

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**MODELAGEM VIA *UPSCALING* DAS  
PROPRIEDADES ELÁSTICAS EFETIVAS E DA  
PROPAGAÇÃO DE DANO EM MATERIAIS  
FRATURADOS VISTOS COMO MEIOS  
HOMOGENEIZADOS ANISÓTROPAS**

**Marcos Bressan Guimarães**

Porto Alegre  
2023

MARCOS BRESSAN GUIMARÃES

**MODELAGEM VIA *UPSCALING* DAS PROPRIEDADES  
ELÁSTICAS EFETIVAS E DA PROPAGAÇÃO DE DANO EM  
MATERIAIS FRATURADOS VISTOS COMO MEIOS  
HOMOGENEIZADOS ANISÓTROPAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para obtenção do  
título de Mestre em Engenharia.

Porto Alegre  
2023

### CIP - Catalogação na Publicação

Guimarães, Marcos Bressan  
Modelagem via Upscaling das Propriedades Elásticas  
Efetivas e da Propagação de Dano em Materiais  
Fraturados Vistos como Meios Homogeneizados  
Anisótropos / Marcos Bressan Guimarães. -- 2023.  
167 f.  
Orientador: Samir Maghous.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,  
BR-RS, 2023.

1. Micromecânica. 2. Homogeneização. 3. Meios  
Fraturados. 4. Mecânica do Dano. 5. Elasticidade. I.  
Maghous, Samir, orient. II. Título.

**MARCOS BRESSAN GUIMARÃES**

**MODELAGEM VIA *UPSCALING* DAS PROPRIEDADES  
ELÁSTICAS EFETIVAS E DA PROPAGAÇÃO DE DANO  
EM MATERIAIS FRATURADOS VISTOS COMO MEIOS  
HOMOGENEIZADOS ANISÓTROPAS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na área de concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 12 de Junho de 2023

Prof. Samir Maghous  
Dr. pela École Nationale des Ponts et Chaussées  
Orientador

Prof. Lucas Festugato  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Alexandre Luis Braun (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Eduardo Bittencourt (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Severino Pereira Cavalcanti Marques (UFAL)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Cássio Barros de Aguiar (UTFPR)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Este trabalho é dedicado à minha família, que sempre me apoiou em todos os momentos da minha vida.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Tânia e Ramão, por sempre terem acreditado no meu potencial e por todo o suporte necessário para a realização dos meus sonhos. Sem vocês eu não teria chegado até aqui, amo vocês incondicionalmente.

Ao meu tio Suimar, por todo o incentivo durante o mestrado e também pelas discussões, por vezes, filosóficas sobre as questões que nos cercam.

À minha namorada Tainara, muito obrigado por me apoiar nas situações adversas, pela compreensão nos meus dias ruins e, sobretudo, por me fazer sorrir em momentos difíceis.

Agradeço ao meu orientador Samir Maghous, por compartilhar seus conhecimentos e por me orientar na superação dos desafios enfrentados ao longo deste estudo, tanto em termos pessoais quanto acadêmicos.

Aos meus amigos Lucas e Daniele, que estiveram ao meu lado desde o começo, enfrentando vários desafios e me ajudando a superar as adversidades do mestrado. Sem o apoio de vocês, eu não teria conseguido chegar tão longe. Muito obrigado, vocês foram essenciais nesta jornada.

Ao amigo Cássio que acompanhou o desenvolvimento deste trabalho do início ao fim, auxiliando e sanando diversas dúvidas.

Ao amigo Daniel por todo o apoio, pelos ensinamentos relacionados ao Python e também por todos os momentos de descontração, você tornou essa caminhada mais leve.

Aos meus amigos Augusto e Mateus por todos os ensinamentos e discussões que, por muitas vezes, me levaram a reflexão. Agradeço à vocês por todo o carinho e pelos conselhos de vida.

À amiga Mariana por todos os momentos de descontração e risadas, além de todos os conselhos e apoio durante a realização deste trabalho.

Ao amigo Felipe por todo o apoio durante esta etapa, pelos momentos de estudo e reflexões filosóficas sejam elas relacionadas ao trabalho ou não.

Agradeço à todos os colegas do CEMACOM, em especial, a Luciene e a Isabel pelo bom convívio no laboratório e por tornarem essa etapa mais leve para todos.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela infraestrutura disponibilizada e pelo corpo docente de excelência. Agradeço também à CAPES pelo financiamento desta pesquisa.

Quem não sonha o azul do voo, perde o seu poder de pássaro.

*Sonho Domado – Thiago de Mello*

## RESUMO

GUIMARÃES, M. B. **Modelagem via *Upscaling* das Propriedades Elásticas Efetivas e da Propagação de Dano em Materiais Fraturados vistos como Meios Homogeneizados Anisótropos**. 2023. 167p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Um modelo que combina um raciocínio micromecânico com conceitos termodinâmicos macroscópicos é formulado neste trabalho para avaliar a evolução de dano em materiais microfraturados. As fraturas correspondem a uma região de pequena espessura ao longo da qual as propriedades mecânicas e físicas do material são degradadas. Ao contrário das fissuras, as fraturas são capazes de transferir tensões, e podem, portanto, ser consideradas do ponto de vista mecânico como interfaces dotadas de um comportamento específico sob carregamento normal e de cisalhamento. O presente trabalho consiste em empregar uma abordagem micromecânica para formular o comportamento elástico homogeneizado de meios fraturados. No contexto da teoria da inclusão equivalente de Eshelby, a abordagem faz uso do esquema de Mori-Tanaka para estimar o tensor de rigidez elástico homogeneizado de materiais com múltiplas famílias de fraturas. De acordo com referências clássicas, as fraturas são modeladas geometricamente como esferoides oblatos dotados de propriedades elásticas apropriadas. No nível do meio homogeneizado, as densidades de fraturas são interpretadas como parâmetros de dano e combinando o raciocínio micromecânico com argumentos termodinâmicos macroscópicos são avaliadas as condições de propagação de dano em meios fraturados. Nesta perspectiva, é formulado um critério de propagação de dano, assim como sua lei de evolução para materiais com diversas famílias de microfraturas, o que resulta em um algoritmo capaz de avaliar a evolução do dano ao longo do tempo. Na etapa final do trabalho são desenvolvidas diversas aplicações numéricas que permitem identificar os principais fatores que influenciam a propagação e evolução do dano. Ênfase particular é dedicada a representação do dano anisotrópico, induzido por um carregamento aplicado em uma direção específica a um material com uma distribuição isotropa de fraturas. Desta forma, evidencia-se que as duas aproximações, descritas por três e nove famílias de fraturas, são suficientemente precisas para descrever o comportamento do problema real. A capacidade do modelo de evolução de dano descrever a resposta de um material submetido a um carregamento qualquer é demonstrada através de uma comparação com os dados experimentais disponíveis para um compósito de matriz cerâmica (SiC-SiC).

**Palavras-chave:** *homogeneização; microfratura; micromecânica; dano.*



## ABSTRACT

GUIMARÃES, M. B. **Upscaling Modeling of Effective Elastic Properties and Damage Propagation in Fractured Materials Regarded as Homogenized Media**. 2023. 167p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

A model combining the micromechanical reasoning with macroscopic thermodynamic concepts is formulated in this work for damage evolution in microfractured materials. Fractures correspond to a region of small thickness, along which mechanical and physical properties of the material are degraded. Unlike cracks, fractures are discontinuities able to transfer stresses and, therefore, can be regarded from a mechanical viewpoint as interfaces endowed with a specific behavior under normal and shear loading. The present work consists of employing a micromechanical approach to formulate the homogenized elastic behavior of fractured media. In the context of Eshelby's equivalent inclusion theory, the approach employs a Mori-Tanaka scheme to estimate the homogenized elastic stiffness tensor of materials with multiple fracture families. According to classical references, fractures are geometrically modeled as oblate spheroids endowed with appropriate elastic properties. At macroscopic scale, the fracture density parameter is interpreted as a damage parameter, and a micromechanical reasoning, coupled with macroscopic thermodynamic arguments, is employed to evaluate the damage propagation condition in fractured media. In this perspective, a damage propagation criterion is formulated, as well as its evolution law for materials with several families of microfractures, resulting in an algorithm capable of evaluating the damage evolution over time. In the final stage of the work, several numerical applications are developed that allow the identification of the main factors that influence the damage evolution. Particular emphasis is dedicated to the representation of anisotropic damage, induced by a load applied in a specific direction to a material with an isotropic fracture distribution. Thus, it is evident that the two approaches, described by three and nine fracture families, are sufficiently accurate to describe the behavior of the real problem. The ability of the damage evolution model to describe the response of a material under any loading is demonstrated through a comparison with available experimental data for a ceramic matrix composite (SiC-SiC).

**Keywords:** *homogenization; microfracture; micromechanics; damage.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Fraturas em materiais de engenharia . . . . .	24
Figura 2.1 – Orientação das fraturas . . . . .	31
Figura 2.2 – Ensaio de compressão normal em uma fratura (Adaptado de Atta (2004)) . . . . .	33
Figura 2.3 – Ensaio de cisalhamento de uma fratura (Adaptado de Atta (2004)) . . . . .	34
Figura 2.4 – Ilustração do meio com uma única fratura . . . . .	36
Figura 2.5 – Ilustração simplificada do processo de homogeneização . . . . .	39
Figura 2.6 – Meio periódico e conceito de célula de base . . . . .	40
Figura 2.7 – Meio heterogêneo aleatório e conceito de volume elementar representativo . . . . .	40
Figura 2.8 – Tensão homogênea prescrita na fronteira do VER . . . . .	42
Figura 2.9 – Deformação homogênea prescrita na fronteira do VER . . . . .	43
Figura 2.10 – Ilustração do VER composto por matriz sólida e fraturas . . . . .	45
Figura 2.11 – Representação de uma fratura como interface no VER (Adaptado de Maghous et al. (2013)) . . . . .	45
Figura 2.12 – Problema da Inclusão de Eshelby (Adaptado de Gross e Seelig (2011)) . . . . .	53
Figura 2.13 – Princípio da Estimativa Diluída . . . . .	54
Figura 2.14 – Estimativa de Mori-Tanaka . . . . .	56
Figura 2.15 – Estimativa Auto Consistente . . . . .	57
Figura 3.1 – Representação das fraturas no VER (Adaptado de Aguiar e Maghous (2018)) . . . . .	58
Figura 3.2 – Fratura modelada como esferoide oblato . . . . .	61
Figura 3.3 – Uma família de fraturas paralelas . . . . .	62
Figura 3.4 – Duas famílias de microfraturas . . . . .	64
Figura 3.5 – Sistema de coordenadas esféricas angulares (Adaptado de Maghous et al. (2021)) . . . . .	66

Figura 3.6 – Ilustração das componentes $C_{iii}^{\text{hom}}$ do tensor de rigidez . . . . .	69
Figura 3.7 – Ilustração das componentes $C_{ijj}^{\text{hom}}$ do tensor de rigidez . . . . .	70
Figura 3.8 – Ilustração das componentes $C_{ijij}^{\text{hom}}$ do tensor de rigidez . . . . .	70
Figura 3.9 – Componente $C_{1111}^{\text{hom}}$ considerando duas famílias de fraturas . . . . .	71
Figura 3.10 – Componente $C_{1133}^{\text{hom}}$ considerando duas famílias de fraturas . . . . .	72
Figura 3.11 – Componente $C_{1313}^{\text{hom}}$ considerando famílias de fraturas . . . . .	72
Figura 3.12 – Componente $C_{2222}^{\text{hom}}$ considerando duas famílias de fraturas . . . . .	73
Figura 3.13 – Ilustração da componente $C_{1111}^{\text{hom}}$ para casos particulares . . . . .	74
Figura 3.14 – Ilustração da componente $C_{1313}^{\text{hom}}$ para casos particulares . . . . .	75
Figura 4.1 – Propagação em meio multi-fraturado . . . . .	76
Figura 4.2 – Taxa de liberação de energia em função de $\phi$ . . . . .	83
Figura 4.3 – Deformações críticas: uma única família de fraturas . . . . .	84
Figura 4.4 – Tensões críticas: uma única família de fraturas . . . . .	84
Figura 4.5 – Taxa de liberação de energia em função de $\phi$ . . . . .	86
Figura 4.6 – Deformações críticas: distribuição isotrópica de fraturas . . . . .	87
Figura 4.7 – Tensões críticas: distribuição isotrópica de fraturas . . . . .	87
Figura 4.8 – Fluxograma do procedimento numérico adotado . . . . .	92
Figura 4.9 – Carregamento imposto sobre o corpo de prova . . . . .	94
Figura 4.10 – Evolução do parâmetro dano . . . . .	95
Figura 4.11 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	95
Figura 4.12 – Carregamento imposto sobre o corpo de prova . . . . .	96
Figura 4.13 – Evolução do parâmetro de dano . . . . .	97
Figura 4.14 – Relação Tensão x Deformação . . . . .	97
Figura 4.15 – Carregamento imposto sobre o corpo de prova . . . . .	98

Figura 4.16 – Evolução do parâmetro de dano . . . . .	99
Figura 4.17 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	100
Figura 4.18 – Carregamento imposto sobre o corpo de prova . . . . .	100
Figura 4.19 – Evolução do parâmetro dano . . . . .	101
Figura 4.20 – Relação tensão x deformação . . . . .	102
Figura 4.21 – Carregamento imposto sobre o corpo de prova . . . . .	103
Figura 4.22 – Evolução do parâmetro de dano . . . . .	104
Figura 4.23 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	104
Figura 4.24 – Carregamento imposto sobre o corpo de prova . . . . .	105
Figura 4.25 – Evolução do parâmetro de dano . . . . .	106
Figura 4.26 – Relação Tensão x Deformação . . . . .	106
Figura 5.1 – Fluxograma do procedimento numérico incremental . . . . .	116
Figura 5.2 – Deformação macroscópica aplicada a um material com duas famílias de fraturas . . . . .	117
Figura 5.3 – Deformação constante imposta ao corpo de prova . . . . .	119
Figura 5.4 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	119
Figura 5.5 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	120
Figura 5.6 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	121
Figura 5.7 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	121
Figura 5.8 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	122
Figura 5.9 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	122
Figura 5.10 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	123
Figura 5.11 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	124
Figura 5.12 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	124

Figura 5.13 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	125
Figura 5.14 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	125
Figura 5.15 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	126
Figura 5.16 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	127
Figura 5.17 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	127
Figura 5.18 – Taxa de deformação constante imposta sobre o material . . . . .	128
Figura 5.19 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	129
Figura 5.20 – Relação Tensão x Deformação . . . . .	129
Figura 5.21 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	130
Figura 5.22 – Relação Tensão x Deformação . . . . .	130
Figura 5.23 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	131
Figura 5.24 – Relação Tensão x Deformação . . . . .	131
Figura 5.25 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	132
Figura 5.26 – Relação Tensão x Deformação . . . . .	133
Figura 5.27 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	133
Figura 5.28 – Relação Tensão x Deformação . . . . .	134
Figura 5.29 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	134
Figura 5.30 – Relação Tensão x Deformação . . . . .	135
Figura 5.31 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1$ e $\phi_2$ ) . . . . .	136
Figura 5.32 – Esquema do modelo aproximado . . . . .	137
Figura 5.33 – Deformação constante imposta ao corpo de prova . . . . .	139
Figura 5.34 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ ) . . . . .	139
Figura 5.35 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	140
Figura 5.36 – Deformação imposta ao corpo de prova . . . . .	140

Figura 5.37 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ ) . . . . .	141
Figura 5.38 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	141
Figura 5.39 – Deformação constante imposta ao corpo de prova . . . . .	142
Figura 5.40 – Evolução do parâmetro de dano . . . . .	143
Figura 5.41 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	143
Figura 5.42 – Deformação imposta ao corpo de prova . . . . .	144
Figura 5.43 – Evolução do parâmetro de dano . . . . .	144
Figura 5.44 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	145
Figura 5.45 – Configurações de três famílias e distribuição isotrópica de fraturas . . . . .	146
Figura 5.46 – Tensões desenvolvidas nos materiais . . . . .	147
Figura 5.47 – Configurações de três famílias e distribuição isotrópica de fraturas . . . . .	147
Figura 5.48 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	148
Figura 5.49 – Configurações de nove famílias e distribuição isotrópica de fraturas . . . . .	148
Figura 5.50 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	149
Figura 5.51 – Configurações de nove famílias e distribuição isotrópica de fraturas . . . . .	149
Figura 5.52 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	150
Figura 5.53 – Configurações de três e nove famílias de fraturas . . . . .	150
Figura 5.54 – Tensões desenvolvidas no material . . . . .	151
Figura 5.55 – Representação da tração aplicada com o ângulo $\alpha$ . . . . .	152
Figura 5.56 – Comparação dos ensaios de tração do compósito SiC-SiC . . . . .	153

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Coordenadas Angulares $(\theta, \varphi)$ e componentes de $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ . . . . .	74
---	----

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos Romanos

$\mathbb{A}$	Tensor de localização de deformações de quarta ordem
$\mathbb{A}_E$	Tensor de localização de deformações de Eshelby
$a$	Raio médio das fraturas modeladas como esferoides
$\mathbb{B}$	Tensor de localização de tensões de quarta ordem
$\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_\mu$	Funções adimensionais
$\mathbb{C}$	Tensor de rigidez elástico de quarta ordem
$\mathbb{C}^0$	Tensor de rigidez de referência de quarta ordem
$\mathbb{C}^f$	Tensor constitutivo das fraturas modeladas como interfaces
$\mathbb{C}^{\text{hom}}$	Tensor de rigidez elástico homogeneizado
$\mathbb{C}^i$	Tensor de rigidez elástico das inclusões de quarta ordem
$\mathbb{C}^s$	Tensor de rigidez elástico da matriz sólida de quarta ordem
$\mathbb{C}_t$	Tensor constitutivo tangente do dano de quarta ordem
$\mathcal{C}_j, \bar{\mathcal{C}}_j$	Funções adimensionais
$c$	Ângulo dilatante
$\mathcal{D}$	Dissipação intrínseca de energia
$d$	Tamanho característico das heterogeneidades locais
$\underline{\underline{\mathbb{E}}}$	Tensor de deformações macroscópicas
$\underline{\underline{\mathbb{E}}}^0$	Deformações macroscópicas constantes
$E^s$	Módulo de elasticidade da matriz sólida
$(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$	Base ortonormal fixa
$F_0$	Função de endurecimento
$\mathcal{F}$	Força termodinâmica
$\underline{\underline{\mathcal{F}}}$	Vetor força termodinâmica



$\mathcal{F}_c$	Energia crítica
$\mathcal{F}_f$	Energia crítica para uma fratura isolada
$f$	Fração volumétrica
$f_i$	Fração volumétrica das inclusões
$f_s$	Fração volumétrica da matriz sólida
$G$	Potencial de dano
$H$	Superfície de dano
$H(t)$	Função de Heaviside
$\mathbb{I}$	Tensor identidade de quarta ordem
$\mathbb{J}$	Tensor de projeção esférica de quarta ordem
$\mathbb{K}$	Tensor de projeção desviadora de quarta ordem
$\underline{k}$	Tensor de rigidez da fratura
$k$	Módulo volumétrico
$k^{\text{hom}}$	Módulo volumétrico homogeneizado
$k^s$	Módulo volumétrico da matriz sólida
$k_n$	Rigidez normal da fratura
$k_t$	Rigidez tangencial da fratura
$L$	Comprimento característico da estrutura
$\ell$	Comprimento característico do volume elementar representativo
$\mathcal{N}$	Número de fraturas por unidade de volume
$\underline{n}$	Vetor normal à superfície
$\mathcal{O}$	Desvio associado à efeitos de contorno
$\mathbb{P}$	Tensor de Hill de quarta ordem
$P$	Carregamento externo
$\mathcal{Q}$	Quantidade qualquer
$\mathbb{S}$	Tensor de flexibilidade elástico de quarta ordem

$\mathbb{S}^e$	Tensor de Eshelby de quarta ordem
$\mathbb{S}^{\text{hom}}$	Tensor de flexibilidade elástico homogeneizado de quarta ordem
$s$	Área da fratura vista como superfície bidimensional
$\underline{T}$	Vetor tensão
$T_n$	Tensão normal da fratura
$T_t$	Tensão tangente da fratura
$(\underline{t}, \underline{t}', \underline{n})$	Base ortonormal local
$V_m$	Fechamento máximo da fratura
$\underline{X}$ ou $\underline{x}$	Vetor posição
$X$	Razão de aspecto da fratura

### **Símbolos Gregos**

$\alpha$	Ângulo de inclinação do carregamento
$\beta, \gamma$	Parâmetros adimensionais de cálculo
$\Delta t$	Passo de tempo
$\varepsilon_{cr}$	Deformação crítica
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tensor de deformações
$\varepsilon$	Parâmetro de densidade de fraturas
$\zeta_i$	Parâmetros de cálculo que dependem dos ângulos $\theta$ e $\varphi$
$\underline{\eta}$	Constante do material
$\theta$	Coordenada esférica angular $\theta$
$\kappa_j, \bar{\kappa}_j$	Parâmetros adimensionais de cálculo
$\kappa$	Constante do material
$\dot{\lambda}$	Multiplicador de dano
$\mu$	Módulo cisalhante
$\mu^{\text{hom}}$	Módulo cisalhante homogeneizado
$\mu^s$	Módulo cisalhante da matriz sólida

$\nu^s$	Coeficiente de Poisson da matriz sólida
$[\underline{\xi}]$	Salto de deslocamentos
$\underline{\xi}$	Vetor de deslocamentos
$\xi_t$	Deslocamento tangencial relativo
$\xi_n$	Deslocamento normal relativo
$\underline{\underline{\Sigma}}$	Tensor de tensões macroscópicas
$\sigma_{cr}$	Tensão crítica
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tensor de tensões
$\phi$	Parâmetro de dano escalar
$\underline{\phi}$	Vetor parâmetro de dano
$\varphi$	Coordenada esférica angular $\varphi$
$\psi$	Densidade volumétrica de energia livre
$\Omega(\underline{x})$	Domínio do volume elementar representativo
$\Omega \setminus \omega$	Domínio da matriz sólida
$\omega$	Domínio das fraturas

### **Símbolos matemáticos, operadores e numéricos**

$\underline{A}$	Notação utilizada para um vetor qualquer
$\underline{\underline{A}}$	Notação utilizada para um tensor de segunda ordem qualquer
$\mathbb{A}$	Notação utilizada para um tensor de quarta ordem qualquer
$\bullet \otimes \circ$	Produto tensorial entre $\bullet$ e $\circ$
$\bullet \overset{s}{\otimes} \circ$	Parte simétrica do produto tensorial entre $\bullet$ e $\circ$
$\bullet \cdot \circ$	Contração simples entre $\bullet$ e $\circ$
$\bullet : \circ$	Contração dupla entre os tensores $\bullet$ e $\circ$
$\pi$	Constante $\pi \approx 3.141592653589793$
$\underline{\underline{1}}$	Tensor identidade de segunda ordem
$\dot{a}$	Derivada de $a$ em relação ao tempo

$\langle \cdot \rangle_{\Omega}$	Operador média volumétrica
$\langle \cdot \rangle_{\Omega_i}$	Média volumétrica ao longo da fase ( <i>i</i> )
$\langle \cdot \rangle_{\Omega_s}$	Média volumétrica ao longo da fase ( <i>s</i> )
$\partial(\cdot)$	Contorno ou fronteira de ( $\cdot$ )
$\nabla$	Operador Gradiente
$\nabla^s$	Gradiente de parte simétrica
$\text{div}(\cdot)$	Operador Divergente
$\cup$	União entre dois conjuntos
$\in$	Símbolo matemático de pertence
$\Sigma$	Operador somatório

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>24</b>
1.1	OBJETIVOS	26
1.2	METODOLOGIA	27
1.3	JUSTIFICATIVA	27
1.4	DELINEAMENTO DO TRABALHO	28
<b>2</b>	<b>MODELAGEM MICROMECAÂNICA DOS MEIOS FRATURADOS: CONCEITOS FUNDAMENTAIS</b>	<b>30</b>
2.1	COMPORTEAMENTO DE MEIOS FRATURADOS	30
2.1.1	Caracterização das descontinuidades	30
2.1.2	Comportamento mecânico	32
2.1.2.1	Comportamento em compressão	32
2.1.2.2	Comportamento em cisalhamento	33
2.1.2.3	Linearização do comportamento mecânico	34
2.1.3	Modelagem discreta e contínua	35
2.1.4	Propagação de uma única fratura no meio	35
2.2	HOMOGENEIZAÇÃO	38
2.2.1	Teoria da homogeneização	38
2.2.2	Regra das médias	41
2.2.3	Condições de contorno e Lema de Hill	42
2.2.4	Lema de Hill estendido a meios fraturados	44
2.2.5	Propriedades elásticas efetivas	47
2.2.6	Métodos e esquemas de homogeneização	50
2.2.6.1	Resolução analítica	50
2.2.6.2	Limites variacionais	51
2.2.6.3	Resolução numérica	52
2.2.6.4	Problema de Eshelby e estimativas associadas	52

<b>3</b>	<b>HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS ELÁSTICOS FRATURADOS</b>	<b>58</b>
3.1	PROBLEMA DE CONCENTRAÇÃO ELÁSTICO . . . . .	58
3.2	HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAL ELÁSTICO FRATURADO . . . . .	61
3.2.1	Matriz sólida com uma única família de microfraturas . .	62
3.2.2	Matriz sólida com duas famílias de microfraturas . . . . .	64
3.2.3	Matriz sólida com distribuição isótropa de microfraturas	66
3.3	ILUSTRAÇÕES NUMÉRICAS . . . . .	68
3.3.1	Uma família e distribuição isótropa de microfraturas . . .	69
3.3.2	Dois famílias de microfraturas perpendiculares . . . . .	71
3.3.3	Representação da tendência ao caso isótropo . . . . .	73
<b>4</b>	<b>MODELO DE DANO CONTÍNUO DESCRITO POR UM ÚNICO PARÂMETRO DE DANO</b> . . . . .	<b>76</b>
4.1	FRATURAÇÃO DESCRITA POR UM ÚNICO PARÂMETRO DE DANO . . . . .	77
4.1.1	Ilustrações numéricas . . . . .	79
4.1.1.1	Uma família de fraturas paralelas . . . . .	80
4.1.1.2	Distribuição isótropa de fraturas . . . . .	85
4.2	LEI DE EVOLUÇÃO DO DANO DESCRITA POR UM ÚNICO PARÂMETRO DE DANO . . . . .	88
4.3	APLICAÇÕES NUMÉRICAS . . . . .	93
4.3.1	Material com uma única família de fraturas sob carregamento uniaxial . . . . .	93
4.3.1.1	Deformação uniaxial constante . . . . .	94
4.3.1.2	Deformação uniaxial crescente . . . . .	96
4.3.2	Material com uma distribuição isótropa de fraturas sob carregamento isótropo . . . . .	98
4.3.2.1	Deformação isótropa constante . . . . .	98
4.3.2.2	Deformação isótropa crescente . . . . .	100

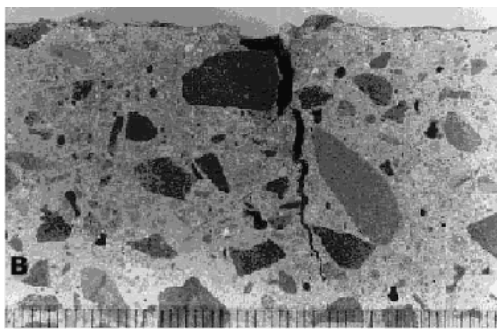
4.3.3	Material com uma distribuição isotrópica de fraturas sob carregamento uniaxial . . . . .	102
4.3.3.1	Deformação uniaxial constante . . . . .	103
4.3.3.2	Deformação uniaxial crescente . . . . .	104
<b>5</b>	<b>MODELO DE DANO CONTÍNUO NA CONFIGURAÇÃO DESCRITA POR MÚLTIPLOS PARÂMETROS DE DANO . . . . .</b>	<b>107</b>
5.1	FORMULAÇÃO TERMODINÂMICA DO MODELO DE DANO	107
5.2	EXPRESSÕES PARTICULARES DO MODELO DE EVOLUÇÃO DE DANO . . . . .	112
5.2.1	Primeiro caso particular: critério acoplado . . . . .	112
5.2.2	Segundo caso particular: critério desacoplado . . . . .	114
5.2.3	Procedimento numérico incremental . . . . .	116
5.3	APLICAÇÕES NUMÉRICAS . . . . .	117
5.3.1	Material com duas famílias de microfraturas sob carregamento em deformação macroscópica . . . . .	117
5.3.1.1	Deformação constante . . . . .	118
5.3.1.2	Análise dos efeitos da deformação $\epsilon_0$ . . . . .	126
5.3.1.3	Deformação crescente . . . . .	128
5.3.1.4	Solicitação definida por uma taxa de deformação constante $\dot{\epsilon}$	135
5.3.1.5	Principais conclusões das aplicações numéricas . . . . .	136
5.3.2	Configurações aproximadas para o problema de uma distribuição isotrópica de fraturas sob carregamento uniaxial	137
5.3.2.1	Configuração descrita por três famílias de microfraturas .	138
5.3.2.2	Configuração descrita por nove famílias de microfraturas	142
5.3.2.3	Comparação entre as configurações aproximadas . . . . .	145
5.4	VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO . . . . .	151
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>154</b>
6.1	CONCLUSÕES . . . . .	154
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	156

<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>157</b>
<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>162</b>
<b>ANEXOS</b> . . . . .	<b>166</b>



# 1 INTRODUÇÃO

A presença de descontinuidades em diferentes escalas e orientações é uma característica encontrada na maioria dos materiais sólidos conhecidos, o que as torna um dos problemas mais universais da engenharia. Normalmente relacionadas a fraturas, essas descontinuidades correspondem a uma região de pequena espessura, ao longo da qual as propriedades mecânicas e físicas do material são degradadas. Fraturas relacionam-se com diversos temas, como: estruturas de concreto, pavimentos asfálticos, peças de aço, resistência e permeabilidade de solos, estruturas subterrâneas e/ou submersas, obras de arte (pontes, barragens, portos, reatores nucleares), projetos aeronáuticos, recuperação estrutural, capacidade de maciços rochosos, bioengenharia, depósitos petrolíferos, entre outros (AGUIAR, 2021). A Figura 1.1 ilustra alguns exemplos práticos de materiais fraturados.



a) Concreto



b) Biomateriais



c) Maciços Rochosos



d) Pavimentos Asfálticos

Figura 1.1 – Fraturas em materiais de engenharia

A descrição do comportamento mecânico de materiais fraturados é uma tarefa complicada do ponto de vista matemático devido a sua complexidade morfológica. Geralmente, a determinação do comportamento dessa classe de materiais segue duas abordagens clássicas. A primeira baseia-se na mecânica da fratura, onde cada fratura é modelada individualmente. Essa abordagem

é tipicamente empregada quando o material possui um número discreto de fraturas, como, por exemplo, nos trabalhos de Griffith (1921), Irwin (1961), Hsieh et al. (1982) ou Lisjak e Grasselli (2014). A segunda abordagem mencionada trata-se da mecânica do dano, onde uma variável interna ajusta o comportamento mecânico do material à medida que este se degrada sob carga externa. Esse procedimento produz bons resultados quando os fenômenos microscópicos individuais que ocorrem no material são difíceis de modelar diretamente, recorrendo-se à modelagem do comportamento equivalente do meio (CHABOCHE, 1992; LUCCIONI; OLLER, 2003; FENG et al., 2020). Observa-se que, frequentemente, o parâmetro que representa o dano nesta última abordagem não é entendido com um significado físico.

Uma ferramenta eficiente para modelar o comportamento equivalente de materiais fraturados é a teoria da homogeneização. Segundo Dormieux e Kondo (2016), essa abordagem consiste em simplificar o tratamento matemático de meios heterogêneos, considerando-os um problema homogêneo equivalente (evidenciando assim a principal vantagem da mecânica do dano). Além disso, a teoria da homogeneização fornece uma interpretação física para a variável que representa o dano na escala macroscópica com base no *upscaling* das microfraturas existentes na escala microscópica do material.

Um número significativo de estudos têm demonstrado sucesso na avaliação da propagação de dano em materiais com descontinuidades. Contudo, a maioria destes estudos restringe o comportamento mecânico das descontinuidades a fissuras, limitando assim a aplicabilidade da formulação a descontinuidades abertas (BUDIANSKY; O'CONNELL, 1976; CASTAÑEDA; WILLIS, 1995; BART, 2000; PENSÉE et al., 2002). Um menor número de estudos investigam o comportamento mecânico tratando as descontinuidades como fraturas, que se caracterizam por transferir esforços normais e tangenciais (MAGHOUS et al., 2014; AGUIAR; MAGHOUS, 2018; MAGHOUS et al., 2021). Para além do comportamento efetivo, alguns trabalhos têm utilizado a teoria micromecânica para formular novos modelos de dano na escala macroscópica com base em parâmetros microscópicos das fraturas e da matriz sólida (KRAJGINOVIC; FANELLA, 1986; DORMIEUX et al., 2006a; NGUYEN; DORMIEUX, 2015). No entanto, é importante notar que poucos estudos abordam a distribuição/propagação anisotrópica de fissuras utilizando a micromecânica (PENSÉE et al., 2002; WULFINGHOFF et al., 2017).

A maior contribuição deste trabalho consiste em investigar o comportamento equivalente e a propagação anisotrópica de fraturas utilizando a teoria da homogeneização. O presente estudo aborda a situação particular de materiais microfraturados, focando exclusivamente no domínio elástico. As aplicações estendem-se principalmente a geomateriais como rochas, concreto ou pavimentos asfálticos. Nesta perspectiva, é fundamental citar as contribuições relevantes de Maghous et al. (2013) e Maghous et al. (2014), que propuseram uma abordagem geral baseada na micromecânica para o comportamento poroelástico de rochas com juntas. Estes autores

abordaram os casos particulares de uma matriz rochosa cortada por uma rede de juntas curtas paralelas e de um meio rochoso contendo juntas orientadas aleatoriamente. O núcleo do raciocínio desenvolvido neste trabalho consiste em estender a formulação de uma família acima à situação em que o material contém múltiplas famílias de microfraturas. Uma vez determinadas as propriedades equivalentes do meio, são avaliadas as condições de propagação do dano, combinando a abordagem micromecânica com conceitos termodinâmicos macroscópicos. É dada ênfase particular à anisotropia do comportamento induzida a nível macroscópico pelas orientações privilegiadas das microfraturas.

## 1.1 OBJETIVOS

Este trabalho tem por objetivo principal determinar a rigidez efetiva de materiais elásticos com múltiplas famílias de microfraturas utilizando a teoria da homogeneização e avaliar a propagação de dano contínuo nestes materiais via raciocínio micromecânico acoplado a argumentos termodinâmicos macroscópicos.

Para atingir o objetivo principal deste trabalho, foram estabelecidos objetivos intermediários, que precisam ser previamente concluídos. Então, temos os seguintes objetivos específicos:

- a) Determinar a rigidez efetiva de um material elástico com uma única família de microfraturas paralelas através de esquemas de homogeneização baseados no problema de Eshelby e validar com os resultados obtidos por Maghous et al. (2013);
- b) Determinar a rigidez efetiva de um material elástico com uma distribuição isotrópica de microfraturas via teoria da homogeneização e validar com os resultados obtidos por Maghous et al. (2014);
- c) Estimar a rigidez efetiva de um material elástico com múltiplas famílias de microfraturas com orientações e densidades distintas utilizando esquemas de homogeneização;
- d) Interpretar as densidades de fraturas como parâmetros de dano no nível do material homogeneizado e empregar o raciocínio micromecânico acoplado a argumentos termodinâmicos macroscópicos para avaliar as condições de propagação de dano contínuo em um material elástico com diferentes distribuições de microfraturas;
- e) Formular o critério de propagação de dano no nível do meio homogeneizado, assim como a lei da sua evolução para materiais com diversas famílias de microfraturas.

## 1.2 METODOLOGIA

Com o intuito de alcançar os objetivos são empregadas as ferramentas da micromecânica para determinar a rigidez efetiva de meios heterogêneos através da teoria da homogeneização. A partir do problema da inclusão equivalente de Eshelby, será utilizada a estimativa de Mori-Tanaka para formular aproximações das propriedades elásticas de geomateriais fraturados. Diante disso, as fraturas são modeladas geometricamente como esferoides oblatos, dotados de propriedades elásticas adequadas. Uma vez determinadas as propriedades efetivas do meio homogeneizado genéricas para diferentes casos particulares, são avaliadas as condições de propagação de dano contínuo, aliando a micromecânica à raciocínios termodinâmicos no conceito da mecânica da fratura. Os conceitos energéticos no contexto da termodinâmica servirão de base para formular o critério de propagação de dano. A lei de evolução de dano será definida a partir do potencial de dano introduzido no nível do meio homogeneizado. Ênfase particular será dedicada a anisotropia do comportamento induzida no nível macroscópico pelas orientações privilegiadas das microfraturas. Por fim, são realizadas inúmeras aplicações numéricas com o objetivo de exibir as principais características do comportamento homogeneizado de materiais microfraturados, bem como verificar a influência dos seus parâmetros.

## 1.3 JUSTIFICATIVA

A análise das propriedades mecânicas é fundamental para todo material a ser empregado em qualquer estrutura de engenharia, como maquinários, veículos, projetos de engenharia civil, próteses, entre outros. Segundo François et al. (2012), a importância da consideração do comportamento mecânico dos materiais e seus constituintes impacta diretamente em desastres sociais e econômicos. Por exemplo, em dezembro de 2000, abriu-se uma trinca em uma solda no eixo de 3 m de diâmetro da barragem Grande Dixence, descarregando cerca de 27.000 metros cúbicos de água na encosta da montanha. Esse fenômeno arrastou rochas, árvores e casas, varrendo lama e matando três pessoas. Outro acidente ocorreu no Japão, um Boeing caiu na encosta de uma montanha devido a uma falha no painel de alumínio que fechava a parte traseira do compartimento de passageiros. Foi constatado que havia rachaduras de fadiga mal reparadas, o que ocasionou o acidente.

Também existem casos em que o acúmulo de conhecimento tornou possível evitar ou pelo menos reduzir a gravidade de algumas catástrofes. A partir do uso de ultrassônicos em ensaios não destrutivos foram detectadas trincas de 7 mm de profundidade no aço carbono sob o revestimento de aço inoxidável no recipiente de um reator nuclear que gerava grande parte da eletricidade da França. O conhecimento acumulado pelos peritos permitiu descobrir que nenhuma destas rachaduras se estenderão sob fadiga o suficiente para perfurar o revestimento interno

dentro de 40 anos. Da mesma forma, a investigação por testes não destrutivos das soldas do gasoduto de óleo do Alasca possibilitou que o *National Bureau of Standards* demonstrasse que as rachaduras encontradas não foram prejudiciais o suficiente para justificar que toda a estrutura fosse reconstruída (FRANÇOIS et al., 2012).

Neste contexto, Couégnat (2008), evidencia a importância de melhorar e desenvolver novas técnicas de cálculo e leis de comportamento apropriadas para cada material. O presente trabalho se justifica pela contribuição na descrição de modelos matemáticos capazes de representar o comportamento mecânico e evolução de dano de meios heterogêneos, com diferentes distribuições e orientações de microfraturas.

## 1.4 DELINEAMENTO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em seis Capítulos. A primeira seção visa contextualizar o tema proposto, abordando aspectos fundamentais que definem a sua importância no âmbito da engenharia. Neste cenário, são estabelecidos os principais objetivos deste trabalho, bem como a metodologia que identifica os meios para que estes sejam atingidos. Também é apresentada uma breve justificativa que retrata problemas práticos relacionados ao comportamento mecânico dos materiais fraturados.

O Capítulo 2 apresenta um conjunto de conceitos e ferramentas relacionadas aos temas centrais deste trabalho. O comportamento de meios fraturados é abordado, dando particular ênfase a caracterização de descontinuidades e seu comportamento mecânico. Na sequência, apresenta-se uma breve introdução a propagação de fraturas, fazendo referência a mecânica da fratura linear elástica e descrevendo o primeiro critério de propagação que foi formulado por Griffith (1921) baseado em leis da termodinâmica. Por fim, é explicada a teoria da homogeneização, conceituando volume elementar representativo e as condições de separação de escalas. São abordados tópicos referentes às clássicas condições de contorno homogêneas, Lema de Hill e métodos de homogeneização.

O Capítulo 3 descreve a lei de comportamento macroscópica para materiais elásticos fraturados, apresentando relações entre as escalas micro e macroscópica, a fim de determinar o tensor de rigidez homogeneizado. São abordados três casos particulares, referindo-se a um material com uma única família de fraturas paralelas, duas famílias de fraturas com diferentes orientações e por último, determina-se o caso de uma distribuição isotrópica (aleatória) de fraturas na matriz. Algumas ilustrações numéricas são desenvolvidas com o objetivo de exibir graficamente o comportamento equivalente de materiais fraturados. Além disso, demonstra-se a recuperação dos resultados relativos ao caso isotrópico com o aumento do número de famílias.

O Capítulo 4 consiste em interpretar a densidade de fraturas como um parâmetro de dano no nível do meio homogeneizado e empregar o raciocínio micromecânico acoplado a argumentos termodinâmicos macroscópicos para avaliar as condições de propagação de dano. Apresenta-se a formulação do modelo de dano contínuo assumindo a existência de um único parâmetro de dano, o que restringe o domínio de aplicações a situações que envolvem uma única família de fraturas paralelas ou uma distribuição isotropa de fraturas. Neste último, deve-se considerar ainda a aplicação de carregamentos macroscópicos também isotropos. Ao longo do capítulo, argumentos termodinâmicos e critérios de propagação específicos são ilustrados graficamente. Por fim, são desenvolvidos exemplos numéricos referentes ao modelo de dano formulado, a fim de ilustrar a evolução do dano e o efeito da propagação sobre o tensor de tensões.

No Capítulo 5 é proposta uma extensão do raciocínio termodinâmico desenvolvido no Capítulo 4 para uma situação na qual a rede de fraturas é composta por diversas famílias, cada uma associada a um parâmetro de dano, o que caracteriza um vetor de dano. O objetivo desta seção, é formular o critério de propagação de dano no nível do meio homogeneizado, assim como a sua lei de evolução no contexto de materiais elásticos considerando múltiplas famílias de fraturas. Também são apresentadas ilustrações gráficas dos argumentos termodinâmicos e exemplos numéricos referentes ao modelo de dano contínuo formulado, a fim de ilustrar a evolução do dano e o efeito da propagação sobre o tensor de tensões.

O Capítulo 6 refere-se às conclusões alcançadas ao longo de toda esta pesquisa. São evidenciados os procedimentos próprios e objetivos alcançados no decorrer do trabalho. Além disso, são comentadas as perspectivas futuras e sugestões para trabalhos futuros, indicando um caminho a ser seguido pelos pesquisadores interessados em dar continuidade a este tema.

## **2 MODELAGEM MICROMECAÂNICA DOS MEIOS FRATURADOS: CONCEITOS FUNDAMENTAIS**

O presente capítulo visa explicitar os conceitos que fundamentam esta pesquisa. Neste contexto, são apresentadas noções sobre o comportamento de meios fraturados, uma breve introdução ao critério de propagação de fraturas estabelecido por Griffith (1921), baseado em argumentos termodinâmicos e por fim noções sobre a teoria da homogeneização. O principal objetivo desta seção é familiarizar os leitores com os conceitos, termos e expressões essenciais utilizados durante a elaboração deste trabalho.

### **2.1 COMPORTAMENTO DE MEIOS FRATURADOS**

Grande parte dos materiais utilizados na engenharia, especialmente os geomateriais como rochas, concreto ou pavimentos asfálticos exibem superfícies de descontinuidade em diferentes escalas com vários tamanhos e orientações. Normalmente, estas descontinuidades estão associadas a fraturas e correspondem a uma região de pequena espessura, ao longo da qual as propriedades mecânicas e físicas do material são degradadas (ATTA, 2004). A sua presença constitui uma das principais fragilidades para a deformabilidade, estabilidade e segurança de muitas estruturas de engenharia civil, reduzindo a rigidez, resistência ao cisalhamento e ductilidade, além de proporcionar canais preferenciais para o escoamento de fluidos (AGUIAR; MAGHOUS, 2018).

Diante disso, este tópico pretende descrever os aspectos gerais da ocorrência de fraturas em geomateriais, iniciando pela caracterização de seus parâmetros físicos e geométricos. Nas próximas subseções serão abordados os comportamentos mecânicos em compressão e cisalhamento destes elementos, além da distinção entre as formas de modelagem através das quais as fraturas são tratadas na engenharia.

#### **2.1.1 Caracterização das descontinuidades**

Um bom conhecimento da distribuição espacial e das propriedades referentes às descontinuidades no interior de um material é fundamental para formulação de seu comportamento. Por esta razão, é preciso avaliar as características físicas e geométricas que são utilizadas na sua caracterização e classificação (ATTA, 2004). Segundo Goodman (1976), as principais características de superfícies com descontinuidades incluem sua dimensão, forma, orientação, separação por famílias, rugosidade e resistência.

A dimensão das descontinuidades é dada tanto em escala cristalina, quanto em escala geodésica e representa uma das características mais importantes destes elementos, uma vez que a relação entre o tamanho da descontinuidade e da estrutura analisada implica diferentes abordagens para a modelagem (JAEGER et al., 2007). Nos casos em que as descontinuidades são pequenas quando comparadas à estrutura, é possível incorporá-las ao meio e determinar as propriedades diretamente deste meio descontínuo, através de técnicas de homogeneização, por exemplo. Por outro lado, quando as descontinuidades exibem grandes dimensões, é preciso analisá-las individualmente, conhecendo as propriedades do material que as envolve.

As descontinuidades exibem diferentes formas, sendo classificadas como cilíndricas quando apresentam uma dimensão com ordem de grandeza superior às demais. Em geral, este tipo de descontinuidade está associado a canais de percolação de fluidos. Outra forma comum trata-se das descontinuidades planares (fraturas), as quais alteram profundamente as propriedades mecânicas do meio (GOODMAN, 1976). Por último, identificam-se os poros caracterizados por vazios com três dimensões da mesma ordem de grandeza. Ao longo deste trabalho, o termo descontinuidades irá se restringir a fraturas.

A orientação das fraturas também influencia fortemente o comportamento mecânico do meio e pode ser definida através de um vetor normal à superfície posicionado sobre um sistema geral de coordenadas. Fraturas que apresentam a mesma orientação em uma matriz sólida são comumente chamadas de fraturas paralelas e quando são aleatoriamente distribuídas no meio caracterizam-se por fraturas isotrópicas, como ilustra o esquema da Figura 2.1. Nesta perspectiva, é conveniente introduzir o conceito de famílias, isto é, um grupo de fraturas de propriedades idênticas orientadas pelo mesmo vetor normal. O principal sentido de agrupar fraturas em famílias reflete-se em dois aspectos: facilitar o tratamento matemático e a interpretação das propriedades relativas a cada grupo de fraturas.

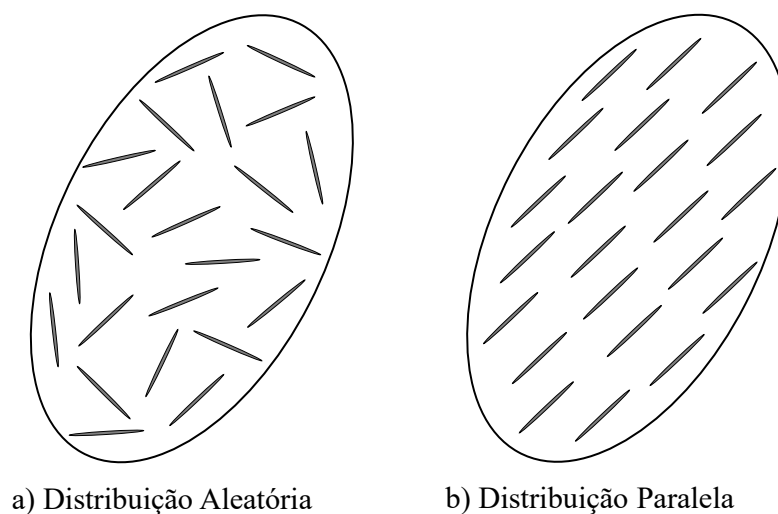


Figura 2.1 – Orientação das fraturas



As fraturas apresentam diversas propriedades, algumas delas são elencadas a seguir, com base nos trabalhos de Jaeger et al. (2007) e Bieniawski (1989):

- a) Abertura: distância perpendicular entre as superfícies da fratura, na qual o espaço entre elas pode ser preenchido por ar, água ou outro material de enchimento.
- b) Rugosidade: designa o grau relativo de irregularidades e ondulações nas paredes de uma fratura em relação aos seus planos médios.
- c) Espaçamento: representa a distância média entre duas fraturas, assumindo-se como o espaçamento da família a distância média entre fraturas subsequentes.
- d) Grau de fraturamento: indica a quantidade de fraturas em relação a um determinado volume do material. Materiais com maior grau de fraturamento são mais frágeis e propensos à ruptura.

É importante ressaltar que existe uma infinidade de características e propriedades geométricas relacionadas as descontinuidades. Nesta seção, são abordados apenas os tópicos mais relevantes para o desenvolvimento deste trabalho.

## 2.1.2 Comportamento mecânico

As propriedades mecânicas de uma fratura são determinadas pela análise de seu comportamento sob tensão normal ou tangencial. Para definir o seu comportamento mecânico é preciso avaliar a relação entre as tensões aplicadas e os deslocamentos relativos entre as suas faces. Este comportamento é usualmente descrito pela relação  $\underline{T} = f([\underline{\xi}])$ , onde  $\underline{T}$  representa o vetor tensão agindo sobre a fratura e  $[\underline{\xi}]$  designa o salto de deslocamento através dela (ATTA, 2004).

Os ensaios experimentais de Goodman (1976) e Bandis et al. (1983) evidenciaram o comportamento típico de fraturas nas direções normal e tangencial, obtendo assim as propriedades mecânicas em compressão e cisalhamento. Estes parâmetros referem-se aos termos de rigidez normal ( $k_n$ ) e tangencial ( $k_t$ ), que são dados de entrada fundamentais para modelos físicos explícitos e técnicas de aproximação numérica. A rigidez normal, por exemplo, está essencialmente ligada a problemas de injeção de fluido e extração de rochas fraturadas.

### 2.1.2.1 Comportamento em compressão

O ensaio de compressão, ilustrado pela Figura 2.2, avalia o fechamento da fratura através da diferença entre a deformação de um corpo de prova são e de um corpo de prova com uma fratura. Nesta análise, o deslocamento relativo na direção tangencial à fratura é frequentemente negligenciado (ATTA, 2004).

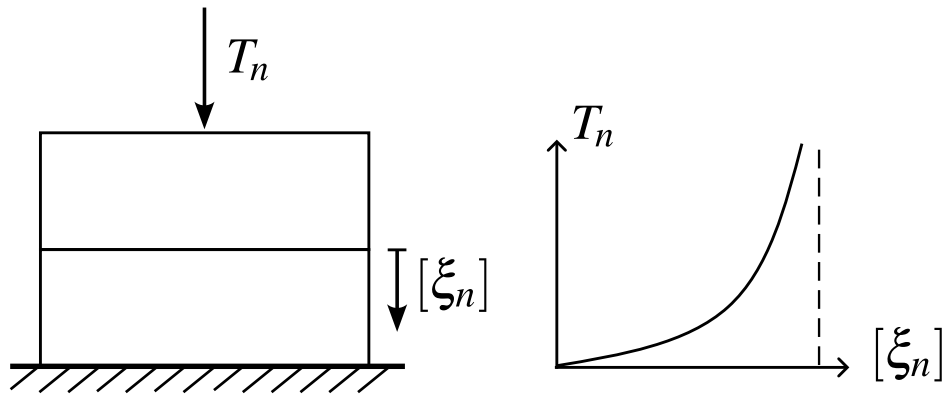


Figura 2.2 – Ensaio de compressão normal em uma fratura (Adaptado de Atta (2004))

Em geral, a relação obtida é não linear e pode ser modelada por uma lei hiperbólica entre a tensão normal e o fechamento normal, representada por:

$$T_n = \frac{[\xi_n] k_n V_m}{V_m - [\xi_n]} \quad (2.1)$$

onde  $V_m$  define o fechamento máximo da fratura (Equação 2.2) e  $k_n$  designa a rigidez normal da fratura, que pode ser determinada pela derivada de  $T_n$  em relação ao deslocamento normal  $[\xi_n]$  (Equação 2.3). Ambos são normalmente obtidos de forma experimental (ATTA, 2004).

$$V_m = \lim_{T_n \rightarrow \infty} [\xi_n] \quad (2.2)$$

$$k_n = \left. \frac{dT_n}{d[\xi_n]} \right|_{[\xi_n]=0} \quad (2.3)$$

#### 2.1.2.2 Comportamento em cisalhamento

O comportamento mecânico de uma fratura em cisalhamento é descrito pela relação entre uma tensão tangente  $T_t$  aplicada à descontinuidade e o salto de deslocamento tangencial relativo  $[\xi_t]$ , como representa a Figura 2.3. Neste ensaio observa-se um aumento da tensão  $T_t$  até um valor de pico e depois sua diminuição até uma tensão residual que determina o deslizamento das faces. Enquanto isso, nota-se que a rigidez tangente  $k_t$  apresenta um trecho inicial decrescente até a tensão de pico e depois tende a se estabilizar (ATTA, 2004).

Ao contrário do comportamento em compressão, neste teste não se pode desprezar o deslocamento normal relativo (perpendicular à direção do carregamento). Durante esta análise, os saltos de deslocamentos normais  $[\xi_n]$  e tangenciais  $[\xi_t]$  são relacionados entre si por um ângulo dilatante  $c$ , indicado na Equação 2.4 (ATTA, 2004):

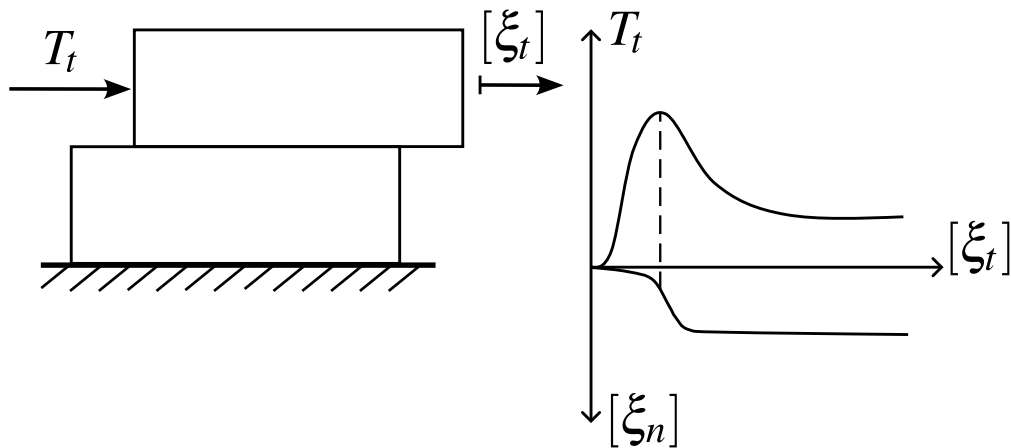


Figura 2.3 – Ensaio de cisalhamento de uma fratura (Adaptado de Atta (2004))

$$c = \arctan \left( \frac{d[\xi_n]}{d[\xi_t]} \right) \quad (2.4)$$

### 2.1.2.3 Linearização do comportamento mecânico

Os comportamentos em compressão e cisalhamento apresentam uma forte não linearidade, o que dificulta os procedimentos matemáticos, por isso é usual linearizar estas relações mantendo a validade dos ensaios quando em pequenos deslocamentos. Diante disso, considera-se a formulação usada por Aguiar (2021) para linearizar as relações com  $k_n$  e  $k_t$ , independentes da tensão aplicada:

$$T_n = k_n [\xi_n] \quad \text{e} \quad T_t = k_t [\xi_t] \quad (2.5)$$

Do ponto de vista tridimensional, o parâmetro que assume o papel da rigidez da fratura é definido como um tensor de segunda ordem  $\underline{k} = \underline{k}([\underline{\xi}])$  e descreve a relação entre o vetor tensão e o salto de deslocamentos:

$$\underline{T} = \underline{k} \cdot [\underline{\xi}] \quad (2.6)$$

A orientação dos eixos é determinada pela base ortonormal  $(\underline{t}, \underline{t}', \underline{n})$ . Assumindo a isotropia no plano da fratura, a sua rigidez  $\underline{k}$  é expressa por:

$$\underline{k} = k_n (\underline{n} \otimes \underline{n}) + k_t (\underline{t} \otimes \underline{t} + \underline{t}' \otimes \underline{t}') \quad (2.7)$$

na qual, os termos  $k_n$  e  $k_t$  são denominados de rigidezes normal e tangencial, respectivamente.

### 2.1.3 Modelagem discreta e contínua

Nesta subseção serão abordadas duas formas distintas de modelagem, denominadas discreta e contínua. Segundo Atta (2004), o caso em que o meio é avaliado na escala das fraturas e a análise da estabilidade é definida fazendo a distinção geométrica entre as fraturas e a matriz sólida, é reconhecido como modelagem discreta ou descontínua do meio. Essa abordagem requer o mapeamento das fraturas significativas de um material, permitindo realizar uma modelagem que leve em conta todas as particularidades do meio. A modelagem discreta expressa resultados mais precisos, uma vez que a geometria do meio fraturado é representada de forma mais próxima da realidade. É conveniente especificar que essa análise apresenta maior eficácia quando a rede de fraturas é esparsa e torna-se mais complexa e cara computacionalmente à medida que a rede se torna mais densa (ANDERSON, 2005).

A abordagem contínua, descrita por Atta (2004), é mais adequada para o estudo de meios fortemente fraturados. Este procedimento consiste em observar o material a partir de uma escala em que as fraturas não podem ser distinguidas da matriz sólida, avaliando o comportamento do material como um meio homogêneo. Portanto, as fraturas não são mais modeladas individualmente, mas sim incorporadas ao meio através de algum método ou esquema de homogeneização. Nesta abordagem determina-se o comportamento equivalente do material e não é possível determinar as propriedades individuais de cada fratura.

A análise de resultados analíticos ou numéricos para meios com altas densidades de fraturas é, geralmente, feita através de uma modelagem contínua, uma vez que são requisitadas menos hipóteses iniciais capazes de simplificar o problema para atingir os resultados. A principal diferença desta metodologia em relação à abordagem discreta é que os resultados à nível da estrutura são mais importantes do que os individuais de cada fratura (ANDERSON, 2005).

Embora as modelagens apresentem propostas distintas, é possível combiná-las em alguns casos específicos, com o objetivo de extrair o melhor de cada uma. À exemplo disso, citam-se os maciços rochosos, que apresentam tanto fraturas de grande extensão que precisam ser modeladas individualmente quanto famílias de fraturas curtas que devem ser modeladas de forma contínua.

### 2.1.4 Propagação de uma única fratura no meio

A mecânica da fratura elástica linear clássica visa descrever a propagação de uma única fratura plana em um meio elástico, como ilustra a Figura 2.4, sendo  $P$  o carregamento externo e  $s$  a área da fratura vista como uma superfície bidimensional (LEBLOND, 2003). As formas de propagação distinguem-se entre o crescimento, que se caracteriza pelo aumento da dimensão da fratura, e a nucleação, responsável pelo aparecimento de novas fraturas no meio. Diversos modelos restringem-se à ausência de nucleação, avaliando a propagação apenas pelo crescimento

das fraturas já existentes no meio, que é o caso dos critérios de propagação postulados neste trabalho.

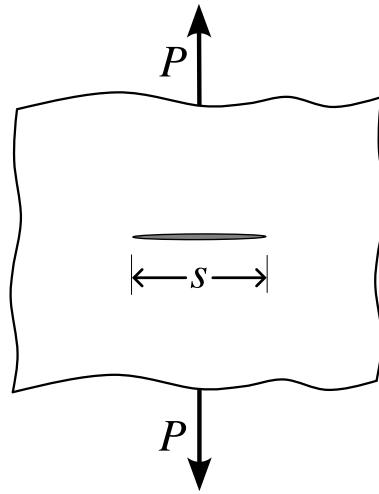


Figura 2.4 – Ilustração do meio com uma única fratura

O primeiro critério de propagação de fraturas foi formulado por Griffith (1921) baseado em leis da termodinâmica para estudar a dissipação de energia durante a propagação. Essa formulação mostrou-se muito eficiente para materiais elásticos frágeis (vítreos). Nos anos seguintes, foram estabelecidos critérios voltados a outros materiais, como nos trabalhos de Dugdale (1960), Irwin (1961) e Bieniawski (1967). A abordagem proposta por Griffith em sua teoria ainda é fortemente empregada na análise de propagação de fraturas, servindo de base para o desenvolvimento de novos critérios de propagação.

Para apresentar o critério de propagação de Griffith (1921) no quadro termodinâmico se introduz a densidade volumétrica de energia livre  $\psi$ , que corresponde à energia elástica de deformação no caso isotérmico. Assumindo evoluções elásticas isotérmicas, as variáveis de estado de  $\psi$  são o tensor das deformações  $\underline{\underline{\epsilon}}$  e a área da fratura  $s$ :

$$\psi = \psi(\underline{\underline{\epsilon}}, s) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbb{C}(s) : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (2.8)$$

onde  $\mathbb{C}(s)$  corresponde à rigidez global do sistema. Baseando-se no critério estabelecido por Griffith (1921), a dissipação intrínseca de energia, denotada por  $\mathcal{D}$ , é definida como a diferença entre a potência das forças externas  $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$  e a energia armazenada  $\dot{\psi}$ . A combinação do primeiro e segundo princípios da termodinâmica fornece a desigualdade de Clausius-Duhem (ver Lemaitre e Chaboche (1990)):

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \dot{\psi} = \left( \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \right) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \frac{\partial \psi}{\partial s} \dot{s} \geq 0 \quad (2.9)$$

que é válida para qualquer evolução do material. O raciocínio clássico consiste em considerar evoluções reversíveis ( $\mathcal{D} = 0$ ), o que significa  $\dot{s} = 0$ . A existência de tais evoluções fornece a equação de estado elástica:

$$\mathcal{D} = \left( \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = 0 \quad \forall \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.10)$$

e aplicando a Equação 2.10 sobre a Equação 2.9, escreve-se:

$$\mathcal{D} = -\frac{\partial \psi}{\partial s} \dot{s} \geq 0 \quad (2.11)$$

Tal como no trabalho de Griffith (1921), a desigualdade acima mostra que a quantidade  $-\partial \psi / \partial s$  assume o papel da força termodinâmica associada com a propagação. Esta grandeza é classicamente conhecida como taxa de liberação de energia  $\mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}, s)$ :

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial \psi}{\partial s}(\underline{\underline{\varepsilon}}, s) = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathbb{C}(s)}{\partial s} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.12)$$

A partir da definição da taxa de liberação de energia, pode-se escrever um critério de propagação como uma condição a ser satisfeita por  $\mathcal{F}$ . A forma mais simples é assumir que uma fratura se propaga quando  $\mathcal{F}$  atinge um valor crítico, denominado energia crítica da fratura  $\mathcal{F}_f$ , tal que (DORMIEUX et al., 2006b) :

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_f \leq 0; \quad \dot{s} \geq 0; \quad (\mathcal{F} - \mathcal{F}_f) \dot{s} = 0 \quad (2.13)$$

e

$$\dot{s} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D} = \mathcal{F}_f \dot{s} > 0 \quad (2.14)$$

A grandeza  $\mathcal{F}_f$  deve ser interpretada como a energia crítica para uma fratura isolada introduzida por Griffith. Este parâmetro é uma propriedade do material e caracteriza a energia por unidade de superfície que é irreversivelmente dissipada na forma de aumento da área da fratura, ou seja da sua propagação (GRIFFITH, 1921). Em síntese, se  $\mathcal{F} < \mathcal{F}_f$  não existe propagação de fraturas, já quando  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_f$  a energia disponível ao material alcançou o limite para propagação, permitindo que as fraturas se propaguem.

## 2.2 HOMOGENEIZAÇÃO

A maioria dos materiais conhecidos exibe entre a escala da estrutura atômica/molecular e sua escala macroscópica um nível intermediário de heterogeneidades microestruturais. Essas heterogeneidades se caracterizam pela presença de descontinuidades, incluindo poros e fraturas, ou alterações em sua estrutura cristalina (FRANÇOIS et al., 2012). Segundo Dormieux e Ulm (2005), a descrição do comportamento destes materiais pode ser realizada de forma contínua, utilizando as ferramentas da micromecânica.

A micromecânica fornece ligações entre as propriedades macroscópicas do material e sua microestrutura e possibilita substituir os meios heterogêneos por um homogêneo, cuja descrição é válida na escala da estrutura em relação à escala das heterogeneidades (ZHU et al., 2007). O meio homogêneo deverá ser determinado como um meio equivalente contínuo e o comportamento macroscópico deve ser intrínseco ao meio e à excitação, ou seja, deve ser independente das condições de contorno macroscópicas (DORMIEUX; ULM, 2005).

Uma das formas para representar o material homogêneo é a abordagem diretamente macroscópica, que é frequentemente associada a ensaios experimentais, também chamada de fenomenológica. Os ensaios sobre o material fornecem uma resposta equivalente sob influência das heterogeneidades no comportamento final do material, neste caso a caracterização mecânica das fases torna-se desnecessária (DORMIEUX; ULM, 2005). Um exemplo clássico remete ao concreto, pois em uma análise visual verifica-se a existência de agregados graúdos e da nata cimentícia, contudo, os ensaios de caracterização mecânica do concreto extraem resultados referentes ao meio equivalente (concreto) e não às fases (agregados ou nata cimentícia).

A abordagem mencionada é adequada para a caracterização de materiais reais, sendo ineficiente para otimizar propriedades mecânicas quando o volume das fases é indefinido, ou em materiais cujo volume das fases varia ao longo do tempo. Nestes casos é pertinente utilizar a técnica de *upscaling*, que permite a descrição contínua macroscópica equivalente a partir da definição de um Volume Elementar Representativo ( $V_{ER}$ ) (DORMIEUX et al., 2006b). Essa descrição equivalente denomina-se homogeneizada e refere-se diretamente à teoria da homogeneização, que será mais bem conceituada nas subseções seguintes.

### 2.2.1 Teoria da homogeneização

A teoria da homogeneização consiste em um conjunto de ferramentas matemáticas capazes de determinar as propriedades de um material heterogêneo baseando-se no conhecimento das propriedades das fases que o constituem. Em síntese, a homogeneização corresponde a uma transformação de um meio heterogêneo em um meio homogêneo equivalente e seu objetivo é simplificar o tratamento matemático do problema (DORMIEUX; ULM, 2005; DORMIEUX et al.,

2006b). François et al. (2012) descrevem que a premissa de substituir um material heterogêneo por um homogêneo deve levar em consideração o comportamento mecânico das heterogeneidades, a fim de vincular suas não-uniformidades locais nos campos de tensão/deformação ao meio homogêneo equivalente.

Neste âmbito, se pressupõe a existência de duas escalas materiais. A escala local (escala microscópica), na qual o material é heterogêneo com fases distinguíveis entre si, e a escala global (escala macroscópica), na qual o material deverá ser substituído pelo meio homogêneo equivalente, como representa o esquema da Figura 2.5. Apesar dessa divisão sugerir a existência de apenas duas escalas, Dormieux e Ulm (2005) destacam que os materiais são por natureza multifásicos, com heterogeneidades que se manifestam desde a nanoescala até a macroescala. Portanto, cada fase sempre poderá ser decomposta por mais heterogeneidades.

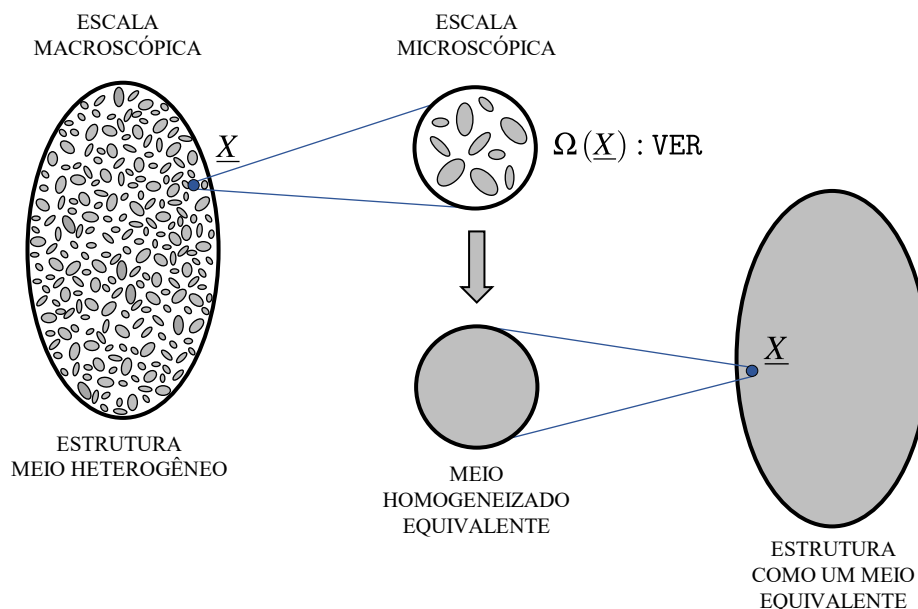


Figura 2.5 – Ilustração simplificada do processo de homogeneização

Para aplicar a teoria da homogeneização é preciso que a substituição do material heterogêneo por um homogêneo equivalente permaneça válida no nível estrutural e que os modelos microscópico e macroscópico apresentem resultados médios idênticos (FRANÇOIS et al., 2012). Dormieux e Kondo (2016) enfatizam que o comportamento do material avaliado pode ser obtido da resposta de um volume elementar, o qual deverá manter a representatividade de todas as suas características. Este volume classifica-se conforme a distribuição das heterogeneidades presentes no meio. Quando ocorre uma distribuição periódica ao longo da estrutura, o volume denomina-se Célula de Base (CB), como ilustra a Figura 2.6. Já para distribuições desordenadas, chama-se de Volume Elementar Representativo (VER) e requer um tratamento estatístico (Figura 2.7).

Segundo Dormieux et al. (2006b), para que um determinado volume ofereça resultados



matematicamente corretos, é fundamental que ele cumpra a condição de separação de escalas  $d \ll \ell \ll L$ . Os termos  $L$  e  $\ell$  são, respectivamente, os comprimentos característicos da estrutura e do VER (ou CB), enquanto  $d$  representa o tamanho característico das heterogeneidades locais. A premissa  $\ell \ll L$  garante que os campos locais não afetem o comportamento da estrutura no nível macroscópico. Portanto, este volume caracteriza uma parte infinitesimal do volume tridimensional avaliado e sua existência é essencial para a representação macroscópica contínua do sistema físico. A condição  $d \ll \ell$  confere ao VER seu caráter representativo e estatístico das heterogeneidades presentes na escala microscópica, garantindo um significado às propriedades resultantes do processo de homogeneização (BARTHÉLÉMY, 2005).

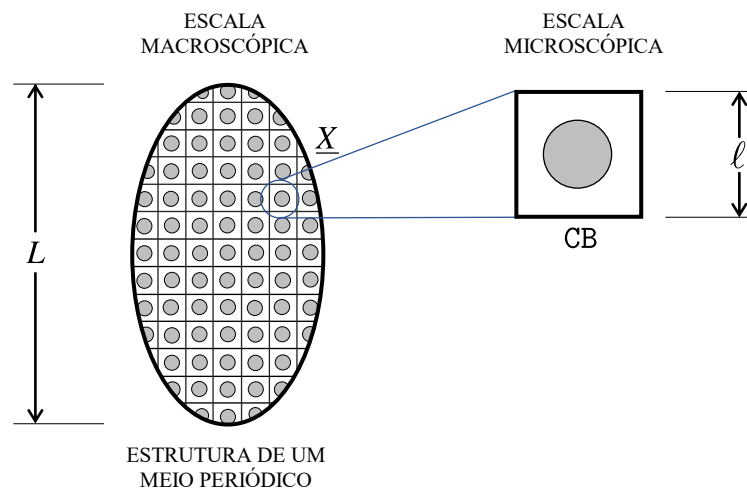


Figura 2.6 – Meio periódico e conceito de célula de base

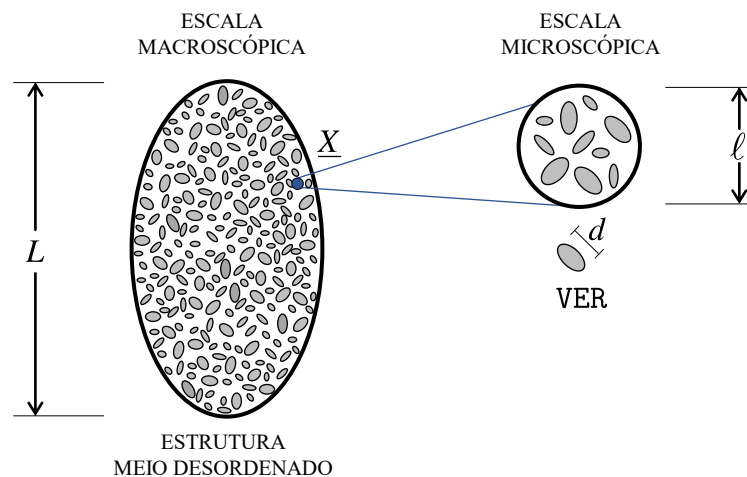


Figura 2.7 – Meio heterogêneo aleatório e conceito de volume elementar representativo

Em meios periódicos deve-se garantir apenas a premissa  $\ell \ll L$ , visto que não há necessidade de um tratamento estatístico, pois a representatividade é automaticamente satisfeita a partir da definição da CB. Contudo, em meios desordenados não há como determinar um VER que se

repete de forma idêntica em todos os pontos da estrutura, então o tamanho característico das heterogeneidades também deve ser muito pequeno em relação ao tamanho do volume elementar, de forma a assegurar a sua representatividade (AGUIAR, 2021). Como as fraturas, geralmente, se distribuem de forma desordenada no meio, adota-se a abordagem estatística baseada no VER ao longo deste trabalho.

Dormieux et al. (2006b) destacam que na escala macroscópica o VER é definido por um vetor posição  $\underline{X}$  e a ordem de grandeza característica da variação de  $\underline{X}$  é o tamanho  $L$  do sistema de materiais avaliados. Este sistema é composto por elementos diferentes, o que configura seu caráter heterogêneo. Um exemplo clássico disso remete a um problema da poromecânica, em que temos a fase sólida e uma ou várias fases fluidas. Do ponto de vista macroscópico se considera cada fase do material como uma partícula macroscópica, com o objetivo de explicar a natureza heterogênea do meio poroso. Todas essas partículas estão localizadas no mesmo ponto  $\underline{X}$ , ou seja, na macroescala o VER é visto como a superposição dessas partículas no tempo e no espaço.

### 2.2.2 Regra das médias

A regra das médias é frequentemente utilizada no processo de determinação das propriedades efetivas de materiais heterogêneos. O objetivo é aproximar as quantidades físicas representativas do comportamento macroscópico do material através de relações entre médias, as quais conduzem a campos médios volumétricos definidos na porção representativa do material (VER). Em análises puramente mecânicas, as referidas quantidades físicas relacionam as médias volumétricas de tensão e deformação (DORMIEUX et al., 2006b). O operador média  $\langle \cdot \rangle$  atuando sobre uma quantidade física  $Q$  definida no volume elementar representativo  $\Omega(\underline{x})$  é dado por (MAGHOUS et al., 2014):

$$\langle Q \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Q(\underline{x}) d\Omega \quad (2.15)$$

onde  $\underline{x}$  caracteriza o vetor posição. É necessário representar matematicamente o fato de que  $\Omega(\underline{x})$  está submetido a um determinado estado de tensão ou deformação. Na escala macroscópica, definem-se as tensões e deformações por  $\underline{\underline{\Sigma}}$  e  $\underline{\underline{E}}$ , respectivamente, enquanto na escala microscópica, esses estados são descritos pelos campos  $\underline{\underline{\sigma}}$  e  $\underline{\underline{\epsilon}}$ . Partindo da Equação 2.15 pode-se estabelecer uma ligação entre as tensões e deformações na escala macroscópica através de suas médias na escala microscópica  $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle$  e  $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle$  (DORMIEUX; KONDO, 2016):

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) d\Omega \quad (2.16)$$

e

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}) d\Omega \quad (2.17)$$

### 2.2.3 Condições de contorno e Lema de Hill

As relações de média entre as sollicitações e os campos locais não permitem uma única definição do problema. À vista disso, é necessário adotar condições de contorno a serem aplicadas sobre o VER compatíveis com as relações de média apresentadas na subseção 2.2.2. Para materiais passíveis de homogeneização a solução deve levar a respostas médias iguais, independentemente das condições de contorno adotadas. Portanto, adotam-se condições de contorno matematicamente simples, como tensão homogênea ou deformação homogênea aplicada em todo o contorno do VER (HILL, 1963; HILL, 1967; HASHIN, 1983).

Para definir um problema de valor de contorno no VER através de uma abordagem em condições de tensão homogênea (Figura 2.8) deve-se prescrever o carregamento  $\underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}$  agindo na fronteira  $\partial\Omega$  da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \quad (2.18)$$

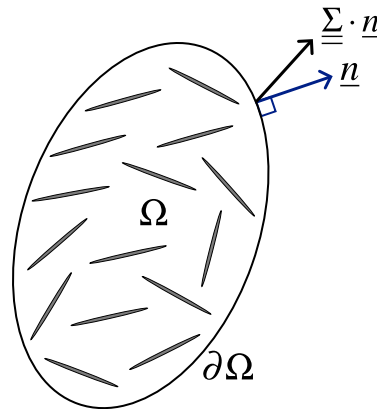


Figura 2.8 – Tensão homogênea prescrita na fronteira do VER

Considerando um campo de tensão  $\underline{\underline{\sigma}}$  definido no VER e estaticamente admissível (EA), isto é, que satisfaça o equilíbrio local ( $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0$ ) e seja compatível com a Equação 2.18, tem-se:

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{x} \otimes \underline{\underline{\sigma}}) d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{x} \otimes \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{x} \otimes \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{n} dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{x} \otimes \underline{\underline{\Sigma}}) d\Omega = \frac{\underline{\underline{\Sigma}}}{|\Omega|} \int_{\Omega} d\Omega = \underline{\underline{\Sigma}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

e por definição assume-se a deformação macroscópica  $\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\Omega}$ .

Outra forma para definir o problema de valor de contorno no VER é através de uma abordagem em condições de deformação homogênea (Figura 2.9) que consiste em prescrever o campo de deslocamento  $\underline{\underline{\xi}}$  na fronteira  $\partial\Omega$  da seguinte forma:

$$\underline{\xi}(x) = \underline{E} \cdot x \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (2.20)$$

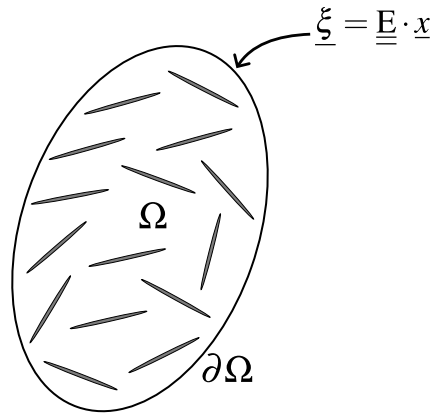


Figura 2.9 – Deformação homogênea prescrita na fronteira do VER

Para qualquer campo de deslocamento  $\underline{\xi}$  definido no VER e cinematicamente admissível (CA), compatível com Equação 2.20, pode-se mostrar que a deformação  $\underline{\varepsilon} = \nabla^s \underline{\xi} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\xi} + {}^t \nabla \underline{\xi})$  associada ao deslocamento  $\underline{\xi}$  verifica que:

$$\begin{aligned} \langle \underline{\varepsilon} \rangle_{\Omega} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \nabla^s \underline{\xi} d\Omega = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\underline{\xi} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{\xi}) dS \\ &= \frac{\underline{E}}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\underline{x} \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \underline{x}) dS = \frac{\underline{E}}{|\Omega|} \int_{\Omega} \nabla^s \underline{x} d\Omega = \frac{\underline{E} \cdot \underline{1}}{|\Omega|} \int_{\Omega} d\Omega = \underline{E} \end{aligned} \quad (2.21)$$

e por definição, adota-se a tensão macroscópica como  $\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle_{\Omega}$ .

As deduções da teoria da homogeneização baseiam-se em uma notável consequência da estrutura particular das condições de contorno uniformes, apresentadas nas Equações 2.18 e 2.20, que é referida como o Lema de Hill. A ideia é conhecer os efeitos causados pela mudança de escala sobre a expressão da energia mecânica de deformação. Partindo da média volumétrica da energia de deformação microscópica  $\langle \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \rangle_{\Omega}$  tem-se (DORMIEUX et al., 2006b):

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \nabla^s \underline{\xi} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\xi} \cdot \underline{\sigma}) d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{\xi} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} dS \quad (2.22)$$

onde  $\underline{\sigma} : \nabla^s \underline{\xi} = \text{div}(\underline{\xi} \cdot \underline{\sigma})$  é obtido através da integração por partes, com  $\underline{\sigma}$  simétrico. Finalmente, aplicando o teorema da divergência aliado a condição de contorno em tensão homogênea da Equação 2.18, obtém-se:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{\xi} \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{n} dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\xi} \cdot \underline{\Sigma}) d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \underline{\Sigma} : \int_{\Omega} \nabla^s \underline{\xi} d\Omega = \underline{\Sigma} : \underline{E} \quad (2.23)$$

Destaca-se que a tensão macroscópica  $\underline{\underline{\Sigma}}$  é constante e a integral sobre  $\nabla^s \underline{\underline{\xi}}$  caracteriza a média volumétrica das deformações microscópicas que equivale à deformação macroscópica  $\underline{\underline{E}}$ . Em síntese, o raciocínio apresentado nas Equações 2.22 e 2.23 pode ser expresso de forma reduzida pela Equação 2.24 que estabelece o Lema de Hill.

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} \quad (2.24)$$

Segundo François et al. (2012), a Equação 2.24 é independente do comportamento constitutivo, ou seja,  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$  e  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$  não precisam estar associados um ao outro, não restringindo o Lema de Hill à elasticidade. Esta expressão é conceituada como: “a média volumétrica da energia de deformação microscópica deve ser igual à energia de deformação macroscópica” (DORMIEUX et al., 2006b).

Apesar da relação acima ter sido desenvolvida no quadro das condições de contorno em tensão homogênea, o Lema de Hill também pode ser deduzido a partir de condições de contorno em deformação homogênea, como sugere o procedimento da Equação 2.25.

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla^s \underline{\underline{\xi}} d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS \quad (2.25)$$

Após procedimento análogo ao anterior, emprega-se a condição de contorno em deformações homogêneas da Equação 2.20 sobre a Equação 2.25 e obtém-se:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} (\underline{x} \otimes \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) : \underline{\underline{E}} dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{x} \otimes \underline{\underline{\sigma}}) d\Omega : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} \quad (2.26)$$

Destaca-se que a deformação macroscópica  $\underline{\underline{E}}$  é constante e considerando a simetria do tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  tem-se a seguinte relação:  $\text{div}(\underline{x} \otimes \underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\sigma}}$ . Portanto, a integral sobre esta quantidade define a média volumétrica das tensões microscópicas, o que caracteriza a tensão macroscópica  $\underline{\underline{\Sigma}}$ . Ao comparar a Equação 2.26 com a Equação 2.23, nota-se que ambas as soluções são idênticas.

O raciocínio matemático desenvolvido acima, tanto em tensões quanto em deformações homogêneas, requer que condições sobre  $\underline{\underline{\sigma}}$  e  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  sejam satisfeitas. O campo de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$  deve ser EA, satisfazendo a condição de balanço de momentos ( $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0$ ) na ausência de forças de corpo. Já o campo de deformações  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  precisa ser geometricamente compatível (GC), de forma que  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla^s \underline{\underline{\xi}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\underline{\xi}} + {}^t \nabla \underline{\underline{\xi}})$ , com  $\underline{\underline{\xi}}$  contínuo e diferenciável (NGUYEN, 2010).

## 2.2.4 Lema de Hill estendido a meios fraturados

Para descrever corretamente o comportamento mecânico de materiais com fraturas incorporadas é preciso estender o Lema de Hill à situação particular de meios fraturados. Nesta perspectiva,

utiliza-se a notação  $\Omega$  para representar todo o domínio do VER e  $\omega$  para caracterizar todo o volume das fraturas. A matriz sólida preenche o domínio  $\Omega \setminus \omega$ , onde o símbolo “\” representa justamente a diferença de conjuntos, como esquematizado na Figura 2.10. É relevante enfatizar que as deformações e tensões dentro do meio heterogêneo são definidas apenas no domínio da matriz  $\Omega \setminus \omega$ , e não em todo o VER.

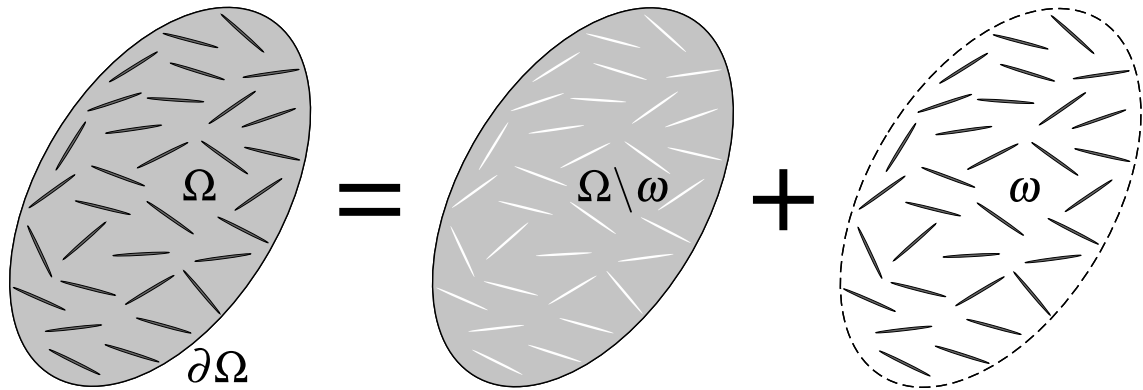


Figura 2.10 – Ilustração do VER composto por matriz sólida e fraturas

Na escala do VER (escala microscópica), cada fratura em sua respectiva família pode ser modelada como uma interface, geometricamente descrita por uma superfície  $\omega_i$ , sendo sua orientação definida por um vetor unitário normal ao plano da fratura  $\underline{n}_i$ . Em uma escala menor que a do VER, as fraturas  $\omega_i$  são vistas como volumes tridimensionais de espessura finita com os limites superior  $\omega_i^+$  e inferior  $\omega_i^-$  definidos pela Figura 2.11. O contorno da matriz sólida compreende a fronteira do VER  $\partial\Omega$  e dos segmentos superior e inferior das fraturas, ou seja,  $\partial\omega_i = \omega_i^+ \cup \omega_i^-$  (MAGHOUS et al., 2013).

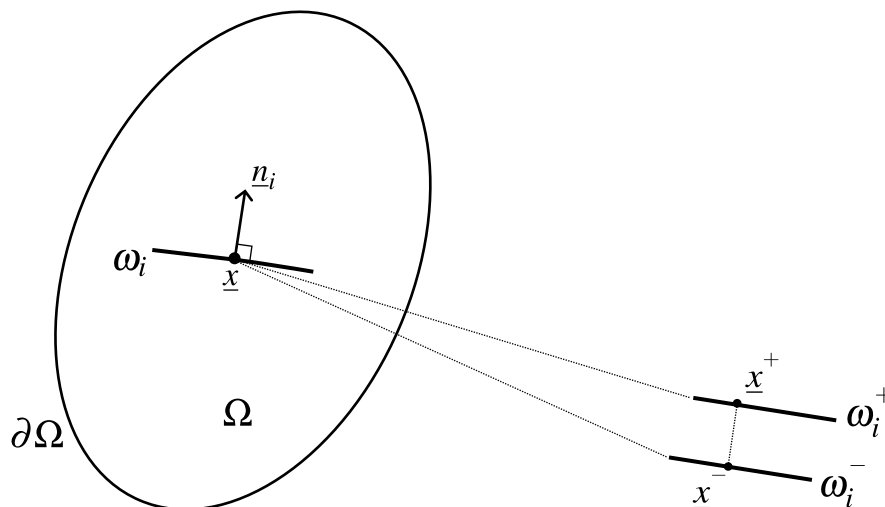


Figura 2.11 – Representação de uma fratura como interface no VER  
(Adaptado de Maghous et al. (2013))

Maghous et al. (2013) destacam também que o deslocamento de um ponto  $\underline{x}$  na escala do VER não será determinado unicamente pelo deslocamento relativo entre as superfícies  $\omega_i^+$  e  $\omega_i^-$ . Na verdade é preciso observar que em uma escala menor que a microscópica o vetor posição  $\underline{x}$  é substituído pelo segmento de reta paralelo ao vetor  $\underline{n}_i = \underline{n}_i(\underline{x})$ , cujos limites são definidos como  $\underline{x}^- \in \omega_i^-$  e  $\underline{x}^+ \in \omega_i^+$ , sendo o deslocamento relativo  $[\underline{\xi}(\underline{x})]$  dado por:

$$[\underline{\xi}(\underline{x})] = \underline{\xi}(\underline{x}^+) - \underline{\xi}(\underline{x}^-) = \underline{\xi}^+(\underline{x}) - \underline{\xi}^-(\underline{x}) \quad (2.27)$$

Retomando a definição estabelecida na subseção 2.2.3 e acrescentando a energia relacionada ao comportamento mecânico das fraturas na média da energia de deformação, a expressão para o Lema de Hill passa a ser escrita por Maghous et al. (2013) como:

$$\begin{aligned} |\Omega| \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle &= \int_{\Omega \setminus \omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla^s \underline{\underline{\xi}} d\Omega = \int_{\Omega \setminus \omega} \text{div}(\underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS \\ &\quad - \int_{\partial\omega_i^+} \underline{\underline{\xi}}^+ \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}_i dS + \int_{\partial\omega_i^-} \underline{\underline{\xi}}^- \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}_i dS \end{aligned} \quad (2.28)$$

ou, considerando a Equação 2.27, tem-se:

$$\int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} dS = \int_{\Omega \setminus \omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla^s \underline{\underline{\xi}} d\Omega + \int_{\partial\omega_i} [\underline{\underline{\xi}}] \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}_i dS \quad (2.29)$$

Verifica-se que o lado direito da Equação 2.29, representa a energia de deformação macroscópica, já demonstrado nas Equações 2.23 e 2.26. Contudo, agora esta quantidade é definida como a soma de duas contribuições: a energia de deformação da matriz sólida ( $\Omega \setminus \omega$ ) e a energia causada pelo salto de deslocamento ao longo das fraturas ( $\omega$ ):

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega \setminus \omega} + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\omega} \underline{T} \cdot [\underline{\underline{\xi}}] dS \quad (2.30)$$

que expressa o Lema de Hill estendido a meios fraturados. Observa-se que  $\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}_i$  refere-se ao vetor tensão atuando nas faces de cada uma das fraturas e  $[\underline{\underline{\xi}}]$  corresponde ao salto de deslocamentos definido na Equação 2.27.

Além das clássicas condições  $\underline{\underline{\sigma}}$  EA e  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  GC serem essenciais, agora é preciso garantir a continuidade do vetor tensão  $\underline{T}$  junto às descontinuidades. Como o Lema de Hill é válido para qualquer campo de tensões e deformações, não necessariamente correlacionados, tomando um tensor  $\underline{\underline{\sigma}}$  simétrico e uniforme, a deformação macroscópica fica definida por:

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega \setminus \omega} + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\omega} [\underline{\underline{\xi}}] \otimes^s \underline{n} dS \quad (2.31)$$

onde o símbolo  $\otimes^s$  corresponde a parte simétrica do produto tensorial  $\left(\underline{u} \otimes^s \underline{v}\right)_{ij} = (u_i v_j + v_i u_j) / 2$  e  $\underline{n} = n_i$  ao longo de  $\omega_i$ . Nota-se que a deformação macroscópica também é composta por contribuições da matriz sólida e das fraturas.

### 2.2.5 Propriedades elásticas efetivas

No contexto da elasticidade linear busca-se a determinação dos campos microscópicos  $(\underline{\sigma}, \underline{\xi})$  que são a solução do problema de localização elástico da Equação 2.32, considerando condições de contorno em tensão homogênea (DORMIEUX; KONDO, 2016):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \underline{\sigma}(\underline{x}) & \text{sobre } \Omega \quad (\text{a}) \\ \operatorname{div} \underline{\sigma} = 0 & \text{sobre } \Omega \quad (\text{b}) \\ \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{\xi} + {}^t \nabla \underline{\xi}) & \text{sobre } \Omega \quad (\text{c}) \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}(\underline{x}) & \text{sobre } \partial\Omega \quad (\text{d}) \end{array} \right. \quad (2.32)$$

onde  $\mathbb{S}$  é o tensor de flexibilidade na escala microscópica de cada ponto do VER,  $\operatorname{div}(\cdot)$  caracteriza o operador divergente,  $\underline{\xi}$  são os deslocamentos de cada ponto  $\underline{x}$  e  $\underline{n}$  é o vetor normal à superfície.

Segundo François et al. (2012), a homogeneização define que um parâmetro de carregamento em tensão macroscópica  $\underline{\Sigma}$  constante aplicado em todo o contorno leva a uma resposta média em tensões  $\underline{\Sigma}$  idênticas ao longo do volume avaliado, independentemente da posição  $\underline{x}$ . Isso leva a introduzir o chamado tensor de concentração de tensões  $\mathbb{B}(\underline{x})$ , que relaciona as tensões macroscópicas com as tensões microscópicas da seguinte forma:

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\Sigma} \quad (2.33)$$

Empregando a média sobre a Equação 2.33 e sabendo que a tensão macroscópica aplicada é constante ( $\langle \underline{\Sigma} \rangle = \underline{\Sigma}$ ), temos o seguinte raciocínio:

$$\langle \underline{\sigma} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\Sigma} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{B}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} : \underline{\Sigma} \quad (2.34)$$

e a partir da relação  $\langle \underline{\sigma} \rangle_{\Omega} = \underline{\Sigma}$  já estabelecida, pode-se deduzir que a média do tensor de concentração das tensões deve ser unitária:

$$\langle \mathbb{B}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \mathbb{I} \quad (2.35)$$

Substituindo a Equação 2.33 na Equação 2.32a e aplicando o operador média, conforme o procedimento matemático da Equação 2.34, Dormieux e Kondo (2016) apresentam uma



formulação para a lei de comportamento mecânico na escala macroscópica para condições de contorno definidas em tensões:

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \langle \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{S}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{S}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) : \mathbb{B}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} \quad (2.36)$$

onde o termo  $\langle \mathbb{S}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) : \mathbb{B}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) \rangle_{\Omega}$  designa o tensor de flexibilidade equivalente do material homogeneizado, logo a Equação 2.36 pode ser escrita de forma simplificada como:

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \mathbb{S}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} \quad \text{com} \quad \mathbb{S}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{S}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) : \mathbb{B}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) \rangle_{\Omega} \quad (2.37)$$

De forma análoga pode-se estabelecer o problema de localização elástico da Equação 2.38, considerando agora o quadro dado em condições de contorno em deformação homogênea (DORMIEUX; KONDO, 2016):

$$\begin{cases} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) = \mathbb{C}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) & \text{sobre } \Omega & \text{(a)} \\ \text{div } \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = 0 & \text{sobre } \Omega & \text{(b)} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} + {}^t \nabla \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}}) & \text{sobre } \Omega & \text{(c)} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{x}}} & \text{sobre } \partial\Omega & \text{(d)} \end{cases} \quad (2.38)$$

onde  $\mathbb{C}$  é o tensor de rigidez elástico na escala microscópica e  $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  são as deformações microscópicas em cada ponto do VER.

Conforme François et al. (2012), a homogeneização define que um parâmetro de carregamento em deformação macroscópica  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$  constante aplicado em todo o contorno leva a uma resposta média idêntica em todo o volume avaliado, independentemente da posição  $\underline{\underline{\mathbf{x}}}$ . Análogo ao caso anterior, é introduzido o tensor de concentração de deformações  $\mathbb{A}(\underline{\underline{\mathbf{x}}})$ , que relaciona as deformações macroscópicas com as microscópicas:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) = \mathbb{A}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) : \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad (2.39)$$

Empregando a média sobre a Equação 2.39 e sabendo que a deformação macroscópica é constante ( $\langle \underline{\underline{\mathbf{E}}} \rangle = \underline{\underline{\mathbf{E}}}$ ), escreve-se:

$$\langle \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{A}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) : \underline{\underline{\mathbf{E}}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{A}(\underline{\underline{\mathbf{x}}}) \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad (2.40)$$

e a relação  $\langle \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \rangle_{\Omega} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}$  permite deduzir que a média do tensor de concentração das tensões também é unitária:

$$\langle \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \mathbb{I} \quad (2.41)$$

Substituindo a Equação 2.39 na Equação 2.38a e aplicando o operador média, conforme o tratamento matemático da Equação 2.40, Dormieux e Kondo (2016) apresentam uma formulação para a lei de comportamento mecânico na escala macroscópica para condições de contorno em deformações:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} : \underline{\underline{E}} \quad (2.42)$$

onde o termo  $\langle \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega}$  designa o tensor de rigidez equivalente do material homogeneizado. Assim, a Equação 2.42 escreve-se simplificada da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \quad \text{com} \quad \mathbb{C}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} \quad (2.43)$$

Quando um compósito é constituído por uma fase matriz ( $s$ ) e  $n$  fases de inclusões ( $i$ ), a Equação 2.43, referindo-se a  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ , toma a seguinte expressão:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \sum_{i \in \{s, 1 \dots n\}} f_i \mathbb{C}^i : \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_i} = f_s \mathbb{C}^s : \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_s} + \sum_{i=1}^n f_i \mathbb{C}^i : \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_i} \quad (2.44)$$

sendo  $f_i$  e  $\mathbb{C}^i$ , respectivamente, a fração volumétrica e o tensor de rigidez elástico da fase ( $i$ ), enquanto:

$$\langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_i} = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \mathbb{A} d\Omega \quad (2.45)$$

representa a média do tensor de concentração das deformações na fase ( $i$ ). Em virtude da relação deduzida na Equação 2.41, sabe-se que:

$$f_s \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_s} + \sum_{i=1}^n f_i \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_i} = \mathbb{I} \quad \therefore \quad f_s \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_s} = \mathbb{I} - \sum_{i=1}^n f_i \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_i} \quad (2.46)$$

e substituindo a Equação 2.46 na Equação 2.44, determina-se a seguinte expressão para  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ :

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s + \sum_{i=1}^n f_i (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s) : \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_i} \quad (2.47)$$

Portanto, a determinação de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  se reduz aos tensores de concentração médios  $\langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_i}$ . Avaliar o termo  $\langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_i}$  consiste em determinar a relação entre a deformação média  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_i}$  na fase ( $i$ ) e a deformação macroscópica  $\underline{\underline{E}}$ :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_i} = \langle \underline{\underline{\mathbb{A}}} \rangle_{\Omega_i} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} \quad (2.48)$$

Nesta perspectiva, introduz-se na subseção 2.2.6 os métodos e esquemas usuais de homogeneização, permitindo a avaliação analítica ou numérica das médias  $\langle \underline{\underline{\mathbb{A}}} \rangle_{\Omega_i}$  e, conseqüentemente, do tensor homogeneizado  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ . Em particular, a teoria da inclusão equivalente de Eshelby e os esquemas de homogeneização associados são brevemente descritos para formular as estimativas do tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ .

A rigidez efetiva  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  e a flexibilidade efetiva  $\mathbb{S}^{\text{hom}}$  obtidas nos quadros de condições de contorno em deformação e tensão homogênea não são necessariamente inversas uma da outra, como na clássica representação microscópica ( $\mathbb{C} : \mathbb{S} = \mathbb{I}$ ). Na macroescala existe um desvio  $\mathcal{O}((d/\ell)^3)$  associado a efeitos de contorno. Mais precisamente, a condição de equivalência das condições de contorno em deformação e tensão homogênea é expressa através de um resultado clássico referido como o teorema de Hill-Mandel (Hill (1967), Mandel (1972)), que estipula que:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbb{S}^{\text{hom}} = \mathbb{I} + \mathcal{O}((d/\ell)^3) \quad (2.49)$$

Contudo, respeitando as condições de separação de escalas ( $d \ll \ell$ ), tem-se  $\mathcal{O}((d/\ell)^3) \rightarrow 0$ , então assume-se que as soluções nas escalas microscópicas e macroscópicas são equivalentes:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} \approx (\mathbb{S}^{\text{hom}})^{-1} \leftrightarrow \mathbb{S}^{\text{hom}} \approx (\mathbb{C}^{\text{hom}})^{-1} \quad (2.50)$$

## 2.2.6 Métodos e esquemas de homogeneização

Os métodos de homogeneização têm por objetivo obter as propriedades efetivas do material na escala macroscópica, baseado no conhecimento de suas propriedades microscópicas. Logo, busca-se determinar o tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ , o qual contém todas as informações do material e descreve seu comportamento mecânico. Há várias formas de calcular este tensor a depender da complexidade do problema, por isso nas subseções seguintes serão apresentadas as abordagens mais tradicionais.

### 2.2.6.1 Resolução analítica

A resolução analítica reflete a resposta exata dos problemas e aplica-se apenas a casos particulares e relativamente simples, como compósitos estratificados ou com fibras longas distribuídas periodicamente. Evidencia-se que com o aumento da complexidade do material, a dificuldade tende a se intensificar, tornando inviável a utilização deste método em alguns cenários. Esta abordagem proporciona soluções em função dos parâmetros usados no problema, o que permite o ajuste destas propriedades sem que seja preciso realizar um novo cálculo. Por essa razão, a resolução analítica é uma boa técnica de modelagem para otimização, além de proporcionar resultados exatos, diferentemente das outras abordagens (MAGHOUS, 2014).

### 2.2.6.2 Limites variacionais

Em problemas de maior complexidade, cuja solução analítica exibe resultados insatisfatórios é possível recorrer a uma abordagem energética. Neste contexto, pode-se estabelecer limites para as propriedades efetivas de um meio heterogêneo, dados no quadro das condições de contorno homogêneas. Tais resultados baseiam-se nos princípios da energia complementar e da mínima energia potencial que delimitam limites superiores ou inferiores a depender da propriedade avaliada (NGUYEN, 2010). Dentre os principais limites variacionais, destacam-se os limites de Voigt e Reuss, que não são capazes de caracterizar a morfologia do material, e os limites de Hashin-Shtrikman, que são mais refinados.

Os limites variacionais de Voigt e Reuss, demonstrados por Zaoui (2002), referem-se a limites superiores para  $\mathbb{S}^{\text{hom}}$  e  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ . Contudo, sabendo da relação expressa na Equação 2.50, fica claro que do ponto de vista de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ , Reuss define um limite inferior (Equação 2.51a) a partir de um campo de tensões EA constante sobre todo o VER. Já Voigt estabelece um limite superior (Equação 2.51b), admitindo um campo de deslocamentos particular sobre o VER que faz com que o próprio, incluindo as fases, apresentem-se sobre a mesma deformação.

$$\begin{aligned} \text{Limite de Reuss : } \underline{\underline{\mathbb{E}}} : \langle \mathbb{S} \rangle^{-1} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} &\leq \underline{\underline{\mathbb{E}}} : \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} \quad (\forall \underline{\underline{\mathbb{E}}}) \quad (\text{a}) \\ \text{Limite de Voigt : } \underline{\underline{\mathbb{E}}} : \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}} &\leq \underline{\underline{\mathbb{E}}} : \langle \mathbb{C} \rangle : \underline{\underline{\mathbb{E}}} \quad (\forall \underline{\underline{\mathbb{E}}}) \quad (\text{b}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Para o caso particular de meios isotrópicos, os tensores  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  e  $\mathbb{S}^{\text{hom}}$  podem ser expressos em função do módulo volumétrico homogeneizado  $k^{\text{hom}}$  e do módulo cisalhante homogeneizado  $\mu^{\text{hom}}$ . Neste cenário, os limites de Reuss e Voigt ficam definidos pela Equação 2.52, na qual as desigualdades “ $\leq$ ” devem ser interpretadas no sentido das formas quadráticas associadas presentes na Equação 2.51 (DORMIEUX et al., 2006b):

$$\langle k^{-1} \rangle^{-1} \leq k^{\text{hom}} \leq \langle k \rangle \quad \text{e} \quad \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} \leq \mu^{\text{hom}} \leq \langle \mu \rangle \quad (2.52)$$

Os limites de Voigt e Reuss são deduzidos de princípios clássicos extremos da teoria da elasticidade e apresentam intervalos bastante distantes um do outro, o que pode limitar significativamente a sua precisão. À vista disso, Hashin e Shtrikman (1962) desenvolveram, via princípios variacionais, limites mais próximos especialmente para materiais heterogêneos. Diferentemente dos campos de tensão e deformação totais empregados nas abordagens anteriores, agora são considerados campos auxiliares adequados que representam apenas o desvio de alguma solução de referência. Desta forma, o erro cometido em uma aproximação tem um efeito menor no resultado final (GROSS; SEELIG, 2011). Para um meio heterogêneo bifásico, onde uma das fases assume o papel da matriz  $\mathbb{C}^s$  e a outra caracteriza as inclusões  $\mathbb{C}^i$  (heterogeneidades), Gross e Seelig (2011) demonstram que os limites inferior e superior de

Hashin e Shtrikman são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{(HS^-)} &= \mathbb{C}^s + f_i \left[ (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)^{-1} + (1 - f_i) \mathbb{S}^s : (\mathbb{C}^s)^{-1} \right]^{-1} \leq \mathbb{C}^{\text{hom}} \quad (\text{a}) \\ \mathbb{C}_{(HS^+)} &= \mathbb{C}^i + (1 - f_i) \left[ (\mathbb{C}^s - \mathbb{C}^i)^{-1} + f_i \mathbb{S}^i : (\mathbb{C}^i)^{-1} \right]^{-1} \geq \mathbb{C}^{\text{hom}} \quad (\text{b}) \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde  $\mathbb{C}^s$  e  $\mathbb{C}^i$  são, respectivamente, os tensores de rigidez da matriz e da inclusão, e  $\mathbb{S}^s$  e  $\mathbb{S}^i$  definem os tensores de Eshelby, que são abordados nas subseções seguintes.

### 2.2.6.3 Resolução numérica

A abordagem numérica também permite solucionar problemas de alta complexidade, utilizando o método dos elementos finitos ou similares, onde o VER é modelado contendo todas as suas inclusões. A média obtida pela técnica numérica empregada representa a solução homogeneizada do meio. Normalmente são técnicas eficientes, embora apresente limitações e dificuldades, pois, deverá ser desenvolvida para casos específicos, alterando algumas condições. Por exemplo, em meios periódicos é necessário utilizar condições de contorno especiais sobre a CB, enquanto que para meios desordenados é preciso programar técnicas de geração de distribuição aleatória das heterogeneidades (MAGHOUS, 2014).

### 2.2.6.4 Problema de Eshelby e estimativas associadas

A teoria da inclusão equivalente de Eshelby (1957) configura uma solução analítica extremamente importante para o campo da micromecânica. Sua formulação é válida para um domínio infinito  $\Omega$  elástico linear com tensor de rigidez de referência  $\mathbb{C}^0$ , contendo uma inclusão elipsoidal  $\Omega_i$ , definida pelos seus eixos principais, cujos raios estão ilustrados na Figura 2.12.

Eshelby (1957) demonstrou que ao aplicar deformações constantes  $\underline{\underline{E}}^0$  na fronteira do meio infinito a deformação no interior da inclusão permanece constante e pode ser definida por:

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_i} = \mathbb{A}_E(\underline{x}) : \underline{\underline{E}}^0 \quad (2.54)$$

onde  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_i}$  é a média das deformações no interior da inclusão e  $\mathbb{A}_E$  representa o tensor de localização das deformações de Eshelby, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbb{A}_E(\underline{x}) = \langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega_i} = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0)]^{-1}. \quad (2.55)$$

Os tensores  $\mathbb{C}^i$  e  $\mathbb{C}^0$  expressam, respectivamente, a rigidez das inclusões e do meio de referência e  $\mathbb{P}$  define o tensor de Hill, que pode ser determinado por:

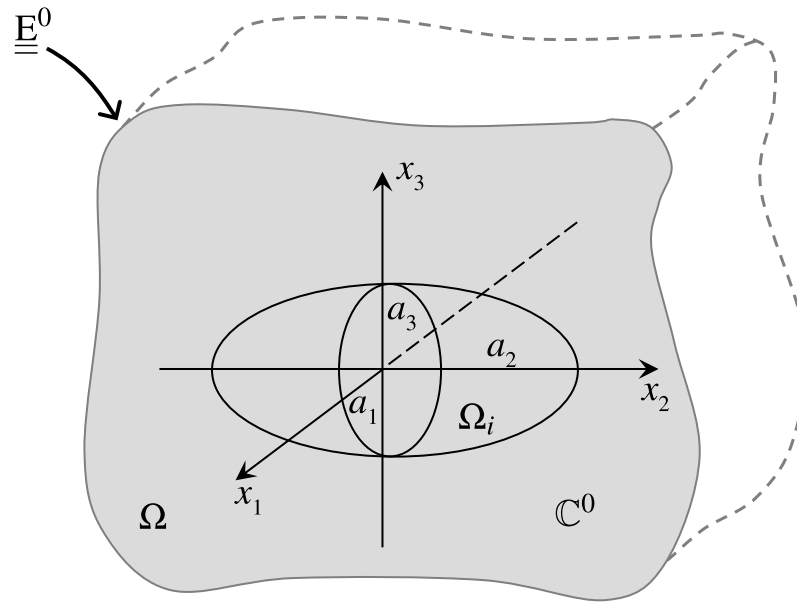


Figura 2.12 – Problema da Inclusão de Eshelby (Adaptado de Gross e Seelig (2011))

$$\mathbb{S}^e = \mathbb{P} : \mathbb{C}^0 \quad (2.56)$$

sendo  $\mathbb{S}^e$  o clássico tensor de Eshelby. Os tensores  $\mathbb{S}^e$  e  $\mathbb{P}$  são definidos para várias configurações de inclusões e os procedimentos para sua determinação podem ser encontrados em trabalhos como de Mura (1987) e Nemat-Nasser e Hori (1993). O tensor de Eshelby apresenta simetria entre o primeiro e segundo par de índices, mas em geral não apresenta simetria de troca desses pares, como se pode ver na expressão abaixo (GROSS; SEELIG, 2011):

$$S_{ijkl}^e = S_{jikl}^e = S_{ijlk}^e \quad \text{e} \quad S_{ijkl}^e \neq S_{klij}^e \quad (2.57)$$

Para abordar problemas envolvendo meios que apresentem mais inclusões, é preciso ampliar a solução de Eshelby. Então surgem estimativas capazes de determinar valores aproximados para o tensor de rigidez elástico equivalente  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ . As estimativas mais conhecidas são: Diluída, Mori-Tanaka e Auto Consistente. Independentemente do esquema de homogeneização adotado, substituindo a Equação 2.55 na Equação 2.54, a estimativa geral baseada na solução de Eshelby leva a considerar que:

$$\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{\Omega_i} = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0)]_{i \in \{s,1,\dots,n\}}^{-1} : \underline{\underline{E}}^0 \quad (2.58)$$

Os esquemas mencionados acima referem-se a uma escolha específica para a rigidez elástica  $\mathbb{C}^0$  e deformação  $\underline{\underline{E}}^0$  do meio de referência. Estas duas quantidades permitem definir de maneira completa estimativas para os tensores de concentração médios  $\langle \underline{\underline{A}} \rangle_{\Omega_i}$ .

Inicialmente considera-se o caso em que as inclusões apresentam-se suficientemente distantes entre si, a ponto que não haja interação mecânica entre elas (ver Figura 2.13). Então, a solução em deformação em cada inclusão pode ser aproximada pelo problema auxiliar de Eshelby, tal abordagem denomina-se estimativa Diluída. Neste caso, a matriz  $(s)$  define o meio de referência  $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^s$  e a deformação no infinito é igual à deformação macroscópica  $\underline{\underline{E}}^0 = \underline{\underline{E}}$ . Logo, a relação da Equação 2.58 é escrita como:

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_i} = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (2.59)$$

o que implica:

$$\langle \underline{\underline{A}} \rangle_{\Omega_i} = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} \quad (2.60)$$

Substituindo a Equação 2.60 na Equação 2.47, obtém-se a expressão que define o tensor de rigidez elástico homogeneizado da estimativa Diluída:

$$\mathbb{C}_{\text{dil}}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s + \sum_{i=1}^n f_i (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s) : [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} \quad (2.61)$$

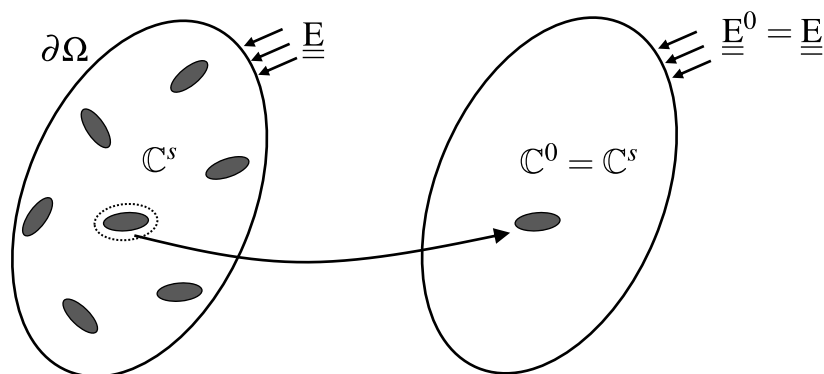


Figura 2.13 – Princípio da Estimativa Diluída

Embora a estimativa diluída seja válida apenas para pequenas frações volumétricas, sua formulação serve para outras generalizações. Uma delas trata-se da estimativa de Mori-Tanaka, largamente utilizada quando a densidade de inclusões em um meio heterogêneo não é tão pequena a ponto de ser possível desprezar a interação entre uma heterogeneidade e suas vizinhas (ver Figura 2.14). Apesar dessa estimativa ser usada para qualquer fração volumétrica de inclusões, é importante destacar que o material na qual as inclusões estão imersas ainda exerce um papel de matriz. A estimativa de Mori-Tanaka consiste em adotar para o meio de referência a elasticidade da matriz  $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^s$  e expressar a interação entre as fases através da deformação  $\underline{\underline{E}}^0$  aplicada no infinito no problema de Eshelby. Sabendo que a média da deformação microscópica

$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega}$  pode ser escrita como a soma das médias de deformações nas fases e também pela própria deformação macroscópica  $\underline{\underline{E}}$ , define-se a seguinte relação:

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega} = \sum_{i \in \{s, 1 \dots n\}} f_i \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_i} = \underline{\underline{E}} \quad (2.62)$$

da qual pode-se deduzir, substituindo a Equação 2.58 com  $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^s$ , que:

$$\sum_{i \in \{s, 1 \dots n\}} f_i [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} : \underline{\underline{E}}^0 = \underline{\underline{E}} \quad (2.63)$$

e, conseqüentemente escreve-se:

$$\underline{\underline{E}}^0 = \left[ \sum_{i \in \{s, 1 \dots n\}} f_i [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} \right]^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (2.64)$$

ou, simplesmente:

$$\underline{\underline{E}}^0 = \left\langle [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} : \underline{\underline{E}}. \quad (2.65)$$

Partindo da expressão acima definida para  $\underline{\underline{E}}^0$ , a Equação 2.58 é escrita agora como:

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_i} = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} : \left\langle [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (2.66)$$

na qual se verifica que:

$$\langle \underline{\underline{A}} \rangle_{\Omega_i} = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} : \left\langle [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} \quad (2.67)$$

A estimativa de Mori-Tanaka para  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  é obtida substituindo a Equação 2.67 na Equação 2.47.

$$\mathbb{C}_{\text{mt}}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s + \sum_{i=1}^n f_i (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s) : [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} : \left\langle [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^s)]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} \quad (2.68)$$



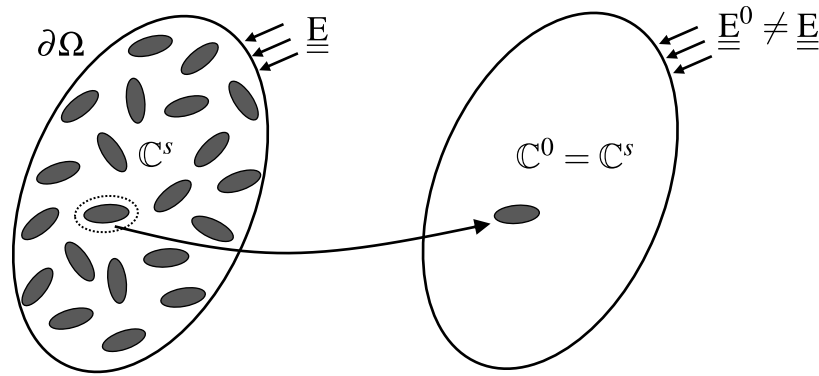


Figura 2.14 – Estimativa de Mori-Tanaka

Por último, tem-se a estimativa auto consistente, ilustrada pela Figura 2.15, que não considera nenhum material na posição de matriz e assume que cada uma das inclusões está imersa no próprio material homogêneo cujas propriedades efetivas se deseja determinar. Nesta abordagem, o meio de referência coincide com o meio homogeneizado  $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^{\text{hom}}$  e a deformação de referência  $\underline{\underline{E}}^0$  é dada por um raciocínio análogo ao utilizado anteriormente para deduzir a estimativa de Mori-Tanaka:

$$\underline{\underline{E}}^0 = \left[ \sum_{i \in \{s, 1 \dots n\}} f_i [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{\text{hom}})]^{-1} \right]^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (2.69)$$

ou, simplesmente:

$$\underline{\underline{E}}^0 = \left\langle [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{\text{hom}})]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} : \underline{\underline{E}}. \quad (2.70)$$

Partindo da expressão acima definida para  $\underline{\underline{E}}^0$ , a Equação 2.58 é escrita agora como:

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_i} = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{\text{hom}})]^{-1} : \left\langle [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{\text{hom}})]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} : \underline{\underline{E}} \quad (2.71)$$

na qual se verifica que:

$$\langle \underline{\underline{\mathbb{A}}} \rangle_{\Omega_i} = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{\text{hom}})]^{-1} : \left\langle [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{\text{hom}})]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} \quad (2.72)$$

Substituindo a Equação 2.72 na Equação 2.44 obtém-se a expressão de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  definida a partir da estimativa Auto Consistente:

$$\mathbb{C}_{\text{ac}}^{\text{hom}} = \sum_{i \in \{s, 1 \dots n\}} f_i \mathbb{C}^i : [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{\text{hom}})]^{-1} : \left\langle [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{\text{hom}})]^{-1} \right\rangle_{\Omega}^{-1} \quad (2.73)$$

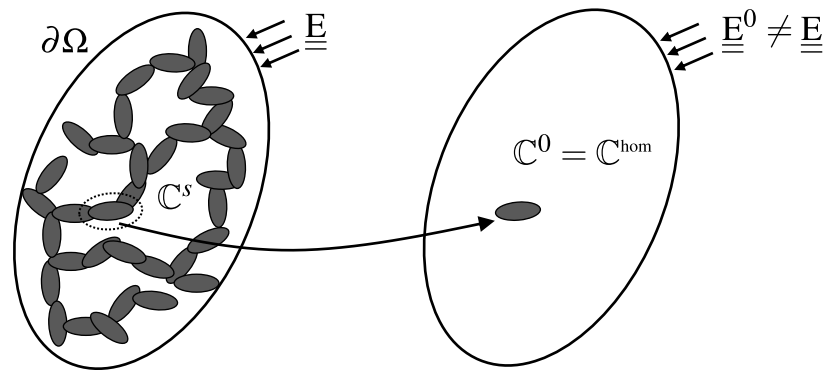


Figura 2.15 – Estimativa Auto Consistente

### 3 HOMOGENEIZAÇÃO DE MEIOS ELÁSTICOS FRATURADOS

O presente capítulo visa apresentar a lei de comportamento macroscópica para materiais elásticos fraturados. São demonstradas relações entre as solicitações nas escalas micro e macroscópica para determinar o tensor de rigidez homogeneizado do material elástico para diferentes casos particulares. Por fim, são realizadas ilustrações numéricas, exibindo graficamente o comportamento mecânico estabelecido pelas equações que seguem.

#### 3.1 PROBLEMA DE CONCENTRAÇÃO ELÁSTICO

Esta subseção visa estabelecer uma releitura do procedimento descrito na subseção 2.2.5, na qual o comportamento homogeneizado foi formulado. A seguinte abordagem consiste apenas em um maior nível de detalhamento, atendo-se a eventuais particularidades da formulação.

No contexto da elasticidade linear, os campos de tensão  $\underline{\underline{\sigma}}$  e deformação  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  são relacionados na matriz por meio do tensor de rigidez de quarta ordem  $\mathbb{C}^s$ . Enquanto o salto de deslocamentos  $[\underline{\underline{\xi}}]$  é relacionado no sistema de coordenadas local  $(t_i, t'_i, n_i)$  de cada fratura  $\omega_i$  (ilustrado na Figura 3.1) ao vetor tensão  $\underline{T}$  por meio da rigidez elástica das fraturas  $\underline{k}^i$  (ver Goodman (1976) ou Bandis et al. (1983), por exemplo).

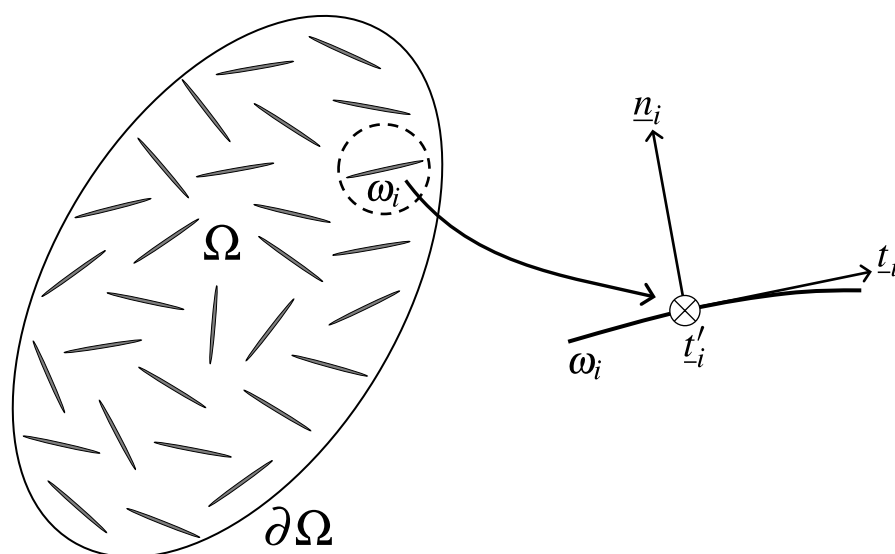


Figura 3.1 – Representação das fraturas no VER (Adaptado de Aguiar e Maghous (2018))

De acordo com Maghous et al. (2008), o tensor de segunda ordem  $\underline{\underline{k}}^i$  pode ser escrito como:

$$\underline{\underline{k}}^i = k_n^i (\underline{n}_i \otimes \underline{n}_i) + k_t^i (\underline{t}_i \otimes \underline{t}_i) + k_t^{\prime i} (\underline{t}'_i \otimes \underline{t}'_i) \quad (3.1)$$

onde  $k_n^i$  é a componente de rigidez normal, enquanto  $k_t^i$  e  $k_t^{\prime i}$  representam as componentes tangenciais de rigidez da  $i$ -ésima família de fraturas, expressas em (Pa/m). Essas grandezas são obtidas em laboratório, a partir de testes realizados em amostras contendo uma única fratura. A interpretação física e procedimentos de identificação desses parâmetros são apresentados em Bandis et al. (1983) ou Goodman (1976). Observa-se que o caso particular de fissuras que não transmitem esforços, pode ser incluído na formulação acima considerando um valor nulo para as componentes de rigidez ( $k_n^i = 0$ ,  $k_t^i = 0$  e  $k_t^{\prime i} = 0$ ). Na maioria das aplicações de geomateriais admite-se a isotropia de comportamento no plano das fraturas ( $k_t^i = k_t^{\prime i}$ ), o que permite reescrever a Equação 3.1 como:

$$\underline{\underline{k}}^i = k_n^i (\underline{n}_i \otimes \underline{n}_i) + k_t^i (\underline{t}_i \otimes \underline{t}_i + \underline{t}'_i \otimes \underline{t}'_i) \quad (3.2)$$

A relação entre os problemas microscópico e macroscópico no domínio  $\Omega$  do VER pode ser estabelecida fazendo uso da condição de contorno em deformação homogênea definida na Equação 2.20. Dessa forma, garantindo a continuidade do vetor tensão através das fraturas ( $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}_i = 0$ ), o par  $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\xi}})$  é solução do seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}^s : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{sobre } \Omega \setminus \omega \quad (a) \\ \text{div } \underline{\underline{\sigma}} = 0 & \text{sobre } \Omega \setminus \omega \quad (b) \\ \underline{T} = \underline{\underline{k}}^i \cdot [\underline{\underline{\xi}}] & \text{sobre } \omega_i \quad (c) \\ \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{x} & \text{sobre } \partial\Omega \quad (d) \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\underline{\xi}} + {}^t \nabla \underline{\underline{\xi}}) & \text{sobre } \Omega \setminus \omega \quad (e) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

As deformações locais  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$  definidas na matriz  $\Omega \setminus \omega$  são linearmente relacionadas às deformações efetivas  $\underline{\underline{E}}$  por meio de um tensor de quarta ordem  $\underline{\underline{A}}(\underline{x})$ , já definido na subseção 2.2.5.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \setminus \omega \quad (3.4)$$

Em contraste com o quadro contínuo, no qual a relação  $\langle \underline{\underline{A}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} = \mathbb{I}$  é válida, a análise envolvendo descontinuidades leva a média do tensor de concentração sobre o VER para um valor não unitário  $\langle \underline{\underline{A}}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} \neq \mathbb{I}$ , devido a localização das deformações ao longo das fraturas (ver Maghous et al. (2013)). Nos desenvolvimentos subsequentes as fraturas serão substituídas por um material fictício equivalente, devido ao seu comportamento mecânico, o que assegura a

utilização da relação clássica para  $\langle \mathbb{A} \rangle$ . Além disso, a relação  $\langle \mathbb{A} \rangle_{\Omega} = \mathbb{I}$  permanece válida para ambas as situações (AGUIAR; MAGHOUS, 2018). Ao substituir a Equação 3.4 na Equação 3.3a e aplicar o operador média, considerando a relação  $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \underline{\underline{\Sigma}}$  entre tensões microscópicas e macroscópicas, obtém-se:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega \setminus \omega} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbb{C}^s(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \rangle_{\Omega} \quad (3.5)$$

e visto que o tensor  $\underline{\underline{E}}$  é homogêneo e independente da posição  $\underline{x}$ , pode-se escrever:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \quad \text{com} \quad \mathbb{C}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{C}^s(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} \quad (3.6)$$

A Equação 3.6 descreve a lei de comportamento elástica macroscópica para um meio fraturado, relacionando tensões e deformações macroscópicas por meio do tensor de rigidez elástico equivalente de quarta ordem  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ .

De forma análoga, aplicando a condição de contorno em tensão homogênea da Equação 2.18, obtém-se a seguinte lei de comportamento macroscópica:

$$\underline{\underline{E}} = \mathbb{S}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad \text{com} \quad \mathbb{S}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{S}^s(\underline{x}) : \mathbb{B}(\underline{x}) \rangle_{\Omega} \quad (3.7)$$

onde o tensor  $\mathbb{B}(\underline{x})$  relaciona as tensões microscópicas e macroscópicas por:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.8)$$

Também é possível estabelecer uma relação entre os tensores de localização  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$  substituindo as Equações 3.4 e 3.8 na relação microscópica descrita na Equação 3.3a:

$$\mathbb{B}(\underline{x}) : \underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^s : \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} \quad (3.9)$$

e presumindo respeitadas as condições de separação de escala, especialmente  $d \ll \ell$ , pode-se admitir que  $\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{S}^{\text{hom}-1}$ . Nesta perspectiva, nota-se que ao aplicar a lei de comportamento macroscópica da Equação 3.6 ou Equação 3.7 define-se a mesma relação entre os tensores de localização de tensão e deformação:

$$\mathbb{B}(\underline{x}) : \mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^s : \mathbb{A}(\underline{x}) \quad (3.10)$$

Os desenvolvimentos apresentados nesta subseção aplicam-se a qualquer material elástico linear. No próximo tópico, através da teoria da homogeneização, serão abordadas expressões específicas para  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  em função da orientação das fraturas.

### 3.2 HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAL ELÁSTICO FRATURADO

O processo de homogeneização descrito nesta seção realizou-se no contexto da teoria da inclusão equivalente de Eshelby. Tal abordagem faz uso da estimativa de Mori-Tanaka (Equação 2.68) para estimar o tensor de rigidez elástico efetivo de materiais fraturados em diferentes casos particulares. Na perspectiva da utilização de esquemas de homogeneização de Eshelby, torna-se necessário introduzir um modelo tridimensional de fraturas modeladas geometricamente como elipsoides oblato (esferoides) e com orientação associada a base ortonormal  $(\underline{t}_i, \underline{t}'_i, \underline{n}_i)$ . A forma deste esferoide é definida pelo seu raio maior  $a = a_1 = a_2$ , e pelo seu raio menor  $c = a_3$ , que determina a sua espessura (ver Figura 3.2). Seja a razão de aspecto  $X = c/a$ , a equivalência entre fraturas modeladas como interfaces e esferoides se dá pela condição limite  $X_i \ll 1$ .

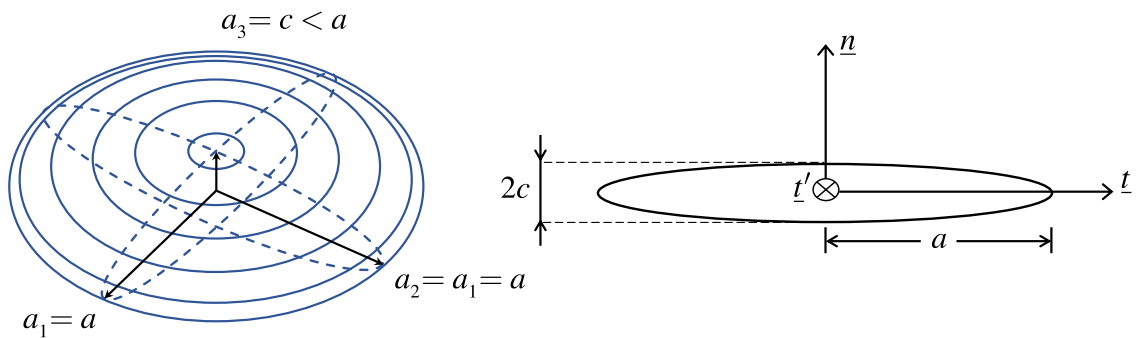


Figura 3.2 – Fratura modelada como esferoide oblato

Considerando que o material da matriz sólida é homogêneo e isotrópico, o tensor de rigidez associado assume a seguinte forma:

$$\mathbb{C}^s = 3k^s \mathbb{J} + 2\mu^s \mathbb{K} \quad (3.11)$$

onde  $k^s$  e  $\mu^s$  definem, respectivamente, os módulos volumétrico e de cisalhamento. Os tensores de quarta ordem  $\mathbb{J}$  (tensor esférico) e  $\mathbb{K}$  (tensor desviador) são dados por:

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \quad \text{e} \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (3.12)$$

A fração volumétrica relativa a  $i$ -ésima família de fraturas  $\omega_i$  é definida por:

$$f_i = \frac{4}{3} \pi \epsilon_i X_i \quad (3.13)$$

na qual  $\epsilon_i = \mathcal{N}_i a_i^3$  representa o parâmetro de densidade de fraturas, introduzido por Budiansky e O'Connell (1976) e  $\mathcal{N}_i$  designa o número de fraturas por unidade de volume da família  $\omega_i$ .

Para utilizar os esquemas de homogeneização de Eshelby, Maghous et al. (2013) introduzem o tensor de quarta ordem  $\mathbb{C}_i^f$  para expressar o comportamento das fraturas modeladas como interfaces. Este tensor apresenta um comportamento isotrópico e relaciona-se com a rigidez das fraturas  $\underline{k}^i$  (Equação 3.2) através de suas componentes normal e tangencial:

$$\mathbb{C}_i^f = 3X_i a_i \left( k_n^i - \frac{4}{3} k_t^i \right) \mathbb{J} + 2X_i a_i k_t^i \mathbb{K} \quad \text{com} \quad X_i \ll 1 \quad (3.14)$$

Na análise subsequente, consideram-se três casos: uma família de microfraturas paralelas, duas famílias de microfraturas e uma distribuição isotrópica de microfraturas.

### 3.2.1 Matriz sólida com uma única família de microfraturas

A primeira configuração trata-se de uma matriz sólida homogênea com uma família de microfraturas paralelas modeladas como esferoides oblatos, cuja orientação é definida pelo vetor normal  $\underline{n}$ , como ilustra a Figura 3.3 (o subíndice  $i$  referente as fraturas é omitido nesta subseção).

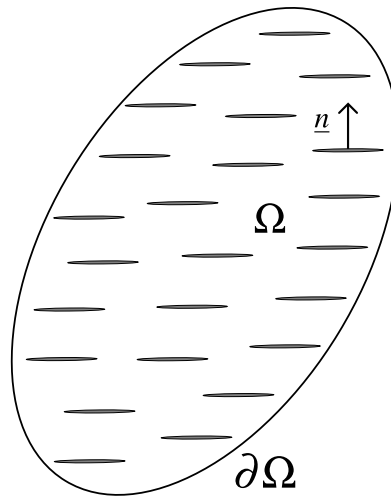


Figura 3.3 – Uma família de fraturas paralelas

Pelo esquema de Mori-Tanaka, definido na Equação 2.68, a estimativa de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  considerando uma família de fraturas paralelas é dada por:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{X \rightarrow 0} \left\{ \left[ \mathbb{C}^s + f \mathbb{C}^f : (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1} \right] : \left[ \mathbb{I} + f (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1} \right]^{-1} \right\} \quad (3.15)$$

onde  $f$  é a fração volumétrica das fraturas (3.13),  $\mathbb{C}^f$  expressa o comportamento das fraturas modeladas como interfaces (3.14) e  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(X, \underline{n})$  representa o tensor de Hill, que depende do fator de aspecto  $X$  e da orientação  $\underline{n}$  das fraturas correspondentes a respectiva família. O

tensor  $\mathbb{P}$  é obtido através da Equação 2.56 de acordo com as componentes não nulas do tensor de Eshelby  $\mathbb{S}^e$  dadas no Anexo A (considerando a fratura normal ao eixo  $\underline{e}_3$ ) e  $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}^s$ . As componentes não nulas do tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  resultantes de (3.15), considerando a base ortonormal fixa  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = (\underline{t}, \underline{t}', \underline{n})$ , são dadas por:

$$\begin{aligned}
C_{1111}^{\text{hom}} = C_{2222}^{\text{hom}} &= (3k^s + 4\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi\kappa_1 \left(1 + \frac{16}{3}\epsilon\right) (1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1 (1 - \kappa_1) + 4\pi\epsilon} \\
C_{3333}^{\text{hom}} &= (3k^s + 4\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi\kappa_1 (1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1 (1 - \kappa_1) + 4\pi\epsilon} \\
C_{1122}^{\text{hom}} = C_{2211}^{\text{hom}} &= (3k^s - 2\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi \left(\kappa_1 + \frac{8}{3}\epsilon\right) (1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1 (1 - \kappa_1) + 4\pi\epsilon} \\
C_{1133}^{\text{hom}} = C_{2233}^{\text{hom}} = C_{3311}^{\text{hom}} = C_{3322}^{\text{hom}} &= (3k^s - 2\mu^s) \frac{\kappa_2 + \pi\kappa_1 (1 - \kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1 (1 - \kappa_1) + 4\pi\epsilon} \\
C_{2323}^{\text{hom}} = C_{1313}^{\text{hom}} &= \mu^s \frac{4\kappa_3 + \pi (1 - \kappa_1) (1 + 2\kappa_1)}{4\kappa_3 + \pi (1 - \kappa_1) (1 + 2\kappa_1) + \frac{16}{3}\pi\epsilon (1 - \kappa_1)} \\
C_{1212}^{\text{hom}} &= \mu^s
\end{aligned} \tag{3.16}$$

sendo os parâmetros adimensionais  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  e  $\kappa_3$  definidos por:

$$\kappa_1 = \frac{3k^s + \mu^s}{3k^s + 4\mu^s}; \quad \kappa_2 = \frac{3k_n a}{3k^s + 4\mu^s}; \quad \kappa_3 = \frac{3k_t a}{3k^s + 4\mu^s} \tag{3.17}$$

Tal estimativa é dada em Maghous et al. (2013) e foi validada com solução em elementos finitos baseando-se no modelo coesivo de Needleman (1987) por Maghous et al. (2014). Nos casos em que a densidade de fraturas  $\epsilon$  é infinitesimal, é suficiente expandir as componentes de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  (Equação 3.16) para a primeira ordem em  $\epsilon$ . No contexto das estimativas baseadas em Eshelby, este resultado é equivalente à estimativa Diluída (MAGHOUS et al., 2013):

$$\begin{aligned}
C_{1111}^{\text{hom}} = C_{2222}^{\text{hom}} &= \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \left[1 - \frac{4\pi(1 - 2\kappa_1)^2}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1)}\epsilon\right] \\
C_{3333}^{\text{hom}} &= \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \left[1 - \frac{4\pi}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1)}\epsilon\right] \\
C_{1122}^{\text{hom}} = C_{2211}^{\text{hom}} &= \left(k^s - \frac{2}{3}\mu^s\right) - \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \frac{4\pi(1 - 2\kappa_1)^2}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1)}\epsilon \\
C_{1133}^{\text{hom}} = C_{2233}^{\text{hom}} &= \left(k^s - \frac{2}{3}\mu^s\right) + \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \frac{4\pi(1 - 2\kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1)}\epsilon \\
C_{2323}^{\text{hom}} = C_{1313}^{\text{hom}} &= \mu^s - \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \frac{\frac{16}{3}\pi(1 - \kappa_1)^2}{4\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1)}\epsilon \\
C_{1212}^{\text{hom}} &= \mu^s
\end{aligned} \tag{3.18}$$



### 3.2.2 Matriz sólida com duas famílias de microfraturas

Considera-se agora a configuração de uma matriz sólida homogênea com duas famílias de microfraturas  $\omega_1$  e  $\omega_2$  modeladas como esferoides oblatos, sendo suas orientações definidas, respectivamente, pelos vetores normais  $\underline{n}_1$  e  $\underline{n}_2$  como ilustra o esquema da Figura 3.4. Embora as fraturas pertencentes à ambas as famílias apresentem o mesmo formato, suas dimensões podem variar de uma família para outra. Diante disso, assume-se uma fração volumétrica para cada família  $f_1$  e  $f_2$  escritas na forma da Equação 3.13, cada qual com seu fator de aspecto  $(X_1, X_2)$  e respectivas densidades  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ .

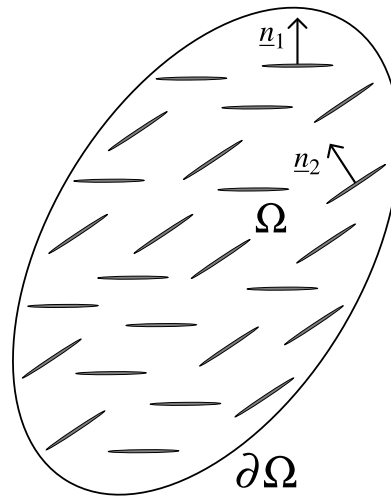


Figura 3.4 – Duas famílias de microfraturas

Pelo esquema de Mori-Tanaka definido na Equação 2.68, a estimativa de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  considerando duas famílias de fraturas é dada por:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{X_1, X_2 \rightarrow 0} \left\{ \left[ \mathbb{C}^s + f_1 \mathbb{C}_1^f : \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}_1 : \left( \mathbb{C}_1^f - \mathbb{C}^s \right) \right)^{-1} + f_2 \mathbb{C}_2^f : \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}_2 : \left( \mathbb{C}_2^f - \mathbb{C}^s \right) \right)^{-1} \right] : \right. \\ \left. \left[ \mathbb{I} + f_1 \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}_1 : \left( \mathbb{C}_1^f - \mathbb{C}^s \right) \right)^{-1} + f_2 \left( \mathbb{I} + \mathbb{P}_2 : \left( \mathbb{C}_2^f - \mathbb{C}^s \right) \right)^{-1} \right]^{-1} \right\} \quad (3.19)$$

onde  $\mathbb{C}_1^f$  e  $\mathbb{C}_2^f$  expressam o comportamento das fraturas de cada família e são escritos na forma da Equação 3.14 e  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(X_1, \underline{n}_1)$  e  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_2(X_2, \underline{n}_2)$  são os tensores de Hill, que dependem do fator de aspecto e da orientação correspondente à respectiva família. Os tensores  $\mathbb{P}_1$  e  $\mathbb{P}_2$  podem ser obtidos a partir das componentes do tensor de Eshelby  $\mathbb{S}^e$  presentes no Anexo A para  $X_1$  e  $X_2$ .

As componentes de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  serão expressas na base ortonormal fixa  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = (t_1, t'_1, n_1)$  ligada as fraturas da família  $\omega_1$ . A orientação da família  $\omega_2$  é definida pelo vetor normal  $\underline{n}_2 = \sin \theta \cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \underline{e}_2 + \cos \theta \underline{e}_3$  no espaço 3D em função das coordenadas angulares esféricas  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Em virtude do tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  apresentar expressões

muito extensas, considerando ângulos genéricos  $\theta$  e  $\varphi$ , não foi possível escrevê-lo de forma simplificada no trabalho. À vista disso, são apresentadas as componentes não nulas deste tensor na configuração particular de duas famílias de fraturas perpendiculares, assumindo as coordenadas angulares esféricas  $(\theta, \varphi) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ , o que leva a uma solução com  $\underline{n}_2 = \underline{e}_1$ :

$$\begin{aligned}
C_{1111}^{\text{hom}} &= \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \frac{[\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4(1 + \frac{16}{3}\epsilon_1)](\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)}{\beta + 4\pi^2\kappa_1\kappa_4(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{16}{3}\epsilon_1\epsilon_2) + \frac{4}{3}\pi(\kappa_2\epsilon_2 + \bar{\kappa}_2\epsilon_1)} \\
C_{1122}^{\text{hom}} = C_{2211}^{\text{hom}} &= \left(k^s - \frac{2}{3}\mu^s\right) \frac{[\kappa_2 + 3\pi\kappa_4(\kappa_1 + \frac{8}{3}\epsilon_1)](\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)}{\beta + 4\pi^2\kappa_1\kappa_4(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{16}{3}\epsilon_1\epsilon_2) + \frac{4}{3}\pi(\kappa_2\epsilon_2 + \bar{\kappa}_2\epsilon_1)} \\
C_{1133}^{\text{hom}} = C_{3311}^{\text{hom}} &= \left(k^s - \frac{2}{3}\mu^s\right) \frac{\beta}{\beta + 4\pi^2\kappa_1\kappa_4(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{16}{3}\epsilon_1\epsilon_2) + \frac{4}{3}\pi(\kappa_2\epsilon_2 + \bar{\kappa}_2\epsilon_1)} \\
C_{2222}^{\text{hom}} &= \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \frac{\beta + 48\pi^2\kappa_4^2[\kappa_1^2(\epsilon_1 + \epsilon_2) + 4\epsilon_1\epsilon_2(\kappa_1 - \kappa_4)] + 16\pi\kappa_1\kappa_4(\kappa_2\epsilon_2 + \bar{\kappa}_2\epsilon_1)}{\beta + 4\pi^2\kappa_1\kappa_4(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{16}{3}\epsilon_1\epsilon_2) + \frac{4}{3}\pi(\kappa_2\epsilon_2 + \bar{\kappa}_2\epsilon_1)} \\
C_{2233}^{\text{hom}} = C_{3322}^{\text{hom}} &= \left(k^s - \frac{2}{3}\mu^s\right) \frac{[\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_4(\kappa_1 + \frac{8}{3}\epsilon_2)](\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)}{\beta + 4\pi^2\kappa_1\kappa_4(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{16}{3}\epsilon_1\epsilon_2) + \frac{4}{3}\pi(\kappa_2\epsilon_2 + \bar{\kappa}_2\epsilon_1)} \\
C_{3333}^{\text{hom}} &= \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \frac{[\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4(1 + \frac{16}{3}\epsilon_2)](\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)}{\beta + 4\pi^2\kappa_1\kappa_4(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{16}{3}\epsilon_1\epsilon_2) + \frac{4}{3}\pi(\kappa_2\epsilon_2 + \bar{\kappa}_2\epsilon_1)} \\
C_{1212}^{\text{hom}} = \mu^s \frac{4\bar{\kappa}_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4)}{4\bar{\kappa}_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4) + 16\pi\epsilon_2\kappa_4} ; C_{2323}^{\text{hom}} &= \mu^s \frac{4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4)}{4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4) + 16\pi\epsilon_1\kappa_4} \\
C_{1313}^{\text{hom}} &= \mu^s \frac{\gamma}{\gamma + 144\pi^2\kappa_4^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)(\kappa_1 + \kappa_4) + 64\pi\kappa_4(\kappa_3\epsilon_2 + \bar{\kappa}_3\epsilon_1)}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde  $\beta = (\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)(\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)$  e  $\gamma = (4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4))(4\bar{\kappa}_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4))$ , enquanto os parâmetros adimensionais  $\kappa_j$  e  $\bar{\kappa}_j$ , são definidos por:

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \frac{3k^s + \mu^s}{3k^s + 4\mu^s}; & \kappa_2 &= \frac{3k_n^1 a_1}{3k^s + 4\mu^s}; & \kappa_3 &= \frac{3k_t^1 a_1}{3k^s + 4\mu^s}; \\
\kappa_4 &= \frac{\mu^s}{3k^s + 4\mu^s}; & \bar{\kappa}_2 &= \frac{3k_n^2 a_2}{3k^s + 4\mu^s}; & \bar{\kappa}_3 &= \frac{3k_t^2 a_2}{3k^s + 4\mu^s},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

evidenciando que os parâmetros  $\bar{\kappa}_j$  são introduzidos para descrever as propriedades das fraturas relativas à segunda família  $\omega_2$ . Análogo à configuração anterior, evidencia-se que quando as densidades de fraturas são infinitesimais é suficiente expandir as componentes não nulas do tensor de rigidez homogeneizado  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  (Equação 3.20) para a primeira ordem em  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . Como já mencionado este resultado é equivalente à estimativa Diluída, o qual pode ser expresso através das seguintes componentes não nulas do tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ :

$$\begin{aligned}
C_{1111}^{\text{hom}} &= \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \left[1 - \frac{4\pi(1-2\kappa_1)^2}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1-\kappa_1)}\epsilon_1 - \frac{4\pi(3\kappa_4 + \kappa_1)^2}{3\bar{\kappa}_2 + 9\pi\kappa_1\kappa_4}\epsilon_2\right] \\
C_{1122}^{\text{hom}} = C_{2211}^{\text{hom}} &= \left(k^s - \frac{2}{3}\mu^s\right) - \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \left[\frac{4\pi(1-2\kappa_1)^2}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1-\kappa_1)}\epsilon_1 - \frac{4\pi(3\kappa_4 - \kappa_1)}{3\bar{\kappa}_2 + 9\pi\kappa_1\kappa_4}\epsilon_2\right] \\
C_{1133}^{\text{hom}} = C_{3311}^{\text{hom}} &= \left(k^s - \frac{2}{3}\mu^s\right) + \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \left[\frac{4\pi(1-2\kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1-\kappa_1)}\epsilon_1 + \frac{4\pi(3\kappa_4 - \kappa_1)}{3\bar{\kappa}_2 + 9\pi\kappa_1\kappa_4}\epsilon_2\right] \\
C_{2222}^{\text{hom}} &= \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \left[1 - \frac{4\pi(1-2\kappa_1)^2}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1-\kappa_1)}\epsilon_1 - \frac{4\pi(3\kappa_4 - \kappa_1)^2}{3\bar{\kappa}_2 + 9\pi\kappa_1\kappa_4}\epsilon_2\right] \\
C_{2233}^{\text{hom}} = C_{3322}^{\text{hom}} &= \left(k^s - \frac{2}{3}\mu^s\right) + \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \left[\frac{4\pi(1-2\kappa_1)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1-\kappa_1)}\epsilon_1 - \frac{4\pi(3\kappa_4 - \kappa_1)^2}{3\bar{\kappa}_2 + 9\pi\kappa_1\kappa_4}\epsilon_2\right] \quad (3.22) \\
C_{3333}^{\text{hom}} &= \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \left[1 - \frac{4\pi}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1-\kappa_1)}\epsilon_1 - \frac{4\pi(3\kappa_4 - \kappa_1)^2}{3\bar{\kappa}_2 + 9\pi\kappa_1\kappa_4}\epsilon_2\right] \\
C_{1212}^{\text{hom}} &= \mu^s - \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \frac{\frac{16}{3}\pi(1-\kappa_1)^2}{4\bar{\kappa}_3 + \pi(1-\kappa_1)(1+2\kappa_1)}\epsilon_2 \\
C_{2323}^{\text{hom}} &= \mu^s - \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \frac{\frac{16}{3}\pi(1-\kappa_1)^2}{4\bar{\kappa}_3 + \pi(1-\kappa_1)(1+2\kappa_1)}\epsilon_1 \\
C_{1313}^{\text{hom}} &= \mu^s - \left(k^s + \frac{4}{3}\mu^s\right) \left[\frac{\frac{16}{3}\pi(1-\kappa_1)^2}{4\bar{\kappa}_3 + \pi(1-\kappa_1)(1+2\kappa_1)}\epsilon_1 + \frac{\frac{16}{3}\pi(1-\kappa_1)^2}{4\bar{\kappa}_3 + \pi(1-\kappa_1)(1+2\kappa_1)}\epsilon_2\right]
\end{aligned}$$

### 3.2.3 Matriz sólida com distribuição isotrópica de microfaturas

Por último, considera-se uma matriz sólida homogênea com uma distribuição isotrópica de microfaturas modeladas como esferoides oblatos. Referindo-se a uma base ortonormal fixa  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , a orientação de uma família genérica  $\omega_i$  é prescrita pelas coordenadas angulares esféricas  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$  da Figura 3.5.

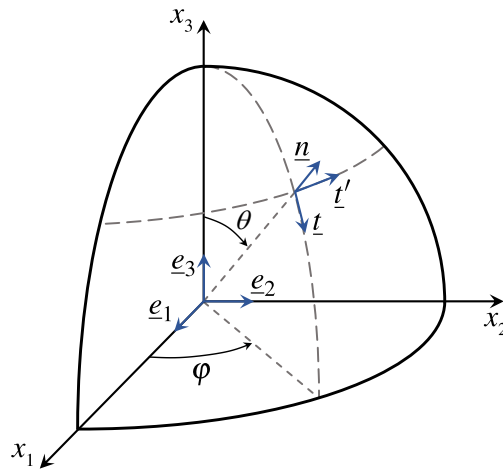


Figura 3.5 – Sistema de coordenadas esféricas angulares (Adaptado de Maghous et al. (2021))

Para descrever a orientação das fraturas define-se o vetor normal  $\underline{n}$  como (o subíndice  $i$  é omitido nesta subsecção):

$$\underline{n} = \sin \theta \cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \underline{e}_2 + \cos \theta \underline{e}_3 \quad (3.23)$$

e mantendo as mesmas notações das configurações anteriores, a estimativa de Mori-Tanaka para o tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  fica dada por:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \lim_{X \rightarrow 0} \left\{ \left[ \overline{\mathbb{C}^s + \mathbb{C}^f : (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1}} \right] : \left[ \overline{\mathbb{I} + (\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}^f - \mathbb{C}^s))^{-1}} \right]^{-1} \right\} \quad (3.24)$$

onde o operador  $\overline{\bullet}$  aplicado sobre uma quantidade  $\mathcal{Q}$  denota a integral sobre as coordenadas esféricas  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$  (MAGHOUS et al., 2013):

$$\overline{\mathcal{Q}} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{4\pi}{3} \epsilon X \mathcal{Q}(\theta, \varphi) \frac{\sin \theta}{4\pi} d\varphi \quad (3.25)$$

A distribuição isotropa de fraturas induz a um tensor de rigidez homogeneizado também isotropo, convenientemente expresso por:

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = 3k^{\text{hom}} \mathbb{J} + 2\mu^{\text{hom}} \mathbb{K} \quad (3.26)$$

no qual, os módulos volumétrico  $k^{\text{hom}}$  e de cisalhamento  $\mu^{\text{hom}}$  homogeneizados são definidos como:

$$k^{\text{hom}} = \frac{k^s}{1 + \epsilon \mathcal{B}_k} \quad ; \quad \mu^{\text{hom}} = \frac{\mu^s}{1 + \epsilon \mathcal{B}_\mu}, \quad (3.27)$$

e as funções adimensionais  $\mathcal{B}_k(k^s, \mu^s, ak_n)$  e  $\mathcal{B}_\mu(k^s, \mu^s, ak_n, ak_t)$  são dadas por (ver Aguiar e Maghous (2018)):

$$\mathcal{B}_k = \frac{4\pi(\kappa_1 - \kappa_4)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1)} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_\mu = \frac{16\pi\kappa_4}{15} \frac{6\kappa_2 + 4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(3\kappa_1 + \kappa_4)}{(\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)[4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4)]} \quad (3.28)$$

Mais uma vez destaca-se que nas situações em que a densidade de fraturas é infinitesimal pode-se expandir o tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  para a primeira ordem em  $\epsilon$ . Tal resultado corresponde a estimativa Diluída e pode ser escrito na mesma forma da Equação 3.26, sendo expresso simplesmente através dos módulos volumétrico  $k^{\text{hom}}$  e cisalhante  $\mu^{\text{hom}}$  homogeneizados, dados em função dos parâmetros adimensionais  $\mathcal{B}_k$  e  $\mathcal{B}_\mu$ :

$$k^{\text{hom}} = k^s (1 - \epsilon \mathcal{B}_k) \quad ; \quad \mu^{\text{hom}} = \mu^s (1 - \epsilon \mathcal{B}_\mu) \quad (3.29)$$

Nota-se que para todas as estimativas de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  descritas é preciso conhecer pelo menos dois parâmetros entre  $(\epsilon, \mathcal{N}, a)$  que irão servir para quantificar o dano no capítulo subsequente. Em particular, o caso de um material fissurado é definido fazendo  $\underline{k} = 0$  sobre as estimativas de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  apresentadas acima (ver, por exemplo, Dormieux e Kondo (2016)). Desta forma, o raio médio das fraturas  $a$  e o número de fraturas por volume unitário  $\mathcal{N}$  são naturalmente eliminados das expressões e o tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  é avaliado apenas por meio de  $\epsilon$ .

É importante enfatizar que as estimativas de Mori-Tanaka das expressões (3.15), (3.19) e (3.24) do tensor de rigidez equivalente  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  relacionadas, respectivamente, a uma família, duas famílias e uma distribuição isotropa de microfraturas, cumprem o requisito de simetria diagonal  $C_{ijkl}^{\text{hom}} = C_{klij}^{\text{hom}}$ . Tal verificação é relevante, pois no contexto de modelos baseados no esquema de homogeneização de Mori-Tanaka é possível que essa simetria não seja garantida, principalmente quando se analisam outras distribuições de fraturas, incluindo novas famílias. Esta é uma limitação do modelo que se baseia no esquema de homogeneização de Mori-Tanaka.

### 3.3 ILUSTRAÇÕES NUMÉRICAS

A presente seção visa ilustrar numericamente o comportamento dos materiais elásticos homogeneizados apresentados na seção precedente. Para todas as situações subseqüentes assume-se  $\mathcal{N}_i = 1$ , exceto se explicitado o contrário, e conseqüentemente, o raio médio das fraturas fica definido simplesmente por  $a_i = \sqrt[3]{\epsilon_i}$ . As expressões utilizadas para  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  em todas as aplicações referem-se aos resultados obtidos pelo esquema de homogeneização de Mori-Tanaka em cada caso específico. Em virtude de ilustrar o comportamento equivalente dos materiais até aqui descritos é preciso definir as propriedades que compõem a matriz sólida e as fraturas. Diante disso, empregam-se as propriedades de um maciço rochoso utilizado por Fossum (1985) e Zhang (2016) em seus trabalhos:  $E^s = 35$  GPa,  $\nu^s = 0,25$ ,  $k_n^i = 20$  GPa/m e  $k_t^i = 10$  GPa/m. Os parâmetros  $E^s$  e  $\nu^s$  correspondem, respectivamente ao módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson da matriz rochosa e as quantidades  $k_n^i$  e  $k_t^i$  designam a rigidez normal e tangencial da  $i$ -ésima família de fraturas  $\omega_i$ . As propriedades da matriz sólida  $k^s$  e  $\mu^s$  são calculadas através das clássicas relações entre os parâmetros de Lamé:

$$k^s = \frac{E^s}{3(1 - 2\nu^s)} = 23,33 \text{ GPa} \quad \text{e} \quad \mu^s = \frac{E^s}{2(1 + \nu^s)} = 14 \text{ GPa} \quad (3.30)$$

Com estes parâmetros estabelecidos e considerando a ausência de nucleação ( $\mathcal{N}_i$  constante) é possível exibir graficamente o comportamento das componentes do tensor de rigidez elástico

homogeneizado em função do parâmetro de densidade de fraturas  $\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^{\text{hom}}(\epsilon_i)$  para cada uma das configurações particulares avaliadas.

### 3.3.1 Uma família e distribuição isotrópica de microfaturas

Inicialmente apresenta-se a representação gráfica das componentes de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}(\epsilon)$  para dois casos particulares descritos, respectivamente, por uma única família e por uma distribuição isotrópica de fraturas. Todos os gráficos abaixo exibem as componentes do tensor de rigidez homogeneizado normalizadas segundo o valor da componente admitindo  $\epsilon = 0$ , isto é, pela própria rigidez da matriz (o subíndice  $i$  referente a família de fraturas é omitido nesta subsecção).

O gráfico da Figura 3.6 mostra que para uma única família, a componente de rigidez  $C_{3333}^{\text{hom}}$  perpendicular às fraturas apresenta uma degradação elevada para maiores valores de  $\epsilon$ , principalmente, quando comparada às demais componentes de ambas as configurações. Tal comportamento também se repete para as outras componentes de rigidez que envolvem a direção  $e_3$ , representadas nos gráficos das Figuras 3.7 e 3.8.

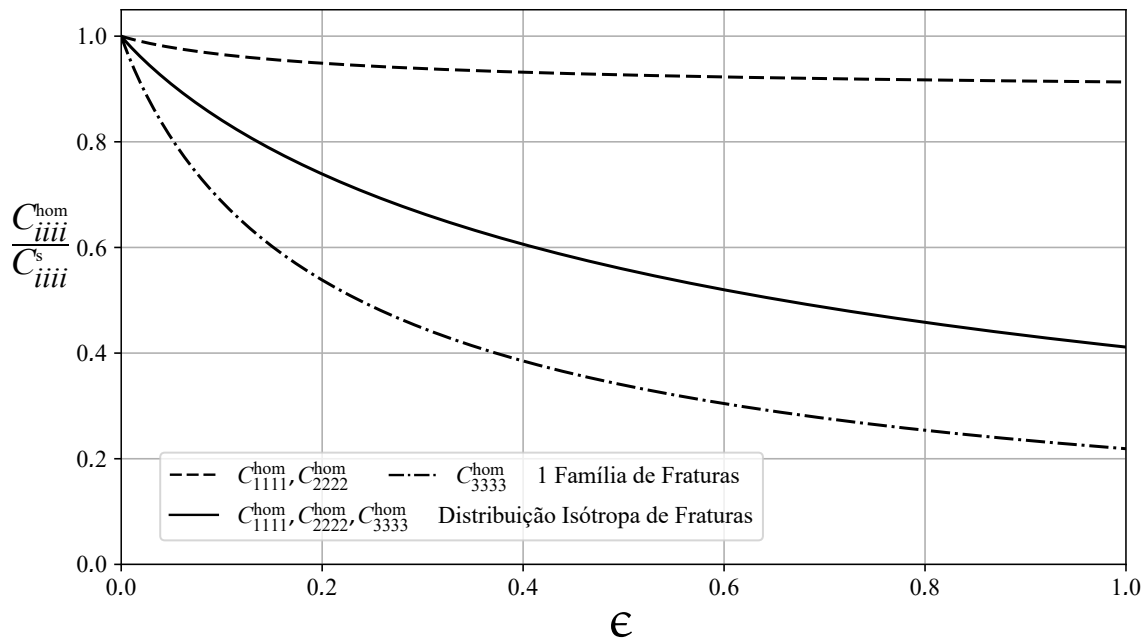


Figura 3.6 – Ilustração das componentes  $C_{iii}^{\text{hom}}$  do tensor de rigidez

O gráfico da Figura 3.7 ilustra que à medida que o parâmetro  $\epsilon$  se aproxima de 1, a rigidez das componentes referentes a uma distribuição isotrópica de microfaturas se aproximam consideravelmente da rigidez das componentes  $C_{1133}^{\text{hom}}$ ,  $C_{3311}^{\text{hom}}$ ,  $C_{2233}^{\text{hom}}$  e  $C_{3322}^{\text{hom}}$  relativas à configuração descrita por uma família de microfaturas paralelas. Outro resultado interessante é observado no gráfico da Figura 3.8, no qual a componente  $C_{1212}^{\text{hom}}$  do tensor de rigidez equivalente relativa à configuração de uma única família de fraturas não sofre influência do parâmetro  $\epsilon$ . Tal

fenômeno se justifica por essa componente só possuir contribuição da matriz sólida, especificamente do módulo cisalhante  $\mu^s$ , como se pode confirmar através da Equação 3.16.

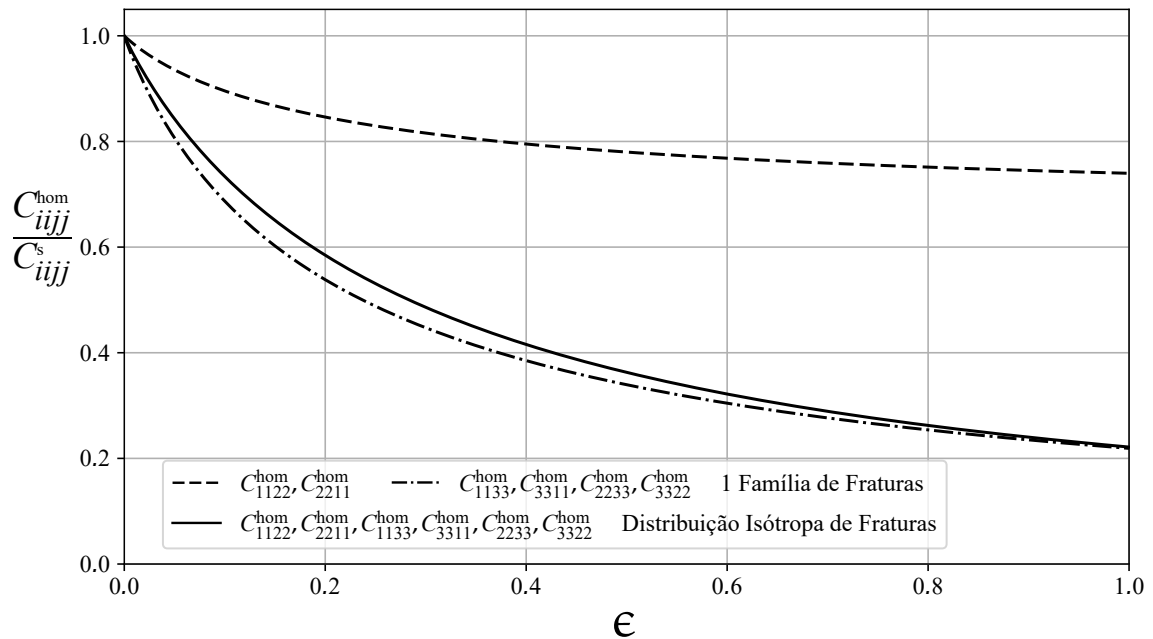


Figura 3.7 – Ilustração das componentes  $C_{ijij}^{hom}$  do tensor de rigidez

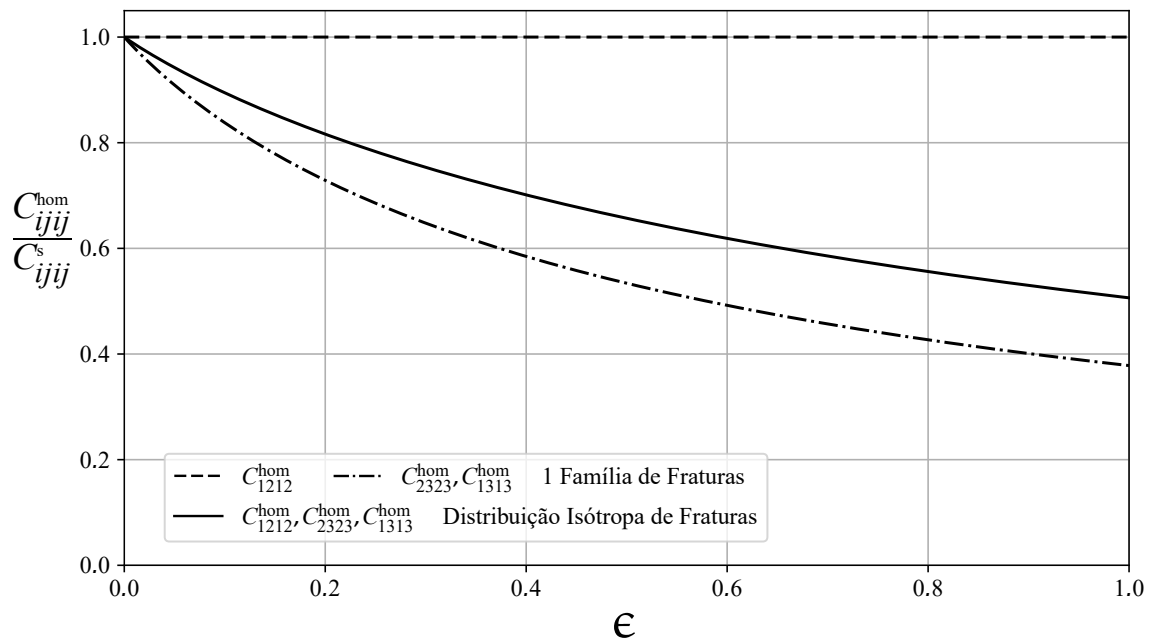


Figura 3.8 – Ilustração das componentes  $C_{ijij}^{hom}$  do tensor de rigidez

De forma geral, os três gráficos acima ilustram que as componentes do modelo descrito por uma distribuição isótropa encontram-se entre valores extremos das componentes de rigidez equivalentes do modelo que considera uma única família de fraturas.

### 3.3.2 Duas famílias de microfraturas perpendiculares

Para ilustrar algumas componentes do tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}(\epsilon_1, \epsilon_2)$  relativo a um material com duas famílias de microfraturas perpendiculares, admite-se  $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = 1$  e que as fraturas de ambas as famílias exibem propriedades idênticas ( $k_n^1 = k_n^2$  e  $k_t^1 = k_t^2$ ), dadas no início desta seção. A análise subsequente permite observar a influência do aumento dos parâmetros  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  sobre as componentes  $C_{1111}^{\text{hom}}$ ,  $C_{1133}^{\text{hom}}$ ,  $C_{1313}^{\text{hom}}$  e  $C_{2222}^{\text{hom}}$  de rigidez normalizadas pelo valor da própria componente admitindo  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ , que corresponde a rigidez das componentes da matriz sólida. Como esperado, a degradação da rigidez induzida pela presença de fraturas aumenta com os valores de cada um dos parâmetros de dano  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ .

O gráfico da Figura 3.9 ilustra que maiores valores de  $\epsilon_2$  possuem maior influência na degradação da componente  $C_{1111}^{\text{hom}}$  quando comparado com valores de  $\epsilon_1$ , o que se justifica pela orientação da segunda família de fraturas  $\omega_2$ , que corresponde a  $\underline{n}_2 = \underline{e}_1$ . A dependência de  $C_{1111}^{\text{hom}}$  em relação a  $\epsilon_1$  está de acordo com os desenvolvimentos de Maghous et al. (2014) para uma única família de fraturas, demonstrando que quando a orientação da fratura é perpendicular a componente analisada, há uma contribuição mínima de  $\epsilon$  para esta componente particular. Outro resultado interessante a ser observado é que quando  $\epsilon_2 = 0$ , a contribuição de  $\epsilon_1$  a  $C_{1111}^{\text{hom}}$  se torna nula (como observado por Maghous et al. (2014)). Contudo, quando  $\epsilon_2 \neq 0$ , há uma certa influência de  $\epsilon_1$  no modelo, evidenciando que a contribuição de ambas as variáveis de dano ocorre de forma acoplada dentro do sistema. Este acoplamento não é observado se forem consideradas fissuras no lugar de fraturas.

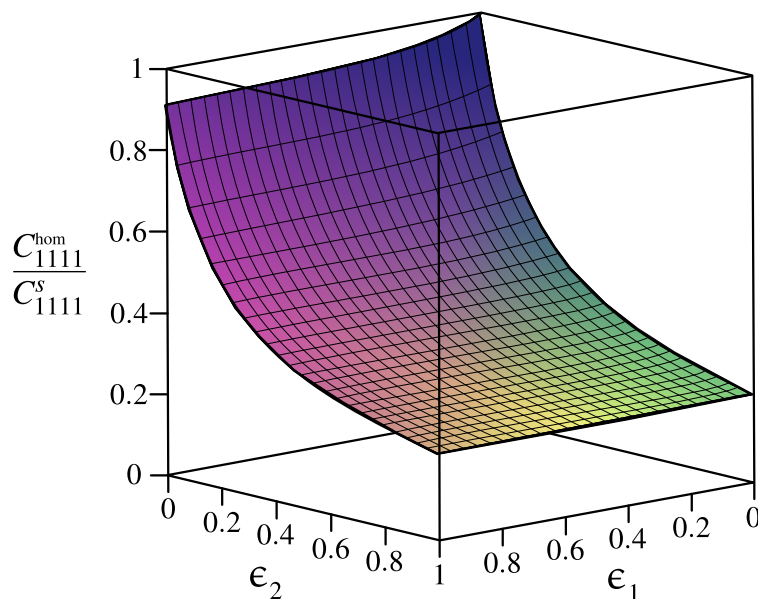


Figura 3.9 – Componente  $C_{1111}^{\text{hom}}$  considerando duas famílias de fraturas

Os gráficos das Figuras 3.10 e 3.11 ilustram, respectivamente, a degradação de uma componente



de rigidez normal  $C_{1133}^{\text{hom}}$  e outra de cisalhamento  $C_{1313}^{\text{hom}}$  em função de  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . Ao contrário do resultado anterior, nota-se que ambos os parâmetros influenciam de forma similar na redução da rigidez das componentes  $C_{1133}^{\text{hom}}$  e  $C_{1313}^{\text{hom}}$ . Tal fato também decorre da orientação de ambas as famílias de fraturas, uma vez que família  $\omega_1$  está normal à direção  $e_3$ , enquanto a família  $\omega_2$  encontra-se normal à direção  $e_1$ , como já mencionado. Essas componentes podem ser utilizadas para verificar a concordância da formulação aqui apresentada, uma vez que se espera uma solução simétrica em relação aos parâmetros  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ .

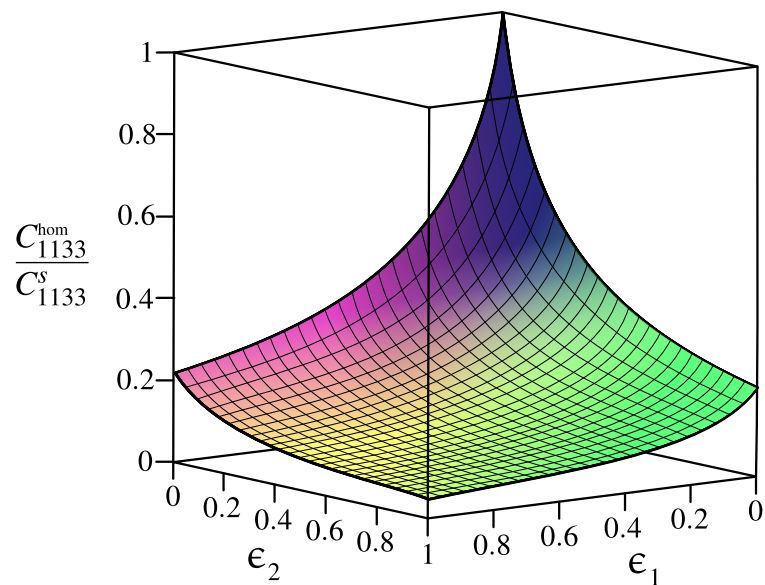


Figura 3.10 – Componente  $C_{1133}^{\text{hom}}$  considerando duas famílias de fraturas

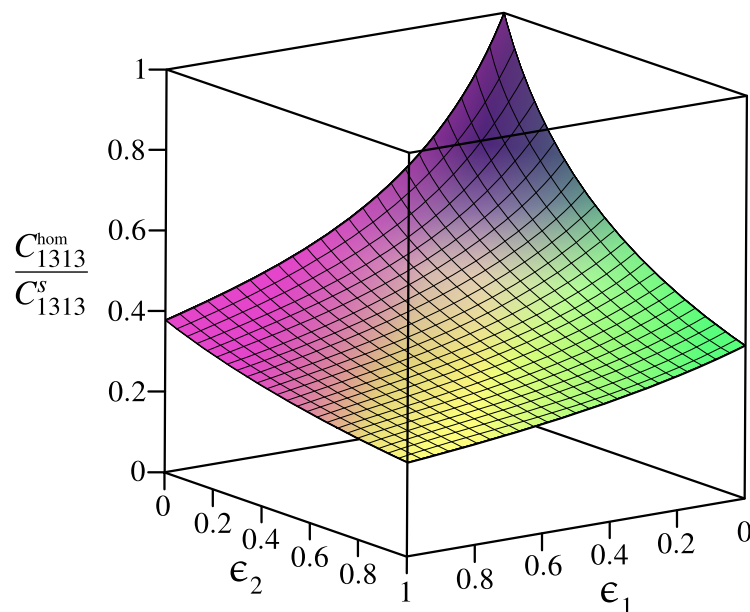


Figura 3.11 – Componente  $C_{1313}^{\text{hom}}$  considerando famílias de fraturas

O gráfico da Figura 3.12 ilustra a degradação da componente de rigidez normal  $C_{2222}^{\text{hom}}$  em relação a  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . É interessante notar que para essa componente o aumento de ambos os parâmetros influenciam pouco na degradação da sua rigidez, tendendo a estabilizar. Este fenômeno decorre do fato de não haver nenhuma família normal à direção  $\underline{e}_2$ , diferentemente das situações precedentes.

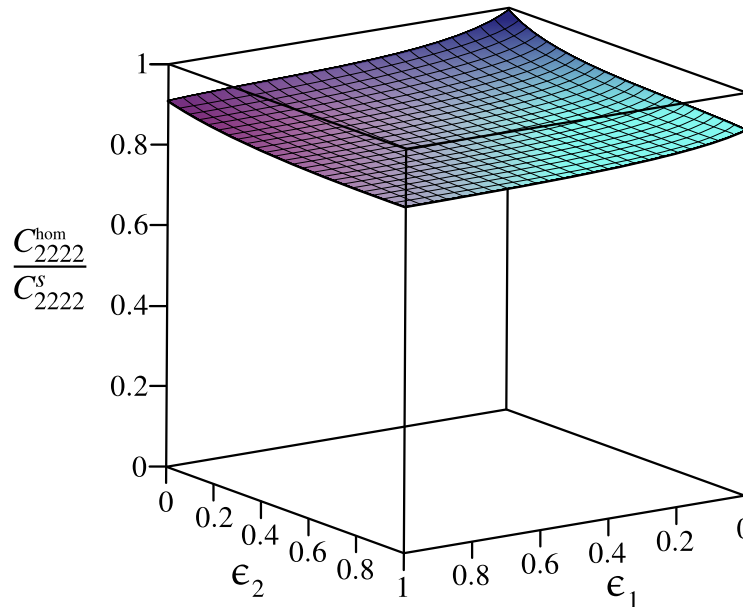


Figura 3.12 – Componente  $C_{2222}^{\text{hom}}$  considerando duas famílias de fraturas

### 3.3.3 Representação da tendência ao caso isótropo

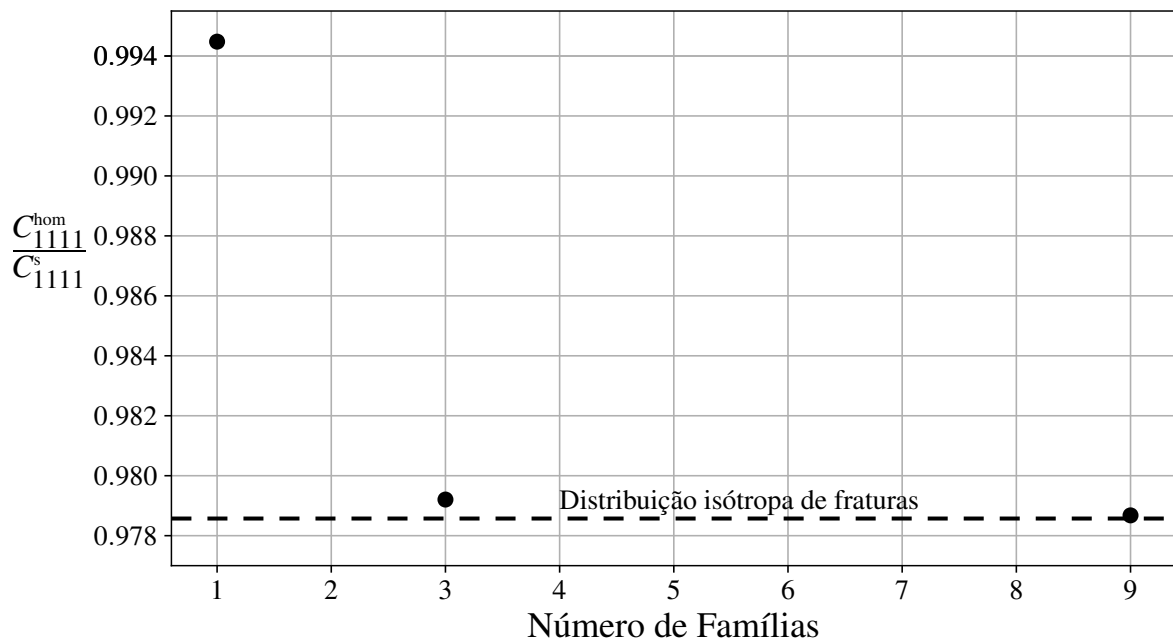
A presente subseção consiste em refinar aproximações para o comportamento homogeneizado de um material com uma distribuição isótropa de fraturas através do aumento do número de famílias distribuídas no meio. Nesta perspectiva, são consideradas três configurações aproximadas, descritas, respectivamente, por: 1 família, 3 famílias e 9 famílias de fraturas. Com o objetivo de ilustrar a convergência dos resultados são apresentados os valores numéricos relativos às componentes  $C_{1111}^{\text{hom}}$  e  $C_{1313}^{\text{hom}}$  do tensor de rigidez equivalente, comparando as componentes nas três situações citadas com o caso particular de uma distribuição isótropa de fraturas.

As propriedades da matriz sólida homogênea são dadas por  $k^s = 23,33$  GPa e  $\mu^s = 14$  GPa, e por simplicidade, assume-se que todas as famílias de fraturas possuem propriedades idênticas:  $k_n^i = 20$  GPa/m e  $k_t^i = 10$  GPa/m. O parâmetro de densidade de fraturas relativo ao problema de uma única família e de uma distribuição isótropa será fixado em  $\epsilon = 0,01$  e se considera uma fratura por unidade de volume  $\mathcal{N} = 1$ . Para comparar os resultados adota-se  $\epsilon_i = \frac{\epsilon}{3}$  e  $\mathcal{N}_i = \frac{\mathcal{N}}{3}$  para três famílias, enquanto admite-se  $\epsilon_i = \frac{\epsilon}{9}$  e  $\mathcal{N}_i = \frac{\mathcal{N}}{9}$  para nove famílias de fraturas. A orientação de cada família é definida pelo vetor normal  $\underline{n}_i$  (Equação 3.23) e tomando diferentes coordenadas angulares esféricas  $(\theta, \varphi)$ , calculam-se as componentes  $C_{1111}^{\text{hom}}$  e  $C_{1313}^{\text{hom}}$ , conforme indica a Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Coordenadas Angulares ( $\theta, \varphi$ ) e componentes de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ 

Casos Particulares	Número de Famílias	Orientação		$C_{1111}^{\text{hom}}$ [GPa]	$C_{1313}^{\text{hom}}$ [GPa]
		$\theta$ [°]	$\varphi$ [°]		
1	1	0	0	41,765	13,711
2	3	0	0	41,123	13,806
		90	0		
		90	90		
3	9	0	0	41,101	13,817
		90	0		
		90	90		
		90	45		
		45	90		
		45	0		
		90	135		
135	90				
135	0				
4	Isótopo	Aleatório		41,096	13,819

Para ilustrar a convergência, as componentes do tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$  são normalizadas segundo a própria componente do tensor de rigidez da matriz ( $C_{1111}^s \approx 41,996$  GPa e  $C_{1313}^s = 14$  GPa). Partindo dos resultados explicitados na Tabela 3.1, foram traçados dois gráficos (Figuras 3.13 e 3.14) ilustrando a convergência das componentes do tensor de rigidez equivalente normalizadas, em relação aos valores das componentes na configuração de uma distribuição isótropa de fraturas.

Figura 3.13 – Ilustração da componente  $C_{1111}^{\text{hom}}$  para casos particulares

Os gráficos das Figuras 3.13 e 3.14 ilustram uma boa concordância entre os modelos aproximados propostos, evidenciando que as configurações descritas por três e nove famílias já são capazes de descrever adequadamente o comportamento homogeneizado de um material com uma distribuição isótropa de fraturas. Essa aplicação numérica é importante para identificar o número mínimo de

famílias de fraturas necessário para aproximar com precisão o comportamento de um material com uma distribuição isotrópica de fraturas.

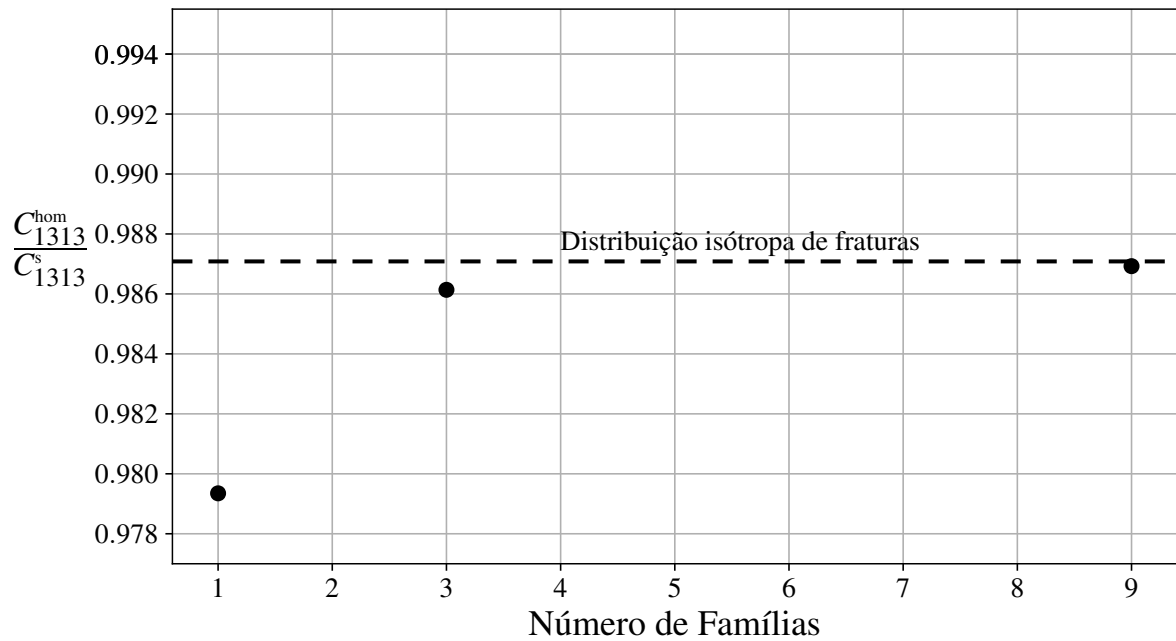


Figura 3.14 – Ilustração da componente  $C_{1313}^{hom}$  para casos particulares

## 4 MODELO DE DANO CONTÍNUO DESCRITO POR UM ÚNICO PARÂMETRO DE DANO

Neste capítulo, todo o raciocínio é desenvolvido sobre o comportamento homogeneizado do material, isto é, na escala macroscópica. Diante disso, visando simplificar a notação, a distinção entre variáveis microscópicas e macroscópicas ( $\underline{\underline{\epsilon}}$  e  $\underline{\underline{E}}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}$  e  $\underline{\underline{\Sigma}}$ ,  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ ,  $\mathbb{S}$  e  $\mathbb{S}^{\text{hom}}$ , entre outras) será omitida, de modo que apenas a notação clássica minúscula será utilizada. Um importante aprendizado da homogeneização de meios fraturados é que a densidade de fraturas  $\epsilon = \mathcal{N}a^3$ , introduzida por Budiansky e O'Connell (1976), é uma variável relevante em relação a energia elástica. Essa grandeza passará a ser denotada por  $\phi = \mathcal{N}a^3$  e no nível macroscópico será interpretada como parâmetro de dano, sendo a variável responsável por governar o efeito da propagação de dano.

Esta seção trata da formulação termodinâmica do modelo de dano contínuo no contexto das evoluções elásticas isotérmicas. Inicialmente, considera-se a existência de um único parâmetro de dano  $\epsilon = \phi$ , assumindo  $\mathcal{N}$  constante e avaliando a propagação de dano somente através do crescimento das fraturas já existentes. Tal condição restringe o domínio de aplicações a situações que envolvem uma família de fraturas paralelas ou uma distribuição isotrópica de fraturas, como ilustra a Figura 4.1. Contudo, no último caso, um carregamento macroscópico ( $\underline{\underline{\sigma}}$  ou  $\underline{\underline{\epsilon}}$ ) isotrópico precisa ser considerado. Para superar esta dificuldade, no próximo capítulo será introduzido um conjunto finito de parâmetros de dano  $\epsilon_i = \phi_i$  com  $(i = 1, \dots, n)$ , a fim de generalizar a formulação proposta para uma configuração de diversas famílias de fraturas.

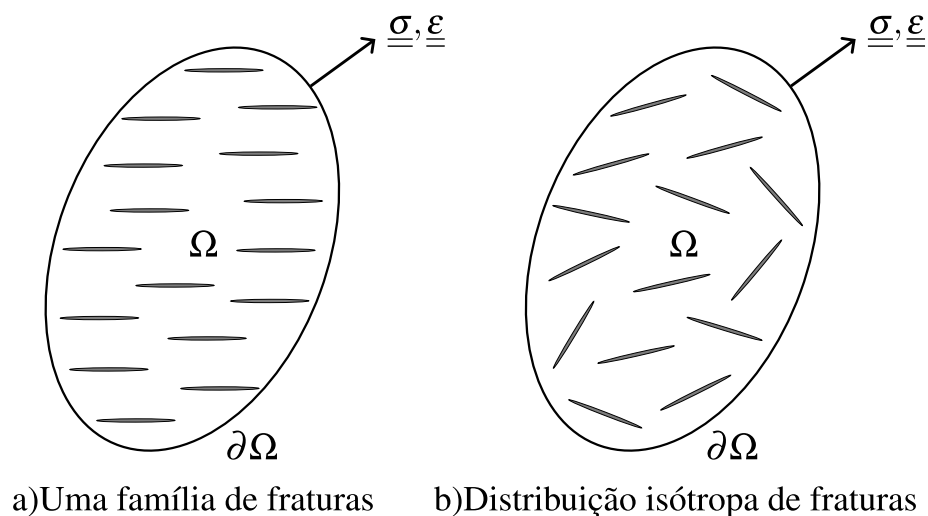


Figura 4.1 – Propagação em meio multi-fraturado

#### 4.1 FRATURAÇÃO DESCRITA POR UM ÚNICO PARÂMETRO DE DANO

Nesta seção apresenta-se a formulação termodinâmica do critério de propagação de dano no nível macroscópico para um material nas configurações de uma única família de fraturas paralelas e uma distribuição isótropa de fraturas. Para que a formulação considerando um único parâmetro de dano  $\phi$  (com  $\mathcal{N}$  constante) possa contemplar o último caso, é necessário considerar apenas carregamentos macroscópicos isotrópicos. O processo de homogeneização desenvolvido ao longo do Capítulo 3 nos mostra que o tensor  $\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}$  é função de  $\phi = \mathcal{N}a^3$ . Partindo desta premissa, pode-se reescrever a densidade volumétrica de energia livre da Equação 2.8 no contexto macroscópico. Assumindo evoluções elásticas isotérmicas, as variáveis de estado da densidade volumétrica macroscópica de energia livre  $\psi$  são o tensor das deformações macroscópico  $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\varepsilon}}$ , o parâmetro de dano  $\phi$  e o número de fraturas por unidade de volume  $\mathcal{N}$ .

$$\psi = \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \phi, \mathcal{N}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}(\phi, \mathcal{N}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.1)$$

Análogo à subseção 2.1.4, a dissipação intrínseca, denotada por  $\mathcal{D}$ , é definida como a diferença entre a potência das forças externas  $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$  e a energia armazenada  $\dot{\psi}$  agora no quadro macroscópico. A combinação do primeiro e segundo princípios da termodinâmica fornece a desigualdade de Clausius-Duhem (ver Lemaitre e Chaboche (1990)):

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (4.2)$$

e definindo  $\dot{\psi}$  como:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{N}} \dot{\mathcal{N}} \quad (4.3)$$

pode-se reescrever a desigualdade de Clausius-Duhem da seguinte forma:

$$\mathcal{D} = \left( \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \dot{\phi} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{N}} \dot{\mathcal{N}} \geq 0 \quad (4.4)$$

que vale para qualquer evolução do material. Partindo do raciocínio clássico que consiste em considerar evoluções reversíveis ( $\mathcal{D} = 0$ ), tem-se que  $\dot{\phi} = 0$  e  $\dot{\mathcal{N}} = 0$ . A existência de tais evoluções implica em:

$$\mathcal{D} = \left( \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} = 0 \quad \forall \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \quad (4.5)$$

a qual fornece a equação de estado elástica macroscópica:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \mathbb{C}(\phi, \mathcal{N}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.6)$$

Levando em conta a equação de estado, a desigualdade da Equação 4.4 se reduz a:

$$\mathcal{D} = -\frac{\partial \psi}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\mathcal{N}}} \dot{\mathcal{N}} \geq 0 \quad (4.7)$$

onde o primeiro termo representa a parcela de dissipação devido à variação de  $\phi$ , enquanto o segundo refere-se à dissipação relativa à variação de  $\mathcal{N}$ . Restringindo a análise à ausência de nucleação  $\dot{\mathcal{N}} = 0$ , a Equação 4.7 toma a seguinte forma:

$$\mathcal{D} = -\frac{\partial \psi}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} \geq 0 \quad (4.8)$$

na qual, se considera a dissipação devido apenas a  $\dot{\phi} \neq 0$ , que é equivalente à variação do tamanho das fraturas. Tal como no trabalho de Griffith (1921), a quantidade  $\mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \phi) = -\partial \psi / \partial \dot{\phi}$  assume o papel da força termodinâmica responsável pela propagação de dano, sendo também chamada de taxa de liberação de energia:

$$\mathcal{F} = -\frac{\partial \psi}{\partial \dot{\phi}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \phi) = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathbb{C}(\phi)}{\partial \dot{\phi}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.9)$$

e por sua vez, a Equação 4.8 fica dada por:

$$\mathcal{D} = \mathcal{F} \dot{\phi} \geq 0 \quad (4.10)$$

Análogo à Equação 2.12, que descreve a força termodinâmica relacionada à propagação de fraturas ( $\dot{s} \geq 0$ ), define-se agora  $\mathcal{F}$  como a força termodinâmica da propagação de dano associada à evolução de  $\phi$  ( $\dot{\phi} > 0$ ). Mais uma vez, pode-se assumir a existência de um valor crítico  $\mathcal{F}_c(\phi)$  a partir do qual há propagação para escrever um critério na forma da Equação 2.13:

$$H(\mathcal{F}, \phi) = \mathcal{F} - \mathcal{F}_c(\phi) \leq 0 \quad (4.11)$$

sendo a grandeza  $\mathcal{F}_c(\phi)$  análoga à energia crítica da fratura  $\mathcal{F}_f$ . Contudo, deve-se enfatizar que diferentemente de  $\mathcal{F}_f$ , o termo  $\mathcal{F}_c$  não é uma propriedade intrínseca do material, mas pode

dependem da escala de observação, do tamanho da fratura e por consequência da história de carregamento (DORMIEUX; KONDO, 2016). Dormieux et al. (2006b) deduziram a seguinte relação entre  $\mathcal{F}_f$  e  $\mathcal{F}_c$  para materiais quase-frágeis:

$$\mathcal{F}_c(\phi) = \frac{2\pi}{3} \mathcal{F}_f \left( \frac{\mathcal{N}}{\phi} \right)^{1/3} \quad (4.12)$$

Embora a expressão da taxa de liberação de energia (Equação 4.9) seja dada em função das deformações macroscópicas, alternativamente é possível escrever esta quantidade através de uma abordagem em tensões macroscópicas. Para tanto, recorda-se a seguinte equivalência entre os tensores de rigidez  $\mathbb{C}^{\text{hom}} = \mathbb{C}(\phi)$  e de flexibilidade  $\mathbb{S}^{\text{hom}} = \mathbb{S}(\phi)$  homogeneizados:

$$\mathbb{C}(\phi) : \mathbb{S}(\phi) = \mathbb{I} \quad (4.13)$$

e diferenciando a Equação 4.13 em relação a  $\phi$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbb{C}(\phi)}{\partial \phi} : \mathbb{S}(\phi) + \mathbb{C}(\phi) : \frac{\partial \mathbb{S}(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (4.14)$$

A manipulação matemática da expressão acima, leva a:

$$\frac{\partial \mathbb{C}(\phi)}{\partial \phi} = -\mathbb{C}(\phi) : \frac{\partial \mathbb{S}(\phi)}{\partial \phi} : \mathbb{C}(\phi) \quad (4.15)$$

e a combinação da Equação 4.15 com a Equação 4.9, levando em conta a Equação de Estado (4.6), permite deduzir uma expressão para a taxa de liberação de energia  $\mathcal{F}$  em função das tensões, equivalente à anterior:

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \frac{\partial \mathbb{C}(\phi)}{\partial \phi} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \frac{\partial \mathbb{S}(\phi)}{\partial \phi} : \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (4.16)$$

A Equação 4.16 corresponde à forma utilizada para  $\mathcal{F}$  nas abordagens numéricas relacionadas a materiais com uma única família e distribuição isotrópica de microfraturas.

#### 4.1.1 Ilustrações numéricas

A presente subseção visa estudar a propagação de dano, trazendo a representação gráfica da taxa de liberação de energia em função do parâmetro de dano  $\phi$ . Assume-se  $\mathcal{N} = 1$  para todas as



situações subsequentes, exceto se explicitado o contrário. O objetivo é permitir o desenvolvimento de condições de propagação alternativas, propostas para carregamentos macroscópicos específicos em deformação e tensão prescritas. As propriedades do material da matriz são  $k^s = 24,42$  GPa e  $\mu^s = 13,27$  GPa e referem-se ao módulo elástico instantâneo do concreto relatado em Le (2008). Quanto às propriedades das fraturas, assumem-se os valores de rigidez  $k_n = 42,22$  GPa/m e  $k_t = 16,89$  GPa/m, considerando a relação  $k_n/k_t = 2,5$  (BART, 2000). Os valores adotados, nesta seção, para a energia crítica da fratura  $\mathcal{F}_f$  são condizentes com ensaios elásticos realizados sobre corpos de prova padronizados de concreto (ver Bazant e Pfeiffer (1987)). As aplicações subsequentes abrangem as situações de uma única família de fraturas e uma distribuição isótropa de fraturas.

#### 4.1.1.1 Uma família de fraturas paralelas

A abordagem do problema em deformação/tensão prescrita considerando uma família de fraturas paralelas com orientação normal ao eixo  $\underline{e}_3$  baseia-se na Equação 4.16 para descrever a taxa de liberação de energia. Diante disso, define-se a derivada parcial das componentes do tensor de rigidez equivalente  $\mathbb{C}(\phi)$  dado na Equação 3.16 em relação a  $\phi$  como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{1111}}{\partial \phi} = \frac{\partial C_{2222}}{\partial \phi} = \frac{\partial C_{1122}}{\partial \phi} = \frac{\partial C_{2211}}{\partial \phi} &= -(3k^s + 4\mu^s) \frac{4\pi \left[ \frac{2}{3}\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1) \right] (1 - 2\kappa_1)^2}{(3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\phi)^2} \\ \frac{\partial C_{3333}}{\partial \phi} &= -(3k^s + 4\mu^s) \frac{4\pi \left[ \frac{2}{3}\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1) \right]}{(3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\phi)^2} \\ \frac{\partial C_{1133}}{\partial \phi} = \frac{\partial C_{2233}}{\partial \phi} = \frac{\partial C_{3311}}{\partial \phi} = \frac{\partial C_{3322}}{\partial \phi} &= -(3k^s - 2\mu^s) \frac{4\pi \left[ \frac{2}{3}\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1) \right]}{(3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\phi)^2} \\ \frac{\partial C_{2323}}{\partial \phi} = \frac{\partial C_{1313}}{\partial \phi} &= -\mu^s \frac{\frac{16}{3}\pi \left[ \frac{8}{3}\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1) \right] (1 - \kappa_1)}{(4\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1) + \frac{16}{3}\pi\phi(1 - \kappa_1))^2} \\ \frac{\partial C_{1212}}{\partial \phi} &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

sendo os parâmetros  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  dados pela Equação 3.17. Evidencia-se que  $\kappa_2 = \kappa_2(\phi)$  e  $\kappa_3 = \kappa_3(\phi)$  em virtude da relação  $a = (\phi/\mathcal{N})^{1/3}$ . Portanto, para obter as expressões acima, estes termos também devem ser levados em conta na derivada em relação a  $\phi$ . A partir da equivalência  $\mathbb{S}(\phi) = \mathbb{C}(\phi)^{-1}$  (Equação 2.50), determina-se a flexibilidade efetiva e as componentes não nulas do tensor  $\partial \mathbb{S}(\phi) / \partial \phi$  são obtidas derivando  $\mathbb{S}(\phi)$  em relação a  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{3333}}{\partial \phi} &= \frac{1}{(3k^s + 4\mu^s)} \frac{4\pi \left[ \frac{2}{3}\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1) \right]}{(\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1))^2} \\ \frac{\partial S_{2323}}{\partial \phi} = \frac{\partial S_{1313}}{\partial \phi} &= \frac{1}{\mu^s} \frac{\frac{4}{3}\pi \left[ \frac{8}{3}\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1) \right] (1 - \kappa_1)}{(4\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1))^2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Uma vez definidos os tensores  $\partial \mathbb{C}(\phi)/\partial \phi$  e  $\partial \mathbb{S}(\phi)/\partial \phi$ , assumem-se três carregamentos macroscópicos prescritos (isótropo, uniaxial e cisalhante) para obter resultados mais específicos.

- Aplicação de um carregamento isótropo

O primeiro caso consiste em impor um carregamento isótropo do tipo  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon \underline{\underline{1}}$  ou  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{\underline{1}}$  ao material. Resolvendo a Equação 4.16 escreve-se a seguinte expressão para  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F} = (3k^s + 4\mu^s) \frac{2\pi \left[ \frac{2}{3}\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1) \right] (4\kappa_1 - 1)^2 \varepsilon^2}{(3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\phi)^2} = \frac{2\pi \left[ \frac{2}{3}\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1) \right] \sigma^2}{(3k^s + 4\mu^s)(\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1))^2} \quad (4.19)$$

que corresponde à taxa de liberação de energia para uma deformação/tensão isótropa aplicada a um material com uma família de fraturas paralelas no nível macroscópico. A comparação desta expressão com a energia crítica  $\mathcal{F}_c(\phi)$  permite avaliar a propagação de dano. Fundamentando-se no critério estabelecido na Equação 4.11, quando  $\mathcal{F} < \mathcal{F}_c(\phi)$  não existe propagação de dano, levando a  $\dot{\phi} = 0$ . Entretanto, quando  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c(\phi)$ , a energia disponível alcançou o limite para propagação, indicando um possível  $\dot{\phi} \neq 0$ . Partindo da Equação 4.19 avaliada em um regime crítico  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ , obtém-se as seguintes expressões:

$$\varepsilon \leq \varepsilon_{cr}(\phi) = \sqrt{\frac{(3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\phi)^2}{2\pi \left[ \frac{2}{3}\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1) \right] (4\kappa_1 - 1)^2 (3k^s + 4\mu^s)}} \mathcal{F}_c \quad (4.20)$$

e

$$\sigma \leq \sigma_{cr}(\phi) = \sqrt{\frac{(3k^s + 4\mu^s)(\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1))^2}{2\pi \left[ \frac{2}{3}\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1) \right]}} \mathcal{F}_c \quad (4.21)$$

sendo  $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c(\phi)$  em virtude da Equação 4.12. As expressões acima correspondem, respectivamente, aos carregamentos isótopos críticos dados em deformações e tensões macroscópicas. Neste contexto, enquanto  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}(\phi)$  ou  $\sigma < \sigma_{cr}(\phi)$  não haverá propagação.

- Aplicação de um carregamento uniaxial

No segundo caso impõe-se um carregamento uniaxial do tipo  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3$  ou  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3$  ao material. A partir da Equação 4.16 escreve-se a seguinte expressão para  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F} = (3k^s + 4\mu^s) \frac{2\pi \left[ \frac{2}{3}\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1) \right] \varepsilon^2}{(3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\phi)^2} = \frac{2\pi \left[ \frac{2}{3}\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1) \right] \sigma^2}{(3k^s + 4\mu^s)(\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1))^2} \quad (4.22)$$

a qual corresponde à taxa de liberação de energia para uma deformação/tensão uniaxial aplicada a um material com uma família de fraturas paralelas no nível macroscópico. Novamente ao

comparar esta expressão com a energia crítica  $\mathcal{F}_c(\phi)$  é possível avaliar a propagação de dano através do critério estabelecido na Equação 4.11. Partindo da Equação 4.22 avaliada em um regime crítico  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ , obtém-se as seguintes expressões:

$$\varepsilon \leq \varepsilon_{cr}(\phi) = \sqrt{\frac{(3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1) + 4\pi\phi)^2}{2\pi \left[\frac{2}{3}\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1)\right] (3k^s + 4\mu^s)}} \mathcal{F}_c \quad (4.23)$$

e

$$\sigma \leq \sigma_{cr}(\phi) = \sqrt{\frac{(3k^s + 4\mu^s)(\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1))^2}{2\pi \left[\frac{2}{3}\kappa_2 + \pi\kappa_1(1 - \kappa_1)\right]}} \mathcal{F}_c \quad (4.24)$$

sendo  $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c(\phi)$  em virtude da Equação 4.12. As expressões acima correspondem, respectivamente, aos carregamentos uniaxiais críticos dados em deformações e tensões macroscópicas. Neste contexto, enquanto  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}(\phi)$  ou  $\sigma < \sigma_{cr}(\phi)$  não haverá propagação.

- Aplicação de um carregamento cisalhante

A última abordagem consiste em impor um carregamento cisalhante definido por  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$  ou  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$  ao material. Partindo da Equação 4.16 pode-se escrever a seguinte expressão para  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F} = \mu^s \frac{\frac{8}{3}\pi \left[\frac{8}{3}\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1)\right] (1 - \kappa_1) \varepsilon^2}{(4\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1) + \frac{16}{3}\pi\phi(1 - \kappa_1))^2} = \frac{\frac{2}{3}\pi \left[\frac{8}{3}\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1)\right] (1 - \kappa_1) \sigma^2}{\mu^s (4\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1))^2} \quad (4.25)$$

que corresponde a taxa de liberação de energia para uma deformação/tensão cisalhante aplicada a um material com uma família de fraturas paralelas no nível macroscópico. Comparando esta expressão com energia crítica  $\mathcal{F}_c(\phi)$  pode-se avaliar a propagação de dano através do critério da Equação 4.11. Partindo da Equação 4.25 avaliada em um regime crítico  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ , obtém-se:

$$\varepsilon \leq \varepsilon_{cr}(\phi) = \sqrt{\frac{(4\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1) + \frac{16}{3}\pi\phi(1 - \kappa_1))^2}{\frac{8}{3}\pi \left[\frac{8}{3}\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1)\right] (1 - \kappa_1) \mu^s}} \mathcal{F}_c \quad (4.26)$$

e

$$\sigma \leq \sigma_{cr}(\phi) = \sqrt{\frac{\mu^s (4\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1))^2}{\frac{2}{3}\pi \left[\frac{8}{3}\kappa_3 + \pi(1 - \kappa_1)(1 + 2\kappa_1)\right] (1 - \kappa_1)}} \mathcal{F}_c \quad (4.27)$$

sendo  $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c(\phi)$  em virtude da Equação 4.12. As expressões acima correspondem, respectivamente, aos carregamentos cisalhantes críticos dados em deformações e tensões macroscópicas. Neste contexto, enquanto  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}(\phi)$  ou  $\sigma < \sigma_{cr}(\phi)$  não haverá propagação.

Para a representar graficamente a taxa de liberação de energia definida nas Equações 4.19, 4.22 e 4.25 é preciso definir o carregamento aplicado. Assumindo uma deformação constante  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , a taxa de liberação de energia normalizada segundo  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\phi = 0)$  é ilustrada pela Figura 4.2:

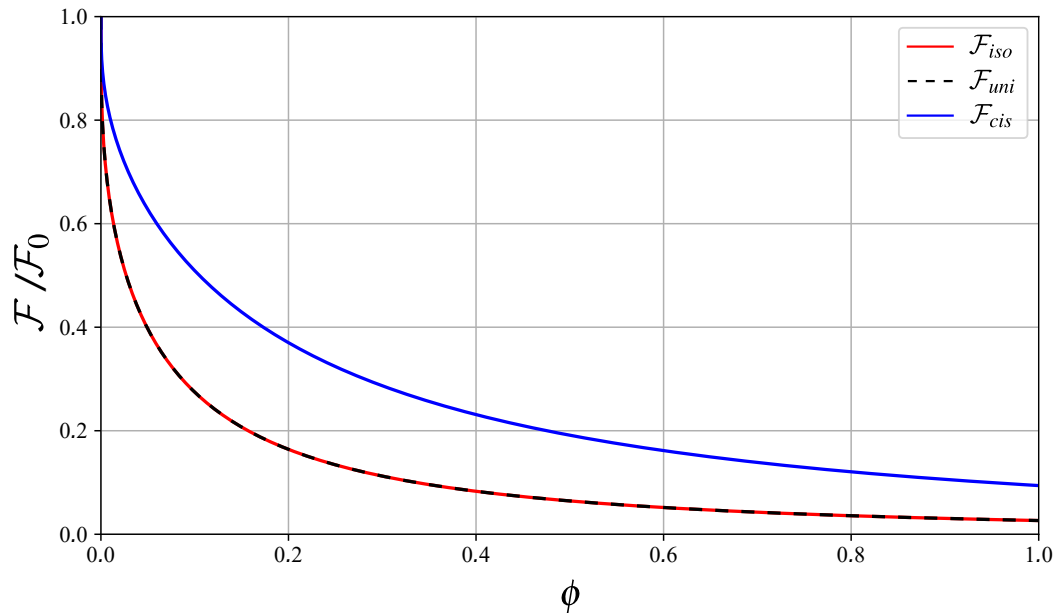


Figura 4.2 – Taxa de liberação de energia em função de  $\phi$

$$\mathcal{N} = 1; \quad \varepsilon_0 = 1 \times 10^{-3}$$

da qual se percebe que os maiores valores para  $\mathcal{F}$  nas três situações ocorrem para parâmetros de dano menores e com o aumento de  $\phi$  a taxa de liberação de energia tende a diminuir em cada ponto avaliado. Outra observação pertinente é que  $\mathcal{F}$  apresenta resultados idênticos considerando um carregamento isótopo ou uniaxial, quando normalizado pelo seu respectivo valor de  $\mathcal{F}_0$ .

A Figura 4.3 ilustra as deformações críticas para os três carregamentos macroscópicos propostos, admitindo um valor de  $\mathcal{F}_f = 40 \text{ J/m}^2$  para a energia crítica da fratura. Este gráfico estabelece o valor crítico para cada uma das direções dos carregamentos aplicados em função do parâmetro de dano. Em outras palavras, para um determinado nível de dano, existe uma deformação na direção do carregamento solicitante que é responsável por iniciar o processo de propagação de dano no material. É pertinente observar que se o parâmetro de dano for admitido como nulo, a deformação crítica tende ao infinito. Isso ocorre porque não é possível propagar uma fratura que sequer se encontra na matriz com a teoria desenvolvida aqui.

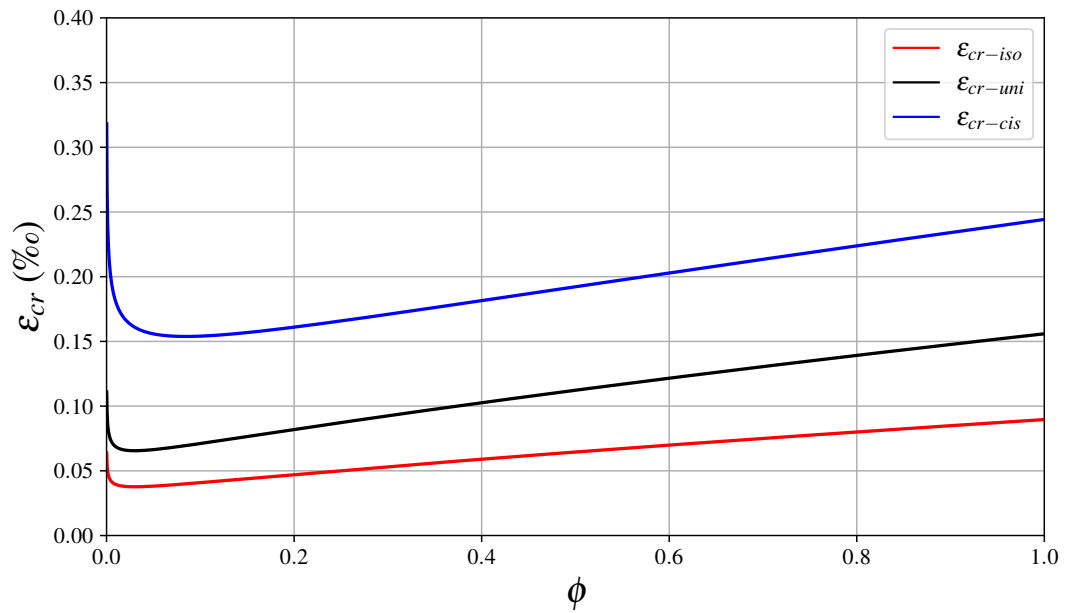


Figura 4.3 – Deformações críticas: uma única família de fraturas

$$\mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_f = 40 \text{ J/m}^2$$

Utilizando as mesmas propriedades empregadas na abordagem em deformação crítica, tem-se a representação gráfica das tensões críticas através da Figura 4.4.

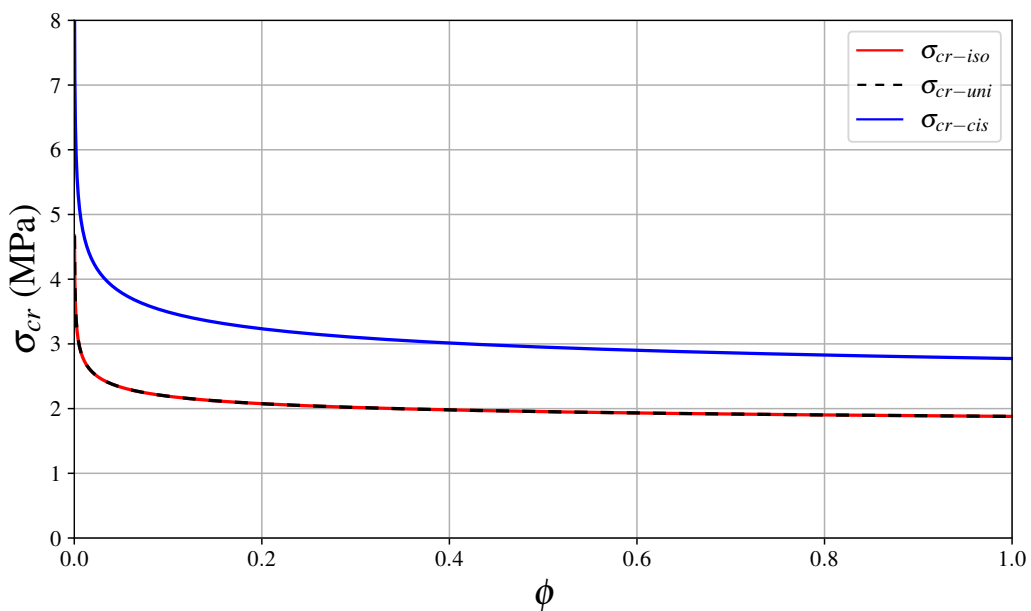


Figura 4.4 – Tensões críticas: uma única família de fraturas

$$\mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_f = 40 \text{ J/m}^2$$

Tal como com as deformações críticas, se o parâmetro  $\phi$  for admitido como nulo, as tensões críticas tendem ao infinito, pelo mesmo motivo já mencionado. Como se pode observar na

Figura 4.4, os limites aplicando tensões isotrópicas e uniaxiais obtiveram a mesma curva, tal resultado decorre da impossibilidade de propagação das fraturas ao aplicar tensões paralelas a estas. Por esta razão, carregamentos isotrópicos, dados em tensão, coincidem com a aplicação de carregamentos uniaxiais. Caso as tensões não coincidisse sobre estes eixos, os resultados apresentados não seriam obtidos. É importante perceber que para maiores valores de  $\phi$  a tensão crítica reduz, isso se explica devido a redução da área da matriz do material.

#### 4.1.1.2 Distribuição isotrópica de fraturas

A abordagem numérica do problema em deformação/tensão prescrita considerando uma distribuição isotrópica de fraturas baseia-se na Equação 4.16 para descrever a taxa de liberação de energia. Diante disso, define-se a derivada parcial do tensor de rigidez equivalente  $\mathbb{C}(\phi)$  da Equação 3.26 em relação a  $\phi$  em virtude dos módulos volumétrico e cisalhante homogeneizados  $k^{\text{hom}} = k(\phi)$  e  $\mu^{\text{hom}} = \mu(\phi)$  definidos na Equação 3.27 como:

$$\frac{\partial \mathbb{C}(\phi)}{\partial \phi} = 3 \frac{\partial k(\phi)}{\partial \phi} \mathbb{J} + 2 \frac{\partial \mu(\phi)}{\partial \phi} \mathbb{K} \quad (4.28)$$

Assumindo novamente a equivalência  $\mathbb{S}(\phi) = \mathbb{C}(\phi)^{-1}$  expressa na Equação 2.50, obtém-se o tensor  $\partial \mathbb{S}(\phi) / \partial \phi$ :

$$\frac{\partial \mathbb{S}(\phi)}{\partial \phi} = \frac{1}{3} \frac{\partial k(\phi)^{-1}}{\partial \phi} \mathbb{J} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mu(\phi)^{-1}}{\partial \phi} \mathbb{K} \quad (4.29)$$

Como se trata de uma configuração isotrópica de fraturas admitindo um único parâmetro  $\phi$ , deve-se aplicar um carregamento macroscópico isotrópico, definido por  $\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon \underline{\underline{1}}$  ou  $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{\underline{1}}$ . Assumindo tais carregamentos e resolvendo a Equação 4.16, obtém-se a seguinte expressão para  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F} = -\frac{9}{2} \epsilon^2 \frac{\partial k(\phi)}{\partial \phi} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial k(\phi)^{-1}}{\partial \phi} \quad (4.30)$$

na qual  $k(\phi)$  corresponde ao módulo volumétrico homogeneizado, dado por:

$$k(\phi) = \frac{k^s}{1 + \phi \mathcal{B}_k} \quad \text{com} \quad \mathcal{B}_k(\phi) = \frac{4\pi(\kappa_1 - \kappa_4)}{3\kappa_2 + 3\pi\kappa_1(1 - \kappa_1)} \quad (4.31)$$

Os parâmetros  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  e  $\kappa_4$  são dados pelas Equações 3.17 e 3.21. Destacando que  $\kappa_2 = \kappa_2(\phi)$  em virtude de  $a = (\phi/\mathcal{N})^{1/3}$  e aplicando a Equação 4.31 sobre a Equação 4.30, escreve-se:

$$\mathcal{F} = \frac{9}{2} \epsilon^2 \frac{\mathcal{B}_k^2}{(1 + \phi \mathcal{B}_k)^2} \left( \frac{k^s}{\mathcal{B}_k} - \frac{k_n \phi^{1/3}}{4\pi \mathcal{N}^{1/3}} \right) = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\mathcal{B}_k^2}{k^{s2}} \left( \frac{k^s}{\mathcal{B}_k} - \frac{k_n \phi^{1/3}}{4\pi \mathcal{N}^{1/3}} \right) \quad (4.32)$$

A comparação desta expressão com a energia crítica  $\mathcal{F}_c(\phi)$  permite avaliar a propagação de dano. A partir do critério estabelecido na Equação 4.11, destaca-se que quando  $\mathcal{F} < \mathcal{F}_c(\phi)$  não existe propagação de dano, levando a  $\dot{\phi} = 0$ . Contudo, quando  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c(\phi)$  a energia disponível alcançou o limite para propagação, indicando um possível  $\dot{\phi} \neq 0$ . Partindo da Equação 4.32 avaliada em um regime crítico  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_c$ , obtém-se as seguintes expressões:

$$\varepsilon \leq \varepsilon_{cr}(\phi) = \sqrt{\frac{8\pi(1 + \phi\mathcal{B}_k)^2}{9\mathcal{B}_k\left(4\pi k^s - k_n\mathcal{B}_k\frac{\phi^{1/3}}{\mathcal{N}^{1/3}}\right)}} \mathcal{F}_c \quad (4.33)$$

e

$$\sigma \leq \sigma_{cr}(\phi) = \sqrt{\frac{8\pi k^{s2}}{\mathcal{B}_k\left(4\pi k^s - k_n\mathcal{B}_k\frac{\phi^{1/3}}{\mathcal{N}^{1/3}}\right)}} \mathcal{F}_c \quad (4.34)$$

sendo  $\mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c(\phi)$  em virtude da Equação 4.12. As expressões acima correspondem, respectivamente, aos carregamentos isotrópicos críticos dados em deformações e tensões macroscópicas. Neste contexto, enquanto  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}(\phi)$  ou  $\sigma < \sigma_{cr}(\phi)$  não haverá propagação.

Para representar graficamente a taxa de liberação de energia definida Equação 4.32 é necessário definir o carregamento aplicado. Tomando uma deformação constante  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , a taxa de liberação de energia normalizada segundo  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\phi = 0)$  é ilustrada segundo a Figura 4.5:

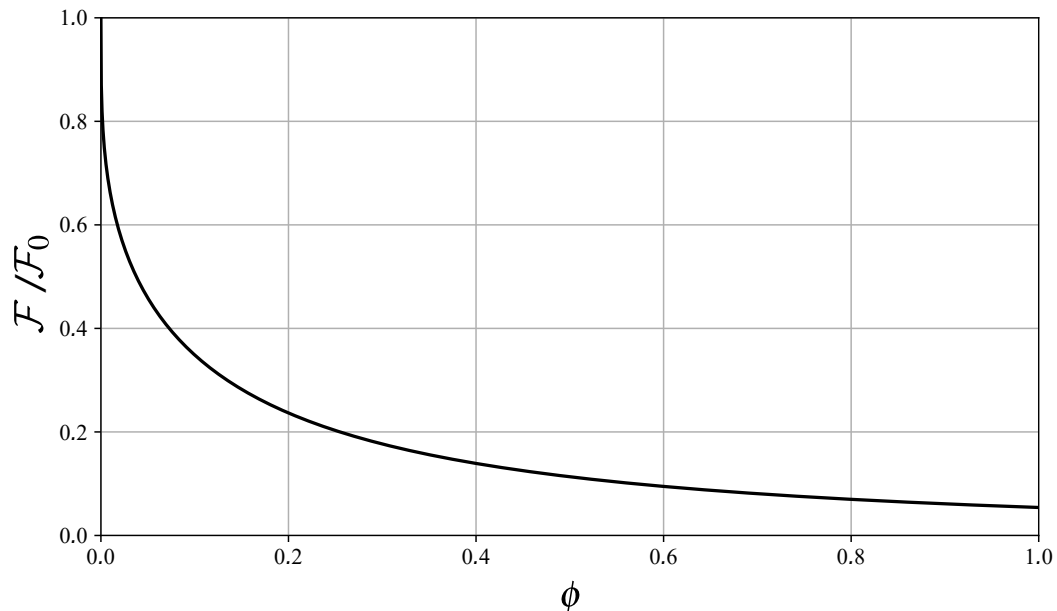


Figura 4.5 – Taxa de liberação de energia em função de  $\phi$

$$\mathcal{N} = 1; \quad \varepsilon_0 = 1 \times 10^{-3}$$

da qual novamente se percebe que a taxa de liberação de energia  $\mathcal{F}$  tende a diminuir para maiores valores do parâmetro  $\phi$ . As Figuras 4.6 e 4.7 exibem, respectivamente, as representações gráficas

da deformação crítica e da tensão crítica relacionadas à aplicação de um carregamento isótropo, admitindo um valor de  $\mathcal{F}_f = 40 \text{ J/m}^2$  para a energia crítica da fratura.

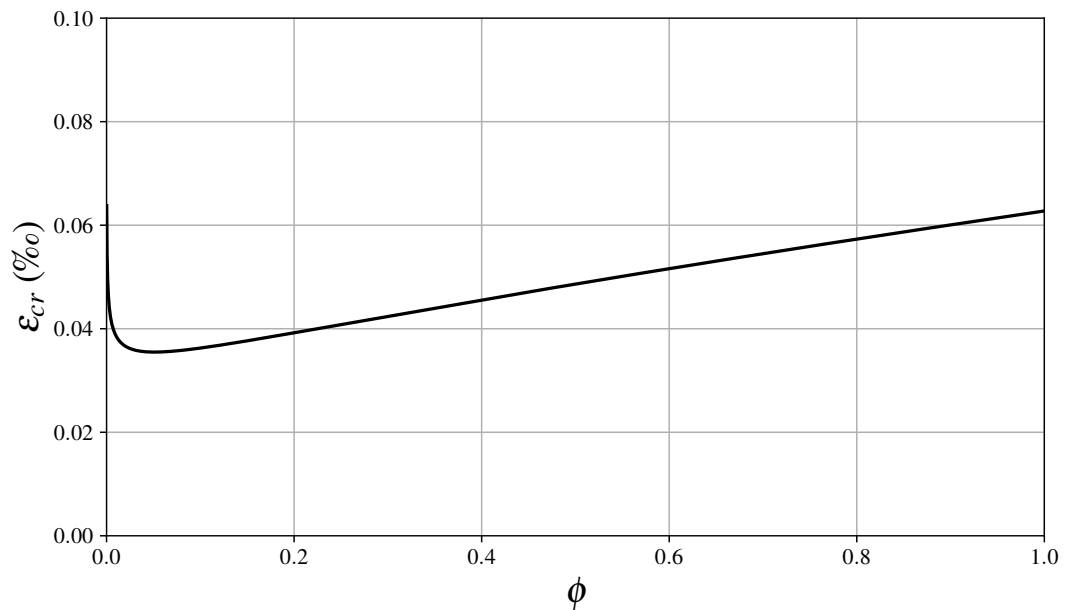


Figura 4.6 – Deformações críticas: distribuição isótropa de fraturas

$$\mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_f = 40 \text{ J/m}^2$$

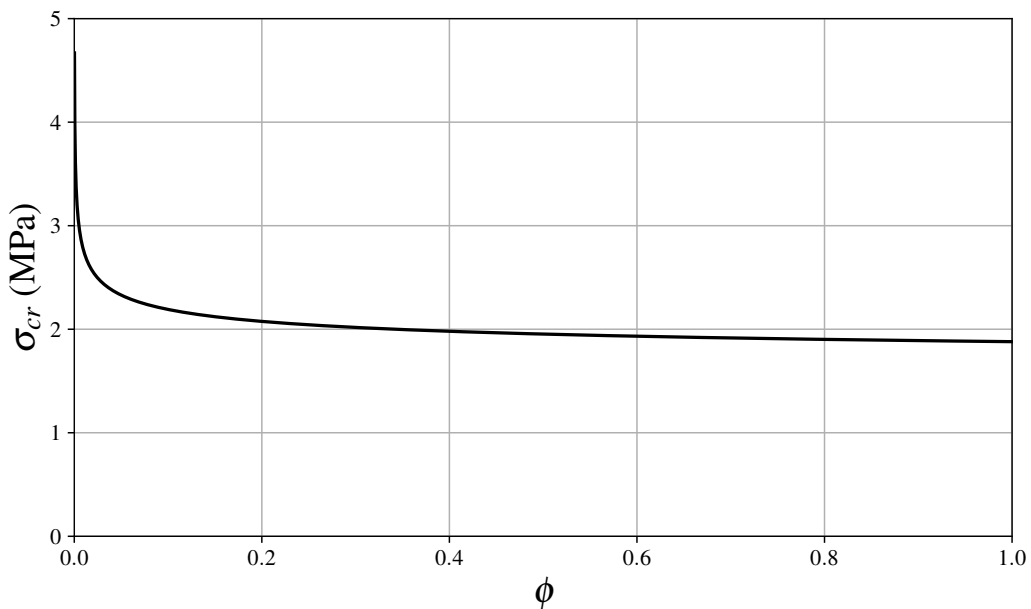


Figura 4.7 – Tensões críticas: distribuição isótropa de fraturas

$$\mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_f = 40 \text{ J/m}^2$$

Tanto na Figura 4.6 quanto na Figura 4.7, se o parâmetro de dano  $\phi$  for admitido como nulo, a deformação/tensão crítica tende ao infinito, isso se explica pelo fato de não ser possível propagar uma fratura que sequer encontra-se na matriz. Percebe-se também que a medida que o material se danifica, a tensão crítica reduz, isto ocorre devido a redução da área da matriz do material.



## 4.2 LEI DE EVOLUÇÃO DO DANO DESCRITA POR UM ÚNICO PARÂMETRO DE DANO

Até o presente momento a modelagem por meio de  $\phi$  era capaz de estabelecer o comportamento mecânico de um material elástico, mantendo-se válida até o instante de início de propagação. Nesta seção, é formulada uma lei de evolução do dano, na qual o parâmetro  $\phi$  irá representar o grau de degradação de um determinado material em um instante  $t$  qualquer. O raciocínio subsequente considera a existência de apenas um parâmetro de dano  $\phi$ , com  $\mathcal{N}$  constante. Portanto, a formulação atual restringe-se às configurações de uma única família de fraturas paralelas ou uma distribuição isótropa de fraturas, desde que se considere um carregamento macroscópico isótropo para esta última.

Pavan et al. (2009) propuseram uma análise micromecânica para mensurar a evolução do parâmetro de dano  $\phi$  (tratado como um tensor de segunda ordem pelos autores). Com uma analogia a plasticidade clássica acoplada a argumentos termodinâmicos, os autores definiram uma expressão para a taxa de evolução do dano. Esta última permitiu escrever o tensor constitutivo tangente, relacionando taxa de tensões e taxa de deformações no contexto em que há propagação de dano. Contudo, na abordagem desenvolvida por Pavan et al. (2009), a forma que o material é tratado diverge com relação a este trabalho. Diante disso, a presente seção visa adaptar o raciocínio desenvolvido pelos autores, estendendo sua validade a materiais elásticos fraturados.

Neste trabalho, o parâmetro de dano  $\phi$  é tratado, inicialmente, como um escalar e o primeiro passo para escrever a sua lei de evolução consiste em introduzir uma superfície de dano  $H(\mathcal{F}, \phi) = 0$ . Tal região delimita onde o dano não se propaga no espaço da força termodinâmica  $\mathcal{F}$  (PAVAN et al., 2009). Por se tratar de uma formulação escalar,  $H$  não é uma superfície propriamente dita, e reaproveita-se a formulação matemática do critério de propagação para definir esta região:

$$H(\mathcal{F}, \phi) = \mathcal{F} - \mathcal{F}_c(\phi) \leq 0 \quad (4.35)$$

na qual, a força termodinâmica  $\mathcal{F}$  é definida pela Equação 4.16 e a energia crítica  $\mathcal{F}_c(\phi)$ , formulada por Dormieux et al. (2006b), é dada em virtude da Equação 4.12. A condição de propagação da Equação 4.35 implica que:

$$\begin{cases} H(\mathcal{F}, \phi) < 0 & \Rightarrow \dot{\phi} = 0 \\ H(\mathcal{F}, \phi) = 0 & \Rightarrow \text{possível } \dot{\phi} \neq 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

e  $H(\mathcal{F}, \phi) > 0$  trata-se de uma condição inadmissível. Conforme o raciocínio desenvolvido por Pavan et al. (2009), quando  $H(\mathcal{F}, \phi) = 0$  a evolução de  $\phi$  é descrita por meio de um potencial de dano  $G(\mathcal{F}, \phi)$  que controla a direção da sua evolução:

$$\dot{\phi} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{F}} \quad (4.37)$$

onde o multiplicador de dano  $\dot{\lambda}$  deve cumprir as condições de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0 ; H \leq 0 ; \dot{\lambda} H = 0 \quad (4.38)$$

Tal como na plasticidade, modelos onde  $G = H$  são denominados modelos associados, levando a uma propagação normal do dano. A evolução do multiplicador de dano  $\dot{\lambda}$  pode ser obtida por meio da condição de consistência ( $\dot{H} = 0$ ):

$$\dot{H} = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial \mathcal{F}}}_1 \dot{\mathcal{F}} + \frac{\partial H}{\partial \phi} \dot{\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} = - \frac{\dot{\mathcal{F}}}{\frac{\partial H}{\partial \phi} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{F}}} \quad (4.39)$$

Como as variáveis  $\mathcal{F}$  e  $\phi$  são independentes, a evolução do multiplicador de dano fica dada por:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\mathcal{F}}}{\frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \phi} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{F}}} \quad (4.40)$$

e os resultados para a taxa de evolução do dano  $\dot{\phi}$  podem ser sumarizados como:

$$\dot{\phi} = \begin{cases} 0 & \text{se } H < 0 \text{ ou } H = 0 \text{ e } \dot{H} < 0 \\ \frac{\dot{\mathcal{F}}}{\frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \phi}} & \text{se } H = 0 \text{ e } \dot{H} = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

onde o potencial de dano  $G$  foi naturalmente eliminado da expressão, por se tratar de uma formulação com  $\phi$  escalar.

Os termos  $\dot{\lambda}$  e  $\dot{\phi}$  também podem ser relacionados com a taxa de deformação, expressando  $\dot{\mathcal{F}}$  em termos das suas variáveis de estado  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  e  $\phi$ :

$$\dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \dot{\phi} \quad (4.42)$$

e substituindo a expressão acima combinada com a relação da Equação 4.37 sobre a Equação 4.40, escreve-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{F}}}{\frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \phi} \frac{\partial G}{\partial \mathcal{F}}} \quad (4.43)$$

A manipulação matemática da expressão acima permite escrever:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}{\left( \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi} \right) \frac{\partial G}{\partial \mathcal{F}}} \quad (4.44)$$

da qual se pode extrair a taxa de evolução do parâmetro de dano  $\dot{\phi}$ :

$$\dot{\phi} = \frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}{\frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}} \quad (4.45)$$

Calculando as expressões das quantidades  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}$  e  $\frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \phi}$ , obtém-se:

$$\dot{\phi} = - \frac{\underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathbb{C}(\phi)}{\partial \phi} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}{\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial^2 \mathbb{C}(\phi)}{\partial \phi^2} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathcal{F}_c(\phi)}{\partial \phi}} \quad (4.46)$$

com

$$\frac{\partial \mathcal{F}_c(\phi)}{\partial \phi} = - \frac{2\pi}{9} \mathcal{F}_f \frac{\mathcal{N}^{1/3}}{\phi^{4/3}} \quad (4.47)$$

A partir da expressão de  $\dot{\phi}$  pode-se obter a função  $\phi$  que avalia a evolução do parâmetro de dano ao longo do tempo. Para isso, é necessário integrar a equação diferencial da taxa de evolução do dano (Equação 4.46). Contudo, como as derivadas parciais do tensor  $\mathbb{C}(\phi)$  resultam em polinômios de graus elevados, torna-se complexo utilizar tal formulação para obter a função  $\phi$  dependente do tempo de forma analítica. Em virtude disso, a evolução do parâmetro de dano  $\phi(t)$  induzido pelo carregamento macroscópico será determinada numericamente de forma incremental. Partindo de  $\phi(t=0) = \phi_0$ , o valor da  $k$ -ésima interação  $\phi_k = \phi(t=t_k)$  é avaliado a partir de  $\phi_{k-1} = \phi(t=t_{k-1})$  e da Equação 4.46 de  $\dot{\phi}$ . A precisão do processo incremental é diretamente correlacionada a:

- a) Discretização temporal, ou seja, o valor de  $\Delta t (t_k = t_{k-1} + \Delta t)$ ;  
 b) Esquema empregado para a avaliação de  $\dot{\phi}$ .

Uma vez calculado o valor do parâmetro de dano  $\phi_k$ , atualiza-se o tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}(t = t_k) = \underline{\underline{\sigma}}_k$  em um tempo  $t_k$  qualquer da seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}}_k = \mathbb{C}(\phi_k) : \underline{\underline{\varepsilon}}_k \quad (4.48)$$

onde, para simplificar a notação, define-se  $\underline{\underline{\varepsilon}}(t = t_k) = \underline{\underline{\varepsilon}}_k$ . Também calculam-se as expressões para a taxa de liberação de energia  $\mathcal{F}_k$  e para a energia crítica  $\mathcal{F}_c(\phi_k)$  atuando sobre o k-ésimo intervalo de tempo:

$$\mathcal{F}_k = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(t_k) : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \phi}(\phi_k) : \underline{\underline{\varepsilon}}(t_k) \text{ e } \mathcal{F}_c(\phi_k) = \frac{2\pi}{3} \mathcal{F}_f \left( \frac{\mathcal{N}}{\phi_k} \right)^{1/3} \quad (4.49)$$

Procede-se, então, verificando o critério de propagação de dano:

$$H_k = \mathcal{F}_k - \mathcal{F}_c(\phi_k) \leq 0 \quad (4.50)$$

e no caso em que  $H_k < 0$ , não há propagação e o valor associado ao parâmetro de dano corresponde ao  $\phi_k$  utilizado na atualização dos parâmetros. Caso contrário, isto é,  $H_k = 0$ , determina-se  $\dot{\phi}_k$  em um instante  $t_k$  qualquer, por meio de:

$$\dot{\phi}_k = - \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}_k : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \phi}(\phi_k) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_k}{\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}_k : \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial \phi^2}(\phi_k) : \underline{\underline{\varepsilon}}_k + \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \phi}(\phi_k)} \quad (4.51)$$

e o valor de  $\phi_k$  é atualizado da seguinte forma:

$$\phi_k = \phi_{k-1} + \dot{\phi} \Delta t \quad (4.52)$$

Nesta análise, adota-se um esquema explícito para avaliar  $\dot{\phi}$ , ou seja,  $\dot{\phi} = \dot{\phi}_{k-1}$ . Então encerra-se o cálculo, partindo para o próximo intervalo de tempo (ponto  $k+1$ ) e repetindo o procedimento até atingir o tempo total. Com o objetivo de ilustrar o processo numérico incremental proposto desenvolveu-se o fluxograma da Figura 4.8.

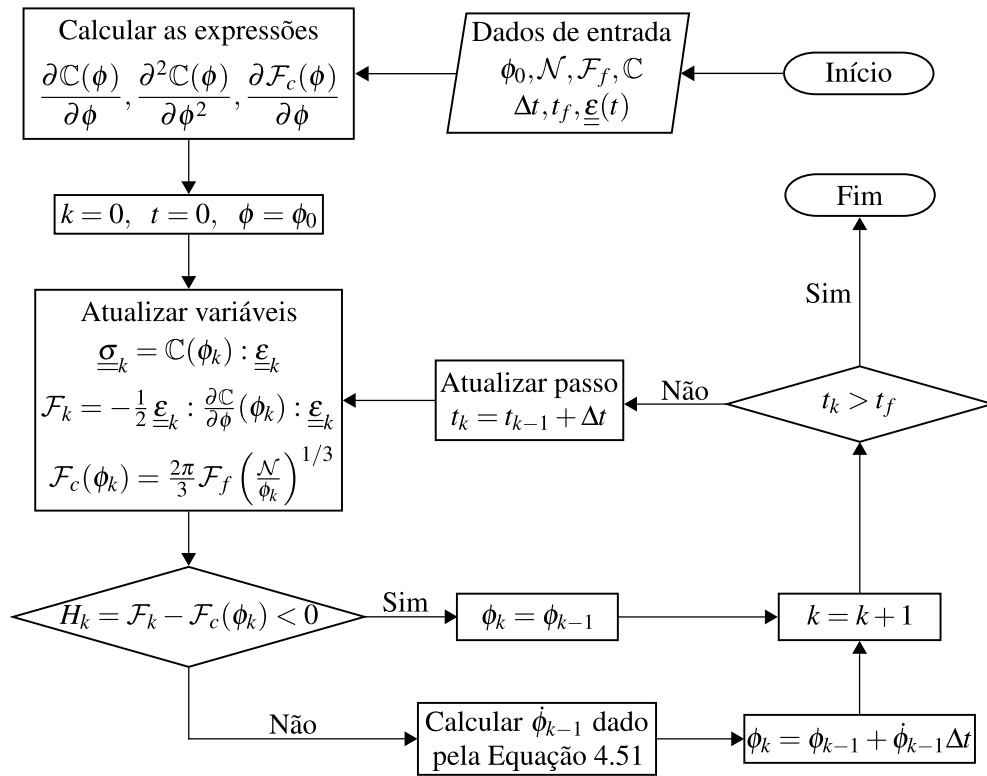


Figura 4.8 – Fluxograma do procedimento numérico adotado

Alternativamente, pode-se desenvolver uma lei constitutiva em taxa que fornece uma relação entre taxas de tensões e taxas de deformações. Esta lei pode ser obtida a partir da derivada temporal da equação de estado elástica:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \mathbb{C}(\phi) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \Rightarrow \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \phi} : \underline{\underline{\varepsilon}} \dot{\phi} \quad (4.53)$$

Substituindo a Equação 4.46 sobre a Equação 4.53, escreve-se:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \frac{\left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \phi} : \underline{\underline{\varepsilon}}\right) \left(\underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \phi} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}\right)}{\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial \phi^2} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \phi}} \Rightarrow \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \frac{\left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \phi} : \underline{\underline{\varepsilon}}\right) \otimes \left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \phi} : \underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial \phi^2} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \phi}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \quad (4.54)$$

onde  $\otimes$  é o operador produto tensorial. A forma da taxa do modelo de dano contínuo é então deduzida como:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \mathbb{C}_t : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \quad (4.55)$$

sendo  $\mathbb{C}_t$  o tensor constitutivo tangente do dano, dado por:

$$\mathbb{C}_t = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } H < 0 \text{ ou } H = 0 \text{ e } \dot{H} < 0 \\ \mathbb{C} - \frac{\left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \phi} : \underline{\underline{\varepsilon}}\right) \otimes \left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \phi} : \underline{\underline{\varepsilon}}\right)}{\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial \phi^2} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \phi}} & \text{se } H = 0 \text{ e } \dot{H} = 0 \end{cases} \quad (4.56)$$

### 4.3 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Esta seção visa empregar as formulações referentes ao modelo de dano contínuo para avaliar a propagação de dano, assim como a sua evolução para um material elástico fraturado submetido a diferentes carregamentos. O efeito da propagação sobre o tensor de tensões é avaliado, a fim de comparar as sollicitações àquelas que seriam desenvolvidas na ausência da propagação de dano. As propriedades do material são as mesmas da subseção 4.1.1, o parâmetro de dano inicial  $\phi_0$  e a energia crítica  $\mathcal{F}_f$  são apresentados abaixo de cada ilustração. Os valores adotados para  $\mathcal{F}_f$  são condizentes com ensaios elásticos realizados sobre corpos de prova padronizados de concreto (ver Bazant e Pfeiffer (1987)). Serão utilizadas as Equações 4.35 e 4.46 para obter a evolução do parâmetro de dano em situações distintas e a equação de estado elástica para determinar as tensões desenvolvidas no material. A evolução do parâmetro de dano será determinada numericamente de forma incremental, segundo o procedimento ilustrado pelo fluxograma da Figura 4.8.

#### 4.3.1 Material com uma única família de fraturas sob carregamento uniaxial

As primeiras aplicações numéricas referem-se a um material com uma família de fraturas paralelas orientadas pelo vetor normal  $\underline{n} = \underline{e}_3$ , cujo comportamento equivalente é dado pelas componentes não nulas do tensor de rigidez homogeneizado da Equação 3.16. Nos exemplos a seguir, o carregamento macroscópico será definido por uma deformação uniaxial descrita por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon(t) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (4.57)$$

com  $\varepsilon(t)$  definido em cada caso particular. Conforme o carregamento imposto, o tensor de tensões desenvolvido apresenta a seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad \text{com} \quad \begin{cases} \sigma_{11} = C_{1133} \varepsilon_{33} = C_{1133}(\phi) \varepsilon(t) \\ \sigma_{22} = C_{2233} \varepsilon_{33} = C_{2233}(\phi) \varepsilon(t) \\ \sigma_{33} = C_{3333} \varepsilon_{33} = C_{3333}(\phi) \varepsilon(t) \end{cases} \quad (4.58)$$

sendo que  $C_{ij33} = 0$  se  $i \neq j$  (ver Equação 3.16). Na análise subsequente, são desenvolvidos

exemplos que consistem em aplicar uma deformação constante e uma deformação crescente ao material.

#### 4.3.1.1 Deformação uniaxial constante

Para iniciar o estudo da evolução do dano, no primeiro exemplo aplica-se uma deformação uniaxial constante ao material, definida por  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$  e ilustrada pela Figura 4.9:

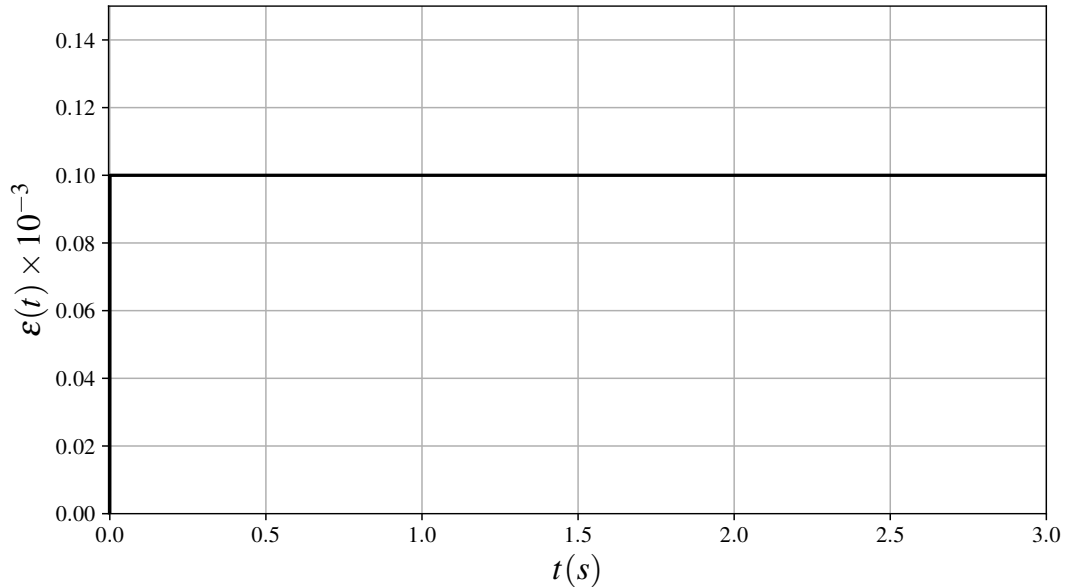


Figura 4.9 – Carregamento imposto sobre o corpo de prova

$$\varepsilon_0 = 0,1\%.$$

onde  $H(t)$  é a função de Heaviside. Para obter a evolução do dano deve-se recorrer ao critério de propagação da Equação 4.35. Quando  $H < 0$ , o dano corresponde ao seu valor inicial  $\phi = \phi_0$  e as tensões são calculadas conforme este valor. Na condição em que o critério de propagação é atingido  $H = 0$ , calcula-se a evolução do dano a partir de:

$$H = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\varepsilon_0^2 \frac{\partial C_{3333}(\phi)}{\partial \phi} - \mathcal{F}_c(\phi) = 0 \quad (4.59)$$

com  $\partial C_{3333}(\phi)/\partial \phi$  em virtude da Equação 4.17 e  $\mathcal{F}_c(\phi)$  dado pela Equação 4.12. Embora não se tenha obtido uma solução analítica, ao substituir as propriedades do material determina-se o parâmetro  $\phi(t)$  frente ao carregamento aplicado, como ilustra a Figura 4.10. Observa-se que a propagação decorrente de um carregamento constante, aplicado em um certo tempo, se dará integralmente no instante da sua aplicação, mantendo-se constante a partir de então.

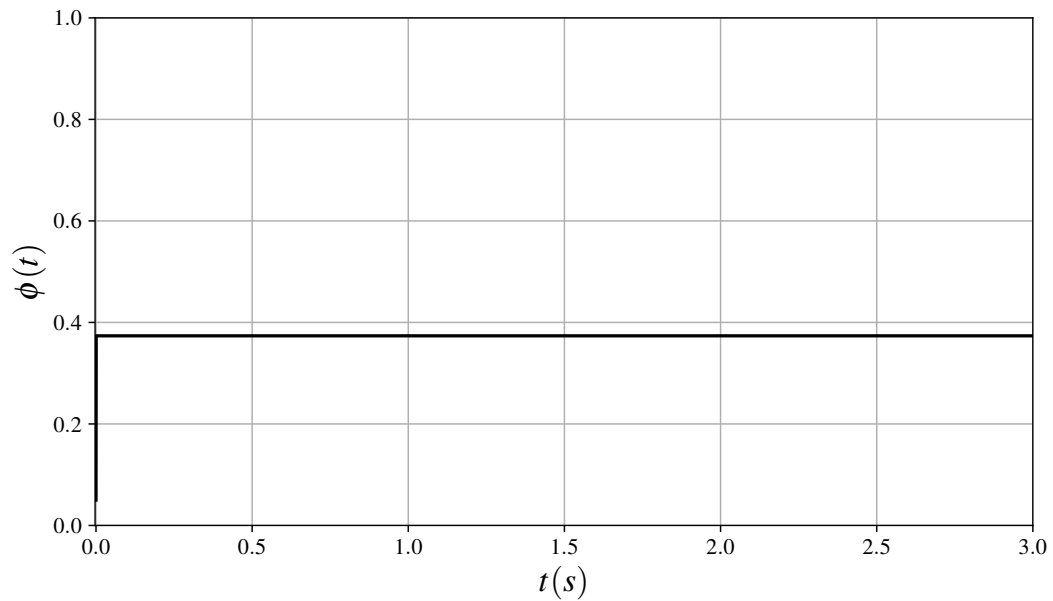


Figura 4.10 – Evolução do parâmetro dano

$$\phi_0 = 0,05; \mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_f = 40\text{J/m}^2.$$

As tensões apresentam a forma da Equação 4.58 e são atualizadas conforme o valor do parâmetro de dano  $\phi$ . O gráfico da Figura 4.11 permite comparar as componentes do tensor de tensões desenvolvidas no material (linhas contínuas) com a situação em que não há propagação de dano (linhas tracejadas).

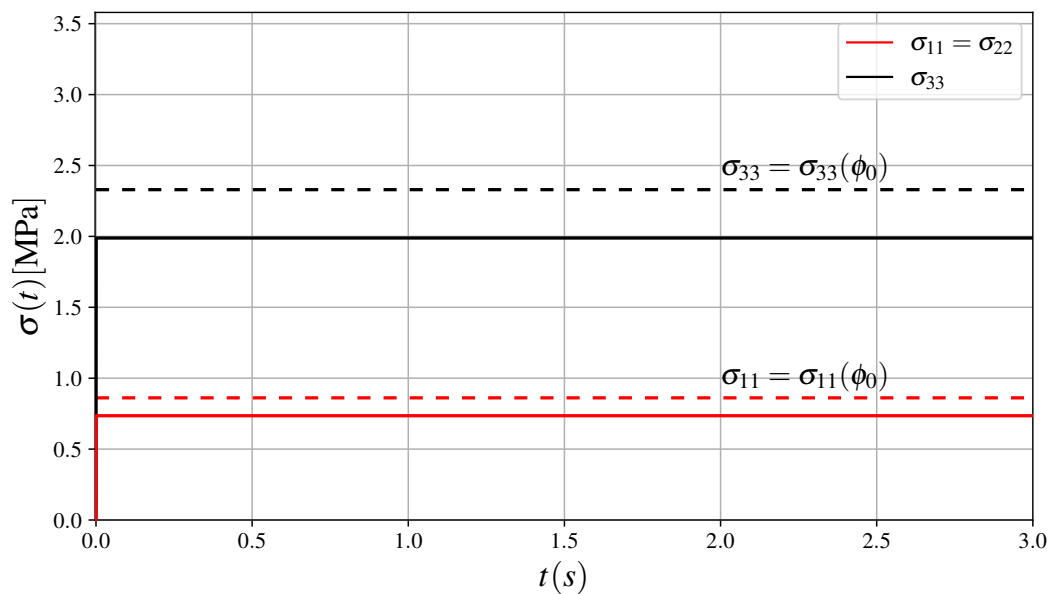


Figura 4.11 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_0 = 0,05; \mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_f = 40\text{J/m}^2.$$



### 4.3.1.2 Deformação uniaxial crescente

O segundo exemplo numérico consiste em aplicar uma deformação crescente ao material, matematicamente definida por  $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}t$  e ilustrada pela Figura 4.12.

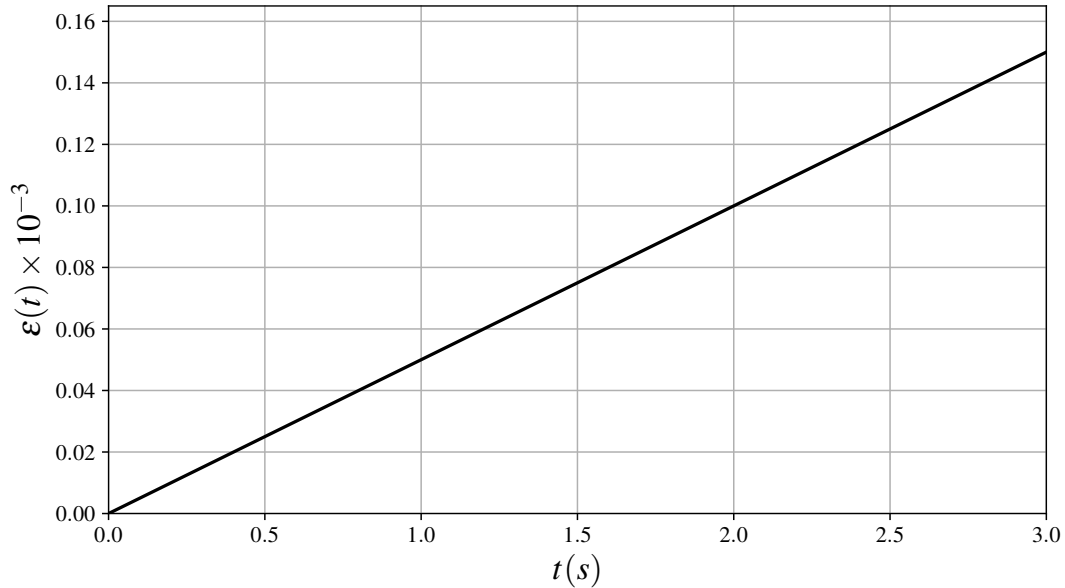


Figura 4.12 – Carregamento imposto sobre o corpo de prova

$$\dot{\varepsilon} = 0,05\%.$$

A evolução do dano é obtida a partir do critério de propagação da Equação 4.35, sendo que quando  $H < 0$ , o dano corresponde ao seu valor inicial  $\phi = \phi_0$  e as tensões são calculadas conforme este valor. Na condição em que o critério de propagação é atingido  $H = 0$ , calcula-se a evolução de  $\phi$  através da Equação 4.46, conforme o carregamento imposto:

$$\dot{\phi} = - \frac{\frac{\partial C_{3333}(\phi)}{\partial \phi} \dot{\varepsilon}^2 t}{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{3333}(\phi)}{\partial \phi^2} \dot{\varepsilon}^2 t^2 + \frac{\partial \mathcal{F}_c(\phi)}{\partial \phi}} \quad (4.60)$$

sendo as expressões das quantidades  $\partial C_{3333}(\phi)/\partial \phi$  e  $\partial \mathcal{F}_c(\phi)/\partial \phi$  dadas pelas Equações 4.17 e 4.47, enquanto  $\partial^2 C_{3333}(\phi)/\partial \phi^2$  é obtido simplesmente derivando novamente a Equação 4.17 em relação a  $\phi$ . Aplicando o raciocínio numérico do fluxograma da Figura 4.8 sobre a Equação 4.60 determina-se a evolução do dano, que pode ser visualizada através da Figura 4.13. Nota-se que a propagação não ocorre no instante de aplicação do carregamento ( $t = 0$ ), mas sim quando a deformação atinge um valor crítico  $\varepsilon_{cr}$  (4.23), cuja expressão é obtida a partir do critério de propagação. Consta-se também que o dano está fortemente relacionado à taxa de deformação aplicada, dado que o seu aumento condiciona um início de propagação mais rápido.

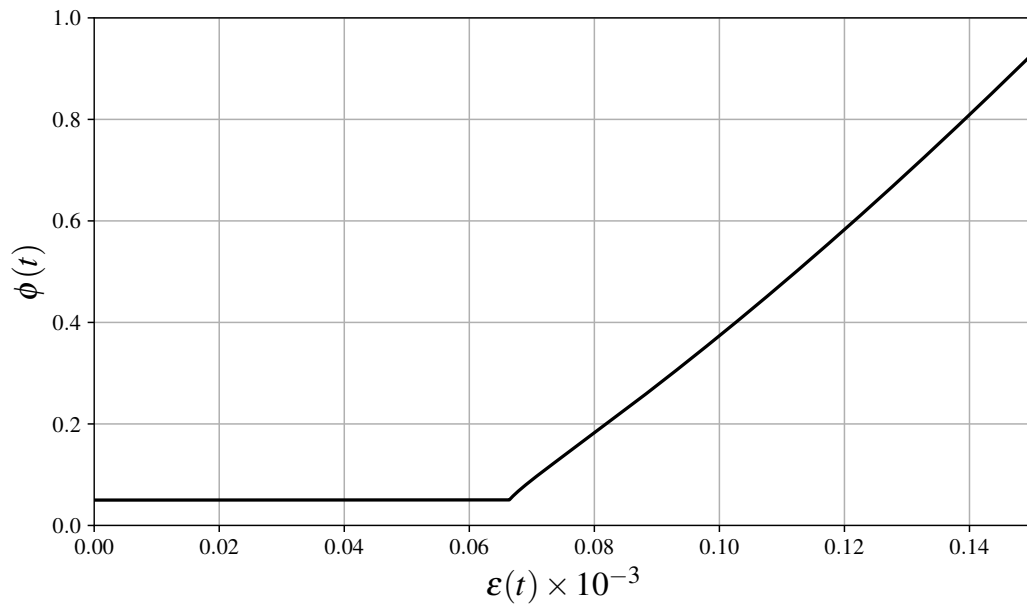


Figura 4.13 – Evolução do parâmetro de dano

$$\phi_0 = 0,05; \mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_f = 40\text{J/m}^2; \Delta t = 1 \times 10^{-4}\text{s}.$$

As tensões apresentam a forma da Equação 4.58 e são atualizadas conforme o valor de  $\phi$  em cada instante. O gráfico da Figura 4.14 possibilita comparar as componentes do tensor de tensões desenvolvidas no material (linhas contínuas) com a situação em que não há propagação de dano (linhas tracejadas).

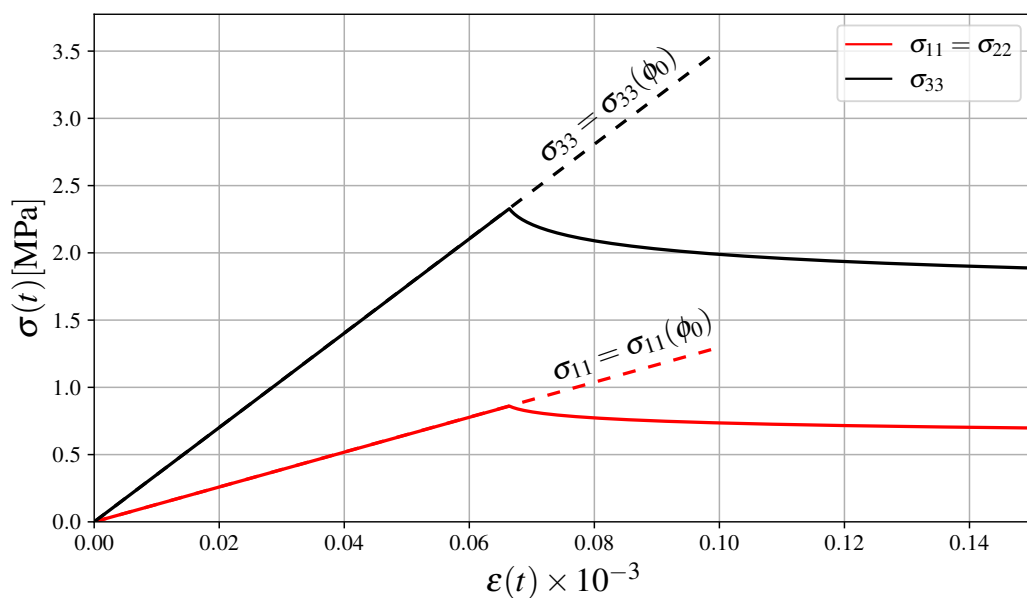


Figura 4.14 – Relação Tensão x Deformação

$$\phi_0 = 0,05; \mathcal{N} = 1; \Delta t = 1 \times 10^{-4}\text{s}.$$

### 4.3.2 Material com uma distribuição isotrópica de fraturas sob carregamento isotrópico

As próximas aplicações consideram um material com uma distribuição isotrópica de fraturas, cujo comportamento equivalente é dado pela Equação 3.26, expresso através dos módulos volumétrico e cisalhante homogeneizados da Equação 3.27. Nos exemplos a seguir, o carregamento macroscópico será definido por uma deformação isotrópica descrita por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon(t) \underline{\underline{1}} \quad (4.61)$$

com  $\varepsilon(t)$  definido em cada caso particular. Conforme as hipóteses de evolução isotrópica do dano e de comportamento isotrópico do material, o tensor de tensões desenvolvido apresenta a mesma forma isotrópica imposta ao carregamento:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma(t) \underline{\underline{1}} \quad (4.62)$$

Na análise subsequente são abordados dois casos particulares definidos, respectivamente, por uma deformação constante e uma deformação crescente.

#### 4.3.2.1 Deformação isotrópica constante

Na terceira aplicação numérica é imposta uma deformação constante ao material, definida por  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$  e ilustrada pela Figura 4.15:

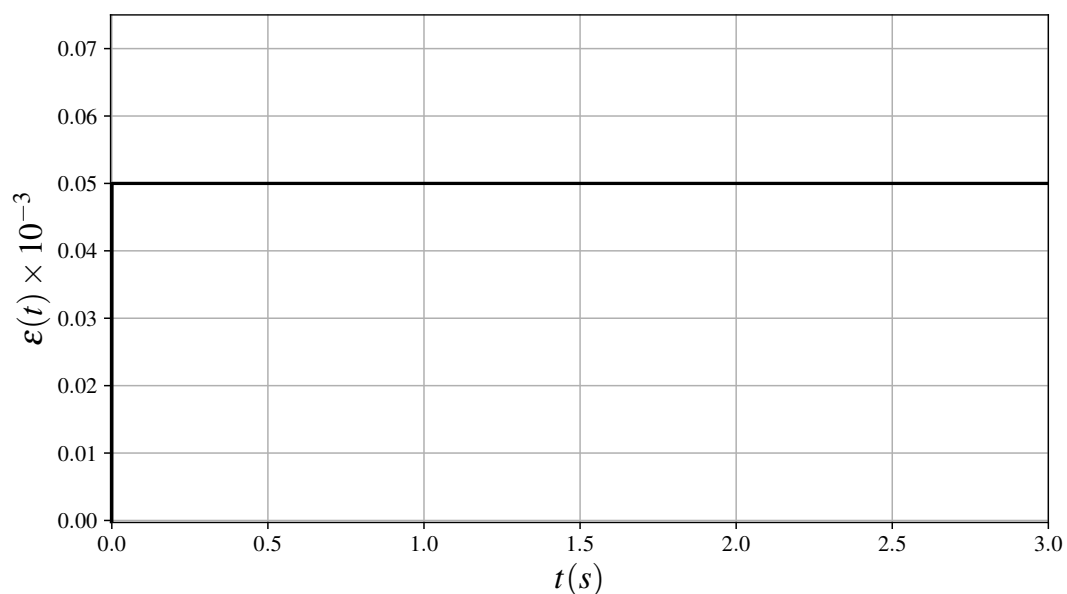


Figura 4.15 – Carregamento imposto sobre o corpo de prova

$$\varepsilon_0 = 0,05\%.$$

onde  $H(t)$  designa a função de Heaviside. Mais uma vez, recorrendo ao critério de propagação da Equação 4.35 pode-se calcular a evolução de  $\phi$ . A condição  $H < 0$  indica que não há propagação e o dano corresponde ao seu valor inicial  $\phi = \phi_0$ . Quando o critério de propagação é atingido  $H = 0$ , calcula-se a evolução do dano a partir de:

$$H = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{9}{2}\varepsilon_0^2 \frac{\partial k(\phi)}{\partial \phi} - \mathcal{F}_c(\phi) = 0 \quad (4.63)$$

com  $k(\phi)$  em virtude da Equação 4.31 e  $\mathcal{F}_c(\phi)$  dado pela Equação 4.12. Substituindo as propriedades do material determina-se o parâmetro  $\phi(t)$  de acordo com a deformação aplicada, como ilustra a Figura 4.16. Como já constatado um carregamento constante induz a uma evolução do dano também constante após o início da propagação.

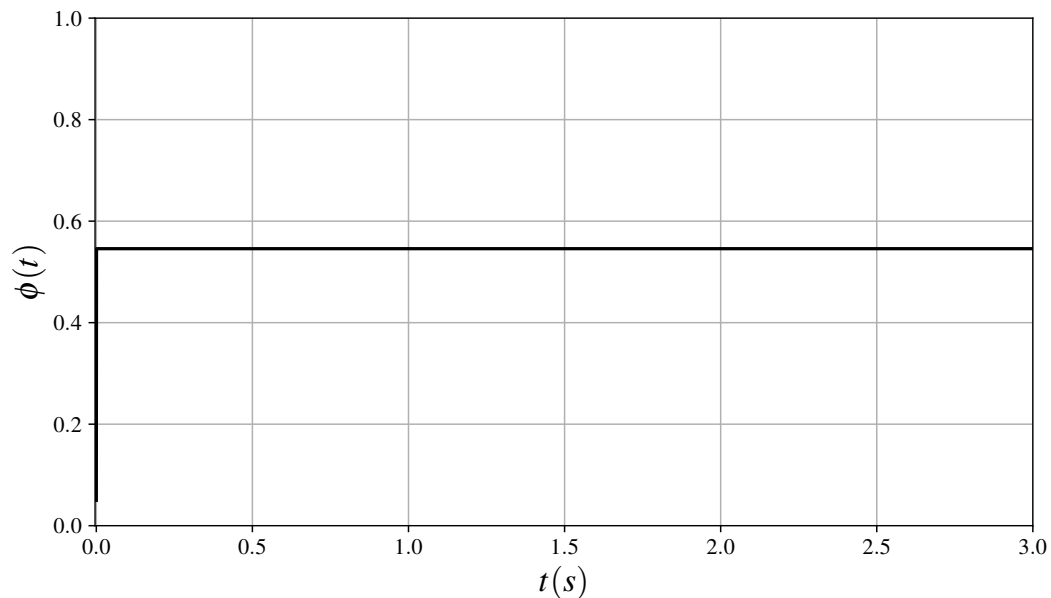


Figura 4.16 – Evolução do parâmetro de dano

$$\phi_0 = 0,05; \quad \mathcal{N} = 1; \quad \mathcal{F}_f = 40\text{J/m}^2.$$

É pertinente destacar que neste caso particular foi imposta uma deformação  $\varepsilon_0$  menor do que a aplicada ao exemplo referente a um material com uma família de fraturas. A justificativa é que para um material com uma distribuição isotropa de fraturas, pequenas deformações (por exemplo  $\varepsilon_0 = 0,1\%$ ) evidenciaram a ruptura completa do material, atingindo valores superiores a 1,00 para o dano.

As tensões apresentam a forma isotrópica da Equação 4.62 e são atualizadas conforme o valor do parâmetro de dano  $\phi$ . O gráfico da Figura 4.17 permite comparar as tensões desenvolvidas no material com a situação em que não há propagação de dano definida por  $\sigma = \sigma(\phi_0)$ .

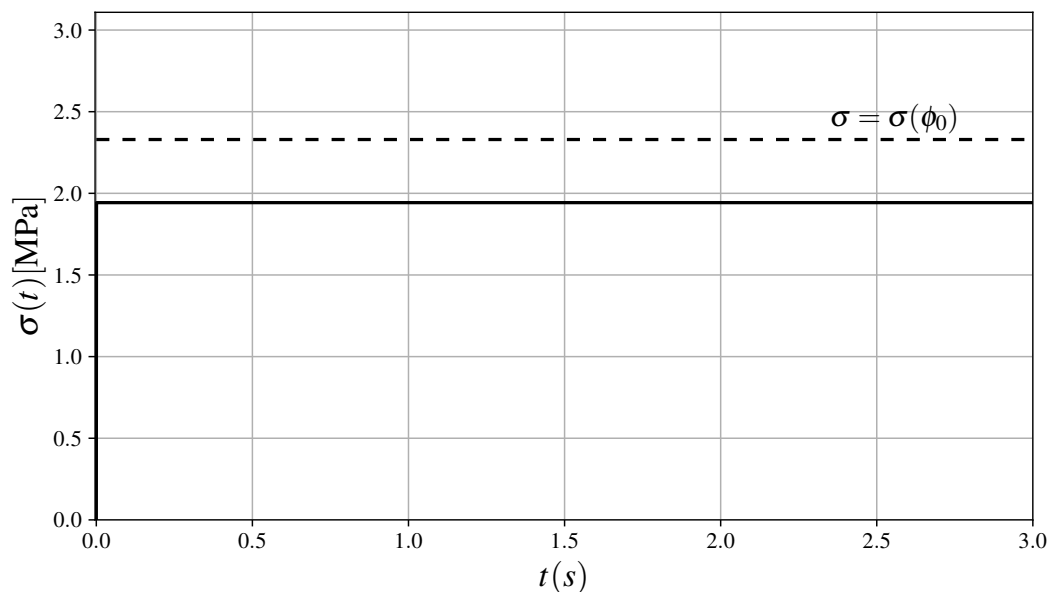


Figura 4.17 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_0 = 0,05; \mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_f = 40\text{J/m}^2.$$

#### 4.3.2.2 Deformação isótropa crescente

O quarto exemplo consiste em aplicar uma deformação crescente ao material, matematicamente descrita por  $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}t$  e ilustrada pela Figura 4.18.

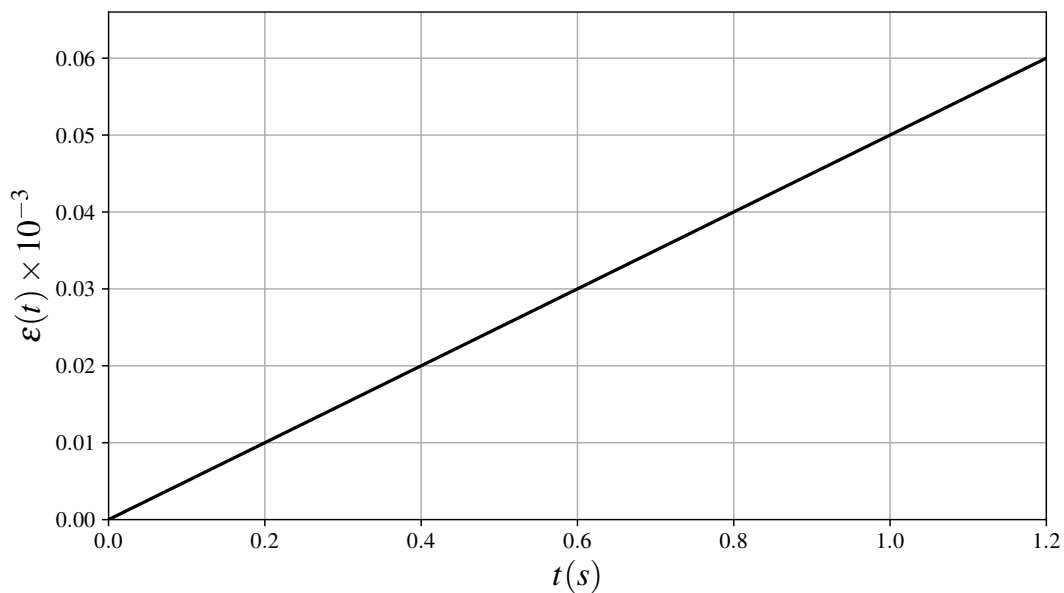


Figura 4.18 – Carregamento imposto sobre o corpo de prova

$$\dot{\varepsilon} = 0,05\%.$$

Partindo do critério da Equação 4.35, a condição  $H < 0$  indica que não há propagação e o dano corresponde ao seu valor inicial  $\phi = \phi_0$ , sendo as tensões calculadas conforme este valor. A

partir do instante em que ocorre o início da propagação  $H = 0$ , determina-se a evolução de  $\phi$  através da Equação 4.46, conforme o carregamento imposto:

$$\dot{\phi} = -\frac{9\frac{\partial k(\phi)}{\partial \phi}\dot{\epsilon}^2 t}{\frac{9}{2}\frac{\partial^2 k(\phi)}{\partial \phi^2}\dot{\epsilon}^2 t^2 + \frac{\partial \mathcal{F}_c(\phi)}{\partial \phi}} \quad (4.64)$$

com  $k(\phi)$  em virtude da Equação 4.31 e  $\partial \mathcal{F}_c(\phi)/\partial \phi$  dado pela Equação 4.47. A evolução do parâmetro  $\phi$  é obtida numericamente de forma incremental aplicando o procedimento da Figura 4.8 sobre a Equação 4.64, como ilustra a Figura 4.19. Análogo ao segundo exemplo, constata-se que a propagação não ocorre no instante de aplicação do carregamento ( $t = 0$ ), mas sim quando a deformação atinge um valor crítico  $\epsilon_{cr}$  (4.33), cuja expressão é obtida a partir do próprio critério de propagação. Mais uma vez, percebe-se que o dano está fortemente relacionado a taxa de deformação aplicada, dado que o seu aumento condiciona um início de propagação mais rápido.

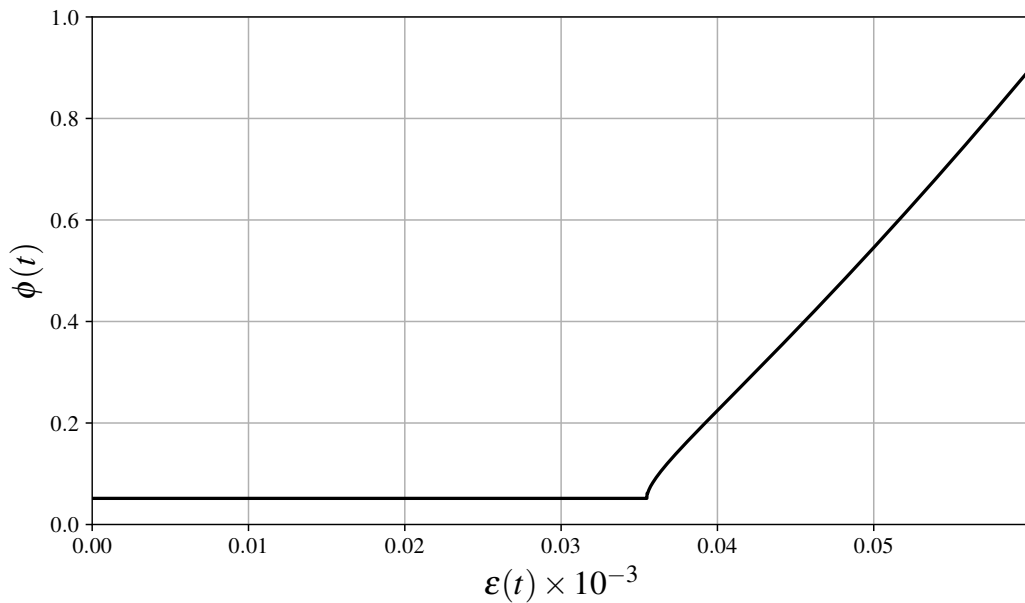


Figura 4.19 – Evolução do parâmetro dano

$$\phi_0 = 0,05; \quad \mathcal{N} = 1; \quad \mathcal{F}_f = 40\text{J/m}^2; \quad \Delta t = 1 \times 10^{-4}\text{s}.$$

As tensões apresentam a forma isotrópica da Equação 4.62 e são atualizadas conforme os valores de  $\phi$  em cada instante. Nesta perspectiva, o gráfico da Figura 4.20 possibilita comparar as tensões desenvolvidas no material com a situação em que não há propagação de dano, ou seja,  $\sigma = \sigma(\phi_0)$ .

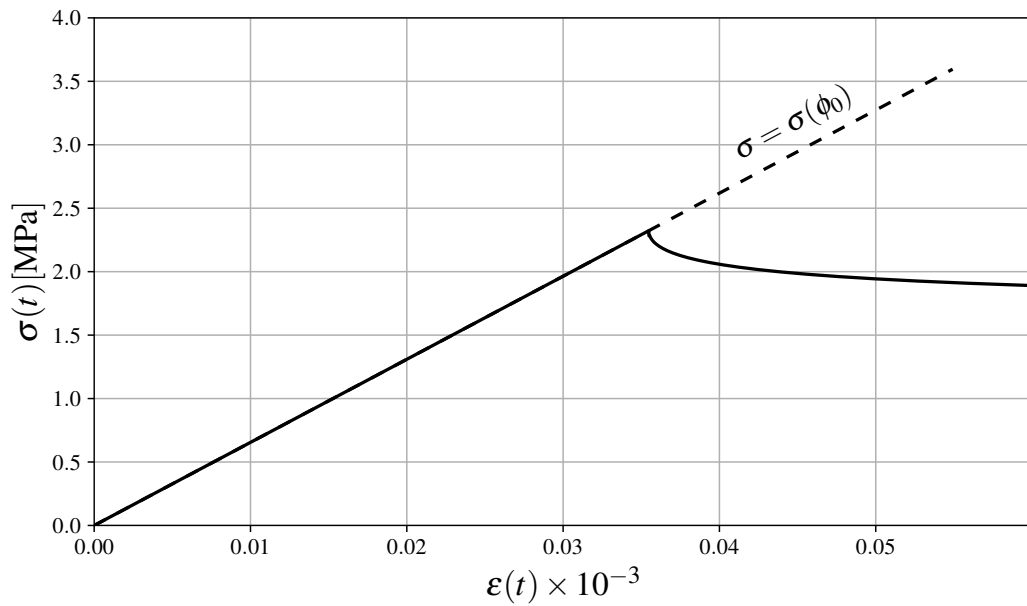


Figura 4.20 – Relação tensão x deformação

$$\phi_0 = 0,05; \mathcal{N} = 1; \Delta t = 1 \times 10^{-4} s.$$

### 4.3.3 Material com uma distribuição isótropa de fraturas sob carregamento uniaxial

As últimas aplicações numéricas referem-se também a um material com uma distribuição isótropa de fraturas, cujo comportamento equivalente é definido pela Equação 3.26. A principal diferença com relação aos exemplos da subseção 4.3.2 é que o carregamento macroscópico será definido por uma deformação uniaxial matematicamente descrita por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon(t) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (4.65)$$

com  $\varepsilon(t)$  definido para cada caso particular. É conveniente enfatizar que este exemplo não é fisicamente representativo, uma vez que um único parâmetro de dano  $\phi$  não é capaz de representar o problema real, no qual a evolução do dano ocorrerá de forma distinta para cada direção. A aplicação de um carregamento macroscópico em uma direção específica irá induzir o dano anisotrópico no material. Para superar esta dificuldade, no Capítulo 5 é proposta uma abordagem mais conveniente para o problema real, considerando múltiplos parâmetros de dano e visando evidenciar o comportamento do dano anisotrópico. Na análise subsequente definem-se duas formas distintas para a deformação  $\varepsilon(t)$ , sendo a primeira caracterizada por uma deformação constante e a segunda definida por uma deformação crescente.

### 4.3.3.1 Deformação uniaxial constante

O primeiro exemplo visa aplicar uma deformação constante ao material matematicamente descrita por  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$  e ilustrada pela Figura 4.21:

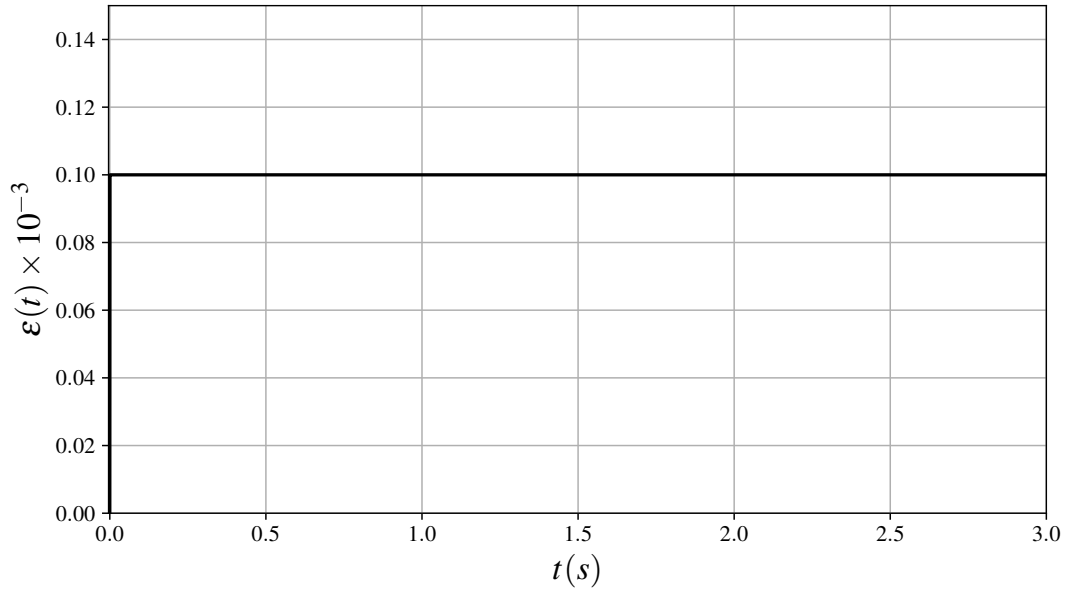


Figura 4.21 – Carregamento imposto sobre o corpo de prova

$$\varepsilon_0 = 0,1\%.$$

onde  $H(t)$  designa a função de Heaviside. Recorrendo ao critério de propagação da Equação 4.35, tem-se que quando  $H < 0$ , o dano corresponde ao seu valor inicial  $\phi = \phi_0$  e calculam-se as tensões conforme  $\phi_0$ . No momento que o critério de propagação é atingido  $H = 0$ , determina-se a evolução do dano a partir de:

$$H = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\varepsilon_0^2 \frac{\partial C_{3333}(\phi)}{\partial \phi} - \mathcal{F}_c(\phi) = 0 \quad (4.66)$$

onde  $\partial C_{3333}(\phi)/\partial \phi$  é a derivada da componente  $C_{3333}(\phi)$  do tensor de rigidez equivalente dado na Equação 3.26 em relação ao parâmetro de dano e a energia crítica da fratura  $\mathcal{F}_c(\phi)$  é definida pela Equação 4.12. Embora não seja possível obter uma solução analítica para o problema em virtude do elevado grau dos polinômios envolvidos no cálculo, empregando as propriedades do material (matriz e fraturas), determina-se o parâmetro  $\phi(t)$  frente ao carregamento aplicado, como ilustra a Figura 4.22.

Conforme o valor de  $\phi$  previamente calculado, definem-se as tensões desenvolvidas no material, através das componentes não nulas do tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$  expressas na Equação 4.58. Desta forma, o gráfico da Figura 4.23 possibilita realizar uma comparação entre as tensões obtidas conforme o valor de  $\phi$  definido após o início da propagação (linhas contínuas) com a situação em que não há propagação de dano (linhas tracejadas).



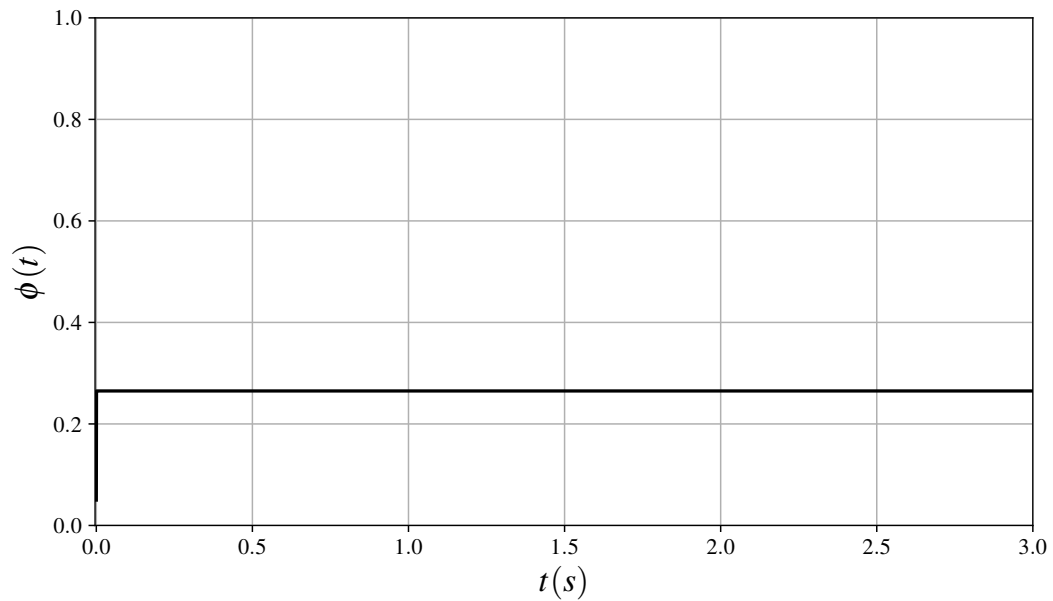


Figura 4.22 – Evolução do parâmetro de dano

$$\phi_0 = 0,05; \mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_f = 40\text{J/m}^2.$$

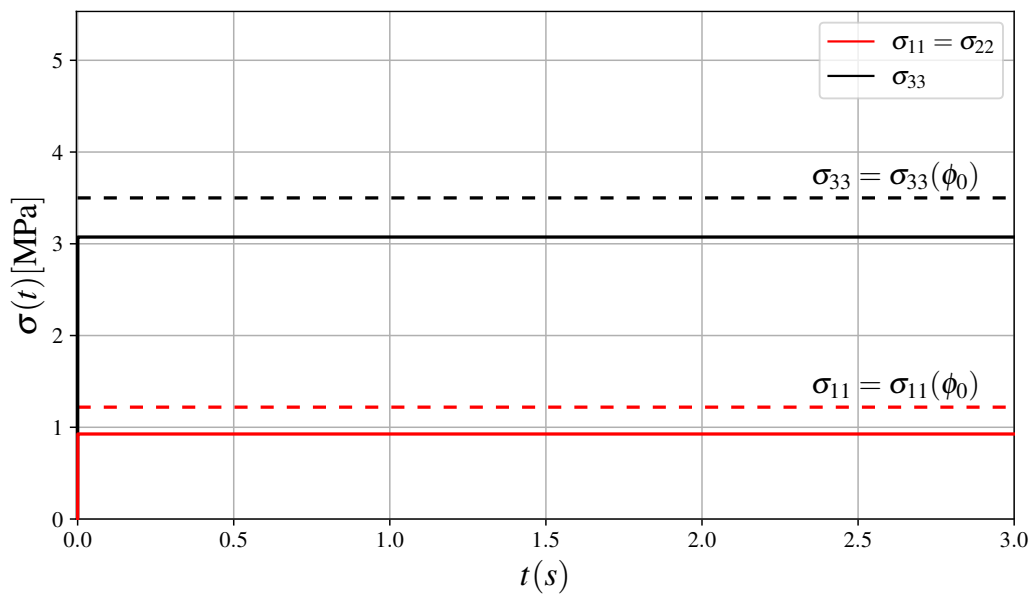


Figura 4.23 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_0 = 0,05; \mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_f = 40\text{J/m}^2.$$

#### 4.3.3.2 Deformação uniaxial crescente

O último exemplo deste capítulo consiste em aplicar uma deformação macroscópica ao material, matematicamente descrita por  $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}t$  e ilustrada pela Figura 4.24, sendo  $\dot{\varepsilon}$  uma taxa de deformação constante.

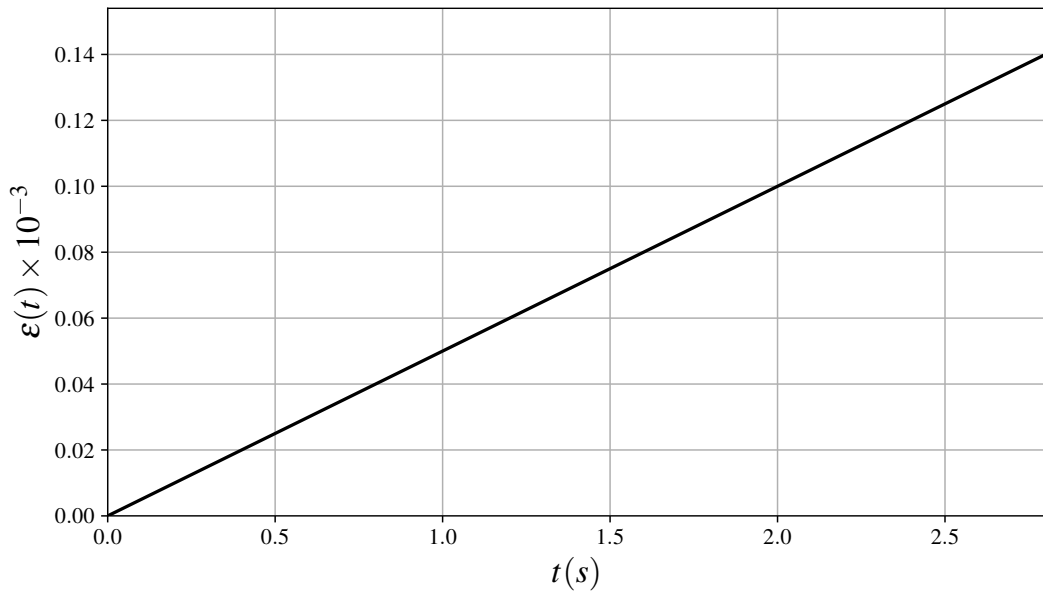


Figura 4.24 – Carregamento imposto sobre o corpo de prova

$$\dot{\varepsilon} = 0,05\%.$$

A evolução do dano é obtida a partir do critério de propagação da Equação 4.35, sendo que quando  $H < 0$ , o dano corresponde ao seu valor inicial  $\phi = \phi_0$  e as tensões são calculadas conforme este valor. Na condição em que o critério de propagação é atingido  $H = 0$ , calcula-se a evolução de  $\phi$  conforme a Equação 4.46, da seguinte forma:

$$\dot{\phi} = - \frac{\frac{\partial C_{3333}(\phi)}{\partial \phi} \dot{\varepsilon}^2 t}{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{3333}(\phi)}{\partial \phi^2} \dot{\varepsilon}^2 t^2 + \frac{\partial \mathcal{F}_c(\phi)}{\partial \phi}} \quad (4.67)$$

onde  $\partial C_{3333}(\phi)/\partial \phi$  e  $\partial^2 C_{3333}(\phi)/\partial \phi^2$  designam as derivadas parciais da componente  $C_{3333}(\phi)$  do tensor de rigidez equivalente da Equação 3.26 em relação ao parâmetro de dano e  $\partial \mathcal{F}_c(\phi)/\partial \phi$  é dado pela Equação 4.47. Aplicando o raciocínio numérico do fluxograma da Figura 4.8 sobre a Equação 4.67 determina-se a evolução do parâmetro de dano  $\phi$ , como ilustra a Figura 4.25. Evidencia-se que o início da propagação do dano não ocorre no instante de aplicação do carregamento ( $t = 0$ ), mas sim quando o valor da deformação atinge um valor crítico, designado por  $\varepsilon_{cr}$ , cuja expressão (4.33) é obtida baseando-se no critério de propagação de dano.

As componentes das tensões apresentam a forma da Equação 4.58 e são atualizadas conforme os valores de  $\phi$  previamente calculados em cada instante. Sendo assim, o gráfico da Figura 4.26 possibilita comparar as tensões desenvolvidas no material (linhas contínuas) com a situação em que não há propagação de dano (linhas tracejadas).

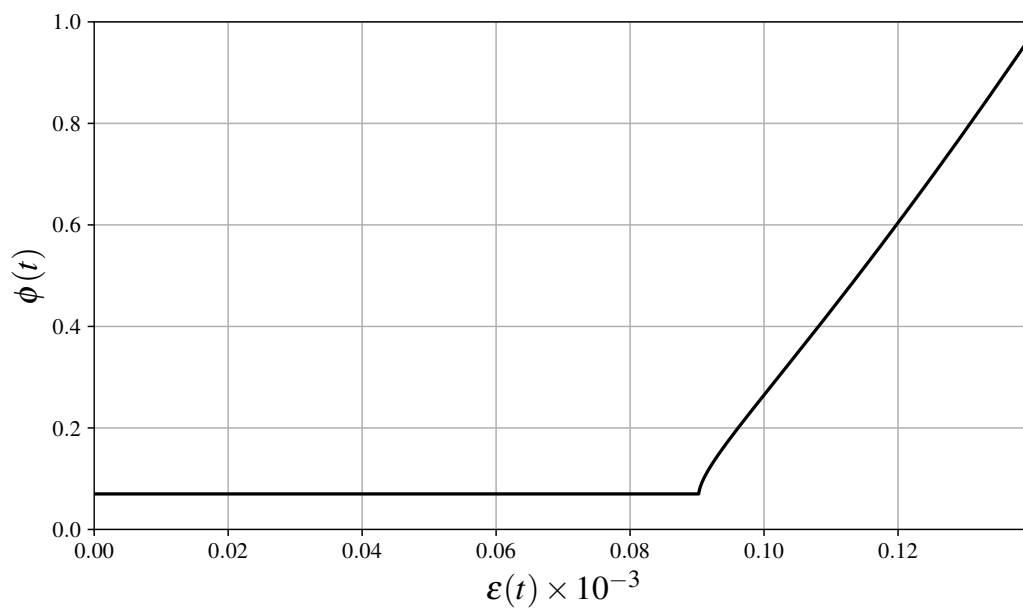


Figura 4.25 – Evolução do parâmetro de dano

$$\phi_0 = 0,07; \mathcal{N} = 1; \mathcal{F}_f = 40\text{J/m}^2; \Delta t = 1 \times 10^{-4}\text{s}.$$

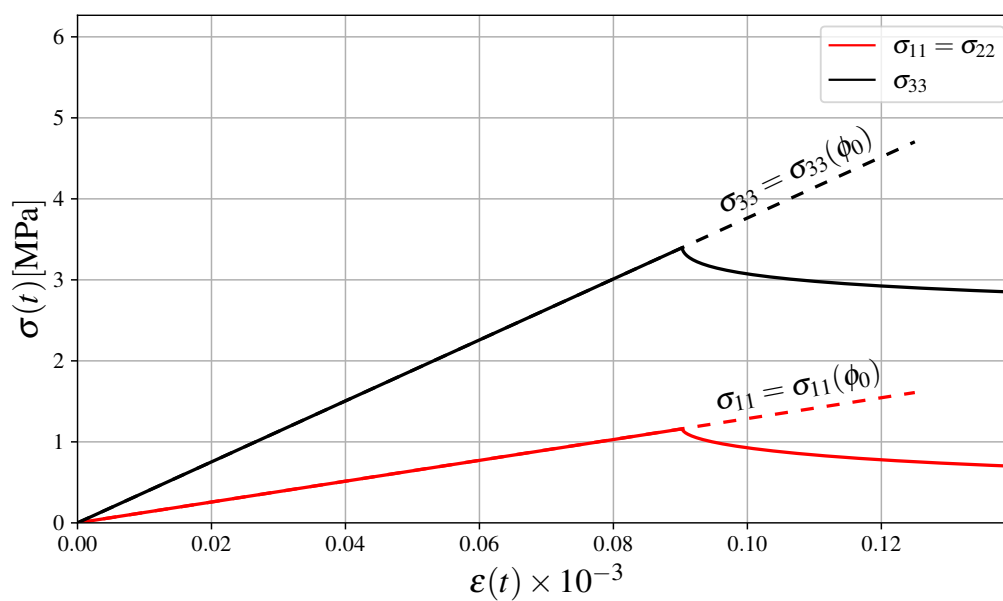


Figura 4.26 – Relação Tensão x Deformação

$$\phi_0 = 0,07; \mathcal{N} = 1; \Delta t = 1 \times 10^{-4}\text{s}.$$

## 5 MODELO DE DANO CONTÍNUO NA CONFIGURAÇÃO DESCRITA POR MÚLTIPLOS PARÂMETROS DE DANO

O presente Capítulo propõe uma extensão da formulação termodinâmica apresentada no Capítulo 4 para uma configuração na qual a rede de microfraturas é composta por diversas famílias. Neste contexto, cada família é associada a um parâmetro de dano  $\epsilon_i = \phi_i$  com  $(i = 1, \dots, n)$ , caracterizando um vetor de dano  $\underline{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ . O raio médio é admitido como uniforme em cada família, mas pode ser diferente de uma família para outra e o número de fraturas por unidade de volume  $\underline{\mathcal{N}} = (\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n)$  de cada família é tomado como constante. O objetivo desta seção é formular o critério de propagação de dano no nível do meio homogeneizado, assim como a sua lei de evolução no contexto de um material elástico considerando  $n$  famílias de fraturas. Nota-se que aumentar continuamente o número de famílias implica uma distribuição isótropa (aleatória) de fraturas. A principal diferença em relação à abordagem do Capítulo 4 é que agora pode-se estudar este caso admitindo qualquer carregamento macroscópico, uma vez que não há a limitação do número de parâmetros de dano.

### 5.1 FORMULAÇÃO TERMODINÂMICA DO MODELO DE DANO

Esta subseção trata da formulação termodinâmica do critério de propagação e da evolução do dano em materiais elásticos contendo diversas famílias de microfraturas. Tal como descrito no Capítulo 4, o processo de homogeneização evidencia que o tensor de rigidez equivalente  $\mathbb{C}$  é função de  $\underline{\phi}$  e  $\underline{\mathcal{N}}$ . Então, no contexto das evoluções elásticas isotérmicas, a densidade volumétrica macroscópica de energia livre  $\psi$  é escrita segundo as suas variáveis de estado  $\underline{\underline{\epsilon}}$ ,  $\underline{\phi}$  e  $\underline{\mathcal{N}}$ , como:

$$\psi = \psi(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\phi}, \underline{\mathcal{N}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\epsilon}} : \mathbb{C}(\underline{\phi}, \underline{\mathcal{N}}) : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (5.1)$$

Análogo ao Capítulo 4, a dissipação intrínseca, denotada por  $\mathcal{D}$ , é definida como a diferença entre a potência das forças externas  $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$  e a energia armazenada  $\dot{\psi}$  no contexto macroscópico. A combinação do primeiro e segundo princípios da termodinâmica fornece a desigualdade de Clausius-Duhem (ver Lemaitre e Chaboche (1990)):

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \dot{\psi} \geq 0. \quad (5.2)$$

Derivando  $\psi$  em relação ao tempo, pode-se escrever:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\phi}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\phi}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\mathcal{N}}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\mathcal{N}}}} \quad (5.3)$$

e substituindo esta quantidade na desigualdade de Clausius-Duhem (Equação 5.2), tem-se:

$$\mathcal{D} = \left( \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\phi}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\phi}}} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\mathcal{N}}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\mathcal{N}}}} \geq 0 \quad (5.4)$$

valendo para qualquer evolução do material. Partindo do raciocínio clássico que consiste em considerar evoluções reversíveis ( $\mathcal{D} = 0$ ), tem-se que  $\dot{\underline{\underline{\phi}}} = 0$  e  $\dot{\underline{\underline{\mathcal{N}}}} = 0$ . A existência de tais evoluções implica em:

$$\mathcal{D} = \left( \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = 0 \quad \forall \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (5.5)$$

a qual fornece a equação de estado elástica macroscópica:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \mathbb{C}(\underline{\underline{\phi}}, \underline{\underline{\mathcal{N}}}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (5.6)$$

Considerando a Equação de Estado (5.6) e restringindo a análise à ausência de nucleação, isto é,  $\dot{\underline{\underline{\mathcal{N}}}} = 0$ , a Equação 5.4 se reduz a:

$$\mathcal{D} = - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\phi}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\phi}}} \geq 0 \quad (5.7)$$

A expressão acima, considera a dissipação devido apenas a  $\dot{\underline{\underline{\phi}}} \neq 0$ , que é equivalente a variação do tamanho das fraturas de cada família. Assim como no trabalho de Griffith (1921), a quantidade  $\underline{\underline{\mathcal{F}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\phi}}) = -\partial \psi / \partial \underline{\underline{\phi}}$  assume o papel da força termodinâmica responsável pela propagação de dano:

$$\underline{\underline{\mathcal{F}}} = - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\phi}}} = - \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathbb{C}(\underline{\underline{\phi}})}{\partial \underline{\underline{\phi}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \frac{\partial \mathbb{S}(\underline{\underline{\phi}})}{\partial \underline{\underline{\phi}}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (5.8)$$

onde  $\underline{\underline{\mathcal{F}}} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$  é escrito agora como um vetor. A relação acima, permite reescrever a Equação 5.7 como:

$$\mathcal{D} = \underline{\underline{\mathcal{F}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\phi}}} \geq 0 \quad (5.9)$$

Com uma analogia a plasticidade clássica, propõe-se um modelo de dano contínuo a fim de prever a evolução do dano. Tal como na seção 4.2, para formular este modelo é preciso introduzir

uma superfície de dano  $H(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi}) = 0$ , a qual delimita uma região onde o dano não se propaga no espaço da força termodinâmica  $\underline{\mathcal{F}}$ . Para definir esta região é postulado o seguinte critério de propagação de dano:

$$H(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi}) \leq 0 \quad (5.10)$$

no qual

$$\begin{cases} H(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi}) < 0 & \Rightarrow \underline{\dot{\phi}} = 0 \\ H(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi}) = 0 & \Rightarrow \text{possível } \underline{\dot{\phi}} \neq 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

e  $H(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi}) > 0$  é uma condição inadmissível. Conforme o raciocínio desenvolvido por Pavan et al. (2009), quando  $H(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi}) = 0$  a evolução de  $\underline{\phi}$  é descrita por meio de um potencial de dano  $G(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi})$  que controla a direção da sua evolução:

$$\underline{\dot{\phi}} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \quad (5.12)$$

onde o multiplicador de dano  $\dot{\lambda}$  deve cumprir as condições de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0 ; H \leq 0 ; \dot{\lambda} H = 0 \quad (5.13)$$

Tal como na plasticidade, modelos onde  $G = H$  são denominados modelos associados, levando a uma propagação normal do dano. A evolução do multiplicador de dano  $\dot{\lambda}$  pode ser obtida por meio da condição de consistência ( $\dot{H} = 0$ ):

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \dot{\underline{\mathcal{F}}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{\phi}} \cdot \dot{\underline{\phi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} = - \frac{\frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \dot{\underline{\mathcal{F}}}}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\mathcal{F}}}} \quad (5.14)$$

Portanto, os resultados para a taxa de evolução do dano  $\underline{\dot{\phi}}$  podem ser sintetizados como:

$$\underline{\dot{\phi}} = \begin{cases} 0 & \text{se } H < 0 \text{ ou } H = 0 \text{ e } \dot{H} < 0 \\ - \frac{\frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \dot{\underline{\mathcal{F}}}}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\mathcal{F}}}} & \text{se } H = 0 \text{ e } \dot{H} = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Os termos  $\dot{\lambda}$  e  $\dot{\phi}$  também podem ser relacionados a taxa de deformação, expressando  $\dot{\mathcal{F}}$  em termos das suas variáveis de estado  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  e  $\underline{\underline{\phi}}$  representadas na Equação 5.8:

$$\dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\phi}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\phi}}} \quad (5.16)$$

e substituindo a quantidade acima sobre a expressão resultante de (5.14) pode-se expressar:

$$\dot{\lambda} = - \frac{\frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\phi}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\phi}}} \cdot \lambda \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} \right)}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\phi}}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}}} \quad (5.17)$$

A manipulação matemática da Equação 5.17 possibilita reescrever  $\dot{\lambda}$  da seguinte forma:

$$\dot{\lambda} = - \frac{\frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\phi}}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\phi}}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}}} \quad (5.18)$$

e, por consequência, a evolução do parâmetro de dano fica definida por:

$$\dot{\phi} = - \frac{\frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\phi}}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\phi}}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}}} \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} \quad (5.19)$$

ou, de forma equivalente, escreve-se:

$$\dot{\phi} = - \frac{\frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} \otimes \frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\phi}}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\underline{\phi}}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}}} \quad (5.20)$$

com as expressões das quantidades  $\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}/\partial \underline{\underline{\varepsilon}}$  e  $\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}/\partial \underline{\underline{\phi}}$  definidas por:

$$\frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = - \frac{\partial \mathcal{C}(\underline{\underline{\phi}})}{\partial \underline{\underline{\phi}}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{F}}}}{\partial \underline{\underline{\phi}}} = - \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial^2 \mathcal{C}(\underline{\underline{\phi}})}{\partial \underline{\underline{\phi}}^2} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (5.21)$$

As expressões das quantidades  $\partial H/\partial \underline{\mathcal{F}}$ ,  $\partial H/\partial \underline{\phi}$  e  $\partial G/\partial \underline{\mathcal{F}}$  são definidas com base no critério de propagação e potencial de dano adotados. É pertinente destacar que a escolha do critério de dano  $H(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi}) \leq 0$  e do potencial de dano  $G(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi})$  devem ser feitas de forma que o modelo se ajuste adequadamente aos dados experimentais disponíveis.

Se a regra da normalidade é assumida, isto é,  $G = H$ , as relações deduzidas nas Equações 5.14 e 5.15 (quando  $H = 0$  e  $\dot{H} = 0$ ) são escritas como:

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \underline{\dot{\mathcal{F}}}}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}}} \quad \text{e} \quad \underline{\dot{\phi}} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \underline{\dot{\mathcal{F}}}}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}}} \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \otimes \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}}}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}}} \cdot \underline{\dot{\mathcal{F}}} \quad (5.22)$$

ou, de forma equivalente, segundo as Equações 5.18 e 5.20, tem-se:

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}}} \quad \text{e} \quad \underline{\dot{\phi}} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \otimes \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \quad (5.23)$$

Alternativamente, pode-se escrever uma lei constitutiva em taxa que fornece uma relação entre taxas de tensões e taxas de deformações. Esta lei pode ser obtida a partir da derivada temporal da Equação de estado elástica:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}(\underline{\phi}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \underline{\phi}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\dot{\phi}} \quad (5.24)$$

Substituindo o parâmetro  $\underline{\phi}$  da Equação 5.20 sobre a Equação 5.24, escreve-se:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \frac{\left( \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \underline{\phi}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \otimes \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right)}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\mathcal{F}}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\mathcal{F}}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \quad (5.25)$$

e a forma da taxa do modelo de dano contínuo é então deduzida como:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \mathbb{C}_t : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \quad (5.26)$$

sendo  $\mathbb{C}_t$  o tensor constitutivo tangente do dano, dado por:



$$C_t = \begin{cases} C & \text{se } H < 0 \text{ ou } H = 0 \text{ e } \dot{H} < 0 \\ C - \frac{\left( \frac{\partial C}{\partial \underline{\phi}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \otimes \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right)}{\frac{\partial H}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\mathcal{F}}} + \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \underline{\mathcal{F}}}} & \text{se } H = 0 \text{ e } \dot{H} = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

## 5.2 EXPRESSÕES PARTICULARES DO MODELO DE EVOLUÇÃO DE DANO

Nesta subseção são apresentadas expressões particulares para o modelo de evolução de dano proposto. Deste modo, adotam-se duas formas distintas para o critério de propagação de dano  $H(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi}) \leq 0$  da Equação 5.10, admitindo um modelo associado  $G = H$  (regra da normalidade) para definir tais expressões.

### 5.2.1 Primeiro caso particular: critério acoplado

Inspirando-se no trabalho desenvolvido por Pavan et al. (2009), a primeira forma particular para o critério de propagação é dada por:

$$H(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi}) = \sqrt{\underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{\mathcal{F}}} - F_0(\underline{\phi}) \leq 0 \quad (5.28)$$

onde  $\sqrt{\underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{\mathcal{F}}}$  caracteriza a norma do vetor força termodinâmica  $|\underline{\mathcal{F}}|$  definido na Equação 5.8 e a dependência do limite  $F_0$  em relação ao vetor de dano  $\underline{\phi}$  é sinônimo de endurecimento. Dado que a função  $F_0(\underline{\phi})$  precisa ser definida, evidencia-se que a lei de endurecimento mais simples consiste em adotar uma função linear, como por exemplo:

$$F_0(\underline{\phi}) = \kappa + \underline{\eta} \cdot \underline{\phi} \quad (5.29)$$

onde  $\kappa$  e  $\underline{\eta}$  são constantes do material. Funções lineares são frequentemente usadas para formular modelos de dano relacionados a geomateriais, como se pode consultar, por exemplo, em Pensee e Kondo (2003). Na abordagem proposta pelos autores foi utilizada uma função linear para formular um modelo de dano, considerando um parâmetro de dano escalar e o material empregado nas aplicações numéricas trata-se de um geomaterial, cujas constantes são dadas no artigo.

Partindo da Equação 5.23 relacionada a modelos associados ( $G = H$ ) e assumindo o critério de propagação da Equação 5.28, as expressões das quantidades  $\partial H / \partial \underline{\mathcal{F}}$  e  $\partial H / \partial \underline{\phi}$ , considerando as variáveis  $\underline{\mathcal{F}}$  e  $\underline{\phi}$  independentes, são calculadas como:

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{\mathcal{F}}} = \frac{2\underline{\mathcal{F}}}{2\sqrt{\underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{\mathcal{F}}}} = \frac{\underline{\mathcal{F}}}{|\underline{\mathcal{F}}|} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial \underline{\phi}} = -\frac{\partial F_0}{\partial \underline{\phi}} \quad (5.30)$$

Portanto, a taxa de evolução do dano  $\dot{\underline{\phi}}$  para este caso particular fica definida por:

$$\dot{\underline{\phi}} = -\frac{\frac{\underline{\mathcal{F}}}{|\underline{\mathcal{F}}|} \otimes \frac{\underline{\mathcal{F}}}{|\underline{\mathcal{F}}|} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}}{-\frac{\partial F_0}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\underline{\mathcal{F}}}{|\underline{\mathcal{F}}|} + \frac{\underline{\mathcal{F}}}{|\underline{\mathcal{F}}|} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\phi}} \cdot \frac{\underline{\mathcal{F}}}{|\underline{\mathcal{F}}|}} : \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}} \quad (5.31)$$

ou de forma simplificada, escreve-se:

$$\dot{\underline{\phi}} = \frac{\underline{\mathcal{F}} \otimes \underline{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}}{F_0 \frac{\partial F_0}{\partial \underline{\phi}} \cdot \underline{\mathcal{F}} - \underline{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\phi}} \cdot \underline{\mathcal{F}}} : \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}} \quad (5.32)$$

evidenciando que  $|\underline{\mathcal{F}}| = F_0$  quando  $H = 0$ . Substituindo as expressões das quantidades  $\partial \underline{\mathcal{F}} / \partial \underline{\underline{\varepsilon}}$  e  $\partial \underline{\mathcal{F}} / \partial \underline{\phi}$  definidas na Equação 5.21, obtém-se a seguinte expressão particular para a taxa de evolução do dano:

$$\dot{\underline{\phi}} = \frac{\left( \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \underline{\mathcal{C}}}{\partial \underline{\phi}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) \otimes \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \underline{\mathcal{C}}}{\partial \underline{\phi}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) \cdot \left( \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \underline{\mathcal{C}}}{\partial \underline{\phi}} : \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}} \right)}{F_0 \frac{\partial F_0}{\partial \underline{\phi}} \cdot \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \underline{\mathcal{C}}}{\partial \underline{\phi}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) - \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \underline{\mathcal{C}}}{\partial \underline{\phi}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial^2 \underline{\mathcal{C}}}{\partial \underline{\phi}^2} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \underline{\mathcal{C}}}{\partial \underline{\phi}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right)} \quad (5.33)$$

sendo a derivada da função  $F_0(\phi)$  em relação a  $\phi$  definida, simplesmente, por  $\partial F_0 / \partial \phi = \eta$ . Alternativamente, partindo da Equação 5.24 escreve-se a lei constitutiva em taxa relacionada a expressão de  $\dot{\underline{\phi}}$  da Equação 5.32:

$$\underline{\dot{\underline{\sigma}}} = \underline{\mathcal{C}} : \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}} + \frac{\left( \frac{\partial \underline{\mathcal{C}}}{\partial \underline{\phi}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right) \cdot \left( \underline{\mathcal{F}} \otimes \underline{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right)}{F_0 \frac{\partial F_0}{\partial \underline{\phi}} \cdot \underline{\mathcal{F}} - \underline{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\phi}} \cdot \underline{\mathcal{F}}} : \underline{\dot{\underline{\varepsilon}}} \quad (5.34)$$

a qual pode ser escrita na forma reduzida da Equação 5.26, com o tensor constitutivo tangente de dano  $\underline{\mathcal{C}}_t$  dado por:

$$\mathbb{C}_t = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } H < 0 \text{ ou } H = 0 \text{ e } \dot{H} < 0 \\ \mathbb{C} + \frac{\left(\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \underline{\phi}} : \underline{\underline{\varepsilon}}\right) \cdot \left(\underline{\mathcal{F}} \otimes \underline{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}\right)}{F_0 \frac{\partial F_0}{\partial \underline{\phi}} \cdot \underline{\mathcal{F}} - \underline{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathcal{F}}}{\partial \underline{\phi}} \cdot \underline{\mathcal{F}}} & \text{se } H = 0 \text{ e } \dot{H} = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

### 5.2.2 Segundo caso particular: critério desacoplado

A segunda forma particular escolhida para o critério de propagação da Equação 5.10 trata-se de uma extensão imediata da metodologia apresentada no Capítulo 4, na qual se considerava um único parâmetro de dano  $\phi$ . Tal formulação é proposta em Dormieux e Kondo (2016) postulando o seguinte critério de propagação:

$$H(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} H_1 = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_c^1 \leq 0 \\ H_2 = \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_c^2 \leq 0 \\ \vdots \\ H_n = \mathcal{F}_n - \mathcal{F}_c^n \leq 0 \end{cases} \quad (5.36)$$

ou, equivalentemente:

$$H(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi}) = \max_i H_i \leq 0 \text{ com } H_i = \mathcal{F}_i - \mathcal{F}_c^i(\phi_i) \quad (5.37)$$

onde  $\mathcal{F}_i$  e  $\mathcal{F}_c^i$  são definidos, respectivamente, por:

$$\mathcal{F}_i = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \phi_i} : \underline{\underline{\varepsilon}} \text{ e } \mathcal{F}_c^i(\phi_i) = \frac{2\pi}{3} \mathcal{F}_f^i \left(\frac{\mathcal{N}_i}{\phi_i}\right)^{1/3} \quad (5.38)$$

sendo  $\mathcal{N}_i$  o número de fraturas por unidade de volume que é tomado como constante neste trabalho e  $\mathcal{F}_f^i$  a energia crítica da fratura.

A condição de propagação expressa nas Equações 5.36 e 5.37 implica que:

$$\begin{cases} H < 0 \Rightarrow \dot{\underline{\phi}} = 0 \\ H = 0 \Rightarrow \text{possível } \dot{\underline{\phi}} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \ H_i < 0 \Rightarrow \dot{\underline{\phi}} = 0 \\ \exists i \ H_i = 0 \Rightarrow \text{possível } \dot{\underline{\phi}} \neq 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

Dessa forma, a taxa de evolução de dano deverá ser calculada individualmente para todo valor de  $i$  que levar a condição  $H_i = 0$ . Nestas circunstâncias, segundo o raciocínio desenvolvido por



### 5.2.3 Procedimento numérico incremental

Com base nas expressões particulares de  $\dot{\underline{\phi}} = \dot{\phi}_i$ , dadas pelas Equações 5.33 e 5.42, é possível obter uma função que avalia a evolução do parâmetro de dano ao longo do tempo. Dado que as componentes do tensor  $\partial \mathbb{C} / \partial \underline{\phi}$  resultam em polinômios de graus elevados, torna-se complexo obter a evolução do dano de forma analítica via integração. Em virtude disso, a evolução do parâmetro de dano  $\underline{\phi}(t)$  induzida pelo carregamento macroscópico será determinada numericamente de forma incremental. Partindo de  $\underline{\phi}(t=0) = \underline{\phi}^0$ , o valor da k-ésima interação  $\underline{\phi}^k = \underline{\phi}(t=t^k)$  é avaliado a partir de  $\underline{\phi}^{k-1} = \underline{\phi}(t=t^{k-1})$  e de uma das Equações de  $\dot{\underline{\phi}}$  (5.33 ou 5.42):

$$\underline{\phi}^k = \underline{\phi}^{k-1} + \dot{\underline{\phi}} \Delta t \quad (5.46)$$

A precisão do processo incremental está diretamente correlacionada a discretização temporal, ou seja,  $\Delta t$  ( $t^k = t^{k-1} + \Delta t$ ) e ao esquema empregado para avaliação de  $\dot{\underline{\phi}}$ . Nesta análise, adota-se um esquema explícito para avaliar  $\dot{\underline{\phi}}$ , isto é,  $\underline{\phi} = \underline{\phi}^{k-1}$ . A Figura 5.1 exibe um fluxograma do procedimento numérico incremental adotado nas aplicações subsequentes, válido para qualquer expressão particular para o critério de propagação de dano.

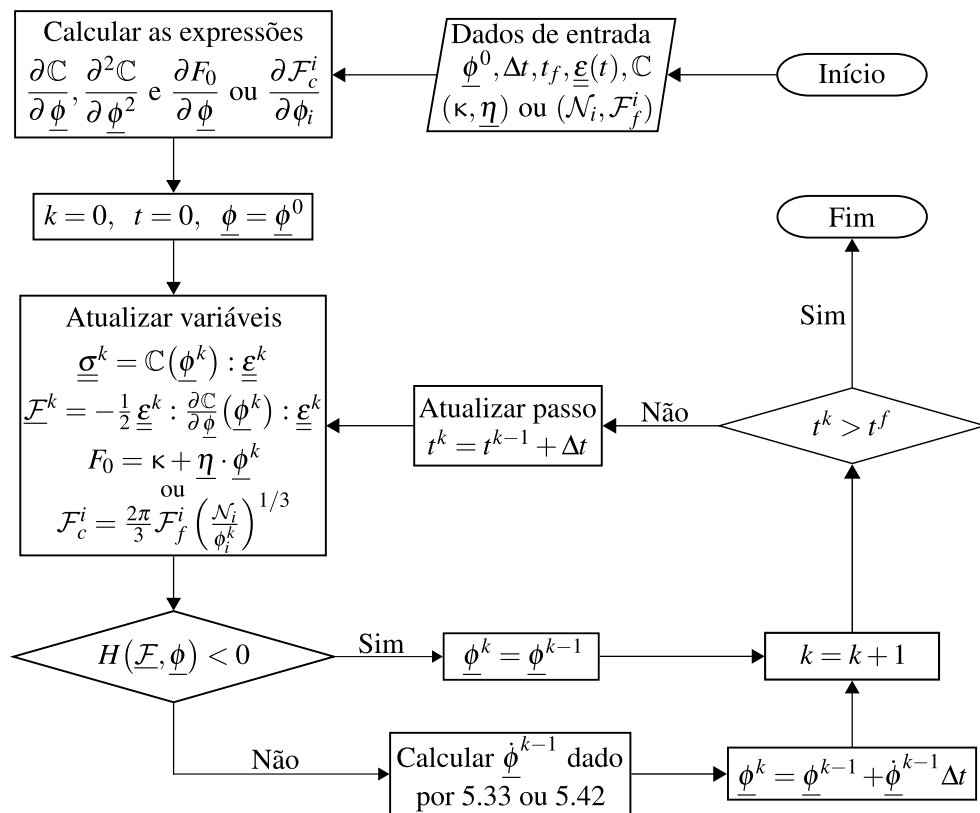


Figura 5.1 – Fluxograma do procedimento numérico incremental

### 5.3 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

A presente subseção visa empregar as expressões particulares do modelo de dano das Equações 5.42 e 5.33 para avaliar a evolução do dano e estudar o efeito da propagação sobre o tensor de tensões em materiais elásticos fraturados submetidos a carregamentos macroscópicos específicos. As propriedades adotadas para a matriz são  $k^s = 24,42$  GPa e  $\mu^s = 13,27$  GPa e referem-se ao módulo elástico instantâneo do concreto relatado em Le (2008). Quanto às fraturas assume-se, por simplicidade, que todas as famílias possuem propriedades idênticas  $k_n^i = 42,22$  GPa/m e  $k_t^i = 16,89$  GPa/m. O número de fraturas por unidade de volume é tomado como constante e dado por  $\mathcal{N}_i = 1$  na análise subsequente, exceto se explicitado o contrário. Para a energia crítica da fratura adota-se o valor  $\mathcal{F}_f^i = 40\text{J/m}^2$ , condizente com ensaios elásticos realizados sobre corpos de prova padronizados de concreto (ver Bazant e Pfeiffer (1987)). As constantes do material que constituem a função  $F_0$  relativa ao primeiro caso particular, são definidas como  $\kappa = 9 \times 10^{-4}\text{J/m}^2$  e  $\underline{\eta} = \eta_i \underline{e}_i$  com  $\eta_i = 130\text{J/m}^2$  e referem-se a propriedades características de geomateriais, dadas em Pensee e Kondo (2003). Como já mencionado, a evolução do dano será determinada numericamente de forma incremental, segundo o procedimento da Figura 5.1, para os dois critérios de propagação de dano estabelecidos.

#### 5.3.1 Material com duas famílias de microfraturas sob carregamento em deformação macroscópica

Considera-se inicialmente uma matriz sólida homogênea com duas famílias de microfraturas perpendiculares cuja orientação é definida por seus vetores normais  $\underline{n}_1$  e  $\underline{n}_2$ , como ilustra a Figura 5.2. O comportamento homogeneizado do material é descrito pelas componentes não nulas do tensor  $\mathbb{C}(\underline{\phi}) = \mathbb{C}(\phi_1, \phi_2)$ , definidas na Equação 3.20.

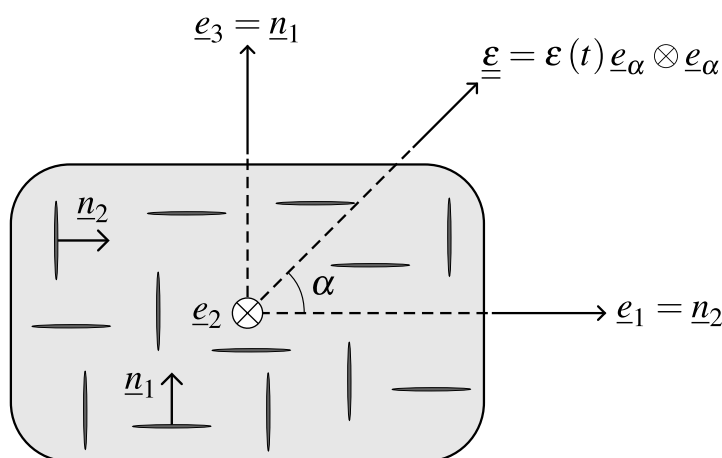


Figura 5.2 – Deformação macroscópica aplicada a um material com duas famílias de fraturas

O carregamento macroscópico imposto trata-se de uma deformação do tipo  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon(t) \underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\alpha$  cuja

orientação é definida no plano pelo vetor  $\underline{e}_\alpha = \cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_3$ , o que leva a uma deformação matematicamente descrita por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon(t) \left[ \cos^2 \alpha \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \cos \alpha \sin \alpha (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \sin^2 \alpha \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \right] \quad (5.47)$$

com a função  $\varepsilon(t)$  definida para cada caso específico. Conforme o carregamento imposto, o tensor de tensões desenvolvido no material apresenta a seguinte forma:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \sigma_{13} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 \quad (5.48)$$

cujas componentes são definidas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = C_{1111} \varepsilon_{11} + C_{1133} \varepsilon_{33} = C_{1111} (\phi_1, \phi_2) \varepsilon(t) \cos^2 \alpha + C_{1133} (\phi_1, \phi_2) \varepsilon(t) \sin^2 \alpha \\ \sigma_{22} = C_{2211} \varepsilon_{11} + C_{2233} \varepsilon_{33} = C_{2211} (\phi_1, \phi_2) \varepsilon(t) \cos^2 \alpha + C_{2233} (\phi_1, \phi_2) \varepsilon(t) \sin^2 \alpha \\ \sigma_{33} = C_{3311} \varepsilon_{11} + C_{3333} \varepsilon_{33} = C_{3311} (\phi_1, \phi_2) \varepsilon(t) \cos^2 \alpha + C_{3333} (\phi_1, \phi_2) \varepsilon(t) \sin^2 \alpha \\ \sigma_{13} = 2C_{1313} \varepsilon_{13} = 2C_{1313} (\phi_1, \phi_2) \varepsilon(t) \cos \alpha \sin \alpha \end{array} \right. \quad (5.49)$$

Considerando a deformação macroscópica da Equação 5.47, define-se o vetor força termodinâmica  $\underline{\mathcal{F}}$  (Equação 5.8) através de suas componentes como:

$$\mathcal{F}_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon^2(t) \left[ \frac{\partial C_{1111}}{\partial \phi_1} \cos^4 \alpha + 2 \left( \frac{\partial C_{1133}}{\partial \phi_1} + \frac{\partial C_{1313}}{\partial \phi_1} \right) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \frac{\partial C_{3333}}{\partial \phi_1} \sin^4 \alpha \right] \quad (5.50)$$

e

$$\mathcal{F}_2 = -\frac{1}{2} \varepsilon^2(t) \left[ \frac{\partial C_{1111}}{\partial \phi_2} \cos^4 \alpha + 2 \left( \frac{\partial C_{1133}}{\partial \phi_2} + \frac{\partial C_{1313}}{\partial \phi_2} \right) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \frac{\partial C_{3333}}{\partial \phi_2} \sin^4 \alpha \right] \quad (5.51)$$

sendo as componentes do tensor  $\partial C / \partial \phi$  definidas no Apêndice A. Nesta subseção são desenvolvidos exemplos numéricos para ilustrar a evolução do dano, considerando os casos particulares propostos nas subseções 5.2.1 e 5.2.2. Na análise subsequente aplica-se uma deformação constante e uma deformação crescente na forma da Equação 5.47, assumindo diferentes inclinações ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 30^\circ$  e  $\alpha = 45^\circ$ ) para tais carregamentos.

### 5.3.1.1 Deformação constante

Os primeiros exemplos numéricos consistem em aplicar uma deformação constante ao corpo de prova, escrita na forma da Equação 5.47, variando a inclinação  $\alpha$  do carregamento. A deformação  $\varepsilon(t)$  imposta ao material em todos os casos particulares desta subseção é ilustrada pela Figura 5.3, com  $\varepsilon_0 = 0,1\%$ :

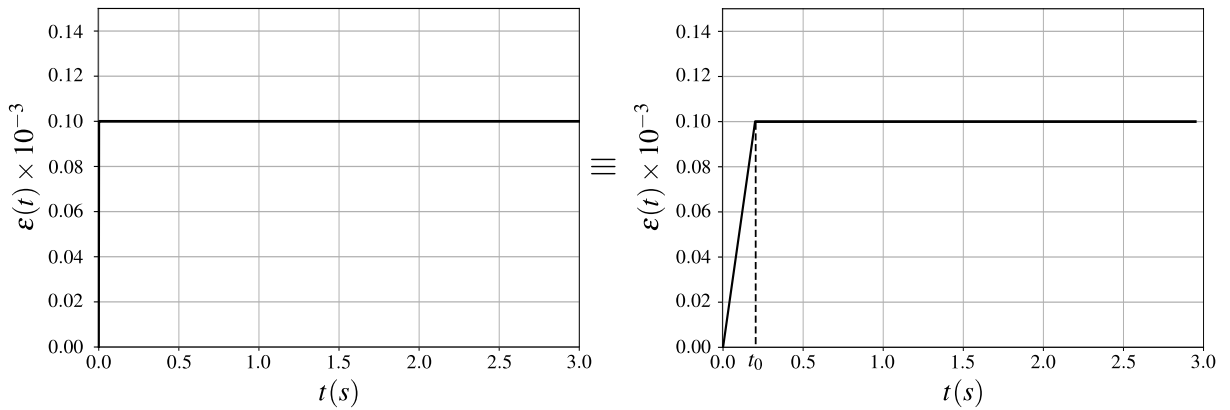


Figura 5.3 – Deformação constante imposta ao corpo de prova

sendo  $t_0$  um tempo inicial muito pequeno para que exista a equivalência ilustrada acima. Na análise subsequente são desenvolvidos exemplos relativos as expressões particulares propostas para o critério de propagação de dano.

• **Primeiro caso particular: critério acoplado**

Para iniciar o estudo sobre a evolução do dano  $\underline{\phi}$ , considera-se o critério de propagação acoplado da Equação 5.28. No primeiro exemplo admite-se um ângulo  $\alpha = 0^\circ$  para a expressão da Equação 5.47, considerando o carregamento ilustrado pela Figura 5.3. Tal inclinação leva a uma deformação normal a segunda família de fraturas  $\omega_2$ , portanto, a única componente não nula do tensor de deformações é  $\varepsilon_{11}$ . Aplicando o raciocínio numérico explicitado na Figura 5.1 sobre a expressão de  $\dot{\underline{\phi}}$  da Equação 5.33, determina-se a evolução do dano  $\underline{\phi}$ , como ilustra a Figura 5.4.

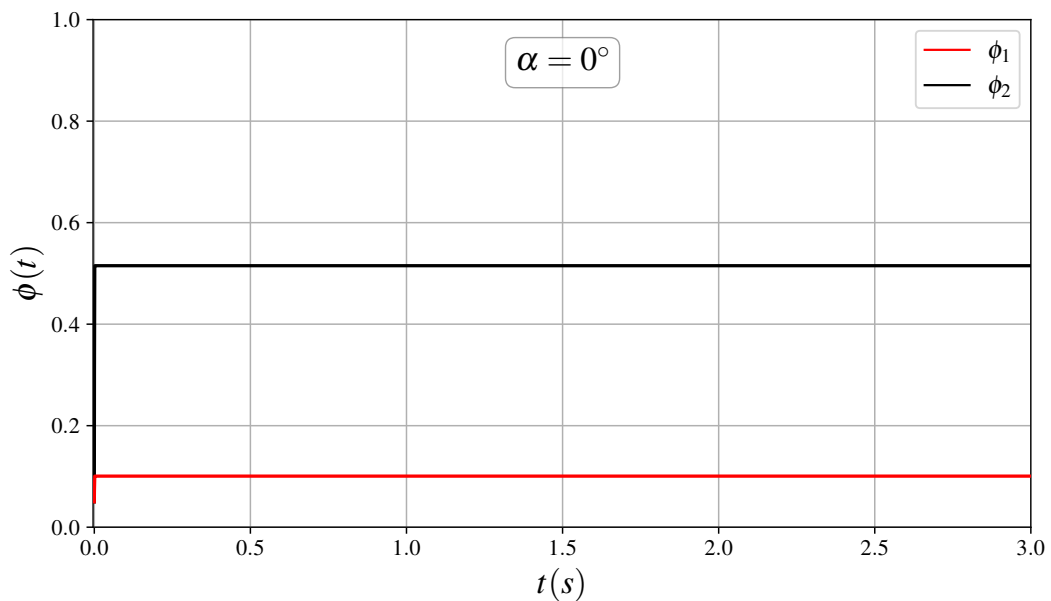


Figura 5.4 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \alpha = 0^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$



Como já constatado nas aplicações do Capítulo 4 ao aplicar uma deformação constante percebe-se que a propagação de dano se dará integralmente no instante de aplicação do carregamento, mantendo-se constante a partir de então. Analisando o gráfico acima, percebe-se que a componente  $\phi_2$  do dano exibe um valor consideravelmente maior do que a componente  $\phi_1$  após a propagação. Tal comportamento decorre do ângulo  $\alpha$  adotado, levando a uma deformação aplicada perpendicularmente à segunda família de fraturas. Embora a primeira família esteja paralela ao carregamento, por se tratar de um critério acoplado, também houve uma pequena evolução do dano nesta direção.

O tensor de tensões expresso através das suas componentes definidas pela Equação 5.49 é atualizado conforme os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Nesta perspectiva, a Figura 5.5 ilustra as tensões desenvolvidas no material, evidenciando que a componente  $\sigma_{13}$  é nula devido à inclinação adotada para o carregamento.

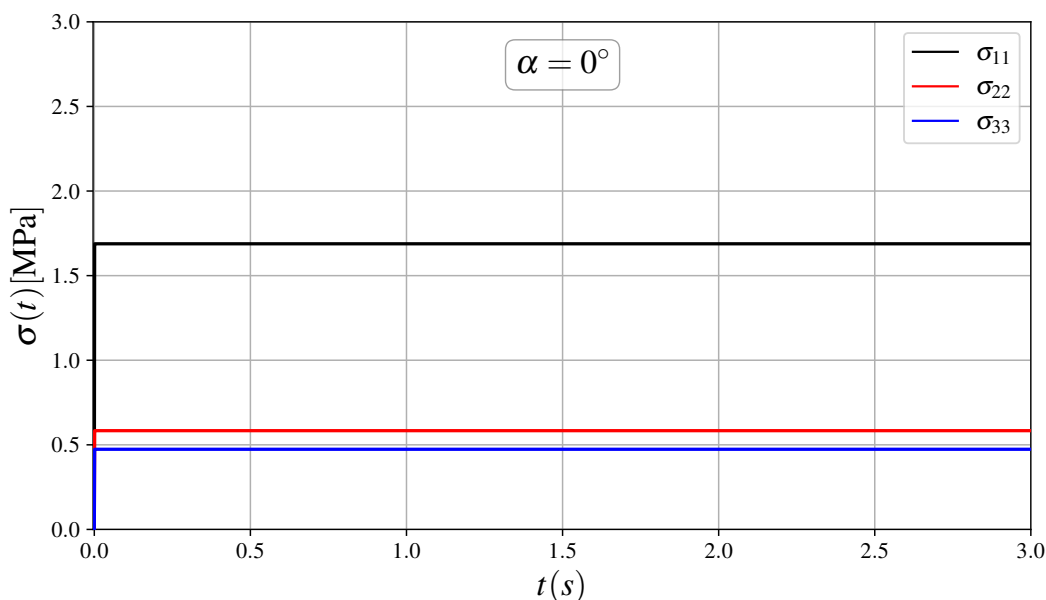


Figura 5.5 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \alpha = 0^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4}s.$$

O segundo exemplo consiste em adotar uma inclinação  $\alpha = 30^\circ$  para a expressão da Equação 5.47, considerando o carregamento ilustrado pela Figura 5.3. Empregando o raciocínio numérico da Figura 5.1 sobre a expressão de  $\dot{\phi}$  da Equação 5.33, determina-se a evolução do parâmetro de dano  $\phi$  conforme ilustra a Figura 5.6. Analisando o gráfico abaixo, nota-se que o valor da componente  $\phi_2$  do dano é aproximadamente duas vezes maior do que  $\phi_1$ . Tal resultado é encontrado pois a inclinação  $\alpha$  condiciona uma maior influência do carregamento imposto sobre a segunda família de fraturas, caso fosse considerado um ângulo  $\alpha = 60^\circ$ , o resultado obtido seria o oposto.

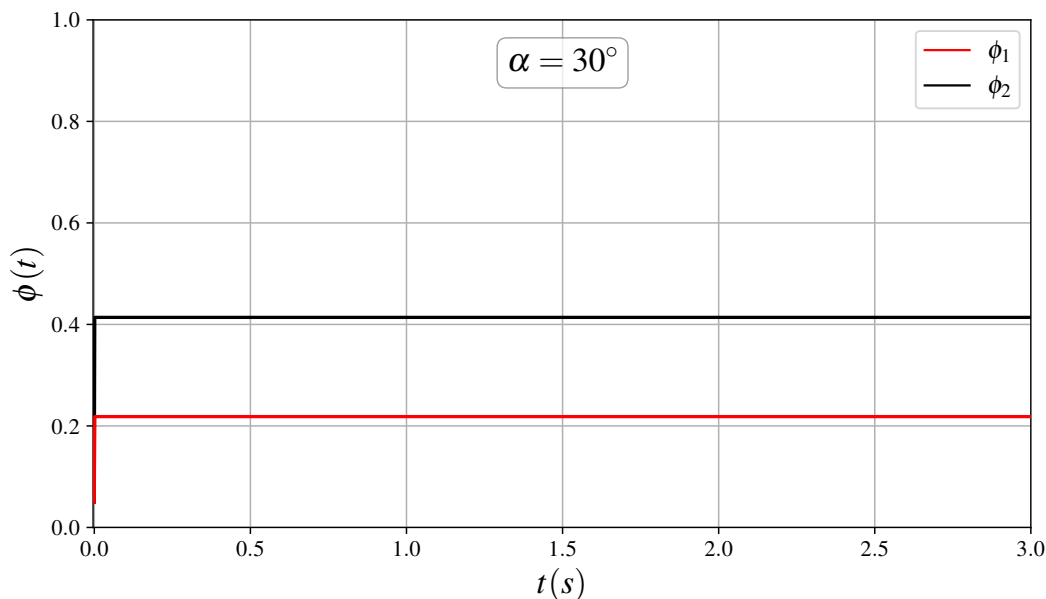


Figura 5.6 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \alpha = 30^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

O tensor de tensões definido pelas componentes da Equação 5.49 é atualizado conforme os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Diante disso, a Figura 5.7 ilustra as tensões desenvolvidas no material.

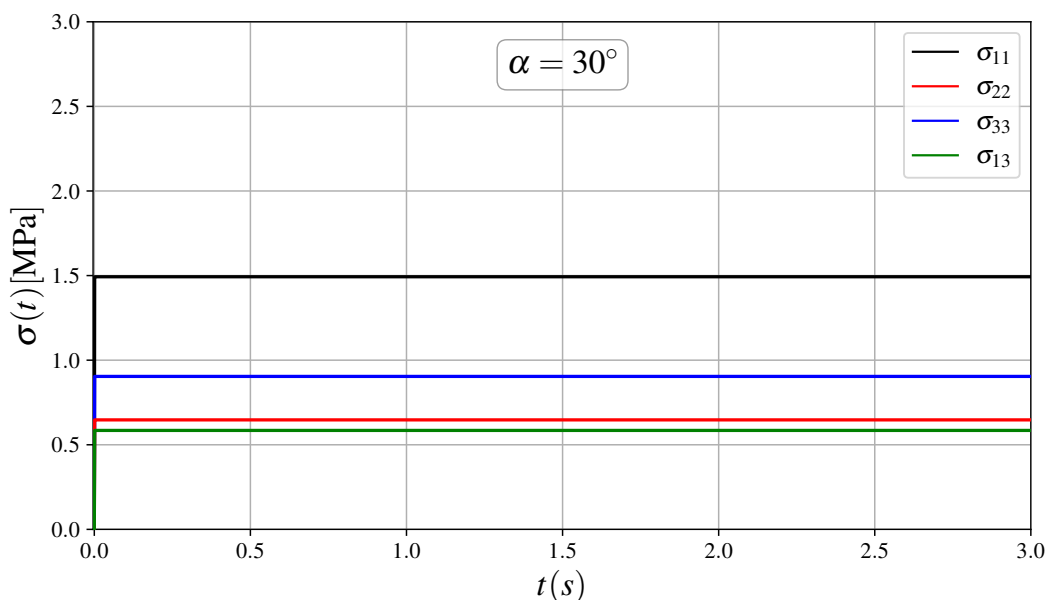


Figura 5.7 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \alpha = 30^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

No terceiro exemplo considera-se uma deformação constante ilustrada pela Figura 5.3 e definida pela Equação 5.47, admitindo um ângulo  $\alpha = 45^\circ$  para tal carregamento. Mais uma vez, a evolução do dano é obtida empregando o procedimento numérico da Figura 5.1 sobre a

Equação 5.33 e os resultados são ilustrados pela Figura 5.8. Verifica-se que os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  estão sobrepostos, tal comportamento decorre do ângulo  $\alpha$  adotado e das propriedades idênticas assumidas para ambas as famílias de fraturas, caso contrário, este resultado não seria encontrado.

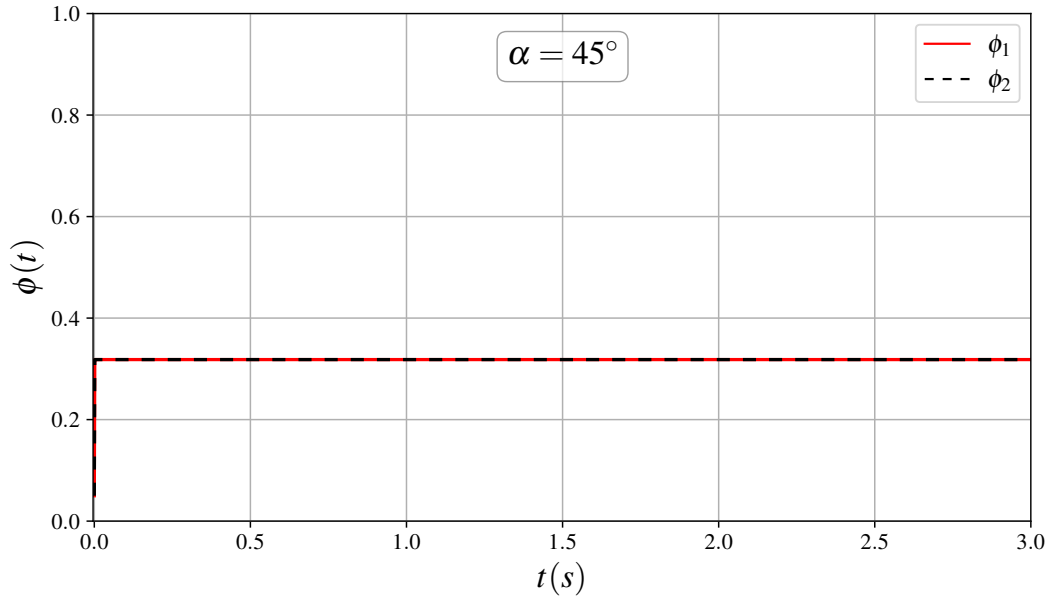


Figura 5.8 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \alpha = 45^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

O tensor de tensões expresso através das suas componentes dadas na Equação 5.49 é atualizado conforme os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . A Figura 5.9 ilustra as tensões desenvolvidas no material.

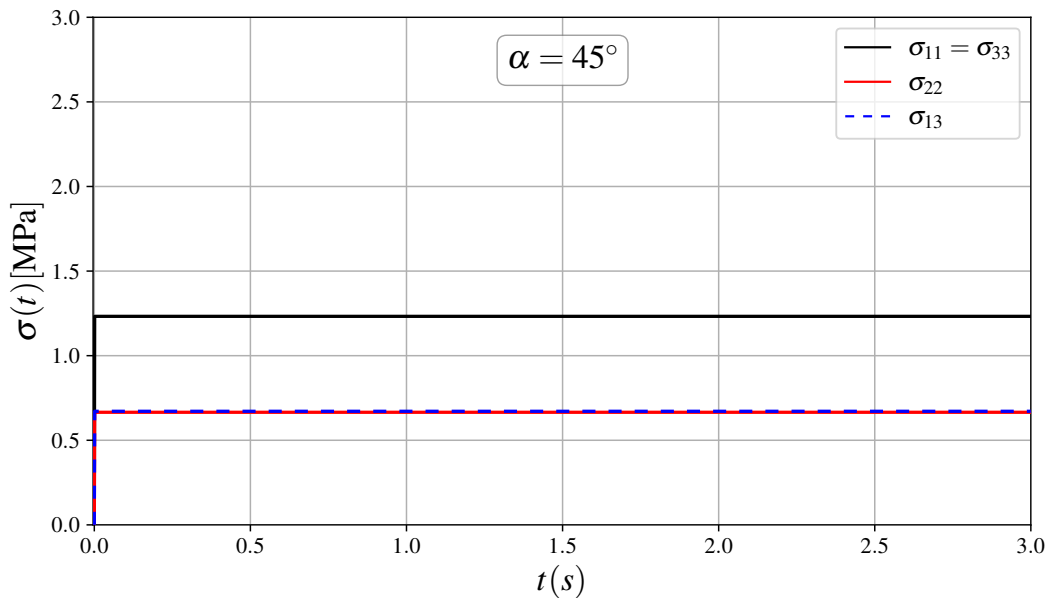


Figura 5.9 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \alpha = 45^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

• **Segundo caso particular: critério desacoplado**

Nesta etapa apresentam-se exemplos numéricos para avaliar a evolução do dano considerando o critério de propagação desacoplado da Equação 5.36. Na primeira aplicação assume-se um ângulo  $\alpha = 0^\circ$  para a expressão da Equação 5.47, considerando o carregamento ilustrado pela Figura 5.3. Como já mencionado essa inclinação condiciona uma deformação normal a segunda família de fraturas  $\omega_2$ , portanto, a única componente não nula do tensor de deformações é  $\varepsilon_{11}$ . Tal como nos exemplos anteriores, a evolução do dano é obtida aplicando o procedimento numérico da Figura 5.1 sobre a expressão de  $\dot{\phi}_i$  da Equação 5.42, como ilustra a Figura 5.10.

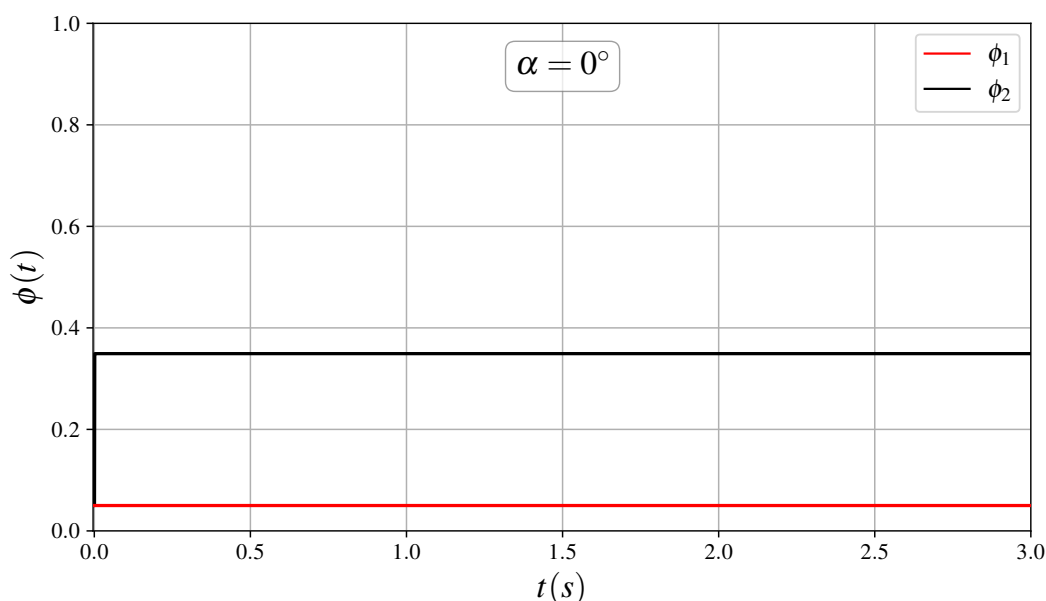


Figura 5.10 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \quad \mathcal{N}_i = 1; \quad \mathcal{F}_f^i = 40\text{J/m}^2; \quad \alpha = 0^\circ; \quad \Delta t = 1 \times 10^{-4}\text{s}.$$

Por se tratar de um critério desacoplado, tal carregamento (normal a segunda família) só induz propagação de dano a componente  $\phi_2$ , enquanto  $\phi_1$  não evolui no tempo, mantendo-se com o valor de dano inicial. Essa é a principal diferença quando comparado ao critério de propagação acoplado, no qual para as mesmas circunstâncias havia uma pequena evolução para a componente  $\phi_1$ , relativa a família  $\omega_1$  paralela ao carregamento imposto.

Conforme os valores obtidos para  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , o tensor de tensões é atualizado através das suas componentes definidas na Equação 5.49. Nesta perspectiva, o gráfico da Figura 5.11 ilustra as tensões desenvolvidas no material, para este caso específico, evidenciando que a componente  $\sigma_{13}$  é nula devido ao ângulo  $\alpha$  adotado.

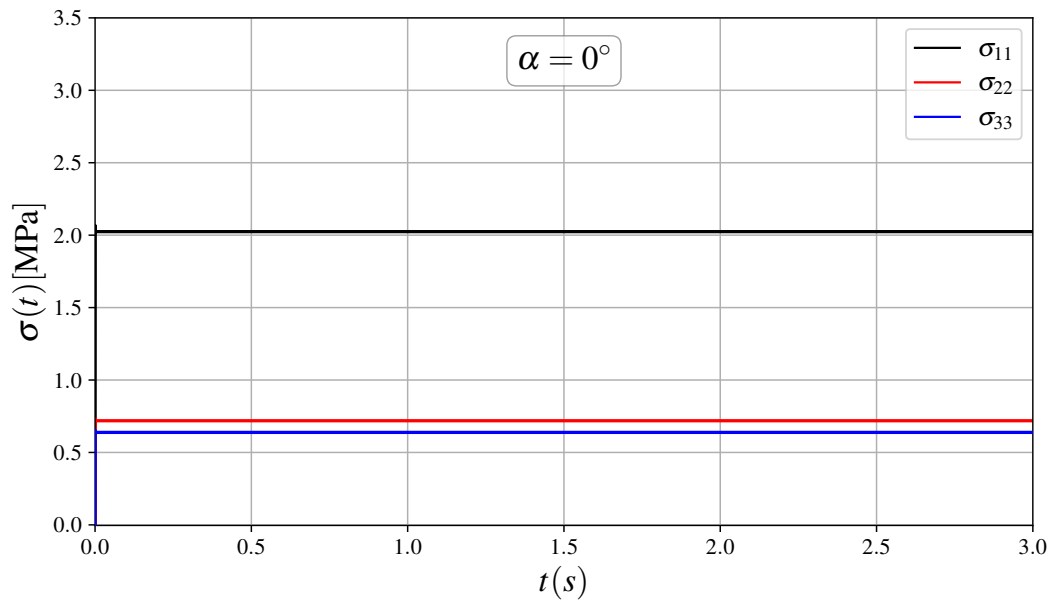


Figura 5.11 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \alpha = 0^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4}s.$$

No segundo exemplo adota-se uma deformação constante ilustrada pela Figura 5.3 e considera-se uma inclinação  $\alpha = 30^\circ$  para a Equação 5.47. A evolução do dano ilustrada pela Figura 5.12 é obtida empregando o raciocínio numérico da Figura 5.1 sobre a Equação 5.42. O critério desacoplado evidencia que para esta deformação não há evolução da componente  $\phi_1$ , explicitando uma maior dificuldade com relação a propagação da família  $\omega_1$ . A abordagem relativa ao critério acoplado mostra que nas mesmas condições ambas as componentes exibiram evolução.

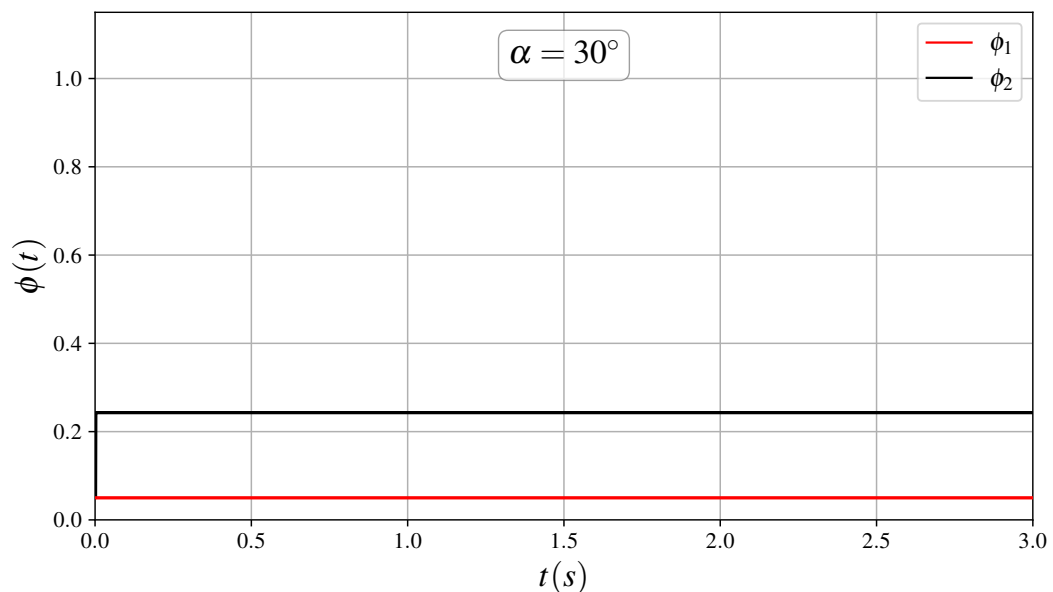


Figura 5.12 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \mathcal{F}_f^i = 40\text{J/m}^2; \alpha = 30^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4}s.$$

Convém ressaltar que para deformações  $\varepsilon_0$  maiores verifica-se a propagação de  $\phi_1$ , contudo, essa discussão será desenvolvida em um tópico específico que visa avaliar os efeitos da deformação aplicada. As componentes do tensor de tensões da Equação 5.49 são atualizadas conforme os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  previamente calculados e podem ser visualizadas através da Figura 5.13.

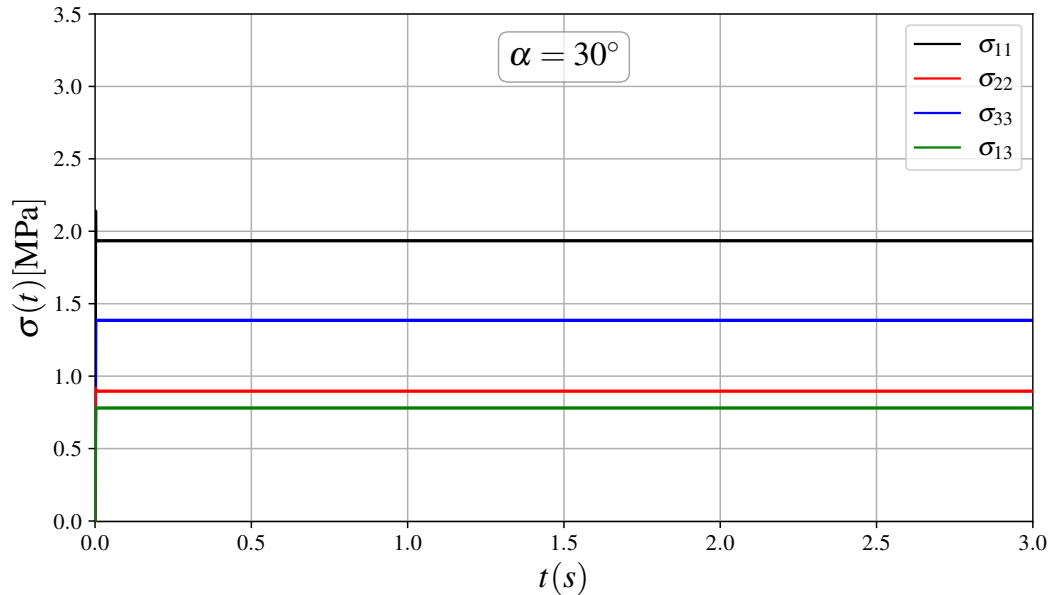


Figura 5.13 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \alpha = 30^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} s.$$

O último exemplo considera uma deformação constante admitindo um ângulo  $\alpha = 45^\circ$  para a Equação 5.47. Aplicando o processo da Figura 5.1, obtém-se a evolução do dano (Figura 5.14).

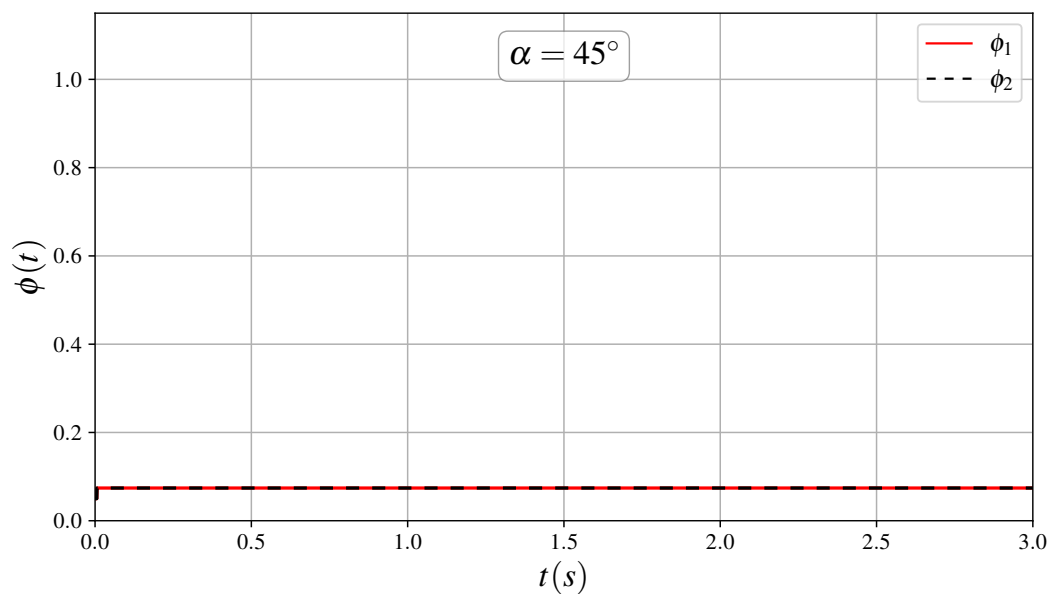


Figura 5.14 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \mathcal{F}_f^i = 40 \text{ J/m}^2; \alpha = 45^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} s.$$

Verifica-se que para estas condições de carregamento houve uma pequena propagação das componentes de dano, mantendo-se ligeiramente acima do valor de dano inicial. Tal fato evidencia uma dificuldade com relação a propagação de ambas as famílias de fraturas considerando um critério desacoplado. Em um tópico a frente será apresentada uma análise aplicando valores maiores de deformação  $\varepsilon_0$  ao material, visando evidenciar o fenômeno de propagação. As componentes do tensor de tensões da Equação 5.49 são atualizadas conforme os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  previamente calculados e podem ser visualizadas através da Figura 5.15.

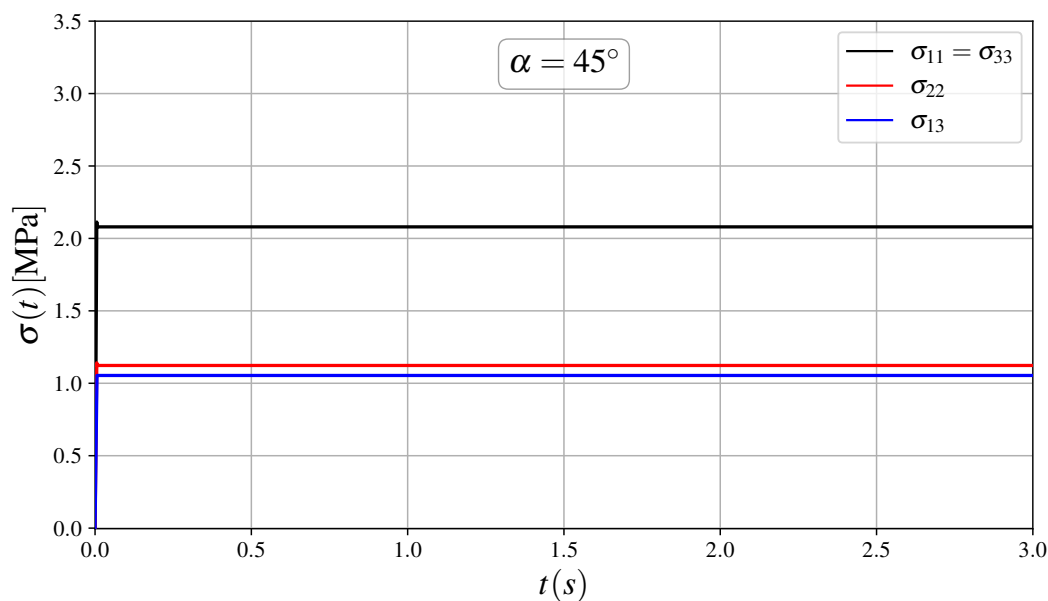


Figura 5.15 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \alpha = 45^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} s.$$

### 5.3.1.2 Análise dos efeitos da deformação $\varepsilon_0$

Com o intuito de ilustrar alguns comportamentos omitidos nas aplicações precedentes, relativas ao critério desacoplado, nesta subseção é proposta uma breve análise dos efeitos da deformação, visando aplicar maiores valores de  $\varepsilon_0$ . Como visto anteriormente na situação em que  $\alpha = 30^\circ$ , a formulação desacoplada não exibiu propagação da componente  $\phi_1$  do dano para o valor de deformação aplicado ( $\varepsilon_0 = 0,1\%$ ), diferentemente do que ocorreu ao utilizar o critério acoplado. Além disso, para uma inclinação de  $\alpha = 45^\circ$  o carregamento imposto causou apenas uma pequena propagação das componentes do dano, que mantiveram-se ligeiramente acima do seu valor inicial. Estes aspectos evidenciam uma maior dificuldade com relação a propagação ao utilizar uma formulação desacoplada se comparado aos resultados obtidos pelo critério acoplado.

A primeira abordagem proposta refere-se a um carregamento com inclinação  $\alpha = 30^\circ$ , na qual aplica-se uma deformação constante de  $\varepsilon_0 = 0,25\%$ . Um carregamento desta magnitude permite verificar que o critério desacoplado também leva a propagação da família  $\omega_1$ , como ilustra a

Figura 5.16. Em contrapartida, para deformações maiores percebe-se que a componente  $\phi_2$  do dano atinge um valor consideravelmente alto, se aproximando de 1,00 que é uma situação em que o material já está totalmente fraturado.

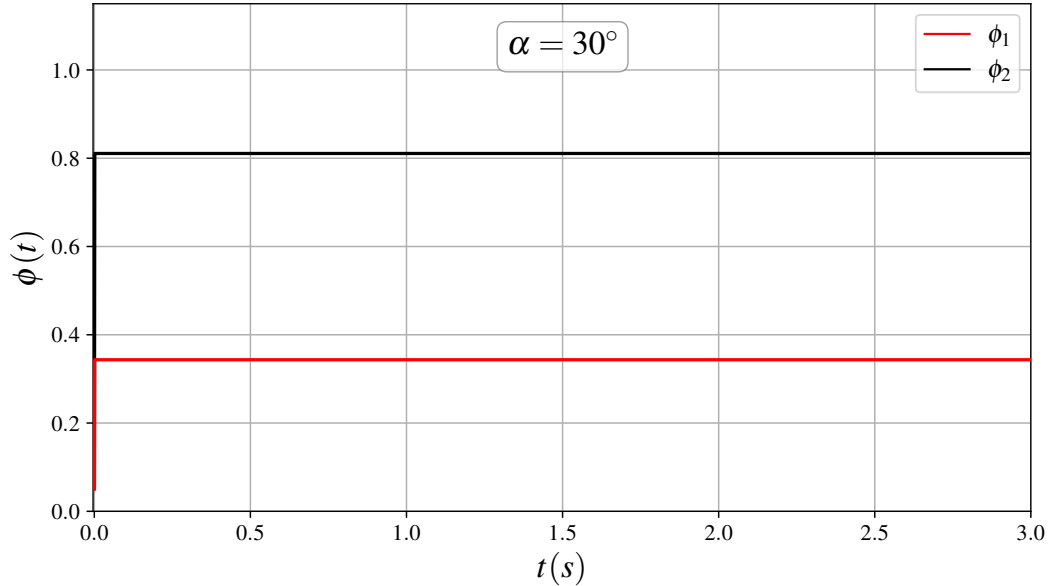


Figura 5.16 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \mathcal{F}_f^i = 40\text{J/m}^2; \alpha = 30^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4}\text{s}.$$

Na segunda abordagem pretende-se evidenciar a propagação de ambas as famílias para uma situação em que a deformação está inclinada a um ângulo  $\alpha = 45^\circ$ . Desta forma, verifica-se que uma deformação de  $\varepsilon_0 = 0,15\%$  possibilita visualizar melhor tal fenômeno (Figura 5.17).

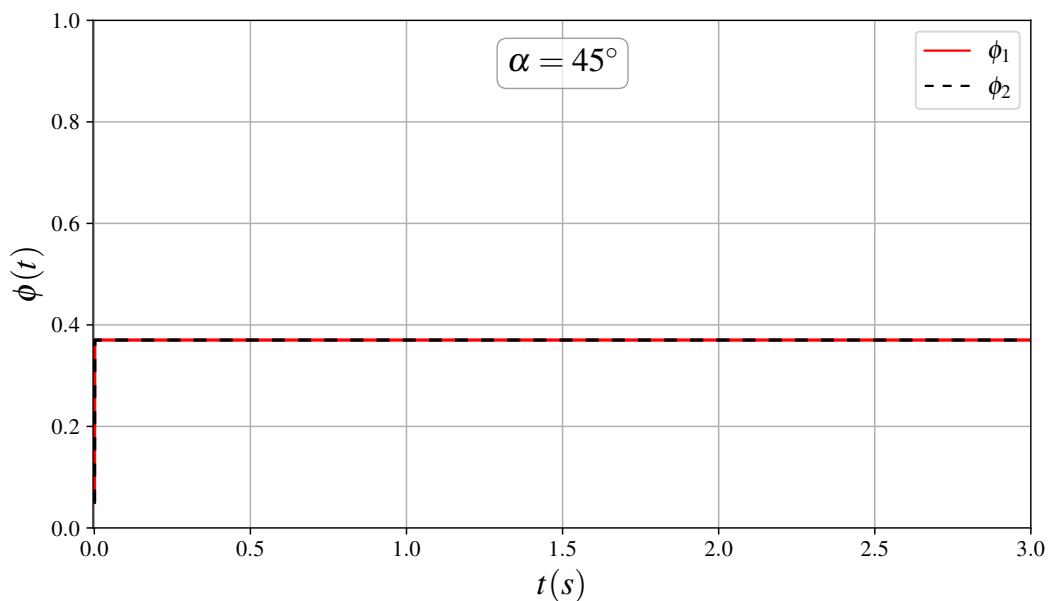


Figura 5.17 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \mathcal{F}_f^i = 40\text{J/m}^2; \alpha = 45^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4}\text{s}.$$



### 5.3.1.3 Deformação crescente

Nesta subseção desenvolvem-se exemplos numéricos a partir da aplicação de uma taxa de deformação constante  $\dot{\varepsilon}$  ao material, levando a uma deformação crescente matematicamente descrita por  $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}t$ . Assumindo uma taxa de  $\dot{\varepsilon} = 0,05\%$  para todas as aplicações subsequentes, o carregamento imposto fica ilustrado pela Figura 5.18.

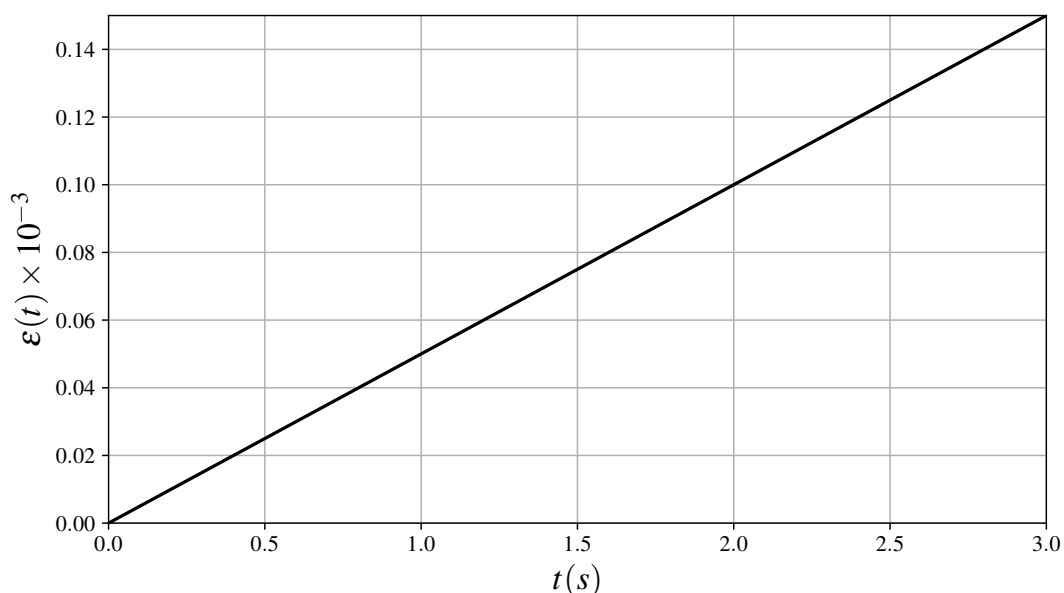


Figura 5.18 – Taxa de deformação constante imposta sobre o material

A análise subsequente consiste em variar a inclinação  $\alpha$  para definir a deformação macroscópica descrita pela Equação 5.47, com o  $\varepsilon(t)$  ilustrado pela Figura 5.18. Nesta perspectiva são desenvolvidos exemplos relativos as expressões particulares propostas para o critério de propagação de dano.

- **Primeiro caso particular: critério acoplado**

O objetivo desta etapa é empregar o critério acoplado da Equação 5.28 para obter a evolução do parâmetro de dano  $\phi$ . No primeiro exemplo admite-se um ângulo  $\alpha = 0^\circ$  para a expressão da Equação 5.47, considerando o carregamento ilustrado pela Figura 5.18. Tal inclinação leva a uma deformação normal a segunda família de fraturas  $\omega_2$ , portanto, a única componente não nula do tensor de deformações trata-se de  $\varepsilon_{11}$ . Aplicando o raciocínio numérico explicitado na Figura 5.1 sobre a expressão de  $\dot{\phi}$  da Equação 5.33, determina-se a evolução do dano (Figura 5.19). O gráfico abaixo evidencia que o início da propagação não ocorre no instante da aplicação do carregamento  $t = 0$ , mas sim quando a deformação atinge o seu valor crítico, ativando o critério de propagação ( $H = 0$ ). Observa-se também que o dano está fortemente relacionado a taxa de deformação aplicada, dado que o seu aumento condiciona um início de propagação mais rápido.

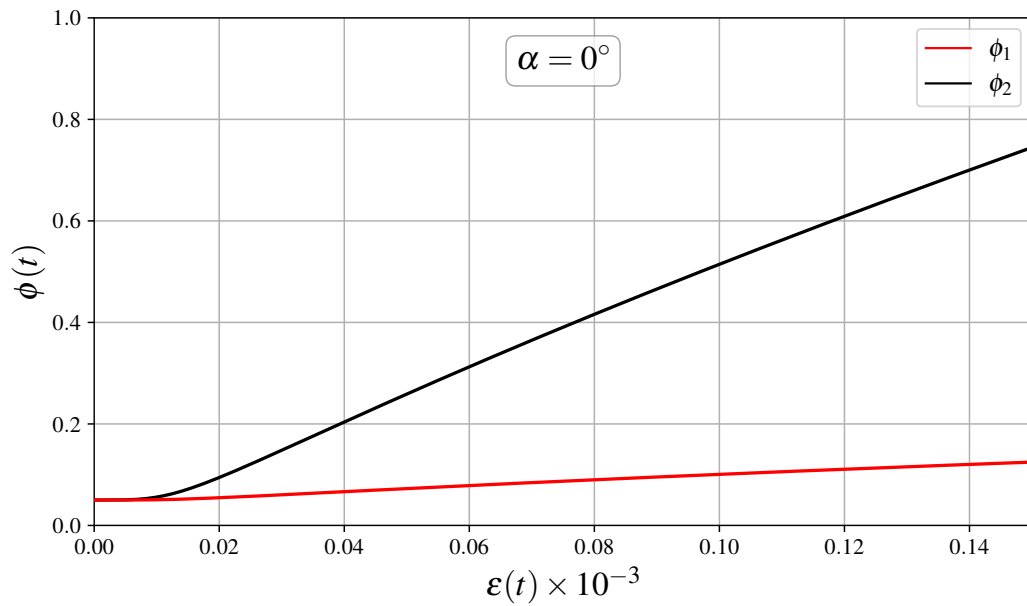


Figura 5.19 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \alpha = 0^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

A inclinação do carregamento (normal a família  $\omega_2$ ) justifica a evolução consideravelmente maior da componente  $\phi_2$  do dano em relação a  $\phi_1$ . Embora a deformação seja aplicada paralelamente a família  $\omega_1$ , por se tratar de uma formulação acoplada nota-se uma pequena evolução da componente  $\phi_1$ . As componentes das tensões descritas pela Equação 5.49 são atualizadas com os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  em cada instante de tempo e ilustradas pela Figura 5.20.

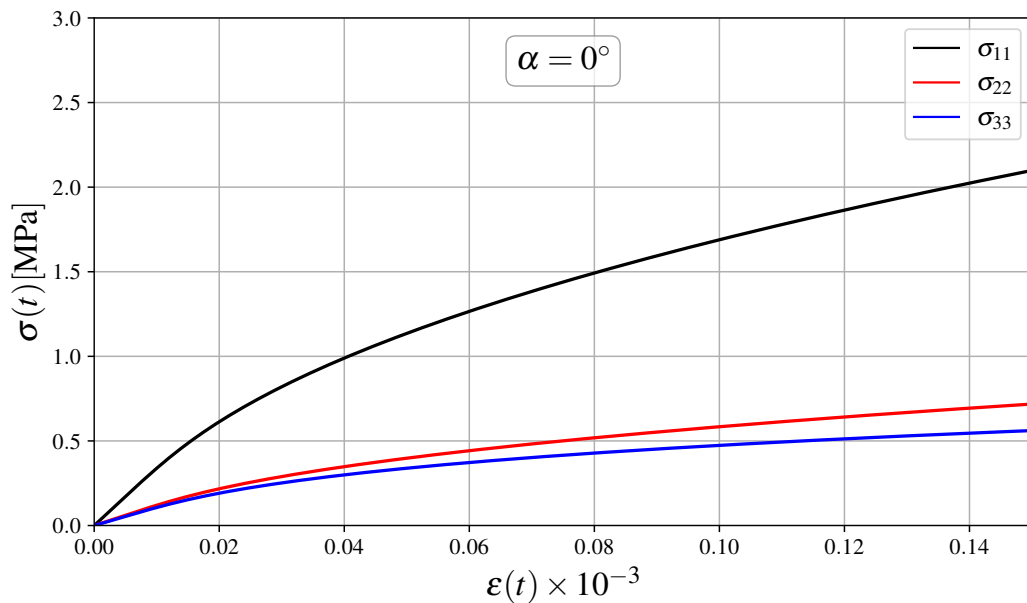


Figura 5.20 – Relação Tensão x Deformação

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \alpha = 0^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

No segundo exemplo adota-se uma inclinação  $\alpha = 30^\circ$  para o carregamento macroscópico da Equação 5.47, considerando a deformação ilustrada pela Figura 5.18. Empregando o raciocínio numérico da Figura 5.1 sobre a expressão de  $\dot{\phi}$  da Equação 5.33, determina-se a evolução do parâmetro de dano (Figura 5.21). Nesta configuração, a deformação condiciona uma maior influência sobre a família  $\omega_2$ , causando uma evolução mais rápida para a componente  $\phi_2$ . Caso fosse admitido um ângulo  $\alpha = 60^\circ$  o resultado obtido seria o oposto. Quanto as componentes da tensão (5.49), estas são atualizadas conforme os valores do dano em cada instante (Figura 5.22).

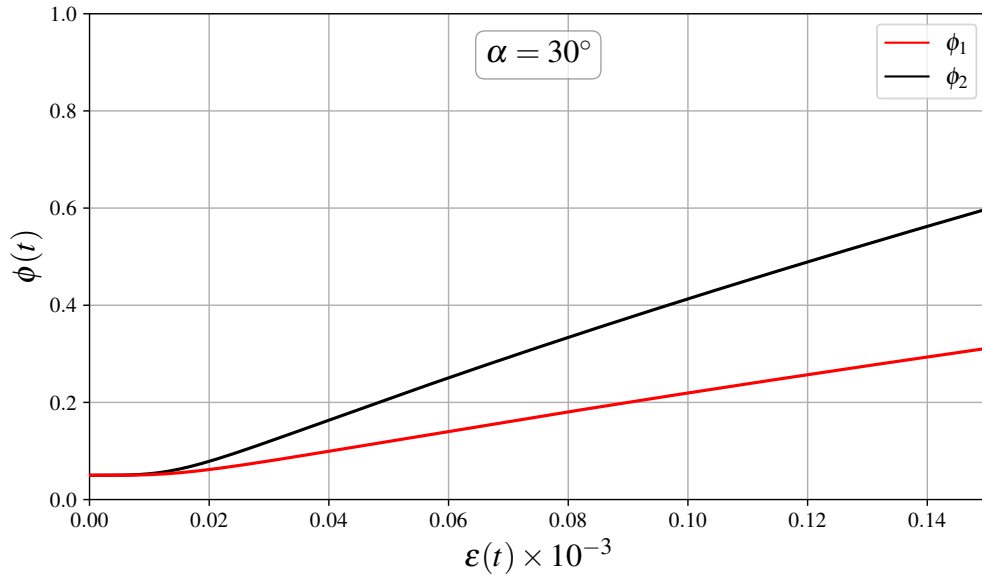


Figura 5.21 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \alpha = 30^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

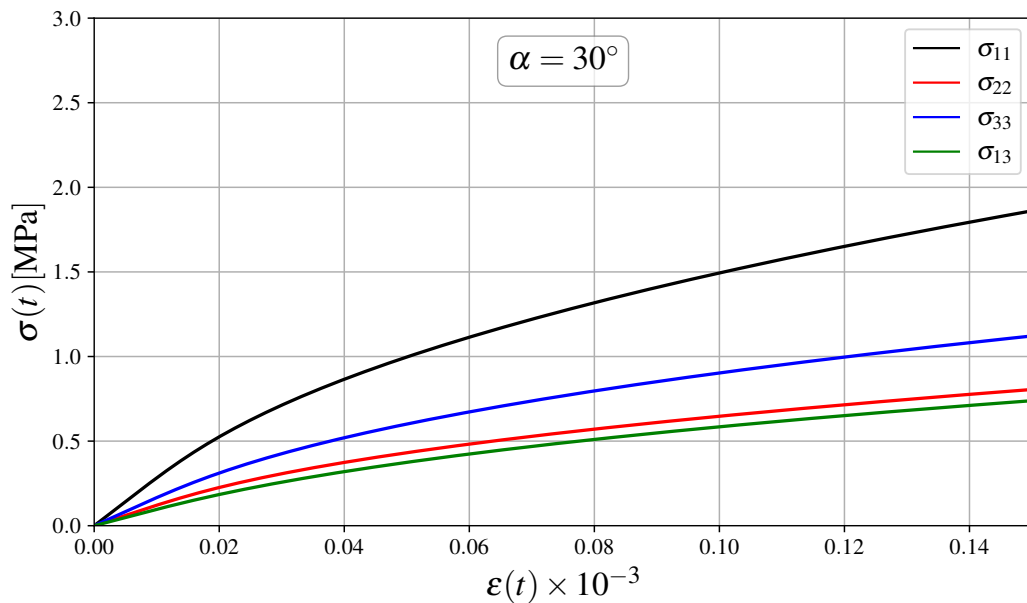


Figura 5.22 – Relação Tensão x Deformação

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \alpha = 30^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

No terceiro exemplo assume-se um ângulo  $\alpha = 45^\circ$  para a deformação (5.47) e a evolução do dano é obtida aplicando o processo numérico da Figura 5.1 sobre a Equação 5.33 (Figura 5.23).

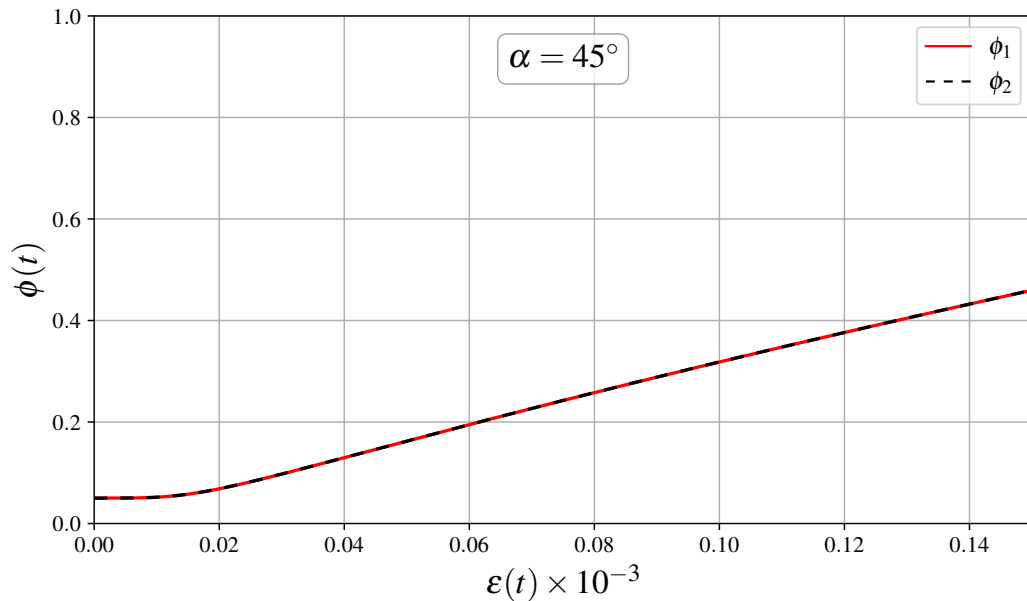


Figura 5.23 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \alpha = 45^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

Verifica-se que os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  estão sobrepostos, tal comportamento decorre do ângulo  $\alpha$  adotado e das propriedades idênticas assumidas para ambas as famílias de fraturas, caso contrário, este resultado não seria encontrado. Quanto as componentes da tensão (5.49), estas são atualizadas conforme os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  em cada instante (Figura 5.24).

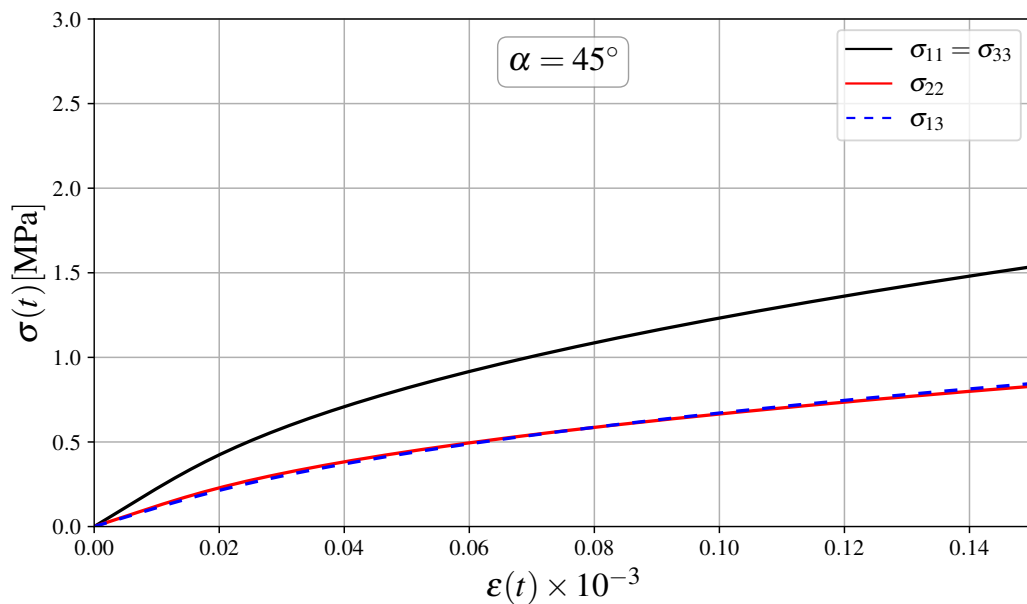


Figura 5.24 – Relação Tensão x Deformação

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \alpha = 45^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

Nos exemplos relativos ao critério acoplado nota-se que após a propagação as tensões continuam aumentando, embora sua taxa de variação diminua aos poucos. Tal comportamento também foi constatado para taxas de deformação maiores e provavelmente decorre das propriedades adotadas para as fraturas que são meramente ilustrativas.

• **Segundo caso particular: critério desacoplado**

A presente etapa visa desenvolver exemplos numéricos para avaliar a evolução do dano considerando o critério de propagação desacoplado da Equação 5.36. Na primeira aplicação assume um ângulo  $\alpha = 0^\circ$  para a expressão da Equação 5.47, considerando o carregamento ilustrado pela Figura 5.18. Tal inclinação condiciona uma deformação normal a segunda família de fraturas  $\omega_2$ , portanto, a única componente não nula do tensor de deformações é  $\varepsilon_{11}$ . Aplicando o raciocínio numérico explicitado na Figura 5.1 sobre a expressão de  $\dot{\phi}_i$  da Equação 5.42, obtém-se a evolução do dano (Figura 5.25).

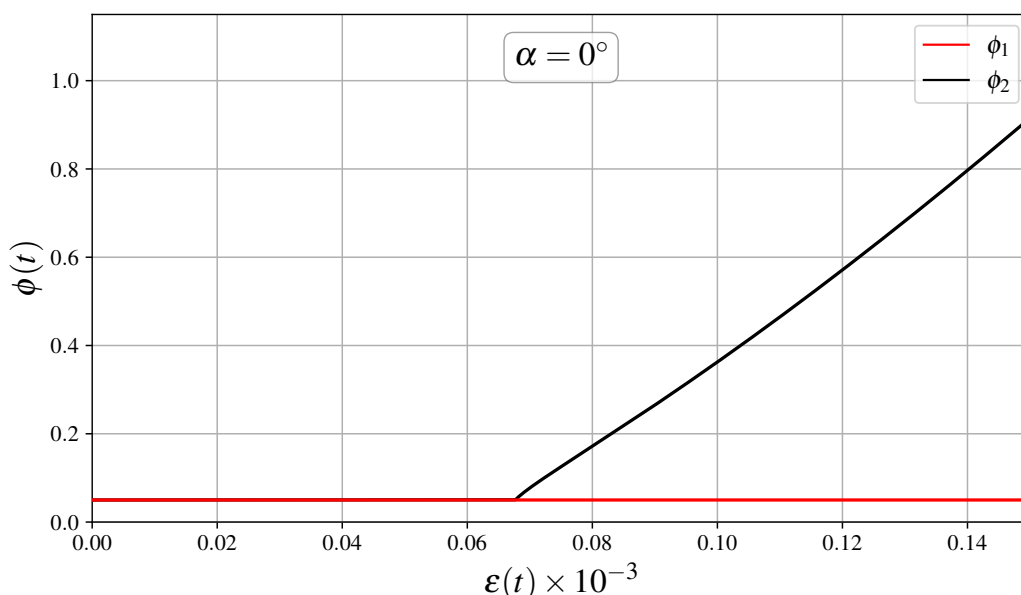


Figura 5.25 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \quad \mathcal{N}_i = 1; \quad \mathcal{F}_f^i = 40\text{J/m}^2; \quad \alpha = 0^\circ; \quad \Delta t = 1 \times 10^{-4}\text{s}.$$

Por se tratar de um critério desacoplado a deformação (normal a segunda família) só induz propagação a componente  $\phi_2$  do dano, enquanto  $\phi_1$  não evolui, mantendo-se com o valor de dano inicial. Diante disso, evidencia-se a principal diferença deste caso particular quando comparado ao critério de propagação acoplado, no qual para as mesmas circunstâncias havia uma pequena evolução para a componente  $\phi_1$ , relativa a família  $\omega_1$  paralela ao carregamento imposto. Conforme os valores obtidos para  $\phi_1$  e  $\phi_2$  em cada instante, o tensor de tensões é atualizado através das suas componentes definidas na Equação 5.49. Nesta perspectiva, o gráfico da Figura 5.26 ilustra as tensões desenvolvidas no material para este caso específico, evidenciando que a componente  $\sigma_{13}$  do tensor de tensões é nula devido ao ângulo  $\alpha$  adotado.

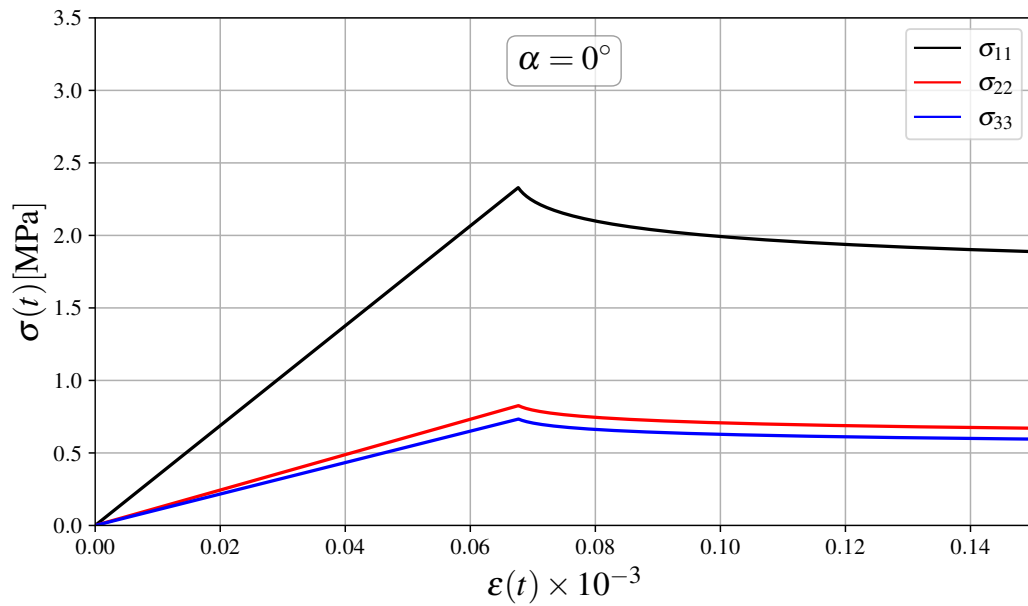


Figura 5.26 – Relação Tensão x Deformação

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \alpha = 0^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} s.$$

No segundo exemplo admite-se uma deformação constante ilustrada pela Figura 5.18 considerando uma inclinação  $\alpha = 30^\circ$  para a Equação 5.47. A evolução do dano ilustrada pela Figura 5.27 é obtida aplicando o procedimento da Figura 5.1 sobre a Equação 5.42. O critério desacoplado evidencia que para esta taxa de deformação não há evolução da componente  $\phi_1$  do dano, explicitando uma maior dificuldade com relação a propagação da família  $\omega_1$ . Na mesma situação descrita pelo critério acoplado ambas as componentes exibiram evolução.

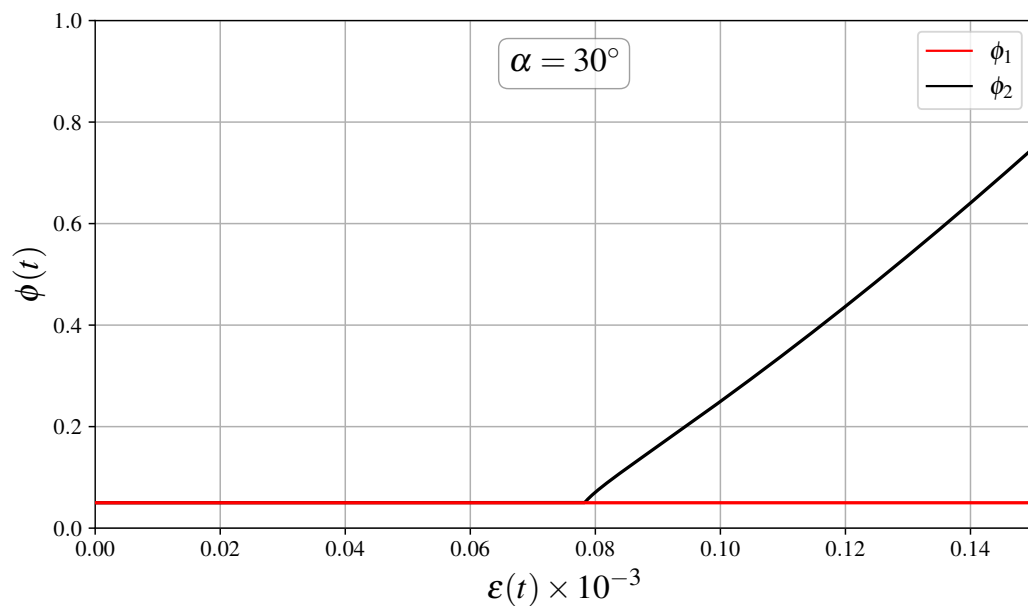


Figura 5.27 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \mathcal{F}_f^i = 40 \text{ J/m}^2; \alpha = 30^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} s.$$

Para taxas de deformação  $\dot{\epsilon}$  maiores verifica-se a propagação de  $\phi_1$ , contudo essa discussão será desenvolvida em um tópico específico que visa avaliar os efeitos da taxa de deformação aplicada. As componentes do tensor de tensões da Equação 5.49 são atualizadas conforme os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  previamente calculados e podem ser visualizadas através da Figura 5.28.

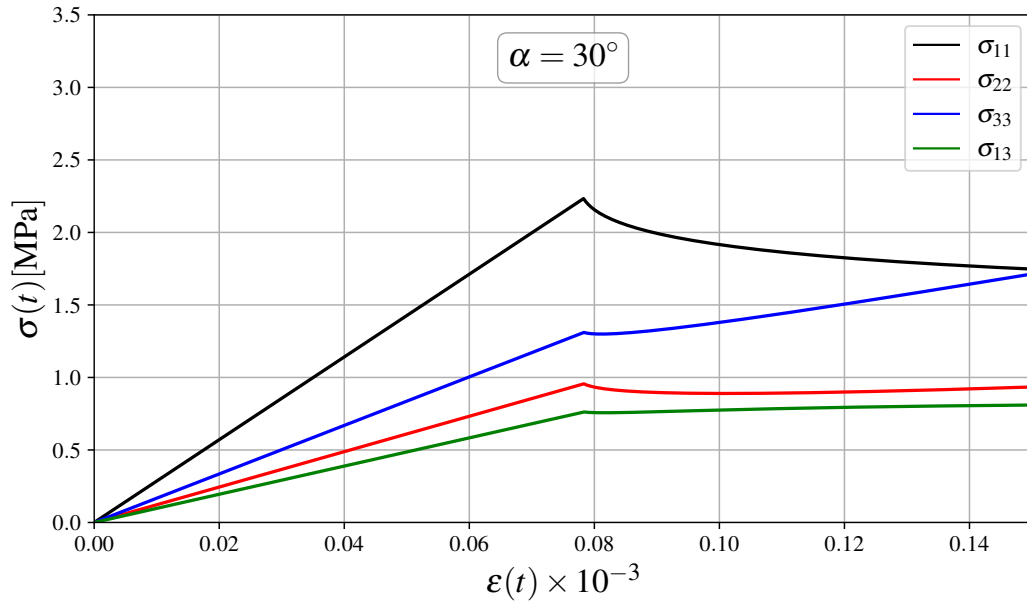


Figura 5.28 – Relação Tensão x Deformação

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \alpha = 30^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} s.$$

O último exemplo considera uma deformação constante admitindo um ângulo  $\alpha = 45^\circ$  para a Equação 5.47. Aplicando o processo da Figura 5.1, obtém-se a evolução do dano (Figura 5.29).

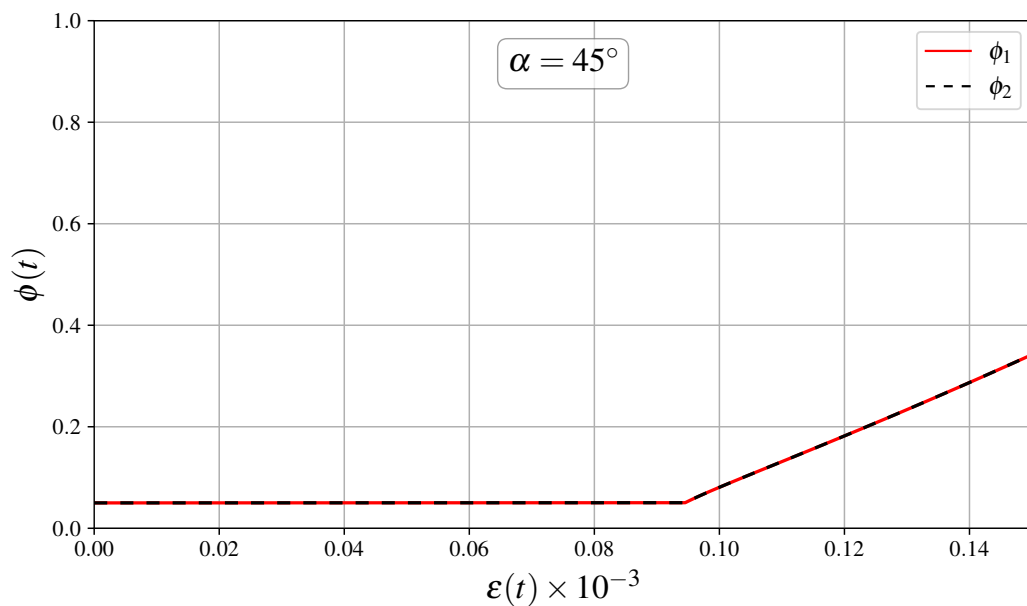


Figura 5.29 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \mathcal{F}_f^i = 40 \text{ J/m}^2; \alpha = 45^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} s.$$

Como pode-se observar no gráfico acima, os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  estão sobrepostos, tal comportamento decorre do ângulo  $\alpha$  adotado e das propriedades idênticas assumidas para ambas as famílias de fraturas, caso contrário, este resultado não seria encontrado. Além disso, evidencia-se uma maior dificuldade com relação a propagação de ambas as famílias quando comparado aos resultados obtidos pelo critério acoplado, no qual o início da evolução ocorre já nos instantes iniciais. As componentes do tensor de tensões da Equação 5.49 ilustradas Figura 5.30 pela são atualizadas conforme os valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  previamente calculados.

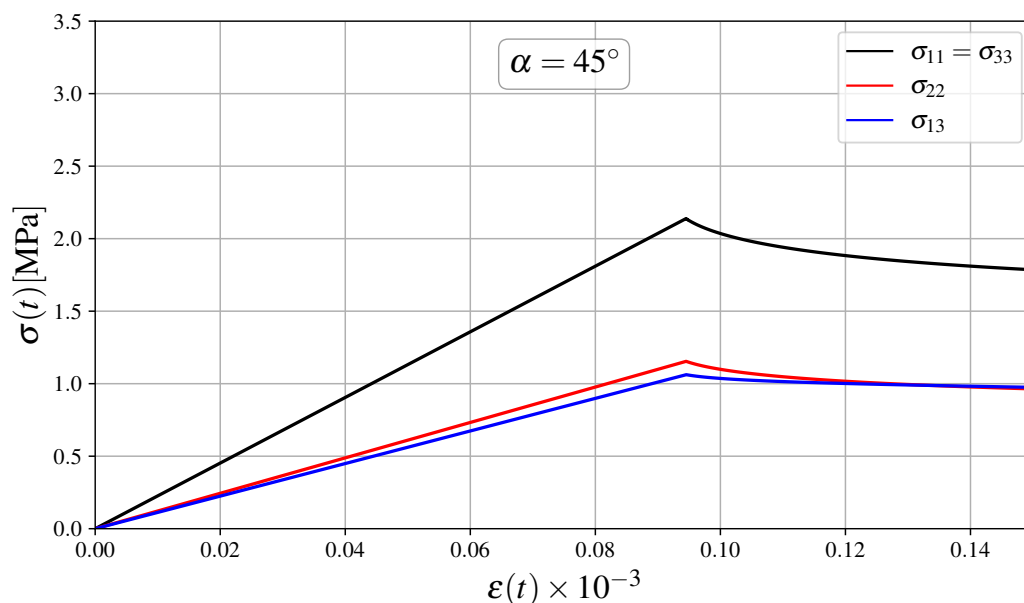


Figura 5.30 – Relação Tensão x Deformação

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \alpha = 45^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4} s.$$

Nos exemplos desenvolvidos utilizando uma formulação desacoplada percebe-se que após o início da propagação as tensões tendem a diminuir, o que corresponde a um fenômeno de amolecimento do material. Tal comportamento já havia sido evidenciado nas aplicações referentes a uma única família e ao caso de uma distribuição isotrópica de fraturas.

#### 5.3.1.4 Solicitação definida por uma taxa de deformação constante $\dot{\epsilon}$

Com o objetivo de ilustrar um comportamento omitido nas aplicações precedentes, relativo ao critério desacoplado, propõe-se uma breve análise acerca dos efeitos da taxa de deformação  $\dot{\epsilon}$  aplicada. Como visto anteriormente, na configuração descrita pelo ângulo de  $\alpha = 30^\circ$ , a formulação desacoplada não exibiu a propagação da componente  $\phi_1$  do dano para a taxa de deformação aplicada, diferentemente do que ocorreu ao utilizar o critério acoplado. Em virtude de evidenciar que a formulação desacoplada também leva a propagação da primeira família a depender da magnitude do carregamento imposto, adota-se uma taxa de deformação constante de  $\dot{\epsilon} = 0,1\%$  para obter a evolução do dano conforme ilustra a Figura 5.31. Contudo, ao



analisar o gráfico percebe-se que a situação ilustrada não condiz com a realidade, uma vez que a componente  $\phi_2$  do dano iria atingir valores superiores a 1,00, que retrata um estado no qual o material já está totalmente fraturado. Portanto, o ideal é finalizar a simulação numérica antes de ocorrer a propagação da componente  $\phi_1$ , especificamente na linha tracejada do gráfico.

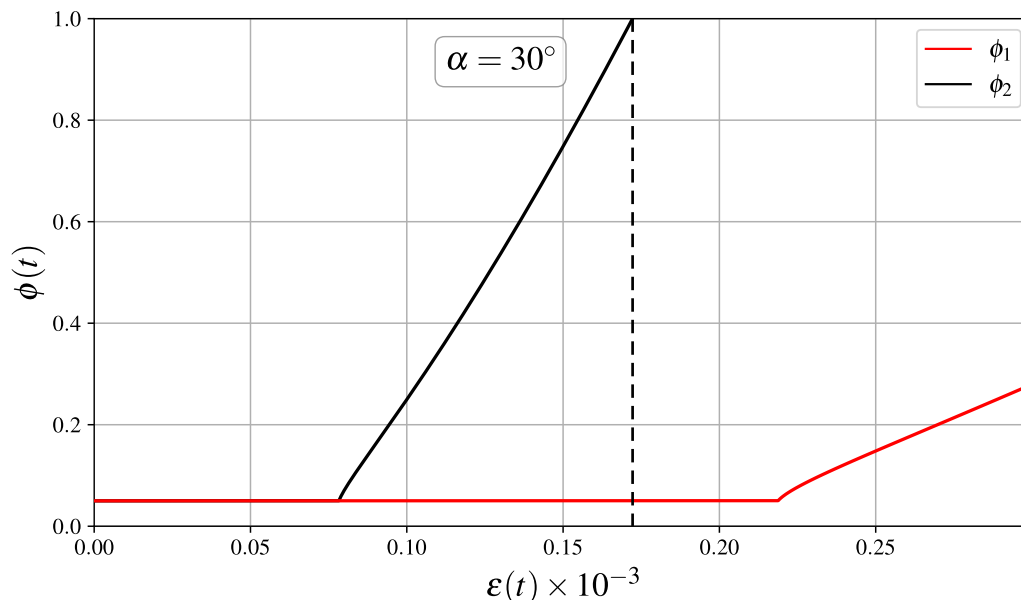


Figura 5.31 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ )

$$\phi_i^0 = 0,05; \mathcal{N}_i = 1; \mathcal{F}_f^i = 40\text{J/m}^2; \alpha = 30^\circ; \Delta t = 1 \times 10^{-4}\text{s}.$$

### 5.3.1.5 Principais conclusões das aplicações numéricas

Nesta subseção é dada maior ênfase às particularidades das duas formulações propostas para o critério de propagação. No decorrer dos exemplos numéricos é demonstrado que para um critério acoplado o início da propagação ocorrerá no mesmo instante para todas as famílias, enquanto no critério desacoplado a evolução do dano é calculada de forma independente para cada família, condicionando instantes distintos para o início da propagação. As aplicações também permitem visualizar que a inclinação do carregamento influencia fortemente os resultados, independente da forma adotada para o critério. Por exemplo, na formulação acoplada um carregamento aplicado paralelamente a uma família de fraturas também causa evolução da componente de dano associada a esta família, embora seja uma evolução relativamente pequena. Em contrapartida, o critério desacoplado evidencia que um carregamento paralelo a uma das famílias não induz o dano a componente associada a esta, além de que se constata uma dificuldade com relação a propagação de dano a depender da inclinação adotada para o carregamento. Por fim, destaca-se que neste trabalho são apenas propostas duas formas distintas para o critério de propagação  $H(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi}) \leq 0$ , entretanto, evidencia-se que a escolha do critério e do potencial de dano  $G(\underline{\mathcal{F}}, \underline{\phi})$  deve ser feita de forma que o modelo se ajuste adequadamente aos dados experimentais disponíveis.

### 5.3.2 Configurações aproximadas para o problema de uma distribuição isotrópica de fraturas sob carregamento uniaxial

A presente subseção consiste em abordar a situação em que uma deformação macroscópica uniaxial é aplicada sobre um material com uma distribuição isotrópica de microfaturas. Embora este problema tenha sido resolvido no final do Capítulo 4 é conveniente enfatizar que aquela abordagem não é a ideal para representar fisicamente o problema, uma vez que considera o dano igual em todas as direções. Em outras palavras, mesmo que inicialmente as fraturas estejam aleatoriamente distribuídas na matriz, a aplicação de um carregamento macroscópico em uma direção específica irá induzir o dano anisotrópico ao material em algum momento. Diante disso, o objetivo principal desta subseção é propor formas aproximadas que sejam fisicamente representativas para resolver tal problemática.

Como já visto na subseção 3.3.3 é possível aproximar o comportamento homogeneizado de um material com uma distribuição isotrópica de fraturas simplesmente aumentando o número de famílias distribuídas na matriz sólida. Partindo dos resultados prévios da etapa de homogeneização, a aproximação proposta para avaliar a evolução do dano é ilustrada pelo esquema da Figura 5.32.

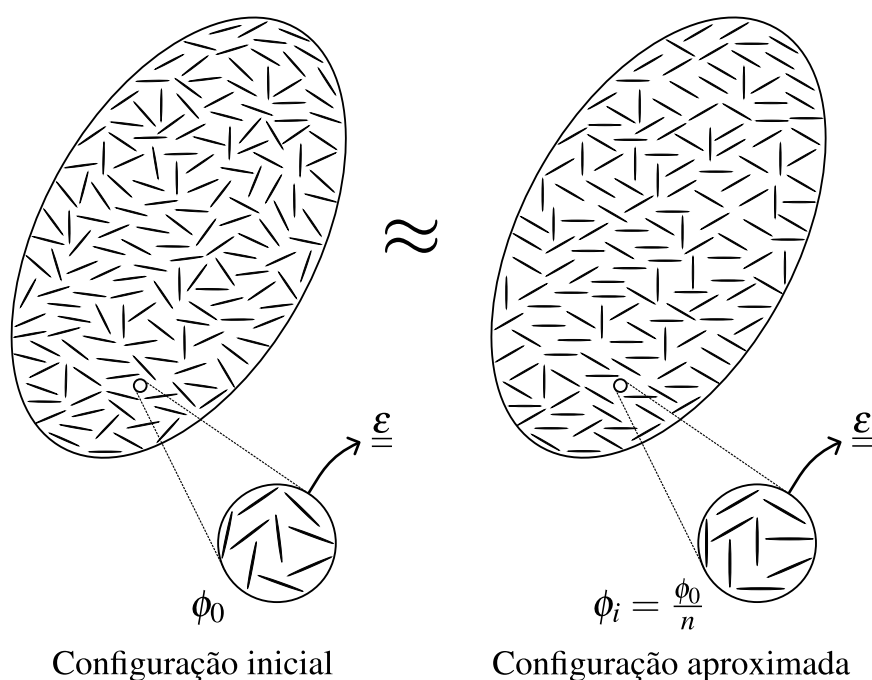


Figura 5.32 – Esquema do modelo aproximado

O esquema ilustra que o problema real definido pela aplicação de uma deformação uniaxial a um material com uma distribuição isotrópica de fraturas (configuração inicial) será aproximado por um material com  $n$  famílias de fraturas nas mesmas condições de carregamento. A análise subsequente é desenvolvida considerando que o parâmetro de dano inicial  $\phi_0$  e o número de

fraturas por unidade volumétrica  $\mathcal{N}$  referentes a distribuição isotrópica tratam-se da soma destas quantidades na configuração aproximada:  $\phi_0 = \sum_{i=1}^n \phi_i$  e  $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^n \mathcal{N}_i$ . As aproximações propostas tratam-se de considerar uma matriz sólida homogênea com três famílias e nove famílias de microfraturas para avaliar a evolução do dano. Referindo-se a uma base ortonormal cartesiana fixa  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , a orientação de cada família é prescrita por duas coordenadas esféricas angulares  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , segundo o vetor:

$$\underline{n}_i = \sin \theta \cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \underline{e}_2 + \cos \theta \underline{e}_3 \quad (5.52)$$

O carregamento macroscópico é definido, para todas as aplicações subsequentes, por uma deformação uniaxial matematicamente descrita por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon(t) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (5.53)$$

com  $\varepsilon(t)$  dado em cada caso específico. Diante da deformação imposta, o tensor de tensões desenvolvido nos materiais apresenta a seguinte forma descrita pela Equação 5.54.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad \text{com} \quad \begin{cases} \sigma_{11} = C_{1133} \varepsilon_{33} = C_{1133}(\underline{\phi}) \varepsilon(t) \\ \sigma_{22} = C_{2233} \varepsilon_{33} = C_{2233}(\underline{\phi}) \varepsilon(t) \\ \sigma_{33} = C_{3333} \varepsilon_{33} = C_{3333}(\underline{\phi}) \varepsilon(t) \end{cases} \quad (5.54)$$

Análogo aos exemplos numéricos precedentes assumem-se duas formas distintas para  $\varepsilon(t)$ , definidas por uma deformação constante e por uma deformação crescente. Para avaliar a evolução do parâmetro de dano  $\underline{\phi}$  nestes casos particulares emprega-se o critério de propagação acoplado da Equação 5.28. Na parte final desta subseção são ilustradas comparações entre as aproximações sugeridas ao longo do trabalho para o problema de uma distribuição isotrópica de fraturas.

### 5.3.2.1 Configuração descrita por três famílias de microfraturas

A presente situação consiste em considerar uma matriz sólida com três famílias de microfraturas perpendiculares entre si, cuja orientação é definida pelo vetor normal  $\underline{n}_i$  da Equação 5.52 com as coordenadas esféricas angulares indicadas na Equação 5.55.

$$\begin{cases} \text{Família } \omega_1 : (\theta, \varphi) = (0^\circ, 0^\circ) & \Rightarrow \underline{n}_1 = \underline{e}_3 \\ \text{Família } \omega_2 : (\theta, \varphi) = (90^\circ, 0^\circ) & \Rightarrow \underline{n}_2 = \underline{e}_1 \\ \text{Família } \omega_3 : (\theta, \varphi) = (90^\circ, 90^\circ) & \Rightarrow \underline{n}_3 = \underline{e}_2 \end{cases} \quad (5.55)$$

Para iniciar o estudo da propagação de dano aplica-se uma deformação macroscópica constante ao material, escrita na forma da Equação 5.53, e ilustrada pela Figura 5.33, com  $\varepsilon_0 = 0,10\%c$ :

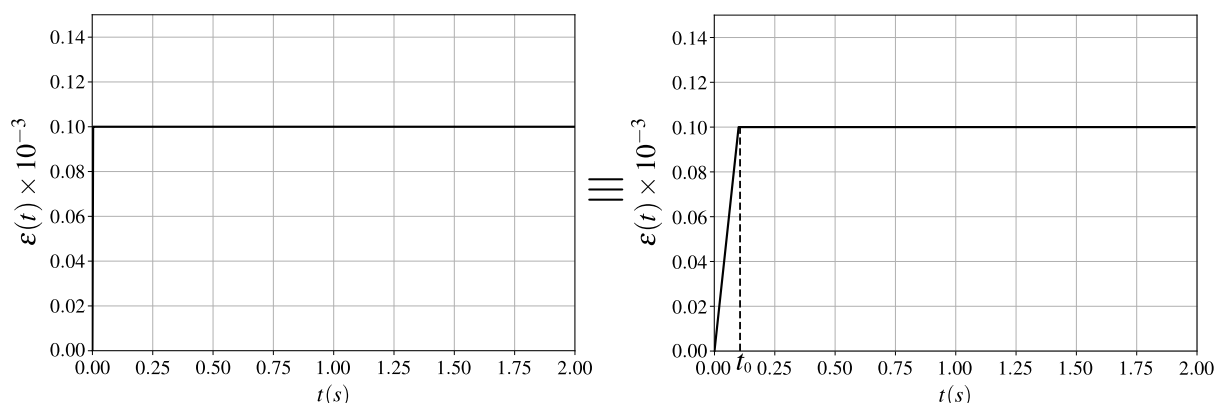


Figura 5.33 – Deformação constante imposta ao corpo de prova

sendo  $t_0$  um tempo inicial muito pequeno para que exista a equivalência ilustrada acima. Baseando-se no critério de propagação acoplado e resolvendo a Equação 5.33 numericamente de forma incremental, conforme o procedimento da Figura 5.1, obtém-se a evolução do parâmetro de dano ilustrada pela Figura 5.34. Considerando que as famílias de fraturas  $\omega_2$  e  $\omega_3$  estão inclinadas a  $\theta = 90^\circ$  destaca-se que a deformação é aplicada paralelamente a estas famílias. Por essa razão a evolução das componentes  $\phi_2$  e  $\phi_3$  são iguais e relativamente pequenas quando comparadas a componente  $\phi_1$  que está relacionada a família normal ao carregamento imposto.

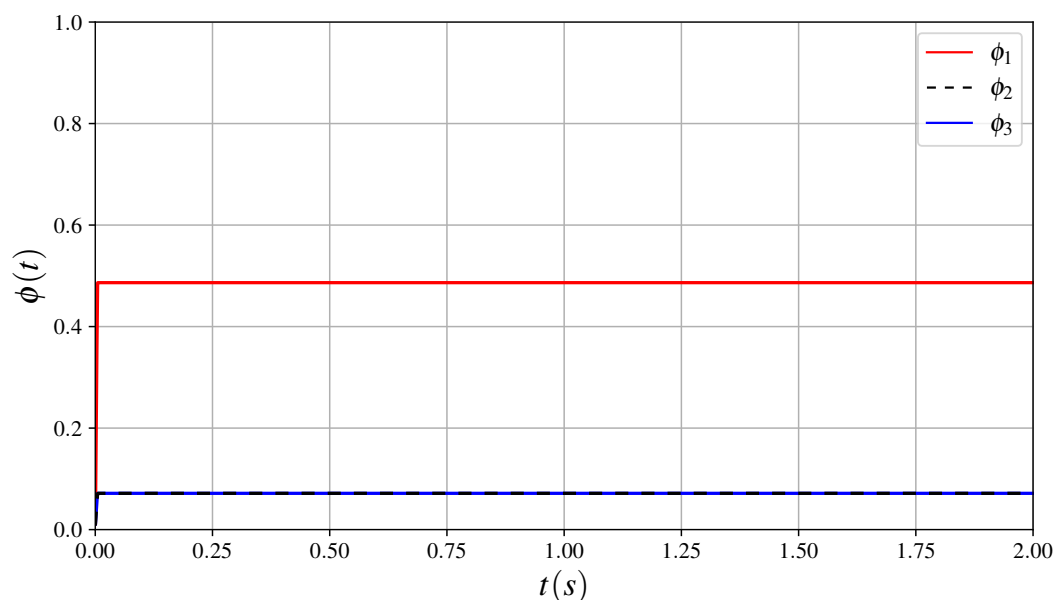


Figura 5.34 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ )

$$\phi_i^0 = 0,01; \quad \mathcal{N}_i = 1; \quad \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \quad \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \quad \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

Partindo dos valores previamente calculados para o parâmetro  $\underline{\phi}$  atualiza-se o tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$  através das suas componentes descritas pela Equação 5.54, conforme ilustra a Figura 5.35.

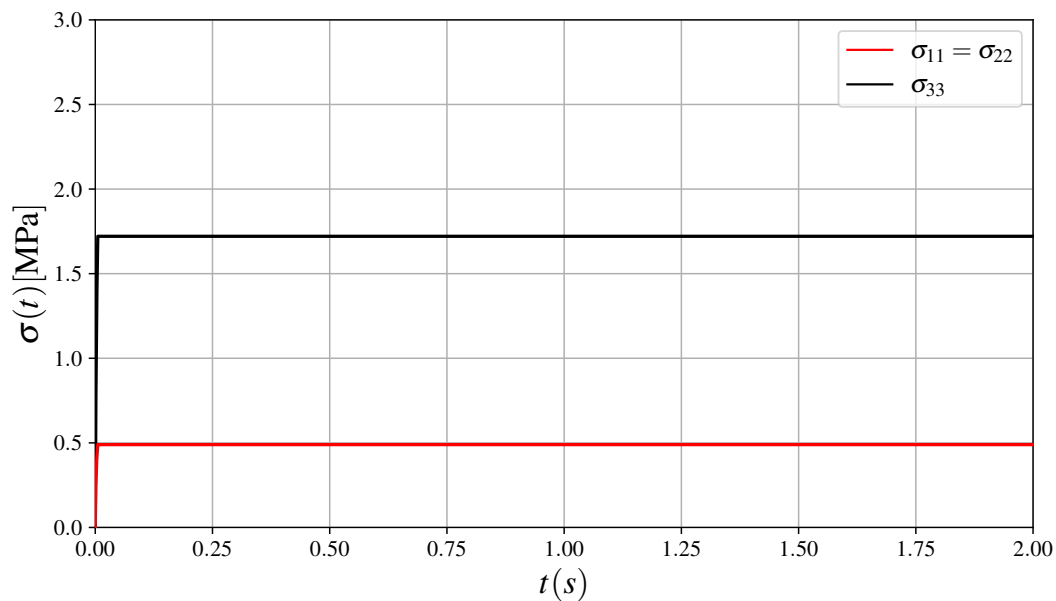


Figura 5.35 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_i^0 = 0,01; \mathcal{N}_i = 1; \Delta t = 1 \times 10^{-4} s.$$

Na segunda parte desta subseção apresentam-se exemplos numéricos que consistem em aplicar uma deformação crescente ao material, ilustrada pela Figura 5.36, com  $\dot{\epsilon} = 0,05\%$ .

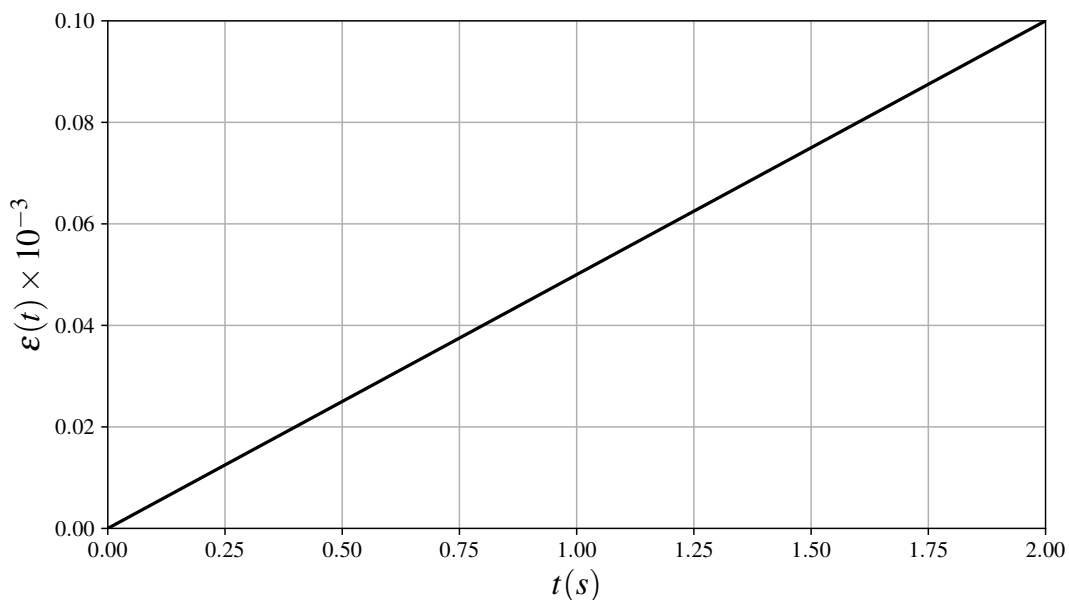


Figura 5.36 – Deformação imposta ao corpo de prova

Considerando o critério de propagação acoplado e aplicando o raciocínio numérico incremental da Figura 5.1 sobre a Equação 5.33 calcula-se a evolução do parâmetro de dano, como ilustra a Figura 5.37.

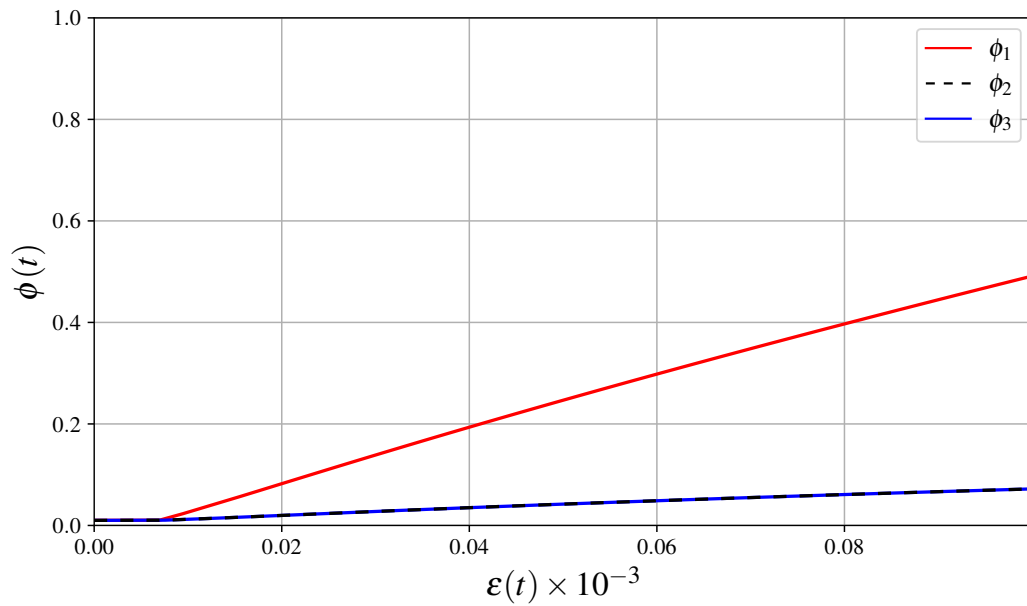


Figura 5.37 – Evolução do parâmetro de dano (Componentes  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ )

$$\phi_i^0 = 0,01; \mathcal{N}_i = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

De forma similar ao exemplo precedente, percebe-se que as componentes  $\phi_2$  e  $\phi_3$  do dano relativas às famílias paralelas à deformação imposta exibiram uma pequena evolução quando comparadas a componente  $\phi_1$  relacionada a família normal ao carregamento. As componentes do tensor de tensões escritas na forma da Equação 5.54 são atualizadas conforme os valores das componentes do parâmetro  $\underline{\phi}$  previamente calculadas (Figura 5.38).

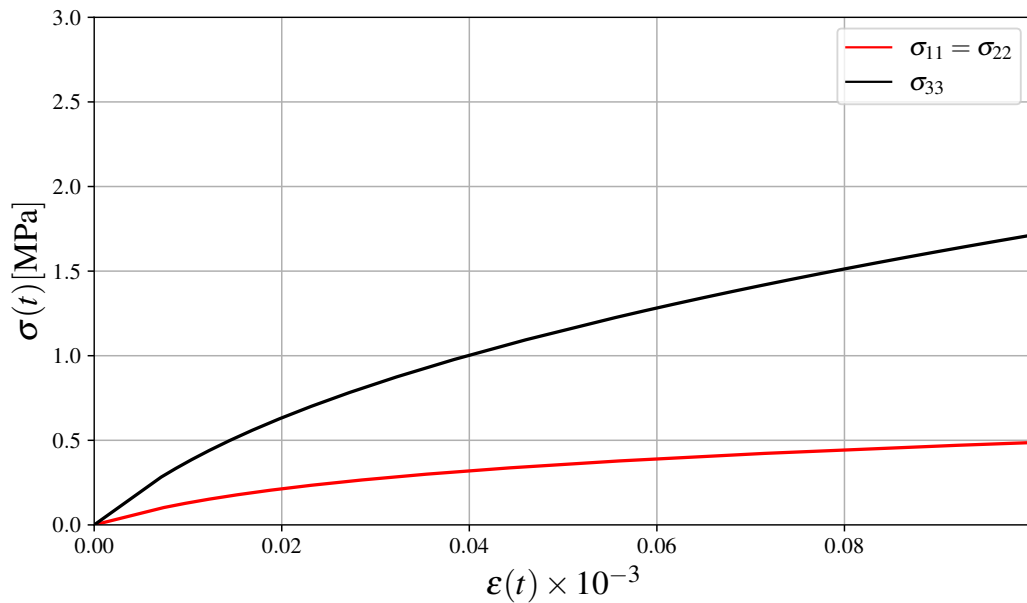


Figura 5.38 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_i^0 = 0,01; \mathcal{N}_i = 1; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

### 5.3.2.2 Configuração descrita por nove famílias de microfraturas

A última configuração do material é descrita por uma matriz sólida com nove famílias de microfraturas, cuja orientação é definida pelo vetor normal  $\underline{n}_i$  da Equação 5.52 com as coordenadas esféricas angulares indicadas na Equação 5.56.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Família } \omega_1 : (\theta, \varphi) = (0^\circ, 0^\circ) \Rightarrow \underline{n}_1 = \underline{e}_3 \\ \text{Família } \omega_2 : (\theta, \varphi) = (90^\circ, 0^\circ) \Rightarrow \underline{n}_2 = \underline{e}_1 \\ \text{Família } \omega_3 : (\theta, \varphi) = (90^\circ, 90^\circ) \Rightarrow \underline{n}_3 = \underline{e}_2 \\ \text{Família } \omega_4 : (\theta, \varphi) = (90^\circ, 45^\circ) \Rightarrow \underline{n}_4 = \frac{(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)}{\sqrt{2}} \\ \text{Família } \omega_5 : (\theta, \varphi) = (45^\circ, 90^\circ) \Rightarrow \underline{n}_5 = \frac{(\underline{e}_2 + \underline{e}_3)}{\sqrt{2}} \\ \text{Família } \omega_6 : (\theta, \varphi) = (45^\circ, 0^\circ) \Rightarrow \underline{n}_6 = \frac{(\underline{e}_1 + \underline{e}_3)}{\sqrt{2}} \\ \text{Família } \omega_7 : (\theta, \varphi) = (90^\circ, 135^\circ) \Rightarrow \underline{n}_7 = \frac{(\underline{e}_2 - \underline{e}_1)}{\sqrt{2}} \\ \text{Família } \omega_8 : (\theta, \varphi) = (135^\circ, 90^\circ) \Rightarrow \underline{n}_8 = \frac{(\underline{e}_2 - \underline{e}_3)}{\sqrt{2}} \\ \text{Família } \omega_9 : (\theta, \varphi) = (135^\circ, 0^\circ) \Rightarrow \underline{n}_9 = \frac{(\underline{e}_1 - \underline{e}_3)}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \quad (5.56)$$

As primeiras aplicações consistem em aplicar uma deformação macroscópica constante ao material, escrita na forma da Equação 5.53, e ilustrada pela Figura 5.39, com  $\varepsilon_0 = 0,10\%$ :

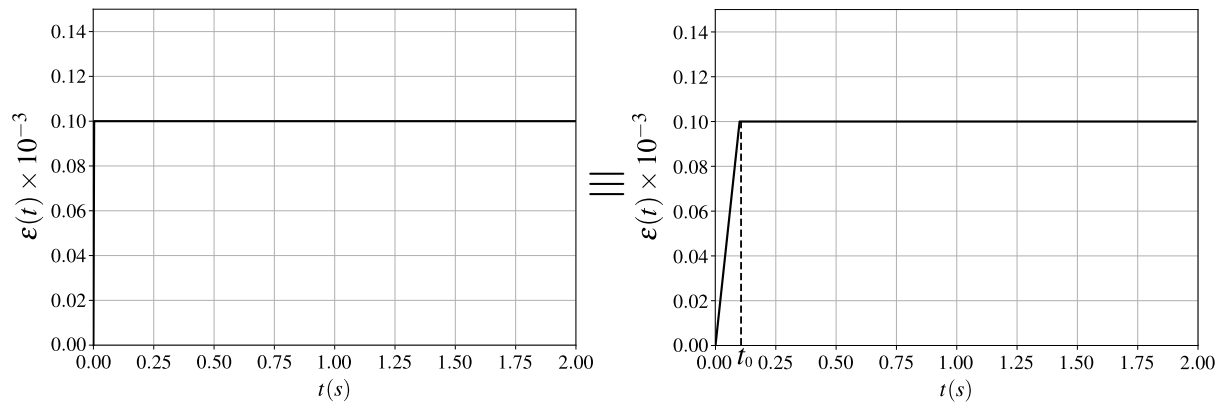


Figura 5.39 – Deformação constante imposta ao corpo de prova

sendo  $t_0$  um tempo inicial muito pequeno para que exista a equivalência ilustrada acima. Partindo do critério de propagação acoplado e aplicando o raciocínio numérico da Figura 5.1 sobre a Equação 5.33 calcula-se a evolução do parâmetro de dano, ilustrada pela Figura 5.40. No gráfico apresentado, observa-se que as componentes do vetor de dano  $\phi_2, \phi_3, \phi_4$  e  $\phi_7$  que correspondem às famílias de fraturas paralelas à deformação imposta, possuem valores iguais e exibem uma pequena evolução em comparação às demais componentes.

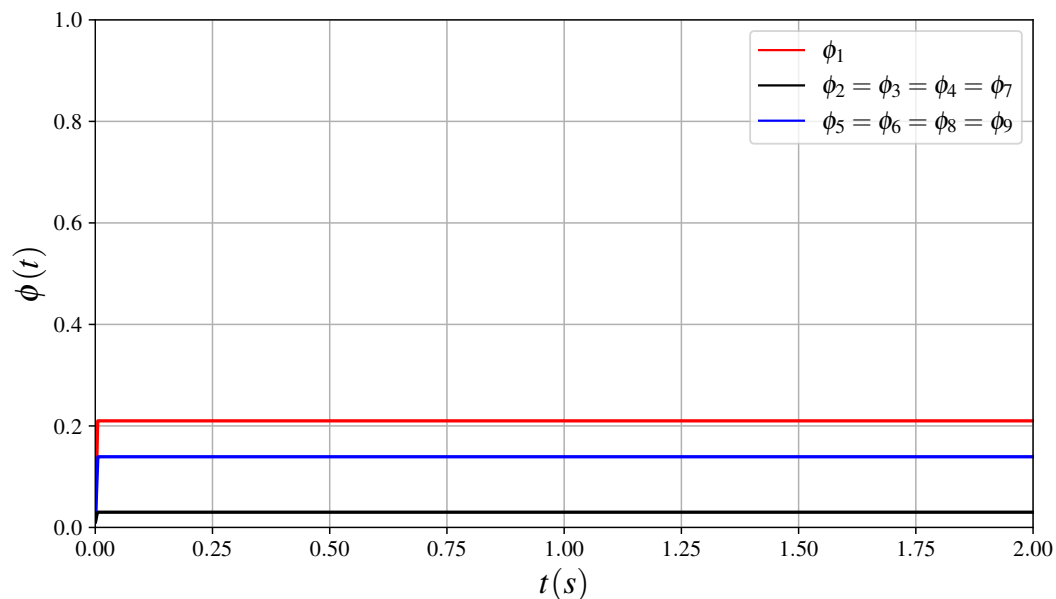


Figura 5.40 – Evolução do parâmetro de dano

$$\phi_i^0 = 0,01; \mathcal{N}_i = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

As famílias de fraturas inclinadas a  $45^\circ$  em relação ao carregamento imposto, que correspondem aos parâmetros de dano  $\phi_5, \phi_6, \phi_8$  e  $\phi_9$ , apresentam uma evolução consideravelmente maior do que as componentes paralelas. A componente  $\phi_1$  do dano, relativa à família  $\omega_1$  (normal à deformação imposta), apresenta o maior valor, tal como evidenciado em exemplos anteriores para componentes normais ao carregamento. Partindo dos valores calculados para o parâmetro de dano  $\phi$  atualizam-se as tensões descritas na Equação 5.54, como ilustra a Figura 5.41.

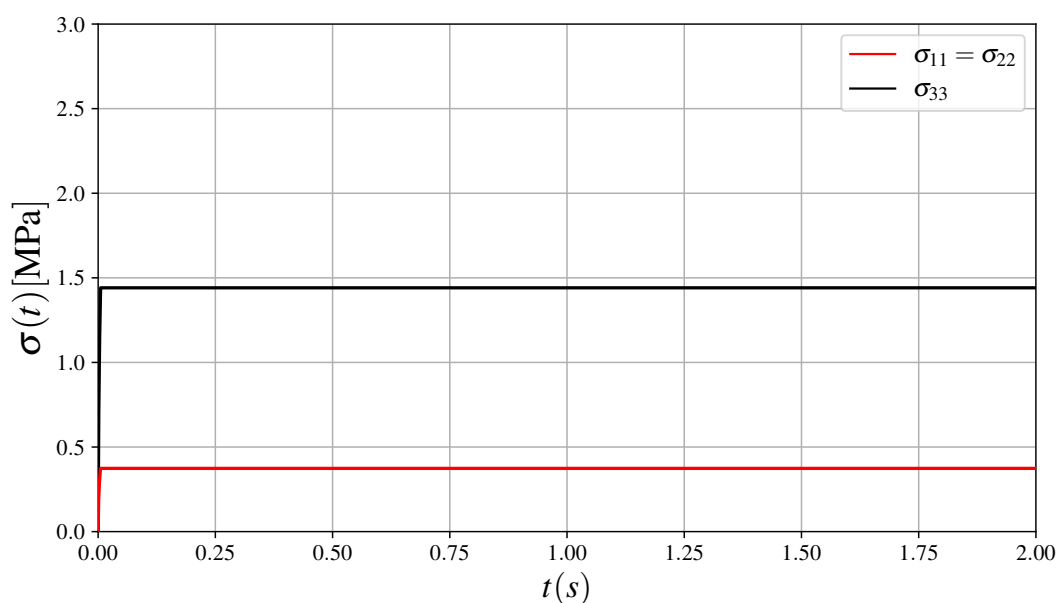


Figura 5.41 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_i^0 = 0,01; \mathcal{N}_i = 1; \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$



Na próxima etapa desta subseção são apresentadas aplicações numéricas que visam aplicar uma deformação crescente ao material, ilustrada pela Figura 5.42, com  $\dot{\varepsilon} = 0,05\%$ .

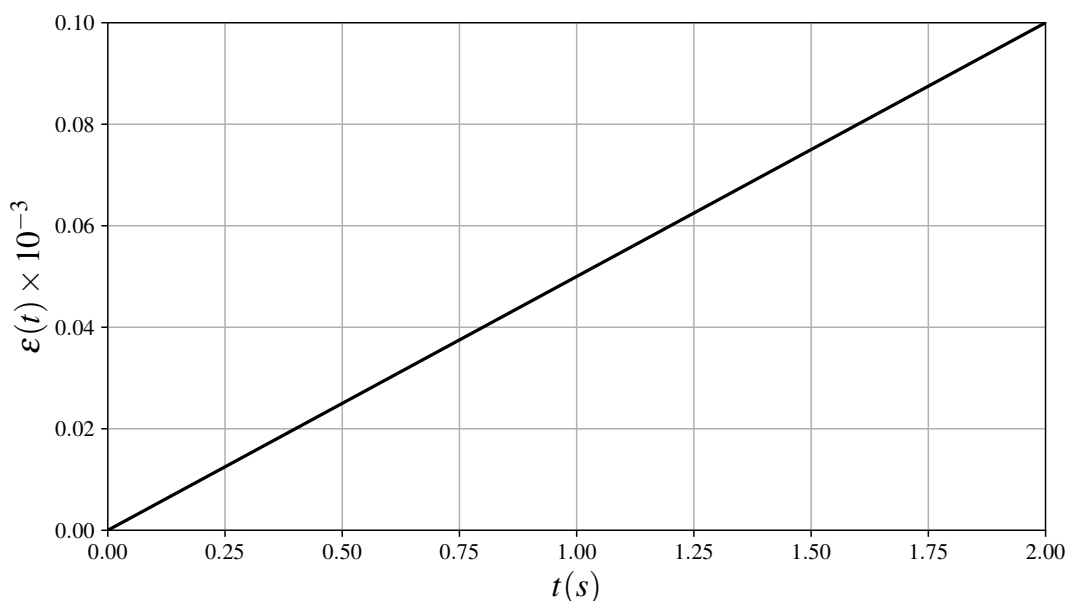


Figura 5.42 – Deformação imposta ao corpo de prova

Assumindo o critério de propagação acoplado e empregando o procedimento numérico incremental do fluxograma da Figura 5.1 sobre a Equação 5.33 determina-se a evolução do parâmetro de dano (Figura 5.37). Mais uma vez evidencia-se que a família  $\omega_1$  cuja orientação é perpendicular ao carregamento imposto exibe a maior evolução do dano (componente  $\phi_1$ ).

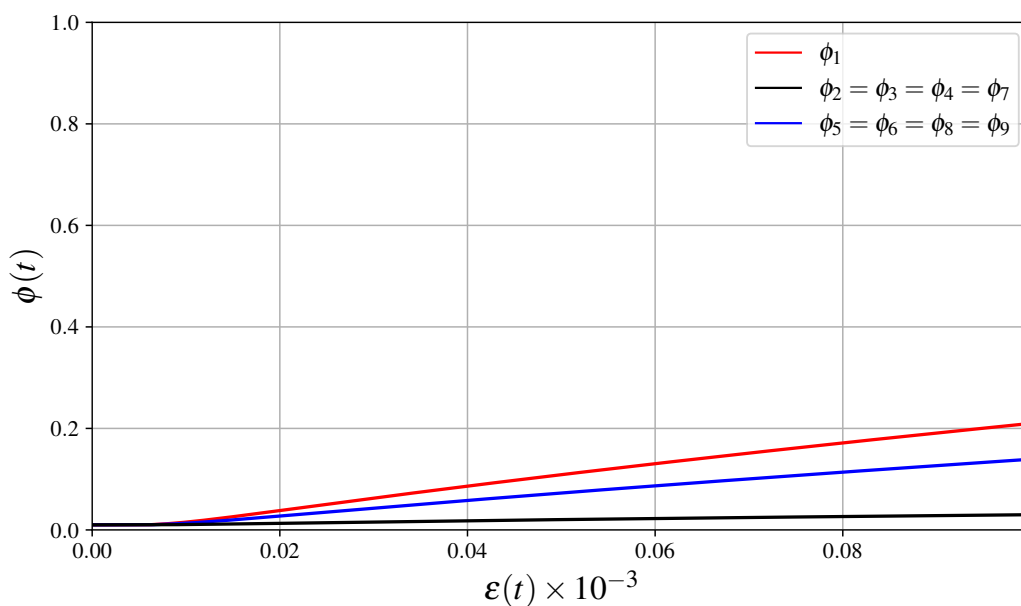


Figura 5.43 – Evolução do parâmetro de dano

$$\phi_i^0 = 0,01; \mathcal{N}_i = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \Delta t = 1 \times 10^{-3} \text{s}.$$

As componentes do dano relativas às famílias que estão inclinadas a  $45^\circ$  em relação a deformação aplicada apresentam valores intermediários do dano ( $\phi_5, \phi_6, \phi_8, \phi_9$ ) e as demais componentes relativas às famílias paralelas ao carregamento apresentam uma pequena propagação de dano. Com os valores obtidos para o dano em cada instante, calculam-se as tensões desenvolvidas no material na forma da Equação 5.54 que podem ser visualizadas através da Figura 5.44.

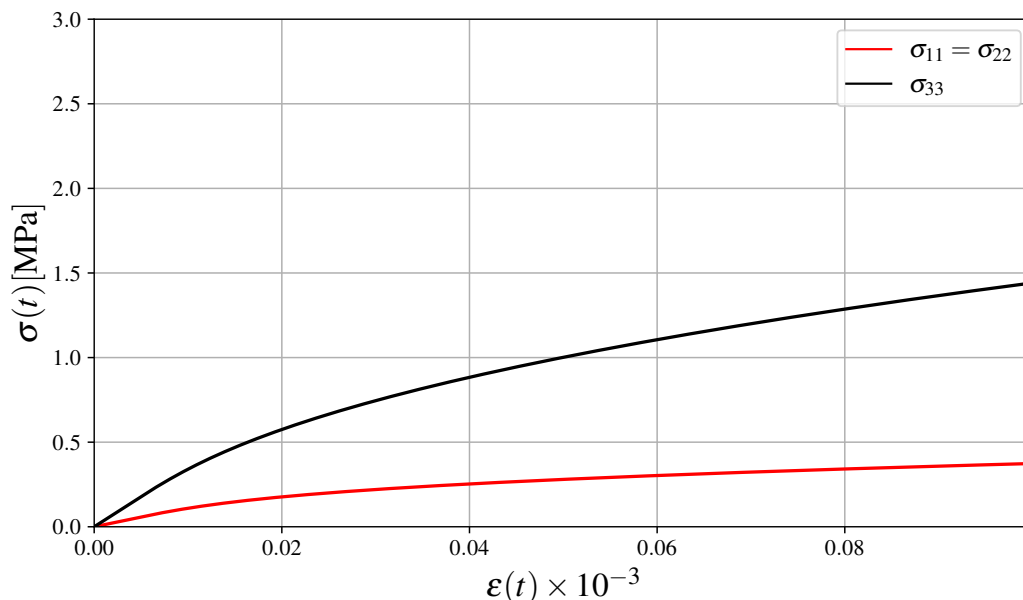


Figura 5.44 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_i^0 = 0,01; \mathcal{N}_i = 1; \Delta t = 1 \times 10^{-3} s.$$

É importante destacar que, nos exemplos relacionados à aplicação de uma deformação crescente em um material com nove famílias, houve um aumento do valor do passo de tempo  $\Delta t$  devido a limitação do tempo de cálculo computacional. No entanto, foi confirmado que este aumento não afeta a precisão dos resultados obtidos.

### 5.3.2.3 Comparação entre as configurações aproximadas

Esta subseção apresenta comparações entre as aproximações definidas por um material com três e nove famílias em relação à abordagem empregada na subseção 4.3.3 que considerava um único parâmetro de dano  $\phi$ . A principal diferença desta última é que agora ela é desenvolvida considerando a função de endurecimento  $F_0 = \kappa + \eta\phi$  como limite para propagação no lugar da energia crítica da fratura  $\mathcal{F}_c$ , uma vez que o critério de propagação acoplado (5.28) é empregado em todas as análises. Para o material com uma distribuição isotropa, assume-se um valor inicial para o dano de  $\phi_0 = 0,01$  e adota-se  $\mathcal{N} = 1$ . Quanto as configurações aproximadas por três e nove famílias, emprega-se a seguinte abordagem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Três famílias de fraturas} \Rightarrow \phi_i = \frac{0,01}{3} \text{ e } \mathcal{N}_i = \frac{1}{3} \text{ com } (i = 1, 2, 3) \\ \text{Nove famílias de fraturas} \Rightarrow \phi_i = \frac{0,01}{9} \text{ e } \mathcal{N}_i = \frac{1}{9} \text{ com } (i = 1, \dots, 9) \end{array} \right. \quad (5.57)$$

Ao comparar as configurações descritas por três e nove famílias com a abordagem proposta para a distribuição isotrópica, verificou-se que o início de propagação de dano diverge para cada caso. Portanto, foi necessário ajustar a função de endurecimento relativa as configurações de três e nove famílias de modo que o início da propagação ocorra simultaneamente com material que apresenta uma distribuição isotrópica de fraturas. Para isso, foram determinados dois fatores distintos, sendo eles  $F_0(\underline{\phi}) = 2,30F_0(\underline{\phi})$  para três e  $F_0(\underline{\phi}) = 11F_0(\underline{\phi})$  para nove famílias.

Considerando um material com três famílias de fraturas e aplicando uma deformação constante  $\varepsilon_0 = 0,10\%$  calcula-se a evolução do dano total conforme o procedimento apresentado na Figura 5.1. Em seguida, os resultados são plotados com aqueles obtidos para uma distribuição isotrópica de fraturas, como ilustra a Figura 5.45.

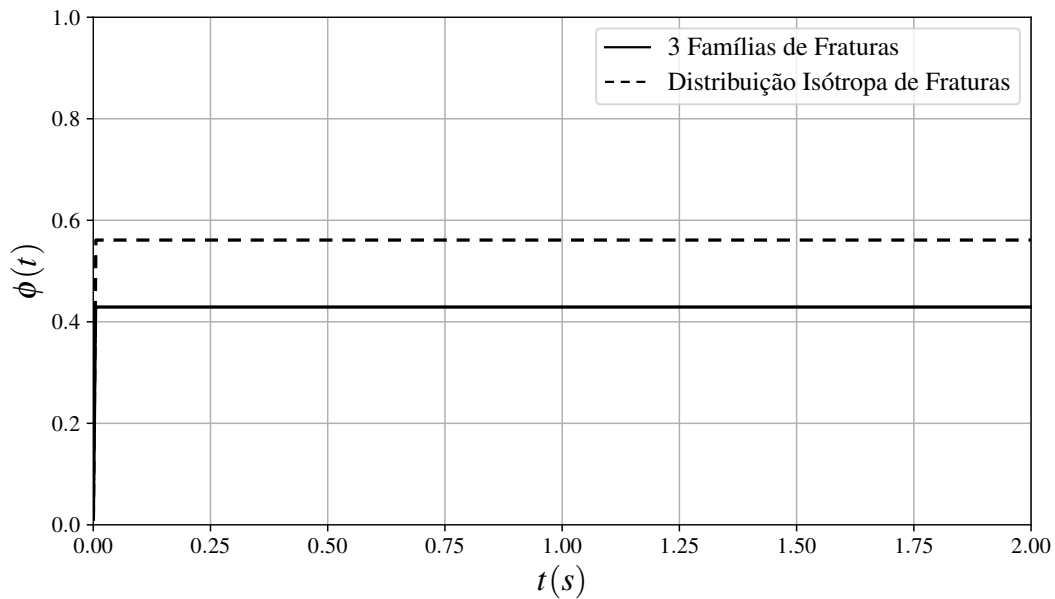


Figura 5.45 – Configurações de três famílias e distribuição isotrópica de fraturas

$$\phi_0 = 0,01; \quad \mathcal{N} = 1; \quad \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \quad \eta = \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \quad \Delta t = 1 \times 10^{-4} \text{s}.$$

Com os valores obtidos para o parâmetro de dano atualizam-se as tensões desenvolvidas nos materiais, na forma da Equação 5.54, como ilustra a Figura 5.46.

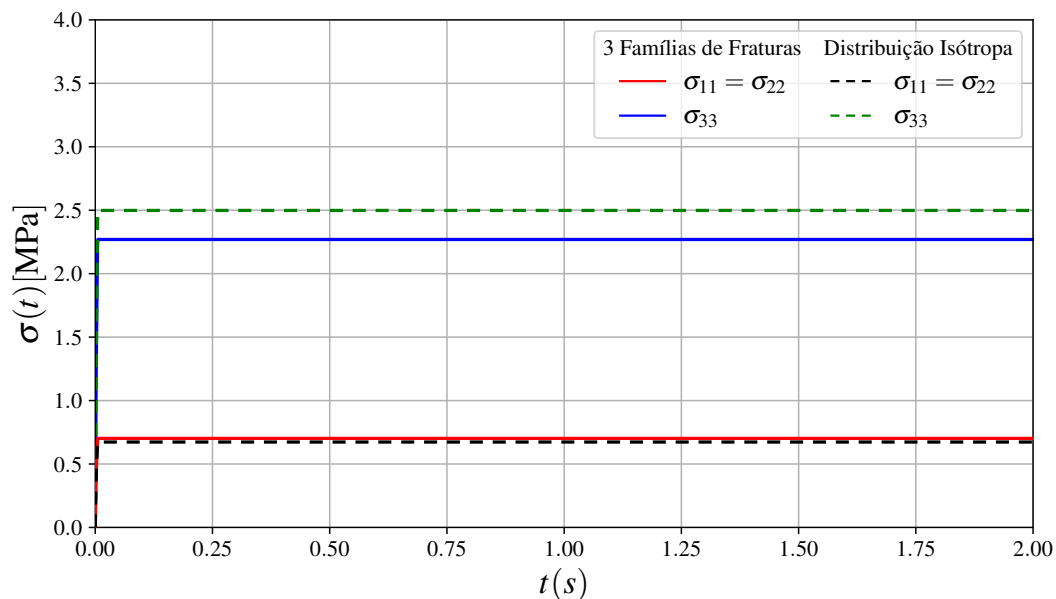


Figura 5.46 – Tensões desenvolvidas nos materiais

$$\phi_0 = 0,01; \mathcal{N} = 1; \Delta t = 1 \times 10^{-4} s.$$

O segundo exemplo consiste em aplicar uma deformação crescente ao material, com  $\dot{\epsilon} = 0,05\%$ , e emprega-se a abordagem numérica da Figura 5.1 para obter a evolução do dano (Figura 5.47).

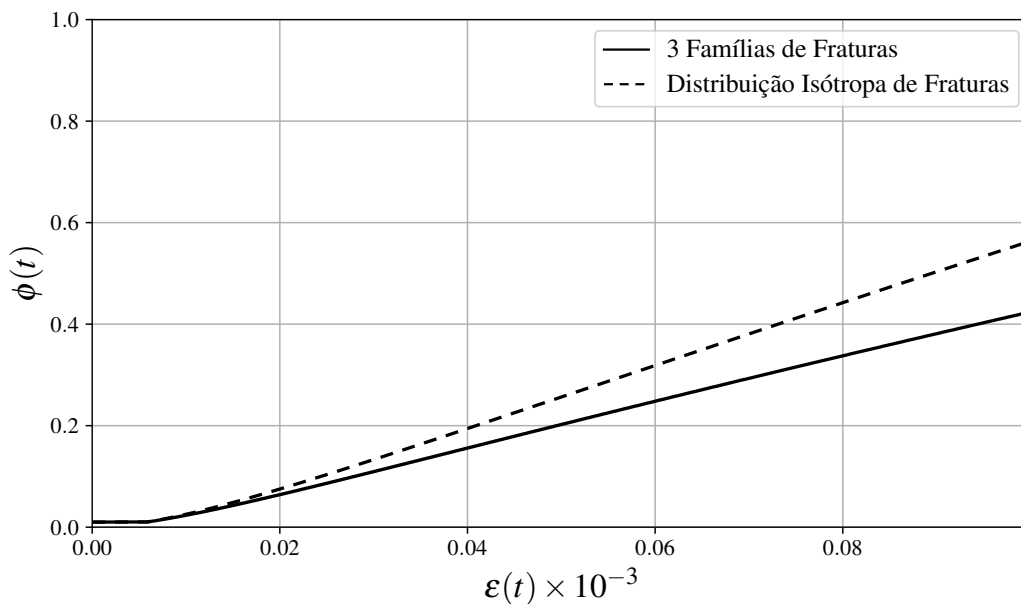


Figura 5.47 – Configurações de três famílias e distribuição isotrópica de fraturas

$$\phi_0 = 0,01; \mathcal{N} = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \eta = \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \Delta t = 1 \times 10^{-3} s.$$

Considerando os valores previamente calculados para o parâmetro de dano atualizam-se as tensões desenvolvidas nos materiais, conforme ilustra a Figura 5.48.

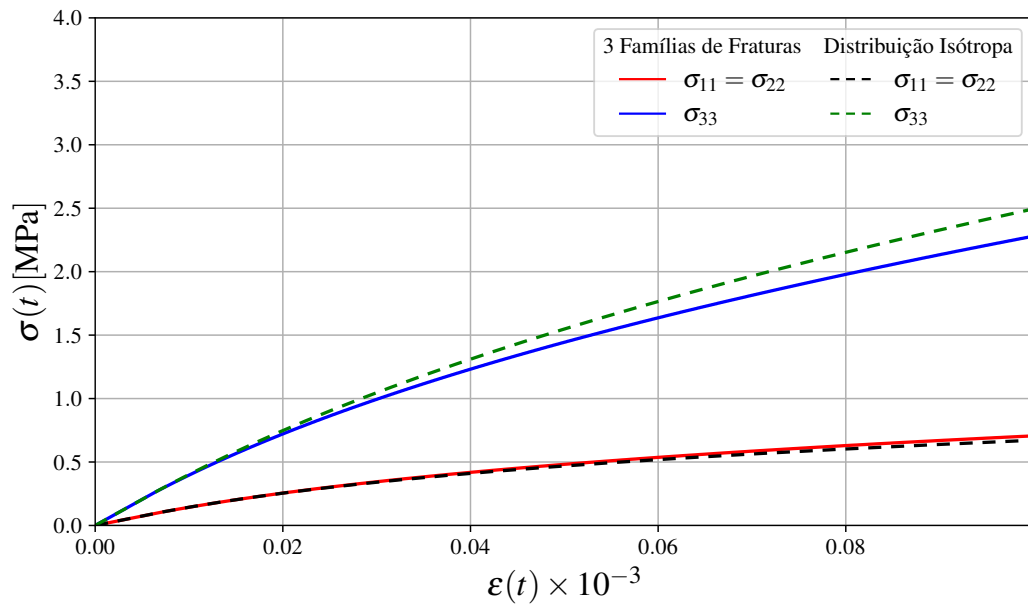


Figura 5.48 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_0 = 0,01; \mathcal{N} = 1; \Delta t = 1 \times 10^{-3}s.$$

As próximas ilustrações consideram um material com nove famílias de fraturas e inicialmente assume-se uma deformação constante com  $\varepsilon_0 = 0,10\%$  para avaliar a propagação de dano. A evolução do dano é calculada conforme o procedimento da Figura 5.1 e ilustrada pela Figura 5.49.

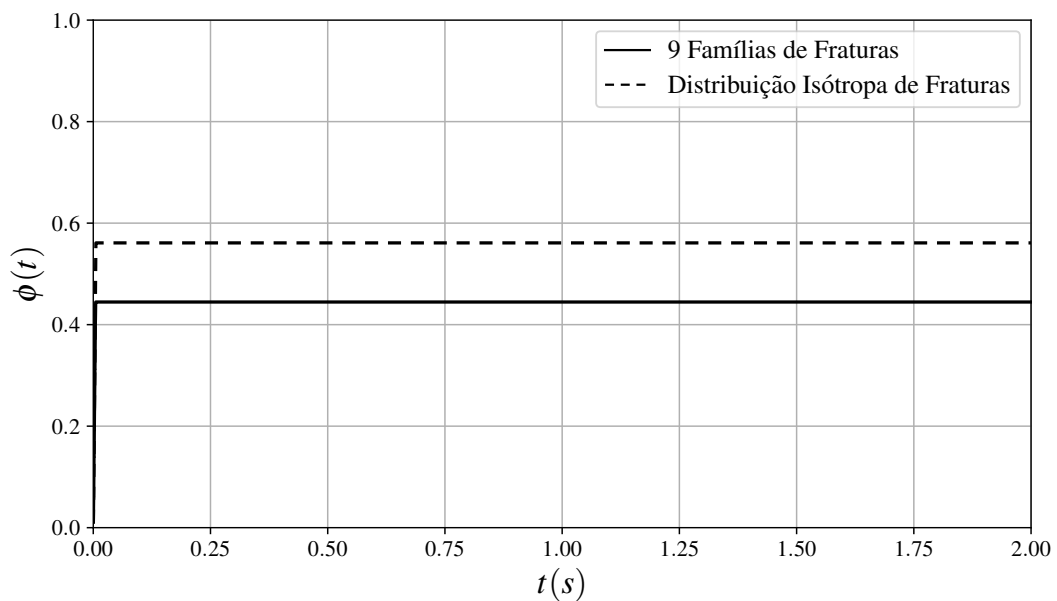


Figura 5.49 – Configurações de nove famílias e distribuição isotrópica de fraturas

$$\phi_0 = 0,01; \mathcal{N} = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4}J/m^2; \eta = \eta_i = 130J/m^2; \Delta t = 1 \times 10^{-4}s.$$

Com os valores obtidos para o parâmetro de dano em cada uma das configurações atualizam-se as tensões desenvolvidas nos materiais, na forma da Equação 5.54, conforme ilustra a Figura 5.50.

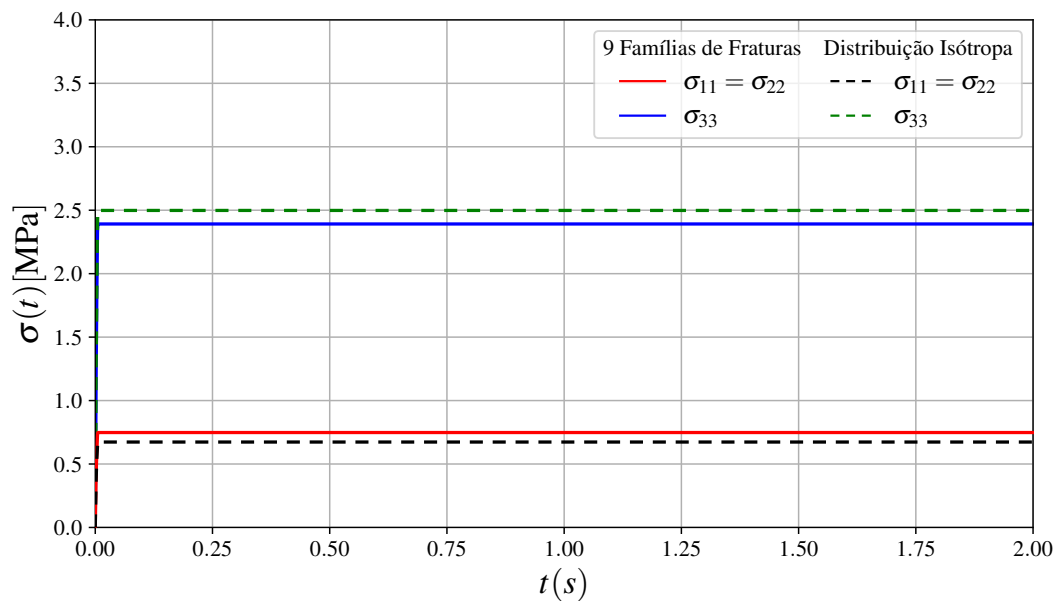


Figura 5.50 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_0 = 0,01; \mathcal{N} = 1; \Delta t = 1 \times 10^{-4} s.$$

O segundo exemplo consiste em aplicar uma deformação crescente ao material, com  $\dot{\epsilon} = 0,05\%$ , ilustrada pela Figura 5.36. A evolução do dano é calculada de forma numérica conforme o raciocínio da Figura 5.1 e a Figura 5.51 ilustra o dano total no material.

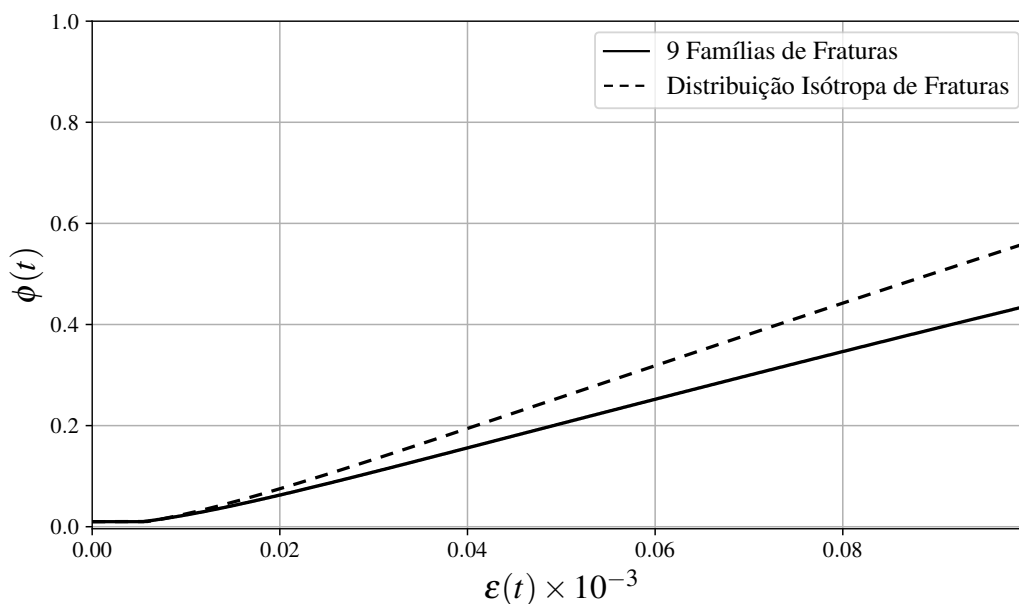


Figura 5.51 – Configurações de nove famílias e distribuição isotrópica de fraturas

$$\phi_0 = 0,01; \mathcal{N} = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4} \text{J/m}^2; \eta = \eta_i = 130 \text{J/m}^2; \Delta t = 1 \times 10^{-3} s.$$

Com os valores obtidos para o parâmetro de dano em cada instante, calculam-se as tensões desenvolvidas nos materiais conforme a Equação 5.54. O gráfico da Figura 5.52 permite comparar os resultados obtidos entre o problema real e a configuração aproximada.

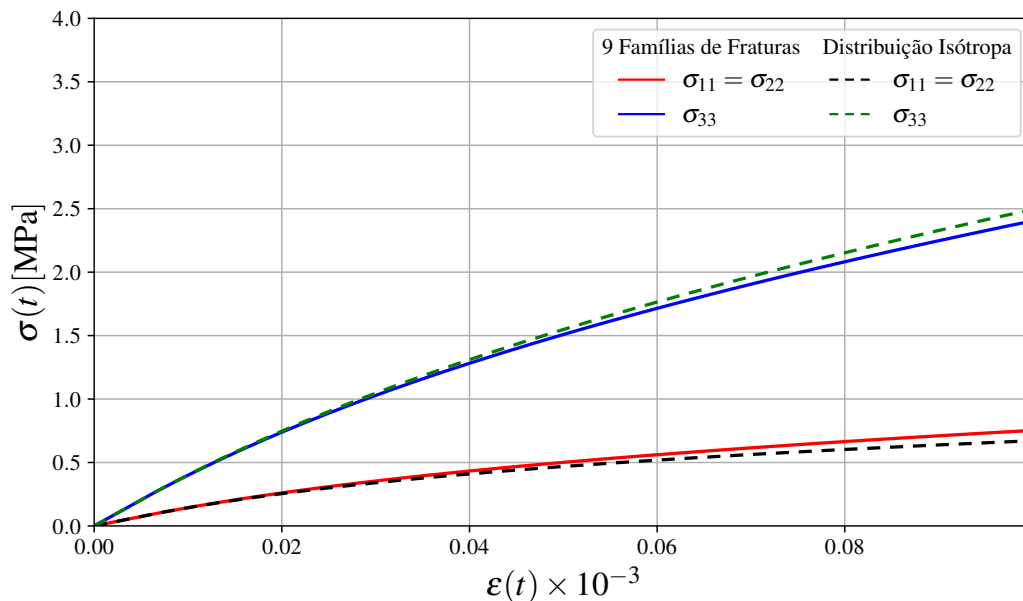


Figura 5.52 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_0 = 0,01; \mathcal{N} = 1; \Delta t = 1 \times 10^{-3}s.$$

Por fim a Figura 5.53 ilustra os resultados obtidos nas configurações de três e nove famílias de fraturas considerando uma deformação crescente com  $\dot{\epsilon} = 0,05\%$ .

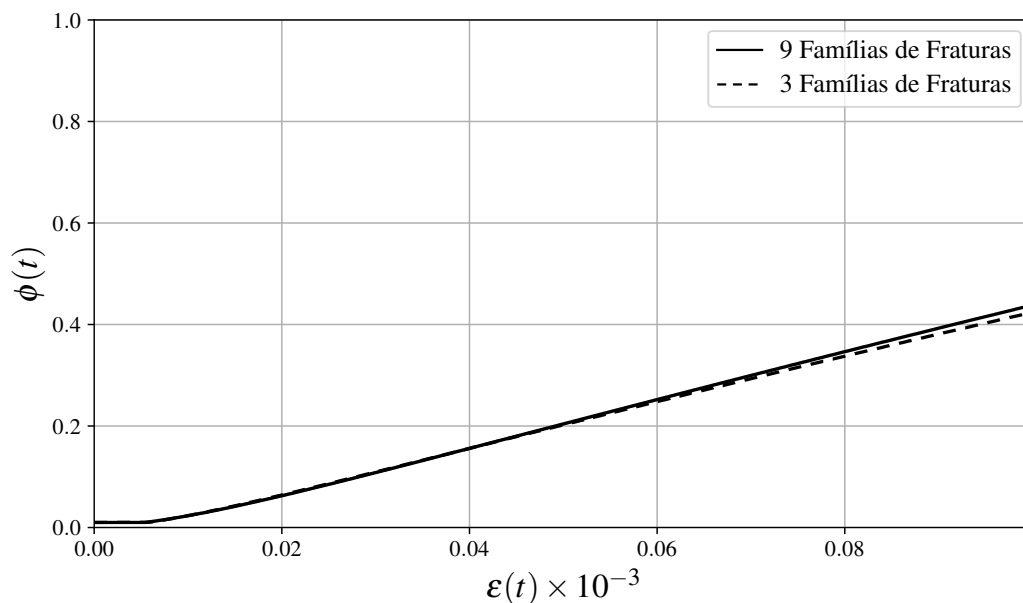


Figura 5.53 – Configurações de três e nove famílias de fraturas

$$\phi_0 = 0,01; \mathcal{N} = 1; \kappa = 9 \times 10^{-4}J/m^2; \eta = \eta_i = 130J/m^2; \Delta t = 1 \times 10^{-3}s.$$

Como já constatado, o comportamento homogeneizado das configurações descritas por três e nove famílias é praticamente igual, o que justifica a proximidade das curvas ilustradas acima. Essa resposta evidencia também que a componente  $\phi_1$  relativa a família  $\omega_1$  (normal ao carregamento macroscópico aplicado) é a que efetivamente controla a evolução do dano nestes materiais. A partir desses valores atualizam-se as tensões desenvolvidas em ambos os materiais, como ilustra a Figura 5.54.

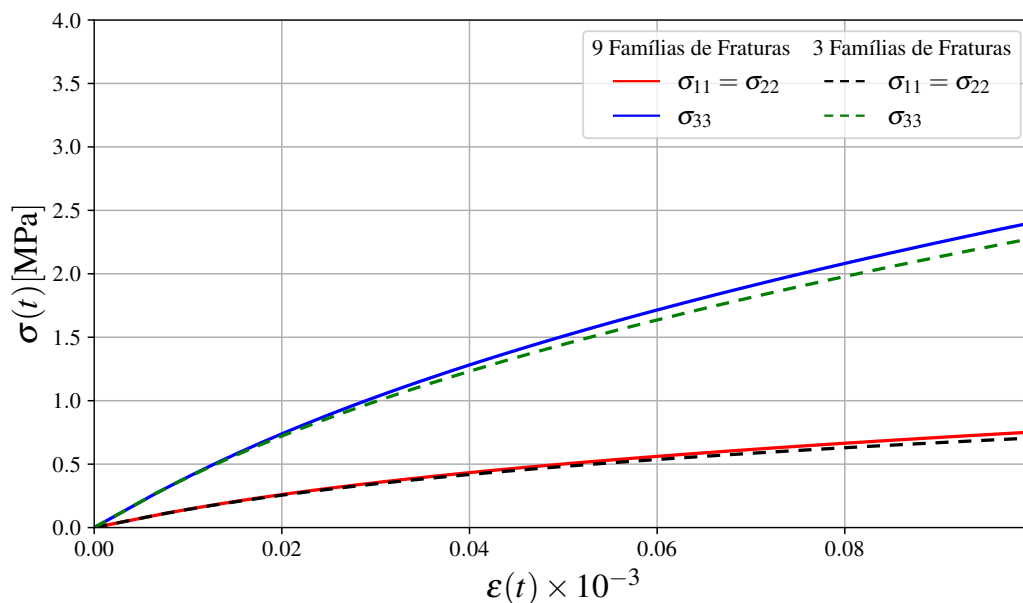


Figura 5.54 – Tensões desenvolvidas no material

$$\phi_0 = 0,01; \mathcal{N} = 1; \Delta t = 1 \times 10^{-3}s.$$

## 5.4 VALIDAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

Nesta subseção, o modelo de evolução de dano formulado é aplicado para avaliar a resposta de um compósito de matriz cerâmica de carboneto de silício reforçado com fibras de carboneto de silício (SiC-SiC), sujeito a uma carga de tração uniaxial em diferentes direções  $\alpha$ , com relação ao eixo de simetria do material (ver Figura 5.55). Este compósito é largamente utilizado em aplicações estruturais de alta temperatura, tais como componentes quentes em motores de turbinas a gás. Os dados experimentais disponíveis para validar o modelo numérico foram registrados por Aubard (1992) em sua tese. A principal diferença dessa aplicação em relação às demais desenvolvidas neste trabalho consiste na matriz sólida do material apresentar comportamento ortotrópico devido às fibras. Aubard (1992) obteve experimentalmente os módulos elásticos iniciais da matriz ortotrópica, cujos valores são empregados no presente estudo. O módulo de Young apresentou valores de  $E_1^s = 320.000$  MPa e  $E_2^s = 170.000$  MPa, enquanto o módulo cisalhante e o coeficiente de Poisson apresentaram valores de  $\mu_{12}^s = 90.000$  MPa e  $\nu_{12}^s = 0,18$ .



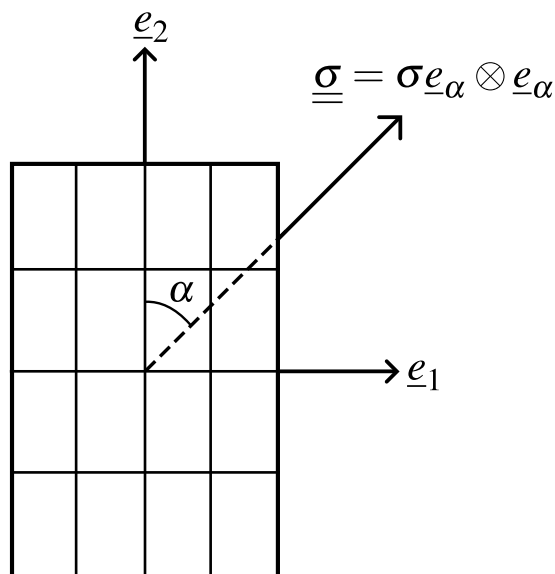


Figura 5.55 – Representação da tração aplicada com o ângulo  $\alpha$

Para avaliar a resposta do compósito de matriz cerâmica em questão, é necessário modificar alguns aspectos do modelo proposto. O primeiro aspecto a ser modificado refere-se ao tensor de Eshelby  $\mathbb{S}^e$  (ou ao equivalente o tensor de Hill  $\mathbb{P}$ ), que deve ser coerente com uma matriz ortotrópica. No entanto, na literatura, não há uma expressão analítica para o tensor de Eshelby específico para um meio ortotrópico contendo fraturas modeladas como esferoides oblato, que é o caso deste trabalho. Em virtude disso, optou-se por utilizar o tensor de Hill  $\mathbb{P}$  formulado no estudo de Monchiet et al. (2012), que considera fissuras cilíndricas imersas em uma matriz sólida ortotrópica. Embora o presente trabalho tenha sido desenvolvido para avaliar as condições de propagação de dano em meios fraturados, observa-se que toda a formulação proposta pode ser aplicada na análise de materiais fissurados, simplesmente adotando  $\underline{k}^i = 0$  para a rigidez das fraturas. Os tensores de rigidez  $\mathbb{C}(\phi)$  e de flexibilidade  $\mathbb{S}(\phi)$  homogeneizados foram obtidos diretamente do estudo de Monchiet et al. (2012).

O modelo utilizado para obter a resposta para o compósito de matriz cerâmica (SiC-SiC) baseia-se em um critério de propagação desacoplado, similar ao expresso na Equação 5.37. Contudo, este modelo considera a função  $F_0^i(\phi)$  como limite para propagação de dano, a qual é escrita na forma  $F_0^i(\phi) = \kappa(1 + \eta_i\phi_i)$ , em que  $\kappa$  e  $\eta_i$  são constantes do material a determinar. Os parâmetros  $\kappa$  e  $\eta_i$  foram calibrados de acordo com os resultados do ensaio de tração correspondente ao ângulo  $\alpha = 0^\circ$ , e obtiveram-se os seguintes valores numéricos:  $\kappa = 9,5 \times 10^4 \text{J/m}^2$  e  $\eta_i = 87,5$ . O parâmetro de dano inicial foi fixado em um valor de  $\phi_0 = 0,01$  para todas as simulações do modelo numérico. Como proposta inicial para aproximar os resultados experimentais de Aubard (1992), foram consideradas 16 famílias de fissuras cilíndricas distribuídas em uma matriz sólida ortotrópica. O valor do parâmetro de dano inicial foi distribuído uniformemente entre as 16 famílias de fissuras. O gráfico da Figura 5.56 ilustra a comparação entre os resultados obtidos

pelo modelo proposto e aqueles provenientes dos ensaios experimentais, considerando uma tração aplicada sob diferentes ângulos de inclinação  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$  e  $\alpha = 45^\circ$ .

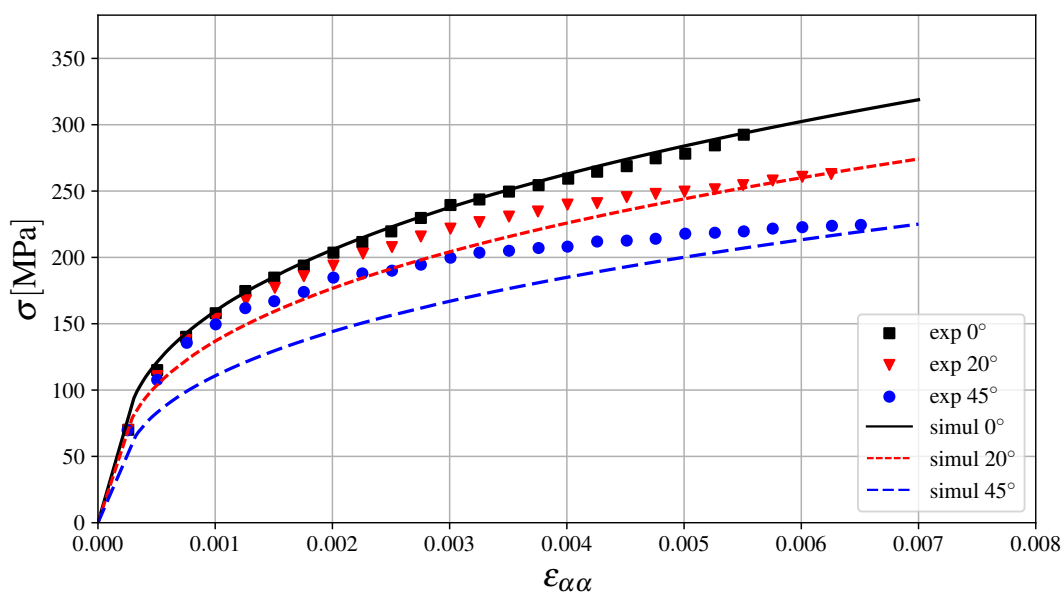


Figura 5.56 – Comparação dos ensaios de tração do compósito SiC-SiC

A validação do modelo calibrado, conforme o procedimento descrito anteriormente, é realizada comparando os resultados das simulações numéricas para  $\alpha = 20^\circ$  e  $\alpha = 45^\circ$  com os dados experimentais. O gráfico da Figura 5.56 mostra a resposta global de tensão-deformação em tração a  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$  e  $\alpha = 45^\circ$ . A concordância entre a resposta simulada para  $\alpha = 0^\circ$  e os dados experimentais evidencia a importância da calibração dos parâmetros  $\kappa$  e  $\eta_i$ . A comparação das simulações para  $\alpha = 20^\circ$  e  $\alpha = 45^\circ$  mostram uma menor concordância com os dados experimentais. Essa diferença observada sugere que a abordagem proposta, considerando 16 famílias de fissuras, para aproximar a resposta do compósito de matriz cerâmica pode ser insuficiente para obter resultados mais exatos, evidenciando a necessidade de aumentar o número de famílias de fissuras dispostas no plano. À exemplo disso, o estudo realizado por Monchiet et al. (2012) demonstrou necessidade de considerar 60 famílias de fissuras para se obter uma resposta com precisão suficiente. A principal diferença entre o modelo proposto e os dados experimentais reside na comparação entre a simulação para  $\alpha = 45^\circ$ . Outra sugestão para melhorar o modelo numérico trata-se de considerar famílias de fraturas invés de fissuras, buscando obter resultados mais próximos do comportamento real, observado em laboratório.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões do trabalho e as sugestões de pesquisa que podem dar continuidade aos estudos sobre os assuntos aqui abordados.

### 6.1 CONCLUSÕES

O propósito deste trabalho foi desenvolver uma abordagem para a propagação de microfraturas em meios elásticos homogeneizados através de um raciocínio micromecânico acoplado a argumentos termodinâmicos macroscópicos. Este trabalho está dividido em cinco etapas. Na primeira seção foi realizada uma breve introdução ao tema, evidenciando os principais objetivos que pautam esta pesquisa, bem como a metodologia proposta para atingir os objetivos. Também é apresentada uma justificativa que retrata problemas práticos relacionados a fraturas e um breve delineamento para o trabalho em questão.

Na segunda etapa deste trabalho apresenta-se um conjunto de conceitos e ferramentas relacionadas aos temas centrais desta pesquisa. Inicialmente foi realizada uma breve revisão acerca do comportamento de meios fraturados e da mecânica da fratura na qual se introduziu o primeiro critério de propagação de fraturas formulado por Griffith (1921) baseado em leis da termodinâmica. Na sequência foi apresentada uma revisão acerca da teoria da homogeneização, conceituando volume elementar representativo e as condições de separação de escalas, além de abordar tópicos referentes as condições de contorno homogêneas, Lema de Hill e métodos de homogeneização.

A terceira etapa deste trabalho consiste em determinar o comportamento mecânico do meio elástico homogeneizado e refere-se aos três primeiros objetivos específicos apresentados na primeira seção. Partindo do comportamento elástico microscópico das fases (matriz sólida e fraturas) foi determinada uma lei do comportamento macroscópica para materiais elásticos fraturados. O processo de homogeneização foi realizado no contexto da teoria da inclusão equivalente de Eshelby, fazendo uso da estimativa de Mori-Tanaka para estimar os módulos elásticos efetivos de materiais fraturados. Com o intuito de utilizar esquemas de homogeneização de Eshelby foi introduzido um modelo tridimensional de fraturas modeladas geometricamente como elipsoides oblatos (esferoides). Tal formulação já havia sido desenvolvida em outros trabalhos, por exemplo de Maghous et al. (2013), Maghous et al. (2014) e Aguiar e Maghous (2018). A diferença deste trabalho com relação aos citados é que foi apresentado o comportamento

mecânico homogeneizado do meio elástico considerando duas famílias de microfraturas e posteriormente foi realizado o cálculo admitindo três e nove famílias com o objetivo de aproximar o comportamento equivalente de um material com uma distribuição isotrópica de fraturas.

A quarta etapa consiste em formular o critério de propagação de dano no nível do meio homogeneizado (escala macroscópica), assim como uma lei de evolução de dano apta ao tratamento de materiais elásticos fraturados. Em virtude disso, as densidades de fraturas passam a ser interpretadas como parâmetros de dano no nível do meio homogeneizado e emprega-se um raciocínio micromecânico acoplado a argumentos termodinâmicos macroscópicos para avaliar as condições de propagação de dano em meios fraturados. Para desenvolver o modelo de dano contínuo foi considerado inicialmente a existência de um único parâmetro de dano  $\phi$ , assumindo  $\mathcal{N}$  constante e avaliando a propagação somente através do crescimento das fraturas já existentes no meio. Tal condição restringe o domínio de aplicações a situações que envolvem uma família de fraturas paralelas ou uma distribuição isotrópica de fraturas, desde que se considere um carregamento também isotrópico para este último. Na última seção a formulação é generalizada, permitindo abordar configurações com diversas famílias de microfraturas.

Por fim, na quinta etapa é proposta uma extensão da formulação termodinâmica apresentada no capítulo precedente para uma configuração na qual a rede de microfraturas é composta por diversas famílias. Partindo de um vetor de dano  $\underline{\phi}$  formula-se o critério de propagação no nível do meio homogeneizado, assim como a sua lei de evolução no contexto de materiais elásticos considerando  $n$  famílias de microfraturas. Foram propostas duas expressões particulares para o critério de propagação, uma formulação acoplada e outra desacoplada. Em um primeiro momento são apresentadas aplicações numéricas relativas a um material com duas famílias de microfraturas, variando a inclinação do carregamento macroscópico imposto para ambos os critérios. No decorrer dos exemplos numéricos evidencia-se que para um critério acoplado o início da propagação ocorrerá no mesmo instante para todas as famílias enquanto no critério desacoplado a evolução do dano é calculada de forma independente para cada família, condicionando instantes distintos para o início de propagação. Além disso, os exemplos permitem visualizar que a inclinação do carregamento influencia fortemente nos resultados. A última parte deste trabalho consiste em aproximar o problema real no qual aplica-se uma deformação uniaxial a um material com uma distribuição isotrópica de microfraturas através de configurações descritas por três e nove famílias de microfraturas. Tal abordagem foi previamente desenvolvida (terceira etapa), evidenciando que estas configurações apresentam boas aproximações para o comportamento homogeneizado do material. Esta etapa demonstra que o problema real (distribuição isotrópica de fraturas) com um carregamento uniaxial pode ser aproximado através de configurações com três e nove famílias de microfraturas, propondo algumas comparações. Finalmente apresenta-se uma validação dos resultados numéricos através da comparação do modelo proposto com ensaios experimentais desenvolvidos por Aubard

(1992), considerando um material compósito de matriz cerâmica SiC-SiC. Nesta perspectiva, os parâmetros  $\kappa$  e  $\eta_i$  foram calibrados conforme o ensaio experimental a  $\alpha = 0^\circ$  e destaca-se que os resultados obtidos para esta direção de carregamento foram satisfatórios. Para carregamentos fora do eixo de simetria os resultados numéricos apresentaram menor concordância com os dados experimentais, especialmente considerando uma tensão a  $\alpha = 45^\circ$ . O ideal seria desenvolver uma análise mais aprofundada aumentando o número de famílias de fissuras até se obter a convergência dos resultados experimentais.

## 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta subseção são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Neste trabalho a análise da propagação de dano é avaliada somente através do crescimento das fraturas já existentes. Uma contribuição interessante seria desenvolver um estudo considerando também os efeitos de nucleação que caracteriza o surgimento de novas fraturas no meio.
- O presente estudo é voltado para microfraturas que são por definição muito menores que o tamanho do VER. Contudo, materiais como maciços rochosos podem exibir descontinuidades de grande escala, denominadas fraturas longas. Nestes casos não se pode utilizar a micromecânica e a propagação destas fraturas deve ser avaliada de forma separada. Portanto, este aspecto fica como sugestão de pesquisa, destacando que o trabalho de Maghous et al. (2021) apresenta uma abordagem para o tratamento deste problema.
- Considerar evoluções não isotérmicas para desenvolver o raciocínio termodinâmico e formular o critério de propagação de dano, bem como sua lei de evolução, possibilitando avaliar os efeitos da variação de temperatura sobre a propagação de dano.
- Melhorar a etapa de validação do modelo numérico, considerando um maior número de famílias de fissuras distribuídas no meio, ou ainda, considerando um modelo numérico com famílias de fraturas ao invés de fissuras. Outra sugestão pertinente, é buscar dados experimentais relacionados a materiais isotropos para validação do modelo.
- Implementar o comportamento constitutivo formulado e desenvolver um modelo computacional para análise estrutural em elementos finitos. Uma contribuição importante neste sentido é elaborar uma ferramenta que permita simular numericamente a evolução do dano em meios fraturados, sendo também uma forma de verificar os resultados já encontrados.

## REFERÊNCIAS

AGUIAR, C. B.; MAGHOUS, S. Micromechanical approach to effective viscoelastic properties of micro-fractured geomaterials. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 42, n. 16, p. 2018–2046, nov 2018. ISSN 03639061. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.2847>>. Citado 7 vezes nas páginas 9, 25, 30, 58, 60, 67 e 154.

AGUIAR, C. B. de. **Modelagem Micromecânica das Propriedades Efetivas e da Propagação do Dano em Meios Viscoelásticos Fraturados**. 284 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 24, 34 e 41.

ANDERSON, T. L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and applications**. 3. ed. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2005. 610 p. ISSN 02647303. ISBN 9781420058215. Citado na página 35.

ATTA, A. **Analyse par homogénéisation élastoplastique des ouvrages en milieux rocheux fracturés**. 140 p. Tese (Doutorado) — L'École Nationale des Ponts et Chaussées, 2004. Citado 6 vezes nas páginas 9, 30, 32, 33, 34 e 35.

AUBARD, X. **Modelisation et identification du comportement mecanique des materiaux composites 2D SiC-SiC**. 168 p. Tese (Doutorado) — Université Paris VI, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 151, 152 e 156.

BANDIS, S. C.; LUMSDEN, A. C.; BARTON, N. R. Fundamentals of Rock Joint Deformation. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts**, v. 20, n. 6, p. 249–268, 1983. Citado 3 vezes nas páginas 32, 58 e 59.

BART, M. **Contributions a la Modelisation du Comportement Hydromecanique des Massifs Rocheux avec Fractures**. 233 p. Tese (Doutorado) — Université des Sciences et Technologies de Lille, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 80.

BARTHÉLÉMY, J.-F. **Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration dans les géomatériaux**. 271 p. Tese (Doutorado) — L'École Nationale des Ponts et Chaussées, 2005. Disponível em: <<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00001296>>. Citado na página 40.

BAZANT, Z. P.; PFEIFFER, P. A. Determination of Fracture Energy From Size Effect and Brittleness Number. **ACI Materials Journal**, v. 84, n. 6, p. 463–480, 1987. ISSN 0889325X. Citado 3 vezes nas páginas 80, 93 e 117.

BIENIAWSKI, Z. T. Mechanism of Brittle Fracture of Rock. **Int. J. Rock Mech. Min. Sci.**, v. 4, p. 395–406, 1967. Citado na página 36.

\_\_\_\_\_. **Engineering Rock Mass Classifications: A Complete Manual for Engineers and Geologists in Mining, Civil and Petroleum Engineering**. Elsevier, 1989. 251 p. ISBN 9780123858788. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/C20100649947>>. Citado na página 32.

BUDIANSKY, B.; O'CONNELL, R. J. Elastic Moduli Of a Cracked Solid. **International Journal of Solids Structures**, v. 12, p. 81–97, 1976. Citado 3 vezes nas páginas 25, 61 e 76.

CASTAÑEDA, P. P.; WILLIS, J. R. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 43, n. 12, p. 1919–1951, 1995. ISSN 00225096. Citado na página 25.

CHABOCHE, J.-L. Damage induced anisotropy: on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition. **International Journal of Damage Mechanics**, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 1, n. 2, p. 148–171, 1992. Citado na página 25.

COUÉGNAT, G. **Approche multiéchelle du comportement mécanique de matériaux composites à renfort tissé**. 161 p. Tese (Doutorado) — L'Université Bordeaux 1, 2008. Citado na página 28.

DORMIEUX, L.; KONDO, D. **Micromechanics of Fracture and Damage**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2016. 310 p. ISBN 9781848218635. Citado 9 vezes nas páginas 25, 39, 41, 47, 48, 49, 68, 79 e 114.

DORMIEUX, L.; KONDO, D.; ULM, F. J. A micromechanical analysis of damage propagation in fluid-saturated cracked media. **Comptes Rendus - Mecanique**, v. 334, n. 7, p. 440–446, 2006. ISSN 16310721. Citado na página 25.

\_\_\_\_\_. **Microporomechanics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2006. 328 p. ISBN 9780470031889. Citado 10 vezes nas páginas 37, 38, 39, 41, 43, 44, 51, 79, 88 e 167.

DORMIEUX, L.; ULM, F. J. **Applied Micromechanics of Porous Materials**. [S.l.]: Springer Wien, 2005. 331 p. ISBN 9783211263624. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

DUGDALE, D. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 8, n. 2, p. 100–104, 1960. ISSN 1598818X. Citado na página 36.

ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. **Proceedings of the Royal Society A.**, v. 241, n. 1226, p. 376–396, 1957. Citado na página 52.

FENG, W.; QIAO, C.; NIU, S.; YANG, Z.; WANG, T. An improved nonlinear damage model of rocks considering initial damage and damage evolution. **International Journal of Damage Mechanics**, v. 29, n. 7, p. 1117–1137, 2020. ISSN 15307921. Citado na página 25.

FOSSUM, A. Effective elastic properties for a randomly jointed rock mass. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts**, v. 22, n. 6, p. 467–470, dec 1985. ISSN 01489062. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0148906285900117>>. Citado na página 68.

FRANÇOIS, D.; PINEAU, A.; ZAOUI, A. **Mechanical behaviour of materials**. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2012. Volume 1.: 646 p. ISSN 03783804. ISBN 9789400725454. Citado 7 vezes nas páginas 27, 28, 38, 39, 44, 47 e 48.

GOODMAN, R. E. **Methods of geological engineering in discontinuous rocks**. [S.l.]: West Publishing Company, 1976. v. 13. 472 p. p. ISSN 00029513. ISBN 0829900667. Citado 5 vezes nas páginas 30, 31, 32, 58 e 59.

GRIFFITH, A. A. VI. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character**, v. 221, n. 582-593, p. 163–198, jan 1921. ISSN 0264-3952. Disponível em:

<<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1921.0006>>. Citado 8 vezes nas páginas 25, 28, 30, 36, 37, 78, 108 e 154.

GROSS, D.; SEELIG, T. **Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics**. 2. ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 336 p. (Mechanical Engineering Series). ISSN 00255564. ISBN 978-3-642-19239-5. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/9781118097298.weoc096http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-19240-1>>. Citado 3 vezes nas páginas 9, 51 e 53.

HASHIN, Z. Analysis of Composite Materials: A Survey. **Journal of Applied Mechanics**, CRC Press, v. 50, n. September, p. 481–505, 1983. Disponível em: <<http://www.crcnetbase.com/doi/10.1201/NOE1587161001.ch2>>. Citado na página 42.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. On Some Variational Principles in Anisotropic and Nonhomogeneous elasticity. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 10, n. 4, p. 335–342, 1962. Citado na página 51.

HILL, R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 11, n. 5, p. 357–372, 1963. ISSN 00225096. Citado na página 42.

\_\_\_\_\_. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 15, n. 2, p. 79–95, 1967. ISSN 00225096. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 50.

HSIEH, S. S.; TING, E. C.; CHEN, W. F. A plastic-fracture model for concrete. **International Journal of Solids and Structures**, Pergamon Press Ltd., v. 18, n. 3, p. 181–197, 1982. ISSN 00207683. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(82\)90001-4](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(82)90001-4)>. Citado na página 25.

IRWIN, G. R. Plastic zone near a crack and fracture toughness. **Sagamore Research Conference Proceedings**, v. 4, p. 63–78, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 36.

JAEGER, J. C.; COOK, N. G. W.; ZIMMERMAN, R. W. **Fundamentals of Rock Mechanics**. 4. ed. [S.l.]: Blackwell Publishing, 2007. 475 p. ISBN 3540253491. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

KRAJCINOVIC, D.; FANELLA, D. a Micromechanical Damage Model. **Engineering**, v. 25, p. 585–596, 1986. Citado na página 25.

LE, Q. V. **Modélisation multi-échelle des matériaux viscoélastiques hétérogènes : application à l'identification et à l'estimation du fluage propre de bétons d'enceintes de centrales nucléaires**. 257 p. Tese (Doutorado) — Université Paris-Est, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 117.

LEBLOND, J.-B. **Mécanique de la rupture fragile et ductile**. [S.l.]: Hermès science publications, 2003. 197 p. Citado na página 35.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mechanics of solid materials**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. 556 p. Citado 3 vezes nas páginas 36, 77 e 107.



- LISJAK, A.; GRASSELLI, G. A review of discrete modeling techniques for fracturing processes in discontinuous rock masses. **Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering**, Elsevier Ltd, v. 6, n. 4, p. 301–314, 2014. ISSN 16747755. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jrmge.2013.12.007>>. Citado na página 25.
- LUCCIONI, B.; OLLER, S. A directional damage model. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, n. 9-10, p. 1119–1145, 2003. ISSN 00457825. Citado na página 25.
- MAGHOUS, S. **Teoria da Homogeneização aplicada a materiais compósitos em Estruturas e Geotecnia - PEC00101 (Notas de aula)**. [S.l.]: PPGEC-UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 52.
- MAGHOUS, S.; AGUIAR, C. B.; ROSSI, R. Micromechanical approach to effective viscoelastic behavior of jointed rocks. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 139, n. May 2020, 2021. ISSN 13651609. Citado 4 vezes nas páginas 9, 25, 66 e 156.
- MAGHOUS, S.; BERNAUD, D.; FRÉARD, J.; GARNIER, D. Elastoplastic behavior of jointed rock masses as homogenized media and finite element analysis. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, v. 45, n. 8, p. 1273–1286, 2008. ISSN 13651609. Citado na página 59.
- MAGHOUS, S.; DORMIEUX, L.; KONDO, D.; SHAO, J. F. Micromechanics approach to poroelastic behavior of a jointed rock. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 37, p. 111–129, 2013. Disponível em: <[http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.527/abstract%5Cnhttps://web.natur.cuni.cz/uhigug/masin/download/MTVC\\_IJNAMG06-pp.pdf](http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/nag.527/abstract%5Cnhttps://web.natur.cuni.cz/uhigug/masin/download/MTVC_IJNAMG06-pp.pdf)>. Citado 10 vezes nas páginas 9, 25, 26, 45, 46, 59, 62, 63, 67 e 154.
- MAGHOUS, S.; LORENCI, G.; BITTENCOURT, E. Effective poroelastic behavior of a jointed rock. **Mechanics Research Communications**, Elsevier Ltd, v. 59, p. 64–69, jul 2014. ISSN 00936413. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0093641314000299>>. Citado 6 vezes nas páginas 25, 26, 41, 63, 71 e 154.
- MANDEL, J. **Plasticité Classique Et Viscoplasticité**. [S.l.]: Springer, Berlin, 1972. Citado na página 50.
- MONCHIET, V.; GRUESCU, C.; CAZACU, O.; KONDO, D. A micromechanical approach of crack-induced damage in orthotropic media: Application to a brittle matrix composite. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier Ltd, v. 83, p. 40–53, 2012. ISSN 00137944. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.11.011>>. Citado 2 vezes nas páginas 152 e 153.
- MURA, T. **Mechanics of Defects in Solids**. 2. ed. [S.l.]: Martinus Nijhoff, 1987. 587 p. ISBN 978-90-247-3256-2. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 167.
- NEEDLEMAN, A. Continuum Model for Void Nucleation By Inclusion Debonding. **American Society of Mechanical Engineers (Paper)**, v. 54, n. September 1987, p. 525–531, 1987. ISSN 04021215. Citado na página 63.
- NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. **Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials**. 1. ed. Elsevier Ltd, 1993. v. 37. 687 p. ISSN 01675931. ISBN 0444898816.

Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9780720423563500202>>. Citado na página 53.

NGUYEN, S. T.; DORMIEUX, L. Propagation of micro-cracks in viscoelastic materials: Analytical and numerical methods. **International Journal of Damage Mechanics**, v. 24, n. 4, p. 562–581, 2015. ISSN 15307921. Citado na página 25.

NGUYEN, T. **Propagation de fissures et endommagement par microfissures dans un milieu viscoélastique linéaire non vieillissant**. 214 p. Tese (Doutorado) — Université Paris-Est École Doctorale Modes, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 51.

PAVAN, R. C.; CREUS, G. J.; MAGHOUS, S. A simplified approach to continuous damage of composite materials and micromechanical analysis. **Composite Structures**, Elsevier Ltd, v. 91, n. 1, p. 84–94, 2009. ISSN 02638223. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.04.044>>. Citado 4 vezes nas páginas 88, 109, 112 e 115.

PENSEE, V.; KONDO, D. Micromechanics of anisotropic brittle damage: Comparative analysis between a stress based and a strain based formulation. **Mechanics of Materials**, v. 35, n. 8, p. 747–761, 2003. ISSN 01676636. Citado 2 vezes nas páginas 112 e 117.

PENSÉE, V.; KONDO, D.; DORMIEUX, L. Micromechanical Analysis of Anisotropic Damage in Brittle Materials. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 128, n. 8, p. 889–897, 2002. ISSN 0733-9399. Citado na página 25.

WULFINGHOFF, S.; FASSIN, M.; REESE, S. A damage growth criterion for anisotropic damage models motivated from micromechanics. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Ltd, v. 121, p. 21–32, 2017. ISSN 00207683. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.04.038>>. Citado na página 25.

ZAOUI, A. Continuum micromechanics : survey. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 128, n. 8, p. 808–816, 2002. Citado na página 51.

ZHANG, L. **Engineering Properties of Rocks**. 2. ed. [S.l.]: Elsevier Ltd, 2016. 378 p. ISBN 9780128028339. Citado na página 68.

ZHU, Q.; KONDO, D.; SHAO, J. Micromechanical analysis of coupling between anisotropic damage and friction in quasi brittle materials: Role of the homogenization scheme. **International Journal of Solids and Structures**, v. 45, n. 5, p. 1385–1405, mar 2007. ISSN 00207683. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S002076830700399X>>. Citado na página 38.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A – COMPONENTES DO TENSOR $\frac{\partial \mathbb{C}(\phi)}{\partial \phi}$

Neste Apêndice são apresentadas expressões analíticas considerando uma matriz sólida com duas famílias de microfaturas perpendiculares, sendo o tensor de rigidez homogeneizado  $\mathbb{C}(\phi_1, \phi_2)$  dado pela Equação 3.20. Considerando os parâmetros adimensionais abaixo:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{3k^s + \mu^s}{3k^s + 4\mu^s}; & \kappa_2 &= \frac{3k_n^1 a_1}{3k^s + 4\mu^s}; & \kappa_3 &= \frac{3k_t^1 a_1}{3k^s + 4\mu^s}; \\ \kappa_4 &= \frac{\mu^s}{3k^s + 4\mu^s}; & \bar{\kappa}_2 &= \frac{3k_n^2 a_2}{3k^s + 4\mu^s}; & \bar{\kappa}_3 &= \frac{3k_t^2 a_2}{3k^s + 4\mu^s}, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

com  $a_1 = (\phi_1/\mathcal{N}_1)^{1/3}$  e  $a_2 = (\phi_2/\mathcal{N}_2)^{1/3}$ , definem-se as seguintes componentes para  $\partial \mathbb{C} / \partial \phi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{C}_{1111}}{\partial \phi_1} &= - \frac{(3k^s + 4\mu^s)(\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)\mathbb{C}_1}{\left[3\beta + 12\pi^2\kappa_1\kappa_4(\phi_1 + \phi_2 + \frac{16}{3}\phi_1\phi_2) + 4\pi(\kappa_2\phi_2 + \bar{\kappa}_2\phi_1)\right]^2} \\ \frac{\partial \mathbb{C}_{1122}}{\partial \phi_1} &= \frac{\partial \mathbb{C}_{2211}}{\partial \phi_1} = - \frac{(3k^s - 2\mu^s)(\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)\mathbb{C}_2}{\left[3\beta + 12\pi^2\kappa_1\kappa_4(\phi_1 + \phi_2 + \frac{16}{3}\phi_1\phi_2) + 4\pi(\kappa_2\phi_2 + \bar{\kappa}_2\phi_1)\right]^2} \\ \frac{\partial \mathbb{C}_{1133}}{\partial \phi_1} &= \frac{\partial \mathbb{C}_{3311}}{\partial \phi_1} = - \frac{(3k^s - 2\mu^s)\mathbb{C}_3}{\left[3\beta + 12\pi^2\kappa_1\kappa_4(\phi_1 + \phi_2 + \frac{16}{3}\phi_1\phi_2) + 4\pi(\kappa_2\phi_2 + \bar{\kappa}_2\phi_1)\right]^2} \\ \frac{\partial \mathbb{C}_{2222}}{\partial \phi_1} &= - \frac{(3k^s + 4\mu^s)\mathbb{C}_4}{\left[3\beta + 12\pi^2\kappa_1\kappa_4(\phi_1 + \phi_2 + \frac{16}{3}\phi_1\phi_2) + 4\pi(\kappa_2\phi_2 + \bar{\kappa}_2\phi_1)\right]^2} \\ \frac{\partial \mathbb{C}_{2233}}{\partial \phi_1} &= \frac{\partial \mathbb{C}_{3322}}{\partial \phi_1} = - \frac{(3k^s - 2\mu^s)[\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_4(\kappa_1 + \frac{8}{3}\phi_2)]\mathbb{C}_5}{\left[3\beta + 12\pi^2\kappa_1\kappa_4(\phi_1 + \phi_2 + \frac{16}{3}\phi_1\phi_2) + 4\pi(\kappa_2\phi_2 + \bar{\kappa}_2\phi_1)\right]^2} \\ \frac{\partial \mathbb{C}_{3333}}{\partial \phi_1} &= - \frac{(3k^s + 4\mu^s)[\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4(1 + \frac{16}{3}\phi_2)]\mathbb{C}_5}{\left[3\beta + 12\pi^2\kappa_1\kappa_4(\phi_1 + \phi_2 + \frac{16}{3}\phi_1\phi_2) + 4\pi(\kappa_2\phi_2 + \bar{\kappa}_2\phi_1)\right]^2} \\ \frac{\partial \mathbb{C}_{1212}}{\partial \phi_1} &= 0; & \frac{\partial \mathbb{C}_{2323}}{\partial \phi_1} &= -\mu^s \frac{16\pi\kappa_4\left[\frac{8}{3}\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4)\right]}{\left[4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4) + 16\pi\phi_1\kappa_4\right]^2} \\ \frac{\partial \mathbb{C}_{1313}}{\partial \phi_1} &= -\mu^s \frac{16\pi\kappa_4\mathbb{C}_6}{\left[\gamma + 144\pi^2\kappa_4^2(\phi_1 + \phi_2)(\kappa_1 + \kappa_4) + 64\pi\kappa_4(\kappa_3\phi_2 + \bar{\kappa}_3\phi_1)\right]^2} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{1111}}{\partial \phi_2} &= -\frac{(3k^s + 4\mu^s) [\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4 (1 + \frac{16}{3}\phi_1)] \bar{C}_1}{[3\beta + 12\pi^2\kappa_1\kappa_4 (\phi_1 + \phi_2 + \frac{16}{3}\phi_1\phi_2) + 4\pi(\kappa_2\phi_2 + \bar{\kappa}_2\phi_1)]^2} \\
\frac{\partial C_{1122}}{\partial \phi_2} &= \frac{\partial C_{2211}}{\partial \phi_2} = -\frac{(3k^s - 2\mu^s) [\kappa_2 + 3\pi\kappa_4 (\kappa_1 + \frac{8}{3}\phi_1)] \bar{C}_1}{[3\beta + 12\pi^2\kappa_1\kappa_4 (\phi_1 + \phi_2 + \frac{16}{3}\phi_1\phi_2) + 4\pi(\kappa_2\phi_2 + \bar{\kappa}_2\phi_1)]^2} \\
\frac{\partial C_{1133}}{\partial \phi_2} &= \frac{\partial C_{3311}}{\partial \phi_2} = -\frac{(3k^s - 2\mu^s) \bar{C}_2}{[3\beta + 12\pi^2\kappa_1\kappa_4 (\phi_1 + \phi_2 + \frac{16}{3}\phi_1\phi_2) + 4\pi(\kappa_2\phi_2 + \bar{\kappa}_2\phi_1)]^2} \\
\frac{\partial C_{2222}}{\partial \phi_2} &= -\frac{(3k^s + 4\mu^s) \bar{C}_3}{[3\beta + 12\pi^2\kappa_1\kappa_4 (\phi_1 + \phi_2 + \frac{16}{3}\phi_1\phi_2) + 4\pi(\kappa_2\phi_2 + \bar{\kappa}_2\phi_1)]^2} \\
\frac{\partial C_{2233}}{\partial \phi_2} &= \frac{\partial C_{3322}}{\partial \phi_2} = -\frac{(3k^s - 2\mu^s) (\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) \bar{C}_4}{[3\beta + 12\pi^2\kappa_1\kappa_4 (\phi_1 + \phi_2 + \frac{16}{3}\phi_1\phi_2) + 4\pi(\kappa_2\phi_2 + \bar{\kappa}_2\phi_1)]^2} \\
\frac{\partial C_{3333}}{\partial \phi_2} &= -\frac{(3k^s + 4\mu^s) (\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) \bar{C}_5}{[3\beta + 12\pi^2\kappa_1\kappa_4 (\phi_1 + \phi_2 + \frac{16}{3}\phi_1\phi_2) + 4\pi(\kappa_2\phi_2 + \bar{\kappa}_2\phi_1)]^2} \\
\frac{\partial C_{1212}}{\partial \phi_2} &= -\mu^s \frac{16\pi\kappa_4 [\frac{8}{3}\bar{\kappa}_3 + 9\pi\kappa_4 (\kappa_1 + \kappa_4)]}{[4\bar{\kappa}_3 + 9\pi\kappa_4 (\kappa_1 + \kappa_4) + 16\pi\phi_2\kappa_4]^2} ; \quad \frac{\partial C_{2323}}{\partial \phi_2} = 0 \\
\frac{\partial C_{1313}}{\partial \phi_2} &= -\mu^s \frac{16\pi\kappa_4 \bar{C}_6}{[\gamma + 144\pi^2\kappa_4^2 (\phi_1 + \phi_2) (\kappa_1 + \kappa_4) + 64\pi\kappa_4 (\kappa_3\phi_2 + \bar{\kappa}_3\phi_1)]^2}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

onde  $\beta = (\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) (\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)$  e  $\gamma = (4\kappa_3 + 9\pi(\kappa_1 + \kappa_4)\kappa_4) (4\bar{\kappa}_3 + 9\pi(\kappa_1 + \kappa_4)\kappa_4)$ , enquanto as funções adimensionais  $\mathcal{C}_j(k^s, \mu^s, a_i k_n^i, a_i k_t^i)$  e  $\bar{\mathcal{C}}_j(k^s, \mu^s, a_i k_n^i, a_i k_t^i)$  são definidas pelas expressões abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= 4\pi(\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) (1 - 12\kappa_1\kappa_4) (\frac{2}{3}\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) \\
\mathcal{C}_2 &= 4\pi[(\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) (1 - 6\kappa_4) + 8\pi\phi_2\kappa_4(2\kappa_1 - 1)] (\frac{2}{3}\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) \\
\mathcal{C}_3 &= 4\pi(\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) [\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4 (1 + \frac{16}{3}\phi_2)] (\frac{2}{3}\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) \\
\mathcal{C}_4 &= 4\pi \left\{ (\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)^2 (1 - 12\kappa_1\kappa_4) + 16\pi\phi_2\kappa_4 [(\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) (\kappa_1 - 9\kappa_4 (\kappa_1 - \kappa_4)) \right. \\
&\quad \left. + 4\pi\phi_2\kappa_4 (3\kappa_4 + \kappa_1 (4\kappa_1 - 3))] \right\} (\frac{2}{3}\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) \\
\mathcal{C}_5 &= 4\pi[\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4 (1 + \frac{16}{3}\phi_2)] (\frac{2}{3}\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) \\
\mathcal{C}_6 &= (4\bar{\kappa}_3 + 9\pi\kappa_4 (\kappa_1 + \kappa_4))^2 [\frac{8}{3}\kappa_3 + 9\pi\kappa_4 (\kappa_1 + \kappa_4)]
\end{aligned} \tag{A.4}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{C}}_1 &= 4\pi[\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4(1 + \frac{16}{3}\phi_1)](\frac{2}{3}\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) \\
\bar{\mathcal{C}}_2 &= 4\pi(\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)[\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4(1 + \frac{16}{3}\phi_1)](\frac{2}{3}\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) \\
\bar{\mathcal{C}}_3 &= 4\pi\left\{(\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)^2(1 - 12\kappa_1\kappa_4) + 16\pi\phi_1\kappa_4[(\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)(\kappa_1 - 9\kappa_4(\kappa_1 - \kappa_4))\right. \\
&\quad \left.+ 4\pi\phi_1\kappa_4(3\kappa_4 + \kappa_1(4\kappa_1 - 3))]\right\}(\frac{2}{3}\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) \tag{A.5} \\
\bar{\mathcal{C}}_4 &= 4\pi[(\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)(1 - 6\kappa_4) + 8\pi\phi_1\kappa_4(2\kappa_1 - 1)](\frac{2}{3}\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) \\
\bar{\mathcal{C}}_5 &= 4\pi(\kappa_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4)(1 - 12\kappa_1\kappa_4)(\frac{2}{3}\bar{\kappa}_2 + 3\pi\kappa_1\kappa_4) \\
\bar{\mathcal{C}}_6 &= (4\kappa_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4))^2[\frac{8}{3}\bar{\kappa}_3 + 9\pi\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_4)]
\end{aligned}$$

## **ANEXOS**

## ANEXO A – COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY

Este Anexo apresenta o tensor de Eshelby  $S_i^e$  retirado de Mura (1987), específico para fraturas modeladas como esferoides oblatos. Dormieux et al. (2006b) destacam que para  $X_i \ll 1$  pode-se expandir os termos do tensor de Eshelby, segundo valores  $X_i$  de primeira ordem. Diante disso, apresentam-se as seguintes componentes não nulas do tensor de Eshelby, considerando a fratura normal ao eixo  $e_3$ :

$$\begin{aligned}
 S_{1111}^e = S_{2222}^e &= \frac{13 - 8\nu^s}{32(1 - \nu^s)} \pi X_i & S_{3333}^e &= 1 - \left( \frac{1 - 2\nu^s}{1 - \nu^s} \right) \frac{\pi}{4} X_i \\
 S_{1122}^e = S_{2211}^e &= \frac{8\nu^s - 1}{32(1 - \nu^s)} \pi X_i & S_{1133}^e = S_{2233}^e &= \frac{8\nu^s - 4}{32(1 - \nu^s)} \pi X_i \\
 S_{3311}^e = S_{3322}^e &= \frac{\nu^s}{(1 - \nu^s)} \left[ 1 - \left( \frac{4\nu^s + 1}{8\nu^s} \right) \pi X_i \right] \\
 S_{1212}^e &= \frac{7 - 8\nu^s}{32(1 - \nu^s)} \pi X_i & S_{2323}^e = S_{1313}^e &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{\nu^s - 2}{1 - \nu^s} \right) \frac{\pi}{4} X_i \right]
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde  $\nu^s = \frac{k^s - \frac{2}{3}\mu^s}{2k^s + \frac{2}{3}\mu^s}$  designa o coeficiente de Poisson para a matriz.