

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Solução da Equação do Transporte de  
Nêutrons Monoenergética via Transformada  
de Fourier**

por

Murilo Ferulio Gomes Tedesco

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Julio Cesar Lombaldo Fernandes  
Orientador

Porto Alegre, junho de 2023

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Tedesco, Murilo Ferulio Gomes

Solução da Equação do Transporte de Nêutrons Monoenergética via Transformada de Fourier / Murilo Ferulio Gomes Tedesco.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2023.

69 p.: il.

Dissertação (mestrado)— Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2023.

Orientador: Fernandes, Julio Cesar Lombaldo

Dissertação: Matemática Aplicada: Transporte de Partículas, Equação do Transporte, Fluxo de Nêutrons, Transformada de Fourier, Reatores Nucleares

# Solução da Equação do Transporte de Nêutrons Monoenergética via Transformada de Fourier

por

Murilo Ferulio Gomes Tedesco  
Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial  
para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Transporte de Partículas

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Lombaldo Fernandes

Banca examinadora:

Profa. Dra. Cibele Aparecida Ladeia  
PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Fernando Rodrigues de Oliveira  
IFRS - *Campus* Osório

Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró Vargas  
PGETEMA/PUCRS

Dissertação apresentada e aprovada em  
Maio de 2023.

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira  
Coordenador

*“A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens”*

*- René Descartes*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado todas as condições necessárias para que eu chegasse até aqui.

Ao meu orientador, professor Dr. Julio Cesar Lombaldo Fernandes, por todo o suporte que me foi dado desde o início do curso, incluindo a paciência de sempre responder minhas dúvidas e inseguranças repetitivas.

Aos meus pais, que sempre me incentivaram a estudar e me deram a base para que eu pudesse focar na realização deste trabalho e dos meus estudos de uma maneira geral.

A Diele, minha companheira em praticamente todos os aspectos da minha vida, por me ouvir e apoiar sempre que precisei.

A Jenifer, minha dupla acadêmica, que desde a graduação enfrenta comigo todas as dificuldades que nos aparecem sem hesitar.

Aos colegas do PPGMAp e demais amigos, que de alguma forma contribuíram comigo nesta trajetória.

Aos membros da banca, por aceitarem avaliar e contribuir com este trabalho, e em especial ao professor Dr. Fernando Rodrigues de Oliveira, que contribuiu na elaboração deste trabalho, e que também teve grande influência no meu ingresso neste programa de mestrado.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo suporte financeiro.

A UFRGS, especialmente ao PPGMAp, pela qualidade no ensino e no tratamento aos seus estudantes.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 A Energia Nuclear . . . . .	1
1.2 A Equação do Transporte e suas Variáveis . . . . .	6
1.3 Problema Proposto e Trabalhos Correlacionados . . . . .	12
<b>2 A EQUAÇÃO DO TRANSPORTE MONOENERGÉTICA E ESTACIONÁRIA</b> . . . . .	<b>14</b>
2.1 Geometria do Problema . . . . .	16
<b>3 SOLUÇÃO DO CASO MONOENERGÉTICO, ISOTRÓPICO E ESTACIONÁRIO DA EQUAÇÃO DO TRANSPORTE VIA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS</b> . . . . .	<b>19</b>
3.1 Soluções Assintóticas em um Meio sem Fonte . . . . .	19
3.2 Soluções Transientes em um Meio sem Fonte . . . . .	22
3.3 Completude e Ortogonalidade das Soluções Elementares . . . . .	24
3.4 Soluções em um Meio Infinito com Fonte Plana Isotrópica . . . . .	27

<b>4</b>	<b>SOLUÇÃO DO CASO MONOENERGÉTICO, ISOTRÓPICO E ESTACIONÁRIO DA EQUAÇÃO DO TRANSPORTE VIA TRANSFORMADA DE FOURIER . . . . .</b>	<b>32</b>
4.1	Soluções Assintóticas e Transientes . . . . .	36
<b>5</b>	<b>RESULTADOS OBTIDOS . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>65</b>

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Modelo simplificado de uma usina com reator do tipo PWR . . . . .	4
1.2	Partícula neutra no espaço. . . . .	7
2.1	Representação do plano considerado no problema. . . . .	16
4.1	Região usada na deformação do caminho de integração com $\text{Im}(k) \geq 0$ . . .	38
4.2	Região usada na deformação do caminho de integração com $\text{Im}(k) \leq 0$ . . .	48
5.1	Gráficos de $\phi(x)$ e $\phi_{as}(x)$ para $c = 0,1$ e $c = 0,2$ . . . . .	57
5.2	Gráficos de $\phi(x)$ e $\phi_{as}(x)$ para $c = 0,3$ e $c = 0,4$ . . . . .	57
5.3	Gráficos de $\phi(x)$ e $\phi_{as}(x)$ para $c = 0,5$ e $c = 0,6$ . . . . .	57
5.4	Gráficos de $\phi(x)$ e $\phi_{as}(x)$ para $c = 0,7$ e $c = 0,8$ . . . . .	58
5.5	Gráficos de $\phi(x)$ e $\phi_{as}(x)$ para $c = 0,9$ . . . . .	58
5.6	Comportamento de $\phi_{as}(x)$ e $\phi(x)$ conforme $c$ varia. . . . .	59
5.7	Diferença absoluta entre os resultados obtidos neste trabalho e os resultados obtidos por [4] para $\phi_{as}(x)/\phi(x)$ . . . . .	64



## LISTA DE TABELAS

3.1	Valores de $ v_0 $ ou $ iv_0 $ para diferentes valores de $c$ . . . . .	22
5.1	Análise da distância $x$ para a proximidade dos valores de $\phi_{as}(x)$ e $\phi(x)$	55
5.2	Comparação de $\phi_{as}(x)/\phi(x)$ entre este trabalho e [4] para $c = 0,1$ , $c = 0,2$ e $c = 0,3$ . . . . .	60
5.3	Comparação de $\phi_{as}(x)/\phi(x)$ entre este trabalho e [4] para $c = 0,4$ , $c = 0,5$ e $c = 0,6$ . . . . .	61
5.4	Comparação de $\phi_{as}(x)/\phi(x)$ entre este trabalho e [4] para $c = 0,7$ , $c = 0,8$ e $c = 0,9$ . . . . .	62

## LISTA DE SÍMBOLOS

$k_0$	Polo simples da função $\mathbb{F}(k, x)$
$\chi$	Função que depende só de $x$ usada na solução por separação de variáveis.
$\delta$	Função delta de Dirac.
$\lambda$	Função de $v$ presente na solução transiente.
$\mathbb{F}(k, x)$	Integrando da equação (4.41): $\left[ \frac{e^{ikx}}{ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} \right]$ .
$\mu$	Valor de $\cos \theta$ .
$\nu$	Probabilidade de que uma fissão em $\vec{r}$ de um nêutron com energia $E'$ gere um nêutron com energia $E$ em $\vec{r}$ .
$\Phi$	Fluxo angular de nêutrons [nêutrons/( $cm^2 \cdot s$ )].
$\phi$	Fluxo total de nêutrons [nêutrons/( $cm^2 \cdot s$ )].
$\phi_{as}$	Fluxo assintótico de nêutrons [nêutrons/( $cm^2 \cdot s$ )].
$\phi_{trans}$	Fluxo transiente de nêutrons [nêutrons/( $cm^2 \cdot s$ )].
$\psi$	Função que depende só de $\mu$ usada na solução por separação de variáveis.
$\psi_0^+$	Autofunção associada ao autovalor $\nu_0$ .
$\psi_0^-$	Autofunção associada ao autovalor $-\nu_0$ .
$\psi_\nu$	Autofunção associada ao autovalor $\nu$ .
$\sigma$	Seção de choque macroscópica total [ $cm^{-1}$ ].
$\sigma_\gamma$	Seção de choque macroscópica de captura radioativa [ $cm^{-1}$ ].
$\sigma_a$	Seção de choque macroscópica de absorção [ $cm^{-1}$ ].

$\sigma_f$	Seção de choque macroscópica de fissão [ $cm^{-1}$ ].
$\sigma_i$	Seção de choque macroscópica de uma interação do tipo $i$ [ $cm^{-1}$ ].
$\sigma_{n'}$	Seção de choque macroscópica de espalhamento inelástico [ $cm^{-1}$ ].
$\sigma_n$	Seção de choque macroscópica de espalhamento elástico [ $cm^{-1}$ ].
$\sigma_s$	Seção de choque macroscópica de espalhamento [ $cm^{-1}$ ].
$\theta$	Ângulo entre o eixo $z$ e o vetor direção $\Omega$ [ $rad$ ].
$v$	Autovalores contínuos da solução via separação de variáveis.
$v_0$	Autovalores discretos da solução via separação de variáveis.
$\varphi$	Ângulo entre o eixo $x$ e a projeção do vetor direção $\Omega$ no plano $xy$ [ $rad$ ].
$\vec{\Omega}$	Vetor que indica a direção dos nêutrons.
$\vec{r}$	Vetor posição do nêutron [ $cm$ ].
$\vec{z}$	vetor unitário na direção de $z$ [ $cm$ ].
$c$	Número médio de nêutrons emergindo por colisão.
$E$	Energia cinética dos nêutrons [ $eV$ ].
$f(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$	Probabilidade total de emergir um nêutron com direção $\vec{\Omega}$ de uma colisão sofrida por um nêutron de direção $\vec{\Omega}'$ .
$f(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$	Probabilidade total de emergir um nêutron em $\vec{r}$ , com direção $\vec{\Omega}$ de uma colisão sofrida por um nêutron de direção $\vec{\Omega}'$ em $\vec{r}$ .
$F(k, \mu)$	Transformada de fourier da função $\Phi(x, \mu)$
$f_i(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$	Probabilidade de emergir um nêutron em $\vec{r}$ , com direção $\vec{\Omega}$ e energia $E$ de uma colisão do tipo $i$ sofrida por um nêutron de direção $\vec{\Omega}'$ energia $E'$ em $\vec{r}$ .

$G$	Função de Green.
$k$	Variável obtida a partir de $x$ com a transformada de Fourier.
$N$	Densidade angular de nêutrons [nêutrons/ $cm^3$ ].
$n$	Densidade de nêutrons [nêutrons/ $cm^3$ ].
$P[.]$	Operador que implica a utilização do valor principal de Cauchy na integração.
$Q$	Fonte de nêutrons [nêutrons/( $cm^3 \cdot s$ )].
$t$	Tempo [s].
$v$	Magnitude da velocidade dos nêutrons [ $cm/s$ ].
$x$	Livre caminho médio de colisão [cm].
$x_0$	Posição da Fonte de nêutrons em livre caminho médio de colisão [cm].

## RESUMO

Neste trabalho é apresentada a solução analítica da equação do transporte de nêutrons monoenergética, isotrópica e estacionária em geometria cartesiana unidimensional. A fim de servir de base de comparação, inicialmente apresenta-se a solução do problema via separação de variáveis, e em seguida resolve-se o problema através do método da transformada de Fourier, sendo que ambas as soluções apresentadas estão baseadas na obra de Bell e Glasstone [1]. A transformada de Fourier é aplicada a equação do transporte, e após a obtenção de uma solução no espaço transformado, é utilizado o teorema de resíduos para obter a transformada inversa de Fourier do problema proposto. Assim foi obtida a solução para o fluxo total de nêutrons. Utilizando Python como linguagem de programação, foram apresentados gráficos e tabelas com resultados obtidos a partir da solução analítica encontrada. Estes resultados numéricos são por vezes comparados aos obtidos por [4], e nota-se uma similaridade muito grande entre os os valores obtidos neste trabalho com os resultados de Bell e Glasstone [1].

# ABSTRACT

This work presents the analytical solution of the monoenergetic, isotropic, and stationary neutron transport equation in one-dimensional Cartesian geometry. In order to serve as a basis for comparison, the solution to the problem is initially presented using variable separation, and then the problem is solved using the Fourier transform method. Both solutions presented are supported by the work of Bell and Glasstone [1]. The Fourier transform is applied to the transport equation, and after obtaining a solution in the transformed space, the residue theorem is used to obtain the inverse Fourier transform of the proposed problem. Thus, the solution that represents the total neutron flux was obtained. Using Python as a programming language, graphs and tables were presented with results obtained from the analytical solution found. These numerical results are sometimes compared to those obtained by [4], and a very high similarity is noted between the values obtained in this work and the results of Bell and Glasstone [1].

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 A Energia Nuclear

O estudo da energia nuclear iniciou-se há muitos séculos atrás, com o avanço do conhecimento nos ramos da química e física. No entanto, a era moderna do desenvolvimento desta ciência se deu a partir de 1879, com os estudos de Crookes, que envolveram a ionização de um gás por uma descarga elétrica, conforme apontam os autores em [13].

Juntamente com Crookes, até o fim do primeiro terço do século XX diversos outros trabalhos contribuíram no estudo do átomo, seu núcleo, e das reações atômicas. Porém, foi na década de 1930 que a fissão foi descoberta, mais precisamente com o trabalho de Hahn e Strassmann de 1939, que perceberam o surgimento do elemento Bário após o bombardeamento de nêutrons sobre o Urânio, e também com o trabalho de Meitner e Frisch de 1939 que sugeriram que este fato observado por Hahn e Strassmann deveria ser devido a fissão [13, 9].

Juntamente com esta hipótese levantada, chegou-se em seguida a um acordo de que não apenas um novo elemento poderia ser produzido a partir de outro devido a fissão, mas também novos nêutrons poderiam ser liberados no processo, possibilitando assim uma reação em cadeia, que se controlada poderia ser utilizada na produção de energia, mas que se não fosse controlada, poderia gerar explosões desastrosas [9].

Esse potencial energético da reação em cadeia aguçou o ímpeto em estudar sobre o tema devido a segunda guerra mundial que estava acontecendo neste mesmo período histórico. Portanto, houve um avanço científico acelerado a respeito das reações nucleares nesse período, embora muitas das intenções destes avanços tenham sido voltadas ao desenvolvimento de armas nucleares [13].

Em 1942, Enrico Fermi e sua equipe, que já vinham contribuindo ativamente no desenvolvimento científico a respeito da energia nuclear, desenvolveram o primeiro reator nuclear, nomeado Chicago Pile-1 (CP-1), que utilizava urânio natural e grafite. É interessante destacar que o modelo de estratégia de segurança deste primeiro reator nuclear é o mesmo utilizado até os dias atuais, logicamente com os devidos aprimoramentos realizados ao longo dos anos [9].

A partir da construção do CP-1, vários outros reatores passaram a ser construídos, por motivações civis e militares, e assim a tecnologia a respeito dos reatores e dos seus sistemas de segurança passou a evoluir [9]. Após a segunda guerra mundial, houve um esforço no combate ao uso militar da energia nuclear, e um incentivo ao uso dessa nova fonte de energia para fins pacíficos [13].

Assim, em 1951, foi desenvolvido em Idaho o EBR-I, que foi o primeiro reator nuclear capaz de gerar energia elétrica no mundo, utilizando como combustível o Plutônio 239 e como refrigerador uma liga Na-K [9]. No entanto, poucos anos depois mostrou-se que a água servia como um eficiente moderador, e em 1955 constatou-se que um reator de ebulição poderia ser seguro, levando ao primeiro reator comercial, do tipo BWR (Boiling Water Reactor), que foi colocado em operação no ano de 1960 em Illinois [13].

Portanto, os reatores comerciais desenvolvidos nos EUA passaram a ser do tipo LWR (Light Water Reactor), incluindo os PWR (Pressurized Water Reactor), e os BWR (Boiling Water Reactor). O desenvolvimento dos primeiros reatores nucleares em outros locais como na França e na Grã-Bretanha se deu utilizando um gás como refrigerador e grafite como moderador, devido aos problemas com a tecnologia de enriquecimento do Urânio. No Canadá, pelo mesmo motivo, desenvolveram-se reatores refrigerados com água pesada, e na União Soviética foram desenvolvidos os reatores RBMK (moderados por grafite e resfriados com água) e os reatores VVER de água pressurizada [9].



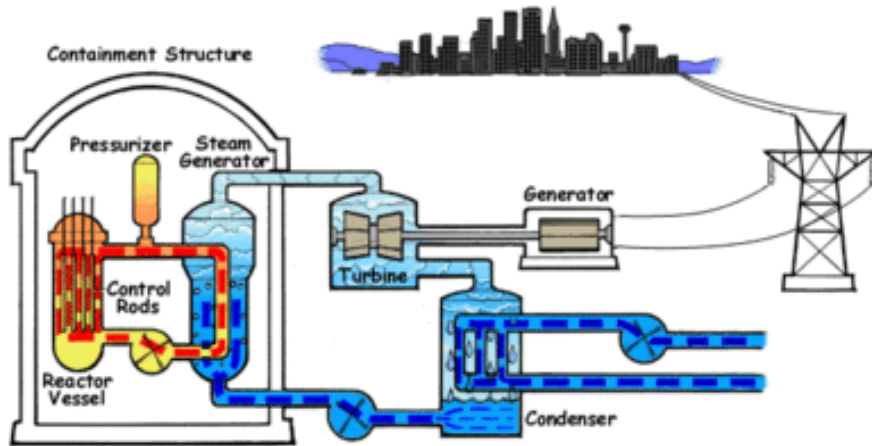
As medidas de segurança para esses projetos de reatores nucleares também evoluíram ao longo do tempo. Desde os anos 1950 diversos sistemas de regulamentações a respeito da segurança das usinas nucleares foram adotados, conforme é possível ler em [9, p.684-686]. Vale destacar que essas regulamentações passaram por ajustes naturais ao longo do tempo, mas também devido aos acidentes nucleares que ocorreram, como os exemplos de Chernobyl em 1986, e Fukushima em 2011 [9].

Com relação a opinião pública, desde os anos 1960, diversos eventos como movimentos ambientalistas, movimentos contra o governo, divergências entre cientistas, ou ainda a associação popularmente feita entre os reatores nucleares e as armas nucleares passaram a gerar uma opinião pública majoritariamente contrária com relação ao uso da energia nuclear nos Estados Unidos. Os acidentes nucleares ocorridos também não contribuíram para uma opinião pública favorável com respeito a esse tema, assim como também não contribui nesse sentido o enfoque dado pela mídia aos perigos das catastrofes nucleares, através de programas de entretenimento, revistas, jornais, entre outros. que normalmente temem o desenvolvimento nuclear [13].

Todavia, os níveis de segurança apresentados nos últimos anos por reatores nucleares, principalmente nos Estados Unidos, bem como o aumento da necessidade de energia e a necessidade de uma energia que não agrave ainda mais o aquecimento global, tem gerado uma melhora da opinião pública a respeito da energia nuclear neste século [13]. A energia nuclear praticamente não emite gases de efeito estufa como termelétricas, não depende de condições climáticas como a energia solar ou a energia eólica, e também não corrobora com a degradação do meio biológico como no caso das hidrelétricas, e isso é o que torna muito especial o potencial das usinas nucleares [10].

Uma usina nuclear funciona basicamente utilizando a energia produzida pela fissão nuclear, que ocorre dentro do reator, para aquecer algum elemento, como por exemplo a água, e transformá-lo em vapor, fazendo com que esse vapor movi-

Figura 1.1: Modelo simplificado de uma usina com reator do tipo PWR



Fonte: Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Pressurized\\_water\\_reactor](https://en.wikipedia.org/wiki/Pressurized_water_reactor)>. Acesso em: 07/04/2023.

mente uma turbina e gere energia elétrica [19]. A figura 1.1 apresenta um modelo simplificado de uma usina com um reator do tipo PWR, onde o que está representado em vermelho e laranja é água quente, utilizada como moderador e refrigerador, e em azul a água utilizada como refrigerador e que também é vaporizada para girar a turbina e gerar energia elétrica.

Neste trabalho, o interesse está na relação entre os nêutrons e os elementos que estão no núcleo do reator nuclear, que podem ser modeladas através da equação linear do transporte de Boltzmann [1]. Diversas interações podem ocorrer entre nêutrons e núcleos atômicos no reator nuclear, porém a fissão é a responsável pela liberação de energia. No processo de fissão, um núcleo atômico do elemento combustível do reator é atingido por um nêutron e é dividido em dois produtos de fissão, liberando também dois ou três nêutrons, raios gama e neutrinos [12]. Deste fenômeno, dois pontos podem ser observados:

O primeiro deles é que há uma diferença de massa entre o a soma das massas dos produtos de fissão e a massa do elemento combustível, sendo a segunda maior do que a primeira. É dessa diferença de massa que vem a energia liberada

no processo da fissão nuclear, e essa relação entre massa e energia é explicada pela equação  $E = mc^2$  de Einstein. [2, 17].

O segundo é que os nêutrons que são liberados podem colidir com outros núcleos atômicos e gerar novas fissões nucleares, gerando uma reação em cadeia capaz de produzir grandes quantidades de energia [13]. Para que essa reação em cadeia se mantenha é necessário que haja combustível suficiente e que um número suficiente dos nêutrons liberados produzam novas fissões e não sofram outras reações que impeçam a existência de novas fissões [17].

Os nêutrons que são emitidos no processo de fissão possuem grandes quantidades de energia, e são utilizados para produzir novas fissões com estas grandes quantidades de energia nos chamados reatores rápidos. No entanto, existem os reatores térmicos, que utilizam algum elemento como moderador para desacelerar estes nêutrons emitidos, até que os mesmos se tornem nêutrons térmicos, e aumentar a probabilidade de que novas fissões ocorram [3].

No entanto, a reação em cadeia em um reator nuclear precisa ser controlada, de modo que gere energia de forma eficiente e segura. Por isso, controla-se esta reação em cadeia no núcleo do reator através de hastes de controle que são compostas por elementos que absorvem nêutrons. Estas hastes são usadas em casos de emergência para desativar o reator, para compensar alguma condição de operação do reator, ou ainda são inseridas ou removidas durante o funcionamento do reator para controlar o fluxo de nêutrons [18, 2].

É claro que existem diversos outros componentes em uma usina nuclear, porém não é do interesse deste trabalho abordá-los. Ainda assim, pode-se dizer que é basicamente da maneira como foi explicado até aqui que se dá o processo de geração de energia em uma usina nuclear.

## 1.2 A Equação do Transporte e suas Variáveis

Nesta seção, serão apresentados os conceitos iniciais a respeito da teoria do transporte de nêutrons, a equação do transporte, as variáveis envolvidas na mesma e o que elas representam. A teoria do transporte de partículas possui diversas aplicabilidades como dinâmica de gases rarefeitos, astrofísica, reações nucleares, entre outras, conforme apontam Duderstadt e Martin [6]. Neste trabalho, o estudo foca na aplicação desta teoria na modelagem do comportamento dos nêutrons dentro do núcleo de um reator nuclear.

A equação do transporte, desenvolvida por Boltzmann, pode ser utilizada para descrever a distribuição no espaço, na energia e no tempo dos nêutrons no núcleo de um reator nuclear. Esta distribuição é o que governa o comportamento de um reator nuclear, no entanto, a equação íntegro-diferencial possui três variáveis para a posição, duas angulares, uma energética e uma temporal, o que dificulta a sua resolução [1]. Inicialmente, serão abordadas algumas das variáveis envolvidas na equação do transporte, para posteriormente defini-la. Estas definições são encontradas em [1, 6, 13, 11].

Descreve-se uma população de nêutrons através da densidade angular de nêutrons, que consiste no número esperado de nêutrons na posição  $\vec{r}$  com direção dada pelo vetor unitário  $\vec{\Omega}$  e energia  $E$  no tempo  $t$ . Definindo então que  $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  representa a densidade angular de nêutrons, pode-se dizer que:

$$N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) dV d\vec{\Omega} dE \quad (1.1)$$

representa o número esperado de nêutrons no elemento de volume  $dV$  em torno de  $r$ , com direções em  $d\vec{\Omega}$  em torno de  $\vec{\Omega}$  e energias em  $dE$  em torno de  $E$ , no tempo  $t$ , como é mostrado na figura 1.2:

A densidade de neutrons representa o número de nêutrons esperados em  $\vec{r}$ , com energia  $E$ , no tempo  $t$ , e não depende da direção  $\vec{\Omega}$ . Esta função é

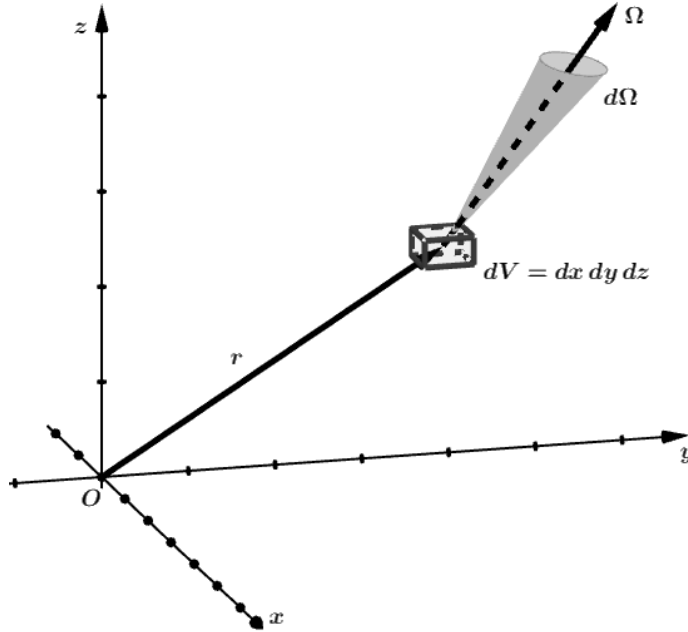


Figura 1.2: Partícula neutra no espaço.

representada por  $n(\vec{r}, E, t)$ , e é definida pela integração da densidade angular de nêutrons com respeito a todos os ângulos sólidos:

$$n(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega} \quad (1.2)$$

onde  $4\pi$  significa que a integração é feita em todas as direções.

O fluxo escalar ou fluxo angular de nêutrons,  $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$ , é definido pelo produto da densidade angular de nêutrons  $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  por  $v$  que é a magnitude da velocidade dos nêutrons.

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) = v N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \quad (1.3)$$

Como a integral em todos os ângulos sólidos de  $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  é  $n(\vec{r}, E, t)$ , define-se o fluxo total  $\phi(\vec{r}, E, t)$ , como a integral do fluxo angular em todas as direções, ou como o produto de  $v$  e  $n(\vec{r}, E, t)$ , isto é,

$$\phi(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega} = v n(\vec{r}, E, t) \quad (1.4)$$

Existem os nêutrons que podem surgir em  $\vec{r}$ , com direção  $\vec{\Omega}$ , energia  $E$ , no tempo  $t$  por meio de fontes, as quais são referidas por  $Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$ . Elas representam a probabilidade por unidade de tempo de um nêutron de energia  $E$ , no tempo  $t$ , surgir em  $\vec{r}$  com direção  $\vec{\Omega}$ . Conseqüentemente,  $Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)dV d\vec{\Omega} dE$  é a taxa esperada de que nêutrons apareçam no volume  $dV$  com direção em  $d\vec{\Omega}$  e energia em  $dE$ .

Além disso, existem também os nêutrons dependentes da densidade na posição  $\vec{r}$ , direção  $\vec{\Omega}$ , energia  $E$ , no tempo  $t$ , que podem permanecer ou sair deste grupo de nêutrons dependendo das interações que sofrerem. Nomeia-se como  $\sigma(\vec{r}, E)$  a seção de choque macroscópica total de um nêutron na posição  $\vec{r}$ , com energia  $E$ , que é a soma de todas os possíveis tipos de interações entre um nêutron e um núcleo atômico.

Os possíveis tipos de interações que podem ocorrer em uma colisão de um nêutron com um núcleo são tratados matematicamente através das seções de choque macroscópicas parciais. Existem as seções de choque de espalhamento  $\sigma_s(\vec{r}, E)$  que são a soma das seções de choque de espalhamento elástico e inelástico,  $\sigma_n(\vec{r}, E)$  e  $\sigma_{n'}(\vec{r}, E)$ , respectivamente. Existem também as seções de choque de absorção  $\sigma_a(\vec{r}, E)$  que correspondem a soma das seções de choque de fissão  $\sigma_f(\vec{r}, E)$  e das seções de choque de captura radioativa  $\sigma_\gamma(\vec{r}, E)$ . Além destas, existem também outras seções de choque, mas que não são tão relevantes no estudo dos reatores nucleares [1].

Essas seções de choque macroscópicas medem de maneira geral as probabilidades de que cada tipo de interação entre nêutron e núcleo ocorra na posição  $\vec{r}$ , e energia  $E$  no meio, ou seja, para diferentes tipos de meios ou elementos, existem diferentes valores para as seções de choque macroscópicas.

Com isso, pode-se introduzir o conceito de seção de choque diferencial, que consiste na probabilidade de que nêutrons de direção  $\vec{\Omega}$  e energia  $E$  sejam

produzidos por uma colisão do tipo  $i$  de um nêutron de direção  $\vec{\Omega}'$  e energia  $E'$  com um núcleo.

A seção de choque diferencial é representada por  $\sigma_i(\vec{r}, E') f_i(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$ , onde  $\sigma_i$  é a seção de choque de uma reação do tipo  $i$ , e  $f_i(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) d\vec{\Omega} dE$  é a probabilidade de que se um nêutron de direção  $\vec{\Omega}'$  e energia  $E'$  tiver uma colisão do tipo  $i$ , surgirá dessa colisão um nêutron de direção  $\vec{\Omega}$  e energia  $E$ .

Para cada tipo de reação  $i$  possível, a integração  $\int \int f_i(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) d\vec{\Omega} dE$  apresenta diferentes resultados. Por exemplo, para espalhamento elástico ou inelástico, um nêutron emerge a cada colisão de um nêutron com um núcleo, portanto o valor da integral é 1 nestes casos. Já para reações em que não emergem nêutrons da colisão, o valor de  $f$ , e portanto da integral, é zero.

No caso da fissão, assumindo que os nêutrons são emitidos isotropicamente (de forma simétrica), têm-se:

$$f_f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) d\vec{\Omega} dE = \frac{1}{4\pi} \nu(\vec{r}; E' \rightarrow E) d\vec{\Omega} dE \quad (1.5)$$

onde  $\nu(\vec{r}, E' \rightarrow E)$  é a probabilidade de que a fissão causada por um nêutron com energia  $E$  em  $r$  seja levado a um nêutron em  $dE$ .

A probabilidade total de transferência de um nêutron de  $\vec{\Omega}', E'$  para  $\vec{\Omega}, E$  é dada pela multiplicação de  $\sigma(\vec{r}, E') f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E)$ , onde  $\sigma(\vec{r}, E)$  é a seção de choque macroscópica total, que representa a soma de todas as seções de choque macroscópicas. Assim, pode-se escrever

$$\sigma(\vec{r}, E') f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) = \sum_i \sigma_i(\vec{r}, E') f_i(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \quad (1.6)$$

onde a soma em  $i$  considera cada uma das possíveis interações do nêutron com o núcleo.

Na integração sobre todas as direções  $\vec{\Omega}$  e energias  $E$ :

$$\int \int \sigma(\vec{r}, E') f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) d\vec{\Omega} dE = \int \int \sum_i \sigma_i(\vec{r}, E') f_i(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \vec{\Omega} dE \quad (1.7)$$

$$\implies \sigma(\vec{r}, E') \int \int f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) d\vec{\Omega} dE = \sum_i \left[ \sigma_i(\vec{r}, E') \int \int f_i(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \vec{\Omega} dE \right] \quad (1.8)$$

$$\implies \int \int f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) d\vec{\Omega} dE = \frac{\sum_i \left[ \sigma_i(\vec{r}, E') \int \int f_i(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \vec{\Omega} dE \right]}{\sigma(\vec{r}, E')} \equiv c(\vec{r}, E) \quad (1.9)$$

onde  $c(\vec{r}, E)$  é o número médio de nêutrons emergindo por colisão de nêutrons com energia  $E'$  em  $\vec{r}$ . Apesar de definido como uma função em (1.9),  $c$  é tomado como uma constante neste trabalho. Por exemplo, para colisões em que não emergem nêutrons, toma-se  $c = 0$ , nos casos de espalhamento,  $c = 1$ , e assim por diante.

Por fim, definindo  $Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  como o número de nêutrons em  $\vec{r}$ , com direção  $\vec{\Omega}$  e energia  $E$  que são provenientes de fontes de nêutrons, fica possível determinar a partir de agora a equação do transporte em sua forma mais geral.

A equação do transporte dada em termos do fluxo angular de nêutrons é um balanço entre os nêutrons que estão entrando e saindo da posição  $\vec{r}$ , com determinada direção  $\vec{\Omega}$ , e energia  $E$  no tempo  $t$ .

Têm-se que a variação do fluxo angular de nêutrons com respeito ao tempo em  $\vec{r}$ , direção  $\vec{\Omega}$ , e energia  $E$ , dividido pela velocidade escalar dos nêutrons  $v$ , é dada por:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)}{\partial t} = [\text{Nêutrons entrando no grupo}] - [\text{Nêutrons saindo do grupo}]$$



onde o termo grupo representa o grupo de nêutrons na posição  $\vec{r}$ , com direção  $\vec{\Omega}$ , e energia  $E$  no tempo  $t$ .

Os nêutrons podem entrar ou sair do grupo pelos seguintes motivos:

1. Nêutrons que surgem no grupo devido a uma fonte desconhecida.
2. Nêutrons que possuíam outras direções e energias mas sofreram colisões e entraram no grupo.
3. Nêutrons que entram no grupo devido ao fluxo.
4. Nêutrons que saem do grupo sem sofrer colisões devido ao fluxo.
5. Nêutrons que sofrem colisões e são espalhados para outras direções ou energias, ou ainda que são absorvidos.

A integral dupla  $\int \int \sigma(\vec{r}, E') f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) d\vec{\Omega}' dE'$  representa os nêutrons que chegam em  $\vec{r}$ , com direção  $\vec{\Omega}$ , energia  $E$ , no tempo  $t$  como resultado de colisões de nêutrons que pertenciam a grupos com outras energias  $dE'$  em torno de  $E'$  e outras direções  $d\vec{\Omega}'$  em torno de  $\vec{\Omega}'$ . Como já mencionado,  $Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  são os nêutrons em  $\vec{r}$ , com direção  $\vec{\Omega}$ , energia  $E$ , no tempo  $t$  provenientes de fontes de nêutrons.

Têm-se também  $\vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  que representa a diferença entre os nêutrons que entram e saem deste grupo devido ao fluxo dos nêutrons, isto é, são nêutrons que não sofreram colisões e entram ou saem do grupo seguindo o fluxo dos nêutrons. E, por fim,  $\sigma(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  representa os nêutrons que saem deste grupo por terem sofrido algum tipo de colisão.

Portanto, a equação do transporte, pode ser dada, de acordo por [1], através da equação (1.10).

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)}{\partial t} + \vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) + \sigma(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$$

$$= \int \int \sigma(\vec{r}, E') f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E', t) d\vec{\Omega}' dE' + Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \quad (1.10)$$

### 1.3 Problema Proposto e Trabalhos Correlacionados

Devido as dificuldades em resolver esta equação íntegro-diferencial que possui sete variáveis independentes, neste trabalho busca-se resolver analiticamente, através do método da transformada de Fourier, a equação do transporte monoenergética, isotrópica e estacionária em geometria cartesiana unidimensional.

Além disso, para efeito de comparação, a solução do mesmo problema pelo método da separação de variáveis será apresentada. As soluções pelo método da separação de variáveis e pelo método da Transformada de Fourier foram apresentadas por Bell e Glasstone em [1], e portanto serviram de suporte para este trabalho. No entanto, um dos objetivos deste trabalho é apresentar e analisar a solução dada por [1] pelo método da transformada de Fourier de maneira mais completa, no sentido de que serão apresentados resultados analíticos mais detalhados, e também serão feitas mais análises gráficas e numéricas a partir da solução analítica obtida.

A solução deste problema via separação de variáveis, que foi apresentada por Bell e Glasstone, foi desenvolvida por Case e Zweifel [5], o que faz com que o método seja conhecido também por método Case [1]. Além disso, Case, Hoffmann e Placzek [4] resolveram através de aproximações a equação do transporte com as mesmas condições que serão utilizadas neste trabalho e apresentaram uma série de resultados numéricos para o fluxo total de nêutrons que servirão de base de comparação com os resultados deste trabalho.

Além de Case, Hoffmann e Placzek [4], Case e Zweifel [5], e de Bell e Glasstone [1], é possível citar o trabalho de Gonçalves [8], que dentre outros problemas, resolveu analiticamente a equação do transporte de nêutrons monoenergética, isotrópica, em geometria cartesiana unidimensional. O método utilizado pelo autor

foi usar derivadas com respeito a variável angular da equação do transporte até a ordem que permitisse eliminar o termo integral da equação. Com este método aplicado neste problema, o autor obteve os mesmos resultados do método empregado por Case e Zweifel [5], com algumas diferenças devido a condições de normalização utilizadas pelo último.

Encontrou-se certa dificuldade em obter na literatura outros trabalhos que resolvessem o mesmo problema proposto aqui através do método da transformada de Fourier. No entanto é válido mencionar ainda o trabalho de Palmeri [14] que em 1987 mostrou a utilidade das transformadas integrais na resolução da equação do transporte monoenergética, isotrópica, dependente do tempo em geometria plana. A Transformada de Fourier foi utilizada na variável espacial, enquanto a Transformada de Laplace foi utilizada na variável temporal. Neste artigo, é destacada a validade das transformadas integrais na resolução da equação do transporte ao comparar as soluções com as que são obtidas por outros métodos. No entanto, é mencionado o aspecto negativo de que o método empregado no trabalho só pode ser usado em problemas de espalhamento isotrópico e em meio infinito.

O destaque a este trabalho é válido porque mostra também a relevância do método da Transformada de Fourier na resolução de casos mais complexos da equação do transporte, e isso serve de motivação para o autor do presente estudo, pois fica claro que a transformada de Fourier trabalhada aqui poderá ser utilizada como método de solução em trabalhos futuros envolvendo a equação do transporte.

Este trabalho está organizado em seis capítulos. No capítulo 2, é apresentado o problema que será resolvido neste trabalho, no capítulo 3 é apresentada a solução do problema pelo método da separação de variáveis conforme proposto por Bell e Glasstone [1], e no capítulo 4 o problema é resolvido através do método da transformada de Fourier. Por fim, no capítulo 5 são apresentados alguns resultados analíticos e numéricos a partir das soluções obtidas, e o capítulo 6 é destinado as considerações finais.

## 2 A EQUAÇÃO DO TRANSPORTE MONOENERGÉTICA E ESTACIONÁRIA

A importância da equação do transporte monoenergética está tanto no fato de que ela é um problema inicial no estudo da teoria do transporte, quanto no fato de que ela serve de base na resolução de problemas multigrupo, pois os mesmos podem ser abordados através de uma série de equações monoenergéticas [1, 14].

Existem também as situações em que as seções de choque podem ser consideradas como independentes da energia. Nestes casos, ao integrar sobre todas as energias a equação do transporte conforme definida na equação (1.10), chega-se um problema monoenergético equivalente [1]. E por fim, algumas das técnicas desenvolvidas no estudo do caso monoenergético da equação do transporte podem ser utilizadas nos problemas de transporte de elétrons que podem ser modelados pela equação de Boltzmann linearizada [14].

Como feito por Bell e Glasstone [1], será postulado aqui que as seções de choque não dependem da energia e partindo daí será obtida a equação do transporte monoenergética e estacionária.

Inicialmente, tomando a equação do transporte como definida em (1.10), porém, considerando aqui o caso estacionário, portanto desconsiderando a derivada  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  e a variável temporal das funções que compõem a equação do transporte, chega-se em

$$\vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) + \sigma(\vec{r}, E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) = \int \int \sigma(\vec{r}, E') f(\vec{r}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E') d\vec{\Omega}' dE' + Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E). \quad (2.1)$$

Conforme postulado que as seções de choque não dependem da energia, então

$$\sigma(\vec{r}, E) = \sigma(\vec{r}, E') = \sigma(\vec{r}). \quad (2.2)$$

Com as seções de choque independentes do grupo de energia, a distribuição angular de nêutrons emergindo de uma colisão também não deve depender da energia, portanto, normalizando a função  $f(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$  a unidade, isto é

$$\int f(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = 1 \quad (2.3)$$

pode-se reescrever (1.9) como

$$\int \int f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) dE d\vec{\Omega} = c(\vec{r}) \int f(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (2.4)$$

$$\implies \int f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) dE = c(\vec{r}) f(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \quad (2.5)$$

onde  $c(\vec{r})$  é o número médio de nêutrons emergindo de uma colisão em  $\vec{r}$ .

Integrando a equação (2.1) sobre todas as energias, e inserindo estas informações que surgem com o postulado de que as seções de choque não dependem da energia, obtêm-se

$$\begin{aligned} & \int \left[ \vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) + \sigma(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) \right] dE = \\ & \int \left[ \int \int \sigma(\vec{r}) f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E') d\vec{\Omega}' dE' + Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) \right] dE \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies & \int \vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE + \int \sigma(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE = \\ & \int \int \sigma(\vec{r}) \int f(\vec{r}; \vec{\Omega}', E' \rightarrow \vec{\Omega}, E) dE \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E') d\vec{\Omega}' dE' + \int Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies & \vec{\Omega} \int \nabla \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE + \sigma(\vec{r}) \int \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE = \\ & \int \sigma(\vec{r}) c(\vec{r}) f(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \int \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E') dE' d\vec{\Omega}' + \int Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Definindo que

$$\int \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE \equiv \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (2.9)$$

$$\int \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E') dE \equiv \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}') \quad (2.10)$$

$$\int Q(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) dE \equiv Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (2.11)$$

chega-se na equação do transporte monoenergética e estacionária, dada por:

$$\vec{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \sigma(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \sigma(\vec{r}) c(\vec{r}) \int f(\vec{r}; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' + Q(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (2.12)$$

A equação (2.12) é a forma geral da equação do transporte monoenergética independente do tempo.

## 2.1 Geometria do Problema

No caso deste problema, pensa-se em estudar o comportamento do fluxo em geometria plana, e o plano que é adotado é definido tomando algum valor fixo para  $\varphi$ . Os ângulos  $\varphi$  e  $\theta$ , referem-se aos ângulos mostrados na figura 2.1.

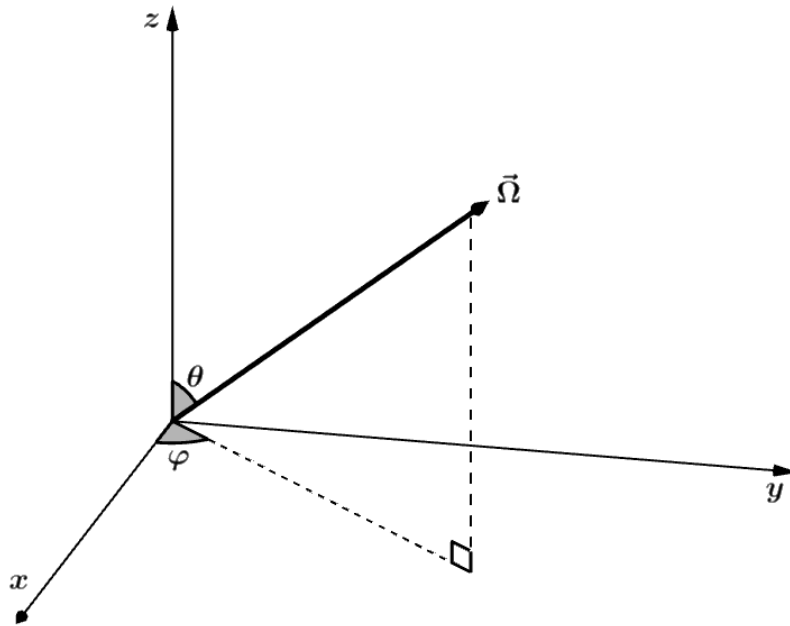


Figura 2.1: Representação do plano considerado no problema.

Assim,  $\Phi$ ,  $\sigma$ ,  $f$ , e  $Q$  dependem de uma coordenada espacial, e uma coordenada angular apenas, que são  $z$  e  $\theta$ , respectivamente. Tomando  $\mu = \cos \theta$ , então  $\mu = \vec{\Omega} \cdot \vec{z}$ ,  $\mu' = \vec{\Omega}' \cdot \vec{z}$ , e

$$\vec{\Omega} \nabla \Phi = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.13)$$

onde  $\vec{z}$  é um vetor unitário na direção de  $z$ .

Assim, a equação (2.12) pode ser escrita como

$$\mu \frac{\partial \Phi(z, \mu)}{\partial z} + \sigma(z) \Phi(z, \mu) = \sigma(z) c \int f(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \Phi(z, \mu') d\vec{\Omega}' + Q(z, \mu) \quad (2.14)$$

onde  $f$  e  $c$  são tomados como independentes da posição.

Definindo a equação (2.14) em termos do livre caminho médio de colisão  $x$ , conforme consta em [1]

$$x = \int_0^z \sigma(z') dz'. \quad (2.15)$$

E assim

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sigma(z) \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.16)$$

Supondo ainda que a distribuição dos nêutrons emergindo das colisões seja dada de forma isotrópica, então devido a condição de normalização definida pela equação (2.3), têm-se que

$$f(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \quad (2.17)$$

É possível ainda substituir  $d\vec{\Omega}'$  por  $2\pi d\mu'$  visto que considera-se que há simetria azimutal, e portanto a integração em  $\varphi$  fornece  $2\pi$  como resultado, tornando a igualdade  $d\vec{\Omega}' = 2\pi d\mu'$  válida [1].

Assim, substituindo este resultado e os resultados dados pelas equações (2.16) e (2.17) na equação (2.14), e dividindo-a por  $\sigma(z)$  obtêm-se

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Phi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu). \quad (2.18)$$

Aqui,

$$\Phi(x, \mu) \equiv \Phi[z(x), \mu] \quad (2.19)$$

$$Q(x, \mu) \equiv \frac{1}{\sigma(z)} Q[z(x), \mu] \quad (2.20)$$

Como a fonte  $Q(x, \mu)$  é isotrópica, visto que este é o caso de estudo deste trabalho, a mesma pode ser representada por:

$$Q(x, \mu) = \frac{\delta(x - x_0)}{4\pi} \quad (2.21)$$

onde  $x_0$  é o local em que a fonte está.

Assim, a equação do transporte monoenergética, estacionária, em geometria cartesiana unidimensional, com espalhamento isotrópico é dada pela equação (2.22) que segue.

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Phi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' + \frac{\delta(x - x_0)}{4\pi}. \quad (2.22)$$



### 3 SOLUÇÃO DO CASO MONOENERGÉTICO, ISOTRÓPICO E ESTACIONÁRIO DA EQUAÇÃO DO TRANSPORTE VIA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

O método da resolução da equação do transporte por meio da separação de variáveis as vezes é chamado de método Case, pois foi o mesmo quem desenvolveu esta solução. Neste capítulo, a solução por este método será apresentada da forma como é proposta por Bell e Glasstone [1].

#### 3.1 Soluções Assintóticas em um Meio sem Fonte

Em geometria plana, a equação do transporte monoenergética, estacionária e isotrópica em um meio sem fonte, é dada por

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Phi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' \quad (3.1)$$

que é justamente a equação (2.18) desconsiderando o termo da fonte  $Q(x, \mu)$ .

Dividindo a equação (3.1) por  $\mu\Phi(x, \mu)$ , obtêm-se

$$\frac{1}{\Phi(x, \mu)} \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \frac{1}{\mu} = \frac{c}{2\mu\Phi(x, \mu)} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu'. \quad (3.2)$$

Por separação de variáveis, as soluções procuradas são da forma

$$\Phi(x, \mu) = \chi(x)\psi(\mu) \quad (3.3)$$

onde  $\chi(x)$  é uma função só de  $x$ , e  $\psi(\mu)$  é uma função só de  $\mu$ .

Substituindo (3.3) na equação (3.2), obtêm-se

$$\frac{1}{\chi(x)\psi(\mu)} \frac{\partial [\chi(x)\psi(\mu)]}{\partial x} + \frac{1}{\mu} = \frac{c}{2\mu\chi(x)\psi(\mu)} \int_{-1}^1 \chi(x)\psi(\mu') d\mu' \quad (3.4)$$

$$\implies \frac{1}{\chi(x)} \frac{d\chi(x)}{dx} = \frac{c}{2\mu\psi(\mu)} \int_{-1}^1 \psi(\mu') d\mu' - \frac{1}{\mu}. \quad (3.5)$$

Nota-se que o lado esquerdo de (3.5) é uma função apenas da variável  $x$ , enquanto o lado direito depende apenas de  $\mu$ . Portanto, pode-se igualar ambos os lados a uma mesma constante, que aqui será definida como  $-\frac{1}{v}$ . Com isso, obtêm-se:

$$\frac{1}{\chi(x)} \frac{d\chi(x)}{dx} = -\frac{1}{v} \quad (3.6)$$

$$\implies \ln(\chi(x)) = -\frac{x}{v} + C_1 \quad (3.7)$$

$$\implies \chi(x) = Ce^{-\frac{x}{v}} \quad (3.8)$$

Assim, as soluções de (3.1) são da forma

$$\Phi_v(x, \mu) = e^{-\frac{x}{v}} \psi_v(\mu). \quad (3.9)$$

Para obter os valores aceitáveis de  $v$  e das funções  $\psi_v(\mu)$ , cuidados especiais serão tomados. Substituindo (3.9) em (3.1)

$$\mu \frac{\partial e^{-\frac{x}{v}} \psi_v(\mu)}{\partial x} + e^{-\frac{x}{v}} \psi_v(\mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 e^{-\frac{x}{v}} \psi_v(\mu') d\mu' \quad (3.10)$$

$$-\frac{\mu}{v} e^{-\frac{x}{v}} \psi_v(\mu) + e^{-\frac{x}{v}} \psi_v(\mu) = \frac{c}{2} e^{-\frac{x}{v}} \int_{-1}^1 \psi_v(\mu') d\mu' \quad (3.11)$$

Como  $e^{-\frac{x}{v}} \neq 0$ , segue que,

$$\left[-\frac{\mu}{v} + 1\right] \psi_v(\mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi_v(\mu') d\mu'. \quad (3.12)$$

Normalizando  $\psi_v(\mu)$  de modo que

$$\int_{-1}^1 \psi_v(\mu') d\mu' = 1. \quad (3.13)$$

Assim, substituindo (3.13) na equação (3.12) e multiplicando-a por  $v$ , obtêm-se:

$$(v - \mu)\psi_v(\mu) = \frac{cv}{2}. \quad (3.14)$$

Assumindo em um primeiro momento que  $|v| > 1$ , para que se garanta  $v \neq \mu$ , para todos os valores de  $-1 \leq \mu \leq 1$ , então

$$\psi_v(\mu) = \frac{cv}{2(v - \mu)} \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) na equação de normalização (3.13) para obter os valores aceitáveis de  $v$ :

$$\int_{-1}^1 \frac{cv}{2(v - \mu')} d\mu' = 1 \quad (3.16)$$

$$\frac{cv}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{v - \mu'} d\mu' = 1 \quad (3.17)$$

$$\frac{cv}{2} [-\ln |v - \mu'|]_{-1}^1 = 1 \quad (3.18)$$

$$\frac{cv}{2} [-\ln |v - 1| + \ln |v + 1|] = 1 \quad (3.19)$$

Assim,  $v = \pm v_0$ , onde  $\pm v_0$  são as raízes de

$$1 = \frac{cv_0}{2} \ln \frac{v_0 + 1}{v_0 - 1} = cv_0 \tanh^{-1} \left( \frac{1}{v_0} \right). \quad (3.20)$$

Se  $c < 1$ , as raízes da equação (3.20) são reais, enquanto se  $c > 1$  as raízes são imaginárias. Existem, portanto, dois autovalores discretos  $\pm v_0$  que satisfazem (3.12) quando  $v \neq \mu$ . Por consequência, partindo da equação (3.15), as autofunções associadas a estes autovalores são

$$\psi_0^+(\mu) = \frac{c}{2} \frac{v_0}{(v_0 - \mu)}, \quad (3.21)$$

$$\psi_0^-(\mu) = \frac{c}{2} \frac{v_0}{(v_0 + \mu)}. \quad (3.22)$$

E as soluções da equação (3.1) são

$$\Phi_0^+(x, \mu) = e^{-\frac{x}{v_0}} \psi_0^+(\mu) = e^{-\frac{x}{v_0}} \frac{cv_0}{2(v_0 - \mu)}, \quad (3.23)$$

$$\Phi_0^-(x, \mu) = e^{\frac{x}{v_0}} \psi_0^-(\mu) = e^{\frac{x}{v_0}} \frac{cv_0}{2(v_0 + \mu)}. \quad (3.24)$$

Estas soluções são as que dominam longe de fontes e fronteiras, e são chamadas soluções assintóticas.  $\Phi_0$  é portanto chamado de fluxo assintótico. Chama-se  $v_0$  de comprimento de relaxamento assintótico, que representa a rapidez com que o fluxo decresce pelo fator exponencial da solução em (3.23) e (3.24).

A tabela 3.1 mostra alguns exemplos de valores de  $|v_0|$  e  $|iv_0|$  para diferentes valores de  $c$  dados. Estes valores foram obtidos utilizando a partir equação (3.20), utilizando o método de newton que foi programado em Python. Cabe ressaltar que para  $c < 1$  toma-se  $|v_0|$  e quando  $c > 1$  toma-se  $|iv_0|$ , pois neste último caso o valor de  $v$  possui apenas a parte imaginária.

Tabela 3.1: Valores de  $|v_0|$  ou  $|iv_0|$  para diferentes valores de  $c$ .

$c < 1$	$ v_0 $	$c > 1$	$ iv_0 $
0,99	5,79673	1,01	5,75054
0,98	4,11552	1,02	4,05019
0,95	2,63515	1,05	2,53178
0,90	1,90320	1,10	1,75665
0,80	1,40763	1,20	1,19827
0,50	1.04438	1,50	0,68913
0,20	1.00009	1,80	0.50281

## 3.2 Soluções Transientes em um Meio sem Fonte

Na seção anterior, foram encontradas duas soluções elementares, chamadas de soluções assintóticas,  $\Phi_0^\pm(x, \mu)$ , para a equação (3.1), no caso em que  $v \neq \mu$ . Agora, serão procuradas as soluções para o caso em que é possível  $v = \mu$ , onde tem-se portanto que  $-1 \leq v \leq 1$ . A solução assintótica também serve no caso  $-1 \leq v \leq 1$ , no entanto, quando  $v = \mu$  a solução é singular, e portanto requer um cuidado especial. Considera-se então, conforme [1], uma solução geral da forma:

$$\psi_v(\mu) = \frac{c}{2} \frac{v}{v - \mu} + \lambda(v) \delta(\mu - v) \quad (3.25)$$

onde  $\lambda(v)$  é uma função arbitrária.

A função  $\lambda(v)$  pode ser encontrada de modo que satisfaça a condição de normalização que é imposta em (3.13). É necessário especificar como o primeiro termo da função dada em (3.25) deve ser integrado, devido a singularidade em  $v = \mu$ . Escolhendo a prescrição de valor principal de Cauchy, obtêm-se:

$$P \int_{-1}^1 \frac{v}{v - \mu'} d\mu' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-1}^{v-\epsilon} \frac{v}{v - \mu'} d\mu' + \int_{v+\epsilon}^1 \frac{v}{v - \mu'} d\mu' \right] \quad (3.26)$$

onde o símbolo  $P$  implica o valor principal de Cauchy. Para guardar a ideia de que o termo singular deve ser integrado desta forma sempre que  $\psi_v(\mu)$  é integrado, a função dada em (3.25) será reescrita com  $P$  como um operador, resultando em:

$$\psi_v(\mu) = \frac{c}{2} P \left[ \frac{v}{v - \mu} \right] + \lambda(v) \delta(\mu - v) \quad (3.27)$$

portanto,  $P$  fica ligado ao termo singular, para que o mesmo seja integrado utilizando a prescrição de valor principal de Cauchy.

Agora,  $\lambda(v)$  pode ser encontrada de modo que atenda a condição de normalização. Sendo assim, partindo da condição de normalização, têm-se

$$\int_{-1}^1 \psi_v(\mu) d\mu = 1 \quad (3.28)$$

$$\implies \frac{c}{2} P \left[ \int_{-1}^1 \frac{v}{v - \mu} d\mu \right] + \int_{-1}^1 \lambda(v) \delta(\mu - v) d\mu = 1 \quad (3.29)$$

$$\implies \lambda(v) = 1 - \frac{c}{2} P \left[ \int_{-1}^1 \frac{v}{v - \mu} d\mu \right] \quad (3.30)$$

$$\implies \lambda(v) = 1 - \frac{c\nu}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ [-\ln(v - \mu)]_{-1}^{v-\epsilon} + [-\ln(v - \mu)]_{v+\epsilon}^1 \right] \quad (3.31)$$

$$\implies \lambda(v) = 1 - \frac{c\nu}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [-\ln(\epsilon) + \ln(v + 1) - \ln(v - 1) + \ln(-\epsilon)] \quad (3.32)$$

$$\implies \lambda(v) = 1 - \frac{c\nu}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \ln \frac{(v + 1)(-\epsilon)}{(v - 1)\epsilon} \right] \quad (3.33)$$

$$\implies \lambda(v) = 1 - \frac{c\nu}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \ln \frac{(v + 1)(-1)}{(v - 1)} \right] \quad (3.34)$$

$$\implies \lambda(v) = 1 - \frac{cv}{2} \ln \frac{v+1}{1-v} = 1 - cv \tanh^{-1}(v) \quad (3.35)$$

Portanto, além dos autovalores e autofunções que satisfazem a equação (3.20), existe também uma continuidade de autovalores  $-1 \leq v \leq 1$  e correspondentes autofunções que servem como soluções transientes da equação (3.12). Sendo assim, a solução de (3.1) com valores de  $v \in [-1, 1]$  pode ser representada por:

$$\Phi_v(x, \mu) = e^{-\frac{x}{v}} \left[ \frac{c}{2} P \left[ \frac{v}{v-\mu} \right] + \lambda(v) \delta(\mu - v) \right] \quad (3.36)$$

onde  $\lambda(v)$  é dado por (3.35).

### 3.3 Completude e Ortogonalidade das Soluções Elementares

As soluções assintóticas  $\Phi_0^\pm(x, \mu)$  e as soluções transientes  $\Phi_v(x, \mu)$  possuem uma relação de ortogonalidade e, juntas, formam completamente as soluções da equação (3.1), isto é, as soluções da equação (3.1) são da forma

$$\Phi(x, \mu) = a_+ \Phi_0^+(x, \mu) + a_- \Phi_0^-(x, \mu) + \int_{-1}^1 A(v) \Phi_v(x, \mu) dv \quad (3.37)$$

onde os dois primeiros termos do lado direito são as soluções assintóticas, e o terceiro representa a parte transiente da solução. Os coeficientes  $a_+$  e  $a_-$  são constantes e  $A(v)$  é uma função de  $v$  que determina as constantes que multiplicam  $\Phi_v(x, \mu)$  para cada valor de  $v$ . A equação (3.37) também pode ser escrita como

$$\Phi(x, \mu) = a_+ \psi_0^+(\mu) e^{-\frac{x}{v_0}} + a_- \psi_0^-(\mu) e^{\frac{x}{v_0}} + \int_{-1}^1 A(v) \psi_v(\mu) e^{-\frac{x}{v}} dv. \quad (3.38)$$

A ortogonalidade será usada para determinar a expansão dos coeficientes  $a_\pm$  e  $A(v)$ . Pode-se mostrar essa relação de ortogonalidade partindo da equação (3.12) para  $\psi_v(\mu)$  e multiplicando a mesma por  $\psi_{v'}(\mu)$ , obtendo assim

$$\left[ -\frac{\mu}{v} + 1 \right] \psi_v(\mu) \psi_{v'}(\mu) = \frac{c}{2} \psi_{v'}(\mu) \int_{-1}^1 \psi_v(\mu') d\mu' \quad (3.39)$$

Fazendo o mesmo com a equação (3.12) para  $\psi_{v'}(\mu)$  e multiplicando por  $\psi_v(\mu)$ , obtêm-se

$$\left[-\frac{\mu}{v'} + 1\right] \psi_{v'}(\mu)\psi_v(\mu) = \frac{c}{2}\psi_v(\mu) \int_{-1}^1 \psi_{v'}(\mu')d\mu' \quad (3.40)$$

Subtraindo as equações (3.39) e (3.40):

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\mu}{v} + 1\right] \psi_v(\mu)\psi_{v'}(\mu) - \left[\left[-\frac{\mu}{v'} + 1\right] \psi_{v'}(\mu)\psi_v(\mu)\right] = \\ \frac{c}{2}\psi_{v'}(\mu) \int_{-1}^1 \psi_v(\mu')d\mu' - \left[\frac{c}{2}\psi_v(\mu) \int_{-1}^1 \psi_{v'}(\mu')d\mu'\right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\implies \left[\frac{\mu}{v'} - \frac{\mu}{v}\right] \psi_v(\mu)\psi_{v'}(\mu) = \frac{c}{2} \left[ \psi_{v'}(\mu) \int_{-1}^1 \psi_v(\mu')d\mu' - \psi_v(\mu) \int_{-1}^1 \psi_{v'}(\mu')d\mu' \right] \quad (3.42)$$

Integrando ambos os lados da igualdade (3.42) de  $-1$  a  $1$  em  $\mu$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[\frac{\mu}{v'} - \frac{\mu}{v}\right] \psi_v(\mu)\psi_{v'}(\mu)d\mu \\ = \int_{-1}^1 \frac{c}{2} \left[ \psi_{v'}(\mu) \int_{-1}^1 \psi_v(\mu')d\mu' - \psi_v(\mu) \int_{-1}^1 \psi_{v'}(\mu')d\mu' \right] d\mu \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \implies \left[\frac{1}{v'} - \frac{1}{v}\right] \int_{-1}^1 \mu\psi_v(\mu)\psi_{v'}(\mu)d\mu \\ = \frac{c}{2} \left[ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_{v'}(\mu')d\mu'd\mu - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_v(\mu')d\mu'd\mu \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\implies \left[\frac{1}{v'} - \frac{1}{v}\right] \int_{-1}^1 \mu\psi_v(\mu)\psi_{v'}(\mu)d\mu = 0 \quad (3.45)$$

Daí, se  $v \neq v'$ , têm-se a relação de ortogonalidade desejada

$$\int_{-1}^1 \mu\psi_v(\mu)\psi_{v'}(\mu)d\mu = 0 \quad (3.46)$$

onde os valores de  $v$  e  $v'$  podem ser tanto provenientes das soluções assintóticas como das soluções transientes.

Para calcular as expansões dos coeficientes  $a_+$ ,  $a_-$  e  $A(v)$ , inicialmente, definem-se os termos  $N_0^\pm$  e  $N_v$  da seguinte forma:

$$N_0^\pm = \int_{-1}^1 \mu\psi_0^\pm(\mu)\psi_0^\pm(\mu)d\mu \quad (3.47)$$

$$\implies N_0^\pm = \int_{-1}^1 \mu \frac{c}{2} \frac{v_0}{(v_0 \mp \mu)} \frac{c}{2} \frac{v_0}{(v_0 \mp \mu)} d\mu \quad (3.48)$$

$$\implies N_0^\pm = \frac{c^2 v_0^2}{4} \int_{-1}^1 \frac{\mu}{(v_0 \mp \mu)^2} d\mu \quad (3.49)$$

$$\implies N_0^\pm = \frac{c^2 v_0^2}{4} \left[ \pm \frac{v_0}{v_0 - \mu} \pm \ln |v_0 - \mu| \right]_{-1}^1 \quad (3.50)$$

$$\implies N_0^\pm = \frac{c^2 v_0^2}{4} \left[ \pm \frac{2v_0}{v_0^2 - 1} \pm \ln \left| \frac{v_0 - 1}{v_0 + 1} \right| \right] \quad (3.51)$$

$$\implies N_0^\pm = \pm \frac{c v_0^3}{2} \left[ \frac{c}{v_0^2 - 1} + \frac{c}{2v_0} \ln \left| \frac{v_0 - 1}{v_0 + 1} \right| \right]. \quad (3.52)$$

Notando que

$$\frac{c}{2v_0} \ln \left| \frac{v_0 - 1}{v_0 + 1} \right| = -\frac{1}{v_0^2} \frac{c v_0}{2} \ln \left| \frac{v_0 + 1}{v_0 - 1} \right|. \quad (3.53)$$

têm-se pela igualdade (3.20) que:

$$-\frac{1}{v_0^2} \frac{c v_0}{2} \ln \left| \frac{v_0 + 1}{v_0 - 1} \right| = -\frac{1}{v_0^2}. \quad (3.54)$$

Portanto, têm-se:

$$N_0^+ = \frac{c}{2} v_0^3 \left[ \frac{c}{v_0^2 - 1} - \frac{1}{v_0^2} \right] \quad (3.55)$$

$$N_0^- = -\frac{c}{2} v_0^3 \left[ \frac{c}{v_0^2 - 1} - \frac{1}{v_0^2} \right] \quad (3.56)$$

Já  $N_v$  é dado, conforme mostrado por Case e Zweifel [5], como:

$$N_v \delta(v - v') = \int_{-1}^1 \mu \psi_{v'}(\mu) \psi_v(\mu) d\mu \quad (3.57)$$

$$N_v = v \left[ \lambda^2(v) + \frac{\pi^2 c^2}{4} v^2 \right] \quad (3.58)$$

Estes termos serão usados na próxima seção na determinação dos coeficientes  $a_\pm$  e  $A(v)$ , que serão necessários no uso da função de Green no estudo da equação do transporte com fonte plana.



## 3.4 Soluções em um Meio Infinito com Fonte Plana

### Isotrópica

As soluções homogêneas foram determinadas até aqui e apresentadas pela equação (3.37). Para a obtenção das soluções em um meio com uma fonte, serão utilizadas as funções de Green, que são abordadas por [1, pp. 19-20; 68-69; 76]. Como neste problema há apenas uma fonte em  $x = x_0$ , a função de Green referente a fonte  $Q(x_0, \mu_0)$  dá a solução geral do problema em um meio com fonte.

Para  $x \neq 0$ , a função de Green  $G((x_0, \mu_0) \rightarrow (x, \mu))$ , ou seja, o fluxo angular em  $(x, \mu)$  pode ser derivado da equação (3.37), mantendo apenas os termos exponenciais que tendem a zero ao  $|x| \rightarrow \infty$ , de modo que são obtidas, conforme consta em [1, p.76], as funções

$$G = a_+ \psi_0^+(\mu) e^{-\frac{x-x_0}{v_0}} + \int_0^1 A(v) e^{-\frac{x-x_0}{v}} \psi_v(\mu) dv \quad (\text{se } x > x_0), \quad (3.59)$$

$$G = -a_- \psi_0^-(\mu) e^{\frac{x-x_0}{v_0}} - \int_{-1}^0 A(v) e^{-\frac{x-x_0}{v}} \psi_v(\mu) dv \quad (\text{se } x < x_0). \quad (3.60)$$

Agora, é possível determinar os coeficientes  $a_{\pm}$  e  $A(v)$  introduzindo a condição de descontinuidade [1, p.68] na equação:

$$G((x_0, \mu_0) \rightarrow (x_0 + \epsilon, \mu)) - G((x_0, \mu_0) \rightarrow (x_0 - \epsilon, \mu)) = \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} \quad (3.61)$$

que determina a descontinuidade em  $x$  na função de Green.

Substituindo adequadamente os valores de  $G$  dados em (3.59) e (3.60) na equação definida acima:

$$\begin{aligned} a_+ \psi_0^+(\mu) e^{-\frac{\epsilon}{v_0}} + \int_0^1 A(v) e^{-\frac{\epsilon}{v}} \psi_v(\mu) dv + a_- \psi_0^-(\mu) e^{-\frac{\epsilon}{v_0}} + \int_{-1}^0 A(v) e^{-\frac{\epsilon}{v}} \psi_v(\mu) dv \\ = \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$

$$a_+\psi_0^+(\mu) + a_-\psi_0^-(\mu) + \int_{-1}^1 A(v)\psi_v(\mu)dv = \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu}. \quad (3.63)$$

Usando agora a condição de ortogonalidade definida em (3.46), é possível determinar os coeficientes  $a_{\pm}$  e  $A(v)$ . Multiplicando (3.63) por  $\mu\psi_{v'}(\mu)$  e integrando em  $\mu$ , obtêm-se

$$\int_{-1}^1 \mu\psi_{v'}(\mu) \left[ a_+\psi_0^+(\mu) + a_-\psi_0^-(\mu) + \int_{-1}^1 A(v)\psi_v(\mu)dv \right] d\mu = \int_{-1}^1 \mu\psi_{v'}(\mu) \left[ \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} \right] d\mu \quad (3.64)$$

O lado esquerdo da igualdade acima pode ser dividido em três termos, separando a integral em  $\mu$  na soma, que são dados por

$$(I) \quad \int_{-1}^1 \mu\psi_{v'}(\mu)a_+\psi_0^+(\mu)d\mu, \quad (3.65)$$

$$(II) \quad \int_{-1}^1 \mu\psi_{v'}(\mu)a_-\psi_0^-(\mu)d\mu, \quad (3.66)$$

$$(III) \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mu\psi_{v'}(\mu)A(v)\psi_v(\mu)dv d\mu. \quad (3.67)$$

Levando em consideração a condição de ortogonalidade (3.46), (I) só é diferente de zero quando  $v' = +v_0$ , (II) só é diferente de zero quando  $v' = -v_0$ , e (III) só é diferente de zero quando  $v' = v$ , e como  $v_0 \neq -v_0 \neq v$  definidos em (I), (II), e (III), pode-se então definir as três igualdades:

$$(a) \quad \int_{-1}^1 \mu\psi_0^+(\mu)a_+\psi_0^+(\mu)d\mu = \int_{-1}^1 \mu\psi_0^+(\mu)\frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu}d\mu \quad (3.68)$$

$$(b) \quad \int_{-1}^1 \mu\psi_0^-(\mu)a_-\psi_0^-(\mu)d\mu = \int_{-1}^1 \mu\psi_0^-(\mu)\frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu}d\mu \quad (3.69)$$

$$(c) \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mu\psi_{v'}(\mu)A(v)\psi_v(\mu)dv d\mu = \int_{-1}^1 \mu\psi_{v'}(\mu)\frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu}d\mu \quad (3.70)$$

Resolvendo (a), obtêm-se

$$a_+ \int_{-1}^1 \mu\psi_0^+(\mu)\psi_0^+(\mu)d\mu = \int_{-1}^1 \mu\psi_0^+(\mu)\frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu}d\mu \quad (3.71)$$

$$\implies a_+ N_0^+ = \int_{-1}^1 \mu \psi_0^+(\mu) \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} d\mu \quad (3.72)$$

$$\implies a_+ = \frac{1}{N_0^+} \int_{-1}^1 \mu \psi_0^+(\mu) \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} d\mu. \quad (3.73)$$

Analogamente, é obtido para (b)

$$a_- = \frac{1}{N_0^-} \int_{-1}^1 \mu \psi_0^-(\mu) \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} d\mu. \quad (3.74)$$

Já para (c),

$$\int_{-1}^1 A(v) \int_{-1}^1 \mu \psi_{v'}(\mu) \psi_v(\mu) d\mu dv = \int_{-1}^1 \mu \psi_{v'}(\mu) \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} d\mu \quad (3.75)$$

$$\implies \int_{-1}^1 A(v) N_v \delta(v - v') dv = \int_{-1}^1 \mu \psi_{v'}(\mu) \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} d\mu \quad (3.76)$$

$$\implies A(v') N_{v'} = \int_{-1}^1 \mu \psi_{v'}(\mu) \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} d\mu \quad (3.77)$$

$$\implies A(v') = \frac{1}{N_{v'}} \int_{-1}^1 \mu \psi_{v'}(\mu) \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} d\mu. \quad (3.78)$$

Portanto, em resumo, têm-se

$$a_{\pm} = \frac{1}{N_0^{\pm}} \int_{-1}^1 \mu \psi_0^{\pm}(\mu) \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} d\mu = \frac{1}{2\pi N_0^{\pm}} \psi_0^{\pm}(\mu_0), \quad (3.79)$$

$$A(v) = \frac{1}{N_v} \int_{-1}^1 \mu \psi_v(\mu) \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} d\mu = \frac{1}{2\pi N_v} \psi_v(\mu_0) \quad (3.80)$$

onde  $N_0^{\pm}$  e  $N_v$  foram definidos em (3.55), (3.56) e (3.58), porém aqui considerando  $\mu = \mu_0$ .

Substituindo (3.79) e (3.80) em (3.59) e (3.60), obtêm-se as funções de Green para um meio infinito com uma fonte planar anisotrópica. Como já destacado de que  $G$  é a solução do problema por só haver uma fonte, então

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \left[ \pm \frac{\psi_0^{\pm}(\mu_0) \psi_0^{\pm}(\mu) e^{\mp \frac{x-x_0}{v_0}}}{N_0^{\pm}} + \int_0^1 \frac{\psi_{\pm v}(\mu_0) e^{-\frac{|x-x_0|}{v}} \psi_{\pm v}(\mu)}{N_v} dv \right]. \quad (3.81)$$

Aqui os sinais superiores se aplicam se  $x > x_0$  e os inferiores se aplicam quando  $x < x_0$ .

Como  $-N_v = N_{-v}$ , na troca de variáveis de  $v$  por  $-v$ , para o caso  $x < x_0$ , obtêm-se uma integração de 0 a 1, cuja diferencial será dada por  $-dv$ . Assim, como são válidas as igualdades  $\frac{-dv}{N_{-v}} = \frac{-dv}{-N_v} = \frac{dv}{N_v}$ , a integral da equação (3.81) é válida também para  $x < x_0$ .

As funções  $\psi_{\pm v}(\mu_0)$  e  $\psi_{\pm v}(\mu)$  são como foram definidas em (3.27), porém para  $\pm v$ .

Para uma fonte isotrópica planar em  $x_0$ , o fluxo angular é obtido através da média de  $\Phi(x, \mu)$  com respeito a  $\mu_0$  [1, p.77]. Isto é feito integrando o lado direito da equação (3.81) com relação a  $\mu_0$  e dividindo por 2. Assim, para  $x > x_0$ :

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\psi_0^+(\mu_0)\psi_0^+(\mu)e^{-\frac{x-x_0}{v_0}}}{N_0^+} + \int_0^1 \frac{\psi_v(\mu_0)e^{-\frac{x-x_0}{v}}\psi_v(\mu)}{N_v} dv \right] d\mu_0 \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \implies \Phi(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} & \left[ \int_{-1}^1 \frac{\psi_0^+(\mu_0)\psi_0^+(\mu)e^{-\frac{x-x_0}{v_0}}}{N_0^+} d\mu_0 \right. \\ & \left. + \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{\psi_v(\mu_0)e^{-\frac{x-x_0}{v}}\psi_v(\mu)}{N_v} d\mu_0 dv \right] \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \implies \Phi(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} & \left[ \frac{\psi_0^+(\mu)e^{-\frac{x-x_0}{v_0}}}{N_0^+} \int_{-1}^1 \psi_0^+(\mu_0) d\mu_0 \right. \\ & \left. + \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x-x_0}{v}}\psi_v(\mu)}{N_v} \int_{-1}^1 \psi_v(\mu_0) d\mu_0 dv \right]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Usando a condição de normalização definida em (3.13)

$$\implies \Phi(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\psi_0^+(\mu)e^{-\frac{x-x_0}{v_0}}}{N_0^+} + \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x-x_0}{v}}\psi_v(\mu)}{N_v} dv \right] \quad (3.85)$$

O caso em que  $x < x_0$  é análogo, e tem como solução:

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{\psi_0^-(\mu) e^{\frac{x-x_0}{v_0}}}{N_0^-} + \int_0^1 \frac{e^{\frac{x-x_0}{v}} \psi_{-v}(\mu)}{N_v} dv \right] \quad (3.86)$$

O fluxo total  $\phi(x)$  para uma fonte planar isotrópica é obtido integrando as equações (3.85) e (3.86) com relação a todas as direções, isto é, integrando em  $\mu$  de  $-1$  a  $1$  e multiplicando por  $2\pi$  [1]. Sendo assim, partindo de (3.85), obtêm-se

$$\phi(x) = \frac{2\pi}{4\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\psi_0^+(\mu) e^{-\frac{x-x_0}{v_0}}}{N_0^+} + \int_0^1 \frac{e^{-\frac{|x-x_0|}{v}} \psi_v(\mu)}{N_v} dv \right] d\mu \quad (3.87)$$

$$\implies \phi(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-\frac{x-x_0}{v_0}}}{N_0^+} \int_{-1}^1 \psi_0^+(\mu) d\mu + \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x-x_0}{v}}}{N_v} \int_{-1}^1 \psi_v(\mu) d\mu dv \right]. \quad (3.88)$$

Usando novamente a condição de normalização definida na equação (3.13), obtêm-se, para  $x > x_0$

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-\frac{x-x_0}{v_0}}}{N_0^+} + \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x-x_0}{v}}}{N_v} dv \right] \quad (3.89)$$

Analogamente, para  $x < x_0$

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{\frac{x-x_0}{v_0}}}{N_0^-} + \int_0^1 \frac{e^{\frac{x-x_0}{v}}}{N_v} dv \right] \quad (3.90)$$

Esta é a solução do problema para o fluxo total obtida com o uso da função de Green.

É interessante observar que dado  $0 < c < 1$ , têm-se  $v_0 > 1$ , e como  $0 \leq v \leq 1$ , conforme  $|x - x_0|$  cresce, pode-se afirmar que o termo dentro da integral da equação (3.90) decresce mais rapidamente do que o termo fora da integral. Isto significa que longe da fonte localizada em  $x_0$ , as soluções assintóticas dominam o comportamento do fluxo. Ainda assim, as soluções transientes possuem importância e são necessárias para ajustar as condições iniciais na origem.

## 4 SOLUÇÃO DO CASO MONOENERGÉTICO, ISOTRÓPICO E ESTACIONÁRIO DA EQUAÇÃO DO TRANSPORTE VIA TRANSFORMADA DE FOURIER

A solução da equação do transporte monoenergética pelo método da Transformada de Fourier é importante não só por se apresentar como uma alternativa ao método da separação de variáveis, mas também por sua aplicabilidade na resolução de problemas multigrupo [1].

Neste capítulo, será resolvido o caso monoenergético, estacionário e isotrópico, em geometria cartesiana unidimensional da equação do transporte através do método da transformada de Fourier. A fim de simplificar a notação, considera-se aqui  $x_0 = 0$  como o ponto em que a fonte plana isotrópica está localizada.

Assim, com uma fonte plana isotrópica unitária em  $x = 0$ , o termo da fonte é dado [1] por

$$Q(x, \mu) = \frac{\delta(x)}{4\pi}. \quad (4.1)$$

Inserindo esta fonte em (2.18), a equação do transporte de nêutrons monoenergética, isotrópica e estacionária com fonte em  $x = 0$ , em geometria cartesiana unidimensional, é dada por

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Phi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' + \frac{\delta(x)}{4\pi}. \quad (4.2)$$

Definindo a transformada de Fourier de  $\Phi(x, \mu)$  como

$$F(k, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \Phi(x, \mu) dx \quad (4.3)$$

É possível então multiplicar (4.2) por  $e^{-ikx}$  e integrar em  $x$ , de modo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} e^{-ikx} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, \mu) e^{-ikx} dx = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') e^{-ikx} d\mu' dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x)}{4\pi} e^{-ikx} dx \quad (4.4)$$

$$\implies \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} e^{-ikx} dx + F(k, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, \mu') e^{-ikx} dx d\mu' + \frac{1}{4\pi} \quad (4.5)$$

$$\implies \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} e^{-ikx} dx + F(k, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 F(k, \mu') d\mu' + \frac{1}{4\pi}. \quad (4.6)$$

Usando a integração por partes na integral do lado esquerdo da igualdade (4.6) e o fato de que  $\Phi(x, \mu) \rightarrow 0$  ao  $|x| \rightarrow \infty$ , têm-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} e^{-ikx} dx = [\mu \Phi(x, \mu) e^{-ikx}]_{-\infty}^{\infty} + ik\mu F(k, \mu) = ik\mu F(k, \mu). \quad (4.7)$$

Além disso, definindo

$$F(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(k, \mu') d\mu'. \quad (4.8)$$

Pode-se então reescrever (4.6) como

$$ik\mu F(k, \mu) + F(k, \mu) = cF(k) + \frac{1}{4\pi} \quad (4.9)$$

$$\implies (1 + ik\mu)F(k, \mu) = cF(k) + \frac{1}{4\pi}. \quad (4.10)$$

Se  $(1 + ik\mu) = 0$ , então é possível reescrever (4.10) como

$$0 = cF(k) + \frac{1}{4\pi} \quad (4.11)$$

$$\implies F(k) = -\frac{1}{4c\pi}. \quad (4.12)$$

Voltando em (4.8), pode-se obter portanto

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(k, \mu') d\mu' = -\frac{1}{4c\pi} \quad (4.13)$$

$$\implies \int_{-1}^1 F(k, \mu') d\mu' = -\frac{1}{2c\pi}. \quad (4.14)$$

Agora, integrando ambos os lados da equação (4.3), de  $-1$  a  $1$  com relação a  $\mu$ . chega-se em

$$\int_{-1}^1 F(k, \mu) d\mu = \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \Phi(x, \mu) dx d\mu \quad (4.15)$$

$$\implies \int_{-1}^1 F(k, \mu) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) d\mu dx. \quad (4.16)$$

Substituindo na equação (4.16) o que foi definido em (4.14)

$$-\frac{1}{2c\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) d\mu dx. \quad (4.17)$$

Utilizando a inversa da transformada de Fourier para a função  $\int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) d\mu$ , que representa a fração  $\frac{\phi(x)}{2\pi}$  do fluxo total

$$\int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{e^{ikx}}{2c\pi} dk \quad (4.18)$$

$$\implies 2\pi \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{e^{ikx}}{2c\pi} dk \quad (4.19)$$

$$\implies \phi(x) = -\frac{1}{2\pi c} \left[ \frac{e^{ikx}}{ik} \right]_{-\infty}^{\infty} \quad (4.20)$$

$$\implies \phi(x) = -\frac{1}{2\pi c} \left[ \frac{\cos(kx) + i \sin(kx)}{ik} \right]_{-\infty}^{\infty} \quad (4.21)$$

$$\implies \phi(x) = -\frac{1}{2\pi c} \left[ \frac{\sin(kx) - i \cos(kx)}{k} \right]_{-\infty}^{\infty}. \quad (4.22)$$

Como  $\sin(kx)$  e  $\cos(kx)$  são funções limitadas, então  $\frac{\sin(kx) - i \cos(kx)}{k} \rightarrow 0$  ao  $k \rightarrow \pm\infty$ , portanto neste caso:

$$\phi(x) = 0 \quad (4.23)$$

que é a solução trivial do problema.



Assumindo então que  $(1 + ik\mu) \neq 0$ , obtêm-se da equação (4.10)

$$F(k, \mu) = \frac{cF(k) + \frac{1}{4\pi}}{1 + ik\mu}. \quad (4.24)$$

É possível agora integrar a equação (4.24) com relação a  $\mu$ , para que seja possível encontrar  $F(k)$ , e conseqüentemente, encontrar  $F(k, \mu)$ . Fazendo isso

$$\int_{-1}^1 F(k, \mu) d\mu = \int_{-1}^1 \frac{cF(k) + \frac{1}{4\pi}}{1 + ik\mu} d\mu \quad (4.25)$$

$$\implies 2F(k) = \left[ cF(k) + \frac{1}{4\pi} \right] \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{1 + ik\mu} \quad (4.26)$$

$$\implies F(k) = \left[ cF(k) + \frac{1}{4\pi} \right] \frac{1}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \quad (4.27)$$

$$\implies \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right] F(k) = \frac{1}{8\pi ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \quad (4.28)$$

$$\implies F(k) = \frac{1}{8\pi ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right]^{-1}. \quad (4.29)$$

Substituindo este valor de  $F(k)$  dado por (4.29) em (4.24), é obtido para  $F(k, \mu)$  a expressão

$$F(k, \mu) = (1 + ik\mu)^{-1} \left[ \frac{c}{8\pi ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right]^{-1} + \frac{1}{4\pi} \right] \quad (4.30)$$

$$\implies F(k, \mu) = \frac{1}{4\pi} (1 + ik\mu)^{-1} \left[ \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right]^{-1} + 1 \right] \quad (4.31)$$

$$\implies F(k, \mu) = \frac{1}{4\pi} (1 + ik\mu)^{-1} \left[ \frac{\frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik}}{1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik}} + 1 \right] \quad (4.32)$$

$$\implies F(k, \mu) = \frac{1}{4\pi} (1 + ik\mu)^{-1} \left[ \frac{\frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} + 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik}}{1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik}} \right] \quad (4.33)$$

$$\implies F(k, \mu) = \frac{1}{4\pi} (1 + ik\mu)^{-1} \left[ \frac{1}{1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik}} \right] \quad (4.34)$$

$$\implies F(k, \mu) = \frac{1}{4\pi} (1 + ik\mu)^{-1} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right]^{-1}. \quad (4.35)$$

Agora é possível encontrar o fluxo angular de nêutrons utilizando a transformada inversa de Fourier definida por

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k, \mu) dk. \quad (4.36)$$

Assim, têm-se

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (1 + ik\mu)^{-1} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right]^{-1} dk. \quad (4.37)$$

Integrando em todas as direções a equação (4.37), isto é, integrando em  $\mu$  de  $-1$  a  $1$  e multiplicando por  $2\pi$  é possível obter o fluxo total em  $x$ , portanto o fluxo total é dado por

$$\phi(x) = \frac{2\pi}{8\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (1 + ik\mu)^{-1} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right]^{-1} dk d\mu \quad (4.38)$$

$$\implies \phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right]^{-1} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{1 + ik\mu} dk \quad (4.39)$$

$$\implies \phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right]^{-1} \frac{1}{ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} dk \quad (4.40)$$

$$\implies \phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right]^{-1} dk. \quad (4.41)$$

## 4.1 Soluções Assintóticas e Transientes

A solução em (4.41) pode ser colocada em uma forma similar a obtida a partir do método da separação de variáveis, dada em (3.90), como uma soma da solução assintótica e da solução transiente. A partir de agora será feita a integração definida em (4.41) para evidenciar estes termos da solução.

Inicialmente, observa-se que o integrando da equação (4.41) possui pontos de ramificação em  $k = \pm i$ , devido a função logarítmica presente no integrando [15]. Além disso, a função integrando tem polos simples quando o denominador zera,

isto é, quando

$$0 = 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \quad (4.42)$$

e isto ocorre, comparando com a equação (3.20), quando

$$k = k_0 = \pm \frac{i}{v_0} \quad (4.43)$$

pois neste caso

$$\begin{aligned} k_0 = \frac{i}{v_0} &\implies 1 - \frac{c}{2ik_0} \ln \frac{1+ik_0}{1-ik_0} = 1 + \frac{cv_0}{2} \ln \frac{v_0-1}{v_0+1} \\ &= 1 - \frac{cv_0}{2} \ln \frac{v_0+1}{v_0-1} = 1 - 1 = 0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$k_0 = -\frac{i}{v_0} \implies 1 - \frac{c}{2ik_0} \ln \frac{1+ik_0}{1-ik_0} = 1 - \frac{cv_0}{2} \ln \frac{v_0+1}{v_0-1} = 1 - 1 = 0. \quad (4.45)$$

Devido ao termo exponencial no integrando da equação (4.41), e a condição de que  $\phi(x) \rightarrow 0$  ao  $|x| \rightarrow \infty$ , a solução para  $x > 0$  ocorre quando  $0 \leq \text{Im}(k)$  e a solução para  $x < 0$  ocorre quando  $0 \geq \text{Im}(k)$ , visto que deseja-se  $\text{Re}(ikx) < 0$ , e como  $\text{Re}(ikx) = -\text{Im}(k)$ , divide-se a solução desta forma.

Neste primeiro momento, será analisado como se dá a integração no plano complexo considerando  $0 \leq \text{Im}(k)$ . Isto é, levando em consideração apenas o ponto de ramificação  $k = i$  e o polo  $k = \frac{i}{v_0}$ , e considerando então neste caso que  $x > 0$ .

Do teorema de resíduos de Cauchy [20], sabe-se que a integral em  $k$  da função  $\frac{1}{4\pi}\mathbb{F}(k, x)$ , onde  $\mathbb{F}(k, x)$  é o integrando da equação (4.41), na região fechada limitada pelas curvas definidas na figura 4.1 é dada por

$$\int_{-R}^R + \int_{C_{R_2}} + \int_C^D + \int_{C_r} + \int_B^A + \int_{C_{R_1}} = 2\pi i \text{Res} \left( \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x), \frac{i}{v_0} \right) \quad (4.46)$$

onde o integrando de todas as integrais em  $k$  no lado esquerdo da igualdade é a função  $\frac{1}{4\pi}\mathbb{F}(k, x)$ , que foi omitida aqui para simplificar a notação.

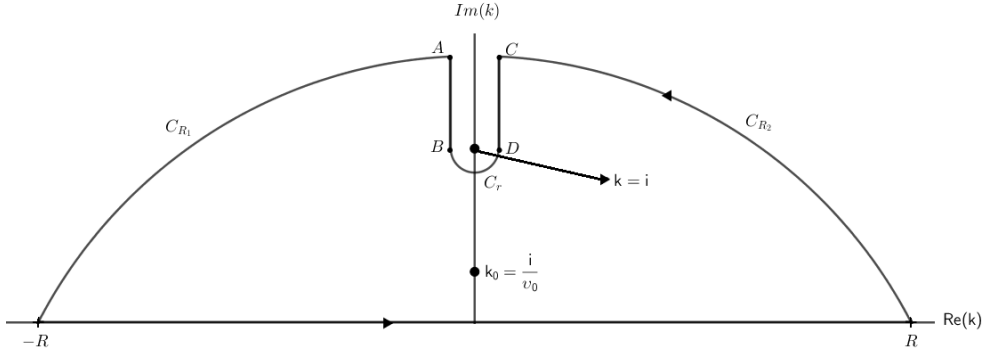


Figura 4.1: Região usada na deformação do caminho de integração com  $\text{Im}(k) \geq 0$

Sendo assim, têm-se que

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-R}^R \mathbb{F}(k, x) dk = 2\pi i \text{Res} \left( \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x), \frac{i}{v_0} \right) - \int_{C_{R_2}} - \int_C^D - \int_{C_r} - \int_B^A - \int_{C_{R_1}} \quad (4.47)$$

$$\implies \frac{1}{4\pi} \int_{-R}^R \mathbb{F}(k, x) dk = 2\pi i \text{Res} \left( \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x), \frac{i}{v_0} \right) + \int_A^B + \int_D^C - \int_{C_{R_2}} - \int_{C_r} - \int_{C_{R_1}} \quad (4.48)$$

Ao fazer  $R \rightarrow \infty$ , e  $r \rightarrow 0$ , sendo  $r$  o raio do semicírculo  $C_r$ , têm-se que  $\frac{1}{4\pi} \int_{-R}^R \mathbb{F}(k, x)$  é exatamente a expressão dada em (4.41). E, além disso

$$\int_{C_{R_1}} \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x) dk + \int_{C_{R_2}} \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x) dk = 0, \quad (4.49)$$

$$\int_{C_r} \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x) dk = 0. \quad (4.50)$$

Para mostrar a validade de (4.49), é possível inicialmente pensar que quando  $R \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow 0$ , a integral

$$\int_{C_{R_1} + C_{R_2}} \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x) dk. \quad (4.51)$$

pode ser reescrita através da parametrização  $k = Re^{i\theta}$ ,  $0 < \theta \leq \pi$ ,  $dk = iRe^{i\theta}d\theta$ , como

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{iRe^{i\theta}} \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{1 - \frac{c}{2iRe^{i\theta}} \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}} iRe^{i\theta} d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{2iRe^{i\theta} e^{ixRe^{i\theta}} \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta} - c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}} d\theta \quad (4.52)$$

Trabalhando no integrando da equação (4.52), e utilizando algumas das propriedades válidas para números complexos que são dadas nas páginas 12 e 13 da obra de Zill e Shanahan [20], obtêm-se que:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2iRe^{i\theta} e^{ixRe^{i\theta}} \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta} - c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}} \right| = |2iRe^{i\theta}| \left| e^{ixRe^{i\theta}} \right| \left| \frac{\ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta} - c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}} \right| \\ & = |2R| |ie^{i\theta}| |e^{-xR \sin \theta}| |e^{ixR \cos \theta}| \left| \frac{\ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta} - c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}} \right| \\ & = |2R| |e^{-xR \sin \theta}| \left| \frac{\ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta} - c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}} \right| \\ & = \left| \frac{2R}{e^{xR \sin \theta}} \right| \left| \frac{\ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta} - c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}} \right| \end{aligned} \quad (4.53)$$

Analisando agora apenas o segundo módulo presente em (4.53), que envolve os termos logarítmicos, e lembrando que, conforme [20]:

$$\left| 2Re^{i\theta} - c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right| \geq \left| 2Re^{i\theta} \right| - \left| c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right| \quad (4.54)$$

têm-se portanto

$$\left| \frac{\ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta} - c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}} \right| \leq \left| \frac{\ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{|2iRe^{i\theta}| - \left| c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right|} \right| = \left| \frac{\ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{2R - c \left| \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right|} \right| \quad (4.55)$$

$$\text{Como } \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} = \ln \left| \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right| + i \text{Arg} \left( \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right),$$

$$\left| \frac{\ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{2R - c \left| \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right|} \right| = \left| \frac{\ln \left| \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right| + i \text{Arg} \left( \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right)}{2R - c \left| \ln \left| \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right| + i \text{Arg} \left( \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right) \right|} \right|. \quad (4.56)$$

Observando agora que

$$\left| \frac{|1| - |iRe^{i\theta}|}{|1| + |iRe^{i\theta}|} \right| \leq \left| \frac{1 + iRe^{i\theta}}{1 - iRe^{i\theta}} \right| \leq \left| \frac{|1| + |iRe^{i\theta}|}{|1| - |iRe^{i\theta}|} \right| \quad (4.57)$$

$$\implies \left| \frac{1 - R}{1 + R} \right| \leq \left| \frac{1 + iRe^{i\theta}}{1 - iRe^{i\theta}} \right| \leq \left| \frac{1 + R}{1 - R} \right| \quad (4.58)$$

que faz com que ao  $R \rightarrow \infty$ , obtenha-se

$$1 \leq \left| \frac{1 + iRe^{i\theta}}{1 - iRe^{i\theta}} \right| \leq 1 \implies \left| \frac{1 + iRe^{i\theta}}{1 - iRe^{i\theta}} \right| = 1. \quad (4.59)$$

Assim, têm-se que ao  $R \rightarrow \infty$ , usando o teorema 5.3, da página 252 da obra de Zill e Shanahan [20], e as expressões dadas em (4.56) e (4.59), pode-se afirmar que

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi \frac{2iRe^{i\theta} e^{ixRe^{i\theta}} \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta} - c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}} d\theta \right| \\ & \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \pi R \left| \frac{2R}{e^{xR \sin \theta}} \right| \left| \frac{\left| \ln \left| \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right| \right| + i \operatorname{Arg} \left( \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right)}{2R - c \left| \left| \ln \left| \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right| \right| + i \operatorname{Arg} \left( \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}} \right) \right|} \right| \\ & = \lim_{R \rightarrow \infty} \pi R \left| \frac{2R}{e^{xR \sin \theta}} \right| \left| \frac{|\ln 1| + i \operatorname{Arg}(1)}{2R - c \left| |\ln 1| + i \operatorname{Arg}(1) \right|} \right| \\ & = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{2\pi R^2}{e^{xR \sin \theta}} \right| \left| \frac{0}{2R} \right|. \quad (4.60) \end{aligned}$$

Notando também, que  $0 \leq \theta \leq \pi$ , e que  $x \geq 0$  neste caso estudado, é possível perceber que  $xR \sin \theta \geq 0$ . Então usando L'Hopital ou lembrando que a função exponencial cresce mais rapidamente do que a função polinomial, é possível concluir de (4.60) que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi \frac{2iRe^{i\theta} e^{ixRe^{i\theta}} \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta} - c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}} d\theta \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{2\pi R^2}{e^{xR \sin \theta}} \right| \cdot 0 = 0. \quad (4.61)$$

portanto, conclui-se que a equação (4.49) é válida quando  $R \rightarrow \infty$ .

Para mostrar que a equação (4.50) é válida, inicialmente a curva  $C_r$  pode ser parametrizada através de  $k = i + re^{i\theta}$ ,  $-\pi \leq \theta \leq 0$ ,  $dk = ire^{i\theta} d\theta$ , que faz

com que seja possível reescrever a integral como

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\frac{e^{-x+ixre^{i\theta}}}{-1+ire^{i\theta}} \ln \frac{1-1+ire^{i\theta}}{1+1-ire^{i\theta}}}{1 - \frac{c}{-2+2ire^{i\theta}} \ln \frac{1-1+ire^{i\theta}}{1+1-ire^{i\theta}}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{ire^{i\theta} e^{-x+ixre^{i\theta}} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}}{-1 + ire^{i\theta} - \frac{c}{2} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}} d\theta \quad (4.62)$$

Trabalhando com o módulo do integrando do lado direito da igualdade (4.62), e utilizando as mesmas propriedades utilizadas para mostrar a validade de (4.49), que são encontradas em [20]

$$\begin{aligned} & \left| \frac{ire^{i\theta} e^{-x+ixre^{i\theta}} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}}{-1 + ire^{i\theta} - \frac{c}{2} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}} \right| \\ &= |ire^{i\theta}| |e^{-x}| |e^{-xr \sin \theta}| |e^{ixr \cos \theta}| \left| \frac{\ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}}{-1 + ire^{i\theta} - \frac{c}{2} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}} \right| \\ &= |re^{-x} e^{-xr \sin \theta}| \left| \frac{\ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}}{-1 + ire^{i\theta} - \frac{c}{2} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}} \right| \\ &\leq |re^{-x} e^{-xr \sin \theta}| \left| \frac{\ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}}{|-1 + ire^{i\theta}| - \left| \frac{c}{2} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}} \right|} \right|. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Quando  $r \rightarrow 0$ , pode-se obter de (4.63):

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 0} |re^{-x} e^{-xr \sin \theta}| \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{\ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}}{|-1 + ire^{i\theta}| - \left| \frac{c}{2} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}} \right|} \right| \\ &= 0 \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{\ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}}{1 - \left| \frac{c}{2} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}} \right|} \right| \\ &= 0 \cdot \frac{2}{c} = 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

pois o limite em (4.64), pode ser calculado utilizando L'Hopital para que se chegue no resultado dado.

Portanto, quando  $r \rightarrow 0$ , pelo teorema 5.3, da página 252 da obra de Zill e Shanahan [20], obtêm-se que:

$$\left| \int_{-\pi}^0 \frac{ire^{i\theta} e^{-x+ixre^{i\theta}} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}}{-1 + ire^{i\theta} - \frac{c}{2} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}} d\theta \right| \leq \pi r |re^{-x} e^{-xr \sin \theta}| \left| \frac{\ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}}{|-1 + ire^{i\theta}| - \left| \frac{c}{2} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}} \right|} \right| \quad (4.65)$$

e usando o que foi feito em (4.64), pode-se concluir que ao  $r \rightarrow 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{-\pi}^0 \frac{ir e^{i\theta} e^{-x+ixre^{i\theta}} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}}{-1+ire^{i\theta} - \frac{c}{2} \ln \frac{ire^{i\theta}}{2-ire^{i\theta}}} d\theta \right| = 0 \quad (4.66)$$

mostrando a validade da equação (4.50).

Assim, têm-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{F}(k, x) dk &= 2\pi i \text{Res} \left( \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x), \frac{i}{v_0} \right) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{i\infty}^i \mathbb{F}(k, x) dk + \frac{1}{4\pi} \int_i^{i\infty} \mathbb{F}(k, x) dk. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Portanto, para calcular a integral em (4.41), é possível deformar o caminho original de integração no plano complexo, conforme mostra a figura 4.1, e calcula-se a integral ao longo do caminho deformado somado a  $2\pi i$  vezes o resíduo em  $k_0$ . A parte da solução assintótica vem do resíduo, enquanto a parte da solução transiente vem da integração ao longo do caminho deformado. Como as integrais ao longo das curvas  $C_{R_1}$ ,  $C_{R_2}$  e  $C_r$  se anulam ao  $R \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow 0$ , a parte transiente da solução vem então da integração de  $A$  até  $B$ , e de  $D$  até  $C$ , conforme estes pontos foram definidos na figura 4.1.

A contribuição do resíduo ao fluxo total, que corresponde a solução assintótica, pode ser dado, de acordo com [20] por

$$\phi_{as}(x) = \frac{2\pi i}{4\pi} \lim_{k \rightarrow k_0} (k - k_0) \mathbb{F}(k, x) \quad (4.68)$$

$$\implies \phi_{as}(x) = \frac{1}{2} i \lim_{k \rightarrow i/v_0} \left( k - \frac{i}{v_0} \right) \left[ \frac{e^{ikx}}{ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} \right] \quad (4.69)$$

Calculando o limite em (4.69) obtêm-se:

$$\phi_{as}(x) = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow i/v_0} \frac{e^{ikx}}{k} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \lim_{k \rightarrow i/v_0} \left( k - \frac{i}{v_0} \right) \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} \quad (4.70)$$

$$\implies \phi_{as}(x) = \frac{1}{2} \frac{v_0 e^{-\frac{x}{v_0}}}{i} \left( -\frac{2}{cv_0} \right) \lim_{k \rightarrow i/v_0} \left( k - \frac{i}{v_0} \right) \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} \quad (4.71)$$



$$\implies \phi_{as}(x) = -\frac{e^{-\frac{x}{v_0}}}{ci} \lim_{k \rightarrow i/v_0} \left(k - \frac{i}{v_0}\right) \left[1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik}\right]^{-1} \quad (4.72)$$

É possível verificar que:

$$\lim_{k \rightarrow i/v_0} \left(k - \frac{i}{v_0}\right) \left[1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik}\right]^{-1} = \frac{0}{0}. \quad (4.73)$$

Aplicando L'Hopital para calcular o limite em (4.73)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow i/v_0} \left(k - \frac{i}{v_0}\right) \left[1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik}\right]^{-1} &= \lim_{k \rightarrow i/v_0} \left[ \frac{c}{2ik} \left( \frac{1}{k} \ln \frac{1+ik}{1-ik} - \frac{2i}{1 - \frac{1}{v_0^2}} \right) \right]^{-1} \\ &= - \left[ cv_0 i \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{1 - \frac{1}{v_0^2}} \right) \right]^{-1} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{v_0^2}\right)}{v_0 i \left(\frac{1}{v_0^2} - (1-c)\right)}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Assim, obtêm-se para o fluxo assintótico, dado pela equação (4.72)

$$\phi_{as}(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{v_0^2}\right) e^{-\frac{x}{v_0}}}{cv_0 \left(\frac{1}{v_0^2} - (1-c)\right)} \quad (4.75)$$

De fato, como já destacado, o fluxo assintótico dado pela equação (4.75) é válido apenas para  $x > 0$ , devido a condição de que  $\phi(x) \rightarrow 0$  ao  $x \rightarrow \infty$ . O fluxo assintótico para  $x < 0$  será descrito futuramente.

Lembrando que

$$N_0^+ = \frac{c}{2} v_0^3 \left[ \frac{c}{v_0^2 - 1} - \frac{1}{v_0^2} \right] \quad (4.76)$$

é possível verificar que o fluxo assintótico obtido aqui é exatamente o mesmo obtido através do método da separação de variáveis, visto que:

$$\phi_{as}(x) = \frac{\frac{1}{v_0} \left(1 - \frac{1}{v_0^2}\right) e^{-\frac{x}{v_0}}}{c \left[\frac{1}{v_0^2} - (1-c)\right]} = \frac{(v_0^2 - 1) e^{-\frac{x}{v_0}}}{cv_0^3 \left(\frac{1}{v_0^2} - 1 + c\right)} = \frac{e^{-\frac{x}{v_0}}}{cv_0^3 \left(\frac{1-v_0^2+cv_0^2}{v_0^2(v_0^2-1)}\right)}$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{v_0}}}{2\frac{c}{2}v_0^3 \left[ \frac{c}{v_0^2-1} - \frac{1}{v_0^2} \right]} = \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{x}{v_0}}}{N_0^+}. \quad (4.77)$$

Já a contribuição das integrais de  $A$  até  $B$ , e de  $D$  até  $C$ , ao  $R \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow 0$ , que juntas correspondem a parte transiente da solução, é dada pela soma das integrais  $I_1 + I_2$ , definidas como:

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{i\infty}^i \left[ \frac{e^{ikx}}{ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right] \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} dk, \quad (4.78)$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_i^{i\infty} \left[ \frac{e^{ikx}}{ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right] \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} dk \quad (4.79)$$

onde  $I_1$  corresponde a integral de  $A$  a  $B$ , e  $I_2$  a integral de  $D$  a  $C$ .

É possível verificar que os termos logarítmicos presentes nos integrandos de (4.78) e (4.79) irão diferir em  $2\pi i$ , pois conforme [20], o logaritmo complexo é dado por

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z) \quad (4.80)$$

E analisando, em  $I_1$ , têm-se que  $k = -\varepsilon + \alpha i$ , com  $\varepsilon, \alpha \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\alpha \geq 1$ . Sendo assim

$$\frac{1+ik}{1-ik} = \frac{1-\alpha-\varepsilon i}{1+\alpha+\varepsilon i} = \frac{1-\alpha-\varepsilon i}{1+\alpha+\varepsilon i} \left( \frac{1+\alpha-\varepsilon i}{1+\alpha-\varepsilon i} \right) = \frac{1-\alpha^2-\varepsilon^2-2\varepsilon i}{(1+\alpha)^2+\varepsilon^2}. \quad (4.81)$$

Portanto, como  $(1+\alpha)^2 + \varepsilon^2 > 0$ , pode-se escrever

$$\frac{1+ik}{1-ik} = a + bi \quad (4.82)$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$ , e  $a < 0$  e  $b < 0$ , o que faz com que

$$\arg \left( \frac{1+ik}{1-ik} \right) = -\pi. \quad (4.83)$$

Um processo análogo pode ser feito para mostrar que em  $I_2$ , têm-se

$$\arg \left( \frac{1+ik}{1-ik} \right) = \pi \quad (4.84)$$

Definindo então

$$-Z \equiv 1 + ik \quad (4.85)$$

segue que

$$\ln \frac{1 + ik}{1 - ik} = \ln \frac{-Z}{2 + Z} = -i\pi + \ln \frac{Z}{2 + Z} \quad \text{em } I_1, \quad (4.86)$$

$$\ln \frac{1 + ik}{1 - ik} = \ln \frac{-Z}{2 + Z} = i\pi + \ln \frac{Z}{2 + Z} \quad \text{em } I_2. \quad (4.87)$$

Nota-se a validade das expressões acima visto que  $\arg\left(\frac{Z}{2+Z}\right) = 0$  tanto em  $I_1$  quanto em  $I_2$ , e portanto

$$\ln \left| \frac{-Z}{2 + Z} \right| = \ln \left| \frac{Z}{2 + Z} \right| = 0i + \ln \left| \frac{Z}{2 + Z} \right| = \ln \frac{Z}{2 + Z}. \quad (4.88)$$

Levando então em consideração que  $Z \rightarrow 0$  ao  $k \rightarrow i$ , e  $Z \rightarrow \infty$  ao  $k \rightarrow i\infty$ , pode-se reescrever as integrais  $I_1$  e  $I_2$  como

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty}^0 \frac{e^{-(Z+1)x}}{-(Z+1)} \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \left[ 1 - \frac{c}{-2(Z+1)} \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right]^{-1} idZ \quad (4.89)$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-(Z+1)x}}{-(Z+1)} \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \left[ 1 - \frac{c}{-2(Z+1)} \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right]^{-1} idZ \quad (4.90)$$

Combinando  $I_1$  e  $I_2$  para encontrar a parte transiente da solução

$$\begin{aligned} \phi_{trans}(x) = & \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left[ -\frac{e^{-(Z+1)x}}{(Z+1)} \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right. \\ & \left. \left[ 1 + \frac{c}{2(Z+1)} \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right]^{-1} + \frac{e^{-(Z+1)x}}{(Z+1)} \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right. \\ & \left. \left[ 1 + \frac{c}{2(Z+1)} \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right]^{-1} \right] idZ \quad (4.91) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi_{trans}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} -\frac{e^{-(Z+1)x}}{(Z+1)} \left[ \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[ 1 + \frac{c}{2(Z+1)} \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right] - \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \\
& \left[ 1 + \frac{c}{2(Z+1)} \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right] \left[ \left[ 1 + \frac{c}{2(Z+1)} \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right] \right. \\
& \left. \left[ 1 + \frac{c}{2(Z+1)} \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right] \right]^{-1} idZ \tag{4.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \phi_{trans}(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty -\frac{e^{-(Z+1)x}}{(Z+1)} \left[ \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \left[ 1 + \frac{c}{2(Z+1)} \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right] \right. \\
& \left. - \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \left[ 1 + \frac{c}{2(Z+1)} \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right] \right] \\
& \left[ 1 + \frac{c}{Z+1} \ln \frac{Z}{2+Z} + \frac{c^2}{4(Z+1)^2} \left( \left( \ln \frac{Z}{2+Z} \right)^2 + \pi^2 \right) \right]^{-1} idZ. \tag{4.93}
\end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned}
& \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \left[ 1 + \frac{c}{2(Z+1)} \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right] \\
& - \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \left[ 1 + \frac{c}{2(Z+1)} \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right] \\
& = i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} + \frac{c}{2(Z+1)} \left( \pi^2 + \left( \ln \frac{Z}{2+Z} \right)^2 \right) \\
& + i\pi - \ln \frac{Z}{2+Z} - \frac{c}{2(Z+1)} \left( \pi^2 + \left( \ln \frac{Z}{2+Z} \right)^2 \right) \\
& = 2i\pi \tag{4.94}
\end{aligned}$$

se torna possível reduzir a expressão dada pela equação (4.93) que define o fluxo transiente  $\phi_{trans}(x)$  para

$$\begin{aligned}
\phi_{trans}(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty -\frac{e^{-(Z+1)x}}{(Z+1)} [2i\pi] \\
& \left[ 1 + \frac{c}{Z+1} \ln \frac{Z}{2+Z} + \frac{c^2}{4(Z+1)^2} \left( \left( \ln \frac{Z}{2+Z} \right)^2 + \pi^2 \right) \right]^{-1} idZ. \tag{4.95}
\end{aligned}$$

Multiplicando o lado direito da equação (4.95) por  $\frac{4(Z+1)^2}{4(Z+1)^2}$

$$\begin{aligned} \phi_{trans}(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty -8i\pi(Z+1)e^{-(Z+1)x} \\ &\quad \left[ 4(Z+1)^2 + 4(Z+1)c \ln \frac{Z}{2+Z} + c^2 \left( \left( \ln \frac{Z}{2+Z} \right)^2 + \pi^2 \right) \right]^{-1} idZ \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\implies \phi_{trans}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{8\pi(Z+1)e^{-(Z+1)x}}{\left( 2(Z+1) + c \ln \frac{Z}{2+Z} \right)^2 + c^2\pi^2} dZ. \quad (4.97)$$

Através da substituição  $v = \frac{1}{Z+1}$  é possível verificar que esta parte transiente da solução é exatamente igual a obtida com o método da separação de variáveis, pois

$$\begin{aligned} \phi_{trans}(x) &= \int_0^\infty \frac{2(Z+1)e^{-(Z+1)x}}{\left( 2(Z+1) - c \ln \left( 1 + \frac{2}{Z} \right) \right)^2 + c^2\pi^2} dZ \\ &= \int_1^0 \frac{2\frac{1}{v}e^{-\frac{x}{v}}}{\left[ 2 \left( \frac{1}{v} - \frac{c}{2} \ln \left( 1 + \frac{2}{-1+\frac{1}{v}} \right) \right) \right]^2 + c^2\pi^2} \left( -\frac{1}{v^2} \right) dv \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{v}}}{2v \left[ \left( \frac{1}{v} - \frac{c}{2} \ln \left( 1 + \frac{2}{-1+\frac{1}{v}} \right) \right)^2 v^2 + \frac{c^2\pi^2 v^2}{4} \right]} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{v}}}{v \left[ \lambda^2(v) + \frac{c^2\pi^2 v^2}{4} \right]} dv. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Onde:

$$\lambda^2(v) = \left( 1 - \frac{cv}{2} \ln \left( 1 + \frac{2}{-1+\frac{1}{v}} \right) \right)^2 = \left( 1 - \frac{cv}{2} \ln \frac{v+1}{1-v} \right)^2 \quad (4.99)$$

que coincide com o valor de  $\lambda(v)$  dado em (3.35).

Portanto

$$\phi_{trans}(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{v}}}{N_v} dv \quad (4.100)$$

que é exatamente a parte transiente da solução dada em (3.89) pelo método da separação das variáveis, para  $x > 0$ .

Agora, para estudar a solução no caso em que  $x < 0$ , o processo é análogo ao que foi feito até aqui, porém o caminho de integração no plano complexo será deformado conforme mostra a figura 4.2. Ou seja, neste caso se tomará a parte do plano complexo em que  $\text{Im}(k) \leq 0$ .

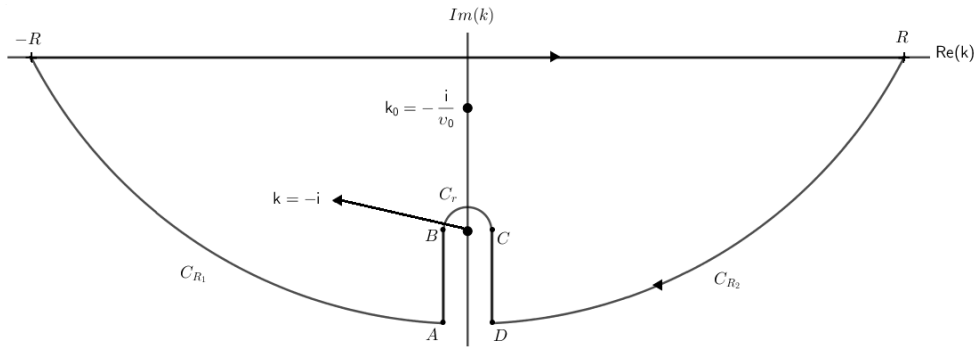


Figura 4.2: Região usada na deformação do caminho de integração com  $\text{Im}(k) \leq 0$

Assim, neste caso têm-se que:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-R}^R \mathbb{F}(k, x) dk = 2\pi i \text{Res} \left( \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x), \frac{i}{v_0} \right) - \int_{C_{R_1}} - \int_D^C - \int_{C_r} - \int_B^A - \int_{C_{R_2}} \quad (4.101)$$

onde o integrando das integrais em  $k$  do lado da direita da igualdade acima é  $\frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x)$ , que foram omitido aqui para simplificar a escrita.

Novamente, têm-se nesse caso que ao  $R \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow 0$

$$\int_{C_{R_1}} \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x) dk + \int_{C_{R_2}} \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x) dk = 0 \quad (4.102)$$

$$\int_{C_r} \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x) dk = 0. \quad (4.103)$$

Para mostrar (4.102), a mesma parametrização utilizada para provar (4.49), porém com  $-\pi \leq \theta \leq 0$ . Assim, pode-se dizer que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{-\pi}^0 \frac{2iRe^{i\theta} e^{ixRe^{i\theta}} \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}}{2iRe^{i\theta} - c \ln \frac{1+iRe^{i\theta}}{1-iRe^{i\theta}}} d\theta \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{2\pi R^2}{e^{xR \sin \theta}} \right| \cdot 0 = 0 \quad (4.104)$$

visto que neste caso  $x \leq 0$  e  $-\pi \leq \theta \leq 0$ , e portanto  $xR \sin \theta \geq 0$ . Portanto, isto mostra a validade de (4.102).

Já para mostrar a validade de (4.103), a parametrização é similar a que foi realizada para mostrar (4.50), porém com  $k = -i + re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . De maneira análoga com o que foi feito para mostrar (4.50), é possível concluir que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_0^\pi \frac{ire^{i\theta} e^x e^{ixre^{i\theta}} \ln \frac{2+ire^{i\theta}}{ire^{i\theta}}}{1 + ire^{i\theta} - \frac{c}{2} \ln \frac{2+ire^{i\theta}}{ire^{i\theta}}} d\theta \right| &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \pi r \left| re^x e^{-xr \sin \theta} \right| \left| \frac{\ln \frac{2+ire^{i\theta}}{ire^{i\theta}}}{\left| 1 - r \right| - \left| \frac{c}{2} \ln \frac{2+ire^{i\theta}}{ire^{i\theta}} \right|} \right| \\ &= 0 \cdot \frac{2}{c} = 0 \end{aligned} \quad (4.105)$$

e assim, é comprovada a validade de (4.103).

Portanto, têm-se neste caso

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{F}(k, x) dk &= 2\pi i \text{Res} \left( \frac{1}{4\pi} \mathbb{F}(k, x), \frac{i}{v_0} \right) + \frac{1}{4\pi} \int_{-i\infty}^{-i} \mathbb{F}(k, x) dk \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{-i}^{-i\infty} \mathbb{F}(k, x) dk \end{aligned} \quad (4.106)$$

onde a parcela que envolve o resíduo corresponde a solução assintótica enquanto as integrais de  $A$  até  $B$  e de  $C$  até  $D$  correspondem a solução transiente.

Calculando então a solução assintótica

$$\phi_{as}(x) = \frac{2\pi i}{4\pi} \lim_{k \rightarrow k_0} (k - k_0) \mathbb{F}(k, x) \quad (4.107)$$

$$\implies \phi_{as}(x) = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow -i/v_0} \frac{e^{ikx}}{k} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \lim_{k \rightarrow -i/v_0} \left( k - \frac{i}{v_0} \right) \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} \quad (4.108)$$

$$\implies \phi_{as} = \frac{i}{c} e^{\frac{x}{v_0}} \lim_{k \rightarrow -i/v_0} \left( k - \frac{i}{v_0} \right) \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} \quad (4.109)$$

$$\implies \phi_{as}(x) = \frac{i}{c} e^{\frac{x}{v_0}} \lim_{k \rightarrow -i/v_0} \left[ \frac{c}{2ik} \left( \frac{1}{k} \ln \frac{1+ik}{1-ik} - \frac{2i}{1-\frac{1}{v_0^2}} \right) \right]^{-1} \quad (4.110)$$

$$\implies \phi_{as}(x) = \frac{i}{c} e^{\frac{x}{v_0}} \left[ \frac{cv_0}{2} \left( iv_0 \frac{2}{cv_0} - \frac{2i}{1-\frac{1}{v_0^2}} \right) \right]^{-1} \quad (4.111)$$

$$\implies \phi_{as}(x) = \frac{e^{\frac{x}{v_0}}}{c^2 \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{1-\frac{1}{v_0^2}} \right)} \quad (4.112)$$

$$\implies \phi_{as}(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{v_0^2}\right) e^{\frac{x}{v_0}}}{cv_0 \left( \frac{1}{v_0^2} - (1-c) \right)} \quad (4.113)$$

Fica claro que pela condição de que  $\phi(x) \rightarrow \infty$  ao  $x \rightarrow \infty$ , que esta solução é válida apenas no caso em que  $x < 0$ , conforme já mencionado.

Lembrando, desta vez, que

$$N_0^- = -\frac{c}{2} v_0^3 \left[ \frac{c}{v_0^2 - 1} - \frac{1}{v_0^2} \right] \quad (4.114)$$

é possível verificar que o fluxo assintótico obtido aqui é exatamente o mesmo obtido através do método da separação de variáveis, dado pela equação (3.90) para  $x < 0$ , visto que

$$\begin{aligned} \phi_{as}(x) &= \frac{\frac{1}{v_0} \left(1 - \frac{1}{v_0^2}\right) e^{\frac{x}{v_0}}}{c \left[ \frac{1}{v_0^2} - (1-c) \right]} = \frac{(v_0^2 - 1) e^{\frac{x}{v_0}}}{cv_0^3 \left( \frac{1}{v_0^2} - 1 + c \right)} = \frac{e^{\frac{x}{v_0}}}{cv_0^3 \left( \frac{1-v_0^2+cv_0^2}{v_0^2(v_0^2-1)} \right)} \\ &= \frac{e^{\frac{x}{v_0}}}{2\frac{c}{2}v_0^3 \left[ \frac{c}{v_0^2-1} - \frac{1}{v_0^2} \right]} = -\frac{1}{2} \frac{e^{\frac{x}{v_0}}}{N_0^-} \end{aligned} \quad (4.115)$$

Estudando agora a parte transiente da solução, é possível mais uma vez nomear as duas integrais que fazem parte desta solução como

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{-i\infty}^{-i} \frac{e^{ikx}}{ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} dk \quad (4.116)$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{-i}^{-i\infty} \frac{e^{ikx}}{ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \left[ 1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} dk \quad (4.117)$$



Através da substituição

$$Z \equiv -1 + ik \quad (4.118)$$

têm-se que  $Z \rightarrow 0$  ao  $k \rightarrow -i$  e  $Z \rightarrow \infty$  ao  $k \rightarrow -i\infty$ . Além disso, é possível verificar, de forma análoga ao que foi feito anteriormente que

$$\ln \frac{1 + ik}{1 - ik} = \ln \frac{2 + Z}{-Z} = -i\pi + \ln \frac{2 + Z}{Z} \quad \text{em } I_1 \quad (4.119)$$

$$\ln \frac{1 + ik}{1 - ik} = \ln \frac{2 + Z}{-Z} = i\pi + \ln \frac{2 + Z}{Z} \quad \text{em } I_2 \quad (4.120)$$

Portanto, levando também em consideração que  $dk = -idZ$ , têm-se

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty}^0 \frac{e^{(Z+1)x}}{Z+1} \left( -i\pi + \ln \frac{2+Z}{Z} \right) \left[ 1 - \frac{c}{2(Z+1)} \left( -i\pi + \ln \frac{2+Z}{Z} \right) \right]^{-1} (-i)dZ \quad (4.121)$$

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty}^0 \frac{ie^{(Z+1)x}}{(Z+1)} \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \left[ 1 - \frac{c}{-2(Z+1)} \left( i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right]^{-1} dZ \quad (4.122)$$

e também:

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{(Z+1)x}}{Z+1} \left( i\pi + \ln \frac{2+Z}{Z} \right) \quad (4.123)$$

$$\left[ 1 - \frac{c}{2(Z+1)} \left( i\pi + \ln \frac{2+Z}{Z} \right) \right]^{-1} (-i)dZ \quad (4.124)$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{ie^{(Z+1)x}}{(Z+1)} \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \left[ 1 - \frac{c}{-2(Z+1)} \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right]^{-1} dZ \quad (4.125)$$

Combinando então  $I_1$  e  $I_2$  têm-se a parte transiente do fluxo, dado por

$$\phi_{trans}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{ie^{(Z+1)x}}{(Z+1)} \left[ \left( -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \right) \right]$$

$$\left[1 - \frac{c}{-2(Z+1)} \left(-i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z}\right)\right]^{-1} - \left(i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z}\right) \left[1 - \frac{c}{-2(Z+1)} \left(i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z}\right)\right]^{-1} dZ \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi_{trans}(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{ie^{(Z+1)x}}{(Z+1)} \left[ \left(-i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z}\right) \right. \\ &\quad \left. \left[1 - \frac{c}{-2(Z+1)} \left(i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. - \left(i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z}\right) \left[1 - \frac{c}{-2(Z+1)} \left(-i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. \left[ \left(1 - \frac{c}{-2(Z+1)} \ln \frac{Z}{2+Z}\right)^2 + \frac{c^2\pi^2}{4(Z+1)^2} \right]^{-1} \right] dZ. \quad (4.127) \end{aligned}$$

De forma análoga ao que já foi feito para determinar a parte transiente da solução quando  $x > 0$ , têm-se aqui:

$$\phi_{trans}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{4(Z+1)e^{(Z+1)x}(-2i\pi)}{\left(2(Z+1) - c \ln\left(1 + \frac{2}{Z}\right)\right)^2 + c^2\pi^2} dZ \quad (4.128)$$

$$\Rightarrow \phi_{trans}(x) = \int_0^\infty \frac{2(Z+1)e^{(Z+1)x}}{\left(2(Z+1) - c \ln\left(1 + \frac{2}{Z}\right)\right)^2 + c^2\pi^2} dZ. \quad (4.129)$$

Como  $\phi(x) \rightarrow 0$  ao  $x \rightarrow -\infty$ , observa-se que a solução acima é válida apenas para  $x < 0$ , conforme já destacado.

Novamente, através da substituição  $v = \frac{1}{Z+1}$  é possível verificar que esta parte transiente da solução é exatamente igual a obtida com o método da separação de variáveis, pois

$$\begin{aligned} \phi_{trans}(x) &= \int_0^\infty \frac{2(Z+1)e^{(Z+1)x}}{\left(2(Z+1) - c \ln\left(1 + \frac{2}{Z}\right)\right)^2 + c^2\pi^2} dZ \\ &= \int_1^0 \frac{2\frac{1}{v}e^{\frac{x}{v}}}{\left[2\left(\frac{1}{v} - \frac{c}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{-1+\frac{1}{v}}\right)\right)\right]^2 + c^2\pi^2} \left(-\frac{1}{v^2}\right) dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{e^{\frac{x}{v}}}{2v \left[ \left( \frac{1}{v} - \frac{c}{2} \ln \left( 1 + \frac{2}{-1 + \frac{1}{v}} \right) \right)^2 v^2 + \frac{c^2 \pi^2 v^2}{4} \right]} dv \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^{\frac{x}{v}}}{v \left[ \lambda^2(v) + \frac{c^2 \pi^2 v^2}{4} \right]} dv
\end{aligned} \tag{4.130}$$

Aqui:

$$\lambda^2(v) = \left( 1 - \frac{cv}{2} \ln \left( 1 + \frac{2}{-1 + \frac{1}{v}} \right) \right)^2 = \left( 1 - \frac{cv}{2} \ln \frac{v+1}{1-v} \right)^2 \tag{4.131}$$

que é igual ao valor de  $\lambda(v)$  definido em (3.35). Portanto:

$$\phi_{trans}(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{e^{\frac{x}{v}}}{N_v} dv \tag{4.132}$$

que é exatamente a parte transiente da solução dada em (3.90) pelo método da separação das variáveis, para  $x < 0$ .

É interessante notar que combinando as equações (4.75) e (4.113), é possível escrever o fluxo assintótico, para qualquer valor de  $x$ , como

$$\phi_{as}(x) = \frac{\frac{1}{v_0} \left( 1 - \frac{1}{v_0^2} \right) e^{\frac{-|x|}{v_0}}}{c \left[ \frac{1}{v_0^2} - (1 - c) \right]}. \tag{4.133}$$

Bem como também é possível combinar as equações (4.97) e (4.129) de modo que o fluxo transiente pode ser escrito como

$$\phi_{trans}(x) = \int_0^\infty \frac{2(Z+1)e^{-(Z+1)|x|}}{\left( 2(Z+1) - c \ln \left( 1 + \frac{2}{Z} \right) \right)^2 + c^2 \pi^2} dZ \tag{4.134}$$

para qualquer valor de  $x$ .

Assim, através de (4.133) e (4.134) ficam definidas as soluções assintótica e transiente, que juntas formam a solução geral da equação do transporte monoenergética, isotrópica e estacionária em geometria cartesiana unidimensional, definida pela equação (2.22), dada em termos do fluxo total de nêutrons, e que foi obtida através do método da transformada de Fourier.

## 5 RESULTADOS OBTIDOS

A partir das soluções analíticas obtidas, e conforme já destacado no capítulo 3, o fluxo assintótico governa a solução geral a partir de determinada distância da fonte. Com isso, é possível interpretar o fluxo assintótico como a parte do fluxo que é governada pelas colisões que ocorrem no meio, de maneira independente da fonte, e representa o fluxo na situação em que há um equilíbrio colisional [1].

Já a parte transiente da solução é interpretada como o oposto disso. Esta parte do fluxo possui uma contribuição maior em pequenas distâncias da fonte, e representa o afastamento do fluxo de nêutrons deste estado de equilíbrio colisional, sendo este afastamento causado pela fonte [1].

O que determina as contribuições do fluxo assintótico e do fluxo transiente ao fluxo total são as propriedades do meio, representadas no caso de estudo deste trabalho pela constante  $c$ . Se  $c$  está próximo de 0, então significa que há muito mais absorção de nêutrons no meio do que espalhamento e fissão, e portanto, neste caso o equilíbrio colisional não ocorre com tanta facilidade e o fluxo transiente acaba controlando o fluxo total até maiores distâncias da fonte. Porém, conforme os valores de  $c$  aumentam até 1, o fluxo assintótico passa a controlar o fluxo total a pequenas distâncias da fonte de nêutrons.

Cabe aqui ressaltar que os valores de  $c$  nunca ultrapassam a unidade, pois neste caso trataria-se de uma situação em que são liberados em média mais do que um nêutron por colisão, o que determinaria um crescimento exponencial do fluxo total, gerando assim um descontrole na reação em cadeia.

A tabela 5.1 apresenta as distâncias  $x$ , em livres caminhos médios de colisão, para os quais a diferença  $|\phi(x) - \phi_{as}(x)|$  passa a ser muito pequena. Cabe ressaltar que para  $c = 0,1$  e  $c = 0,2$ , os valores de  $\phi(x)$  e  $\phi_{as}(x)$  são mais próximos de zero, o que faz com que a diferença absoluta entre estas funções seja pequena para

valores de  $x$  menores. Ainda assim fica claro ao analisar a tabela 5.1 que conforme  $c$  cresce, a distância  $x$  da fonte diminui para que a diferença  $|\phi(x) - \phi_{as}(x)|$  seja pequena.

Tabela 5.1: Análise da distância  $x$  para a proximidade dos valores de  $\phi_{as}(x)$  e  $\phi(x)$

$c$	$ \phi(x) - \phi_{as}(x)  < 10^{-4}$	$ \phi(x) - \phi_{as}(x)  < 10^{-5}$	$ \phi(x) - \phi_{as}(x)  < 10^{-6}$
0,1	6,806	8,897	11,027
0,2	7,117	9,224	11,404
0,3	7,228	9,358	11,518
0,4	7,111	9,217	11,356
0,5	6,898	8,974	11,087
0,6	6,663	8,709	10,797
0,7	6,434	8,453	10,519
0,8	6,219	8,215	10,263
0,9	6,022	7,997	10,03

As figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 mostram os gráficos de  $\phi(x)$  e  $\phi_{as}(x)$  para diferentes valores de  $c$ . Com as figuras, fica evidente o motivo do comportamento diferente para  $c = 0,1$  e  $c = 0,2$  observado na tabela 5.1. Tanto os dados da tabela 5.1 como os gráficos das figuras supracitadas foram gerados utilizando a linguagem de programação Python.

Nos códigos, foram programadas as funções dadas pelas equações (4.133) e (4.134) como funções de  $x$  e  $c$ . Inicialmente o programa recebe os valores de  $x$  e  $c$  e computa o valor de  $v_0$  a partir do método de Newton para satisfazer a equação

$$\frac{cv_0}{2} \ln \frac{v_0 + 1}{v_0 - 1} - 1 = 0 \quad (5.1)$$

que é baseada em (3.20). A escolha da aproximação inicial para o valor de  $v_0$  pelo método de Newton foi feita analisando o comportamento do gráfico da função definida no lado esquerdo da igualdade (5.1).

O programa demora em média menos de 0,001s para computar o valor de  $v_0$ , sendo que estes tempos computacionais foram calculados utilizando a biblioteca `timeit`. Cabe mencionar aqui que o método de Newton foi escolhido por apresentar menor tempo computacional do que o método da bissecção que também foi testado neste trabalho.

Em seguida são computadas  $\phi_{as}(x)$  e  $\phi_{trans}(x)$  conforme definidas pelas equações (4.133) e (4.134). Devido a simplicidade da primeira, não é necessário explicitar os detalhes de como ela é computada, porém a integral da segunda é calculada utilizando a função `scipy.integrate.quad`, da biblioteca `scipy`.

A função utiliza rotinas da biblioteca QUADPACK de FORTRAN 77. No caso deste trabalho, por se tratar de uma integral sem singularidades mas com limite superior infinito, a integral é calculada utilizando a rotina QAGI. O intervalo infinito é mapeado em um intervalo finito e em seguida é aplicada a estratégia da rotina QAGS, que consiste em uma integração que utiliza subdivisão em intervalos de maneira globalmente adaptativa em conexão com extrapolação [16].

Após o cálculo de  $\phi_{as}(x)$  e  $\phi_{trans}(x)$  foi calculada  $\phi(x) = \phi_{as}(x) + \phi_{trans}(x)$  e os gráficos que são apresentados pelas figuras 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 foram plotados utilizando a biblioteca `Matplotlib`.

Os tempos computacionais para o cálculo dos fluxos assintótico e transiente são de menos de 0,001s para cada valor de  $c$  e  $x$  dado, considerando que  $v_0$  já foi calculado e está sendo utilizado agora como uma constante. O fluxo total também é calculado com extrema velocidade, visto que é a soma dos valores já calculados de  $\phi_{as}(x)$  e  $\phi_{trans}(x)$ .

A figura 5.6 apresenta também gráficos individuais de  $\phi(x)$  e  $\phi_{as}(x)$  em um mesmo plano conforme varia-se  $c$ , sendo que estes gráficos também foram programados utilizando a biblioteca `Matplotlib`. É importante notar que há uma diferença entre as escalas dos gráficos que aparecem lado a lado na figura. Os gráficos

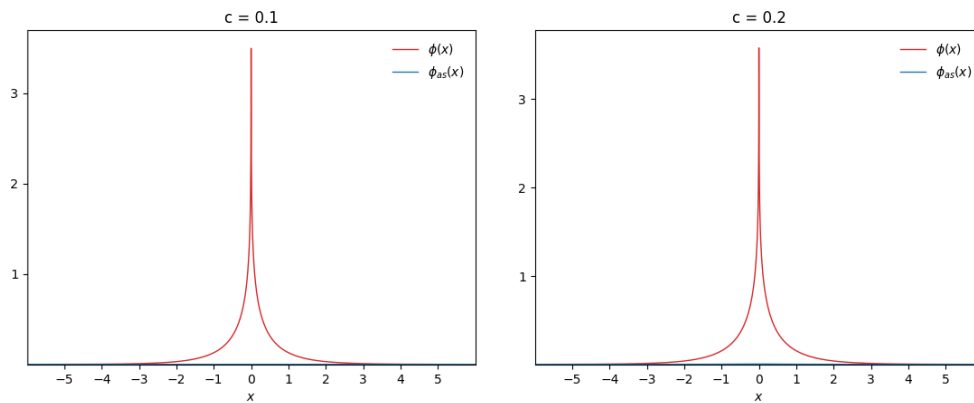


Figura 5.1: Gráficos de  $\phi(x)$  e  $\phi_{as}(x)$  para  $c = 0,1$  e  $c = 0,2$ .

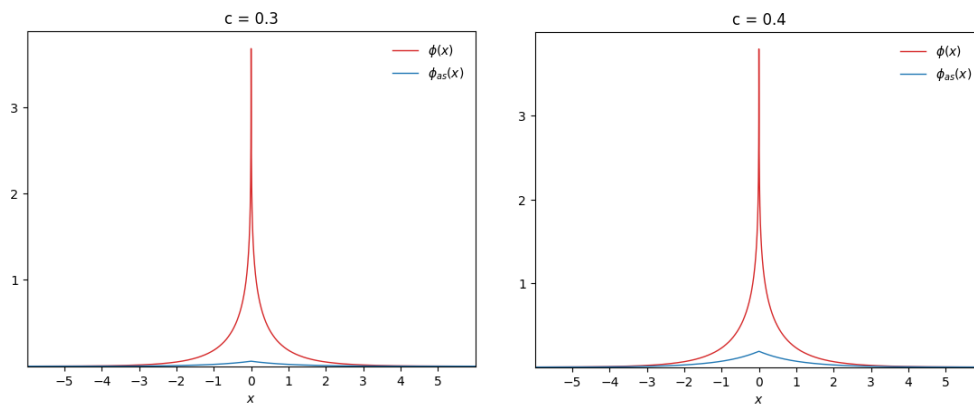


Figura 5.2: Gráficos de  $\phi(x)$  e  $\phi_{as}(x)$  para  $c = 0,3$  e  $c = 0,4$ .

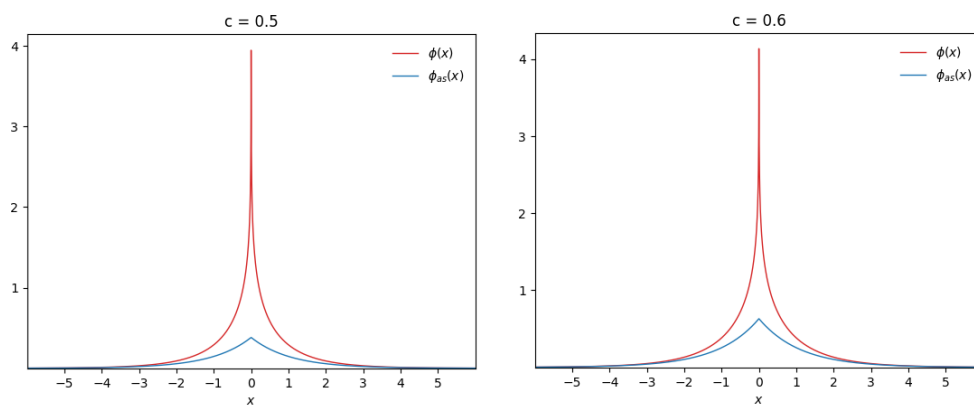


Figura 5.3: Gráficos de  $\phi(x)$  e  $\phi_{as}(x)$  para  $c = 0,5$  e  $c = 0,6$ .

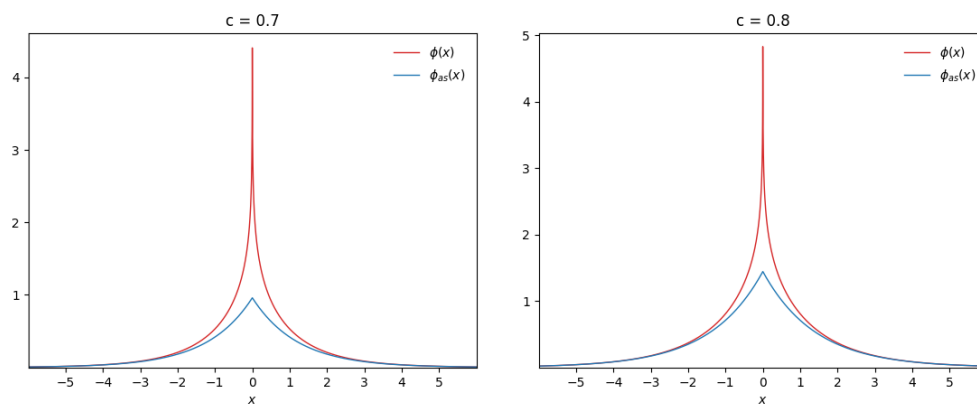


Figura 5.4: Gráficos de  $\phi(x)$  e  $\phi_{as}(x)$  para  $c = 0,7$  e  $c = 0,8$ .

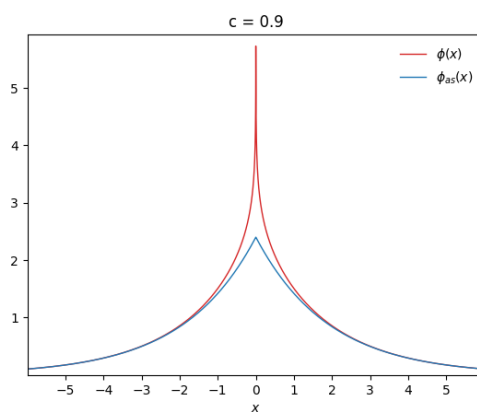


Figura 5.5: Gráficos de  $\phi(x)$  e  $\phi_{as}(x)$  para  $c = 0,9$ .



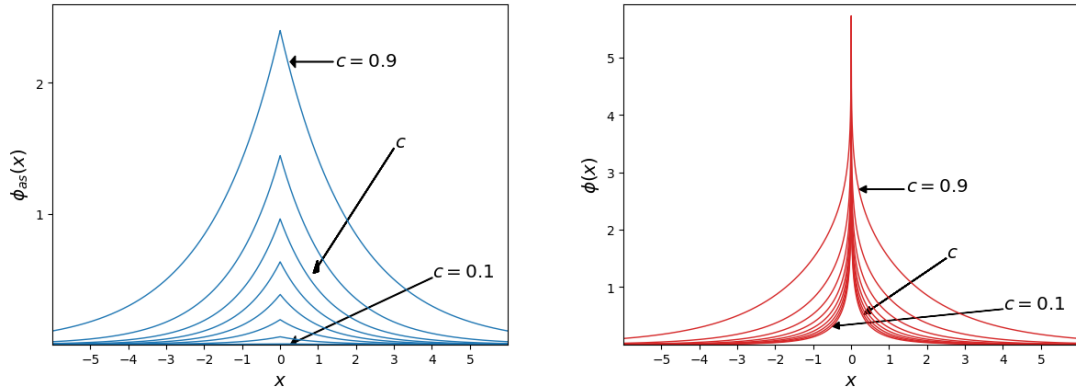


Figura 5.6: Comportamento de  $\phi_{as}(x)$  e  $\phi(x)$  conforme  $c$  varia.

servem para que se note o padrão de comportamento de cada uma das funções conforme toma-se  $c$  variando de 0,1 a 0,9.

A obra de Case, Hoffmann e Placzek [4] apresenta extensos resultados de  $\phi_{as}(x)/\phi(x)$  para diferentes valores de  $c$  e  $x$ . Estes resultados são consolidados, e portanto são usados como base de comparação com os obtidos neste trabalho. Os valores a serem comparados são apresentados a partir do conjunto de tabelas 5.2, 5.3, e 5.4.

É possível notar, ao analisar as tabelas 5.2, 5.3 e 5.4, que os valores obtidos para  $\phi_{as}(x)/\phi(x)$  através dos métodos e fórmulas deste trabalho são mais próximos dos valores obtidos no trabalho de [4] para valores de  $c$  mais próximos de 1. Isto ocorre devido ao fato de que conforme  $c \rightarrow 0$ , têm-se  $v_0 \rightarrow 1$ , e portanto isso dificulta o cálculo de  $\phi_{as}(x)$  devido a expressão no denominador desta função definida pela equação (4.133).

No entanto, é interessante observar que há uma semelhança clara entre os resultados obtidos através deste trabalho, que foi baseado majoritariamente na obra de [1], com os resultados obtidos por [4], principalmente conforme os valores de  $c$  crescem.

Tabela 5.2: Comparação de  $\phi_{as}(x)/\phi(x)$  entre este trabalho e [4] para  $c = 0.1$ ,  $c = 0.2$  e  $c = 0.3$ .

$x$	$c = 0,1$		$c = 0,2$		$c = 0,3$	
	Este trabalho	[4]	Este trabalho	[4]	Este trabalho	[4]
0,1	$7,654 \cdot 10^{-7}$	$7,654 \cdot 10^{-7}$	$3,924 \cdot 10^{-3}$	$3,926 \cdot 10^{-3}$	$4,640 \cdot 10^{-2}$	$4,639 \cdot 10^{-2}$
0,2	$1,014 \cdot 10^{-6}$	$1,014 \cdot 10^{-6}$	$5,096 \cdot 10^{-3}$	$5,095 \cdot 10^{-3}$	$5,900 \cdot 10^{-2}$	$5,899 \cdot 10^{-2}$
0,3	$1,221 \cdot 10^{-6}$	$1,221 \cdot 10^{-6}$	$6,046 \cdot 10^{-3}$	$6,046 \cdot 10^{-3}$	$6,889 \cdot 10^{-2}$	$6,888 \cdot 10^{-2}$
0,4	$1,408 \cdot 10^{-6}$	$1,408 \cdot 10^{-6}$	$6,884 \cdot 10^{-3}$	$6,883 \cdot 10^{-3}$	$7,739 \cdot 10^{-2}$	$7,738 \cdot 10^{-2}$
0,5	$1,582 \cdot 10^{-6}$	$1,582 \cdot 10^{-6}$	$7,651 \cdot 10^{-3}$	$7,650 \cdot 10^{-3}$	$8,501 \cdot 10^{-2}$	$8,498 \cdot 10^{-2}$
0,6	$1,747 \cdot 10^{-6}$	$1,748 \cdot 10^{-6}$	$8,367 \cdot 10^{-3}$	$8,365 \cdot 10^{-3}$	$9,198 \cdot 10^{-2}$	$9,196 \cdot 10^{-2}$
0,7	$1,906 \cdot 10^{-6}$	$1,907 \cdot 10^{-6}$	$9,045 \cdot 10^{-3}$	$9,042 \cdot 10^{-3}$	$9,847 \cdot 10^{-2}$	$9,845 \cdot 10^{-2}$
0,8	$2,060 \cdot 10^{-6}$	$2,060 \cdot 10^{-6}$	$9,692 \cdot 10^{-3}$	$9,6888 \cdot 10^{-3}$	0,1046	0,1045
0,9	$2,209 \cdot 10^{-6}$	$2,209 \cdot 10^{-6}$	$1,031 \cdot 10^{-2}$	$1,031 \cdot 10^{-2}$	0,1103	0,1103
1	$2,355 \cdot 10^{-6}$	$2,355 \cdot 10^{-6}$	$1,091 \cdot 10^{-2}$	$1,092 \cdot 10^{-2}$	0,1158	0,1158
2	$3,694 \cdot 10^{-6}$	$3,693 \cdot 10^{-6}$	$1,617 \cdot 10^{-2}$	$1,615 \cdot 10^{-2}$	0,1612	0,1611
3	$4,915 \cdot 10^{-6}$	$4,913 \cdot 10^{-6}$	$2,065 \cdot 10^{-2}$	$2,062 \cdot 10^{-2}$	0,1965	0,1963
4	$6,074 \cdot 10^{-6}$	$6,069 \cdot 10^{-6}$	$2,468 \cdot 10^{-2}$	$2,463 \cdot 10^{-2}$	0,2263	0,2260
5	$7,190 \cdot 10^{-6}$	$7,181 \cdot 10^{-6}$	$2,842 \cdot 10^{-2}$	$2,833 \cdot 10^{-2}$	0,2524	0,2517
6	$8,274 \cdot 10^{-6}$	$8,260 \cdot 10^{-6}$	$3,193 \cdot 10^{-2}$	$3,179 \cdot 10^{-2}$	0,2756	0,2747
7	$9,333 \cdot 10^{-6}$	$9,314 \cdot 10^{-6}$	$3,525 \cdot 10^{-2}$	$3,506 \cdot 10^{-2}$	0,2967	0,2955
8	$1,037 \cdot 10^{-5}$	$1,034 \cdot 10^{-5}$	$3,842 \cdot 10^{-2}$	$3,817 \cdot 10^{-2}$	0,3161	0,3145
9	$1,139 \cdot 10^{-5}$	$1,136 \cdot 10^{-5}$	$4,147 \cdot 10^{-2}$	$4,114 \cdot 10^{-2}$	0,3340	0,3321
10	$1,240 \cdot 10^{-5}$	$1,235 \cdot 10^{-5}$	$4,434 \cdot 10^{-2}$	$4,399 \cdot 10^{-2}$	0,3506	0,3483
11	$1,339 \cdot 10^{-5}$	$1,333 \cdot 10^{-5}$	$4,719 \cdot 10^{-2}$	$4,673 \cdot 10^{-2}$	0,3662	0,3635
12	$1,437 \cdot 10^{-5}$	$1,429 \cdot 10^{-5}$	$4,993 \cdot 10^{-2}$	$4,936 \cdot 10^{-2}$	0,3808	0,3777
13	$1,535 \cdot 10^{-5}$	$1,524 \cdot 10^{-5}$	$5,260 \cdot 10^{-2}$	$5,191 \cdot 10^{-2}$	0,3947	0,3910
14	$1,631 \cdot 10^{-5}$	$1,619 \cdot 10^{-5}$	$5,519 \cdot 10^{-2}$	$5,438 \cdot 10^{-2}$	0,4077	0,4036
15	$1,730 \cdot 10^{-5}$	$1,711 \cdot 10^{-5}$	$5,770 \cdot 10^{-2}$	$5,677 \cdot 10^{-2}$	0,4186	0,4155
16	$1,828 \cdot 10^{-5}$	$1,803 \cdot 10^{-5}$	$6,086 \cdot 10^{-2}$	$5,908 \cdot 10^{-2}$	0,4304	0,4268
17	$1,922 \cdot 10^{-5}$	$1,894 \cdot 10^{-5}$	$6,333 \cdot 10^{-2}$	$6,137 \cdot 10^{-2}$	0,4416	0,4375
18	$2,016 \cdot 10^{-5}$	$1,984 \cdot 10^{-5}$	$6,574 \cdot 10^{-2}$	$6,357 \cdot 10^{-2}$	0,4523	0,4477
19	$2,109 \cdot 10^{-5}$	$2,072 \cdot 10^{-5}$	$6,811 \cdot 10^{-2}$	$6,572 \cdot 10^{-2}$	0,4626	0,4575
20	$2,201 \cdot 10^{-5}$	$2,160 \cdot 10^{-5}$	$7,043 \cdot 10^{-2}$	$6,781 \cdot 10^{-2}$	0,4724	0,4668

Tabela 5.3: Comparação de  $\phi_{as}(x)/\phi(x)$  entre este trabalho e [4] para  $c = 0,4$ ,  $c = 0,5$  e  $c = 0,6$ .

$x$	$c = 0,4$		$c = 0,5$		$c = 0,6$	
	Este trabalho	[4]	Este trabalho	[4]	Este trabalho	[4]
0,1	0,1380	0,1380	0,2519	0,2519	0,3703	0,3703
0,2	0,1717	0,1717	0,3065	0,3066	0,4402	0,4402
0,3	0,1972	0,1972	0,3462	0,3463	0,4891	0,4891
0,4	0,2185	0,2185	0,3785	0,3785	0,5274	0,5274
0,5	0,2371	0,2372	0,4059	0,4059	0,5592	0,5592
0,6	0,2539	0,2539	0,4299	0,4300	0,5863	0,5863
0,7	0,2691	0,2691	0,4514	0,4514	0,6100	0,6100
0,8	0,2832	0,2832	0,4708	0,4709	0,6310	0,6310
0,9	0,2963	0,2963	0,4886	0,4886	0,6498	0,6499
1	0,3085	0,3085	0,5050	0,5050	0,6669	0,6669
2	0,4031	0,4031	0,6222	0,6223	0,7799	0,7799
3	0,4695	0,4695	0,6953	0,6955	0,8417	0,8418
4	0,5209	0,5210	0,7469	0,7472	0,8810	0,8812
5	0,5628	0,5629	0,7857	0,7860	0,9080	0,9082
6	0,5980	0,5981	0,8160	0,8164	0,9274	0,9275
7	0,6282	0,6283	0,8403	0,8408	0,9418	0,9420
8	0,6545	0,6545	0,8602	0,8608	0,9527	0,9529
9	0,6776	0,6777	0,8768	0,8774	0,9613	0,9615
10	0,6983	0,6983	0,8908	0,8915	0,9680	0,9682
11	0,7167	0,7168	0,9027	0,9034	0,9733	0,9736
12	0,7334	0,7335	0,9130	0,9137	0,9777	0,9779
13	0,7486	0,7486	0,9218	0,9226	0,9812	0,9814
14	0,7624	0,7624	0,9296	0,9304	0,9841	0,9843
15	0,7751	0,7751	0,9363	0,9372	0,9865	0,9867
16	0,7865	0,7867	0,9423	0,9431	0,9885	0,9887
17	0,7973	0,7974	0,9476	0,9484	0,9902	0,9904
18	0,8073	0,8074	0,9522	0,9531	0,9916	0,9918
19	0,8165	0,8166	0,9564	0,9573	0,9927	0,9929
20	0,8252	0,8251	0,9602	0,9611	0,9937	0,9939

Tabela 5.4: Comparação de  $\phi_{as}(x)/\phi(x)$  entre este trabalho e [4] para  $c = 0,7$ ,  $c = 0,8$  e  $c = 0,9$ .

$x$	$c = 0,7$		$c = 0,8$		$c = 0,9$	
	Este trabalho	[4]	Este trabalho	[4]	Este trabalho	[4]
0,1	0,4874	0,4874	0,6046	0,6046	0,7321	0,7321
0,2	0,5654	0,5653	0,6825	0,6825	0,7989	0,7989
0,3	0,6175	0,6175	0,7319	0,7320	0,8387	0,8387
0,4	0,6569	0,6570	0,7680	0,7680	0,8664	0,8663
0,5	0,6887	0,6887	0,7959	0,7960	0,8870	0,8867
0,6	0,7151	0,7151	0,8186	0,8186	0,9030	0,9030
0,7	0,7376	0,7376	0,8373	0,8373	0,9159	0,9159
0,8	0,7571	0,7571	0,8532	0,8532	0,9265	0,9265
0,9	0,7742	0,7742	0,8668	0,8668	0,9353	0,9353
1	0,7894	0,7894	0,8786	0,8786	0,9427	0,9427
2	0,8821	0,8823	0,9442	0,9442	0,9796	0,9796
3	0,9260	0,9260	0,9703	0,9703	0,9913	0,9913
4	0,9507	0,9507	0,9830	0,9830	0,9960	0,9960
5	0,9659	0,9659	0,9898	0,9898	0,9980	0,9980
6	0,9757	0,9758	0,9937	0,9937	0,9990	0,9990
7	0,9824	0,9824	0,9960	0,9960	0,9995	0,9995
8	0,9870	0,9871	0,9974	0,9974	0,9997	0,9997
9	0,9903	0,9904	0,9983	0,9983	0,9998	0,9999
10	0,9927	0,9928	0,9989	0,9989	0,9999	0,9999
11	0,9945	0,9945	0,9992	0,9992	1,0000	1,0000
12	0,9958	0,9958	0,9995	0,9995	1,0000	1,0000
13	0,9967	0,9968	0,9997	0,9997	1,0000	1,0000
14	0,9975	0,9975	0,9998	0,9998	1,0000	1,0000
15	0,9980	0,9981	0,9998	0,9998	1,0000	1,0000
16	0,9985	0,9985	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
17	0,9988	0,9988	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
18	0,9990	0,9991	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
19	0,9992	0,9993	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,9994	0,9994	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Isso é mais evidente conforme analisa-se a figura 6, que apresenta um mapa de intensidade da tabela que contém a diferença absoluta entre os resultados obtidos neste trabalho para  $\phi_{as}(x)/\phi(x)$  e os resultados obtidos por [4]. Este mapa de intensidade também foi desenvolvido utilizando Python e a biblioteca Matplotlib, e sua função é atribuir cores mais intensas para as maiores diferenças obtidas entre os dois trabalhos analisados que são apresentadas em uma tabela.

A figura mostra que os valores mais diferentes entre os dois trabalhos possuem uma diferença na casa de  $10^{-2}$ , e que as maiores diferenças se encontram para valores de  $c$  pequenos e de  $x$  grandes.

É interessante observar que as maiores diferenças são observadas para valores grandes de  $x$  quando  $c = 0,3$ , e não quando  $c$  é menor do que isto. Isso ocorre porque os valores de  $\phi_{as}(x)/\phi(x)$  são muito pequenos para  $c = 0,1$  e  $c = 0,2$  e portanto a diferença entre os valores obtidos em cada trabalho acaba sendo muito pequena também.

A explicação que justifica maiores diferenças para valores de  $x$  grandes é que tanto  $\phi_{as}(x)$  quanto  $\phi(x)$  são muito próximos de zero conforme  $x$  cresce, e portanto a divisão  $\phi_{as}(x)/\phi(x)$  acaba apresentando resultados diferentes entre os dois trabalhos, principalmente para valores de  $x$  com magnitude mais elevada. A figura 5.7 apresenta tais resultados até aqui comentados.

	C								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0	0	0	0	0.0001	0	0.0001	0	0
0.3	0	0	0	0	0.0001	0	0	0.0001	0
0.4	0	0	0	0	0	0	0.0001	0	0.0001
0.5	0	0	0	0.0001	0	0	0	0.0001	0.0003
0.6	0	0	0	0	0.0001	0	0	0	0
0.7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.8	0	0	0.0001	0	0.0001	0	0	0	0
0.9	0	0	0	0	0	0.0001	0	0	0
1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.0	0	0	0.0001	0	0.0001	0	0.0002	0	0
3.0	0	0.0001	0.0002	0	0.0002	0.0001	0	0	0
4.0	0	0.0001	0.0003	0.0001	0.0003	0.0002	0	0	0
5.0	0	0.0001	0.0007	0.0001	0.0003	0.0002	0	0	0
6.0	0	0.0001	0.0009	0.0001	0.0004	0.0001	0.0001	0	0
7.0	0	0.0002	0.0012	0.0001	0.0005	0.0002	0	0	0
8.0	0	0.0002	0.0016	0	0.0006	0.0002	0.0001	0	0
9.0	0	0.0004	0.0019	0.0001	0.0006	0.0002	0.0001	0	0.0001
10.0	0	0.0002	0.0023	0	0.0007	0.0002	0.0001	0	0
11.0	0	0.0005	0.0027	0.0001	0.0007	0.0003	0	0	0
12.0	0	0.0005	0.0031	0.0001	0.0007	0.0002	0	0	0
13.0	0	0.0007	0.0037	0	0.0008	0.0002	0.0001	0	0
14.0	0	0.0008	0.0041	0	0.0008	0.0002	0	0	0
15.0	0	0.0009	0.0031	0	0.0009	0.0002	0.0001	0	0
16.0	0	0.0018	0.0036	0.0002	0.0008	0.0002	0	0	0
17.0	0	0.0019	0.0041	0.0001	0.0008	0.0002	0	0	0
18.0	0	0.0021	0.0046	0.0001	0.0009	0.0002	0.0001	0.0001	0
19.0	0	0.0024	0.0051	0.0001	0.0009	0.0002	0.0001	0	0
20.0	0	0.0026	0.0056	0.0001	0.0009	0.0002	0	0	0

Figura 5.7: Diferença absoluta entre os resultados obtidos neste trabalho e os resultados obtidos por [4] para  $\phi_{as}(x)/\phi(x)$

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi resolvido o caso monoenergético, isotrópico e estacionário da equação do transporte de nêutrons, em geometria cartesiana unidimensional através do método da transformada de Fourier, e os resultados obtidos foram comparados com os apresentados através do método da separação de variáveis.

Para contextualizar e mostrar a importância desta pesquisa, foi apresentado um breve histórico sobre a energia nuclear, um resumo de como funciona a geração de energia elétrica a partir da fissão, e a importância do uso desta fonte de energia para a diminuição dos problemas climáticos que estão se agravando.

A equação do transporte na sua forma mais geral e as variáveis envolvidas na mesma foram explicitadas, para que depois fosse obtida a partir desta a equação do transporte monoenergética, isotrópica e estacionária, em geometria cartesiana unidimensional, que corresponde ao problema resolvido neste trabalho.

As resoluções deste problema via separação de variáveis e via transformada de Fourier foram apresentadas, sendo que ambas estiveram apoiadas na obra de Bell e Glasstone [1]. No entanto, uma das contribuições do presente estudo foi apresentar uma análise mais detalhada e completa da resolução de [1], principalmente pelo método da transformada de Fourier. Diz-se aqui que foi realizada uma análise mais completa da solução tendo em vista que os resultados analíticos foram mais bem detalhados, e mais resultados computacionais foram abordados através de gráficos e tabelas.

A partir das soluções analíticas obtidas, utilizando programação em Python, foram construídos programas, que tiveram baixos tempos computacionais, e que geraram uma série de resultados numéricos, incluindo gráficos que mostram o comportamento do fluxo assintótico e do fluxo total de nêutrons para diferentes

valores de  $c$ , que é a constante que determina o número médio de nêutrons emitidos por colisão de um nêutron com um núcleo atômico.

Foi possível confirmar graficamente e computacionalmente o que já havia sido destacado por [1], de que o fluxo assintótico de nêutrons é mais próximo ao fluxo total de nêutrons para valores de  $c$  próximos de 1 e também para maiores distâncias da fonte. Este trabalho foi capaz de identificar para quais distâncias da fonte, em livre caminho médio de colisão,  $\phi_{as}(x)$  e  $\phi(x)$  apresentam diferenças menores do que  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  e  $10^{-6}$ . Isto foi feito para valores de  $c$  entre 0,1 e 0,9.

Com isto, fica claramente perceptível que o fluxo assintótico é mais próximo do fluxo total conforme os valores de  $c$  e de  $x$  crescem, isto é, para meios onde há pouca absorção de nêutrons, e para pontos relativamente mais distantes da fonte. Este resultado é importante pois obter e analisar o fluxo assintótico  $\phi_{as}(x)$  é menos trabalhoso e difícil em comparação com o fluxo transiente  $\phi_{trans}(x)$ .

Para computar o fluxo assintótico, dado por (4.133), o processo mais trabalhoso é o cálculo de  $\nu_0$  para valores de  $c$  pequenos. Enquanto isso, o cálculo do fluxo transiente, dado por (4.134) envolve uma integral que dificulta os cálculos e análises. Por consequência, como o fluxo total  $\phi(x)$  envolve o fluxo transiente  $\phi_{trans}(x)$ , acaba sendo importante entender a partir de quais valores é possível estudar o fluxo total analisando apenas o fluxo assintótico  $\phi_{as}(x)$  que é mais fácil de ser calculado.

Este trabalho teve, também, a contribuição de computacionalmente calcular para certos valores de  $c$  e  $x$  as funções do fluxo assintótico, fluxo transiente e fluxo total, de maneira eficiente e correta, tendo em vista que os resultados obtidos foram similares aos apresentados por [4]. Com estes métodos computacionais desenvolvidos aqui, foi possível obter diversos gráficos do fluxo assintótico e do fluxo total, as diferenças entre  $\phi_{as}(x)$  e  $\phi(x)$ , e também os valores de  $\frac{\phi_{as}(x)}{\phi(x)}$  para vários valores de  $c$  dados.



É importante notar a vantagem deste trabalho em ser analítico, que fez com que as soluções fossem programadas de maneira simples e eficiente, gerando baixíssimos tempos computacionais, e praticamente nenhum erro de arredondamento. Além disso, também cabe mencionar que foi estudado um problema clássico, que foi abordado aqui com ferramentas mais modernas, permitindo análises mais detalhadas e resultados mais precisos.

Por fim, cabe destacar que foi comprovada a equivalência entre as soluções obtidas através do método da separação de variáveis e da transformada de Fourier. A transformada de Fourier apresenta-se então como uma interessante ferramenta para a resolução do problema, dado que é uma alternativa à separação de variáveis, e que possui aplicabilidade na resolução de problemas multigrupo.

Como possibilidades de trabalhos futuros, estão os problemas mais complexos envolvendo a equação do transporte que podem ser abordados utilizando a transformada de Fourier como método de solução, como por exemplo o que foi feito em [7]. Servem de motivação para estudos futuros da equação do transporte os casos não estacionário, multigrupo, anisotrópico, em outras geometrias, e ainda combinações destes últimos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BELL, G. I., AND GLASSTONE, S. *Nuclear Reactor Theory*, 1th ed. Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
- [2] BODANSKY, D. *Nuclear Energy: Principles, Practices, and Prospects*, 2 ed. Springer, 2004.
- [3] C. H. M. BROEDERS, E. K., AND WIESE, H. Burning transuranium isotopes in thermal and fast reactors. *Nuclear Engineering and Design* 202 (2000), 157–172.
- [4] CASE, K. M., DE HOFFMANN, F., AND PLACZEK, G. *Introduction to the Theory of Neutron Diffusion*, 1th ed. Los Alamos Scientific Laboratory, 1953.
- [5] CASE, K. M., AND ZWEIFEL, P. F. *Linear Transport Theory*, 1 ed. Addison-Wesley Pub. Co., 1967.
- [6] DUDERSTADT, J. J., AND MARTIN, W. R. *Transport Theory*, 1 ed. John Wiley Sons, 1979.
- [7] FERNANDES, J. C. L. *Solução da Equação do Transporte Multigrupo de Nêutrons em Reatores Nucleares com Fontes Pulsadas*. Tese de doutorado, UFRGS, 2015.
- [8] GONÇALVES, G. A. *Solução Analítica da Equação de Transporte de Partícula Neutra em Geometrias Cartesiana e Cilíndrica*. Tese de doutorado, UFRGS, 2003.
- [9] GU, Z. History review of nuclear reactor safety. *Annals of Nuclear Energy* 120 (2018), 682–690.
- [10] HULTMAN, N. E. The polical economy of nuclear energy. *WIREs* 2 (2011), 397–411.

- [11] LEMOS, J. D. Aplicação de técnicas de paralelização de programas usando openmp na solução numérica da equação de transporte de nêutrons. Dissertação de mestrado, UFRGS, 2018.
- [12] LEWIS, E. E. *Fundamentals of Nuclear Reactor Physics*, 0 ed. Elsevier Inc., 2008.
- [13] MURRAY, R. L., AND HOLBERT, K. E. *Nuclear Energy: An Introduction to the Concepts, Systems, and Applications of Nuclear Processes*, 8th ed. Butterworth-Heinemann, 2019.
- [14] PALMERI, J. The one-dimensional monoenergetic time-dependent transport equation in infinite media (revisited). *TRANSPORT THEORY AND STATISTICAL PHYSICS* 16, 7 (1987), 897–933.
- [15] ROSALES, R. R. Branch points and branch cuts (18.04, MIT). [https://math.mit.edu/classes/18.305/Notes/n00Branch\\_Points\\_B\\_Cuts.pdf](https://math.mit.edu/classes/18.305/Notes/n00Branch_Points_B_Cuts.pdf), 2009. Acesso em: 06/04/2023.
- [16] SCIPY DOCUMENTATION. Integration and ODEs (scipy.integrate). <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.quad.html>. Acesso em: 04/10/2022.
- [17] STACEY, W. M. *Nuclear Reactor Physics*, 2 ed. WILEY-VCH, 2007.
- [18] SURBAKTI, T., ET AL. Calculations of control rods reactivity worth of RSG-GAS first core using deterministic and monte carlo methods. *Atom Indonesia* 45, 2 (2019), 69–79.
- [19] WORLD NUCLEAR ASSOCIATION. Where does our electricity come from? <https://world-nuclear.org/nuclear-essentials/where-does-our-electricity-come-from.aspx>. Acesso em: 07/04/2023.
- [20] ZILL, D. G., AND SHANAHAN, P. D. *A First Course in Complex Analysis with Applications*, 1th ed. Jones and Bartlett, 2003.