizemos que τ' é uma topologia relativa para E e os abertos $E \cap U$ são chamados de abertos relativos em E.

Exemplo 3.1.3. [17, Exemplo 3.3.6] Em qualquer conjunto X podemos definir uma topologia τ em X tomando todos subconjuntos de X como abertos. A topologia τ é chamada *topologia discreta*.

Definição 3.1.4. [25, Definition 5.1] Seja X um espaço topológico. Uma base de abertos é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos abertos de X, satisfazendo que todo aberto $U \in X$ é da forma $U = \bigcup_{B_\lambda \in \mathcal{B}} B_\lambda$. Nesse caso, por simplicidade, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base de X e seus elementos são chamados de abertos básicos.

Um exemplo fundamental para a correspondência de Galois que apresentaremos é o exemplo de topologia finita. Para apresentá-la utilizaremos uma definição alternativa (mas equivalente) de espaço topológico.

Definição 3.1.5. [25, Definition 4.1] Seja x um elemento do espaço topológico X. Um conjunto U é uma vizinhança de x se existe aberto $V \subseteq U$ tal que $x \in V$. A coleção $\mathcal{U}_x$ de todas as vizinhanças de x é chamada de sistema de vizinhanças de x.

Proposição 3.1.6. [25, Theorem 4.2] *Seja x um elemento do espaço topológico X. Então um sistema de vizinhanças $\mathcal{U}_x$ satisfaz as propriedades abaixo.*

(i) *Se $U \in \mathcal{U}_x$, então $x \in U$;*

(ii) *Se $U, V \in \mathcal{U}_x$, então $U \cap V \in \mathcal{U}_x$;*

(iii) *Se $U \in \mathcal{U}_x$, então existe um $V \in \mathcal{U}_x$ tal que $U \in \mathcal{U}_y$, para cada $y \in V$;*

(iv) *Se $U \in \mathcal{U}_x$ e $U \subseteq V$, então $V \in \mathcal{U}_x$;*

(v) *$U \subseteq X$ é aberto se e somente se U contém uma vizinhança de cada um dos seus elementos.*

Reciprocamente, fixado um conjunto X, se existir uma coleção $\mathcal{U}_x$ de subconjuntos de X que satisfaz os itens (i) à (iv), para todo $x \in X$, e definirmos abertos como no item (v), então isso faz de X um espaço topológico e o sistema de vizinhanças é precisamente $\mathcal{U}_x$.

Definição 3.1.7. [25, Definition 4.7] Sejam X um espaço topológico e $\mathcal{U}_x$ um sistema de vizinhanças de $x \in X$. Dizemos que uma subcoleção $\mathcal{B}_x$ de $\mathcal{U}_x$ é uma base de vizinhanças de x se todo $U \in \mathcal{U}_x$ contém algum $V \in \mathcal{B}_x$. Dessa forma,

$$\mathcal{U}_x = \{U \subseteq X : V \subseteq U \text{ para algum } V \in \mathcal{B}_x\}.$$

Uma vez escolhida uma base de vizinhanças, seus elementos são chamados vizinhanças básicas de x.

Proposição 3.1.8. [25, Theorem 4.5] *Seja x um elemento do espaço topológico X. Então uma base de vizinhanças $\mathcal{B}_x$ de x satisfaz as propriedades abaixo.*

(i) *Se $V \in \mathcal{B}_x$, então $x \in V$;*

(ii) *Se $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$, então existe $V_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$;*

(iii) *Se $V \in \mathcal{B}_x$, então existe $V_0 \in \mathcal{B}_x$ tal que se $y \in V_0$ então existe $W \in \mathcal{B}_y$ com $W \subseteq V$;*

(iv) *$U \subseteq X$ é aberto se e somente se U contém uma vizinhança básica de cada um dos seus elementos.*

Reciprocamente, fixado um conjunto X, se existir uma coleção $\mathcal{B}_x$ de subconjuntos de X que satisfaz os itens (i) à (iv), para todo $x \in X$, e definirmos abertos como no item (v), então isso faz de X um espaço topológico e a base de vizinhanças é precisamente $\mathcal{B}_x$.

Agora, serão apresentados outros conceitos e resultados topológicos que serão usados no decorrer deste trabalho.

Definição 3.1.9. [25, Definition 8.1] Sejam $\{X_i : i \in I\}$ conjuntos não-vazios. Definimos o produto cartesiano dos conjuntos X_i por

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : x(i) \in X_i, \forall i \in I \right\}.$$

Denotaremos por x_i em lugar de $x(i)$ e dizemos que x_i é a i-ésima coordenada de x. Além disso, fixaremos a notação para a aplicação $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$, definida por $\pi_j(x) = x_j$, chamada de projeção de $\prod_{i\in I} X_i$ em X_j.

Agora, estaremos interessados no caso em que, com a notação acima, cada X_i é um espaço topológico e como isso induz uma topologia em $\prod_{i\in I} X_i$.

Definição 3.1.10. [25, Definition 8.3] Sejam $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos, para algum conjunto de índices I. Definimos a topologia produto (ou topologia de Tychonoff) em $\prod_{i\in I} X_i$ pela topologia obtida tomando a base de abertos da forma $\prod_{i\in I} U_i$, satisfazendo:

(i) U_i é aberto em X_i, para cada $i \in I$;

(ii) $U_i \neq X_i$ apenas para um número finito de coordenadas.

Definição 3.1.11. [25, Theorem 4.7] Seja U um subconjunto do espaço topológico X. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um ponto interior de U se alguma vizinhança básica de x está contida em U. Denotamos por $\mathrm{Int}(U)$ o conjunto dos pontos interiores de U.

Teorema 3.1.12. [25, Theorem 3.11] *Seja X um espaço topológico. Então $U \subseteq X$ é um aberto de X se e somente se $U = \mathrm{Int}(U)$.*

Definição 3.1.13. [25, Definition 4.9] Seja V um subconjunto do espaço topológico X. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um ponto de acumulação de V se cada vizinhança de x contém um ponto de V diferente de x. Denotamos por V' o conjunto dos pontos de acumulação de V.

Definição 3.1.14. [25, Theorem 4.10] Seja V um subconjunto do espaço topológico X. Definimos o fecho de V por $\overline{V} = V \cup V'$. Dizemos que V é fechado se $\overline{V} = V$, ou equivalentemente, se $V' \subseteq V$.

Uma importante propriedade dos conjuntos fechados é que a união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado. Além disso, a união do fecho é o fecho da união.

Teorema 3.1.15. [25, Theorem 3.7] *Se X é um espaço topológico e $V = \bigcup_{\lambda \in I} V_\lambda$, onde $\{V_\lambda\}_{\lambda \in I}$ é uma família finita de subconjuntos de X, então $\overline{V} = \bigcup_{\lambda \in I} \overline{V_\lambda}$.*

Definição 3.1.16. [25, Seção 6.4] Um subconjunto W de um espaço topológico X é dito denso em X se $\overline{W} = X$. Equivalentemente, W é denso em X se todo aberto não vazio de X contém algum ponto de W.

Definição 3.1.17. [17, Seção 7.2] Sejam X um espaço topológico e S um subconjunto de X. Uma cobertura de S é uma familia $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X tal que $S \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$.

Dizemos que uma cobertura $\mathcal{C}$ é aberta quando os conjuntos C_i que a compõem são abertos. Do mesmo modo, dizemos que $\mathcal{C}$ é uma cobertura finita quando o conjunto de índices I é finito.

Seja $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ uma cobertura de S. Uma subcobertura de $\mathcal{C}$ é uma subfamília $\mathcal{C}' = \{C_j\}_{j \in J}$, onde $J \subseteq I$, que ainda é uma cobertura de S, isto é, contínua válida a propriedade $S \subseteq \bigcup_{j \in J} C_j$.

Definição 3.1.18. [25, Definition 17.1] Um espaço topológico X é dito compacto quando toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.

Teorema 3.1.19. [25, Theorem 17.4] *Seja X um espaço topológico. Então, X é compacto se e somente se toda família $\{V_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos fechados de X satisfaz a seguinte propriedade: se $\bigcap_{i \in I_0} V_i \neq \emptyset$ para todo conjunto finito $I_0 \subseteq I$, então $\bigcap_{i \in I} V_i \neq \emptyset$.*

Lema 3.1.20. *Um conjunto X é compacto com a topologia discreta se e somente se X for finito.*

Demonstração. Seja X um conjunto compacto com a topologia discreta e infinito. Consideremos também a cobertura de X dada por $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in X\}$. Então, existe uma subcobertura finita, digamos $\mathcal{C}' = \{\{x_i\} : 1 \leq i \leq n\}$, para algum inteiro positivo n. Como X é infinito, existe $y \in X$ tal que $\{y\} \notin \mathcal{C}'$, o que é uma contradição. Portanto X deve ser finito.

Reciprocamente, se X é um conjunto finito indexado por $X = \bigcup_{j=1}^{n}\{x_j\}$ e $\mathcal{C} = \{C_i : i \in I\}$ uma cobertura de $\mathcal{C}$, onde I um conjunto de índices, então, para cada $x_j \in X$, existe $C_j \in \mathcal{C}$ tal que $x_j \in C_j$. Logo, $\mathcal{C}' = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$ é uma subcobertura finita para X, portanto X é compacto. $\square$

Teorema 3.1.21. [25, Theorem 17.5] *Se X é um espaço topológico compacto e V um subconjunto fechado de X, então V é compacto.*

Teorema 3.1.22. ***(Tychonoff)***[25, Theorem 17.8] *Dada uma família de espaços topológicos $\{X_i\}_{i\in I}$, para algum conjunto de índices I e ao menos um espaço não vazio, então o espaço produto $\prod_{i\in I} X_i$ é compacto se e somente se cada X_i é compacto.*

Definição 3.1.23. [25, Theorem 7.2] Sejam X e Y espaços topológicos e uma função $f : X \to Y$. Dizemos que f é contínua se $f^{-1}(H)$ é aberto em X, para todo aberto H de Y.

Teorema 3.1.24. [25, Theorem 7.2] *Sejam X e Y espaços topológicos e uma função $f : X \to Y$. Então, f é contínua se e somente se para todo $V \subseteq Y$ fechado, tivermos que $f^{-1}(V)$ é fechado em X.*

Teorema 3.1.25. [25, Theorem 17.7] *Se X e Y são espaços topológicos e $f : X \to Y$ é uma função contínua, então $f(W)$ é compacto de Y, para todo compacto W de X.*

3.1.1 Topologia Finita

A seguir apresentaremos a topologia finita, seguindo [15]. Dado um anel R qualquer, a topologia finita é definida no conjunto dos homomorfismos de anéis $\mathrm{End}(R)$. Apresentaremos tal topologia de forma geral para um anel R qualquer e, em seguida analisaremos como suas propriedades se traduzem para o anel $A = \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_0} E_e$ utilizado nos resultados que apresentaremos posteriormente.

Se R é um anel qualquer, definimos para cada $x \in R$:

$$U_x = \{\varphi \in \mathrm{End}(R) : \varphi(x) = 0\}.$$

Vejamos que U_x define um ideal à esquerda de $\mathrm{End}(R)$, para cada $x \in R$.

- $(\varphi - \sigma)(x) = \varphi(x) - \sigma(x) = 0 - 0 = 0;$
- $(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(0) = 0,$

para quaisquer $\varphi, \sigma \in U_x$ e $\psi \in \mathrm{End}(R)$. Agora, para cada subconjunto finito $X \subseteq R$, podemos definir o ideal à esquerda $U_X = \bigcap_{x \in X} U_x$. Note que U_X é um ideal à esquerda pois é interseção de ideais à esquerda. Além disso, é da forma:

$$U_X = \{\varphi \in \mathrm{End}(R) : \varphi(x) = 0, \forall x \in X\}.$$

Note que U_x (portanto U_X) não é ideal à direita. Mesmo assim, podemos tomar o conjunto das classes de equivalência $\mathrm{End}(R)/U_X$, onde a relação de equivalência é dada por

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \varphi - \psi \in U_X,$$

para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(R)$. Denotaremos as classes de $\mathrm{End}(R)/U_X$ por $\varphi + U_X$, para cada conjunto finito $X \subseteq R$. Logo,

$$\varphi + U_X = \{\psi \in \mathrm{End}(R) : \psi - \varphi \in U_X\}$$

$$= \{\psi \in \mathrm{End}(R) : (\psi - \varphi)(x) = 0, \forall x \in X\}$$

$$= \{\psi \in \mathrm{End}(R) : \psi(x) = \varphi(x), \forall x \in X\}.$$

Proposição 3.1.26. *Se R é um anel e para cada $\varphi \in \mathrm{End}(R)$ definimos a coleção de conjuntos*

$$\mathcal{B}_\varphi = \{\varphi + U_X : \text{ para todo conjunto finito } X \subseteq R\}.$$

Então, $\mathcal{B}_\varphi$ é uma base de vizinhanças para $\varphi \in \mathrm{End}(R)$.

Demonstração. Vejamos que, de fato, os conjuntos definidos no enunciado desta proposição satisfazem os itens (i) à (iii) da Proposição 3.1.8.

(i) Dado um conjunto finito $X \subseteq R$ tal que $\varphi + U_X \in \mathcal{B}_\varphi$, então trivialmente $\varphi(x) = \varphi(x)$, para todo $x \in X$. Logo, $\varphi \in \varphi + U_X$;

(ii) Se X_1, $X_2 \in R$ são conjuntos finitos, consideremos $\varphi + U_{X_1}$ e $\varphi + U_{X_2} \in \mathcal{B}_\varphi$. Fixando $X = X_1 \cup X_2$ temos que $\varphi + U_X \subseteq \varphi + U_{X_1} \cap \varphi + U_{X_2}$. De fato, se $\psi \in \varphi + U_X$, então $\psi(x) = \varphi(x)$, para todo $x \in X = X_1 \cup X_2$.

(iii) Devemos mostrar que, para todo $\varphi + U_X \in \mathcal{B}_\varphi$, existe $\varphi + U_Y \in \mathcal{B}_\varphi$ tal que: se $\psi \in \varphi + U_Y$, então existe $\psi + U_Z \in \mathcal{B}_\psi$, onde $\psi + U_Z \subseteq \varphi + U_X$. Para essa propriedade basta tomar $Z = Y = X$.

Portanto, $\mathcal{B}_\varphi$ é uma base de vizinhanças para cada $\varphi \in \mathrm{End}(A)$. □

Com a notação da Proposição 3.1.26 acima, $\mathcal{B}_\varphi$ é uma base de vizinhanças para cada $\varphi \in \mathrm{End}(A)$. Então, a Proposição 3.1.8 diz que $\mathrm{End}(R)$ é um espaço topológico, onde os abertos são os conjuntos V que contém uma vizinhança básica de cada um dos seus pontos. Essa topologia chama-se topologia finita.

3.1.2 Topologia Finita e ação β

Nesta subseção, iremos analisar a relação entre a ação $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ e a topologia finita em $\operatorname{End}(A)$, bem como algumas propriedades que surgem dessa relação. Para tanto, a partir deste ponto neste trabalho, iremos fixar os seguintes conceitos:

- $\mathcal{G}$ é um grupoide de ordem qualquer, com conjunto de unidades $\mathcal{G}_0$ finito;
- $\beta = (\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}})$ denota uma ação de $\mathcal{G}$ sobre um anel A da forma $A = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e$, onde cada E_e é um ideal com unidade 1_e, para $e \in \mathcal{G}_0$.

Observamos que o conjunto $G = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}} \in \operatorname{End}(A) : g \in \mathcal{G}\}$ é naturalmente isomorfo a $\mathcal{G}$ com a operação dada por:

$$\exists(\beta_g\circ 1_{g^{-1}})(\beta_h\circ 1_{h^{-1}}) \Leftrightarrow \exists gh \in \mathcal{G} \text{ e nesse caso } (\beta_g\circ 1_{g^{-1}})(\beta_h\circ 1_{h^{-1}}) = \beta_{gh}\circ 1_{(gh)^{-1}}.$$

Dessa forma, podemos identificar G e $\mathcal{G}$ de forma indistinguida quanto a estrutura de grupoide. No entanto, $G \subseteq \operatorname{End}(A)$, o que permitirá estudar as relações entre a estrutura de grupoide de $\mathcal{G}$ e os aspectos topologicos de $\operatorname{End}(A)$. Por simplicidade, identificaremos G e $\mathcal{G}$ apenas por $\mathcal{G}$.

Note que, uma vez que o anel A é unitário, então o número de identidades $\mathcal{G}_0$ de $\mathcal{G}$ é finita. Além disso, $\mathcal{G} = \bigcup_{e,f\in\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_{e,f}$, onde

$$\mathcal{G}_{e,f} = \{g \in \mathcal{G} : \beta_g : E_e \to E_f, \text{ onde } e, f \in \mathcal{G}_0\}.$$

Observação 3.1.27. Pelo Teorema 3.1.15 temos a seguinte descrição para o fecho de $\mathcal{G}$ em $\operatorname{End}(A)$ com a topologia finita: $\overline{\mathcal{G}} = \bigcup_{e,f\in\mathcal{G}_0} \overline{\mathcal{G}_{e,f}}$. Esta relação será útil para provar que existe uma ação de $\overline{\mathcal{G}}$ em A. Além disso, denotando o conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{G}_{e,f}$ por $(\mathcal{G}_{e,f})'$, $\varphi \in (\mathcal{G}_{e,f})'$ significa que toda vizinhança de φ possui um elemento $g \in \mathcal{G}_{e,f}$. No caso da topologia finita, se traduz da seguinte forma: para todo conjunto finito $X \subseteq A$, existe $g \in \mathcal{G}_{e,f}$ tal que $(\beta_g \circ 1_{g^{-1}}) \in \varphi + U_X$, ou ainda, $\varphi(x) = \beta_g(x1_{g^{-1}})$, para todo $x \in X$.

Lema 3.1.28. *Se $\varphi \in \overline{\mathcal{G}_{e,f}}$, então $\varphi|_{E_e}$ é um isomorfismo de anéis, onde $\varphi(E_e) = E_f$, para quaisquer $e, f \in \mathcal{G}_0$. Além disso, $\varphi|_{E_l} = 0$, para todo $l \in \mathcal{G}_0$ tal que $l \neq e$.*

Demonstração. Se $\varphi \in \overline{\mathcal{G}_{e,f}}$, então $\varphi \in \mathcal{G}_{e,f}$ ou $\varphi \in (\mathcal{G}_{e,f})'$. No primeiro caso não há o que fazer. No segundo caso, como $(\mathcal{G}_{e,f})' \subseteq \mathrm{End}(A)$, temos que seus elementos são homomorfismos de anéis. Além disso, para qualquer $a \in E_l$, existe $g \in \mathcal{G}_{e,f}$ tal que $\varphi(a) = \beta_g(a1_{g^{-1}}) = 0$, o que prova que $\varphi|_{E_l} = 0$, para todo $l \in \mathcal{G}_0$ tal que $l \neq e$.

Agora, mostraremos que $\varphi|_{E_e}$ é um monomorfismo. Seja $x \in E_e$ tal que $\varphi(x) = 0$. Uma vez que φ é um ponto de acumulação, existe $(\beta_g \circ 1_{g^{-1}}) \in \varphi + U_{\{x\}}$, para algum $g \in \mathcal{G}_{e,f}$. Ou seja, $\varphi(x) = \beta_g(x1_{g^{-1}}) = \beta_g(x) = 0$. Mas como β_g é isomorfismo, temos que $x = 0$. Logo, φ é monomorfismo.

Para a sobrejetividade, fixemos $y \in E_f$ e o conjunto $T_y = \{\beta_g(y1_{g^{-1}}) : g \in \mathcal{G}\}$. Note que T_y é um conjunto finito. Com efeito, o conjunto unitário $\{y\}$ é um subconjunto de A, que por sua vez é um K_β-anel. Então, existe um subanel β-admissível B tal que $\{y\} \subseteq B$. Logo, o conjunto $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}_{g\in\mathcal{G}}$ deve ser finito, portanto T_y deve ser finito.

Dessa forma, podemos considerar a vizinhança $\varphi + U_{T_y}$. Como φ é ponto de acumulação, existe $h \in \mathcal{G}_{e,f}$ tal que $\beta_h \circ 1_{h^{-1}} \in \varphi + U_{T_y}$, ou seja, $\beta_h(x1_{h^{-1}}) = \varphi(x)$, para todo $x \in T_y$. Note que $x' = \beta_{h^{-1}}(y) \in T_y \cap E_e$. Assim,

$$\varphi(x') = \beta_h(x') = \beta_h(\beta_{h^{-1}}(y)) = \beta_{d(h)}(y) = y.$$

Portanto, φ é sobrejetora. $\square$

Pelo Lema 3.1.28 acima, dado $\varphi \in \overline{\mathcal{G}_{e,f}}$ temos que $\varphi = \varphi \circ 1_e$, onde $\varphi|_{E_e} \neq 0$ e $e \in \mathcal{G}_0$. Nessa direção, temos o lema a seguir.

Lema 3.1.29. *O fecho $\overline{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ em relação a topologia finita em End(A) possui uma estrutura de grupoide na qual $\mathcal{G}$ é um subgrupoide de $\overline{\mathcal{G}}$.*

Demonstração. A operação é definida via composição de funções. Vamos provar que tal operação é fechada. Para tal, sejam $\varphi \in \overline{\mathcal{G}_{e,f}}$ e $\psi \in \overline{\mathcal{G}_{f,l}}$. Vamos provar que $\psi\varphi \in \overline{\mathcal{G}_{e,l}}$. Se X é um conjunto finito de E_e, então existe $g \in \mathcal{G}_{e,f}$ tal que $g \in \varphi + U_X$, ou seja, $\beta_g(x1_{g^{-1}}) = \varphi(x)$, para todo $x \in X$. Além disso, o conjunto $Y = \{\beta_g(x1_{g^{-1}}) : x \in X\}$ é finito, então existe $h \in \mathcal{G}_{f,l}$ tal que $h \in \psi + U_Y$, ou seja, $\beta_h(y1_{h^{-1}}) = \psi(y)$, para todo $y \in Y$. Portanto,

$$\psi\varphi(x) = \psi(\beta_g(x1_{g^{-1}})) = \beta_h(\beta_g(x1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}) = \beta_{hg}(x1_{hg^{-1}}),$$

para todo $x \in X$. Então, $hg \in \psi\varphi + U_X$ logo $\psi\varphi \in \overline{\mathcal{G}_{e,l}}$.

Agora, vamos provar que para todo $\varphi \in \overline{\mathcal{G}_{e,f}}$ existe $\varphi^{-1} \in \overline{\mathcal{G}_{f,e}}$. Fixemos X um subconjunto finito de E_f e considere $T = \{\varphi^{-1}(x) : x \in X\}$, como X é um conjunto finito, então T é um conjunto finito de E_e. Logo, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $\beta_g \in \varphi + U_T$, ou seja, $\beta_g(t) = \varphi(t)$, para todo $t \in T$. Ou ainda,

$$\beta_g(\varphi^{-1}(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x, \tag{3.1}$$

para todo $x \in X$. Podemos reescrever 3.1 da seguinte forma: $\varphi^{-1}(x) = \beta_{g^{-1}}(x)$, para todo $x \in X$. Portanto, $\varphi^{-1} \in \beta_{g^{-1}} + U_X$. Logo, $\varphi^{-1} \in \overline{\mathcal{G}_{e,f}}$. □

Pelo Lema 3.1.29 acima, podemos definir uma ação $\beta^* = \{\{E_g\}_{g\in\overline{\mathcal{G}}}, \{\beta_g\}_{g\in\overline{\mathcal{G}}}\}$ de $\overline{\mathcal{G}}$ em A de forma natural, onde as aplicações $\beta_g : E_{d(g)} \to E_{r(g)}$ são os isomorfismos parciais que surgem ao considerarmos o fecho $\overline{\mathcal{G}_{d(g),r(g)}}$.

3.2 Teoria de Galois para grupoides infinitos

3.2.1 A passagem para o caso infinito

Nesta subseção discutiremos como as propriedades de anéis β-admissíveis são transportadas para o caso de $\mathcal{G}$ ser um grupoide de ordem qualquer (não necessariamente finita). Então, apresentaremos como alguns dos resultados do Capítulo 2 tem sua versão estendida quando $\mathcal{G}$ não for, necessariamente, finito. Estes resultados também serão essenciais para a prova da correspondência que apresentaremos. Começaremos estendendo algumas definições.

Definição 3.2.1. Se B é um subanel de A, dizemos que a ação β restrita ao subanel B é fortemente independente se, para todo subconjunto $S \subseteq \mathcal{G}$ tal que $\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h\in S}$ são todos distintos, existir $(x_i, y_i) \in B \times A$, onde $1 \leq i \leq n$, tais que:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \beta_h(x_i 1_{h^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,h} 1_e,$$

para todo $h \in S$. Neste caso, dizemos que B é um subanel β-independente de A.

Definição 3.2.2. Considere β uma ação de $\mathcal{G}$ sobre A. Dizemos que um subanel B de A é β-admissível se:

(i) $A^\beta \subseteq B$;

(ii) B é β-independente e o conjunto $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ é finito;

(iii) A^β é um somando direto de B como A^β-módulo à esquerda.

Observação 3.2.3. Note que a exigência de $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ ser finito na Definição 3.2.2 é supérflua sempre que o grupoide $\mathcal{G}$ for finito. Como no Capítulo 2 foram considerados apenas grupoides finitos, esta exigência foi omitida na Definição 2.2.1.

Definição 3.2.4. Dizemos que A é um K_β-anel se todo subconjunto finito de A está contido em um subanel β-admissível de A.

Se B é um subanel β-admissível de A, a condição de $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ ser finito permitirá uma generalização adequada da função traço, como descreveremos a seguir.

Seja B um subanel de A tal que o conjunto das restrições de $\mathcal{G}$ em B, que denotaremos por $S(B) = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$, é finito. Definimos a função $tr_{S(B)} : B \to A$ por $tr_{S(B)}(b) = \sum_{g\in S(B)} \beta_g(b1_{g^{-1}})$, para todo $b \in B$. Mostraremos que $tr_{S(B)}(B) \subseteq A^\beta$. Para isto precisaremos do lema a seguir.

Lema 3.2.5. *Seja B um subanel de A tal que $S(B) = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ é finito. Para $h \in \mathcal{G}$, defina $S(B)_{r(h)} = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B \in S(B) : r(g) = r(h)\}$ e $S(B)_{d(h)} = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B \in S(B) : r(g) = d(h)\}$. Então a função $f_h : S(B)_{d(h)} \to S(B)_{r(h)}$, definida por $f_h(\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B) = \beta_{hg} \circ 1_{(hg)^{-1}}|_B$, é uma bijeção.*

Demonstração. Primeiramente, note que $f_h : S(B)_{d(h)} \to S(B)_{r(h)}$ esta bem definida pois, se $\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B \in S(B)_{d(h)}$, então $r(g) = d(h)$, portanto $\exists hg$ e $\beta_{hg} \circ 1_{(hg)^{-1}}|_B \in S(B)_{r(h)}$, uma vez que $r(hg) = r(h)$. Mostremos a injetividade. Sejam $\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B, \beta_l \circ 1_{l^{-1}}|_B \in S(B)_{d(h)}$ tais que $\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B \neq \beta_l \circ 1_{l^{-1}}|_B$. Assim, existe $b \in B$ tal que $\beta_g(b1_{g^{-1}}) \neq \beta_l(b1_{l^{-1}})$. Como β_h é injetora, $\beta_{hg}(b1_{hg^{-1}}) \neq \beta_{hl}(b1_{hl^{-1}})$. Para a sobrejetividade, se $\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B \in S(B)_{r(h)}$ então $r(g) = r(h)$, com isso pelo Lema 1.1.9 temos que existe $l \in \mathcal{G}$ tal que $\exists hl$ e $g = hl$. Como $r(l) = d(h)$, temos que $\beta_l \circ 1_{l^{-1}}|_B \in S(B)_{d(h)}$ e $f_h(\beta_l \circ 1_{l^{-1}}|_B) = \beta_{hl} \circ 1_{(hl)^{-1}}|_B = \beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B$. $\square$

Lema 3.2.6. *Se B é um subanel de A tal que $S(B)$ é finito, então $tr_{S(B)}(B) \subseteq A^\beta$.*

Demonstração. Utilizando o item (i) do Lema 2.1.1 e Lema 3.2.5, para cada $h \in \mathcal{G}$, temos que

$$\beta_h\left(tr_{S(B)}(b)\right) = \beta_h\left(\left(\sum_{g\in S(B)} \beta_g(b1_{g^{-1}})\right) 1_{h^{-1}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{g \in S} \beta_h \left(\beta_g \left(b 1_{g^{-1}}\right) 1_{h^{-1}}\right) \\
&= \sum_{r(g)=d(h)} \beta_{hg} \left(b 1_{(hg)^{-1}}\right) 1_h \\
&= \sum_{r(l)=r(h)} \beta_l \left(b 1_{l^{-1}}\right) 1_h \\
&= \sum_{l \in S(B)} \beta_l \left(b 1_{l^{-1}}\right) 1_h,
\end{aligned}
$$

para todo $b \in B$. Ou seja, $tr_{S(B)}(b) = \sum_{g \in S(B)} \beta_g(b1_{g^{-1}}) \in A^\beta$. $\square$

O lema a seguir permite uma descrição mais especifica para o conjunto $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$.

Lema 3.2.7. *Sejam B um subanel de A tal que $S(B) = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ é finito e $\mathcal{C} = \{g_i \in \mathcal{G} : i \in I\}$ um sistema de representantes para as classes laterais de $\mathcal{H}_B$ em $\mathcal{G}$, para algum conjunto de índices I. Então, $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\} = \{\beta_{g_i} \circ 1_{g_i^{-1}}|_B\}$. Além disso, $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ é finito se e somente se $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)$ é finito e, neste caso,*

$$tr_{S(B)}(b) = \sum_{g \in S(B)} \beta_g(b1_{g^{-1}}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(b1_{g_i^{-1}}),$$

para todo $b \in B$, onde $n = (\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)$.

Demonstração. Claramente $\{\beta_{g_i} \circ 1_{g_i^{-1}}|_B\} \subseteq \{\beta_g \circ 1_g|_B\}$. Reciprocamente, se $g \in \mathcal{G}$, então $g \in g_j\mathcal{H}_B$, para algum $j \in I$. Mais ainda, existe $h \in \mathcal{H}_B$ tal que $g = g_jh$. Assim,

$$\beta_g(b1_{g^{-1}}) = \beta_{g_jh}(b1_{(g_jh)^{-1}}) = \beta_{g_j}(\beta_h(b1_{g_j^{-1}})1_{h^{-1}}) = \beta_{g_j}(b1_{g_j^{-1}}),$$

para todo $b \in B$. Assim, para todo $g \in \mathcal{G}$ temos que $\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B = \beta_{g_i} \circ 1_{g_i^{-1}}|_B$, para algum $i \in I$. Portanto, $\{\beta_g \circ 1_g|_B\} = \{\beta_{g_i} \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$.

Com o cálculo acima, é imediato que $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ é finito se e somente se $(\mathcal{G} : \mathcal{H})$ é finito. E também $tr_{S(B)}(b) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(b1_{g_i^{-1}})$, para todo $b \in B$. $\square$

Com a generalização apresentada da função traço e os lemas acima, podemos obter versões estendidas de resultados do Capítulo 2 para grupoides de ordem qualquer (não necessariamente finita). A seguir, apresentaremos os principais resultados e suas demonstrações.

Lema 3.2.8. *Seja B um subanel de A tal que o conjunto $S(B) = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ é finito. Se existir $c \in B$ tal que $tr_{S(B)}(c) = 1_A$ e $A^\beta \subseteq B$, então A^β é um somando direto de B como A^β-módulo à esquerda.*

Demonstração. A prova deste lema é análoga a feita no Lema 2.2.6, trocando tr_β por $tr_{S(B)}$. □

Proposição 3.2.9. *Sejam A um K_β-anel e B um subanel β-independente de A tal que $A^\beta \subseteq B$ e $S(B) = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ é finito. Então, existe um elemento $d \in B$ tal que $tr_{S(B)}(d) = 1_A$.*

Demonstração. A prova desta proposição é análoga a feita na Proposição 2.2.7, trocando tr_β por $tr_{S(B)}$. □

Corolário 3.2.10. *Sejam A um K_β-anel. Então, B é um subanel β-admissível de A se e somente se $A^\beta \subseteq B$ e B for β-independente, onde $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ é finito.*

Demonstração. Segue da Definição 2.2.1 de β-admissível e reciprocamente, da Proposição 3.2.9 e do Lema 3.2.8. □

Lema 3.2.11. *Sejam A um K_β-anel, $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$ e B um subanel β-admissível de A tal que $\mathcal{H}_B \subseteq \mathcal{H}$. Então, $A^{\beta_\mathcal{H}}$ é um subanel β-admissível de A.*

Demonstração. Vamos provar que $A^{\beta_\mathcal{H}}$ satisfaz as condições da Definição 2.2.1 de β-admissível.

Como $\mathcal{H}$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, pelo Lema 1.1.20 temos que $A^\beta \subseteq A^{\beta_\mathcal{H}}$. Observando que o fato de B ser β-admissível diz que $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ é finito, então pelo Lema 3.2.7 temos que $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)$ é finito. Dessa forma, $(\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $(\mathcal{H} : \mathcal{H}_B)$ também são finitos. De fato, se $(\mathcal{G} : \mathcal{H})$ ou $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)$ fossem infinitos, pelo Lema 1.2.4, teríamos que $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)$ é infinito, o que é uma contradição.

Vamos mostrar que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é β-independente. Fixemos $\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ e $\{h_j \in \mathcal{H} : 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{H}_B)\}$ sistemas de representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}_B$ em $\mathcal{H}$, respectivamente, de tal forma que as classes que contêm as identidades sejam representadas pelas mesmas. Pelo Lema 1.2.4, temos que

$$\{g_i h_j : r(h_j) = d(g_i), 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}) \text{ e } 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{H}_B)\}$$

é um sistema de representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}_B$ em $\mathcal{G}$. Com isso, pelo Lema 3.2.7, $S(B) = \{\beta_{g_i h_j} \circ 1_{(g_i h_j)^{-1}}|_B\}$. Agora, como B é β-independente, existem $(x_k, y_k) \in B \times A$, onde $1 \leq k \leq n$, tais que

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i h_j}(x_k 1_{(g_i h_j)^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e, g_i h_j} 1_e,$$

para todo $g_i h_j \in S(B)$. Com isso, fixemos $(w_k, y_k) \in A^{\beta_{\mathcal{H}}} \times A$, onde

$$w_k = \sum_{j=1}^{(\mathcal{H}:\mathcal{H}_B)} \beta_{h_j}(x_k 1_{h_j^{-1}}),$$

para $1 \leq k \leq n$. Note que de fato $w_k \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, para $1 \leq k \leq n$, pelos Lemas 3.2.7 e 3.2.6. Utilizando novamente o Lema 3.2.6, temos que, se $r(h_j) \neq d(g_i)$, para $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{H}_B)$, então $\beta_{h_j}(x_k 1_{h_j^{-1}}) 1_{g_i^{-1}} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i}(w_k 1_{g_i^{-1}}) &= \sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i}\left(\left(\sum_{j=1}^{(\mathcal{H}:\mathcal{H}_B)} \beta_{h_j}(x_k 1_{h_j^{-1}})\right) 1_{g_i^{-1}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i}\left(\sum_{j=1}^{(\mathcal{H}:\mathcal{H}_B)} \beta_{h_j}(x_k 1_{h_j^{-1}}) 1_{g_i^{-1}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i}\left(\sum_{r(h_j)=d(g_i)} \beta_{h_j}(x_k 1_{h^{-1}})\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\sum_{r(h_j)=d(g_i)} \beta_{g_ih_j}(x_k 1_{(g_ih_j)^{-1}}) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{r(h_j)=d(g_i)} y_k \beta_{g_ih_j}(x_k 1_{(g_ih_j)^{-1}}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{g_ih_j \in S(B)} y_k \beta_{g_ih_j}(x_k 1_{(g_ih_j)^{-1}}) \\
&= \sum_{g_ih_j \in S(B)} \sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_ih_j}(x_k 1_{(g_ih_j)^{-1}}) \\
&= \sum_{g_ih_j \in S(B)} \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g_ih_j} 1_e,
\end{aligned}
$$

Note que, uma vez fixado g_i, onde $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $e \in \mathcal{G}_0$, temos que $\delta_{e,g_ih_j} = 1_A$ se e somente se $g_ih_j = e$. Por sua vez, $g_ih_j = e$ se e somente se, ou $g_i = h_j = e$ ou $g_i = h_j^{-1} \neq e$. Mas o segundo caso não ocorre, pois se fosse o caso teríamos que $e \in g_i\mathcal{H}$ e fixamos que as classes laterais que contêm as identidades seriam representadas pelas mesmas. Portanto, $\delta_{e,g_ih_j} = 1_A$ se e somente se $g_i = h_j = e$, logo

$$
\sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i}(w_k 1_{g_i^{-1}}) = \sum_{r(h)=d(g_i)} \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g_ih_j} 1_e = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g_i} 1_e
$$

Portanto, existem $(w_k, y_k) \in A^{\beta_{\mathcal{H}}} \times A$, onde $1 \leq k \leq n$ tais que

$$
\sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i}(w_k 1_{g^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g_i} 1_e.
$$

Então, $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é β-independente. Por fim, pelo Corolário 3.2.10 temos que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é β-admissível. □

Proposição 3.2.12. *Se A é um K_β-anel e $\mathcal{H}$ é um subgrupoide amplo e de índice finito em $\mathcal{G}$, então $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um subanel β-admissível de A.*

Demonstração. Suponha que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ não é um subanel β-admissível de A. Fixando F_1 um subconjunto finito de $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, temos que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{F_1}$. De fato, se $h \in \mathcal{H}$, então

$\beta_h(a1_{h^{-1}}) = a1_h$, para todo $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, em particular vale para todo $a \in F_1$. Com isto, pela Proposição 1.1.20, temos que $A^{\beta_{\mathcal{H}_{F_1}}} \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}}}$.

Como A é um K_β-anel, existe um subanel β-admissível B de A tal que $F_1 \subseteq B$. Novamente pela Proposição 1.1.20, temos $\mathcal{H}_B \subseteq \mathcal{H}_{F_1}$. Logo, o Lema 3.2.11 nos diz que $A^{\beta_{\mathcal{H}_{F_1}}}$ é um subanel β-admissível de A, portanto $A^{\beta_{\mathcal{H}_{F_1}}} \neq A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, ou seja, existe $c \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ tal que $c \notin A^{\beta_{\mathcal{H}_{F_1}}}$.

Agora, fixe $F_2 = F_1 \cup \{c\}$. Então $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{F_2} \subseteq \mathcal{H}_{F_1}$ e repetindo o argumento anterior indutivamente, obtemos a seguinte cadeia descendente de subgrupoides de $\mathcal{G}$

$$\mathcal{H}_{F_1} \supsetneq \mathcal{H}_{F_2} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{H}_{F_n} \supsetneq \dots$$

Note que, se $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{F_i}$, para algum $i \geq 1$, então $A^{\beta_{\mathcal{H}}} = A^{\beta_{F_i}}$ e nesse caso teríamos uma contradição com a suposição de $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ não ser β-admissível. Logo, $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{H}_{F_i}$, para todo $i \geq 1$. Note que, se $\mathcal{H}_{F_i}$ e $\mathcal{H}_{F_j}$ são tais que $\mathcal{H}_{F_i} \supsetneq \mathcal{H}_{F_j}$, então pelo Lema 3.2.7 temos que $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_{F_j})$, $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_{F_i})$ são finitos. Por outro lado, $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_{F_j}) > (\mathcal{G} : \mathcal{H}_{F_i})$. Portanto, $(\mathcal{G} : \mathcal{H}) > (\mathcal{G} : \mathcal{H}_{F_i})$, para todo $i \geq 1$. Mas neste caso $\mathcal{H}$ não teria índice finito em $\mathcal{G}$, o que é uma contradição. Portanto, $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um subanel β-admissível de A. $\square$

Lema 3.2.13. *Sejam A um K_β-anel, $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$ e B um subanel β-admissível de A tal que $\mathcal{H}_B \subseteq \mathcal{H}$. Então, A é um $K_{\beta_{\mathcal{H}}}$-anel.*

Demonstração. Observe que na prova do Lema 3.2.11 mostramos que $(\mathcal{G} : \mathcal{H})$ é finito e que existem $(w_k, y_k) \in A^{\beta_{\mathcal{H}}} \times A$, onde $1 \leq k \leq n$ tais que

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i}(w_k 1_{g^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g_i} 1_e,$$

onde $\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ é um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$. Se $g_i \notin \mathcal{H}$, em particular $g_i \notin \mathcal{G}_0$, logo

$\sum_{k=1}^{n} y_k \beta_{g_i}(w_k 1_{g^{-1}}) = 0$. Então, $g_i \notin \mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}}$. Como $\mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}} \subseteq \mathcal{H}$ e, uma vez que a inclusão inversa é imediata, temos que $\mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}} = \mathcal{H}$.

Para cada $g_i \in \mathcal{G} - \mathcal{H}$, fixemos $a_i \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ tal que $\beta_{g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}}) \neq a_i 1_{g_i}$. Observe que a_i existe, para cada $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$, pois caso contrário $\beta_{g_i}(a 1_{g_i^{-1}}) = a 1_{g_i}$, para todo $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, então $g_i \in \mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}} = \mathcal{H}$. Dessa forma, fixemos $T_1 = \{a_i\}_{1 \leq i \leq (\mathcal{G}:\mathcal{H})}$. Por construção, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{T_1} \subseteq \mathcal{H}$, logo $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{T_1}$.

Seja F um subconjunto finito de A e fixemos

$$\beta_g\left((T_1 \cup F)\, 1_{g^{-1}}\right) = \{\beta_g(x 1_{g^{-1}}) : x \in T_1 \cup F\}.$$

Então consideremos o conjunto:

$$T_2 = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \beta_g\left((T_1 \cup F)\, 1_{g^{-1}}\right) \cup T_1 \cup F \cup \{0\}.$$

Então, $F \subseteq T_2 \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}_{T_2}}}$. Note que $\beta_g(T_2 1_{g^{-1}}) \subseteq T_2 1_g$, para todo $g \in \mathcal{G}$. De fato, se $t \in \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \beta_g\left((T_1 \cup F)\, 1_{g^{-1}}\right)$, então existe $h \in \mathcal{G}$ e $a \in T_1 \cup F$ tal que $t = \beta_h(a 1_{h^{-1}})$. Então, para todo $g \in \mathcal{G}$, se $d(g) = r(h)$ temos que

$$\beta_g(t 1_{g^{-1}}) = \beta_g\left(\beta_h\left(a 1_{h^{-1}}\right) 1_g\right) = \beta_g\left(\beta_h\left(a 1_{h^{-1}}\right)\right) = \beta_{gh}\left(a 1_{(gh)^{-1}}\right).$$

Se $g \in \mathcal{G}$ é tal que $d(g) \neq r(h)$, então

$$\beta_g(t 1_{g^{-1}}) = \beta_g\left(\beta_h\left(a 1_{h^{-1}}\right) 1_g\right) = \beta_g(0) = 0.$$

Além disso, se $t \in T_1$ ou $t \in F$, então é imediato que $\beta_g(t 1_{g^{-1}}) \in T_2$. Portanto, pelo Lema 1.2.11, temos que $\mathcal{H}_{T_2}$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$. Agora, consideremos $\mathcal{L} = \{h \in \mathcal{H}_{T_2} : d(h) = r(h)\}$. Pelo Exemplo 1.2.9, $\mathcal{L}$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}_{T_2}$, temos que $F \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}_{T_2}}} \subseteq A^{\beta_{\mathcal{L}}}$. Provaremos que $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ é $\beta_{\mathcal{H}}$-admissível. Para tal, a Proposição 3.2.12 nos diz que $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ é um subanel β-admissível de A. Portanto, $A^{\beta} \subseteq A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ e a ação β restrita a $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ é β-independente, portanto é $\beta_{\mathcal{H}}$-independente. Resta mostrar que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um somando direto de $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ como $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$-módulo.

Como $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ é β-admissível, então $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ é β-independente e $S(A^{\beta_{\mathcal{L}}}) = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_{A^{\beta_{\mathcal{L}}}}\}$ é finito. Logo, pelo Lema 3.2.9 existe $c \in A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ tal que

$$\sum_{g \in S(A^{\beta_{\mathcal{L}}})} \beta_g(c1_{g^{-1}}) = 1_A. \tag{3.2}$$

Por outro lado, fixemos $\{h_j \in \mathcal{H} : 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})\}$ um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{L}$. Pelo Corolário 1.2.14 temos que $\{h_j^{-1} \in \mathcal{H} : 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L}\}$ também é um sistema de representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{H}$. Logo, pelo Lema 1.2.4 o conjunto $\{g_i h_j^{-1} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L}\}$ é um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{G}$. Além disso, novamente pelo Lema 1.2.11, temos que

$$\{h_j g_i^{-1} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}) \text{ e } 1 \leq j \leq (\mathcal{H} : \mathcal{L})\}$$

também é um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{G}$. Portanto, pelo Lema 3.2.7, temos que $S(A^{\beta_{\mathcal{L}}}) = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_{A^{\beta_{\mathcal{L}}}}\} = \{\beta_{h_j g_i^{-1}} \circ 1_{(h_j g_i^{-1})^{-1}}|_{A^{\beta_{\mathcal{L}}}}\}$. Com isto e por (3.2)

$$\sum_{h_j g_i^{-1} \in \mathcal{G}} \beta_{h_j g_i^{-1}}(c1_{(h_j g_i^{-1})^{-1}}) = \sum_{g \in \mathcal{G}} \beta_g(c1_{g^{-1}}) = 1_A.$$

Fixemos $b = \sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i^{-1}}(c1_{g_i})$ e vejamos que $b \in A^{\beta_{\mathcal{L}}}$. De fato, se $l \in \mathcal{L}$, como $\mathcal{L}$ é um subgrupoide normal formado pela união disjunta de grupos, então pelo Lema 1.2.12, $\mathcal{L}g_i^{-1} = g_i^{-1}\mathcal{L}$. Logo, existe $l_i \in \mathcal{L}$ tal que $lg_i^{-1} = g_i^{-1}l_i$, para todo $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$, onde $r(l_i^{-1}) = d(g_i^{-1})$. Com isto e utilizando o Lema 2.1.1 temos que

$$\beta_l\left(b1_{l^{-1}}\right) = \beta_l\left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i^{-1}}(c1_{g_i})1_{l^{-1}}\right) = \sum_{r(g_i^{-1})=d(l)} \beta_{lg_i^{-1}}(c1_{(lg_i^{-1})^{-1}})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{d(g_i^{-1})=r(l_i)} \beta_{g_i^{-1}l_i}(c1_{(g_i^{-1}l_i)^{-1}}) = \sum_{d(g_i^{-1})=r(l_i)} \beta_{g_i^{-1}}\left(\beta_{l_i}(c1_{l_i^{-1}})1_{g_i}\right) \\
&= \sum_{d(g_i^{-1})=r(l_i)} \beta_{g_i^{-1}}\left(c1_{l_i}1_{g_i}\right) = \sum_{r(g_i^{-1})=d(l)} \beta_{g_i^{-1}}\left(c1_{g_i}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i^{-1}}(c1_{g_i})\right) 1_l = b1_l.
\end{aligned}
$$

Portanto, $b \in A^{\beta_{\mathcal{L}}}$. Dessa forma, $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ é um subanel tal que $S(A^{\beta_{\mathcal{L}}}) = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_{A^{\beta_{\mathcal{L}}}}\}$ é finito e $b \in A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ é tal que $tr_{S(A^{\beta_{\mathcal{L}}})}(b) = 1_A$. Portanto, pelo Lema 2.2.6, $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um somando direto de $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ como $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$-módulo à esquerda. Portanto, F é um subconjunto finito qualquer de A e $A^{\beta_{\mathcal{L}}}$ é $\beta_{\mathcal{H}}$-admissível tal que $F \subseteq A^{\beta_{\mathcal{L}}}$. Ou seja, A é um $K_{\beta_{\mathcal{H}}}$-anel. $\square$

Proposição 3.2.14. *Sejam A um K_β-anel e B um subanel β-admissível de A. Então, $B = A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$ e B é finitamente gerado como A^β-módulo à esquerda e projetivo.*

Demonstração. Primeiramente, se $b \in B$ então trivialmente $\beta_h(b1_{h^{-1}}) = b1_h$, para todo $h \in \mathcal{H}_B$. Logo, $B \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$.

Note que, como B é β-admissível existem $(x_j, y_j) \in B \times A$, onde $1 \le j \le n$, tais que $\sum_{j=1}^n y_j\beta_g(x_j1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_e$, para todo $g \in S(B)$, onde $S(B) = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ são todos distintos.

Fixemos o conjunto $\{y_j : 1 \le j \le n\}$. Pelo Lema 3.2.13 temos que A é um $K_{\beta_{\mathcal{H}_B}}$-anel, portanto existe um subanel $\beta_{\mathcal{H}_B}$-admissível B_1 de A satisfazendo $\{y_i : 1 \le j \le n\} \subseteq B_1$. Como A é $K_{\beta_{\mathcal{H}_B}}$-anel e B_1 é $\beta_{\mathcal{H}_B}$-admissível, pela Proposição 3.2.9 existe $c \in B_1$ tal que

$$\sum_{h\in S(B)_{\mathcal{H}_B}} \beta_h(c1_{h^{-1}}) = 1_A,$$

onde $S(B)_{\mathcal{H}_B} = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_{B_1}\}_{g\in\mathcal{H}_B}$ é finito. Note que, $c, y_j \in B_1$, para todo $1 \le j \le n$, então fixando $z_j = \sum_{h\in S(B)_{\mathcal{H}_B}} \beta_h(cy_j1_{h^{-1}})$, o Lema 3.2.6 nos diz que $z_j \in A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$

para todo $1 \leq j \leq n$. Agora, se $\{g_i : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)\}$ é um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}_B$ em $\mathcal{G}$, onde as classes que contêm as identidades são representadas pelas mesmas. Vejamos que vale:

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \beta_{g_i}(x_j 1_{g^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g_i} 1_e. \tag{3.3}$$

para todo $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)$. Com efeito, se $g_i = e \in \mathcal{G}_0$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} z_j \beta_e(x_j 1_e) &= \sum_{j=1}^{n} z_j x_j 1_e = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{h \in S(B)_{\mathcal{H}_B}} \beta_h\left(c y_j 1_{h^{-1}}\right) \right) x_j 1_e \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{h \in S(B)_{\mathcal{H}_B}} \beta_h\left(c y_j 1_{h^{-1}}\right) x_j 1_e = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r(h)=e} \beta_h\left(c y_j 1_{h^{-1}}\right) x_j 1_e \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{r(h)=e} \beta_h\left(c y_j 1_{h^{-1}}\right) \beta_h(x_j 1_{h^{-1}}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r(h)=e} \beta_h\left(c y_j x_j 1_{h^{-1}}\right) \\
&= \sum_{r(h)=e} \beta_h \left(c \left(\sum_{j=1}^{n} y_j x_j 1_{h^{-1}} \right) \right) = \sum_{r(h)=e} \beta_h \left(c \left(\sum_{f \in \mathcal{G}_0} \delta_{f,h^{-1}} 1_{h^{-1}} \right) \right) \\
&= \sum_{r(h)=e} \beta_h\left(c 1_{h^{-1}}\right) \left(\sum_{f \in \mathcal{G}_0} \delta_{f,e} 1_e \right) = \left(\sum_{r(h)=e} \beta_h\left(c 1_{h^{-1}}\right) \right) \left(\sum_{f \in \mathcal{G}_0} \delta_{f,e} 1_e \right) \\
&= \left(\sum_{h \in S(B)_{\mathcal{H}_B}} \beta_h\left(c 1_{h^{-1}}\right) \right) \left(\sum_{f \in \mathcal{G}_0} \delta_{f,e} 1_e \right) = 1_A \left(\sum_{f \in \mathcal{G}_0} \delta_{f,e} 1_e \right) \\
&= \sum_{f \in \mathcal{G}_0} \delta_{f,e} 1_e.
\end{aligned}$$

Seja g_i é um representante tal que $g_i \in \mathcal{G} - \mathcal{G}_0$. Note que, para todo $h \in \mathcal{H}_B$ temos que $\beta_h(c y_i 1_{h^{-1}}) \beta_{g_i}(x_i 1_{g_i^{-1}}) \in E_h \cap E_{g_i} = E_{r(h)} \cap E_{r(g_i)}$. Se $r(h) \neq r(g_i)$, então $\beta_h(c y_i 1_{h^{-1}}) \beta_{g_i}(x_i 1_{g_i^{-1}}) = 0$. Por outro lado, no caso em que $r(h) = r(g_i)$ temos que $g_i = r(g_i) g_i = r(h) g_i = h h^{-1} g_i$ e $h^{-1} g_i \notin \mathcal{H}_B$, pois caso contrário $h^{-1} g_i = h' \in \mathcal{H}_B$, logo $g_i = h h' \in \mathcal{H}_B$ e nesse caso como as identidades são representadas pelas mesmas, teríamos que $g_i \in \mathcal{G}_0$ o que não ocorre pela escolha feita. Assim,

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \beta_{g_i}(x_j 1_{g_i^{-1}}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{h \in S(B)_{\mathcal{H}_B}} \beta_h(c y_j 1_{h^{-1}}) \beta_{g_i}(x_j 1_{g_i^{-1}}) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r(h)=r(g_i)} \beta_h(cy_j 1_{h^{-1}}) \beta_{hh^{-1}g_i}(x_j 1_{g_i^{-1}}) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r(h)=r(g_i)} \beta_h \left(cy_j 1_{h^{-1}}\right) \beta_h \left(\beta_{h^{-1}g_i} \left(x_j 1_{g_i^{-1}}\right)\right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r(h)=r(g_i)} \beta_h \left(cy_j 1_{h^{-1}} \beta_{h^{-1}g_i} \left(x_j 1_{g_i^{-1}}\right)\right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\beta_h \left(\sum_{r(h)=r(g_i)} cy_j \beta_{h^{-1}g_i} \left(x_j 1_{(h^{-1}g_i)^{-1}}\right) \right) \right) \\
&= \sum_{r(h)=r(g_i)} \left(\beta_h \left(c \sum_{j=1}^{n} y_j \beta_{h^{-1}g_i} \left(x_j 1_{(h^{-1}g_i)^{-1}}\right) \right) \right) \\
&= \sum_{r(h)=r(g_i)} \left(\beta_h \left(0\right)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Com as relações e notações acima, fixemos as aplicações $f_j : A^{\beta_{\mathcal{H}_B}} \to A^{\beta}$ definidas por $f_j(b) = \sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i}(bz_j 1_{g_i^{-1}})$, para todo $1 \leq j \leq n$. Note que cada f_j esta bem definida pelo Lema 3.2.6.

Além disso, é de imediata verificação que cada f_j é um homomorfismo de A^{β}-módulos à esquerda. Agora, para todo $b \in A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$, usando 3.3, temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} f_j(b) x_j &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i}(bz_j 1_{g_i^{-1}}) \right) x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i}(bz_j 1_{g_i^{-1}}) x_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i}(bz_j 1_{g_i^{-1}}) \beta_{g_i} \left(\beta_{g_i^{-1}} \left(x_j 1_{g_i}\right)\right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i} \left(bz_j \beta_{g_i^{-1}} \left(x_j 1_{g_i}\right)\right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i} \left(b 1_{g_i^{-1}}\right) \beta_{g_i} \left(z_j \beta_{g_i^{-1}} \left(x_j 1_{g_i}\right)\right) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H})} \beta_{g_i}\left(b1_{g_i^{-1}}\right)\beta_{g_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(z_j\beta_{g_i^{-1}}(x_j1_{g_i})\right)\right)\\
&= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \beta_e(b1_e)\beta_e\left(\sum_{j=1}^{n} z_jx_j1_e\right)\\
&= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} b1_e\left(\sum_{j=1}^{n} z_jx_j1_e\right)\\
&= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} b1_e\left(\sum_{f\in\mathcal{G}_0} \delta_{f,e}1_f\right)\\
&= b\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} 1_e\right)\\
&= b1_A = b.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, $\sum_{i=1}^{n} f_j(b)x_j \in B$, pois $f_j(b) \in A^{\beta}$ e $x_j \in B$. Portanto, $B = A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$ e B é finitamente gerado e projetivo como $A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$-módulos à esquerda. $\square$

Proposição 3.2.15. *Se A um K_{β}-anel e $\mathcal{H}$ é um subgrupoide estritamente normal de $\mathcal{G}$, então existe uma ação $\overline{\beta}$ de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ em $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ tal que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um $K_{\overline{\beta}}$-anel.*

Demonstração. Definimos a ação $\overline{\beta} = (\{E_{\overline{g}}\}_{\overline{g}\in\mathcal{G}/\mathcal{H}}, \{\beta_{\overline{g}}\}_{\overline{g}\in\mathcal{G}/\mathcal{H}})$, onde $E_{\overline{g}} = E_g \cap A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ e $\beta_{\overline{g}} : E_{\overline{g^{-1}}} \to E_{\overline{g}}$ é definida por $\beta_{\overline{g}}(a) = \beta_g(a)$, para quaisquer $\overline{g} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ e $a \in E_{\overline{g^{-1}}}$. A prova de que a ação $\overline{\beta}$ esta bem definida é análoga a feita na prova de 2.3.8. Assim como a prova de que $(A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\overline{\beta}} = (A^{\beta_{\mathcal{H}}})^{\beta} = A^{\beta}$. Resta provar que $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um $K_{\overline{\beta}}$-anel.

Seja F um subconjunto finito de $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$. Note que $F \subseteq A$ e A é um K_{β}-anel, então existe um subanel β-admissível B de A tal que $F \subseteq B$. Logo, pelo Lema 1.1.20 temos que $\mathcal{H}_B \subseteq \mathcal{H}_F$, então pelo Lema 3.2.11 o anel $A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}$ é um subanel β-admissível de A.

Vamos provar que $A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}$ é um subanel $\overline{\beta}$-admissível de $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$. Como $A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}$ é um subanel β-admissível de A, então $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_F)$ é finito e com isso podemos considerar

$\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}_F)\}$ um sistema de representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}_F$ em $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{H}_F$ é β-admissível, usando o Lema 3.2.7, existem $(x_j, y_j) \in A^{\beta_{\mathcal{H}_F}} \times A$, onde $1 \leq j \leq n$ tais que $\sum_{j=1}^{n} y_j \beta_{g_i}(x_j 1_{g_i^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g_i} 1_e$. Observando que, como $F \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ então $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_F$, logo $A^{\beta_{\mathcal{H}_F}} \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}}}$. Com isso, seguindo argumento estritamente análogo ao feito na Proposição 3.2.14, apenas trocando $\mathcal{H}_B$ por $\mathcal{H}_F$, temos que existe $z_j \in A^{\beta_{\mathcal{H}_F}} \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ para todo $1 \leq j \leq n$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \beta_{g_i}(x_j 1_{g^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g_i} 1_e. \tag{3.4}$$

para todo $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}_F)$. Vamos mostrar que $A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}$ é $\overline{\beta}$-independente. Para tal, seja $S(A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}) = \{\beta_{\overline{g}} \circ 1_{\overline{g}^{-1}}|_{A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}}\}$ todos distintos. Seja $\beta_{\overline{e}} \circ 1_{\overline{e}}|_{A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}} \in S(A^{\beta_{\mathcal{H}_F}})$, para algum $\overline{e} \in (\mathcal{G}/\mathcal{H})_0$. Então, como $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_F$, por (3.4) temos que

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \beta_{\overline{e}}(x_j 1_{\overline{e}}) = \sum_{j=1}^{n} z_j x_j 1_e = \sum_{f \in \mathcal{G}_0} \delta_{f,e} 1_e.$$

Se $\beta_{\overline{g}} \circ 1_{\overline{g^{-1}}}|_{A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}} \neq \beta_{\overline{e}} \circ 1_{\overline{e}}$, então $g \notin \mathcal{H}$ e nesse caso $g \notin \mathcal{H}_F$, pois caso contrário, $\beta_{\overline{g}} \circ 1_{\overline{g^{-1}}}|_{A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}} = \beta_{\overline{e}} \circ 1_{\overline{e}}$, o que é uma contradição. Logo, como $g \in \mathcal{G} - \mathcal{H}_F$, temos que $g = g_i h$, para algum $h \in \mathcal{H}_F$ tal que $r(h) = d(g_i)$ e $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}_F)$. Assim, por (3.4)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} z_j \beta_{\overline{g}}(x_j 1_{\overline{g^{-1}}}) &= \sum_{j=1}^{n} z_j \beta_g(x_j 1_{g^{-1}}) = \sum_{j=1}^{n} z_j \beta_{g_i h}(x_j 1_{gh^{-1}}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} z_j \beta_{g_i}(\beta_h(x_j 1_{h^{-1}}) 1_{g^{-1}}) = \sum_{j=1}^{n} z_j \beta_{g_i}(x_j 1_{g_i^{-1}}) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}$ é $\overline{\beta}$-admissível. Além disso, observamos que o raciocínio feito acima nos diz que para todo $\beta_{\overline{g}} \circ 1_{\overline{g}^{-1}}|_{A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}} \in S(A^{\beta_{\mathcal{H}_F}})$, existe $g_i \in \mathcal{G}$ um representante de $\mathcal{H}_F$ sobre $\mathcal{G}$ tal que $\beta_{\overline{g}} \circ 1_{\overline{g^{-1}}}|_{A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}} = \beta_{g_i} \circ 1_{g_i^{-1}}$, portanto $S(A^{\beta_{\mathcal{H}_F}})$ é finito.

□

3.2.2 Teorema de correspondência de Galois

Nesta subseção usaremos os conceitos e resultados exibidos ao longo do Capítulo 3 para apresentar um teorema de correspondência entre os subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ que são fechados com relação a topologia finita, e os K_β-subanéis de A.

Lembremos que, no final da subseção 3.1.2, provamos que, dado um grupoide $\mathcal{G}$, o seu fecho $\overline{\mathcal{G}}$ também possui uma estrutura de grupoide quando consideramos os isomorfismos parciais $\varphi|_{E_e} \in \overline{\mathcal{G}}$. Por se tratar de um grupoide composto por isomorfismos parciais, este define naturalmente uma ação $\beta^* = \{\{E_g\}_{g\in\overline{\mathcal{G}}}, \{\beta_g\}_{g\in\overline{\mathcal{G}}}\}$ de $\overline{\mathcal{G}}$ em A de forma natural. O resultado a seguir mostra que a propriedade de ser K_β-anel se mantém ao considerarmos a ação dada pelo fecho $\overline{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$.

Proposição 3.2.16. *Se A é um K_β-anel, então A é um K_{β^*}-anel.*

Demonstração. Seja F um subconjunto finito de A. Como A é um K_β-anel, então existe um subanel β-admissível B de A tal que $F \subseteq B$. Vamos mostrar que o anel B é β^*-admissível. Começaremos mostrando que $A^{\beta^*} = A^\beta$. Primeiramente, como $\mathcal{G} \subseteq \overline{\mathcal{G}}$, a Proposição 1.1.20 nos diz que $A^{\beta^*} \subseteq A^\beta$. Reciprocamente, suponhamos que $a \in A^\beta$ e $g \in \overline{\mathcal{G}}$. Note que existem $e, f \in \mathcal{G}_0$ tais que $\beta_g \circ 1_{g^{-1}} \in \overline{\mathcal{G}_{e,f}}$. Se $g \in \mathcal{G}_{e,f}$, não há o que fazer. Se $g \in (\mathcal{G}_{e,f})'$, fixemos $\{a1_{g^{-1}}\} \subseteq E_e$. Então existe $h \in \mathcal{G}_{e,f}$ tal que $\beta_h \circ 1_{h^{-1}} \in (\beta_g \circ 1_{g^{-1}}) + U_{\{a1_{g^{-1}}\}}$. Logo,

$$\beta_g(a1_{g^{-1}}) = \beta_g(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}}) = \beta_h(a1_{g^{-1}}1_{h^{-1}}) = \beta_h(a1_{h^{-1}}).$$

Por outro lado, como $a \in A^\beta$, então $\beta_g(a1_{g^{-1}}) = \beta_h(a1_{h^{-1}}) = a1_h = a1_g$. Logo, $a \in A^{\beta^*}$. Portanto, $A^\beta = A^{\beta^*}$.

Este fato prova o primeiro e o terceiro item da Definição 2.2.1, de β-admissível, pois $A^{\beta^*} = A^\beta \subseteq B$ e A^{β^*} é somando direto de B como A^{β^*}-módulo à esquerda. Resta verificar o item (ii) da Definição 2.2.1. Seja $S \subseteq \mathcal{G}$ tal que $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}_{g\in S}$

são todos distintos. Como B é β-admissível, $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}_{g\in S}$ é finito e existem $(x_i, y_i) \in B \times A$, onde $1 \leq i \leq n$, tais que

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g} 1_e, \tag{3.5}$$

para todo $g \in S$. Agora, seja $T \subseteq \overline{\mathcal{G}}$ tal que $\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h\in T}$ são todos distintos. Se $h \in T$ e $h \in \mathcal{G}_0$, então por (3.5) temos que $\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_h(x_i 1_{h^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,h} 1_e$. Se $h \notin \mathcal{G}_0$, então existe $b \in E_{d(h)} \cap B$ tal que $\beta_h(b1_{h^{-1}}) \neq b1_h$. Além disso, existem $f, l \in \mathcal{G}_0$ tais que $h \in \overline{\mathcal{G}_{f,p}}$. Dessa forma, considerando o conjunto finito $X = \{x_i \in A : 1 \leq i \leq n\} \cup \{b\}$ de A, temos que existe $g \in \mathcal{G}_{f,p}$ tal que $\beta_g \circ 1_{g^{-1}} \in (\beta_h \circ 1_{h^{-1}}) + U_X$. Como $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}_{g\in S}$ é finito, a menos de uma troca de índices, temos que $\beta_g \circ 1_{g^{-1}} \in (\beta_h \circ 1_{h^{-1}}) + U_X$, ou seja, $\beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) = \beta_h(x_i 1_{h^{-1}})$, para $1 \leq i \leq n$ e $\beta_g(b1_{g^{-1}}) = \beta_h(b1_{h^{-1}}) \neq b1_h$. Logo, por (3.5),

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_h(x_i 1_{h^{-1}}) = \sum_{i=1}^{n} y_i\beta_g(x_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g} 1_e = 0.$$

Então $\sum_{i=1}^{n} y_i\beta_h(x_i 1_{h^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,h} 1_e$, para todo $h \in T$.

Por fim, mostremos que $\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h\in\overline{\mathcal{G}}}$ é finito. Como $\mathcal{G} \subseteq \overline{\mathcal{G}}$, então $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}_{g\in\mathcal{G}} \subseteq \{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h\in\overline{\mathcal{G}}}$. Usando o Lema 3.2.7 e fixando $\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)\}$ um sistema de representantes para as classes laterais à esquerda, temos que $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}_{g\in\mathcal{G}} = \{\beta_{g_i} \circ 1_{g_i^{-1}}|_B\}_{g_i\in\mathcal{G}} \subseteq \{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h\in\overline{\mathcal{G}}}$. Vamos supor que a cardinalidade de $\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h\in\overline{\mathcal{G}}}$ é maior que $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_B) = n$. Nesse caso, existem pelo menos $n + 1$ aplicações distintas em $\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h\in\overline{\mathcal{G}}}$. Ou ainda, existem $\beta_l \circ 1_{l^{-1}}|_B$ e $\{b_i \in B : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ tais que $\beta_l(b_i 1_{l^{-1}}) \neq \beta_{g_i}(b_i 1_{g_i^{-1}})$, para cada $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$. Agora, sendo $\{b_i \in B : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})\}$ um subconjunto finito de A, existem $e, f \in \mathcal{G}_0$ e $p \in \mathcal{G}_{e,f}$ tais que $\beta_p \circ 1_{p^{-1}} \in (\beta_l \circ 1_{l^{-1}}) + U_{b_i}$, ou seja, $\beta_l(b_i 1_{l^{-1}}) = \beta_p(b_i 1_{p^{-1}})$. Mas neste caso $\beta_p(b_i 1_{p^{-1}}) \neq \beta_{g_i}(b_i 1_{g_i^{-1}})$, para cada $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$. Então, $\beta_p \circ 1_{p^{-1}}|_B \notin \{\beta_{g_i} \circ 1_{g_i^{-1}}|_B\}_{g_i\in\mathcal{G}}$ o que é um absurdo. Portanto, $\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h\in\overline{\mathcal{G}}}$ é finito. Logo, B é β^*-admissível e A é um K_{β^*}-anel. $\square$

Proposição 3.2.17. *Se A for um K_{β^*}-anel, então $\overline{\mathcal{G}}$ é compacto em End(A) com relação a topologia finita.*

Demonstração. Fixemos $a \in A$ e o conjunto $T_a = \{\beta_g(a1_{g^{-1}}) : g \in \mathcal{G}\}$. Observemos que T_a é um conjunto finito. Com efeito, o conjunto unitário $\{a\}$ é um subconjunto de A, que por sua vez é um K_{β^*}-anel. Portanto, existe um subanel β^*-admissível B tal que $\{a\} \subseteq B$. Logo, o conjunto $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}_{g\in\overline{\mathcal{G}}}$ tal que todas as aplicações são distintas deve ser finito. Dessa forma, temos que T_a é finito. Com isto, pelo Lema 3.1.20 temos que T_a é compacto com a topologia discreta apresentada no Exemplo 3.1.3. Mais ainda, o espaço produto $\prod_{a\in A} T_a$ por sua vez é compacto pelo Teorema 3.1.22. Usaremos $\prod_{a\in A} T_a$ para mostrar a tese desta proposição. Utilizando a notação apresentada na Definição 3.1.9 de produto cartesiano, escrevemos

$$\begin{aligned}\prod_{a\in A} T_a &= \left\{x : A \to \bigcup_{a\in A} T_a : x(a) \in T_a, \forall a \in A\right\}\\ &= \left\{x : A \to \bigcup_{a\in A} T_a : x(a) = \beta_g(a1_{g^{-1}}),\ \text{para quaisquer } a \in A \text{ e } g \in \overline{\mathcal{G}}\right\}.\end{aligned}$$

Com esta notação, podemos ver $\overline{\mathcal{G}}$ como um subconjunto de $\prod_{a\in A} T_a$ da seguinte forma,

$$\overline{\mathcal{G}} = \left\{x : A \to \bigcup_{a\in A} T_a : x(a) = \beta_g(a1_{g^{-1}}), \forall a \in A \text{ e algum } g \in \overline{\mathcal{G}}\right\} \subseteq \prod_{a\in A} T_a.$$

No entanto, existe uma sutileza na inclusão acima. O conjunto $\overline{\mathcal{G}}$ é o fecho de $\mathcal{G}$ em End(A) com a topologia finita. Dessa forma, por motivos de clareza, denotaremos por G quando estivermos considerando $\overline{\mathcal{G}}$ como um subconjunto de $\prod_{a\in A} T_a$ com a topologia produto. E reservaremos a notação $\overline{\mathcal{G}}$ quando estivermos considerando este como subconjunto de End(A) com a topologia finita.

Com essa notação, consideramos a função identidade $id : G \to \overline{\mathcal{G}}$. Vamos mostrar que id é contínua. Para isto, mostraremos que a imagem inversa de abertos em $\overline{\mathcal{G}}$ são abertos em G. Com efeito, se $E \subseteq \overline{\mathcal{G}}$ é um aberto, pelo Teorema 3.1.12, temos que para todo $h \in E$, h é um ponto interior, ou seja, existe um subconjunto finito $F_h \subseteq A$ tal que $(\beta_h \circ 1_{h^{-1}}) + U_{F_h} \subseteq E$. Dessa forma, para cada $h \in E$ defina o conjunto $\prod_{b\in A} P_b^h$, onde

$$P_b^h = \begin{cases} \{\beta_h(b1_{h^{-1}})\}, \text{ se } b \in F_h \\ P_b = T_b, \text{ c.c.} \end{cases}$$

Com isso, fixemos $P = \bigcup_{h\in E} \left(\prod_{b\in A} P_b^h\right)$. Note que, pela Definição 3.1.10, cada $\prod_{b\in A} P_b^h$ é um aberto de $\prod_{a\in A} T_a$ e como a união qualquer de abertos é aberto, temos que P é um aberto de $\prod_{a\in A} T_a$. Portanto, $P \cap G$ é um aberto relativo em G (Definição 3.1.2) tal que $id(P \cap G) = E$. De fato, se $x \in P \cap G$, como $x \in G$, temos que $x = \beta_l \circ 1_{l^{-1}}$, para algum $l \in G$. Como $x \in P$, existe $h \in E$ tal que $x \in \prod_{b\in A} P_b^h$, ou ainda, $\beta_l(b1_{l^{-1}}) = \beta_h(b1_{h^{-1}}), b \in F_h$, ou seja, $(\beta_l \circ 1_{l^{-1}}) \in (\beta_h \circ 1_{h^{-1}}) + U_{F_h} \subseteq E$.

Para a inclusão contrária, basta observar que para todo $h \in E$, temos que $\beta_h \circ 1_{h^{-1}} \in P \cap G$. Logo, $id(P \cap G) = E$. Portanto, a imagem inversa de abertos de $\overline{\mathcal{G}}$ com a topologia finita são abertos em G com a topologia produto. Assim, id é contínua.

Por fim, como $\overline{\mathcal{G}}$ é fechado e id é sobrejetora e contínua, pelo Teorema 3.1.24, temos que G é fechado no compacto $\prod_{a\in A} T_a$. Então, pela Proposição 3.1.21, temos que G é compacto. Logo, pelo Teorema 3.1.25 temos que $\overline{\mathcal{G}}$ é compacto com a topologia finita.

$\square$

A partir deste momento, fixaremos $\mathcal{G}$ um grupoide fechado com a topologia finita. Ou seja, $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{G}}$.

Proposição 3.2.18. *Seja A um K_β-anel. Se B é um subanel de A, então $\mathcal{H}_B$ é um subgrupoide amplo e fechado de $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.1.19, temos que $\mathcal{H}_B$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Mostraremos que $\mathcal{H}_B$ é fechado. Note que, como $\mathcal{H}_B = \bigcup_{e,f\in\mathcal{G}_0}(\mathcal{H}_B)_{e,f}$, basta provar que cada $(\mathcal{H}_B)_{e,f}$ é fechado, para todo $e, f \in \mathcal{G}_0$.

Seja $\phi \in ((\mathcal{H}_B)_{e,f})'$. Como $((\mathcal{H}_B)_{e,f})' \subseteq \overline{\mathcal{G}_{e,f}}$, temos que $\phi = \beta_h \circ 1_{h^{-1}}$. Vamos mostrar que $\beta_h(b1_{h^{-1}}) = b1_h$, para todo $b \in B$. Com efeito, para todo $b \in B$, para o conjunto unitário $\{b\} \subseteq A$ existe $l \in (\mathcal{H}_B)_{e,f}$ tal que $\beta_l \circ 1_{l^{-1}} \in \beta_h \circ 1_{h^{-1}} + U_{\{b\}}$, então

$$\beta_h(b1_{h^{-1}}) = \beta_l(b1_{l^{-1}}) = b1_l = b1_h.$$

Logo, $(\mathcal{H}_B)_{e,f} = \overline{(\mathcal{H}_B)_{e,f}}$, portanto

$$\mathcal{H} = \bigcup_{e,f\in\mathcal{G}_0}(\mathcal{H}_B)_{e,f} = \bigcup_{e,f\in\mathcal{G}_0}\overline{(\mathcal{H}_B)_{e,f}} = \overline{\mathcal{H}}.$$

$\square$

Proposição 3.2.19. *Seja A um K_β-anel. Então, para todo subgrupoide amplo e fechado $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, temos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A^{\beta_\mathcal{H}}}$.*

Demonstração. Dado $\mathcal{H}$ subgrupoide amplo e fechado de $\mathcal{G}$, note que se provarmos que $\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{H}_{A^{\beta_\mathcal{H}}}$, como por hipótese $\mathcal{H}$ é fechado, então $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A^{\beta_\mathcal{H}}}$.

Agora, $\mathcal{H}$ ser denso em $\mathcal{H}_{A^{\beta_\mathcal{H}}}$, significa que para todo subconjunto finito $F \subseteq A$ e $\beta_g \circ 1_{g^{-1}} \in \mathcal{H}_{A^{\beta_\mathcal{H}}}$, existe $\beta_h \circ 1_{h^{-1}} \in \mathcal{H}$ tal que $\beta_h \circ 1_{h^{-1}} \in \beta_g \circ 1_{g^{-1}} + U_F$. A seguir, vamos provar que $\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{H}_{A^{\beta_\mathcal{H}}}$.

Seja $F \subseteq A$ um conjunto finito. Como A é K_β-anel, existe um subanel β-admissível B de A tal que $F \subseteq B$. Pelo Lema 3.2.7 temos que $S(B) = \{\beta_{g_i} \circ 1_{g_i^{-1}}|_B\}$ é finito, onde $\{g_i \in \mathcal{G} : 1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)\}$ é um sistema de representantes das classes laterais à esquerda de $\mathcal{H}_B$ em $\mathcal{G}$. Com estas notações, fixemos

$$T = \left\{ \bigcup_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H}_B)} \beta_{g_i}(F1_{g_i^{-1}}) \right\} \cup F \cup \{0\}.$$

Note que T é invariante pela ação de $\mathcal{G}$. De fato, se $t \in \bigcup_{i=1}^{(\mathcal{G}:\mathcal{H}_B)} \beta_{g_i}(F1_{g_i^{-1}})$, então $t = \beta_{g_i}(b1_{g_i^{-1}})$, para algum $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)$ e $b \in F$. Se $d(g) = r(g_i)$, então $gg_i = g_jh$, para algum $1 \leq j \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H})$ e $h \in \mathcal{H}_B$. Logo,

$$\begin{aligned}\beta_g(t1_{g^{-1}}) &= \beta_g\left(\beta_{g_i}\left(b1_{g_i^{-1}}\right)1_g\right) = \beta_g\left(\beta_{g_i}\left(b1_{g_i^{-1}}\right)\right) = \beta_{gg_i}\left(b1_{(gg_i)^{-1}}\right)\\ &= \beta_{g_jh}\left(b1_{(g_jh)^{-1}}\right) = \beta_{g_j}\left(\beta_h\left(b1_{h^{-1}}\right)1_{g_j}\right) = \beta_{g_jh}\left(b1_{(g_jh)^{-1}}\right)\\ &= \beta_{g_j}\left(b1_h1_{g_j}\right) = \beta_{g_j}\left(b1_{g_j}\right).\end{aligned}$$

Assim, $\beta_g(t1_{g^{-1}}) = \beta_{g_j}\left(b1_{g_j^{-1}}\right) \in T$. Se $g \in \mathcal{G}$ é tal que $d(g) \neq r(h)$, temos que

$$\beta_g(t1_{g^{-1}}) = \beta_g\left(\beta_{g_i}\left(b1_{g_i^{-1}}\right)1_g\right) = \beta_g(0) = 0.$$

Então, $\beta_g(t1_{g^{-1}}) = 0 \in T$. Se $b \in F$, como $\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B = \beta_{g_i} \circ 1_{g_i^{-1}}|_B$, para algum $1 \leq i \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)$, segue que $\beta_g(b1_{g^{-1}}) \in T$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Portanto, pelo Lema 1.2.11, $\mathcal{H}_T = \{g \in \mathcal{G} : \beta_g(t1_{g^{-1}}) = t1_g, t \in T\}$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$. Com isso, pelo Exemplo 1.2.9, temos que o subgrupoide $\tilde{\mathcal{H}}_T = \{h \in \mathcal{H}_T : d(h) = r(h)\}$ formado pela união de seus grupos de isotropia de $\mathcal{H}_T$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{H}_T$.

Observe que, uma vez que F e $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)$ são finitos, então T é um conjunto finito e como $\mathcal{G}_0$ é finito, então $T' = \{t1_e : t \in T \text{ e } e \in \mathcal{G}_0\}$ é finito. Além disso, $\mathcal{H}_{T'} = \tilde{\mathcal{H}}_T$. Com efeito, se $h \in \mathcal{H}_{T'}$ então

$$\beta_h(t1_{h^{-1}}) = \beta_h((t1_{h^{-1}})1_{h^{-1}}) = (t1_{h^{-1}})1_h, \tag{3.6}$$

para todo $t \in T$. Note que se $t1_{h^{-1}} = 0$ a igualdade acima se verifica. Por outro lado, $t1_{h^{-1}} \neq 0$ se e somente se $d(h) = r(h)$. De fato, por β_h ser uma bijeção e por (3.6), temos que

$$t1_{h^{-1}} \neq 0 \Leftrightarrow \beta_h(t1_{h^{-1}}) \neq 0 \Leftrightarrow (t1_{h^{-1}})1_h \neq 0 \Leftrightarrow d(h) = r(h).$$

Então, a partir de (3.6), temos que $\beta_h(t1_{h^{-1}}) = (t1_{h^{-1}})1_h = (t1_h)1_h = t1_h$, para todo $t \in T$. Logo, $h \in \tilde{\mathcal{H}}_T$. Reciprocamente, se $h \in \tilde{\mathcal{H}}_T$ e $t' \in T$, então $t' = t1_e$

para algum $e \in \mathcal{G}_0$. Se $e \neq d(h)$, como $\tilde{\mathcal{H}}_T$ é a união de grupos de isotropia, então $e \neq r(h)$ e nesse caso $\beta_h(t'1_{h^{-1}}) = \beta_h(t1_e1_{h^{-1}}) = \beta_h(0) = 0 = t'1_h$. Se $e = d(h)$, como $\tilde{\mathcal{H}}_T$ é união de grupos de isotropia, então $e = r(h)$ e nesse caso

$$\beta_h(t'1_{h^{-1}}) = \beta_h(t1_e1_{h^{-1}}) = \beta_h(t1_{h^{-1}}) = t1_h = t'1_h.$$

Logo, $h \in \mathcal{H}_{T'}$.

Por outro lado, como T' é finito, existe um subanel β-admissível C de A tal que $T' \subseteq C$. Então, pelo Lema 1.1.20, temos que $\mathcal{H}_C \subseteq \mathcal{H}_{T'}$. Mais ainda, como C é β-admissível, então $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_{T'}) \leq (\mathcal{G} : \mathcal{H}_C) < \infty$. Ou seja, $\mathcal{H}_{T'}$ tem índice finito em $\mathcal{G}$. Portanto, $\tilde{\mathcal{H}}_T$ tem indíce finito em $\mathcal{G}$. Então, pela Proposição 3.2.15, temos que $\mathcal{G}/\tilde{\mathcal{H}}_T$ define uma ação em $A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}$ dada por $\overline{\beta} = \{\{E_{\overline{g}}\}_{\overline{g} \in \mathcal{G}/\tilde{\mathcal{H}}_T}, \{\beta_{\overline{g}}\}_{\overline{g} \in \mathcal{G}/\tilde{\mathcal{H}}_T}\}$, onde $E_{\overline{g}} = E_g \cap A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}$ e $\beta_{\overline{g}} : E_{\overline{g^{-1}}} \to E_{\overline{g}}$ é definida por $\beta_{\overline{g}}(a) = \beta_g(a)$, para todo $\overline{g} \in \mathcal{G}/\tilde{\mathcal{H}}_T$ e $a \in E_{\overline{g^{-1}}}$. Além disso, $A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}$ é um $K_{\overline{\beta}}$-anel.

Fixemos $\mathcal{H}_1 = \{\beta_{\overline{h}} \circ 1_{\overline{h^{-1}}}|_{A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}} : h \in \mathcal{H}\}$ e $\mathcal{H}_2 = \{\beta_{\overline{h}} \circ 1_{\overline{h^{-1}}}|_{A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}} : h \in \mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}}\}$. É de imediata verificação que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são subgrupoides de $\mathcal{G}/\tilde{\mathcal{H}}_T$. Com isso, vamos provar que $A^{\beta_{\mathcal{H}_1}} = A^{\beta_{\mathcal{H}}} \cap A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}} = A^{\beta_{\mathcal{H}_2}}$. Começaremos por $A^{\beta_{\mathcal{H}_1}} = A^{\beta_{\mathcal{H}}} \cap A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}$. Com efeito,

$$\begin{aligned} A^{\beta_{\mathcal{H}_1}} &= \{a \in A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}} : \beta_{\overline{h}}(a1_{\overline{h^{-1}}}) = a1_{\overline{h}},\ \overline{h} \in \mathcal{H}_1\} \\ &= \{a \in A : \beta_{\overline{h}}(a1_{\overline{h^{-1}}}) = a1_{\overline{h}},\ \overline{h} \in \mathcal{H}_1\} \cap A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}} \\ &= \{a \in A : \beta_h(a1_{h^{-1}}) = a1_h,\ h \in \mathcal{H}\} \cap A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}} \\ &= A^{\beta_{\mathcal{H}}} \cap A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}. \end{aligned}$$

Para $A^{\beta_{\mathcal{H}}} \cap A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}} = A^{\beta_{\mathcal{H}_2}}$ considere $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}}} \cap A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}$ e $\overline{h} \in \mathcal{H}_2$. Então, $\beta_{\overline{h}}(a1_{\overline{h^{-1}}}) = \beta_h(a1_{h^{-1}}) = a1_h = a1_{\overline{h}}$. Portanto, $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}_2}}$. Reciprocamente, se $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}_2}}$ e $h \in \mathcal{H}$, como $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}}$, então $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, logo $a \in A^{\beta_{\mathcal{H}}} \cap A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}$.

Veja que $A^{\beta\tilde{\mathcal{H}}_T}$ é um $K_{\overline{\beta}}$-anel e $\mathcal{G}/\tilde{\mathcal{H}}_T$ é um grupoide finito. Logo, com a notação do Teorema 2.3.7, temos que $\Psi(A^{\beta_{\mathcal{H}_1}}) = \Psi(A^{\beta_{\mathcal{H}_2}})$, logo $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$.

Note que dado $g \in \mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}}$, então $\beta_{\overline{g}} \circ 1_{\overline{g^{-1}}}|_{A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}} \in \mathcal{H}_2$, e como $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, então existe $h \in \mathcal{H}$ tal que $\beta_{\overline{g}} \circ 1_{\overline{g^{-1}}}|_{A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}} = \beta_{\overline{h}} \circ 1_{\overline{h^{-1}}}|_{A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}}$. Portanto, pela forma como foi definida a ação $\overline{\beta}$, temos que

$$\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_{A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}} = \beta_{\overline{g}} \circ 1_{\overline{g^{-1}}}|_{A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}} = \beta_{\overline{h}} \circ 1_{\overline{h^{-1}}}|_{A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}} = \beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_{A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}}.$$

Note que o cálculo acima é verdadeiro, pois $E_{\overline{g^{-1}}} = E_{g^{-1}} \cap A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}$ e $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$. Agora, em particular, como $F \subseteq T \subseteq A^{\beta_{\tilde{\mathcal{H}}_T}}$, temos que $\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_F = \beta_l \circ 1_{l^{-1}}|_F$, ou seja, para todo subconjunto finito $F \subseteq A$ e $\beta_g \circ 1_{g^{-1}} \in \mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}}$, então existe $\beta_h \circ 1_{h^{-1}} \in \mathcal{H}$ tal que $\beta_h \circ 1_{h^{-1}} \in \beta_g \circ 1_{g^{-1}} + U_F$. E $\mathcal{H}$ é denso em $\mathcal{H}_{A^{\beta_{\mathcal{H}}}}$. □

Combinando as Proposições 3.2.18 e 3.2.19, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.20. *Se A um K_β-anel. Então, todo subgrupoide $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ é da forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}_B$, para algum subanel $B \subseteq A$ se e somente se $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}$.*

Proposição 3.2.21. *Seja A um K_β-anel. Se $\mathcal{H}$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, então $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um K_β-anel.*

Demonstração. Se F é um subconjunto finito de $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$, então é de imediata verificação que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_F$, e pelo Lema 1.1.20, temos que $F \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}_F}} \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}}}$. Agora, como F é finito, existe um subanel β-admissível B de A tal que $F \subseteq B$, logo $\mathcal{H}_B \subseteq \mathcal{H}_F$. Como B é β-admissível, pelo Lema 3.2.7 temos que $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)$ é finito, então $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_F)$ é finito e pela Proposição 3.2.12 temos que $A^{\beta_{\mathcal{H}_F}}$ é β-admissível. Portanto, $A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é um K_β-anel. □

Proposição 3.2.22. *Se A é um K_β-anel. Então, para todo subanel B de A tal que B é um K_β-anel, temos que $B = A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$.*

Demonstração. Como é de imediata verificação que $B \subseteq A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$, precisamos mostrar a inclusão contrária. Para tal, mostraremos que $a \notin B$ implica que $a \notin A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$.

Seja $a \in A - B$ e $\{B_i : i \in I\}$ a família de todos subanéis de B que são β-admissíveis, para algum conjunto de índices I. Fixemos também o conjunto $U = \{g \in \mathcal{G} : \beta_g(a1_{g^{-1}}) = a1_g\}$. Temos que $\mathcal{H}_{B_i} - U$ é fechado em $\overline{\mathcal{G}}$, para todo $i \in I$. De fato, para todo $g \in (\mathcal{H}_{B_i} - U)'$ e $b \in B_i$, temos que $\{b\} \subseteq A$ é um conjunto finito. Logo, existe $h \in \mathcal{H}_{B_i} - U$ tal que $\beta_g(b1_{g^{-1}}) = \beta_h(b1_{h^{-1}}) = b1_h = b1_g$ e $\beta_g(a1_{g^{-1}}) = \beta_h(a1_{h^{-1}}) \neq a1_g$. Logo, $g \in \mathcal{H}_{B_i} - U$.

Seja $I_0 \subseteq I$ um subconjunto finito. Vamos provar que $\bigcap_{I_0}(\mathcal{H}_{B_i} - U) \neq \emptyset$. De fato, pela Proposição 3.2.14, cada B_i é finitamente gerado como B^β-módulo. Denotemos o respectivo conjunto de geradores por F_i, para todo $i \in I_0$. Dessa forma, como $F = \bigcap_{i \in I_0} F_i$ é um subconjunto finito de A, então existe um subanel β-admissível C de B tal que $F \subseteq C$. No entanto, $C = B_j$, para algum $j \in I$. Portanto, $B_i \subseteq B_j$, para todo $i \in I_0$ e pela Proposição 1.1.20 temos que $\mathcal{H}_{B_j} \subseteq \mathcal{H}_{B_i}$, para todo $i \in I_0$. Como B_j é um subanel β-admissível de B, então $A^{\beta_{\mathcal{H}_{B_j}}} \subseteq B$, logo $a \in A - B \subseteq A - A^{\beta_{\mathcal{H}_{B_j}}}$, ou seja, $a \notin A^{\beta_{\mathcal{H}_{B_j}}}$. Ou ainda, existe $g \in \mathcal{H}_{B_j}$ tal que $\beta_g(a1_{g^{-1}}) \neq a1_g$. Logo, $g \in \bigcap_{i \in I_0}(\mathcal{H}_{B_i} - U)$.

Como $\mathcal{G}$ é compacto com a topologia finita, pela Proposição 3.2.17 e o Teorema 3.1.19, temos que $\bigcap_{i \in I}(\mathcal{H}_{B_i} - U) \neq \emptyset$. Logo, existe $g \in \bigcap_{i \in I}(\mathcal{H}_{B_i} - U)$. Com isso, se $b \in B$, então o conjunto finito $\{b\}$ está contido em um β-admissível B_i, para algum $i \in I$. Então $\beta_g(b1_{g^{-1}}) = b1_g$, para todo $b \in B$. Logo $g \in \mathcal{H}_B$ e como $g \notin U$, temos que $\beta_g(a1_{g^{-1}}) \neq a1_g$. Ou seja, se $a \notin B$, então $a \notin A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$. Portanto, $B = A^{\beta_{\mathcal{H}_B}}$. $\square$

Pelas Proposições 3.2.21 e 3.2.22, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.23. *Para um subanel B de A temos que $B = A^{\beta_H}$ para algum subgrupoide $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ se e somente se B for K_β-anel.*

Com os resultados acima, estamos em condições de apresentar o principal resultado deste capítulo, que fornece uma correspondência bijetiva entre os subgrupoides amplos e fechados de $\mathcal{G}$ e os K_β-subanéis de A.

Teorema 3.2.24. ***(Teorema de Correspondência de Galois)*** *Seja A um K_β-anel, onde $\mathcal{G}$ é um grupoide fechado em End(A) com a topologia finita. Então, existe uma correspondência bijetiva entre os subgrupoides amplos e fechados de $\mathcal{G}$ e os K_β-subanéis de A.*

Demonstração. Defina as aplicações:

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{c} \text{Subgrupoides amplos} \\ \text{e fechados de } \mathcal{G} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ K_\beta\text{-subanéis de } A \right\}$$

$$\mathcal{H} \longmapsto \Phi(\mathcal{H}) = A^{\beta_{\mathcal{H}}}$$

e

$$\Psi : \left\{ K_\beta\text{-subanéis de } A \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Subgrupoides amplos} \\ \text{e fechados de } \mathcal{G} \end{array} \right\}$$

$$B \longmapsto \Psi(B) = \mathcal{H}_B.$$

Pela Proposição 3.2.18 e Proposição 3.2.21 temos que Ψ e Φ estão bem definidas, respectivamente. E as aplicações são mutualmente inversas, pois $\Phi(\Psi(B)) = B$ pela Proposição 3.2.22 e $\Psi(\Phi(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$ pela Proposição 3.2.19. $\square$

3.3 Exemplo

Exibiremos um exemplo para a correspondência do Teorema 3.2.24. De forma semelhante ao feito na seção 2.4 seguiremos os passos: primeiramente fixaremos o anel A. Em seguida o grupoide $\mathcal{G}$ e a ação β de $\mathcal{G}$ em A, onde $\mathcal{G}$ é fechado em relação à topologia finita. O terceiro passo será mostrar que A é um K_β-anel. Por fim, destacaremos alguns subgrupoides e os subanéis correspondentes.

Fixemos L $= \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \ldots)$, o conjunto dos racionais adjunção com a unidade imaginária $\sqrt{-1}$ e as raízes de números primos. Com isso, consideremos o anel $A = M_2(\mathrm{L}) \times M_2(\mathrm{L})$, com a soma e produto definidos coordenada a coordenada. Denotaremos também os ideais $E_1 = M_2(\mathrm{L}) \times \{0\}$ e $E_2 = \{0\} \times M_2(\mathrm{L})$. Assim, $A = E_1 \oplus E_2$.

Para apresentarmos o grupoide $\mathcal{G}$ começamos fixando a sequência $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \{\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \ldots\}$, tal notação que será útil posteriormente. Em seguida observamos que o conjunto $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{L})$ dos $\mathbb{Q}$-automorfismos de L é um grupo isomorfo ao produto cartesiano enumerável $\prod_{j\in\mathbb{N}}(\mathbb{Z}_2)_j$, onde cada k-ésima coordenada é definida pela forma como o automorfismo modifica (ou não) o sinal n_k, onde n_k é o respectivo elemento da sequência $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Então, para cada $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{L})$ definimos o seguinte isomorfismo $\tau : E_1 \to E_1$ por $\tau(([t_{lk}], 0)) = ([\sigma(t_{lk})], 0)$, para $[t_{lk}] \in M_2(\mathrm{L})$. De forma análoga definimos os automorfismos $\theta : E_2 \to E_2$ por $\theta((0, [t_{lk}])) = (0, [\sigma(t_{lk})])$, para $[t_{lk}] \in M_2(\mathrm{L})$. Por fim, definimos $\gamma : E_1 \to E_2$ por $\gamma(([t_{lk}], 0)) = (0, [t_{lk}])$, para todo $[t_{lk}] \in M_2(\mathrm{L})$. A boa definição desses isomorfismos é assegurados pela Observação 2.4.1 e estes isomorfismos definem um grupoide $\mathcal{G}$, cuja operação parcial é definida pela composição de funções e este induz naturalmente a ação $\beta = \{\{E_g\}_{g\in\mathcal{G}}, \{\beta_g\}_{g\in\mathcal{G}}\}$ de $\mathcal{G}$ sobre A.

Vejamos que $\mathcal{G}$ é fechado em relação a topologia finita. Pela Observação 3.1.15 temos que basta verificarmos que cada $\mathcal{G}_{e,f}$ é fechado, para quaisquer $e, f \in \mathcal{G}_0$. Assim, comecemos considerando o conjunto $\mathcal{G}_{id_{E_1}} = \{\beta_h \circ 1_{h^{-1}} : d(h) = r(h) = id_{E_1}\}$ e um isomorfismo $\phi \in (\mathcal{G}_{id_{E_1}})'$, ou seja, ϕ um ponto de acumulação de $\mathcal{G}_{id_{E_1}}$. Pelo Lema 3.1.28 ϕ está totalmente determinada nos elementos de E_1. Note que, como *phi* é um ponto de acumulação, então para todo $([a_{lk}], 0) \in M_2(\mathbb{Q}) \times \{0\} \subseteq E_1$ existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $\phi(([a_{lk}], 0)) = \beta_g(([a_{lk}], 0)) = ([a_{lk}], 0)$.

Por outro lado, como ϕ deve coincidir com alguma $\beta_g \in \mathcal{G}_{id_{E_1}}$ em um subconjunto finito de E_1 então

$$\phi\left(\left(\begin{bmatrix} n_k & 0 \\ 0 & n_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) = \left(\begin{bmatrix} n_k & 0 \\ 0 & n_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

ou

$$\phi\left(\left(\begin{bmatrix} n_k & 0 \\ 0 & n_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) = \left(\begin{bmatrix} -n_k & 0 \\ 0 & -n_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right),$$

para $n_k \in \{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Veja que, uma vez que todo elemento de E_1 pode ser escrito como combinação de elementos de $M_2(\mathbb{Q}) \times \{0\}$ e pares onde a primeira entrada são matrizes diagonais com entradas em $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, então ϕ coincide com alguma $\beta_g \in \mathcal{G}_{id_{E_1}}$. Logo, $\mathcal{G}_{id_{E_1}}$ é fechado e raciocínio análogo pode ser feito para $\mathcal{G}_{id_{E_1}, id_{E_2}}$ e $\mathcal{G}_{id_{E_1}}$. Portanto, $\mathcal{G}$ é fechado em relação a topologia finita.

Por fim, para termos todos elementos necessários a hipótese da correspondência 3.2.24, verifiquemos que A é um K_β-anel. Para tal observamos o seguinte fato: Todo subconjunto finito de A está contido em um subanel do tipo $B = M_2(\mathrm{K}) \times M_2(\mathrm{K})$, para alguma extensão finita $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(n_{k_1}, n_{k_2}, \ldots, n_{k_m})$ e $n_{k_i} \in \{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ para $1 \leq i \leq m$. Vejamos que B é β-admissível, ou seja, que satisfaz os itens (i) à (iii) da Definição 3.2.2.

(i) Um raciocínio análogo ao feito na subseção 2.4 mostra que,

$$A^\beta = \{([a_{lk}], [a_{lk}]) : [a_{lk}] \in M_2(\mathbb{Q})\}.$$

Então, $A^\beta \subseteq B$.

(ii) Para verificarmos que $S = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}_{g\in\mathcal{G}}$ é finito, basta notar que $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K})$ é um conjunto finito. Provemos que B é β-independente, primeiro considere o seguinte conjunto $P = \{1, n_{k_1}, \ldots, n_{k_m}, n_{k_1}n_{k_2}, \ldots, n_{k_1}n_{k_m}, n_{k_2}n_{k_3}, \ldots, n_{k_2}n_{k_m}, \ldots,$ $n_{k_1}n_{k_2}n_{k_3}, \ldots, n_{k_1}n_{k_2}n_{k_m}, n_{k_1}n_{k_3}n_{k_4}, \ldots, n_{k_1}n_{k_3}n_{k_m}, \ldots, n_{k_1}n_{k_2}\ldots n_{k_m}\}$, ou ainda, $P = \{n_{k_1}^{i_1} n_{k_2}^{i_2} \ldots n_{k_m}^{i_m} : i_1, \ldots, i_m \in \{0,1\}\}$. Note que o conjunto P possui $r = 2^m$ elementos. Para facilitar a notação, denotemos este conjunto por $P = \{a_l\}_{l=1}^r$.

Para $1 \leq l \leq r$, fixe os pares:

$$(x_l, y_l) = \left(\left(\begin{bmatrix} a_l & 0 \\ 0 & a_l \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{a_l r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_l r} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right);$$

$$(x_{l+r}, y_{l+r}) = \left(\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_l & 0 \\ 0 & a_l \end{bmatrix} \right), \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{a_l r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_l r} \end{bmatrix} \right) \right),$$

para todo $1 \leq l \leq r$ estes pares são tais que:

$$\sum_{l=1}^{2r} y_l \beta_g(x_l 1_{g^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g} 1_e,$$

para todo $g \in S$.

(iii) Vejamos que A^β é um somando direto de B como A^β-módulo à esquerda. Começamos afirmando que o elemento

$$c = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2r} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2r} \end{bmatrix} \right).$$

é tal que $c \in A^\beta$ e $\sum_{g \in S} \beta_g(c 1_{g^{-1}}) = 1_A$. Logo, pela Lema 3.2.8, temos que A^β é um somando direto de B como A^β-módulo à esquerda. Portanto, A é um K_β-anel.

Mostremos a afirmação acima. Para tal, apresentaremos um subgrupoide $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ tal que $\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h \in \mathcal{H}} = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}_{g \in \mathcal{G}}$. Com efeito, considere $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K})$ e considere a seguinte construção análoga a feita para $\mathcal{G}$. Ou seja, fixe $E_1' = E_1 \cap B$ e $E_2' = E_2 \cap B$. Em seguida, para cada $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K})$ definimos os isomorfismos $\tau : E_1' \to E_1'$ por $\tau(([t_{lk}], 0)) = ([\sigma(t_{lk})], 0)$, $\theta : E_2' \to E_2'$ por $\theta((0, [t_{lk}])) = (0, [\sigma(t_{lk})])$ e $\gamma : E_1' \to E_2'$ por $\gamma(([t_{lk}], 0)) = (0, [t_{lk}])$, para todo $[t_{lk}] \in M_2(\mathrm{K})$. Então, estes isomorfismos definem com a composição um grupoide $\mathcal{H}$, que por sua vez é um subgrupoide de $\mathcal{G}$. Apartir dessa construção é fácil ver que $\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h \in \mathcal{H}} = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}_{g \in \mathcal{G}}$. Além disso, a ordem de $S = \{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}_{g \in \mathcal{G}}$ é $4r$. Com efeito, pela teoria de Galois clássica $|\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K})| = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{K} = r$ e por [4, Proposition 3.3] temos que $|\mathcal{H}| = |\mathcal{H}_0|^2 |\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K})| = 4r$. Logo,

$$|S| = |\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}_{g \in \mathcal{G}}| = |\{\beta_h \circ 1_{h^{-1}}|_B\}_{h \in \mathcal{H}}| = |\mathcal{H}| = 4r.$$

Assim, fixando $\mathcal{H}_1 = \{h \in \mathcal{H} : r(h) = id_{E'_1}\}$ e $\mathcal{H}_2 = \{h \in \mathcal{H} : r(h) = id_{E'_2}\}$, temos que $|\mathcal{H}^r| = |\mathcal{H}^d| = 2r$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in S} \beta_g(c1_{g^{-1}}) = \sum_{h \in \mathcal{H}} \beta_h(c1_{h^{-1}}) &= \sum_{h \in E'_1} \beta_h(c1_{h^{-1}}) + \sum_{h \in E'_2} \beta_h(c1_{h^{-1}}) \\
&= \left(2r \begin{bmatrix} \frac{1}{2r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2r} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 2r \begin{bmatrix} \frac{1}{2r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2r} \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1_A.
\end{aligned}$$

Analisemos alguns subgrupoides e os subanéis correspondentes. Lembremos que $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{L}) \simeq \prod_{j \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}_2)_j$, onde cada k-ésima coordenada é definida pela forma como o automorfismo modifica (ou não) o sinal n_k, onde n_k é o respectivo elemento da sequência $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Com essa notação:

- Dado um subanel do tipo $B = M_2(\mathbb{Q}(\mathrm{K}_1)) \times M_2(\mathbb{Q}(\mathrm{K}_2))$, onde K_1 e K_2 são extensões distintas de $\mathbb{Q}$ contidas em L. Então, $\mathcal{H}_B$ é um subgrupoide de $\mathcal{G}$ formado pela união disjunta dos grupos de isotropia que deixam $M_2(\mathbb{Q}(\mathrm{K}_1)) \times \{0\}$ e $\{0\} \times M_2(\mathbb{Q}(\mathrm{K}_2))$ fixos.

- Seja $B = M_2(\mathbb{Q}(\mathrm{K})) \times M_2(\mathbb{Q}(\mathrm{K}))$, onde K é uma extensão infinita de $\mathbb{Q}$ contida em L, digamos $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(n_{l_1}, n_{l_2}, \ldots)$, onde $\{n_{l_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Fixando o conjunto de índices $I = \{l_i \in \mathbb{N} : i \in \mathbb{N}\}$ um o subgrupoide $\mathcal{H}_B$ é formado pelos isomorfismos provenientes de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{K}) \simeq \prod_{k \in \mathbb{N} - I} (\mathbb{Z}_2)_k$ após um processo análogo ao feito para construção de $\mathcal{G}$. Também analogamente se verifica que $\mathcal{H}_B$ é fechado e que B é um K_β-anel.

- Seja $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que apenas um número finito m de elementos de $\{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ não apareçam em $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Consideremos o subgrupo H de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{L})$ tal que $H \simeq \prod_{k \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}_2)_k$ e $\mathcal{H}$ o subgrupoide de $\mathcal{G}$ que surge após um processo análogo ao feito para construção de $\mathcal{G}$. Com verificação análoga a feita para $\mathcal{G}$, temos que este subgrupoide é amplo e fechado. Então o subanel correspondente é $A^{\beta_{\mathcal{H}}} = B = M_2(\mathbb{Q}(\mathrm{K})) \times M_2(\mathbb{Q}(\mathrm{K}))$, onde K é uma extensão finita da forma $\mathrm{K} = \mathbb{Q}(n_{k_1}, n_{k_2}, \ldots, n_{k_m})$, onde $n_{l_1}, n_{l_2}, \ldots, n_{l_m}$ são os elementos de $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ que não aparecem em $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Observação 3.3.1. Note que, no último item acima o índice de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$ é finito, de fato, apenas um número finito de elementos não são levados nas classes das identidades quanto tomado o quociente $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. Com isso o K_β-anel correspondente é em particular β-admissível. Na verdade, a correspondência entre subgrupoides de índice finito e β-admissíveis é válida mais geralmente, e este é um dos resultados da próxima seção.

3.4 Aplicação no caso finito

Uma pergunta natural que surge é se o Teorema 3.2.24 de correspondência para o caso infinito generaliza o Teorema 2.3.7 para o caso finito. A resposta para esta pergunta é afirmativa e é o tema desta subseção.

Definição 3.4.1. [25, Definition 13.5] Seja X um espaço topológico qualquer. Dizemos que X é um espaço de Hausdorff se, para quaisquer $x, y \in X$, existirem abertos U_x e U_y contendo x e y, respectivamente, tais que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Lema 3.4.2. *Dado um anel R, o conjunto End(R) com a topologia finita é de Hausdorff.*

Demonstração. Se $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(R)$ são tais que $\varphi \neq \psi$, então existe $r \in R$ tal que $\varphi(r) \neq \psi(r)$. Dessa forma, considerando o conjunto finito $\{r\}$ de R, e supondo que existe $\alpha \in \varphi + U_{\{r\}} \bigcap \psi + U_{\{r\}}$, então $\varphi(r) = \alpha(r) = \psi(r)$, o que é um absurdo. Logo, $\varphi + U_{\{r\}} \bigcap \psi + U_{\{r\}} = \emptyset$. □

O resultado a seguir é uma propriedade bem conhecida da literatura e pode ser encontrada em [1, Theorem 1.19]. Aqui apresentaremos uma demonstração alternativa utilizando o conceito de ponto aderente.

Proposição 3.4.3. *Se X é um espaço de Hausdorff, então todo conjunto com finitos pontos de X é fechado.*

Demonstração. Se $\{x\} \subseteq X$, como X é de Hausdorff, para todo $y \neq x$ de X, existem abertos U_x e U_y tais que $U_x \bigcap U_y = \emptyset$. Logo, $y \notin U_x$. Ou seja, existe um aberto de x que não contém y. Então $y \notin \{x\}'$, para todo $y \in X$ tal que $y \neq x$. Portanto, o único ponto de acumulação de $\{x\}'$ é o próprio x, ou ainda, $\{x\}$ é fechado. Portanto, como todo conjunto finito é a união finita de conjuntos unitários, pelo Teorema 3.1.15 temos que todo conjunto finito é fechado. □

Finalizamos este trabalho mostrando que o Teorema 3.2.24 recobre o Teorema 2.3.7.

Proposição 3.4.4. *Sejam A um K_β-anel, onde $\mathcal{G}$ é um grupoide fechado em End(A) com a topologia finita. Então, temos que:*

(i) *Existe uma correspondência um-a-um entre o conjunto dos subgrupoides amplos, fechados e de índice finito de $\mathcal{G}$ e o conjunto dos subanéis β-admissíveis de A;*

(ii) **(Correspondência para o caso finito)** *Se $\mathcal{G}$ for um grupoide finito, então existe uma correspondência um-a-um entre o conjunto dos subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ e o conjunto dos subanéis β-admissíveis de A.*

Demonstração. Sejam Φ e Ψ como no Teorema 3.2.24.

Para o item (i), se $\mathcal{H}$ é um subgrupoide amplo, fechado e de índice finito em $\mathcal{G}$, então pela Proposição 3.2.12 temos que $\Phi(\mathcal{H}) = A^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é β-admissível.

Reciprocamente, se B é um subanel β-admissível de A, então é, em particular, um K_β-anel e portanto podemos aplicar Ψ. Assim, $\Psi(B) = \mathcal{H}_B$, que é amplo e fechado. Como B é um anel β-admissível, o conjunto $\{\beta_g \circ 1_{g^{-1}}|_B\}$ é finito, então o Lema 3.2.7 nos diz que $(\mathcal{G} : \mathcal{H}_B)$ é finito. Assim, pelo Teorema 3.2.24, temos que esta correspondência é bijetiva.

Para o item (ii), pelo Lema 3.4.2 o espaço $\mathrm{End}(A)$ com a topologia finita é de Hausdorff, e por $\mathcal{G}$ ser finito todos seus subgrupoides amplos possuem índice finito. Também por ser finito, a Proposição 3.4.3 nos diz que $\mathcal{G}$ é fechado, assim como seus subgrupoides amplos. Portanto todo subgrupoide amplo é também fechado e de índice finito. Agora o resultado segue pelo item (i). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] C. Adams and R. Franzosa. **Introduction to Topology: Pure and Applied**, volume 1. Pearson Prentice Hall, 2008.

[2] D. Bagio and D. F. e A. Paques. **Partial actions of ordered groupoids on rings**. *J. Algebra Appl.*, 9(3):501–517, 2010.

[3] D. Bagio and A. Paques. **Partial Groupoid Actions: Globalization, Morita Theory, and Galois Theory**. *Comm. Algebra*, (40):3658–3678, 2012.

[4] G. Beier, C. Garcia, W. Lautenschlaeger, J. Pedrotti, and T. Tamusiunas. **Generalizations of Lagrange and Sylow theorems for groupoids**. *São Paulo J. Math. Sci.*, 2023.

[5] H. Brandt. **Uber eine verallgemeinerung des gruppenbegriffes**. *Math. Ann.*, (96):360–366, 1926.

[6] R. Brown. **From groups to groupoids: a brief survey**. *Bull. London Math. Soc.*, (19):113–134, 1987.

[7] S. U. Chase, D. K. Harrison, and A. Rosenberg. **Galois theory and cohomology of commutative rings**. *Mem. Amer. Math. Soc*, (52):1–19, 1968.

[8] D. Flôres and A. Paques. **Duality for groupoid (co)actions**. *comm. in Algebra*, (42:2):637–663, 2014.

[9] P. J. Higgins. **Notes on categories and groupoids**, volume 7. Van Nostrand Reinhold, London, 1971.

[10] K. Hirata and K. Sugano. **On semisimple extensions and separable extensions over non commutative rings**. *Journal of the Math. Soc. of Japan*, 18(4):360–373, 1966.

[11] J. M. Howie. **Fields and Galois Theory**. Springer, London, 2nd edition, 2006.

[12] A. Ibort and M. A. Rodríguez. **An introduction to Groups, Groupoids and Their Representations**, volume 1. CRC Press, Boca Raton, 2019.

[13] H. F. Kreimer. **A Galois theory for noncommutative rings**. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (127):29–41, 1966.

[14] W. Krull. **Galoissche theorie der unendlichen algebraischen erweiterungen**. *Math. Ann.*, (100):687–698, 1928.

[15] P. A. Krylov, A. V. Mikhalev, and A. A. Tuganbaev. **Properties of endomorphism rings of abelian groups,**. *I. Journal of Math. Sci.*, 112:4598–4735, 1965.

[16] M. V. Lawson. **Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries**. World Scientific Pub. Co, London, 1998.

[17] E. L. Lima. **Elementos de Topologia Geral**, volume 1. SBM, Rio de Janeiro, 1970.

[18] A. Paques. **Teoría de Galois sobre Anillos Conmutativos**, volume 1. Universidad de Los Andes, 1999.

[19] A. Paques. **Galois Theories: A Survey**. *Springer*, pages 247–273, 2018.

[20] A. Paques and T. Tamusiunas. **The Galois correspondence theorem for groupoid actions**. *Journal of Algebra*, 509:105–123, 2018.

[21] A. Paques and T. Tamusiunas. **On the Galois map for groupoid actions**. *comm. in Algebra*, 49(3):1037–1047, 2021.

[22] I. Stewart. **Galois Theory**. CRC, Boca Raton, FL, 4 edition, 2015.

[23] T. Tamusiunas. **Teorias de Galois para ação de grupoides.** *Tese de doutorado*. Porto Alegre, Brasil, 2012.

[24] T. Tamusiunas and J. Pedrotti. **Injectivity of the Galois map**. *Bull Braz Math Soc, New Series*, 54(11), 2023.

[25] S. Willard. **General Topology**, volume 1. Dover Publications, Mineola, New York, 1970.

[26] R. Wisbauer. **Foundations of Module and Ring Theory**, volume 1. CRC Press, London, 1991.