UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Marcelo de Carvalho Griebeler

TEOREMA DO ENVELOPE GENERALIZADO PARA ESPAÇOS DE TIPOS MULTIDIMENSIONAIS

Porto Alegre
2009

Marcelo de Carvalho Griebeler

TEOREMA DO ENVELOPE GENERALIZADO PARA ESPAÇOS DE TIPOS MULTIDIMENSIONAIS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo

Porto Alegre
2009

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
Responsável: Biblioteca Gládis W. do Amaral, Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS

G848t Griebeler, Marcelo de Carvalho
Teorema do envelope generalizado para espaços de tipos multidimensionais / Marcelo de Carvalho Griebeler. – Porto Alegre, 2009.
070 f. : il.

Orientador: Jorge Paulo de Araújo.

Ênfase em Economia Aplicada.

Dissertação (Mestrado em Economia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre, 2009.

1. Economia matemática. 2. Modelo matemático. I. Araújo, Jorge Paulo de. II. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Ciências Econômicas. Programa de Pós-Graduação em Economia. III. Título.

CDU 519.86

Marcelo de Carvalho Griebeler

TEOREMA DO ENVELOPE GENERALIZADO PARA ESPAÇOS DE TIPOS MULTIDIMENSIONAIS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como quesito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Aprovada em: Porto Alegre, 24 de maio de 2010

Prof. Dr. Jorge Paulo de Araújo - Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Sabino Porto Júnior
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. José Heleno Faro
Universidade Federal de Minas Gerais

Ao meu abnegado orientador e mestre Jorge Araújo

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é obter um Teorema do Envelope que permita mecanismos não diferenciáveis, preferências arbitrárias e que possa ser aplicado em modelos com múltiplos agentes. Nós alcançamos isto ao expandir a análise de Milgrom e Segal (2002), generalizando seus resultados para espaços de tipos multidimensionais. Dessa forma, continuamos permitindo que a regra de escolha (mecanismo) seja descontínua. Para obter nosso resultado, é necessário o uso do Teorema do Máximo de Berge e, consequentemente, devemos impor compacidade no conjunto de escolha. Inicialmente esta hipótese pode parecer forte, porém argumentamos que em aplicações é muito improvável termos um conjunto de escolha aberto ou, principalmente, não limitado. Nós também identificamos condições para que a função valor seja absoutamente contínua e mostramos que sua representação integral também é válida para espaços de tipos multidimensionais. Inicialmente propomos uma generalização direta do resultado de Milgrom e Segal (2002), utilizando a hipótese de continuidade absoluta da função de utilidade do agente. Entretanto, esta exigência não possui muito significado econômico e é considerada pouco elegante por parte da literatura. Neste sentido, incorporamos uma hipótese adicional de diferenciabilidade da utilidade em todo o domínio que gera a mesma representação integral e possui uma maior interpretação econômica. Nossos resultados são, em geral, aplicados a modelos com múltiplos agentes, em especial Economia do Setor Público (provisão de bens públicos e taxação ótima) e teoria dos leilões.

Palavras-chave: Desenho de mecanismo; Teorema do Envelope; Mecanismos descontínuos.

Classificação JEL: C60; C72; D86.

Abstract

The main objective of this dissertation is to obtain an Envelope Theorem that allows non-differentiable mechanisms, arbitrary preferences, and that can be applied to models with multiple agents. We achieve that by expanding the analysis of Milgrom and Segal (2002) and generalizing their results to multidimensional type spaces. Thus, we continue allowing that the choice rule (mechanism) is discontinuous. For our result, it is necessary to use the Berge's Maximum Theorem and therefore we must impose compactness in the choice set. Initially this assumption may seem strong, but we argue that in applications there is an open or unbounded choice set is very unlikely. We also identify conditions for the value function is absolutely continuous and show that its integral representation is also valid for multidimensional type spaces. Firstly we propose a direct generalization of the Milgrom and Segal (2002)'s result, using the assumption of absolute continuity of the agent's utility function. However, this requirement does not have much economic interpretation and it is considered not very elegant in the literature. In this sense, we incorporate an additional assumption of differentiability of the utility in all range that generates the same integral representation and it possesses a greater economic interpretation. Our results are generally applied to models with multiple agents, in particular Public Economics (public goods supply and optimal taxation) and auction theory.

Keywords: Mechanism design; Envelope Theorem; Discontinuous mechanisms.

JEL classification: C60; C72; D86.

Sumário

1 Introdução

É de conhecimento comum que Teoremas do Envelope possuem muitas aplicações em Economia. Em particular, seu uso para problemas de otimização côncava na teoria da demanda é bem conhecido. Este permite analisar os efeitos de mudanças nos preços, na renda e na tecnologia no bem-estar dos consumidores e no lucro das firmas. Conforme a Economia da Informação tem se desenvolvido, outra aplicação deste teorema tem se tornado importante. Desde Mirrlees (1971), o Teorema do Envelope tem sido utilizado na teoria de desenho de mecanismos, quando a hipótese do conjunto dos espaços de tipos contínuo é assumida. Resultados como o Teorema da Equivalência de Receitas para leilões e o teorema de ineficiência de Myerson-Satterthwaite são exemplos das suas aplicações. Contudo, para o teorema em sua forma tradicional ser aplicável é necessário que o conjunto de escolhas tenha uma estrutura convexa e topológica.

Em função desta limitação, modelos tradicionais de desenho de mecanismo frequentemente assumem que as regras de escolha são continuamente diferenciáveis ou que o conjunto de escolha possui uma estrutura padrão. De fato, os trabalho seminais nesta área introduziram[1] esta hipótese como uma simplificação técnica e estudos posteriores, incluindo os mais recentes[2], tem seguido esta linha. Esta simplificação tem possibilitado o grande desenvolvimento de aplicações em uma vasta variedade de áreas (Economia do Setor Público, discriminação de preços, Economia do Trabalho, entre outras). Entretanto, alguns exemplos em diferentes campos da Economia tem mostrado que esta hipótese pode não ser satisfatória. Laffont e Tirole (1993) e Myerson (1991), por exemplo, apresentam mecanismos ótimos descontínuos em Economia da Regulação e comércio bilateral, respectivamente.

Esta limitação foi parcialmente superada por Milgrom e Segal (2002). Em seu estudo, o Teorema do Envelope é generalizado para conjuntos de escolha arbitrários, ou seja, seus resultados são válidos mesmo para mecanismos descontínuos. Toda análise deste trabalho, porém, é feita para espaços de tipos unidimensionais, correspondendo a ambientes com um único agente. Este resultado pode ser útil em algumas aplicações (comércio bilateral e regulação são exemplos), mas não é suficiente para cobrir toda a teoria de desenho de mecanismos. No caso de descontinuidade nos clássicos modelos de provisão de bens públicos e discriminação de preços, por exemplo, esta estrutura não é válida. Embora Milgrom e Segal (2002) indiquem alguns passos para a generalização do seu teorema, esta não segue diretamente das suas conclusões.

Assim como Milgrom e Segal (2002), outros trabalhos mais recentes vem buscando superar esta limitação ao substituir a exigência de diferenciabilidade do mecanismo por

[1] Além de Mirrlees, veja principalmente Laffont e Maskin (1980) e Guesnerie e Laffont (1984).

[2] Veja Willians (1999), por exemplo.

hipóteses sobre a função de utilidade do agente ou sobre o seu conjunto de tipos. Esta literatura é representada especialmente por Krishna e Maenner (2001) e Chung e Olszewski (2007), os quais obtém resultados para ambientes multi-agente, mas mantém a utilidade dos agentes restrita à classe das lineares. Como nesta literatura a principal preocupação é obter o Princípio da Equivalência das Receitas sem diferenciabilidade, seus resultados se aplicam apenas a modelos de leilões.

O principal objetivo desta dissertação é unir estas duas vertentes da literatura e obter um Teorema do Envelope que permita mecanismos não diferenciáveis, preferências arbitrárias e possa ser aplicado em modelos com múltiplos agentes. Nós alcançamos isto ao expandir a análise de Milgrom e Segal (2002), generalizando seus resultados para espaços de tipos multidimensionais. Dessa forma, continuamos permitindo que a regra de escolha (mecanismo) seja descontínua. Para obter nosso resultado, é necessário o uso do Teorema do Máximo de Berge e, consequentemente, devemos impor compacidade no conjunto de escolha. Inicialmente esta hipótese pode parecer forte, porém argumentamos que em aplicações é muito improvável termos um conjunto de escolha aberto ou, principalmente, não limitado.

Nós também identificamos condições para que a função valor seja absolutamente contínua e mostramos que sua representação integral também é válida para espaços de tipos multidimensionais. Inicialmente propomos uma generalização direta do resultado de Milgrom e Segal (2002), utilizando a hipótese de continuidade absoluta da função de utilidade do agente. Entretanto, esta exigência não possui muito significado econômico e é considerada pouco elegante por parte da literatura. Neste sentido, incorporamos uma hipótese adicional de diferenciabilidade da utilidade em todo o domínio que gera a mesma representação integral e possui uma maior interpretação econômica. Nossos resultados são, em geral, aplicados a modelos com múltiplos agentes, em especial Economia do Setor Público (provisão de bens públicos e taxação ótima) e teoria dos leilões.

Além desta curta introdução, o presente trabalho se divide em três principais capítulos e uma conclusão. O primeiro capítulo apresenta a teoria de desenho de mecanismos em grande generalidade, com suas principais definições e resultados. Especial atenção é dada ao Princípio da Revelação e ao Teorema da Equivalência de Receitas de leilões. Um modelo completo resolvido de Economia do Trabalho fecha o capítulo. No segundo começamos discutindo as implicações da falta de diferenciabilidade no mecanismo, em particular no que diz respeito à impossibilidade de usar o Teorema do Envelope no problema de otimização. A seguir, veremos as tentativas de superação desta limitação que a literatura tem oferecido, notadamente os trabalhos de Krishna e Maenner (2001), Chung e Olszewski (2007) e Milgrom e Segal (2002). Nossos principais resultados, a generalização do Teorema do Envelope, unindo os dois segmentos da literatura, e a representação integral da função valor, ambos para ambientes com múltiplos agentes, estão no capítulo 4. Ainda neste capítulo, apresentamos uma hipótese mais elegante e intuitiva para um dos principais teoremas de Milgrom e Segal (2002), dando mais sentido econômico ao seu resultado. A conclusão destaca as principais contribuições do trabalho e indica potenciais aplicações a trabalhos futuros.

2 A Teoria do Desenho de Mecanismos

De uma maneira geral, a teoria do desenho de mecanismo se preocupa em resolver problemas envolvendo assimetria de informação. A característica comum a todas as suas aplicações é a presença de um "principal", que gostaria de condicionar suas ações baseado em alguma informação. Esta, porém, é de conhecimento privado dos "agentes"[3]. O problema aparece, pois, sempre que uma parte é mais informada do que outra em alguma transação, ela poderá obter benefícios que distanciam o resultado do ótimo (obtido sob informação simétrica). Uma possibilidade de superação desta dificuldade é o principal simplesmente pedir para os agentes revelarem a informação desejada. Isto, contudo, não garante que estes falarão a verdade, a menos que recebam incentivos para tal. Dado que o incentivo é custoso (na maioria dos casos trata-se de transferências monetárias), o principal defronta-se com um *trade-off* que, com frequência, resulta em uma alocação subótima.

É possível dividirmos as aplicações da teoria do desenho de mecanismo em modelos com um único agente e em modelos multi-agente[4]. Como exemplo de aplicação de modelos com apenas um agente podemos pensar na regulação de um monopólio natural. O governo tem informação incompleta sobre a estrutura de custos da firma regulada. Sua tarefa é desenhar um esquema de incentivos que determine as transferências recebidas pela firma regulada como função dos seus custos ou de seu preço (ou ambos). Já modelos de oferta de bens públicos são exemplos clássicos de aplicações multi-agente. Nestes, a assimetria de informação está no desconhecimento do governo da valoração dada pelos consumidores ao bem. Dessa forma, o governo deve determinar a provisão de tal bem e as transferências a serem feitas como função da disponibilidade a pagar reportada.

Na linguagem da teoria dos jogos, modelos de desenho de mecanismo são jogos de informação incompleta, jogados em três passos, onde a informação privada é o tipo do jogador (nos exemplos anteriores, o custo da firma e a disponibilidade a pagar dos consumidores). O primeiro a jogar é o principal, desenhando o mecanismo (ou o contrato ou o esquema de incentivos) a adotar. A definição de mecanismo será dada mais à frente, mas para o entendimento do argumento, assuma que o principal determine alocações de bens (monetários ou não) de acordo com o tipo do agente. Os agentes que rejeitarem a proposta do principal receberão uma utilidade de reserva exogenamente determinada. Aqueles que aceitarem, por outro lado, no terceiro estágio jogarão o jogo especificado pelo

[3]É importante distinguirmos o termo "agente"utilizado em Economia da Informação, e em desenho de mecanismo em particular, do usual agente econômico. Enquanto o último diz respeito à qualquer participante de uma transação econômica, tal como firmas, consumidores e governo, o primeiro se refere àquele indivíduo que possui informação privada e, frequentemente, é designado à alguma tarefa pelo principal.

[4]Os modelos com um único agente também se aplicam a situações com um *continuum* de agentes infinitesimais, cada um dos quais interagindo com o principal, mas não com os demais agentes. De fato, sempre que apresentarmos uma aplicação com um único agente neste trabalho poderemos interpretá-la como possuindo este *continuum*.

mecanismo.

Se pensarmos o principal como um indivíduo preocupado em implementar uma determinada escolha social, seu problema passa a ser encontrar mecanismos que cumpram esta tarefa. Neste sentido, é possível considerar a implementação em equilíbrio em estratégia dominante e em equilíbrio de Nash bayesiano. A escolha do conceito de equilíbrio a ser empregado, como veremos à frente, impõe diferentes características e limitações ao problema. O importante a notar é que mesmo quando é impossível a implementação através de um conceito mais forte, tal como estratégia dominante, ainda existe a possibilidade de usarmos um equilíbrio menos restritivo. De fato, a maior parte de nossa análise subsequente se dará sob equilíbrio de Nash bayesiano.

Este capítulo apresenta os principais conceitos e resultados da teoria do desenho de mecanismo. Nosso objetivo aqui não é ser exaustivo, mas, ao contrário, apenas introduzir a teoria e obter o ferramental necessário para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Para tal, começamos voltando nossas atenções para as definições básicas e para um dos seus principais resultados, o Príncipio da Revelação. A seguir, comentamos brevemente as limitações impostas pela escolha do conceito de equilíbrio. O caso especial de utilidades lineares e quase-lineares também será visto, com especial atenção a um resultado decorrente do seu uso, o Teorema da Equivalência de Receitas. Até este ponto assumiremos que os agentes são obrigados a participar do mecanismo, ou seja, não consideraremos a restrição de participação[5]. A resolução completa de um modelo de economia do trabalho, já com a inclusão da restrição de participação, fecha o capítulo.

2.1 Principais Definições e Resultados

Nossa abordagem aqui é baseada na teoria da implementação. Esta se diferencia da abordagem tradicional de teoria dos jogos, que formula modelos que capturam uma situação e investiga o conjunto de resultados que são consistentes com algum conceito de equilíbrio. A teoria da implementação, ao contrário, assume que existe um "planejador"que define as regras de interação, e os indivíduos, diante dessas, acatam-nas integralmente. O planejador pode desenhar a estrutura do jogo mas não pode controlar as preferências ou ações dos indivíduos. Dessa forma, ele começará com a descrição de um resultado e procurará por um jogo (mecanismo) que o implemente[6].

[5]A inclusão de tal restrição reduz o conjunto de funções de escolha ótima que podem ser implementadas com sucesso. O Teorema de Myerson-Satterthwaite é um exemplo desta redução. Este considera um ambiente de comércio bilateral, com vendedores e compradores avessos ao risco e com os tipos independentemente distribuídos. Seu resultado é de que sempre que existir possibilidade de ganho comercial, porém incerto, não existe função de escolha social eficiente *ex post* que seja tanto compatível em incentivos em equilíbrio bayesiano (veja estas definições na próxima seção) e que atenda a restrição de participação. Para o teorema completo e sua prova, veja Myerson e Satterthwaite (1983).

[6]Para mais detalhes em teoria da implementação, veja, especialmente, Osborne e Rubinstein (1994) e Serrano (2004). Este *approach* é particularmente adequado a problemas de Economia do Setor Público.

Assuma uma economia com I agentes, $i = 1, ..., I$, que podem ser caracterizados por um parâmetro θ_i, por hipótese de conhecimento privado, ou seja, apenas o próprio indivíduo o conhece e tal que $\theta_i \in \Theta_i$. Dessa forma, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_I) \in \Theta_1 \times ... \times \Theta_I$. O conjunto Θ_i é assumido ser de conhecimento comum, bem como a função de densidade de probabilidade de $\theta = (\theta_1, ..., \theta_I)$, $\phi(\cdot)$, as utilidades individuais do tipo Bernoulli $u_i(x, \theta_i)$ e o conjunto de possíveis escolhas coletivas X, tal que $x \in X$. Nós também adotamos a notação padrão de teoria dos jogos e escrevemos $\theta_{-i} = (\theta_1, ..., \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, ..., \theta_I)$ e $\theta = (\theta_i, \theta_{-i})$.

Definição 1 *Uma função de escolha social é uma função* $f : \Theta_1 \times ... \times \Theta_I \to X$ *que, para cada possível perfil de tipos dos agentes* $\theta = (\theta_1, ..., \theta_I)$*, relaciona uma escolha coletiva* $f(\theta_1, ..., \theta_I) \in X$*.*

Note que uma função de escolha social escolhe um resultado final para cada conjunto de tipos dos agentes. Pense, por exemplo, na provisão de um bem público, tal como uma ponte. De acordo com as disponibilidades a pagar dos moradores que usufruirão da ponte, ou seja, os seus tipos, a função de escolha ótima elenca uma quantidade do bem. Se os indivíduos são outros, os tipos também mudarão e a função agora elencará outro resultado. É importante destacar que a função de escolha social relaciona um resultado para cada perfil verdadeiro de tipos. Os dois próximos conceitos introduzem a possibilidade de comportamento estratégico do agente.

Definição 2 *Um mecanismo* $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$ *é uma coleção de* I *conjuntos de estratégias* $(S_{1,...,}S_I)$ *e uma função resultado* $g : S_1 \times ... \times S_I \to X$*.*

Definição 3 *Uma estratégia para o agente* i *no jogo de informação incompleta criado pelo mecanismo* Γ *é uma função* $s : \Theta_i \to S_i$*.*

Incluir a possibilidade de comportamente estratégico é equivalente, neste contexto, a permitir que os agentes mintam o seu tipo. Perceba, inicialmente, que estratégia é definida como uma função relacionando um valor de S_i para cada um dos tipos θ_i. Dessa forma, cada agente escolhe qual valor reportar como seu tipo. Veja que um mecanismo inclui, além dos conjuntos de estratégias, uma função resultado. Esta é análoga a função de escolha social, contudo, agora, o domínio não é mais o cartesiano de tipos $\Theta_1 \times ... \times \Theta_I$ e sim o cartesiano do conjunto de estratégias $S_1 \times ... \times S_I$. Aqui fica claro a possibilidade de mentira por parte dos agentes, já que a função resultado dependerá da estratégia reportada por cada um. A definição a seguir liga os conceitos de função de escolha social e função resultado.

Contudo, se desconsiderarmos a sugestiva nomenclatura, ele pode incorporar também aplicações a outras áreas. Outras maneiras de introduzir a teoria do desenho de mecanismos podem ser encontradas em Myerson (1991), Fudenberg e Tirole (1993), Laffont e Martimort (2002) e Salanié (2005).

Definição 4 *Um mecanismo* $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$ *implementa a função de escolha social* $f(\cdot)$ *se existe um perfil de estratégias de equilíbrio* $(s_1^*(\cdot), ..., s_I^*(\cdot))$ *no jogo induzido por* Γ *e* $g(s_1^*(\theta_1), ..., s_I^*(\theta_I)) = f(\theta_1, ..., \theta_I)$.

O conceito de implementação possui duas exigências. A primeira delas, é a existência de um perfil de estratégias de equilíbrio no jogo induzido por Γ. Note, novamente, que toda nossa abordagem pode ser vista dentro do arcabouço da teoria dos jogos, notadamente por permitirmos comportamento estratégico e por assumirmos a existência de equilíbrio. Contudo, o tipo de equilíbrio não é especificado. Como veremos mais à frente, é possível trabalharmos com equilíbrio em estratégia dominante e equilíbrio de Nash bayesiano. Por enquanto, entranto, deixemos esta noção livre. Já a segunda exigência é a de implementação em si, ou seja, de que quando os jogadores usarem suas estratégias de equilíbrio, a função resultado iguale a escolha social.

É importante observarmos que a forma funcional da função $s : \Theta_i \to S_i$ foi deixada livre até agora. Isso implica na possibilidade de existência de um enorme número de perfis de estratégias de equilíbrio $(s_1^*(\theta_1), ..., s_I^*(\theta_I))$ capazes de implementar uma função de escolha social dada. Visto de outra maneira, existe uma vasta gama de funções de escolha social implementáveis. Com essa grande variedade de opções, o trabalho de implementação pode ser complicado. Entretanto, nem toda implementação é desejável para o principal, conforme a definição 6 deixa claro. Antes, na definição 5, apresentamos uma forma simples para a função $s(\cdot)$ que será útil mais à frente.

Definição 5 *Um mecanismo de revelação direta é aquele em que* $S_i = \Theta_i$, $\forall i = 1, ..., I$.

Relembre o exemplo da provisão do bem público. Lá, a função resultado relacionava uma quantidade do bem a cada perfil de estratégias (disposições a pagar pelo bem) por parte dos agentes, mas a forma da função estratégia $s : \Theta_i \to S_i$ não era especificada. O que um mecanismo de revelação direta faz é especificar esta função. No exemplo, é equivalente a pedir para os agentes informarem de forma direta qual é a sua disponibilidade a pagar pelo bem. A possibilidade da mentira, porém, continua existindo. Os agentes ainda podem se comportar de forma estratégica e reportar seu tipo da maneira que lhes for mais benéfico. O incentivo a falar a verdade somente é dado com a inclusão da restrição de compatibilidade de incentivos no problema.

Definição 6 *Uma função de escolha social* $f(\cdot)$ *é verdadeiramente implementável (ou compatível em incentivos) se o mecanismo que a implementa é de revelação direta e a implementa de maneira que* $s_1^*(\theta_1) = \theta_1, ..., s_I^*(\theta_I) = \theta_I$*, ou seja, dizer a verdade é um equilíbrio do jogo de informação incompleta.*

Com a definição acima, passamos a estudar os mecanismos nos quais dizer a verdade é equilíbrio. Intuitivamente, é de se imaginar que são esses os mecanimos de interesse em qualquer aplicação, afinal o principal nunca estará interessado em implementar uma escolha social baseado em informações que não são verdadeiras. Ainda, olhando por outro lado, nosso interesse pode recair sobre aquelas funções de escolha social que podem ser verdadeiramente implementadas. Como visto acima, encontrar esses mecanismos ou funções pode ser uma tarefa complicada, pois a forma funcional da estratégia pode ser muito variada.

Para vermos como podemos reduzir o número de mecanismos candidatos a implementação, separaremos nossa análise entre os dois conceitos de equilíbrio já citados, quais sejam, estratégia dominante e Nash bayesiano.

2.1.1 Implementação em Estratégia Dominante

O conceito de estratégia dominante nos diz que um jogador sempre adotará tal estratégia, independente das estratégias dos demais jogadores. Em nosso contexto de informação incompleta, sua definição formal é dada abaixo.

Definição 7 *A estratégia $s : \Theta_i \to S_i$ é uma estratégia fracamente dominante para o agente i no mecanismo $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$ se, para todo $\theta_i \in \Theta_i$ e todas as possíveis estratégias para os agentes $j \neq i$, $s_{-i}(\cdot) = [s_1(\cdot), ..., s_{i-1}(\cdot), s_{i+1}(\cdot), ..., s_I(\cdot)]$, vale*

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(g(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})), \theta_i)|\theta_i] \geq E_{\theta_{-i}}[u_i(g(\hat{s}_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})), \theta_i)|\theta_i] \tag{1}$$

para todo $\hat{s}_i \in S_i$.

A proposição abaixo nos mostra que esta definição mais geral pode ser vista como a usual, de que o jogador sempre obterá maior utilidade escolhendo a estratégia dominante $s_i(\cdot)$, independente das estratégias dos outros jogadores $s_{-i}(\cdot)$.

Proposição 8 *A desigualdade (1), quando válida para todo $s_{-i}(\cdot)$ e θ_i, é equivalente a condição de que, para todo $\theta_i \in \Theta_i$,*

$$u_i(g(s_i(\theta_i), s_{-i}), \theta_i) \geq u_i(g(\hat{s}_i, s_{-i}), \theta_i) \tag{2}$$

para todo $\hat{s}_i \in S_i$ e todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

Prova. A condição (2) segue direto de (1) simplesmente por definir $s_{-i}(\theta_{-i}) = s_{-i}$ para todo $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$. Para ver que (2) implica (1), considere o caso onde s_{-i} é um conjunto finito. Então, para qualquer s_i,

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(g(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})), \theta_i)|\theta_i] = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \Pr(s_{-i}(\theta_{-i}) = s_{-i}) u_i(g(s_i, s_{-i}), \theta_i). \tag{3}$$

Logo, (2) implica (1). ■

Agora que já definimos estratégia dominante, voltemos nossa atenção para a sua definição de equilíbrio. A seguir, podemos especializar a definição 4 para a noção de equilíbrio sob tal estratégia.

Definição 9 *O perfil de estratégias* $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot), ..., s_I^*(\cdot))$ *é um equilíbrio em estratégia dominante do mecanismo* $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$ *se, para todo* i *e para todo* $\theta_i \in \Theta_i$,

$$u_i(g(s_i^*(\theta_i), s_{-i}), \theta_i) \geq u_i(g(s_i^{'}, s_{-i}), \theta_i) \tag{4}$$

para todo $s_i^{'} \in S_i$ *e todo* $s_{-i} \in S_{-i}$.

Definição 10 *O mecanismo* $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$ *implementa a função de escolha social* $f(\cdot)$ *em estratégia dominante se existe um equilíbrio em estratégia dominante de* Γ, $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot), ..., s_I^*(\cdot))$, *tal que* $g(s^*(\theta)) = f(\theta)$ *para todo* $\theta \in \Theta$.

Como visto anteriormente, nem todas as funções de escolha social são implementáveis de maneira desejada pelo principal. Aquelas implementações nas quais os agentes não reportam seus verdadeiros tipos podem não ser consideradas. Assim, introduziremos um conceito que apresenta os mecanismos nos quais falar a verdade é equilíbrio.

Definição 11 *A função de escolha social* $f(\cdot)$ *é verdadeiramente implementável (ou compatível em incentivos) em estratégia dominante se* $s_i^*(\theta_i) = \theta_i$ *para todo* $\theta_i \in \Theta_i$ *e* $i = 1, ..., I$ *é um equilíbrio em estratégia dominante do mecanismo de revelação direta* $\Gamma = (\Theta_1, ..., \Theta_I, f(\cdot))$. *Isto é, se para todo* i *e todo* $\theta_i \in \Theta_i$,

$$u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \geq u_i(f(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_i) \tag{5}$$

para todo $\hat{\theta}_i \in \Theta_i$ *e todo* $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$.

Mesmo interessados somente naquelas funções de escolha social verdadeiramente implementáveis, ainda podemos ter muitos mecanismos que cumprem esta tarefa. Como não especificamos a forma funcional de $s_i(\cdot)$, de fato teremos inúmeras estratégias que implementem $f(\cdot)$. Felizmente, a proposição a seguir nos diz que, se estamos interessados em tais implementações, basta focarmos a atenção nos mecanismos de revelação direta, os quais são muito mais simples.

Proposição 12 *(Princípio da Revelação para Estratégias Dominantes) Se uma função de escolha social* $f(\cdot)$ *pode ser implementada em estratégia dominante através de algum mecanismo* $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$, *então ela também pode ser implementada através de um mecanismo de revelação direta onde o agente revele seu verdadeiro tipo.*

Prova. Seja $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$ o mecanismo que implementa $f(\cdot)$ e seja $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot), ..., s_I^*(\cdot))$ a sua estratégia de equilíbrio em estratégia dominante, tal que $f(\cdot) = g \circ s^*(\cdot)$. Agora, considere o mecanismo de revelação direta $\Gamma' = (\Theta_1, ..., \Theta_I, f(\cdot))$. Se neste mecanismo falar a verdade não é um equilíbrio, então o agente i preferirá anunciar algum tipo $\hat{\theta}_i$ ao invés do seu verdadeiro tipo θ_i. Então nós temos para todo i e todo $\theta_i \in \Theta_i$,

$$u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) < u_i(f(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_i) \tag{6}$$

para todo $\hat{\theta}_i \in \Theta_i$ e todo $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$.

Mas, pela definição de $f(\cdot)$, isto implica que, para todo i e todo $\theta_i \in \Theta_i$,

$$u_i(g(s_i^*(\theta_i), s_{-i}), \theta_i) < u_i(g(s_i^*(\hat{\theta}_i), s_{-i}), \theta_i) \tag{7}$$

para todo $\hat{\theta}_i \in \Theta_i$ e todo $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$.

Consequentemente, $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot), ..., s_I^*(\cdot))$ não pode ser um equilíbrio em um jogo gerado pelo mecanismo $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$, dado que o agente do tipo θ_i prefere reportar $s_i^*(\hat{\theta}_i)$ ao invés de $s_i^*(\theta_i)$. Dessa forma, o mecanismo de revelação direta $\Gamma' = (\Theta_1, ..., \Theta_I, f(\cdot))$ deve ser verdadeiro (o agente deve falar a verdade) e, por construção, ele implementa a função de escolha social $f(\cdot)$. ■

A prova por contradição feita acima é baseada em Salanié (2005), porém existem diversas outras formulações e provas desta proposição. Sua primeira versão em estratégia dominante foi formulada por Gibbard (1973). Este mostra, sob certas condições, que mecanismos em estratégia dominantes deveriam ser ditatoriais, ou seja, eles deveriam corresponder a escolha ótima de um único agente. Como um corolário, é mostrado que qualquer mecanismo de votação (revelação direta) para os quais a verdade é uma estratégia dominante, também deve ser ditatorial. Muitos outros trabalhos extenderam o Princípio para equilíbrio de Nash bayesiano[7], como veremos à frente. Myerson (1979, 1982, 1986), em particular, desenvolve o princípio com maior generalidade e é pioneiro em seu uso em aplicações.

A idéia por trás do Princípio da Revelação pode ser vista de uma maneira bastante intuitiva. Imagine que incluíssemos no jogo inicial um mediador, alguém que receberia como informação o tipo reportado pelo agente i, digamos θ_i, e então decidiria a estratégia $s_i^*(\theta_i)$, para cada i. Se $s_i^*(\theta_i)$ é a escolha ótima do agente i, claramente para cada $\theta_i \in \Theta_i$ no mecanismo inicial Γ, o agente decidirá falar a verdade. Outra maneira útil de perceber o Princípio é fornecida por Laffont e Martimort (2002) em um ambiente de preferências quase-lineares. Os autores utilizam uma figura para ilustrar a prova de que a função composta $g \circ s^*(\cdot)$ iguala $f(\cdot)$.

O conceito de implementação em estratégia dominante é de interesse porque um

[7]Dasgupta, Hammond e Maskin (1979), Holmstrom (1977), Myerson (1979) e Rosenthal (1978) são exemplos.

mecanismo $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$ que implementa $f(\cdot)$ em estratégia dominante o faz de uma maneira forte e robusta[8]. Contudo, alguns importantes resultados evidenciam os limites da implementação sob este conceito de equilíbrio. O principal deles é o Teorema de Gibbard-Satterthwaite. De uma maneira geral, este afirma que quando o conjunto de escolha social é finito e contém ao menos três elementos e as preferências podem assumir qualquer forma funcional, a função de escolha social é verdadeiramente implementável se e somente se é ditatorial[9]. Dessa forma, duas possibilidades são abertas no sentido de superar esta limitação: limitar a forma que as preferências podem assumir ou relaxar o conceito de equilíbrio para um menos exigente. Na próxima subseção trataremos da segunda opção, analisando implementação bayesiana, e na seção subsequente voltaremos as atenções a algumas aplicações em ambientes com preferências específicas.

2.3.2 Implementação Bayesiana

Comecemos por apresentar o conceito de equilíbrio de Nash bayesiano e por especializar a definição 4 para o seu contexto.

Definição 13 *O perfil de estratégias $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot), ..., s_I^*(\cdot))$ é um equilíbrio de Nash bayesiano do mecanismo $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$ se, para todo i e todo $\theta_i \in \Theta_i$,*

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(g(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i})), \theta_i)|\theta_i] \geq E_{\theta_{-i}}[u_i(g(\hat{s}_i, s_{-i}^*(\theta_{-i})), \theta_i)|\theta_i] \quad (8)$$

para todo $\hat{s}_i \in S_i$.

Definição 14 *O mecanismo $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$ implementa a função de escolha social $f(\cdot)$ em um equilíbrio de Nash bayesiano se existe um equilíbrio de Nash bayesiano de Γ, $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot), ..., s_I^*(\cdot))$, tal que $g(s^*(\theta)) = f(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta$.*

Perceba que as definições são análogas àquelas feitas no contexto de equilíbrio em estratégia dominante, com a devida adequação à noção de equilíbrio. Como veremos abaixo, o conceito de função de escolha social verdadeiramente implementável também segue este padrão.

Definição 15 *A função de escolha social $f(\cdot)$ é verdadeiramente implementável (ou compatível em incentivos) em equilíbrio de Nash bayesiano se $s_i^*(\theta_i) = \theta_i$ para todo $\theta_i \in \Theta_i$*

[8] Mas-colell, Whinston e Green (1995) elencam algumas razões para justificar a força deste conceito de implementação. Os agentes, por exemplo, podem mesmo ter crenças incorretas ou contraditórias sobre a distribuição de $(\theta_1, ..., \theta_I)$ que a implementação se mantém. Além disso, se lembrarmos o conceito usual de estratégia dominante, vemos que o jogador nem mesmo precisa se preocupar com as jogadas dos demais.

[9] Para a versão completa do teorema e sua prova, veja Mas-colell, Whinston e Green (1995).

e $i = 1, ..., I$ é um equilíbrio de Nash bayesiano do mecanismo de revelação direta $\Gamma = (\Theta_1, ..., \Theta_I, f(\cdot))$. Isto é, se para todo $i = 1, ..., I$ e todo $\theta_i \in \Theta_i$,

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i)|\theta_i] \geq E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_i)|\theta_i] \quad (9)$$

para todo $\hat{\theta}_i \in \Theta_i$.

O Princípio da Revelação também possui uma versão aplicada ao contexto de equilíbrio de Nash bayesiano. Seu resultado é o mesmo daquele sob estratégia dominantes, qual seja, o de restringir a análise a funções de escolha social verdadeiramente implementáveis.

Proposição 16 *(Princípio da Revelação para Equilíbrio de Nash Bayesiano) Se uma função de escolha social $f(\cdot)$ pode ser implementada em equilíbrio de Nash bayesiano através de algum mecanismo $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$, então ela também pode ser implementada através de um mecanismo de revelação direta onde o agente revele seu verdadeiro tipo.*

Prova. Seja $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$ o mecanismo que implementa $f(\cdot)$ e seja $s^*(\cdot) = (s_1^*(\cdot), ..., s_I^*(\cdot))$ a sua estratégia de equilíbrio (Nash bayesiano), tal que $f(\cdot) = g \circ s^*(\cdot)$. Considere agora um novo espaço de estratégias Θ_i para cada agente i, tal que cada agente anuncia $\hat{\theta}_i$ (que pode diferir do verdadeiro valor θ_i). Seja $\hat{\theta} \equiv (\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_I)$ e definamos a nova função resultado $f : \Theta \rightarrow X$ por $f(\hat{\theta}) = g(s^*(\hat{\theta}))$, onde $s^*(\hat{\theta}) = (s_1^*(\hat{\theta}_1), ..., s_I^*(\hat{\theta}_I))$. Note que estamos escolhendo um mecanismo de revelação direta. É imediato que falar a verdade, $\{\hat{\theta}_i = \theta_i\}$, é um equilíbrio de Nah bayesiano do novo jogo, dado que $\{s_i^*\}$ é um equilíbrio de Nash bayesiano do jogo original. Para percebermos isso, veja que, para todo i e todo $\theta_i \in \Theta_i$,

$$\begin{aligned} E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i)|\theta_i] &= E_{\theta_{-i}}[u_i(g(s_i^*(\theta_i), s_i^*(\theta_{-i})), \theta_i)|\theta_i] & (10) \\ &= \sup_{s_i \in S_i} E_{\theta_{-i}}[u_i(g(s_1^*(\theta_1), ..., s_i, ..., s_I^*(\theta_I)), \theta_i)|\theta_i] & (11) \\ &\geq \sup_{\hat{\theta}_i \in \Theta_i} E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\theta_1, ..., \hat{\theta}_i, ..., \theta_I), \theta_i)|\theta_i], & (12) \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade resulta da definição de mecanismo de revelação direta $\Gamma' = (\Theta_1, ..., \Theta_I, f(\cdot))$, a segunda igualdade é a condição de equilíbrio de Nash bayesiano do mecanismo original $\Gamma = (S_1, ..., S_I, g(\cdot))$ e a desigualdade final expressa o fato de que no mecanismo de revelação direta é como se o agente i escolhesse o tipo $\hat{\theta}_i$ a anunciar em um subconjunto de estratégias $\{s_i^*(\hat{\theta}_i)\}_{\hat{\theta}_i \in \Theta_i}$ de S_i (o agente tem, no máximo, tantas possibilidades de desvio quantas já possuia no jogo original). ■

Claramente poderíamos usar o mesmo argumento da prova do Princípio em estratégia dominante para a demonstração acima. Contudo, ao optarmos por este procedimento alternativo estamos apresentando maneiras diferentes de enxergarmos a construção da proposição. A intuição por trás deste resultado é a mesma daquela da proposição 12, já que a única diferença entre eles é a presença da utilidade esperada, que caracteriza o equilíbrio de Nash bayesiano.

Como já foi comentado anteriormente, a noção de equilíbrio em implementação bayesiana é estritamente mais fraca do que em implementação em estratégia dominante. De fato, dado que qualquer equilíbrio em estratégia dominante é um equilíbrio de Nash bayesiano, então qualquer função de escolha social implementável em estratégia dominante também o é em equilíbrio de Nash bayesiano. Perceba que enquanto a implementação em estratégia dominante exige que dizer a verdade seja a melhor estratégia do agente i para cada $\hat{\theta}_{-i}$ possível, em implementação bayesiana falar a verdade precisa somente dar ao agente i seu mais alto *payoff* ponderado sobre todos os possíveis tipos $\hat{\theta}_i$ que poderiam aparecer para os outros agentes.

O fato de a implementação bayesiana ser um conceito menos exigente indica que existirá um número maior de funções de escolha social implementáveis sob esta noção de equilíbrio do que sob estratégia dominante. Na prática, em aplicações, isto fica evidente, pois o número de trabalhos que tratam de implementação bayesiana é consideravelmente maior do que aqueles que a estudam em estratégia dominante. Na próxima seção nós veremos alguma destas aplicações em ambos os contextos. Contudo, restringiremos a análise a preferências lineares e quase-lineares. Enquanto isto facilita a implementação em estratégia dominante (lembre do teorema de Gibbard-Satterthwaite), em implementação bayesiana permite obter importantes resultados teóricos e práticos, como o Teorema de Equivalência de Receitas.

2.2 Alguns Resultados em Ambientes com Preferências Lineares e Quase-Lineares

Comecemos por estudar os famosos mecanismos de Groves-Clarke[10], os quais são utilizados em implementação em estratégia dominante. Consideremos. inicialmente, uma alternativa social como um vetor $x = (k, t_1, ..., t_I)$, onde k é um elemento do conjunto finito K e o qual chamaremos de escolha de projeto, e $t_i \in \mathbb{R}$, que representa uma transferência monetária para o agente i. O ambiente quase-linear é expresso na função de utilidade do agente i,

$$u_i(x, \theta_i) = v_i(k, \theta_i) + (\overline{m}_i + t_i), \tag{13}$$

onde $\overline{m}_i$ é a dotação monetária do agente i. É assumido que os I agentes não possuem qualquer tipo de fonte de financiamento externa. O conjunto de alternativas portanto é

$$X = \{x = (k, t_1, ..., t_I) : k \in K,\ t_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \text{ e } \sum_i t_i \leq 0\}. \tag{14}$$

[10]Veja Groves (1973), Clarke (1971) e Mas-colell, Whinston e Green (1995).

A estrutura acima é particularmente adequada a aplicações em Economia do Setor Público, com a provisão de bens públicos como principal exemplo. É importante, para obtermos os resultados subsequentes que introduzamos o conceito de eficiência *ex post*. Este conceito nos diz que uma função de escolha social é eficiente *ex post* se seleciona, para todo perfil $\theta = (\theta_1, ..., \theta_I)$, uma alternativa $f(\theta) \in X$ que é Pareto ótima, dadas as preferências.

Definição 17 *A função de escolha social* $f : \Theta_1 \times ... \times \Theta_I \to X$ *é eficiente ex post se para nenhum perfil* $\theta = (\theta_1, ..., \theta_I)$ *existe um* $x \in X$ *tal que* $u_i(x, \theta_i) \geq u_i(f(\theta), \theta_i)$ *para todo* i*, e* $u_i(x, \theta_i) > u_i(f(\theta), \theta_i)$ *para algum* i.

Voltando ao ambiente quase-linear, temos a função de escolha social como $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), ..., t_I(\cdot))$, onde, para todo $\theta \in \Theta$, $k(\theta) \in K$ e $\sum_i t_i(\theta) \leq 0$. Então, se $f(\cdot)$ é eficiente *ex post*, para todo $\theta \in \Theta$, $k(\theta)$ deve satisfazer

$$\sum_{i=1}^{I} v_i(k(\theta), \theta_i) \geq \sum_{i=1}^{I} v_i(k, \theta_i) \tag{15}$$

para todo $k \in K$.

Nosso primeiro resultado, nesse contexto, diz respeito a funções de escolha social que são verdadeiramente implementáveis e eficientes *ex post*[11].

Proposição 18 *Seja* $k^*(\cdot)$ *uma função satisfazendo (15). A função de escolha social* $f(\cdot) = (k^*(\cdot), t_1(\cdot), ..., t_I(\cdot))$ *é verdadeiramente implementável em estratégia dominantes se, para todo* $i = 1, ..., I$*,*

$$t_i(\theta) = \left[\sum_{j \neq i} v_j(k^*(\theta), \theta_j)\right] + h_i(\theta_{-i}), \tag{16}$$

onde $h_i(\cdot)$ *é uma função arbitrária de* θ_{-i}.

Prova. Suponha que falar a verdade não seja uma estratégia dominante para o agente i. Então existe $\theta_i, \hat{\theta}_i \in \Theta_i$ tal que

$$v_i(k^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_i) + t_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) > v_i(k^*(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) + t_i(\theta_i, \theta_{-i}). \tag{17}$$

Substituindo $t_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})$ e $t_i(\theta_i, \theta_{-i})$ por suas expressões equivalentes em (16), temos que

$$\sum_{i=1}^{I} v_j(k^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_j) > \sum_{i=1}^{I} v_j(k^*(\theta), \theta_j). \tag{18}$$

[11] Este resultado é devido a Groves (1973). Sua prova inicial não é muito construtiva, por isso adotamos a versão alternativa dos livros-texto.

O que contradiz o fato de que $k^*(\cdot)$ satisfaz (15). Logo, $f(\cdot)$ deve ser verdadeiramente implementável em estratégia dominante. ■

Mecanismos de revelação direta que satisfazem (15) e (16) são conhecidos como mecanismos de Groves[12]. Groves (1973) interessou-se em estudar como dar incentivos a membros de uma organização de forma que estes constituissem um time. O problema ao qual se debruçou foi, então, qual a transferência o *head* da organização deve dar para cada uma de suas subunidades. Considerando-se a estrutura formal acima, a idéia por trás do seu argumento é que, dado os tipos reportados θ_{-i} dos agentes $j \neq i$, a transferência do agente i depende do seu tipo anunciado somente através do efeito desse anúncio sobre $k^*(\theta)$. Outra maneira intuitiva de entender o mecanismo de Groves é notando que a mudança na transferência do agente i reflete exatamente a externalidade que ele impõe nos outros agentes. Assim, o agente i acaba internalizando esta externalidade e anúncia seu verdadeiro tipo, o que leva k a um nível que maximiza $\sum_i v_i(k, \theta_i)$[13].

Como esta estrutura que estamos apresentando é muito aplicada a modelos de Economia do Setor Público, além da eficiência precisamos dedicar certa atenção ao orçamento. Em outras palavras, principalmente quanto trabalharmos com alguma aplicação em que existe governo, é importante que $\sum_i t_i(\theta) = 0$ para todo $\theta \in \Theta$. É possível também ver esta condição como uma exigência de não desperdício de recursos. Ao incluirmos esta preocupação de orçamento equilibrado, contudo, não seremos mais capazes de obter funções de escolha social implementáveis em estratégia dominante que também sejam eficiente *ex post*. Este resultado é devido a Green e Laffont (1979)[14] [15].

Dados todos estes resultados de impossibilidade sob estratégia dominante, os quais valem mesmo quando as preferências são restringidas a funções de utilidade quase-lineares, devemos voltar à implementação bayesiana, que nos permite maior flexibilidade. Aqui, para obtermos importantes resultados, assumiremos utilidades lineares, tal que sua forma será

$$u_i(x, \theta_i) = \theta_i v_i(k) + (\overline{m}_i + t_i). \tag{19}$$

Adicionalmente, normalizemos $\overline{m}_i = 0$ para todo i, e assumamos $\theta_i \in \Theta_i = [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i] \subset \mathbb{R}$

[12]Os mecanismos de Groves-Clarke são um caso particular dos mecanismos de Groves. Clarke (1971) descobriu, independentemente, um mecanismos no qual $h_i(\theta_{-i}) = -\sum\limits_{j \neq i} v_j(k^*_{-i}(\theta_{-i}), \theta_j)$, onde, para todo $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$, $k^*_{-i}(\theta_{-i})$ satisfaz $\sum\limits_{j \neq i} v_j(k^*_{-i}(\theta_{-i}), \theta_j) \geq \sum\limits_{j \neq i} v_j(k, \theta_j)$, para todo $k \in K$.

[13]A importância dos mecanismos de Groves é também evidenciada por Green e Laffont (1979) e Laffont e Maskin (1980). Sob certas condições, em especial a permissão de que $v_i(\cdot)$ assuma qualquer forma, estes autores demonstram que estes mecanismos [satisfazendo (16)] são os únicos capazes de conjuntamente satisfazer (15) e ser verdadeiramente implementáveis. Para uma prova deste resultado, veja o teorema 3.1 de Laffont e Maskin (1980).

[14]Para uma completa apresentação, veja, por exemplo, o teorema 4.1 e os corolários 4.1 e 4.2 de Laffont e Maskin (1980). Em termos gerais, quando $v_i(\cdot, \theta_i)$ é livre para assumir qualquer forma funcional, este resultado de impossibilidade é válido.

[15]Um caso em que esta limitação é superada ocorre quando as preferências de um agente em particular ("agente 0") são conhecidas. Para mais detalhes sobre esta exceção veja Laffont e Maskin (1980) e Mas-Colell, Whinston e Green (1995).

com $\underline{\theta}_i \neq \overline{\theta}_i$ e que os tipos dos agentes são estatisticamente independentes. A função distribuição de θ_i é dada por $\Phi_i(\cdot)$ e a densidade por $\phi_i(\cdot)$, atendendo a $\phi_i(\theta_i) > 0$ para todo $\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$.

O resultado que apresentaremos agora nos dá condições necessárias e suficientes para uma função de escolha social $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), ..., t_I(\cdot))$ ser compatível em incentivos em equilíbrio bayesiano. De fato, em um ambiente com preferências lineares, a proposição abaixo fornece um fácil meio de checar se $f(\cdot)$ é implementável. A fim de facilitar a notação, assumamos que a transferência esperada do agente i, dado que o anúncio do seu tipo é $\hat{\theta}_i$ e dado que os agentes $j \neq i$ revelem seu tipo verdadeiramente, seja expressa por $\overline{t}_i(\hat{\theta}_i) = E_{\theta_{-i}}[t_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i})]$. Da mesma forma, seja $\overline{v}_i(\hat{\theta}_i) = E_{\theta_{-i}}[v_i(k(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}))]$. Dado a sua leariedade, é possível representar a utilidade esperada do agente i quando ele reporta $\hat{\theta}_i$ (e seu verdadeiro tipo é θ_i) e os demais agentes falam a verdade como

$$E_{\theta_{-i}}[u_i(f(\hat{\theta}_i, \theta_i), \theta_i)|\theta_i] = \theta_i \overline{v}_i(\hat{\theta}_i) + \overline{t}_i(\hat{\theta}_i). \tag{20}$$

De maneira análoga, definamos, para cada i,

$$U_i(\theta_i) = \theta_i \overline{v}_i(\theta_i) + \overline{t}_i(\theta_i) \tag{21}$$

como a função que dá a utilidade esperada do agente i quando todos os agentes reportam a verdade, inclusive o próprio i.

Proposição 19 *A função de escolha social $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), ..., t_I(\cdot))$ é compatível em incentivo em equilíbrio bayesiano se e somente se, para todo $i = 1, ..., I$,*

(i) $\overline{v}_i(\cdot)$ é não decrescente; e

(ii) $U_i(\theta_i) = U_i(\underline{\theta}_i) + \int_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i} \overline{v}_i(s)ds$, para todo θ_i.

Prova. *Necessidade.* Se $f(\cdot)$ é compatível em incentivos em equilíbrio bayesiano, então para todo $\hat{\theta}_i > \theta_i$, temos

$$U_i(\theta_i) \geq \theta_i \overline{v}_i(\hat{\theta}_i) + \overline{t}_i(\hat{\theta}_i) = U_i(\hat{\theta}_i) + (\theta_i - \hat{\theta}_i)\overline{v}_i(\hat{\theta}_i) \tag{22}$$

e

$$U_i(\hat{\theta}_i) \geq \hat{\theta}_i \overline{v}_i(\theta_i) + \overline{t}_i(\theta_i) = U_i(\theta_i) + (\hat{\theta}_i - \theta_i)\overline{v}_i(\theta_i). \tag{23}$$

Logo,

$$\overline{v}_i(\hat{\theta}_i) \geq \frac{U_i(\hat{\theta}_i) - U_i(\theta_i)}{\hat{\theta}_i - \theta_i} \geq \overline{v}_i(\theta_i). \tag{24}$$

A expressão (24) implica que $\overline{v}_i(\cdot)$ deve ser não decrescente, pois $\hat{\theta}_i > \theta_i$. Além disso, se fizermos $\hat{\theta}_i \to \theta_i$ em (24), então, para todo θ_i, deve valer

$$U_i^{'}(\theta_i) = \overline{v}_i^{'}(\theta_i). \tag{25}$$

Integrando obtemos

$$U_i(\theta_i) = U_i(\underline{\theta}_i) + \int_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i} \overline{v}_i(s)ds, \text{ para todo } \theta_i. \tag{26}$$

Suficiência. Considere, sem perda de generalidade, quaisquer θ_i e $\hat{\theta}_i$ tais que $\hat{\theta}_i < \theta_i$. Se (i) e (ii) valem, então

$$\begin{aligned} U_i(\theta_i) - U_i(\hat{\theta}_i) &= \int_{\hat{\theta}_i}^{\theta_i} \overline{v}_i(s)ds & (27)\\ &\geq \int_{\hat{\theta}_i}^{\theta_i} \overline{v}_i(\theta_i)ds & (28)\\ &= (\theta_i - \hat{\theta}_i)\overline{v}_i(\hat{\theta}_i). & (29) \end{aligned}$$

Portanto,

$$U_i(\theta_i) \geq U_i(\hat{\theta}_i) + (\theta_i - \hat{\theta}_i)\overline{v}_i(\hat{\theta}_i) = \theta_i\overline{v}_i(\hat{\theta}_i) + \overline{t}_i(\hat{\theta}_i). \tag{30}$$

Da mesma maneira, podemos obter

$$U_i(\hat{\theta}_i) \geq U_i(\theta_i) + (\hat{\theta}_i - \theta_i)\overline{v}_i(\theta_i) = \hat{\theta}_i\overline{v}_i(\theta_i) + \overline{t}_i(\theta_i). \tag{31}$$

Estas duas últimas expressões implicam que $f(\cdot)$ é compatível em incentivos em equilíbrio bayesiano. ■

Este resultado foi inicialmente encontrado por Myerson (1981) e é específico para o caso de utilidades lineares. No capítulo seguinte forneceremos condições sob as quais a representação integral (ii) da proposição 19 vale para qualquer forma funcional. Obteremos isto sem fazer qualquer exigência sobre os mecanismos, ou seja, não impomos diferenciabilidade nem continuidade sobre $\overline{v}(\cdot)$ e $\overline{t}(\cdot)$, por exemplo. Como veremos, Milgrom e Segal (2002) são pioneiros em obter esse resultado para ambientes com um único agente e nós o generalizamos para aplicações multi-agente.

Uma implicação da proposição acima pode ser encontrada na teoria dos leilões. Para perceber isso, especifiquemos um modelo com o agente 0 sendo o vendedor de um objeto indivisível, do qual ele não deriva qualquer valor, e com os agente $1, ..., I$ sendo os potenciais compradores. Seja, também, $y_i(\theta)$ a probabilidade do comprador i adquirir o objeto quando o vetor de tipos (valoração dada ao bem) anunciados é $\theta = (\theta_1, ..., \theta_I)$. A variável $t_i(\theta)$ continua sendo a tranferência monetária feita pelo agente i. Então, dado que as preferências são lineares, a utilidade esperada de i é dada por $\theta_i y_i(\theta) + t_i(\theta)$.

Se fizermos $k = (y_1, ..., y_I)$, $K = \{(y_1, ..., y_I) : y_i \in [0, 1]$ para todo $i = 1, ..., I$ e $\sum_i y_i \leq 1\}$ e $v_i(k) = y_i$, então podemos aplicar a proposição 19. Então, escrevemos $\overline{v}_i(\hat{\theta}_i) = \overline{y}_i(\hat{\theta}_i)$, onde $\overline{y}_i(\hat{\theta}_i) = E_{\theta_{-i}}[y_i(\hat{\theta}_i, \theta_i)]$ é a probabilidade de i obter o bem condicional ao seu anúncio ser $\hat{\theta}_i$ e aos demais agente $j \neq i$ anunciarem seus verdadeiros tipos. Da mesma forma, podemos escrever $U_i(\theta_i) = \theta_i\overline{y}_i(\theta_i) + \overline{t}_i(\theta_i)$. Ao fazermos isto podemos obter o Teorema da Equivalência de Receitas, enunciado abaixo[16].

Proposição 20 *(Teorema da Equivalência de Receitas) Considere um leilão com I agentes neutros ao risco, no qual a valoração do comprador i pertence ao intervalo $[\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$ com $\underline{\theta}_i \neq \overline{\theta}_i$ e sua função de densidade é dada por $\phi(\cdot) > 0$, e no qual os tipos dos compradores são estatisticamente independentes. Suponha que, para todo comprador i, um dado par de equilíbrios de Nash bayesiano de dois diferentes procedimentos de leilão é tal que (i) para cada possível realização de $\theta = (\theta_1, ..., \theta_I)$, o comprador i tem uma idêntica probabilidade de adquirir o bem nos dois leilões; e (ii) o comprador i tem o mesmo nível de utilidade esperada nos dois leilões quando sua valoração dada ao objeto está ao nível mais baixo possível. Então os equilíbrios dos dois leilões geram a mesma receita esperada ao vendedor.*

Prova. Podemos estabelecer o resultado acima mostrando que se duas funções de escolha social compatíveis em incentivo em equilíbrio de Nash bayesiano em dois diferentes leilões possuem as mesmas funções $(y_1(\theta), ..., y_I(\theta))$ e os mesmos valores $(U_1(\theta), ..., U_I(\theta))$, então estes geram a mesma receita esperada para o vendedor. Isto é possível pois sabemos pelo Princípio da Revelação que a função de escolha social implementada por um equilíbrio de qualquer leilão deve ser compatível em incentivo em equilíbrio de Nash bayesiano.

Como a receita esperada é dada por $\sum_{i=1}^{I} E[-t_i(\theta)]$, em um mecanismo compatível em incentivo em equilíbrio bayesiano, para um i qualquer, ela pode ser expressa como

$$\begin{aligned}
E[-t_i(\theta)] &= E_{\theta_i}[-\overline{t}_i(\theta_i)] && (32)\\
&= \int_{\underline{\theta}_i}^{\overline{\theta}_i} [\overline{y}_i(\theta_i)\theta_i - U_i(\theta_i)]\,\phi_i(\theta_i)d\theta_i && (33)\\
&= \int_{\underline{\theta}_i}^{\overline{\theta}_i} \left[\overline{y}_i(\theta_i)\theta_i - U_i(\underline{\theta}_i) - \int_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i} \overline{y}_i(s)ds\right] \phi_i(\theta_i)d\theta_i && (34)\\
&= \left[\int_{\underline{\theta}_i}^{\overline{\theta}_i} \left(\overline{y}_i(\theta_i)\theta_i - \int_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i} \overline{y}_i(s)ds\right) \phi_i(\theta_i)d\theta_i\right] - U_i(\underline{\theta}_i), && (35)
\end{aligned}$$

onde usamos a proposição 19.

Ao integrarmos por partes (usando o teorema fundamental do cálculo?) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\underline{\theta}_i}^{\overline{\theta}_i} \left(\int_{\underline{\theta}_i}^{\theta_i} \overline{y}_i(s)ds\right) \phi_i(\theta_i)d\theta_i &= \left(\int_{\underline{\theta}_i}^{\overline{\theta}_i} \overline{y}_i(\theta_i)d\theta_i\right) - \left(\int_{\underline{\theta}_i}^{\overline{\theta}_i} \overline{y}_i(\theta_i)\Phi(\theta_i)d\theta_i\right) && (36)\\
&= \int_{\underline{\theta}_i}^{\overline{\theta}_i} \overline{y}_i(\theta_i)(1 - \Phi(\theta_i))d\theta_i. && (37)
\end{aligned}$$

[16] Milgrom (1987) e McAfee e McMillan (1987) apresentam o teorema em grande riqueza de detalhes.

Substituindo (37) em (35),

$$E_{\theta_i}[-\bar{t}_i(\theta_i)] = \left[\int_{\underline{\theta}_i}^{\bar{\theta}_i} \bar{y}_i(\theta_i)\left(\theta_i - \frac{1-\Phi(\theta_i)}{\phi_i(\theta_i)}\right)\phi_i(\theta_i)d\theta_i\right] - U_i(\underline{\theta}_i) \tag{38}$$

$$= \left[\int_{\underline{\theta}_1}^{\bar{\theta}_1} ... \int_{\underline{\theta}_I}^{\bar{\theta}_I} y_i(\theta_1, ..., \theta_I)\left(\theta_i - \frac{1-\Phi(\theta_i)}{\phi_i(\theta_i)}\right)\left(\prod_{j=1}^{I}\phi_j(\theta_j)\right)d\theta_I...d\theta_1\right] - U_i(\underline{\theta}_i). \tag{39}$$

Então, somando para todo i, temos que a receita total esperada do vendedor é

$$\sum_{i=1}^{I} E[-t_i(\theta)] = \left[\int_{\underline{\theta}_1}^{\bar{\theta}_1} ... \int_{\underline{\theta}_I}^{\bar{\theta}_I}\left[\sum_{i=1}^{I} y_i(\theta_1, ..., \theta_I)\left(\theta_i - \frac{1-\Phi(\theta_i)}{\phi_i(\theta_i)}\right)\right]\left(\prod_{j=1}^{I}\phi_j(\theta_j)\right)d\theta_I...d\theta_1\right] - \sum_{i=1}^{I} U_i(\underline{\theta}_i). \tag{40}$$

Note que a expressão (40) depende apenas das funções $(y_1(\theta), ..., y_I(\theta))$ e dos valores de $(U_1(\theta), ..., U_I(\theta))$, implicando que quaisquer duas funções de escolha social compatíveis em incentivo em equilíbrio bayesiano geram a mesma receita esperada para o vendedor. ■

Devido a vasta gama de aplicações da teoria dos leilões, o Teorema da Equivalência de Receitas é de fundamental importância no atual avanço da Economia. Como um exemplo de sua aplicação, pense em dois tipos de leilões fechados. No primeiro deles, cada comprador dá um lance fechado e, a seguir, o vendedor abre todos e aquele comprador com maior lance leva o bem pagando ao vendedor um valor igual ao seu lance. No segundo, os lances acontecem da mesma forma. A diferença está no fato de o comprador de maior lance levar o bem pagando o valor igual ao segundo maior lance[17]. Através do Teorema da Equivalência de Receitas é possível mostrar que, quando as valorações dos compradores são independentemente disrtibuídas em $[0, 1]$, a receita esperada do vendedor nestes dois leilões é a mesma.

Os resultados obtidos até aqui consideraram que os agentes são obrigados a participar do mecanismo. Em nenhum momento foi permitido a eles a escolha de aceitar ou não o jogo. Embora essa estrutura apresente importantes resultados, como os que vimos acima, ela limita muito a abrangência de aplicações. Nossa próxima seção inclui a chamada restrição de participação em um simples modelo de Economia do Trabalho. Estaremos, ao incluir esta restrição, dando incentivos ao agente para participar do mecanismo (aceitar o contrato).

[17]Myerson (1981) e Krishna (2002) tratam a teoria dos leilões de maneira completa.

2.3 Um Simples Modelo de Economia do Trabalho

Nesta seção apresentaremos um modelo básico de agente-principal, ou seja, um modelo de desenho de mecanismo em que existe apenas um agente. Como destacamos no final da última seção, nós incluiremos no problema a restrição de participação, a fim de dar mais abrangência a sua aplicação. Além disso, embora consideremos uma aplicação à Economia do Trabalho, a estrutura apresentada pode ser usada em várias outras áreas da Economia[18]. Nossa análise aqui segue Laffont e Martimort (2002) e Salanié (2005). Trabalharemos com distribuições de probabilidade contínuas, para o caso discreto é recomendado as obras supracitadas.

2.3.2 O Modelo

Considere uma firma (o principal) que deseja delegar para um dos seus trabalhadores (o agente) a tarefa de produzir q unidades de um determinado bem. O principal aufere a utilidade $S(q)$ com a produção de q unidades, onde $S^{'}(\cdot) > 0$, $S^{''}(\cdot) < 0$ e $S(0) = 0$. Dessa forma, o valor marginal do bem para o principal é positivo e estritamente decrescente com o número de bens produzidos.

O custo de produção do trabalhador não é observado pelo principal, mas é de conhecimento comum o seu custo fixo F, bem como o fato de que seu custo marginal θ pertence ao intervalo $\Theta = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ e que a distribuição de θ é $\Phi(\theta)$, com função de densidade $\phi(\theta) > 0$, para todo $\theta \in \Theta$. Observe que o custo marginal θ pode ser considerado uma mediade de eficiência do trabalhador. Assim, $\underline{\theta}$ representa a maior eficiência possível enquanto $\overline{\theta}$ a maior ineficiência. O custo total de produção do trabalhador, portanto, é dado por

$$C(q, \theta) = \theta q + F. \tag{41}$$

A variável utilizada pelo principal para incentivar o agente é a transferência monetária t, que no nosso contexto pode ser considerada como o salário do trabalhador. As variáveis a considerar no problema são, então, a quantidade produzida q e a transferência t. Seja A o conjunto de alocações factíveis, formalmente temos

$$A = \{(q, t) : q \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}\}. \tag{42}$$

Por hipótese, ambas as variáveis são observáveis e verificáveis por uma terceira parte externa, tal como um órgão de justiça. Imagine algum tribunal da justiça do trabalho,

[18]Veja, por exemplo, Mirrlees (1971) em taxação ótima, Baron e Myerson (1982) em Economia da Regulação, Maskin e Riley (1984) em precificação não-linear em monopólios e Mussa e Rosen (1978) em discriminação de preços. Green e Kahn (1983) oferecem um mais sofisticado modelo de Economia do Trabalho.

por exemplo. Este órgão pode ser incluído no contrato com a finalidade de penalizar desvios da quantidades e transferências contratadas, tanto por parte do principal como do agente.

Quanto ao *timing* do jogo, assumiremos que segue os três passos citados na introdução deste capítulo: o principal desenha e oferece o contrato; o agente, a seguir, aceita ou recusa a oferta e; por fim, o contrato é executado.

2.3.2 Solução Sob Informação Simétrica

Primeiramente, assumiremos que a firma conhece o nível de eficiência do trabalhador. O resultado encontrado sob esta hipótese nos servirá, à frente, como parâmetro de comparação e, por isso, é chamado de *first-best*. Dessa forma, o problema do principal é maximizar o seu bem-estar sujeito apenas a restrição de participação, a qual deve dar incentivos ao trabalhador decidir aceitar o contrato. Formalmente, o principal resolve

$$\max_{\{q(\cdot),t(\cdot)\}} S(q(\theta)) - t(\theta) \tag{43}$$

sujeito a

$$t(\theta) - \theta q(\theta) - F \geq \overline{U}, \tag{44}$$

onde $\overline{U}$ é a utilidade de reserva do trabalhador. Em geral, podemos considerar $\overline{U}$ como a utilidade obtida em um emprego alternativo.

A resolução do problema acima pode ser obtida usando o método de Kuhn-Tucker. No entanto, a proposição abaixo nos diz que podemos simplificar a otimização para um problema com restrição de igualdade.

Proposição 21 *No contrato ótimo sob informação simétrica, a restrição de participação (44) é satisfeita com igualdade, ou seja,* $t(\theta) - \theta q(\theta) - F = \overline{U}$.

Prova. Suponha, ao contrário, que o contrato ótimo oferecido gere uma utilidade maior do que a de reserva para o agente, tal que

$$t(\theta) - \theta q(\theta) - F > \overline{U}. \tag{45}$$

Então, existe $\varepsilon > 0$ pequeno o bastante, tal que se a firma optar por uma transferência $\hat{t}(\theta) = t(\theta) - \varepsilon$, então

$$t(\theta) - \theta q(\theta) - F > \hat{t}(\theta) - \theta q(\theta) - F > \overline{U}. \tag{46}$$

Além disso, como $\hat{t}(\theta) < t(\theta)$,

$$S(q(\theta)) - \hat{t}(\theta) > S(q(\theta)) - t(\theta), \tag{47}$$

mas isso implica que o principal não está atingindo sua utilidade máxima, o que contradiz o fato do contrato ser ótimo. Logo, $t(\theta) - \theta q(\theta) - F = \overline{U}$. ■

Com a restrição de participação sendo satisfeita com igualdade, basta isolarmos uma das variáveis de escolha e substituí-la na função objetivo do principal para resolvermos o problema. O contrato ótimo sob informação simétrica, juntamente com um resultado sobre sua eficiência, é resumido na proposição a seguir.

Proposição 22 *O contrato ótimo sob informação simétrica é dado por* $q^{FB}(\theta) = (S^{'})^{-1}(\theta)$ *e* $t(\theta) = \overline{U} + \theta(S^{'})^{-1}(\theta) + F$. *Além disso, seja* $W = S(q(\theta)) - \theta q(\theta) - F$ *o bem-estar total da sociedade (soma das utilidades do principal e do agente). Então,* $W(\cdot)$ *atinge seu máximo no contrato ótimo.*

Prova. O resultado é imediato da substituição da restrição de participação na função objetivo e da sua maximização com respeito a $q(\cdot)$. Seja $V(\cdot)$ a utilidade do principal, então

$$V(q(\theta)) \equiv S(q(\theta)) - (\overline{U} + \theta q(\theta) + F) \tag{48}$$

$$V^{'}(q(\theta)) = S^{'}(q(\theta)) - \theta = 0 \tag{49}$$

$$S^{'}(q(\theta)) = \theta \tag{50}$$

$$q^{FB}(\theta) = (S^{'})^{-1}(\theta), \tag{51}$$

onde a existência da função inversa de $S^{'}(\cdot)$ é assegurada pelas hipóteses feitas sobre $S(\cdot)$. Para obtermos $t^{FB}(\cdot)$, basta substituirmos $q^{FB}(\theta)$ na restrição de participação.

Note também que para todo $\hat{q}(\cdot) \neq q^{FB}(\cdot)$,

$$S(q^{FB}(\theta)) - (\overline{U} + \theta q^{FB}(\theta) + F) \geq S(\hat{q}(\theta)) - (\overline{U} + \theta \hat{q}(\theta) + F) \tag{52}$$

$$S(q^{FB}(\theta)) - \theta q^{FB}(\theta) - F \geq S(\hat{q}(\theta)) - \theta \hat{q}(\theta) - F, \tag{53}$$

o que implica que $q^{FB}(\cdot)$ maximiza $W(\cdot)$. ■

Como $S^{''}(\cdot) < 0$, perceba que $q^{FB}(\cdot)$ é descrescente em θ. Em outras palavras, quanto mais eficiente for o trabalhador (θ mais baixo), maior será a sua produção do bem. Como consequência, o bem-estar social será mais elevado conforme o agente seja mais eficiente.

2.3.3 Solução Sob Informação Assimétrica

Antes de discutirmos as implicações da informação assimétrica no modelo, observemos que o Princípio da Revelação pode ser aplicado em nossa estrutura, de tal forma que podemos restringir nossa análise aos mecanismos (contratos) de revelação direta $\{(q(\hat{\theta}), t(\hat{\theta}))\}$, que são compatíveis em incentivo. Isso significa que para contornar a possibilidade do trabalhador mentir o seu verdadeiro custo marginal θ, o que ele faria com a finalidade de obter maior utilidade, precisamos adicionar a restrição de compatibilidade de incentivos. Dessa forma, se $\{(q(\theta), t(\theta))\}$ é compatível em incentivos, então

$$t(\theta) - \theta q(\theta) \geq t(\hat{\theta}) - \theta q(\hat{\theta}) \tag{54}$$

para qualquer $(\theta, \hat{\theta}) \in \Theta^2$.

Em particular, (54) implica

$$\begin{aligned} t(\theta) - \theta q(\theta) &\geq t(\hat{\theta}) - \theta q(\hat{\theta}), & (55)\\ t(\hat{\theta}) - \hat{\theta} q(\hat{\theta}) &\geq t(\theta) - \hat{\theta} q(\theta) & (56) \end{aligned}$$

para todos os pares $(\theta, \hat{\theta}) \in \Theta^2$.

Somando (55) e (56) obtemos

$$(\theta - \hat{\theta})(q(\hat{\theta}) - q(\theta)) \geq 0. \tag{57}$$

Portanto, a restrição de compatibilidade de incentivos exige que a quantidade produzida $q(\cdot)$ seja não crescente. Observe que este resultado corresponde ao item (i) da proposição 19[19]. Isto implica que $q(\cdot)$ é diferenciável quase-sempre e, logo, $t(\cdot)$ também é diferenciável quase-sempre e ambas possuem os mesmos pontos de descontinuidade. Apesar de termos de considerar a classe mais geral das funções diferenciáveis quase-sempre, aqui, a título de simplificação, assumiremos que ambas são diferenciáveis[20].

Como $q(\cdot)$ e $t(\cdot)$ são assumidas diferenciáveis, então a condição de primeira ordem para a escolha ótima $\hat{\theta}$ do agente do tipo θ é

$$\dot{t}(\hat{\theta}) - \theta \dot{q}(\hat{\theta}) = 0. \tag{58}$$

Para a verdade ser a escolha ótima, para todo θ, então

$$\dot{t}(\theta) - \theta \dot{q}(\theta) = 0, \tag{59}$$

e (59) deve valer para todo $\theta \in \Theta$, pois θ não é conhecido pelo principal.

É também necessário que o contrato ótimo satisfaça a condição de segunda ordem local,

$$\ddot{t}(\hat{\theta})|_{\hat{\theta}=\theta} - \theta \ddot{q}(\hat{\theta})|_{\hat{\theta}=\theta} \leq 0 \tag{60}$$

ou

$$\ddot{t}(\theta) - \theta \ddot{q}(\theta) \leq 0. \tag{61}$$

[19] O fato de aqui $q(\cdot)$ ser não-crescente, ao contrário de não-decrescente, deve-se a troca do sinal de $\theta q(\cdot)$ na utilidade do agente.

[20] Nos próximos capítulos relaxaremos esta hipótese, permitindo a existência mecanismos descontínuos.

Mas ao diferenciarmos (59) e substituí-la em (61), esta pode ser escrita como

$$\dot{q}(\theta) \leq 0. \tag{62}$$

As condições (59) e (62) cosntituem a restrição de compatibilidade de incentivos local, a qual garante que o agente não mentirá localmente. Em geral é necessário checarmos se o mesmo resultado vale globalmente. Contudo, a próxima proposição afirma que sempre que a condição de Spence-Mirrlees[21] valer, (59) também implica em restrição de incentivos global.

Proposição 23 *Assuma a validade da condição de Spence-Mirrlees. Então a restrição de compatibilidade de incentivos local implica a global. Especificamente, no nosso exemplo,*

$$t(\theta) - \theta q(\theta) \geq t(\hat{\theta}) - \theta q(\hat{\theta}) \tag{63}$$

é satisfeita para qualquer $(\theta, \hat{\theta}) \in \Theta^2$.

Prova. Para a demonstração no caso genérico, veja Salanié (2005). No exemplo, claramente a condição de Spence-Mirrlees é válida, pois $\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U/\partial q}{\partial U/\partial t}\right) = -1$. Então, integrando (59) temos

$$\begin{aligned} t(\theta) - t(\hat{\theta}) &= \int_{\hat{\theta}}^{\theta} s q(s) ds & (64) \\ &= \theta q(\theta) - \hat{\theta} q(\hat{\theta}) - \int_{\hat{\theta}}^{\theta} q(s) ds & (65) \end{aligned}$$

ou

$$t(\theta) - \theta q(\theta) = t(\hat{\theta}) - \theta q(\hat{\theta}) + (\theta - \hat{\theta}) q(\hat{\theta}) - \int_{\hat{\theta}}^{\theta} q(s) ds. \tag{66}$$

Como sabemos que $q(\cdot)$ é não crescente, então $(\theta - \hat{\theta}) q(\hat{\theta}) \geq \int_{\hat{\theta}}^{\theta} q(s) ds$ ou $(\theta - \hat{\theta}) q(\hat{\theta}) - \int_{\hat{\theta}}^{\theta} q(s) ds \geq 0$. Logo,

$$t(\theta) - \theta q(\theta) \geq t(\hat{\theta}) - \theta q(\hat{\theta}), \tag{67}$$

como queríamos demonstrar. ■

De posse deste resultado, podemos escrever a infinidade de restrições de compatibilidade de incentivos (54) como uma equação diferencial e uma restrição de monotonicidade. Em outras palavras, a análise local de incentivos é suficiente. Mecanismos verdadeiramente implementáveis são caracterizados, então, por (59) e (62).

[21] A condição de Spence-Mirrlees, ou *single crossing property*, estabelece que a taxa marginal de substituição entre a quantidade q e a transferência t possa ser ordenada monotonicamente. Seja $U(q, t, \theta)$ a utilidade do trabalhador, então a condição implica que $\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U/\partial q}{\partial U/\partial t}\right) > 0$ ou $\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U/\partial q}{\partial U/\partial t}\right) < 0$ para qualquer $(t, q, \theta) \in A \times \Theta$. Para mais detalhes, veja Fudenberg e Tirole (1993), Laffont e Martimort (2002) e Salanié (2005).

Seja $U(\theta) = t(\theta) - \theta q(\theta)$ a utilidade do trabalhador (estamos normalizando $F = 0$, pois o custo fixo não interfere no resultado), podemos utilizar essa nova variável, substituindo a transferência $t(\theta)$. Portanto, a condição de primeira ordem da restrição de compatibilidade de incentivos é agora escrita como

$$\dot{U}(\theta) = -q(\theta), \tag{68}$$

pois $\dot{U}(\theta) = \dot{t}(\theta) - \theta\dot{q}(\theta) - q(\theta)$ e o Teorema do Envelope implica que $\dot{t}(\theta) - \theta\dot{q}(\theta) = 0$.

Estamos aptos a montar o problema de otimização do principal. Este terá a seguinte forma:

$$\max_{\{(U(\cdot),q(\cdot))\}} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(S(q(\theta)) - \theta q(\theta) - U(\theta)\right)\phi(\theta)d\theta \tag{69}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \dot{U}(\theta) &= -q(\theta) &(70)\\ \dot{q}(\theta) &\leq 0 &(71)\\ U(\theta) &\geq 0, &(72) \end{aligned}$$

onde normalizamos a utilidade de reserva $\overline{U} = 0$.

Como $U(\cdot)$ é decrescente, dado por (70), a restrição de participação (72) transforma-se em $U(\overline{\theta}) \geq 0$. Em outras palavras, a restrição de compatibilidade de incentivos implica que a restrição de participação precisa ser atendida somente quando o trabalhador é o mais ineficiente possível. Também é possível usar o mesmo argumento da proposição 21, sob informação simétrica, para mostrar que $U(\overline{\theta}) = 0$.

Se resolvermos a equação diferencial (70),

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{\overline{\theta}} \dot{U}(s)ds &= -\int_{\theta}^{\overline{\theta}} q(s)ds &(73)\\ U(\overline{\theta}) - U(\theta) &= -\int_{\theta}^{\overline{\theta}} q(s)ds, &(74) \end{aligned}$$

e substituindo $U(\overline{\theta}) = 0$,

$$U(\theta) = \int_{\theta}^{\overline{\theta}} q(s)ds. \tag{75}$$

Perceba que aqui temos o item (ii) da proposição 19.

Se, por enquanto, ignorarmos a restrição (71), o problema do principal torna-se

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left(S(q(\theta)) - \theta q(\theta) - \int_{\theta}^{\overline{\theta}} q(s)ds\right)\phi(\theta)d\theta, \tag{76}$$

onde substituimos (75) em (69). Ao integrarmos por partes temos

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[S(q(\theta)) - \left(\theta + \frac{\Phi(\theta)}{\phi(\theta)} \right) q(\theta) \right] \phi(\theta) d\theta. \tag{77}$$

Maximizando a expressão acima obtemos o contrato sob informação assimétrica, o qual chamaremos de *second-best*. A proposição abaixo resume os principais resultados desta subseção.

Proposição 24 *Sob informação assimétrica temos:*
(i) $q^{SB}(\theta) = (S^{'})^{-1}\left(\theta + \frac{\Phi(\theta)}{\phi(\theta)}\right)$*;*
(ii) $U^{SB}(\theta) = \int_{\theta}^{\overline{\theta}} q^{SB}(s)ds$*; e*
(iii) $t^{SB}(\theta) = U^{SB}(\theta) + \theta q^{SB}(\theta)$*.*
Além disso, se $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\Phi(\theta)}{\phi(\theta)}\right) \geq 0$[22]*, então* $q^{SB}(\cdot)$ *é não crescente, atendendo a restrição (71).*

Prova. Seja $G \equiv \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[S(q(\theta)) - \left(\theta + \frac{\Phi(\theta)}{\phi(\theta)} \right) q(\theta) \right] \phi(\theta) d\theta$, então fazendo $\frac{dG}{dq} = 0$

$$\phi(\theta)\left(S^{'}(q(\theta)) - \theta - \frac{\Phi(\theta)}{\phi(\theta)}\right) = 0 \tag{78}$$

$$S^{'}(q(\theta)) = \theta + \frac{\Phi(\theta)}{\phi(\theta)} \tag{79}$$

$$q^{SB}(\theta) = (S^{'})^{-1}\left(\theta + \frac{\Phi(\theta)}{\phi(\theta)}\right). \tag{80}$$

Substituindo (80) em (75), temos (ii) e substituindo (i) e (ii) na utilidade do trabalhador, temos (iii).

Para ver que $q^{SB}(\theta)$ é decrescente, lembre que $S^{''}(\cdot) < 0$ e que a inversa de uma função decrescente também será decrescente. ■

O corolário a seguir liga os resultados obtidos sobre informação simétrica e assimétrica.

Corolário 25 *Sob informação assimétrica, o trabalhador sempre obterá utilidade positiva, exceto quando seu tipo for o mais ineficiente possível,* $\overline{\theta}$*. Além disso, sempre existirá uma distorção econômica (quantidade produzida abaixo do ótimo,* $q^{FB}(\cdot)$*), exceto quando o trabalhador for o mais eficiente possível,* $\underline{\theta}$*.*

Prova. Claramente, por $q^{SB}(\theta)$ ser decrescente, sempre teremos $U^{SB}(\theta) = \int_{\theta}^{\overline{\theta}} q^{SB}(s)ds > 0$, exceto quando $\theta = \overline{\theta}$, pois então

$$U^{SB}(\overline{\theta}) = \int_{\overline{\theta}}^{\overline{\theta}} q^{SB}(s)ds = 0. \tag{81}$$

[22]Esta condição é conhecida como *monotone hazard rate property*.

Para vermos que $q^{FB}(\theta) \geq q^{SB}(\theta)\ \forall\theta \neq \underline{\theta}$, note que $(S^{'})^{-1}(\cdot)$ é decrescente. Então,

$$q^{SB}(\theta) = (S^{'})^{-1}\left(\theta + \frac{\Phi(\theta)}{\phi(\theta)}\right) \leq (S^{'})^{-1}(\theta) = q^{FB}(\theta), \tag{82}$$

pois $\frac{\Phi(\theta)}{\phi(\theta)} \geq 0$.

No caso de $\theta = \underline{\theta}$, então $\Phi(\theta) = 0$ e $q^{SB}(\theta) = q^{FB}(\theta)$. ■

Como era de se esperar, a presença de informação no modelo criou ineficiência na economia. O principal aceita pagar uma quantia maior do que em informação simétrica quando o tipo do trabalhador é o mais eficiente em troca da revelação do seu tipo (informação privada). Neste caso, portanto, o trabalhador eficiente receberá mais e produzirá o mesmo que em *first best*. Já no caso em que é muito ineficiente, ele obterá utilidade igual a zero e produzirá menos do que em informação simétrica. Em resumo, a necessidade de impor a restrição de compatibilidade de incentivos acaba por gerar distorções econômicas.

Para finalizar, veja que o problema de otimização do principal (69) pode ser resolvido pelas técnicas usuais de controle ótimo, usando o Príncipio do Máximo de Pontryagin. Ao optar por um método alternativo, demos preferência ao uso de alguns argumentos econômicos na resolução. Relembre que, devido a forma funcional das utilidades, consideramos $q(\cdot)$ e $t(\cdot)$ diferenciáveis e, isto, embora não explicitado, é uma hipótese fundamental tanto na teoria do controle ótimo quanto na técnica que adotamos (usamos o Teorema do Envelope). O próximo capítulo tratará das implicações da não diferenciabilidade do mecanismo na aplicação destes dois métodos. Além disto, forneceremos resultados que superam as limitações impostas pela ausência desta desejável característica.

3 Mecanismos não Diferenciáveis e Descontínuos

A maioria das aplicações da teoria de desenho de mecanismos adota a hipótese de que o mecanismo é continuamente diferenciável ou, no caso menos restritivo, continuamente diferenciável por partes. Como visto no final do capítulo 1, diferenciabilidade é uma propriedade desejável porque permite a aplicação das técnicas de controle ótimo e, principalmente, o uso do Teorema do Envelope na resolução do problema de otimização do principal. Contudo, com a difusão de aplicações da teoria, mecanismos descontínuos[23] apareceram como ótimos em Economia da Regulação e comércio bilateral, por exemplo[24]. Assim, a estrutura matemática para resolver estes problemas necessitou de adaptações. A literatura avançou neste sentido, entretanto nenhum trabalho é genérico o suficiente para cobrir conjuntamente modelos com preferências arbitrárias e a presença de mais de um agente.

Este capítulo começa apresentando as limitações impostas pela falta de diferenciabilidade do mecanismo. Estas implicações atingem os dois métodos de resolução, controle ótimo e Teorema do Envelope. Nesta seção 2.1, discutiremos principalmente os problemas enfrentados por este segundo método frente à falta de diferenciabilidade. A seção 2.2, a seguir, fornece tentativas de superar a dificuldade imposta pela não diferenciabilidade. Começamos com uma revisão da literatura e veremos que esta é insuficiente para cobrir todas as aplicações da teoria. Isto deve-se ao fato de existirem trabalhos que se preocupam apenas com a não diferenciabilidade aplicada ao Teorema da Equivalência de Receitas e, portanto, a ambientes com preferências lineares, e outros que consideram somente modelos com um único agente. Logo, existe uma lacuna na literatura de algum resultado que una preferências arbitrárias e ambientes multi-agente. Esta lacuna é preenchida no capítulo 3, onde nós generalizamos os resultados de Milgrom e Segal (2002) para modelos com mais de um agente. Para tal, nós precisamos reintroduzir a compacidade do conjunto de escolha, porém nós argumentamos que esta não é uma hipótese forte em aplicações.

3.1 Implicações Impostas pela não Diferenciabilidade

Para vermos os problemas causados pela não diferenciabilidade em modelos de desenho de mecanismo, vamos assumir que $u_0(\cdot)$ seja a função de utilidade do principal e $u_i(\cdot)$ a utilidade do agente, com $i = 1, ..., I$. Assim como no capítulo anterior, assumimos que o tipo do agente é dado por θ_i e, logo, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_I) \in \Theta_1 \times ... \times \Theta_I$. A título de simplicidade, consideraremos um ambiente padrão, com uma função de escolha ótima bidimensional

[23] Embora tecnicamente a discussão mais adequada seja a de mecanismos não-diferenciáveis, na prática é mais comum observarmos descontinuidades. Como mecanismos descontínuos também são não-diferenciáveis, nas aplicações trataremos principalmente destes.

[24] Veja Laffont e Tirole (1993) e Myerson (1991), respectivamente.

$x_i(\cdot) = (q_i(\cdot), t_i(\cdot))$, com $x_i \in X$, mas nosso argumento pode ser facilmente generalizado para algum $q_i(\cdot)$ multidimensional[25]. Além disso, seja S_i o espaço de estratégias para cada agente i, tal que $S = S_1 \times ... \times S_I$ e seja $s = (s_1, ..., s_I) \in S$ o vetor de estratégias dos agentes. Dessa forma, temos $u_0(q(s), t(s), \theta)$ e $u_i(q(s), t(s), \theta)$, para cada i, e a função $s : \Theta \to S$ dá a oportunidade dos agentes se comportarem estrategicamente.

A estrutura acima é muito geral e pode modelar uma variedade de problemas econômicos (discriminação de preços, regulação, taxação ótima). Perceba que a aplicação apresentada no final do primeiro capítulo é um caso particular do modelo acima, onde $I = 1$, ou seja, apenas um agente. Adicionalmente, esta estrutura é muito útil ao modelar leilões. Neste caso, $q(\cdot)$ seria a probabilidade do comprador obter o bem e $t(\cdot)$ seria a função de pagamento. Note que não assumimos qualquer forma funcional para as utilidades e deixamos Θ, X e S serem arbitrários. Portanto, nosso modelo geral é formado por um principal e I agentes, $i = 1, ..., I$. O principal deseja maximizar sua utilidade (esperada, no caso de equilíbrio bayesiano) ao escolher o par de funções $(q_i(\cdot), t_i(\cdot))$, para cada i. Contudo, θ_i é de conhecimento privado do agente, de maneira que o principal somente observa s_i. Também é assumido que a distribuição de probabilidade dos tipos é conhecida. Então, é necessário dar incentivos para os agentes revelarem seu tipo.

Se aplicarmos o Princípio da Revelação trabalharemos diretamente com $q(\theta)$ e $t(\theta)$ e este mecanismo, para implementar uma função de escolha social verdadeiramente, deve satisfazer a seguinte restrição de compatibilidade de incentivos:

$$u_i(q(\theta), t(\theta), \theta) \geq u_i(q(\hat{\theta}), t(\hat{\theta}), \theta), \tag{83}$$

para todo i e todo $(\theta, \hat{\theta}) \in \Theta^2$, onde θ é o verdadeiro tipo do agente. Assim, as funções valor do problema são as utilidades indiretas

$$V_i(\theta) \equiv \max_{\hat{\theta}} u_i(q(\hat{\theta}), t(\hat{\theta}), \theta) = u_i(q(\theta), t(\theta), \theta), \tag{84}$$

para todo i.

Assumindo implementação em equilíbrio de Nash bayesiano, o principal maximiza sua utilidade sujeito a restrição de participação e de compatibilidade de incentivos:

$$\max_{\{q_i(\cdot), t_i(\cdot)\}_{i=1,...,I}} E_\theta u_0(q(\theta), t(\theta), \theta) \tag{85}$$

sujeito a

$$u_i(q(\theta), t(\theta), \theta) \geq \underline{u}, \tag{86}$$

[25]Como, em geral, $t_i(\theta)$ representa a transferência do agente, não faz sentido imaginar que seja multidimensional. Por esta razão, assumimos que sempre que $x_i(\theta)$ for multidimensional, deve-se a $q_i(\theta)$.

para todo i e todo θ, e

$$u_i(q(\theta), t(\theta), \theta) \geq u_i(q(\hat{\theta}), t(\hat{\theta}), \theta), \tag{87}$$

para todo i e todo $(\theta, \hat{\theta}) \in \Theta^2$.

É importante assumir algumas hipóteses padrão no problema acima para garantir a existência e a unicidade da solução. Primeiro, assumimos que a utilidade de reserva $\underline{u}$ é independente do tipo do agente e, por simplicidade, a normalizamos $\underline{u} = 0$. Além disso, a utilidade é crescente no próprio tipo do agente, isto é, $\frac{\partial u_i}{\partial \theta_i} > 0$, para todo i. Observe que esta hipótese não é satisfeita no exemplo de Economia do Trabalho da seção 1.3. Lá, por θ representar eficiência (quanto menor θ, maior a eficiência), tínhamos $\frac{\partial u_i}{\partial \theta_i} < 0$. Por fim, assumamos a validade da condição de Spence-Mirrlees.

Assim como o principal, o agente também é um maximizador de utilidade e, logo, escolherá o tipo reportado $\hat{\theta}$ que lhe dá o maior valor de $u_i(\cdot)$. Podemos mostrar[26] que as condições de primeira e segunda ordem do problema de maximização do agente, $\frac{\partial u_i}{\partial \hat{\theta}_i} = 0$ e $\frac{\partial^2 u_i}{\partial \hat{\theta}_i^2} \leq 0$, respectivamente, geram um sistema de equações diferenciais que substituem (86) e (87) no problema acima. Ainda, o operador de valor esperado na função objetivo (85) indica que esta está na forma de integral, a qual é ponderada pelas funções de densidade dos tipos dos agentes. Dessa forma, (85) e as equações diferenciais que substituem (86) e (87) formam um problema de otimização dinâmica padrão.

Nesta formulação, o modelo pode ser resolvido pelas técnicas usuais de controle ótimo, através do Princípio do Máximo de Pontryagin. Contudo, as hipóteses deste método exigem que ao menos a variável de controle seja continuamente diferenciável por partes. A possibilidade de "pulos"na variável de estado é permitida[27]. Porém, mesmo com essa possibilidade, como em um modelo de desenho de mecanismos ambas variáveis (controle e estado) fazem parte do mecanismo, então é necessário que este seja continuamente diferenciável por partes para a aplicação do método. Em nossa estrutura, por exemplo, caso $x(\cdot) = (q(\cdot), t(\cdot))$ não tenha essa propriedade, não teremos a opção de usar controle ótimo tradicional na resolução da otimização do principal.

A impossibilidade do uso do Princípio do Máximo é a primeira limitação imposta pela não diferenciabilidade da função de escolha ótima na teoria de desenho de mecanismos. Embora este impedimento seja crucial na aplicação desta técnica, nós não a trataremos aqui. De fato, a literatura tem mostrado ser muito difícil superar tal limitação[28]. Este é um dos motivos de nosso foco recair apenas sobre outro método de resolução do problema do principal. A segunda razão é de que toda a literatura aplicada de desenho de mecanismo[29] vem utilizando tal abordagem alternativa, desde o pioneiro trabalho de Mirrlees

[26]Veja capítulo 1 e Laffont e Maskin (1980).

[27]Para um completo tratamento do Princípio do Máximo, veja Kamien e Schwartz (1981). Em particular, no que diz respeito aos "pulos"na variável de estado, veja a sua seção 18.

[28]Veja Clarke (1990) para um tratamento do Princípio do Máximo com funções não suaves.

[29]Veja, por exemplo, Mussa e Rosen (1978), Willians (1999) e os demais trabalhos citados no primeiro capítulo.

(1971).

Este outro procedimento de resolução do problema do principal foi exatamente aquele utilizado no modelo de Economia do Trabalho no final do capítulo anterior. Lá, relembre, nosso passo inicial foi definir a função valor do agente (utilidade indireta). A seguir, usamos o Teorema do Envelope para obter a derivada da função valor em relação ao tipo do agente. O terceiro passo foi escrever a função valor na sua forma integral, integrando sua derivada. De posse desta representação integral, conseguimos substitui-la na função objetivo e, dessa forma, reduzir o número de variáveis de escolha do principal. A intuição por trás do método, em suma, é a de simplificar o problema inicial usando o Teorema do Envelope e a representação integral da função valor[30].

Dessa maneira, devemos investigar quais são as implicações da não diferenciabilidade do mecanismo na aplicação tanto do Teorema do Envelope quanto da representação integral. Comecemos avaliando as consequências sobre o Teorema. Para tal, introduzimos uma versão particular sua, aplicada a nossa estrutura.

Teorema 26 *(Teorema do Envelope) Suponha que a função de utilidade do agente* i*,* $u_i(q_i(\cdot), t_i(\cdot))$*,* $u_i : X \times \Theta \to \mathbb{R}$*, para* $i = 1, ..., I$*, seja continuamente diferenciável e que* X *e* Θ *sejam compactos. Suponha também que a função de escolha ótima* $x_i(\theta) = (q_i(\theta), t_i(\theta))$ *seja continuamente diferenciável. Se sua função de utilidade indireta é dada por* $V_i \equiv \max_{\hat{\theta}} u_i(q_i(\hat{\theta}), t_i(\hat{\theta}), \theta) = u_i(q_i(\theta), t_i(\theta), \theta)$*, então*

$$\frac{dV_i}{d\theta} = \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \tag{88}$$

para todo i*.*

Prova. Primeiramente, dadas as hipóteses de compacidade e diferenciabilidade, devemos notar que a existência de um máximo em $u_i(\cdot)$, $q_i(\cdot)$ e $t_i(\cdot)$ é garantida pelo Teorema do Máximo. Além disso, usando a regra da cadeia na definição da função valor temos

$$\frac{dV_i}{d\theta} = \frac{\partial u_i}{\partial q_i}\frac{dq_i}{d\hat{\theta}}(\theta) + \frac{\partial u_i}{\partial t_i}\frac{dt_i}{d\hat{\theta}}(\theta) + \frac{\partial u_i}{\partial \theta}, \tag{89}$$

para todo i.

Agora, como o agente é um maximizador, ele otimizará $u_i(\cdot)$ de forma que $\frac{\partial u_i}{\partial q_i}\frac{dq_i}{d\hat{\theta}}(\theta) + \frac{\partial u_i}{\partial t_i}\frac{dt_i}{d\hat{\theta}}(\theta) = 0$. Note que o ponto de ótimo é fornecido pela restrição de compatibilidade de incentivos. Logo, o resultado (88) segue diretamente de (89). ■

Esta prova é trivial é bem conhecida, mas pode ser instrutiva no nosso caso. Primeiro, é possível observar a importância da hipótese da compacidade do conjunto de escolha X e do espaço de tipos Θ. No caso de X (ou Θ) não ser limitado, por exemplo, a utilidade pode

[30]Para detalhes técnicos da transformação do problema original no simplificado, veja Fudenberg e Tirole (1993), em especial seus teoremas 8.2 e 8.3.

não possuir um máximo e o teorema torna-se sem sentido. A violação da diferenciabilidade da função de utilidade também é problemática. Quando as derivadas parciais $\frac{\partial u_i}{\partial q_i}$, $\frac{\partial u_i}{\partial t_i}$ e $\frac{\partial u_i}{\partial \theta}$ não existem, o Teorema não é válido. Portanto, embora nós estejamos permitindo que a utilidade do agente assuma qualquer forma funcional no nosso problema genérico, ela ainda precisa possuir certas características usuais.

O segundo ponto a notar na prova do Teorema é que uma condição necessária para o resultado ser válido é a de que $\frac{\partial u_i}{\partial q_i}\frac{dq_i}{d\hat{\theta}}(\theta) + \frac{\partial u_i}{\partial t_i}\frac{dt_i}{d\hat{\theta}}(\theta) = 0$. Nós daremos mais atenção a esta parte da prova e, portanto, à diferenciabilidade de $q(\cdot)$ e $t(\cdot)$, pois nosso interesse é estudar mecanismos arbitrários, tais como aqueles descontínuos. Adicionalmente, na próxima seção argumentamos que a violação da compacidade de X não faz sentido em aplicações. Então, ao relaxarmos a hipótese de diferenciabilidade, $\frac{dq(\theta)}{d\theta}$ e $\frac{dt(\theta)}{d\theta}$ podem não existir, o que faria com que a expressão (89) não valesse. Dessa forma, diferenciabilidade da escolha ótima é essencial para a aplicação do Teorema do Envelope e sua ausência faz com que o segundo passo da abordagem de Mirrlees (1971) não funcione.

Se assumirmos ser possível aplicar o Teorema do Envelope, o terceiro passo do método proposto por Mirrlees (1971) consiste em escrever $V_i(\cdot)$ na sua representação integral e, após isto, substitui-la na função objetivo. Como temos $\frac{dV_i}{d\theta} = \frac{\partial u_i}{\partial \theta}$, dado pelo Teorema, sob algumas condições é possível integrar esta expressão e obter

$$V_i(\theta) = \underline{V} + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} \frac{\partial u_i}{\partial s}(q(s), t(s), s)ds, \tag{90}$$

para todo i.

As condições que permitem expressar a função valor como uma integral, entretanto, exigem mais do que apenas $\frac{dV_i}{d\theta} = \frac{\partial u_i}{\partial \theta}$. Mesmo a existência da derivada quase sempre, em geral obtida pela monotonicidade da função de escolha ótima, não é suficiente para (90). Logo, nós devemos impor alguma restrição no problema a fim de permitir sua representação integral[31]. Isto é feito na próxima seção.

Para resumir os problemas provocados pela não diferenciabilidade em problemas de desenho de mecanismos, devemos destacar a impossibilidade de usar o Teorema do Envelope com suas hipóteses tradicionais. Como as técnicas de controle ótimo também não funcionam sob tal condição, esta abordagem alternativa ganha importância e torna-se necessário encontrar meios de superar esta limitação. Por fim, além da não diferenciabilidade, nós temos que dedicar atenção a representação integral da função valor. Para expressá-la na forma integral, é exigido que ela possua algumas propriedades, como mostraremos na próxima seção.

[31] Veja Royden (1968).

3.2 Tentativas de Superação da Falta de Diferenciabilidade

3.2.1 Revisão da Literatura

A necessidade de superação dos problemas impostos pela ausência de diferenciabilidade em modelos de desenho de mecanismos, quando da aplicação do Teorema do Envelope, incentivou desenvolvimentos na literatura. Os trabalhos que procuram contornar esta limitação podem ser divididos em duas categorias. A primeira delas tem desenvolvido formas gerais do Princípio da Equivalência de *Payoffs*, da qual o Teorema da Equivalência de Receitas é um caso particular. Esta vertente tem obtidos avanços no sentido de permitir modelos com mais de um agente, mas restringe as preferências às formas quase-lineares. A segunda categoria é mais genérica no que diz respeito à forma da função de utilidade dos agentes e a gama de aplicações (não foca apenas o Teorema da Equivalência de Receitas). Contudo, esta última não abrange modelos multi-agente.

Os trabalhos que generalizam a equivalência de *payoffs* tem como um dos seus principais representantes Krishna e Maenner (2001). Neste estudo, os autores fornecem um par de condições tal que se uma delas é atendida, então a representação integral da função valor é válida para qualquer mecanismo, incluindo aqueles não diferenciáveis. Para obtermos seu resultado, assuma[32] que a utilidade do agente é dada por $u_i(x, \theta_i) - \mu_i$, $i = 1, ..., I$, onde x é uma regra de alocação do agente, θ_i é o seu tipo e μ_i é uma transferência monetária feita por i. Assumimos também que os tipos θ_i são independentemente distribuídos de acordo com uma medida de probabilidade com suporte em Θ_i.

Dessa forma, um mecanismos de revelação direta é um par (χ, μ), onde $\chi : \Theta \to X$ é uma regra de alocação e $\mu : \Theta \to \mathbb{R}^I$ é uma regra de pagamento. Assim, dadas as estratégias $s \in \Theta$, $\chi(s)$ é a alternativa escolhida e $\mu_i(s)$ é a transferência feita por i. Além disso, dado o mecanismo, o *payoff* esperado pelo agente i que reporta s_i, quando seu tipo é θ_i e todos os demais agentes falam a verdade, é

$$U_i(s_i, \theta_i) - m_i(s_i) \tag{91}$$

onde

$$U_i(s_i, \theta_i) = E_{\theta_{-i}}[u_i(\chi(s_i, \theta_{-i}), \theta)] \tag{92}$$

é a utilidade esperada do agente i, dado que reporta s_i e seu tipo é θ_i, e

$$m_i(s_i) = E_{\theta_{-i}}[\mu_i(s_i, \theta_{-i})] \tag{93}$$

[32]Seguiremos a notação dos próprios autores, com a exceção da troca do tipo do agente i para θ_i.

é o pagamento esperado de i quando reporta s_i.

O mecanismo (χ, μ) é compatível em incentivo se para todo i e θ_i

$$\begin{aligned} V_i(\theta_i) &\equiv U_i(\theta_i, \theta_i) - m_i(\theta_i) & (94) \\ &= \sup_{s_i} \left\{ U_i(s_i, \theta_i) - m_i(s_i) \right\}. & (95) \end{aligned}$$

O Princípio da Equivalência de *Payoffs* nos diz que V_i é determinada somente pela regra de alocação somada a uma constante. Se V_i é continuamente diferenciável, então o Teorema do Envelope se aplica e $\nabla V_i(\theta_i)$ depende somente da regra de alocação. Para o caso multidimensional, a sua versão do Teorema Fundamental do Cálculo implica que V_i também dependerá apenas da regra de alocação e da constante aditiva e, assim, a equivalência de *payoff* se mantém. Entretanto, a operação do supremo que define V_i não preserva, em geral, suavidade. A idéia de Krishna e Maenner (2001) é impor condições na função de utilidade $u_i(x, \theta)$ e no mecanismo (χ, μ) tal que V_i seja uma função lipschitziana regular. Então, resultados de diferenciabilidade generalizados para funções não suaves são aplicados para obter a equivalência de *payoffs*.

Antes de analisarmos as condições sob as quais o Princípio será válido, precisamos de um conjunto de definições.

Definição 27 *Suponha que $F : C \to \mathbb{R}$ seja uma função convexa onde $C \subset \mathbb{R}^n$, um vetor $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um subgradiente de F em $x \in C$ se para todo $y \in C$,*

$$F(y) \geq F(x) + x^*(y - x). \tag{96}$$

Definição 28 *Seja o conjunto dos subgradientes de F em x denotado por $\partial F(x)$, então o subdiferencial de F é o conjunto dos mapas $\partial F : x \to \partial F(x)$.*

Definição 29 *Uma função $f : C \to \mathbb{R}^n$ é uma seleção de ∂F se para todo $x \in C$, $f(x) \in \partial F(x)$ e escreve-se $f \in \partial F$.*

Definição 30 *A derivada lateral direcional de F em x com relação ao vetor $y \in \mathbb{R}^n$ é definida como*

$$F^{'}(x; y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{F(x + \lambda y) - F(x)}{\lambda}. \tag{97}$$

Definição 31 *Uma função $\varphi : S \to \mathbb{R}$ é lipschitziana relativa a S se existe um L tal que para todo $x, y \in S$, $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq L \|y - x\|$.*

Definição 32 *Seja $F : C \to \mathbb{R}$ lipschitziana relativa a C. A derivada direcional generalizada de F em x na direção $y \in \mathbb{R}^n$ é definida por*

$$F^0(x; y) = \limsup_{\substack{z \to x \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{F(z + \lambda y) - F(z)}{\lambda}. \tag{98}$$

Definição 33 *$x^* \in \mathbb{R}^n$ é um subgradiente generalizado de F em $x \in C$ se para todo $y \in \mathbb{R}^n$,*

$$x^* y \leq F^0(x; y), \tag{99}$$

e seu conjunto também é denotado por $\partial F(x)$[33].

Definição 34 *Uma função $F : C \to \mathbb{R}$ é dita ser regular em x se para todo y a derivada direcional $F^{'}(x; y)$ existe e $F^{'}(x; y) = F^0(x; y)$; F é dita ser regular se é regular para todo $x \in C$.*

Considere agora as hipóteses abaixo e a proposição subsequente. Perceba que a hipótese 35, em especial, é atendida em quase todos os problemas de desenho de mecanismo tradicionais.

Hipótese 35 *Para cada i, o conjunto de tipos Θ_i é convexo e $u_i(x, \cdot, \theta_{-i})$ é um função convexa.*

Hipótese 36 *O mecanismo (χ, μ) é lipschitziano regular e, para cada i, u_i é lipschitziana regular e monotonicamente crescente em todos os seus argumentos.*

Proposição 37 *(Equivalência de Payoffs) Suponha que ou a hipótese 35 ou a hipótese 36 é satisfeita. Se o mecanismo (χ, μ) é compatível em incentivos, então a função de payoff esperado V_i é determinada apenas por χ e uma constante aditiva. Para todo s_i, $\theta_i \in \Theta_i$, e qualquer trajetória ligando s_i a θ_i em Θ_i,*

$$V_i(\theta_i) = V_i(s_i) + \int Q_i d\alpha, \tag{100}$$

onde $Q_i(\theta_i)$ é um subgradiente generalizado de $U_i(\theta_i, \cdot)$ em θ_i.

A prova da proposição usa o teorema abaixo. Este mostra que toda função convexa (logo, toda função lipschitziana regular) é a integral de qualquer seleção do seu subdiferencial (generalizado) ao longo de qualquer trajetória suave no seu domínio.

Teorema 38 *Se $F : C \to \mathbb{R}$ é uma função convexa (lipschitziana regular) definida em um conjunto aberto (conexo) $C \subset \mathbb{R}^n$ e se f é qualquer seleção mensurável do seu subgradiente (generalizado) ∂F, então para qualquer trajetória suave α ligando a a b em C,*

$$\int f d\alpha = F(b) - F(a). \tag{101}$$

[33]De maneira análoga, o subdiferencial generalizado também é dado pelo conjunto dos mapas $\partial F : x \to \partial F(x)$.

Prova. (Prova da Proposição 37) *Hipótese 35*: Dado que a integral de uma família de funções convexas é convexa, o fato que u_i é convexa em θ_i implica que a função $U_i(\theta_i, \cdot) : \Theta_i \to \mathbb{R}$ é também convexa. Para cada θ_i, seja $P(\theta_i, \cdot) \in \partial U_i(\theta_i, \cdot)$ uma seleção mensurável de um subdiferencial de $U_i(\theta_i, \cdot)$. Então, para todo r_i, s_i e θ_i,

$$U_i(\theta_i, s_i) \geq U_i(\theta_i, r_i) + P_i(\theta_i, r_i)(s_i - r_i). \tag{102}$$

A função *payoff* esperado V_i também é convexa (de (95) ela é o supremo de uma família de funções convexas) e para todo $s_i \in \theta_i$,

$$\begin{aligned} V_i(s_i) &\geq U_i(\theta_i, s_i) - m_i(\theta_i) && (103)\\ &\geq U_i(\theta_i, \theta_i) - m_i(\theta_i) + P_i(\theta_i, \theta_i)(s_i - \theta_i) && (104)\\ &= V_i(\theta_i) + P_i(\theta_i, \theta_i)(s_i - \theta_i), && (105) \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue da compatibilidade de incentivos e a segunda de definir $r_i = \theta_i$ em (102). Assim, mostramos que para cada θ_i, $Q_i(\theta_i) \equiv P_i(\theta_i, \theta_i)$ é um subgradiente de V_i no ponto θ_i, isto é, $Q_i \in \partial V_i$.

Observe que, por definição, P_i e, portanto, Q_i, dependem somente de U_i e, logo, apenas da regra de alocação χ e não da regra de pagamento μ. Teorema 38 implica imediatamente que V_i é determinada por Q_i e, assim, por χ, e por uma contante aditiva.

Hipótese 36: Aqui, é suficiente garantir que a função $U_i(\theta_i, \cdot) : \Theta_i \to \mathbb{R}$ é também lipschitziana regular. Isto segue de dois fatos. Primeiro, a composição $f = g \circ h$ de duas funções g e h lipschitzianas regulares é também lipschitziana regular, dado que g é monotonicamente crescente tal que todo $p \in \partial g$ é não negativo. Segundo, a integral de uma família de funções lipschitzianas regulares também é lipschitziana regular[34].

Para cada s_i e θ_i, seja $P_i(\theta_i, s_i)$ o subgradiente generalizado da função $U_i(\theta_i, \cdot) : \Theta_i \to \mathbb{R}$ no ponto s_i. Então para todo $y \in \mathbb{R}^k$,

$$P_i(\theta_i, s_i)y \leq U_i'(\theta_i, s_i; 0, y). \tag{106}$$

A função valor esperado V_i é também lipschitziana regular e

$$\begin{aligned} V_i'(\theta_i; y) &= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{V_i(\theta_i + \lambda y) - V_i(\theta_i)}{\lambda} && (107)\\ &\geq \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{[U_i(\theta_i, \theta_i + \lambda y) - m_i(\theta_i)] - [U_i(\theta_i, \theta_i) - m_i(\theta_i)]}{\lambda} && (108)\\ &= \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{U_i(\theta_i, \theta_i + \lambda y) - U_i(\theta_i, \theta_i)}{\lambda} && (109)\\ &= U_i'(\theta_i, \theta_i; 0, y), && (110) \end{aligned}$$

[34] Todos os resultados utilizados nesta prova podem ser encontrados em Clarke (1990).

onde a desigualdade resulta da compatibilidade de incentivos.

Agora, usando (106) quando $s_i = \theta_i$ nós obtemos de (110) que para todo y,

$$P_i(\theta_i, \theta_i)y \leq U_i^{'}(\theta_i, \theta_i; 0, y) \quad (111)$$
$$\leq V_i^{'}(\theta_i; y). \quad (112)$$

Dessa forma, mostramos que para cada θ_i, $Q_i(\theta_i) \equiv P_i(\theta_i, \theta_i)$ é um subgradiente generalizado de V_i no ponto θ_i, isto é, $Q_i \in \partial V_i$.

Como antes, P_i e, logo, Q_i, dependem apenas de U_i e, portanto, apenas da regra de alocação χ, e não da regra de pagamento μ. Ao aplicarmos o Teorema 38 novamente, quando generalizado a funções lipschitzianas regulares, obtemos que V_i é determinada por Q_i, ou seja, apenas por χ mais uma constante. ■

Note que a preocupação de Krishna e Maenner (2001) recai sobre os dois passos do método proposto por Mirrlees (1971). Inicialmente, ao adotar técnicas de otimização não suave, eles resolvem a questão envolvendo a aplicação do Teorema do Envelope imediatamente. De fato, ao utilizar subgradientes no lugar de gradientes[35] a igualdade entre $\nabla V_i(\theta_i)$ e $\nabla U_i(\theta_i)$ passa a ser uma desigualdade e esta versão do Teorema torna-se menos restritiva que a tradicional. A seguir, os autores usam as mesmas técnicas para atingir seu principal objetivo, o Princípio da Equivalência de *Payoffs*. Para tal, note que a representação integral sob condições mais fracas (Teorema 38) é também utilizada.

A técnica utilizada por estes autores para permitir a ausência de diferenciabilidade é semelhante a de todos os outros trabalhos na literatura. Como se deseja deixar o mecanismo arbitrário, elimina-se a exigência de este ser diferenciável, mas adiciona-se hipóteses às outras funções ou conjuntos do problema. Em Krishna e Maenner (2001), em particular, a hipótese 35 não faz exigência alguma sobre o mecanismo, porém adiciona convexidade à utilidade e ao conjunto de tipos. Como comentado acima, convexidade da utilidade é uma hipótese frequentemente atendida em aplicações[36]. Da mesma forma, o conjunto de tipos dificilmente deixa de ser um cartesiano de intervalos da reta, logo, convexo.

Chung e Olszewski (2007) também tratam o Princípio da Equivalência de *Payoffs* com hipóteses mais fracas do que o restante da literatura, permitindo a ausência de diferenciabilidade no mecanismo[37]. Embora todos os seus resultados sejam obtidos para um único agente, os autores destacam que a generalização para modelos multi-agente é imediata, desde que a hipótese de que os tipos são não correlacionados seja assumida. A intenção do seu estudo é impor algumas condições suficientes no espaço de tipos a fim de que a equivalência de receitas seja válida quando o conjunto de escolha social consiste de

[35]O uso de gradientes, ou subgradientes, ao invés de derivadas caracteriza o ambeinte multi-agente considerado.
[36]Veja os muitos trabalhos aplicados citados no capítulo 1.
[37]Um trabalho na mesma linha é o de Ely (2001).

distribuições de probabilidade sobre um conjunto finito.

Comecemos por definir a estrutura sobre a qual Chung e Olszewski (2007) trabalham. Novamente, assumimos Θ como o espaço de tipos e X como o conjunto de alternativas sociais. Denotamos, ainda, ΔX como o conjunto de todas as distribuições de probabilidade sobre o conjunto X com suporte finito. Seja F um subconjunto arbitrário de ΔX. Como de costume, a utilidade do agente toma a forma quase-linear $u(\theta, x) - t$, onde θ é o tipo do agente, x é a alternativa social implementada e t é uma transferência monetária feita pelo agente. Como o agente é um maximizador de utilidade, denotamos por $u(\theta, \varphi)$ o valor esperado da função $u(\theta, x)$ quando a alternativa social é implementada com a distribuição de probabilidade $\varphi \in \Delta X$. A tripla (Θ, F, u) define o problema de desenho de mecanismo.

Uma função de escolha social (FES), nessa estrutura, é um mapa $f : \Theta \to F$ e uma regra de transferência é um mapa $t : \Theta \to \mathbb{R}$[38]. Logo, um mecanismo é um par (f, t), onde f é uma FES e t uma regra de transferência, como temos visto. Da mesma forma, o mecanismo é compatível em incentivos se para qualquer tipos $\theta, \hat{\theta} \in \Theta$,

$$u(\theta, f(\theta)) - t(\theta) \geq u(\theta, f(\hat{\theta})) - t(\hat{\theta}). \tag{113}$$

Dizemos que uma FES é compatível em incentivo se existe uma regra de transferência t tal que o mecanismo (f, t) seja compatível em incentivos.

Uma FES compatível em incentivos satisfaz o Princípio da Equivalência de Receitas se para qualquer dois mecanismos compatíveis em incentivos (f, t) e $(f, t^{'})$ existe uma constante tal que para todo $\theta \in \Theta$,

$$t^{'}(\theta) = t(\theta) + c. \tag{114}$$

Ainda com relação a estrutura, os autores definem uma topologia no espaço de tipos. Assumamos que não exista θ e $\hat{\theta}$ tal que $u(\theta, x) = u(\hat{\theta}, x)$ para todo $x \in X$. É possível fazer esta hipótese sem perda de generalidade, bem como assumir que, para todo espaço de tipos Θ, existe um subespaço $\hat{\Theta} \subset \Theta$ tal que para todo $\theta \in \Theta$ existe exatamente um $\hat{\theta} \in \hat{\Theta}$ tal que $u(\theta, x) = u(\hat{\theta}, x)$ para todo $x \in X$. Também é possível verificar que para todos os espaços $\hat{\Theta}$ e Θ, cada FES compatível em incentivos $f : \Theta \to F$ satisfaz o Pirincípio da Equivalência de Receitas se e somente se cada FES compatível incentivos $f : \hat{\Theta} \to F$ também o satisfizer.

Consideremos a norma-sup para o espaço Θ, ou seja, a distância de qualquer par $\theta, \hat{\theta} \in \Theta$ é dada por

$$dist(\theta, \hat{\theta}) = \sup_{x \in X} \left| u(\theta, x) - u(\hat{\theta}, x) \right|. \tag{115}$$

Aqui, podemos facilmente verificar que Θ equipado com a distância (115) é um espaço

[38]Perceba que é possível $F = X$, caso que exclui a aleatoriedade.

métrico. Em outras palavras, nós primeiros identificamos tipos com funções de valores reais $f \in \mathbb{R}^X$ que associam valores às alternativas sociais e, então, equipamos o espaço $\mathbb{R}^X$ com a norma-sup. Acrescentaremos as definições abaixo para chegarmos ao principal resultado de Chung e Olszewski (2007).

Definição 39 *(i) Um espaço métrico Θ é gridwise connected*[39] *entre os pontos θ e $\hat{\theta}$ se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \theta = \theta_0, ..., \theta_n = \hat{\theta}$, $\forall i = 1, ..., n$, $dist(\theta_i, \theta_{i-1}) < \varepsilon$.*

(ii) Se, ainda, existe uma constante M, independente de ε, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} dist(\theta_i, \theta_{i-1}) \leq M, \tag{116}$$

então o conjunto Θ é boundedly gridwise connected entre os pontos θ e $\hat{\theta}$.

Definição 40 *Um espaço métrico Θ é gridwise connected (respectivamente, boundedly gridwise connected) se é gridwise connected (respectivamente, boundedly gridwise connected) entre quaisquer pontos $\theta, \hat{\theta} \in \Theta$*[40]*.*

Teorema 41 *Suponha que $F = \Delta X$ para um conjunto finito X. Se o espaço de tipos Θ é boundedly gridwise connected, então toda FES compatível em incentivos $f : \Theta \to F$ satisfaz o Princípio da Equivalência de Receitas.*

A prova deste teorema utiliza a seguinte notação. Para qualquer par de vetores $x, y \in \mathbb{R}^X$, nós denotamos por $x \circ y$ o seu produto interno. Para uma FES $f : \Theta \to \Delta X$, cada $f(\theta)$ é um vetor de probabilidades associadas a todas as alternativas e, portanto, é um elemento de $\mathbb{R}^X$; também, toda $u(\theta, \cdot)$ é um elemento de $\mathbb{R}^X$. Pode-se, então, considerar o produto dos vetores $f(\theta)$ e $u(\theta, \cdot)$.

Lema 42 *(i) Para toda FES compatível em incentivos f e qualquer tipos $\theta, \hat{\theta} \in \Theta$,*

$$u(\theta, \cdot) \circ [f(\theta) - f(\hat{\theta})] \geq t(\theta) - t(\hat{\theta}) \geq u(\hat{\theta}, \cdot) \circ [f(\theta) - f(\hat{\theta})]. \tag{117}$$

(ii) Suponha que $\theta = \theta_0, ..., \theta_n = \hat{\theta}$. Sejam $(f, t^{'})$ e $(f, t^{''})$ mecanismos compatíveis em incentivos tais que $t^{'}(\theta) = t^{''}(\theta)$. Então,

$$\left| t^{'}(\hat{\theta}) - t^{''}(\hat{\theta}) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} [u(\theta_i, \cdot) - u(\theta_{i-1}, \cdot)] \circ [f(\theta_i) - f(\theta_{i-1})]. \tag{118}$$

[39] Manteremos algumas definições no inglês original, devido à falta de tradução adequada no protuguês.
[40] Conforme Chung e Olszewski (2007), conexidade implica *gridwise connectedness* e, se o espaço métrico é compacto, os dois conceitos são equivalentes.

Prova. (i) Pela compatibilidade de incentivos,

$$u(\theta,\cdot)\circ f(\theta)-t(\theta)\geq u(\theta,\cdot)\circ f(\hat{\theta})-t(\hat{\theta}) \tag{119}$$

e

$$u(\hat{\theta},\cdot)\circ f(\hat{\theta})-t(\hat{\theta})\geq u(\hat{\theta},\cdot)\circ f(\theta)-t(\theta). \tag{120}$$

Rearranjando, obtém-se (117).

(ii) De (i) sabemos que

$$\begin{aligned}
&\left|[t^{'}(\theta_i)-t^{''}(\theta_i)]-[t^{'}(\theta_{i-1})-t^{''}(\theta_{i-1})]\right| \\
=\ &\left|[t^{'}(\theta_i)-t^{'}(\theta_{i-1})]-[t^{''}(\theta_i)-t^{''}(\theta_{i-1})]\right| &(121)\\
\leq\ & u(\theta_i,\cdot)\circ[f(\theta_i)-f(\theta_{i-1})]-u(\theta_{i-1},\cdot)\circ[f(\theta_i)-f(\theta_{i-1})] &(122)\\
=\ & [u(\theta_i,\cdot)-u(\theta_{i-1},\cdot)]\circ[f(\theta_i)-f(\theta_{i-1})]. &(123)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left|t^{'}(\theta_n)-t^{''}(\theta_n)\right| \leq\ & \left|[t^{'}(\theta_n)-t^{''}(\theta_n)]-[t^{'}(\theta_{n-1})-t^{''}(\theta_{n-1})\right| \\
&+\left|[t^{'}(\theta_{n-1})-t^{''}(\theta_{n-1})]-[t^{'}(\theta_{n-2})-t^{''}(\theta_{n-2})]\right|+... \\
&+\left|[t^{'}(\theta_1)-t^{''}(\theta_1)]-[t^{'}(\theta_0)-t^{''}(\theta_0)]\right|+\left|[t^{'}(\theta_0)-t^{''}(\theta_0)]\right| \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{n}[u(\theta_i,\cdot)-u(\theta_{i-1})]\circ[f(\theta_i)-f(\theta_{i-1})]+\left|[t^{'}(\theta_0)-t^{''}(\theta_0)]\right| &(124)
\end{aligned}$$

Isto gera (118) ao fazermos $\theta=\theta_0$ e $\hat{\theta}=\theta_n$. ■

Prova. (Prova do Teorema 41) Suponha que $(f,t^{'})$ e $(f,t^{''})$ são compatíveis em incentivos. Escolha um par de pontos $\theta,\hat{\theta}\in\Theta$. Nós devemos mostrar que $t^{'}(\theta)=t^{''}(\theta)$ implica $t^{'}(\hat{\theta})=t^{''}(\hat{\theta})$, ou seja, se duas regras de transferência coincidem em um ponto, então elas coincidem em todos os pontos. Logo, quaisquer duas regras de transferências t e $t^{'}$ diferem por uma constante, porque se (f,t) é compatível em incentivos, então $(f,t^{''})$ também é, para todo $t^{''}$, dado por

$$t^{''}(\hat{\theta})=t(\hat{\theta})+[t^{'}(\theta)-t(\theta)] \tag{125}$$

$\forall\hat{\theta}\in\Theta$, para um $\theta\in\Theta$ fixo. Assim, $t^{'}(\hat{\theta})=t^{''}(\hat{\theta})$ e, então, $t^{'}(\hat{\theta})=t(\hat{\theta})+c$, onde $c=[t^{'}(\theta)-t(\theta)]$, para todo $\hat{\theta}\in\Theta$.

A prova aplica a seguinte idéia: por hipótese, existe uma sequência de pontos $\theta=\theta_0,...,\theta_n=\hat{\theta}$ com a propriedade que cada θ_i está a uma distância ε do seu predecessor. Se o número de pontos nesta sequência fosse limitado por um número independente de ε, o Teorema 41 seguiria imediatamente de (118); de fato, cada coordenada do termo [$\theta_i-\theta_{i-1}$]

pode ser feita tão pequena quanto desejamos e cada coordenada do termo $[f(\theta_i)-f(\theta_{i-1})]$ é limitada por 1. Entretanto, o número de pontos na sequência $\theta=\theta_0,...,\theta_n=\hat{\theta}$ não é limitado por um número independente de ε. Portanto, escolhemos uma subsequência da sequência $\theta=\theta_0,...,\theta_n=\hat{\theta}$ a qual o número de pontos é limitado por um número que depende somente do número de alternativas em X. Ao escolher essa sequência, acabamos por perder a propriedade que cada θ_i está a uma distância ε de θ_{i-1}. Contudo, podemos tomar nossa subsequência de maneira que sempre que θ_i não está a uma distância ϵ de θ_{i-1}, $f(\theta_i)$ é tão próximo de $f(\theta_{i-1})$ quanto desejamos.

Em outras palavras, tome qualquer número $k=1,2,....$ Nós devemos mostrar que

$$\left|t^{'}(\hat{\theta})-t^{''}(\hat{\theta})\right|\leq\frac{M+1}{k} \tag{126}$$

e, assim, conforme k se torna arbitrariamente grande,

$$t^{'}(\theta)=t^{''}(\theta)\Rightarrow t^{'}(\hat{\theta})=t^{''}(\hat{\theta}). \tag{127}$$

Para mostrar (126), escolhemos $\theta=\theta_0,...,\theta_n=\hat{\theta}\in\Theta$ satisfazendo a definição 39 (i) para $\varepsilon=\frac{1}{k^{m+1}}$, onde m denota o número de elementos de X. Represente o simplex $\Delta X\subset[0,1]^m$ como a união de k^m cubos P_i tal que quaisquer dois vetores de probabilidade $p,q\in P_i$ diferem no máximo por $\frac{1}{k}$ em cada cordenada, isto é, se $p=(p^1,...,p^m)$ e $q=(q^1,...,q^m)$, então $|p^j-q^j|\leq\frac{1}{k}$ para todo $j=1,...,m$.

Agora escolhemos uma sequência $\theta_0^{FIRST},\theta_0^{LAST},...,\theta_N^{FIRST},\theta_N^{LAST}$ consistindo dos elementos da sequência $\theta_0,...,\theta_n$ como definido a seguir. Escolha $\theta_0^{FIRST}=\theta_0$ e então tome qualquer P_{i0} tal que $f(\theta_0^{FIRST})\in P_{i0}$; seja θ_0^{LAST} o último elemento de $\theta_0,...,\theta_n$ com a propriedade que $f(\theta_0^{LAST})\in P_{i0}$. A seguir, tome como θ_1^{FIRST} o sucessor de θ_0^{LAST} na sequência $\theta_0,...,\theta_n$ e escolha qualquer P_{i1} tal que $f(\theta_1^{FIRST})\in P_{i1}$; como no primeiro passo, seja θ_1^{LAST} o último elemento de $\theta_0,...,\theta_n$ com a propriedade que $f(\theta_1^{LAST})\in P_{i1}$. Continue desta forma até θ_N^{FIRST}, θ_N^{LAST} tal que $\theta_N^{LAST}=\theta_n$ seja definido.

Se $t^{'}(\theta)=t^{''}(\theta)$, então, pelo Lema 42,

$$\begin{aligned}\left|t^{'}(\hat{\theta})-t^{''}(\hat{\theta})\right| &\leq \sum_{l=0}^{N}\left|[u(\theta_l^{LAST},\cdot)-u(\theta_l^{FIRST},\cdot)]\circ[f(\theta_l^{LAST})-f(\theta_l^{FIRST})]\right| \\ &+\sum_{l=1}^{N}\left|[u(\theta_l^{FIRST},\cdot)-u(\theta_{l-1}^{LAST},\cdot)]\circ[f(\theta_l^{FIRST})-f(\theta_{l-1}^{LAST})]\right|\end{aligned} \tag{128}$$

Por construção, $f(\theta_l^{LAST})$ e $f(\theta_l^{FIRST})$ diferem no máximo por $\frac{1}{k}$ em cada coordenada, então

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{N}\left|[u(\theta_l^{LAST},\cdot)-u(\theta_l^{FIRST},\cdot)]\circ[f(\theta_l^{LAST})-f(\theta_l^{FIRST})]\right| \\
\leq\ & \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{N}\sum_{j=1}^{m}\left|u_j(\theta_l^{LAST},\cdot)-u_j(\theta_l^{FIRST},\cdot)\right| && (129)\\
\leq\ & \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|u_j(\theta_i,\cdot)-u_j(\theta_i,\cdot)| && (130)\\
\leq\ & \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} dist(\theta_i,\theta_{i-1}) && (131)\\
\leq\ & \frac{M}{k}. && (132)
\end{aligned}$$

Dado que θ_{j-1}^{LAST} e θ_j^{FIRST} são elementos consecutivos da sequência $\theta_0,...,\theta_n$, a distância entre os dois não excede ε. Por construção, N não excede o número de conjuntos P_i. Portanto,

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{N}\left|[u(\theta_l^{FIRST},\cdot)-u(\theta_{l-1}^{LAST},\cdot)]\circ[f(\theta_l^{FIRST})-f(\theta_{l-1}^{LAST})]\right| \\
\leq\ & \sum_{l=1}^{N}\sum_{j=1}^{m}\left|u_j(\theta_l^{FIRST},\cdot)-u_j(\theta_{l-1}^{LAST},\cdot)\right| && (133)\\
\leq\ & k^m\varepsilon && (134)\\
=\ & \frac{1}{k}. && (135)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|t'(\hat{\theta})-t''(\hat{\theta})\right| \leq \frac{M}{k}+\frac{1}{k}. \tag{136}$$

■

Chung e Olszewski (2007) preferem impor hipóteses sobre o conjunto de tipos e deixar o mecanismo livre de qualquer restrição. Aqui, apresentamos apenas um dos seus resultados (o principal), mas os demais utilizam o mesmo argumento da conexidade do espaço de tipos. É importante notar que seu resultado é válido sob a hipótese adicional de que o conjunto de alternativas sociais X consiste de distribuições de probabilidades sobre um conjunto finito.

Milgrom e Segal (2002) são mais genéricos que Krishna e Maenner (2001) e Chung e Olszewski (2007) no que diz respeito à forma funcional da utilidade dos agentes e, consequentemente, às aplicações da teoria de desenho de mecanismos. No entanto, seus resultados são válidos apenas em ambientes com um único agente. Consideremos a seguinte estrutura. Seja X o conjunto de escolha e seja θ o parâmetro relevante, tal que $\theta \in [0,1]$.

Adicionalmente, deixe $f : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ denotar a função objetivo parametrizada, V a função valor e X^* a correspondência de escolha ótima (função avaliada no conjunto), então

$$V(\theta) = \sup_{x \in X} f(x,\theta) \tag{137}$$

$$X^*(\theta) = \{x \in X : f(x,\theta) = V(\theta)\} \tag{138}$$

Perceba que é possível ver $f(\cdot,\theta)$ como $u(\cdot;\theta)$ nas definições anteriores.

O primeiro resultado que apresentaremos é uma generalização do Teorema do Envelope para regras de escolha arbitrárias. Note, à frente, que em nenhum momento da demonstração será necessário impor diferenciabilidade sobre $x(\cdot)$. Contudo, perceba também que o Teorema é válido para θ unidimensional.

Teorema 43 *Tome $\theta \in [0,1]$ e $x^* \in X^*(\theta)$, e suponha que $f_\theta(x^*,\theta)$ existe. Se $\theta > 0$ e V é diferenciável pela esquerda em θ, então $V'(\theta-) \leq f_\theta(x^*,\theta)$. Se $\theta < 1$ e V é diferenciável pela direita em θ, então $V'(\theta+) \geq f_\theta(x^*,\theta)$. Se $\theta \in [0,1]$ e V é diferenciável em θ, então $V'(\theta) = f_\theta(x^*,\theta)$.*

Prova. Primeiro assuma que $0 < \theta < \theta_0$, tal que $V(\theta) \geq f(x,\theta)$, $\forall x \in X$ e $V(\theta_0) = f(x^*(\theta_0),\theta_0)$, $\forall x^*(\theta_0) \in X^*(\theta_0)$. Então

$$V(\theta) - V(\theta_0) \geq f(x,\theta) - f(x^*(\theta_0),\theta_0),\ \forall x \in X. \tag{139}$$

Em particular, (139) vale para $x = x^*(\theta_0)$, implicando

$$V(\theta) - V(\theta_0) \geq f(x^*(\theta_0),\theta) - f(x^*(\theta_0),\theta_0). \tag{140}$$

Dividindo ambos os lados por $\theta - \theta_0$, para $\theta < \theta_0$, obtém-se

$$\frac{V(\theta) - V(\theta_0)}{\theta - \theta_0} \leq \frac{f(x^*(\theta_0),\theta) - f(x^*(\theta_0),\theta_0)}{\theta - \theta_0} \tag{141}$$

e fazendo $\theta \to \theta_0^-$,

$$V'(\theta_0-) \leq f_t(x^*(\theta_0),\theta_0). \tag{142}$$

Assuma agora $\theta_0 < \theta < 1$. Então vale

$$\frac{V(\theta) - V(\theta_0)}{\theta - \theta_0} \geq \frac{f(x^*(\theta_0),\theta) - f(x^*(\theta_0),\theta_0)}{\theta - \theta_0} \tag{143}$$

e fazendo $\theta \to \theta_0^+$,

$$V'(\theta_0+) \geq f_t(x^*(\theta_0),\theta_0). \tag{144}$$

Por fim, note que se $V^{'}(\theta_0)$ existe, então

$$f_\theta(x^*(\theta_0), \theta_0) \leq V^{'}(\theta_0) \leq f_\theta(x^*(\theta_0), \theta_0), \tag{145}$$

implicando $V^{'}(\theta_0) = f_\theta(x^*(\theta_0), \theta_0)$. ■

Conforme Milgrom e Segal (2002) explicitam, o Teorema 43 é útil quando $V(\cdot)$ é bem comportada, tal como diferenciável, direcionalmente diferenciável ou absolutamente contínua. O seu segundo teorema fornece condições para a função valor ter essas propriedades. De fato, são impostas hipóteses sobre $f(x, \cdot)$ de tal maneira que $V(\cdot)$ seja absolutamente contínua. Dessa forma, ela é diferenciável quase-sempre e podemos escrevê-la como uma integral. Antes do resultado, porém, considere o lema abaixo, que será utilizado na prova do teorema.

Lema 44 *Assuma as hipóteses do Teorema 43, então para qualquer $\theta_1 > \theta_2$ e $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$,*

$$|V(\theta_1) - V(\theta_2)| \leq \sup_{x \in X} |f(x, \theta_1) - f(x, \theta_2)| . \tag{146}$$

Prova. Utilizando a definição de $V(\cdot)$,

$$\begin{aligned} V(\theta_1) - V(\theta_2) &= f(x(\theta_1), \theta_1) - f(x(\theta_2), \theta_2) \leq f(x(\theta_1), \theta_1) - f(x(\theta_1), \theta_2) && (147) \\ &\leq f(x(\theta_1), \theta_1) - f(x(\theta_1), \theta_2) && (148) \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x, \theta_1) - f(x, \theta_2)| . && (149) \end{aligned}$$

Da mesma maneira,

$$\begin{aligned} V(\theta_2) - V(\theta_1) &= f(x(\theta_2), \theta_2) - f(x(\theta_1), \theta_1) \leq f(x(\theta_2), \theta_2) - f(x(\theta_2), \theta_1) && (150) \\ &\leq f(x(\theta_2), \theta_2) - f(x(\theta_2), \theta_1) && (151) \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x, \theta_2) - f(x, \theta_1)| . && (152) \end{aligned}$$

Como $|f(x, \theta_1) - f(x, \theta_2)| = |f(x, \theta_2) - f(x, \theta_1)|$, o mesmo deve valer se aplicarmos o supremo de ambos os lados, $\sup_{x \in X} |f(x, \theta_1) - f(x, \theta_2)| = \sup_{x \in X} |f(x, \theta_2) - f(x, \theta_1)|$. Então,

$$|V(\theta_1) - V(\theta_2)| \leq \sup_{x \in X} |f(x, \theta_1) - f(x, \theta_2)| . \tag{153}$$

■

Teorema 45 *Suponha que $f(x, \cdot)$ seja absolutamente contínua para todo $x \in X$. Suponha também que exista uma função integrável $b : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ tal que $|f_\theta(x(\theta), \theta)| \leq b(\theta)$ para todo $x \in X$ e quase todo $\theta \in [0, 1]$. Então $V(\cdot)$ é absolutamente contínua. Suponha, além disso, que $f(x, \cdot)$ é diferenciável para todo $x \in X$, e que $X^* \neq \varnothing$ quase em todo $[0, 1]$. Então para qualquer seleção $x^*(\theta) \in X^*(\theta)$,*

$$V(\theta) = V(0) + \int_0^\theta f_\theta(x^*(s), s)ds. \tag{154}$$

Prova. Escolha $\theta^{'}$ e $\theta^{''}$ tal que $\theta^{'} \neq \theta^{''}$. Então pelo Lema 44 vale

$$\begin{aligned}
\left|V(\theta^{''}) - V(\theta^{'})\right| &\leq \sup_{x\in X}\left|f(x,\theta^{''}) - f(x,\theta^{'})\right| & (155)\\
&\leq \sup_{x\in X}\left|\int_{\theta^{'}}^{\theta^{''}} f_\theta(x,s)ds\right| & (156)\\
&\leq \sup_{x\in X}\int_{\theta^{'}}^{\theta^{''}} \left|f_\theta(x,s)\right| ds & (157)
\end{aligned}$$

pois $f(x,\cdot)$ é absolutamente contínua. Usando a existência da função b,

$$\left|V(\theta^{''}) - V(\theta^{'})\right| \leq \sup_{x\in X}\int_{\theta^{'}}^{\theta^{''}} b(s)ds. \tag{158}$$

Tomando o supremo acima, podemos aplicar o somatório e obter

$$\sum_{i=1}^{n}\left|V(\theta_i^{''}) - V(\theta_i^{'})\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\int_{\theta^{'}}^{\theta^{''}} b(s)ds, \tag{159}$$

o que implica que $V(\cdot)$ é absolutamente contínua.

Para a demonstração da segunda parte do teorema, note que $V^{'}(\cdot)$ existe, pois $V(\cdot)$ é absolutamente contínua. Então integrando chega-se a

$$V(\theta) = V(0) + \int_0^\theta V^{'}(s)ds, \tag{160}$$

mas do Teorema 43 sabemos que $V^{'}(\theta) = f_\theta(x^*(\theta),\theta)$. Logo,

$$V(\theta) = V(0) + \int_0^\theta f_\theta(x^*(s), s)ds, \tag{161}$$

como queria-se demonstrar. ■

O trabalho de Milgrom e Segal (2002) consegue obter resultados com ausência de diferenciabilidade para os dois passos da abordagem de Mirrlees (1971). Tanto o Teorema do Envelope quanto a representação integral são obtidas para mecanismos arbitrários. Perceba que aqui as hipóteses são colocadas na função objetivo $f(x, \cdot)$, deixando o mecanismo x livre (o conjunto de tipos é assumido ser o intervalo $[0, 1]$). Como já comentado acima, contudo, seus teoremas são válidos para θ unidimensional. Krishna e Maenner (2001) e Chung e Olszewski (2007) obtém resultados para modelos multi-agente, mas acabam não permitindo qualquer forma funcional para a utilidade do agente. Para superar tal lacuna, no próximo capítulo nós generalizamos os resultados de Milgrom e Segal (2002) para o caso de mais de um agente, permitindo, assim, a presença de utilidades arbitrárias, com relação a sua forma funcional, em modelos multi-agente.

4 Teoremas do Envelope Generalizados para Espaços de Tipo Multidimensionais

Neste capítulo generalizaremos o Teorema do Envelope para obter um resultado que possa ser aplicado em modelos com múltiplos agentes. Além disso, permitiremos que as preferências possuam qualquer forma funcional e, principalmente, que os mecanismos possam ser descontínuos ou não diferenciáveis. Para obter esta generalização adicionamos a hipótese de compacidade do conjunto de escolha, porém argumentamos que esta não é uma exigência muito forte, porque dificilmente é violada em aplicações. Como veremos à frente, a união destas três desejáveis propriedades, não diferenciabilidade, preferências arbitrárias e aplicabilidade a ambientes multi-agente, faz com que nosso resultado preencha uma importante lacuna na literatura.

Adicionalmente, identificamos condições para que a função valor seja absolutamente contínua e mostramos que sua representação integral também é válida para espaços de tipos multidimensionais na ausência de diferenciabilidade. Neste sentido, nosso primeiro resultado é uma generalização direta de Milgrom e Segal (2002). Contudo, este teorema exige que a função de utilidade do agente ($f(\cdot;\theta)$) seja absolutamente contínua. Como argumentaremos à frente, esta hipótese possui pouco significado econômico, quando pensada em termos de aplicações. Além disso, Chung e Olszewski (2007), em sua aplicação ao Princípio da Equivalência de Receitas, a consideram pouco elegante. Por estes motivos, impomos uma restrição adicional à utilidade do agente e obtemos o mesmo resultado da generalização anterior. Nossa restrição possui interpretação econômica e é pouco provável de ser violada em aplicações.

4.1 Teorema do Envelope Generalizado

Nosso primeiro resultado diz respeito à diferenciabilidade da função valor e à forma de sua derivada. O resultado abaixo generaliza o Teorema 1 de Milgrom e Segal (2002) (Teorema 43 acima). Entretanto, nós o estabelecemos somente considerando diferenciabilidade, não focando em derivadas laterais.

Teorema 46 *Suponha que $f : X \times \Theta \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua, com X sendo um subconjunto compacto de um espaço de Banach $(\Omega, \|\cdot\|)$ e $\Theta = \times_{i=1}^{I}[0,1]$, e suponha também que $\nabla_\theta f : X \times \Theta \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^I$ seja seu gradiente contínuo. Então a função valor*

$$V(\theta) = f(x^*(\theta), \theta) = \sup_{x \in X} f(x, \theta), \tag{162}$$

$V : \Theta \subseteq \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$, é diferenciável e $\nabla_\theta V(\theta) = \nabla_\theta f(x^*(\theta), \theta)$, onde $x^*(\theta) \in \arg\max(\theta)$.

Prova. Dado que X é compacto, então a correspondência $g : \Theta \to \mathbb{R}^n$, $\theta \longmapsto g(\theta) = X$ é valor-compacta e hemicontínua e o Teorema do Máximo de Berge se aplica. Portanto, $V(\theta) = \sup_{x \in X} f(x, \theta)$ é contínua em $\theta \in \Theta$ e $\arg\max(\theta) = \{x \in X | f(x, \theta) = V(\theta)\}$ é hemicontínua superior e valor-compacto. Usando a hemicontinuidade superior de $\arg\max(\theta)$, temos que para todo conjunto aberto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\arg\max(\theta_0) \subseteq W$, existe uma vizinhança aberta U de θ_0 tal que se $\theta \in U$, então o $\arg\max(\theta) \subseteq W$.

Agora, usamos a continuidade de $\nabla_\theta f(x, \theta)$. Para dado $\varepsilon > 0$, existe δ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ e $\|\theta - \theta_0\| < \delta \Rightarrow \|\nabla_\theta f(x, \theta) - \nabla_\theta f(x_0, \theta_0)\| < \varepsilon$. Para cada $x \in \arg\max(\theta)$ considere a bola aberta $B_\delta(x^*(\theta))$ e seja $W = \bigcup B_\delta(x^*(\theta))$. Isto implica que existe algum δ' tal que $\|\theta - \theta_0\| < \delta' \Rightarrow \arg\max(\theta) \subseteq W$. Logo, se $x^*(\theta) \in \arg\max(\theta)$ então existe $x^*(\theta_0) \in \arg\max(\theta_0)$ tal que $\|x^*(\theta) - x^*(\theta_0)\| < \delta$. Dessa forma, se $\|\theta - \theta_0\| < \min(\delta, \delta')$, então para todo $x^*(\theta) \in \arg\max(\theta)$ existe $x^*(\theta_0) \in \arg\max(\theta_0)$ de maneira que $\|\nabla_\theta f(x^*(\theta), \theta) - \nabla_\theta f(x^*(\theta_0), \theta_0)\| < \varepsilon$.

Além disso, observe que

$$
\begin{aligned}
V(\theta) - V(\theta_0) &= f(x^*(\theta), \theta) - f(x^*(\theta_0), \theta_0) && (163)\\
&\leq f(x^*(\theta), \theta) - f(x^*(\theta), \theta_0) && (164)\\
&\leq \nabla_\theta f(x^*(\theta), \overline{\theta})(\theta - \theta_0) && (165)\\
& \quad V(\theta) - V(\theta_0) - \nabla_\theta f(x^*(\theta_0), \theta_0)(\theta - \theta_0) && \\
&\leq \left(\nabla_\theta f(x^*(\theta), \overline{\theta}) - \nabla_\theta f(x^*(\theta_0), \theta_0)\right)(\theta - \theta_0), && (166)
\end{aligned}
$$

para algum $\overline{\theta}$ entre θ e θ_0, onde na terceira desigualdade usamos o Teorema do Valor Médio.

Da mesma maneira,

$$
\begin{aligned}
V(\theta) - V(\theta_0) &\geq f(x^*(\theta_0), \theta) - f(x^*(\theta_0), \theta_0) && (167)\\
&\geq \nabla_\theta f(x^*(\theta_0), \overline{\overline{\theta}})(\theta - \theta_0) && (168)\\
& \quad V(\theta) - V(\theta_0) - \nabla_\theta f(x^*(\theta_0), \theta_0)(\theta - \theta_0) && \\
&\geq \left(\nabla_\theta f(x^*(\theta_0), \overline{\overline{\theta}}) - \nabla_\theta f(x^*(\theta_0), \theta_0)\right)(\theta - \theta_0), && (169)
\end{aligned}
$$

para algum $\overline{\overline{\theta}}$ entre θ e θ_0.

Podemos combinar (166) e (169) tal que

$$
\begin{aligned}
|V(\theta)-V(\theta_0)-\nabla_\theta f(x^*(\theta_0),\theta_0)(\theta-\theta_0)| &\leq \left|\left(\nabla_\theta f(x^*(\theta),\overline{\theta})-\nabla_\theta f(x^*(\theta_0),\theta_0)\right)(\theta-\theta_0)\right| \\
&+\left|\left(\nabla_\theta f(x^*(\theta_0),\overline{\overline{\theta}})-\nabla_\theta f(x^*(\theta_0),\theta_0)\right)(\theta-\theta_0)\right| && (170)\\
&\leq \left\|\nabla_\theta f(x^*(\theta),\overline{\theta})-\nabla_\theta f(x^*(\theta_0),\theta_0)\right\|\|\theta-\theta_0\| \\
&+\left\|\nabla_\theta f(x^*(\theta_0),\overline{\overline{\theta}})-\nabla_\theta f(x^*(\theta_0),\theta_0)\right\|\|\theta-\theta_0\| && (171)\\
\frac{\|V(\theta)-V(\theta_0)-\nabla_\theta f(x^*(\theta_0),\theta_0)(\theta-\theta_0)\|}{\|\theta-\theta_0\|} &\leq \left\|\nabla_\theta f(x^*(\theta),\overline{\theta})-\nabla_\theta f(x^*(\theta_0),\theta_0)\right\| \\
&+\left\|\nabla_\theta f(x^*(\theta_0),\overline{\overline{\theta}})-\nabla_\theta f(x^*(\theta_0),\theta_0)\right\|. && (172)
\end{aligned}
$$

Então para $\|\theta-\theta_0\|<\delta$,

$$
\frac{\|V(\theta)-V(\theta_0)-\nabla_\theta f(x^*(\theta_0),\theta_0)(\theta-\theta_0)\|}{\|\theta-\theta_0\|}<2\varepsilon. \tag{173}
$$

Isto implica que V é diferenciável e $\nabla_\theta V(\theta)=\nabla_\theta f(x^*(\theta),\theta)$. ■

O primeiro ponto a notar no teorema acima é o de que nossas hipóteses são mais fortes do que as de Milgrom e Segal (2002). De fato, compacidade de X e continuidade de $\nabla_\theta f(x,\theta)$ não são necessárias para a obtenção dos resultados para espaços de tipos unidimensionais[41] Portanto, perdemos em generalidade quando expandimos os resultados para ambientes multi-agente, no sentido de não permitir uma estrutura arbitrária para o conjunto de escolha X. Observe também que o teorema não impõe qualquer hipótese sobre a regra de escolha $x(\cdot)$, o deixando ser não diferenciável ou descontínuo. Entretanto, existe um número maior de hipóteses sobre $f(\cdot)$ do que nos modelos de desenho de mecanismo tradicionais, no que diz respeito a certas regularidades.

Pode parecer forte impor a hipótese da compacidade de X, porém sua necessidade é justificada pelo uso do Teorema do Máximo de Berge. Adicionalmente, é difícil imaginar em aplicações algum conjunto de escolha não limitado ou aberto. Em modelos de leilões, por exemplo, o conjunto de escolha contém todas as funções de probabilidade e de pagamento. Assim, no caso de não ser limitado, não existem números reais K_1 e K_2 tais que $K_1 \leq x_i(\cdot) \leq K_2$, para todo i. Dessa forma, o valor assumido pela regra de escolha $x_i(\cdot)$ pode crescer indefinidamente. Em nosso exemplo, isto significa que o valor pago pelos compradores ao vendedor poderia ser infinito (a função de probabilidade é sempre limitada entre 0 e 1). Isto implicaria que a utilidade do vendedor também cresceria para o infinito, algo extremamente irreal. Em todas outras aplicações, uma situação como esta, de fato, não faria sentido, pois, em geral, a Economia tem a característica de suas

[41] Da mesma maneira, $X \subseteq (\Omega,\|\cdot\|)$, onde $(\Omega,\|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, não é necessário quando o tipo do agente é um escalar. Contudo, a inclusão da norma não é uma hipótese restritiva e, por não possuir significado econômico relevante, não a trataremos em detalhe.

variáveis serem limitadas a intervalos[42].

A hipótese da continuidade de $\nabla_\theta f(x,\theta)$ é necessária para $\|\nabla_\theta f(x,\theta) - \nabla_\theta f(x_0,\theta_0)\| < \varepsilon$. Um ponto importante aqui é que o gradiente deve ser contínuo tanto em $x(\cdot)$ quanto em θ, porque precisamos que conforme $x \to x_0$ e $\theta \to \theta_0$, então $\nabla_\theta f(x,\theta) \to \nabla_\theta f(x(\theta_0),\theta_0)$. Novamente, perceba que todas as hipóteses são impostas em $f(\cdot)$, deixando o mecanismo livre para assumir qualquer estrutura. Esta é uma grande vantagem relacionada a outros estudos, como Carter (2001), por exemplo. Este autor, para generalizar os resultados de Milgrom e Segal (2002), exige continuidade de $x(\cdot)$. Portanto, seus teoremas não se aplicam a mecanismos não diferenciáveis e descontínuos e são quase os mesmos do Teorema do Envelope tradicional. Por fim, embora tenhamos assumido $\Theta = \times_{i=1}^{I}[0,1]$, pode-se notar que a generalização para $\Theta = \times_{i=1}^{I}[a,b]$, a, $b \in \mathbb{R}$, é direta.

4.2 Alguns Resultados sobre a Representação Integral da Função Valor

Como no caso unidimensional, o teorema acima somente é útil no caso de $V(\cdot)$ ser bem comportada. Nosso próximo teorema obtem condições para tal, e mostra que a função valor pode ser representada por uma integral. É importante destacar que novamente utilizamos, por simplificação, $\Theta = \times_{i=1}^{I}[0,1]$, mas a generalização para um cartesiano de intervalos qualquer da reta continua sendo direta. O lema abaixo, uma generalização do Lema 44, será utilizado na prova.

Lema 47 *Assuma as hipóteses do Teorema 46, então para qualquer $\theta_1 > \theta_2$ e $\theta_1, \theta_2 \in \Theta = \times_{i=1}^{I}[0,1]$,*

$$|V(\theta_1) - V(\theta_2)| \leq \sup_{x\in X} |f(x,\theta_1) - f(x,\theta_2)|\,. \tag{174}$$

Prova. Veja a demonstração do Lema 44, considerando θ_1 e θ_2 como vetores. ∎

Teorema 48 *Suponha que $f(x,\theta)$ é absolutamente contínua para todo $x \in X$. Suponha também que existe uma função integrável $b : \Theta = \times_{i=1}^{I}(0,1) \to \mathbb{R}_+$ tal que $\left|\frac{\partial f(x,\theta_1,...,\theta_I)}{\partial \theta_i}\right| \leq b(\theta_1,...,\theta_I)$ para todo $x \in X$, todo $i = 1,...,I$ e quase todo $(\theta_1,...,\theta_I) \in \Theta$. Então V é absolutamente contínua. Suponha, adicionalmente, que $f(x,\cdot)$ é diferenciável para todo $x \in X$ e que $X^*(\theta_1,...,\theta_I) \neq \varnothing$ quase-sempre em Θ. Então para qualquer seleção $x^*(\theta_1,...,\theta_I) \in X^*(\theta_1,...,\theta_I)$,*

$$V(\theta_1,\theta_2,...,\theta_I) = V(0,..,0) + \sum_{i=0}^{I} \int_0^{\theta_i} \frac{\partial f}{\partial \theta_i}(x,s)ds. \tag{175}$$

[42] Não damos ênfase ao fato de estarmos excluindo conjunto de escolhas abertos devido a dificuldade de imaginar suas implicações práticas.

Prova. Tomando $\theta^1 = (\theta_1, ...\theta_j^{''}, ..., \theta_I)$ e $\theta^2 = (\theta_1, ...\theta_j^{'}, ..., \theta_I)$, pelo Lema 47 sabemos que

$$\begin{aligned}
& \left| V(\theta_1, ...\theta_j^{''}, ..., \theta_I) - V(\theta_1, ...\theta_j^{'}, ..., \theta_I) \right| \\
\leq & \sup_{x \in X} \left| f(x, \theta_1, ...\theta_j^{'}, ..., \theta_I) - f(x, \theta_1, ...\theta_j^{''}, ..., \theta_I) \right| && (176) \\
\leq & \sup_{x \in X} \left| \int_{\theta_j^{'}}^{\theta_j^{''}} \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(x, s) ds \right| && (177) \\
\leq & \sup_{x \in X} \int_{\theta_j^{'}}^{\theta_j^{''}} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta_j}(x, s) \right| ds && (178) \\
\leq & \int_{\theta_j^{'}}^{\theta_j^{''}} b(s) ds. && (179)
\end{aligned}$$

Isto implica que V é absolutamente contínua. Portanto, $\frac{\partial V}{\partial \theta_j}$ existe quase-sempre e podemos escrever

$$V(\theta_1, ...t_j, ..., \theta_I) = V(\theta_1, ..., 0, ..., \theta_I) + \int_0^{\theta_j} \frac{\partial V}{\partial \theta_j}(x, s) ds, \tag{180}$$

onde 0 está na $j - ésima$ componente do vetor θ do lado direito da equação. É possível fazer o mesmo para cada componenete θ_j. Para ver isso, suponha que $j = I$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
V(\theta_1, ..., \theta_I) &= V(\theta_1, ..., \theta_{I-1}, 0) + \int_0^{\theta_I} \frac{\partial V}{\partial \theta_I}(x, s) ds && (181) \\
&= V(\theta_1, ..., \theta_{I-2}, 0, 0) + \int_0^{\theta_{I-1}} \frac{\partial V}{\partial \theta_{I-1}}(x, s) ds + \int_0^{\theta_I} \frac{\partial V}{\partial \theta_I}(x, s) ds && (182) \\
& \vdots && (183) \\
&= V(\theta_1, ..., \theta_k) = V(0, .., 0) + \sum_{i=1}^{I} \int_0^{\theta_i} \frac{\partial V}{\partial \theta_i}(x, s) ds. && (184)
\end{aligned}$$

Se $f(x, \theta)$ é diferenciável em θ, $\frac{\partial V}{\partial \theta_i}(x, s) ds$ é dado pelo Teorema 46 sempre que existir, então

$$V(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_I) = V(0, .., 0) + \sum_{i=1}^{I} \int_0^{\theta_i} \frac{\partial f}{\partial \theta_i}(x, s) ds. \tag{185}$$

■

Neste segundo teorema não precisamos fazer mais hipótese do que aquelas já feitas por Milgrom e Segal (2002) em seu Teorema 2. Seguindo o padrão do Teorema 46, impomos estrutura somente em $f(\cdot)$ e continuamos permitindo que $x(\cdot)$ seja arbitrário. Além da continuidade absoluta de $V(\cdot)$, o teorema também mostra que o segundo passo da abordagem de Mirrlees (1971) para resolução de problemas de desenho de mecanismo, a representação integral, é válida em modelos com mais de um agente.

A necessidade de impor continuidade absoluta[43] é destaca por Milgrom e Segal (2002) ao comentar o fato de que a função valor ser diferenciável quase-sempre não implica que ela iguale a integral de sua derivada. Uma possibilidade que não é excluída, neste caso, é a de a função valor ser descontínua. Em geral, a diferenciabilidade quase-sempre é obtida em aplicações usando a monotonicidade da regra de escolha e a representação integral usa formas funcionais específicas para ser obtida. Myerson (1981), por exemplo, usa uma estrutura de preferências lineares. Logo, é evidente a importância dos resultados obtidas nesta subseção, já que obtemos a diferenciabilidade quase-sempre de $V(\cdot)$ e sua representação integral permitindo uma forma genérica para a função utilidade.

Além da falta de elegância, argumentada por Chung e Olszewski (2007) e citada no início deste capítulo, a hipótese de que $f(\cdot;\theta)$ é absolutamente contínua não possui muito significado econômico. Em qualquer aplicação em desenho de mecanismos que pensarmos, $f(\cdot;\theta)$ representa a utilidade do agente. Então, pela definição de continuidade absoluta, essa hipótese não diz nada diretamente sobre o problema. O que se pode concluir da inclusão da continuidade absoluta decorre de alguns outros resultados. Por exemplo, como toda função absolutamente contínua é de variação limitada, podemos concluir que a utilidade também o é. Esta conclusão possui interpretação econômica, dado que não faz sentido que um agente possua uma utilidade com variação infinita.

Outra conclusão da introdução da hipótese de continuidade absoluta da função de utilidade do agente é a de que a sua derivada existe quase-sempre. Ora, intutivamente, a utilidade marginal do tipo do agente, $\frac{df}{d\theta}$, deve existir em todo o domínio. Quando pensamos em alguma aplicação, qualquer que seja o valor de θ escolhido pelo agente deve gerar uma variação local na sua utilidade. A possibilidade de não existir uma variação para determinado tipo existe, mas é pouco provável em aplicações. Logo, a imposição da hipótese de existência da derivada em todo o domínio parece ser razoável. Isto é o que faremos abaixo, mas antes precisaremos de alguns resultados auxiliares.

Lema 49 *Seja $f : X \to [0,+\infty]$ uma função mensurável, então existe uma sequência (φ_n) de funções simples, tal que $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$.*

Prova. Começamos por definir os seguintes conjuntos:

$$E_1 = \{x \in X | f(x) \geq 1\} \tag{186}$$

$$E_2 = \left\{x \in X | f(x) \geq \frac{1}{2} + \chi_{E_1}(x)\right\} \tag{187}$$

$$\vdots \tag{188}$$

$$E_k = \left\{x \in X | f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \chi_{E_j}(x)\right\}, \tag{189}$$

[43]Veja também sua justificativa do uso do limite integrável $b(\theta_1, ..., \theta_I)$.

para $k \geq 2$ e onde $\chi_{E_j}(\cdot)$ é a função característica do conjunto E_j. Note que por E_1 ser mensurável, E_2 também o é, pois podemos escrever $f(x) - \chi_{E_1}(x) \geq 1$. Fazendo o mesmo raciocínio, obtemos que E_k é mensurável para todo k.

Definamos agora a função $\varphi_k(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x)$. Claramente, $\varphi_k(\cdot)$ é monótona não-decrescente, pois $\varphi_k(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x) \leq \varphi_{k+1}(x) = \sum\limits_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x)$. Necessitamos mostrar que $\varphi_k(x) \leq f(x)$.

Suponhamos por absurdo que $\varphi_k(x) > f(x)$. Dessa forma, existe k_0 e $x^{'}$ tais que $0 \leq f(x^{'}) < \varphi_{k_0}(x^{'})$, implicando $\varphi_{k_0}(x^{'}) = \sum\limits_{j=1}^{k_0} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x^{'}) > 0$. Logo, $x^{'} \in E_j$ para algum $1 \leq j \leq k_0$. Seja $k^{'} = \max_{x^{'} \in E_j} j$. Se $k^{'} = 1$, então $f(x^{'}) \geq 1 = \varphi_{E_1}(x^{'})$. Da mesma forma, se $k \geq 2$ teremos que $x^{'} \in E_{k^{'}}$, tal que

$$f(x^{'}) \geq \frac{1}{k^{'}} + \sum_{j=1}^{k^{'}-1} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x^{'}) = \sum_{j=1}^{k^{'}} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x^{'}) = \varphi_{k^{'}}(x^{'}). \tag{190}$$

Portanto, temos que $f(x^{'}) \geq \varphi_{k^{'}}(x^{'})$ e $k^{'} < k_0$, pois por hipótese $f(x^{'}) < \varphi_{k_0}(x^{'})$. Usando as definições,

$$0 \leq f(x^{'}) - \varphi_{k^{'}}(x^{'}) = f(x^{'}) - \sum_{j=1}^{k^{'}} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x^{'}) \tag{191}$$

$$< \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x^{'}) - \sum_{j=1}^{k^{'}} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x^{'}) \tag{192}$$

$$= \sum_{j=k^{'}+1}^{k_0} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x^{'}). \tag{193}$$

Mas o fato de $0 < \sum\limits_{j=k^{'}+1}^{k_0} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x^{'})$ implica que existe um $k^{''} > k^{'}$ tal que $x^{'} \in E_{k^{''}}$, o que contraria nossa hipótese inicial de que $k^{'}$ era o máximo. Assim, $\varphi_k(x) \leq f(x)$.

Resta demonstrar que $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$. No caso de $f(x) = +\infty$, $x \in E_j$ para todo j, tal que $\varphi_n(x) = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Quando $f(x) < +\infty$, não pode existir N tal que $x \in E_j$, para todo $j \geq N$, pois caso contrário $\varphi_j(x) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + ... + \frac{1}{j} \to \infty$. Logo, existe k_m tal que $x \notin E_j$ para $j \geq k_m$. Dessa forma,

$$f(x) < \frac{1}{k_m} + \sum_{j=1}^{k_m-1} \frac{1}{j}\chi_{E_j}(x) \tag{194}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) - \varphi_{k_{m-1}}(x) < \frac{1}{k_m} \tag{195}$$

$$\Rightarrow \varphi_{k_{m-1}}(x) \to f(x). \tag{196}$$

Como $\varphi_n(x)$ é monótona, então temos $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$. ■

O teorema abaixo é uma versão modificada do resultado conhecido como Teorema de Vitali-Carathéodory e será utilizado na demostração do teorema subsequente.

Teorema 50 *Seja $f : X \to [-\infty, +\infty]$ mensurável, então para todo $\varepsilon > 0$ existe u e v, tais que $u \leq f \leq v$ e*

$$\int_X (f - u) d\mu < \varepsilon \tag{197}$$

e

$$\int_X (v - f) d\mu < \varepsilon, \tag{198}$$

onde u é semicontínua superior e v semicontínua inferior.

Prova. Comecemos para $f(x) \geq 0$. Usando o lema anterior, podemos escrever $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{E_j}(x)$. Como os conjuntos E_j são mensuráveis, para todo $\varepsilon > 0$, existe um U_j aberto tal que $E_j \subseteq U_j$ e $\mu(U_j \backslash E_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$, onde μ é a medida de Lebesgue. Dessa maneira, podemos definir

$$v(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{U_j}(x) \tag{199}$$

e verificar que $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{E_j}(x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{U_j}(x) = v(x) = v$.

Como cada U_j é aberto, então $\frac{1}{j} \chi_{U_j}(x)$ e $v(x)$ são semicontínuas inferiores, pois uma série de semicontínuas inferiores também é semicontínua inferior.

Nos resta obter (197). Temos que

$$\begin{aligned} \int_X (v - f) d\mu &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \mu(U_j \backslash E_j) && (200) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{\varepsilon}{2^j} < \varepsilon. && (201) \end{aligned}$$

Passemos a (198). Para cada E_j, também, existe K_j fechado tal que $K_j \subseteq E_j$ e $\mu(E_j \backslash K_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Fazendo o mesmo raciocínio anterior,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{K_j}(x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{E_j}(x) = f(x) \tag{202}$$

e integrando

$$\int_X \left(f - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{K_j}(x) \right) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \mu(E_j \backslash K_j) < \varepsilon. \tag{203}$$

Note que é possível escolhermos um $N < \infty$ tal que

$$\int\limits_X \left(f - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \chi_{K_j}(x) \right) d\mu < \varepsilon. \tag{204}$$

Definindo

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \chi_{K_j}(x), \tag{205}$$

temos que $u(x)$ é semicontínua superior, pois K_j é fechado. Então,

$$\int\limits_X (f - u) d\mu < \varepsilon. \tag{206}$$

Para o caso geral, com $-\infty \leq f(x) \leq +\infty$, separemos f em sua parte positiva e negativa, $f = f^+ - f^-$. Como as duas partes são não-negativas, devem existir $u^+ \leq f^+ \leq v^+$ e $u^- \leq f^- \leq v^-$, onde as funções u's são semicontínuas superiores e as v's semicontínuas inferiores. Ao trocarmos o sinal das funções com superescrito representando a parte negativa, temos $-v^- \leq -f^- \leq -u^-$, onde $-u^-$ é semicontínua inferior e $-v^-$ é semicontínua superior. Logo,

$$\hat{u} = u^+ - v^- \leq f \leq v^+ - u^- = \hat{v}. \tag{207}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int\limits_X (f - \hat{u}) d\mu &= \int\limits_X \big((f^+ - f^-) - (u^+ - v^-) \big) d\mu && (208) \\
&= \int\limits_X (f^+ - u^+) d\mu + \int\limits_X (v^- - f^-) d\mu && (209) \\
&< 2\varepsilon && (210)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int\limits_X (\hat{v} - f) d\mu &= \int\limits_X \big((v^+ - u^-) - (f^+ - f^-) \big) d\mu && (211) \\
&= \int\limits_X (v^+ - f^+) d\mu + \int\limits_X (f^- - u^-) d\mu && (212) \\
&< 2\varepsilon. && (213)
\end{aligned}$$

■

Agora enunciamos e demostramos o resultado que garante a representação integral (161) utilizando a existência da derivada em todo domínio de f.

Teorema 51 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em todo o domínio e seja $f' \in L^1([a,b])$, então*

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) \tag{214}$$

e f é absolutamente contínua.

Prova. Do Teorema (50) sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma função semicontínua inferior v tal que $f' \leq v$. Escolhendo adequadamente uma constante $c > 0$, existe $g = v + c$ semicontínua inferior tal que $f' < g$ e $\int_a^b g(t)dt < \int_a^b f'(t)dt + \varepsilon$.

Para todo $\eta > 0$ definamos

$$F_\eta(x) = \int_a^x g(t)dt - f(x) + f(a) + \eta(x-a), \tag{215}$$

com $a \leq x \leq b$.

Seja $x \in [a,b)$. Como $f'(x) < g(x)$ e $g(\cdot)$ é semicontínua inferior, então existe $(x, x+\delta)$ tal que $t \in (x, x+\delta)$ implica que $f'(x) < g(t)$ e

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} < f'(x) + \eta, \tag{216}$$

pois $f(\cdot)$ é derivável em x.

Adicionalmente temos que

$$\begin{aligned} F_\eta(t) - F_\eta(x) &= \int_x^t g(s)ds - (f(t) - f(x)) + \eta(t-x) & (217)\\ &> f'(x)(t-x) - (f'(x) + \eta)(t-x) + \eta(t-x) & (218)\\ &= 0. & (219) \end{aligned}$$

Como $F_\eta(a) = 0$ e $F_\eta(\cdot)$ é contínua, podemos definir $x^* = \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ F_\eta(x)=0}}$. Se $x^* < b$, então pelo cálculo acima temos $F_\eta(t) > 0$ para $t \in (x, b]$. Dessa forma, $F_\eta(b) \geq 0$. Usando a definição (215) temos

$$F_\eta(b) = \int_a^b g(t)dt - f(b) + f(a) + \eta(b-a) \geq 0 \tag{220}$$

e fazendo $\eta \to 0^+$

$$\int_a^b g(t)dt \geq f(b) - f(a) \quad (221)$$

$$\int_a^b f'(t)dt + \varepsilon > f(b) - f(a), \quad (222)$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$,

$$\int_a^b f'(t)dt \geq f(b) - f(a). \quad (223)$$

Ao repetirmos o processo para $-f'$, obteremos

$$\int_a^b -f'(t)dt \geq (-f(b)) - (-f(a)) \quad (224)$$

$$\int_a^b f'(t)dt \leq f(b) - f(a). \quad (225)$$

Além disso, pelo Teorema de Lebesgue, se f' existe quase-sempre e é integrável e $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$, então f é absolutamente contínua. ■

Note que toda a demonstração foi feita para o caso unidimensional, contudo a generalização é imediata se exigirmos a existência de $\frac{\partial f}{\partial \theta_i}$ em todo domínio (neste caso, $\Theta = \times_{i=1}^{I}[a,b]$) e que $\frac{\partial f}{\partial \theta_i} \in L^1([a,b])$ para todo $i = 1, ..., I$. Com estas hipóteses, obteríamos que $V(\theta_1, ..., \theta_I)$ é absolutamente contínua e, dessa forma, parte do processo de demonstração do Teorema 48 seria a mesma, finalizando com a expressão (175). Portanto, nossos resultados não são diferentes daqueles de Milgrom e Segal (2002), generalizados no Teorema 48. A grande diferença está nas hipóteses adotadas em cada caso.

Perceba também que ao incluirmos a hipótese de direnciabilidade em todo o domínio, não estamos preocupados em generalizar a estrutura de f, pois continuidade absoluta é menos exigente (possuir derivada quase-sempre) do que a hipótese que utilizamos, existência da derivada "sempre". Ao contrário, nosso objetivo é fornecer uma condição mais intuitiva e com maior interpretação econômica. De fato, $\frac{\partial f}{\partial \theta_i}$ existir para todo θ_i não significa nada além de o agente obter uma variação na sua utilidade quando mudar localmente seu tipo reportado, qualquer que seja este tipo. Além disso, ao exigirmos que $f' \in L^1([a,b])$, não estamos impondo hipóteses adicionais àquelas já feitas por Milgrom e Segal (2002), quando usam a função integrável $b(\theta)$ como limitante superior da derivada.

Para finalizar, é importante destacar que os resultados obtidos aqui são mais gerais dos que o de Krishna e Maenner (2001) e Chung e Olszewski (2007), pois não assumimos uma forma específica para a utilidade, enquanto estes trabalhos utilizam preferência lineares ou quase-lineares. Embora exijamos algumas propriedades técnicas sobre $f(\cdot)$, sua forma funcional é livre para se adaptar a qualquer aplicação. Dado a grande difusão da teoria de desenho de mecanismos, se caracteriza como uma vantagem obter resultados que podem ser usados em modelos em diferentes áreas da Economia. Em especial, nossos resultados são adequados à Economia do Setor Público, tais como modelos de provisão de bens públicos e taxação ótima, e teoria dos leilões.

5 Conclusão

A hipótese de que a função de escolha ótima é continuamente diferenciável tem limitado as aplicações da teoria do Desenho de Mecanismos, fazendo com que algumas áreas da Economia ainda não possam ser modeladas através deste arcabouço. A imposição de tal hipótese decorre da necessidade do uso das técnicas de otimização dinâmica (controle ótimo e, principalmente, Teorema do Envelope) na resolução do problema do principal. A tradição de trabalhos que utilizam esta estrutura formal em suas aplicações é vasta, com destaque para Mirrlees (1971), Laffont e Maskin (1980) e, mais recentemente, Willians (1999). Contudo, Myerson (1991) e Laffont e Tirole (1993) demonstraram que diferenciabilidade sobre o mecanismo pode ser uma hipótese forte demais em algumas aplicações. Estes autores apresentam mecanismos descontínuos em comércio bilateral e Economia da Regulação, respectivamente.

Trabalhos mais recentes vem buscando superar esta limitação ao substituir a exigência de diferenciabilidade do mecanismo por hipóteses sobre a função de utilidade do agente ou sobre o seu conjunto de tipos. Neste sentido é possível dividir esta literatura em duas vertentes. A primeira delas, representada especialmente por Krishna e Maenner (2001) e Chung e Olszewski (2007) obtém resultados para ambientes multi-agente, mas a utilidade dos agentes é restrita à classe das lineares. Nesta literatura, a principal preocupação é obter o Pricípio da Equivalência das Receitas sem diferenciabilidade. A segunda vertente tem como exponte Milgrom e Segal (2002). Estes autores, ao contrário dos anteriores, permitem que a função de utilidade assuma qualquer forma, mas estão restritos ao caso em que o espaço de tipos dos agentes é unidimensional.

O que objetivamos na presente dissertação é preencher uma das lacunas desta literatura: unir estas duas vertente fornecendo um resultado que não exija diferenciabilidade do mecanismo e que ainda permita que as utilidades sejam arbitrárias em ambientes multi-agente. Para alcançar tal meta, nós optamos por generalizar o Teorema do Envelope de Milgrom e Segal (2002) para espaços de tipos multidimensionais. Esta generalização se torna possível na medida em que podemos utilizar o Teorema do Máximo de Berge no problema de otimização. Para seu uso, entretanto, é necessária a introdução da hipótese de compacidade no conjunto de escolha. Contudo, argumentamos que esta hipótese não parece ser muito forte, dado que em aplicações ela invariavelmente é satisfeita.

Além da generalização, identificamos condições sob as quais a função valor do agente é absolutamente contínua e mostramos que sua representação integral é válida também em modelos com múltiplos agentes. Inicialmente propomos uma generalização direta do resultado de Milgrom e Segal (2002), utilizando a hipótese de continuidade absoluta da função de utilidade do agente. Entretanto, esta exigência não possui muito significado econômico e é considerada pouco elegante por parte da literatura. Neste sentido, incorporamos uma hipótese adicional de diferenciabilidade da utilidade em todo o domínio que gera a mesma representação integral e possui uma maior interpretação econômica.

Ao obter resultados que permitam que o mecanismo seja não diferenciável, ou mesmo descontínuo, a gama de possíveis aplicações da teoria aumenta. Modelos de Economia do Setor Público (taxação ótima e oferta de bens públcios, por exemplo) são de especial aplicação, pois em geral apresentam mais de um agente e suas utilidades podem não ser lineares. Outra dessas possibilidades está ligada à política monetária brasileira. Desde o início do sistema de metas de inflação, o Banco Central possui o Sistema de Expectativas de Mercado. No caso específico da inflação, várias instituições, financeiras ou não, reportam suas expectativas de inflação futura (para os próximos 12 meses, por exemplo) regularmente. Dado que uma das variáveis utilizadas pelo Copom para decidir a taxa Selic é a expectativa de inflação futura, é de fundamental importância saber se tais instituições estão de fato reportando suas verdadeiras expectativas. Uma possibilidade real é a de que essas instituições possuam títulos (dívidas) indexadas à Selic e, dessa forma, superestimem (subestimem) suas expectativas de inflação reportadas. Isto geraria um benefício privado para estas instituições, dado que o Copom reage a altas (baixas) expectativas de inflação com aumentos (reduções) na taxa Selic.

A aplicação acima é um clássico problema de agente-principal, dado que o Banco Central (principal) delega uma tarefa às instituições (agentes) e não consegue verificar se estes estão a cumprindo de maneira desejável. A questão é como dar incentivos aos agentes de forma que eles revelem sua informação privada, ou seja, suas verdadeiras expectativas. Ao utilizar o seu *Top Five*, a classificação das 5 melhores instuições em termos de previsão, por exemplo, o Banco Central pode dar esse incentivo. Se uma instituição faz parte do *Top Five*, sua credibilidade enquanto previsor aumenta e, em consequência, sua capacidade de afetar as decisões do Copom. A dificuldade com este mecanismo está no fato de ele ser discreto, dado que é um *ranking*. Em outras palavras, ao classificar determinada instituição como a melhor previsora e assim por diante, cria-se a dificuldade de, em vista de modelar essa situação, não se poder utilizar o ferramental matemático clássico de Desenho de Mecanismo. Contudo, através das contribuições desta dissertação este problema passa a ser tratável, pois permitimos muitos agentes (instituições) no modelo e damos liberdade na forma funcional da sua utilidade.

Referências

BARON, D. e BESANKO, D. Regulation, Asymmetric Information, and Auditing. **RAND Journal of Economics**, v. 15, p. 447-470, 1984.

BARON, D. e MYERSON, R. Regulating a Monopolist with Unknown Costs. **Econometrica**, v. 50, p. 911-930, 1982.

BARTLE, R. **The Elements of Integration and the Lebesgue Measure**. John Willey, 1995.

CARTER, M. **Foundations of Mathematical Economics**. Cambridge: MIT Press, 2001.

CLARKE, E. H. Multipart Pricing of Public Goods. **Public Choice**, v. 11, p. 17-33, 1971.

CLARKE, F. **Optimization and Nonsmooth Analysis**. New York: SIAM, 1990.

CHUNG, K. e OLSZEWSKI, W. A Non-Differentiable Approach to Revenue Equivalence. **Theorical Economics**, v. 2, p. 469-487, 2007.

DASGUPTA, P.; HAMMOND, P. e MASKIN, E. The Implementation of Social Choice Rules: Some General Results on Incentive Compatibility. **Review of Economic Studies** v. 46, p. 181-216, 1979.

D'ASPREMONT, C. e GÉRARD-VARET, L. A. Incentives and Incomplete Information. **Journal of Public Economics**, v. 11, p. 25-45, 1979.

ELY, J. **Revenue Equivalence Without Differentiability Assumptions**. Mimeo, Northwestern University, 2001.

FUDENBERG, D. e TIROLE, J. **Game Theory**. Cambridge: MIT Press, 1993.

GIBBARD, A. Manipulation of Voting Schemes: a General Result. **Econometrica**, v. 41, p. 587-602, 1973.

GREEN, J. e KAHN, C. M. Wage-Employment Contracts. **Quarterly Journal of Economics**, v. 98, p. 173-188, 1983.

GREEN, J. e LAFFONT, J. **Incentives in Public Decision Making**. Amsterdam: North-Holland, 1979.

GROVES, T. Incentives in Teams. **Econometrica**, v. 41, p. 617-663, 1973.

GUESNERIE, R. e LAFFONT, J. A Complete Solution to a Class of Principal-Agent Problems with an Application to the Control of a Self-Managed Firm. **Journal of Pub-**

lic Economics v. 25, p. 329-369, 1984.

HOLMSTROM, B. **On Incentives and Control in Organizations**. Ph D dissertation , Stanford University, 1977.

KAMIEN, M. e SCHWARTZ, N. **Dynamic Optimization**. New York: North Holland, 1981.

KRISHNA, V. **Auction Theory**. New York: Academic Press, 2002.

KRISHNA, V. e MAENNER, E. Convex Potencials with an Application to Mechanism Design. **Econometrica**, v. 69, p. 1113-1119, 2001.

LAFFONT, J. e TIROLE, J. **A Theory of Incentives in Procurement and Regulation**. Cambridge: MIT Press, 1993.

LAFFONT, J. e MASKIN, E. A Differential Approach to Dominant Strategy Mechanisms. **Econometrica**, v. 48, p. 1507-1520, 1980.

LAFFONT, J. e MARTIMORT, D. **The Theory of Incentives**. Princeton: Princeton University Press, 2002.

MASKIN, E. e RILEY, J. Optimal Auctions with Risk-Averse Buyers. **Econometrica**, v. 52, p. 1473-1518, 1984a.

MASKIN, E. e RILEY, J. Monopoly with Incomplete Information. **RAND Journal of Economics**, v. 15, p. 171-196, 1984b.

McFEE, R. P. e McMILLAN, J. Bidding for Contracts: A Principal-Agent Analysis. **RAND Journal of Economics**, v. 17, p. 326-338, 1986.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M. e GREEN, J. **Microeconomic Theory**. Oxford: Oxford University Press, 1995.

MILGROM, P. A Convergence Theorem for Competitive Bidding with Differential Information. **Econometrica**, v. 47, p. 679-688, 1979.

MILGROM, P. e SEGAL, I. Envelope Theorems for Arbitrary Choice Sets. **Econometrica**, v. 70, p. 583-601, 2002.

MIRRLEES, J. An Exploration in the Theory of Optimum Income Taxation. **Review of Economic Studies**, v. 38, p. 175-208, 1971.

MUSSA, M. e ROSEN, S. Monopoly and Product Quality. **Journal of Economic Theory**, v. 18, p. 301-317, 1978.

MYERSON, R. Incentive Compatibility and the Bargaining Problem. **Econometrica**, v. 47, p. 61-73, 1979.

MYERSON, R. Optimal Auction Design. **Mathematics of Operations Research**, v. 6, p. 58-73, 1981.

MYERSON, R. Optimal Coordination Mechanisms in Generalized Principal-Agent Problems. **Journal of Mathematical Economics**, v. 11, p. 67-81, 1982.

MYERSON, R. Multistage Games with Communication. **Econometrica**, v. 54, p. 323-358, 1986.

MYERSON, R. **Game Theory: Analysis of Conflicts**. Cambridge: Harvard Press, 1991.

MYERSON, R. e SATTERTHWAITE, M. Efficient Mechanisms for Bilateral Trading. **Journal of Economic Theory**, v. 28, p. 265-281, 1983.

OSBORNE, M. e RUBINSTEIN, A. **A Course in Game Theory**. Cambridge: MIT Press, 1994.

ROCKAFELLAR, R. T. **Convex Analysis**. Princeton: Princeton University Press, 1970.

ROSENTHAL, R. Arbitration of Two-Party Disputes Under Uncertainty. **Review of Economic Studies**, v. 45, p. 595-604, 1978.

ROYDEN, H. **Real Analysis**, 2^a ed. New York: The Macmillan Company, 1968.

RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**, 3^a ed. McGraw-Hill Science, 1986.

SALANIÉ, B. **The Economics of Contracts**, 2^a ed. Cambridge: MIT Press, 2005.

SERRANO, R. The Theory of Implementation of Social Choice Rules. **SIAM Review**, v. 46, p. 377-414, 2004.

WILLIANS, S. Realization and Nash Implementation: Two Aspects of Mechanism Design. **Econometrica** v. 54, p. 139-151, 1986.

WILLIANS, S. A Characterization of Efficient, Bayesian Incentive Compatible Mechanism. **Economic Theory**, v. 14, p. 155-180, 1999.