

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Análise assintótica de um
problema de transporte
radiativo**

por

Fabio Souto de Azevedo

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Mark Thompson
Orientador

Porto Alegre, Agosto de 2010.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Souto de Azevedo, Fabio

Análise assintótica de um problema de transporte radiativo / Fabio Souto de Azevedo.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2010.

75 p.: il.

Tese (doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2010.

Orientador: Thompson, Mark

Tese: Matemática Aplicada

Equações parabólicas íntegro-diferenciais de segunda ordem, métodos assintóticos, perturbações singulares transporte radiativo

Análise assintótica de um problema de transporte radiativo

por

Fabio Souto de Azevedo

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Física-matemática

Orientador: Prof. Dr. Mark Thompson

Banca examinadora:

Prof. Dr. Antônio Carlos Marques Alvim
Programa de Engenharia Nuclear, UFRJ

Prof. Dr. Marco Túlio M. B. Vilhena
PPGMAp, UFRGS

Prof. Dr. José Felipe Linares
Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA

Tese apresentada e aprovada em
20 de Agosto de 2010.

Prof. Dr. Waldir Leite Roque
Coordenador

RESUMO

Neste trabalho, consideramos um modelo de transporte radiativo e sua aproximação SP1, que chamamos de problema reduzido. Ambos sistemas são expandidos em torno da aproximação de Rosseland, que serve como aproximação de ordem zero. A expansão é realizada empregando a teoria de perturbações singulares e analisamos as aproximações para o interior, fronteira e dado inicial para a solução. A teoria de existência é estabelecida para o problema reduzido e para várias equações diferenciais que aparecem ao longo da análise, o que inclui a resolução de um problema unidimensional oriundo da expansão das camadas de fronteira. A aproximação SP1 obtida depende de um parâmetro positivo livre b , cuja existência é estudada numericamente.

ABSTRACT

In this work, we consider a model of radiative transfer and its SP1 approximation, which we call the reduced problem. Both systems are expanded near the Rosseland approximation, which serves as their zero order approximation. The expansion is carried out employing singular perturbation theory and we look for boundary and interior approximations to the solution as well as approximations for the initial data. A theory of existence is established for the reduced problem and for various differential equations which appear on the course of the analysis, including the resolution of a one-dimensional problem arising from the boundary layer expansion. The approximation depends on a free positive parameter b , whose existence is studied numerically.

Conteúdo

RESUMO	iv
ABSTRACT	v
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS	ix
1 INTRODUÇÃO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	9
1.1 Derivação heurística do problema reduzido	17
1.2 Condições de contorno para o problema reduzido	20
1.3 Camadas de fronteira	22
2 ANÁLISE ASSINTÓTICA DO PROBLEMA REDUZIDO	23
2.1 Aproximação de ordem zero do problema reduzido	23
2.2 Expansão de Taylor em torno da aproximação de Rosseland	24
2.3 Expansão de primeira ordem do problema reduzido	26
2.4 Aproximação de primeira ordem do problema reduzido	29
2.4.1 Correção perto da condição inicial	29
2.4.2 Estimativas de erro para o problema reduzido	30
3 ANÁLISE ASSINTÓTICA DO PROBLEMA ORIGINAL	35
3.1 Expansão assintótica do problema original	35
3.2 Expansão longe da fronteira do problema original	35

3.3	Expansão em torno da fronteira	36
3.4	Estimativas para o erro do problema original	40
4	COMPARAÇÃO ENTRE AS EXPANSÕES ASSINTÓTICAS	44
4.1	Cálculo aproximado do valor de b	45
4.2	Simulação numérica	48
5	TEORIA DE EXISTÊNCIA	56
5.1	Teoria de existência para o problema de Rosseland	56
5.2	Teoria de existência do problema reduzido	57
5.2.0.1	Sequências superiores e inferiores	59
5.3	Teoria de existência e estimativa de decaimento para o problema de camada de fronteira	61
5.4	Estimativas da aproximação para o problema de Rosseland	67
5.4.1	Estimativa de ordem zero para o problema reduzido	67
5.4.1.1	Aproximação de ordem zero para o problema original	67
5.5	Resultados envolvendo princípio de máximo	68
5.6	Conclusões e trabalho futuro	71
	BIBLIOGRAFIA	73

Lista de Figuras

Figura 1.1	Domínio D e suas variáveis	12
Figura 1.2	Domínio D e sua camada de fronteira F	22
Figura 4.1	Comparação entre as estimativas analíticas e numéricas para o expoente de decaimento e a as estimativa dada por simulações numéricas. Linhas tracejadas correspondem às estimativas analíticas e linhas cheias, à simulação numérica. Simulações sugerem decaimento significativamente mais rápido.	50
Figura 4.2	Valor obtido para o parâmetro b via simulação em função de β com $\sigma' = 0,1$ (esquerda) e $\sigma' = 0,3$ (direita), $\lambda' = 1$ e $\rho(\mu) = 0,5$ em azul. Em vermelho, aproximação a dois momentos $b = 2$. . .	53
Figura 4.3	Valor obtido para o parâmetro b via simulação em função de β com $\sigma' = 0,6$ (esquerda) e $\sigma' = 0,9$ (direita), $\lambda' = 1$ e $\rho(\mu) = 0,5$ em azul. Em vermelho, aproximação a dois momentos $b = 2$. . .	53
Figura 4.4	Valor obtido para o parâmetro b via simulação em função de β com $\sigma' = 0,1$, $\lambda' = 1$ onde $\rho(\mu) = 0,5$ (esquerda) e $\rho(\mu) = 0,7$ (direita) em azul. Em vermelho, aproximação a dois momentos $b = 2$ (esquerda) e $b = 3,78$ (direita).	54
Figura 4.5	Valor obtido para o parâmetro b via simulação em função de β com $\sigma' = 0,1$, $\lambda' = 1$ onde $\rho(\mu) = 0,9$ (esquerda) e $\rho(\mu) = 0,95$ (direita) em azul. Em vermelho, aproximação a dois momentos $b = 12,67$ (esquerda) e $b = 26$ (direita).	54

Lista de Tabelas

Tabela 1	Lista de grandezas físicas	x
----------	--------------------------------------	---

LISTA DE GRANDEZAS FÍSICAS

Grandeza	símbolo	unidade
Temperatura	T	K
Intensidade radiativa	I	$Jm^{-2}sr^{-1}$
Velocidade	\mathbf{v}	ms^{-1}
Tempo	t	s
Posição	x	m
Direção	Ω	
Frequência	ν	s^{-1}
Calor específico volumétrico	c_v	$JK^{-1}m^{-3}$
Coefficiente de condutividade térmica	k_0	$Wm^{-1}K^{-1}$
Coefficiente de absorção	λ'	m^{-1}
Coefficiente de espalhamento	σ'	m^{-1}
Coefficiente de emissão	κ'	m^{-1}
Coefficiente de troca de calor na superfície	h	$Wm^{-2}K^{-1}$
Emissividade	α	adimensional

Tabela 1: Lista de grandezas físicas

1 INTRODUÇÃO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A evolução da temperatura T de um fluido na presença de transferência de calor pelos fenômenos de condução, convecção e radiação em uma região limitada D convexa pode ser modelada pela seguinte equação simplificada, veja [10]:

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot k_0 \nabla T - \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \kappa' (B - I) d\Omega d\nu \quad (1.1)$$

onde \hat{I} é a intensidade total de radiação, dada por

$$\hat{I}(x, t) := \int_{S^2} I(\Omega, x, t) d\Omega.$$

Aqui, S^2 denota a esfera unitária em \mathbb{R}^3 . A intensidade radiativa é governada pela equação estacionária de transporte de Boltzmann em um meio isotrópico:

$$\Omega \cdot \nabla I + \lambda' I = \frac{\sigma'}{4\pi} \int_{S^2} I d\Omega + \kappa' B \quad (1.2)$$

A intensidade $I = I(x, \Omega, t, \nu)$ é uma função da posição $x \in D$, do instante de tempo $t \geq 0$, da direção $\Omega \in S^2$ e da frequência $\nu \geq \nu_0$. Os parâmetros λ' , σ' e κ' são funções constantes por partes que variam apenas com ν e assumem um número finito de valores positivos e relacionados por $\lambda' = \kappa' + \sigma'$. A equação (1.1) é complementada com a seguinte condição de contorno

$$k_0 \frac{\partial T}{\partial \eta} = h(T_b - T) + \alpha \pi \int_0^{\nu_0} (B(\nu, T_b) - B(\nu, T)) d\nu \quad (1.3)$$

onde α e h são constantes positivas e T_b é a temperatura exterior, que se assume conhecida. O vetor unitário normal apontando para fora é denotado por η . A condição inicial é dada por

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in D. \quad (1.4)$$

A superfície, ∂D , que limita a região D é considerada semitransparente e governada pela seguinte condição de contorno para I :

$$I(\Omega) = \rho I(\Omega') + (1 - \rho) B(\nu, T_b), \quad \eta \cdot \Omega < 0, x \in \partial D \quad (1.5)$$

O ângulo de reflexão Ω' é dado por $\Omega' = \Omega - 2(\eta \cdot \Omega)\eta$ e o coeficiente de reflexão ρ é uma função apenas de $\mu := \Omega \cdot \eta$. Observamos que quando $\rho \equiv 0$, esta condição de contorno recai em condições de Dirichlet.

A função $B(\nu, T)$ é dada pela lei de Planck

$$B(\nu, \theta) = \frac{2h_p\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h_p\nu}{k\theta}\right) - 1}. \quad (1.6)$$

Consideramos também que o fluxo \mathbf{v} não atravessa a fronteira ∂D .

A fim de encontrar formas adimensionais para as equações com as quais trabalharemos, definimos valores de referência para temperatura, intensidade radiativas, coeficientes de absorção (κ' , σ' e λ'), comprimento e frequência, denotamos respectivamente por T_{ref} , I_{ref} , κ_{ref} , x_{ref} e ν_{ref} . Introduzimos igualmente as seguintes quantidades:

$$t_{ref} = c_v \kappa_{ref} x_{ref}^2 \frac{T_{ref}}{I_{ref} \nu_{ref}}, \quad k_{ref} = \frac{I_{ref} \nu_{ref}}{\kappa_{ref} T_{ref}} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{1}{\kappa_{ref} x_{ref}} \quad (1.7)$$

observamos que se poderia argüir redundância ao definir valores de referência para tempo e frequência. No entanto, dado que tais grandezas podem assumir valores em escalas discrepantes, optamos por ambas as definições.

Definimos as variáveis adimensionais:

$$\check{T} = \frac{T}{T_{ref}} \quad \check{I} = \frac{I}{I_{ref}} \quad \check{t} = \frac{t}{t_{ref}} \quad \check{k}_0 = \frac{k_0}{k_{ref}} \quad \check{\nu} = \frac{\nu}{\nu_{ref}} \quad (1.8)$$

e introduzimos uma versão adimensional da função de Planck

$$B(\check{\nu}, \check{T}) = \frac{\nu_{ref}^3}{I_{ref}} \frac{2h_p \check{\nu}^3}{c^2} \left(\exp \frac{h_p \check{\nu} \nu_{ref}}{k_B \check{T} T_{ref}} - 1 \right)^{-1}.$$

Nestas novas variáveis a equação de conservação de energia (1.1) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
c_v \frac{T_{ref}}{t_{ref}} \frac{\partial \check{T}}{\partial \check{t}} + \frac{T_{ref}}{t_{ref}} \check{\mathbf{v}} \cdot \check{\nabla} \check{T} &= \frac{T_{ref} k_{ref}}{x_{ref}^2} \check{\nabla} \cdot \check{k}_0 \check{\nabla} \check{T} \\
&\quad - I_{ref} \nu_{ref} \kappa_{ref} \int_{\check{\nu}_0}^{\infty} \int_{S^2} \check{\kappa} (\check{B} - \check{I}) d\Omega d\check{\nu} \\
\frac{T_{ref}}{I_{ref} \nu_{ref} \kappa_{ref} t_{ref}} \left(c_v \frac{\partial \check{T}}{\partial \check{t}} + \check{\mathbf{v}} \cdot \check{\nabla} \check{T} \right) &= \frac{T_{ref} k_{ref}}{I_{ref} \nu_{ref} \kappa_{ref} x_{ref}^2} \check{\nabla} \cdot \check{k}_0 \check{\nabla} \check{T} \\
&\quad - \int_{\check{\nu}_0}^{\infty} \int_{S^2} \check{\kappa} (\check{B} - \check{I}) d\Omega d\check{\nu} \\
\frac{1}{\kappa_{ref}^2 x_{ref}^2} \left(c_v \frac{\partial \check{T}}{\partial \check{t}} + \check{\mathbf{v}} \cdot \check{\nabla} \check{T} \right) &= \frac{1}{\kappa_{ref}^2 x_{ref}^2} \check{\nabla} \cdot \check{k}_0 \check{\nabla} \check{T} \\
&\quad - \int_{\check{\nu}_0}^{\infty} \int_{S^2} \check{\kappa} (\check{B} - \check{I}) d\Omega d\check{\nu} \\
\varepsilon^2 \frac{\partial \check{T}}{\partial \check{t}} + \varepsilon^2 \mathbf{u} \cdot \check{\nabla} \check{T} &= \varepsilon^2 \check{\nabla} \cdot \check{k}_0 \check{\nabla} \check{T} - \int_{\check{\nu}_0}^{\infty} \int_{S^2} \check{\kappa} (\check{B} - \check{I}) d\Omega d\check{\nu}
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{u} = \frac{T_{ref}}{t_{ref}} \check{\mathbf{v}}$. Já a equação de transporte radiativo se escreve como:

$$\begin{aligned}
\frac{I_{ref}}{x_{ref}} \Omega \cdot \check{\nabla} \check{I} + \kappa_{ref} I_{ref} \check{\lambda} \check{I} &= I_{ref} \kappa_{ref} \frac{\check{\sigma}}{4\pi} \int_{S^2} \check{I} d\Omega + \kappa_{ref} I_{ref} \check{\kappa} \check{B} \\
\frac{1}{x_{ref} \kappa_{ref}} \Omega \cdot \check{\nabla} \check{I} + \check{\lambda} \check{I} &= \frac{\check{\sigma}}{4\pi} \int_{S^2} \check{I} d\Omega + \check{\kappa} \check{B}. \\
\varepsilon \Omega \cdot \check{\nabla} \check{I} + \check{\lambda} \check{I} &= \frac{\check{\sigma}}{4\pi} \int_{S^2} \check{I} d\Omega + \check{\kappa} \check{B} \tag{1.9}
\end{aligned}$$

A condição de contorno (1.3) assume a forma seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{k_{ref} T_{ref}}{x_{ref}} \check{k}_0 \frac{\partial}{\partial \check{\eta}} \check{T} &= h T_{ref} (\check{T}_b - \check{T}) + I_{ref} \nu_{ref} \alpha \pi \int_0^{\check{\nu}_0} (\check{B}(\check{\nu}, \check{T}_b) - \check{B}(\check{\nu}, \check{T})) d\check{\nu} \\
\frac{I_{ref} \nu_{ref}}{\kappa_{ref} x_{ref}} \check{k}_0 \frac{\partial}{\partial \check{\eta}} \check{T} &= h T_{ref} (\check{T}_b - \check{T}) + I_{ref} \nu_{ref} \alpha \pi \int_0^{\check{\nu}_0} (\check{B}(\check{\nu}, \check{T}_b) - \check{B}(\check{\nu}, \check{T})) d\check{\nu} \\
\frac{1}{\kappa_{ref} x_{ref}} \check{k}_0 \frac{\partial}{\partial \check{\eta}} \check{T} &= \frac{T_{ref}}{I_{ref} \nu_{ref}} h (\check{T}_b - \check{T}) + \alpha \pi \int_0^{\check{\nu}_0} (\check{B}(\check{\nu}, \check{T}_b) - \check{B}(\check{\nu}, \check{T})) d\check{\nu} \\
\varepsilon \check{k}_0 \frac{\partial}{\partial \check{\eta}} \check{T} &= \check{h} (\check{T}_b - \check{T}) + \alpha \pi \int_0^{\check{\nu}_0} (\check{B}(\check{\nu}, \check{T}_b) - \check{B}(\check{\nu}, \check{T})) d\check{\nu}.
\end{aligned}$$

Por questões de simplicidade de notação, omitiremos o sinal gráfico $\check{}$ nas variáveis adimensionalizadas sem perda de clareza, já que não mais retornaremos às

formas não adimensionais. Desta forma, o sistema acoplado se escreve da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t T &= \frac{\kappa'}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \left(\widehat{I} - 4\pi B(\nu, T) \right) d\nu, & x \in D, t > 0 \\
\varepsilon k_0 \frac{\partial T}{\partial \eta} &= h(\theta_b - T) + \alpha \pi \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, T)] d\nu, & x \in \partial D, t > 0 \\
T(x, 0) &= T_0(x, \varepsilon), & x \in D, t = 0 \\
\varepsilon \Omega \cdot \nabla I + \lambda' I &= \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{I} + \kappa' B(\nu, T), & x \in D, t > 0 \\
I(\Omega) &= \rho I(\Omega') + (1 - \rho) B(\nu, T_b), & x \in \partial D, t > 0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Lembramos que a notação \widehat{I} indica a intensidade total dado por :

$$\widehat{I} := \int_{S^2} I(x, \Omega, \nu) d\Omega.$$

e o operador $\mathcal{L}_t T$ é definido como:

$$\mathcal{L}_t T = \frac{\partial}{\partial t} T + k_0 \Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T$$

A teoria de existência e unicidade de soluções para este problema, doravante

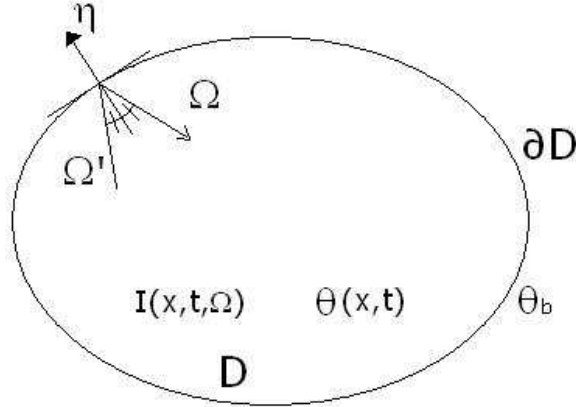


Figura 1.1: Domínio D e suas variáveis

chamado de “problema original”, foi desenvolvida no espaço das funções C^α em [29] para ρ suficientemente pequeno e quando os parâmetros λ' , κ' e σ' são constantes. Nesse artigo, a intensidade total é escrito na forma operacional \widehat{I} é dado por:

$$\widehat{I} = S_g B(\nu, T) + S_b B(\nu, T_b), \tag{1.11}$$

onde $S_g : C^\alpha(D) \rightarrow C^\alpha(D)$ é um operador limitado que preserva positividade. Em nosso trabalho, assumiremos o resultado final da teoria de existência para pequenos valores de ε como hipótese na seguinte forma: *a teoria de existência neste termos é válida em C^α , $\alpha > 0$, para uma certa faixa de valores dos parâmetros (σ' , κ' e ρ) uniformemente em ε em algum intervalo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. De fato, para o caso unidimensional, que é bem mais bem-comportado é possível mostrar este resultado sem qualquer restrição em σ' , κ' e ρ .*

O sistema acoplado (1.10) é não-linear e definido em um espaço de seis dimensões $((x, t, \Omega) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \times S^2)$. A solução numérica deste sistema frequentemente resulta em altos custos computacionais. Uma abordagem menos custosa consiste em aproximar a intensidade total dada pela equação de Boltzmann ao introduzir uma equação mais simples para \hat{I} , a qual não depende da direção. De fato, muitos esforços têm se voltado a desenvolver e validar tais aproximações. Por exemplo, em [18], desenvolvem-se aproximações de alta ordem para a equação do transporte quando $\sigma = 0$. De acordo com esse artigo, uma aproximação de segunda ordem pode ser obtida quando $\varepsilon \rightarrow 0$ por $\hat{I} \simeq 4\pi\Phi$ e $\theta \simeq T$, onde Φ é solução de :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\varepsilon^2}{\kappa'\lambda'}\Delta + 1 \right) \Phi &= B(\nu, \theta), & x \in D \\ \varepsilon b \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi + \Phi &= B(\nu, \theta_b), & x \in \partial D \end{aligned}$$

com $\theta_b = T_b$. Este problema elíptico pode ser invertido em termos de dois operadores que preservam positividade $\tilde{S}_g : C^0(D) \rightarrow C^0(D)$ e $\tilde{S}_b : C^0(\partial D) \rightarrow C^0(D)$, tais que

$$\Phi = \tilde{S}_g B(\nu, \theta) + \tilde{S}_b B(\nu, \theta_b)$$

Desta forma, o sistema aproximado, doravante chamado “problema reduzido”, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t \theta &= \frac{4\pi}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left(\tilde{S}_g B(\nu, \theta) + \tilde{S}_b B(\nu, \theta_b) - B(\nu, \theta) \right) d\nu, & x \in D \\ \varepsilon k_0 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= h(\theta_b - \theta) + \alpha \pi \int_0^{\nu_0} [B(\nu, \theta_b) - B(\nu, \theta)] d\nu, & x \in \partial D \\ \theta &= \theta_0|_{\varepsilon=0}, & t = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

aqui $\theta_0 = T_0$ e pode depender de ε . Para efeito de nossa análise subsequente, iremos assumir que a condição inicial θ_0 satisfaz uma condição de contorno que

depende explicitamente de ε . Aqui, nosso principal interesse é desenvolver expansões assintóticas tanto para o problema reduzido como para o problema original.

Esta aproximação, conhecida como SP_1 , pertence uma família maior, das aproximações SP_n . Estas aproximações SP_n foram primeiramente propostas em [12] e [13] com a finalidade de simplificar a equação do transporte no contexto de problemas da engenharia nuclear. Em [2], uma análise detalhada deste tipo de aproximação foi desenvolvida e estimativas são dadas quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Lá, $\sigma' = O(\varepsilon)$ e o termo fonte foi considerado de ordem ε^2 junto com condições de Dirichlet. A análise envolve a introdução de sofisticados corretores via problema de Milne. Em [1], foram realizadas expansões finitas em harmônicos esféricos a fim de obter um sistema de ordem arbitrária de equações difusivas acopladas. Aquele trabalho emprega técnicas computacionais para validar as equações encontradas.

Embora essas aproximações tenham sido desenvolvidas para resolver problemas estacionários em engenharia nuclear, elas têm sido aplicadas a outras situações como a teoria de transporte radiativo (veja [18]) Em [11], uma generalização para as equações de transporte radiativo dependentes do tempo é apresentada para tais aproximações.

Aproximações SP_N de alta ordem foram usadas em [17] para modelar o espalhamento da luz em tecidos biológicos. Neste problema, analisa-se uma fonte de radiação externa e apenas a interação com meio é considerada. Aproximações de ordem tão alta como sétima são propostas junto com resultados de simulação.

Um problema muito interessante, que lida com transporte radiativo é tratado em [16]. Neste artigo, um método de decomposição de domínio é tratado via análise assintótica e resultados numéricos são apresentados para problemas relevantes à fabricação de vidro a fim de validar o método.

Vamos agora descrever em maiores detalhes os problemas discutidos em nosso trabalho. Na seção 1.1, apresentamos um raciocínio heurístico que dá origem ao problema reduzido. A condição de fronteira deste problema reduzido depende um

parâmetro b , cujo valor aproximado é obtido com base num análise aproximada de fluxo de energia, este valor já fora usado anteriormente como em [18]. No segundo capítulo, fazemos a expansão assintótica do problema reduzido e no terceiro capítulo, fazemos a teoria assintótica do problema original.

A análise assintótica é realizada através do método das perturbações singulares (veja [21, 15]), ou seja, introduzimos variáveis reescaladas próximo à fronteira e próximo aos dados iniciais. Os principais resultados são estimativas pontuais de aproximação para as expansões de ambos os problemas, o problema reduzido e o original, bom como um teorema de aproximação entre esses dois problemas em norma L_1 dado na seção 5.2.

Mencionamos que o termo de ordem zero é de fato dado pela assim chamada aproximação de Rosseland, que é a solução da seguinte equação:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t\theta^{(0)} &= 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda'} \Delta B(\nu, \theta^{(0)}) d\nu, & x \in D, t > 0 \\ \theta^{(0)} &= \theta_0, & x \in \bar{D}, t = 0 \\ \theta &= \theta_b, & x \in \partial D.\end{aligned}\tag{1.13}$$

As expansões de primeira ordem de ambos os problemas conduzem à mesma equação linear parabólica com condições de contorno dadas por critérios de compatibilidade entre a expansão no interior e a expansão próxima à fronteira. O parâmetro livre b supracitado precisa ser ajustado de forma a que ambas as equações se tornem idênticas. O valor exato desse parâmetro b é dado pela solução de uma complicada equação algébrico-diferencial. Na seção 4.1, mostramos que uma solução aproximada a dois momentos desta equação fornece um valor de b idêntico ao obtido anteriormente e na seção 4.2, resolvemos numericamente a equação e comparamos com o valor aproximado que já havia sido obtido.

No capítulo 5, coletamos uma série de resultados sobre existência de soluções, estimativas de decaimento e aproximação para diversos problemas que surgem ao longo da análise assintótica.

O resultado da aproximação é dado no teorema 4.0.2 que estabelece que o problema reduzido aproxima o problema original no espaço L_1 , i.e.:

$$\begin{aligned} \|T(x, t) - \theta(x, t)\|_{L_1} &\leq C\varepsilon^2, \quad 0 \leq t \leq t_f, C(t_f) \\ \|\widehat{I}(x, t) - 4\pi\Phi(x, t)\|_{L_1} &\leq C\varepsilon^2, \quad 0 \leq t \leq t_f, C(t_f). \end{aligned}$$

Este resultado depende da existência de uma solução positiva para b . Igualmente, este resultado depende de estimativas semelhantes tanto para o problema reduzido como para o problema original, que são dados nos teoremas 2.21 e 3.4.1. Observamos que um tipo similar de estimativa integral foi estabelecido em [2] para o problema assintótico lá tratado. Deve ser notado que as estimativas que obtemos em várias provas explodem quando ρ tende a 1, o que poderia bem indicar a necessidade de análises assintóticas adicionais na variável $1 - \rho$, mas, como deve ser dito, não temos ideia de como seguir tal análise.

A expansão do problema original próximo à fronteira conduz um problema de transporte radiativo unidimensional definido na semi-reta, cuja solução é obtida via uma mudança de variáveis que o transforma em uma equação elíptica íntegro-diferencial semelhante ao problema que surge da expansão do problema reduzido. A teoria de existência de soluções para estes problemas é obtida via a demonstração de um lema abstrato que repousa da teoria de operadores em espaços de Hilbert. Estes problemas possuem interesse em si, já que permitem a construção de uma teoria de existência sem qualquer condição sob ρ , salvo $0 \leq \rho \leq 1$. Isto pode ser feito porque não precisamos lidar em uma dimensão com as dificuldades geométricas encontradas no problema original definido em uma região convexa de \mathbb{R}^3 . De fato, numa região convexa, não se pode limitar por baixo a distância entre duas reflexões, ao contrário do caso unidimensional. Além disso, o problema bidimensional é suficientemente simples para que as características possam ser explicitamente calculadas mesmo após reflexão, o que se torna impraticável em uma região convexa geral.

1.1 Derivação heurística do problema reduzido

O problema original é dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t T &= \frac{\kappa'}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \left(\widehat{I} - 4\pi B(\nu, T) \right) d\nu, & x \in D, t > 0 \\
\varepsilon k_0 \frac{\partial T}{\partial \eta} &= h(\theta_b - T) + \alpha \pi \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, T)] d\nu, & x \in \partial D, t > 0 \\
T(x, 0) &= T_0(x, \varepsilon), & x \in D, t = 0 \\
\varepsilon \Omega \cdot \nabla I + \lambda' I &= \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{I} + \kappa' B(\nu, T), & x \in D, t > 0 \\
I(\Omega) &= \rho I(\Omega') + (1 - \rho) B(\nu, T_b), & x \in \partial D, t > 0
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Supomos que este problema assume uma expansão assintótica em ε .

Para pontos longe da fronteira, assumimos ainda a seguinte expansão regular:

$$B = B(\nu, \theta) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k B_k + o(\varepsilon^{N+1})$$

e

$$I = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k I_k + o(\varepsilon^{N+1})$$

Substituindo em (1.10), obtemos a seguinte equação para os termos I_k

$$\left[\lambda' I_0 - \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{I}_0 - \kappa' B_0 \right] + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[(\Omega \cdot \nabla) I_k + \lambda' I_{k+1} - \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{I}_{k+1} - \kappa' B_{k+1} \right] = 0$$

O termo de ordem zero é satisfeito se e somente se $I_0 = B_0$. Integrando os termos de ordem $k > 0$, encontramos a seguinte condição de existência:

$$\frac{1}{4\pi} \widehat{I}_{k+1} = B_{k+1} - \frac{1}{4\pi \kappa'} K [(\Omega \cdot \nabla) I_k], \quad KI := \int_{S^2} I d\Omega$$

substituindo esta expressão no termo original, temos

$$(\Omega \cdot \nabla) I_k + \lambda' I_{k+1} + \frac{\sigma'}{4\pi \kappa'} K [(\Omega \cdot \nabla) I_k] - \lambda' B_{k+1} = 0$$

e, resolvendo para I_{k+1} , obtemos

$$I_{k+1} = B_{k+1} - \frac{\sigma'}{4\pi \lambda' \kappa'} K [(\Omega \cdot \nabla) I_k] - \frac{1}{\lambda'} (\Omega \cdot \nabla) I_k.$$

Como $K [(\Omega \cdot \nabla) I_0] = K [(\Omega \cdot \nabla) B_0] = 0$, podemos calcular para $k = 0$:

$$I_1 = B_1 - \frac{1}{\lambda'} (\Omega \cdot \nabla) B_0.$$

E do fato que $K [(\Omega \cdot \nabla)I_1] = -K [(\Omega \cdot \nabla)^2 B_0] = -\frac{4\pi}{3\lambda'} \Delta B_0$, temos para $k = 1$:

$$I_2 = B_2 + \frac{\sigma'}{3\lambda'^2 \kappa'} \Delta B_0 - \frac{1}{\lambda'} (\Omega \cdot \nabla) B_1 + \frac{1}{\lambda'^2} (\Omega \cdot \nabla)^2 B_0$$

Esta expansão sugere que, longe da fronteira ∂D , a seguinte relação é válida:

$$\frac{1}{4\pi} K [I - B] = \varepsilon^2 \frac{1}{3\kappa' \lambda'} \Delta B_0 + O(\varepsilon^3) \quad (1.15)$$

independentemente de termos de mais alta ordem em B . Deve ficar claro que esta expansão não leva em consideração a condição de contorno dada por (1.5). A fim de continuar a nossa análise, vamos assumir que

$$B_0 = B(\nu, \theta_b), \quad x \in \partial D$$

e permitir um pouco mais de liberdade à expansão assintótica, escrevendo os termos como funções de x, Ω e ε

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(x, \Omega, \varepsilon)$$

Vamos também enfraquecer (1.15) e escrever simplesmente

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} K [I - B] = g = \widehat{I}_2 + \varepsilon \widehat{I}_3 + \dots$$

Obtemos então a seguinte expressão para a intensidade total:

$$\varepsilon \Omega \cdot \nabla I + \frac{\lambda'}{\varepsilon} I = \frac{\lambda'}{4\pi} \widehat{I} - \varepsilon^2 \kappa' g$$

A expansão interior desta equação é dada por

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\lambda' (I_0 - \frac{1}{4\pi} \widehat{I}_0) \right] \\ &+ \varepsilon^1 \left[\Omega \cdot \nabla I_0 + \lambda' (I_1 - \frac{1}{4\pi} \widehat{I}_1) \right] \\ &+ \varepsilon^2 \left[\Omega \cdot \nabla I_1 + \lambda' (I_2 - \frac{1}{4\pi} \widehat{I}_2) + \kappa' g_0 \right] \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k+1} \left[\Omega \cdot \nabla I_k + \lambda' (I_{k+1} - \frac{1}{4\pi} \widehat{I}_{k+1}) + \kappa' g_{k-1} \right]. \end{aligned}$$

O termo de ordem 0 desta expansão implica $I_0 = \widehat{I}_0$, o que acontece quando I_0 não depende de Ω . A aproximação de ordem 1 é satisfeita com $I_1 = -\frac{1}{\lambda'}\Omega \cdot \nabla I_0$. Integrando em Ω o termo de segunda ordem, encontramos a seguinte condição a ser satisfeita:

$$-\frac{1}{3\lambda'}\Delta I_0 = -k'g_0 = -k' \left(\frac{I_0 - B_0}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4\pi}\widehat{I}_2 \right)$$

o que resulta em:

$$-\frac{1}{\lambda'}(\Omega \cdot \nabla)^2 I_0 + \lambda' \left(I_2 - \frac{1}{4\pi}\widehat{I}_2 \right) - k' \left(\frac{I_0 - B_0}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4\pi}\widehat{I}_2 \right) = 0$$

ou, resolvendo para I_2 :

$$I_2 = \widehat{I}_2 + \frac{1}{\lambda'^2} \left[(\Omega \cdot \nabla)^2 - \frac{1}{3}\Delta \right] I_0.$$

Onde, escolhendo $\widehat{I}_2 = 0$, temos a seguinte aproximação, I_a , para I :

$$I_a = \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{\lambda'}(\Omega \cdot \nabla) + \frac{\varepsilon^2}{\lambda'^2} \left[(\Omega \cdot \nabla)^2 - \frac{1}{3}\Delta \right] \right\} I_0$$

com $\frac{1}{4\pi}\widehat{I}_a = I_0 = \Phi$ satisfazendo

$$\left(-\frac{\varepsilon^2}{3\lambda'}\Delta + \kappa' \right) \Phi = \kappa' B. \quad (1.16)$$

Agora, precisamos introduzir condições de contorno para o problema reduzido (1.16). Para tal, substituímos $I = I_a + \Psi$ em (1.5) e obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \Psi(\Omega) - \rho\Psi(\Omega') \\ &+ \varepsilon^0(1 - \rho) [\Phi - B] \\ &+ \frac{\varepsilon}{\lambda'} [\Omega - \rho\Omega'] \cdot \nabla\Phi \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{\lambda'^2} \left[(\Omega \cdot \nabla)^2 - \rho(\Omega' \cdot \nabla)^2 + \frac{\rho - 1}{3}\Delta\Phi \right]. \end{aligned}$$

Aqui, Ψ representa o erro de aproximação. Note que não é possível satisfazer exatamente os termos de ordem superior a zero em todas as direções Ω . Com o objetivo de satisfazer a condição de ordem zero, supomos que: Φ :

$$\Phi - B = O(\varepsilon), \quad \text{uniformemente quando } \partial D \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.17)$$

Então para resolver o termo de ordem um, assumimos que Φ satisfaz

$$b\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = B - \Phi \quad (1.18)$$

o valor de b – que supomos positivo – deve ser escolhido de tal forma que $K\Psi$ é pequeno perto da fronteira.

O problema reduzido assume, portanto, a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\varepsilon^2}{3\lambda'\kappa'}\Delta + 1\right)\Phi &= B(\nu, \theta), \quad x \in D \\ b\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \Phi &= B(\nu, \theta_b), \quad x \in \partial D \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde $\theta_b = T_b$ é temperatura exterior.

Na seção 1.2, apresentamos um raciocínio físico e heurístico para a obtenção da constante b .

1.2 Condições de contorno para o problema reduzido

Nesta seção, propomos comparar a troca total de calor através da fronteira devida a efeitos radiativos em ambos os modelos. No problema original, esta quantidade é dada por:

$$\begin{aligned} Q_R &= \frac{\kappa'}{\varepsilon^2} \int_D \int_{\nu_0}^{\infty} \left(\hat{I} - 4\pi B(\nu, T)\right) d\nu dx \\ &= \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_{\partial D} \int_{\Omega \cdot \eta > 0} \int_{\nu_0}^{\infty} (1 - \rho(-\Omega \cdot \eta)) [B(\nu, T_b) - I(x, \Omega)] (\Omega \cdot \eta) d\nu d\Omega dS(x) \end{aligned}$$

e no problema reduzido por:

$$\begin{aligned} Q'_R &= \frac{4\pi\kappa'}{\varepsilon^2} \int_D \int_{\nu_0}^{\infty} (\Phi - B(\nu, \theta)) d\nu dx \\ &= \frac{4\pi}{3\lambda'} \int_D \int_{\nu_0}^{\infty} \Delta \Phi d\nu dx = \frac{4\pi}{3\lambda'} \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} dS(x) d\nu. \end{aligned}$$

Neste momento é natural comparar os termos de ordem zero e um nas expressões de Q_R e Q'_R , quando

$$I = \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{\lambda'}(\Omega \cdot \nabla) + \frac{\varepsilon^2}{\lambda'^2} \left[(\Omega \cdot \nabla)^2 - \frac{1}{3}\Delta \right] \right\} \Phi$$

e encontrar

$$\frac{1}{3\lambda'} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\rho_1}{\varepsilon} [B(\nu, \theta_b) - \Phi] + \frac{\rho_2}{\lambda'} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + O(\varepsilon) \quad (1.20)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \cdot \eta > 0} (1 - \rho(-\Omega \cdot \eta)) (\Omega \cdot \eta)^k d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \rho(-\cos \gamma)) \cos^k \gamma \sin \gamma d\gamma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \rho(-\mu)) \mu^k d\mu, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

e usamos o fato que

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \cdot \eta > 0} (1 - \rho(-\Omega \cdot \eta)) (\Omega \cdot \eta) (\Omega \cdot \nabla) d\Omega = \rho_2 \eta \cdot \nabla$$

E, simplificando, chegamos finalmente em

$$\Phi + b\varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi = B(\nu, \theta_b)$$

com

$$b = \frac{1}{3\lambda} \frac{1 - 3\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + 3r_2}{1 - 2r_1} \cdot \frac{2}{3\lambda'}$$

onde

$$r_k = \int_0^1 \rho(-\mu) \mu^k d\mu, \quad k = 1, 2, 3$$

Note que $\rho_2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \mu^2 d\mu = \frac{1}{6}$, o que implica a positividade de b . Este valor é exatamente o mesmo fornecido por [18]. Na seção 4, mostramos que o valor exato de b deve ser obtido através de uma complicada equação algébrico-operacional. Na seção 4.1, mostramos que a expressão $b = \frac{1}{3\lambda} \frac{1 - 3\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + 3r_2}{1 - 2r_1} \cdot \frac{2}{3\lambda'}$ resolve uma versão aproximada desta equação e na seção 4.2, fornecemos valores numéricos para b .

1.3 Camadas de fronteira

Com o objetivo de desmonstrar alguns resultados envolvendo funções de camada de fronteira, introduzimos as seguintes definições:

$$E := \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) < \ell_0/2\}$$

$$F := \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) < \ell_0\},$$

onde ℓ_0 é um número positivo tal que dentro da região F , cada ponto x pode ser escrito na forma de coordenadas (ζ, w) onde $\zeta := \text{dist}(x, \partial D)$ e w pertence a ∂D . Denotamos a variável reescalada y definida como $y := \zeta/\varepsilon$. A função suave de corte $\xi(x)$ satisfaz $0 \leq \xi(x) \leq 1$ e:

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in D \setminus F. \end{cases} \quad (1.21)$$

Também assumimos que dentro de F , $\xi(x)$ depende apenas da distância ζ , isto é:

$$w \cdot \nabla \xi = 0, \quad \forall w \in \partial D \text{ e } \zeta \in [0, \ell_0].$$

Desta forma, o operador laplaciano admite a seguinte representação:

$$\Delta f = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{1}{\varepsilon} L_1 \frac{\partial}{\partial y} f + L_2 f,$$

onde L_1 e L_2 são operadores diferenciais que não envolvem derivadas na variável ζ .

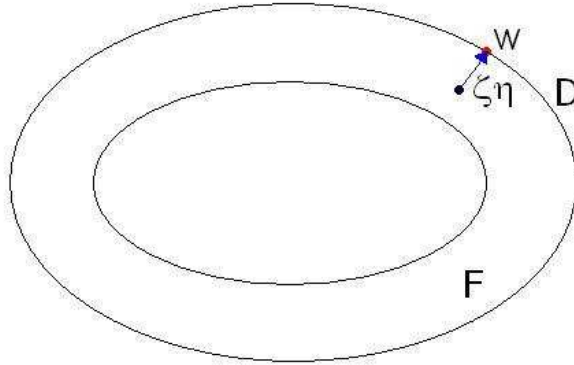


Figura 1.2: Domínio D e sua camada de fronteira F

2 ANÁLISE ASSINTÓTICA DO PROBLEMA REDUZIDO

2.1 Aproximação de ordem zero do problema reduzido

Começamos nossa análise considerando que a solução denotada pelo par $(\theta(x, t, \varepsilon), \Phi(x, t, \varepsilon))$ do problema reduzido dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t \theta &= \frac{4\pi}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\Phi - B(\nu, \theta)) d\nu, & x \in D, t > 0 \\ \varepsilon k_0 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= h(\theta_b - \theta) + \alpha \pi \int_0^{\nu_0} [B(\nu, \theta_b) - B(\nu, \theta)] d\nu, & x \in \partial D, t > 0 \\ \theta(0) &= \theta_0, & x \in D \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde Φ satisfaz

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\varepsilon^2}{3\kappa'\lambda'} \Delta + 1 \right) \Phi &= B(\nu, \theta), & x \in D \\ \varepsilon b \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \Phi &= B(\nu, \theta_b), & x \in \partial D \end{aligned} \quad (2.2)$$

admite uma aproximação de ordem zero

$$(\theta(x, t, \varepsilon), \Phi(x, t, \varepsilon)) = (\theta^{(0)}(x, t), \Phi^{(0)}(x, t)) + O(\varepsilon). \quad (2.3)$$

Notamos que $\theta^{(0)}$ não depende de ε , a maior vantagem desta hipótese é que podemos expandir o termo não-linear $B(\nu, \theta)$ em séries de Taylor e tratar o sistema como um sistema de equações linearizadas. A ideia do desenvolvimento é que, ao assumir a existência de aproximação de ordem zero, seremos capazes de levantar algumas de suas propriedades e estabelecer condições suficientes para assegurar sua existência.

Não há maneira sistemática de construir tal solução de ordem zero, uma vez que ela pode não ser uma solução de ordem zero em suas derivadas, isto é, não estamos pressupondo que $(\nabla\theta, \nabla\Phi) \rightarrow (\nabla\theta^{(0)}, \nabla\Phi^{(0)})$ quando ε tende a zero. Assim, procedemos heurísticamente e observamos que $\left(-\frac{\varepsilon^2}{3\kappa'\lambda'} \Delta + 1 \right) \Phi = B(\nu, \theta)$, o que sugere que $\Phi^{(0)} = B(\nu, \theta^{(0)})$ longe da fronteira. Isso conduz à seguinte equação

parabólica:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t \theta^{(0)} &= \frac{4\pi}{3} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda'} \Delta B(\nu, \theta^{(0)}) d\nu, & x \in D, t > 0 \\
\theta^{(0)} &= \theta_b, & x \in \partial D, t > 0 \\
\theta^{(0)}(x, 0) &= \theta_0^{(0)}(x), & x \in \bar{D}, t = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Esta equação é conhecida como “aproximação de Rosseland” (veja [18]). Para efeitos de nossa análise, vamos impor restrições à condição de contorno θ_b e à condição inicial, θ_0 , para garantir que (2.4) tenha uma solução tão regular quanto necessário para nossa análise subsequente. Para conveniência do leitor, faremos uma breve discussão da teoria de existência para a equação de Rosseland baseada em [20] na seção 5.1. Na seção, 5.4.1, provamos que a solução $(\theta^{(0)}, \Phi^{(0)})$ do problema de Rosseland é uma aproximação de ordem zero para a solução do problema reduzido.

2.2 Expansão de Taylor em torno da aproximação de Rosseland

Expandimos (5.2)-(5.3) em torno de $(\theta^{(0)}, \phi^{(0)})$ usamos as séries de Taylor de $B(\nu, \theta)$ de θ :

$$\begin{aligned}
B(\nu, \theta) &= B(\nu, \theta^{(0)} + \varepsilon \theta^{(1)} + \varepsilon^2 \theta^{(2)} + \varepsilon^3 w_\theta) \\
&= B(\nu, \theta^{(0)}) + \varepsilon \beta_1 \theta^{(1)} + \varepsilon^2 \left[\beta_1 \theta^{(2)} + \frac{1}{2} \beta_2 \theta^{(1)2} \right] \\
&+ \varepsilon^3 \left[\beta_1 \theta^{(1)} + \beta_2 \theta^{(1)} \theta^{(2)} + \frac{1}{6} \beta_3 \theta^{(1)3} \right] \\
&+ \varepsilon^4 \left[\beta_2 \theta^{(1)} + \frac{1}{2} \beta_2 \theta^{(0)} \theta^{(2)2} + \frac{1}{2} \beta_2 \theta^{(1)2} \theta^{(2)} + \frac{1}{24} \beta_4 \theta^{(0)} \theta^{(1)4} \right] \\
&+ O(\varepsilon^5)
\end{aligned}$$

onde nós usamos as seguintes definições:

$$\beta_k(x, \nu) = \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} B(\nu, \theta^{(0)}(x)), \quad \hat{\beta}_k = \int_0^{\nu_0} \beta_k d\nu, \quad \text{e} \quad \gamma_k = \left(1 + \frac{4\pi \tilde{\beta}_k}{3\lambda' k_0} \right). \tag{2.5}$$

Aqui notamos

$$\frac{4\pi\gamma_k}{3\lambda'k_0} \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_k^{-1}\beta_k) = \frac{4\pi\tilde{\beta}_{k+1}}{3\lambda'k_0 + 4\pi\beta_k} \frac{\partial}{\partial x} \theta^{(0)} \quad (2.6)$$

onde x substitui qualquer variável (espacial ou temporal). Será conveniente definir h^* da seguinte forma:

$$h^* := h + \alpha\pi \int_0^{\nu_0} \frac{\partial}{\partial \theta} B(\nu, \theta^{(0)}) d\nu > h$$

Substituímos $\theta = \theta^{(0)} + \varepsilon\theta^{(1)} + \varepsilon^2\theta^{(2)} + O(\varepsilon^3)$ e $\Phi = \Phi^{(0)} + \varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)} + O(\varepsilon^3)$ em (5.2-5.3) e obtemos:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_t (\theta^{(0)} + \varepsilon\theta^{(1)} + \varepsilon^2\theta^{(2)}) \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda'} \Delta (\Phi^{(0)} + \varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)}) d\nu + O(\varepsilon^3), \quad x \in D, t > 0 \\ \varepsilon k_0 \frac{\partial}{\partial \eta} (\theta^{(0)} + \varepsilon\theta^{(1)} + \varepsilon^2\theta^{(2)}) & \\ &= h (\theta_b - \theta^{(0)}) + \alpha\pi \int_0^{\nu_0} (B(\nu, \theta) - B(\nu, \theta^{(0)})) d\nu \\ & \quad - \varepsilon h^* \theta^{(1)} - \varepsilon^2 h^* \theta^{(2)} - \frac{\alpha\pi}{2} \varepsilon^2 \widehat{\beta}_2 \theta^{(1)2} + O(\varepsilon^3), \quad x \in \partial D, t > 0 \\ \theta^{(0)} + \varepsilon\theta^{(1)} + \varepsilon^2\theta^{(2)} &= \theta_0^{(0)} + \varepsilon\theta_0^{(1)} + \varepsilon^2\theta_0^{(2)}, \quad x \in D, t = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

e

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\varepsilon^2}{3\kappa'\lambda'} \Delta + 1 \right) (\Phi^{(0)} + \varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)}) = \\ & \quad \beta_0 + \varepsilon\beta_1\theta^{(1)} + \varepsilon^2 \left[\beta_1\theta^{(2)} + \frac{1}{2}\beta_2\theta^{(1)2} \right], \quad x \in D, t > 0 \\ & \quad \varepsilon b \frac{\partial}{\partial \eta} (\Phi^{(0)} + \varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)}) = \\ & B(\nu, \theta_b) - (\Phi^{(0)} + \varepsilon\Phi^{(1)} + \varepsilon^2\Phi^{(2)}) + O(\varepsilon^3), \quad x \in \partial D, t > 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Continuamos a construção da expansão do problema reduzido usando técnicas descritas em [15] e [21], que consiste basicamente em construir funções representando o comportamento longe da fronteira, o comportamento perto da fronteira e, finalmente, perto da condição inicial.

2.3 Expansão de primeira ordem do problema reduzido

A expansão no interior de (2.8) e (2.7) é facilmente realizada coletando os termos de mais baixa ordem em ε :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_i \theta_i^{(1)} &= \frac{4\pi}{3} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda'} \Delta \Phi_i^1 d\nu, & x \in D, t > 0 \\
\theta_i^{(1)} &= \theta_b^{(1)}, & x \in \partial D, t > 0 \\
\theta_i^{(1)} &= \theta_0^{(1)}, & x \in D, t = 0 \\
\Phi_i^{(1)} &= \beta_1 \theta^{(1)}, & x \in \bar{D}, t > 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Esta é uma equação linear parabólica em $\theta^{(1)}$ com condições de fronteira do tipo Dirichlet. O valor de $\theta_b^{(1)}$ será definido subsequentemente baseado em um critério de compatibilidade entre as expansões no interior e próximo à fronteira.

Se subtraímos de (2.7)-(2.8) os termos internos definidos por (2.9), reescrevemos as equações no sistema de variáveis reescaladas e coletamos os termos de mais baixa ordem em ε (veja [15] para detalhes do método), nós obtemos:

$$\begin{aligned}
-k_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta_o^{(1)} &= \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi_o^{(1)} d\nu, & 0 < y < \infty \\
-k_0 \frac{\partial}{\partial y} \theta_o^{(1)} + h^* \theta_o^{(1)} &= -k_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \theta^{(0)} - h^* \theta_b^{(1)}, & y = 0 \\
-\frac{1}{3\kappa' \lambda'} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi_o^{(1)} + \Phi_o^{(1)} &= \beta_1(0, \nu) \theta_o^{(1)}, & 0 < y < \infty \\
-b \frac{\partial}{\partial y} \Phi_o^{(1)} + \Phi_o^{(1)} &= -b \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi^{(0)} - \beta_1(0, \nu) \theta_b^{(1)}, & y = 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Este sistema é complementado com a condição que $\theta_o^{(1)}$ e $\Phi_o^{(1)}$ devem convergir para zero longe da fronteira ∂D . Assim, nós impomos sobre estas funções a seguinte condição:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \theta_o^{(1)}(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \Phi_o^{(1)}(y) = 0$$

Como $-k_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta_o^{(1)} = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi_o^{(1)} d\nu$, sabemos que

$$\theta_o^{(1)} = -\frac{1}{3k_0} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{\lambda'} \Phi_o^{(1)} d\nu + c_0 + c_1 y.$$

As constantes c_0 e c_1 não dependem de y nem de ε , mas podem variar com w . A condição de que y deve tender a infinito força a identidade $c_0 = c_1 = 0$, de onde $\Phi_o^{(1)}$

deve satisfazer a seguinte equação íntegro-diferencial:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3\kappa'\lambda'}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi_o^{(1)} + \Phi_o^{(1)} &= -\frac{\beta_1(0,\nu)}{3k_0}\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{4\pi}{\lambda'}\Phi_o^{(1)}d\nu, & 0 < y < \ell_0/\varepsilon \\ -b\frac{\partial}{\partial y}\Phi_o^{(1)} + \Phi_o^{(1)} &= g_b(\nu) := -b\frac{\partial}{\partial\eta}\Phi^{(0)} - \beta_1(0,\nu)\theta_b^{(1)}, & y = 0 \\ \lim_{y\rightarrow\infty}\Phi_o^{(1)}(y) &= 0 \end{aligned}$$

simultaneamente a $\theta_o^{(1)} = -\frac{1}{3k_0}\int_{\nu_0}^{\infty}\frac{4\pi}{\lambda'}\Phi_o^{(1)}d\nu$ com sua condição inicial associada dada por:

$$-k_0\frac{\partial}{\partial y}\theta_o^{(1)} + h^*\theta_o^{(1)} = -k_0\frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)} - h^*\theta_b^{(1)}, \quad y = 0.$$

Este problema (considerado como uma equação para $\Phi_o^{(1)}/\beta_1(0,\nu)$) tem uma solução para cada $g_b(\nu)$ dada pelo lema 5.3.1 e possui decaimento exponencial devido ao lema 5.3.2. O problema agora é determinar o valor de $\theta_b^{(1)}$ de forma que seja possível que tanto a condição de contorno em $\theta_o^{(1)}$ e $\Phi_o^{(1)}$ sejam satisfeitas. Para fazer isso, definimos N_r o funcional que liga a função $g_b(\nu)$ ao valor de $-k_0\frac{\partial}{\partial y}\theta_o^{(1)} + h^*\theta_o^{(1)}$ em $y = 0$ dado pela solução da equação linear. Em termos de N_r , a condição inicial sob $\theta_b^{(1)}$ implica a seguinte identidade:

$$-k_0\frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)} - h^*\theta_b^{(1)} = N_r \left[-b\frac{\partial}{\partial\eta}\Phi^{(0)} - \beta_1(0,\nu)\theta_b^{(1)} \right]$$

cuja solução deve ser:

$$\theta_b^{(1)} = \frac{N_r \left(b\frac{\partial}{\partial\eta}\Phi^{(0)} \right) - k_0\frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)}}{h^* - N_r\beta_1(0,\nu)} = \frac{N_r(b\beta_1) - k_0}{h^* - N_r\beta_1(0,\nu)}\frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)}. \quad (2.11)$$

Observamos que N_r é um funcional negativamente monotônico, a prova é idêntica à do lema 3.3.1.

Notamos que para o caso quando σ' e κ' não depende de ν (hipótese cinza), este problema apresenta uma solução analítica que pode ser calculada introduzindo $\tilde{\Phi}_o^1 = \int_{\nu_0}^{\infty}\Phi_o^1d\nu$ e $\tilde{\beta}_1 = \int_{\nu_0}^{\infty}\beta_1d\nu$. Então, temos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3\kappa'\lambda'}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{\Phi}_o^1 + \left(1 + \frac{\tilde{\beta}_1(0,\nu)}{3k_0}\frac{4\pi}{\lambda'}\right)\tilde{\Phi}_o^1 &= 0, & 0 < y < \ell_0/\varepsilon \\ -b\frac{\partial}{\partial y}\tilde{\Phi}_o^1 + \tilde{\Phi}_o^1 &= g_b(\nu) := -b\frac{\partial}{\partial\eta}\Phi^{(0)} - \tilde{\beta}_1(0,\nu)\theta_b^{(1)}, & y = 0 \\ \lim_{y\rightarrow\infty}\tilde{\Phi}_o^1(y) &= 0 \end{aligned}$$

A solução desta equação diferencial é dada por

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_o^{(1)} &= \tilde{\Phi}_o^{(1)}(0)e^{-\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)}y} \\ \frac{\partial}{\partial y}\tilde{\Phi}_o^{(1)} &= -\tilde{\Phi}_o^{(1)}(0)\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)}e^{-\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)}y}.\end{aligned}$$

A condição inicial em $\tilde{\Phi}_o^{(1)}(0)$ implica a seguinte relação:

$$\tilde{\Phi}_o^{(1)}(0) \left(b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + 1 \right) = -b\frac{\partial}{\partial\eta}\tilde{\Phi}^{(0)} - \tilde{\beta}_1(0)\theta_b^{(1)}.$$

Usamos o fato que $\theta_o^{(1)} = -\frac{4\pi}{3k_0\lambda'}\tilde{\Phi}_o^{(1)}$ para obter a seguinte condição sob $\theta_o^{(1)}(0)$

$$-\frac{3k_0\lambda'}{4\pi}\theta_o^{(1)}(0) \left(b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + 1 \right) = -b\frac{\partial}{\partial\eta}\tilde{\Phi}^{(0)} - \tilde{\beta}_1(0)\theta_b^{(1)}.$$

Usamos agora a seguinte relação:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta}\tilde{\Phi}^{(0)}(0) &= \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\int_{\nu_0}^{\infty} B(\nu, \theta^{(0)}) d\nu \right) \\ &= \int_{\nu_0}^{\infty} \beta_1(0) \frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)} d\nu = \tilde{\beta}_1(0) \frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)}\end{aligned}$$

para obter

$$-\theta_o^{(1)}(0) \left(b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + 1 \right) + \frac{4\pi}{3k_0\lambda'}\tilde{\beta}_1(0)\theta_b^{(1)} = -\frac{4\pi}{3k_0\lambda'}b\tilde{\beta}_1(0)\frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)}.$$

A fim de obter uma segunda equação para $\theta_o^{(1)}(0)$ e $\theta_b^{(1)}$, partimos da condição inicial sob $\theta_o^{(1)}$ dada por $-k_0\frac{\partial}{\partial y}\theta_o^{(1)} + h^*\theta_o^{(1)} = -k_0\frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)} - h^*\theta_b^{(1)}$ e lembramos que como $\theta_o^{(1)} = -\frac{4\pi}{3k_0\lambda'}\tilde{\Phi}_o^{(1)}$, devemos ter:

$$\begin{aligned}\theta_o^{(1)} &= \theta_o^{(1)}(0)e^{-\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)}y} \\ \frac{\partial}{\partial y}\theta_o^{(1)} &= -\theta_o^{(1)}(0)\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)}e^{-\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)}y}\end{aligned}$$

ou seja:

$$\left(k_0\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + h^* \right) \theta_o^{(1)}(0) + h^*\theta_b^{(1)} = -k_0\frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)}.$$

Assim temos o seguinte sistema linear sob $\theta_o^{(1)}(0)$ e $\theta_b^{(1)}$:

$$\begin{bmatrix} - \left(b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + 1 \right) & \frac{4\pi}{3k_0\lambda'}\tilde{\beta}_1(0) \\ \left(k_0\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + h^* \right) & h^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_o^{(1)}(0) \\ \theta_b^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4\pi}{3k_0\lambda'}b\tilde{\beta}_1(0)\frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)} \\ -k_0\frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{bmatrix} \theta_o^{(1)}(0) \\ \theta_b^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + 1\right) & \frac{4\pi}{3k_0\lambda'}\tilde{\beta}_1(0) \\ \left(k_0\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + h^*\right) & h^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{4\pi}{3k_0\lambda'}b\tilde{\beta}_1(0)\frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)} \\ -k_0\frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\left(b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + 1\right) & \frac{4\pi}{3k_0\lambda'}\tilde{\beta}_1(0) \\ \left(k_0\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + h^*\right) & h^* \end{bmatrix}^{-1} = \\ & \frac{1}{\det} \cdot \begin{bmatrix} -h^* & \frac{4\pi}{3k_0\lambda'}\tilde{\beta}_1(0) \\ \left(k_0\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + h^*\right) & \left(b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + 1\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{onde } \det = \left(b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + 1\right) h^* + \frac{4\pi}{3k_0\lambda'}\tilde{\beta}_1(0) \left(k_0\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + h^*\right)$$

e os valores de $\theta_b^{(1)}$ e $\theta_o^{(1)}(0)$ são dados por:

$$\begin{aligned} \theta_b^{(1)} &= -\frac{k_0 \left(b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + 1\right) + \left(k_0\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + h^*\right) \frac{4\pi}{3k_0\lambda'}b\tilde{\beta}_1(0)}{\left(b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + 1\right) h^* + \frac{4\pi\tilde{\beta}_1(0)}{3\lambda'k_0} \left(k_0\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + h^*\right)} \frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)} \\ \theta_o^{(1)}(0) &= \frac{\frac{4\pi}{3k_0\lambda'}\tilde{\beta}_1(0) (h^*b - k_0)}{\left(b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + 1\right) h^* + \frac{4\pi\tilde{\beta}_1(0)}{3\lambda'k_0} \left(k_0\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + h^*\right)} \frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)} \end{aligned}$$

observamos que $\theta_b^{(1)}$ pode ser escrito como:

$$\theta_b^{(1)} = -\frac{k_0 + \frac{k_0\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)+h^*}}{b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)+1}} \frac{4\pi}{3k_0\lambda'}b\tilde{\beta}_1(0)}{h^* + \frac{4\pi\tilde{\beta}_1(0)}{3\lambda'k_0} \frac{k_0\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)+h^*}}{b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)+1}}} \frac{\partial}{\partial\eta}\theta^{(0)}$$

e, assim, comparamos com (2.11) e temos:

$$N_r(g_b) = -\frac{k_0\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + h^*}{b\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma_1(0)} + 1} \frac{4\pi}{3k_0\lambda'} \int_{\nu_0}^{\infty} g_b(\nu) d\nu. \quad (2.13)$$

2.4 Aproximação de primeira ordem do problema reduzido

2.4.1 Correção perto da condição inicial

Notamos que uma expansão próxima à fronteira de θ pode não satisfazer a condição inicial $\theta_o^{(1)} = 0$ e por esta razão, introduzimos um termo corretor, $\theta_\tau^{(1)}$,

que é definido como a solução do seguinte problema parabólico linear:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \theta_\tau^{(1)} - k_0 \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \theta_\tau^{(1)} &= 0, & y > 0, t > 0 \\ \theta_\tau^{(1)} &= -\theta_o^{(1)}, & t = 0, y > 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} \theta_\tau^{(1)} + h^* \theta_\tau^{(1)} &= 0, & y = 0, t > 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \theta_\tau^{(1)} &= 0, & t > 0 \end{aligned}$$

2.4.2 Estimativas de erro para o problema reduzido

Definimos Φ_a e θ_a com o objetivo de estimar o erro induzido pela aproximação de primeira ordem:

$$\Phi_a = \Phi_i + (\Phi_o + \Phi_\tau) \xi(x) \quad (2.14)$$

$$= \left(\Phi^{(0)} + \varepsilon \Phi_i^{(1)} \right) + \varepsilon \Phi_o^{(1)} \xi(x)$$

$$\text{e} \quad (2.15)$$

$$\theta_a = \theta_i + (\theta_o + \theta_\tau) \xi(x)$$

$$= \left(\theta^{(0)} + \varepsilon \theta_i^{(1)} \right) + (\varepsilon \theta_o^{(1)} + \varepsilon \theta_\tau^{(1)}) \xi(x) \quad (2.16)$$

Lembramos que $\xi(x)$ é uma função de corte definida por (1.21). Por construção, temos que para $t > 0$ e $\text{dist}(x, \partial D) > \ell_0$ $\mathcal{L}_t \theta_a - \int_{\nu_0}^\infty \frac{4\pi}{3\lambda'} \Delta \Phi_a d\nu = 0$ e na camada de fronteira, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t \theta_a - \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \Delta \Phi_a d\nu &= -\xi (k_0 L_1 + v_r) \frac{\partial}{\partial y} (\theta_o^{(1)} + \theta_\tau^{(1)}) \\
&- \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \left(\xi L_1 + 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \xi \right) \frac{\partial}{\partial y} \Phi_o^{(1)} d\nu \\
&- 2k_0 \frac{\partial}{\partial y} (\theta_o^{(1)} + \theta_\tau^{(1)}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \xi - \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} L_1 \frac{\partial}{\partial y} \Phi_o^{(1)} d\nu \\
&+ \varepsilon \left\{ \xi \left(\frac{\partial}{\partial t} - k_0 L_2 + v_w \cdot \nabla \right) \theta_o^{(1)} \right. \\
&+ \xi (-k_0 L_2 + v_w \cdot \nabla) \theta_\tau^{(1)} \\
&- (k_0 L_1 + v_r) (\theta_o^{(1)} + \theta_\tau^{(1)}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \xi \\
&- \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} L_1 + \xi L_2 \right) \Phi_o^{(1)} d\nu \xi \\
&\left. + \left(-k_0 (\theta_o^{(1)} + \theta_\tau^{(1)}) - \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \Phi_o^{(1)} d\nu \right) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \xi \right\}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Introduzimos $\theta^{(2)}$ e $\theta^{(3)}$, as soluções das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
-k_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta^{(2)} &= -\xi (k_0 L_1 + v_r) \frac{\partial}{\partial y} (\theta_o^{(1)} + \theta_\tau^{(1)}) \\
&- \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \left(\xi L_1 + 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \xi \right) \frac{\partial}{\partial y} \Phi_o^{(1)} d\nu \\
&- 2k_0 \frac{\partial}{\partial y} (\theta_o^{(1)} + \theta_\tau^{(1)}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \xi - \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} L_1 \frac{\partial}{\partial y} \Phi_o^{(1)} d\nu, \quad y > 0, t > 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-k_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta^{(3)} &= \xi \left(\frac{\partial}{\partial t} - k_0 L_2 + v_w \cdot \nabla \right) \theta_o^{(1)} + \xi (-k_0 L_2 + v_w \cdot \nabla) \theta_\tau^{(1)} \\
&- (k_0 L_1 + v_r) (\theta_o^{(1)} + \theta_\tau^{(1)}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \xi \\
&- \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} L_1 + \xi L_2 \right) \Phi_o^{(1)} d\nu \xi \\
&+ \left(-k_0 (\theta_o^{(1)} + \theta_\tau^{(1)}) - \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \Phi_o^{(1)} d\nu \right) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \xi + k_0 L_1 \frac{\partial}{\partial y} \theta^{(2)},
\end{aligned}$$

ambos se anulando quando $y \rightarrow \infty$. Observamos que estas funções foram introduzidas para cancelar os termos de ordem zero e um em (2.17) e que eles são uniformemente limitados em ε quando $\theta_o^{(1)}$ e $\Phi_o^{(1)}$ pertence a $L_2 \cap C_0$. Estes cálculos levam à seguinte estimativa:

$$\mathcal{L}_t (\theta_a + \varepsilon^2 \theta^{(2)} + \varepsilon^3 \theta^{(3)}) - \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \Delta \Phi_a d\nu = O(\varepsilon^2), \quad x \in D. \tag{2.18}$$

Agora nós observamos que a função Φ_a satisfaz:

$$\left(-\frac{\varepsilon^2}{3\lambda'\kappa'}\Delta + 1\right)\Phi_a = \begin{cases} B(\nu, \theta^{(0)}) + \varepsilon\beta_1\theta_i^{(1)} - \frac{\varepsilon^2}{3\kappa'\lambda'}\Delta \left[\beta_1\theta^{(0)} + \varepsilon\beta_1\theta_i^{(1)}\right], & x \in \overline{D}\setminus F \\ B(\nu, \theta^{(0)}) + \varepsilon\beta_1\theta_i^{(1)} - \frac{\varepsilon^2}{3\kappa'\lambda'}\Delta \left[\beta_1\theta^{(0)} + \varepsilon\beta_1\theta_i^{(1)}\right] \\ -\frac{\varepsilon^3}{3\kappa'\lambda'}L_2(\xi\Phi_o^{(1)}) - \frac{\varepsilon^2}{3\kappa'\lambda'}L_1\frac{\partial}{\partial y}(\xi\Phi_o^{(1)}) \\ -\frac{\varepsilon}{3\kappa'\lambda'}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\xi\Phi_o^{(1)}) + \varepsilon(\xi\Phi_o^{(1)}), & x \in F. \end{cases} \quad (2.19)$$

Agora usamos o resultado seguinte:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3\kappa'\lambda'}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\xi\Phi_o^{(1)}) + (\xi\Phi_o^{(1)}) &= \xi \left[-\frac{1}{3\kappa'\lambda'}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi_o^{(1)} + \Phi_o^{(1)} \right] \\ &- 2\varepsilon\frac{1}{3\kappa'\lambda'}\frac{\partial}{\partial \zeta}\xi\frac{\partial}{\partial y}\Phi_o^{(1)} \\ &- 2\varepsilon^2\frac{1}{3\kappa'\lambda'}\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\xi\Phi_o^{(1)} \\ &= \xi [\beta_1(\nu, 0)\theta_o^{(1)}] \\ &- 2\varepsilon\frac{1}{3\kappa'\lambda'}\frac{\partial}{\partial \zeta}\xi\frac{\partial}{\partial y}\Phi_o^{(1)} \\ &- 2\varepsilon^2\frac{1}{3\kappa'\lambda'}\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\xi\Phi_o^{(1)} \end{aligned}$$

como $\beta_1(\nu, 0)\theta_o^{(1)} = \beta_1(\nu, \varepsilon y)\theta_o^{(1)} + \beta_2(0)O(\varepsilon)$.

Então nós definimos as funções de erro, que representam a diferença entre a solução do problema reduzido e a aproximação de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 w_\Phi &:= \Phi - \Phi_a - \varepsilon\Phi_2 - \varepsilon^2\Phi_3 \\ \varepsilon^2 w_\theta &:= \theta - \theta_a - \varepsilon^2\theta^{(2)}\xi - \varepsilon^3\theta^{(3)}\xi. \end{aligned}$$

Aqui Φ_2 e Φ_3 são escolhidos de forma a anular os termo de maior ordem na expansão:

$$\left(-\frac{\varepsilon^2}{3\lambda'\kappa'}\Delta + 1\right)w_\phi = \frac{1}{\varepsilon^2} [B(\nu, \theta_a) - B(\nu, \theta_a + \varepsilon^2 w_\theta)] + \beta_1 O(\varepsilon^2), \quad x \in D \quad (2.20)$$

A constante β_1 aqui indica que a estimativa é integrável em $\nu \in (\nu_0, \infty)$.

As seguintes estimativas são válidas por construção:

$$\varepsilon\frac{\partial w_\theta}{\partial \eta} + h^*w_\theta = O(1), \quad x \in \partial D$$

e

$$b \frac{\partial w_{\Phi}}{\partial \eta} + w_{\Phi} = O(1), x \in \partial D$$

de forma que temos um problema da forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t w_{\theta} - \frac{4\pi}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (w_{\Phi} - \beta(w_{\theta})) d\nu &= O(1), \quad x \in D, t > 0 \\ w_{\theta}(0) &= O(1), \quad x \in D, t = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial w_{\theta}}{\partial \eta} + h^* w_{\theta} &= O(1), \quad x \in \partial D \\ \left(-\frac{\varepsilon^2}{3\lambda' \kappa'} \Delta + 1 \right) (w_{\Phi}) &= \beta(w_{\theta}) + \beta_2 O(\varepsilon), \quad x \in D \\ \varepsilon b \frac{\partial w_{\Phi}}{\partial \eta} + w_{\Phi} &= O(1), \quad x \in \partial D \end{aligned}$$

$$\text{com } \beta(w_{\theta}) = \frac{1}{\varepsilon^2} [B(\nu, \theta_a) - B(\nu, \theta_a + \varepsilon^2 w_{\theta})]$$

A fim de estabelecer um cota superior para esta equação, definimos a seguinte supersolução $\bar{w}_{\theta} = a(t)$ e $\bar{w}_{\Phi} = \beta(a(t)) + \varepsilon^2 c(\nu) (-\varepsilon \psi(x) + 1)$, onde $\psi(x)$ satisfaz:

$$\begin{aligned} |\psi(x)| &\leq \psi_{\infty}, \\ \Delta \psi(x) &\geq \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-k\zeta}, \quad x \in F \\ \Delta \psi(x) &\geq -c_g, \quad x \in D \\ \left| \varepsilon b \frac{\partial w_{\Phi}}{\partial \eta} + w_{\Phi} \right| &\leq c_b, \quad x \in \partial D \end{aligned}$$

onde $k > 0$ a ser escolhido e mediante as seguintes condições:

$$\begin{aligned} a'(t) - 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' c(\nu) (-\varepsilon \psi(x) + 1) d\nu &\geq O(1), \quad x \in D, t > 0 \\ a(0) &\geq O(1), \quad x \in D, t = 0 \\ h^* w_{\theta} &\geq O(1), \quad x \in \partial D \\ -\frac{\varepsilon^2}{3\lambda' \kappa'} \Delta \beta(a(t)) + \varepsilon^3 c(\nu) \Delta \psi + \varepsilon^2 c(\nu) (-\varepsilon \psi(x) + 1) &\geq \beta_1 O(\varepsilon^2), \quad x \in D \\ \beta(a(t)) + \varepsilon^2 c(\nu) &\geq O(1), \quad x \in \partial D. \end{aligned}$$

Integrando a inequação a terceira inequação acima, temos a seguinte expressão para $x \in D$:

$$- \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{3\lambda'} \Delta\beta(a(t)) d\nu + \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \varepsilon^3 c(\nu) \Delta\psi d\nu + \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \varepsilon^2 (-\varepsilon\psi(x) + 1) d\nu \geq O(1).$$

Observamos agora que da definição de β e do fato que

$$|\Delta\Phi_1| \leq \frac{A_b}{\varepsilon} e^{-k_0\zeta}\xi + A_g$$

por consequência da definição em (2.14), temos:

$$\left| \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda'} \Delta\beta(a(t)) d\nu \right| \leq \left(\frac{D_b}{\varepsilon} \xi + D_g \right) a(t)$$

o que conduz às seguintes desigualdades:

$$a'(t) - 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' c(\nu) d\nu \geq O(1) \geq Ca(t) + O(1)$$

Assim basta escolher $a(t)$ como uma exponencial e estabelecemos o seguinte resultado:

Teorema 2.4.1. *Existem constantes positiva C_1 e C_2 tais que*

$$\|\theta(t) - \theta_a(t)\|_{C_0} \leq C_1 e^{C_2 t \varepsilon^2} \quad \|\Phi(t) - \Phi_a(t)\|_{C_0} \leq C_1 e^{C_2 t \varepsilon^2} \quad (2.21)$$

3 ANÁLISE ASSINTÓTICA DO PROBLEMA ORIGINAL

3.1 Expansão assintótica do problema original

Nós agora construiremos uma expansão de primeira ordem para a expansão para o problema original. Mais uma vez, empregamos basicamente as técnicas que usamos para expandir o problema reduzido e procuramos soluções em torno da aproximação de Rosseland. O problema original é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t T &:= = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left(\widehat{I} - 4\pi B(\nu, T) \right) d\nu, & x \in D, t > 0 \\
\varepsilon \frac{\partial T}{\partial \eta} &= h(\theta_b - T) + \alpha\pi \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, T)] d\nu, & x \in \partial D, t > 0 \\
T(x, 0) &= T_0(x, \varepsilon), & x \in D, t = 0 \\
\varepsilon \Omega \cdot \nabla I + \lambda' I &= \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{I} + \kappa' B(\nu, T), & x \in D, t > 0 \\
I(\Omega) &= \rho I(\Omega') + (1 - \rho) B(\nu, T_b), & x \in \partial D, t > 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2 Expansão longe da fronteira do problema original

Uma vez que temos uma aproximação de ordem zero para o sistema original, procedemos com a expansão em séries de Taylor no termo não-linear:

$$\begin{aligned}
B(\nu, T) &= B(\nu, T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)} + \varepsilon^3 w_T) \\
&= B(\nu, T^{(0)}) + \varepsilon \beta_1 T^{(1)} + \varepsilon^2 \left[\beta_1 T^{(2)} + \frac{1}{2} \beta_2 T^{(1)2} \right] \\
&+ \varepsilon^3 \left[\beta_1 T^{(1)} + \beta_2 T^{(1)} T^{(2)} + \frac{1}{6} \beta_3 T^{(1)3} \right] \\
&+ \varepsilon^4 \left[\beta_2 T^{(1)} T^{(1)} + \frac{1}{2} \beta_2 T^{(0)} T^{(2)2} + \frac{1}{2} \beta_2 T^{(1)2} T^{(2)} + \frac{1}{24} \beta_4 T^{(0)} T^{(1)4} \right] + O(\varepsilon^5).
\end{aligned}$$

Assim, a expansão no interior é dada por:

$$\begin{aligned}
I_i^{(0)} &= B(\nu, T^{(0)}) \\
I_i^{(1)} &= \beta_1 T_i^{(1)} - \frac{1}{\lambda'} (\Omega \cdot \nabla) B(\nu, T^{(0)}) \\
I_i^{(2)} &= \left[\beta_1 T_i^{(2)} + \frac{1}{2} \beta_2 T_i^{(1)2} \right] + \frac{\sigma'}{3\lambda'^2 \kappa'} \Delta B(\nu, T^{(0)}) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda'} (\Omega \cdot \nabla) \beta_1 T_i^{(1)} + \frac{1}{\lambda'^2} (\Omega \cdot \nabla)^2 B(\nu, T^{(0)}) \\
I_i^{(3)} &= \left[\beta_2 T_i^{(1)} T_i^{(2)} + \frac{1}{6} \beta_3 T_i^{(1)3} \right] + \frac{\sigma'}{3\lambda'^2 \kappa'} \Delta \beta_1 T_i^{(1)} - \frac{1}{\lambda'} (\Omega \cdot \nabla) I_i^{(2)} \\
I_i^{(4)} &= \left[\frac{1}{2} \beta_2 T_i^{(0)} T_i^{(2)2} + \frac{1}{2} \beta_2 T_i^{(1)2} T_i^{(2)} + \frac{1}{24} \beta_4 T_i^{(0)} T_i^{(1)4} \right] \\
&\quad + \frac{\sigma'}{4\pi\lambda'^2 \kappa'} K \left[(\Omega \cdot \nabla)^2 I_i^{(2)} \right] - \frac{1}{\lambda'} (\Omega \cdot \nabla) I_3.
\end{aligned}$$

Esta expressão permite-nos calcular os termos de $I - B(\nu, T)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \overline{I_i - B(\nu, T_i)} &= \frac{1}{3\lambda' \kappa'} \Delta B(\nu, T^{(0)}) + \varepsilon \left\{ \frac{1}{3\lambda' \kappa'} \Delta \beta_1 T_i^{(1)} \right\} \\
&\quad + \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{3\lambda'^3 \kappa'} \Delta \left[\beta_1 T_i^{(2)} + \frac{1}{2} \beta_2 T_i^{(1)2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\sigma'}{9\lambda'^5 \kappa'^2} + \frac{1}{15\lambda'^5 \kappa'} \right) \Delta^2 B(\nu, T^{(0)}) \right\}.
\end{aligned}$$

Observamos que os termos de ordem zero e de primeira ordem obtidos aqui são idênticos a seus termos análogos no problema reduzido.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t T_i^{(1)} &= \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \Delta \beta_1 T_i^{(1)} d\nu, & x \in D, t > 0 \\
T_i^{(1)} &= T_b^{(1)}, & x \in \partial D, t > 0 \\
T_i^{(1)} &= T_0^{(1)} = \theta_0^{(1)}, & x \in D, t = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

3.3 Expansão em torno da fronteira

A expansão em torno da fronteira do problema original consiste em expandir o problema dado por (3.1) nas variáveis reescaladas (y, w) , então subtrair a aproximação no interior e coletar os termos de menor ordem em ε

$$\begin{aligned}
-k_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} T_o^{(1)} &= \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left(\widehat{I_0^{(1)}} - 4\pi \beta_1 T_o^{(1)} \right) d\nu, & y > 0 \\
-\frac{\partial}{\partial y} T_o^{(1)} + h^* T_o^{(1)} &= f_b := -\frac{\partial}{\partial \eta} T^{(0)} - h^* T_b^{(1)}, & y = 0 \\
-\mu \frac{\partial}{\partial y} I_o^{(1)} + \lambda' I_o^{(1)} &= \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{\mathcal{I}} + \kappa' \beta_1 T_o^{(1)}, & y > 0 \\
I_o^{(1)}(0, \mu) - \rho I_o^{(1)}(0, -\mu) &= (\rho - 1) \beta_1 T_b^{(1)} \\
&\quad + \frac{1}{\lambda'} (\Omega + \rho \Omega') \cdot \nabla B(\nu, T^{(0)}), & y = 0, \mu < 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

O sistema deve ser complementado com condições nulas no infinito, isto é:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_o^{(1)}(x/\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_o^{(1)}(x/\varepsilon) = 0, \quad \forall x > 0.$$

Primeiramente, deve-se notar que este problem depende de Ω mas possui derivadas apenas na variável y . Esta dificuldade pode ser minimizada escrevendo $\Omega = \mu\eta + \sqrt{1 - \mu^2}\Omega^\perp$ e tomando médias em Ω^\perp . Assim, temos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \Omega d\Omega^\perp = \mu\eta$$

Definimos \mathcal{I} como

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} I_o^{(1)} d\Omega^\perp \\ \widehat{\mathcal{I}} &= \int_{S^2} I_o^{(1)} d\nu d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 \mathcal{I} d\mu \end{aligned}$$

de forma que o problema assume a seguinte forma (quando $\varepsilon \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} -k_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} T_o^{(1)} &= \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left(\widehat{\mathcal{I}} - 4\pi\beta_1 T_o^{(1)} \right) d\nu, \quad y > 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} T_o^{(1)} + h^* T_o^{(1)} &= f_b := -\frac{\partial}{\partial \eta} T^{(0)} - h^* T_b^{(1)}, \quad y = 0 \\ -\mu \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{I} + \lambda' \mathcal{I} &= \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{\mathcal{I}} + \kappa' \beta_1 T_o^{(1)}, \quad y > 0 \\ \mathcal{I}(0, \mu) - \rho \mathcal{I}(0, -\mu) &= g_b := (\rho - 1)\beta_1 T_b^{(1)} \\ &+ \mu(1 + \rho) \frac{1}{\lambda'} \beta_1 \frac{\partial}{\partial \eta} T^{(0)}, \quad y = 0, \mu < 0 \end{aligned}$$

com condições de contorno nulas quando $y \rightarrow \infty$:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \mathcal{I} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} T_o^{(1)} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial y} T_o^{(1)} = 0$$

aqui β_1 é dado pelo seu valor na fronteira. Agora note que o fluxo de energia, $j(y) := -\int_{\nu_0}^{\infty} \int_{-1}^1 \mu \mathcal{I}(y, \mu) d\mu d\nu - \frac{k_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} T_o^{(1)}$ é constante e, portanto, nulo. Multiplicando essa equação com derivada em \mathcal{I} por $\frac{\mu}{\lambda'}$ e integrando, obtém-se:

$$\int_{\nu_0}^{\infty} \int_{-1}^1 \frac{\mu^2}{\lambda'} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{I} d\mu d\nu = \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{-1}^1 \mu \mathcal{I} d\mu d\nu = -\frac{k_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} T_o^{(1)}$$

de forma que integramos esta última expressão em $[y, \infty]$ e obtemos:

$$\int_{\nu_0}^{\infty} \int_{-1}^1 \frac{\mu^2}{\lambda'} \mathcal{I}(y, \mu) d\mu d\nu = -\frac{k_0}{2\pi} T_o^{(1)}(y).$$

Portanto o sistema (3.3) pode ser escrita como uma simples equação em $\mathcal{I}(\mu, y)$, como a seguir:

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{I} + \lambda' \mathcal{I} &= \frac{\sigma'}{2} \int_{-1}^1 \mathcal{I} d\mu' - \frac{2\pi\kappa'\beta_1}{k_0} \int_{\nu_0}^1 \int_{-1}^1 \frac{\mu'^2}{\lambda'} \mathcal{I} d\mu' d\nu, \quad y > 0 \\ \mathcal{I}(\mu) - \rho \mathcal{I}(-\mu) &= g_b(\mu, \nu), \quad y = 0, \mu < 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \mathcal{I}(y, \mu) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Esta equação pode ser reescrita na forma de uma equação integral como segue:

$$\mathcal{I}(y, \mu, \nu) = \begin{cases} \left(-\rho(\mu) \frac{1}{\mu} \int_0^\infty q(s, \nu) e^{\lambda' s/\mu} ds + g_b(\mu, \nu) \right) e^{\lambda' y/\mu} \\ \quad - \frac{1}{\mu} \int_0^y q(s, \nu) e^{\lambda'(y-s)/\mu} ds, & \mu < 0, \\ \frac{1}{\lambda'} q(y), & \mu = 0, \\ \frac{1}{\mu} \int_y^\infty q(s, \nu) e^{\lambda'(y-s)/\mu} ds, & \mu > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

onde

$$q(y, \nu) = \frac{\sigma'}{2} \int_{-1}^1 \mathcal{I} d\mu' - \frac{2\pi\kappa'\beta_1}{k_0} \int_{\nu_0}^\infty \int_{-1}^1 \frac{\mu'^2}{\lambda'} \mathcal{I} d\mu' d\nu'$$

Agora, nós olhamos para os valores de $J(y, \mu, \nu) := \frac{\lambda'}{\kappa'\beta_1} (\mathcal{I}(y, \mu, \nu) + \mathcal{I}(y, -\mu, \nu))$ para $\mu < 0$, então (3.5) tem a forma característica da função de Green de problema elíptico unidimensional, o que significa que J deve satisfazer o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\mu^2}{\lambda'^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1 \right) J(y, \mu) &= \frac{2}{\kappa'\beta_1} q(y) \\ \frac{\mu}{\lambda'} (1 + \rho) J'(0, \mu) + (1 - \rho) J(0, \mu) &= \frac{2\lambda'}{\kappa'\beta_1} g_b(\mu, \nu) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} J(y, \mu) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $q(y)$ é escrito em termos de uma incógnita J as:

$$q(y, \nu) = \int_{\nu_0}^\infty \int_{-1}^0 \left[\frac{\sigma'}{2} \delta_0(\nu - \nu_0) - \frac{2\pi\kappa'\beta_1}{k_0} \right] \frac{\kappa'\beta_1}{\lambda'} J(y, \mu, \nu) d\mu' d\nu'.$$

onde $\delta_0(\nu)$ denota a distribuição delta. Agora aplicamos os lemas 5.3.1 e 5.3.2 com $\xi = (\mu, \nu)$, $X = [-1, 0) \times [\nu_0, \infty)$ e $d\xi = d\nu d\mu$ para obter um solução com decaimento exponencial para (3.6).

Exatamente como para o problema reduzido, precisamos agora determinar o valor de $T_b^{(1)}$ que satisfaz ambas as condições iniciais em $T_o^{(1)}$ e $I_o^{(1)}$.

Com objetivo de fazer isso, definimos N a função que mapeia $g_b(\nu)$ ao valor de $-k_0 \frac{\partial}{\partial y} T_o^{(1)} + h^* T_o^{(1)}$ em $y = 0$. Em termos de N , $T_b^{(1)}$ deve resolver:

$$-k_0 \frac{\partial}{\partial \eta} T^{(0)} - h^* T_b^{(1)} = N \left[(\rho - 1) \beta_1 T_b^{(1)} + (1 + \rho) \frac{\mu}{\lambda'} \beta_1 \frac{\partial}{\partial \eta} T^{(0)} \right]$$

Cuja solução é dada:

$$T_b^{(1)} = \frac{-N \left(\mu(1 + \rho) \frac{\beta_1(0, \nu)}{\lambda'} \right) - k_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \theta^{(0)}}{h^* - N((1 - \rho) \beta_1(0, \nu))} \theta^{(0)}. \quad (3.7)$$

Observamos agora que esta expressão está bem definida dado que o funcional N é negativamente monotônico, ou seja, se $g_b \geq 0$ então $N g_b \leq 0$, isso é consequência do seguinte lema:

Lema 3.3.1. *O funcional N é negativamente monótono, i.e., $g_b \geq 0$ implica $f_b \leq 0$.*

Demonstração. A fim de dar uma prova independente deste fato, olhamos para a equação da temperatura na seguinte forma:

$$-\frac{k_0}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} T_o^{(1)} + \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \beta_1 T_o^{(1)} d\nu = \kappa' (P_g T_o^{(1)} + P_b G_b).$$

Onde os operadores P_g e P_b são definidos como

$$P_b = \int_{\nu_0}^{\infty} \left(1 - \int_{-1}^0 \frac{\sigma'}{2} K_\xi d\mu \right)^{-1} d\nu \quad \text{e}$$

$$P_g = \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \beta_1 \left(1 - \int_{-1}^0 \frac{\sigma'}{2} K_\xi d\mu \right)^{-1} \int_{-1}^0 K_\mu d\mu d\nu.$$

O operador K_ξ é definido conforme no lema 5.3.1 e lembramos que $\xi = (\mu, \nu)$. O operador K_ξ preserva positividade uma vez que seu núcleo é uma função positiva. A propriedade de preservar positividade do operador P_g é devida à sua representação em série de Taylor com coeficientes positivos

Agora olhamos para a função T_a^L definido no segmento $0 \leq y \leq L$ para $L > 0$ como a solução de

$$-\frac{k_0}{4\pi\kappa'} \frac{\partial^2}{\partial y^2} T_a^L + \tilde{\beta}_1 T_a^L = P_g T_a^L + P_b G_b$$

$$T_a^L = f_b \quad \frac{\partial}{\partial y} T_a^L(L) = 0 \quad (3.8)$$

com extensão de T_a^L para $y > L$ nula. Agora escrevemos $T_a^L(L)$ como uma função de f_b e g_b , que consideramos independentes :

$$T_a(L) = B_f^L f_b + B_g^L g_b = B_f^L N g_b + B_g^L g_b = (B_f^L \circ N + B_g^L) g_b$$

aqui B_f^L e B_g^L são ambos operadores que resolvem (3.8) Do princípio do máximo (ver lema 5.5.3) e do decaimento exponencial de $T_o^{(1)}$, sabemos que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq y \leq L} |T_o^{(1)}(y) - T_a^L(y)| = 0.$$

Agora fazemos $L \rightarrow \infty$ e vemos $T_o^{(1)}$ como o limite de T_a , então devemos ter:

$$0 = \lim_{L \rightarrow \infty} (T_a B_f^L N g_b + B_g^L g_b) = (B_f^L \circ N + B_g^L) g_b.$$

Como ambos B_f^L e B_g^L são positivos, N deve ser negativo. □

3.4 Estimativas para o erro do problema original

A expansão em torno da fronteira da incógnita T é uma função de camada de fronteira que não satisfaz a condição $T_o = 0$. Este fato nos conduz a introduzir $T_\tau^{(1)}$, uma função corretora dada pela solução de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} T_\tau^{(1)} - k_0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} T_\tau^{(1)} &= 0, & y > 0, t > 0 \\ T_\tau^{(1)} &= -T_o^{(1)}, & t = 0, y > 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} T_\tau^{(1)} + h^* T_\tau^{(1)} &= 0, & y = 0, t > 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} T_\tau^{(1)} &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Usamos $T_a := (T_i^{(0)} + T_i^{(1)}) + \xi(x) [T_0 + \varepsilon T_r^{(1)}]$ e $I_a := (I_i^{(0)} + I_i^{(1)}) + \xi(x)I_0$ onde os valores de $I_i^{(j)}$ e $T_i^{(j)}$ são dados pela expansão no interior:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t T_a &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \Omega \cdot \nabla I_a d\Omega d\nu = \varepsilon \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \Delta (\beta_1 T_i^{(1)}) d\nu \\
&+ -\frac{k_0}{\varepsilon} \left(\xi \frac{\partial^2}{\partial y^2} T_o^{(1)} + \varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial y} T_o^{(1)} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} T_o^{(1)} \right) \\
&+ \left\{ k_0 L_1 \xi \frac{\partial}{\partial y} (T_o^{(1)}) + \varepsilon k_0 L_1 \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} T_o^{(1)} + v_r \frac{\partial}{\partial y} (\xi T_o^{(1)}) \right\} \\
&+ \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial t} T_o^{(1)} + L_2 T_o^{(1)} + \mathbf{v}_w \cdot \nabla T_o^{(1)} \right\} \xi \\
&+ \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \left[\left(\xi \frac{1}{\varepsilon} \mu \frac{\partial}{\partial y} + \mu \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} + \xi \Omega^{\parallel} \cdot \nabla \right) (I_o^{(1)}) \right] d\Omega d\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t T_a &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \Omega \cdot \nabla I_a d\Omega d\nu = \varepsilon \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \Delta (\beta_1 T_i^{(1)}) d\nu \\
&+ \varepsilon^{-1} \left\{ -k_0 \xi \frac{\partial^2}{\partial y^2} T_o^{(1)} + \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \left(\xi \mu \frac{\partial}{\partial y} \right) (I_o^{(1)}) d\Omega d\nu \right\} \\
&- k_0 \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial y} T_o^{(1)} + \xi v_r \frac{\partial}{\partial y} T_o^{(1)} \\
&+ \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \left[\left(\mu \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} + \xi \Omega^{\parallel} \cdot \nabla \right) (I_o^{(1)}) \right] d\Omega d\nu \\
&+ \varepsilon \left\{ -k_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} T_o^{(1)} + k_0 L_1 \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} T_o^{(1)} + v_r \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} T_o^{(1)} \right\} \\
&+ \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial t} T_o^{(1)} + L_2 T_o^{(1)} + \mathbf{v}_w \cdot \nabla T_o^{(1)} \right\} \xi.
\end{aligned}$$

Definimos agora $T^{(2)}$ e $T^{(3)}$ como as soluções de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} T^{(2)} &- k_0 \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial y} T_o^{(1)} + \xi v_r \frac{\partial}{\partial y} T_o^{(1)} \\
&+ \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \left[\left(\mu \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} + \xi \Omega^{\parallel} \cdot \nabla \right) (I_o^{(1)}) \right] d\Omega d\nu \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} T^{(3)} &= -k_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} T_o^{(1)} + k_0 L_1 \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} T_o^{(1)} + v_r \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} T_o^{(1)} \\
&+ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} T_o^{(1)} + L_2 T_o^{(1)} + \mathbf{v}_w \cdot \nabla T_o^{(1)} \right\} \xi + k_0 L_1 \frac{\partial}{\partial y} T^{(2)}
\end{aligned}$$

ambas se anulando quando $y \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t (T_a + \varepsilon^2 T^{(2)} + \varepsilon^3 T^{(3)}) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \Omega \cdot \nabla I_a d\Omega d\nu = \\ \varepsilon \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \Delta \left(\beta_1 T_i^{(1)} \right) d\nu + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Nós também:

$$\begin{aligned} \varepsilon \Omega \cdot \nabla I_a + \lambda' I_a - \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{I}_a &= \kappa' \left[B(\nu, T^{(0)}) + \varepsilon \beta_1 T_i^{(1)} \right] \\ &+ \varepsilon^2 \Omega \cdot \nabla \left(\beta_1 T_i^{(1)} \right) - \varepsilon^2 \frac{1}{\lambda'} (\Omega \cdot \nabla)^2 B(\nu, T^{(0)}) \\ &+ \varepsilon^2 \Omega \cdot \nabla (\xi I_o^{(1)}) + \varepsilon \lambda' (\xi I_o^{(1)}) - \varepsilon \frac{\sigma'}{4\pi} (\xi \widehat{I}_o^{(1)}). \end{aligned}$$

Nós usamos os fatos que

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Omega \cdot \nabla (\xi I_o^{(1)}) &= \varepsilon^2 \Omega^{\parallel} \cdot \nabla (\xi I_o^{(1)}) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \xi I_o^{(1)} + \xi \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial y} I_o^{(1)} \\ -\mu \frac{\partial}{\partial y} I_o^{(1)} + \lambda' I_o^{(1)} &= \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{I}_o^{(1)} + \kappa' \beta_1 T_o^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\nu, T^{(0)}) + \varepsilon \beta_1 \left(T_i^{(1)} + T_o^{(1)} \right) &= B \left(\nu, T^{(0)} + \varepsilon \left(\theta_i^{(1)} + T_o^{(1)} \right) \right) + O(\varepsilon^2) \\ &= B(\nu, T_a) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

para obter as seguintes estimativas:

$$\varepsilon \Omega \cdot \nabla I_a + \lambda' I_a - \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{I}_a = \kappa' B(\nu, T_a) + O(\varepsilon^2).$$

Definimos, então:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 w_T &= T - T_a - \varepsilon^2 T^{(2)} - \varepsilon^3 T^{(3)} \\ \varepsilon^2 w_I &= I - I_a - \varepsilon^2 I^{(2)}. \end{aligned}$$

Estas estimativas de erro satisfazem:

$$\varepsilon \Omega \cdot \nabla w_I + \lambda' w_I - \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{w}_I = \kappa' \widetilde{\beta}_1 w_T + O(1).$$

e

$$\mathcal{L}_t w_T + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \Omega \cdot \nabla w_T d\Omega d\nu = O(1)$$

Sobre a fronteira, a seguinte estimativa é válida por construção:

$$\varepsilon \frac{\partial w_T}{\partial \eta} + h^* w_T = O(1)$$

$$w_I(\mu) - \rho w_I(\mu') = O(1), \mu > 0.$$

A partir daqui, o mesmo tipo de análise aplicado na seção anterior estabelece o seguinte resultado:

Teorema 3.4.1. *A solução (I, T) do problema original pode ser aproximado por sua expansão de primeira ordem (I_a, T_a)*

$$\|T(t) - T_a(t)\|_{C_0} \leq C_1 e^{C_2 t} \varepsilon^2 \quad \|I(t) - I_a(t)\|_{C_0} \leq C_1 e^{C_2 t} \varepsilon^2. \quad (3.9)$$

4 COMPARAÇÃO ENTRE AS EXPANSÕES ASSINTÓTICAS

Considere a expansão assintótica de ambos os problemas, o original e o reduzido:

$$\begin{aligned} T_a &= T^{(0)} + \varepsilon \left(T_i^{(1)} + \xi(x)T_o^{(1)} \right) & e & \quad I_a = I^{(0)} + \varepsilon \left(I_i^{(1)} + \xi(x)I_o^{(1)} \right) \\ \theta_a &= \theta^{(0)} + \varepsilon \left(\theta_i^{(1)} + \xi(x)\theta_o^{(1)} \right) & e & \quad \Phi_a = \Phi^{(0)} + \varepsilon \left(\Phi_i^{(1)} + \xi(x)\Phi_o^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Agora definimos a diferença entre os dois problemas:

$$W_q = \int_{\Omega} (T_a - \theta_a) dx = \int_{\Omega} (T^{(0)} - \theta^{(0)}) dx + \varepsilon \int_{\Omega} \left(T_i^{(1)} - \theta_i^{(1)} \right) dx \quad (4.2)$$

$$+ \varepsilon \int_{\Omega} (T_o^{(1)} - \theta_o^{(1)}) \xi(x) dx \quad (4.3)$$

O termo de ordem zero é sempre nulo, uma vez que tanto $T^{(0)}$ como $\theta^{(0)}$ são dados pela equação de Rosseland.

As funções T_i^1 e $\theta_i^{(1)}$ são dadas por (2.9):

$$\mathcal{L}_t T_i^{(1)} = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \Delta (\beta_1 T^{(1)}) d\nu, \quad x \in D, t > 0$$

$$T_i^{(1)} = T_b^{(1)}, \quad x \in \partial D, t > 0$$

$$T_i^{(1)} = T_0^{(1)} = \theta_0^{(1)}, \quad x \in D, t = 0$$

e

$$\mathcal{L}_t \theta_i^{(1)} = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi}{3\lambda'} \Delta (\beta_1 \theta^{(1)}) d\nu, \quad x \in D, t > 0$$

$$\theta_i^{(1)} = \theta_b^{(1)}, \quad x \in \partial D, t > 0$$

$$\theta_i^{(1)} = \theta_0^{(1)}, \quad x \in D, t = 0$$

Onde $T_b^{(1)}$ e $\theta_b^{(1)}$ são obtidas pelas expansões em torno da fronteira e dadas pelas equações (2.11) e (3.7):

$$T_b^{(1)} = \frac{-N \left(\mu(1 + \rho) \frac{\beta_1(0, \nu)}{\lambda'} \right) - k_0}{h^* - N((1 - \rho)\beta_1(0, \nu))} \frac{\partial}{\partial \eta} \theta^{(0)}.$$

e

$$\theta_b^{(1)} = \frac{N_r \left(b \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi^{(0)} \right) - k_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \theta^{(0)}}{h^* - N_r \beta_1(0, \nu)} = \frac{N_r (b \beta_1) - k_0}{h^* - N_r \beta_1(0, \nu)} \frac{\partial}{\partial \eta} \theta^{(0)}.$$

Este problema leva a uma complicada equação algébrico-operacional, cuja solução exploramos numericamente na seções 4.2 e 4.1. Um valor aproximado para b é dado por [18], lá $b = \frac{1+3r_2}{1-2r_1} \cdot \frac{2}{3\lambda'}$, onde $r_k = \int_0^1 \rho(-\mu) \mu^k d\mu$, $k = 1, 2$. Este valor foi obtido heurísticamente na seção 1.2. Na seção 4.1, mostraremos que este mesmo resultado é consequência de uma aproximação a dois momentos do funcional N . Seguiremos nossa análise *supondo por hipótese que em certas situações, a existência de um valor positivo de b possa ser estabelecido*. A seguir, apresentamos forte evidência computacional de que isso é verdade pelo menos para valores elevados de $\tilde{\beta}_1$ (temperaturas elevadas), isso é tratado na seção 4.2. Mesmo neste caso, os termos na camada de fronteira não podem “a priori” ser comparadas. Felizmente, estes termos podem ser estimados a ordem ε em L^1 , como segue:

$$\|\xi(x) T_o^{(1)}\|_{L^1} \leq C \int_0^{\ell_0} e^{-\zeta/\varepsilon} d\zeta = O(\varepsilon).$$

A mesma estimativa é válida para todas os termos de fronteira como $\theta_0^{(1)}$. De forma que podemos estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 4.0.2. *O problema reduzido é uma aproximação de primeira ordem para o problema original no espaço L_1 contanto que exista um valor positivo de b que satisfaça $\theta_b^{(1)} = T_b^{(1)}$:*

$$\|T(x, t) - \theta(x, t)\|_{L^1} \leq C\varepsilon^2, \quad 0 \leq t \leq t_f, C(t_f) \tag{4.4}$$

$$\tag{4.5}$$

$$\|\widehat{I}(x, t) - 4\pi\Phi(x, t)\|_{L^1} \leq C\varepsilon^2, \quad 0 \leq t \leq t_f, C(t_f) \tag{4.6}$$

$$\tag{4.7}$$

4.1 Cálculo aproximado do valor de b

Nesta seção, calculamos uma solução aproximada para o problema 3.4 sob a hipótese cinza, ou seja, os coeficientes λ' , κ' e σ' são constantes. Assim,

queremos uma solução aproximada para

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial}{\partial y} \tilde{I} + \lambda' \tilde{I} &= \frac{\sigma'}{2} \int_{-1}^1 \tilde{I} d\mu' - \frac{2\pi\kappa'\tilde{\beta}_1}{k_0\lambda'} \int_{-1}^1 \mu^2 \tilde{I} d\mu, & y > 0 \\ \tilde{I}(\mu) - \rho \tilde{I}(-\mu) &= \int_{\nu_0}^{\infty} g_b(\mu, \nu) d\nu, & y = 0, \mu < 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{I}(y, \mu) &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Aqui $\tilde{I}(\mu, y) = \int_{\nu_0}^{\infty} \mathcal{I}(\mu, y, \nu) d\nu$ e $\tilde{\beta}_1 := \int_{\nu_0}^{\infty} \beta_1 d\nu$.

Buscamos uma solução aproximada da forma $\tilde{\mathcal{I}} = I_0(y) + \mu I_1(y)$. Assim, temos que os três primeiros momentos são dados por:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \tilde{\mathcal{I}} d\mu &= 2I_0(y) \\ \int_{-1}^1 \mu \tilde{\mathcal{I}} d\mu &= \frac{2}{3} I_1(y) \\ \int_{-1}^1 \mu^2 \tilde{\mathcal{I}} d\mu &= \frac{2}{3} I_0(y). \end{aligned}$$

Integrando a equação em $\tilde{\mathcal{I}}$ em $\mu \in [-1, 1]$, obtemos:

$$-\frac{2}{3} \frac{d}{dy} I_1(y) + 2\lambda' I_0(y) = 2\sigma' I_0(y) - \frac{8\pi\kappa'\tilde{\beta}_1}{3k_0\lambda'} I_0(y).$$

se multiplicarmos a mesma equação por μ e integrarmos, temos:

$$-\frac{2}{3} \frac{d}{dy} I_0(y) + \frac{2}{3} \lambda' I_1(y) = 0.$$

E simplificando, chegamos à seguinte equação de segunda ordem para I_0

$$-\frac{d^2}{dy^2} I_0(y) + 3\kappa'\lambda' \left(1 + \frac{4\pi\tilde{\beta}_1}{3k_0\lambda'} \right) I_0(y) = 0.$$

A solução limitada no infinito desta equação é da forma $I_0(y) = I_0(0)e^{-\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'}y}$, o que implica $I_1 = \frac{1}{\lambda'} \frac{d}{dy} I_0(y) = -I_0(0) \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} e^{-\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'}y}$. Observamos agora que a condição de contorno assume a seguinte forma:

$$I_0(0) \left(1 - \mu \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} \right) - I_0(0) \rho \left(1 + \mu \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} \right) = \int_{\nu_0}^{\infty} g_b(\mu, \nu) d\nu.$$

Como esta expressão não pode ser satisfeita para todo μ , propomos que ela seja satisfeita em média. Para tal multiplicamos por μ e integramos em $\mu \in [-1, 0]$:

$$\begin{aligned} I_0(0) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} \right) - I_0(0) \left(-r_1 + r_2 \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} \right) \\ = \int_{-1}^0 \mu \int_{\nu_0}^{\infty} g_b(\mu, \nu) d\nu d\mu \end{aligned}$$

o que é equivalente a:

$$\begin{aligned} I_0(0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} \right) - I_0(0) \left(r_1 - r_2 \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} \right) \\ = \int_0^1 \mu \int_{\nu_0}^{\infty} g_b(-\mu, \nu) d\nu d\mu. \end{aligned}$$

Onde $I_0(0)$ pode ser resolvido como:

$$I_0(0) = \left[\frac{1}{2} - r_1 + \left(\frac{1}{3} + r_2 \right) \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} \right]^{-1} \int_0^1 \mu \int_{\nu_0}^{\infty} g_b(-\mu, \nu) d\nu d\mu.$$

E o funcional N assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} N &= 2\pi \int_{-1}^1 \mu I(0, \mu) d\mu - \frac{2\pi h^*}{\lambda' k_0} \int_{-1}^1 \mu^2 I(0, \mu) d\mu \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \mu (I_0(0) + \mu I_1(0)) d\mu - \frac{2\pi h^*}{\lambda' k_0} \int_{-1}^1 \mu^2 (I_0(0) + \mu I_1(0)) d\mu \\ &= -\frac{4}{3} \pi I_0(0) \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} - \frac{4\pi h^*}{3\lambda' k_0} I_0(0) \\ &= -\frac{4}{3} \pi I_0(0) \frac{1}{\lambda'} \left(\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} + \frac{h^*}{k_0} \right) \end{aligned}$$

e, portanto, chegamos a:

$$N = -\frac{4\pi}{3\lambda'} \frac{\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} + \frac{h^*}{k_0}}{\frac{1}{2} - r_1 + \left(\frac{1}{3} + r_2 \right) \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'}} \int_0^1 \mu \int_{\nu_0}^{\infty} g_b(-\mu, \nu) d\nu d\mu.$$

O valor de $T_b^{(1)}$ se obtém por:

$$T_b^{(1)} = \frac{-N \left(\mu(1 + \rho) \frac{\beta_1(0, \nu)}{\lambda'} \right) - k_0}{h^* - N((1 - \rho)\beta_1(0, \nu))} \frac{\partial}{\partial \eta} \theta^{(0)}.$$

Pelo que nos interessamos pelos valores de:

$$\begin{aligned} N \left(\mu(1 + \rho) \frac{\beta_1(0, \nu)}{\lambda'} \right) &= \frac{4\pi \tilde{\beta}_1}{3\lambda'^2} \frac{\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} + \frac{h^*}{k_0}}{\frac{1}{2} - r_1 + \left(\frac{1}{3} + r_2 \right) \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'}} \int_0^1 \mu^2 (1 + \rho) d\mu \\ &= \frac{4\pi \tilde{\beta}_1}{3\lambda'^2} \frac{\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} + \frac{h^*}{k_0}}{\frac{1}{2} - r_1 + \left(\frac{1}{3} + r_2 \right) \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'}} \left(\frac{1}{3} + r_2 \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} N((1 - \rho)\beta_1(0, \nu)) &= -\frac{4\pi \tilde{\beta}_1}{3\lambda'} \frac{\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} + \frac{h^*}{k_0}}{\frac{1}{2} - r_1 + \left(\frac{1}{3} + r_2 \right) \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'}} \int_0^1 \mu (1 - \rho) d\mu \\ &= -\frac{4\pi \tilde{\beta}_1}{3\lambda'} \frac{\sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'} + \frac{h^*}{k_0}}{\frac{1}{2} - r_1 + \left(\frac{1}{3} + r_2 \right) \frac{1}{\lambda'} \sqrt{3\kappa'\lambda'\gamma'}} \left(\frac{1}{2} - r_1 \right) \end{aligned}$$

Munidos destes valores, podemos isolar b na expressão $\theta_b^{(1)} = T_b^{(1)}$, onde $\theta_b^{(1)}$ e $T_b^{(1)}$ são dadas em (2.11) e (3.7), ou seja:

$$\frac{-N\left(\mu(1+\rho)\frac{\beta_1(0,\nu)}{\lambda'}\right) - k_0}{h^* - N((1-\rho)\beta_1(0,\nu))} = \frac{N_r(b\beta_1) - k_0}{h^* - N_r\beta_1(0,\nu)}.$$

Resolvemos esta equação para b usando o software Maple 9.01 e obtemos exatamente a expressão dado na seção 1.2, ou seja:

$$b = \frac{1}{3\lambda} \frac{1 - 3\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + 3r_2}{1 - 2r_1} \cdot \frac{2}{3\lambda'}, \quad r_k = \int_0^1 \rho(-\mu)\mu^k d\mu.$$

Na seção 4.2, discutiremos como este valor se aproxima do valor obtido quando o funcional N é calculado numericamente com uma melhor aproximação para b .

4.2 Simulação numérica

Resultados de simulação do problema (3.4) são necessários para obter valores do funcional N e, assim, da constante b . Limitamos ao caso em que os parâmetros λ' , κ' e σ' são constantes (hipótese cinza), ou seja, quando é necessário resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} -\mu \frac{\partial}{\partial y} \tilde{I} + \lambda' \tilde{I} &= \frac{\sigma'}{2} \int_{-1}^1 \tilde{I} d\mu' - \frac{2\pi\kappa'\tilde{\beta}_1}{k_0\lambda'} \int_{-1}^1 \mu^2 \tilde{I} d\mu, & y > 0 \\ \tilde{I}(\mu) - \rho \tilde{I}(-\mu) &= \int_{\nu_0}^{\infty} g_b(\mu, \nu) d\nu, & y = 0, \mu < 0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{I}(y, \mu) &= 0. \end{aligned}$$

Aqui $\tilde{I}(\mu, y) = \int_{\nu_0}^{\infty} \mathcal{I}(\mu, y, \nu) d\nu$ e $\tilde{\beta}_1 := \int_{\nu_0}^{\infty} \beta_1 d\nu$.

Esta equação depende de duas variáveis, y e μ , que devem ser discretizadas. A discretização em μ pode ser realizada através de um esquema de quadratura numérica, de forma que as integrais envolvidas em (4.8) são substituídas por somatórios. Assim, definimos as abscissas $(-\mu_N, -\mu_{N-1}, \dots, \mu_{N-1}, \mu_N)$ e os pesos $(w_N, w_{N-1}, \dots, w_{N-1}, w_N)$ e obtemos

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{\sigma'}{2} - \frac{2\pi\kappa'\tilde{\beta}_1}{k_0\lambda'} \mu^2 \right) \tilde{I}(y, \mu') d\mu' \approx \sum_n w_n \left(\frac{\sigma'}{2} - \frac{2\pi\kappa'\tilde{\beta}_1}{k_0\lambda'} \mu_n^2 \right) \tilde{I}(y, \mu_n) \quad (4.9)$$

O termo da direita da equação está bem determinado apenas pelos valores de $\tilde{I}(y, \mu_n)$ pelo que definimos

$$\mathbf{I} = (I_{-N}, I_{-N+1}, \dots, I_{N-1}, I_N) = \left(\tilde{I}(y, -\mu_N), \tilde{I}(y, -\mu_{N-1}), \dots, \tilde{I}(y, \mu_N) \right).$$

Assim, o problema se torna em um sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser escrito na seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dy} = M\mathbf{I} + \frac{\sigma'}{2}S\mathbf{I} + \beta B\mathbf{I}, \quad \beta := \frac{2\pi\kappa'\tilde{\beta}_1}{\lambda'k_0}$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\mu_N} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\mu_{N-1}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\mu_{N-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\mu_N} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \frac{w_N}{\mu_N} & \frac{w_{N-1}}{\mu_N} & \dots & \frac{w_{N-1}}{\mu_N} & \frac{w_N}{\mu_N} \\ \frac{w_N}{\mu_{N-1}} & \frac{w_{N-1}}{\mu_{N-1}} & \dots & \frac{w_{N-1}}{\mu_{N-1}} & \frac{w_N}{\mu_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{-w_N}{\mu_{N-1}} & \frac{-w_{N-1}}{\mu_{N-1}} & \dots & \frac{-w_{N-1}}{\mu_{N-1}} & \frac{-w_N}{\mu_{N-1}} \\ \frac{-w_N}{\mu_N} & \frac{-w_{N-1}}{\mu_N} & \dots & \frac{-w_{N-1}}{\mu_N} & \frac{-w_N}{\mu_N} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{-w_N\mu_N^2}{\mu_N} & \frac{-w_{N-1}\mu_{N-1}^2}{\mu_N} & \dots & \frac{-w_{N-1}\mu_{N-1}^2}{\mu_N\mu_N^2} & \frac{-w_N\mu_N^2}{\mu_N} \\ \frac{-w_N\mu_N^2}{\mu_N} & \frac{-w_{N-1}\mu_{N-1}^2}{\mu_{N-1}} & \dots & \frac{-w_{N-1}\mu_{N-1}^2}{\mu_{N-1}\mu_N^2} & \frac{-w_N\mu_N^2}{\mu_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_N\mu_N^2}{\mu_{N-1}} & \frac{w_{N-1}\mu_{N-1}^2}{\mu_{N-1}} & \dots & \frac{w_{N-1}\mu_{N-1}^2}{\mu_{N-1}\mu_N^2} & \frac{w_N\mu_N^2}{\mu_{N-1}} \\ \frac{w_N\mu_N^2}{\mu_N} & \frac{w_{N-1}\mu_{N-1}^2}{\mu_{N-1}} & \dots & \frac{w_{N-1}\mu_{N-1}^2}{\mu_{N-1}} & \frac{w_N\mu_N^2}{\mu_N} \end{bmatrix}$$

A primeira investigação numérica que fizemos consistiu em verificar o decaimento exponencial das soluções de (4.8), através dos autovalores da matriz $M + \frac{\sigma'}{2}S + \beta B$. Sem perda de generalidade, consideramos $\lambda' = 1$ e fizemos variar os valores de σ' e β . Os resultados são mostrados no gráfico (4.1), que mostra o

valor do menor autovalor da matriz em função de β para vários valores de σ' em linhas cheias. As linhas tracejadas indicam o decaimento estimado pelo lema 5.3.2. Observamos que as simulações sugerem um decaimento ainda mais rápido do que pudemos provar, embora ambas estimativas concordem com o comportamento geral quando σ' e β variam. Estas estimativas se revelam importantes no momento em que desejarmos truncar o domínio para realizar simulações em um segmento finito.

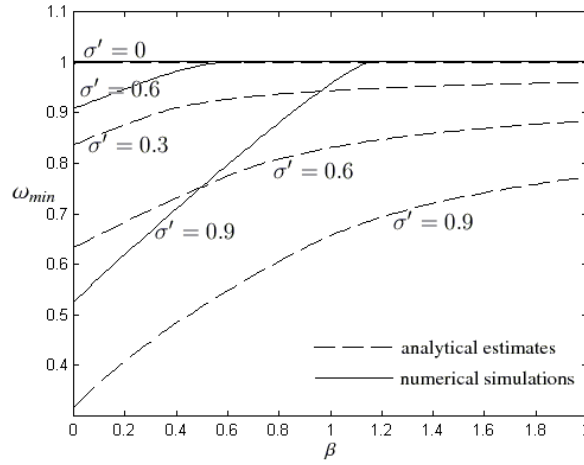


Figura 4.1: Comparação entre as estimativas analíticas e numéricas para o expoente de decaimento e a as estimativa dada por simulações numéricas. Linhas tracejadas correspondem às estimativas analíticas e linhas cheias, à simulação numérica. Simulações sugerem decaimento significativamente mais rápido.

A estimativa analítica do decaimento foi obtida pelo lema 5.3.2, assim o expoente crítico de decaimento é dado por:

$$\alpha_c = \sqrt{1 - \int_X K_+(\xi) d\xi} = \sqrt{1 - \int_{-1}^1 \left(\frac{\sigma'}{2} - \beta\mu^2 \right)_+ d\mu}$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{\sigma'}{2} - \beta\mu^2 \right)_+ d\mu = \begin{cases} 0 & \sigma' = 0 \\ \frac{2\sigma'}{3} \sqrt{\frac{\sigma'}{2\beta}} & 2\beta \geq \sigma' \\ \sigma' \left(1 - \frac{2\beta}{3\sigma'} \right) & 2\beta \leq \sigma' \end{cases}$$

Na segunda fase de simulações, estivemos interessados em calcular valores para o operador N através da solução numérica do problema discretizado. Para

isso, tomamos os momentos pares, ou seja, $u_k = \frac{1}{2}(I_k + I_{-k})$, o que equivale a resolver o sistema elíptico (3.6), que assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\lambda'^2}{\mu^2}\right) u &= \frac{2\lambda'}{\mu^2} q(y) & (4.10) \\ \frac{\mu}{\lambda'}(1 + \rho(\mu))u'(0, \mu) + (1 - \rho(\mu))u(0, \mu) &= 0, \quad \mu < 0 \\ u(L, \mu) &= 0 \end{aligned}$$

onde

$$q(y) = \int_{-1}^0 \left(\frac{\sigma'}{2} - \frac{2\pi\kappa'\tilde{\beta}_1}{\lambda'k_0} \mu'^2 \right) J(y, \mu') d\mu' \quad (4.11)$$

$$J(y, \mu) = u(y, \mu) + g_b(\mu)e^{\lambda'y/\mu}. \quad (4.12)$$

A discretização na variável μ foi feita com 80 pontos, referentes à discretização de 20 pontos dos intervalos $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$ e $[3/4, 1]$. A variável y foi discretizada em uma malha exponencial formada pelos seguintes pontos:

$$y_j = \frac{h_0}{c} \left[(1+c)^j - 1 \right], \quad j = 0, 1, \dots, N$$

aqui c é uma constante positiva a ser determinada, h_0 é a espessura inicial da malha dada por $h_0 = y_1 - y_0$. Definiremos também o comprimento L da malha e h_f , a espessura final da malha:

$$\begin{aligned} y_N - y_{N-1} &= h_f \\ y_N &= L. \end{aligned}$$

Da segunda condição, temos:

$$L = \frac{h_0}{c} \left[(1+c)^N - 1 \right]$$

supondo $(1+c)^N \gg 1$, temos:

$$(1+c)^N \approx \frac{Lc}{h_0}.$$

Da primeira condição, temos:

$$(1+c)^{N-1} h_0 = h_f.$$

Substituindo $(1 + c)^N$ por $\frac{Lc}{h_0}$, temos $\frac{c}{1+c} = \frac{h_f}{L}$. Considerado $\frac{L}{h_f} \gg 1$, temos

$$c \approx \frac{h_f}{L}.$$

Logo o termo geral da malha é dado por:

$$y_j = L \frac{h_0}{h_f} \left[\left(1 + \frac{h_f}{L} \right)^j - 1 \right].$$

Escolhemos trabalhar com uma malha de 1500 segmentos ($N = 1500$), dado

$$y_j = 5 \cdot 10^{-2} [(1.004)^j - 1], \quad j = 0, 1, \dots, 1500.$$

Assim, a discretização de segunda ordem de (4.10) assume a seguinte forma:

$$-\frac{2u_{j-1}^i}{(x_j - x_{j-1})(x_{j+1} - x_{j-1})} - \frac{2u_{j+1}^i}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j-1})} + \frac{\lambda'^2}{\mu^2} u_j^i = 2 \frac{\lambda'}{\mu_i^2} q_j$$

O que pode ser simplificado para:

$$\left[\frac{\lambda'^2}{\mu^2} + \frac{2}{(x_{j+1} - x_j)(x_j - x_{j-1})} \right] u_j^i = \frac{2u_{j-1}^i}{(x_j - x_{j-1})(x_{j+1} - x_{j-1})} + \frac{2u_{j+1}^i}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j-1})} + 2 \frac{\lambda'}{\mu_i^2} q_j$$

A condição inicial se discretiza conforme

$$\frac{\mu_i}{\lambda'} (1 + \rho_i) \left[-\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} u_0^i + \frac{x_2}{x_1(x_2 - x_1)} u_1^i - \frac{x_1}{x_2(x_2 - x_1)} u_2^i \right] + (1 - \rho_i) u_0^i = 0.$$

Assim temos um sistema discretizado cuja solução é obtida pelo método de Gauss-Seidel em um código implemento em linguagem C. Observamos que a distribuição exponencial de pontos na malha permite calcular as ordenadas mais rápidas (com μ próximo de zero) mesmo em domínios de comprimento significativo. Notamos que o operador N pode ser expresso em termos dos momentos $\int_{-1}^1 \mu I(0, \mu) d\mu$

e $\int_{-1}^1 \mu^2 I(0, \mu) d\mu$ como segue:

$$\begin{aligned} N &= f_b = -k_0 \frac{\partial}{\partial y} I + h^* T \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \mu I(0, \mu) d\mu - \frac{2\pi h^*}{\lambda' k_0} \int_{-1}^1 \mu^2 I(0, \mu) d\mu \\ &=: -2\pi N_1 - \frac{2\pi h^*}{\lambda' k_0} N_2 \end{aligned}$$

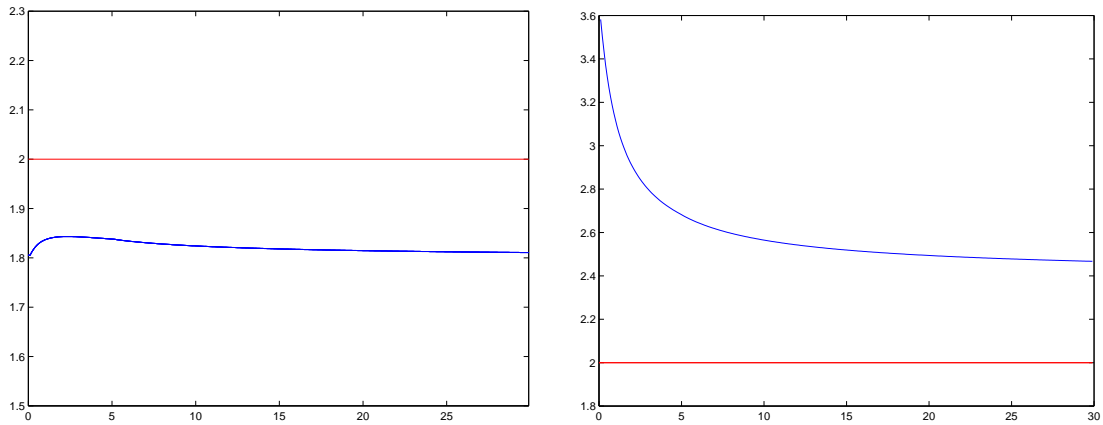


Figura 4.2: Valor obtido para o parâmetro b via simulação em função de β com $\sigma' = 0,1$ (esquerda) e $\sigma' = 0,3$ (direita), $\lambda' = 1$ e $\rho(\mu) = 0,5$ em azul. Em vermelho, aproximação a dois momentos $b = 2$.

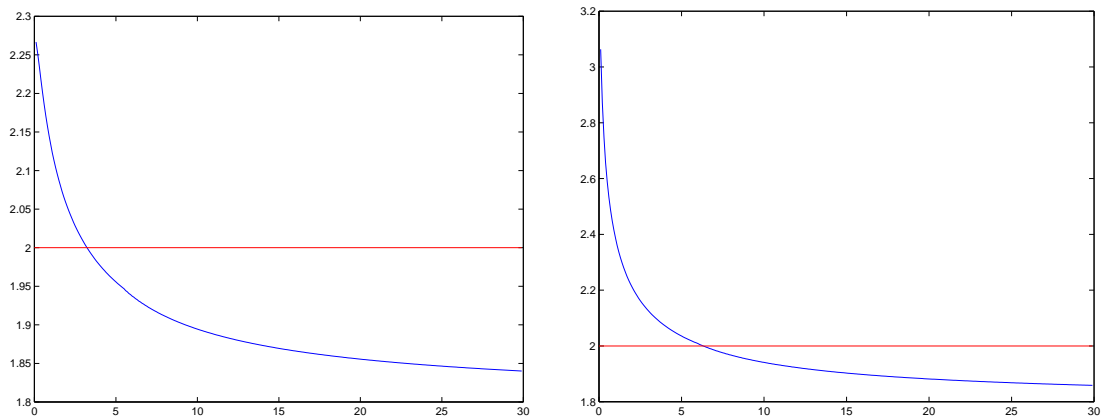


Figura 4.3: Valor obtido para o parâmetro b via simulação em função de β com $\sigma' = 0,6$ (esquerda) e $\sigma' = 0,9$ (direita), $\lambda' = 1$ e $\rho(\mu) = 0,5$ em azul. Em vermelho, aproximação a dois momentos $b = 2$.

Observamos que os resultados de simulação sugerem a existência de valores positivos para b sob a hipótese cinza pelo menos para valores pequenos

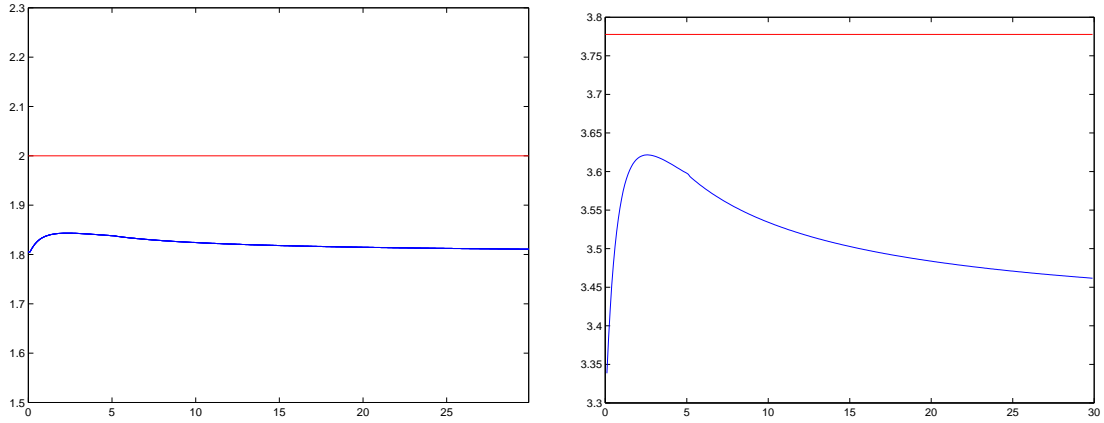


Figura 4.4: Valor obtido para o parâmetro b via simulação em função de β com $\sigma' = 0,1$, $\lambda' = 1$ onde $\rho(\mu) = 0,5$ (esquerda) e $\rho(\mu) = 0,7$ (direita) em azul. Em vermelho, aproximação a dois momentos $b = 2$ (esquerda) e $b = 3,78$ (direita).

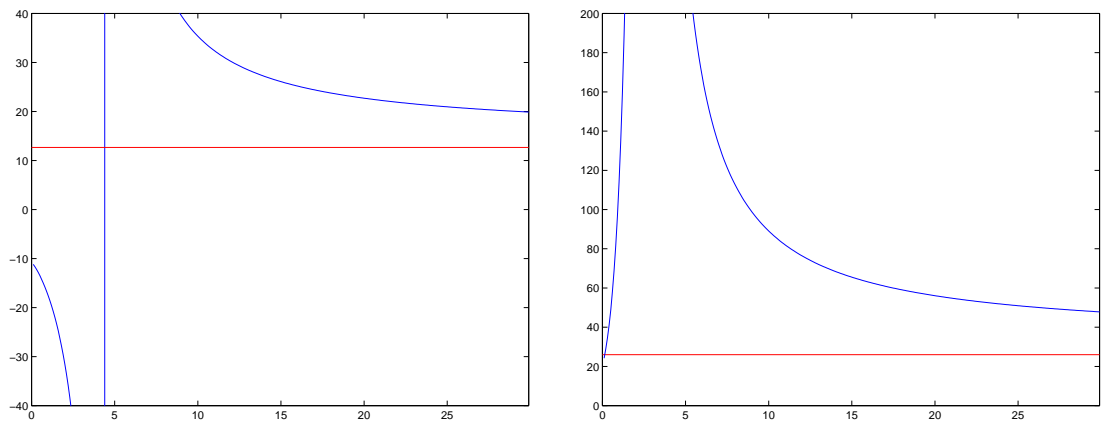


Figura 4.5: Valor obtido para o parâmetro b via simulação em função de β com $\sigma' = 0,1$, $\lambda' = 1$ onde $\rho(\mu) = 0,9$ (esquerda) e $\rho(\mu) = 0,95$ (direita) em azul. Em vermelho, aproximação a dois momentos $b = 12,67$ (esquerda) e $b = 26$ (direita).

de ρ e σ' ou valores elevados de $\tilde{\beta}_1$. Observamos que o parâmetro $\tilde{\beta}_1$ é crescente com a temperatura T_b na fronteira e decrescente com o coeficiente de difusão k_0 . Isso significa que a aproximação é viável quando o fluxo de energia por radiação predomina a condução, ou seja, quando as temperaturas são elevadas.

5 TEORIA DE EXISTÊNCIA

5.1 Teoria de existência para o problema de Rosseland

Nós primeiramente observamos que em (2.4), o termo de segunda ordem pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k_0 \nabla \theta^{(0)}) + \frac{4\pi}{3} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda'} \Delta B(\nu, \theta^{(0)}) d\nu &= \Delta f(\theta^{(0)}) = \nabla \cdot (f'(\theta^{(0)}) \nabla \theta^{(0)}) \\ &= f'(\theta^{(0)}) \Delta \theta^{(0)} + f''(\theta^{(0)}) |\nabla \theta^{(0)}|^2 \end{aligned}$$

Tendo em vista o uso do teorema 6.1 de [20, pg. 452, §6, cap. 5] nós definimos θ_Γ in $\bar{D} \times \{t \geq 0\}$ como uma extensão de $\theta_b^{(0)}$ e $\theta_0^{(0)}$, ao introduzir a solução do seguinte problema parabólico auxiliar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \theta_\Gamma + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta_\Gamma &= \nabla \cdot (a_0(x) \nabla \theta_\Gamma), & x \in D, t > 0 \\ \theta_\Gamma &= \theta_b, & x \in \partial D, t > 0 \\ \theta_\Gamma(x, 0) &= \theta_0^{(0)}(x), & x \in \bar{D}, t = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

aqui $a_0(x) := f'(\theta_0^{(0)})$. Nós também reescrevemos (2.4) na forma usada em [20]:

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_t - \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, \theta^{(0)}, \nabla \theta^{(0)}) + a(x, t, \theta^{(0)}, \nabla \theta^{(0)}) \\ &= \theta_t - \sum_{i=1}^3 f'(\theta^{(0)}) \frac{\partial^2 \theta^{(0)}}{\partial^2 x_i} + A(x, t, \theta^{(0)}, \nabla \theta^{(0)}) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} a_i &= f'(\theta^{(0)}) \frac{\partial}{\partial x_i} \theta^{(0)} \\ a &= \mathbf{v} \cdot \nabla \theta^{(0)} \\ A &= \mathbf{v} \cdot \nabla \theta^{(0)} - f''(\theta^{(0)}) |\nabla \theta^{(0)}|^2 \end{aligned}$$

A existência de solução é garantida contanto que $\theta_\Gamma \in C^{2+\beta, 1+\beta/2}(\bar{D} \times \{t \geq 0\})$ e $\partial D \in C^{2+\beta}$, esta última condição tendo sido admitida como hipótese. Podemos também obter maior regularidade da teoria desenvolvida no capítulo IV de [20], se as derivadas $\frac{\partial^k}{\partial t^k} \theta^{(0)}$ em D e $t = 0$ (que podem ser obtidas das condições iniciais) satisfazem as condições de contorno dadas pelo derivada temporal de θ_b .

5.2 Teoria de existência do problema reduzido

Nesta seção, estabelecemos uma teoria de existência e unicidade de soluções para o problema reduzido usando a técnica das super e subsoluções. Então consideramos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t \theta &= \frac{4\pi}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\Phi - B(\nu, \theta)) d\nu, & x \in D, t > 0 \\
\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= g(\theta) - g(\theta_b) = \frac{h}{k_0} (\theta_b - \theta) + \frac{\alpha\pi}{k_0} \int_0^{\nu_0} [B(\nu, \theta_b) - B(\nu, \theta)] d\nu, & x \in \partial D, t > 0 \\
\theta(0) &= \theta_0, & x \in D
\end{aligned} \tag{5.2}$$

junto com:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{\varepsilon^2}{3\kappa'\lambda'} \Delta + 1 \right) \Phi &= B(\nu, \theta), & x \in D \\
b\varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi + \Phi &= B(\nu, \theta_b), & x \in \partial D
\end{aligned} \tag{5.3}$$

sob as seguintes hipóteses:

H1 (a) $\theta_0(x) \in C^\alpha(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$ e θ_0 satisfaz as condições de contorno dadas em (5.2),

(b) $\theta_b(x) \in C^\alpha(\partial D)$. Denotamos $D_{\mathfrak{J}} = D \times [0, \mathfrak{J}]$ e $S_{\mathfrak{J}} = \partial D \times (0, \mathfrak{J}]$

Denotamos também $C^{1,2}(D_{\mathfrak{J}})$ o conjunto das funções com derivadas de primeira ordem em t contínuas e derivadas de segunda ordem contínuas em x com sua norma canônica como espaço de Banach (veja §1.4 de [23] para detalhes).

H2 $\mathbf{v}(x, t) \in C^\alpha(\overline{D_{\mathfrak{J}}})$, $\|\mathbf{v}\|_{C^\alpha} \leq V_0$

Nós denotamos

$$\begin{aligned}
\Lambda_- &= \min \left(\inf_{\overline{D}} \theta_0(x), \inf_{\partial D} \theta_b \right) & \Phi_- &= B(\nu, \Lambda_-) \\
\Lambda_+ &= \max \left(\sup_{\overline{D}} \theta_0(x), \sup_{\partial D} \theta_b \right) & \Phi_+ &= B(\nu, \Lambda_+)
\end{aligned}$$

Nós definimos da mesma forma $S_g^R : C^\alpha(D) \rightarrow C^\alpha(D)$ como o operador que mapeia $B(\nu, \theta_\Phi)$ à solução Φ de (5.3) quando $B(\nu, \theta_b) \equiv 0$ e $S_b^R : C^\alpha(\partial D) :$

$C^\alpha(D)$ o operador que mapeia $B(\nu, \theta_b)$ à solução Φ da mesma equação quando $\theta_\Phi = 0$. Portanto

$$\Phi = S_g^R B(\nu, \theta_a) + S_b^R B(\nu, \theta_b)$$

Empregando esta representação, o problema reduzido pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_t \theta_a = 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' [-B(\nu, \theta_a) + S_g^R B(\nu, \theta) + S_b^R B(\nu, T_b)] d\nu \quad (5.4)$$

sob as condições de contorno dadas por (5.2).

Observação 5.2.1. *Como os coeficientes λ' , σ' e κ' são constantes por parte e assumem um conjunto finito de valores diferentes, o que permite que se aplique a teoria padrão de equações elípticas de segunda ordem e inferir que a hipótese assumida implica que $S_g^R B(\nu, \theta)$ é uma função $C^\alpha(\bar{D})$ para todo θ neste espaço e o mesmo é verdade para $S_b^R B(\nu, \theta_b)$. É fácil ver que ambos operadores preservam positividade.*

Definição 5.2.1 (Supersoluções). *Um par de funções $\bar{\theta} \in C^{1,2}(D_{\mathbf{1}}) \cap C^{0,1}(\bar{D}_{\mathbf{1}})$, $\bar{\Phi} \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ é definido como uma supersolução de (5.2-5.3) no sentido de Pao[23] se satisfaz*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t \bar{\theta}(t) &\geq \frac{4\pi}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' [\bar{\Phi} - B(\nu, \bar{\theta})] d\nu, & x \in D \\ \varepsilon \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \eta} + g(\bar{\theta}) &\geq g(\theta_b), & x \in \partial D \\ \left(-\frac{\varepsilon^2}{3\kappa' \lambda'} \Delta + 1 \right) \bar{\Phi} &\geq B(\nu, \bar{\theta}), & x \in D \\ \varepsilon b \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \eta} + \bar{\Phi} &\geq B(\nu, \theta_b), & x \in \partial D \end{aligned} \quad (5.5)$$

Definimos analogamente uma subsolução $\underline{\theta} \in C^{1,2}(D_{\mathbf{1}}) \cap C^{0,1}(\bar{D}_{\mathbf{1}})$, $\underline{\Phi} \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ quando a desigualdade reversa é satisfeita.

5.2.0.1 Sequências superiores e inferiores

Da propriedade de preservar positividade de S_g^R e da monotonicidade de $B(\nu, \theta)$ on θ , temos que $\theta_1 \leq \theta_2$ implica

$$\int_{\nu_0}^{\infty} S_g^R B(\nu, \theta_1) d\nu \leq \int_{\nu_0}^{\infty} S_g^R B(\nu, \theta_2) d\nu$$

Também temos:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} B(\nu, \theta) = \frac{\nu_{ref}}{I_{ref} T_{ref}} \frac{2h_p^2 \nu^4}{c^2 k_B} \frac{1}{\theta^2} e^{\frac{h_p \nu \nu_{ref}}{k_B \theta T_{ref}}} \left(e^{\frac{h_p \nu \nu_{ref}}{k_B \theta T_{ref}}} - 1 \right)^{-2}$$

Integrando no intervalo (ν_0, ∞) , temos a existência de duas constantes positivas \bar{c} e \underline{c} tais que

$$\bar{c} \leq \frac{4\pi}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' B(\nu, \theta) d\nu \leq \underline{c}, \quad \theta \in [\Lambda_-, \Lambda_+]$$

o que implica

$$-\underline{c}(\theta_2 - \theta_1) \leq -\frac{4\pi}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' [B(\nu, \theta_2) - B(\nu, \theta_1)] d\nu \leq \bar{c}(\theta_2 - \theta_1)$$

contanto que $\Lambda_- \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \Lambda_+$ Aplicando o mesmo tipo de análise feita à condição de contorno:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g(x, \theta) = -\frac{h}{k_0} - \int_0^{\nu_0} \frac{\nu_{ref}}{I_{ref} T_{ref}} \frac{2h^2 \nu^4}{c^2 k_B k_0} \frac{1}{\theta^2} e^{\frac{h \nu \nu_{ref}}{k_B \theta T_{ref}}} \left(e^{\frac{h \nu \nu_{ref}}{k_B \theta T_{ref}}} - 1 \right)^{-2} d\nu$$

vemos que

$$-\underline{b}(\theta_2 - \theta_1) \leq -(g(x, \theta_2) - g(x, \theta_1)) \leq \bar{b}(\theta_2 - \theta_1)$$

com \bar{b} e \underline{b} constantes.

Consideramos agora o seguinte esquema iterativo: $(\bar{\theta}^k, \bar{\Phi}^k)$ com $(\bar{\theta}^0, \bar{\Phi}^0) = (\Lambda_+, \Phi_+)$ onde

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_t + \underline{c}) \bar{\theta}^k &= \underline{c} \bar{\theta}^{k-1} + \frac{4\pi}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' [\bar{\Phi}^{k-1} - B(\nu, \bar{\theta}^{k-1})] d\nu \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{\theta}^k + \underline{b} \bar{\theta}^k &= \underline{b} \bar{\theta}^{k-1} + g(x, \bar{\theta}^{k-1}) \\ \bar{\theta}^k(x, 0) &= \theta_0(x) \\ \bar{\Phi}^k &= S_g^R B(\nu, \bar{\theta}^k) + S_b^R B(\nu, \theta_b). \end{aligned}$$

Da teoria das equações parabólicas lineares (veja pg. 58 de [23]), sabemos que a sequência $\left\{ \left(\overline{\theta^k}, \overline{\Phi^k} \right) \right\}_{k=0}^{\infty}$ está bem definida, assim como $\overline{\theta^k}$ e $\overline{\Phi^k}$ pertence a $C^\alpha(D \times [0, \mathfrak{I}])$. Se trocarmos $\left(\overline{\theta^k}, \overline{\Phi^k} \right)$ com $(\underline{\theta^k}, \underline{\Phi^k})$ onde $(\underline{\theta^0}, \underline{\Phi^0}) = (\Gamma_-, \Phi_-)$ construímos uma nova sequência de funções $\left\{ (\underline{\theta^k}, \underline{\Phi^k}) \right\}_{k=0}^{\infty}$.

Lema 5.2.1. *As sequências $\left\{ \left(\overline{\theta^k}, \overline{\Phi^k} \right) \right\}_{k=0}^{\infty}$ e $\left\{ (\underline{\theta^k}, \underline{\Phi^k}) \right\}_{k=0}^{\infty}$ satisfazem*

$$\Gamma_- \leq \underline{\theta^k} \leq \underline{\theta^{k+1}} \leq \overline{\theta^{k+1}} \leq \overline{\theta^k} \leq \Gamma_+$$

e

$$\Phi_- \leq \underline{\Phi^k} \leq \underline{\Phi^{k+1}} \leq \overline{\Phi^{k+1}} \leq \overline{\Phi^k} \leq \Phi_+$$

Seja $w = \overline{\theta^0} - \overline{\theta^1} = \Gamma_+ - \overline{\theta^1}$, então

$$(\mathcal{L}_t + \underline{c})w = \mathcal{L}_t \Gamma_+ - \mathcal{L}_t \overline{\theta^1} + \underline{c}w = \underline{c}(\overline{\theta^1} - \Lambda_+) + \underline{c}w = 0$$

e também

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} w + bw = -g(x, \Lambda_+) \geq 0$$

Isso implica $w \geq 0$, o que significa $\overline{\theta^1} \leq \Gamma_+$. Um resultado similar mostra que $\Gamma_- \leq \underline{\theta^1}$. Agora seja $w^1 = \overline{\theta^1} - \underline{\theta_1}$, então

$$(\mathcal{L}_t + \underline{c})w^1 = \underline{c}(\Lambda_+ - \Lambda_-) \geq 0$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} w^1 + \underline{b}w^1 = \underline{b}(\Lambda_+ - \Lambda_-) + g(x, \Lambda_+) - g(x, \Lambda_-) \geq 0$$

Assim como antes, estas desigualdades implicam $w^1 \geq 0$ ou, equivalentemente, $\overline{\theta^1} \geq \underline{\theta_1}$. Então provamos que $\underline{\theta^0} \leq \underline{\theta^1} \leq \overline{\theta^1} \leq \overline{\theta^0}$. A propriedade de preservar positividade de S_g^R implica que $\underline{\Phi^0} \leq \underline{\Phi^1} \leq \overline{\Phi^1} \leq \overline{\Phi^0}$. Em um processo indutivo, assumimos que

$$\begin{aligned} \underline{\theta^{k-1}} \leq \underline{\theta^k} &\leq \overline{\theta^k} \leq \overline{\theta^{k-1}} \\ \underline{\Phi^{k-1}} \leq \underline{\Phi^k} &\leq \overline{\Phi^k} \leq \overline{\Phi^{k-1}} \end{aligned}$$

Agora definimos $w^k = \overline{\theta^k} - \overline{\theta^{k+1}}$ e estimamos

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_t + \underline{c})w^k &= \underline{c}(\overline{\theta^{k-1}} - \overline{\theta^k}) + \frac{4\pi}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left[B(\nu, \overline{\theta^{k-1}}) - B(\nu, \overline{\theta^k}) \right] d\nu \\ &\quad + \frac{4\pi}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left[\overline{\Phi^{k-1}} - \overline{\Phi^k} \right] d\nu \geq 0 \end{aligned}$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} w^k + \underline{b} w^k = \underline{b} (\overline{\theta^{k-1}} - \overline{\theta^k}) + g(x, \overline{\theta^{k-1}}) - g(x, \overline{\theta^k}) \geq 0$$

Disso, segue que $\overline{\theta^k} \geq \overline{\theta^{k+1}}$ e um resultado similar mostra que $\underline{\theta^k} \leq \underline{\theta^{k+1}}$. Mais uma vez, a propriedade de preservar positividade de S_g^R produz um resultado similar para Φ .

A existência de uma sequência monótona implica a existência e unicidade de soluções para o sistema (veja [23]).

5.3 Teoria de existência e estimativa de decaimento para o problemas de camada de fronteira

Nesta subseção, consideramos a seguinte equação íntegro-diferencial:

$$\begin{aligned} -f^2(\xi)u''(y, \xi) + u(y, \xi) &= \int_X k(\xi)u(y, \xi)d\xi \\ -a(\xi)u'(0, \xi) + b(\xi)u(0, \xi) &= g_b(\xi) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(y, \xi) &= 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

com $f(\xi) > 0$, $a(\xi)b(\xi) \geq 0$ e $a^2(\xi) + b^2(\xi) > 0$ para cada ponto $\xi \in X$. Seja $u_b(y, \xi)$ definido como a solução de:

$$\begin{aligned} -f^2(\xi)u_b''(y, \xi) + u_b(y, \xi) &= 0 \\ -a(\xi)u_b'(0, \xi) + b(\xi)u_b(0, \xi) &= g_b(\xi) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u_b(y, \xi) &= 0 \end{aligned}$$

dado por $u_b(y, \xi) := g_b(\xi) [a(\xi)/f(\xi) + b(\xi)]^{-1} e^{-y/f(\xi)}$ e $G_b(y) = \int_X k(\xi)u_b(y, \xi)d\xi$.

Também iremos denotar $k_+(\xi)$ e $k_-(\xi)$ as partes positivas e negativas de $k(\xi)$.

Lema 5.3.1. *Se $G_b(y) \in L^2(0, \infty)$ e $\int_X k_+(\xi)d\xi < 1$ então (5.6) tem uma única solução em $L^2(0, \infty)$.*

Seja $K_\xi : L^2 \rightarrow L^2$ o operador que resolve o seguinte problema elíptico:

$$\begin{aligned} -f^2(\xi)u_g''(y, \xi) + u_g(y, \xi) &= Q(y) \\ -a(\xi)u_g'(0, \xi) + b(\xi)u_g(0, \xi) &= 0 \end{aligned}$$

então $u_g(y, \xi) = K_\xi Q(y)$, e este operador possui a seguinte forma quadrática associada:

$$f^2(\xi)\|u_g'(y, \xi)\|_2^2 + f^2(\xi)u_g^*(0, \xi)u_g'(0, \xi) + \|u_g(y, \xi)\|_2^2 = \langle Q(y), u_g(y) \rangle_2$$

aqui $*$ indica o complexo conjugado. Da hipóteses que fizemos sobre $a(\xi)$ e $b(\xi)$, o termo $f^2(\xi)u_g^*(0, \xi)u_g'(0, \xi)$ é real e não-negativo. Portanto, K_ξ é um operador auto-adjunto não-negativo e sua norma não é maior que 1.

Agora definimos $q(y) := \int_X k(\xi)u(y, \xi)d\xi$, então

$$u(y, \xi) = K_\xi q(y) + u_b(y, \xi)$$

e

$$q(y) = \int_X k(\xi)K_\xi q(y)d\xi + G_b(y) \quad (5.7)$$

Isto conduz à representação de $q(y)$ como $q(y) = (1 - \int_X k(\xi)K_\xi d\xi)^{-1} G_b(y)$, contanto que inversa envolvida esteja bem definida. Para mostrar isso, nós definimos os seguintes operadores positivos:

$$K_- = \int_X k_-(\xi)K_\xi d\xi \quad \text{e} \quad K_+ = \int_X k_+(\xi)K_\xi d\xi$$

e note que

$$\begin{aligned} \left(1 - \int_X k(\xi)K_\xi d\xi\right)^{-1} &= (1 + K_- - K_+)^{-1} \\ &= (1 + K_-)^{-1} [1 - (1 + K_-)^{-1} K_+]^{-1} \end{aligned}$$

Uma vez que K_- é um operador não-negativo, $(1 + K_-)^{-1}$ existe e sua norma não supera 1. Também a norma de K_+ pode ser estimada como segue:

$$\|K_-\| \leq \int_\xi k_-(\xi)\|K_\xi\|d\xi \leq \int_\xi k_-(\xi)d\xi < 1$$

então $\|(1 + K_-)^{-1} K_+\| \leq \|K_+\| < 1$, o que é uma condição suficiente para garantir a existência de $[1 - (1 + K_-)^{-1} K_+]^{-1}$.

Lema 5.3.2. *Suponha a condição do lema 5.3.1 junto com $\int_X |k(\xi)| d\xi < \infty$, $|u_b(0, \xi)| \leq u_\infty < \infty$, $f(\xi) \leq f_\infty < \infty$ e $\int_X \frac{|k(\xi)|}{f^{1/2}(\xi)} d\xi < \infty$, então para cada $\alpha' < \frac{\sqrt{1 - (\int_X k_+(\xi) dx)^2}}{f_\infty}$, existe uma constante D tal que:*

$$|J(y, \xi)| \leq D e^{-\alpha' y}$$

Consideramos agora a seguinte identidade para a solução de (5.6) com $q(y)$ definido por (5.7):

$$\begin{aligned} \int_L^\infty f^2(\xi) |u'(y, \xi)|^2 dy + \int_L^\infty |u(y, \xi)|^2 dy \\ = \int_L^\infty q(y) u(y) dy - f^2(\xi) u(L, \xi) u'(L, \xi) \end{aligned}$$

Multiplicamos esta expressão por $|k(\xi)| = k_+(\xi) + k_-(\xi)$ e aplicamos o teorema de Fubini para obter:

$$\begin{aligned} \int_L^\infty \int_X |k(\xi)| f^2(\xi) |u'(y, \xi)|^2 d\xi dy + \int_L^\infty \int_X |k(\xi)| |u(y, \xi)|^2 dy d\xi \\ = \int_L^\infty \int_X |k(\xi)| q(y) u(y, \xi) d\xi dy - \int_X |k(\xi)| f^2(\xi) u(L, \xi) u'(L, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (5.8)$$

O teorema de Fubini pode ser aplicado em vista da seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \int_L^\infty \int_X |k(\xi)| |q(y)| |u(y)| d\xi dy &\leq \int_L^\infty \int_X |k(\xi)| |q(y)| |K_\xi q(y) + u_b(y, \xi)| d\xi dy \\ &\leq \int_L^\infty \int_X |k(\xi)| |q(y)|^2 d\xi dy + \int_L^\infty |q(y)| \int_X |k(\xi)| |u_b(y, \xi)| d\xi dy \\ &\leq \int_X |k(\xi)| d\xi \|q\|_2^2 + \int_L^\infty |q(y)| \int_X |k(\xi)| |u_b(y, \xi)| d\xi dy \\ &\leq \int_X |k(\xi)| d\xi \|q\|_2^2 + \int_L^\infty |q(y)| \int_X |k(\xi)| |u_b(0, \xi)| e^{-y/f_\infty} d\xi dy < \infty \end{aligned}$$

e então podemos refinar a estimativa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_L^\infty \int_X |k(\xi)| q(y) u(y, \xi) d\xi dy &= \int_L^\infty q(y) \int_X |k(\xi)| u(y, \xi) d\xi dy \\ &= \int_L^\infty \left(\int_X (k_+(\xi) - k_-(\xi)) u(y, \xi) d\xi \right) \int_X (k_+(\xi) + k_-(\xi)) u(y, \xi) d\xi dy \\ &\leq \int_L^\infty \left(\int_X (k_+(\xi) u(y, \xi))^2 d\xi dy \right) \leq \gamma' \int_L^\infty \left(\int_X (k_+(\xi) |u(y, \xi)|^2) d\xi dy \right) \end{aligned}$$

onde escolhemos uma constante positiva $\gamma' := 1 - \alpha'^2 f_\infty^2$. É fácil ver que

$$\int_X k_+(\xi) d\xi < \gamma' < 1.$$

Então (5.8) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_L^\infty \int_X |k(\xi)| f^2(\xi) |u'(y, \xi)|^2 d\xi dy + (1 - \gamma') \int_L^\infty \int_X |k(\xi)| |u(y, \xi)|^2 dy d\xi & \quad (5.9) \\ & \leq \int_X |k(\xi)| f^2(\xi) |u(L, \xi)| |u'(L, \xi)| d\xi \\ & \leq \frac{1}{2\sqrt{1 - \gamma'}} f_\infty \int_X |k(\xi)| f^2(\xi) |u'(L, \xi)|^2 d\xi \\ & + \frac{\sqrt{1 - \gamma'}}{2} f_\infty \int_X |k(\xi)| |u(L, \xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Introduzimos $\psi(L)$ como

$$\begin{aligned} \psi(L) & = \int_L^\infty \int_X |k(\xi)| f^2(\xi) |u'(y, \xi)|^2 d\xi dy + (1 - \gamma') \int_L^\infty \int_X |k(\xi)| |u(y, \xi)|^2 dy d\xi \\ \psi'(L) & = - \int_X |k(\xi)| f^2(\xi) |u'(L, \xi)|^2 d\xi - (1 - \gamma') \int_X |k(\xi)| |u(L, \xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Então $\psi(L)$ é uma função positiva tal que

$$\psi(L) + \frac{f_\infty}{2\sqrt{1 - \gamma'}} \psi'(L) \leq 0$$

Uma vez que esta desigualdade é válida para todo $L \geq 0$, temos

$$\psi(L) \leq \psi(0) e^{-\frac{2\sqrt{1 - \gamma'}}{f_\infty} L} \leq \psi(0) e^{-2\alpha' L}$$

Para continuar nossa análise, vamos olhar para a representação integral de $u(y, \xi)$ dada por:

$$\begin{aligned} u(y, \xi) & = \left(\frac{a(\xi)}{f(\xi)} + b(\xi) \right)^{-1} g_b(\xi) e^{-y/f(\xi)} \\ & + \frac{a(\xi) - b(\xi)f(\xi)}{a(\xi) + b(\xi)f(\xi)} \frac{1}{2f(\xi)} \int_0^\infty q(s) e^{-(y+s)/f(\xi)} ds \\ & + \frac{1}{2f(\xi)} \int_0^\infty q(s) e^{-|y-s|/f(\xi)} ds \end{aligned}$$

Esta representação nos permite estimar:

$$\begin{aligned} |u(0, \xi)| &\leq |u_b(0, \xi)| + \frac{1}{f(\xi)} \int_0^\infty |q(s)| e^{-s/f(\xi)} ds \\ &\leq |u_b(0, \xi)| + \frac{\|q\|_2}{f(\xi)} \left(\int_0^\infty e^{-2s/f(\xi)} ds \right)^{1/2} = |u_b(0, \xi)| + \frac{\|q\|_2}{2^{1/2} f(\xi)^{1/2}} \end{aligned}$$

e similarmente, temos:

$$|u'(0, \xi)| \leq \frac{1}{f(\xi)} |u_b(0, \xi)| + \frac{\|q\|_2}{2^{1/2} f(\xi)^{3/2}}.$$

De (5.9), temos:

$$\begin{aligned} \psi(0) &\leq \int_X |k(\xi)| f^2(\xi) |u(L, \xi)| |u'(L, \xi)| d\xi \\ &\leq \int_X |k(\xi)| \left[f(\xi) |u_b(0, \xi)|^2 + f(\xi)^{1/2} 2^{1/2} |u_b(0, \xi)| \|q\|_2 + \frac{\|q\|_2^2}{2} \right] d\xi \\ &\leq f_\infty \int_X |k(\xi)| |u_b(0, \xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \|q\|_2 f(\xi)^{1/2} 2^{1/2} \left(\int_X |k(\xi)| |u_b(0, \xi)| d\xi \right)^{1/2} \left(\int_X |k(\xi)| d\xi \right)^{1/2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|q\|_2^2 \int_X |k(\xi)| d\xi < \infty \end{aligned}$$

Agora da definição de $q(y)$, temos:

$$\begin{aligned} |q(y)|^2 &= \left(\int_X k(\xi) u(y, \xi) d\xi \right)^2 \leq \left(\int_X |k(\xi)| d\xi \right) \left(\int_X |k(\xi)| |u(y, \xi)|^2 d\xi \right) \\ &\leq - \left(\int_X |k(\xi)| d\xi \right) \frac{\psi'(y)}{1 - \gamma'}. \end{aligned}$$

Agora escolhemos $2\sqrt{1-\gamma'} < p_1 = 2 - p_2 < 2$, de forma que podemos calcular:

$$\begin{aligned}
|u(y, \xi)| &\leq |u_b(y, \xi)| + \frac{1}{f(\xi)} \left| \int_0^\infty q(s) e^{-|y-s|/f(\xi)} ds \right| \\
&\leq |u_b(y, \xi)| \\
&\quad + \frac{1}{f(\xi)} \left(\int_0^\infty |q(s)|^2 e^{-p_1|y-s|/f(\xi)} ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty e^{-p_2|y-s|/f(\xi)} ds \right)^{1/2} \\
&\leq |u_b(y, \xi)| + \frac{2^{1/2} \left(\int_X |k(\xi)| d\xi \right)^{1/2}}{(1-\gamma')^{1/2} p_2^{1/2} f(\xi)^{1/2}} \left(- \int_0^\infty \psi'(s) e^{-p_1|y-s|/f(\xi)} ds \right)^{1/2} \\
&\leq |u_b(y, \xi)| \\
&\quad + \frac{2^{1/2} \left(\int_X |k(\xi)| d\xi \right)^{1/2}}{(1-\gamma')^{1/2} p_2^{1/2} f(\xi)^{1/2}} \left(\frac{p_1}{f} \int_0^\infty \psi(s) e^{-p_1|y-s|/f(\xi)} ds + \psi(0) e^{p_1 y/f(\xi)} \right)^{1/2} \\
&\leq |u_b(y, \xi)|
\end{aligned}$$

Agora usamos o fato que $\psi(s) \leq \psi(0) e^{-2\alpha' s}$ para escrever

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \psi(s) e^{-p_1|y-s|/f(\xi)} ds &\leq \psi(0) \int_0^\infty e^{-2\alpha' s} e^{-p_1|y-s|/f(\xi)} ds \\
&= \frac{e^{-2\alpha' y} - e^{-p_1 y/f(\xi)}}{p_1/f(\xi) - 2\alpha'} + \frac{e^{-2\alpha' y}}{2\alpha' + p_1/f(\xi)} \\
&\leq \frac{2p_1 f(\xi)}{(p_1 - 2\alpha' f(\xi))^2} e^{-2\alpha' y}.
\end{aligned}$$

Isso implica a existência de uma constante C tal que:

$$|u(y, \xi)| \leq C \frac{e^{-\alpha' y}}{f(\xi)^{1/2}}$$

Uma vez que supomos $\int_X \frac{|k(\xi)|}{f(\xi)^{1/2}} d\xi < \infty$, temos que

$$|q(y)| \leq \int_X |k(\xi)| |u(y, \xi)| d\xi \leq C \int_X \frac{|k(\xi)|}{f(\xi)^{1/2}} d\xi e^{-\alpha' y}.$$

e finalmente

$$\begin{aligned}
|u(y, \xi)| &\leq |u_b(y, \xi)| + \frac{1}{f(\xi)} \int_0^\infty |q(s)| e^{-|y-s|/f(\xi)} ds \\
&\leq |u_b(y, \xi)| + \frac{1}{f(\xi)} C \int_X \frac{|k(\xi)|}{f(\xi)^{1/2}} d\xi \left(\int_0^\infty e^{-\alpha' s} e^{-|y-s|/f(\xi)} ds \right) \\
&\leq |u_b(y, \xi)| + \frac{2p_1}{(p_1 - \alpha' f(\xi))^2} C \int_X \frac{|k(\xi)|}{f(\xi)^{1/2}} d\xi e^{-\alpha' y}
\end{aligned}$$

5.4 Estimativas da aproximação para o problema de Rosseland

5.4.1 Estimativa de ordem zero para o problema reduzido

Para estabelecer uma estimativa de erro para o problema de Rosseland, supomos que a condição inicial satisfaz $\theta_0(x, \varepsilon) = \theta_0(x, \varepsilon) + \varepsilon\theta_0^{(1)}$ e nós definimos as funções de erro $w_\theta = \theta - \theta^{(0)}$ e $w_\Phi = \Phi - \Phi^{(0)} + \frac{\varepsilon^2}{3\kappa'\lambda'}\Delta\Phi^{(0)}$ com $\beta(w_\theta) = B(\nu, \theta^{(0)} + w_\theta) - B(\nu, \theta^{(0)})$. Assim, nós temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t w_\theta &= \frac{4\pi}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left[w_\Phi - \beta(w_\theta) + \frac{\varepsilon^4}{9\kappa'^2\lambda'^2} \Delta^2 \Phi^{(0)} \right] d\nu, & x \in D, t > 0 \\ \varepsilon k_0 \frac{\partial}{\partial \eta} w_\theta + h w_\theta + \alpha \pi \int_0^{\nu_0} \beta(w_\theta) d\nu &= -\varepsilon k_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \theta^{(0)}, & x \in \partial D, t > 0 \\ w_\theta(x, 0) &= \theta_0(x, \varepsilon) - \theta_0(x, 0) = \varepsilon \theta_0^{(1)}, & x \in D, t = 0 \\ \left(-\frac{\varepsilon^2}{3\kappa'\lambda'} \Delta + 1 \right) w_\Phi &= \beta(w_\theta) - \frac{\varepsilon^4}{9\kappa'^2\lambda'^2} \Delta^2 \Phi^{(0)}, & x \in D, t > 0 \\ \varepsilon b \frac{\partial}{\partial \eta} w_\Phi + w_\Phi &= -\varepsilon b \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi^{(0)} + \frac{\varepsilon^2}{\kappa'\lambda'} \Delta B(\nu, \theta^{(0)}), & x \in \partial D, t > 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Agora aplicando uma estimativa totalmente análoga à da subseção 2.4.2, temos que a solução deste sistema admite uma cota de primeira ordem em ε e, conseqüentemente, (2.3) segue.

5.4.1.1 Aproximação de ordem zero para o problema original

Desejamos provas que a solução do problema de Rosseland é uma aproximação de ordem zero para o problema original, então seja $T^{(0)} = \theta^{(0)}$ a solução de

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t T^{(0)} &= \frac{4\pi}{3\lambda'} \int_{\nu_0}^{\infty} \Delta B(\nu, T^{(0)}) d\nu, & x \in D, t > 0 \\ T^{(0)} &= T_b, & x \in \partial D, t > 0 \\ T^{(0)}(x, 0) &= T_0^{(0)}(x), & x \in \bar{D}, t = 0 \end{aligned}$$

e $I^{(0)}$ é dado por

$$I^{(0)} := B(\nu, T^{(0)})$$

Agora defina

$$\begin{aligned}
w_T &:= T - T^{(0)} \\
w_I &:= I - \left(I^{(0)} - \frac{\varepsilon}{\lambda'} \Omega \cdot \nabla I^{(0)} + \frac{\varepsilon^2 \sigma'}{3\lambda'^2 \kappa'} \Delta I^{(0)} + \frac{\varepsilon^2}{\lambda'^2} (\Omega \cdot \nabla)^2 I^{(0)} \right) \\
\widehat{w}_I &:= \int_{S^2} w_I d\Omega = \widehat{I} - 4\pi \left(I^{(0)} + \frac{\varepsilon^2}{3\lambda' \kappa'} \Delta I^{(0)} \right) \\
\int_{S^2} \Omega \cdot \nabla w_I d\Omega &= \int_{S^2} \Omega \cdot \nabla I d\Omega + \varepsilon \frac{4\pi}{3\lambda'} \Delta I^{(0)}
\end{aligned}$$

Nós notamos as seguintes identidades:

$$\frac{\kappa'}{\varepsilon^2} \left(\widehat{I} - 4\pi B(\nu, \theta) \right) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{S^2} \Omega \cdot \nabla I d\Omega$$

e

$$-\frac{1}{\varepsilon} \int_{S^2} \Omega \cdot \nabla w_I d\Omega = \frac{\kappa'}{\varepsilon^2} \widehat{w}_I - 4\pi \frac{\kappa'}{\varepsilon^2} (B(\nu, T) - I_0)$$

Em visto do que, as funções de erro w_T e w_I devem satisfazer o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t w_T &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \Omega \cdot \nabla w_I d\Omega d\nu, & x \in D, t > 0 \\
w_T(x, 0) &= \varepsilon T_0^{(1)}, & x \in \overline{D}, t = 0 \\
\varepsilon \frac{\partial w_T}{\partial \eta} + h w_T &= \alpha \pi \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, T_b + w_T)] d\nu \\
&\quad - \varepsilon \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \eta}, & x \in \partial D, t > 0 \\
\varepsilon \Omega \cdot \nabla w_I + \lambda' w_I - \frac{\sigma'}{4\pi} \overline{w}_I &= \kappa' (B(\nu, \theta^{(0)} + w_T) - B(\nu, \theta^{(0)})) \\
&\quad - \varepsilon^3 \Omega \cdot \nabla \left(\frac{\sigma'}{3\lambda'^2 \kappa'} \Delta I_0 + \frac{1}{\lambda'^2} (\Omega \cdot \nabla)^2 I_0 \right), & x \in D, t > 0 \\
w_I(\Omega) - \rho w_I(\Omega') &= \varepsilon h_1, & x \in \partial D, t > 0
\end{aligned}$$

Note que o termo de fronteira h_1 é definido por:

$$h_1 = -\frac{1}{\lambda'} (\Omega - \rho \Omega') \cdot \nabla I^{(0)} + \frac{\varepsilon \sigma'}{3\lambda'^2 \kappa'} (1 - \rho) \Delta I^{(0)} + \frac{\varepsilon}{\lambda'^2} [(\Omega \cdot \nabla)^2 - \rho (\Omega' \cdot \nabla)^2] I^{(0)}$$

Mais um vez, encontramos uma estimativa aplicando uma estimativa semelhante à da subseção 2.4.2 e usando a análise de [29]. Observamos que para tal é necessário estimar o termo $\inf_{\mu} \frac{1}{1-\rho(\mu)}$, enfatizamos, então, o papel da restrição $\rho \leq \rho_0 < 1$ para obter a estimativa.

5.5 Resultados envolvendo princípio de máximo

Nesta seção, demonstramos alguns lemas necessários à demonstração na monotonicidade dos operadores N e N_r .

Lema 5.5.1. *Seja $u_\epsilon(x, t)$ uma solução clássica de*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t u_\epsilon &= (P - 1) f_0(u_\epsilon) - \epsilon, \quad x \in D, t > 0 \\ u_\epsilon &= u_0, \quad t = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} u_\epsilon + g_0(x, t, u_\epsilon) &= h(x, t)\end{aligned}$$

onde $\epsilon > 0$, $P : C^0(D) \rightarrow C^0(D)$ é um operador que preserva positividade, tem norma $\|P\| \leq 1$ e possui regularidade superior, ou seja:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n$$

e $u_n \rightarrow 0$, então $Pu_n \rightarrow 0$, $f_0(u)$ diferenciável, crescente com derivada localmente limitada e $g_0(x, t, u)$ é uma função crescente em u para todo x e t . Então u_ϵ assume valores máximos na fronteira parabólica $(x, t) \in \overline{D} \times \{t = 0\} \cup (\partial D \times [0, \infty))$.

Demonstração. A existência de uma solução para este problema é garantida pelo método das supersoluções (veja [23]).

Agora suponha, por absurdo, que $u_\epsilon(x_0, t_0) \geq u_\epsilon(x, t)$, $\forall x \in D, t \geq 0$ e $x_0 \in D, t_0 > 0$, temos então que:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon(x_0, t_0) = 0, \quad \nabla u_\epsilon(x_0, t_0) = 0, \quad \Delta u_\epsilon(x_0, t_0) \leq 0.$$

Então temos $\mathcal{L}_t u_\epsilon \geq 0$. Agora notamos que

$$\begin{aligned}Pf(u_\epsilon) &= P(f^+ - f^-) = Pf^+ - Pf^- \leq Pf^+ \leq \|f^+\| \\ &= \sup f_0(u_\epsilon(x, t)) = f_0(\sup u_\epsilon(x, t)) = f_0(u_\epsilon(x_0, t_0)).\end{aligned}$$

onde $f^+ = \max(0, f_0(u_\epsilon))$ e $f^- = \max(0, -f_0(u_\epsilon))$

No ponto (x_0, t_0) , temos $\mathcal{L}_t u_\epsilon \geq 0$ e $(P - 1) f_0(u_\epsilon) \leq 0$, uma contradição se $\epsilon > 0$. □

Lema 5.5.2. *Supomos que o operador P seja limitado em $L^2(D)$ e seja $u_0(x, t)$ uma solução clássica de*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t u_0 &= (P - 1) f_0(u_0), \quad x \in D, t > 0 \\ u &= u_0, \quad t = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} u_0 + g_0(x, t, u_0) &= h(x, t), \quad t = 0\end{aligned}$$

sob as mesmas condições do lema anterior. Então $u_\epsilon \rightarrow u_0$ uniformemente para cada $t \in [0, t_1]$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. Definimos $w := u_\epsilon - u_0$, de forma que satisfaz:

$$\mathcal{L}_t w = (P - 1) (f_0(u_0 + w) - f_0(u_0)) - \epsilon, \quad x \in D, t > 0 \quad (5.11)$$

$$w = 0, \quad t = 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} w + (g_0(x, t, u_0 + w) - g_0(x, t, u_0)) = 0, \quad t = 0 \quad (5.13)$$

Observamos que este problema admite como supersolução a função nula $\bar{w} = 0$ e como subsolução a função $\underline{w} = -\epsilon t$. Portanto basta mostrar que (5.11) tem solução única para demonstrar que a solução w está no intervalo $-\epsilon t \leq w \leq 0$.

Seja, então, w_1 e w_2 duas soluções de (5.11) e defina $v = w_2 - w_1$, então v satisfaz:

$$\mathcal{L}_t v = (P - 1) (f_0(u_0 + w_2) - f_0(u_0 + w_1)), \quad x \in D, t > 0 \quad (5.14)$$

$$v = 0, \quad t = 0 \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} v + (g_0(x, t, u_0 + w_2) - g_0(x, t, u_0 + w_1)) = 0, \quad t = 0 \quad (5.16)$$

Vamos mostrar que para todo $t_* > 0$, $\|v\|_{L^2(D)} = 0, 0 < t < t_*$.

Tomando o produto interno em $L^2(D)$ entre $\mathcal{L}_t v$ e v , temos:

$$\int_D \mathcal{L}_t v v dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_D \mathbf{u} \cdot \nabla (v^2) dx + k_0 \|\nabla v\|_2^2$$

Notamos que $\int_D \mathbf{u} \cdot \nabla(v^2) dx = \int_{\partial D} v^2(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}) dS(x) = 0$. Já o lado direito da expressão pode ser estimado como:

$$\begin{aligned} & \langle (P - 1)(f_0(u_0 + w_2) - f_0(u_0 + w_1)), v \rangle \\ & \leq \|P - 1\|_2 \|f_0(u_0 + w_2) - f_0(u_0 + w_1)\| \|v\| \\ & \leq C \|P - 1\|_2 \|w_2 - w_1\| \|v\| = C \|P - 1\|_2 \|v\|^2 \end{aligned}$$

Disto, temos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_2^2 \leq C \|P - 1\|_2 \|v\|_2^2$$

Como $\|v(0)\|_2 = 0$, temos do lema de Gronwall que $\|v\|_2 = 0$.

Lema 5.5.3. *Seja P um operador limitado em $L^2(D)$ e satisfazendo as propriedades exigidas no lema 5.5.1 e seja u_0 solução clássica de*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t u_0 &= (P - 1) f_0(u_0), \quad x \in D, t > 0 \\ u &= u_0, \quad t = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} u_0 + g_0(x, t, u_0) &= h(x, t), \quad t = 0 \end{aligned}$$

Então u_0 assume valores mínimos e máximos na fronteira parabólica $(x, t) \in \overline{D} \times \{t = 0\} \cup (\partial D \times [0, \infty))$.

Esse resultado é consequência imediata dos lemas 5.5.1 e 5.5.2.

□

5.6 Conclusões e trabalho futuro

Neste trabalho, estudamos a aproximação SP_1 para o problema de transporte radiativo e estabelecemos um resultado de aproximação com erro de segunda ordem. Tal resultado depende da existência do parâmetro positivo b , que advém da solução de uma complicada equação algébrico-operacional. Resultados de simulação sugerem que o parâmetro b existe para altos valores de temperatura.

Ao longo do trabalho, desenvolvemos a teoria de existência de soluções para o problema reduzido, bem como provamos lemas de existência e decaimento para as equações íntegro-diferenciais oriundas da expansão nas camadas de fronteira.

Como trabalho futuro, observamos a necessidade de avançar a teoria de existência da constante $b > 0$, encontrando uma faixa de valores para a qual se pode garantir sua existência. Também vemos a necessidade de completar a teoria de existência para o problema original, evitando as considerações não físicas como ρ pequeno e pequena constante de criticalidade. Não só, faz-se necessário realizar simulações numéricas mais amplas para o valor de b , com controle sobre o erro de simulação e em situações mais gerais que a hipótese cinza.

Em maior perspectiva, deve-se notar a necessidade de desenvolver uma teoria de existência para estes problemas acoplados com o movimento do fluido. O acoplamento entre as equações de transporte com a velocidade do fluido foi estudado, por exemplo, em [24], onde uma aproximação assintótica para pequenas velocidades (baixo número de Mach) em um meio opticamente espesso é considerada (SP_n é usado desde o início) e são propostos modelos simplificados. Na mesma linha, [25] estende esta análise para o caso de fluido reativos enquanto [7] estuda o acoplamento com os efeitos da convecção e radiação sob a influência de transporte radiativo.

O problema da existência de soluções para o movimento de fluidos viscosos, compressíveis e radiativos tem sido analisado no contexto da astrofísica, onde a principal preocupação repousa sobre o fluxo em estrelas gasosas (veja [26, 5]). Nestes trabalhos, o efeito da radiação não é representado por um equação adicional para o transporte radiativo, mas pela introdução de um termo de pressão radiativa dependendo diretamente da temperatura local. Em ambos os casos, apenas soluções fracas são construídas. Uma extensão destes resultados é dada em [6], onde considera-se a evolução do campo magnético incluindo a condução de calor em problemas de magnetoidrodinâmica em estrelas gasosas. Soluções clássicas, no entanto, não são dadas nestes artigos. Em contraste, para uma geometria unidimensional, [30] estabelece a existências de soluções clássicas globais para um fluido radiativo.

Bibliografia

- [1] R. T. Ackroyd and C. R. E. de Oliveira and A. Zolfaghari and A. J. H. Goddard , On a rigorous resolution of the transport equation into a system of diffusion-like equations *Progress in Nuclear Energy*, **35** (1999) 1-64.
- [2] C. Bardos and R. Santos and R. Sentis, Diffusion, Approximation and Computation of the Critical Size. *Transactions of the American Mathematical Society*, **284** (1984) 617-649.
- [3] Busoni, G. and Frosali, G. and Bellini-Morante, A. Nonlinear problem of evolution arising from radiative transfer theory, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **3** (1979) 755-772
- [4] R. Dautray and J. Lions *Mathematical Analysis and Numerical Methods: Evolution Problems II Vol. 6*, (Springer-Verlag, 2000)
- [5] B. Ducomet and E. Feireisl, On the dynamics of gaseous stars, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **174** (2004) 221-266
- [6] B. Ducomet and E. Feireisl, The equations of magnetohydrodynamics: On the interaction between matter and radiation in the evolution of gaseous stars, *Communications in Mathematical Physics* **266** (2006) 595-629
- [7] B. Dubroca and M. Seaïd and I. Teleaga, A consistent approach for the coupling of radiation and hydrodynamics at low low Mach number, *Journal of Computational Physics* **225** (2007) 1039-1065
- [8] E. Sauter, *Tese de doutorado em preparação*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Departamento de Matemática Aplicada
- [9] F. S. Azevedo, M. Thompson, E. Sauter, M. T. Vilhena, Existence theory for a one-dimensional problem arising from the boundary layer analysis of radiative flows, *proceedings of the International Nuclear Atlantic Conference, Rio de Janeiro, september 2009*

- [10] M. Frank, M. Seaid, A. Klar, R. Rinnam, G. Thömmes, A comparison of approximate models for radiation in gas turbines, *Progress in Computational Fluid Dynamics* **4** (2004) 191-197
- [11] M. Frank and A. Klar and E. W. Larsen and S. Yasuda, Time-dependent simplified P_n approximation to the equations of radiative transfer, *Journal of Computational Physics* **226** (2007) 2289-2305
- [12] E. M. Gelbart and J. Davis and J. Pearson (1958), Iterative solutions to the P_1 and double P_l equations., *Nuclear Science Engineering* **5** 36-44
- [13] E. M. Gelbart , Applications of spherical harmonics methods to reactor problems., *WAPD-BT-20* (1960)
- [14] C. Kelley, Existence and Uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations, *Transport Theory and Statistical Physics* **25** (1996) 249-260
- [15] Il'in, A. M. (1991), *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problem*, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- [16] A. Klar and N. Siedow, *Boundary layers and domain decomposition for radiative heat transfer and diffusion equations: applications to glass manufacturing process*, European Journal of Applied Mathematics, 1998, 351-372, 9
- [17] A. D. Klose and E. W. Larsen, *Light transport in biological tissue based on the simplified spherical harmonics equations*, Journal of Computational Physics, 2006, 441-470, 220
- [18] E. W. Larsen, G. Thömmes, A. Klar, Seaid and M.; Götz T., *Simplified p_n approximation to the equations of radiative heat transfer on glass*, *J. Comp. Phys.* **183** (1991) 652-675

- [19] E. W. Larsen, G. C. Pomraning and V. C. Badham, Asymptotic Analysis of radiative transfer problems, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **29** (1983) 285-310
- [20] Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (American Mathematical Society, 1991)
- [21] S. A. Lomov, *Introduction to the General Theory of Singular Perturbations*, (American Mathematical Society, 1991)
- [22] M. Modest, *Radiative Heat Transfer*, (McGraw-Hill, 1993)
- [23] C. V. Pao *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*, (Plenum Press, 1992)
- [24] I. Teleaga, M. Seaïd, I. Gasser and A. Klar and T. Götz T., Radiation models for thermal flows at low Mach number, *Journal of Computational Physics*, **215** (2006) 506-525
- [25] I. Teleaga and M. Seaïd, Simplified radiative models for low Mach number reactive flows, *Applied Mathematical Modelling*, **32** (2008) 971-991
- [26] P. Secchi, On the motion of gaseous stars in the presence of radiation, *Communications in partial differential equations*, **15(2)** (1990) 185-204
- [27] Temam, R.; *Infinite Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics*, (Springer-Verlag, 1991)
- [28] M. Thompson, C. Segatto and M. T. Vilhena, Existence Theory for the Solution of a Stationary Nonlinear Conductive-Radiative Heat Transfer Problem in Three Dimensions *Transport Theory and Statistical Physics* **33** (2004) 563-576.
- [29] Thompson, M.; Vilhena, M.T. and Bodman B. Existence Theory for Radiative Flows *Transport Theory and Statistical Physics* **37** (2008) 307-326
- [30] J. Zhang and F. Xiem Global solution for one-dimensional model problem in thermally radiative magnetohydrodynamics, **245 (7)**, 1853-1882, 2008